QUELQUES APPORTS DE LA THEORIE DES SITUATIONS A LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE ET SUPERIEUR

Isabelle Bloch

Isabelle BLOCH
Maître de Conférences – IUFM d'Aquitaine

QUELQUES APPORTS DE LA THEORIE DES SITUATIONS A LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE ET SUPERIEUR

Contribution à l'étude et à l'évolution de quelques concepts issus de la théorie des situations didactiques en didactique des mathématiques

Note de synthèse pour une
Habilitation à Diriger des Recherches

Soutenue le 23 novembre 2005
Devant le jury :

Michèle ARTIGUE	Professeur, Université Paris 7, directrice de recherche
Guy BROUSSEAU	Professeur émérite
Claire MARGOLINAS	Maître de Conférences, HDR, INRP
Marc ROGALSKI	Professeur, Université Lille 1, rapporteur
André ROUCHIER	Professeur, IUFM d'Aquitaine
Carl WINSLOW	Professeur, Université de Copenhague, rapporteur

REMERCIEMENTS

"There are two things to aim at in life:
first to get what you want; and after that to enjoy it.
Only the wisest of mankind achieve the second".
'Afterthoughts', Logan Pearsal Smith

Je remercie Michèle Artigue pour avoir assumé la direction de cette ultime étape de mon accès à la recherche, avec l'optimisme et néanmoins la rigueur qui la caractérisent ; et avoir été l'un des rapporteurs de cette habilitation.

Je remercie tout particulièrement les deux autres rapporteurs, Carl Winslow et Marc Rogalski ; ce dernier aussi pour les remarques très incisives sur mon texte, qui m'ont fait progresser sur certains points et m'ont donné des idées pour des directions ultérieures de recherche.

Je suis très reconnaissante à Jean-Luc Dorier, qui a, le premier, lu mon projet de note de synthèse, m'a encouragée à poursuivre et m'a donné de précieux conseils pour préciser la finalité générale et la rédaction du document.

Je remercie André Rouchier de son soutien sans faille et de son amitié.

Merci à Guy Brousseau et Claire Margolinas d'avoir accepté de faire partie du jury ; ils avaient tous deux accompagné mes premiers pas dans la recherche, ils voient ainsi les fruits de leur action.

Je remercie tous les amis – ils sont nombreux, je ne peux les citer tous, mais ils se reconnaîtront j'espère ! – qui m'ont encouragée, qui ont apprécié mon travail, et avec qui les échanges ont été riches et pleins de chaleur.

Je suis redevable aux professeurs qui m'ont ouvert leurs classes, tout particulièrement en SEGPA, où il n'est pas toujours facile de travailler sous un regard extérieur.

Je remercie enfin ma famille de son soutien.

Résumé

Le travail de recherche que nous avons entrepris se décline dans deux directions qui peuvent sembler assez peu voisines : l'enseignement des premiers concepts de l'analyse, de la fin du secondaire au début du supérieur, et l'enseignement spécialisé, particulièrement l'enseignement dans les sections SEGPA (Sections d'enseignement général et professionnel adapté) de collège. Le point de rencontre de ces deux thèmes est la réflexion sur la Théorie des Situations Didactiques (TSD), couplée au souci d'éprouver les outils de la TSD et de faire évoluer la théorie tout en la confrontant à la contingence ; et ceci même dans un double domaine – l'enseignement secondaire, l'enseignement spécialisé – qui n'est pas celui de son origine. Notre ambition a été d'apporter quelques éléments pertinents au développement de méthodologie du travail en didactique, par un retour théorique sur certains des concepts existants, et par l'apport d'outils issus d'autres problématiques comme la sémiotique.

Notre présente recherche se poursuit en tentant de caractériser la façon dont les signes symboliques sont utilisés dans l'enseignement, et perçus par les élèves, dans le cadre de leurs connaissances disponibles. Par rapport aux théories classiques des signes, la sémiotique générale proposée par Peirce est particulièrement intéressante car elle s'emploie à explorer la fonction et l'usage des signes, y compris les signes non langagiers tels que les symboles mathématiques, dans le processus du déroulement d'une situation. Nous utilisons l'analyse des signes pour penser la construction de situations nouvelles et pour comprendre l'usage par le professeur de symboles mathématiques et leur interprétation par les élèves. Une série de questions de recherche émerge donc de cette analyse, relativement au rôle des supports sémiotiques dans la construction et le fonctionnement des situations. Ces questions sont actuellement l'un des axes de notre recherche sur les mathématiques du premier cycle universitaire comme sur celles de SEGPA, par exemple au sujet du rôle du registre formel ou des distorsions d'interprétation.

Mots-clés : Théorie des Situations Didactiques, transition enseignement secondaire / enseignement supérieur, enseignement spécialisé, analyse sémiotique des situations.

Abstract

Our investigations have been developed in two directions that could seem quite opposite: first, the teaching of calculus at the transition between Upper Secondary School and University, and second, the teaching of mathematics for children with special needs, more precisely 14-15 years-old students in secondary school. The link between these two research fields is the study of the Theory of Didactical Situations (TDS); we tried to apply the TDS in these contexts which are not the original ones (originally TDS was developped for primary school) and to make theoretical concepts – as the milieu – evolve when necessary. We want to provide some relevant contribution to the TDS methodology of research in didactics, as well as to cross with other theories. This last interest leads us to use semiotic theories to analyse the mathematical signs in the situations.

We try to perform now a deeper analysis of the way signs are used by the students within the situations, and the way students succeed in linking their previous knowledge, or the knowledge they build, with the symbols they operate with in the situation. Amongst semiotic theories, Peirce's one is especially relevant for mathematics as it explores the functionality of *any* signs and not only of the linguistic ones. We use this semiotic analysis to build situations as well as to understand the use of mathematical symbols by the teacher and their interpretation from the students. Some research questions about the role of signs emerge from this study, in the context of the teaching of calculus – e.g. the role of the formal – as well as in

the context of specialised teaching – what can be done when a mathematical interpretation is not possible?

Key-words: Theory of didactical situations, transition between Upper Secondary School and University, teaching for students with special needs, situations' semiotic analysis.

SOMMAIRE GENERAL

INTRODUCTION

Le travail de recherche que nous avons entrepris depuis quelques années, se décline dans deux directions qui peuvent sembler assez peu voisines : l'enseignement des premiers concepts de l'analyse, de la fin du secondaire au début du supérieur, et l'enseignement spécialisé, particulièrement l'enseignement dans les sections SEGPA (Sections d'enseignement général et professionnel adapté) de collège. Le point de rencontre de ces deux thèmes est la réflexion sur la Théorie des Situations Didactiques (TSD), couplée au souci d'éprouver les outils de la TSD et de faire évoluer la théorie tout en la confrontant à la contingence ; et ceci même dans un double domaine – l'enseignement secondaire, l'enseignement spécialisé – qui n'est pas celui de son origine.

En effet, la TSD a été très largement pensée, au départ, *à travers* et *pour* l'enseignement primaire. Le fait de chercher à l'utiliser pour l'enseignement secondaire, voire supérieur, et dans l'enseignement spécialisé, et d'en utiliser les caractéristiques scientifiques pour mener une étude de l'enseignement à ces niveaux, mène à des questionnements sur ses éléments constituants, et sur la nécessité de certains concepts et leur articulation. Cet élargissement de la théorie va donc conduire à mettre à l'épreuve certains de ses éléments structurants. Ceci revient à dire qu'essayer de mettre en œuvre la TSD, dans un contexte différent, ne peut se faire sans un travail sur les concepts de la théorie.

Ainsi par exemple, le concept d'a-didacticité est un des fondements de la TSD et a été construit en même temps que les situations fondamentales du niveau primaire, puis précisé dans la théorie. Les situations présentées au départ comme fonctionnant de façon "quasi isolée" ont été définies ensuite de façon plus rigoureuse ainsi que le rôle du professeur dans ces situations (Margolinas 2002, Bloch 1999).

Au niveau secondaire ou supérieur ce fonctionnement doit être questionné : les modalités que prend, dans l'enseignement primaire, la réalisation de situations a-didactiques doivent se trouver objets d'enquête dès lors que les conditions d'enseignement des mathématiques sont différentes – dans un sens à préciser. Questionner l'a-didacticité ne peut se faire sans s'interroger sur les modes de validation que les élèves ont à leur disposition lors d'une situation ; et le schéma action – formulation – validation – institutionnalisation doit être ré-interrogé dans l'enseignement secondaire ou supérieur à partir des conditions spécifiques rencontrées et de leur analyse. De même les difficultés rencontrées dans l'organisation et la gestion de situations mettant en jeu un savoir complexe conduisent à reprendre la notion de situation à *dimension a-didactique* que Mercier avait introduite (Mercier 1995, Bloch 1999).

Pour cela, il nous a été nécessaire d'une part, de préciser les concepts de situation fondamentale et milieu théorique – épistémologique – associé, de milieu expérimental a priori, de contingence[1] ; et d'autre part, de reprendre le schéma[2] de structuration du milieu expérimental (Bloch, 2002). Ce schéma était initialement prévu pour analyser les situations fondamentales a didactiques, fonctionnant de façon "quasi isolée" ; il avait été remanié par Margolinas (Margolinas 1994). Il a été nécessaire de montrer à la fois, sa pertinence et les évolutions nécessaires du modèle, dans les environnements différents auxquels on le

[1] La contingence est le terme employé par la TSD pour désigner ce qui advient dans la classe, qu'elle soit une classe "ordinaire" ou une classe sujette à expérimentation.

[2] "Schéma" est utilisé ici dans son sens courant de dessin montrant la structure ; le "schéma de structuration du milieu" est l'expression utilisée dans la TSD pour désigner le tableau montrant les différents niveaux de milieu.

confrontait : soit, l'enseignement de notions mathématiques complexes, comme celles de l'analyse au début de l'enseignement supérieur ; soit, l'enseignement dans les conditions très spécifiques des classes "spécialisées".

La didactique des mathématiques est une science de certaines des activités humaines, celles qui sont spécifiques de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. En ce sens il est clair qu'est nécessaire, pour l'exercer, une maîtrise des mathématiques à un niveau bien supérieur au niveau que l'on prétend étudier. Cette maîtrise s'exprime dans la construction de situations fondamentales, construction qui prend en charge la dimension épistémologique du savoir mathématique. Mais cette enquête épistémologique, si elle est indispensable, ne saurait rendre compte à elle seule de ce qui est possible dans l'enseignement des mathématiques ; de ce qui est contraint par l'institution, les manuels, l'idée sociale des mathématiques ; de ce qui est viable pour l'élève, du point de vue cognitif ; de ce qui est réalisable, du point de vue du professeur et des contraintes précédemment évoquées… Il s'ensuit que les problèmes et les questions de l'enseignement sont abordés de différents points de vue, avec des approches diversifiées, tenant compte du fait que la transposition didactique est à l'œuvre dès la déclaration d'un savoir savant (Cf. Dorier 2000).

La didactique des mathématiques se veut une approche scientifique des questions d'enseignement. Le XX$^{\text{ème}}$ siècle a montré des avancées majeures dans la considération des sciences expérimentales et humaines, avancées qui d'une certaine façon contribuent à rapprocher les paradigmes d'étude dans ces deux domaines. Ainsi dans les sciences expérimentales, l'observation et la quantification de phénomènes physiques ne peuvent plus être considérées comme des données objectivement interprétables dans une seule théorie, ce qui contribue à relativiser les phénomènes physiques et à les rapporter obligatoirement au modèle qui permet de les interpréter. Conjointement, les sciences relatives aux activités humaines se sont dégagées de leur origine philosophique et se sont dotées elles aussi de modèles certes plus ou moins mathématisés. Ces modèles permettent néanmoins de ne plus les considérer comme de pures spéculations intellectuelles non sous tendues par des théories scientifiques, mais comme des domaines de la connaissance s'appuyant sur des théories falsifiables.

Plusieurs auteurs, dont Bourdieu – ont rappelé les précautions que doit observer le chercheur en sciences humaines pour ne pas devenir prisonnier d'un modèle particulier – ni surtout de l'illusion d'évidence du chercheur immergé dans une société et qui porte un regard sur cette même société – et pouvoir travailler d'un point de vue expérimental sans se trouver abusé par ce que le modèle déclare : autrement dit, le modèle doit toujours rester falsifiable faute de perdre son caractère de scientificité. (Une autre caractéristique fondamentale des théories élevées au rang de modèles, est leur caractère prédictif. C'est un point que nous examinerons dans le cas de la TSD).

Ainsi que le dit Bourdieu, en parlant de l'objectivité de la science :

> "Il existe des univers dans lesquels s'instaure un consensus social à propos de la vérité mais qui sont soumis à des contraintes sociales favorisant l'échange rationnel et obéissant à des *mécanismes d'universalisation* tels que les contrôles mutuels ; dans lesquels les lois empiriques de fonctionnement régissant les interactions impliquent la mise en œuvre de contrôles logiques." (Bourdieu 2001, p. 162)

Bourdieu cite ainsi Popper :

> "Assez paradoxalement, l'objectivité est étroitement liée au caractère social de la méthode scientifique, du fait que la science et l'objectivité scientifique ne résultent pas des tentatives d'un savant individuel pour être 'objectif' mais de la coopération (…) de nombreux savants.

> L'objectivité scientifique peut être décrite comme l'intersubjectivité de la méthode scientifique." (Popper 1945, cité par Bourdieu, 2001, p. 162).

Dans le même ouvrage Bourdieu insiste sur la difficulté des sciences du champ social à voir reconnaître leurs objets spécifiques de recherche, leur autonomie par rapport à la société, et la scientificité de leurs méthodes.

> "Il me semble que pour accomplir le projet scientifique en sciences sociales il faut faire un pas de plus, dont les sciences de la nature peuvent se dispenser. (…) Il faut affronter le cercle relativiste ou sceptique et le briser en mettant en œuvre (…) tous les instruments que produisent ces sciences mêmes." (Bourdieu, 2001, p. 169)

Bourdieu plaide alors pour une vigilance épistémologique dans le champ des sciences humaines ; cette vigilance, ou encore prudence, a par ailleurs été revendiquée par Legrand (1996) au sujet des situations fondamentales.

Ce point de vue implique de traiter les théories elles-mêmes que se donne le champ de recherche de la didactique des mathématiques comme des modèles, et d'enquêter de façon scientifique sur les concepts utilisés. La didactique des mathématiques se dote, comme toute science, de modèles théoriques. Ces modèles fonctionnent comme des outils pour aller chercher, dans le champ de l'enseignement des mathématiques, des observables, c'est-à-dire des faits qui seront déclarés spécifiques de ce champ, qui seront érigés au rang de phénomènes didactiques.

L'article "Modèle" de l'Encyclopædia Universalis (2004) évoque l'utilisation de modèles mathématiques dans les sciences expérimentales et sociales. En particulier, les modèles statistiques sont d'un intérêt certain en didactique ; sur les précautions de leur bon usage pour l'analyse des données sur l'enseignement, on se reportera à Brousseau (1993). Mais pour décrire une activité comme la construction de situations d'enseignement /apprentissage, et le fonctionnement de ces situations, la didactique construit des modèles qui, tout en n'étant pas mathématiques, se doivent d'être, non exacts, mais porteurs de réfutation possible (dans le cas du fonctionnement d'une connaissance) et de prédiction d'un canevas de déroulement (dans le cas d'une situation).

Ainsi que le dit l'Encyclopædia Universalis :

> "Le modèle est, par définition, une approximation de ce qui est observé. Aussi peut-on dire que par principe, un modèle est erroné : on pourra toujours montrer qu'il y a un écart entre ce qu'il prédit et les données ; cela n'a donc aucun intérêt de montrer qu'un modèle est erroné : on sait a priori qu'il l'est dans une certaine mesure. Le vrai problème est de trouver un modèle meilleur à lui substituer. L'important dans un modèle est qu'il est hautement réfutable : cela est lié à la précision des prédictions qu'il engendre. Par là, il contient le germe de sa réfutation : tel est son principal intérêt, car il permet à la connaissance d'avancer. Une construction théorique n'a de valeur scientifique que dans la mesure où l'on peut préciser quel type de résultat permettrait, si on le constatait, de la réfuter. Bien des théories, on le pressent, ne satisfont pas à ce critère : ce sont les théories trop générales à partir desquelles on peut tout expliquer mais rien prédire." JF Richard, Encyclopaedia Universalis 1998, Tome 15, p. 538.

Ajoutons qu'un modèle est non seulement une approximation de ce qui est observé ; c'est aussi sa reconstruction rationnelle, dans un système codé, logique, reproductible. Cette reconstruction est de fait plus ou moins mathématisée, en fonction des possibilités ouvertes à la fois par les mathématiques de l'époque et l'adéquation mathématique – ou non – à rendre compte de phénomènes qui sont d'ordre social, ou physique, biologique, économique…

On s'appuiera donc sur une *méthodologie* du travail en didactique des mathématiques, incluant des théories et modèles, et des concepts présidant à la construction des modèles et des théories. Notons qu'une telle méthodologie globale n'existe pas dans ce champ de recherche, ainsi qu'il a été souligné plus haut. Il y a des méthodologies locales, suivant le type de question qui est examiné. Dans nos recherches, notre ambition a été d'apporter quelques éléments pertinents au développement de cette (ces) méthodologie, par un retour théorique sur certains des concepts existants, et par l'apport d'outils pertinents issus d'autres problématiques. Nous discuterons ainsi dans ce texte la *cohérence* des outils, ceux existants et ceux que nous souhaitons introduire. Notre conception consiste à considérer comme premier le problème posé, puis d'en déduire les moyens d'attaque de l'étude ; enfin de vérifier les résultats dans une recherche de cohérence.

L'usage de méthodologies locales ou diverses n'est ainsi pas à confondre avec une atomisation des méthodes suivant le phénomène empirique considéré, dispersion à visée opportuniste qui pourrait conduire à une multitude d'études locales non corrélées (ni connectables). Cependant elle évite un autre écueil qui serait de faire une *étude en TSD* ou une *étude dans la Théorie anthropologique du didactique,* c'est-à-dire de fixer par avance le cadre théorique exclusif avec lequel étudier une série de questions ou de phénomènes : ce n'est pas à la théorie choisie de déterminer les questions pertinentes sur le champ de recherche, mais bien plutôt, des questions issues de ce champ de recherche vont être examinées avec les théories qui seront nécessaires à leur modélisation, prévision... Les phénomènes d'enseignement sont d'une complexité telle, qu'il apparaît illusoire de vouloir en rendre compte dans un seul paradigme théorique. Par ailleurs le fait de recourir à des théories de champs différents (comme la TSD et la sémiotique) renforce l'étude s'il advient que les résultats issus de ces théories s'étayent mutuellement et contribuent à une meilleure compréhension des phénomènes étudiés.

Finalement on aura donc une méthodologie de la construction de situations, et des théories de l'enseignement / apprentissage plus ou moins étendues : du local (la TSD) au plus global (par exemple la TAD). Ces théories permettent de traiter les problèmes identifiés ; mais elles sont aussi à la source de questions de recherche, qui seront traitées avec ces mêmes outils théoriques, ou qui nécessiteront des constructions théoriques additionnelles.

Dans une étude de didactique il peut donc y avoir donc plusieurs dimensions :

- On peut définir les théories qui vont servir à modéliser les phénomènes que l'on souhaite étudier ; c'est un travail de définition des concepts du champ de recherche, auquel cas, il faut mener une étude de pertinence, de consistance et de cohérence des concepts à utiliser ;
- On peut ajouter des dimensions estimées manquantes à des théories existantes, quitte à justifier que ces nouveaux outils sont nécessaires, et qu'ils permettent de capter des phénomènes nouveaux par rapport à ce que permettaient les anciens outils ;
- On se sert des concepts de didactique existants pour étudier des organisations mathématiques, ou des phénomènes didactiques – ce qui suppose qu'on a auparavant défini ces concepts, et que les modèles existants permettent d'identifier les phénomènes en jeu ; et ceci suppose aussi que le positionnement épistémologique a été défini pour le(s) concept(s) en jeu ;
- On peut étudier l'adéquation des concepts aux phénomènes empiriques ;
- On peut enfin, se servir, sans plus ample justification, d'outils théoriques éprouvés pour recueillir des observables, tenter d'en rendre compte et de les interpréter : montrer en quoi ces observables sont explicatifs de quelque chose dans la réalité didactique étudiée.

En dernière analyse, la théorie ne fonctionne pas pour son propre développement mais pour l'étude de l'enseignement des mathématiques ; donc la pierre de touche de l'utilité des concepts est bien évidemment leur capacité à permettre de saisir des phénomènes de construction de curriculums, d'élaboration de situations relatives à un concept mathématique donné, d'observation du travail du professeur et des élèves lors de séances de mathématiques… La théorie est donc reliée de façon forte à l'épistémologie des mathématiques (cf. Dorier, 2000) et les formes de l'étude didactique dépendent aussi des contenus mathématiques eux-mêmes, dans les différents contextes dans lesquels nous les rencontrons.

Ainsi le didacticien est mené à conduire sur les concepts de la théorie une enquête en pertinence : un concept est-il utile, me sert-il à voir quelque chose que je ne verrais pas sans cet outil ? Par exemple l'idée de processus / objets (Sfard,) est-elle utile à l'analyse ? Est-il intéressant d'essayer de voir quel type de rupture il y a entre deux organisations didactiques[3] ? Qu'est-ce que cela apportera à la compréhension des organisations étudiées ? A la compréhension du macro didactique ? L'utilisation de grilles de lecture que sont les modèles, permet-elle de prévoir des effets ? Et ces effets se retrouvent-ils dans la contingence ?

Le didacticien devra aussi – et même avant tout – conduire une enquête de consistance : un concept a-t-il une définition qui me permet de qualifier les faits qui en relèvent, de les repérer, de les étiqueter, de les classer …? Ou ne qualifie-t-on pas de concept ce qui n'est qu'une métaphore ? Ou, pire, est-on victime d'une idéologie de l'éducation ? Ainsi que le dit Bourdieu pour la sociologie – mais en l'occurrence on peut remplacer sociologie par éducation – il s'agit d'un champ où :

> "Tout le monde se sent en droit de dire la vision légitime du monde [éducatif], dans lequel le [didacticien] intervient aussi, mais avec une ambition tout à fait spéciale, que l'on accorde sans problème à tous les autres savants, et qui, dans son cas, tend à paraître monstrueuse : dire la vérité ou pire, définir les conditions dans lesquelles on peut dire la vérité". (Bourdieu, 2001, p. 170)

Dans notre principal paradigme de recherche – la Théorie des Situations Didactiques – il sera donc nécessaire d'éprouver les concepts utilisés ou introduits, à la fois du côté théorique de la didactique, et par confrontation à la contingence, c'est-à-dire à la *réalité* de l'enseignement, dans les dimensions où nous prétendons les observer : l'enseignement spécialisé et l'enseignement des notions de l'analyse à l'articulation secondaire/supérieur. Cette réalité comporte ici, comme nous l'avons montré dans le cours à la XI^{ème} Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, (Bloch 2001) deux volets : un volet épistémologique et un volet didactique.

Qui dit réalité ne dit pas "le monde réel" : toute science reconstruit une réalité observable avec ses outils. Gonseth est sans doute l'un de ceux qui ont le mieux pensé cette articulation des mondes d'un point de vue épistémologique, dans "La géométrie et le problème de l'espace" (Gonseth 1955). Ainsi que le dit Conne (2004) :

> "Pour F.Gonseth nos sources d'information sur le réel se présentent sous divers aspects selon ce qu'il appelle des horizons : celui de nos intuitions (intuitions spatiale, perceptive et cognitive) ; celui de nos expérimentations empiriques, contrôlées par les contraintes que la matière nous impose ; celui de nos théorisations (expériences de pensée, raisonnements), contrôlé par la claire conception de ses objets et des principes de non contradiction ; ainsi qu'un horizon axiomatique, celui des objets libérés le plus possible de nos sources intuitives afin qu'il ne devienne régi que par la logique déductive."

[3] Voir chapitre 3.

Certes la didactique des mathématiques n'en vient pas à un système axiomatique, et Gonseth parle ici de la géométrie, c'est-à-dire d'un domaine mathématique axiomatisable dans différentes théories ; le volet didactique, s'il peut en partie entrer dans ce schéma, s'arrête à l'horizon de théorisation, avant l'horizon axiomatique. Néanmoins les théories doivent être poussées jusqu'à leur fonction prédictive (qui remplace la fonction déductive des mathématiques) afin de faire la preuve de leur pertinence. Dans les chapitres traitant des situations expérimentées et des conditions macro didactiques, nous montrerons comment la réalité des conditions de l'enseignement – observation de situations ou cursus macro didactique – est traitée par la théorie qui reconstruit un parcours interprétable des phénomènes observés et produit des anticipations.

Par ailleurs, la didactique des mathématiques tente parfois de trouver appui sur des disciplines vues comme connexes, comme l'ergonomie, l'anthropologie, la psychologie, la linguistique… La complexité du champ à explorer le rend impossible à appréhender par une seule organisation théorique, ainsi que dit plus haut – ni par une seule organisation théorique interne à la didactique. Parmi les champs théoriques envisageables dans l'étude de la transmission du savoir mathématique, celui de la sémiotique est incontournable du fait de la nature même des objets mathématiques ; nous avons étudié les registres de représentation sémiotiques disponibles pour l'enseignement de la notion de fonction (Bloch 2002, 2003). Notre présente recherche va plus loin en tentant de caractériser la façon dont les signes symboliques sont utilisés dans l'enseignement, et perçus par les élèves, dans le cadre de leurs connaissances disponibles.

Les mathématiques ont en effet pour caractéristique d'être une science dont les objets ne sont que théoriques, et représentés par des signes formels : des *symboles mathématiques*. Chevallard a engagé l'étude des signes mathématiques qu'il a appelé des *outils sémiotiques* ou *ostensifs* (Chevallard 1996 ; Bosch et Chevallard, 1998). L'appellation d'outil sémiotique est particulièrement heureuse, de notre point de vue, car elle fait ressortir la double dimension – signe pour représenter les objets mathématiques, et outil du travail mathématique – que possèdent les symboles mathématiques : que l'on pense simplement à l'algèbre, au niveau élémentaire, ou à tous les outils de l'analyse, dérivées, intégrales, … Duval a étudié quant à lui les registres de représentation, dans leurs différentes fonctions : représenter, communiquer, traiter ; il a particulièrement mis l'accent sur l'intérêt qu'il peut y avoir, pour l'enseignement, à opérer des conversions de registres afin d'étendre la compréhension des notions visées (Duval 1996). Cependant aucune de ces deux études ne prend en compte les phénomènes d'interprétation qui sont consubstantiels à toute communication de signes, et donc présents lorsque l'on construit une situation, lorsqu'on l'implante en classe, lorsque les élèves la jouent. La TSD montre elle aussi une lacune dans cette dimension : si les ostensifs produits dans les situations expérimentées ont été chaque fois soigneusement précisés (cf. Brousseau G. et N., 1988), il n'y a pas, dans la théorie, de réflexion sur les ostensifs pour eux-mêmes.

Prendre appui sur une théorie des signes est donc incontournable si l'on veut aller plus loin. Par rapport aux théories classiques des signes[4], la sémiotique générale proposée par Peirce (1975, 1995) est tout particulièrement intéressante, car elle s'emploie à explorer la fonction et l'usage des signes, y compris les signes non langagiers : en mathématiques où l'on utilise des symboles – comme signes de la représentation d'un concept en même temps qu'outil pour faire des mathématiques avec ce concept – une analyse des interprétations de ces symboles s'avère d'un intérêt certain. On peut bien sûr considérer que des éléments de

---

[4] Linguistiques générales, théories du signifié et du signifiant... Voir également les travaux de Radford (2002, 2003), Godino (2002, 2005), Steinbring (2005).

sémiotique seront utiles pour penser la construction de situations nouvelles que l'on souhaiterait entreprendre ; mais ils ne le sont pas moins pour comprendre l'interprétation des signes mathématiques et des signes de l'activité mathématique que les élèves sont amenés à montrer en classe ; et pour comprendre les sollicitations qu'a produit l'enseignant(e) dans le milieu, en termes de signes de ce que les élèves ont à faire de / en mathématique. Une série de questions de recherche émerge donc de cette analyse sémiotique : quel est le rôle des supports sémiotiques dans la construction et le fonctionnement des situations ? Quels signes produit l'enseignant(e), comment ces signes interviennent-ils dans le milieu et comment sont-ils reliés – institutionnellement ou personnellement – au savoir mathématique ? Comment les élèves sont-ils susceptibles de les interpréter, et que comprennent-ils du savoir mathématique qui est supposé représenté ? Des élèves en difficulté ont-ils des déficits d'interprétation à ce niveau ? Des étudiants en début d'études supérieures, peu familiers avec le langage formel des mathématiques, réajustent-ils leurs connaissances en fonction de la complexité des signes manipulés, et si oui comment ? Ce sont ces questions qui sont actuellement l'un des axes de notre recherche : et ceci aussi bien sur les mathématiques du premier cycle universitaire que sur celles de SEGPA.[5]

Notre travail s'articule donc essentiellement autour des notions de situation et de milieu de ces situations. Est-il souhaitable de compléter, de faire évoluer, ces concepts de didactique lorsqu'on travaille dans l'AIS ou sur l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire/supérieur ? Peut-on articuler la TSD et la théorie anthropologique, pour étudier des organisations globales au niveau d'un cursus ? Est-il possible de construire d'autres situations que celles déjà connues, (partiellement) a-didactiques aux niveaux considérés ? Les éléments théoriques qui permettent de définir les situations, par exemple les variables didactiques, sont-ils de quelque pertinence et utilité pour étudier des organisations plus importantes dans le temps – des programmes ou des organisations du savoir sur un temps long ?

Cette note de synthèse se découpera donc en quatre chapitres :

- Le chapitre 1 expose la problématique des situations, situation fondamentale d'un savoir, et recherche de situation a-didactique effectivement envisageable. Nous y reprenons l'analyse d'une situation construite dans des classes de Première scientifique pour introduire la notion de limite. L'étude de situations à dimension a-didactique dans l'enseignement secondaire ou supérieur contribue à questionner les bases théoriques de la TSD et les premières définitions des situations données dans ce cadre.
- Le deuxième chapitre reprend en l'approfondissant le travail théorique que nous avons mené depuis 2001 sur les concepts de la TSD : situation fondamentale, milieu, situations a-didactiques. Ce chapitre s'attache à préciser le concept de situation à dimension a-didactique ; il apporte des compléments sur le milieu antagoniste (ou amorphe), sur ce qu'est un schéma par rapport à un modèle, et sur le rôle du professeur.
- Le troisième chapitre montre comment nous avons conduit à l'aide de la TSD une analyse macro-didactique des ruptures entre deux ordres d'enseignement : l'enseignement de la notion de limite, de la fin du secondaire au premier cycle universitaire. On trouve également, dans ce chapitre, une analyse d'une séance de classe "ordinaire" sur les fonctions réciproques et la continuité en classe de Mathématiques Supérieures.
- Le chapitre 4 donne des exemples d'analyse de situations ; nous mettons en évidence la manière dont peut être introduite l'a-didacticité dans des situations concernant l'enseignement secondaire ou supérieur, ou l'enseignement spécialisé. Dans ce chapitre, nous étudions un exemple de construction de situation expérimentale sur les bases de

[5] Sections d'Enseignement Général et Professionnel Adapté : les sections de l'AIS (Adaptation et Intégration Scolaire) en collège, destinées en principe à des enfants à déficience intellectuelle légère.

numération, le Jeu des envahisseurs. Ce jeu nous a permis de mettre en évidence un mécanisme de création de milieu a-didactique, mécanisme que nous avons appelé retournement de situation (Bloch 2005). D'autres exemples de situations "retournées", au niveau de l'enseignement secondaire, sont donnés afin de montrer la fécondité du procédé ; enfin, en conclusion, nous portons nos interrogations dans trois directions :

- la possibilité de mettre à jour d'autres mécanismes de construction de milieux ;
- les limites de ce travail dans la Théorie des Situations Didactiques ;
- les ouvertures possibles dans d'autres paradigmes pour la création de situations.

En conclusion nous reviendrons sur quelques éléments de notre parcours en mathématiques et en didactique des mathématiques, et esquisserons les perspectives de recherche ouvertes dans les différents champs de notre activité.

DOCUMENTS JOINTS A L'HDR

Document 1 : BLOCH I. : 1999, 'L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève : un exemple dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique.' *Recherches en didactique des mathématiques*, *vol.19/ 2, 135-194, La Pensée Sauvage*, Grenoble.

Document 2 : BLOCH I. : 2002a, 'Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée.' *Petit x,* **58***,* 25-46 *,* Grenoble.

Document 3 : BLOCH I. : 2002b, 'Différents niveaux de modèles de milieux dans la Théorie des Situations Didactiques : recherche d'une dialectique scientifique entre analyses théoriques et contingence.' *Actes de la XIème Ecole d'été de didactique des mathématiques,* 125-139*,* Dorier et al. Éditeurs, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Document 4 : BLOCH I.: 2003a, 'Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove?' *Educational Studies in Mathematics,* **52-1***,* 3-28.

Document 5 : BLOCH I. et SALIN M.H. : 2004a, 'Contrats, milieux, représentations : étude des particularités de l'AIS'. *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques,* pp. 171-186, Paris : Université Paris 7.

Document 6 : BLOCH I. : 2005a, 'Dimension a-didactique et connaissance nécessaire : un exemple de retournement d'une situation', *Sur la théorie des situations didactiques, Actes du colloque Guy Brousseau (juin 2000)*, pp. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Document 7 : BLOCH I.: 2005c, 'Learning new ways of teaching from mathematical research: Situations for mathematics teachers' education'. *ICMI Study 15.*

Document 8: BLOCH I.: 2005b, 'Conceptualisation through semiotic tools in teaching/learning situations', *Conference of European Research on Mathematics Education, Group 11*, Barcelone.

PRESENTATION DES DOCUMENTS

Les références de certains des documents que j'ai écrits depuis 1995 figurent ci-dessus, et ces documents sont joints à l'habilitation ; ils constituent l'armature de mon travail et mettent en évidence les pistes suivies : les situations, les milieux ; l'enseignement de l'analyse ; l'enseignement spécialisé, la situation du professeur ; l'analyse sémiotique des milieux et du travail des élèves[6]. J'ai repris, dans certains chapitres de ce texte, des éléments issus de ces documents, en les complétant ou au contraire, en les présentant de façon abrégée de façon à pouvoir les insérer dans des considérations plus générales. Il ne faut donc pas s'étonner de quelques redondances entre les documents et le texte, mais la réinsertion des éléments empruntés aux documents, dans une perspective globale de recherche, m'a paru nécessaire pour présenter ma démarche[7].

Ces documents sont classés en quatre groupes :

1) Les études théoriques sur la théorie des situations didactiques

Documents 1, 3, 6

Le document 1 est fondamental car il pose les bases de ce qu'a été notre travail dans le cadre de la théorie des situations didactiques (TSD), sur l'enseignement à un niveau où les objets mathématiques en jeu sont déjà complexes, et leurs représentations très mathématisées. Cet article a effectivement servi de base à nos recherches ultérieures : il reprenait le schéma de structuration du milieu de Margolinas (1994) pour tenir compte du travail du professeur au niveau considéré ; en même temps, nous y discutions de ce que pouvait être, à ce niveau de l'enseignement, l'a-didacticité et les milieux susceptibles d'engager les élèves dans une activité de validation et de preuve mathématique.

Le document 3 est une étape importante de la théorisation dans la TSD. Il est à l'origine de toute la réflexion sur la nécessité de séparer le schéma théorique des situations fondamentales, des modèles d'expérimentation et d'application dans la contingence. Vu son impact, il est repris et augmenté dans le chapitre 2 de ce texte.

Le document 6 est un apport, toujours théorique mais en vue d'une application pragmatique, sur des mécanismes permettant de créer des milieux a-didactiques (ou à dimension a-didactique) en vue de l'enseignement d'une notion mathématique précise. En ce sens, cet article peut être vu comme une transition entre une théorie de la didactique des mathématiques et le souci complémentaire de faire exister réellement, dans l'expérimentation, les catégories créées par la théorie, catégories qui s'avèrent pertinentes pour l'étude de l'enseignement et pour la création effective d'ingénierie. Ce document s'attache à poser les conditions et moyens de réalisation de telles situations dans des ingénieries.

2) Les situations et les milieux : la situation "Graphiques et chemins"

Documents 1, 2, 4.

Le document 1 présentait les premiers éléments d'analyse d'un exemple de situation : la situation Graphiques et Chemins, situation qui est détaillée dans le document 2. Le document 4 reprend cette situation : il en explique les mécanismes en même temps qu'il les relie aux caractéristiques du milieu introduit. Il s'attache de façon plus générale à faire ressortir les paradigmes présidant à la construction de situation à dimension a-didactique : c'est sur ces paradigmes qu'il est possible d'appuyer des travaux d'ingénierie sur d'autres notions mathématiques, spécialement dans le champ de l'analyse.

[6] Tous les articles figurent dans la bibliographie.
[7] Dans la suite du texte j'emploierai le 'nous' académique.

3) Les situations et le rôle du professeur

Documents 1, 5, 7

Le document 1 donnait des pistes pour analyser le travail du professeur confronté à une situation complexe comme l'est une situation à dimension a-didactique. Le document 5 augmente cette étude d'une analyse des mécanismes du contrat didactique à l'œuvre dans l'AIS (Adaptation et Intégration Scolaire). Dans ce texte nous montrons comment les outils de la TSD permettent d'identifier et d'analyser des manifestations du contrat didactique spécifiques à l'AIS. Nous y envisageons l'importation de situations à dimension a-didactique et montrons que celles-ci se heurtent à des phénomènes de contrat. Cette analyse éclaire à son tour les concepts de la TSD, et participe de l'étude que nous avons entreprise sur ces concepts et leur nécessaire évolution.

4) Le rôle des sémioses et les interprétants d'une situation didactique

Document 8

Ce document, proposé à CERME 4 – Barcelone février 2005 – est représentatif de certaines de nos pistes de recherche actuelles. Notre étude sur l'utilisation des registres de représentation sémiotique pour la construction de milieux se prolonge en effet dans un travail sur l'interprétation des signes mathématiques par les élèves, dans les situations que nous leur présentons. C'est en grande partie l'analyse du milieu qui permet de dire si les interprétants convenables seront, ou non, disponibles pour les élèves. Le document 8 ne propose pour l'instant, dans sa partie expérimentale, que des analyses d'interprétation ayant eu lieu dans des situations de 'classe ordinaire'. Cependant l'exposé théorique que nous y mettons en place porte sur l'articulation des théories didactique et sémiotique ; il s'attache à montrer la nécessité de cette articulation, en vue de la production et l'étude de situations et milieux adéquats à l'enseignement de notions complexes. En ce sens cette recherche s'insère dans la ligne directe des travaux que nous avons essayé de conduire jusqu'ici.

CHAPITRE 1

LES SITUATIONS A-DIDACTIQUES DANS LA THEORIE DES SITUATIONS

Evolution des concepts dans le contexte de l'enseignement secondaire/supérieur

L'exemple de la situation du flocon

I. LA PROBLEMATIQUE DES SITUATIONS FONDAMENTALES

I.1. Domaine de validité de la notion de situation fondamentale

La théorie des situations didactiques (TSD : Brousseau, 1998) a construit dans le courant de son développement, et à l'appui de celui-ci, un certain nombre de situations dans l'enseignement primaire. Ces situations se voulaient emblématiques de concepts clés de la théorie – dévolution, a-didacticité, milieu porteur de rétroactions, dialectique de l'action, de la formulation, de la validation. Ces concepts que la TSD a développé tout en testant la validité des attentes et des assertions sur l'effet supposé des situations, ont guidé la recherche sur ce que pourrait être un enseignement des mathématiques qui fasse effectivement de l'élève un acteur, un sujet épistémique.

Le travail de certaines équipes, notamment au COREM[8] mais aussi à l'INRP[9] , a conduit à un panel de situations proposées à l'école primaire : situation fondamentale de l'énumération (mettre exactement une allumette dans chacune des boîtes disposées de façon plus ou moins ordonnée) ; situation fondamentale du dénombrement (aller chercher, en une seule fois, juste ce qu'il faut de cuillers pour des pots de yaourts) ; situation fondamentale du dénombrement additif (dénombrer une grande quantité d'objets dans une réunion de deux ensembles) ; situation pour l'introduction de la multiplication (dénombrer une grande quantité d'objets dans un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes) ; situation fondamentale de l'introduction de la division euclidienne (ranger 345 œufs dans des boîtes de 12 œufs, par paquets et soustractions successives…) ; situations pour l'introduction des rationnels et décimaux : la situation de l'épaisseur des feuilles de papier due à Guy Brousseau, mais aussi la situation d'ERMEL de la bande de papier unité (ERMEL 1997)… Qu'elles soient plus ou moins rigoureusement liées à la théorie et se réclamant de la TSD, ces situations font désormais partie de la culture commune des situations de l'école primaire.

Les situations effectives construites ont bien souvent été assimilées à des situations 'fondamentales'. Il y a là une confusion des objets théoriques : une situation fondamentale est une construction épistémologique faite à partir du savoir mathématique, et des problèmes qu'il est envisageable de résoudre avec ce savoir, alors qu'une réalisation (même envisagée) prend en compte la transposition didactique du moment et "l'enseignabilité" d'un projet. Certes dans une SF il ne s'agit pas de n'importe quel type de problèmes, mais bien de ceux dont la résolution permet de mettre en œuvre, à travers une action, des *connaissances*. Ces connaissances sont précisément celles dont la formulation et la validation permettent de donner accès au savoir visé. Il s'agit de transformer des "causes de connaissances en raisons de savoir" ainsi que le dit Brousseau (1990), ou comme le dit aussi Douady (1994) : "Le savoir apparaît d'abord comme outil avant de devenir objet".

Autrement dit, tout en restant théorique – avant transposition et expérimentation – une SF est à la fois épistémologique et cognitive :

- Épistémologique car elle réfère au savoir mathématique ;
- Cognitive car elle traite de la relation entre action et connaissances.

Cette double dimension est bien évidemment ce qui fait son intérêt pour l'enseignement.

---

[8] Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Ecole Jules Michelet, Talence, sous la direction de Guy Brousseau.
[9] Institut National de la Recherche Pédagogique

Par ailleurs, les questions de reproductibilité sont parfois venues brouiller l'image de la situation fondamentale en semblant poser la même question aux deux niveaux – théorique et expérimental : dans l'enseignement d'un savoir par une situation, le sens du savoir est-il préservé ? Or le sens d'une situation fondamentale n'a pas à être 'préservé' mathématiquement puisqu'une telle situation est supposée issue rigoureusement d'une recherche épistémologique sur le savoir mathématique et que celui-ci est garant de ce sens ; par contre, les questions de reproductibilité se posent dès lors qu'il s'agit, à partir de la réflexion théorique sur la situation fondamentale, d'en envisager les modalités cognitives et, plus tard, d'en dériver une réalisation effective en classe à un niveau donné. D'un point de vue cognitif, la question peut se reformuler ainsi : "La situation envisagée permet-elle effectivement de faire apparaître des connaissances associées aux savoirs visés ?"

Ces confusions ont rendu nécessaire la reprise de concepts issus de la TSD afin de clarifier leur statut et l'usage qui peut en être fait. Par ailleurs, d'autres considérations nous ont amenée à retravailler les notions d'a-didacticité, de situation fondamentale, de milieu.

En effet, cette confusion entre situation fondamentale et ses réalisations possibles a pu parfois aboutir de façon hâtive à postuler l'inexistence de telles situations – situations a-didactiques – dans l'enseignement secondaire et supérieur : le savoir enseigné à ces niveaux étant déjà fortement mathématisé, il semblait inaccessible de pouvoir en rendre compte par 'une' situation dont les variables didactiques fourniraient l'étendue des modalités intéressantes. En fait, l'évolution de la didactique des mathématiques a conduit des chercheurs[10] à analyser certains types de savoirs, que nous avons évoqués dans l'introduction, comme ne se prêtant pas de par leur nature épistémologique à la construction de SF. Ces savoirs FUGS (formalisateurs – unificateurs – généralisateurs – simplificateurs) ont d'ailleurs été historiquement introduits comme des réorganisations de théories mathématiques et non en réponse à des problèmes ponctuels. Il est donc très difficile de trouver une situation qui les fasse construire dans l'expérience (cf. Dorier, 1997 ; Rogalski, 1995).

De plus, le vocabulaire employé dans la description des situations et des milieux – le premier milieu qu'organise le professeur est un milieu *matériel* – semblait inadapté à un niveau de mathématiques tel que celui abordé dès le secondaire. Les premières argumentations sur le fait que le milieu 'matériel' est constitué d'objets qui peuvent être déjà mathématiques, et non des objets du monde matériel, ne sont venues qu'assez tardivement, même si des essais avaient été faits pour implanter des situations a-didactiques aux niveaux secondaire / supérieur (cf. Berthelot 1983, Legrand 1996, Bloch 2000).

Une autre impossibilité à l'importation de situations a didactiques dans l'enseignement secondaire semblait venir du rôle du professeur : dans les premières diffusions des situations du Primaire, ce rôle était considéré comme mineur, la situation devant en quelque sorte fonctionner seule. Nous n'entreprendrons pas d'éclaircir si cette vision des situations pouvait être due à quelques illusions issues des théories piagétiennes, peut-être courantes au début de la TSD, ou à une interprétation constructiviste radicale de la TSD par certains utilisateurs ; il semble que cela ait pu être une interprétation "par défaut", dans la mesure où la TSD n'avait pas pris le temps de détailler les modalités de l'action du professeur dans la conduite de situations qu'elle décrivait au départ comme fonctionnant de façon "quasi isolée". Il est sûr que la nécessité d'étudier, théoriquement et empiriquement, le rôle du professeur dans la gestion des situations, n'est apparue que tardivement (Cf. Margolinas, 1995 ; Comiti, Grenier, et Margolinas, 1995 ; Bloch, 1997 et 1999 ; Berthelot & Bloch 2001). Or ce rôle est apparu

[10] Dorier, Robert…

essentiel y compris dans le fonctionnement des situations au Primaire, et il est actuellement étudié dans des cadres théoriques divers, à travers ses aspects de communication langagière notamment (Quilio et Sensevy, 2005).

