



**HAL**  
open science

# Méthodes géométriques en mécanique spatiale et aspects numériques

Mohamed Jabeur

► **To cite this version:**

Mohamed Jabeur. Méthodes géométriques en mécanique spatiale et aspects numériques. Mathématiques [math]. Université de Bourgogne, 2005. Français. NNT : . tel-00012145

**HAL Id: tel-00012145**

**<https://theses.hal.science/tel-00012145>**

Submitted on 13 Apr 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université de Bourgogne

Laboratoire d'Analyse  
Appliquée et Optimisation

Institut de  
Mathématiques de Bourgogne

## Thèse

présentée par

**Mohamed JABEUR**

en vue d'obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

### *MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES EN MÉCANIQUE SPATIALE ET ASPECTS NUMÉRIQUES*

Thèse soutenue publiquement le 03 Février 2005 devant le jury composé de

Didier ARNAL	Université de Bourgogne	Examineur
Bernard BONNARD	Université de Bourgogne	Directeur de thèse
Yacine CHITOUR	Université Paris-Sud, Supelec	Rapporteur
Monique CHYBA	University of Hawaii at Manoa	Rapporteur
Abderrahim JOURANI	Université de Bourgogne	Examineur
Cheng-Zhong XU	Université Claude Bernard (Lyon I)	Examineur

## Résumé

On présente dans cette thèse deux projets de recherche sur le contrôle optimal de véhicules spatiaux.

Le premier est consacré au problème du transfert orbital. Le modèle étudié est celui du contrôle en temps minimal d'un satellite que l'on souhaite insérer sur une orbite géostationnaire. Ce type de problème classique a été réactualisé avec l'évolution de la technologie des moteurs à poussée faible et continue. Notre contribution est de deux ordres. Géométrique, tout d'abord, puisqu'on étudie la contrôlabilité du système ainsi que la géométrie des transferts (structure de la commande) à l'aide d'outils de contrôle géométrique (principe du minimum). Sont ensuite présentés l'algorithme de tir et la méthode de continuation. Ces approches permettent de traiter numériquement le problème du transfert orbital dont la poussée est forte à faible.

Le second concerne le calcul des trajectoires de rentrée atmosphérique pour la navette spatiale. Le problème décrivant les trajectoires est de dimension 6, le contrôle est l'angle de gîte cinématique ou sa dérivée et le coût est l'intégrale du flux thermique. Par ailleurs, il y a des contraintes sur l'état (flux thermique, accélération normale et pression dynamique). Notre étude est fondée sur l'obtention des conditions nécessaires d'optimalité (principe du minimum avec contraintes sur l'état) applicables à notre cas, sur le calcul des paramètres  $(\eta, \nu, u_b)$  associées à la contrainte sur l'état et sur l'analyse des synthèses optimales au voisinage de la contrainte. Une fois la trajectoire optimale déterminée, on utilise l'algorithme de tir multiple et la méthode de continuation pour les évaluations numériques.

**Mots-clés** : transfert orbital, rentrée atmosphérique, contrôle optimal avec contraintes sur l'état, conditions nécessaires d'optimalité, algorithme de tir multiple, méthode de continuation.

## Abstract

We present in this thesis two research projects on the optimal control of the space vehicles.

In the first, we have dealt with the orbit transfer problem. We study the minimum time control of a satellite that we want to reach a geostationary orbit. Our contribution is of two kinds. Geometric, first, since we study the controllability of the system together with the geometry of the transfer (structure of the command) by means of geometric control without state constraint tools (minimum principle). Then we present shooting algorithm and homotopy method. These approaches allow the numerical resolution of problems with strong or low thrust satellites.

The second project concerns to the calculation of the trajectories of atmospheric re-entry for the space shuttle. The system describing the trajectories is in dimension 6, the control is the bank angle or its derivative and the cost is the total thermal flux. Moreover there are state constraints (thermal flux, normal acceleration and dynamic pressure). Our study is founded on obtaining the necessary optimality conditions (minimum principle with state constraints) applicable to our case, on the state constraint associated parameters  $(\eta, \nu, u_b)$  calculation and on the analysis of the small time optimal synthesis for single input systems with state constraints. The optimal solution is numerically computed with a multiple shooting algorithm and homotopy method.

**Key-words** : orbital transfer, atmospheric re-entry, optimal control with state constraints, necessary optimality conditions, multiple shooting algorithm, homotopy method .

## Remerciements

La première personne que je souhaite remercier est mon directeur de thèse, Bernard Bonnard, Professeur à l'Université de Bourgogne. C'est lui qui m'a fait découvrir ce domaine si riche des Mathématiques Appliquées qu'est le contrôle optimal, à la frontière de la modélisation et du calcul scientifique, du calcul différentiel, de la géométrie et des applications. Pour avoir été ce guide et pour m'avoir accordé sa confiance, qu'il reçoive l'expression de toute ma gratitude.

Mes remerciements vont aussi à Didier Arnal, Professeur à l'Université de Bourgogne, qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je suis de même très reconnaissant à Monique Chyba, Professeur à l'Université d'Hawaï à Manoa et à Yacine Chitour, Professeur à l'Université de Paris-Sud et Supelec, d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail en tant que spécialistes en contrôle optimal. Leur disponibilité, leurs corrections et leurs remarques m'ont beaucoup aidé.

Je remercie sincèrement Cheng-Zhong Xu, Professeur à l'université Claude Bernard Lyon I et Abderrahim Jourani, Maître de Conférences à l'Université de Bourgogne, qui ont bien voulu faire partie du jury. Je leur suis profondément reconnaissant pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mon travail.

Je remercie vivement l'ensemble des membres du Laboratoire d'Analyse Appliquée et Optimisation et de l'Institut de Mathématiques de Bourgogne pour leur accueil. Je leur exprime toute ma sympathie.

Ma profonde gratitude va aux membres du secrétariat du Laboratoire d'Analyse Appliquée et Optimisation et de l'Institut de Mathématiques de Bourgogne pour leur collaboration. C'est avec beaucoup de gentillesse que Jean Pierre Troalen et Sylvie Vottier-Kościeliński m'ont aidé à résoudre des problèmes de logistiques. Je les remercie tous, ainsi que Jacqueline Alexandre qui s'est occupée de la reprographie de cette thèse.

Mes remerciements vont aussi à mes compagnons du collectif de doctorants : merci à vous tous, thésards de tous horizons, de toutes disciplines, votre contact m'a enrichi.

Je ne saurais trop remercier mes parents, ma femme, mes frères et mes soeurs pour leur infinie patience et leur constant soutien. Ma dernière pensée s'adresse à ma fille Manel, j'espère qu'elle ne m'en voudra pas d'avoir eu un père si occupé pendant les premiers mois de sa jeune existence.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
0.1 Présentation du sujet . . . . .	1
0.2 Problématiques et contributions . . . . .	1
0.3 Contrôle optimal sans contrainte sur l'état . . . . .	2
0.4 Contrôle optimal avec contraintes sur l'état . . . . .	3
0.5 Méthodes numériques . . . . .	6
0.6 Plan . . . . .	7
<b>1 Transfert orbital et méthode de tir multiple</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	10
1.2 Modélisation du problème . . . . .	10
1.2.1 Problème physique . . . . .	10
1.2.2 Modélisation contrôle optimal . . . . .	10
1.2.3 Paramètres orbitaux . . . . .	11
1.2.4 Décomposition de la poussée . . . . .	12
1.2.5 Représentation du système dans les coordonnées équinoxiales . . . . .	13
1.2.6 Coordonnées en rotation . . . . .	15
1.3 Intégrale première de Laplace et intégration des équations de Kepler . . . . .	15
1.4 Le problème de contrôlabilité . . . . .	17
1.4.1 Préliminaires . . . . .	17
1.4.2 Contrôlabilité des systèmes avec des contrôles constants par morceaux	18
1.4.3 La structure de l'algèbre de Lie du système et résultats de contrôlabilité . . . . .	19
1.5 Principe du minimum et conditions de transversalité . . . . .	21
1.6 Principe du minimum et problème Sous-Riemannien avec dérive . . . . .	23
1.6.1 Calcul des extrémales . . . . .	23
1.6.2 Extrémales brisées et extrémales singulières . . . . .	24
1.7 Algorithme de tir multiple et méthode de continuation . . . . .	25
1.7.1 Motivation . . . . .	25
1.7.2 Description de l'algorithme de tir multiple . . . . .	25
1.7.3 Méthode de continuation sur la borne extrémale de la contrainte sur l'état . . . . .	30
1.7.4 Méthode de continuation sur la borne extrémale du contrôle . . . . .	33
1.8 Application au problème de transfert orbital plan . . . . .	34

1.8.1	Principe du minimum . . . . .	35
1.8.2	Couplage : algorithme de tir/méthode de continuation . . . . .	37
1.8.3	Résultats numériques pour le transfert plan à masse variable . . . . .	38
<b>2</b>	<b>Principe du minimum avec contraintes sur l'état</b>	<b>47</b>
2.1	Introduction . . . . .	48
2.2	Les travaux de Weierstrass (1879) . . . . .	48
2.2.1	Formules préliminaires . . . . .	48
2.2.2	Application au problème avec contraintes . . . . .	50
2.2.3	Conditions de jonction . . . . .	51
2.2.4	Conditions de réflexion . . . . .	53
2.2.5	Conclusion . . . . .	55
2.3	Méthode des multiplicateurs de Lagrange et théorème de Kuhn-Tucker . . . . .	55
2.3.1	Méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	55
2.3.2	Le théorème de Kuhn-Tucker en dimension infinie . . . . .	58
2.3.3	Conditions nécessaires d'optimalité pour des systèmes avec contraintes sur l'état . . . . .	61
2.4	Le cas affine et le principe du minimum de Maurer . . . . .	64
2.4.1	Préliminaires . . . . .	64
2.4.2	Formulation des conditions nécessaires . . . . .	65
2.4.3	Application au problème de temps minimal . . . . .	66
2.4.4	Calcul des contrôles extrémaux . . . . .	67
2.4.5	Calcul des paramètres $(\eta, \nu_i)$ . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Contrôle optimal de l'arc atmosphérique de la navette spatiale</b>	<b>75</b>
3.1	Introduction . . . . .	76
3.2	Modélisation du problème de rentrée atmosphérique . . . . .	76
3.2.1	Présentation du projet . . . . .	76
3.2.2	Modélisation du problème . . . . .	77
3.2.3	Problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état . . . . .	79
3.2.4	Données numériques et interpolation des coefficients aérodynamiques $C_D$ et $C_L$ . . . . .	80
3.2.5	Stratégie d'Harpold et Graves . . . . .	83
3.2.6	Réduction du problème et modèle simplifié . . . . .	84
3.3	Contrôle optimal sur le modèle simplifié $I$ . . . . .	87
3.3.1	Le modèle sans contrainte . . . . .	87
3.3.2	Le modèle avec contraintes sur l'état . . . . .	93
3.3.3	Synthèse temps minimal au voisinage de la contrainte . . . . .	99
3.3.4	Algorithme et résultats numériques . . . . .	105
3.4	Contrôle optimal sur le modèle simplifié $II$ . . . . .	110
3.4.1	Énoncé du problème et notations . . . . .	110
3.4.2	Le modèle sans contrainte . . . . .	111
3.4.3	Le modèle avec contraintes sur l'état . . . . .	114
3.4.4	Synthèse temps minimal au voisinage de la contrainte . . . . .	117
3.4.5	Algorithme et résultats numériques . . . . .	125

3.5	Contrôle optimal du problème complet . . . . .	130
3.5.1	Extrémales du problème non contraint . . . . .	131
3.5.2	Le problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état . . . . .	134
3.5.3	Algorithme et résultats numériques. . . . .	139
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>144</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>147</b>





# Introduction

## 0.1 Présentation du sujet

Nous présentons dans cette thèse deux projets de recherche sur le contrôle optimal de véhicules spatiaux.