De fait, dans l'enseignement secondaire et supérieur il existe moins de situations reconnues se réclamant explicitement de la TSD que l'on ne peut en trouver au primaire. Il faut se garder cependant d'idéaliser l'école primaire, où l'usage des fiches côtoie souvent un enseignement se voulant plus 'constructiviste' ; mais les situations y sont diffusées par les ouvrages ERMEL (1995, 1997), et le vocabulaire des situations a été répandu dans la formation des professeurs en IUFM[11]. Des tentatives ont pourtant été faites, comme les situations de débat scientifique construites par Legrand (Legrand 1996, Di Martino 1992) ; d'autres ont entrepris d'interpréter des situations construites de façon empirique avec la notion de milieu, comme la situation de la presqu'île (cf. Maurel et Sackur, 2002).

Une reprise des concepts de la TSD – milieu, situation – était nécessaire au plan théorique pour comprendre comment les mécanismes de construction de situations, mis en œuvre de façon si performante dans l'enseignement primaire, peuvent être systématisés, développés dans le cas de savoirs plus complexes, ceci afin de se doter d'outils de construction de milieux et de situations relatifs à un savoir donné, sans limitation théorique de niveau d'enseignement.

I.2. Le milieu dans les situations a didactiques

Lorsqu'en se référant à la Théorie des Situations Didactiques on invoque 'le milieu', sans préciser, il semble que dans la grande majorité des cas on fasse référence au milieu de l'élève dans une situation (a-didactique) d'apprentissage. Or la théorie des situations définit et utilise la notion de milieu dans des circonstances diverses et pour différents types d'analyses de savoirs et de situations d'enseignement / apprentissage. Pour n'en citer qu'un exemple, la notion de situation fondamentale fait référence à un type de modèle, et la structuration du milieu de l'élève ou du professeur à un autre type de modèle, intégrant les connaissances, voire les conceptions, des acteurs de la situation. C'est un point que Legrand a déjà signalé dans des termes légèrement différents (Legrand 1996).

Dès lors se pose la question de savoir si les constructions de la TSD sont bien des modèles, et des modèles de quels niveaux de la réalité : de conceptions (niveau cognitif des élèves ou du professeur), de savoirs (niveau des mathématiques). Ainsi l'existence d'une situation fondamentale (SF) d'une connaissance conduit à s'interroger sur les réalisations qui peuvent en être expérimentées : ces réalisations sont-elles 'fidèles' ? Que conservent-elles du savoir visé ? Quels choix a-t-on dû faire pour rendre possible l'enseignement effectif ? Quelles sont les conséquences de ces choix, au niveau des 'propriétés' du savoir et de la transposition didactique ? Au niveau des connaissances prévisibles des élèves et des connaissances effectives ? Au niveau des moyens de contrôle et de repérage de ces connaissances ? Au niveau des régulations et de la reproductibilité ?

En retour l'expérimentation en classe permet de renvoyer des questions sur la SF, soit du point de vue des connaissances et savoirs effectivement construits, soit du point de vue du fonctionnement conforme ou non à celui qui était prévu. Ainsi l'a-didacticité attendue peut-elle se trouver en défaut : ceci sera alors analysé comme une prise en compte insuffisante des paramètres du milieu supposé renvoyé les rétroactions nécessaires, comme cela a été le cas de la situation d'enseignement de la notion de limite en Première littéraire proposée par R. et C. Berthelot (1983) dans leur mémoire de DEA. Le milieu graphique organisé – des

[11] Institut Universitaire de Formation des Maîtres.

représentations graphiques de fonctions ayant une asymptote à l'infini – ne comportait pas de variable permettant d'assurer que les élèves feraient bien tendre x vers l'infini ; et, cette contrainte n'ayant pas été organisée, les élèves ont effectivement pris pour x des valeurs non significatives (mais conformes au contrat usuel dans une classe du secondaire ne disposant pas de moyens de calcul performants), soit 1, 2 ou 3… De ce fait le professeur s'est trouvé dans l'obligation, pour assurer la réussite au moins partielle de son projet d'enseignement des limites, d'intervenir pour dire aux élèves que la notion de limite à l'infini n'avait de sens que si l'on pouvait considérer des valeurs de la variable x "aussi grandes que l'on veut" ; mais ce faisant, il perdait sans aucun doute l'a-didacticité de la situation, et très certainement une partie du sens de la notion pour des élèves ne comprenant pas les raisons de la contrainte donnée. Ainsi la reprise d'un projet de situation sur les limites en classe de première a-t-elle tenu compte des enseignements de cette expérience et organisé un milieu de calcul sur les suites – le calcul des périmètres et aires des figures successives du flocon de von Koch – assurant la naturalisation de la contrainte : "n tend vers l'infini" (cf. Bloch, 2000a). L'analyse de cette situation montre que la contrainte donnée au départ, de savoir ce que devient la figure initiale si l'on poursuit la construction indéfiniment, assure la dévolution du problème de la limite. La comparaison entre les comportements différents de l'aire et du périmètre permet de s'interroger sur ce qui peut être identifié comme comportement de la variable n, et comportement des fonctions en jeu (aire et périmètre). Par ailleurs, les élèves disposent, à la fin de la décennie 90, d'outils de calcul permettant d'entrer des valeurs significativement plus grandes. L'analyse du déroulement effectif dans des classes montre cependant la persistance du contrat usuel, certains élèves disant qu'ils vont prouver que P_n peut dépasser 60 à partir d'un certain rang, 60 étant vu comme un "grand" nombre par rapport au contrat usuel d'étude des fonctions.

La question essentielle qui se pose est que, même si l'on suppose bien définie une situation fondamentale d'un concept visé, la réalisation de cette situation fondamentale dans le milieu expérimental n'a rien d'automatique ni d'évident puisqu'au niveau de l'enseignement vont s'introduire des formes – spécifiques du niveau et du système d'enseignement – du savoir et des connaissances ; par l'introduction dans un système didactique donné sujet à la transposition didactique du savoir mathématique, il s'introduit un phénomène de *transposition didactique* du modèle théorique construit dans la TSD : cette transposition didactique est ce qui fait qu'un savoir est *enseignable* à travers et dans les réalisations de la situation fondamentale étudiée, mais cette transposition didactique est aussi ce qui rend problématique le fait de savoir si ce sont bien des mathématiques – et lesquelles – qui ont été enseignées.

Dans la suite de ce chapitre nous détaillons quelque peu l'exemple de la situation du flocon (construction, analyse a priori du fonctionnement possible, et compte-rendu d'une implantation dans une classe de Première Scientifique) pour permettre au lecteur non spécialiste de la TSD de saisir la nature d'une situation comportant une dimension a-didactique, et de saisir ce qu'est un milieu construit en vue de l'enseignement d'un savoir déterminé. Nous exposerons dans le chapitre suivant quelques principes d'élaboration d'un milieu théorique associé à une situation fondamentale; puis nous rappellerons quelques uns des problèmes que pose – notamment quant au travail du professeur – l'importation d'une telle situation fondamentale dans un milieu a-didactique pour l'élève. Nous défendrons, dans le chapitre 2, l'idée qu'une situation fondamentale est un schéma et non un modèle, et préciserons la différence entre ces deux notions.

II. MILIEU ET SITUATION : CONSTRUCTION DE LA SITUATION DU FLOCON DE VON KOCH

II.1 La construction de la situation

Il s'agit de construire une situation pour l'enseignement de la notion de limite. En se basant autant que possible sur ce qu'est un milieu des preuves de l'analyse, il devait être envisageable de réaliser une situation en classe, qui permette aux élèves de faire des conjectures sur des limites, et de valider ces conjectures avec des outils de preuve issus du système spécifique de preuve de l'analyse, que nous avions appelé SPA.

II.1.2 La recherche d'une dimension a-didactique

Pour des raisons énoncées dans Bloch (2000, chapitre 3), il paraissait difficile d'imaginer que les élèves puissent construire les critères de preuve utilisées dans les démonstrations d'existence de limite, uniquement par confrontation avec un milieu. Il était plus que probable que le professeur serait obligé d'apporter, au moment choisi, dans le milieu de référence, les règles concernant la vérification de : "L est (ou n'est pas) une limite de la suite u_n ou la fonction f".

La mise en œuvre, dans une classe de Première Scientifique, de la situation construite, répondait au souci d'en tester la validité empirique : faisabilité, compatibilité avec l'enseignement en amont et en aval, identification des connaissances et des savoirs acquis et mise à l'épreuve de la qualité de ces apprentissages. D'autre part, la situation étant axée sur la recherche de limites mais aussi la validation de ces limites, l'un des objectifs de la recherche était de déterminer si cette validation s'avérait bien possible et effective dans les conditions de la situation construite. Il nous importait aussi de savoir si les élèves pouvaient se saisir des éléments de validation pour être capables de prouver ultérieurement, dans une autre situation, qu'un nombre L est bien limite d'une suite ou d'une fonction ; cependant, les conditions de l'expérimentation (dans une classe de Première scientifique, où le programme est lourd) n'avaient pas permis de travailler l'enseignement de l'analyse suffisamment dans cette direction.

II.2 L'organisation générale de la situation et ses variables didactiques

Le but général du jeu est de déterminer la limite d'une fonction ou d'une suite, et d'engager la preuve de la limite avancée. Pour cela, il faut disposer d'un milieu "matériel" constructible par les élèves, ou accessible dans un répertoire d'ostensifs qui leur soit familier ; d'un milieu heuristique, issu du précédent, sur lequel faire des conjectures de limites ; d'un milieu de référence permettant de formuler et d'étayer ces conjectures, et d'un milieu propre à la validation, qui comprend nécessairement des éléments du SPA[12], voire, sous une forme ou sous une autre, la définition d'une limite.

Dans l'organisation de la situation, certains choix se présentent comme des variables didactiques, dans la mesure où la détermination de ces paramètres change ce qui est à la charge des élèves, et le type de travail qu'ils seront amenés à faire en rapport avec la notion de limite. Tel est le cas :

- du choix entre fonction et suite ; de la nature de la ou des limites pressenties ;
- de la nature des fonctions ou des suites choisies : quelconques – de terme général connu – d'un type connu antérieurement des élèves ;

[12] Le Système spécifique de Preuve de l'Analyse, tel que nous l'avions étudié dans Bloch (2000), et que Legrand l'avait déjà défini (Legrand, 1991).

- du milieu matériel sur lequel les élèves vont pouvoir engager des calculs et des conjectures, bases du milieu heuristique puis d'un milieu pour la formulation des conjectures et leur validation ou invalidation ;
- des moyens de vérification et de validation disponibles dans le milieu.

II.2.1 Limite de fonction ou de suite

Le problème constituant la base de la situation est un problème de recherche de limite. A priori il est possible de choisir une limite de fonction ou une limite de suite. Cependant les limites de fonctions amènent à manipuler l'infini continu dans les deux ensembles de départ et d'arrivée ; par référence à la situation fondamentale de la notion de limite[13], il faut montrer que, pour tout $V \in \mathcal{V}(L)$, il existe $W \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $f(W) \subset V$. L'existence de W permet de mettre en œuvre la force du SPA (le système de preuve de l'analyse) qui fonctionne par condition suffisante et donc par perte contrôlée d'information et non plus par équivalence algébrique.

Ceci dans le cas d'avoir à prouver que L est limite ; mais pour prouver qu'une limite pressentie ne convient pas, il faut envisager l'ensemble des voisinages de x_0 dans P(F), et prouver qu'il existe un voisinage de L, tel que, quel que soit le voisinage de x_0 considéré, au moins un x de ce voisinage n'a pas son image dans ce voisinage de L. Il faut donc gérer des ensembles de voisinages du côté de x, et du côté des images et de L. Ainsi que le remarque Mamona-Downs (2001) il est beaucoup plus difficile de montrer que L *n'est pas* limite de la suite ou de la fonction.

Or les voisinages dans **R** étant des ensembles contenant des intervalles ouverts, ce sont bien des conditions sur le continu qu'il faut gérer à chaque étape.

Pour les suites au contraire, la condition sur les éléments de l'ensemble de départ est une condition sur du discret dénombrable, au voisinage de l'infini, ce qui revient à gérer des conditions du type : pour tout n à partir de N, soit $(\forall n > N)$. De plus, la limite d'une suite ne s'envisage qu'au voisinage de l'infini, alors que pour une fonction, il est possible de choisir une limite à l'infini ou en x_0 .

La justification qu'on peut donner, à ce niveau de l'enseignement, de la recherche d'une limite de fonction, est une justification graphique : savoir ce que devient la courbe au voisinage d'une valeur où f n'est pas définie, ou à l'infini. Mais les particularités du graphique font que cette justification est très sujette à caution : puisque le caractère réducteur du graphique ne permettra pas de représenter ce qu'on dit chercher pour lever cette indétermination de la RGC[14], quel est l'intérêt de chercher, pour préciser le graphique, une limite qui ne pourra se voir sur ce même graphique ?

Il est donc plus facile de justifier la recherche de la limite d'une *suite* dans la logique et la culture de la classe ; en effet les renseignements que l'on peut avoir sur les premiers termes de la suite ne nous disent rien sur ce qui se passe "à l'infini", autrement dit lorsque n continue à augmenter indéfiniment (idée de l'infini potentiel). De plus, cette recherche peut s'appuyer sur des paradigmes culturels et des supports visualisant la progression de n "vers l'infini".

II.2.2 Supports culturels et matériels

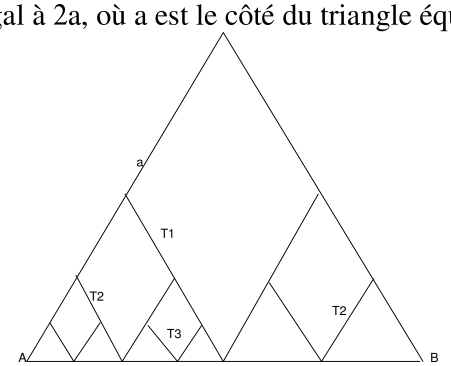
Ces supports peuvent être de type cinématique comme le paradoxe d'Achille et la tortue, qui illustre bien l'idée de l'infini potentiel, par un personnage qui continue à avancer et ne s'arrête jamais ; ou géométrique, comme les polygones inscrits dans un cercle, dont on double à chaque étape le nombre de côtés ; ou numériques, comme la recherche d'une solution d'une équation par encadrement et dichotomie, qui pourrait sembler être une bonne entrée dans l'analyse, car ce problème pose d'emblée la question de l'existence de la limite.

[13] Voir Berthelot R. et C.,(1983) ; Bloch (2000, chapitre 3).
[14] Représentation graphique cartésienne.

En effet le travail sur les nombres est le plus adapté à la validation en analyse, car il permet d'introduire la représentation par un voisin, c'est-à-dire le fait qu'à partir d'un certain rang, le terme de la suite diffère de la limite de moins que ε , 10^{-p}, un nombre fixé à l'avance. Mais la résolution d'une équation par dichotomie pose d'entrée le problème de l'intersection d'une infinité d'intervalles emboîtés, problème dont les élèves n'ont à ce stade pas les moyens (les connaissances) de se saisir. D'autre part cet exemple présente un inconvénient majeur : la suite dont on s'occupe n'est pas explicitable, on ne sait pas exprimer son terme général en fonction de n, donc tout travail sur des ostensifs à la portée des élèves est rendu très difficile à organiser, en particulier l'utilisation du numérique explicite (calculs) est impossible[15]. Par contre le numérique :

- d'une part permet de s'appuyer sur des connaissances antérieures des élèves, même si ces connaissances sont des relatives à des valeurs discrètes ;
- d'autre part permet d'introduire la représentation par un voisin.

L'approche géométrique a pour elle de donner des ostensifs à visualiser, c'est-à-dire de permettre la construction d'un milieu matériel dans un environnement familier aux élèves, et dans lequel ils peuvent réinvestir des connaissances. Mais les "limites géométriques" comme la suite de polygones dont le périmètre a pour limite le périmètre du cercle, ont l'inconvénient de pouvoir donner lieu à confusion entre la limite d'une grandeur attachée à la figure géométrique considérée, et ce que serait une limite de la suite de figures avec la topologie de $\mathbf{R}^2$; or on sait bien que ces deux limites peuvent ne pas aller de concert, et que les représentations géométriques des limites sont dangereuses à cause de ces hiatus. Un exemple classique est celui des triangles qui tendent vers la base du plus grand d'entre eux, alors que le périmètre de la figure ainsi formée à chaque étape ne tend pas vers la longueur de ce même côté, car il est constant et égal à 2a, où a est le côté du triangle équilatéral de départ.



La raison pour laquelle la longueur de la figure T_n formée par les côtés des triangles situés au-dessus de la base, n'a pas pour limite la longueur de la base, est due au fait que même si on peut 'coincer' la figure à l'ordre n dans une bande de largeur ε au-dessus de la base, la figure oscille de plus en plus dans cette bande : la longueur du graphe est une fonction semi-continue inférieurement, et non continue, pour la norme uniforme sur $\mathcal{C}([a,b]\ \mathbf{R})$. Pour que la longueur de la courbe T_n tende vers la longueur de la courbe limite, à savoir la base du triangle de départ, il suffit que la dérivée de la fonction associée à T_n (si l'on prend un repère où l'axe des x ait le même support que le segment base [AB] du triangle, et l'on définit une fonction u_n dont la RGC dans ce repère est la courbe T_n) ait pour *limite uniforme* la dérivée de la fonction associée au côté base, c'est-à-dire zéro. En effet la longueur se calcule en intégrant $1 + (u'(t))^2$, où t est un paramètre de la courbe, et u la fonction, laquelle est dérivable sauf sur un ensemble

[15] La situation du pétrolier, étudiée par Di Martino, l'a bien montré.

dénombrable ; or u', en tout point de T_n où elle existe, est égale au coefficient directeur des segments, c'est-à-dire soit $\sqrt{3}$ soit $-\sqrt{3}$. Elle ne peut donc pas avoir pour limite uniforme zéro.

Si l'on analyse l'exemple ci-dessus, et l'exemple de la suite des polygones inscrits dans un cercle, on s'aperçoit que l'idée implicite que si T_n a pour limite le segment [AB] , alors la longueur de T_n a pour limite la longueur a = AB, peut venir aussi de ce que la 'figure limite' est visible, et donc que l'élève peut identifier la figure limite (au sens de la topologie des compacts de $\mathbf{R}^2$) et la limite de la grandeur, attachée à cette figure, considérée ; et ceci sans avoir les moyens (les critères) de décider quand la limite de la grandeur est bien la grandeur de la 'figure limite', et quand c'est faux.

Cet obstacle de la visualisation de la figure, et des découpages intuitifs qui s'y attachent en même temps que le raisonnement sur des 'indivisibles' et leur comportement en termes de limite, a été analysé par M.Schneider (1991), pour les surfaces et les solides.

Par conséquent, si l'on veut pouvoir utiliser les connaissances attachées au domaine numérique, et l'avantage, du point de vue de l'ostension, que représente le fait de pouvoir s'appuyer sur une figure, il faut éviter que la 'figure limite', au sens des points du plan, soit visualisable, afin que la confusion analysée ci-dessus ne puisse s'installer. En récapitulant les conditions auxquelles la problématique de départ doit être soumise si l'on veut obtenir l'apprentissage souhaité, il vient :

- Le problème de départ est géométrique donc visualisable ;
- La 'figure limite' n'est pas connue ni accessible facilement ;
- Le terme général de la suite peut s'exprimer en fonction de n, et si possible par une suite connue des élèves ou accessible à leurs connaissances ;
- La nature de la suite permet le travail numérique : conjectures sur la limite, et évaluation de ce que le terme u_n diffère de L de moins que ε .

Il existe des figures répondant à ces différentes spécifications, ce sont les fractales[16] : pour certains d'entre eux, les premières générations de figures sont constructibles facilement par les élèves : la courbe limite n'est pas facile à décrire ; on peut associer à la suite des générations de figures, un périmètre ou une aire qui est une suite dont l'expression du terme général n'est pas trop complexe (suite ou série géométrique) ; ils ont des propriétés curieuses, qu'on ne peut déterminer que par passage à la limite (par exemple, aire finie et périmètre infini). Ce qui devra cependant rester implicite dans la situation, ce sont les raisons pour lesquelles on ne rencontre pas, dans le cas choisi, de paradoxe comme celui signalé ci-dessus : les élèves n'ont aucune raison de mettre en doute, à leur niveau, le fait que la limite du périmètre est bien le périmètre de la figure limite[17].

II.2.3 Dialectique limite finie / limite infinie

Une approche empirique de limite par le calcul peut donner lieu à deux éventualités / conjectures : la limite est finie ou infinie (écartons pour l'instant la troisième alternative, d'une suite sans limite). Au niveau envisagé, les élèves n'ont aucune connaissance sur les limites de suites. Ils ne peuvent donc se référer à leur expérience pour décider si une suite 'ressemble' plutôt à une suite divergeant vers l'infini, ou à une suite convergente. Il semble donc qu'il serait souhaitable de leur présenter les deux cas, afin qu'ils puissent construire des connaissances et des critères sur ce qui fait que ces deux suites diffèrent, et en quelque sorte se référer à l'une pour pouvoir affirmer que l'autre n'est pas de même nature. De cette façon la situation comporterait au moins une référence interne, pour permettre de décrire le

---

[16] Cf. IREM de Poitiers (1996) Les fractales, réflexions et travaux pour la classe.
[17] Cf. '*Les géométries fractales*' de Alain Le Méhauté, Editions Hermès, Paris.

comportement différent des deux suites. Du point de vue de la dimension a-didactique, on peut prévoir que c'est là qu'un apport de connaissances du professeur sera nécessaire, pour :

- valider lors du débat sur la différence entre les deux suites ;
- introduire le vocabulaire pour parler de cette différence (ostensifs oraux de l'analyse);
- introduire les critères de validation permettant de prouver que les deux suites ont des limites qui ne sont pas de même nature.

Pour disposer de deux suites dont l'une converge, et l'autre diverge vers plus l'infini, il suffit de trouver un fractal d'aire finie et de périmètre infini : le flocon de von Koch vérifie cette propriété. De plus, de par son mode de construction, le périmètre et l'aire s'obtiennent comme des suites géométriques ou sommes de suites géométriques ; or les élèves ont étudié ces suites peu auparavant.

II.2.4 Moyens d'exploration et de validation

a) Exploration

Les élèves doivent pouvoir explorer la ou les suites calculées, afin d'être en mesure de faire des conjectures sur les limites. A cette fin il semble utile de prévoir l'usage de la calculatrice, afin qu'ils aient une première approche numérique de la limite.

Ceci comporte deux aspects :

- ils doivent pouvoir réinvestir et sans doute aussi questionner leurs connaissances numériques ;
- il faudra gérer les effets de la calculatrice : les problèmes d'arrondi, éventuellement les problèmes de représentation graphique de la suite, car les élèves à ce niveau ont presque tous des calculatrices graphiques ; il faut donc prévoir aussi de faire le lien entre les propriétés numériques de la suite et la représentation graphique de la fonction associée.

b) Validation

Le milieu des preuves (milieu de référence, cf. chapitre 2) doit comporter des outils de formulation et de validation des conjectures faites. La définition classique de la notion de limite paraît très abstraite et n'est d'ailleurs plus au programme ; sauf à faire une incursion du côté de l'analyse non standard, ce qui nécessiterait l'introduction d'une autre théorie, il est pourtant difficile de s'en passer. On peut néanmoins l'adapter en ne prenant comme voisinages de l'infini que les intervalles du type $]\ 10^p, +\infty[$ et comme voisinages de zéro les intervalles $]-10^{-p}, +10^{-p}[$, ou $]0, 10^{-p}[$ si l'on n'a affaire qu'à des suites positives.

Ceci suppose que les élèves soient capables de gérer des inégalités du type $u_n > 10^p$, ou $u_n < 10^{-p}$, et d'en déduire une condition sur n. Faute d'éléments préexistants de la théorie dans les connaissances des élèves, il faut prévoir qu'ils aient à le faire 'à la main'. Or ceci implique que les suites soient très simples.

Pour une suite arithmétique, il n'y a pas de difficulté ; mais les suites arithmétiques n'ont pas de limite finie. La suite la plus simple ayant une limite finie, envisageable à ce niveau, est une suite géométrique comme dit ci-dessus. Ceci suppose de savoir extraire une condition sur n d'une égalité comme : $a^n > 10^p$; dans l'ingénierie testée pour la thèse, nous avions utilisé pour ce faire les propriétés de la fonction logarithme.

Nous avions donc prévu un apprentissage minimum de la fonction logarithme. Ceci avait pu être fait lors de l'étude des suites géométriques, qui est au programme. Dans les classes où la situation a été expérimentée, il y a eu une demande d'apport de savoirs du professeur, concernant la façon mathématique de résoudre les équations données, comme $a^x = 10^p$. A ce niveau, les élèves n'ont aucune raison de penser qu'il existe des équations pour lesquelles on ne sait pas 'tirer x'. Ceci nécessite d'ailleurs une explication, car bien entendu on ne 'tire x' que parce que la fonction logarithme a été construite 'ad hoc'.

Moyennant cette introduction, on se trouve avoir résolu les difficultés techniques relatives à la validation : en effet les critères de validation des suites géométriques de limite nulle, comme celles qui tendent vers l'infini, en deviennent accessibles par le calcul. Il devient possible de jouer sur les valeurs de p avec des critères du type donné ci-dessus, comme $u_n > 10^p$ ou $u_n < 10^{-p}$ .On peut donc organiser le jeu des élèves, l'un des joueurs donnant une valeur de p, et l'autre devant fournir la valeur de n à partir de laquelle u_n vérifie la condition demandée, ou bien prouver que ce n'est pas possible. Il paraît raisonnable, pour une première approche, de s'en tenir à ces critères, et de ne pas essayer de généraliser avec la définition de Weierstrass. On peut penser que le jeu avec n et p suffit, dans un premier temps, à la construction de connaissances sur les limites.

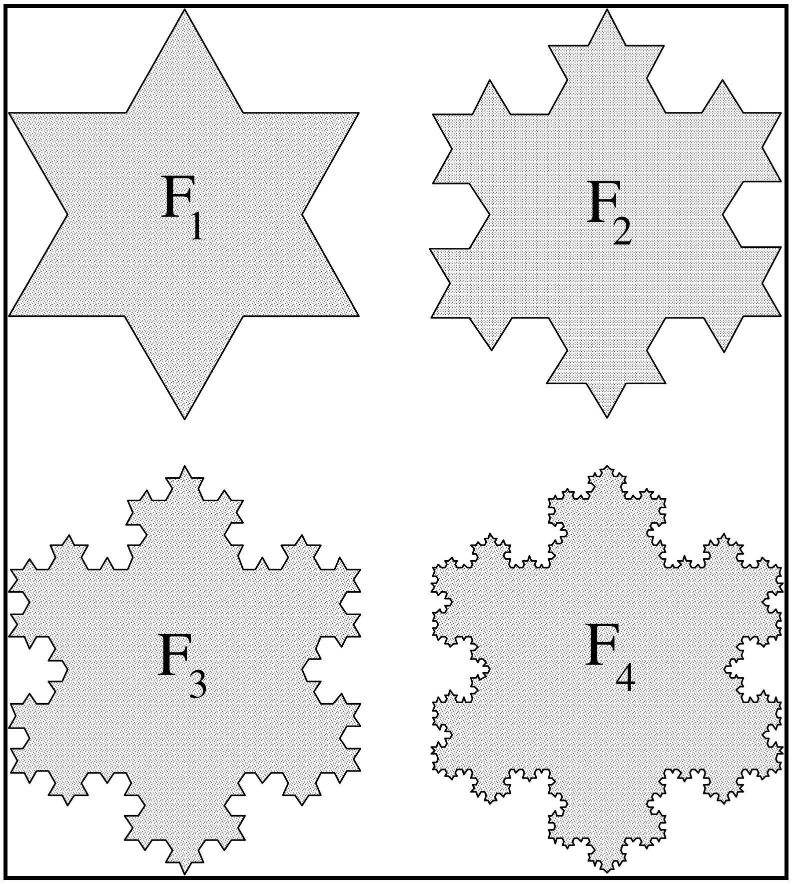
Cependant, tout en préservant le jeu décrit ci-dessus, il existe, dans le cas d'une suite géométrique tendant vers $+\infty$, une alternative au logarithme, qui s'avère meilleure d'un point de vue épistémologique et de l'utilisation du SPA, mais qui pose quelques difficultés ergonomiques et ne peut se généraliser aux deux suites de la situation du flocon. Cette alternative n'est pas celle qui avait été choisie dans les expérimentations de la thèse, nous en donnerons quelques raisons dans le III. Après la description de la situation, nous détaillerons cette deuxième possibilité.

II.3 La situation choisie : le flocon de von Koch

La situation adéquate est donc celle du calcul de l'aire et du périmètre du flocon de von Koch, après construction des premières générations des figures F_n. La construction est classique : la figure F_0 de départ est un triangle équilatéral ; on coupe chaque côté en trois segments de même longueur ; on supprime celui du milieu, que l'on remplace par deux côtés d'un triangle équilatéral construit sur le segment supprimé. Suivant le choix fait (flocon ou anti-flocon) les deux segments ajoutés le sont à l'extérieur ou à l'intérieur de la figure F_0 . Lors de l'expérimentation, le but étant d'obtenir des aires croissantes afin de disposer de deux suites croissantes pour lesquelles on sera obligés de trouver un critère de différenciation, il a été décidé de construire le flocon. L'anti-flocon pouvait être gardé pour réfuter les arguments prévisibles du type : l'aire et le périmètre se comportent nécessairement de la même façon.

II.3.1 Figures et calculs

Le point de départ est un triangle équilatéral de côté a (dans la figure envisagée, a = 18 cm).



a) Le périmètre du flocon

P_n est une suite géométrique de raison 4/3.

En effet, à chaque étape, on remplace chaque segment par quatre autres, de longueur égale au tiers du segment remplacé, donc : $P_n = \frac{4}{3} P_{n-1}$ On en déduit que : $\lim_{n \to +\infty} P_n = +\infty$

b) L'aire du flocon

L'aire A_0 est celle du triangle équilatéral de côté a: $A_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

A chaque étape, le nombre de triangles est multiplié par 4 et l'aire de chacun des triangles ajoutés est le neuvième de l'aire des triangles précédents : $A_2 = A_1 + 12\frac{A_0}{9^2}$

et $A_n = A_{n-1} + 3\frac{4^{n-1}A_0}{9^n}$

Finalement, en utilisant la somme de la série géométrique, on trouve :

$A_n = A_0\left[\frac{8}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$ et $A_\infty = \lim_{n \to +\infty} A_n = \frac{8}{5} A_0$

II.3.2 Le milieu objectif[18]

Le milieu matériel / objectif peut être constitué des figures F_n résultant de la construction des générations successives du flocon. Ce milieu permet :

- de calculer le périmètre et l'aire des premières figures F_0 , F_1 , F_2, F_3 , F_4 ;

[18] Les connaissances relatives à cette situation et à la structuration du milieu ont été étudiées dans Bloch (1995).

- de calculer le périmètre P_n et l'aire A_n de la figure générique F_n en fonction de n ;
- de formuler des conjectures sur les limites de P_n et de A_n.

II.3.3 Le milieu de référence

Le milieu de référence est constitué des conjectures sur les limites, et des éléments de preuve de ces conjectures, qui permettent de les confronter. Ces éléments de preuve sont numériques, et c'est certainement là que le professeur devra faire un apport de connaissances, sur le mode de validation de l'analyse.

Questions et éléments de validation qui pourront être mis dans le milieu :

- P_n dépasse la capacité de la calculatrice "vers le haut" ; peut-il également dépasser n'importe quel nombre ?
- A_n semble se stabiliser lorsque n grandit : l'aire devient-elle constante ? et sinon (comme le milieu matériel infirme cette conjecture) comment interpréter ce phénomène ?
- quels sont dans cette situation, les éléments variables, ceux qui peuvent être interprétés comme des fonctions ? quel est leur comportement (devenir "grand", devenir "petit", osciller...) ?
- en analyse, on peut traduire "devenir aussi grand qu'on veut" par : dépasser 10^p, et "devenir aussi petit qu'on veut" par : devenir plus petit que 10^{-p}. Peut-on utiliser ces validations pour interpréter le comportement de P_n ? et celui de A_n ?

II.3.4 La situation (le jeu)

Le jeu est un jeu à deux, un 'proposant' et un 'opposant' : étant donnée une suite, par exemple P_n , avancer une conjecture sur un nombre atteint par P_n , moyennant une condition à donner sur n. Un joueur A a en charge d'avancer des conjectures sur P_n , et l'autre B de donner n, à partir duquel P_n atteint la valeur proposée, ou de réfuter que P_n puisse atteindre cette valeur. A gagne si B n'est pas capable de fournir n ou de réfuter ; B gagne s'il donne n et peut prouver que c'est le bon, ou s'il réfute la valeur atteinte par P_n .

Le jeu avec A_n est plus complexe : les connaissances des élèves ne leur permettant sans doute pas de raisonner directement sur une limite éventuelle de A_n , il faudra d'abord que le jeu se centre sur le terme fonctionnel de cette suite, celui qui dépend de n, à savoir $(4/9)^n$; ceci implique que les élèves soient capables d'identifier ce terme, ce que la situation ne garantit pas. Il faut compter sur les connaissances des élèves relatives aux fonctions ; si ces connaissances sont défaillantes, le professeur devra intervenir. Après quoi le jeu est du même type que pour P_n , mais en montrant que A_n peut devenir plus petit que 10^{-p}.

II.3.5 Les variables didactiques

Parmi les variables de la situation « recherche de limite », on trouve, comme dit ci-dessus, le choix du support (fonction ou suite) ; une fois ce choix fait, s'il s'agit des suites, une variable est le type de suite ("quelconque", "quelconque explicitable", arithmétique, géométrique...) ; et le nombre de suites que l'on considère en même temps (une ou plusieurs). Ces variables ayant été fixées dans la situation choisie du flocon, il reste à fixer les variables spécifiques au jeu avec cette situation :

a) La calculatrice

L'usage de la calculatrice a été retenu pour permettre une exploration numérique des suites construites, et étayer des conjectures.

b) Le calcul des valeurs de P_n et A_n

Les valeurs maximales de n pour lesquelles on calcule effectivement P_n et A_n dépendent de la capacité de la calculatrice donc ne sont plus accessibles comme variables didactiques ; du reste il n'est pas sûr qu'elles auraient pu jouer ce rôle, ou alors cela aurait pu être au détriment de la nécessité de valider, si la classe disposait d'un instrument de calcul assez puissant pour inspirer l'idée que "on a atteint la limite".

c) Les valeurs de p pour lesquelles $P_n > 10^p$

Les valeurs de p pour lesquelles le jeu est organisé sont des variables didactiques car il n'est pas équivalent, pour les élèves, de prouver que $P_n > 10^2$ ou que $P_n > 10^{2500}$, même si en fait le raisonnement est le même ; d'ailleurs dans le premier cas, cela pourra être fait directement à la calculatrice, sans nécessité de passer par le raisonnement. Il faut donc que la situation, ou le professeur, impose des valeurs de p telles que le calcul de P_n ne puisse pas être fait directement à la calculatrice, celle-ci ne devant avoir qu'une fonction exploratoire, et le recours à la preuve devant s'imposer pour certaines valeurs de p (et a fortiori pour le cas général, mais il n'est pas souhaitable de l'introduire d'emblée sous peine de didactifier la situation).

d) La nature du nombre limite L

Dans le cas de la suite ayant une limite finie, la principale variable didactique est la valeur de cette limite, ou plutôt la nature du nombre L : entier, décimal ou idécimal. En effet une limite entière entraînera certainement une réponse par effet de contrat ; si par exemple la limite est 4, le calcul donnant des valeurs du type 3,999998 incitera les élèves, qui ont l'habitude de fonctionner dans le contrat classique où les nombres à trouver sont des nombres "simples", à donner la valeur "4" comme réponse la plus probable. Or le savoir suivant : "derrière" une suite de décimaux dont seules les dernières décimales changent, peut se cacher un nombre réel qui est la limite de cette suite de décimaux, ce savoir ne fait bien sûr pas partie des connaissances des élèves sur les nombres à ce stade de la scolarité. C'est justement l'un des objectifs de la situation, que de montrer la nécessité, dans ce cas, d'une validation spécifique, faute de pouvoir connaître la limite uniquement par le calcul de quelques termes de la suite, à la calculatrice. C'est aussi une première étape, par rapport à l'objectif plus général sur l'ensemble **R**, de pouvoir considérer tout nombre réel comme étant lui-même une limite (objectif qui ne fait pas partie des finalités de l'enseignement secondaire).

Il faut donc que la limite cherchée soit idécimale[19], ce qui imposera d'avoir à la calculer par une autre méthode que l'ostension de la valeur numérique approchée de quelques termes. Le flocon de von Koch est bien adapté à cette exigence, puisque le fait de partir d'un triangle équilatéral dont la longueur des côtés est un entier a, aboutit à une aire A_0 égale à : $a^2\sqrt{3}/4$, c'est-à-dire un irrationnel. Comme la suite des aires est une somme de suite géométrique dont la raison est rationnelle, il s'ensuit que toutes les aires sont irrationnelles, et la limite de la suite A_n est également irrationnelle puisqu'elle ne dépend que de A_0 , avec des coefficients rationnels. Ceci imposera donc aux élèves, qui ne pourront anticiper la limite facilement, d'avoir à valider la valeur de cette limite.

II.3.6 Les obstacles

Les obstacles prévisibles sont de deux sortes :

a) Ceux qui sont liés à l'emploi de la calculatrice et aux conceptions sur les nombres

[19] Bronner (1997) appelle *idécimal* un nombre qui n'est pas décimal ; cette catégorisation est plus pertinente, pour les élèves du secondaire, que la catégorie rationnels/irrationnels.

La capacité de la calculatrice est dépassée 'vers le haut' pour P_n , ce que les élèves peuvent interpréter comme le fait que le périmètre grandit indéfiniment, ou du moins plus que l'on ne peut le calculer. Mais surtout elle est dépassée 'vers le bas' pour A_n , les valeurs de la suite n'ayant plus l'air de changer ; l'interprétation de ce phénomène risque d'être une difficulté.

b) Ceux qui sont liés aux conceptions des élèves sur les grandeurs et les fonctions

- conceptions relatives aux grandeurs, en particulier le fait de faire un lien entre variation de l'aire et variation du périmètre ;
- conceptions relatives aux fonctions, en particulier la difficulté à identifier n comme variable, et à savoir faire le lien entre une expression qui est variable et le fait qu'elle contienne la variable n.

On peut alors prévoir a priori plusieurs types d'interprétations du calcul de A_n , suivant les conceptions des élèves sur les nombres et sur les grandeurs et les fonctions :

- l'aire est constante à partir d'un certain rang (conception du type "tout nombre est égal à la valeur lue à la calculatrice, soit un décimal ayant au maximum 10 chiffres après la virgule", à rapprocher de la conception "carré approché CA" rencontrée par Bronner (cf. Bronner 1997 page 182) ;
- l'aire augmente indéfiniment, comme le périmètre.

II.4 L'inégalité de Bernoulli pour une meilleure prise en compte du SPA

Dans le cas de la suite P_n, il est possible d'utiliser l'inégalité de Bernoulli pour conclure sur le comportement de la suite[20]. Cette inégalité : $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ peut se démontrer simplement en Première, soit par 'récurrence naïve' (n=1 ; n=2, etc…), soit en écrivant le produit de n termes égaux à $(1 + x)$ et en 'comptant' les termes obtenus puis en minorant.

On peut donc écrire $P_n = P_0 (1+\frac{1}{3})^n$, d'où $P_n > P_0 (1 + n.\frac{1}{3})$ et donc, pour avoir $P_n > A$ il suffit de prendre $n \geq N$, où $N = \frac{3A}{P_0}$.

Avec la calculatrice, les élèves trouvent facilement que $P_n > 1000$ pour n = 27. Or la méthode ci-dessus donne un N nettement plus grand que 27. La condition trouvée est donc visiblement suffisante mais non nécessaire, ce qui est une mise en évidence de l'efficacité du SPA, même (et surtout) lorsque les conditions suffisantes sont 'mauvaises'.

Il est même possible d'utiliser une 'meilleure' inégalité : $(1 + x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2$ dont on ne conserve que $(1 + x)^n \geq \frac{(n-1)^2}{2} x^2$; alors le N trouvé est de l'ordre de $\sqrt{A}$ et non plus de A. Ce calcul illustre bien l'un des principes essentiels du SPA : le raisonnement par condition suffisante est un raisonnement par perte d'information contrôlée.

Cependant, la situation du flocon repose sur le contraste entre les limites des deux suites P_n et A_n ; or, pour la deuxième, la suite géométrique qui détermine la limite est $(4/9)^n$. On ne peut, pour cette suite, trouver une inégalité de même efficacité que l'inégalité de Bernoulli : la présence de termes négatifs induit, dans un développement en série, l'impossibilité d'une majoration simple.

On peut certes envisager l'emploi de la méthode par l'inégalité de Bernoulli pour P_n et le logarithme pour la suite $(4/9)^n$: mais il ne paraît pas raisonnable d'introduire deux méthodes différentes, dans une classe de Première, pour une situation de découverte de la notion de limite, et de surcroît avec des contraintes de programme qui imposent un temps très court sur cette notion. Par contre, cette éventualité serait très intéressante pour des étudiants de niveau plus avancé : elle leur montrerait comment, grâce à des conditions suffisantes, on 'optimise' le

[20] Je remercie M.Rogalski pour m'avoir suggéré cette alternative pour la validation.

travail de la détermination de N lorsqu'on dispose d'inégalités simples, et comment on cherche une autre méthode lorsque c'est impossible.

Il est possible aussi, pour la suite de terme général $(\frac{4}{9})^n$, d'en prendre l'inverse $(\frac{9}{4})^n$, et d'appliquer Bernoulli ; on obtient alors : $(\frac{9}{4})^n > 1 + n\frac{5}{4}$ soit $(\frac{4}{9})^n < \frac{1}{1 + n.\frac{5}{4}}$ donc, pour que l'on ait $(\frac{4}{9})^n < A$ il suffit que $n > \frac{4}{5A}$ soit $n > \frac{1}{A}$. Ceci signifie que pour que $(\frac{4}{9})^n < 0{,}01$ il faudrait prendre $A > 100$ or $(4/9)^{100} \approx 2{,}1.\ 10^{-35}$.

III. ANALYSE A PRIORI : DEROULEMENT PREVU

III. 1 Calculs et tests a la calculatrice

III. 1.1 Calcul de Pn et An

Le calcul de P_n ne devrait pas poser de difficultés, car cette suite est géométrique de raison 4/3. Celui de A_n est plus délicat, car :

- il faut compter correctement le nombre de triangles que l'on ajoute à chaque étape, or ce nombre est 3×4^n pour passer de la figure F_n à la figure F_{n+1}, et donc 3 pour passer de F_0 à F_1 ;
- à chaque étape l'aire de chacun des triangles ajoutés est égale à 1/9 de celle des précédents, si bien que les exposants de 9 et de 4 ne sont pas les mêmes ; or beaucoup d'élèves de première ont encore des difficultés avec le maniement des exposants ;
- l'aire de F_n est une somme de suite géométrique, ce qui nécessite de contrôler le nombre de termes de la somme ; or on sait que c'est une difficulté pour les élèves.

On peut envisager que le professeur apporte une aide à ce calcul, par exemple en suggérant de faire un tableau permettant de compter les triangles ajoutés et l'aire de chacun d'eux, lorsque l'on passe de F_n à F_{n+1}.

III.1.2 Transformation de l'écriture algébrique de An

La deuxième étape importante consiste à mettre A_n sous une forme plus propre au travail numérique, en utilisant la formule de somme d'une suite géométrique. Il peut apparaître à cette occasion des difficultés relatives à la compréhension de cette formule et à son utilisation dans ce cas précis, c'est-à-dire à la mise en œuvre des connaissances d'algèbre des élèves. Là encore il est possible qu'une aide du professeur soit souhaitable ; cependant l'organisation du travail en groupes de quatre élèves devrait assurer la réussite de cette phase ; en effet si certains élèves ont des difficultés avec l'algèbre, d'autres au contraire sont tout à fait performants dans l'application des formules.

III.1.3 Tests à la calculatrice

a) Pour Pn

Ce que la calculatrice peut permettre de repérer, c'est :

- que la suite P_n est croissante, ce qui peut être validé facilement, et par le milieu matériel, et par les connaissances des élèves sur les suites géométriques ;
- qu'à partir d'un rang à trouver, la valeur de P_n dépasse la capacité de la calculatrice.

Les conjectures qui pourront être faites à partir de ces constatations sont au nombre de deux :

- soit P_n dépasse toute capacité supposée de n'importe quelle calculatrice, c'est-à-dire qu'elle n'a pas de maximum ;
- soit P_n a un maximum, à déterminer.

b) Pour An

Pour l'aire les élèves vont pouvoir calculer un certain nombre de termes ; mais le phénomène qu'on observe à la calculatrice est moins facile à interpréter que dans le cas de P_n : en effet la suite semble se stabiliser et devenir constante. Cette affirmation peut cependant être contestée grâce au milieu matériel, puisqu'il est clair qu'à chaque étape, on rajoute des triangles, même s'ils sont de plus en plus petits : l'aire est donc strictement croissante. Le premier calcul de A_n doit d'ailleurs confirmer cette propriété, puisque ce calcul fait apparaître une somme de termes tous positifs, un terme étant ajouté à la somme à chaque étape. Le milieu matériel et objectif fournit donc une rétroaction qui permet de mettre en doute l'apparente constance de la suite des valeurs calculées à la calculatrice ; il ne s'ensuit pas pour autant que le comportement de la suite A_n soit facile à interpréter pour les élèves.

III. 2 Conjectures sur les limites

III. 2.1 La limite de la suite Pn

Un nombre raisonnable d'élèves devrait conjecturer que la suite P_n tend vers l'infini. Cependant, il ne faut pas surestimer les connaissances des élèves sur les nombres ; certains ne vont sans doute rien inférer de ce que P_n dépasse 10^{99}, qui est la capacité supérieure de la plupart des calculatrices (en 1998 du moins !). Il est par contre très invraisemblable que des élèves puissent postuler une limite, qui serait supérieure à 10^{100}, rien dans leur expérience antérieure n'ayant pu les confronter à une telle éventualité. Comme dit ci-dessus, ils peuvent par contre imaginer un "maximum très grand" pour P_n , ce qui serait l'équivalent pour eux d'une limite.

Quelles sont les connaissances qui permettent de faire des conjectures sur la limite de P_n ? L'idée qu'une suite, dont chaque terme est égal au précédent multiplié par 4/3 , "grandit très vite" ; l'idée aussi que la capacité d'une calculatrice plus grande aurait été tout aussi bien dépassée : on aurait pu aussi bien dépasser 10^{999} , ou 10^{9999} , ou toute autre puissance de 10. Le dessin de figures successives offrant un support, on peut penser que cette conjecture pourra être posée par les élèves.

III.2.2 La limite de la suite An

Il paraît très improbable, étant données les connaissances des élèves sur les nombres, qu'ils soient capables de postuler l'existence d'une limite finie pour la suite A_n . Par contre, ils peuvent grâce au milieu matériel, trouver des arguments pour étayer l'idée que A_n est bornée (le flocon est inscrit dans le cercle circonscrit au triangle de départ). D'autre part la suite A_n est croissante, tout comme P_n ; il y a donc une confrontation due au fait que, bien que toutes deux croissantes, elles n'évoluent pas de la même façon.

Quelles connaissances permettraient de postuler une limite finie pour A_n ? la principale est qu'une suite dont on calcule des valeurs à la calculatrice, et dont les valeurs ne changent presque plus (seuls les derniers chiffres changent puis se stabilisent), est *peut-être* une suite dont le terme u_n calculé diffère de moins de 10^{-p} d'un nombre fixe : autrement dit, pour penser que cette suite "tend vers un nombre L" il faut *déjà* connaître la notion de limite. C'est ce qui fait que l'ostension numérique est inefficace, car elle suppose déjà connue la notion qu'elle prétend introduire.

Par ailleurs l'ostension numérique, à supposer que l'on puisse envisager de s'appuyer sur elle, repose sur un résultat faux : disposerait-on d'un ordinateur permettant de calculer une valeur approchée avec un million de décimales, de A_n pour une très grande valeur de n, que l'on ne serait pas plus assuré, théoriquement, de connaître la limite de la suite A_n , ni même de savoir si A_n converge.[21]

D'où peuvent alors provenir les conjectures sur A_n ? seulement d'un engagement dans une procédure de reconnaissance d'un terme fonctionnel dans la formule donnant A_n, et des conjectures sur ce que devient ce terme lorsque n grandit indéfiniment ; ou d'une possible reconnaissance d'une symétrie de comportement entre une suite géométrique qui tend vers l'infini et une suite géométrique qui tend vers zéro.

Dans ce processus de reconnaissance d'une suite de même nature que celle obtenue avec P_n, mais de limite différente, il est clair que l'étape de conjectures et de validations sur P_n est essentielle, puisque sans elle, il ne peut y avoir d'engagement dans ce processus. Ceci revient à dire que la situation ne donne pas l'accès directement aux suites de limite finie, mais prévoit un passage obligé par une suite de limite nulle, et ceci par référence à une suite déjà étudiée de limite infinie.

III.3 Débat et validations

III.3.1 Débat pour Pn

Il ne peut être prévu de débat que si les élèves ne font pas tous les mêmes conjectures, ou bien ne sont pas capables d'étayer leurs arguments. On peut faire deux remarques :

- la situation mise sur le fait que les connaissances des élèves sont insuffisantes au départ pour trancher entre les deux conjectures pour P_n, à savoir P_n n'a pas de maximum ou P_n a un maximum ;
- il y a donc un débat possible, mais les critères de validation font partie des éléments du système de validation de l'analyse et sont inconnus des élèves, donc le professeur devra donner, à un moment du débat, ces critères.

III.3.2 Débat pour An

Comme dit ci-dessus, pour P_n les critères peuvent être introduits directement à partir de la question qu'on se pose : "Est-ce que P_n peut dépasser 10^p ?" , alors que pour A_n, il va falloir transformer la question en identifiant d'abord que $(4/9)^n$ est le terme variable de la suite, et en posant la question pertinente par rapport à ce terme. Puis les élèves devront utiliser implicitement deux règles particulières de l'algèbre des limites : la première, que si u_n a pour limite zéro, alors $k\times u_n$ a pour limite zéro ; puis la deuxième, que si v_n a pour limite zéro, alors $v_n + L$ a pour limite L. Il n'est pas prévu que ces deux règles soient démontrées à ce moment-là, ou que la situation puisse les valider autrement que par une vérification empirique : on peut calculer à la calculatrice une valeur approchée de la limite L trouvée, et constater que cette valeur approchée diffère peu des valeurs trouvées à la calculatrice lors du calcul des termes de la suite An .

Cependant cette "vérification" ne sera effectuée qu'à la demande des élèves, et en précisant bien son statut ; en effet les règles énoncées ci-dessus font partie du SPA, le débat s'effectue dans une phase de validation et d'institutionnalisation, donc il n'est pas souhaitable de revenir à une phase de recherche dans le milieu objectif.

[21] C'est d'ailleurs une difficulté importante que pose l'actuel programme de Première et Terminale, relativement à l'articulation avec les savoirs enseignés à l'université.

III.3.3 Institutionnalisation

Les critères de validation introduits ainsi que les notations usuelles des limites sont institutionnalisés par le professeur en fin d'apprentissage. La définition d'une suite tendant vers plus l'infini est donc institutionnalisée sous une forme équivalente à : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, si et seulement si, $\forall p, \exists N / \forall n > N, u_n > 10^p$ (où p, n et N sont des entiers), même si l'écriture formalisée de la définition n'est pas forcément donnée par le professeur, et pas exigée des élèves. De même la définition équivalente d'une suite (positive) convergeant vers zéro est : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ si et seulement si : $\forall p, \exists N / \forall n > N, u_n < 10^{-p}$. Les deux règles énoncées ci-dessus, sur la limite de $k.u_n$ et de $v_n + L$, feront aussi partie des savoirs énoncés durant le processus d'institutionnalisation. On peut en effet considérer que ces règles devront faire partie des savoirs de la classe, savoirs réutilisables dans un autre problème de limite.

IV. UN EXEMPLE DE DEROULEMENT EFFECTIF

Les expérimentations ont eu lieu dans des classes de Première S du lycée Saint-John Perse, à Pau. L'une des classes où la situation a été filmée est une classe de 35 élèves, d'un niveau moyen pour une Première scientifique. Trois élèves sont très brillants, une dizaine d'autres ont un bon niveau, 9 sont en difficulté.

IV.1 Calculs et conjectures pour P_n et A_n

La transcription de la séance du 16/02/96 où ce calcul a été effectué, figure dans Bloch (2000), en annexe.

IV.1.1 Formule du terme général de la suite

Le calcul du terme général de P_n est relativement aisé. Les élèves utilisent des raisonnements du type : "On remplace chaque segment de longueur x par quatre segments de longueur x/3, donc la longueur est multipliée par 4/3". Ils en déduisent la longueur P_{n+1} en fonction de la longueur P_n , puis P_n en fonction de n, grâce aux connaissances sur les suites géométriques.

Le calcul pour A_n pose comme prévu plus de difficultés ; de plus certains élèves sont bloqués car ils n'arrivent pas à calculer A_0 , et ne peuvent imaginer se lancer dans le calcul sans connaître sa valeur, puisque chacun des petits triangles ajoutés a pour aire une fraction de l'aire du triangle de départ. Le professeur apporte donc une aide au calcul de A_0 , afin de débloquer le travail du groupe. Il apporte aussi une aide à l'organisation du calcul pour la première forme de A_n (suggestion de disposer en tableau, le nombre de triangles ajoutés et l'aire de chacun d'eux). Utiliser la somme d'une série géométrique pour mettre A_n sous la forme définitive souhaitée n'est pas évident pour certains élèves ; il y a là, comme prévu, l'occasion d'un travail algébrique au demeurant intéressant à ce niveau. On peut d'ailleurs observer, au n°17 de la transcription du 16/02/96, un épisode didactique concernant ce travail algébrique : une élève comprenant à cette occasion, avec l'aide de sa collègue, que la formule donnant S_n s'écrit ($\mathbf{q^n - 1}$) / (1 - q) et non $\mathbf{q^{n-1}}$/ (1 - q)[22].

IV.1.2 Recherche empirique à l'aide de la calculatrice

La question étant posée : « Que deviennent le périmètre et l'aire quand on a itéré le procédé 'jusqu'à l'infini' ? » , le professeur demande ce que l'on pourrait faire pour avoir une

[22] Difficulté qui était passée totalement inaperçue du professeur.

première idée de la réponse à cette question. Des élèves proposent de calculer P_n et A_n , et se posent alors plusieurs questions :

- pour calculer il faut la valeur de P_0 et A_0 ; elles sont calculées pour a = 18 , la valeur en cm du côté de la figure F_0 tracée par les élèves ;
- certains élèves n'identifient pas une fonction dans les données, or ils ont manifestement l'habitude de calculer f(x) pour des valeurs de x, et sont déroutés :
- pour certains élèves, il n'est absolument pas évident, malgré la formulation de la question, qu'il soit intéressant, ne serait-ce que dans un but heuristique, de prendre des « grandes valeurs » pour n. Cette difficulté avait déjà été rencontrée par C. et R. Berthelot lors de l'expérimentation qu'ils avaient faite en classe de Première littéraire pour leur DEA (Berthelot 1983).

Il faut donc croire que l'appui sur l'infini culturel n'entraîne pas automatiquement la compréhension du fait que n peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut. Pour les élèves qui ne voient pas de contradiction, entre le fait de dire que « n tend vers l'infini » et le fait de se limiter n à des « petites » valeurs, par exemple 5 ou 10, l'approche qui est généralement proposée dans les manuels (calculer u_n pour n égal à 10, 100, 1000, 100000 …) risque de n'avoir guère de sens.

a) Calcul de P_n

Le calcul de P_n permet de déterminer comme prévu, qu'à partir de n = 786 , P_n dépasse la capacité de la calculatrice.

b) Calcul de A_n

Le calcul de A_n se heurte à une difficulté non prévue : les élèves ont programmé leur machine (TI 81) en tabulation automatique avec deux chiffres après la virgule. Une discussion s'engage avec le professeur, où manifestement il y a malentendu. Des élèves disent que A_n est **égal** à 224,48, pour n = 27 ; d'autres pensent que c'est impossible. Le professeur, ayant enfin compris l'origine de la difficulté, intervient pour demander l'affichage de tous les chiffres disponibles ; mais ceci ne fait que reporter le problème, comme en témoigne la remarque d'un élève : « Elle est stabilisée ». Un élève arrive à calculer A_{33} , et un autre A_{36} , mais là encore les élèves butent sur le problème d'arrondi, et trouvent contradictoire qu'une machine puisse afficher 224,47378461 et l'autre 224,4737846091 pour une valeur de n supérieure, alors que la suite est croissante ; ceci prouve bien qu'ils n'ont pas compris le mécanisme d'arrondi.

IV.1.3 Conjectures sur les limites de P_n et A_n

Les conjectures sur les limites de P_n et A_n se déroulent comme prévu. Pour P_n , il n'y a qu'une moitié des élèves de la classe environ qui pense que la suite « a un maximum infini », les autres pensent que P_n est bornée, même si l'on n'est pas capable de déterminer son maximum.

Lors du débat, les élèves soutiennent plusieurs idées :

- A_n est bornée, car on ajoute des quantités, mais de plus en plus petites ;
- A_n est bornée, car le flocon est inscrit dans l'hexagone construit à partir de la figure F_1 de départ (cet hexagone ne sera pas précisé davantage, mais plusieurs élèves le dessinent) ;
- le périmètre augmente indéfiniment ;
- le périmètre et l'aire se comportent de la même façon ;

- n devient infini, mais A_n « prend des valeurs », ça « rajoute des décimales », tout en restant inférieure à l'aire de l'hexagone.

Cette dernière idée est en fait une affirmation de ce que A_n est une *fonction*, n étant la variable, et que la variation de n ne détermine pas celle de la fonction : autrement dit que les deux suites n'ont aucune raison de varier de la même façon. Le professeur fait alors un apport de connaissances sur l'aire et le périmètre, avec un contre-exemple, afin de tenter de régler ce qui est un obstacle depuis l'école primaire : en cycle 3 de l'enseignement primaire, on le trouve sous la forme « Deux figures de même périmètre (aire) ont forcément la même aire (périmètre) » ; ici il apparaît comme « l'aire et le périmètre d'une figure varient nécessairement dans le même sens ».

A l'issue de cette phase il apparaît bien que les élèves ne peuvent aller plus loin sans apport aidant à la validation : les critères de validation ne peuvent se dégager seuls d'une phase de recherche empirique. C'est donc à ce moment que le professeur doit prendre en charge l'introduction de savoirs, sous la forme du critère qui doit être mis en jeu : "si je donne un nombre, aussi grand que je veux, est-ce que P_n peut dépasser ce nombre ?"

IV.2 Validation et introduction du SPA

IV.2.1 Validation pour P_n

Le professeur donne la règle du jeu : on se donne un nombre, aussi grand qu'on veut, et il s'agit de déterminer n afin que P_n dépasse ce nombre.

a) Entrée dans la problématique et compréhension du jeu

Les élèves sont invités à proposer des nombres à dépasser, dans un premier jeu public destiné à familiariser la classe avec la problématique énoncée juste avant par le professeur. Or certains élèves proposent systématiquement des nombres plus petits que ceux qui ont déjà été trouvés empiriquement : ainsi 100, puis, lorsque 100 est rejeté car plus petit que P_{786} , un élève propose 5000, qui est rejeté pour la même raison. L'élève avance alors $5{,}92.10^{128}$; certains veulent alors essayer la calculatrice, bien que les essais empiriques aient prouvé qu'on ne dépasserait pas P_{786} .

b) Le jeu et les savoirs

Lorsque la méthode de recherche avec la fonction logarithme s'impose, les élèves trouvent très rapidement les premières valeurs de n. Le professeur a proposé de remplacer $5{,}92.10^{128}$ par 10^{129} pour simplifier le calcul, ce qui donne n >1019 ; le nombre suivant proposé par un élève est 10^{3637} . Un élève propose alors : « Et en général ? une règle générale ? » , sans même attendre que le calcul soit fait pour 10^{3637}. A ce stade de la validation, la réponse à la question est claire pour beaucoup d'élèves : ce qu'on est en train de faire avec 10^{3637} , on pourrait le faire avec 10^p , donc la suite P_n n'est pas bornée. C'est d'ailleurs ce qui est exprimé par plusieurs élèves, et résumé par le professeur. A la suite de cet épisode le professeur institutionnalise la définition d'une suite tendant vers plus l'infini, et la notation correspondante.

On a rencontré ici une demande de savoirs venant des élèves : on peut considérer que dès qu'ils ont compris le jeu, 10^{3637} joue pour eux le rôle d'expérience décisive ; que 3637, étant un nombre 'quelconque', joue pour un entier quelconque désigné par une lettre, et les élèves sont conscients que le jeu est fini, et que le calcul pour 10^p est le savoir qui permet de conclure. Il apparaît alors que la modélisation en terme de jeu est intéressante pour le professeur ou le chercheur qui étudie la situation, mais qu'en raison du niveau des élèves, ce jeu ne peut être joué effectivement que de façon extrêmement brève. Ce jeu peut-il néanmoins exister dans la classe comme référence de ce qu'est une suite tendant vers l'infini : il semble que c'est la recherche de la limite de A_n qui le dira. Si la métaphore du jeu est suffisamment forte pour les élèves, en dépit de la brièveté de son existence, alors ceux-ci vont pouvoir la réutiliser en l'aménageant pour trouver le comportement de A_n .

IV.2.2 Validation pour A_n

La validation pour A_n s'engage dans la troisième séance après que le professeur ait rappelé les résultats trouvés[23] pour P_n : $P_n > 10^p \Leftrightarrow n > \dfrac{p - \log 54}{\log\frac{4}{3}}$

Un premier calcul permet de simplifier l'expression de A_n obtenue par la somme d'une série géométrique. A partir de l'intervention d'une élève, le travail se focalise sur le terme $(4/9)^n$. Un autre élève entame directement un raisonnement du type "algèbre des limites" pour prouver que A_n a pour limite 8/5 A_0 : mais c'était déjà le seul élève persuadé que la suite A_n convergeait. Les autres élèves essayent de regarder empiriquement, à la calculatrice, ce que devient ce terme $(4/9)^n$ lorsque n grandit. Des élèves expriment alors que la calculatrice ne peut plus voir les accroissements de $(4/9)^n$. Une élève passe au tableau, et exprime que :

E : "Si $(4/9)^n$ tendait vers zéro, si on pouvait considérer que ça tendait vers zéro…" et le professeur demandant pourquoi $(4/9)^n$, elle affirme : "c'est la seule chose qui varie, quand n varie".

Le professeur repose la question : est-ce que $(4/9)^n$ tend vers zéro, en rappelant le critère utilisé pour montrer que $(4/3)^n$ tend vers l'infini. Après 10min de recherche, une élève va au tableau et explique que dans son groupe, les élèves ont cherché si on pouvait avoir : $(4/9)^n < 10^{-99}$. Ils ont trouvé n > 282 . Le professeur demandant si cette condition ressemble à celle trouvée pour le périmètre, l'élève répond avec décision : "Oui, n augmente".

Un autre groupe a fait de même avec $(4/9)^n < 10^{-100}$ et a trouvé n > 284 ; une autre intervient alors pour déclarer que son groupe a cherché si $(4/9)^n < 10^{-p}$, avec p quelconque ; Un élève dit alors : "Ça fait $n > \dfrac{-p}{\log\frac{4}{9}}$ " et à un autre élève qui ne comprend pas pourquoi on change le signe (< devient >) l'élève répond : "Mais log4/9 est négatif !".

On peut relever les connaissances très intéressantes mises en jeu par les élèves dans cet échange :

- connaissances sur les fonctions (identification du terme variable dans une formule) ;
- connaissances sur le sens du jeu et de ce qu'on cherche, ainsi la réponse de l'élève, "Oui, n augmente." ;
- connaissances sur la fonction logarithme : log4/9 < 0 , donc on trouve bien n supérieur à quelque chose de positif, ce que confirme le sens du jeu.

Remarquons que les interventions du professeur, dans cet échange, ne sont que des reformulations, ou des explications sur le fait que $\dfrac{-p}{\log\frac{4}{9}} > 0$, ou des questions demandant de préciser le sens des interventions. Il apparaît donc que les élèves manifestent un contrôle du jeu, qui les conduit à interpréter convenablement le résultat trouvé (n **supérieur** à…) et à se servir de leurs connaissances sur la fonction logarithme pour contrôler ce "n supérieur à". Il y

[23] Rappel : le côté a du triangle de départ est de mesure 18cm, d'où P_0 = 54 cm.

a là un double contrôle qui prouve que les élèves ont réinvesti le critère trouvé lors de la recherche de la limite de P_n , en l'aménageant pour une suite qui converge vers zéro, et que loin d'être déstabilisés par le calcul avec log4/9 , ils sont capables de retrouver la cohérence du résultat : n est supérieur à un nombre qui s'avère bien positif. La mise en œuvre du jeu avec P_n, bien que très brève, a donc permis de construire des connaissances relatives à la validation des limites.

La fin de la séance est consacrée à la mise en forme, par le professeur, du résultat concernant la limite de la suite A_n . Un résultat important de cette étape est que, si une suite u_n a pour limite zéro, alors $k.u_n$ converge aussi vers zéro.

IV.3 La situation du flocon : connaissances des élèves

IV.3.1 La situation jouée et les connaissances des élèves

La situation qui s'est déroulée est dans une large mesure celle qui avait été prévue : la recherche empirique des valeurs de P_n a permis aux élèves de poser des conjectures sur sa limite ; ils ont utilisé le critère de validation fourni par le professeur pour résoudre ces conjectures. Le calcul des valeurs de A_n a, plus encore que prévu, fait rencontrer des difficultés relatives à l'usage de la calculatrice et à l'interprétation de ses résultats. La situation n'a pu se dénouer que grâce à l'identification correcte, par les élèves, du terme fonctionnel de A_n . A cette condition, les élèves ont pu réinvestir, en l'aménageant, le critère de validation employé pour P_n , et ont fait preuve de beaucoup d'adresse et de maîtrise dans le calcul d'inégalité permettant de conclure sur la limite de $(4/9)^n$.

Les connaissances des élèves à l'issue de cette situation portent sur :

- le fait que deux suites peuvent être croissantes et ne pas avoir le même comportement à l'infini : celle qui est majorée converge, l'autre tend vers plus l'infini ;
- les critères de validation introduits (réponse aux questions : A quoi reconnaît-on — comment prouve-t-on — qu'une suite tend vers l'infini, ou converge vers zéro ?) ;
- un début d'algèbre des limites.

Et de façon annexe, la situation permet de traiter des connaissances sur :

- l'aire, le périmètre, et leurs variations ;
- les nombres idécimaux, la nature des nombres affichés par la calculatrice ;
- l'usage des formules sur les suites géométriques ;
- ce qui est fonctionnel (dépend d'une variable) et ce qui est constant dans une formule ;

la fonction logarithme.

En 1996, la situation du flocon, comportant une séance en modules (1H dédoublée), puis une séance de 2H en classe entière, puis une deuxième séance de travail en groupes (2H) s'est avérée compatible avec les contraintes institutionnelles : le programme de la classe ne prévoit pas de consacrer un temps trop long à l'introduction de la notion de limite, laquelle n'est pas, en Première même scientifique, un objectif en soi. Le principal objectif est en effet de parvenir au calcul de dérivées et à l'étude des fonctions usuelles à l'aide du signe de la dérivée.

V. CONCLUSION : LES SITUATIONS ET LEUR REALISATION

V.1 Sur les objectifs de la situation

La situation s'est bien jouée conformément à ce qui avait été prévu ; la dialectique : suite croissante tendant vers l'infini / suite croissante convergente, a fonctionné. Les critères de validité ont pu être mis en œuvre, et à partir de celui qui a été donné pour P_n , les élèves ont trouvé celui qui était adapté au cas d'une suite convergeant vers zéro.

Le calcul de A_n a permis de poser des questions fondamentales sur les nombres réels, en particulier les idécimaux. La situation a permis d'institutionnaliser une définition correcte d'une suite tendant vers 'plus l'infini', et d'une suite convergeant vers zéro, tout en ne sacrifiant pas le sens (référence à un milieu matériel et objectif).

Cependant, les cinq heures de travail sur la situation du flocon ne suffisent pas à assurer que les élèves ont bien assimilé les critères de validation des limites ; il est nécessaire de prévoir ensuite une phase de réinvestissement, sur d'autres suites peut-être plus compliquées, en tous cas de nature variée. Il est aussi indispensable de ne pas négliger le travail de la technique, tout spécialement dans ce domaine des inégalités, que l'on sait être difficile pour les élèves. Sachant que de plus il faut prévoir l'introduction de l'algèbre des limites, afin de s'affranchir, dans les cas simples, de démonstrations lourdes et afin d'augmenter le champ des exemples disponibles, il est clair que le temps prévu par l'institution pour ce processus est beaucoup trop court. L'introduction de la notion de limite, répétons-le, n'est pas un objectif prioritaire de la classe de Première (mais de Terminale non plus).

Les connaissances travaillées à cette occasion sont-elles alors superflues, ou au contraire participent-elles de façon fondamentale à la construction du savoir d'un niveau supérieur introduit à l'université ? Dans ce cas peuvent-elles se retrouver dans l'enseignement de la première année post-bac, soit que le professeur les travaille avec les étudiants, soit que ceux-ci soient amenés à retrouver seuls ces connaissances ? Cette question a été à la base de nos travaux sur l'enseignement supérieur (voir chapitre 3).

La situation du flocon met en jeu deux suites croissantes, dont l'une tend vers l'infini, l'autre a une limite. Le fait que les deux suites soient croissantes induit des propriétés particulières qui peuvent ensuite, si les élèves les généralisent en théorèmes pour les suites quelconques, s'ériger en obstacles (cf. Robert 1982). C'est un point qui avait été repris par Legrand (1991) et qui avait conduit, pour la situation du pétrolier, à choisir une suite qui oscille autour de sa limite. Ce choix conduit néanmoins à des validations hors de portée des élèves, ou du moins le professeur est obligé de faire un apport massif de savoirs pour valider la convergence ; de plus ces savoirs ne sont pas institutionnalisables et réinvestissables à ce niveau. C'est pourquoi la situation du flocon met en concurrence deux suites (en fait, une suite et une série) géométriques *croissantes*. Cependant il sera nécessaire de confronter ensuite les élèves à des suites moins régulières.[24]

A cette occasion on peut envisager de construire un milieu auquel confronter les questions posées, qui n'avaient pu être travaillées, comme la différence entre suite non majorées et suite tendant vers 'plus l'infini'. On peut aussi prévoir d'introduire un milieu pour travailler les suites adjacentes (lors de l'expérimentation de 1997 un élève avait affirmé – sans bien sûr le prouver – que la limite était nécessairement le plus petit majorant des termes de la suite), ce qui peut conduire à un travail sur la topologie de **R**.

V.2 Sur le SPA

Les élèves se sont confrontés à un milieu qui nécessitait bien, pour la validation, des éléments du SPA : à partir de questions sur des processus infinis, des infiniment grands et des infiniment petits, mettre en œuvre des procédés impliquant qu'à partir d'un certain rang, tous les termes d'une suite sont plus grands ou plus petits qu'un nombre arbitraire, fixé à l'avance. Pour cela ils ont manipulé des inégalités conduisant à des conditions sur la variable n : c'était

[24] Cela ne pourra bien évidemment être fait dans le temps imparti par l'institution 'enseignement secondaire' à l'étude des suites et leur limite.

l'un des objectifs de la situation, celui qu'on pouvait raisonnablement fixer par rapport à la validation.

Certes l'alternative citée en II.3 – utiliser l'inégalité de Bernoulli – aurait permis d'aller plus loin dans l'usage d'une caractéristique du SPA qui a été pointée comme essentielle, à savoir l'emploi de conditions suffisantes et non d'un algorithme pour déterminer un seuil à partir duquel une suite vérifie une certaine propriété ; cependant, le temps consacré par les programmes à l'étude des limites a conduit au choix de l'usage du logarithme. Par ailleurs, la difficulté restait pour l'étude de la suite $(4/9)^n$, à moins d'avoir relié déjà suite de limite nulle et son inverse, ce qui ne pouvait être fait à ce stade.

La situation ne permettait pas d'entrer plus avant dans le concept de limite, ou les méthodes de validation de l'analyse. En ce sens, comme dit plus haut, elle nécessiterait une suite qui pourrait prévoir d'entraîner les élèves à ces méthodes de validation, sur un champ d'exemples suffisamment varié. Dans les conditions actuelles de l'enseignement de l'analyse à ce niveau, ce n'est pas envisageable.

V.3 Dimension a-didactique et connaissances du professeur

La situation organise la confrontation des élèves avec un milieu matériel et objectif qui permet de poser des questions, et aussi d'invalider certaines réponses spontanées ou conjectures des élèves (par exemple que la suite A_n est constante à partir de n = 33). En ce sens cette situation comporte des phases a-didactiques. Cependant dans le milieu de référence les conjectures des élèves ne peuvent être validées par la seule confrontation au milieu matériel : le professeur fait des apports de connaissances en réponse aux questions ou aux hypothèses des élèves. La situation comporte alors une dimension a-didactique s'il y a bien interaction de connaissances, c'est-à-dire si la situation permet bien que les apports du professeur répondent à des nécessités pointées dans les connaissances des élèves, et donc si la situation est conçue pour que le professeur ne prenne pas en main totalement son devenir. D'après les transcriptions, les élèves ont pu manifester des connaissances jusqu'à la validation incluse. Le fait que l'on fasse reposer la dimension a-didactique sur un jeu auquel le professeur doit participer suivant certaines clauses, nous interroge cependant sur les conditions à réaliser du côté du professeur, et bien sûr sur la valeur intrinsèque, ou non, de cette dimension. Cela pose également le problème de la reproductibilité de la situation.

V.4 Sur la reproductibilité

La genèse de la construction de cette situation a mis en évidence trois phases : celle de la construction de la situation fondamentale n'a pas été détaillée ici car elle figure dans Bloch (2000) comme reprise de Berthelot C. et R. (1983). La phase de construction a priori et la phase de réalisation dans les classes sont des étapes distinctes et qui ne peuvent être confondues. Les questions de l'existence des phases de la situation du flocon, et de sa reproductibilité, ont été à l'origine d'un questionnement théorique que nous avons mené sur les concepts de la TSD.

La situation s'est jouée à deux reprises conformément à l'analyse a priori. Nous avons construit depuis, et fait expérimenter dans des classes, d'autres situations spécifiques de savoirs mathématiques du secondaire ; des situations destinées à l'enseignement supérieur int aussi été analysées avec les outils de la TSD (cf. Maurel et Sackur, 2002).

La construction, au niveau de l'enseignement secondaire, de situations contrôlées par la TSD fait apparaître – peut-être plus clairement que dans l'enseignement primaire – que les cadres théoriques sous-jacents aux différentes phases de l'étude d'une situation : la situation fondamentale, la situation projetée a priori, et la situation effectivement réalisée, ne sont pas superposables sans autre examen.

L'expérimentation de situations dans le contexte de l'enseignement secondaire fait apparaître d'une façon nouvelle les questions classiques de reproductibilité. En effet, les situations construites au COREM par Brousseau (Brousseau, 1998) pouvaient comporter plus de vingt séances, elles faisaient le choix – légitime à ce niveau – de suivre rigoureusement les formulations des élèves, avec des interventions du professeur qui se voulaient réduites ; elles prévoyaient que tous les élèves puissent passer par des phases d'action organisées en jeu. Ces phases devaient se répéter parfois ou se prolonger avec des variations prévues des variables didactiques sur le long terme. Ces conditions, légitimes chez des élèves très jeunes, sont peu compatibles avec le découpage des heures et l'organisation temporelle d'une année scolaire dans l'enseignement secondaire.

Par ailleurs, une question a été peu abordée dans la TSD : c'est celle de la diffusion des savoirs dans la classe, pour les élèves qui n'auraient pas réussi à participer de façon satisfaisante à toutes les phases de la situation – et surtout aux phases structurantes de la formulation et de la validation ; des élèves – et on en rencontre dans toutes les classes – qui verraient le premier jeu dans le milieu matériel, comme le but de l'enseignement, et qui n'arriveraient pas à passer le cap de la conceptualisation mathématique.

Or les situations que nous expérimentons à des niveaux d'enseignement post primaire conduisent à poser différemment ces questions de compatibilité et d'apprentissage des élèves. En effet,

- la compatibilité s'envisage comme l'insertion de séances portant sur de nouveaux savoirs et comportant des phases de recherche, dans le cours de mathématiques ;
- la question de la diffusion dans la classe des procédures de recherche et des moyens de réussir à résoudre le problème proposé se pose différemment au niveau secondaire, où les élèves disposent de moyens langagiers d'échanges et de règles mathématiques connues.

L'examen de ces questions dans ce nouveau contexte a nécessité un travail de reprise des concepts de la TSD : il nous a semblé que l'écrasement des différents niveaux de conception, de projet, et de réalisation des situations n'était pas propice à la recherche sur les modalités nouvelles que nous envisagions pour l'implantation de situations.

Nous nous sommes donc employée dans une part de nos travaux à clarifier les obscurités théoriques, et à préciser les concepts de :

- situation fondamentale, milieu théorique ;
- situation expérimentale, milieu expérimental a priori ;
- situation effectivement réalisée dans la contingence, milieu effectif rencontré par les élèves.

Cette étude nous a paru indispensable pour que le chercheur sache clairement distinguer ce qu'il peut attendre des différents niveaux, du point de vue de la recherche, et du point de vue de la faisabilité dans une classe. Nous rappelons au chapitre 2 les principaux résultats de ce travail, augmentés de quelques considérations sur la dévolution et le rôle du professeur (cf. Bloch, 2002b).

CHAPITRE 2

MILIEUX ET SITUATIONS DANS LA THEORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES

Quelques apports théoriques pour clarifier la dialectique théorie / contingence

I. SITUATION FONDAMENTALE ET MILIEU THEORIQUE

La théorie des situations didactiques base le travail de construction des situations sur une enquête épistémologique qui doit déboucher sur l'élaboration d'une situation fondamentale du concept visé, situation fondamentale dont est postulée l'existence, mais dont il n'a jamais été dit qu'elle était, ni effectivement réalisable, ni que le savoir visé était enseignable tel quel au travers de cette réalisation. La construction – théorique – d'une telle situation repose sur des principes issus de la théorie des jeux, qui vont pouvoir dans des cas favorables, être transposés pour parvenir à la construction d'une situation susceptible d'être expérimentée. C'est ce processus que nous avons étudié dans la théorie : il s'agissait d'exploiter les éléments d'expérience (donnés et construits par la réalisation effective de situations dans l'enseignement secondaire) afin de faire progresser les outils de la théorie didactique.

Le schéma de milieu des situations fondamentales est bâti sur la théorie des jeux et son but est, pour un concept donné, de trouver un jeu qui le fasse fonctionner comme connaissance – c'est-à-dire sans que l'on ait besoin de l'expliciter d'abord comme savoir – et qui vise à terme l'institutionnalisation des savoirs relatifs à ce concept.

Rappelons que Brousseau a défini les situations fondamentales dans deux textes assez anciens :

> "Admettons que le sens d'une connaissance provient en bonne partie du fait que l'élève acquiert celle-ci en s'adaptant aux situations spécifiques qui lui sont proposées (dévolues). Nous admettrons aussi qu'il existe, pour toute connaissance, une famille de situations susceptible de lui donner un sens correct. Dans certains cas, il existe quelques situations fondamentales accessibles à l'élève au moment voulu. Ces situations fondamentales lui permettent de fabriquer assez vite une conception correcte de la connaissance qui pourra s'insérer, le moment venu, sans modifications radicales, dans la construction de nouvelles connaissances." (Brousseau, 1986, p.67)

Et dans un texte de 1982, Brousseau pose la méthode d'analyse conduisant à déterminer une situation fondamentale selon trois conditions :

> "La théorie des situations propose de réaliser ce programme par la méthode suivante :
>
> a) Trouver une situation – problème fondamentale
>
> Il s'agit :
>
> a_1- d'énoncer un problème dont la solution nécessite l'emploi par l'élève de la connaissance seule (si possible sans que d'autres connaissances interviennent).
>
> a_2- de faire apparaître les variables de cette situation dont les changements de valeur provoquent des modifications qualitatives des stratégies optimales, ce qui indique une modification de la signification de la connaissance visée. De faire apparaître celles qui changent son statut cognitif :
>
> - En tant que moyen de contrôle de l'action
> - En tant que moyen de communication
> - En tant que moyen de preuve
> - En tant qu'algorithme de référence
>
> a_3- de s'assurer que la situation ainsi obtenue permet d'engendrer, par le système des variables tous les problèmes culturellement connus où la connaissance intervient.
>
> b) Examiner les difficultés et les échecs des élèves que permet de prévoir cette situation fondamentale fonctionnant de façon quasi isolée et les confronter aux observations.
>
> c) Il est alors possible de revenir à la situation fondamentale et d'étudier comment elle peut produire des situations d'apprentissage ou d'enseignement.
>
> (Brousseau, 1982, p. 198)

Nous qualifions ce modèle de *schéma théorique épistémologique* : il correspond à la recherche d'un milieu théorique (Mi_T) ; il a pour but de permettre l'analyse du savoir et de chercher à construire des situations fondamentales telles que décrites par Brousseau.

Un tel schéma (Mi_T) est construit d'abord à partir d'une théorie mathématique. Le premier niveau de schématisation, pour le chercheur, concerne la consistance de la relation entre :

- un concept ;
- une famille de situations caractérisées par un ensemble de rapports entre un sujet et un milieu.

La question est donc la détermination de milieux et de situations qui théoriquement permettront d'établir un rapport au concept visé. Dans cette famille de situations, il est nécessaire d'étudier les représentations envisageables du concept : tant ses représentations formelles que ses représentations par des actions ou des formulations. Il s'agit bien de ce que les épistémologues nomment une *schématisation*, soit l'interprétation d'un concept dans un système organisé de signes et d'actions. (cf. Descaves 1992)

Ainsi le Vocabulaire technique et analytique de l'épistémologie donne comme définition d'un tel schéma, dit schéma de description (d'un processus, d'un phénomène, d'un concept) :

"Schéma qui décrit un processus ou un phénomène en ne retenant que les éléments susceptibles d'être traduits sous forme de généralisation empirique ou de loi." (Nadeau 1999, p. 624)

Un schéma, dans le domaine des mathématiques, renvoie aussi à une traduction d'un concept dans une symbolisation interne à une théorie ; un tel schéma sera dit alors consistant, si,

> " il est satisfait par au moins une évaluation dans un univers possible. Autrement dit, un schéma est consistant s'il n'est pas contradictoire." (idem p.623)

La TSD propose donc de décrire la connaissance à enseigner dans un *schéma* rendant compte, soit de la fonctionnalité de cette connaissance, soit de ses propriétés essentielles et du rôle qu'elles jouent dans l'articulation avec les autres connaissances du même domaine en jeu mathématiquement. Ce schéma sera évalué sur sa consistance, comme nous l'avons dit plus haut : par une analyse soigneuse de la capacité de la situation proposée à traduire effectivement les principales propriétés mathématiques de la notion visée. La TSD s'est donné, pour cette analyse, un certain nombre d'outils qui ont fait leurs preuves : il s'agit de mener, comme le dit Legrand, une enquête sur les principales fonctionnalités du concept, dans les théories mathématiques où il est impliqué ; et d'évaluer si la situation envisagée est bien porteuse d'une partie de ces fonctionnalités. Ainsi par exemple, le projet de construire une situation sur la notion d'intégrale prendra en compte les notions mathématiques associées (fonctions et leur régularité plus ou moins grande, aires, dérivées, …) afin de circonscrire le projet (intégrale de Riemann par exemple, l'intégrale de Lebesgue étant jugée hors de portée pour une première approche et compréhension de la notion) ; mais l'organisation d'une situation où la notion d'intégrale joue comme outil avant d'être identifiée comme le savoir visé, à travers certaines de ses propriétés, demande de considérer l'intégrale dans d'autres contextes, par exemple celui de la physique dont cette notion est issue. Les notions de travail d'une force, ou de force d'attraction entre corps non ponctuels, apparaissent comme porteuses de ce que l'on veut faire apparaître comme propriétés, à savoir, qu'un calcul ponctuel ne peut en rendre compte (cf. Douady, 1987 ; Legrand 1996 ; Noirfalise, 2004 ; Rogalski, à paraître). De même un calcul de force exercée par une pression sur une paroi aurait pu donner accès au 'découpage infinitésimal' cherché.

Une fois les principales caractéristiques de la situation fondamentale ainsi définies, il reste à trouver les principales variables didactiques de la situation : l'étendue de leurs valeurs déterminera si *des* situations sont organisables en jouant sur ces variables. Ainsi dans la situation de l'intégrale, la nature non ponctuelle d'au moins un des corps en attraction est évidemment essentielle pour que le découpage s'impose – sinon des calculs ponctuels suffisent à obtenir la réponse de l'intensité de la force d'attraction, sans que le concept d'intégrale ait été convoqué.

Des études ont ainsi été menées sur la consistance d'une situation fondamentale de l'intégrale de Riemann (Legrand 1996), de situations pour l'enseignement de la notion de limite (Di Martino, 1992, Bloch 2000) ; on peut aussi bien entendu se reporter aux situations construites pour l'enseignement de la multiplication (exposée dans Briand et Chevalier, 1995) ; pour l'enseignement des rationnels et décimaux et de la proportionnalité (Brousseau, 1998 ; Comin, 2002). Comme dit plus haut, d'autres situations ont été exposées dans les ouvrages de l'INRP : ainsi le lecteur se reportera à Ermel CM1 (ERMEL 1997) pour l'exemple de la bande de papier, situation d'enseignement des fractions.

Cette démarche de décomposition des savoirs et de création de situations implique une hypothèse forte : c'est que l'on peut prendre, dans l'étude des phénomènes d'enseignement liés à un concept donné, un point de vue analytique partant de schémas du concept. Ces schémas du concept sont donnés à partir du savoir mathématique savant, qui permet d'analyser comment ce concept est décliné sous des habillages et des symbolisations, ainsi que dans des interactions avec d'autres concepts à l'intérieur de théories mathématiques. Cette analyse pourrait se calquer sur les expressions du savoir mathématique, et l'on n'aurait alors réussi qu'à reproduire les modalités de fonctionnement du savoir savant ; mais l'hypothèse de Brousseau est qu'il est alors possible – au moins pour certains types de savoirs – de trouver un problème dont la connaissance visée est la solution, et que ce problème peut être 'mis en scène' dans un jeu de l'élève où la connaissance n'est pas visible a priori, mais où elle apparaîtra comme commandant la stratégie optimale de réussite à ce jeu.

Adopter cette hypothèse comme valide conduira à un travail en plusieurs étapes :

- faire une analyse mathématique et épistémologique du concept et de ses inscriptions dans des systèmes de signes (ostensifs) ;
- admettre que l'on peut traduire ces interprétations en problèmes et donc en connaissances,
- ces deux étapes conduisant à la définition d'une situation fondamentale;
- étudier les possibilités pour cette situation fondamentale d'être importée dans un environnement didactique.

Il s'agit de comprendre *comment* fabriquer la situation fondamentale relative à un savoir, et qu'en faire. Pour ce qui est du *pourquoi* le faire, nous renvoyons au texte de Legrand :

> "Dans ce modèle *(la TSD, note de l'auteur)*, pour que le gain épistémologique soi substantiel, il faut que les élèves oublient en partie, tout au long de ce processus, qu'ils sont élèves, ne se soucient pas trop du jeu didactique du professeur, et que ce soit principalement l'induction des situations sur leurs connaissances propres qui les rende capables d'aborder en compréhension le savoir qui leur sera enseigné essentiellement comme clé de problèmes scientifiques.
>
> Cette théorie postule donc que, pour chaque notion mathématique enseignée à un niveau donné, il existe une situation ou un groupe de situations dans lesquelles la notion joue pour les élèves le rôle de réponse adaptative optimum." (Legrand, 1996, p. 228)

Et Legrand ajoute plus loin:

> "Même lorsqu'on ne trouve aucune situation vérifiant strictement les trois conditions fondamentales de G. Brousseau (…) la problématique de recherche des situations fondamentales demeure consistante pour la recherche en didactique comme pour l'enseignement.
>
> En d'autres termes, en cherchant avec obstination à construire des situations fondamentales 'introuvables', non seulement on est amené à parcourir les méandres du sens par lequel nos élèves ou nos étudiants doivent impérativement passer pour comprendre, on est conduit à buter à nouveau sur les obstacles fondamentaux (…), mais encore et surtout on est contraint à faire ce

parcours épistémologique dans une vision pédagogique très pragmatique : quelle mise en scène peut amener mes élèves (…) à se poser des questions scientifiques ?" (ibidem, p. 233).

La recherche de situations fondamentales n'est donc pas la recherche de l'introuvable situation menant à l'enseignement sans faille d'un concept – c'est une étape utile à qui veut saisir les alternatives possibles de l'enseignement d'une notion, et faire des choix raisonnés relevant d'une analyse épistémologique consistante[25]. C'est pourquoi il est nécessaire de clarifier les concepts de la TSD pour identifier les niveaux distincts d'intervention des différents types de situations ou de milieux : cette clarification doit permettre de produire des énoncés dans la TSD. Rappelons qu'un de nos objectifs est la construction de situations pertinentes aux niveaux secondaire et supérieur ; il en résulte qu'un énoncé souvent entendu jusqu'à une période récente, comme : "La TSD n'est pas applicable à ces niveaux" nous concerne particulièrement.

I.1. Construction d'un schéma de milieux de type "situation fondamentale"

I.1.1 Discussion sur l'existence d'une SF relative à un savoir

Comme il a été évoqué dans le chapitre 1, certains savoirs ont donné lieu à la construction de situations fondamentales ; d'autres ont été reconnus comme ne se prêtant pas à la construction d'une situation a-didactique. Actuellement, un certain nombre de questions sont donc au cœur des études de didactique, par rapport à l'élaboration de situations didactiques :

- tout savoir permet-il d'organiser un milieu renvoyant des rétroactions par rapport à des actions de résolution sur la base de problèmes fondateurs ?
- y a-t-il une caractéristique épistémologique commune aux savoirs mathématiques pour lesquels il existerait des problèmes fondateurs pouvant être à l'origine des principales modalités du savoir en jeu ?
- peut-on toujours organiser un jeu relatif à un savoir ;
- une situation fondamentale, à supposer qu'elle soit envisageable, est-elle toujours utile pour l'apprentissage ?
- quelles sont les conditions de la dévolution d'une situation a-didactique pour un savoir donné, en relation avec la nature de ce savoir ?
- quelle est la place de la dimension sémiotique ?

En l'état actuel de nos connaissances en didactique des mathématiques, certaines situations ont été construites et expérimentées pour certains savoirs ; comme nous l'avons dit, pour les savoirs FUGS l'existence d'une SF est difficile à envisager. Cependant, la TSD permet de s'interroger sur la nature des situations pertinentes pour l'enseignement d'un savoir, même en l'absence de SF ; elle n'a évidemment pas l'exclusivité de ce questionnement.

Le but de l'étude de ce chapitre est donc de préciser certains aspects des situations élaborées dans la TSD, lorsque les savoirs en jeu ont effectivement permis de construire des situations a-didactiques.

I.1.2 Nature d'une SF

Une situation fondamentale est déclarée telle, lorsqu'elle existe, car :

- elle engendre le champ mathématique visé (dimension mathématique / épistémologique) ;
- elle est générique du concept et des connaissances associées au concept, et elle utilise des connaissances antérieures des élèves (dimension cognitive dans une situation d'action / formulation / validation, cf. Brousseau 1998) ;

[25] Nous n'affirmons certes pas que c'est le seul moyen d'investigation épistémologique…

- le savoir visé est enseignable à travers cette situation (dimension didactique). Disons plutôt qu'il est envisageable de l'enseigner, ce qui signifie, non pas que la situation est transposable telle quelle dans une classe, mais qu'on peut imaginer un jeu effectif d'un élève jouant la situation.

Les regroupements de problèmes et de connaissances retenus pour élaborer le jeu de la situation fondamentale vont être spécifiques du concept visé ; le type d'interaction que celle-ci prévoit entre les acteurs du jeu – ainsi les problèmes retenus, les savoir-faire sur lesquels on s'appuie, les symboles utilisés – est relatif à l'organisation visée de l'activité mathématique.