Le premier est consacré au problème de transfert orbital, qui consiste à transférer un engin soumis à l'attraction terrestre sur une ellipse Keplerienne. Ce type de problème classique a été réactualisé avec l'évolution de la technologie des moteurs à poussée faible et continue. Nous nous intéressons au problème de transfert en temps minimal. Ce travail est une continuation d'une série de travaux réalisés dans [13, 14, 19, 21].

Le second est un projet en cours de réalisation avec le CNES, concerne le calcul des trajectoires de rentrée atmosphérique pour la navette spatiale. Dans ce cas la navette se comporte comme un planeur (la poussée étant coupée), volant à haute vitesse (de l'ordre de  $8000\text{ m/s}$  au début du trajet), soumis à des forces fluides dans l'atmosphère, une force de frottement qui s'appelle traînée et une force de portance qui permet de contrôler la navette. Ce second problème est plus complexe que le premier car il y a des contraintes actives sur l'état : une contrainte sur le flux thermique, une contrainte sur l'accélération normale et une contrainte sur la pression dynamique. Pour ce type de systèmes, un critère à minimiser dans le calcul des trajectoires est le facteur d'usure de la navette, modélisé par l'intégrale du flux thermique. Ce travail s'inscrit dans la continuité de plusieurs travaux déjà réalisés, par exemple dans [3, 20].

## 0.2 Problématiques et contributions

**Transfert orbital.** Nous nous intéressons au transfert d'un engin spatial d'une orbite initiale vers une orbite terminale. Parmi tous les contrôles, i.e. les lois de commande du moteur de l'engin, permettant d'atteindre la cible, on souhaite déterminer celui qui correspond au temps de transfert le plus court. Existe-t-il des contrôles permettant de réaliser effectivement ce transfert ? Si c'est le cas, comment les calculer ? Le système est-il contrôlable ? Quel est l'algorithme numérique adapté pour intégrer les trajectoires et satisfaire les conditions limites ? Pour le problème de transfert sur une orbite géostationnaire avec une poussée faible, on observe une singularité présentée par une inversion de poussée au périgée de l'ellipse osculatrice, ce qui empêche notre algorithme numérique de réaliser la convergence demandée. C'est pourquoi nous cherchons à renforcer notre démarche numérique par d'autres techniques pour contourner ce problème.

**Rentrée atmosphérique.** Nous nous intéressons au problème du contrôle optimal d'une navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique, où le contrôle est l'angle de gîte ou sa dérivée, et où le coût est le flux thermique total. L'objectif est de déterminer une trajectoire optimale jusqu'à une cible donnée. Ce problème de contrôle optimal, hautement non linéaire, est rendu difficile du fait de l'existence des contraintes sur l'état. Notre contribution consiste à présenter des conditions nécessaires d'optimalité, qui correspondent à un principe du minimum avec contraintes sur l'état. La tâche est ardue

car il s'agit d'une extension non triviale du principe du minimum standard. On constate de plus le phénomène de discontinuité du vecteur adjoint. Après avoir calculé les contrôles optimaux, on se pose plusieurs questions, parmi lesquelles : comment calculer le multiplicateur associé à la contrainte dans la formalisation du Hamiltonien ? Quel est le saut de discontinuité du vecteur adjoint ? Comment les trajectoires se comportent au voisinage de la frontière de la contrainte ? L'arc frontière est-il optimal ? Par ailleurs, une fois la trajectoire optimale déterminée, il faut trouver l'algorithme numérique adapté pour simuler les conditions nécessaires d'optimalité du principe du minimum avec contraintes sur l'état.

À l'analyse de ces problématiques, nous constatons que notre contribution sera basée sur deux études : une étude théorique concernant le problème de contrôle optimal avec ou sans contraintes sur l'état, et une étude pratique concernant les méthodes numériques.

### 0.3 Contrôle optimal sans contrainte sur l'état

En mathématiques, la théorie du contrôle optimal s'inscrit dans la continuité du calcul des variations. Elle est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique du vol. La théorie du contrôle optimal est très liée à la mécanique classique, en particulier aux principes variationnels de la mécanique (Principe de Fermat, équation d'Euler-Lagrange...). La formalisation de cette théorie a posé des questions nouvelles ; par exemple dans la théorie des équations différentielles ordinaires elle a motivé un concept de solution généralisée et a engendré de nouveaux résultats d'existence de trajectoires optimales, voir par exemple [15, 40]. De plus, d'un point de vue géométrique, cette théorie a motivé des questions de contrôlabilité, voir par exemple [4, 26, 31], ainsi que des questions concernant l'ensemble des états accessibles, voir par exemple [27, 43, 48]. Elle a ainsi motivé des questions liées au comportement local des extrémales au voisinage de la surface de commutation, et à l'étude des extrémales singulières, voir par exemple [28]. Le point clé de cette théorie est le principe du minimum de Pontriaguine, voir [30, 39], formulé par L. Pontriaguine en 1956. On considère donc un système lisse

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n,$$

où  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$ , les variétés initiales et finales sont notées  $M_0$  et  $M_1$ . L'ensemble des contrôles admissibles  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des applications mesurables bornées  $u : [0, T] \rightarrow U$  où  $U$  est un domaine de  $\mathbb{R}^m$ . Pour un contrôle  $u(t)$  de réponse  $x(t)$  sur  $[0, T]$ , on assigne un coût :

$$C(u) = \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt,$$

où  $f^0$  est une fonction lisse. On introduit l'état augmenté

$$\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x^0(t) \end{pmatrix}, \quad \text{où } x^0(0) = 0,$$

et la trajectoire du système augmenté vérifie  $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, u)$  défini par les équations :

$$\dot{x} = f(x, u), \quad \dot{x}^0 = f^0(x, u).$$

Soit  $\tilde{p} = (p, p^0) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) - \{0\}$  le vecteur adjoint associé à  $\tilde{x}$  et  $\tilde{H}$  le Hamiltonien :

$$\tilde{H} = \langle \tilde{p}, \tilde{f}(\tilde{x}, u) \rangle.$$

On a alors le résultat suivant :

**Théorème 0.3.1 (Principe du minimum de Pontriaguine)** *Considérons le système  $\dot{x} = f(x, u)$  avec pour ensemble de contrôles admissibles l'ensemble  $\mathcal{U}$ . Si  $u^*$  est un contrôle optimal sur  $[0, T^*]$  transférant le système de  $M_0$  à  $M_1$  avec une réponse augmentée  $\tilde{x}^*(t) = (x^*(t), x^{0*})$ , alors il existe  $\tilde{p}^*(t) = (p^*(t), p^{0*}) \neq 0$ , absolument continu tel que les équations suivantes sont vérifiées pour le triplet  $(\tilde{x}^*, \tilde{p}^*, u^*)$  :*

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}^* &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}}(\tilde{x}^*, \tilde{p}^*, u^*) && p.p, \\ \dot{\tilde{p}}^* &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}^*, \tilde{p}^*, u^*) && p.p, \\ \tilde{H}(\tilde{x}^*(t), \tilde{p}^*(t), u^*(t)) &= \min_{u \in \mathcal{U}} \tilde{H}(\tilde{x}^*(t), \tilde{p}^*(t), u(t)) && p.p. \end{aligned}$$

De plus :

$$\tilde{H}(\tilde{x}^*(t), \tilde{p}^*(t), u^*(t)) = 0 \quad p.p \quad \text{et} \quad p^{0*} \geq 0,$$

et les conditions de transversalité suivantes, sont vérifiées :

$$p^*(0) \perp T_{x^*(0)}M_0, \quad p^*(T^*) \perp T_{x^*(T^*)}M_1,$$

où  $T_qM$  désigne l'espace tangent.

**Définition 0.3.1** *On appelle extrémale une solution des équations du principe du minimum. Une extrémale est dite normale si  $p^0 \neq 0$ , et anormale si  $p^0 = 0$ .*

Dans notre étude théorique du problème de transfert orbital, nous utilisons la théorie du contrôle optimal sans contrainte sur l'état avec ces techniques géométriques.

## 0.4 Contrôle optimal avec contraintes sur l'état

Le problème que l'on étudie est de minimiser  $\Phi(x(T))$  pour les trajectoires du système :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $T$  est fixé,  $u(t) \in \mathbb{R}$ , avec la contrainte scalaire sur l'état :

$$C(x(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

**Définition 0.4.1** *On appelle arc frontière un arc  $\gamma_b$  tel que  $C(\gamma_b(t)) = 0$  et on note  $u_b$  le contrôle frontière associé.*

**Définition 0.4.2** *L'ordre  $m$  de la contrainte pour le système est le plus petit entier non nul tel que, pour tout  $k = 0, \dots, m - 1$ ,  $C^{(k)}(x(t), u(t))$  ne dépend pas explicitement de  $u$ .*

On fait les hypothèses suivantes :

1.  $f$ ,  $\Phi$  et  $C$  sont des applications lisses.
2. L'ensemble  $\mathcal{U}$  des contrôles admissibles est l'ensemble des applications  $u$  définies et continues par morceaux sur  $[0, T]$ .
3. Le long d'un arc frontière, le contrôle est lisse. La trajectoire et le contrôle sont lisses par morceaux sur  $[0, T]$ .
4. Le long d'un arc frontière d'ordre  $m$ , la condition générique suivante est vérifiée :

$$\frac{\partial}{\partial u}(C^{(m)})(\gamma_b(t)) \neq 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Avant les débuts de la théorie du contrôle optimal, la théorie de Lagrange en dimension finie (1788) reste parmi les premiers travaux réalisés dans l'histoire de l'optimisation avec contraintes sur l'état. En 1879, Weierstrass [2] a utilisé la formule fondamentale du calcul des variations pour établir des conditions géométriques nécessaires d'optimalité dans le plan. En 1951, Kuhn et Tucker ont exploité les idées de la théorie de Lagrange pour chercher, toujours en dimension finie, des conditions analytiques nécessaires d'optimalité. Les résultats de Kuhn et Tucker ont été généralisés en dimension infinie par plusieurs auteurs, parmi eux Luenberger [32], Neustadt [35] et Russell [42].