Dire cela, c'est ne pas s'interdire de considérer comme situation fondamentale d'un concept, un regroupement organisé de problèmes pertinents pour ce concept, ce regroupement étant le réservoir de milieux constituant la base de jeux (d'action, formulation, validation) possibles à organiser et s'articulant dans une chronologie du développement des connaissances relatives à ce même concept ; autrement dit, un modèle souvent retenu, d'un seul problème qui à lui seul rendrait compte de l'essence d'une notion mathématique, est un schéma beaucoup trop restrictif : il doit être repensé compte tenu des circonstances et des exigences de l'enseignement d'un concept mathématique en fonction de sa complexité – qui tient à la fois à l'épistémologie du concept et aux problèmes qu'est susceptible de poser son enseignement (c'est un point sur lequel nous reviendrons plus loin).

Nous pouvons exprimer ceci en disant qu'une situation fondamentale relative à un savoir donné, doit théoriquement comprendre *tout* ce qui concerne le concept mathématique, situation 'originelle' mais aussi champ de problèmes. L'élève est par ailleurs partie prenante dans la situation : l'organisation de celle-ci prend en compte des variables relatives à ce qu'il est possible de faire faire à un individu dans la position d'avoir à apprendre le savoir visé – un joueur qui aurait pour projet de résoudre des problèmes avec ce concept, dans une situation qui lui laisserait une certaine liberté d'action contre un milieu fournissant des rétroactions ; ce milieu virtuel étant constitué d'un joueur adverse théorique, ou jouant en équipe avec lui, ou de plusieurs autres joueurs, ou de dispositifs ad hoc renvoyant des informations et des feed-back.

L'enquête épistémologique prévoit aussi une composante d'étude des registres symboliques à disposition, et de la façon dont ces symboles peuvent fonctionner dans leur dimension d'outil, pour la construction d'objets mais aussi pour l'énoncé et la validation de propriétés des objets mathématiques. Cette dimension prend en compte la composante des ostensifs nécessaires à l'expression des énoncés mathématiques ; elle s'avère aussi particulièrement importante dans l'organisation du milieu expérimental a priori.

L'individu- étudiant à qui l'on dévolue la situation – ce qui suppose, dans la contingence, des conditions de dévolution dont nous parlerons au paragraphe V – est sans doute un élève, mais non pas avec tout son assujettissement – social, institutionnel, psychologique – d'élève : dans la TSD il est appelé un *actant*. Un actant, c'est le sujet épistémique de Piaget, celui qui va agir comme un sujet rationnel dans la situation, c'est-à-dire uniquement en fonction des états du jeu ; qui s'inscrit dans des recherches visant à trouver les stratégies gagnantes et la règle du jeu que le professeur lui fait rencontrer ; qui accepte ensuite, de reconnaître dans ce jeu et dans les productions des autres actants, des éléments d'un savoir mathématique constitué qui lui est déclaré par le professeur dans le processus d'institutionnalisation.

Le jeu est constitué lorsqu'on a défini le rôle des actants et un milieu sur lequel le jeu peut se déployer ; ce milieu étant bien entendu construit à partir de l'étude épistémologique et des variables didactiques dégagées dans l'étude. Il s'ensuit que la définition d'une situation de type situation fondamentale, se fait par la construction d'un milieu – le milieu théorique que nous appelons (Mi_T) – et l'organisation du jeu d'un actant.

(Mi_T) peut donc être considéré comme une famille de questions finalisées (c'est-à-dire de problèmes organisés, ou organisables virtuellement), de répertoires symboliques avec leurs règles de fonctionnement[26], de variables didactiques… qui tous réfèrent au même concept mathématique. La problématique des situations fondamentales, c'est de se demander s'il existe un problème, ou plutôt un réseau de problèmes ayant pour solution le concept visé ; c'est-à-dire, s'il est possible a priori, pour quelqu'un qui connaît la solution, de retrouver les (des) problèmes, avec des variables à disposition. Autrement dit, les concepts de *situation* et *milieu*, qui dans la théorie des situations sont imbriqués, s'articulent de la façon suivante :

Le premier milieu épistémologique est l'environnement de problèmes à l'origine de la situation effective ; une situation étant spécifiée, les variables didactiques identifiées, un problème est construit et un milieu effectif est envisagé. C'est ce milieu qui va être le support de l'action (dimension heuristique), puis sur le deuxième milieu – objectif car basé sur les résultats de l'action, et constituant les objets dont les actants vont avoir à connaître – une dialectique de formulation est engagée ; la troisième composante de validation étant ce qui permet à l'actant d'argumenter avec un sujet capable de lui renvoyer des déclarations ou des questions de validité relatives aux résultats formulés (dimension de la connaissance théorique). Cette dernière étape parachève l'emboîtement théorique du schéma des milieux ; ces différentes étapes se retrouvent dans le milieu expérimental a priori – mais soumises à potentialité d'expérimentation effective, ce qui change leur statut.

La possibilité de construire une situation fondamentale d'un concept est à examiner au cas par cas en fonction du savoir spécifié et des jeux possibles. Il n'existe pas de moyen automatique de construction d'une situation fondamentale à partir d'un concept, il faut chaque fois en passer par l'analyse du savoir dans toutes ses dimensions, et identifier des potentialités de jeux qui vont permettre de définir des situations[27]. La construction de (Mi_T) s'obtient par un double contrôle : contrôle épistémologique et didactique, et le travail essentiel est de trouver et définir la situation, ou la famille de situations adéquate au savoir envisagé. Le contrôle épistémologique assure que la famille de situations a-didactiques débouchera bien sur le concept mathématique visé (car elle aura été construite à partir d'un problème spécifique de ce concept, et de la prise en compte des questions, modes de raisonnement, … de la théorie mathématique correspondante) et la construction d'un jeu possible a-didactique assure qu'il existe bien une possibilité d'interaction de l'actant avec un milieu adéquat, conduisant à mettre en œuvre des connaissances apparentées à ce concept. Construire (Mi_T), c'est donc organiser des éléments formels, une interaction virtuelle d'un actant avec ces éléments, des questions, des règles d'inférence, des interactions… qui soient constitutifs du concept visé.

On voit alors bien que ceci n'est pas du domaine de la modélisation mais de la schématisation : ainsi que le dit Descaves, (Descaves 1992, p. 13) : on schématise des concepts, c'est-à-dire qu'on les traduit dans un réseau de symboles et d'actions licites à l'intérieur de la théorie – mathématique – qui les porte, mais on modélise des actions et des phénomènes. L'analyse épistémologique d'un concept aboutit à l'identification de la traduction de ce concept dans un langage formel de symboles et de règles de déduction ; et c'est précisément à ce niveau que travaille la situation fondamentale, en mettant au jour les traductions formelles du concept, et les problèmes afférents possibles qui peuvent être

[26] Par exemple les règles du calcul algébrique, en particulier de constitution d'expressions algébriques valides.

[27] On peut interpréter la tentative des "maths modernes" de définir ceci directement du point de vue des mathématiques et de leurs ostensifs formels, ce qui s'est avéré illusoire.

envisagés (en mathématiques ou en sciences expérimentales si cette dimension est pertinente), avec la garantie que leur solution utilise bien la connaissance visée. Comme le dit Salin :

> "Il s'agit donc d'associer au savoir les connaissances correspondantes, sources de décisions à l'intérieur de la situation, et de déterminer quelle(s) situation(s) représente(nt) le savoir visé".(Salin, 2002).

I.2. Modélisation en termes de jeu

Dans la théorie des situations, l'hypothèse est faite que la situation peut se modéliser par un jeu :

> "- Le milieu matériel est un système susceptible de prendre un certain nombre d'états.
> - Un ou plusieurs autres systèmes (les joueurs) sont susceptibles de modifier les états du jeu par des décisions.
> - Certains états sont considérés comme meilleurs que d'autres par les joueurs en rapport avec l'enjeu du jeu.
> - L'ordre dans lequel les joueurs interviennent, les états entre lesquels ils ont le choix, les conditions d'arrêt de la partie, l'état initial sont déterminés à l'avance : ce sont les règles du jeu." (Salin, 2002)

Mais ce n'est pas ici n'importe quel jeu. La course à vingt en est un bon exemple (cf. Mercier, Sensevy, Schubauer-Léoni, 2001) : le jeu dont il est question est un jeu rationnel, normatif et *prédictif*, où chaque coup est mesurable en 0 ou 1 dans le milieu par le joueur à qui ce jeu-ci est dévolu. Cela confère à la dévolution correspondante une certaine difficulté, qui a été relevée dans de nombreux textes s'interrogeant sur les possibilités effectives d'organisation du jeu. Le projet que nous poursuivons dans ce texte, d'interroger les théories du didactique, va conduire à identifier les conditions de production de ce type de dévolution. Nous examinerons, dans le paragraphe consacré aux situations expérimentées, la nature de chacun des jeux organisés, et les contraintes de construction des situations.

I.3. Contraintes d'élaboration et fonctions du schéma

I.3.1. Contraintes d'existence

Les schémas théoriques que sont les schémas de milieux (Mi_T) ont soumis à un certain nombre de conditions, dont certaines seulement peuvent être dérivées des mathématiques constituées : consistance, cohérence, possibilité de jeu, nécessité d'existence de variables de commande de la situation, relations entre ces variables, existence de répertoires d'ostensifs adéquats au modèle…

Dans sa double dimension mathématique et cognitive, la SF doit prévoir explicitement tous les éléments matériels du problème, le déroulement théorique (ce qui est à la charge de l'actant, ce qui. est à la charge du milieu antagoniste), les variables de commande, les connaissances susceptibles d'apparaître ou de gêner le déroulement de la situation (obstacles), les conditions du déroulement des différentes phases de la situation ; sinon on ne pourra pas définir des observables et les confronter avec des faits. La méthodologie de construction et l'étude des fonctions de (Mi_T) comporte donc deux directions : la première étant celle du concept mathématique et des connaissances (modalité mathématique, épistémologique, sémiotique et cognitive) ; la deuxième étudie les jeux possibles de l'actant et les scénarios prévisibles avec les variables correspondantes.

I.3.2 Méthodologie d'élaboration et fonctions du schéma : *du côté du savoir mathématique*

On peut pointer les conditions nécessaires d'élaboration de la situation fondamentale:

- analyse de la structure mathématique du concept dont l'enseignement est envisagé ;

- analyse de la genèse historique du concept et ses manifestations anciennes ou contemporaines, ses fonctionnalités dans les mathématiques, les obstacles épistémologiques relatifs à ce concept ;
- mise en évidence des savoirs (mathématiques et culturels : ostensifs usuels) et connaissances (mathématiques ou culturelles ou personnelles) reliés au concept visé ;
- identification des problèmes relevant de ce concept et de leur expression dans les différents registres de représentation ;
- élaboration d'une situation problématique relative à ce concept, mettant en présence un actant et un milieu "matériel" susceptible de rétroactions : élaboration d'une situation *a-didactique* fondamentale du concept. C'est bien sûr l'étape clé, et celle qui a pu être vue comme la plus insolite, du point de vue des mathématiques pures : voir par exemple la situation des envahisseurs, présentée ci-dessous. Un point de vue mathématique entièrement 'académique' ne peut imaginer que la connaissance puisse être ainsi 'mise en scène'.

Il est à noter que cette étude doit viser autant que possible l'exhaustivité ; c'est aussi ce qui justifie le terme de situation fondamentale, en effet aucun des fondements du concept n'est à écarter dans cette analyse. C'est pourquoi on ne saurait trop mettre en garde contre les erreurs d'interprétation que peut susciter le vocable singulier "*la* situation fondamentale" : en fait, il s'agit, même dans les cas où le concept visé est d'un niveau élémentaire, d'un *réseau de problèmes* qui tous participent de la nécessité mathématique du concept. Les raisons que l'on a pu avoir historiquement de choisir un problème comme représentatif de la notion visé relèvent parfois plus des contraintes institutionnelles que de l'ontologie de l'objet. L'intérêt néanmoins de proposer une étude épistémologique exhaustive est patent : c'est de pouvoir bâtir ensuite une situation expérimentale sur des bases de connaissances légitimes, car choisies dans un corpus de problèmes ayant fait l'objet d'un investissement de toutes les connaissances mathématiques du moment. Dire cela, c'est dire aussi que cette enquête épistémologique doit être renouvelée périodiquement, en fonction de l'évolution des connaissances mathématiques de la société. Elle devra tenir compte aussi des buts que la société attribue aux mathématiques et à leur enseignement, cette composante sociale ne manquant pas d'influer sur les mathématiques effectives qui sont en jeu dans l'enseignement.

Exemple :

Une étude telle que celle de Broin identifie les composantes épistémologiques de l'algèbre scolaire par rapport à l'arithmétique ; cette étude, ainsi que celle de Gascon, conduit à identifier les problèmes qui sont des composantes incontournables d'une situation portant bien sur la résolution algébrique. (Broin 2002, Gascon, 1994)

I.3.3. Fonctionnalité du savoir visé dans les situations a-didactiques construites

Brousseau a construit les situations a-didactiques de l'enseignement primaire comme devant être des traductions de la *fonctionnalité* de la connaissance. L'idée est d'aborder une notion, non en l'exposant de façon académique, mais dans un problème dont la solution exige la mise en œuvre de cette notion, ou à tout le moins de connaissances relatives à cette notion. Cette présentation favorise clairement les situations d'introduction de nouveaux concepts, en ce qu'il est plus aisé de construire des problèmes mettant en jeu l'usage d'une nouvelle notion, que de dissimuler à nouveau cette fonctionnalité pour quelqu'un qui la connaît déjà. Cette dimension fonctionnelle est essentielle dans la TSD : c'est elle qui permet d'organiser l'action dans la première phase de la situation, car elle permet, comme nous le verrons pour la notion de base du plan vectoriel (le jeu du rallye du plan ci après), d'organiser un jeu effectif de l'actant contre/dans un milieu.

Cependant, si la recherche du caractère fonctionnel dans la découverte d'une connaissance est bien ce qui est mis en valeur dans les schémas de situations a-didactiques envisagées, il est pertinent de moduler cette fonctionnalité lorsque l'on souhaite construire un schéma de situation pour un savoir devant être repris. Il est aussi avéré qu'il est difficile d'envisager des situations a-didactiques pour certaines savoirs trop complexes, comme les savoirs FUGS, parce que ces savoirs n'ont pas été construits en réponse à un problème mathématique particulier, mais d'un point de vue de réorganisation formelle des savoirs existants, et en voulant relier différents domaines mathématiques comme par exemple les espaces vectoriels de dimension infinie et les espaces de fonctions (Dorier 1997). Dans ces cas, les conditions de construction du schéma, posées par Brousseau dans son texte de 1982, sont trop contraignantes ; faut-il alors renoncer à élaborer des schémas de situations a-didactiques ? Il nous semble qu'on puisse alors envisager la modalité, évoquée ci-dessus, de construction de situations rendant fonctionnelles un certain nombre de *connaissances* relatives à la notion visée ou de *propriétés* des objets mathématiques à enseigner. Un tel schéma vérifie les propriétés de consistance énoncées s'il est bien caractéristique du concept mathématique visé ; par ailleurs, le jugement d'adéquation du problème envisagé comme base de la situation, pour l'enseignement et l'apprentissage du concept, ne peut se faire qu'au coup par coup en fonction des spécificités de la notion en jeu. On retrouve donc l'importance de l'analyse épistémologique et cognitive a priori. Nous n'avons pas évoqué la composante sémiotique mais il est clair qu'elle est prise en compte dans les nécessaires formulations du concept ou des connaissances qui lui sont relatives. Cette composante oriente actuellement nos recherches à l'aide de cadres théoriques spécifiques.

Ces dernières réflexions posent clairement la question des étapes de construction d'une situation théorique de ce type (situation fondamentale) : analyse du savoir, analyse des connaissances visées au niveau envisagé, analyse d'un ou de problèmes pouvant supporter une situation avec action et jeu de l'élève, analyse des ostensifs utilisés et des connaissances qu'ils peuvent supporter… Cette étude théorique, qui permet d'aboutir au schéma souhaité, permet d'envisager l'étape suivante : se poser la question – tout d'abord encore théorique – de l'introduction de la situation élaborée dans un ordre institutionnel d'enseignement.

I.3.4. Méthodologie d'étude de l'enseignabilité d'un savoir correspondant à une situation fondamentale

Cette étude est une analyse théorique de l'éventuelle importation de la situation fondamentale dans un environnement didactique. Il ne s'agit pas de prévoir des séquences effectives, mais d'envisager les scénarios possibles, à partir de la situation fondamentale, scénarios qui seront ensuite disponibles pour l'expérimentation, lorsque les valeurs des variables didactiques auront été fixées (cf. Bloch, 2002).

Ce que ce niveau prend en charge, c'est une étude a priori des potentialités des variables théoriquement déterminées, par exploration des effets prévisibles des ensembles de variables potentielles, ainsi qu'une détermination des scénarios envisageables.

II. LE MODELE EXPERIMENTAL A PRIORI

Le deuxième niveau est celui où la situation est identifiée, le milieu antagoniste prévu, les variables pertinentes ont été définies ; les rapports entre ces variables également, même si la confrontation à la contingence amène peut-être ensuite à introduire de nouvelles relations, ou à invalider certaines relations prévues (mais ceci est normal car les deux modèles doivent être falsifiables).

II.1 Les éléments constitutifs d'un milieu

Dans un environnement didactique spécifié, les valeurs des variables sont fixées et ce qui va pouvoir être organisé c'est un rapport à la contingence. Cependant ce modèle n'est pas de nature empirique, mais plutôt expérimentale : il ne s'agit pas de partir de l'enseignement tel qu'il est, mais plutôt de définir des possibles effectifs de l'enseignement afin de pouvoir tester et falsifier ses hypothèses.

Voilà pourquoi, si le premier milieu (Mi_T) est issu d'une réflexion essentiellement épistémologique et cognitive, le deuxième peut être qualifié de modèle relatif à l'expérimentation, mais destiné à l'analyse a priori, ou en abrégé 'modèle de milieu a priori' (Mi_A). Il s'agit bien là d'un modèle, selon Descaves (op.cit.) i.e. d'un rapport d'objets mathématiques spécifiés à des faits empiriques qui vont devoir être 'actés' pour que les objets mathématiques, représentés dans des ostensifs ad hoc, apparaissent comme la solution de la situation empirique.

Le modèle 'a priori' (Mi_A) est celui qui permet :

- de construire des ingénieries didactiques effectives, relatives à un objet de savoir dans une institution donnée ; ces ingénieries donneront lieu à la production d'ostensifs mathématiques et pourront déboucher sur l'institutionnalisation de savoirs mathématiques, c'est-à-dire de règles culturelles relatives à la gestion des ostensifs et des actions ;
- d'anticiper, de prévoir des comportements ;
- de prévoir de recueillir des observables, de les organiser, de les interpréter ;
- de fournir une (des) référence(s) pour analyser les situations d'enseignement, qu'elles aient été construites comme des ingénieries ou non.
- d'analyser, à partir de ce que l'on aura considéré comme des observables, les connaissances mises en jeu dans la situation, les jeux possibles de l'élève, et les jeux du professeur.

Le sujet du milieu expérimental a priori (Mi_A) est alors, non pas l'actant réduit à sa dimension épistémologie, mais le *sujet générique*, celui qui représente l'élève tel qu'il est envisagé, avec des connaissances relatives au niveau considéré de l'enseignement : non pas l'élève réel mais celui que l'enseignement constitue, et qui va accepter de jouer le jeu de la situation. Sur ce sujet générique et ses possibilités d'interaction avec le milieu de la situation, l'analyse a priori est essentielle : c'est elle qui va dire si la situation est bien jouable au niveau considéré et avec ces sujets.

Il est à remarquer que le modèle a priori ne garantit pas *de facto* que l'on a bien travaillé sur le concept de la situation fondamentale que l'on cherchait à 'appliquer'. Cela signifie, et c'est de première importance dans cette analyse, que le milieu expérimental a priori (Mi_A) est une réalisation qui doit se donner des contrôles de pertinence et de consistance, alors que la situation fondamentale – avec son milieu (Mi_T) – s'auto-contrôle au moins au niveau du jeu mathématique parce qu'elle dérive d'une construction épistémologique. Autrement dit :

La situation fondamentale est sans conteste bien issue des mathématiques et organise un jeu de connaissances et savoir mathématiques, alors que, (Mi_A) devra être *contrôlé* comme faisant bien *faire des mathématiques* aux *sujets* de la situation ; et ce contrôle – d'ordre didactique et cognitif – est toujours dépendant

- des variables choisies a priori pour l'organisation de la situation effective ;
- des connaissances susceptibles d'être mises en jeu dans le travail sur la situation ;
- et de ce que l'on verra des observables, soit des ostensifs et de la façon dont les sujets les manipulent.

Or ces ostensifs sont dépendants de l'institution scolaire, du niveau où se situe l'enseignement, et des normes des pratiques mathématiques savantes. Par ailleurs les ostensifs participent de la conceptualisation : ils en sont l'une des sources, la deuxième étant l'action. Ils participent à la conceptualisation – tout particulièrement de par le changement de signification qu'ils subissent dès lors qu'un travail est entrepris avec leur aide. Ainsi que nous l'avons montré lors de l'étude de la situation 'Graphiques et chemins', les ostensifs mathématiques jouent un rôle très important dans les situations organisées dans l'enseignement secondaire, où l'action est souvent d'entrée une action sur des signes *déjà mathématiques* – contrairement à ce qui peut parfois se passer pour l'enseignement élémentaire. La situation fait alors que le sens des signes évolue avec le déroulement ; le sens d'un signe n'est jamais figé, il dépend (du degré d'expertise mathématique) de l'interprétant. Dans une situation à dimension a-didactique les élèves sont amenés à opérer sur des signes : faire des traitements dans un registre et des conversions de registres, afin de communiquer, contrôler, et entrer dans un processus de formulation, de validation et de preuve spécifique de la connaissance mathématique.

La différence essentielle entre (Mi_T) et (Mi_A) au niveau du contrôle des connaissances est ce qui justifie que, d'une part, l'on examine soigneusement les bases de construction de (Mi_A) à partir d'une SF, en termes de variables didactiques, de connaissance nécessaire ou non, etc. ; et que d'autre part, on ne puisse décréter que la construction soit univoque ou rende compte de toutes les occurrences de manifestations d'un concept : c'est pourquoi l'a-didacticité inhérente à la situation fondamentale – puisque celle-ci est une construction entièrement épistémologique – ne pourra parfois être conservée que partiellement : on parlera alors de situations à dimension a-didactique, et l'on sera obligé de tenir compte du niveau d'enseignement pour contrôler la situation expérimentale (sur ce point, voir Bloch 1999).

Avant réalisation de l'expérimentation, la problématique est donc celle de 'l'importation' de la situation fondamentale dans une institution donnée à un niveau donné. Ce modèle (Mi_A) se doit de prendre en charge les questions d'ergonomie de la situation, soit l'introduction des nécessités et des opportunités liées au milieu introduit. Il faudra aussi que ce niveau de modèle déclare quels sont les observables qui permettront de rendre compte de l'adéquation de l'expérimentation à la situation prévue, autrement dit la forme que devront prendre les interactions des élèves avec le milieu et ce que l'observateur en déduira, sur les connaissances mises en jeu dans la situation et leur adéquation au schéma théorique, c'est-à-dire sur ce qui autorise à attester du travail sur la notion mathématique en jeu. Ainsi dans la situation du flocon de von Koch, le travail des élèves sur les conditions imposées – prouver que P_n peut dépasser tout nombre A, et que $(4/9)^n$ peut devenir plus petit que 10^{-p} – et le contrôle qu'ils manifestent sur ces conditions, sont des observables de ce qu'ils sont bien entrés dans une problématique de l'analyse : travail sur des conditions suffisantes, contrôle de la pertinence des conditions trouvées (on trouve bien *n plus grand* que… , et le nombre trouvé est positif, *il suffit* de prendre un entier plus grand que ce nombre).

II.2 Construction d'un milieu (Mi_A)

La construction d'un milieu (Mi_A) consiste à déterminer un choix de variables, des scénarios exploitables, ce qui doit être joué effectivement et ce qui peut être évoqué… Comme il n'y a pas *une* situation fondamentale d'un savoir, il n'y a pas qu'une déclinaison d'une situation fondamentale dans un environnement didactique, les choix dépendant évidemment des priorités en matière de connaissances visées, de savoirs à institutionnaliser, et des contraintes des niveaux institutionnels où l'importation est envisagée. Ainsi Di Martino (1995) a proposé une situation de l'introduction de la notion de limite, la situation du pétrolier, qui diffère sensiblement de celle du flocon bien que construite à partir d'une analyse épistémologique voisine.

II.3 Analyse de (Mi_A): la structuration du milieu

L'outil de construction et d'analyse du milieu expérimental est la structuration du milieu. Rappelons le schéma de Margolinas, complété dans Bloch 1999 :

<table>
<tr><td>M3 :
M-de construction</td><td></td><td>P3 :
P-noosphérien</td><td>S3 :
situation noosphérienne</td><td rowspan="3">sur
didac
tique</td></tr>
<tr><td>M2 :
M-de projet</td><td></td><td>P2 :
P-constructeur</td><td>S2 :
situation de construction</td></tr>
<tr><td>M1 :
M-didactique</td><td>E1 :
E-réflexif</td><td>P1 :
P-projeteur</td><td>S1 :
situation de projet</td></tr>
<tr><td>M0 :
M- d'apprentissage : institutionnalisation</td><td>E0 :
Elève</td><td>P0 : Professeur enseignant</td><td>S0 :
situation didactique</td><td></td></tr>
<tr><td>M-1 :
M-de référence :
formulation validation</td><td>E-1 :
E-apprenant</td><td>P-1 : P régulateur</td><td>S-1 :
situation d'apprentissage</td><td rowspan="3">a-
didac
tique</td></tr>
<tr><td>M-2 :
M-objectif : action</td><td>E-2 :
E-agissant</td><td>P -2
P-observateur, dévolueur</td><td>S-2 :
situation de référence</td></tr>
<tr><td>M-3 :
M-matériel</td><td>E-3 :
E-objectif</td><td></td><td>S-3 :
situation objective</td></tr>
</table>

La fonction essentielle de ce schéma est de prévoir les interactions élève / milieu, à travers les connaissances mises en jeu à chaque niveau ; la deuxième partie du chapitre 1 a montré, sur l'exemple du flocon, comment la structuration du milieu permet de contrôler le fonctionnement a-didactique d'une situation, et de suivre la progression de la reconnaissance du savoir dans la succession des niveaux de milieux.

L'analyse de la résolution d'un problème à l'aide du schéma sur les niveaux de milieux a déjà été présentée dans de nombreux travaux (Margolinas 1995, Bloch 1999, Coulange 1998, Perrin-Glorian 1998, Hersant et Perrin-Glorian, 2003). Comme le dit Conne :

> "D'une certaine façon, on pourrait dire que ce sont des changements de milieux qui font que les problèmes trouvent solution et la solution n'est que le produit de ces changements. De là vient qu'il est difficile de ne pas enseigner la solution, mais aussi qu'il est très facile de camoufler la solution dans une situation, elle est alors le fait de la transformation du milieu. Par contre, ce que l'élève apprend ce ne sont pas les milieux : il résout le problème, et résoudre est arriver à accomplir ces changements de milieux. L'élève ne trouve pas les changements de milieux, mais trouve les solutions qui les accompagnent. Ce faisant, il manifeste des connaissances et la structuration du milieu permet d'analyser a priori ces connaissances." (Conne 2001, séminaire sur l'enseignement spécialisé, non publié).

Cette manifestation de connaissances dont parle Conne est une des clés de la méthodologie de la TSD : la TSD permet et même impose la distinction connaissances / savoirs, puisque le savoir est en quelque sorte 'caché' dans la situation : donc l'élève ne le découvrira qu'en manifestant des stratégies de réussite au jeu de la situation. Dans un premier temps, ce sont ces stratégies qui seront identifiées comme les connaissances que la situation requiert (et comme les observables du fonctionnement de la situation). Tout un travail de conversion sera nécessaire – par un débat mathématique (Legrand 1996), ou une mise en commun suivie de décontextualisation, pour que les connaissances, stratégies, résultats des essais / erreurs … soient reliées au savoir visé. Il y a là quelque chose de l'abduction, mode de raisonnement défini par Peirce (Peirce 1898, 1995 pour la traduction française).

Nous ne résistons pas au plaisir de citer ce que dit de cette phase de débat, dans son mémoire professionnel, une toute jeune professeure de mathématiques en formation qui manifeste une compréhension assez étonnante de l'organisation des situations[28]:

> "Le 'débat' proposé n'est en rien naturel. Il ne peut être que la conséquence d'une construction artificielle, minutieuse, contraignante, qui crée un cadre où la discussion apparaît – fictivement – comme libérée ; mais l'hypothèse est que cette 'aire de liberté' suffise à permettre une interaction sociale apte à favoriser l'apprentissage."

La TSD permet donc de prévoir, repérer, analyser, confronter au milieu fourni par la situation, évaluer la pertinence … des connaissances manifestées par les élèves dans l'action, la formulation, la validation. Et du même coup, se pose le problème de l'introduction du professeur dans ce système : cette introduction n'avait pas été pensée dans les débuts de la théorie, et les travaux récents l'ont prise en charge. De fait la prise de conscience de ce que le rôle du professeur devait être élucidé dans la gestion des situations, que ce soit les situations de classe ordinaires ou les situations que l'on cherchait à contrôler par la TSD, a conduit à de nombreux travaux (cf. par exemple Margolinas, 1995 et 2002 ; Bloch, 1999 et 2004). Cette question du rôle du professeur se pose dans (Mi_A) – la structuration du milieu définit bien les différents stades du rôle du professeur. Par ailleurs on doit s'interroger sur ce rôle effectif dans ce que la TSD appelle la *contingence* : la réalisation effective de situations expérimentales en classe. La TSD a peu pris en charge l'étude du professeur dans la contingence, ce rôle a été souvent très minoré et les situations "fondamentales" (en fait leurs réalisations) ont été réputées fonctionner de façon "quasi isolée". Nous aborderons des éléments de rôle du professeur dans le paragraphe V ci-dessous.

L'étude d'une situation par la structuration du milieu permet aussi de mettre en évidence dans l'analyse a priori l'adéquation ou non des différentes phases prévues de la situation, et le manque éventuel d'un niveau (objectif, ou de référence). L'a-didacticité est en effet reliée à des niveaux existants ou manquants : en effet si l'un des niveaux est manquant, le professeur devra faire une intervention didactique pour pallier au milieu défaillant. Ceci a été analysé par Maurel et Sackur (2002) à propos d'une situation sur les différentielles de fonctions de deux variables, proposée dans l'enseignement supérieur, la situation de la presqu'île (Pham, 2003).

On peut relever un certain nombre de questions pertinentes dans le schéma (Mi_A) :

- L'élève (sujet générique, actant potentiel) possède-t-il les connaissances préalables qui lui permettront de comprendre le jeu et de se l'approprier ?
- Le jeu est-il bien organisé pour que le sujet soit effectivement confronté à la connaissance visée ? En particulier, le sujet a-t-il la responsabilité de décisions d'ordre mathématique suffisamment consistantes dans le jeu ?
- Quelles sont les phases du jeu à prévoir ? Quelles modifications ou évolutions temporelles apporter dans le milieu pour que la situation présente bien les phases souhaitées et débouche bien sur l'institutionnalisation du savoir visé ?
- Quelles seront les connaissances du sujet susceptibles de se manifester par interaction avec le milieu proposé ?
- Ces connaissances vont-elles pouvoir évoluer dans le sens désiré ?

[28] Cette enseignante a fait jouer dans sa classe la situation des vecteurs – le Rallye du plan, voir chapitre 3 – et des situations graphiques sur les fonctions.

- Quels devront être les apports du professeur, dans les différentes phases, en termes de connaissances et savoirs ?
- Le professeur pourra-t-il institutionnaliser le savoir visé sur la base des productions des élèves ? Ou devra-t-il effectuer un saut qualitatif dans le savoir ?

II.4 Milieu antagoniste, milieu amorphe

A l'issue de cette étude nous avons pu donner une caractérisation de la différence milieu / situation telle qu'elle s'exprime dans (Mi_A) : c'est la situation – le jeu – qui organise le milieu, mais de plus, le rapport du sujet avec la situation et avec le milieu n'est pas identique :

- le rapport du sujet à la situation est un rapport *interne*, le sujet est dans la situation comme un problème à résoudre ;
- le rapport du sujet au milieu est un rapport *externe*, le sujet voit le milieu comme un 'autre' qui réagit et renvoie des informations sur la situation (sur le jeu). Pour le sujet générique se comportant en actant, le milieu est 'le système antagoniste', c'est-à-dire, celui qui va renvoyer des rétroactions aux décisions de l'actant.

Le sujet ne *voit pas* la situation, il est immergé dedans comme le problème qu'il a à résoudre ; le professeur est celui qui a une vision de la situation, vision qui dépasse l'étape en jeu dans une séance, une vision du but ultime de la situation, et de l'articulation des différentes étapes (Cf. Del Notaro, 2004).

Dans une situation à dimension a-didactique, le sujet opère une action et le milieu 'réagit' : il se passe quelque chose, qui, en principe, est *interprétable* du point de vue mathématique. Le milieu est alors 'réactif' aux actions du sujet, et cette réaction est plus ou moins intelligible pour ce dernier comme une information sur son action. En ce sens le milieu est plus ou moins 'antagoniste'.

Dans une situation de classe ordinaire on peut voir fréquemment des élèves effectuant des actions sur un milieu qui ne renvoie aucune information (pour des exemples sur l'enseignement des fonctions, voir Bloch 2003). Fregona (1995) avait nommé un tel milieu 'milieu allié', sans qu'il soit clair de qui ce milieu pouvait être l'allié. Nous proposons de l'appeler plutôt un milieu *amorphe*[29], quasi au sens chimique du terme – selon le dictionnaire Robert,

> **Amorphe**, 1. *Minéralogie* : qui n'a pas de forme cristallisée propre. 2. *Fig*. (1896) Inconsistant, mou ; dont la personnalité est inconsistante.

Un corps amorphe est donc une matière sans structure – par exemple de l'eau. Ainsi un milieu amorphe est à comprendre comme n'ayant pas de connaissance cristallisée à l'intérieur de lui, si bien qu'il ne renverra rien sur une connaissance spécifique, puisqu'il n'est pas structuré en fonction de cette connaissance.

L'analyse de la situation par la structuration du milieu permet de dire quels sont les savoirs et les connaissances susceptibles d'être activées ; de juger de l'opportunité et du coût d'un changement de niveau de justification, de prévoir les régulations du professeur…

Ce que ce modèle prend donc aussi en charge, ce sont les questions relatives à :

- l'ergonomie de la détermination de ces milieux, et d'implantation dans l'environnement institutionnel et didactique visé ;
- le contrôle par rapport au modèle théorique épistémologique.

[29] Terme déjà proposé par Salin (2002, p. 115).

II.5 Après réalisation d'une expérimentation

Signalons brièvement qu'après expérimentation la discussion sur le modèle à priori comporte deux composantes, une 'clinique' et une 'théorique', elles-mêmes subdivisées en deux questions plus ou moins liées à la pratique :

II.5.1. Composante "rapport situation réelle / modèle a priori"

(a) tout d'abord une description de la situation expérimentée : qu'a-t-on observé, et a-t-on bien vu ce qui était attendu, les acteurs ont-ils pu fonctionner comme prévu : les connaissances préalables étaient-elles disponibles, ou a-t-on assisté à un dédoublement de la situation, comme dans la situation de l'abreuvoir (Perrin-Glorian 1998 ; Comiti, Grenier, Margolinas 1995 ; Margolinas 1995 ; Comiti, Grenier, 1997) ; et dans ce cas, ceci était-il prévisible – mauvais choix de valeurs des variables, analyse insuffisante des connaissances préalables nécessaires chez l'élève …

(b) une interprétation du schéma de la SF par rapport à l'expérimentation : de quoi la SF rend-elle compte, et qu'est-ce qui, dans la situation expérimentée, se rapporte aux hypothèses faites dans ce schéma.

II.5.2. Composante "consistance théorique"

(c) Discussion du rapport entre le schéma épistémologique et l'expérimentation : cette dernière est-elle une "réalisation" (fortement ou faiblement équivalente) de la SF? Quels sont les observables qui permettent d'en juger ? Quel rapport a le travail fait avec le concept de la situation fondamentale ? Quelles composantes du savoir ont été sauvegardées ? Comment s'en assure-t-on ? Que considère-t-on comme des traces probantes ? Quelles composantes a-t-on dû sacrifier[30] ?

(d) Reprendre la discussion de la consistance théorique, au vu des résultats de l'expérimentation : l'observation falsifie-t-elle le modèle théorique, en tout ou en partie ? Y a-t-il des éléments dans la réalisation qui peuvent faire penser que la situation *n'était pas* une bonne mise en scène de la situation fondamentale de la notion visée ?

Ceci est une discussion théorique et non pas un simple constat : cela fait partie du modèle théorique que de savoir ce qui le falsifierait. Autrement dit, si la discussion de la consistance théorique est a priori du ressort du schéma épistémologique, celui-ci doit être ré-interrogé a posteriori au vu des résultats expérimentaux.

Enfin, on pourrait se demander si cette analyse en deux composantes – mathématique / épistémologique et expérimentale / pragmatique – est effectivement utile, relativement au travail considérable qu'elle implique, et si l'on ne pourrait pas s'en tenir à l'étude des praxéologies induites par les programmes, ou proposées par les praticiens, y compris "innovants". La relative indépendance du milieu théorique et du milieu expérimental pourrait en effet laisser penser que le milieu expérimental peut se passer du préalable épistémologique et didactique que constitue le milieu théorique de la situation fondamentale. On peut aussi poser le problème dans l'autre sens, et considérer que l'analyse du savoir "savant" suffit à imposer la transposition didactique et que celle-ci découle "naturellement" des mathématiques du niveau supérieur. C'est d'une certaine façon ce qui a été tenté au moment des "maths modernes".

L'histoire récente de l'enseignement des mathématiques a montré suffisamment de fausses routes et d'impasses ou de cécité de la transposition didactique "naturelle", y compris lorsque

[30] Par exemple dans la situation du flocon, le choix de ne pas travailler dans un premier temps sur des suites non monotones, contrairement au choix fait dans la situation du pétrolier.

les injonctions venaient de mathématiciens qualifiés, pour que l'intérêt d'une étude dans la TSD soit amplement justifié.

En conclusion de cette analyse entre situation fondamentale et milieu expérimental a priori, il apparaît deux boucles relativement indépendantes :

1) La première boucle épistémologique est celle de la construction d'une Situation Fondamentale à partir d'un savoir désigné comme étant à enseigner, par exemple, la notion de limite, ou l'intégrale impropre. Cette boucle a son propre contrôle interne mathématique, et sa logique est celle de la représentation d'un concept par des systèmes de théories et de signes – ce qui est effectivement contrôlé de façon interne par l'épistémologie et la pratique des mathématiques ; elle passe des savoirs analysés d'un point de vue épistémologique et du savoir savant, pour aller vers l'élaboration de situations, la construction de connaissances anticipées dans le schéma théorique, et revenir aux savoirs mathématiques reconnus par la communauté des mathématiciens ;

2) La deuxième boucle est une boucle didactique. Elle qui passe par le modèle de milieu expérimental a priori : celle-ci exige des contrôles de pertinence et de consistance, et donc un choix de variables, de valeurs de ces variables, et une analyse de consistance a posteriori, de telle sorte qu'on soit sûr d'avoir approché le concept mathématique visé. Ce que l'on souhaite en dernière analyse, c'est, ainsi que le dit Conne (1999) 'faire faire des *mathématiques'* aux élèves : ce que vise cette élaboration, c'est bien d'assurer que tel a été le cas.

Le fait de devoir imposer des contrôles est une circonstance qui génère des contraintes : la question de la mise en place d'un (Mi_A) dans un environnement donné d'enseignement est donc une question de contraintes d'élaboration du milieu, à respecter pour que le "sens" de la situation, c'est-à-dire la référence au concept mathématique visé, soit suffisamment évidente du point de vue du didacticien constructeur. Si trop de contraintes sont imposées dans la conception de (Mi_A), il devient impossible de construire une situation expérimentale satisfaisant toutes les contraintes et importable dans certains environnements didactiques. Des exemples sont donnés dans Bloch (2000) : ainsi il est très difficile d'imaginer une situation qui soit fonctionnelle de la notion de fonction, sauf à recourir de façon assez massive à la modélisation de phénomènes physiques comme cela a été le cas historiquement. Mais dans ce cas, prévoir une dimension d'a-didacticité a un coût excessif en termes d'organisation de milieu matériel ; et les lenteurs de l'émergence historique d'une notion "moderne" de fonction témoignent bien de la nature incertaine du processus. La situation que nous avons construite sur ce concept est donc organisée, non comme une situation fonctionnelle, mais comme une situation basée sur des ostensifs déjà mathématiques de la notion, à savoir des graphiques.

Relativement aux situations à dimension a-didactique, nous avons exploré une question qui est restée longtemps occultée dans la TSD, et dont l'étude n'a pris que récemment de l'ampleur : celle de la gestion des situations a-didactiques, et notamment de la position du professeur dans ces situations.

III. LE ROLE DU PROFESSEUR DANS LA CONTINGENCE : LA DEVOLUTION ET LA GESTION DES SITUATIONS

Comme nous l'avons déjà dit plus haut, les situations construites dans les premiers temps d'élaboration de la TSD ont été supposées fonctionner de façon "quasi isolée", à partir du moment où la théorie ne se préoccupait pas de modéliser le rôle du professeur et les médiations qu'il devait mettre en œuvre pour conduire dans sa classe des situations dévoluant aux élèves une part importante de responsabilité mathématique. Des travaux sur la modélisation du professeur dans la TSD, et son rôle dans la dévolution et la gestion des phases des situations à dimension a-didactique, ont vu le jour dans les années 90 : Comiti, Grenier, Margolinas 1995 ; Margolinas 1995 ; Margolinas 2002 ; Sensevy 1998 et de nombreux autres textes évoquant cette dimension, dans Mercier, Lemoyne, Rouchier (Eds) *Le génie didactique* ; Bloch 1999, etc. D'autre part, le rôle du professeur dans la contingence a été posé de façon forte par la généralisation de la formation des professeurs de mathématiques dans les IUFM[31] ; cette formation pose le problème de la dévolution, à un double titre : diffusion *en direction des professeurs* de la façon (savoir-faire, savoirs réfléchis) dont peut s'opérer la dévolution de la situation aux élèves…

Il importe d'abord de préciser ce qu'est la contingence : pour Brousseau, il s'agissait de confronter les analyses a priori des situations fondamentales (d'abord envisagées, puis actualisées dans des réalisations possibles avec un milieu expérimental a priori (Mi_A)), à ce qui se passait réellement dans une classe avec des élèves d'un niveau donné. Le sujet de la contingence est donc un *sujet à niveau spécifié* et qui est sujet de l'expérience réelle d'implantation de la situation en classe.

Or dans les années 90, les études portant sur des situations de classe "ordinaires" (c'est-à-dire non préparées par ou avec des chercheurs) se sont multipliées. Ceci constitue une autre forme de contingence ; mais il est clair que l'utilisation, dans ces conditions très différentes, des concepts de la TSD ne peut se faire qu'avec des précautions. Comme le disent Perrin-Glorian et Hersant (2003), soit, la situation comporte quelques éléments de ce qui peut jouer, pour les élèves, le rôle de milieu objectif ou de référence, auquel cas on pourra essayer de reconstruire une histoire du déroulement en classe qui prend appui sur ces éléments d'a-didacticité ; soit, ce n'est pas le cas, et l'analyse essaiera de montrer quelles ont été les possibilités malgré tout d'apprentissage des élèves, dans le cadre du contrat didactique instauré dans la classe et des opportunités de responsabilité mathématique qu'il laisse aux élèves.

III.1. Les éléments constitutifs de la dévolution

Ainsi que l'écrit Sensevy (1998), dans l'expérimentation de situations issues de la recherche en didactique des mathématiques, il manquait au début la figure du professeur. Celui-ci était supposé appliquer correctement les directives des didacticiens, et il lui suffisait de se laisser conduire par le dispositif. Mais les professeurs ne se comportaient pas comme l'avait prévu la théorie. Il manquait certes un arrière-plan épistémologique commun au professeur et au chercheur ; mais plus encore, le milieu antagoniste ne le devenait pas tout seul de son simple fait d'exister : ainsi,

> "Le dispositif ne vaut qu'à la mesure dont *il fait signe* pour l'élève et pour le professeur lui-même, et sa pertinence se trouve dans le *milieu commun* qu'il leur assure. Un dispositif doit donc être pensé (aussi) en direction du professeur, à la fois à travers l'action qu'il va permettre et travers celle qu'il va nécessiter.
>
> Se pose alors la question des formes de cette action, qui est régulation : le professeur est face à un dispositif complexe, qui doit permettre à l'élève de produire des connaissances. Pour ce faire, celui-ci doit à la fois éprouver un certain nombre de certitudes, mais aussi rencontrer l'ignorance, sans laquelle il ne pourrait avancer. L'action du professeur doit donc lui permettre de réguler les interactions de l'élève avec le milieu, ce qui ne signifie pas contrôler l'élève, mais organiser les conditions sous lesquelles l'élève éprouvera *en situation* des certitudes et sera confronté à l'ignorance. Cette régulation suppose un système de notions et une épistémologie pratique, c'est-à-dire des principes épistémologiques généraux rendus pratiquement disponibles."

[31] Institut Universitaire de Formation des Maîtres.

(…)

"Cette question, celle de la relation entre le sens pratique du professeur et les descriptions modélisées que la recherche peut produire, on la trouve au cœur de toute tentative de penser la régulation du processus d'enseignement – apprentissage." (Sensevy, 1998, p. 211)

Il y a donc, dans la théorie, prise de conscience du travail du professeur pour organiser les conditions dont il est dit ci-dessus qu'elles permettront à l'élève d'interagir avec le milieu de la situation, d'éprouver des certitudes – cette fonction ne *peut pas* avoir telle asymptote, ou la suite donnée *doit dépasser* toute puissance de dix aussi grande soit-elle – et de rencontrer l'ignorance : qu'est-ce donc qu'une asymptote, une limite infinie ? Et que sont les objets qui ne se comportent pas de la même façon (pas d'asymptote, pas de limite …) ?

Il y a étude nécessaire de ce travail de régulation, qui commence par la dévolution de la situation, et qui ne peut être prescrit comme simple application du modèle des chercheurs. Modéliser l'action du professeur, c'est analyser qu'il existe bien là encore *deux* niveaux : le niveau du milieu expérimental a priori (Mi_A), où l'action du professeur est *prévue* ; et le niveau de la contingence, où le professeur effectif aura une action *observable*, mais reconstruite par rapport au déroulement effectif, à la manifestation des connaissances des élèves – les élèves réels – et aux contraintes de l'enseignant(e) – contraintes personnelles ou institutionnelles que des chercheurs étudient depuis quelques années et qui sont nombreuses.

Or la TSD n'a pas construit, dans ses premières théorisations, de modèle de l'action du professeur pour la gestion des situations qu'elle – la TSD – proposait. Dans un premier temps c'était une omission, nécessaire historiquement à la concentration du travail sur les situations ; puis ce fut un état de fait "par défaut". Il ne saurait en être déduit que, même dans les cas où le chercheur est lui-même l'expérimentateur, la situation fonctionne de façon isolée, sans que le professeur occasionnel la gère : nous avons maintenant un recul suffisant pour que ceci soit une certitude. Dit autrement, même la connivence épistémologique dont parlait Sensevy n'est et ne serait pas suffisante pour assurer la gestion pertinente de la situation.

Un travail a été entrepris selon différents courants de la recherche en didactique pour identifier les éléments de l'action du professeur : Robert avec l'ergonomie (Robert 2001), Margolinas (2002) du côté de la modélisation, Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000), Bosch, Espinoza & Gascon sur le professeur dans son rôle de directeur d'étude (2003), Robert & Vandebroucke (2003), Rogalski J. (2003), Matheron (2001), Lenfant (2001), Pariès (2004), Robert (2005), Bloch (à paraître 2006). Ces éléments du travail du professeur apparaissent dans des contextes variés : s'il est sûr qu'une pluralité d'approches ne semble pas superflue pour étudier des phénomènes aussi complexes, nous limiterons notre présent propos à la tâche de dévolution des situations a-didactiques ou à dimension a-didactique.

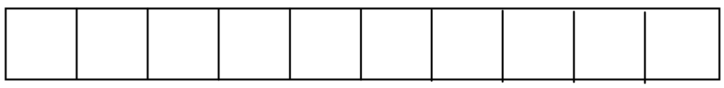
Il faut bien entendre que les éléments constitutifs de la dévolution ne sont encore que partiellement désignés : en effet leur désignation et leur identification exhaustive pose des problèmes théoriques non encore résolus. Les éléments théoriques permettant de modéliser la dévolution empruntent à ceux qui permettent la modélisation du rôle du professeur, modélisation qui, on le sait, n'est pas achevée (et il n'est même pas encore tranché de savoir si elle peut l'être).

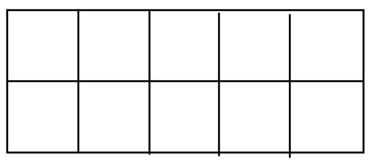
III.1.1 L'organisation du milieu matériel et son importance cruciale dans la dévolution

Une chose est sûre : la dévolution d'une situation ne peut commencer que si l'enseignant(e) a bien saisi toute l'importance du milieu matériel et les contraintes fortes que la situation impose à ce milieu. Si ce milieu n'est pas organisé de façon adéquate, les élèves ne joueront pas la situation prévue, mais joueront un autre jeu, qui ne contient peut-être pas la connaissance visée.

Un seul exemple portant sur cette organisation permettra de saisir toute la complexité de ce système enseignant/milieu/élève (que la didactique étudie dans le cas des situations importées dans la contingence) : dans une classe de CP, une enseignante en formation veut préparer le matériel afférant à la situation des carrelages, situation de dénombrement devant permettre aux élèves une première approche de la numération décimale.

La situation (cf. ERMEL CP) prévoit de dénombrer des carreaux pour carreler des pièces rectangulaires : dans un premier temps il s'agit de s'assurer que les élèves ont bien une procédure de dénombrement à leur disposition – compter les carreaux un par un et se servir de la file numérique. Dans un deuxième temps, le professeur déclare ne plus donner que des paquets de dix carreaux et pas plus de 9 carreaux isolés. Les paquets de dix carreaux sont constitués, soit de rangées de dix, soit de deux rangées de 5 :





Ces paquets de dix sont d'une couleur différente de la couleur des carreaux isolés ; ils ont deux rôles essentiels dans la situation : celui d'outil pour compter les carreaux de la pièce à carreler, et celui de *signe des dizaines*.

Les pièces à carreler sont de différentes dimensions : 4 sur 6 ; 7 sur 5 ; 9 sur 7 …

Les élèves sont supposés remplir un bon de commande déjà préparé, par exemple :

commande :
… paquets de dix
… carreaux isolés
En tout, …. carreaux

Or la professeure de la classe n'a préparé que des pièces dont l'une des dimensions est de dix ; l'autre étant, 2, ou 3, 4 etc… ; quelques carreaux supplémentaires sont ajoutés en bord de pièce, afin que le nombre de carreaux ne soit pas un nombre entier de dizaines. Mais de plus, les carreaux que l'élève va commander sont tous coupés à l'unité ; donc les dizaines ne sont plus constituées à l'extérieur des pièces, dans le matériel à commander par l'élève ; elles ne sont visibles – pour l'enseignante ! – que parce que celle-ci les a rassemblées dans des verres de plastique style pique-nique. Dès que l'élève entreprend de se servir de ces dizaines pour carreler sa pièce, elles se délitent en carreaux isolés. L'élève ne peut donc pas les avoir constituées *entières* dans ses mains, même si elles doivent être ensuite découpées pour être posées sur les pièces. Il lui manque donc un moyen essentiel de constater l'organisation effective, visible, de la collection en dizaines (ce qui est la procédure prévue). Ainsi par exemple sur une pièce de 42 les élèves sont supposés entourer par 'paquets de dix', ou poser les dizaines ce qui leur donnera l'idée de 'découpage du nombre' en dizaines.

x	x	x	x	x	
x	x	x	x	x	
y	y	y	y	y	t
y	y	y	y	y	t
z	z	z	z	z	t
z	z	z	z	z	t
t	t	t	t	t	t

En fait les élèves sont supposés entourer au feutre les dizaines repérées, afin de pouvoir les compter. Si des élèves ne savent pas effectuer cette tâche ainsi, ils peuvent compter à l'aide de la file numérique puis aller chercher les paquets de dix ; les paquets – découpés si nécessaire, *par l'élève* – et posés sur le carton de la pièce à carreler reconstituent alors les dizaines visibles. Les dizaines constituées par le professeur peuvent être d'une couleur différente des carreaux isolés, ce qui aidera à les 'voir' sur la pièce.

Sur le schéma les différentes dizaines ont été notées par des lettres différentes.

Le déroulement de la situation dans la classe montre qu'à l'évidence, la dévolution de la situation n'a pu avoir lieu : certes, les élèves se saisissent bien de la consigne de commander des carreaux pour carreler les pièces, mais, ils n'identifient jamais – le milieu ne le leur permet pas – le savoir "dizaine" qui est supposé émerger. En effet, le signe des dizaines n'est ici pas visible à l'extérieur des pièces, et les élèves ne comptent pas les carreaux des pièces par dizaines mais en utilisant la comptine : 1, 2, 3, 4, … : ce signe pourrait être vu dans les pièces, qui sont bien rangées par dizaines, mais il n'y est visible que pour un sujet qui connaît déjà les dizaines ; les élèves comptent sagement sans jamais repérer que les rangées des pièces sont bien déjà par dix. Et ce signe n'est pas là où il devrait être, c'est-à-dire dans les dizaines à commander. L'enseignante ne peut être consciente de ce manque de dévolution car les élèves jouent apparemment le jeu qu'elle a prévu : ils dénombrent les carreaux de leur pièce, utilisent des connaissances (sans doute construites plus ou moins antérieurement) pour décomposer en dizaines, et remplissent les bons de commande. Seule une observation des élèves en train de commander permet de se rendre compte qu'ils n'identifient pas les dizaines dans les pièces, et que ceux qui réussissent passent par l'écriture décimale du nombre de carreaux pour identifier le nombre de dizaines et d'unités. De plus, un entretien de l'observateur avec un élève auquel il désigne des dizaines dans la pièce à carreler (par exemple en les entourant) montre que l'élève est incapable de dénombrer ces dizaines : deux dizaines entourées, à la question : "Combien a-t-on de dizaines ?" l'élève répond : "10". "Dix dizaines ?" insiste l'observateur. "Non, 12", répond l'élève ; "12 quoi ? 12 carreaux ?" L'élève est perdu.

Dans cet exemple les conditions de la dévolution, côté professeur, ne sont pas réunies ; mais cela montre aussi que le milieu se transforme très vite, et, constitué au départ de choses matérielles, il évolue afin que les objets puissent se constituer en signes mathématiques : le milieu objectif. Si ce milieu matériel n'est pas organisé correctement, la constitution des actions des élèves en support du milieu objectif ne peut avoir lieu. Dans la situation telle qu'elle s'est déroulée, la professeure n'a pas dévolué ce qui était visé, à savoir compter en anticipant que l'on allait avoir à commander des dizaines : on peut imaginer dessiner sur les pièces les dizaines qu'il va falloir disposer lorsque la commande sera donnée ; ou mémoriser les dizaines tout en comptant. Faute de cette nécessité d'anticipation, les élèves comptent donc, comme ils le faisaient avant, mais aucun savoir nouveau ne peut émerger de leur action, car elle n'est pas problématisée. De fait c'est après coup – après avoir obtenu le nombre total de carreaux qu'ils essaient de décomposer. Cette situation, telle qu'elle est jouée, ne peut rien leur apprendre, et ne peut leur faire constituer un milieu objectif propre à *faire comprendre* les dizaines cachées dans un nombre à un élève qui ne l'aurait pas *déjà appris*.

On voit par cet exemple à quel point la dévolution est un phénomène dépendant des conditions de la situation, et comme il est difficile à un professeur n'ayant pas saisi les ressorts de la situation de produire cette dévolution. Certes le milieu 'matériel' devient constitué de signes mathématiques dès les niveaux supérieurs de l'enseignement ; il reste que la dévolution est *sensible* à ce milieu matériel, et à la façon dont le professeur l'organise et le communique aux élèves. Des tentatives ont été faites en formation pour communiquer aux futurs enseignants des éléments sur ce qu'est une consigne, et la façon dont celle-ci influe sur le travail des élèves (cf. Bloch, 2005c, 2006 à paraître ; Robert, 2002, 2003, 2004, 2005).

III.1.2.Nature du milieu objectif et processus d'institutionnalisation par passage au milieu de référence

Le milieu objectif est par nature un milieu heuristique : il dépend donc de façon cruciale de la dévolution et des *expériences* que celle-ci amènera les élèves à faire. L'enseignant(e) est, à ce niveau de milieu, un professeur qui dévolue et entretient la dévolution. Dans Bloch (1999) nous avons montré comment des élèves de première scientifique, confrontés à la question : "Existe-t-il des fonctions non bornées sur un intervalle borné ?", entreprenaient d'écrire formellement la définition d'une telle fonction, puis étaient demandeurs d'une fonction particulière pour éprouver pragmatiquement cette définition. Ainsi que le disent Hana et Jahnke (1993), les élèves éprouvent la nécessité d'effectuer des allers-retours entre des preuves formelles et des preuves pragmatiques. La professeure de la classe se trouvait amenée à alimenter le milieu des essais / erreurs en donnant la fonction définie par $f(x) = 1/x^2$ entre 0 et 1. Le milieu de formulation et de validation –le milieu où l'on discute la validité des énoncés produits – était présent à différents moments : prouver que $f(x)$ dépasse 10^{99}, ce nombre étant vu comme "générique des grands nombres", ou, pour les élèves les plus avancés dans ce milieu, prouver que $f(x)$ peut dépasser tout nombre M.

De même, des élèves ayant à effectuer graphiquement des produits de fonctions (cf. Bloch, 2003 ; et chapitre 3 ci-dessous) produisent dans le milieu objectif des énoncés comme :

- Le produit de deux droites est une droite ; cet énoncé est invalidé par dessin du produit, dans le milieu objectif ; et par calcul et raisonnement, dans le milieu de référence ;
- Tout zéro de l'une des deux fonctions est zéro du produit ;
- Des énoncés sur le signe du produit, et sur le fait que, en x tel que $f(x) = 1$, alors le produit prend la même valeur que $g(x)$.

Dans cette situation le professeur doit mobiliser toutes ses connaissances pour être à l'affût des énoncés-élèves, et réussir à fournir les exemples au niveau où ils les demandent et où ils peuvent s'en saisir. En effet un professeur pourrait imaginer des fonctions non bornées beaucoup plus pathologiques que celle qui sera donnée comme exemple ($f(x) = 1/x^2$). De plus, certains groupes ne sont pas encore parvenus au même niveau de généralité et d'expression formelle que les élèves qui ont donné la formulation générale et l'éprouvent sur l'exemple : ils sont en train de chercher, graphiquement, si une fonction peut dépasser 60, qui leur paraît un grand nombre comparativement aux valeurs numériques des fonctions qu'ils ont eu l'habitude de manipuler en classe les années précédentes. Il faut donc que l'enseignant réagisse à ces différents niveaux de connaissance ; puis il faudra faire une mise en commun et une synthèse. Pour ces deux niveaux (au moins) de production des élèves, il faut que le professeur dispose de moyens pratiques pour établir la mise en commun et la synthèse, dans le milieu de référence puis dans la situation didactique : dans le cas des situations complexes comme celle-ci, le professeur reconstruit une histoire fictive du travail de la classe en partant des productions des différents groupes. Il faut au professeur une cohérence non négligeable et une conscience du but mathématique poursuivi, pour que le savoir ainsi reconstruit soit bien compatible avec le savoir mathématique visé, et conforme à l'histoire de chaque groupe de façon à ce que les élèves puissent identifier leur propre travail à cette histoire.

Le milieu de référence est celui où sont éprouvés les énoncés produits dans le milieu objectif. L'enseignant(e) doit disposer d'arguments à différents niveaux de connaissance ou de savoir, les niveaux où les élèves auront placé leur production. Les élèves auront éprouvé des certitudes et rencontré l'ignorance : certitude que telle fonction ne peut être *que* telle qu'ils l'ont construite, ignorance de ce que sont les fonctions *différentes*, ne vérifiant pas la propriété P …

Il faut à l'enseignant(e) des "principes épistémologiques généraux rendus pratiquement disponibles", soit, savoir *comment* faire cette mise en commun… Qu'est-ce qui fera que celle-ci sera reconnaissable par les élèves comme rendant compte de leur travail ? Dans quels termes le professeur doit-il la faire ? Quelle est sa teneur ?

Le modèle de l'enseignant(e) que la théorie didactique tente d'élaborer ne sait pas encore répondre à ces questions, même si des savoirs pragmatiques ont pu être construits en formation pour tenter d'y répondre. Ainsi une tentative a été faite en formation (cf. Berthelot & Bloch, 2001) pour donner des indications sur le rôle de l'enseignant(e) dans ces étapes de la gestion des situations (voir IV.2). Nous avons pu voir, à cette occasion, qu'émerge alors un *double paradoxe* de la dévolution. Il y a nécessité d'un savoir pratique de l'enseignant(e). Et là encore, se pose la question de la teneur de ce savoir et de sa transmissibilité. Des travaux ont été réalisés sur cette dimension de la formation : ainsi Malara et Zan (2002), Lenfant (2003), Bloch (2005c) …

III.2. Le double paradoxe de la dévolution et les tâches du professeur

III.2.1 Le double paradoxe

Il y a bien un double paradoxe de la dévolution :

- Le premier paradoxe est celui que G.Brousseau a énoncé : si le professeur dit à l'élève ce qu'il vise, il ne peut l'obtenir. L'élève fera la tâche, voire jouera au jeu prévu, mais ne le fera que parce que le professeur le demande et ne mettra pas en jeu le savoir visé.
- Le deuxième paradoxe est que l'on ne peut pas dire à l'enseignant(e) ce qu'il faut qu'il (elle) fasse pour dévoluer la situation. Si on le lui dit, il (elle) peut se conformer à la lettre de la consigne, comme l'élève, et ne pas obtenir cette dévolution à l'élève, car il (elle) s'appuiera sur des règles formelles apparentes de dévolution – formes langagières notamment, que l'on voit fréquemment les jeunes professeurs apprendre par compagnonnage avec des professeurs plus anciens – et substituera au réel travail de dévolution un scénario tout formaté, qui ne sera pas en mesure de déclencher la dévolution attendue, par une sorte d'effet Diénès[32].

En formation des professeurs, des essais ont été faits pour tenter de définir malgré tout ce rôle du professeur dans la gestion des situations. La voie est étroite entre les deux écueils que sont, 1), ne pas donner d'aide, et 2), tomber dans le paradoxe signalé ci-dessus.

III.2.2 La dimension institutionnelle

On peut remarquer, de façon plus générale, que l'institution scolaire a depuis quelques années, de nouvelles exigences par rapport à ce que l'enseignant(e) doit mettre en œuvre dans sa classe : une pédagogie centrée sur les apprentissages des élèves, tenant compte de leurs différences tout en visant une culture commune. Cette culture commune n'est plus à restituer 'par cœur' comme jusqu'au milieu du XX$^{\text{ème}}$ siècle, mais on demande aux sujets de l'école de comprendre, conceptualiser, manipuler… Cette évolution sociale rend plus crucial le problème de la dévolution dans l'institution scolaire aujourd'hui.

---

[32] Dienès ayant affirmé que l'enseignement avec les fiches portant son nom ne pouvait que produire les apprentissages prévus, il s'est avéré que les professeurs utilisant ces fiches comme indiqué se désengageaient de l'apprentissage des élèves – puisqu'il était supposé assuré automatiquement – et donc, la relation didactique se trouvait rompue, d'où absence d'apprentissage. Un phénomène un peu analogue se produit actuellement avec les fiches des manuels "J'apprends les maths".

Si l'on tente un résumé de la façon dont sont décrits les rôles du professeur, par exemple dans les référentiels de compétence de l'Education Nationale, mais aussi dans les publications sur l'école et les articles de recherche en sciences de l'éducation, et dans les formations dispensées aux professeurs dans les IUFM, on peut dire que le professeur est maintenant supposé apte à :

- permettre l'insertion de l'élève dans la progression au niveau de sa problématique personnelle (privée), et de son évolution ;
- expliciter le répertoire (public) d'ostensifs de l'enseignement du niveau considéré (termes oraux, représentations graphiques, symboles écrits, résultats, relations, méthodes et techniques) ; et ceci, en se basant sur les ostensifs originaux produits par les élèves dans les problèmes de recherche (ce qui suppose de comprendre ces ostensifs non canoniques, de s'appuyer sur eux et de les dépasser) ;
- organiser le temps et les situations pour permettre aux élèves de réaliser une acquisition et une structuration pertinente des savoirs : identification et enrichissement de notions mathématiques au travers des relations fondamentales supportées par des situations pertinentes.

Il y a de plus d'autres exigences nouvelles du côté du professeur :

- savoir relier un objet d'enseignement à ses fonctions sociales et scientifiques (culture scientifique, en Primaire ; mise en œuvre de dispositifs comme les TPE, au Secondaire).
- développer une certaine rigueur conceptuelle pour différencier et relier ce qui relève des connaissances personnelles (et privées), ce qui relève du savoir (nécessairement public), ce qui relève de son emploi dans des situations.

En conclusion, si des éléments pour la modélisation du professeur dans la TSD ont commencé à être explorés, ils sont loin d'être encore suffisamment constitués pour que ce modèle soit raisonnablement opérationnel. Les autres théories n'ont pas non plus d'appui suffisant à ce niveau : il existe certes des pratiques de formation des professeurs qui supposent une réflexion sur son rôle, mais la recherche est à poursuivre pour obtenir des résultats utilisables de façon générique[33]. Notons que la recherche en langue anglaise a fourni des avancées notables dans ce domaine (cf. Malara & Zan, 2002). Les recherches en cours attestent toutes, par ailleurs, de la difficulté qu'il y a pour l'enseignant(e) à piloter dans la classe des situations complexes, telles que celles proposées dans le cadre de la TSD.

Les chapitres suivants de ce texte étudient quels procédés peuvent permettre de construire des milieux de pertinence attestée, dans l'enseignement secondaire ou supérieur en particulier. L'un de ces procédés, le retournement de situation, s'avère être un mécanisme efficace de production de milieu où la nécessité d'une connaissance se fait jour. Il serait donc une carte maîtresse dans le jeu de la deuxième boucle évoquée au II. : c'est ce qui sera examiné dans les exemples du chapitre 3.

Cependant, tout autant que de fournir des exemples des cadres théoriques décrits ci-dessus, il importe d'approfondir la question de l'utilisation des signes en relation avec les situations. C'est un point sur lequel la TSD est restée relativement muette : le niveau du premier degré (Enseignement primaire) des premières réalisations explique dans une certaine mesure cette faiblesse de prise en compte, dans la mesure où les écritures mathématiques convoquées ont pu paraître suffisamment élémentaires pour ne pas mériter un traitement spécifique.

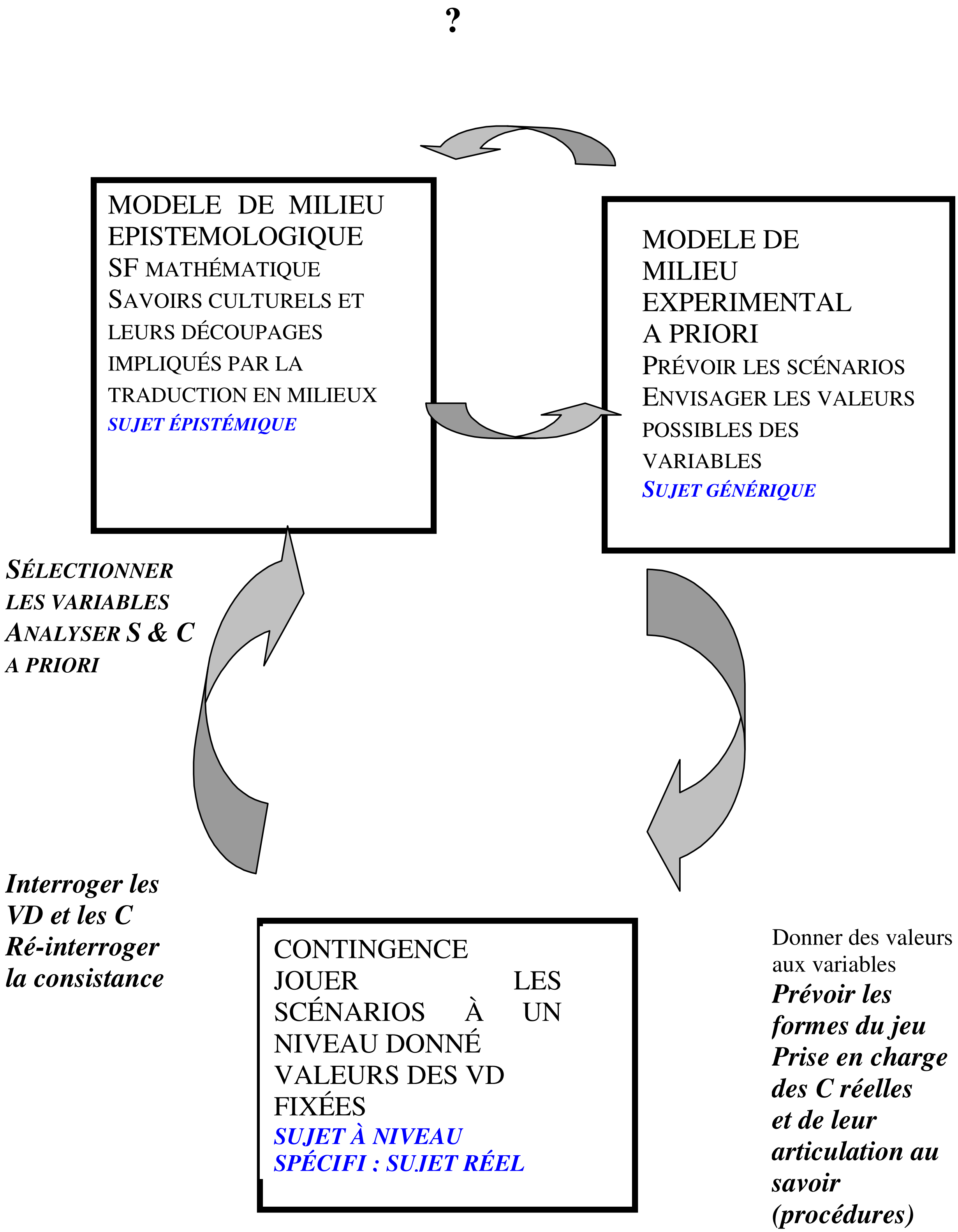
Cette question s'impose cependant à tout chercheur qui s'engage dans la construction de situations au niveau secondaire ou supérieur : les premiers milieux organisés sont déjà, si puis

[33] Certes la TAD a produit un modèle du professeur, mais sa mise en œuvre est encore peu probante…

dire, saturés de formulations et de signes mathématiques. Le rôle des sémioses est actuellement un sujet de recherche pour de nombreux chercheurs, certains proches de la TSD comme Conne (Conne 2002 et 2003), et d'autres plus éloignés comme Durand-Guerrier (Durand-Guerrier, 2003). De nombreux chercheurs travaillant plutôt dans le paradigme 'Mathematics Education' se sont intéressés à cette question dans une perspective cognitiviste : savoir ce que les élèves comprennent des signes mathématiques, relier signes, contexte et concept (Radford 2003, Godino 2002, 2005, Steinbring 2005). Notre travail s'en distingue par l'approche de ce qui relie signes et situation (le contexte dans ces travaux) : les signes sont, dans une perspective de la TSD, des éléments constitutifs d'une situation, et celle-ci est elle-même un signe de la connaissance à enseigner. Ce fonctionnement dynamique est à la base de la constitution de milieux.

Nous avons produit une première étude sur le rôle des signes dans la constitution et l'organisation de situations (cf. Bloch, 2005 CERME), et des travaux sont en cours, notamment dans le cadre de l'enseignement spécialisé.

ANNEXE : le schéma de l'articulation milieu théorique/milieu expérimental



Légende : SF : situation fondamentale VD : variables didactiques
S&C : savoirs et connaissances

CHAPITRE 3

ARTICULER ETUDES MACRO ET MICRO DIDACTIQUES

L'enseignement de l'analyse : les ruptures secondaire/supérieur

I. PROBLEMATIQUE DES RUPTURES SECONDAIRE/SUPERIEUR

Dans l'introduction de ce travail nous postulions que la didactique des mathématiques se donne pour but d'étudier "ce qui est possible dans l'enseignement des mathématiques ; ce qui est contraint par l'institution, les manuels, l'idée sociale des mathématiques ; ce qui est viable pour l'élève, du point de vue cognitif ; ce qui est réalisable, du point de vue du professeur et des contraintes". Dans ce "possible" des mathématiques il y une double dimension : un aspect micro-didactique relatif à ce qui advient dans une classe, ou un TD, ou un "amphi" de mathématiques – que cela soit dans une situation construite par une ingénierie didactique, ou une situation de classe "ordinaire" ; et un aspect macro-didactique qui concerne le curriculum, les connaissances évaluées globalement, le savoir mathématique résultant d'un enseignement sur quelques mois, quelques années, et les passages, les transitions d'une institution didactique à une autre. Ces passages sont toujours l'occasion d'exigences différentes, de reformulations des concepts et de réorganisations des savoirs dans des théories plus complexes ou plus générales. Une constante de ces épisodes est que l'institution de niveau n tient en général peu compte des connaissances dont prenait soin l'institution de niveau $n - 1$, quand elle ne les rejette pas : c'est le cas lors du passage primaire/secondaire par exemple pour ce qui concerne les grandeurs et les mesures. Lorsque l'institution n se fixe un quota de réussite (ce qui est relativement le cas dans l'enseignement secondaire en France), ce manque de continuité ne produit pas d'effets notables sur la réussite sociale des élèves, même si l'on peut également s'interroger sur la réorganisation que ceux-ci sont ou non en mesure d'effectuer relativement à leurs savoirs. Mais au niveau de la transition secondaire/supérieur, une rupture trop brutale peut contribuer à des effets sociaux préoccupants, à savoir, l'échec dans les études scientifiques, et plus particulièrement mathématiques – comme on l'observe actuellement dans la plupart des pays industrialisés, avec pour corollaire une désaffection pour ces études.

Pour le didacticien ces transitions sont l'occasion d'observer des phénomènes intéressants précisément parce qu'il y a réorganisation des savoirs et des connaissances des élèves. Dans un contexte de transition, certaines tâches données aux élèves ne peuvent être réalisées par des techniques relevant de routines du niveau antérieur : il en résulte que les connaissances présidant à leur réalisation deviennent visibles à travers des procédures heuristiques non expertes. Ces observations nous aident à comprendre les connaissances en jeu, l'adéquation ou non de celles-ci au nouveau curriculum, et le travail du professeur aux prises avec l'enseignement du nouveau concept ou d'une forme nouvelle d'un concept déjà rencontré.

I.1 La transition secondaire/supérieur et ses difficultés dans le champ de l'analyse

Dans le champ qui nous intéresse – celui de l'enseignement de l'analyse – nous avons étudié l'organisation générale des savoirs au point de rupture principal, entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur : ainsi les choix faits pour l'enseignement d'une théorie difficile comme l'analyse, au début du cursus universitaire, ont été objets d'enquête et d'interrogations. Nous en évoquerons quelques unes. Ce point crucial – les modalités et des difficultés de la transition entre les enseignements secondaire et supérieur – fait partie de nos thèmes d'investigation depuis le début de nos recherches. Dans cette perspective I.Ghedamsi (Institut Supérieur d'Education et de Formation Continue, Tunis) a soutenu son mémoire de DEA (juin 2003) sur la question des ruptures entre les deux ordres d'enseignement, plus particulièrement sur la notion de limite. Ce chapitre s'appuie sur ce travail ; I.Ghedamsi poursuit actuellement cette recherche en thèse (co-direction H.Smida, Université de Tunis I, et I.Bloch avec le contrôle de A.Rouchier, PU, IUFM d'Aquitaine et co-directeur du laboratoire DAEST).

La problématique de ce travail se base sur un constat partagé par les mathématiciens de nombreux pays : les exigences de l'enseignement de l'analyse, à l'entrée à l'Université, conduisent à l'échec de nombreux étudiants, y compris ceux qui réussissaient tout à fait convenablement en fin d'études secondaires scientifiques. Le travail du didacticien peut être justement de se doter d'outils de recherche pour dépasser les constats désabusés ou accusateurs et pour comprendre ce qui rend si périlleux l'entrée dans les problèmes, les concepts et les modes de validation spécifiques de l'analyse, au point de faire échouer de bons élèves.

Nous avons choisi de concentrer la recherche sur la notion de limite : c'est le premier concept d'analyse rencontré par les étudiants dans l'enseignement secondaire. L'étude a été menée sur un corpus d'exercices et de cours de Troisième et Quatrième années secondaires tunisiennes, option mathématiques (l'équivalent des classes de Première et Terminale Scientifique françaises), et sur la première année universitaire d'études de mathématiques. Quelques séances de mathématiques ont également été observées en première année de classe préparatoire technique française ; nous en donnerons une analyse qui complètera les résultats de l'étude macro-didactique.

I.2 Les cadres théoriques

Cerner les caractéristiques spécifiques du travail sur la notion de limite, en fin de secondaire ou en premier cycle universitaire, nous a amenée à nous doter d'outils théoriques issus de différents travaux.

1.2.1 L'étude des milieux disponibles ou activables pour l'enseignement de notions d'analyse

Cette étude s'appuie directement sur les outils élaborés lors de notre travail de thèse. En particulier, nous avions identifié les variables relatives au système spécifique de preuve de l'analyse. Ce système est basé sur le registre formel mais comprend, de plus, des caractéristiques bien connues (travail sur des représentants "voisins" des nombres cherchés, raisonnement par condition suffisante, articulation des connecteurs logiques et des quantificateurs pour énoncer des propriétés portant sur des classes de fonctions : cf. Bloch, 2000). Cette spécificité est liée à la généralité des objets manipulés ; ainsi que nous l'avions mis en évidence par exemple dans Bloch (2003), pour faire entrer les élèves dans la théorie de l'analyse, un travail dans ce domaine ne doit pas se contenter de porter sur des exemples ou sur quelques fonctions exhibées ; il doit prendre en charge l'établissement de propriétés générales et le débat sur leur champ de validité.[34] Les caractéristiques d'un milieu adéquat pour ce travail ont été définies dans Bloch, 2000. Le paragraphe III de ce chapitre en reprendra les principaux éléments pour permettre l'analyse d'une leçon sur la continuité, observée en classe de Mathématiques Supérieures, option TSI.

1.2.2 Le statut des notions et la disponibilité des connaissances

Ce cadre défini par Robert pose, d'une part la question des relations que des nouvelles notions introduites à l'université entretiennent avec de notions connues ; d'autre part la question des fonctions que vont occuper ces nouvelles notions. Ceci conduit à distinguer plusieurs statuts possibles des notions concernées : statut formalisateur, unificateur, généralisateur ou simplificateur. Ces différents statuts sont une tentative "explicative" des difficultés rencontrés par les étudiants. Ainsi, le travail mené à l'université sur la définition du concept de limite de suite – fondé sur la formalisation en (ε, N) – dévoile les difficultés qu'ont les étudiants à élaborer une démarche formelle sur les problèmes de convergence, exigence nouvelle par rapport au travail sur des problèmes particuliers abordé dans l'enseignement secondaire. La démarche de formalisation ne peut être considérée comme jouant un rôle

[34] Le travail de thèse de Fonseca met également l'accent sur cette nécessité, voir Bosch, Fonseca, Gascon, 2004.

simplificateur, d'un point de vue didactique, que si l'aspect généralisateur peut en être déduit et des théorèmes facilitant le travail ultérieur prennent place dans les outils disponibles ; cette réorganisation ne peut avoir lieu que par le biais d'ingénieries *ad hoc*, et dans des organisations sur le long terme qui permettent à l'étudiant d'appréhender les gains méthodologiques ainsi conquis.

Remarquons que ce point de vue est voisin de celui que nous avions mis en œuvre pour analyser les nouvelles exigences quant à la validation en analyse (Bloch 2000 et 2003) : il s'agissait de faire apparaître les caractéristiques du système de validation de l'analyse – nous avions caractérisé ce système par le recours à la "représentation par un voisin", au sens que la démonstration de l'égalité de deux nombres, de l'identification d'une limite, … s'appuyait sur des encadrements et majorations avec l'adjonction de quantificateurs : en analyse, prouver une propriété pour une valeur x_0 peut se faire en prouvant la propriété – ou une propriété qui lui est reliée – pour tout x 'voisin de' x_0. Ainsi la validation en analyse s'avère reposer sur un système profondément différent de celui de l'algèbre et la dimension unificatrice ne peut être obtenue qu'au prix de l'entrée dans ce nouveau système : on pense aux 'process' de Dreyfus, aux concepts de Tall ou à l'encapsulation de Dubinsky (cf. Dreyfus, 1996 ; Tall, 1996 ; Trigueros et Oktaç, 2005).

Ceci est à relier également à ce qui est dit par Sackur et al. (Cf. Sackur, Maurel, Drouhard, 2001) sur les différences de nature dans la dénotation en algèbre et en analyse : en arithmétique, une lettre dénote un nombre ; en algèbre, une lettre x (variable ou inconnue) dénote un ensemble de nombres ; en analyse, une lettre – f – dénote un ensemble ou une classe de fonctions. Ainsi lorsque le professeur de mathématiques dit, en classe : "Soit f **la** fonction affine qui à x associe $ax + b$" il désigne, en fait, une classe de fonctions. Autrement dit, du simple fait de la dénotation et de ses valeurs différentes, et du rôle inédit jusque là des paramètres, un discours – apparemment inchangé car en arithmétique l'enseignant dit aussi : "Soit a le nombre cherché" – recouvre des degrés de généralité profondément différents.

Dans le passage de l'algèbre à l'analyse comme ailleurs, la généralisation et le gain d'expertise qui en découle ne peut se décréter : elle doit être construite dans des situations pertinentes comportant des milieux adéquats au travail visé.

Par ailleurs, l'utilisation du langage formel conduit à l'intégration des connaissances anciennes et leur réorganisation dans les savoirs nouveaux, et nécessite sans aucun doute l'effacement de certaines images anciennes associées au travail antérieur. C'est pourquoi de nombreux chercheurs pointent comme particulièrement important le fait d'analyser les exigences de flexibilité nouvelles à l'entrée à l'université (Praslon et Maschietto pour l'analyse, Dorier, et Robert 1997, Gueudet 2004 pour l'algèbre linéaire, Artigue et Dias). Praslon propose aussi une grille d'analyse des tâches, qui a de nombreux points communs avec celle que nous avons utilisée : classement outil/objet d'une notion, et recensement des types de conversions entre registres, pour n'en citer que deux.

Pour qualifier le nouveau besoin de flexibilité à l'entrée à l'université, nous avons utilisé ce que Robert (1997) a défini comme le niveau de mise en fonctionnement des notions. Rappelons que Robert en recense trois ; le troisième, s'avérant spécifique à l'université, est adéquat pour nous permettre de saisir l'ampleur de l'évolution des pratiques attendues des étudiants.

- Le niveau technique,

  " (…) correspond à des mises en fonctionnement isolées, mettant en jeu des applications immédiates de théorèmes, propriétés, définitions, formules, etc."(Robert, 1998, p. 165)

- Le niveau mobilisable,

  " (…) correspond à des mises en fonctionnement plus larges : encore indiquées mais dépassant l'application simple d'une propriété à la fois."(Robert, 1998, p. 166)

- Le niveau disponible : ce dernier exige que l'apprenant soit capable de résoudre ce qui lui est proposé sans aucune indication, donc de trouver par lui-même les connaissances nécessaires à la résolution. Ce niveau inclut donc le choix de techniques, théorèmes, stratégies. Ce niveau est rarement présent au secondaire sur quelque domaine mathématique que ce soit.

Un élément discriminant dans la transition entre deux cycles d'enseignement concerne les exigences relatives des deux cycles par rapport à des savoirs qui pourraient paraître communs : le décalage entre les deux institutions peut s'avérer important quant aux exigences, même si l'intitulé du savoir est quasiment identique. Ainsi le nouveau curriculum du lycée prévoit par exemple la résolution de certaines équations différentielles par la méthode d'Euler : mais le niveau de justification est très bas et les occasions de réinvestissement dans des problèmes non routiniers inexistantes. On conçoit dès lors que l'on ne puisse se baser sur l'intitulé figurant dans le programme pour saisir le niveau d'expertise exigé des étudiants.

1.2.3 La distinction connaissances / savoirs

Dans une étude didactique concernant les objets mathématiques qui interviennent dans l'enseignement d'une notion comme la limite, la constitution de milieux se fait en organisant des problèmes, des questions, mettant en jeu des outils et des calculs, des conjectures, des moyens de validation. Dans ce milieu on peut considérer que certains moyens vont fonctionner comme des connaissances plus ou moins implicites ; et ceux qui feront partie des outils de validation ou des savoirs institués (transposés) fonctionneront comme des savoirs dans l'une ou l'autre des deux institutions en question. Cette approche prend en compte la contrainte selon laquelle :

> "Il est impossible d'évoquer une connaissance indépendamment de tout savoir, car la référence au savoir en tant que modèle s'y trouve d'emblée inscrite, et il est difficile de parler séparément de la connaissance et du savoir." (Conne, 1992, p. 236)

Nous pourrions ajouter que de ce fait, il est impossible d'organiser des milieux comportant une dimension heuristique pour l'élève, sans y prévoir l'usage de connaissances ; ne prévoir que la communication de savoirs conduit à un enseignement par ostension (cf. Berthelot & Salin, 1992 ; Salin, 1999), lequel a, par ailleurs fait la preuve d'une certaine inefficacité[35].

Cette distinction connaissances/savoirs s'est révélée nécessaire à deux niveaux :

1) Comme moyen de catégorisation des objets mathématiques intervenant dans l'enseignement de la notion de limite ; et donc comme outil afin de repérer les connaissances préalables, les connaissances à travailler et les savoirs dans les deux institutions, ceci dans le même ordre d'idée que Conne quand il dit :

> " (…) la distinction connaissance/savoir suit logiquement la prise en compte de la transposition didactique comme phénomène (…)" (Conne, 1997, p.15)

En effet, l'existence de la transposition didactique implique un traitement différencié des objets mathématiques, lequel à son tour entraîne des différenciations dans le statut des moyens de travail des étudiants : certains moyens n'ont qu'un statut implicite et restent à l'état de connaissances, alors que d'autres sont élevés au rang de savoirs. L'évolution de ce statut est bien entendu au cœur de la transition d'une institution à l'autre (cf. Bloch, 1999 ; 2000). Ainsi certains objets mathématiques ne sont pas institués comme savoirs au secondaire, alors même que l'enseignement supérieur les considère comme tels et base sur eux des apprentissages ultérieurs. De même certains sont enseignés comme des savoirs mobilisables (le contexte est présent et reconnaissable par les élèves), alors que l'université les considère comme disponibles, même hors contexte usuel, chez les étudiants.

[35] Voir le chapitre 1. La structure des objets mathématiques, analysée dans ce chapitre, rend problématique d'enseigner les mathématiques en se restreignant au niveau du savoir ou du formel : cf. aussi Dubinsky, 1996.

2) Dans un second temps nous avons utilisé la distinction connaissances/savoirs comme moyen d'identification – dans la mesure du possible – des connaissances dont les étudiants auraient besoin au premier cycle universitaire et que l'enseignement secondaire ne leur a pas permis d'acquérir.

1.2.4 Tâches, techniques, théories

Le cadre théorique de la théorie anthropologique nous a permis de repérer les différents niveaux de problèmes posés aux élèves, et l'évolution des praxéologies mathématiques entre le secondaire et le supérieur. Nous avons pu ainsi étudier les techniques transitoires, leur plus ou moins grande routinisation, et le statut donné dans les deux institutions aux dimensions technologique et théorique. Cette étude rejoint sur de nombreux points l'analyse faite par Fonseca, déjà citée.

1.2.5 Dimension des notions étudiées : processus ou objet

Les études de Sfard (1991) amènent à postuler l'existence d'un saut cognitif important entre une conception structurale d'un concept mathématique – le concept comme objet – et une conception procédurale – le concept comme processus dans la résolution d'une tâche. Remarquons que, dans ces travaux, l'attribution de ces conceptions est faite à l'élève dans une perspective cognitiviste. Nous avons utilisé cette distinction dans une perspective différente, celle de l'étude structurelle de curriculums ou d'organisations mathématiques, en attribuant les caractéristiques processus ou objet à ce qui est proposé à l'élève dans les tâches, techniques, technologies ou théories. Cette distinction rejoint la dialectique outil/objet de Douady, même si 'processus' peut paraître renvoyer plus à des procédures opérationnelles dans un algorithme, et non forcément à une utilisation comme outil dans une situation.

1.2.6 Les registres de représentation sémiotique

L'étude des représentations sémiotiques intervient à deux niveaux :

- Le niveau des tâches proposées ;
- Le niveau de la validation.

Les registres sollicités peuvent être a priori ceux que nous avions identifiés (par exemple dans Bloch 2003) : registre numérique, algébrique, graphique, formel. Ces registres constituent un indicateur du travail demandé ou des ruptures entre les deux ordres d'enseignement : le travail est d'autant plus tiré vers les technologies ou la théorie que le registre est plus formel ; et d'autre part, la rupture est d'autant plus grande que les registres utilisés dans le secondaire ne sont plus ceux qui seront sollicités dans l'enseignement supérieur.

Remarquons que la frontière entre registre algébrique et registre formel est mouvante, dans la mesure où les signes formels – quantificateurs, signes fonctionnels, intégraux, etc. – sont parfois considérés comme des signes algébriques généralisés. Cependant il existe une différence significative car les signes formels ne sont pas sujets à algorithmisation dans la première phase de l'enseignement supérieur et sont toujours accompagnés d'un raisonnement de type analytique, alors qu'une dérivation algébrique de polynômes ou de fonction rationnelle ne demande pas d'autre validation. On peut sans doute situer la frontière entre algèbre et traitement formel au niveau du seuil d'insuffisance de l'algèbre élémentaire pour traiter les problèmes, ce niveau étant le butoir de l'enseignement secondaire.

L'identification et la sélection des outil théoriques nécessaires à l'analyse de la transition nous a permis de définir des variables dont la variation, entre le cycle secondaire et le cycle supérieur, pourraient être responsables de certaines des difficultés enregistrées.

II. DEFINITION DES VARIABLES ET RESULTATS

II.1 Variables macro- didactiques

Les variables que nous avons retenues sont des variables *macro- didactiques*, au sens qu'elles concernent une organisation relativement globale de l'enseignement et non une situation locale d'enseignement d'un nouveau savoir comme une situation adidactique. Pour les définir et déterminer leur variation, nous avons étudié :

- Pour l'enseignement secondaire, un corpus important de programmes, de manuels, de textes d'exercices ;
- Pour l'enseignement supérieur, essentiellement des textes de TD (travaux dirigés) de l'Université

Ce travail ayant fait l'objet du DEA de I.Ghedamsi[36], le corpus a été assez largement pris dans les manuels tunisiens de mathématiques au niveau des dernières années de l'enseignement secondaire, option scientifique, et de la première année d'études de mathématiques à l'Université. Cependant ceci ne limite que peu la portée de l'étude : un examen de ces données permet de constater leur étroite parenté avec ce qui existe dans d'autres pays, et notamment la France. La thèse de Praslon (2000) en témoigne, et cet auteur avait déjà défini des macro-variables afin d'analyser des manuels et des TD d'Université. Nous avons repris certaines de ses variables qui correspondent ici à VD1, VD3, VD6, VD8, VD9.

Les variables finalement retenues sont au nombre de onze :

VD1 : le degré de formalisation, et tout particulièrement dans les définitions des concepts ;

VD2 : le registre de validation, soit l'algèbre des limites, soit le raisonnement analytique ;

VD3 : le degré de généralisation requis dans les énoncés : faible ou fort ;

VD4 : le nombre de nouvelles notions introduites dans l'environnement de la limite, comme les développements limités, etc…

VD5 : le type de tâches, soit heuristique, graphique, algorithmique.