La découverte du principe du minimum de Pontriaguine (en 1956), surtout les premiers résultats de la théorie du contrôle optimal, ont motivé l'idée de pénaliser la contrainte de plusieurs façons dans le Hamiltonien et de chercher des conditions nécessaires d'optimalité sous forme d'équations Hamiltoniennes, pour un problème général de contrôle optimal avec contraintes sur l'état. Ces idées sont développées entre autres dans [12, 46]. En 1963, Bryson, Denham et Lele [12] ont obtenu des conditions nécessaires d'optimalité en ajoutant la contrainte  $(C^{(m)})$  dans le Hamiltonien. Par ailleurs, en 1968, Speyer [46] a ajouté directement la contrainte  $C$  dans le Hamiltonien.

Dans [25], Jacobson, Lele et Speyer (1971) ont développé les résultats de [12] et de [46]. En utilisant la théorie de l'analyse fonctionnelle, surtout le théorème de Hahn Banach, ils ont montré que la version en dimension infinie de la théorie de Kuhn et Tucker permet d'obtenir des conditions nécessaires d'optimalité, qui semblent être une extension du principe du minimum de Pontriaguine.

**Théorème 0.4.1 (Jacobson, Lele et Speyer)** *Les conditions nécessaires d'optimalité sont :*

$$\dot{p} = -pf_x - \eta C_x, \quad p(T) = \Phi_x(x(T)), \quad pf_u = 0,$$

où  $t \mapsto \eta(t)$  est une fonction nulle si  $C < 0$ , continue et positive sur l'arc frontière. De plus, lors d'un contact ou d'une jonction au temps  $t_i$  avec la frontière, on a la condition de saut suivante :

$$p(t_i^+) = p(t_i^-) - \nu(t_i)C_x(t_i),$$

où  $\nu(t_i) \geq 0$  et la fonction  $pf$  reste continue.

En 1977, Maurer [33] a exploité les résultats de [25] pour obtenir des conditions nécessaires d'optimalité dans le cas affine : le problème est de calculer un contrôle  $(u(t))_{t \in [0, T]}$  scalaire et continu par morceaux qui minimise un coût de la forme

$$J(u) = \Phi(x(T)),$$

sous les conditions suivantes :

- le système considéré est affine

$$\dot{x}(t) = f(x, u) = X(x(t)) + u(t)Y(x(t));$$

- les conditions limites sont

$$x(0) = x_0, \quad \Psi(x(T)) = 0;$$

- la contrainte sur le contrôle est

$$|u(t)| \leq M, \quad \text{où } M > 0;$$

- la contrainte sur l'état est

$$C(x(t)) \leq 0,$$

où  $f$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi$  et  $C$  sont supposés des applications lisses et le temps final  $T$  est fixé.

**Hypothèse 1** Soit  $t \mapsto \gamma_b(t)$ ,  $t \in [0, T]$  un arc frontière. On introduit les hypothèses suivantes :

- (C<sub>1</sub>) le long de  $\gamma_b$ ,  $Y(X^{m-1}.C) \neq 0$  où  $m$  est l'ordre de la contrainte,
- (C<sub>2</sub>)  $|u_b(t)| \leq M$  sur  $t \in ]0, T[$ , i.e. le contrôle frontière est admissible,
- (C<sub>3</sub>)  $|u_b(t)| < M$  sur  $t \in [0, T]$ , i.e. le contrôle frontière est admissible et non saturant.

En introduisant le Hamiltonien :

$$H(x, p, u, \eta) = \langle p, X(x) + uY(x) \rangle + \eta(t)C(x),$$

où  $p$  est le vecteur adjoint et  $\eta$  le multiplicateur de Lagrange de la contrainte, Maurer a établi, sous les hypothèses  $C_1$  et  $C_2$ , les conditions nécessaires d'optimalité suivantes :

1. Il existe une fonction  $t \mapsto \eta(t)$  positive et des constantes  $\eta_0 \geq 0$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^n$  tels que le vecteur adjoint vérifie :

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -p \left( \frac{\partial X}{\partial x} + u \frac{\partial Y}{\partial x} \right) - \eta(t) \frac{\partial C}{\partial x} \quad (\text{p.p}),$$

$$p(T) = \eta_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(T)) + \sigma \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x(T)).$$

2. La fonction  $t \mapsto \eta(t)$  est continue à l'intérieur d'un arc frontière et vérifie :

$$\eta(t)C(x(t)) = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

3. Lors d'un contact ou d'une jonction au temps  $t_i$  avec la frontière on a :

$$\begin{aligned} H(t_i^+) &= H(t_i^-), \\ p(t_i^+) &= p(t_i^-) - \nu_i \frac{\partial C}{\partial x}(x(t_i)), \quad \nu_i \geq 0. \end{aligned}$$

4. Le contrôle optimal  $u(t)$  minimise presque partout le Hamiltonien :

$$H(x(t), p(t), u(t), \eta(t)) = \min_{v \in [-M, M]} H(x(t), p(t), v, \eta(t)).$$

Dans cette thèse, nous établissons les conditions nécessaires d'optimalité, dans le cas où le temps final  $T$  est libre, et plus particulièrement pour un problème de temps minimal.

Dans le principe du minimum de Pontriaguine, les indéterminées sont le vecteur adjoint et le temps calculés avec les conditions limites sur l'état. Dans le cas contraint, il y a des indéterminées supplémentaires  $(\eta, \nu_i)$ . La contribution essentielle de Maurer [33] sert à les calculer analytiquement en utilisant le concept d'ordre. Nous présentons ces calculs sous forme de formules de nature géométrique en utilisant les crochets de Lie itérés de  $X, Y$  agissant sur les contraintes. Cette présentation facilite le calcul formel de  $u_b$  (contrôle frontière), de  $\eta$  et de  $\nu_i$ , surtout pour une contrainte d'ordre plus élevé. On complète la théorie du contrôle optimal avec contraintes sur l'état par des techniques géométriques analysant le comportement des extrémales au voisinage de la contrainte et testant l'optimalité de l'arc frontière.

Nous appliquons les résultats de cette théorie à l'étude du problème du contrôle optimal de rentrée atmosphérique.

## 0.5 Méthodes numériques

L'application du principe du minimum avec ou sans contraintes sur l'état ramène le problème du contrôle optimal à un problème aux valeurs limites du type suivant : on cherche à déterminer

- le vecteur d'état et le vecteur adjoint :  $x(t) = (q(t), p(t)) \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [t_1, t_f]$  avec  $t_1, t_f$  fixés,
- les  $s$  points de commutation  $t_1 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_s < \xi_{s+1} = t_f$ ,

qui vérifient :

- le système Hamiltonien :

$$\dot{x}(t) = f_k(t, x(t)), \quad \forall t \in [\xi_k, \xi_{k+1}], \quad \forall 0 \leq k \leq s,$$

où les  $f_k$  représentent les différents types de contrôle solutions du principe du minimum,

- les conditions de saut :

$$x(\xi_k^+) = h_k(\xi_k, x(\xi_k^-)), \quad \forall k = 1, \dots, s,$$

- les conditions limites et les conditions de transversalité :

$$R_i(x(t_1), x(t_f)) = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n_1,$$

- les conditions de commutation :

$$R_i(\xi_{k_i}, x(\xi_{k_i}^-)) = 0, \quad \forall n_1 + 1 \leq i \leq n + s.$$

L'algorithme de tir multiple s'avère parmi les algorithmes les plus efficaces et fiables pour la résolution numérique de ce type de problème. Stoer et Bulirsch, dans [47], ont utilisé l'algorithme de tir multiple (généralisation de l'algorithme de tir simple) pour traiter le cas d'un problème aux valeurs limites, sans points de commutation. Par ailleurs Oberle et Grimm, dans [37, 38], ont développé l'algorithme de tir multiple dans un code nommé BNDSO implémenté en FORTRAN pour la résolution d'un problème avec des points de commutation.

Dans la partie numérique de cette thèse, nous implémentons entièrement ce code en MATLAB, en résolvant les différents problèmes rencontrés (convergence, stabilité, singularité, ...). À priori le nombre  $s$  de commutations doit être fixé ; on le détermine par l'analyse géométrique de la théorie du contrôle optimal. On améliore la stabilité de l'algorithme de tir multiple en augmentant le nombre de noeuds. C'est là en effet que réside le principe de l'algorithme, par opposition à l'algorithme de tir simple où les erreurs par rapport à la condition initiale évoluent exponentiellement en fonction de  $t_f - t_1$ , voir [47].

Pour le transfert orbital (pour une poussée faible) ou pour la rentrée atmosphérique, l'algorithme de tir multiple ne permet pas une convergence rapide, surtout s'il n'est pas tourné avec une estimation initiale assez proche de la vraie solution. Nous utilisons un couplage entre l'algorithme de tir simple et la méthode de continuation sur la borne maximale du contrôle, voir [13, 14], pour la résolution numérique du transfert orbital. En précisant que pour les poussées faibles (inférieurs à  $3N$ ) nous utilisons un intégrateur à pas multiples de type de Prédiction-Correction d'Adams d'ordre 4 au lieu de l'intégrateur à un pas de type de Runge-Kutta d'ordre 4, voir [47]. Ce choix est justifié par l'existence de la singularité présentée par une inversion de poussée au périégée de l'ellipse osculatrice, qui empêche notre algorithme de réaliser la convergence.

Pour la validation numérique de rentrée atmosphérique, avec ses différents modèles extraits, nous utilisons simultanément l'algorithme de tir multiple, la méthode de continuation sur la borne maximale du contrôle et la méthode de continuation sur la borne maximale de la contrainte sur l'état. Dans le premier chapitre de cette thèse, nous expliquons les différents algorithmes numériques utilisés.

## 0.6 Plan

Cet exposé comporte trois parties.

Le premier chapitre est consacré à l'étude du transfert orbital, à la description de



l'algorithme de tir multiple et à l'explication de la méthode de continuation. Nous commençons par une modélisation du problème pour le mettre sous la forme d'un système de contrôle optimal. L'objectif est d'appliquer les techniques géométriques à l'analyse du système. La contrôlabilité peut être obtenue en calculant les crochets de Lie. Nous analysons le problème de transfert en temps minimal, qui reste ouvert, puis nous utilisons le principe du minimum pour paramétrer les trajectoires optimales. Nous présentons une brève analyse des extrémales, en mettant en particulier l'accent sur l'analyse d'une singularité du problème observée expérimentalement. La validation numérique est fondée sur la méthode de tir multiple et la méthode de continuation. Nous expliquons ces techniques numériques qui seront le principal outil numérique pour résoudre un problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état comme la rentrée atmosphérique pour la navette spatiale.