VD6 : le choix des techniques et leur routinisation ou non : usage d'une même technique ou amalgame de techniques dont la responsabilité revient à l'étudiant ;

VD7 : le degré d'autonomie sollicité : faible ou élevé ;

VD8 : le mode d'intervention de la notion, comme processus ou objet ou outil/objet ;

VD9 : le type de conversions sollicitées entre registres de représentation ;

VD10 : le statut des tâches demandées aux étudiants, soit simple exercice d'application, soit démonstration d'un énoncé auxiliaire mais général. Cette variable est représentative du *contrat didactique* des deux institutions, dans la mesure où elle contribue à préciser la nature de la responsabilité mathématique dévolue aux étudiants.

Nous pouvons ajouter une variable V0 qui concerne l'introduction de la notion de limite : dans l'enseignement secondaire, il s'agit d'une introduction par des métaphores culturelles, alors que dans le supérieur, c'est bien entendu par une définition formelle.

Le choix de ces variables didactiques détermine ce que nous nommons le contrat didactique effectif ; particulièrement, les valeurs que prennent ces variables nous permettent de dégager la nature du partage des responsabilités mathématiques entre professeur et étudiants. Les modifications constatées des valeurs des variables correspondent à des ruptures entre les deux ordres d'enseignement. Nous avons pu ainsi catégoriser les tâches proposées dans un certain nombre de domaines de l'étude, ce qui nous a permis de disposer

[36] En co-tutelle à l'Université Bordeaux 2 et à l'ISEFC, Institut Supérieur d'Education et de Formation Continue, Université de Tunis.

d'information – qualitative ou quantitative – sur la continuité du travail des étudiants entre le secondaire et le supérieur, et sur la nature des ruptures : celles-ci sont-elles relativement anodines ou constituent-elles une transition globale difficile à gérer par les étudiants ?

II.2 Les valeurs prises par les variables didactiques et leurs conséquences

II.2.1 Evolution des valeurs des variables

Le tableau ci-dessous montre à l'évidence une modification importante des valeurs prises par les variables, ce qui ne peut que s'accompagner d'une profonde mutation dans le travail mathématique demandé. Nous commentons plus bas cette évolution, et donnons au II.2.3 quelques exemples d'analyse de textes d'exercices ou de tâches accompagnés de commentaires complémentaires.

	Enseignement secondaire	***Début de l'Université***
0. Introduction de la limite	Métaphores	Définition
1. Degré de formalisation	Faible	Elevé
2. Registre de validation	Algèbre des limites	Analyse
3. Degré de généralisation	Aucun	Elevé
4. Introduction de notions nouvelles	Importante (mais *sans* outils théoriques spécifiques de validation)	Importante (*avec* des outils théoriques spécifiques de validation)
5. Type de tâches	Algorithme, tracé de graphiques, calcul	Recherche et démonstration
6. Choix des techniques	Transparent	Amalgame
7. Degré d'autonomie sollicité	Routines	Peu de routine
8. Mode d'intervention de la notion	Processus	Objet
9. Conversions entre registres	Alg/Graphique	Alg/Analytique
10. Statut des énoncés d'exercices	Application, instanciation	Théorème, corollaire, énoncé général

L'analyse du seul tableau permet de noter que le passage de l'enseignement secondaire à l'Université s'accompagne de modifications majeures : presque toutes les variables sont modifiées, avec un taux de changement considérable. Les valeurs prises ne montrent presque aucun recouvrement : les étudiants sont confrontés à une révolution globale, aussi bien du travail demandé que des moyens de ce travail.

II.2.2 D'un travail algorithmique à des techniques complexes

VD0 : l'introduction de la notion de limite au secondaire est supposée s'appuyer sur l'intuition et des métaphores culturelles, alors qu'à l'Université la question de l'existence ou non d'une limite n'est plus philosophique mais entièrement déterminée par la cohérence de la théorie et la puissance du formalisme comme outil de preuve.

VD1 : A l'Université le registre formel est introduit d'emblée et les étudiants sont supposés avoir compris son utilité et se mouvoir aisément dans ce registre.

VD2 : A l'entrée à l'Université l'usage de la définition de la notion de limite est général, et considéré comme un moyen de preuve habituel ; ceci contraste avec le travail usuel au secondaire, qui porte exclusivement sur des fonctions ou des suites particulières, données algébriquement, si bien qu'aucun travail n'est demandé sur des énoncés généraux. Dans l'enseignement secondaire, on ne procède qu'à des instanciations de théorèmes sur des fonctions simples ; et encore faut-il remarquer que les théorèmes ont été le plus souvent admis – conformément au programme.

VD2, VD3, VD5 : A l'Université les étudiants sont supposés tenir des raisonnements analytiques : ces raisonnements portent très souvent sur des résultats généraux, faisant intervenir la définition de la notion de limite en (ε,η), ou des fonctions possédant telle ou telle propriété. Ces raisonnements comportent une dimension heuristique – recherche d'une solution non évidente – et l'usage de définitions formelles comme celle de la limite, ou de raisonnement par l'absurde, ou de recherche de contre-exemples ; ou encore, utiliser des développements limités (connus mais aussi à constituer suivant les théorèmes connus à partir de fonctions de base). Il n'en est pas de même dans l'enseignement secondaire où l'on constate que les applications demandées concernent très généralement une fonction bien précise, que le résultat ne fait pas de doute et que le moyen de sa démonstration est algorithmique, ou bien le recours à un résultat connu (et d'ailleurs qui n'a pas été forcément démontré).

VD4 : Il pourrait sembler que la variable VD4 ait subi peu de modifications entre l'enseignement secondaire et l'Université. L'introduction de l'analyse s'accompagne, dans les deux cas, d'une augmentation significative des notions nouvelles étudiées. Cependant la nature de cette augmentation est différente dans les deux institutions :

- Dans l'enseignement secondaire, les notions sont présentées à l'aide de métaphores culturelles, et les notions sont donc introduites essentiellement par, a) un nouveau vocabulaire, b) des analogies ou des métaphores, ce qui est pointé comme devant reposer sur "l'intuition" par les programmes et les manuels. Une notion comme celle de limite est donc réduite à son nom, quelques occurrences (limites finies, infinies, en x_0 ou à l'infini, sur des fonctions polynômes et rationnelles simples, puis sans démonstration sur les fonctions sinus, cosinus, logarithme et exponentielle) et quelques exemples, les élèves n'ayant pas à prendre en charge sa définition générale, ni le questionnement sur les fonctions ayant une limite ou non, ni ce que signifie cette notion de limite relativement à d'autres concepts reliés au premier.
- Dans l'enseignement supérieur, les notions sont introduites avec tout l'arsenal formel de définition et de preuve. Le statut d'un concept introduit est de ce fait très différent : outil général, relié à d'autres notions, susceptible d'être remis en jeu pour accéder à un nouveau concept ou un autre niveau de validation (par exemple les rapports entre limite, taux de variation, dérivée, développement limité, etc.).

VD6, VD7 : Les manuels du secondaire proposent des exercices et des problèmes usant la plupart du temps de la même (ou des deux ou trois mêmes) technique, techniques qui deviennent ainsi des routines pour l'élève. De plus un même exercice est en général consacré à *une* technique. A l'Université il en va tout autrement : les ensembles d'exercices analysés révèlent l'usage de nombreuses techniques, de plusieurs techniques dans un même problème, les étudiants étant supposés pouvoir faire usage de ce que nous avons appelé un *amalgame de techniques*, cette expression signifiant qu'un étudiant doit être capable d'articuler plusieurs moyens d'obtenir un résultat, plusieurs aspects du concept de limite, ceci dans un même exercice.

VD8 : à l'Université, la notion de limite est en soi un objet de la théorie « Analyse », étudié en tant que tel. On observe donc un travail sur la conception structurelle de la notion de limite : ses fonctionnalités dans des problèmes, ses relations avec d'autres objets de la théorie (développements limités, séries, intégrales…), et la validation dans le cadre du système de preuve de l'analyse : représentation par un voisin (cf. Bloch 2000), condition suffisante, usage du formalisme en (ε,η) et des quantificateurs. Dans l'enseignement secondaire, cet aspect est explicitement absent et le travail demandé met essentiellement en jeu l'aspect "processus" de la notion de limite, c'est-à-dire le cheminement pour obtenir, par exemple, les asymptotes d'une courbe.

Les résultats de cette recherche viennent ainsi à l'appui de celle que nous avions menée sur la nature du travail mathématique demandé dans le secondaire (Bloch 2003) : ce travail ne permet presque jamais la mise en évidence de propriétés mathématiques, au sens où l'on pourrait interroger leur validité, trouver leur domaine d'efficacité, énoncer la propriété 'non p' et en déduire des relations entre propriétés 'voisines' (par exemple sur l'ordre et la continuité…), et insérer les différentes propriétés dans une théorie.

Remarquons de nouveau que cette recherche rejoint le travail fait dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) par Bosch, Fonseca et Gascon (Bosch, Fonseca et Gascon, 2004). En effet ces auteurs pointent la faible possibilité ouverte, dans l'enseignement secondaire, de transformer des *organisations mathématiques ponctuelles* (OMP, comme l'étude des limites d'une fonction donnée algébriquement) en *organisations mathématiques locales* (OML) où les notions sont reliées entre elles par les règles de la théorie. Les travaux s'avèrent donc convergents dans la TSD et la TAD : l'organisation actuelle de l'enseignement mathématique au secondaire n'autorise qu'une 'visite guidée' d'un certain nombre de propriétés vues comme contingentes et ne permet pas de mettre en évidence les liens entre propriétés, entre concepts et la cohérence de l'édifice théorique, même de façon embryonnaire. Force est de conclure que l'organisation actuelle de l'enseignement secondaire ne prépare pas les étudiants au travail qu'ils devront aborder à l'Université.

VD7, VD9 : Au lycée, les étudiants n'ont presque aucune opportunité de décider de l'usage d'un diagramme ou d'un graphique pour aborder une situation de recherche (dimension heuristique), et ceci quelle que puisse être l'utilité d'un tel usage dans les problèmes intégratifs concernant le concept de limite. Maschietto (2001) a pointé la fonctionnalité des représentations graphiques pour la résolution de problèmes d'analyse au début de l'Université. Maschietto relève ainsi les difficultés des étudiants à se saisir de diagrammes, schémas, graphiques, comme supports de recherche. Il faut noter que les étudiants doivent manifester une certaine autonomie s'ils veulent développer ce type de compétences et en poursuivre l'usage à leur entrée à l'Université : en effet si l'institution (en France) encourage le développement des compétences heuristiques graphiques, souvent elle ne prend pas en charge l'organisation de cette capacité en fournissant des outils spécifiques, et les professeurs manquent de moyens didactiques pour rendre les étudiants performants dans la dimension heuristique du graphique. Cependant les travaux de Vandebrouck et Cazes (2004) exposent des expériences prometteuses. Pour certains enseignants de l'Université néanmoins, les étudiants sont supposés fonctionner très rapidement dans le registre formel, et les étudiants sont invités, dès leur premiers pas à l'Université, à saisir le sens des concepts dans ce registre et pratiquer tout à la fois la recherche et la formulation de solutions correctes dans ce cadre. Le travail de Bridoux (2005) est cependant un témoignage des interrogations de la communauté des enseignants universitaires[37].

VD9 : l'Université n'exploite pas non plus les possibilités ouvertes par les changements de registres de représentation, et on note même la disparition de tâches de conversion entre registre algébrique et registre graphique, qui étaient pourtant relativement courantes au secondaire, même si elles avaient tendance à n'être exploitées que dans un sens : de l'algébrique vers le graphique.

Nous pouvons constater que, si l'enseignement secondaire ne prépare pas les étudiants à leur futur travail à l'Université, l'enseignement supérieur pour sa part ne se préoccupe guère des connaissances antérieures que les étudiants ont acquises au lycée.

[37] Il n'incite pas à l'optimisme car il montre des étudiants de troisième année d'université usant du registre formel de façon quelque peu fantaisiste…

VD10 : enfin, l'analyse des énoncés de ce qui est considéré comme des exercices à faire par les étudiants, au secondaire et à l'Université, montre qu'au lycée les élèves n'ont à résoudre que des tâches ponctuelles portant sur des fonctions particulières, données par des formules algébriques, ce qui situe clairement le travail des élèves dans le domaine de l'application à des exemples ; les 'exercices' des séries de travaux dirigés de l'Université de Tunis consistent fréquemment à démontrer des corollaires de théorèmes du cours, dans des cas de propriétés particulières éventuellement (suite majorée, alternée, à valeurs dans **Z**…) mais non dans le cas d'une suite donnée par sa formule. Ceci porte clairement la responsabilité mathématique des étudiants vers l'établissement de résultats de cours, supposés réutilisables dans d'autres cas ; or ce type de responsabilité ne fait partie à aucun moment du contrat habituel de l'élève du secondaire.

Il faut noter que ceci ne se retrouve pas dans l'analyse des TD de l'université française : ce qui peut être demandé est de l'ordre de la reprise de démonstrations faites en cours par l'enseignant. L'objectif est de ne pas cantonner les étudiants à des tâches uniquement calculatoires ou d'application, et donc de leur faire rencontrer et utiliser des méthodes générales de résolution dans une situation où le risque est nul. De fait, l'alternative parfois rencontrée est de ne jamais organiser de dévolution aux étudiants de ces méthodes générales, mais bien plutôt de ne leur laisser que des tâches algorithmiques, ce qui assure peu la conceptualisation.

Nous donnons ci-dessous quelques exemples des tâches proposées aux élèves, et qui ont été à la base de notre analyse.

II.3 Exemples de tâches

II.3.1 Tâches associées à VD1, VD3 et VD10

Exercices des séries 3 et 4, TD de l'Université de Tunis :

Série 3, exercice 1 : Soit $(u_n)_n$ une suite à termes dans **Z**. Montrer que (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire.

Série 3, exercice 4 : Vérifier si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse :

a) Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$:
b) Toute suite non majorée admet une suite extraite qui tend vers $+\infty$;
c) Toute suite convergente est bornée.

Série 4, exercice 1 : En raisonnant par l'absurde montrer que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue sur cet intervalle.

Ces trois exercices concernent des propriétés générales, et exigent des preuves formelles. Le premier est une étude de cas particulier, permettant de conclure dans le cas d'une suite convergente qui se trouverait être à valeurs dans **Z** ; le second demande la démonstration de corollaires intéressants de la définition de limite ; le dernier est une démonstration d'un théorème classique de l'analyse, dans le cas d'une fonction de variable réelle. Loin d'être de simples « exercices d'application », ces exercices mettent à la charge de l'étudiant la démonstration de *résultats annexes du cours*, qui sont destinés à être réutilisés – ce qui n'est jamais le cas des exercices donnés dans l'enseignement secondaire – et doivent permettre de conclure rapidement dans le cas de l'étude de certains cas de théorèmes, ou de l'étude de suites, séries ou fonctions particulières. Par ailleurs le fait que les trois propriétés soient vraies est également un changement de contrat didactique par rapport au secondaire, et montre bien que l'objectif de ces exercices n'est pas un « entraînement » des étudiants, mais vise bien plutôt à les munir de résultats annexes utiles : au secondaire un tel type d'exercices comporterait obligatoirement au moins une propriété fausse, et son usage didactique serait identifié comme ayant un but de vérification de la compréhension.

II.3.2 Remarques relatives à VD4

Les instructions officielles de l'enseignement secondaire précisent les bornes souhaitables de l'introduction de l'analyse à peu près dans les mêmes termes en Tunisie et en France :

« L'étude des limites n'est pas une fin en soi. Les différents théorèmes serviront surtout dans l'étude du comportement d'une fonction aux bornes des intervalles où elle est définie (dérivabilité à droite et à gauche, branches infinies…) Il n'y a pas lieu de multiplier les exemples a priori. Les théorèmes relatifs à : la limite et l'ordre ; la limite d'une fonction composée, seront admis. » (Programme officiel de Tunisie, 1998).

L'apparition de nouvelles fonctions, en classe terminale de l'enseignement secondaire, s'opère comme celle des limites, à partir de règles plus ou moins algorithmiques : même l'introduction des intégrales ne prend en compte que le calcul de primitives. Ce n'est que récemment que la méthode d'Euler a été introduite pour la résolution des équations différentielles, mais sans justification théorique ou même de faisabilité (pas de condition des prémisses d'un théorème à vérifier, ce théorème n'étant d'ailleurs pas énoncé). Il en résulte que, si dans le secondaire il y a une relative importance des notions nouvelles désignées dans la programme, dans les faits cela ne s'accompagne pas de la nécessité d'introduire des moyens nouveaux de validation. La perception graphique et le travail algébrique demeurent dans la continuité des modes de validation algébriques déjà connus des élèves. Il faut donc relativiser la valeur – apparemment identique dans les deux colonnes du tableau – que nous avons donnée à VD4 : l'augmentation du nombre d'objets de savoirs existe dans les deux cycles, mais n'est pas de même nature.

Ainsi nous avons étudié plus précisément l'introduction de nouvelles techniques et technologies en première et deuxième année d'Université :

Première année :	***Deuxième année :***
1 Utiliser les définitions formelles	1 Utiliser les définitions formelles
2 Faire un développement limité	2 Prouver qu'une suite est une suite de Cauchy
3 Produire des contre-exemples	3 Identifier des suites adjacentes
4 Prouver par l'absurde	4 Utiliser des suites extraites
	5 Prouver par l'absurde
	6 Produire des contre-exemples

II.3.3 Remarques sur VD5, VD6, VD7

Les modifications dans les valeurs prises par VD5 s'observent particulièrement bien sur des pourcentages : au lycée 52% des tâches sont algorithmiques, et 33% concernent des réalisations graphiques ; seules 14% des exercices figurant dans les manuels comportent une dimension heuristique, encore peut-on douter s'ils sont effectivement donnés à faire aux élèves. Au début de l'enseignement supérieur, nous avons identifié 37% de tâches algorithmiques, pas d'occurrence de tâches graphiques, et 63% de tâches de recherche, avec l'usage de nouvelles techniques ou technologies.

Notons qu'à ce niveau, différencier technique et technologie se fait en référant à la définition donnée dans la TAD : une technique est le moyen d'accomplir une tâche, tandis que la technologie correspondante est ce qui justifie la technique. Ainsi, utiliser le théorème des accroissements finis par exemple pour calculer une variation, $f(b) - f(a) = f'(c)$, est une technique, alors que la technologie correspondante consiste à justifier que les conditions du théorème sont remplies, et à connaître les raisons qui justifient ce théorème, son utilité globale, et (au moins) certaines occurrences de son application.

Relativement à l'utilité non exploitée du graphique, nous avons relevé quelques exercices où le graphique pourrait jouer, pour les étudiants, un rôle de support et d'aide à la recherche :

Ex 1 : trouver les solutions d'une équation de type f(x) = x, pour ensuite déterminer la limite d'une suite donnée par récurrence.

Ex 2 : chercher la limite d'une suite donnée par une formule de récurrence comportant des paramètres, comme (x_n) : $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = a \sin x_n + b$

Relativement à VD6, nous avons remarqué que le travail demandé aux étudiants à l'Université comporte de nombreuses techniques ; du fait de leur nombre, ces techniques ont chacune une faible occurrence d'apparition, et cependant les étudiants doivent les maîtriser toutes. De plus, les étudiants sont responsables du choix de la technique ; de nombreux exercices demandent d'ailleurs d'enchaîner les techniques afin de parvenir au résultat. Cette situation est à l'opposé de ce qui prévaut dans le secondaire, où les techniques sont peu nombreuses, et chacune d'elles est soigneusement rodée dans un grand nombre d'exercices d'application sous la direction du professeur avant d'être laissée sous le seul contrôle mathématique de l'élève.

Cet état de fait contribue bien évidemment à une importante variation de VD7. De plus, les exemples abondent de la très grande variation qui est opérée d'un cycle à l'autre dans la responsabilité mathématique laissée aux étudiants : ainsi dans l'étude de suites récurrentes, la détermination de l'intervalle où la fonction décroît est systématiquement prise en charge par l'énoncé au secondaire, alors qu'elle est laissée à l'étudiant au supérieur.

II.3.4 Une nouvelle différenciation dans VD8

A l'Université on observe de nombreux exercices portant sur l'aspect objet du concept de limite, alors que le secondaire met l'accent exclusivement sur l'aspect outil, processus : étudier une fonction ou une suite spécifiée pour en déduire ses propriétés quant aux limites ou la dérivabilité. La transition processus/objet s'est révélée un modèle efficace pour notre classification, car elle a permis de décrire et de catégoriser les tâches usuelles au secondaire/ à l'Université, en saisissant le 'saut conceptuel' auquel les étudiants sont contraints :

- s'emparer du formalisme unificateur via la définition en (ε,η) ou (ε, N) et généraliser ainsi l'usage de la notion de limite, en réalisant une économie de pensée et de moyens heuristiques dans un grand nombre de tâches ;
- s'engager ainsi dans la réification du concept de limite et mettre ce concept en relation avec d'autres (développement limité, dérivée, …) ;
- prendre la responsabilité d'énoncer des propriétés générales relatives aux concepts, c'est-à-dire des théorèmes de l'analyse.

Cependant nous avons observé une certaine progression dans ce mouvement vers l'abstraction : ainsi des indications sont parfois données sur le type de processus attendu, ou le type d'objet à considérer. Nous avons donc retenu finalement quatre catégories :

PI : processus indiqué (dans l'énoncé) ;

PNI : processus non indiqué ;

OI : objet indiqué ;

ONI : objet non indiqué.

Ainsi :

- Exercice 10, p. 81, manuel de la dernière année secondaire : étudier la continuité de f en zéro : cet exercice correspond à un PNI : la tâche porte en effet sur la fonction et non sur la notion de continuité, mais la façon de procéder n'est pas indiquée.

- Exercice 7, P. 121, même manuel : étudier la dérivabilité de f en zéro, en utilisant le taux de variation de la fonction : PI.

- Exercice 6, série 3, première année de l'Université : trouver la limite en zéro de *x.sin1/x* : aspect OI : objet avec indication, car le travail porte bien sur la recherche d'une limite (la limite n'est pas donnée dans l'énoncé). Par contre le mode de recherche est indiqué.

- Exercice 4, série 3 : prouver que toute suite convergente est bornée, aspect ONI : le travail porte sur des concepts (notion de convergence, suite bornée) et aucune indication n'est fournie pour effectuer la tâche.

Cette classification s »est révélée utile pour l'étude des exercices car elle s'applique à la plupart d'entre eux ; de plus, elle rend bien compte de la responsabilité dévolue aux étudiants dans le savoir mathématique. Le résultat de l'étude croisée faite avec cette ces critères s'est avéré être complètement cohérent avec l'étude via les autres variables : à l'Université, la plupart des exercices mettent en jeu un processus non indiqué, ou des objets OI ou ONI, alors qu'au secondaire presque tous les exercices ne font intervenir qu'un processus indiqué.

II.4 Conclusions de l'étude macro didactique

En associant le résultat de l'étude Processus/Objet avec l'étude réalisée au moyen des autres variables, nous avons pu voir que, lors du passage secondaire / supérieur, les étudiants doivent s'habituer à des façons complètement nouvelles de travailler avec les limites : le passage est celui d'une initiation à la notion, à des définitions formelles et à la maîtrise exigée du raisonnement dans ce cadre formel. Ce saut conceptuel n'est généralement pas accompagné par des aménagements didactiques destinés à faciliter la transition ; l'Université commence seulement à prendre conscience des modifications qui pourraient être nécessaires pour permettre à cette transition de s'effectuer dans de meilleures conditions, et à proposer des supports didactiques en ce sens, comme en témoignent les travaux sur Wims par exemple (Cazes, Gueudet, Vandebroucke, 2005).

Dans le paragraphe suivant, nous exposons l'analyse d'une leçon sur la continuité, en classe de mathématiques supérieures PTSI. Cette étude met en évidence la cohérence de nos travaux sur l'enseignement de l'analyse au début du cursus universitaire : les résultats de l'analyse micro-didactique sont convergents avec ceux de l'analyse macro-didactique et montrent bien la nécessité de création d'un milieu spécifique pour cette transition.

III. ETUDE D'UNE SITUATION D'ENSEIGNEMENT SUR LA CONTINUITE : QUELQUES PHENOMENES MICRO DIDACTIQUES

III.1 La première partie de la leçon observée : changements de statut des objets

La leçon observée est une leçon sur les fonctions, en classe de Mathématiques Supérieures option PTSI – Physique, Technologie et sciences de l'ingénieur – le 19/03/2002, au lycée Saint-Cricq à Pau. La leçon porte sur fonction réciproque, et continuité. Le but est ensuite de travailler sur les théorèmes de dérivation des fonctions quotient et composée (ceci sera fait dans la séance du 21/03). Le professeur est un jeune agrégé. Il s'agit des premières leçons sur les fonctions, réciproques, continuité… Le début de l'année a été consacré à l'algèbre linéaire.

III.1.1 Première partie de la leçon : fonctions réciproques

Le professeur corrige un exercice : il s'agissait de montrer que la fonction f, définie par : $f(x)=2x-\dfrac{3x+9}{x-2}$ est une bijection de $]2, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$. Le professeur avait demandé la bijection réciproque. Les commentaires de l'observateur sont en italique.

1- Un élève : pour trouver f^{-1} on pose : $y = f(x)$ avec $x \in]2, +\infty[$ d'où $x = f^{-1}(y)$

2- P : personne ne l'a fait ? *(Mathilde, la seule fille de la classe, est la seule à l'avoir fait…)*

3- M (au tableau, écrit) : $y = 2x - \dfrac{3x + 9}{x - 2} \Leftrightarrow y(x - 2) = 2x\,(x - 2) - (3x + 9)$

4- P : est-ce qu'il y a vraiment équivalence dans tout ce que tu écris… En fait c'est équivalent si x>2, donc on va supposer que tu écris tout pour x>2. *(? ? ? pourquoi pas pour $x \neq 2$?)*

5- M développe l'expression écrite au tableau

6- P : en fait, on a une équation du second degré où *x* est l'inconnue, *y* est un paramètre. *(Les élèves n'ont jamais étudié d'équation avec paramètre dans l'enseignement secondaire).*

7- M arrive à : $2x^2 - 4x - 3x - 9 = y(x - 2)$ puis $2x^2 + x\,(-7 - y) - 9 + 2y = 0$

(Le calcul est alors fortement guidé par le professeur)

8- P : on calcule $\Delta = (-7 - y)^2 - 8(-9 + 2y) = y^2 + 14y + 49 + 72 - 16y = y^2 - 2y + 121$ qui a son discriminant négatif, et son signe ? *Les élèves semblent n'avoir aucune idée de la façon dont on pourrait le déterminer.*

9- P : je peux vous dessiner des paraboles qui n'ont pas de racines, (P dessine au tableau, deux paraboles, l'une positive à concavité vers y>0, l'autre négative à concavité vers y<0), donc pourquoi $\Delta > 0$?

10- Es : ???

Les élèves semblent découvrir avec difficulté ce basculement de Δ, de discriminant – outil pour chercher les racines d'une équation – à fonction représentée par une parabole, d'autant que le professeur n'a pas représenté la fonction qui à y associe $y^2 - 2y + 121$, mais deux paraboles 'génériques', supports du raisonnement.

11- Mathilde écrit alors les solutions, $x_1 = \dfrac{1}{4}(7+y+ \sqrt{y^2 - 2y + 121})$,

$x_2 = \dfrac{1}{4}(7+y - \sqrt{y^2 - 2y + 121})$

12- P : laquelle de ces solutions convient ?

Les élèves semblent très indécis.

13- Le professeur demande alors si x_2 peut être négatif et un élève affirme que oui ; P fait alors préciser pour quelle valeur : pour $y = 0$.

14- P : donc la réciproque est donnée par la formule x_1 . *(Ceci est une condition nécessaire, non suffisante. Pourquoi est-on sûr que x_1 est supérieur à 2 ??? En fait il faut, pour le prouver, comparer les racines à 2 : la comparaison de la deuxième racine a été faite par contre-exemple – x_2 peut être négative donc n'est pas toujours supérieure à 2 – mais quid de la première x_1 ?)*

15- E : et comment on sait que ça ne peut pas être tantôt l'un, tantôt l'autre ?

16- P : donne un argument de continuité *(Comment cet argument peut-il être reçu par les élèves ???).* Puis annonce : On va continuer comme ça, avant de reprendre les limites.

III.1.2 Variables didactiques, milieux disponibles et connaissances

a) Variables didactiques

Cet extrait met clairement en évidence la complexité du travail demandé par rapport au niveau d'expertise atteint au secondaire sur les mêmes concepts. Ainsi la résolution d'une équation est connue : mais là, on cherche ses solutions dans un intervalle donné, et avec une valeur y quelconque et non numérique, ce qui est d'ailleurs traité de façon relativement implicite par le professeur. De ce fait, la variable VD5 bascule car le traitement algorithmique numérique usuel n'est plus possible. VD3 est aussi modifiée car le degré de généralisation n'est plus le même, comme le prouve le passage où le professeur fait résoudre l'équation du second degré avec paramètres. Il s'ensuit que VD6 se complexifie également : le choix des techniques s'élargit, puisqu'il faut, à chaque étape du raisonnement, adapter la technique au nouveau résultat à prouver. On peut remarquer que VD7, sur les objets présents, change aussi : ainsi une équation du second degré devient un objet en soi, à référer à des courbes possibles pour donner des résultats généraux sur le signe d'une expression du second degré. Par ailleurs les types de raisonnement utilisés s'adaptent tout au long de la séance : calcul (fonction (?) réciproque), détermination du signe de Δ que l'on saisit alors, non plus comme le discriminant de l'équation mais comme une fonction de y ; on trouve ensuite un raisonnement par contre-exemple : x_2 peut prendre des valeurs négatives et ne peut donc convenir comme la réciproque de f de IR dans $]2, +\infty[$; puis un raisonnement par condition nécessaire où la condition suffisante, qui seule complète pourtant le raisonnement, n'est pas explicitée (le professeur se fonde-t-il sur le fait que f a nécessairement une réciproque dans l'intervalle considéré ? Si oui, les raisons n'en sont pas expliquées aux élèves, et risquent de rester incomprises).

Le professeur ne convoque pas la représentation graphique de la fonction, qui serait pourtant ici éclairante. Ce constat rejoint celui que nous avons fait plus haut : les connaissances des élèves sur les RGC et le rôle heuristique que celles-ci pourraient jouer sont négligées, comme nous l'avions déjà constaté dans le devenir de VD 9 entre secondaire et supérieur.

b) Milieux et connaissances des élèves

On voit dans cet extrait comment le statut des objets bascule entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur : ainsi une banale équation du second degré donne-t-elle, par l'adjonction d'un paramètre, un discriminant Δ qui est lui même une fonction de y ; et pour trouver le signe de Δ on calcule à son tour son discriminant, puis on considère Δ comme une fonction dont il faut déterminer le signe… Cette itération de procédés, banale en mathématiques dès que l'on atteint un certain niveau, n'est absolument pas familière aux élèves du secondaire. De même le fait de pouvoir considérer un objet mathématique depuis des points de vue variables, ce qui est l'une des bases du calcul algébrique, n'est pas introduit avant l'enseignement supérieur.

Dans ces conditions sur quelles connaissances des élèves ce travail peut-il s'appuyer ? Certes les élèves connaissent les équations du second degré et les fonctions réciproques, mais le niveau de complexité de l'exercice résulte d'une conjonction de facteurs. Quel milieu les enseignants peuvent-ils mobiliser pour assurer le réinvestissement des connaissances antérieures des élèves et les conduire à une étape plus complexe du travail mathématique ? Dans Bloch (2000) nous avions remarqué que des professeurs de classes comparables (Mathématiques Supérieures option PCSI[38]) avaient recours, pour introduire les élèves au nouveau mode de travail exigé, à des stratégies variées, comme le recours à des explications "métamathématiques", ou le renvoi à la classe de questions sur la nature des objets trouvés, et leur signification dans l'avancée du problème. Ces stratégies ne réussissaient à mobiliser qu'un petit nombre d'élèves – les meilleurs.

Ce qui pose problème, c'est donc :

- de savoir quand appliquer un théorème, et quelles sont les opérations préliminaires à faire pour que le théorème s'applique ;
- de pouvoir itérer un théorème, en changeant le statut des objets successifs considérés dans la résolution, de façon à ce qu'ils puissent devenir à leur tour objets des prémisses du théorème ;
- de contrôler la complexité de ces opérations, sans perdre de vue le but à atteindre ;
- de s'assurer de la validité des théorèmes et propriétés utilisés, dans les cas particuliers concernés ;
- et durant tout ce processus, de ne pas perdre la maîtrise des calculs.

[38] Physique, chimie et sciences de l'ingénieur.

Les points de la liste ci-dessus sont des *connaissances* et des *savoirs*, on ne peut les réduire à des savoir-faire : connaître et savoir reconnaître le champ d'application d'un théorème et son domaine de validité est une connaissance ou un savoir, suivant son caractère local dans l'action ou général dans la formulation / validation ou même dans la théorie. Ces savoirs sont sans doute travaillés en travaux dirigés, lorsque les étudiants ont des exercices à résoudre ; ou en interrogation orale, pour les étudiants de classe préparatoire (mais les interrogations orales sont en même temps des évaluations, ce qui n'est pas forcément une situation favorable à l'apprentissage). Nous reconnaissons là ce que l'on appelle des *compétences* : des capacités complexes à identifier des savoirs, les mettre en œuvre, et les relier entre eux. Des recherches en didactique mais aussi en ergonomie cognitive (Mercier, 1998 ; Rabardel, 2000 ; J.Rogalski, 2003…) étudient le professeur et l'élève en situation de travail. Des pistes de travail existent donc dans ce champ.

Une question est alors de savoir comment l'enseignement supérieur enseigne les connaissances énumérées ci-dessus, et qu'il exige des élèves ?

Quel milieu serait adéquat pour leur enseignement ? On pourrait construire des assortiments[39] – des suites ordonnées d'exercices – s'appuyant sur des connaissances antérieures des élèves. On peut ainsi imaginer de construire des exercices où le double statut d'un discriminant d'une équation avec paramètres serait l'objet de l'étude, au lieu d'être d'emblée un des outils du problème. L'une des variables didactiques à manier est d'évidence la longueur des raisonnements et la complexité de leur enchaînement : avec le changement de statut des objets, il semble que ce soit un facteur qui concentre toutes les modifications des valeurs des variables didactiques.

Les travaux que nous avons menés sur des corpus de cours d'enseignants de classes préparatoires, ou sur des devoirs d'élèves de ces mêmes classes, montrent à l'évidence les mêmes problèmes de contrôle du sens des opérations successives faites en mathématiques dans des résolutions d'exercices (cf. Bloch 2000, chapitre 8). Ils montrent aussi l'absence dans les classes d'un milieu pertinent pour enseigner ce contrôle et la nouvelle complexité en jeu. Nos travaux montrent qu'il serait pertinent d'essayer de construire ce milieu à partir de démonstrations et de contre-exemples dans le registre graphique (cf. Bloch 2003), du moins jusqu'à un certain niveau (incluant la première année post-bac, ainsi que l'illustre l'analyse des problèmes variés dans une leçon sur la continuité présentée ci-dessous). Pour les années ultérieures, nos recherches en cours s'attachent à la construction de milieux relatifs à l'enseignement des notions de dérivée, de développement limité, et des notions adjacentes.

III.2 Deuxième partie de la leçon : un problème de continuité

L'analyse de la deuxième partie de la leçon confirme les malentendus entre le professeur et les élèves : le professeur demande l'étude de la fonction définie par :

Si $x \neq 0, f(x) = \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}$, et $f(0) = 0$,

Soit, sont demandés sa continuité, son sens de variations, et une fonction réciproque.

Les élèves considèrent majoritairement que f est définie en zéro donc continue en zéro (contrat didactique de l'enseignement secondaire !). De plus la formule donnant la fonction pose manifestement problème à certains élèves : si $x > 0$, les élèves pensent que $f(x)$ est égal à $\sqrt{x}$, mais si $x < 0$, ils l'écrivent $-\sqrt{x}$. Pour ces élèves, comme l'exprime l'un d'eux : " $|x|$ ça ne peut pas être $-x$". Le professeur rectifie en $-\sqrt{-x}$ mais manifestement certains des élèves utilisent encore le signe 'moins' arithmétique : 'moins' signifiant 'négatif' et non 'opposé'.

Les élèves pensent ensuite que *f* est continue en zéro car sûrement dérivable, si bien que le professeur est amené à prendre position sur le fait qu'une fonction de ce type n'est pas, ou du

[39] La notion d'assortiment est due à Genestoux (2000).

moins pas de façon certaine, dérivable. La variable didactique relative à cette propriété n'est pas choisie de façon optimale car certes la fonction n'est pas dérivable mais la courbe admet bien une tangente (l'axe des y).

Le professeur propose en tant qu'aide de regarder la question suivante : celle-ci demande de montrer que la fonction est monotone sur $\mathbb{R}$. Des élèves annoncent alors que f est décroissante sur $]-\infty, 0[$, car $x \longmapsto -x$ est décroissante et racine carrée croissante ; à quoi le professeur répond que c'est ennuyeux, vue la formulation de la question, et le fait que f soit croissante sur $]0, +\infty[$! Le professeur aura beaucoup de mal à dévoluer la question de la continuité de f en zéro. Les élèves affirment ensuite que, si une fonction est continue sur une réunion d'intervalles, alors elle est continue sur l'intervalle entier…

On voit ici les étudiants produire des 'théorèmes-élèves' ainsi que nous l'avions remarqué dans l'analyse du travail produit dans le milieu graphique (Bloch, 2003). Nous avions aussi constaté que seul le travail dans un milieu permettant d'invalider les énoncés faux, amenait clairement les étudiants à faire d'autres conjectures, à les mettre à l'épreuve de fonctions connues, à construire des RGC pouvant permettre une visualisation des propriétés, et finalement à des preuves mathématiques[40]. Dans le bref extrait qui est ici présenté, et bien plus encore dans la transcription dont nous disposons, on peut faire l'hypothèse que le professeur chemine vers la résolution de son exercice par réfutations successives de propositions incorrectes pour lesquelles il peine à construire un milieu objectif efficace. Finalement, il aura l'idée assez tardive d'amener un graphique pour invalider la proposition sur le 'recollement' de fonctions continues.

Certes le professeur est un jeune agrégé, qui n'a sans doute pas l'expérience des professeurs que nous avions observés dans Bloch (2000). Mais la culture de l'enseignement supérieur ne prête pas à l'aménagement de milieux pour l'action des étudiants.

IV. CONCLUSION : VALIDITE DE LA TSD AU NIVEAU MACRO-DIDACTIQUE ET CROISEMENT AVEC D'AUTRES PARADIGMES

L'articulation de plusieurs théories ou paradigmes pour mener la recherche dans le champ de la didactique des mathématiques est à l'ordre du jour, et les programmes des congrès en portent la trace évidente. Il est non moins clair que la complexité du sujet ne permet pas qu'il soit appréhendé dans le cadre d'une seule théorie fonctionnant de façon holistique et explicative de tous les phénomènes. Néanmoins, comme nous le disions dans l'introduction, la recherche en didactique doit se garder de ne faire appel qu'à un 'patchwork' de théories opportunistes, 'n'expliquant' que des faits remaniés à fin de se conformer aux observables que la théorie veut bien accepter.

De ce point de vue certaines théories de didactique des mathématiques ont pu être soupçonnées de ne pas s'éloigner de l'interprétation des phénomènes d'enseignement que voudrait bien accepter l'institution scolaire : c'est un reproche qui a pu être fait à la théorie anthropologique. Il n'est que de lire Bosch, Fonseca et Gascon (2004) pour s'apercevoir que les analyses que font ces auteurs, des organisations mathématiques dans l'enseignement secondaire, rejoignent les nôtres, mais d'une façon plus globale.

Autrement dit, le fait d'aborder l'étude de l'enseignement secondaire ou supérieur par la TSD permet de voir localement des phénomènes qui existent aussi plus globalement, et qu'une étude dans la TAD met d'autre façon en évidence. Au début de ce texte nous déclarions ne pas vouloir de recherche qui spécifierait la théorie convoquée avant même de savoir quels pourraient être les exigences du sujet et les questions relevées. La théorie des situations didactiques permet de produire et d'interpréter des réponses relativement aux questions des

[40] Voir aussi Maschietto, 2001.

milieux présents dans l'enseignement supérieur, leur disponibilité du côté du professeur et leur maniement par les élèves.

Le chapitre 4 montre comment nos travaux ont visé à affiner la méthodologie de construction de milieux et de situations ; dans ce chapitre, nous rappelons les principes de certaines situations, ces situations ayant été par ailleurs largement détaillées dans nos publications (cf. documents accompagnant ce texte).

CHAPITRE 4

QUELQUES PRINCIPES POUR PENSER ET DEVELOPPER L'INGENIERIE : EXEMPLES DE SITUATIONS

PREAMBULE

Les éléments théoriques étudiés au chapitre I ont été mis en œuvre, expérimentés, testés dans la contingence ; cette mise en œuvre a comporté d'abord une réflexion sur la construction effective de situations relatives à un concept mathématique et concernant un niveau donné de l'enseignement.

La théorie des situations invite en effet à construire des situations a-didactiques à propos des concepts visés à un niveau donné de l'enseignement ; elle fournit des critères d'analyse a priori, et nous disposons d'outils didactiques et sémiotiques d'analyse du déroulement a posteriori, pour vérifier qu'un jeu donné contient bien, comme nécessaire, la connaissance visée (contrôle externe de (Mi_A).

Une question centrale de la TSD a été à l'origine d'une part non négligeable de nos travaux : comment construit-on une situation ad hoc pour un concept ? Existe-t-il des procédés efficaces pour effectuer cette construction ? Certes le savoir mathématique nous permet de dire qu'un concept a une fonctionnalité ; par exemple, si l'on veut construire une situation sur les fonctions de deux variables et leur différentielle, il est logique de s'intéresser à des lignes de niveaux (Sackur, 2002) ; une situation sur la fonction exponentielle conduira à proposer des accroissements proportionnels à la fonction (Schneider in Bloch et Schneider, 2004) ; une situation sur les vecteurs contient nécessairement des combinaisons linéaires et quelque part un travail sur des bases (Bloch 2002).

Cependant une articulation est souvent manquante : c'est celle qui permettra d'affirmer que l'élève va bien rencontrer ce savoir dans la situation. En effet il est parfaitement possible de mettre des éléments du savoir dans une tâche destinée aux élèves, et que ces élèves ne soient en mesure de le rencontrer que fortuitement par la tâche choisie. Nous en avions donné un exemple dans Bloch (2003) à propos de fonctions :

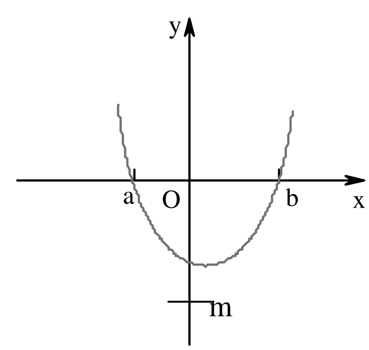
Les étudiants ont le graphique ci-contre, et la consigne est :

- "Ceci est la représentation graphique d'une fonction minorée"

ou, une consigne telle que :

- (une graduation étant éventuellement donnée) "montrez que cette fonction est minorée"

(Dimathème, manuel classe de Seconde, 1998)



Dans le cas de la première consigne, celle-ci a le statut d'une définition; les élèves sont supposés comprendre et apprendre) ; la deuxième consigne a un statut de preuve graphique, mais sans qu'un travail ait été fait sur les possibilités de preuve dans ce registre (cf. Bloch, 2002).

L'analyse de la tâche met en évidence que celle-ci ne donne aucunement aux élèves la possibilité de savoir :

- Ce qu'est une fonction (en général) minorée, ce que serait une fonction qui n'est pas minorée ; le "contraire" d'une fonction minorée est peut-être une fonction majorée ?
- Quelles sont les fonctions qui ont des chances ou non, d'être minorées ;

- Quel est l'intérêt, pour les mathématiques, d'identifier des fonctions minorées, majorées, de quels différents types ?

Dans cet exemple, manifestement le milieu – le graphique fourni, même si le milieu effectif ne se résume pas à cela – ne donnera aucune information sur ces questions et ne fournit pas d'occasions d'actions de l'élève ; or ce sont ces questions qui font, de la notion de majoration/minoration, un savoir *mathématique* ; en effet, en mathématiques les notions sont liées et insérées dans des théories ; de plus, elles ont un caractère de nécessité (Sackur, 2000) et non de "rencontre fortuite" contingente, comme dans l'exemple ci-dessus. De même, faire "rencontrer" à des élèves des combinaisons linéaires de vecteurs – comme cela se fait dans l'enseignement traditionnel – n'est pas suffisant pour qu'ils reconnaissent l'utilité des bases, et l'opérationnalité des vecteurs pour le travail dans l'espace affine par exemple ; leur "montrer" qu'avec des fonctions continues on peut fabriquer des intégrales de Riemann qui donnent l'aire sous la courbe, ne suffit pas à installer *l'utilité* des intégrales de Riemann *en mathématiques* : le savoir ainsi "appris" risque de rester anecdotique et non reconnu comme un maillon d'une théorie qui le justifie et le rend nécessaire à la bonne marche de l'ensemble[41].

Donc, quels sont les facteurs qui, dans l'organisation d'une situation, rendent une connaissance nécessaire ? Comment les étapes successives de la situation installent-elles les différents niveaux de milieu afin que le concept visé se trouve bien enjeu de travail, objet de discussion et finalement savoir reconnu ?

I. LE RETOURNEMENT DE SITUATION

Dans Bloch (2005a) nous l'avions examiné sur un exemple qui est à la limite de l'enseignement primaire : il s'agit du jeu des envahisseurs, portant sur les bases de numération. Une description du jeu est rappelée ci-dessous, avant l'analyse de sa génération comme mise en scène d'une situation retournée. Une définition théorique du retournement et des caractéristiques des situations retournées sera donnée ensuite.

I. 1 Le jeu des envahisseurs

I. 1. 1 Le premier niveau de jeu

Les envahisseurs sont des nombres ; et il s'agit d'envahir une série de nombres, en se servant des envahisseurs et éventuellement des opérations. Dans ce premier jeu, les envahisseurs sont 3, 5, 7 ; ils ne doivent être utilisés qu'une fois, et on peut employer l'addition, la multiplication, la soustraction. Le but est d'essayer d'envahir le plus de nombres possibles entre 1 et 30, en justifiant pour chaque nombre, par une écriture, qu'il peut être envahi : ainsi 12 peut être envahi car $12 = 5 + 7$; 16 aussi car $16 = 3 \times 7 - 5$. Par contre 29 ne peut être envahi. On peut le démontrer pragmatiquement par un raisonnement de combinatoire, en écrivant toutes les combinaisons possibles des nombres 3, 5, 7. Une propriété bien plus générale, serait que n'importe quel système de nombres, fini, ne pourrait permettre d'envahir certains nombres avec les règles données. Le prouver est par contre un problème d'arithmétique d'un tout autre niveau.

I. 1. 2 Le deuxième niveau de jeu

Dans ce jeu, les nombres devant être envahis sont *tous* les nombres entre 1 et 80 ; on n'a droit qu'à une opération, l'addition ; le jeu consiste à trouver les envahisseurs en nombre minimal pour répondre à la consigne. Un même envahisseur peut être répété au plus deux fois, pour envahir un nombre donné.

[41] Cf. Bosch, Fonseca et Gascon, 2004.

La solution experte consiste à partir de 1 ; on obtient 1 + 1, puis on ne peut plus avancer ; on ajoute donc 3, ce qui permet d'envahir 3 + 1, 3 + 1 + 1, 3 + 3, 3 + 3 +1, 3 + 3 +1 + 1, puis on est bloqué de nouveau ; il faut donc ajouter 9 aux envahisseurs. Le lecteur pourra vérifier qu'on envahit alors jusqu'à 26, et qu'il faut ajouter 27 (tiens donc ! 1, 3, 9, 27...) ; et qu'avec 27 on envahit alors jusqu'à 80, et qu'on serait bloqué au-delà ... il faudrait ajouter 81 aux envahisseurs.

On peut aussi vérifier que toute autre solution, en particulier celle qui consiste à partir de 80 et à diviser par deux, donne un plus grand nombre d'envahisseurs et qu'elle est donc perdante par rapport à la précédente. En effet on prend 40 pour pouvoir obtenir 80 ; on prend 20 pour obtenir 40 ; on prend donc aussi 10, puis 5 ; 5 n'étant pas divisible par 2, on prend le quotient euclidien : 2, puis 1. On peut ainsi envahir 2+1, 2+2, 5+1, 5+2, 5+2+1, 5+2+2 ; 5+5, etc … On donc six envahisseurs, à savoir, 1, 2, 5, 10, 20, 40. L'inconvénient de cette solution est qu'elle est dépendante du dernier nombre à envahir qui a été fixé, alors que la solution qui consiste à prendre l'ordre croissant pour envahir, permet de ce fait de continuer indéfiniment en ajoutant des envahisseurs mais sans changer la règle ni les premiers envahisseurs choisis.

L'exhaustivité des solutions ainsi obtenues est cependant un problème mathématique d'un autre niveau. Le concept sous-jacent à ce jeu est la numération en base trois, ce qu'on découvre en identifiant les envahisseurs : en effet un nombre peut être envahi si l'on peut l'écrire à l'aide des puissances de trois. La contrainte : ne pas répéter un envahisseur plus de deux fois, correspond au fait que le chiffre d'un ordre donné ne peut pas dépasser 2 : en effet, écrire 14 dans ce système d'envahisseurs revient à écrire $3^2+3+1+1 = 1\times3^2+1\times3^1+2\times3^0$, soit à écrire au maximum 2 fois un envahisseur : de ce fait, le chiffre maximum auquel on a "droit" est 2.

I.1. 2 Le troisième niveau de jeu

C'est le même jeu que précédemment, mais on doit envahir tous les nombres jusqu'à 2000 et on peut répéter jusqu'à neuf fois un envahisseur ... Il s'agit bien sûr de la numération en base dix, et au-delà, d'un jeu réflexif qui fait prendre conscience au joueur, si ce n'est déjà fait, qu'il est en train de manipuler les bases de numération.

I. 2 Le jeu des envahisseurs : la SF, les milieux et la connaissance

I.2.1 La situation fondamentale de la numération

La situation fondamentale de la numération comprend une étude sur la caractère minimal du système d'engendrement des nombres par les puissances d'une base de numération, étude bien connue dans la communauté mathématique et que je ne reprendrai pas ici. Elle comprend aussi, une analyse des variables et des modalités de jeu :

- la propriété fondamentale des bases de numération : le manuel Cagnac et Thiberge de 1963, expose dans le chapitre IX la théorie de la numération au niveau de la classe de Terminale de l'époque (celle d'avant les mathématiques "modernes"), comment décomposer tout nombre dans un système de base b, par divisions successives du nombre et des restes obtenus par b (ou division du nombre par les puissances de b, ce qui est la procédure experte). Le théorème fondamental de la numération assure l'existence d'une telle décomposition (contrôle interne des mathématiques).
- la valeur de la base de numération est une variable didactique susceptible de changer effectivement les procédures des élèves : fixer une trop grande valeur va rendre les calculs incommodes et empêcher la perception de la régularité de la décomposition. Par ailleurs, fixer "dix" comme base tendrait à obtenir une reconnaissance "culturelle" masquant le mécanisme opératoire commun à toutes les bases.

I.2.2 Les niveaux de milieux et les connaissances

Si l'on analyse les trois niveaux de jeu, on voit que le premier niveau ne contient pas la connaissance visée : la fonction de ce jeu est donc d'installer la situation, et plus précisément le *milieu objectif*. Pour qu'un actant puisse jouer, il faut qu'il dispose de stratégies de base, celles qui vont lui permettre, dans le deuxième jeu, d'anticiper et de chercher les envahisseurs. Ceci ne veut évidemment pas dire que le milieu objectif est dépourvu de connaissances : il contient les connaissances *antérieures* des joueurs : celles qui leur permettent de s'engager dans le jeu. Dans une situation adidactique, le premier niveau de jeu ne doit pas exiger le recours à la connaissance visée afin que la situation soit bien une situation d'apprentissage de cette notion.

Le deuxième niveau est celui qui contient la connaissance visée (en acte) comme nécessaire, c'est-à-dire que le joueur, pour gagner, *doit utiliser* la numération en base trois. Il ne l'utilise pas obligatoirement de façon consciente et raisonnée ; la venue à la conscience des joueurs, de ce que c'est bien ce savoir qui s'est joué, fait partie du milieu de référence, avec débat et preuve. Cette mise à jour peut se faire spontanément, notamment avec des élèves avertis[42], mais il se peut aussi que ce soit le professeur qui l'amène en organisant la mise en commun des résultats et la synthèse. Nous avions remarqué (dans Bloch 1999) que dans une situation comportant une dimension a-didactique, certains élèves sont déjà dans le milieu de référence alors que d'autres sont encore dans le premier jeu (la situation d'action) et que pour ces derniers le savoir ne se dégage pas de la situation d'action.

Le troisième jeu est une reprise mais aussi une généralisation du second, dans un cas que les élèves connaissent bien, la numération décimale. Cette familiarité peut leur faire prendre conscience de ce qu'ils n'avaient pas tous perçu jusqu'alors : la structure de l'écriture des nombres dans une base de numération. Ils ne l'avaient pas perçu en manipulant la numération décimale car trop familière et devenue transparente, et pas perçu en trouvant 1, 3, 9, 27 comme envahisseurs car la consigne ne correspondait pas à leur représentation des bases de numération.

Ce jeu est aussi réflexif comme signalé plus haut : qui dit généralisation dit prise de conscience du caractère plus étendu du phénomène étudié sur deux exemples, et dit aussi preuve valable dans les autres cas. Ce niveau de jeu correspond donc bien non seulement au milieu de référence, mais débouche sur le milieu de la situation didactique (preuve, institutionnalisation) ou même sur le milieu de l'élève réflexif (voir le schéma de la structuration du milieu page 49).

I. 3 Retournement du jeu dans une situation

On voit dans l'exemple des envahisseurs que la situation est bien construite en deux parties essentielles, un jeu direct et un jeu retourné :

- le jeu direct est là pour familiariser le joueur avec la stratégie que requiert le jeu, et avec les objets mathématiques manipulés ; ce jeu ne contient pas la connaissance comme nécessaire, elle est seulement contingente (rien n'empêche le joueur de dire : “ Envahir tous les nombres, je sais faire ça, on le fait avec les bases ”, mais bien sûr rien non plus ne l'y contraint) ;

[42] Cette situation – qui avait eu une diffusion interne au COREM, le Centre d'Observation et de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques, à Talence – s'est jouée de nouveau avec des étudiants préparant le concours de professeur d'école ; Catherine Sackur (Equipe GECO, Nice) l'a aussi expérimentée dans une classe de Terminale Scientifique. Le bilan a été le même dans les deux cas : certains élèves (avec un avantage à la Terminale sur des étudiants bac + 3) ont immédiatement “ décodé ” le savoir sous-jacent, tandis que d'autres peinaient à le découvrir.

- le jeu est alors retourné pour que le joueur ne puisse plus jouer sans la connaissance visée, qu'il va rencontrer en action ; en effet les consignes (contraintes) l'obligent, pour gagner, à utiliser cette connaissance (en acte).

Les travaux que nous avons menés dans le contexte de l'enseignement secondaire se sont appuyés sur ce schéma de construction d'une situation retournée pour ensuite le transposer à d'autres situations. Dans un premier temps on peut effectivement se demander s'il est possible de construire des situations de ce type pour certains concepts visés à ce niveau : la suite du chapitre étudie cette question. On peut aussi essayer, à partir d'activités déjà construites, soit dans les manuels soit dans des expériences d'innovation, de retourner ces situations de façon à installer une situation d'action et à ce que la connaissance visée devienne nécessaire au lieu de rester contingente. On aurait alors 'gagné' à la fois du côté de l'a-didacticité et du côté de la nécessité de la connaissance.

Au delà, on peut, comme déjà signalé, interroger d'un point de vue théorique général les mécanismes qui, à partir d'une étude épistémologique, sont producteurs d'un milieu expérimental a priori consistant par rapport à l'étude épistémologique première ; c'est-à-dire, les mécanismes *mésogènes*[43] permettant de construire des situations pour l'enseignement et l'apprentissage d'une notion, situations pertinentes autant que consistantes du point de vue du concept, situations pouvant déboucher sur l'enseignement du savoir visé, *et* situations à dimension a-didactique.

II. MILIEU EPISTEMOLOGIQUE ET MILIEU EXPERIMENTAL DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Pour les notions mathématiques du secondaire (collège et lycée), la démarche de construction de situations a-didactiques est loin d'être répandue, et n'est sans doute pas aisée à développer. L'organisation traditionnelle de l'enseignement à ce niveau comporte l'ostension de savoirs et parfois de connaissances, et l'application par l'élève des résultats établis. Cependant cette alternative s'avère dans certains cas peu satisfaisante : en particulier dans les programmes récents, elle a souvent abouti à des cours comportant un semblant de déduction à partir de propriétés “montrées” ; il s'agit plutôt dans ce cas de constatations que le professeur demande aux élèves d'établir, sur la base d'ostensifs algébriques ou graphiques par exemple, ainsi que nous l'avons exemplifié ci-dessus. Il ne s'agit pas de déduction véritable dans la mesure où l'élève n'a aucun moyen de s'assurer que la propriété qu'on lui demande d'énoncer n'est vraie que sous les hypothèses données, ou d'explorer les autres cas éventuels où elle serait vraie, ou de déterminer les objets mathématiques qui ne vérifient pas la propriété (voir Bloch 2003a). Nous avons montré dans Bloch (2000) que cette absence d'éléments de savoir sur le domaine de validité des énoncés et leur champ d'application, était un facteur handicapant pour la suite du cursus, tout particulièrement dans l'enseignement post-bac où le travail porte essentiellement sur ces éléments qui sont à ce niveau devenus des savoirs. L'étude qui suit veut montrer comment, en retournant le jeu habituellement proposé à l'élève, à la fois on rend la connaissance visée nécessaire, et on s'engage dans la voie de l'étude de ces connaissances et savoirs concernant la validité des énoncés. Au delà, il s'agit d'organiser que ce que l'élève apprend, ce sont bien des mathématiques avec leurs dimensions de conjecture, de preuve, et d'utilisation du langage symbolique.

La démarche proposée dans le cas de l'enseignement secondaire est différente de la démarche de la TSD, telle qu'elle a été parfois perçue pour l'enseignement primaire, où la démarche "conforme à la théorie" consisterait à identifier *une* situation fondamentale – un

[43] Ce terme a été défini dans Sensevy, Mercier, Shubauer-Leoni (2001). Un mécanisme mésogène est un mécanisme destiné à la production de milieux.

problème fonctionnel spécifique au niveau épistémologique – qui rende compte de l'usage du savoir dans la théorie mathématique correspondante ; puis à appliquer à une situation expérimentale cette SF, comme analysé ci-dessus :

- choisir des valeurs des variables,
- définir un jeu de l'élève,
- le mettre en œuvre.

Remarquons cependant que lors des expérimentations de situations, la TSD a fait, dans les fonctionnalités du savoir à mettre en scène, des choix parfaitement légitimes, qui entraînent – c'est inévitable – des découpages dans les savoirs ; et qu'une situation d'introduction d'un nouveau concept, domaine privilégié de la TSD dans l'enseignement primaire, ne saurait explorer, à elle seule, l'ensemble des aspects de ce même concept susceptibles d'être rencontrés ultérieurement par les élèves. Il s'ensuit que les situations envisagées dans l'enseignement secondaire et supérieur pourront être construites sur une partie seulement des aspects du nouveau savoir, partie jugée particulièrement significative ou intéressante à mettre en jeu au moment de l'introduction ; charge ensuite, à la continuité de l'enseignement, d'explorer les fonctionnalités qui n'auront pu l'être lors de la première rencontre. La nature des milieux définis au chapitre 2 rend compte de cet aspect de choix de situations : si le schéma des situations fondamentales est bien exhaustif quant au savoir[44], il n'en est pas de même des situations expérimentales envisagées pour une importation effective dans l'enseignement.

D'autre part, dans l'enseignement primaire, les situations introduites dans le cadre de la TSD font le choix de suivre pas à pas les connaissances des élèves ; autrement dit, la chronogenèse est basée sur ce que les élèves sont susceptibles de découvrir, investir, mettre en œuvre comme connaissances, à un moment donné. Ceci ressort bien des compte-rendus présentés dans "Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire", de N. et G. Brousseau (Bordeaux, 1988). Autant cette façon d'organiser l'apprentissage semble parfaitement légitime dans l'enseignement primaire, autant elle peut paraître inadaptée dans une certaine mesure[45], à un niveau de l'enseignement où l'on dispose déjà de nombreux concepts numériques et algébriques, d'outils sémiotiques permettant d'agir mathématiquement sur ces concepts, et même d'un certain nombre d'algorithmes pour obtenir des objets mathématiques dérivés de ceux que l'on connaît.

Le présent travail poursuit donc l'examen – entamé dans Bloch (1999, 2000) – d'une hypothèse (en deux parties), à savoir que, dans l'enseignement secondaire voire supérieur :

- il est difficile de trouver des situations fondamentales enseignables du concept ou de la théorie visés : cette hypothèse a été présentée et discutée, tant par Legrand (1996) que par Dorier, Robert, etc. … à propos de l'algèbre linéaire (Dorier 1997), et Bloch (2000), Schneider (2001) pour l'analyse. Ceci ne dispense certes pas d'une analyse épistémologique de la théorie : l'enquête de (Mi_T) est possible et nécessaire afin d'identifier jeux et variables, simplement elle ne conduira pas à une importation directe dans l'enseignement sous forme de (Mi_A) 'dérivé'.
- à partir d'une étude épistémologique, de l'identification d'un champ de problèmes porteurs de la notion visée, et des ostensifs associés, il est possible, en utilisant les outils de la TSD, d'identifier un jeu de l'actant et de fixer les valeurs des variables

[44] Le soin apporté à l'étude épistémologique en est garant.

[45] Bien entendu, cette affirmation est à prendre avec prudence et surtout, à spécifier suivant le niveau considéré et le thème mathématique traité.

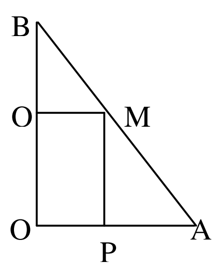
didactiques pertinentes afin de construire des situations expérimentales *à dimension adidactique*[46] de la notion visée, ceci donc au niveau de (Mi_A).

Dans l'enseignement secondaire, la situation présentée en exemple ci-dessous est effectivement construite à partir d'une analyse épistémologique, tenant compte des représentants disponibles pour l'enseignement de la notion de fonction, de la façon dont ils opèrent, et des possibilités de travail des élèves avec eux ; elle ne met cependant pas en œuvre (comme le ferait une situation fondamentale) la fonctionnalité de la notion de fonction, elle la présente à partir d'outils sémiotiques *représentant* des objets mathématiques (fonctions, équations…). Pour une étude complète de cette situation, voir Bloch (2000, pp. 160-173 ; 184-208 ; 225-274) ; voir aussi Bloch (2003a).

La situation présentée est traitée dans un deuxième temps, après l'introduction de situations faisant construire des fonctions à partir de la recherche de grandeurs variables, ou de maximum de grandeurs : ces premières situations permettent de construire des milieux où l'élève se trouve contraint à choisir une variable, du fait de la difficulté d'une étude géométrique directe. Elles sont donc candidates à être des SF de la notion de fonction, mais ne permettent pas de continuer le travail sur les propriétés des fonctions de façon complète et satisfaisante. Nous avons donc choisi de mener le travail sur la notion de fonction en deux étapes :

- Situations fonctionnelles permettant d'accéder au concept dans des cas où l'introduction d'une variable est une composante du milieu : introduire les fonctions comme outils dans des problèmes de variation géométrique, des graphiques comme la comparaison de l'aire d'un carré et d'un rectangle dont un côté est *x*, la fonction 'racine carrée'…(cf. Bloch, 2003c) ; cette première étape s'introduit en classe de Seconde ;
- Construire un milieu graphique/formel pour l'étude des fonctions comme objets : ceci plutôt en classe de Première.

Un exemple typique de première situation est la recherche de M tel que l'aire de OPMQ soit maximale :



On peut aussi s'intéresser aux énoncés suivants, avec lesquels nous avions travaillé en classe de Seconde :

1) ABCD est un rectangle (AB = 4 ; AD = 2). Un point M décrit le parcours ABCDA, x est la longueur du trajet et y l'aire balayée par AM (hachurée sur la figure). Exprimer y en fonction de x.

2) ABC est un triangle, H le projeté orthogonal de A sur (BC). On suppose BC = 3 et AH = 2. On considère un point M de [AH] . La droite parallèle à (BC) passant par M coupe [AB] en P et [AC] en Q. On s'intéresse à l'aire du triangle APQ.

[46] Sur dimension adidactique, voir Mercier 1995, Bloch 1999.

i) Pour plusieurs positions de M, calculer l'aire du triangle correspondant APQ.
ii) Quelle (s) variable(s) semble(nt) pertinente(s) dans ce problème ? Choisir une variable et exprimer l'aire de APQ en fonction de cette variable.
iii) Pour quelle position de M l'aire de APQ est-elle la moitié de l'aire du triangle ABC ?
iv) Construire la courbe représentative C de l'aire de APQ.

3) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O,i,j), soit le demi-cercle de centre O et de rayon 1 situé dans le demi-plan supérieur.
i) A tout point M de l'axe (xx') on associe (lorsqu'il existe) le point N du demi-cercle tel que M et N ont même abscisse. Ou doit se trouver M pour que N existe ?
ii) Soit x l'abscisse de M.Traduire la condition précédente pour x.
iii) Exprimer en "fonction" de x l'ordonnée du point N correspondant. Retrouver les conditions d'existence du point N.

4) Le carré articulé (d'après Berté, 1996). On dispose d'un carré articulé, et on cherche à déterminer la variation de son aire lorsqu'on l'aplatit ...

Nous aurions pu également choisir des situations exposées dans des travaux antérieurs, comme AHA (Schneider, 2001b) ; ou construire des fonctions à partir de mouvements (René de Cotret, 1988).

Il s'ensuit du choix fait dans la situation 'Graphiques et chemins' – choix contraints dans une large mesure par le curriculum – que les milieux matériels dont on dispose sont déjà fortement mathématisés, au moins de deux façons :

- les "choses" que l'on veut manipuler sont déjà des symboles d'objets mathématiques, donc le milieu "matériel" est fortement symbolique, même s'il ne s'ensuit pas que l'on ne puisse pas le manipuler de façon non avertie ;
- les ostensifs utilisés sont déjà chargés de règles, et d'effets de la transposition didactique de l'enseignement en amont : ce qui fait que les manipulations possibles envisagées par les étudiants peuvent être conformes, ou non, au projet mathématique de l'enseignement à venir.

II. 1 La situation Graphiques et chemins : le jeu direct et le milieu objectif

La situation évoquée ici est exposée plus complètement dans Bloch (2003a) : il s'agit de situations de construction de représentations graphiques cartésiennes (RGC) de fonctions sous contraintes, d'étude des contraintes (énoncés sur les fonctions), et d'opérations sur les fonctions dans un milieu graphique.

Le milieu matériel est constitué de RGC de fonctions, et de chemins (voir Bloch 1999, pp.174-176 ; Bloch 2003) servant à explorer des propriétés, et dans une certaine mesure à valider. L'une des étapes de la situation consiste à construire la RGC du produit de deux fonctions dont les RGC sont données ; les élèves doivent construire la RGC de la fonction produit $f \times g$ et énoncer des propriétés de $f \times g$.

II.1.1 Exemples de consigne

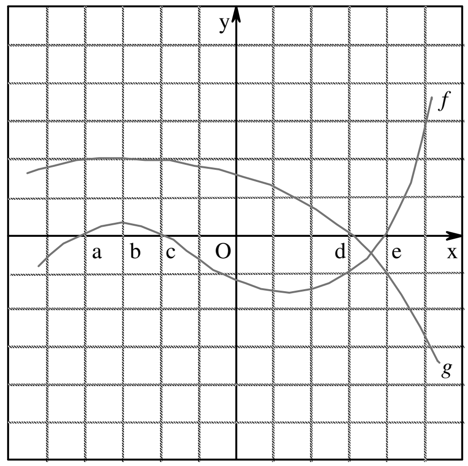
1) Dessinez la fonction produit de f et g, en utilisant les points d'abscisse a, b, c, d, e. Quelles règles peut-on énoncer quant au tracé de la RGC de $f \times g$ à partir des RGC de f et de g ?

Enoncez des résultats sur :

— les points d'intersection des RGC de f et g avec l'axe des x, et les points d'intersection de $f \times g$ avec l'axe des x ;

— le signe de $f \times g$ et les signes de f et g ;

— les valeurs prises par $f \times g$ et celles de f et de g.



2) *Que peut-on dire du produit d'une fonction constante et d'une fonction affine ? de deux fonctions affines ?*

Le jeu direct consiste donc à construire des points de $f \times g$ et à constater certaines propriétés, par exemple :

— $f \times g$ s'annule chaque fois que f ou g le font ;

— $f \times g$ est positif si et seulement si f et g sont toutes deux positives ou toutes deux négatives ;

— $f \times g$ prend la même valeur que f (resp. g) en x si $g(x) = 1$ (resp. $f(x) = 1$) ; ceci se traduit graphiquement par : la RGC de $f \times g$ coupe la RGC de f (resp. de g) au point d'abscisse x tel que $g(x) = 1$ (resp. $f(x) = 1$) ;

— en x tel que $|f(x)| < 1$, on a : $|(f \times g)(x)| < |g(x)|$, ce qui impose des contraintes sur la position du point de coordonnées $x, f \times g(x)$ ...

II. 1. 2 Connaissances présentes dans le milieu objectif

Le jeu direct est l'étape de construction du milieu objectif : faire des essais, constater des résultats, essayer de trouver des stratégies de base de manipulation des ostensifs graphiques et des chemins[47]. Les exemples de propriétés mises à jour lorsqu'on tente de construire la RGC de $f \times g$ montrent que la construction de ce milieu objectif n'a rien de superflu, ni d'évident.

On peut voir au moins trois raisons de ne pas brûler cette étape dans le cas présenté :

a) C'est une étape de redécouverte et de consolidation de connaissances antérieures, par exemple ici les connaissances sur l'ordre et la multiplication ; or ces connaissances sont loin d'être stabilisées en classe de Seconde ou Première (élèves de 16-17 ans) où cette situation peut être envisagée ; dans les classes de Première où cette situation a été expérimentée, certains élèves redécouvraient même que $f \times g$ s'annule si et seulement si f ou g s'annule. Le changement de contexte (des nombres aux fonctions) rend nécessaire de revisiter des connaissances qui étaient pourtant stabilisées dans le premier champ mathématique.

[47] La définition et l'usage des chemins ont été détaillés dans Bloch (2003a).

b) Le fait de pratiquer le jeu direct, c'est-à-dire d'effectuer des produits graphiquement, de calculer des points, de faire des paris réussis ou non sur la position des courbes, est ce qui permet à l'élève de se forger des représentations et des anticipations, et de produire ensuite des énoncés et de discuter ces énoncés.

c) Il est nécessaire que les élèves identifient ce qui peut être prouvé ou infirmé par simple confrontation avec le milieu matériel, et ce qui devra recevoir une preuve d'une autre nature, ici par exemple une preuve algébrique ; il s'agit donc d'installer le registre algébrique comme outil de validation par rapport au registre graphique dans un rapport de nécessité, et non simplement dans le cadre du contrat didactique comme usuellement, où le professeur refuse les justifications graphiques sous prétexte de manque de rigueur (en fait dans les classes on constate que le professeur s'autorise des raisonnements graphiques qu'il interdit aux élèves, ce qui montre bien que le topos du professeur et celui de l'élève sont dissymétriques dans ce travail graphique).

Autrement dit, l'installation du milieu objectif, milieu sur lequel on peut poser des questions, est nécessaire pour que le niveau de jeu supérieur ait un sens pour l'élève. De plus, il ne faut pas sous-estimer le temps nécessaire à l'instauration et à la stabilisation de ce milieu : ce temps peut être long, si l'élève a des connaissances antérieures peu assurées, qui demandent à être réaffirmées et confrontées aux résultats de ses actions (cas des connaissances sur l'ordre et la multiplication, et cas des connaissances algébriques en situation de preuve pour le graphique).

II. 1. 3 Enoncés produits dans le milieu objectif

L'installation du milieu objectif se traduit par la production d'énoncés-élèves ; ces énoncés sont confrontés au milieu matériel. Les énoncés-élèves sur le produit de fonctions sont par exemple :

- ➢ le produit de deux segments est un segment (énoncé démenti lors de la confrontation au milieu : les points du produit sont visiblement non alignés);
- ➢ le produit d'un segment et d'une constante (segment parallèle à Ox) est peut-être un segment ? (indécidable dans le milieu graphique ; le milieu algébrique s'avère nécessaire pour valider) ;
- ➢ le produit de deux droites est une parabole ; le sommet de la parabole a pour abscisse, l'abscisse du point d'intersection des deux droites (énoncé issu d'un cas particulier, démenti par un autre exemple).

II. 2 Le jeu retourné

II. 2. 1 Définition

Le jeu retourné est assez simple à imaginer : il consiste à imposer des contraintes sur l'état final, c'est-à-dire ici la fonction produit, et à demander les conditions sur f et g pour que la fonction $f\times g$ vérifie les conditions demandées. Ceci rend alors *nécessaires* les connaissances en jeu, puisqu'on ne peut pas répondre sans passer par les spécifications de propriétés conditionnant le résultat.

II. 2. 2 Exemples de consignes

Les consignes consistent à énoncer des propriétés de $f\times g$, et à chercher dans quels cas f et g peuvent conduire au résultat cherché :

— $f\times g$ coupe l'axe Ox en telle abscisse ; ou, $f\times g$ est négative sur l'intervalle [a, b] ;
— $f\times g$ est une fonction affine ;
— $f\times g$ est une fonction du second degré, et l'abscisse du sommet de la parabole est a ;
— $f\times g$ est du second degré, et sa RGC ne coupe pas l'axe Ox ;
— $f\times g$ est du second degré, et a un maximum ;

— $f\times g$ est du second degré, a un maximum, et ce maximum est zéro ;

— $f\times g$ est du troisième degré, et n'est pas monotone ; ....

Bien évidemment on peut complexifier en même temps que le niveau et les connaissances des élèves s'accroissent (asymptotes, etc...), mais la situation vise surtout le début de l'apprentissage de la notion de fonction.

II. 2. 3 Connaissances en jeu

Les connaissances énoncées ci-dessus continuent d'être présentes à ce niveau de jeu, mais les justifications deviennent nécessairement théoriques et ne peuvent plus se contenter d'être empiriques : ce jeu correspond à l'installation du milieu de référence, où toutes les déclarations doivent être prouvées. De plus certaines connaissances sont présentes qui pouvaient être éludées dans le jeu précédent : ainsi la contrainte : “ $f\times g$ est du second degré, et sa RGC ne coupe pas l'axe Ox ” qui conduit à la réponse : “ Impossible si f et g sont de degré un ” met en évidence la nécessité de l'obtention d'une parabole coupant Ox dans le cas où cette parabole est construite à partir d'un produit. Autrement dit ce niveau de jeu porte au jour certaines questions qui restent implicites dans le milieu objectif, dans la mesure où ce jeu conduit à explorer *toutes* les contraintes possibles sur la courbe de $f\times g$, et pour une contrainte donnée à identifier toutes les fonctions f et g conduisant à une solution , du moins dans le champ des fonctions connues à ce niveau d'enseignement ; alors que le jeu précédent se contentait de mettre en évidence quelques occurrences des propriétés de la courbe de $f\times g$.

Le jeu tel qu'il est transformé correspond bien au milieu de référence, c'est-à-dire à un milieu où le problème n'est plus de construire $f\times g$, mais de déterminer à quelles questions on est en train de répondre : ici, quelles fonctions obtient-on en faisant agir des opérations algébriques sur des fonctions déjà connues ; et peut-on obtenir n'importe quelle fonction, à partir des fonctions simples déjà connues ? ou bien certaines contraintes ne peuvent-elles être réalisées ? Quel est le champ des contraintes / propriétés ?

Il en résulte que ce jeu conduit à l'identification de contraintes sur les fonctions, contraintes qui vont s'exprimer par des énoncés, valides dans certains cas, non valides pour d'autres fonctions ; il conduit donc à une activité de preuve, et à la discussion du domaine de validité des énoncés pour des fonctions possédant telle ou telle caractéristique.

Parallèlement le milieu de départ prend toute sa dimension pour l'action des élèves, la découverte de propriétés relatives aux fonctions, le réinvestissement et l'approfondissement de connaissances anciennes. Ce milieu permet aussi d'éprouver certaines des questions qui sont posées lors de l'activité exploratoire (“ Le produit de deux segments est-il un segment ? ”). Il en résulte qu'une dimension adidactique (activité autonome de l'élève conduisant à la formulation et la validation de propriétés) est instaurée dans la situation. Le milieu, qui était un milieu amorphe pour le sujet – ne renvoyant aucune rétroaction – devient un milieu rétroactif.

L'exemple ci-dessus illustre la façon dont il est possible, par retournement de situation, de construire un milieu expérimental a priori à partir d'une analyse épistémologique de la notion de fonction, des registres disponibles pour exprimer cette notion, et des fonctionnalités des registres de représentation à disposition. Il semble utile d'interroger la généralité et l'exemplarité de ce concept de retournement ; et d'aller plus loin en se demandant s'il est possible de mettre à jour d'autres moyens de créer des milieux expérimentaux faisant place à une dimension a-didactique.

III. RETOURNEMENT ET CONSTRUCTION DE SITUATIONS

III. 1 Retourner c'est transformer un milieu amorphe en milieu antagoniste

III.1.1 Définition du retournement de situation

Depuis le début de nos recherches, nous nous sommes axée sur la construction au niveau de l'enseignement secondaire de situations comportant une dimension a-didactique afin de rompre avec la logique purement ostensive, logique qui ne permet pas à la majorité des élèves de se confronter au savoir, ni de comprendre à quel jeu jouent les mathématiques. Envisager de reproduire, pour d'autres situations, cette opération de retournement pose un certain nombre de questions.

Nous avons donc essayé de systématiser cette opération en la théorisant de façon plus précise, par une formalisation dans la théorie des situations. La définition du retournement de situation se pose en termes de relations entre jeux comme nous avons essayé de l'exprimer : le premier jeu est un jeu exploratoire, le jeu retourné est celui qui, *en posant des conditions sur l'objet final à obtenir*, permet à la connaissance visée de devenir nécessaire pour réussir, et à la formulation de cette connaissance d'intervenir comme nécessité de justification du but atteint. De ce fait le travail porte bien sur des propriétés des objets mathématiques, c'est-à-dire sur la notion mathématique visée, aussi près qu'il est possible de s'en approcher.

Nous avons alors proposé un schéma de jeu retourné :

Premier jeu : installation du milieu objectif

Les élèves ont à leur disposition des représentations variées du savoir visé – prenons comme exemple les fonctions – donc des équations, tableaux numériques, graphiques… et des tâches à accomplir, comme de construire des fonctions, ou de dire si des fonctions représentées vérifient telle ou telle propriété. Le but est de les familiariser avec les ostensifs, et d'obtenir une certaine expertise de manipulation de ces représentations. Il y a aussi un lien contractuel qui se fait entre les représentations données et la désignation du savoir par le professeur : ainsi l'enseignant désignera par "représentations de fonctions" ces ostensifs. Les élèves vont ainsi rencontrer un certain nombre de propriétés contingentes des objets de savoir représentés.

Deuxième jeu : retournement et discussion des conditions nécessaires du savoir

Les ostensifs fournis sont de même nature que dans le milieu objectif, mais les élèves ont à construire des objets *vérifiant des conditions imposées* : ainsi c'est l'objet à obtenir qui est défini, et les connaissances permettant de l'obtenir sont à fournir par l'élève. Dans l'exemple des produits de fonctions, l'objet est une fonction particulière, qui ne peut être obtenue que par certaines spécifications des facteurs : ainsi l'élève ne peut pas obtenir le résultat demandé sans avoir à justifier que la seule façon de le faire est d'introduire les facteurs convenables.

Le jeu peut être représenté par des coups d'essai, du type :

On doit obtenir $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$ spécifiée non algébriquement mais par des propriétés de sa représentation graphique : ordonnée à l'origine, position du sommet, racines …

- On joue $x + 1/3$ alors on doit jouer $x + 6$ puisque l'ordonnée à l'origine est 2
- Mais dans ce cas, les racines sont $-1/3$ et -6, ce qui ne correspond pas à la courbe donnée où les racines sont $1/3$ et 2 ;
- On peut alors jouer $x - 2$ et $x - 1/3$; ceci correspond aux racines ;
- Mais l'ordonnée à l'origine ne convient plus ;
- Dans ce cas, on peut essayer de rectifier juste sur le coefficient constant ; auquel cas, on va avoir des ennuis avec la factorisation ;
- La bonne stratégie est bien sûr de multiplier par 3 le produit des deux facteurs précédents.

Les élèves vont devoir jouer des coups qui à chaque fois, les obligent à confronter le résultat proposé aux contraintes du milieu ; ils découvrent ainsi que les coefficients d'une fonction du second degré déterminent de manière forte les caractéristiques de la fonction : racines, abscisse et ordonnée du sommet, ordonnée à l'origine. Il y a dans cette confrontation un rapport à la nécessité des propriétés, qui n'existe pas dans le milieu objectif où la connaissance est *contingente* : on observe dans le milieu objectif : "quand je fais ceci, j'obtiens telle configuration, mais rien ne m'informe sur la nécessité de ce que j'ai obtenu"

Au contraire, dans le milieu de référence obtenu par retournement, il y a en permanence confrontation du type : ce résultat est exact car … (justification par démonstration de la propriété p, ou par preuve pragmatique, cf. Arsac et al, 1992) ; ou, ce résultat ne peut pas être exact car …(contre-exemple, ou démonstration de la propriété non p).

Remarquons que c'est généralement ainsi que Brousseau a construit les situations a-didactiques du niveau primaire, en imposant dans la deuxième phase du jeu, des conditions sur le but à atteindre : il y a bien, à l'étape du milieu de référence, une condition fixée – par le moyen de valeurs des variables didactiques – qui oblige à mettre en jeu la connaissance visée.

III.1.2 Situations "retournables" et mise en œuvre du retournement

On peut construire un système et des critères, qui permettent d'envisager et d'effectuer cette opération de retournement sur un certain nombre de situations jugées particulièrement pertinentes au niveau d'enseignement où l'on se place, ou particulièrement propres à cette opération. Dans les exemples présentés ci-dessous, il apparaît clairement que c'est l'étude épistémologique de la fonctionnalité du savoir, qui fournit le critère et la modalité de retournement. Cette opération fait apparaître la nécessité mathématique d'un savoir (cf. Sackur, 2000) : cette nécessité est ce qui ressort notamment de l'enquête épistémologique faite lors de la recherche de situation fondamentale.

D'autre part, le lien entre la connaissance visée par la situation ostensive directe et la connaissance de l'activité retournée demande à être étudié situation par situation. On peut imaginer trois cas :

- ➢ le retournement conserve la connaissance en la rendant nécessaire ;
- ➢ il l'élargit (par exemple en conduisant à l'exploration plus systématique de conditions de validité) ;
- ➢ il la restreint (connaissance restreinte mais plus précise par exemple).

La construction effective, chaque fois que la possibilité en est ouverte, de situations “ retournées ” nous a donné quelques éléments de réponses à ces questions.

III.2 Un autre exemple : l'algèbre et les suites de Fibonacci

On peut construire une situation retournée de l'entrée dans l'algèbre par la découverte des suites de Fibonacci (Bloch 2003b, Bloch 2005 ?). L'idée est due à Véron, (Véron 2001) et la situation s'articule en deux phases, une directe et l'autre retournée.

III.2.1 La situation Suites de Fibonacci

Première phase : constitution du milieu objectif

Trouver une suite de Fibonacci telle que :

2	5	7	12						212

C'est une phase d'installation du milieu objectif ; le travail des élèves est simplement de faire les calculs de base et de comprendre la règle de formation d'un terme qui en suit deux.

Deuxième phase : retournement de situation et constitution du milieu de référence pour l'algèbre

7									45

9							241

Ceci conduit à nommer x le second terme, et les équations en x se trouvent avoir des solutions positives ou négatives, entières ou non, ces paramètres constituant des variables cognitives du travail algébrique. Ainsi la première tâche donne :

7	x	7+x	7+2x	14+3x	21+5x	35+8x	56+13x	91+21x	45

Et la dernière phase du calcul conduit à 147+34x = 45 soit x = - 102/34 = -3

Cette phase conduit à identifier des stratégies de base sur la construction de telles suites, elle continue donc la mise en place du milieu objectif tout en introduisant au milieu de référence : la connaissance visée – la mise en équation – est nécessaire, sauf à des acrobaties calculatoires vite hors de portée si le nombre de termes manquant est trop grand. Ceci initialise l'idée d'un procédé algorithmique de construction de telles suites.

Troisième phase : généralisation et apparition de la structure

Trouver des suites de Fibonacci telle que :

									178

									51

									301

Cette phase correspond à la situation retournée et au milieu de référence : une condition a été posée sur le résultat final à trouver, et cette condition amène les élèves à faire le travail visé, soit poser des équations, essayer de les résoudre, et argumenter à propos de l'unicité de la solution.

Calcul "une fois pour toutes" :

a	b	a + b	a + 2b	2a + 3b	3a + 5b	5a + 8b	…

Ceci est une phase argumentative ; dans le milieu de référence la question n'est plus : Comment ça marche ? mais : Est-il possible dans tous les cas, de faire le calcul une fois pour toutes, et grâce à quelles propriétés des suites de Fibonacci ? On peut imaginer quelques questions possibles : y a-t-il une formule pour le n-ième terme ? Combien peut-on trouver de suites de Fibonacci avec des termes entiers positifs, de 10ème terme donné ? Quel théorème d'arithmétique permet d'affirmer que l'équation 21a + 34b = 178 a des solutions ?

III.2.2 Le milieu et les ostensifs

Le milieu matériel que la situation procure est un milieu numérique, mais il comporte des fonctionnalités telles que les élèves, comme nous l'avons dit, se trouvent amenés à travailler avec des variables-lettres. Ce milieu s'avère correspondre aux conditions que pointe Broin pour l'introduction de l'algèbre (Broin 2002).

III.3 Les vecteurs : le jeu du Rallye du plan

Cette situation est prévue pour introduire la deuxième principale fonctionnalité de la notion de vecteur, à savoir que tout point de l'espace affine peut être atteint à partir d'un point et d'un nombre convenable de vecteurs (la première fonctionnalité serait la relation de Chasles).

Cette situation est exposée en détail dans le document 7. Nous donnons ci-dessous les principales grilles présentant les consignes de travail des élèves.

III.3.1 La situation Rallye du plan

Le jeu direct et le milieu objectif

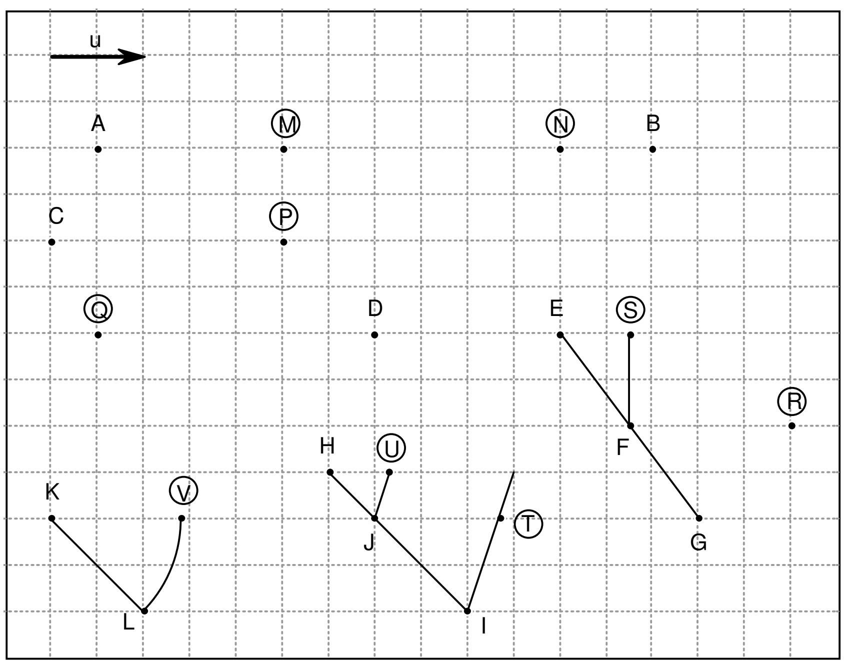
La somme de vecteurs et la relation de Chasles sont enseignées dans le secondaire avant le produit de vecteurs par un réel, qui n'intervient qu'en classe de Seconde. Faire des produits de vecteurs par des réels, regarder ce que ça donne…C'est généralement ce qui se passe dans l'enseignement classique de la notion de vecteur en classe de Seconde, du moins dans un premier temps. Les nombres convoqués sont en général des entiers, positifs – auquel cas le vecteur k**u** a "le même sens" que le vecteur **u** ; ou négatifs, – auquel cas le vecteur k**u** a "le sens contraire" de celui du vecteur **u.** Quelques nombres rationnels simples sont ensuite utilisés, comme 1/2, 3/2 … Ensuite des tâches diverses sont données aux élèves, comme de trouver des points 'utiles' dans un problème, mais il est fréquent d'observer des supports d'enseignement où la tâche directe est enseignée, mais de fait c'est la tâche inverse – retournée – qui est demandée aux élèves comme 'application' du savoir : trouver les coordonnées de points d'une figure, en dimension 1 ou 2.

D'après une idée de Berté (1996) nous avons mis en place, dans des classe de Seconde, et en formation des professeurs du secondaire, un jeu de grille sur les vecteurs qui instaure un milieu objectif et de référence.

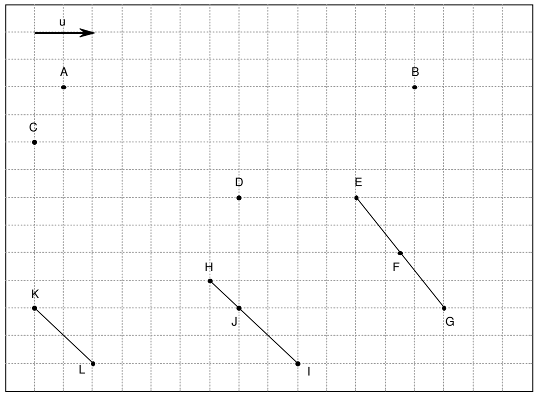
Le jeu retourné

Première phase : en dimension 1

Grille pour les émetteurs :



Grille pour les récepteurs :

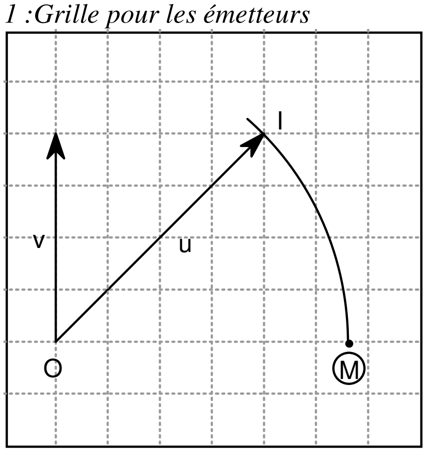
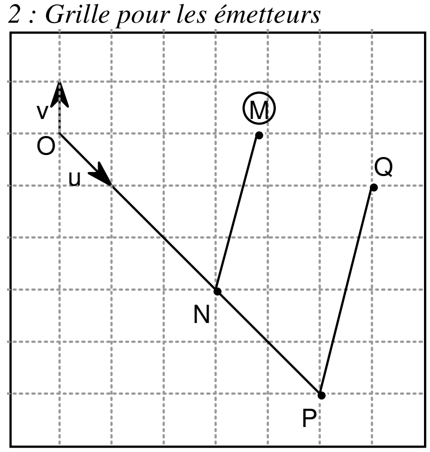


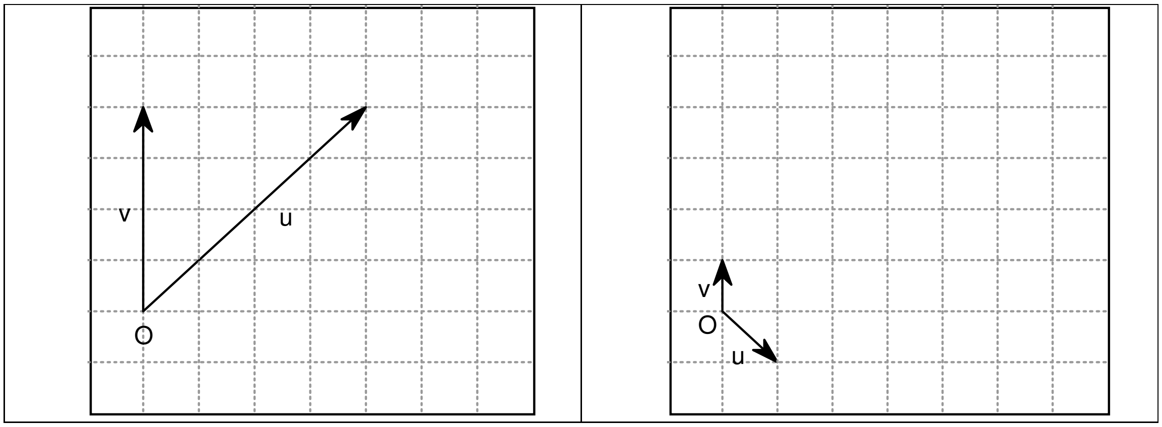
Consigne : envoyer des messages pour placer les points entourés, que le récepteur n'a pas. Quand un point a l'air d'être sur un nœud du quadrillage, il y est vraiment. Les messages ne doivent comporter que des nombres et des vecteurs, il est interdit de nommer des droites ou des cercles ou des nœuds du quadrillage.