L'objectif du deuxième chapitre est, pour des systèmes avec contraintes sur l'état, d'établir des conditions nécessaires d'optimalité, applicables aux problèmes de rentrée atmosphérique. Les conditions d'optimalité sont obtenues via des principes du minimum, la contrainte sur l'état pouvant être pénalisée de plusieurs façons dans le Hamiltonien. Nous avons choisi de faire une présentation heuristique de ces conditions, pour obtenir des conditions simples et applicables à notre situation. Le premier résultat présenté concerne les travaux de Weierstrass. Nous établissons ensuite la théorie de Kuhn-Tucker dont la version en dimension infinie permet d'obtenir les conditions nécessaires recherchées qui forment le principe du minimum de Maurer. Enfin nous calculons les multiplicateurs associés à la contrainte, ce calcul étant lié à l'action de l'algèbre de Lie (engendré par les champs de vecteurs) agissant sur la fonction de la contrainte.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons au problème du contrôle optimal d'une navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique, où le contrôle est l'angle de gîte ou sa dérivée, et où le coût est le flux thermique total (facteur d'usure de la navette). L'objectif est de déterminer une trajectoire optimale jusqu'à une cible donnée, sachant que la navette est de plus soumise à des contraintes sur l'état. La structure de ce chapitre est la suivante : dans une première partie nous présentons une modélisation du problème de rentrée atmosphérique, nous posons les deux problèmes de contrôle optimal selon le choix du contrôle (angle de gîte ou dérivée de l'angle de gîte) et nous suggérons une approximation polynomiale pour les coefficients de traînée et de portance  $C_D$  et  $C_L$ . Dans une deuxième partie nous résolvons géométriquement et numériquement le problème simplifié en dimension trois (comme modèle mono-entrée), en traitant ses deux modèles associés suivant le choix du contrôle. Enfin dans une troisième partie nous traitons le modèle complet de la navette.

## Chapitre 1

# Transfert orbital et méthode de tir multiple

## 1.1 Introduction

Un problème important en mécanique spatiale est de transférer un engin soumis à l'attraction terrestre sur une ellipse Keplerienne. Ce type de problème classique a été réactualisé avec la technologie des moteurs à poussée faible et continue. L'objectif de ce chapitre est d'appliquer les techniques géométriques à l'analyse du système. Le système libre évoluant dans le domaine elliptique du problème de Kepler, toutes les trajectoires sont périodiques, la contrôlabilité du système peut être caractérisée en calculant les crochets de Lie. Nous analysons le problème de transfert en temps minimal, qui reste ouvert. Nous utilisons le principe du minimum pour paramétrer les trajectoires optimales. Nous présentons une brève analyse des extrémales, en mettant en particulier l'accent sur l'analyse d'une singularité du problème observée expérimentalement : pour le problème avec poussée faible, le transfert sur une orbite géostationnaire présente une inversion de poussée à un passage au périégée de l'ellipse osculatrice. La validation numérique est fondée sur la méthode de tir multiple et la méthode de continuation. Nous expliquons ces techniques numériques qui seront le principal outil numérique pour résoudre un problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état comme la rentrée atmosphérique pour la navette spatiale.

## 1.2 Modélisation du problème

### 1.2.1 Problème physique

On considère un satellite en orbite autour de la terre, que l'on souhaite amener vers une deuxième orbite. La position sur l'orbite finale est libre. Alors que l'orbite initiale est très excentrique, l'orbite terminale est circulaire (géostationnaire). La propulsion (la poussée) considérée est de type électrique (electro-ionique), et donc à poussée beaucoup plus faible que dans le cas des moteurs chimiques. L'intérêt de cette nouvelle génération de moteurs ioniques tient dans leur faible consommation qui permet de réaliser un gain de masse, et donc d'accroître la charge utile. L'inconvénient est l'augmentation du temps de transfert (jusqu'à plusieurs mois), qui pose des problèmes de suivi. Le coût à minimiser est le temps de transfert, c'est le critère de temps minimal, d'autres fonctions de coût étant toutefois envisageables. En particulier, la maximisation de la masse, c'est-à-dire la minimisation de la consommation, est l'une d'elles.

### 1.2.2 Modélisation contrôle optimal

**Dynamique.** Le mouvement de l'engin spatial est gouverné par les lois de la dynamique spatiale que l'on écrit sous la forme :

$$\ddot{q} = -\mu \frac{q}{r^3} + \frac{u}{m}, \quad (1.1)$$

où  $q = (q_1, q_2, q_3)$  désigne le vecteur position du satellite en dimension trois dans un référentiel  $IJK$  dont l'origine est le centre de la terre, où  $r$  est la norme euclidienne de  $q$ , où  $u = (u_1, u_2, u_3)$  est la force de propulsion i.e. la poussée (le contrôle), où  $m$  est la masse du satellite, et où  $\mu$  est le paramètre d'attraction de la planète.

Le système libre  $u = 0$  correspond aux équations de Kepler. En pratique la poussée est limitée  $|u| \leq u_{\max}$  et on peut changer son orientation. La propulsion se fait par éjection de matière, à vitesse  $v_e$  et il faut rajouter au système l'équation :

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{|u|}{v_e}. \quad (1.2)$$

**Systèmes de coordonnées cartésiennes.** De façon évidente, on peut réécrire (1.1) sous forme d'une équation différentielle ordinaire :

$$\dot{x} = f_0(x) + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 u_i f_i(x), \quad (1.3)$$

avec l'état  $x = (q, \dot{q})$ ,  $\dot{q} = (v_1, v_2, v_3)$  vitesse de l'engin, et les champs de vecteurs s'écrivent :

$$f_0 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ -\mu \frac{q_1}{r^3} \\ -\mu \frac{q_2}{r^3} \\ -\mu \frac{q_3}{r^3} \end{bmatrix};$$

$$f_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad f_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

L'état peut comprendre aussi la masse dont la variation est l'équation (1.2).

En dépit de la simplicité des équations dans ce système, les coordonnées cartésiennes ne constituent pas le bon choix de coordonnées pour faciliter le traitement du problème. Dans notre cas, qu'il s'agisse de mettre en évidence les propriétés géométriques des trajectoires optimales ou surtout de procéder à leur approximation numérique, les bonnes variables correspondent aux intégrales premières du mouvement libre Keplerien ( $u = 0$ ). Plus précisément, cela revient à remplacer les coordonnées cartésiennes par les éléments orbitaux décrivant la forme de l'ellipse osculatrice, voir [50].

### 1.2.3 Paramètres orbitaux

Les coordonnées cartésiennes sont mesurées dans un référentiel  $IJK$  où  $IJ$  est le plan équatorial. Un point matériel sur une orbite Keplerienne est repérable par ses six paramètres orbitaux :

- l'ellipse orientée coupe le plan équatorial en deux points opposés qui forment la ligne

des noeuds et l'angle  $\Omega$  désigne la longitude du noeud ascendant.

- $w$  est l'argument du périégée, angle entre l'axe du noeud ascendant et l'axe du périégée.
- $i$  est l'inclinaison de l'orbite par rapport au plan équatorial.
- $a$  est le demi-grand axe de l'ellipse et  $e$  son excentricité.
- $f$  est l'anomalie vraie, angle entre le point sur l'orbite par rapport à son périégée.

Néanmoins, les coordonnées précédentes représentent des singularités dans le cas d'orbites circulaires ou situées dans le plan équatorial. On leur substitue les nouvelles variables d'états dites équinoxiales évitant ces singularités. Elles sont données par  $(a, e_1, e_2, h_1, h_2, l)$ , où :

- $(e_1, e_2)$  est le vecteur excentricité,  $e_1 = e \cos(\Omega + w)$ ,  $e_2 = e \sin(\Omega + w)$ , situé dans le plan de l'orbite et orienté suivant le périégée de l'ellipse ;
- $(h_1, h_2)$  est le vecteur rotation du plan de l'orbite par rapport au plan équatorial,  $h_1 = \tan(\frac{i}{2}) \cos(\Omega)$ ,  $h_2 = \tan(\frac{i}{2}) \sin(\Omega)$ , situé dans le plan équatorial et colinéaire à l'intersection de celui-ci avec le plan de l'orbite ;
- $l$  est la longitude vraie, l'angle entre  $I$  et  $q$ , que l'on écrit  $l = \Omega + w + f$  qui renseigne la position du satellite sur l'orbite et explique le fait que l'on peut amener  $I$  sur  $q$  avec trois rotations successives.

Pour les orbites équatoriales, on sait que l'inclinaison est nulle, ce qui implique que  $h_1 = h_2 = 0$ .

#### 1.2.4 Décomposition de la poussée

Notons  $F_i$  les champs de vecteurs  $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}$   $i = 1, 2, 3$ , identifiés respectivement à  $IJK$ . La force de propulsion s'écrit :

$$F = \sum_{i=1}^3 u_i F_i,$$

où  $u_i$  désigne les composantes cartésiennes du contrôle. La force peut être décomposée dans un repère mobile fixé à l'engin spatial. On utilise les repères suivants :

- le repère radial/orthoradial  $(F_r, F_{or}, F_c)$ ,
- le repère tangentiel/normal  $(F_t, F_n, F_c)$ .

Selon que le premier vecteur est orienté le long de la position pour le premier repère et le long de la vitesse pour le deuxième repère. Les deux premiers vecteurs dans chaque repère forment le plan osculateur et le troisième est normal à ce plan et donc colinéaire au vecteur moment cinétique :  $c = q \wedge \dot{q}$ , les trièdres étant orthonormés directs. Le système s'écrit :

$$m\ddot{q} = K(q) + \sum_{i=1}^3 u_i F_i(q).$$

En particulier en notant  $v = (u_t, u_n, u_c)$ , la décomposition de  $u$  dans le repère tangential/normal, on a  $u = R(x)v$  où  $R(x)$  est un élément de  $SO(3)$ , groupe des matrices orthogonales directes et représente la matrice de passage du repère cartésien au repère mobile.

### 1.2.5 Représentation du système dans les coordonnées équinoxiales

Pour comprendre l'action de la poussée sur les caractéristiques géométriques des orbites elliptiques, la meilleure représentation est d'utiliser les coordonnées équinoxiales. Suivant la décomposition de la poussée, cette représentation est donnée par les deux systèmes suivants, voir [13, 21, 50] :

- Système 1 : suivant le repère tangential/normal :