L'introduction de points obtenus à l'aide du compas a pour but de mettre les élèves sur la voie de nombres irrationnels, obtenus à partir de constructions de type Pythagore.

Deuxième phase : en dimension 2

Dans ce deuxième jeu les coefficients sont plus difficiles à trouver et le jeu oblige l'élève à essayer des sommes de vecteurs et non plus seulement des produits par un nombre réel, donc en combinant les deux procédés on arrive à des combinaisons linéaires, puis à la propriété visée, à savoir : tout point peut être obtenu de cette manière, avec deux vecteurs non colinéaires. On voit ici aussi la différence avec une situation conçue comme 'autosuffisante' pour la fonctionnalité du concept : il est clair que le processus d'institutionnalisation comporte un saut de généralisation qui ne pourra pas être mis en œuvre dans le jeu, et ceci pour une raison mathématique évidente : tous les nombres ne sont pas constructibles. L'élève devra donc admettre que ce qu'il a réussi à faire pour $\sqrt{2}$ ou 15/4, reste possible pour tout autre nombre. Mais la découverte de ce que la décomposition était possible dans un cas complètement non évident visuellement, et la dimension a-didactique associée – faire, formaliser ce que l'on a fait, et valider dans une situation de communication – s'avère une composante essentielle de la compréhension de la notion.

<table>
<tr>
<td>Jeu 1 :Grille pour les émetteurs

</td>
<td>Jeu 2 : Grille pour les émetteurs

</td>
</tr>
<tr>
<td>Jeu 1 : Grille pour les récepteurs</td>
<td>Jeu 2 : Grille pour les récepteurs</td>
</tr>
</table>



Indication pour la position de M dans le Jeu 2 : si l'on prolongeait [NM] on aboutirait dans le coin supérieur droit du carreau situé au dessus de M.

IV. PRODUCTION DE MILIEUX ET CONSTRUCTION DE SITUATIONS

IV.1 Nature du mécanisme de retournement

IV.1.1 Le milieu dans les situations retournées

Le retournement consiste à distinguer entre l'introduction d'une propriété comme contingente et une "motivation" fonctionnelle de ce savoir : ainsi on peut dire que les produits de vecteurs par des nombres réels donnent des vecteurs (situation directe), puis on peut retourner et mettre en situation le fait que les produits de vecteurs par des réels permettent l'introduction des bases de l'espace, lesquelles permettent à leur tour de définir tout vecteur de l'espace à partir des vecteurs de la base. Ce n'est pas forcément une modélisation : ainsi dans la situation Graphiques et chemins on ne modélise pas pourquoi on a besoin d'étudier des fonctions (en physique ou même une modélisation interne en mathématique), mais on problématise comment on pourrait les construire, et quelles seraient leurs propriétés, et quels objets mathématiques spécifiques permettraient de trouver et de formaliser ces propriétés.

Dans un jeu direct et un enseignement ostensif, les objets sont supposés donnés (par des ostensifs supposés transparents) et l'élève est supposé faire fonctionner une connaissance. Par exemple, "résoudre des équations" : le jeu de base est expliqué, et l'élève "n'a plus qu'à" appliquer aux autres équations qui lui sont proposées.

Dans un jeu retourné, la situation consiste à poser des conditions sur des objets à obtenir, puis à spécifier certains de ces objets ; il y a donc des choix à faire, ce qui conduit à travailler sur des propriétés de ces objets. Dans le jeu direct, les choix sont faits au départ ; dans le jeu retourné, le joueur a des décisions à prendre pour spécifier les objets. Remarquons que Fregona (1995) a identifié de cette façon un milieu porteur de rétroactions : c'est un milieu qui concerne des objets spécifiés ; alors qu'un milieu qui ne concerne que des objets généraux est un milieu amorphe.

Dans la situation retournée, il s'agit bien de retrouver le savoir mathématique par ce processus déjà évoqué que Peirce appelle *abduction*, et qui pourrait être résumé par la phrase suivante : on va se rendre compte que *cette* expérience relève de (est interprétable par …) *ce* savoir. C'est ce qui se produit dans le jeu des envahisseurs : on se rend compte que la situation de la deuxième phase – la situation retournée – amène à ne pas ajouter plus de deux fois un envahisseur, ce qui revient à ne pas prendre plus de 2 comme chiffre[48], et donc qu'on est en train de construire le système de décomposition des nombres avec 3, 3^2, 3^3, 3^4 … Dans une étape ultérieure, reconnaître la base "trois" est une nouvelle abduction d'un niveau supérieur. De même, la situation des vecteurs est un retournement qui conduit à la notion de décomposition dans un système – une base. Dans le jeu retourné le milieu est antagoniste et non plus amorphe.

IV.1.2 La modification des ostensifs dans le retournement

La construction des situations consiste à lier l'aspect "jeu qui nécessite la connaissance visée" et l'aspect 'ostensifs' : chercher quel milieu de référence peut être amené par quel problème et chercher les ostensifs qui vont correspondre, c'est-à-dire qui vont permettre de faire le travail demandé dans le milieu de référence.
Il y a donc conjonction de deux facteurs à organiser :

- La question qui va engendrer le niveau convenable de milieu, par retournement de situation ; cette question est en général la réciproque de la question posée dans le milieu objectif ;
- Les représentations sémiotiques qui fonctionneront comme outils dans ce milieu.

L'utilisation de deux théories : une théorie sémiotique et la TSD, n'est donc pas un simple effet de juxtaposition : les ostensifs utilisés, et la question qui permet leur utilisation dans la logique de la connaissance visée sont liés par l'utilisation nécessaire des premiers pour répondre à la seconde.

En le reformulant, on pourrait donc interpréter le retournement à l'aide de deux critères, l'un sémiotique et l'autre mathématique :

- La dimension sémiotique organise une conversion de registres dans le sens contraire de la première ; on regarde alors comment cette conversion inverse transforme le traitement de représentations, et si elle oblige à un type de validation différent ;
- Ceci est lié avec une réciproque de propriété mathématique, d'où le lien avec la validation.

IV.1.3 Différents retournements d'une même situation

Peut-il exister plusieurs retournements différents d'un même jeu ? La réponse est très certainement affirmative, dans la mesure où un retournement cible un savoir ou une modalité d'un savoir, et un jeu retourné peut concerner seulement certaines composantes du savoir. Ainsi dans la situation des envahisseurs, le jeu direct montre comment envahir des nombres, et ce que sont des nombres envahis (des écritures de nombres envahis) mais ce jeu ne dit pas pourquoi certains nombres ne peuvent l'être, et le jeu retourné sur la numération ne se fixe pas pour objet d'étudier les nombres qui ne peuvent pas être envahis, puisque son but est justement de montrer qu'un procédé connu et généralisable permet de les envahir tous. Ainsi le problème de savoir pourquoi je ne peux pas faire 29 avec 3, 5, 7 reste entier, bien que ce puisse être par ailleurs une question intéressante du point de vue de l'arithmétique.

L'ensemble des questions posées au sujet du retournement se résume actuellement comme suit :

IV.1.4 Questions de type 1 (insertion dans la TSD) que l'on peut se poser au sujet du retournement

a) *Les pistes d'étude du type de jeu concerné*

- caractère réflexif du jeu retourné (on se pose des questions sur les objets trouvés dans la première phase) ; caractère contingent des résultats trouvés, pour le jeu direct, et caractère

[48] Voir paragraphe I.1.

nécessaire, pour le jeu retourné : voir ci-dessus effectivement le type de jeu des situations retournées ;

- dimension a-didactique : soit le choix des états successifs est entièrement déterminé par le joueur, soit c'est surdéterminé (montrer que le produit de deux fonctions f et g est nécessairement …), soit il y a un milieu qui renvoie des informations selon des règles non connues entièrement du joueur, et peut-être ensuite explicitables par lui comme des énoncés mathématiques ; auquel cas la situation comporte effectivement une dimension a-didactique ;
- mathématisation plus ou moins grande du milieu : quelles mathématiques le joueur est-il "obligé" de faire dans le jeu, et qu'est-ce qui est pris en charge par la situation ?
- place des signes mathématiques, et nature des régularités trouvées : indice dans le jeu direct, argument ou règle mathématique dans le jeu retourné ;
- quels sont les apports de connaissances ou de savoirs que doit faire le professeur ?

b) Articulation des jeux successifs

- Détermination des coups permis, interdits, possibles, l'ordre des coups …sur des critères *mathématiques* et *didactiques*.

IV.1.5 Questions de type 2 : exemplification de la notion de retournement

- quels sont les effets du retournement sur les procédures des élèves, et les variables qui conditionnent leur activité ? (mais ce sont des questions banales pour toute ingénierie) ;
- quel est le lien entre les connaissances mises en œuvre dans le jeu direct et dans le jeu retourné ?

Ceci débouche sur des questions de type 3 :

IV.1.6 Comment (sur quels critères) peut-on décréter que le 'sens du savoir' est attesté dans le jeu retourné ?

Par *sens du savoir*, ce qui est visé (souvent implicitement dans la littérature sur les situations), ce sont bien les caractéristiques du concept mathématique qui est l'objet de la situation : le "sens" c'est-à-dire l'accès au concept, sera consistant, parce que le jeu retourné a introduit la dimension nécessaire, celle qui permet relier le concept visé aux autres objets mathématiques de la même théorie (algèbre, géométrie, analyse…).

De façon générale, ce que cherche la TSD, c'est comment – par quels procédés, sinon algorithmiques, du moins explicites – introduire dans une situation didactique l'accroissement de connaissances nouvelles qui conduisent à l'institutionnalisation et la formalisation visées par la situation. Nous avons tenté, à travers les exemples donnés, de montrer comment la TSD vise à mettre en scène le savoir afin que les élèves le rencontrent comme une nécessité de résolution de la situation.

IV.2 Autres mécanismes mésogènes envisageables

Pour envisager d'autres mécanismes producteurs de milieux adidactiques, il faut peut-être mettre en évidence une autre caractéristique de ces milieux : leur capacité à rendre compte de la *dynamique* des connaissances relatives à un concept, et à se laisser remettre en jeu dans la situation, ainsi que nous l'exemplifions au IV.2.2 ci-dessous.

IV.2.1 Outils sémiotiques, sémiose et mathématique

La situation Graphiques et chemins, par exemple, s'appuie très fortement sur ce qu'il est possible d'obtenir comme travail mathématique dans une sémiose donnée, ici les outils sémiotiques graphiques et formels et l'opérationnalité obtenue grâce aux chemins. Nous employons à dessein le terme "sémiose" et non une simple référence aux registres de représentation : une hypothèse sous-jacente à cette approche, qui fait l'objet d'un travail en cours (Bloch 2005b), est que les outils sémiotiques disponibles, et leur organisation en problèmes déterminent dans une large mesure le travail mathématique qui peut être conduit. Cette hypothèse affirme que les connaissances mathématiques sont fortement dépendantes des sémioses, et, plus encore, que les outils sémiotiques à la fois contiennent et produisent des connaissances mathématiques.

L'exemple du produit de fonctions, ou du jeu du Rallye des points, montre que les représentations sont porteuses de connaissances mathématiques spécifiques, et qu'elles prennent en charge une partie du travail mathématique. Cette prise en charge se produit au niveau des milieux objectif et de référence ; cependant, même si la création d'un tel milieu de référence entraîne une entrée dans le processus de formulation, de débat et d'institutionnalisation, la charge de conclure sur le *savoir* reste au professeur. On table sur le fait que l'usage par les élèves, dans la situation, de symboles mathématiques, et la validation à l'aide de ces symboles, dans une situation retournée fonctionnelle par rapport au savoir, doivent entraîner une institutionnalisation basée sur des connaissances des élèves et rompre avec le seul enseignement par ostension.

D'autres exemples de ces phénomènes de production de sens mathématique dans une sémiose peuvent être trouvés dans Bloch (2003a), sur la résolution d'inéquations dans un milieu graphique : on y étudie comment ce milieu graphique permet de rendre explicite qu'il n'y ait que trois cas possibles dans l'étude du signe d'un produit d'expressions du premier degré ; dans ce même problème la sémiose algébrique permet la résolution algorithmique et débouche bien sur trois cas seulement, mais ne permet pas d'expliquer cette circonstance.

IV.2.2 La dynamique interne des situations et l'étirement du milieu

Le processus de construction d'une situation incorpore la dimension temporelle, point que nous n'avons guère abordé jusqu'à présent. Une situation est en fait construite de façon à ce que le milieu de référence d'une étape, devienne le milieu objectif de l'étape suivante. Ainsi dans l'étude des fonctions, le milieu de référence relatif à la majoration/ minoration des fonctions, va devenir milieu objectif pour se poser des questions sur d'autres propriétés des fonctions, ceci même dans des situations ultérieures. Ceci signifie que les savoirs qui ont vu le jour dans le milieu de référence, comme par exemple la définition formelle d'une fonction majorée, vont pouvoir servir d'outils d'investigation dans l'étape de construction de la notion de limite : les élèves sont alors amenés, comme nous l'avions montré dans Bloch (2000) à se servir de leurs connaissances sur le fonctionnement des quantificateurs, pour "résoudre des équations de limites", comme, trouver N tel que, si $n > N$ alors $| An – L | < 10^{-3043}$, puis tel que $| An – L | < 10^{-p}$ où p est quelconque.

Cette propriété des situations de pouvoir devenir des "situations de référence", comme on dit parfois dans l'enseignement primaire, mais aussi de pouvoir être remises en jeu dans des situations successives, est à la base de travaux sur l'étirement des milieux (Del Notaro, Scheibler, 2004 ; Conne, 2004 ; Bloch et Salin, 2004) notamment dans l'enseignement spécialisé (cf. document 5).

CONCLUSION ET PERSPECTIVES DE RECHERCHE

L'originalité de notre travail est que nous cherchons à atteindre les régularités des contraintes de l'enseignement, à partir certes d'un cadre théorique prédominant – celui de la théorie des situations didactiques, mais dans des domaines assez éloignés – l'enseignement spécialisé et l'enseignement de l'analyse. Cependant l'éloignement apparent des deux contextes ne fait, à notre sens, que mettre en lumière la généralité et l'efficience des outils théoriques que nous utilisons pour les analyser. La construction et l'analyse de situations et de milieux, l'analyse du rôle du professeur, l'analyse des processus sémiotiques, qui sont au cœur de nos méthodes de recherche, se sont avérés efficaces pour approcher les phénomènes d'enseignement que ce soit dans l'un ou l'autre contexte.

Nous espérons ainsi contribuer à ce que soient mieux comprises les conditions qui rendent si problématique l'enseignement au début du cursus universitaire scientifique, comme celui qui est dispensé dans les classes d'élèves en grande difficulté.

Les perspectives de recherche qu'ouvrent nos investigations nous paraissent s'inscrire dans la continuité de ce qui a été déjà exploré. Nous mesurons à la fois ce qui a été fait – réussir à adapter le modèle de la TSD à des contextes nouveaux, à construire des situations et à dégager quelques principes pour cette construction – et les nombreuses questions qui restent sans réponse.

Ainsi comment adapter l'enseignement de l'analyse au public actuel des étudiants, afin de former des scientifiques ? Comment gérer la transition entre l'enseignement secondaire et l'université ? Quels sont les concepts nécessaires au scientifique non mathématicien ? Que considérons-nous comme méthode d'enseignement satisfaisante, du point de vue de l'activité des étudiants ? Comment organiser le passage de cette activité mathématique, si elle est avérée, à des savoirs mathématiques décontextualisés et réutilisables ?

D'autre part, des situations ont été proposées pour le début de l'enseignement de la notion de limite, mais beaucoup moins pour la suite de l'enseignement de ce concept ; les autres notions d'analyse – dérivée, intégrale, séries – sont en général introduites d'un point de vue formel. Comment doser l'introduction de situations de recherche dans le cours d'analyse ; et articuler ces situations avec les formulations usuelles des théorèmes ? Comme l'ont montré nos travaux (Bloch et Ghedamsi 2004) les étudiants ne maîtrisent pas d'emblée la formulation et a fortiori la démonstration et l'usage d'énoncés relativement généraux ; les faire entrer dans cette problématique a nécessairement un coût en matière de moyens d'enseignement.

Dans nos recherches non reprises dans cette note de synthèse, nous avons étudié le domaine de l'enseignement spécialisé : quelles situations y sont nécessaires – et possibles – pour reprendre les savoirs qui n'ont pas pu être assimilés, y compris sur les algorithmes élémentaires ? Comment obtenir que les élèves puissent se réengager dans des contrats de reprise des savoirs, et comprendre quelque peu la finalité de l'enseignement des mathématiques ? Comment être sûr que les élèves possèdent des savoirs mathématiques suffisants pour leur vie sociale et professionnelle future ?

Par ailleurs, la problématique des grandeurs a largement disparu de l'enseignement au collège, alors que ces élèves risquent d'être en grand besoin de connaissances sur les grandeurs dans leur vie professionnelle : une réintroduction des grandeurs est-elle possible comme semblent y tendre les nouveaux programmes de collège ; et comment l'organiser sans tomber dans des archaïsmes de 'problèmes de robinet' ?

Les études en didactique des mathématiques sont actuellement dans une phase où elles manifestent un certain achèvement, une certaine expertise au moins des méthodes – nous ne sommes plus dans les tâtonnements et les illusions des premières investigations. Nous avons moins de certitudes mais plus d'outils. Il est essentiel que nous poursuivions avec ces outils, l'étude des questions problématiques qui se posent à nous. La recherche sur les conditions, les contraintes, le fonctionnement de l'enseignement des mathématiques est une science jeune, à peine sortie des limbes. Nous ne pourrons progresser que si nous testons suffisamment de situations, de modalités d'aménagement du travail des élèves en classe, et si nous utilisons nos outils pour les analyser de façon approfondie et rigoureuse.

Nos premiers contacts avec la recherche l'avaient été dans le cadre des mathématiques pures : au début des années 70, nous avions entrepris un DEA de géométrie différentielle – fibrés et théorèmes de point fixe, sur le théorème d'Atiyah-Singer… Certes le sujet nous dépasse-t-il aujourd'hui largement et sans doute était-ce déjà le cas à l'époque, même si nous pouvons le reformuler en disant que ce théorème repose sur l'idée fondamentale qu'il est possible de trouver le nombre de solutions d'un système différentiel à partir d'informations 'simples' sur la forme de la région qui a été modélisée dans le système…

Le regret d'abandonner ce champ de recherche avait été compensé par l'intérêt que nous portions à l'enseignement des mathématiques, au lycée à des élèves 'ordinaires' ; puis à des expériences d'enseignement dans cet endroit déroutant qu'est un hôpital psychiatrique de jour pour enfants et adolescents (très) perturbés. Nous avons le sentiment d'avoir continué à lier ces deux pôles de recherche : l'enseignement de l'analyse, l'enseignement à des élèves en grande difficulté. Il se trouve que ce lien s'est fait à travers des théories sur la construction de situations d'enseignement des mathématiques. Ces théories fournissent des outils fructueux pour poursuivre cette réflexion, à la fois sur les sujets qui nous occupent et sur la théorie elle-même.

Nous espérons apporter notre participation à ce que la didactique des mathématiques se développe comme un champ scientifique à part entière, et puisse contribuer à l'évolution des méthodes d'enseignement dans le sens qui sera jugé souhaitable par la société et par les mathématiciens eux-mêmes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ALSON P.: 1996, *'Metodos de graficación'*, Caracas: Editorial ERRO.

ARSAC G., BALACHEFF N., MANTE M.,: 1992, 'Teacher's role and reproducibility of didactical situations', *Educational Studies in Mathematics* **23**: 5-29. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

ARTIGUE M.: 1993, Enseignement de l'analyse et fonctions de référence. *Repères*, *n°11*. *Topiques éditions*, Metz.

ARTIGUE M.: 1998, 'L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse', *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **18/2**: 231-262, Grenoble : La Pensée Sauvage.

ASSUDE T.: 2002, 'La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-Géomètre à l'école primaire', *Educational Studies in Mathematics* **50**: 259-287.

BERTHELOT R. et C., 1983, *'Quelques apports de la théorie des situations à l'étude de l'introduction de la notion de limite en classe de première A'*. Université Bordeaux I.

BERTHELOT R., BLOCH I.: 2001, 'Le rôle du professeur dans la gestion des situations: consigne et dévolution, mises en commun, clôture des séances du point de vue cognitif.' *Actes du XXVIIème Colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques*, pp 181-204, Grenoble : Université Joseph Fourier.

BERTE A. : 1996, *'Mathématiques du collège au lycée'*, Paris : Nathan Pédagogie.

BERTHELOT R. & SALIN M.H. : 1992, *'L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire'*, Thèse Université Bordeaux 1.

BLOCH I. : 1995 ; *'Approche didactique de l'enseignement des premiers concepts de l'analyse'*, Bordeaux : Université Bordeaux I.

BLOCH I. : 1999, 'L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève : un exemple dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique.' *Recherches en didactique des mathématiques*, ***vol.19/ 2****, 135-194,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BLOCH I. : 2000, *'L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / Université.'* Bordeaux : Université Bordeaux I.

BLOCH I. : 2002a, 'Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée.' *Petit x,* **58***,* 25-46 *,* Grenoble : ARDM et ADIREM

BLOCH I. : 2002b, 'Différents niveaux de modèles de milieux dans la Théorie des Situations Didactiques : recherche d'une dialectique scientifique entre analyses théoriques et contingence.' *Actes de la XIème Ecole d'été de didactique des mathématiques,* 125-139*,* Dorier et al. Éditeurs, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BLOCH I.: 2003a, 'Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove?' *Educational Studies in Mathematics,* **52-1***,* 3-28.

BLOCH I.: 2003b, 'Transposition of didactical knowledge: The case of mathematics teachers' education', Proceedings of ICTM 2, University of Crete.

BLOCH I.: 2003c, 'L'enseignement des fonctions en Seconde et en Première : un milieu graphique pour élargir les possibilités d'action du professeur et l'apprentissage des élèves', *Bulletin APMEP 454, pp. 681-687.*

BLOCH I. : 2005a, 'Dimension a-didactique et connaissance nécessaire : un exemple de retournement d'une situation', *Sur la théorie des situations didactiques, Actes du colloque Guy Brousseau*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BLOCH I.: 2005b, 'Conceptualisation through semiotic tools in teaching/learning situations', *Conference of European Research on Mathematics Education, Group 11*, Barcelone.

BLOCH I.: 2005c, 'Learning new ways of teaching from mathematical research: Situations for mathematics teachers' education' *ICMI Study 15*, Sao Paulo.

BLOCH I.: 2005d, 'La sémiotique de C.S.Peirce et la didactique des mathématiques : Vers une analyse des processus de production et d'interprétation des signes mathématiques dans les situations d'apprentissage', *Séminaire SFIDA 24*, Université de Turin.

BLOCH I.: (à paraître 2006) 'Peut-on analyser la pertinence des réactions mathématiques des professeurs dans leur classe ? Comment travailler cette pertinence, en formation, dans des situations à dimension adidactique ?' *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, 2005, Paris : Université Paris 7

BLOCH I. et SALIN M.H. : 2004a, 'Contrats, milieux, représentations : étude des particularités de l'AIS'. *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques,* pp. 171-186, Paris : Université Paris 7.

BLOCH I., SALIN M.H. : 2004b, 'Géométrie dans le méso-espace à l'école primaire et au début du collège'. *Actes du XXXème colloque COPIRELEM sur la formation des professeurs, Avignon 2003,* C. Maurin Ed. Avignon.

BLOCH I., SCHNEIDER M.: 2004, 'A various milieu for the concept of limit: from determination of magnitude to a graphic milieu allowing proof', *ICME 10, Introduction conference to Topic Study Group 12,* Copenhague.

BLOCH I., GHEDAMSI I.: 2004, 'The teaching of calculus at the transition between Upper Secondary School and University', *ICME 10, Communication to Topic Study Group 12,* Copenhague.

BLOCH I., GHEDAMSI I.: 2005, 'Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires ? Le cas de l'enseignement de l'analyse en Tunisie', *Petit x* ***69***.

BOSCH M., ESPINOZA L. et GASCON J. : 2003, 'El profesor como director de procesos de estudio', *RDM* **23/1**, pp. 79-136, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BOSCH M., FONSECA C. et GASCON J. : 2004, 'Incompletitud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares', *RDM* **24/2.3**, pp. 205-250, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BOURDIEU P. : 2001, *'Science de la science et réflexivité'*, Paris : Raisons d'agir.

BRIAND J., CHEVALIER MC. : 1995, *'Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques'*, Paris : Hatier.

BRIDOUX, S. : 2005, 'Analyse d'un enseignement de topologie en première année d'université', *mémoire de DEA, Université Paris 7.*

BROIN D. : 2002, '*De l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement secondaire'*, Bordeaux : Université Bordeaux I.

BRONNER A. : 1997, *'Etude didactique des nombres réels : Idécimalité et racine carrée'*, Grenoble : Université Joseph Fourier.

BROUSSEAU G. : 1982, 'Tendances originales des recherches en didactique des mathématiques en France', Bordeaux : IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU G. : 1983, 'Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques'. *Recherches en didactique des mathématiques*, ***vol. 4/2****, 165-198,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU N., BROUSSEAU G. : 1987, *'Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire'*, Bordeaux : IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU G. : 1990, 'Le contrat didactique : le milieu'. *Recherches en didactique des mathématiques*, ***vol. 9/3****, 309-336,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G.: 1998, *'Théorie des situations didactiques'.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

CASTELA C. : 2000, 'Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique'. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **20/3**: 331-380, Grenoble : La Pensée Sauvage.

CASTELA C. ET EBERHARD M.: 1999, 'Quels types de modifications du rapport aux mathématiques en vue de la possibilité de quels gestes professionnels?' *Actes de la Xème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, 164-172. Houlgate : ARDM.

CHARNAY R.: 1989, 'Les enseignants de mathématiques et les erreurs de leurs élèves'. *Grand N*, **45**: 31-41.

CHEVALLARD Y.: 1999, 'L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique.' *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19/2**: 221-265, Grenoble : La Pensée Sauvage.

COLOMB J., DOUAIRE J., NOIRFALISE R.: 2003, '*Faire des maths en classe? Didactique et analyse des pratiques enseignantes'.* Paris: INRP.

COMITI C., GRENIER D. : 1997, Régulations didactiques et changements de contrats. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 17 / 3, *La Pensée Sauvage*, Grenoble.

COMITI C., GRENIER D., MARGOLINAS C., : 1995, Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions de classe et modélisation de phénomènes didactiques. *Différents types de savoirs et leur articulation.* La Pensée Sauvage, Grenoble.

COMITI C., BALL N.: 1996, 'Preparing teachers to teach mathematics: A comparative perspective'. Bishop & al. (eds), *Handbook of Research in Mathematics Education*, *1123-1154*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

COMITI C., GRENIER D., MRGOLINAS C.: 1995, 'Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions de classe et modélisation de phénomènes didactiques', *Différents types de savoirs et leur articulation, pp. 93-128*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

CONNE F. : 1997, 'L'activité dans le couple enseignant/enseigné', *Actes de la IXème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, p. 15-24, Bailleul et al. Eds, ARDM.

CONNE F. : 1999, 'Faire des maths, faire faire des maths, et regarder ce que cela donne'. *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Conne & Lemoyne, éditeurs, Presses de l'Université de Montréal.

CONNE F. : 2000, 'Peut-on parler d'une didactique de l'enseignement spécialisé ?' *Actes de la 10ème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, Caen.

CONNE F. : 2002, 'Pertes de contrôle et prises de contrôle dans l'interaction de connaissances,' *Dorier et coll. Éds, Actes de la 11ème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

CONNE F. : 2004, 'L'enseignement spécialisé : comprendre la théorie est en attraper le geste et pouvoir continuer', *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques, pp.79-100*, Durand-Guerrier et Tisseron Ed., Lyon : Université Claude Bernard Lyon 1.

COULANGE L. : 1998, 'Analyse a posteriori d'un protocole à l'aide d'un modèle local a priori', *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, 53-64*, Noirfalise Ed., IREM de Clermont-Ferrand.

DEBLOIS L. : 1996, 'Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire', *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **16/1***,* pp.7-46*,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

DEL NOTARO L. : 2004, 'Modèles de milieu à l'épreuve de la contingence en enseignement spécialisé', *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques, pp.141-158*, Durand-Guerrier et Tisseron Ed., Lyon : Université Claude Bernard Lyon 1.

DESCAVES A. : 1992, '*Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes'.* Hachette : collection Didactiques.

DI MARTINO H. : 1992, *'Analyse du contrôle épistémologique d'une situation didactique : la situation du pétrolier'*, Mémoire de DEA, Grenoble : Université Joseph Fourier.

DORIER J.L. et al. : 1997, '*L'enseignement de l'algèbre linéaire en question'.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

DORIER J.L. : 2000, *'Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire'*, Grenoble : Université Joseph Fourier.

DOUADY R. : 1987, 'Jeux de cadres et dialectique outil-objet', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7/2**, 5-32, Grenoble : La Pensée Sauvage.

DOUADY R. : 1994, 'Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir', *Repères IREM* **15**: 37-64.

DREYFUS T.: 1996, 'Advanced Mathematical thinking Processes', in Tall (ed) *Advanced Mathematical Thinking, pp.25-40*, Kluwer.

DREYFUS T.: 1999, 'Why Johnny can't prove', *Educational Studies in Mathematics*, **38**: 85-109.

DUBINSKY E.: 1996, 'Reflective Abstraction in Advanced Mathematical thinking', in Tall (ed) *Advanced Mathematical Thinking, pp.95-126*, Kluwer.

DURAND-GUERRIER, V.: 2003, 'Which notion of implication is the right one? From a logical considerations to didactical perspective' *Educational Studies in Mathematics* **53**: 5-34.

DURAND-GUERRIER, V. et ARSAC, G. : 2003, 'Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse.' *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **23/3**, 295-342, Grenoble : La Pensée Sauvage.

DUVAL R. : 1993, 'Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée'. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5, 37-65.

DUVAL R. : 1996, 'Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?' *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16/3*, *349-380*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

DUVAL R. : 2000, 'Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *20/2*, 135-170.

ERMEL : 1995, *'Apprentissages numériques et résolution de problèmes'*, CM1, INRP, Ed. Hatier, Paris.

ERMEL : 1997, *'Apprentissages numériques et résolution de problèmes'*, CP, INRP, Ed. Hatier, Paris.

FREGONA D. (1995) *'Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques'.* Bordeaux : Université Bordeaux I.

FUNRIGHETTI F. & SOMAGLIA A.: 1994, 'Functions in algebraic and graphical environments'. *Actes de la 46e rencontre CIEAEM, 248-255,* A. Antibi (Ed.), Toulouse, France.

GASCON J.: 1994, 'Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à "l'arithmétique généralisée".' *Petit x* **37**: 43-63. Grenoble: Université Joseph Fourier.

GENESTOUX F. : 2000, *'Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques'*, Bordeaux : Université Bordeaux 1.

GODINO J.D.: 2002, 'Un enfoque ontologico y semiotico de la cognicion matematica', *Recherches en didactique des Mathématiques*, ***22/2.3***, 237-284, Grenoble : La Pensée Sauvage.

GODINO J.D. y RECIO A.M.: 2004, *'Un modelo semiotico para el analisis de las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en educacion matematica'*, Universidad de Granada.

GONSETH F. : 1955, *'La géométrie et le problème de l'espace',* Neuchâtel : Editions du Griffon.

GUEUDET G. : 2004, 'Rôle du géométrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire', *Recherches en didactique des Mathématiques*, ***24/1***, 81-114, Grenoble : La Pensée Sauvage.

HANA G., JAHNKE N.,: 1993, 'Proof and application.' *Educational Studies in Mathematics*, **24**: 421-438.

HENRY M., CORNU B.,: 2001, 'Mathematics teachers' education in France: from academic training to professionalization', Derek Holton & al. (eds), *The Teaching and learning of Mathematics at University Level: an ICMI study, pp. 481-499,* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

HOUZEL C.: 2001, *'Analyse mathématique'* Paris : Sciences Belin Sup.

LEGRAND M.: 1991, 'Groupe des situations fondamentales et métaphore fondamentale ; réflexions autour de la recherche d'une situation fondamentale du concept de limite : la situation du pétrolier', *Séminaire Didactique et technologies cognitives en mathématiques, pp. 33-98,* Grenoble : Université Joseph Fourier.

LEGRAND M.: 1993, 'Débat scientifique en cours de mathématiques', *Repères IREM* **10**: 123-159.

LEGRAND 1996, 'La problématique des situations fondamentales.' *Recherches en didactique des mathématiques,* ***vol. 16/2****, 221-280,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

LE MEHAUTE A. : 1990, '*Les géométries fractales',* Editions Hermès, Paris.

LENFANT A., 2001, 'From a student institutional position to a teacher one: what changes in the relationship to algebra?' *Proceedings of the 25th Conference of PME, 297-304*. Netherlands: University of Utrecht.

MALARA N., ZAN R.: 2002, 'The problematic relationship between theory and practice'. *Handbook of International Research in Mathematics Education:* 553-580, Lyn English ed., LEA.

MAMONA-DOWNS J.: 2001, 'Letting the intuitive bear on the formal: a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence', *Educational Studies in Mathematics*, **48**: 259-288.

MARGOLINAS C. : 1992, 'Eléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion'. *Recherches en didactique des mathématiques*, *vol. 12 / 1, 113-158*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

MARGOLINAS C. : 1994, 'Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe.' *Séminaire Dida Tech, n° 158,* Grenoble : Université Joseph Fourier.

MARGOLINAS C. : 1995, 'La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations', *Les débats de didactique des mathématiques, pp. 89-102*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

MARGOLINAS C. : 1997, 'Etude de situations didactiques "ordinaires" à l'aide du concept de milieu: détermination d'une situation du professeur'. *Actes de la IXème école d'été de didactique des mathématiques*, *35-43,* Houlgate. Edition ARDM.

MARGOLINAS C.: 2002, 'Situations, milieux, connaissances – Analyse de l'activité du professeur', *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*: 141-156*,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

MASCHIETTO M. : 2001, 'Fonctionnalité des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'Université',. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **21/1.2***,* pp.123-156*,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

MATHERON Y. : 2001, 'Une modélisation pour l'étude didactique de la mémoire', *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **21/3***,* pp.207-246*,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

MAUREL M : 2001, 'Derrière la droite, l'hyperplan', *Repères n°* ***42****, pp. 83-114.*

MAUREL M et SACKUR C. : 2002, La presqu'île- Une introduction aux fonctions de deux variables en DEUG. *Actes de la XIème Ecole d'été de didactique des mathématiques, 167-175,* Dorier et alii, éditeurs : Grenoble : La Pensée Sauvage.

MAUREL M., SACKUR C. et DROUHARD J.P. : 2001, 'Le symbolisme de l'algèbre dans l'approche de l'analyse', *Actes du XVIème Séminaire Franco-italien de Didactique de l'Algèbre*, Drouhard et Maurel, Eds, Nice : Université de Nice.

MERCIER A., LEMOYNE G., ROUCHIER A., (Eds) : 1998, '*Le génie didactique'.* De Boeck, Bruxelles.

MERCIER A. : 1995, 'Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations a-didactiques', *Les débats de didactique des mathématiques, 157-168,* Margolinas Ed., Grenoble : La Pensée Sauvage.

MERCIER A. : 1998, 'La participation des élèves à l'enseignement', *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **18/3***,* pp.279-310*,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

MULLER A.: 2004, ' Approche sémiotique pour l'analyse a priori d'une tâche mathématique', *Situations Educatives et Signification*, De Boeck.

NADEAU R. :1999, '*Vocabulaire technique et analytique de l'épistémologie'*, PUF.

NOGUES M. : 'Courbes et fonctions', *IREM de Montpellier*.

NOIRFALISE R. : 2004, 'Modélisation et équations différentielles en Terminale S : utilisation d'un modèle praxéologique pour poser des questions didactiques', *Petit x, **66**, pp. 6-17.*

PARIES M. : 2004, 'Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques', *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **24/2.3***,* pp.251-284*,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

PEIRCE C.S.: 1995, '*Le raisonnement et la logique des choses'*, Paris : Les éditions du Cerf.

PEIRCE C.S.: 1978, *'Ecrits sur le signe'*, Paris: Seuil.

PELTIER-BARBIER M.L. et al. : 2005, *'Dur d'enseigner en ZEP'*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

PERRIN-GLORIAN MJ. : 1993, 'Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes 'faibles'', *RDM **13/1-2**, pp. 5-118.*

PERRIN-GLORIAN MJ. : 1998, 'Analyse d'un problème sur les fonctions en termes de milieu : structuration du milieu pour l'élève et pour le maître', *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, 17-38*, Noirfalise Ed., IREM de Clermont-Ferrand.

PERRIN-GLORIAN MJ., COULANGE L. : 2003, 'Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires', *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **23/2***,* pp.217-276*,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

PRASLON F. : 2000, ' *Continuités et ruptures dans la transition entre Terminale S et DEUG Sciences en Analyse. L'exemple de la notion de dérivée et son environnement.'* Paris : Université Paris 7.

QUILIO S. : 2005, 'Etude de la co-construction de jeux de langage didactiques : Un exemple dans le cas de l'enseignement des nombres rationnels au CM2', *Actes de la XIIème Ecole d'été de didactique des mathématiques*, Mercier Editeur, Grenoble : La Pensée Sauvage.

RABARDEL P. : 2000, 'Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques', *Bailleul, ed., Actes de la Xème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, pp. 203-211*, IUFM de Caen.

RADFORD L.: 2002, 'The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectivation of mathematical knowledge', *For the Learning of Mathematics, **22-2***, 14-23.

RADFORD L.: 2004, 'Rescuing perception: Diagrams in Peirce's theory of cognitive activity', *Research Program, Social Sciences and Humanities Research Council of Canada.*

RADFORD L. et al.: 2003, 'Calculators, graphs, gestures and the production of meaning', *Conference of the International Group of PME, PME 27, Vol. 4,* 55-62.

RENE DE COTRET S.: 1988, 'Une étude sur le mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante', *Petit x, n°**17**, pp. 5-27.*

ROBERT A.: 1997, 'Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'Université.' *Recherches en Didactique des Mathématiques*, ***18/2**: 139-190*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

ROBERT A.: 2001, 'Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes du métier d'enseignant.' *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **21-1/2**: 57-80, Grenoble : La Pensée Sauvage.

ROBERT A.: 2003, 'Tâches mathématiques et activité des élèves', *Petit x, **62**, pp. 61-71*.

ROBERT A.: 2004, 'Une analyse de séances de mathématiques au collège : la question des alternatives dans les pratiques d'enseignants', *Petit x, **65**, pp.52-79*.

ROBERT A.: 2005, 'Deux exemples d'activités en formation des enseignants de mathématiques du second degré', *Petit x, **67**, pp. 63-76*.

ROBERT A.: 2005, 'De recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants du second degré : un point de vue didactique', *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *n°**10**, pp. 209-250*, ULP Strasbourg.

ROBERT A. & ROGALSKI M. : 2002, Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ? *Petit x, **60**, pp. 6-25.*

ROBERT A., VANDEBROUCKE F. : 2003, 'Des utilisations du tableau par les professeurs de mathématiques en classe de Seconde', *Recherches en didactique des mathématiques*, *vol. **23/3**,* 389-424, , Grenoble : La Pensée Sauvage.

RODITI E. : 2003, 'Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement – Le cas de la multiplication des nombres décimaux en classe de Sixième', *Recherches en didactique des mathématiques*, *vol. **23/2**,* 183-216, Grenoble : La Pensée Sauvage.

ROGALSKI J. : 1984, 'Représentations graphiques dans l'enseignement : concepts et méthodes d'analyse appliqués au graphe de fonctions'. *Signes et discours dans l'éducation et la vulgarisation scientifique, Sixièmes journées internationales sur l'éducation scientifique,* Giordan et Martinand éd., Chamonix.

ROGALSKI J. : 2003, 'Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité d'un enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert', *Recherches en didactique des mathématiques*, *vol. **23/3**,* 343-388, Grenoble : La Pensée Sauvage.

ROGALSKI M., ROBERT A., POUYANNE N. : 2001, *'Carrefours entre analyse, algèbre et géométrie'*, Paris : Ellipses.

ROGALSKI M. : 1995, 'Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel, que la dialectique outil-objet ne semble pas marcher, et qu'il n'y ait apparemment pas de situation fondamentale ? L'exemple de l'algèbre linéaire'. *Séminaire Didatech 169*, Grenoble : Laboratoire Leibniz.

ROGALSKI M. : à paraître, 'Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs par une intégrale, en Terminale scientifique : un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique', *Repères IREM*.

ROUCHIER A. : 1991, *'Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaire : proportionnalité, structures itéro-récursives, institutionnalisation'*, Thèse d'Etat, Université d'Orléans.

ROUCHIER A. : 1995, 'Sur quelques oppositions et mises en relation dans les études didactiques', *Différents types de savoirs et leur articulation, pp. 279-288*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

ROUCHIER A. : 1996, 'Connaissances et savoirs dans le système didactique'. *Recherches en didactique des mathématiques*, *vol. 16/2,* 177-196, , Grenoble : La Pensée Sauvage.

SACKUR C.: 2000, 'Experiencing the necessity of the mathematical statements', *Proceedings of the 24th Conference of* the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Hiroshima, Japan, IV 105-112.

SACKUR,C., ASSUDE T., MAUREL M. , DROUHARD J.P., PAQUELIER Y.: 2005, 'L'expérience de la nécessité épistémique', *RDM **25/1**, pp. 57-90.*

SACKUR,C. & MAUREL M. : 2002, 'La presqu'ïle, une introduction aux fonctions de deux variables en DEUG', *in Dorier et al. éditeurs, Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, pp. 167-176,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

SALIN M.H.: 1999, 'Pratiques ostensives des enseignants et contraintes de la relation didactique', *Le cognitif en didactique des mathématiques:* 327-352*,* Lemoyne et Conne (Eds), Presses de l'Université de Montréal.

SALIN M.H.: 2002, 'Repères sur l'évolution du concept de milieu en théorie des situations', *Actes de la XIème Ecole d'été de didactique des mathématiques,* 111-124*,* Dorier et al. Éditeurs, Grenoble : La Pensée Sauvage.

SCHNEIDER M.: 1991, 'Un obstacle épistémologique soulevé par des 'découpages infinis' des surfaces et des solides', *Recherches en didactique des mathématiques*, **11/2.3***,* 241-294, Grenoble : La Pensée Sauvage.

SCHNEIDER M. : 2001a, 'Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques: à propos d'un enseignement des limites au secondaire.' *Recherches en didactique des mathématiques*, **21/1.2***,* 7-56, Grenoble : La Pensée Sauvage.

SCHNEIDER M. : 2001b, 'Un exemple d'ingénierie didactique relative à l'analyse mathématique, passée au crible de concepts de la didactique', *in Le génie didactique, Mercier, Lemoyne, Rouchier, éditeurs, pp. 179-208,* De Boeck.

SCHWARZ B. and DREYFUS T.: 1995, 'New actions upon old objects: a new ontological perspective on functions', *Educational Studies in Mathematics* 29, 259-291.

SCHWARZENBERGER R.L.E.: 1984, 'The importance of mistakes'. *The Mathematical Gazette*, **68**: 159-172.

SHULMAN L.S.: 1986, 'Those who understand: Knowledge Growth in Teaching', *Educational Researcher*, **15**, 4-14.

SENSEVY G. : 1998, *'Institutions didactiques : Etude et autonomie à l'école élémentaire'.* Paris : PUF

SENSEVY G., MERCIER A., SHUBAUER LEONI M.L. : 2000, 'Vers un modèle de l'action didactique du professeur'. *Recherches en didactique des mathématiques*, **20/3***,* 263-304, Grenoble : La Pensée Sauvage.

SFARD, A.: 1991, 'On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on process and objects as different sides of the same coin' *Educational Studies in Mathematics*, ***22***, 1-36.

SIERPINSKA A., LERMANN S. : 1996, 'Epistemologies of mathematics and mathematics education', Bishop & al. (eds), *Handbook of Research in Mathematics Education:* 827-876, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

SLAVIT D.: 1997, 'An alternate route to the reification of function', *Educational Studies in Mathematics* **33-3**, 259-281.

TALL D., 1996: 'Function and calculus.' *International Handbook of Mathematics Education*, Bishop et al. (Eds), 289-325, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

TRIGUEROS M. & OKTAÇ A. (2005) 'La théorie APOS et l'enseignement de l'algèbre linéaire,' *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *n°**10**, pp. 157-176*, ULP Strasbourg.

VANDEBROUCK F, CAZES C. : 2004, *Actes du colloque TICE* :
http://archive-edutice.ccsd.cnrs.fr/docs/00/02/75/92/PDF/Vandebrouck_Cazes.pdf

VERGNAUD G.: 1981, 'Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **2-2**: 215-232.

VERON B. : 2001, 'Calcul littéral, équations, inéquations'. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques*, **435**, 440-444, Paris.

Tables des matières