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \frac{B}{A} u_t; \\
 \frac{de_1}{dt} &= \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A}{D} \left( \frac{2(e_1 + \cos(l))D}{B} \right) u_t \\
 &\quad - \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A}{D} \left( \frac{2e_1 e_2 \cos(l) - \sin(l)(e_1^2 - e_2^2) + 2e_2 + \sin(l)}{B} \right) u_n \\
 &\quad - \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A}{D} e_2 (h_1 \sin(l) - h_2 \cos(l)) u_c; \\
 \frac{de_2}{dt} &= \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A}{D} \left( \frac{2(e_1 + \sin(l))D}{B} \right) u_t \\
 &\quad + \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A}{D} \left( \frac{2e_1 e_2 \sin(l) + \cos(l)(e_1^2 - e_2^2) + 2e_1 + \cos(l)}{B} \right) u_n \\
 &\quad + \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A}{D} e_1 (h_1 \sin(l) - h_2 \cos(l)) u_c; \\
 \frac{dh_1}{dt} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A}{D} (1 + h_1^2 + h_2^2) \cos(l) u_c; \\
 \frac{dh_2}{dt} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A}{D} (1 + h_1^2 + h_2^2) \sin(l) u_c; \\
 \frac{dl}{dt} &= \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{D^2}{A^3} + \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A}{D} (h_1 \sin(l) - h_2 \cos(l)) u_c;
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

avec

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{1 - e_1^2 - e_2^2}; \\
 B &= \sqrt{1 + 2e_1 \cos(l) + 2e_2 \sin(l) + e_1^2 + e_2^2}; \\
 D &= 1 + e_1 \cos(l) + e_2 \sin(l);
 \end{aligned}$$

et où  $(e_1, e_2)$  et  $(h_1, h_2)$  représentent respectivement les coordonnées cartésiennes dans le plan équatorial  $(I, J)$  des vecteurs  $e$  et  $h$ . D'autres paramètres géométriques importants

sont la distance de l'apogée et du périégée données par les relations :

$$r_a = a(1 + |e|), \quad r_p = a(1 - |e|).$$

- Système 2 : suivant le repère radial/orthoradial :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{1}{m} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \frac{2P}{W} u_{or}; \\ \frac{de_1}{dt} &= \frac{1}{m} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \left[ \sin(l) u_r + \left( \cos(l) + \frac{e_1 + \cos(l)}{W} \right) u_{or} - \frac{Ze_2}{W} u_c \right]; \\ \frac{de_2}{dt} &= \frac{1}{m} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \left[ -\cos(l) u_r + \left( \sin(l) + \frac{e_2 + \sin(l)}{W} \right) u_{or} + \frac{Ze_1}{W} u_c \right]; \\ \frac{dh_1}{dt} &= \frac{1}{m} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \frac{Z}{W} \frac{1 + h_1^2 + h_2^2}{2} \cos(l) u_c; \\ \frac{dh_2}{dt} &= \frac{1}{m} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \frac{Z}{W} \frac{1 + h_1^2 + h_2^2}{2} \sin(l) u_c; \\ \frac{dl}{dt} &= \sqrt{\frac{\mu}{P}} \frac{W^2}{P} + \frac{1}{m} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \frac{Z}{W} u_c; \end{aligned} \tag{1.5}$$

avec

$$\begin{aligned} W &= 1 + e_1 \cos(l) + e_2 \sin(l); \\ Z &= h_1 \sin(l) - h_2 \cos(l). \end{aligned}$$

La relation entre  $a$  et  $P$  est

$$a = \frac{P}{\sqrt{1 - |e|^2}}.$$

Pour la mise en poste sur une orbite géostationnaire, il faut imposer à l'instant final :

$$|e| = 0, \quad |h| = 0$$

Si on considère que la masse est variable, il faut ajouter l'équation supplémentaire :

$$\dot{m} = -\delta|u|.$$

Pour étudier le problème plan, il suffit dans les équations précédentes d'identifier le plan du mouvement au plan équatorial  $(I, J)$ , d'imposer  $h = 0$  et d'orienter la poussée dans ce plan ce qui revient à poser  $u_c = 0$ . Enfin un reparamétrage standard est de paramétrer les trajectoires par la longitude  $l$  au lieu de  $t$ , l'effet de la poussée sur un tour de l'orbite étant mesuré simplement en intégrant les équations de 0 à  $2\pi$ .

### 1.2.6 Coordonnées en rotation

Pour le problème de rendez-vous, le système peut être représenté dans le repère en rotation du problème circulaire restreint. L'effet de cette transformation est de fixer le point terminal. Le référentiel est en rotation autour de l'axe  $K$  et la nouvelle position notée  $Q$  vérifie :

$$q(t) = (\exp \Omega t K) Q(t),$$

où  $K$  est la matrice antisymétrique  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , et  $\Omega$  est la vitesse de rotation de la terre. Les équations écrites avec le formalisme de Lagrange sont corrigées par une force de Coriolis et d'entraînement.

## 1.3 Intégrale première de Laplace et intégration des équations de Kepler

**Proposition 1.3.1** *Considérons l'équation de Kepler  $\ddot{q} = -\mu \frac{q}{r^3}$ , les quantités suivantes sont conservées au cours du mouvement :*

1.  $c = q \wedge \dot{q}$  (moment cinétique) ;
2.  $L = -\mu \frac{q}{r} + \dot{q} \wedge c$  (intégrale de Laplace) ;
3.  $H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{\mu}{r}$  (énergie).

**Preuve.** La conservation de l'énergie est standard et il en est de même pour le moment cinétique. La conservation du vecteur de Laplace résulte du degré d'homogénéité du potentiel. En effet, soit  $q(t)$  une courbe différentiable de  $\mathbb{R}^3$  et  $r(t)$  sa longueur. Puisque  $r^2 = q \cdot q$  (produit scalaire), on a  $r \cdot \dot{r} = q \cdot \dot{q}$  et si  $q \neq 0$  on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{q}{r} \right) = \frac{r \dot{q} - \dot{r} q}{r^2} = \frac{(q \cdot q) \dot{q} - (q \cdot \dot{q}) q}{r^3}.$$

Avec la relation  $(a \wedge b) \wedge c = (a \cdot c) b - (b \cdot c) a$ , il vient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{q}{r} \right) = \frac{(q \wedge \dot{q}) \wedge q}{r^3}.$$

D'où :

$$-\mu \frac{d}{dt} \left( \frac{q}{r} \right) = -\mu \frac{(q \wedge \dot{q}) \wedge q}{r^3} = -\mu \frac{c \wedge q}{r^3},$$

et avec  $\ddot{q} = -\mu \frac{q}{r^3}$ , il vient :

$$\mu \frac{d}{dt} \left( \frac{q}{r} \right) = \ddot{q} \wedge c.$$

En intégrant avec  $c$  constant, on obtient :

$$\mu \left( e + \frac{q}{r} \right) = \dot{q} \wedge c,$$

où  $e$  est un vecteur constant. On pose alors  $L = \mu e$ , ce qui implique la conservation de  $L$ .



**Lemme 1.3.1** *On a les relations suivantes entre les intégrales premières*

1.  $L.c = 0$  et si  $c \neq 0$ ,  $L$  est contenu dans le plan du mouvement,
2.  $L^2 = \mu^2 + 2Hc^2$ .

**Preuve.** Puisque  $q.c = 0$ , on en déduit  $L.c = 0$ , d'où 1). Prouvons 2).

$$L = -\mu \frac{q}{r} + \dot{q} \wedge c.$$

Donc

$$L.L = \mu^2 \frac{q.q}{r^2} + (\dot{q} \wedge c).(\dot{q} \wedge c) - 2\mu \frac{q}{r}.(\dot{q} \wedge c).$$

Or  $|\dot{q} \wedge c| = |\dot{q}||c|\sin(\theta)$  où  $\theta$  est l'angle entre  $\dot{q}$  et  $c$ , donc :

$$(\dot{q} \wedge c)^2 = \dot{q}^2 c^2,$$

car  $\dot{q}$  et  $c$  sont orthogonaux. Soit :

$$L.L = \mu^2 + \dot{q}^2 c^2 - 2\mu \frac{q}{r}.(\dot{q} \wedge c).$$

En utilisant la relation du produit mixte,  $q.(\dot{q} \wedge c) = (q \wedge \dot{q}).c = c^2$ , il vient :

$$\begin{aligned} L.L &= \mu^2 + c^2 \left( \dot{q}^2 - 2\frac{\mu}{r} \right) \\ &= \mu^2 + 2c^2 H, \end{aligned}$$

car  $H = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{\mu}{r}$ , d'où le résultat.

**Proposition 1.3.2** *Si  $c = 0$ ,  $q$  et  $\dot{q}$  restent alignés sur une droite et il y a collision. Si  $c \neq 0$ , on a :*

1. si  $L = 0$ , le mouvement est circulaire uniforme,
2. si  $L \neq 0$  et  $H < 0$ , la trajectoire est une ellipse donnée par :

$$r = \frac{c^2}{\mu + \|L\| \cos(\theta - \theta_0)},$$

où  $\theta_0$  est l'angle du périhélie.

3.  $\dot{q} = \frac{c}{c^2} \wedge \left( L + \mu \frac{q}{r} \right)$ .

**Preuve.** Avec  $L = \mu e$  la relation de Laplace s'écrit :

$$\mu \left( e + \frac{q}{r} \right) = \dot{q} \wedge c.$$

En faisant le produit scalaire avec  $q$ , il vient :

$$\mu(e.q + r) = (\dot{q} \wedge c).q = (q \wedge \dot{q}).c = c.c.$$

On a donc deux cas :

- si  $e = 0$ , alors  $r = \frac{c^2}{\mu}$  et le mouvement est circulaire, donc circulaire uniforme d'après la loi des aires.
- si  $e \neq 0$ , on a  $e.q = |e|r \cos(f)$  où  $f$  est l'angle entre  $e$  et  $q$ , soit :

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + |e| \cos(f)}.$$

On a donc prouvé 1) et 2) et  $|e|$  est l'excentricité de l'ellipse.  
On a également

$$\left(L + \mu \frac{q}{r}\right) = \dot{q} \wedge c.$$

En faisant le produit vectoriel avec  $c$ , il vient :

$$c \wedge \left(L + \mu \frac{q}{r}\right) = c \wedge (\dot{q} \wedge c) = (c.c).\dot{q} - (\dot{q}.c).c = c^2 \dot{q},$$

car  $\dot{q}$  et  $c$  sont orthogonaux.  
Ce qui implique 3).

**Notations :** On introduit les notations suivantes :

- $\Pi$  : projection  $(q, \dot{q}) \mapsto (c, L)$ ,
  - $\Sigma_e = \{(q, \dot{q}); \quad H < 0, \quad c \neq 0\}$ ,
  - $D = \{(c, L); \quad c.L = 0, \quad c \neq 0, \quad |L| < \mu\}$ .
- Le résultat suivant résulte de nos calculs :

**Proposition 1.3.3** *On a*

1.  $\Sigma_e$  est l'union des orbites elliptiques,
2.  $\Pi(\Sigma_e) = D$  et  $\Sigma_e = \Pi^{-1}(D)$ ,
3. la fibre  $\Pi^{-1}(c, L)$  consiste une unique orbite orientée.

**Définition 1.3.1**  $\Sigma_e$  s'appelle le domaine elliptique.

## 1.4 Le problème de contrôlabilité

### 1.4.1 Préliminaires

Le système s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\dot{x} = f_0(x) + \epsilon \sum_{i=1}^3 u_i f_i(x) ,$$

où  $x = (q, \dot{q})$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $f_0 = \dot{q} \frac{\partial}{\partial q} - \mu \frac{q}{r^3} \frac{\partial}{\partial \dot{q}}$ ,  $f_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . L'ensemble des contrôles admissibles est l'ensemble  $\mathcal{U}$  des applications constantes par morceaux à valeurs dans

$\mathcal{U} = \{\sum_{i=1}^n u_i^2 \leq 1\}$ . On restreint l'état au domaine elliptique :  $x \in \Sigma_e$ . Le repère tangentiel/normal est le repère le mieux adapté pour décomposer la poussée pour au moins trois raisons. La première est d'ordre technologique car en pratique il y a des restrictions sur l'angle de la poussée par rapport à  $F_t$  :  $u \in C_1(\alpha)$  ou  $u \in C_1(\alpha) \cup -C_1(\alpha)$  où  $C_1(\alpha)$  est le cône d'angle  $\alpha$  et d'axe  $F_t$ . La seconde raison est d'ordre géométrique : la variation de la direction du contrôle au cours d'une orbite doit être mesurée par rapport au vecteur vitesse. Enfin, un effet important et bien étudié en mécanique spatiale est l'effet du frottement  $F_D$  de l'atmosphère sur les orbites. Cette force est opposée à la vitesse (relative) de l'engin et son module est donné par  $\frac{1}{2}\rho v^2 s C_D$  où  $\rho$  représente la densité atmosphérique.

### 1.4.2 Contrôlabilité des systèmes avec des contrôles constants par morceaux

Dans cette section, nous utilisons les résultats de [4, 5]. On désigne par  $M$  une variété lisse de  $C^\infty$  de dimension  $n$ , connexe et à base dénombrable. On note  $TM$  le fibré tangent et  $T^*M$  le fibré cotangent. On désigne par  $V(M)$  l'ensemble des champs de vecteurs lisses sur  $M$  et  $\text{diff}(M)$  l'ensemble des difféomorphismes lisses.

**Définition 1.4.1** Soient  $X, Y \in V(M)$  et  $f$  une fonction lisse sur  $M$ . La dérivée de Lie de  $f$  suivant  $X$  est définie par  $L_X f = df(X)$ . Le crochet de Lie est calculé selon la convention :

$$[X, Y](q) = \frac{\partial Y}{\partial q}(q)X(q) - \frac{\partial X}{\partial q}(q)Y(q).$$

**Définition 1.4.2** Soit  $X \in V(M)$ . On note  $q(t, q_0)$  la solution maximale de  $\dot{q}(t) = X(q(t))$  telle que  $q(0) = q_0$ . On note  $\exp tX$  le groupe local à un paramètre associé à  $X$ . On a ainsi  $q(t, q_0) = (\exp(tX))(q_0)$ . Le champ de vecteurs  $X$  est dit périodique si le flot qu'il définit est périodique au sens usuel, c'est à dire s'il existe  $T > 0$  tel que :

$$\exp(t + T)X = \exp(tX).$$

**Définition 1.4.3** Un polysystème  $D$  est une famille  $\{X_i, i \in I\}$  de champs de vecteurs. On note aussi  $D$  la distribution associée à  $D$ , c'est à dire  $q \mapsto \text{vect}\{X_i(q), i \in I\}$ . La distribution est dite involutive si  $[X_i, X_j] \in D, \forall X_i, X_j \in D$ .

**Définition 1.4.4** Soit  $D$  un polysystème. On note  $D_{A.L}$  l'algèbre de Lie engendrée par  $D$ . C'est une distribution involutive calculée récursivement de la façon suivante :

$$D_1 = \text{vect}\{D\}, \quad D_2 = \text{vect}\{D_1 + [D_1, D_1]\}, \quad \dots, \quad D_k = \text{vect}\{D_{k-1} + [D_{k-1}, D_{k-1}]\},$$

et

$$D_{A.L} = \cup_{k \geq 1} D_k.$$

**Définition 1.4.5** Un système sur  $M$  est défini en coordonnées locales par une équation de la forme :

$$\dot{q}(t) = f(q(t), u(t)), \quad q(t) \in M, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m,$$

où  $f$  est lisse et  $u \in \mathcal{U}$ , l'ensemble des applications constantes par morceaux à valeurs dans le domaine de contrôles  $U$ . Pour  $u \in \mathcal{U}$ , on note  $q(t, q_0, u)$  la solution maximale associée partant d'une condition initiale en  $t = 0$  égale à  $q_0$ . Soit  $q_0 \in M$  fixé, on note  $A^+(q_0, T) = \cup_{u \in \mathcal{U}} q(t, q_0, u)$  l'ensemble des points accessibles en un temps  $T > 0$  et  $A^+(q_0) = \cup_{T > 0} A^+(q_0, T)$  l'ensemble des points accessibles. Le système est dit contrôlable en un temps  $T$  si  $A^+(q_0, T) = M$  pour tout  $q_0 \in M$  et contrôlable si  $A^+(q_0) = M$  pour tout  $q_0 \in M$ .

**Définition 1.4.6** On dit qu'un polysystème  $D$  satisfait la condition du rang si  $D_{A.L}(q_0) = T_{q_0}M, \forall q_0$ .

**Définition 1.4.7** Soit  $X \in V(M)$ . Un point  $q_0 \in M$  est dite Poisson stable si  $\forall T > 0$  et  $V \in \mathcal{V}(q_0)$ , il existe  $t_1, t_2 \geq 0$  tel que  $\exp(t_1 X)(q_0)$  et  $\exp(-t_2 X)(q_0)$  appartiennent à  $V$ . Le champ de vecteur  $X$  est dit Poisson stable si l'ensemble des points Poisson stables est dense dans  $M$ .

**Théorème 1.4.1 (Lobry [31])** Soit  $D$  un polysystème sur  $M$  associé à un système sur  $M$  et vérifiant la condition du rang. On suppose de plus que chaque champ de vecteurs de  $D$  est Poisson stable. Alors le système est contrôlable.

### 1.4.3 La structure de l'algèbre de Lie du système et résultats de contrôlabilité

En coordonnées cartésiennes et en décomposant la poussée suivant le repère tangentiel/normal, les champs de vecteurs de dérive et de commande s'écrivent pour tout  $x = (q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^6$  :

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \dot{q} \frac{\partial}{\partial q} - \mu \frac{q}{\|q\|^3} \frac{\partial}{\partial \dot{q}}, \\ F_t(x) &= \frac{\dot{q}}{\|\dot{q}\|} \frac{\partial}{\partial \dot{q}}, \\ F_c(x) &= \frac{q \wedge \dot{q}}{\|q \wedge \dot{q}\|} \frac{\partial}{\partial \dot{q}}, \\ F_n(x) &= F_c(x) \wedge F_t(x) = \frac{(q \wedge \dot{q}) \wedge \dot{q}}{\|q \wedge \dot{q}\| \|\dot{q}\|} \frac{\partial}{\partial \dot{q}}. \end{aligned}$$

**Proposition 1.4.1** Soit  $x = (q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^6$  tel que  $q \wedge \dot{q} \neq 0$ , alors  $\text{Lie}_x\{F_0, F_t, F_c, F_n\} = \mathbb{R}^6$ . De plus on a :

$$\text{Lie}_x\{F_0, F_t, F_c, F_n\}(x) = \text{vect}\{F_0(x), F_t(x), F_c(x), F_n(x), [F_0, F_c](x), [F_0, F_n](x)\}.$$

**Preuve.** Un calcul des crochets de Lie donne :

$$\begin{aligned} [F_0, F_c](x) &= \frac{q \wedge \dot{q}}{\|q \wedge \dot{q}\|} \frac{\partial}{\partial q}, \\ [F_0, F_n](x) &= -\frac{(q \wedge \dot{q}) \wedge \dot{q}}{\|q \wedge \dot{q}\| \|\dot{q}\|} \frac{\partial}{\partial q} + \mu \frac{\|q \wedge \dot{q}\|}{\|q\|^3 \|\dot{q}\|^3} \dot{q} \frac{\partial}{\partial \dot{q}}. \end{aligned}$$

On en déduit alors que pour tout  $x \in \mathbb{R}^6$  tel que  $q \wedge \dot{q} \neq 0$ , les vecteurs  $F_0(x)$ ,  $F_t(x)$ ,  $F_c(x)$ ,  $F_n(x)$ ,  $[F_0, F_c](x)$ ,  $[F_0, F_n](x)$  sont indépendants.

Afin de définir les politiques de commande géométrique, il est important de décrire les algèbres de Lie engendrées par  $\{F_0, F_t\}$ ,  $\{F_0, F_n\}$  et  $\{F_0, F_c\}$ . On a les résultats suivants :

**Proposition 1.4.2** *Pour tout  $x = (q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^6$  tel que  $q \wedge \dot{q} \neq 0$ , on a :*

1. *la dimension de  $\text{Lie}_x\{F_0, F_t\}$  est quatre,*
2. *la dimension de  $\text{Lie}_x\{F_0, F_n\}$  est trois,*
3. *la dimension de  $\text{Lie}_x\{F_0, F_c\}$  est quatre si  $L(0) \neq 0$ , est trois si  $L(0) = 0$ .*

**Preuve.** Il suffit de calculer les crochets de Lie successifs :

1. Pour tout  $x = (q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^6$ , on a :

$$\begin{aligned} [F_0, F_t](x) &= \frac{1}{\|\dot{q}\|} F_0(x) + \frac{\mu(q \cdot \dot{q})}{\|q\|^3 \|\dot{q}\|} F_t(x) - 2\mu \frac{(q \wedge \dot{q}) \wedge \dot{q}}{\|q\|^3 \|\dot{q}\|^3} \frac{\partial}{\partial \dot{q}}; \\ [F_0, [F_0, F_t]](x) &= -2\mu \frac{(q \wedge \dot{q}) \wedge \dot{q}}{\|q\|^3 \|\dot{q}\|^3} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} + a_1 F_0(x) + a_2 F_t(x) + a_3 [F_0, F_t](x); \\ [F_t, [F_0, F_t]](x) &= -\frac{1}{\|\dot{q}\|^2} F_0(x) + \frac{\mu(q \cdot \dot{q})}{\|q\|^3 \|\dot{q}\|^3} F_t(x) + \frac{1}{\|\dot{q}\|} [F_0, F_t](x); \\ [F_0, [F_0, [F_0, F_t]]](x) &= 0 \text{ mod } \text{vect}\{F_0, F_t, [F_0, F_t], [F_0, [F_0, F_t]]\}; \\ [F_t, [F_0, [F_0, F_t]]](x) &= 0 \text{ mod } \text{vect}\{F_0, F_t, [F_0, F_t], [F_0, [F_0, F_t]]\}; \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\mu(q \cdot \dot{q})}{\|q\|^3 \|\dot{q}\|^3} - \frac{3(q \cdot \dot{q})}{\|q\|^2 \|\dot{q}\|}; \\ a_2 &= -\frac{\mu}{\|q\|^3} + \mu^2 \frac{(q \cdot \dot{q})^2 - \|q \wedge \dot{q}\|^2}{\|q\|^6 \|\dot{q}\|^4}; \\ a_3 &= -\frac{\mu(q \cdot \dot{q})}{\|q\|^3 \|\dot{q}\|^2} + \frac{3(q \cdot \dot{q})}{\|q\|^2}; \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. Pour tout  $x = (q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^6$ , on a :

$$\begin{aligned} [F_0, F_n](x) &= -\frac{(q \wedge \dot{q}) \wedge \dot{q}}{\|q \wedge \dot{q}\| \|\dot{q}\|} \frac{\partial}{\partial q} + \mu \frac{\|q \wedge \dot{q}\|}{\|q\|^3 \|\dot{q}\|^3} \dot{q} \frac{\partial}{\partial \dot{q}}; \\ [F_0, [F_0, F_n]](x) &= c_1 F_0(x) + c_2 F_n(x); \\ [F_n, [F_0, F_n]](x) &= \frac{1}{\|\dot{q}\|^2} F_0(x) - 2\mu \frac{\|q \wedge \dot{q}\|}{\|q\|^3 \|\dot{q}\|^3} F_n(x); \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} c_1 &= 2 \frac{\|q \wedge \dot{q}\|}{\|q\|^3 \|\dot{q}\|^3}; \\ c_2 &= -3\mu^2 \frac{\|q \wedge \dot{q}\|^2}{\|q\|^6 \|\dot{q}\|^4} - \mu \frac{3(q \cdot \dot{q})^2 - 2\|q\|^2 \|\dot{q}\|^2}{\|q\|^5 \|\dot{q}\|^2}; \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. Pour tout  $x = (q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^6$ , on a :

$$\begin{aligned} [F_0, F_c](x) &= \frac{q \wedge \dot{q}}{\|q \wedge \dot{q}\|} \frac{\partial}{\partial \dot{q}}; \\ [F_0, [F_0, F_c]](x) &= -\frac{\mu}{\|q\|^3} F_c(x); \\ [F_c, [F_0, F_c]](x) &= \|\dot{q}\|^2 F_0 + \frac{(q \cdot \dot{q})(q \wedge \dot{q}) \wedge \dot{q}}{\|q \wedge \dot{q}\|^2 \|\dot{q}\|^2} \frac{\partial}{\partial q} \\ &\quad + \left( \frac{\mu q}{\|q\|^3 \|\dot{q}\|^2} + \frac{(q \wedge \dot{q}) \wedge \dot{q}}{\|q \wedge \dot{q}\|^2} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}}; \\ [F_0, [F_c, [F_0, F_c]]](x) &= 0; \\ [F_c, [F_c, [F_0, F_c]]](x) &= -\frac{\|q\|^2}{\|q \wedge \dot{q}\|^2} [F_0, F_c](x) - \frac{(q \cdot \dot{q})}{\|q \wedge \dot{q}\|^2} F_c(x); \end{aligned}$$

d'où le résultat.

**Corollaire 1.4.1** *Pour le système avec une seule direction de poussée les orbites sont les suivantes :*

- direction  $F_t$  : l'orbite est le plan osculateur,
- direction  $F_n$  : l'orbite de dimension trois est l'intersection du plan osculateur avec  $a = a(0)$ ,
- direction  $F_c$  : l'orbite est de dimension quatre si  $L(0) \neq 0$ , est trois si  $L(0) = 0$  et est donnée par  $a = a(0)$ ,  $e_1^2 + e_2^2 = e_1^2(0) + e_2^2(0)$ .

**Proposition 1.4.3** *Pour le système restreint au domaine elliptique, chaque point de l'orbite est accessible.*

**Preuve.** Dans le domaine elliptique, chaque trajectoire du système libre est périodique et le champ est donc Poisson stable. Le système restreint à une orbite est donc contrôlable, d'après le théorème 1.4.1.

**Corollaire 1.4.2** *Pour le système restreint au domaine elliptique, le problème de contrôle optimal possède une solution.*

**Preuve.** Il suffit de remarquer que les trajectoires reste dans un compact fixe, que l'ensemble  $U$  des contrôles est convexe et que  $Q(x, m) = [F_0 + u_t F_t + u_n F_n + u_c F_c](x, m, U)$  est convexe. Enfin l'existence provient du théorème du Filippov [15].

## 1.5 Principe du minimum et conditions de transversalité

On présente la formulation générale du principe du minimum détaillé dans [30, 39], auquel on peut toujours se ramener. On considère donc un système lisse

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n,$$

où  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$ , les variétés initiales et finales sont notées  $M_0$  et  $M_1$ . L'ensemble des contrôles admissibles  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des applications mesurables bornées  $u : [0, T] \rightarrow U$  où  $U$  est un domaine de  $\mathbb{R}^m$ . Pour un contrôle  $u(t)$  de réponse  $x(t)$  sur  $[0, T]$ , on assigne un coût :

$$C(u) = \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt,$$

où  $f^0$  est une fonction lisse. On introduit l'état augmenté

$$\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x^0(t) \end{pmatrix}, \quad \text{où } x^0(0) = 0,$$

et la trajectoire du système augmenté vérifie  $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, u)$  défini par les équations :

$$\dot{x} = f(x, u), \quad \dot{x}^0 = f^0(x, u).$$

Soit  $\tilde{p} = (p, p^0) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) - \{0\}$  le vecteur adjoint associé à  $\tilde{x}$  et  $\tilde{H}$  le Hamiltonien :

$$\tilde{H} = \langle \tilde{p}, \tilde{f}(\tilde{x}, u) \rangle.$$

On a alors le résultat suivant :

**Théorème 1.5.1** *Considérons le système  $\dot{x} = f(x, u)$  avec pour ensemble des contrôles admissibles l'ensemble  $\mathcal{U}$ . Si  $u^*$  est un contrôle optimal sur  $[0, T^*]$  transférant le système de  $M_0$  à  $M_1$  avec une réponse augmentée  $\tilde{x}^*(t) = (x^*(t), x^{0*})$ , alors il existe  $\tilde{p}^*(t) = (p^*(t), p^{0*}) \neq 0$ , absolument continu tel que les équations suivantes sont vérifiées pour le triplet  $(\tilde{x}^*, \tilde{p}^*, u^*)$  :*

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}^* &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}}(\tilde{x}^*, \tilde{p}^*, u^*) && p.p, \\ \dot{\tilde{p}}^* &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}^*, \tilde{p}^*, u^*) && p.p, \\ \tilde{H}(\tilde{x}^*(t), \tilde{p}^*(t), u^*(t)) &= \min_{u \in \mathcal{U}} \tilde{H}(\tilde{x}^*(t), \tilde{p}^*(t), u(t)) && p.p. \end{aligned}$$

De plus :

$$\tilde{H}(\tilde{x}^*(t), \tilde{p}^*(t), u^*(t)) = 0 \quad p.p \quad \text{et } p^{0*} \geq 0,$$

et les conditions de transversalité suivantes sont vérifiées :

$$p^*(0) \perp T_{x^*(0)}M_0, \quad p^*(T^*) \perp T_{x^*(T^*)}M_1,$$

où  $T_qM$  désigne l'espace tangent.

**Corollaire 1.5.1 (temps minimal)** *Considérons le système de  $\mathbb{R}^n$  :  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $u \in \mathcal{U}$  et le problème de transfert du système de  $M_0$  en  $M_1$ , en temps minimal. Alors si  $u^*$  est*

optimal sur  $[0, T^*]$  de réponse  $x^*$ , il existe un vecteur adjoint  $p^*$  absolument continu tel que si  $H(x, p, u) = \langle p, f(x, u) \rangle$ , alors les équations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \dot{x}^* &= \frac{\partial H}{\partial p}(x^*, p^*, u^*), & \dot{p}^* &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*, p^*, u^*) & p \cdot p, \\ H(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) &= \min_{u \in U} H(x^*(t), p^*(t), u(t)) & p \cdot p. \end{aligned}$$

De plus  $\min_{u \in U} H(x^*(t), p^*(t), u(t))$  est constant négatif et les conditions de transversalité suivantes sont vérifiées :

$$p^*(0) \perp T_{x^*(0)}M_0, \quad p^*(T^*) \perp T_{x^*(T^*)}M_1.$$

**Définition 1.5.1** Une trajectoire  $(\tilde{x}(t), \tilde{p}(t), u(t))$  solution des équations du principe du minimum est dite extrémale.

## 1.6 Principe du minimum et problème Sous-Riemannien avec dérive

**Définition 1.6.1** On appelle problème SR avec dérive le problème de temps minimal pour des systèmes de la forme :

$$\frac{d}{dt}x(t) = F_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t)F_i(x(t)),$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  et le contrôle  $u = (u_1, \dots, u_m)$  vérifie la contrainte  $\sum_{i=1}^m u_i^2 \leq 1$ .

### 1.6.1 Calcul des extrémales

Introduisons les relèvements Hamiltoniens dits des fonctions de commutation :

$$P_i = \langle p, F_i(x) \rangle, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

et notons  $\Sigma$  la surface dite de commutation définie par :

$$\langle p, F_1(x) \rangle = \dots = \langle p, F_m(x) \rangle = 0.$$

Le Hamiltonien du système est  $H = P_0 + \sum_{i=1}^m u_i P_i$  et la condition de minimisation de  $H$  donne en dehors de la surface de commutation  $\Sigma$  la relation :

$$u_i = -\frac{P_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^m P_i^2}}, \quad i = 1, \dots, m.$$

En reportant  $u_i$  dans  $H$ , on obtient le Hamiltonien  $\hat{H} = P_0 - (\sum_{i=1}^m P_i^2)^{\frac{1}{2}}$ . Les extrémales correspondantes sont dites d'ordre 0. D'après le principe du minimum, les trajectoires optimales sont contenues dans  $\hat{H} \leq 0$  et celles contenues dans  $\hat{H} = 0$  sont dites anormales.



**Proposition 1.6.1** *Les extrémales d'ordre 0 sont lisses, le contrôle extrémal est sur le bord du domaine de commande et elles correspondent à une singularité de l'application extrémité  $u \mapsto x(t, x_0, u)$ , pour la topologie  $L^\infty$ , avec  $u \in S^{m-1}$  la sphère unité.*

**Preuve.** Le résultat est clair : pour les extrémales d'ordre 0, le minimum de  $H$  sur l'ensemble  $\sum_{i=1}^m u_i^2 \leq 1$  est atteint sur le bord  $\sum_{i=1}^m u_i^2 = 1$ . Elles doivent donc en particulier correspondre à une singularité de l'application extrémité pour les variations  $\delta u$  de  $u$  dans  $L^\infty$ , telles que  $u \cdot \delta u = 0$  car on se restreint à des contrôles  $u \in S^{m-1}$ .

### 1.6.2 Extrémales brisées et extrémales singulières

Pour construire toutes les extrémales du système, il faut analyser le comportement des extrémales d'ordre 0, au voisinage de la surface de commutation. En particulier on peut concaténer deux arcs d'ordre 0 en un point de  $\Sigma$  à condition de respecter les conditions de Weierstrass-Erdmann :

$$p(t_1^+) = p(t_1^-), \quad H(t_1^+) = H(t_1^-),$$

où  $t_1$  est le temps à la traversée.

Ces conditions résultent du principe du minimum, mais la condition de conservation du Hamiltonien n'est pas nécessaire par des variations du contrôle de référence dans  $L^\infty$ .

Les extrémales singulières sont contenues dans la surface  $\Sigma$  et vérifie les relations :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad P_i = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Soit  $z(t) = (x(t), p(t))$ . Les courbes  $t \mapsto P_i(z(t))$ ,  $i = 1, \dots, m$  sont absolument continues et en dérivant, il vient :

$$\dot{P}_i = [P_i, P_0] + \sum_{j \neq i} [P_j, P_i], \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.6)$$

On note  $D$  la distribution  $\{F_1(x), \dots, F_m(x)\}$ . On obtient le résultat suivant :

**Proposition 1.6.2** *On peut raccorder toute extrémale d'ordre 0 convergeant vers un point  $z_0 = (x_0, \star)$  de  $\Sigma$  avec toute extrémale d'ordre 0 issue de  $z_0$  pour former une extrémale, et le Hamiltonien vaut  $P_0$  au point de jonction. Si  $[D, D](x_0) \subset D(x_0)$ , le vecteur  $(P_1, \dots, P_m)$  reste  $C^1$  au point de jonction.*

**Preuve.** La première condition est claire car le raccordement est  $C^0$ . De plus :

$$H = P_0 + \sum_{i=1}^m u_i P_i = P_0, \quad \text{puisque } P_i = 0.$$

En un point de  $\Sigma$ ,  $p \in D^\perp$  et si  $[D, D](x_0) \subset D(x_0)$ , la relation (1.6) implique  $\dot{P}_i = [P_i, P_0]$ ,  $i = 1, \dots, m$  et  $P_i$  reste  $C^1$ .

## 1.7 Algorithme de tir multiple et méthode de continuation

### 1.7.1 Motivation

L'objectif de ce chapitre est double : on explique le tir multiple premièrement comme modèle général pour le tir simple, afin de résoudre un problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état. Deuxièmement, on souhaite justifier le procédé de continuation sur la contrainte d'état et aussi sur le contrôle pour résoudre d'une part le problème de transfert orbital, pour différents choix de la poussée, d'autre part la rentrée atmosphérique avec l'angle de gîte ou sa dérivée comme contrôle.

### 1.7.2 Description de l'algorithme de tir multiple

On considère le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min \Phi(q(t_f)), & t_1, t_f \text{ sont fixés} \\ \dot{q} = f(q, u), & t \in [t_1, t_f] \\ q(t_1) = q^0, \psi(q(t_f)) = 0 \\ \|u(t)\| \leq M, & M > 0 \\ C(q(t)) \leq 0, \end{cases}$$

où le contrôle  $u : [t_1, t_f] \mapsto \mathbb{R}^m$  est continu par morceaux, et où les fonctions suivantes :  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ ,  $\Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ,  $\psi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$ ,  $C : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  sont lisses.

Dans ce qui suit, on cherche à résoudre le problème précédent, non pas sous sa forme initiale, mais après application du principe du minimum avec contraintes sur l'état (voir chapitre suivant) développé par Maurer [33]. Introduisons le Hamiltonien :

$$H(q, p, u, \eta) = \langle p, f(q, u) \rangle + \eta(t)C(q),$$

où  $p$  est le vecteur adjoint et  $\eta$  le multiplicateur de Lagrange de la contrainte. Alors les conditions nécessaires de [33] sont les suivantes :

1. Il existe une fonction  $t \mapsto \eta(t)$  positive et des constantes  $\eta_0 \geq 0$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^n$  tels que le vecteur adjoint vérifie :

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -p \frac{\partial f}{\partial q} - \eta(t) \frac{\partial C}{\partial q}; \\ p(t_f) &= \eta_0 \frac{\partial \Phi}{\partial q}(q(t_f)) + \sigma \frac{\partial \Psi}{\partial q}(q(t_f)). \end{aligned}$$

2. Lors d'un contact ou d'une jonction au temps  $t_i$  avec la frontière, la trajectoire optimale vérifie la condition du saut :

$$\begin{aligned} H(t_i^+) &= H(t_i^-); \\ p(t_i^+) &= p(t_i^-) - \nu_i \frac{\partial C}{\partial q}(q(t_i)), \quad \nu_i \geq 0. \end{aligned}$$

3. Le contrôle optimal  $u(t)$  minimise presque partout le Hamiltonien :

$$H(q(t), p(t), u(t), \eta(t)) = \min_{\|v\| \leq M} H(q(t), p(t), v, \eta(t)).$$

C'est pourquoi on s'intéresse à la résolution numérique d'un problème aux conditions limites et points de commutation (*SBVP*), défini comme suit :

le problème est de déterminer :

- le vecteur d'état et le vecteur adjoint :  $x(t) = (q(t), p(t)) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall t \in [t_1, t_f]$  avec  $t_1, t_f$  fixés,
- les  $s$  points de commutation  $t_1 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_s < \xi_{s+1} = t_f$ .

Ces inconnus vérifient :

- le système Hamiltonien :

$$\dot{x}(t) = f_k(t, x(t)), \quad \forall t \in [\xi_k, \xi_{k+1}], \quad \forall 0 \leq k \leq s, \quad (1.7)$$

où les  $f_k$  représentent les différents types du contrôle solutions du principe du minimum,

- les conditions de saut :

$$x(\xi_k^+) = h_k(\xi_k, x(\xi_k^-)), \quad \forall k = 1, \dots, s, \quad (1.8)$$

- les conditions limites et les conditions de transversalité :

$$R_i(x(t_1), x(t_f)) = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n_1, \quad (1.9)$$

- les conditions de commutation :

$$R_i(\xi_{k_i}, x(\xi_{k_i}^-)) = 0, \quad \forall n_1 + 1 \leq i \leq n + s. \quad (1.10)$$

L'algorithme de tir simple, voir [47], peut résoudre le problème (*SBVP*), mais en intégrant le système Hamiltonien :  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$   $t \in [t_1, t_f]$ , avec la condition initiale  $x(t_1) = x_0$  (estimée), on rencontre souvent certaines difficultés concernant la sensibilité de la solution (notée  $x(t; x_0)$ ) par rapport à la condition initiale. Cette sensibilité devient importante si la longueur  $t_f - t_1$  est grande. En particulier pour les systèmes où la dynamique  $f$  est Lipschitzienne de rapport  $L$ , voir [47], la solution vérifie :

$$\|x(t; x_0^1) - x(t; x_0^2)\| \leq e^{L|t-t_1|} \|x_0^1 - x_0^2\|.$$

D'où la nécessité d'utiliser l'algorithme de tir multiple, voir [37, 38, 47], qui consiste à subdiviser  $[t_1, t_f]$ , en considérant les points fixes  $(t_i)_{i=1}^m$  appelés noeuds, qui vérifient :

$$t_1 < t_2 < \dots < t_m = t_f \quad \text{tels que} \quad t_k \neq \xi_i \quad k = 1, \dots, m \quad i = 1, \dots, s. \quad (1.11)$$

**Remarque 1.7.1** *L'application de tir multiple nécessite par ailleurs une bonne connaissance de la structure (les commutations) des trajectoires extrémales et donc une étude géométrique préliminaire assez poussée.*

La résolution du problème (*SBVP*) peut maintenant être réduite à la résolution d'une série d'équations différentielles avec une valeur initiale et d'un grand système d'équations non-linéaires résolu par une méthode itérative. On introduit en effet :

$z(t) = (x(t), \xi)^t$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s)^t$ ,  $z(t_j) = Z_j = (X_j, \xi)$ ,  $j = 1, \dots, m-1$ , et soit  $Z^0 = (X_1^{(0)}, \dots, X_{m-1}^{(0)}, \xi_1^{(0)}, \dots, \xi_s^{(0)})$  une estimation initiale de  $(x(t_1), \dots, x(t_{m-1}), \xi_1, \dots, \xi_s)$ .

Ensuite on explique l'algorithme de tir multiple en trois étapes :

**Étape 1 : Intégrateur Numérique.** Dans chaque sous intervalle  $[t_j, t_{j+1}]$ , on considère un problème avec condition initiale noté (*PI*) :

$$\dot{z}(t) = (f(t, x(t)), 0), \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \quad z(t_j) = Z_j.$$

Cette étape consiste à résoudre chaque problème (*PI*), en utilisant un intégrateur numérique convenable, par exemple soit un intégrateur à un pas de type Runge-Kutta d'ordre 4 (voir schéma 1), voir [47], pour la rentrée atmosphérique et pour le transfert orbital avec une poussée moyenne ou forte, soit (dans le cas où la solution a des singularités) un intégrateur à pas multiples fondé sur la méthode de Prédiction-Correction d'Adams d'ordre 4 (voir schéma 2), voir [47], pour le transfert orbital avec une poussée faible. On note  $z(t; t_j, Z_j) = (x(t, t_j, Z_j), \xi)^t$  la solution de (*PI*) sur  $[t_j, t_{j+1}]$ .

On va à présent expliquer les deux schémas de résolution d'un problème de type (*PI*) :  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $x(t_0) = \eta$ .

**Schéma 1 :**

La méthode de Runge-Kutta classique est celle donnée par le schéma :

$$h = \frac{t_1 - t_0}{N};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \eta; \\ x_{n+1} = x_n + hF(t_0 + nh, x_n; h); \\ \text{avec } F(t, x; h) = \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]; \\ \text{où } k_1 = f(t, x); \quad k_2 = f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_1); \\ k_3 = f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_2); \quad k_4 = f(t + h, x + hk_3). \end{array} \right.$$

**Schéma 2 :**

On utilise la méthode de Runge-Kutta dans l'intervalle  $[t_0, t_0 + 3h]$  pour démarrer la méthode de Prédiction-Correction d'Adams, ce qui donne les valeurs de  $x_0, x_1, x_2$  et  $x_3$ .

Le schéma de Prédiction-Correction d'Adams s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(t_0 + (n-3)h, x_{n-3}); \quad k_2 = f(t_0 + (n-2)h, x_{n-2}); \\ k_3 = f(t_0 + (n-1)h, x_{n-1}); \quad k_4 = f(t_0 + nh, x_n); \\ k_5 = 55k_4 - 59k_3 + 37k_2 - 9k_1; \\ x_{n+1;1} = x_n + k_5 \frac{h}{24}; \\ k_6 = f(t_0 + (n+1)h, x_{n+1;1}); \\ x_{n+1;2} = 9k_6 + 19k_4 - 5k_3 + k_2; \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24} x_{n+1;2}. \end{array} \right.$$

On signale qu'on utilise Dans ce schéma la méthode d'Adams-Basforth comme prédiction pour calculer  $x_{n+1;1}$ , et la méthode d'Adams-Moulton comme correction pour enfin calculer  $x_{n+1}$ .

**Remarque 1.7.2** *La stabilité, la consistance et la convergence des intégrateurs numériques utilisés restent un problème classique facile à justifier.*

**Étape 2 : Système d'équations non linéaires.** Cette étape consiste à transformer le problème (SBVP) à un système d'équations non linéaires de la forme  $F(Z) = 0$ . Soit alors :

$$\begin{aligned} F_j(Z_1, \dots, Z_{m-1}) &= z(t_{j+1}; t_j, Z_j) - Z_{j+1} \in \mathbb{R}^{n+s}, \quad \forall 1 \leq j \leq m-2, \\ F_{m-1}(Z_1, \dots, Z_{m-1}) &= [R(Z_1, Z_{m-1}), S(Z_1, \dots, Z_{m-1})]^t \in \mathbb{R}^{n+s}, \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} R(Z_1, Z_{m-1}) &= [R_i(x_1, x(t_m; t_{m-1}, Z_{m-1}))]_{i=1, \dots, n_1} \in \mathbb{R}^{n_1}, \\ S(Z_1, \dots, Z_{m-1}) &= [R_i(\xi_{k_i}, x(\xi_{k_i}^-, t_{s_i}, Z_{s_i}))]_{i=n_1+1, \dots, n+s} \in \mathbb{R}^{n+s-n_1}, \end{aligned}$$

avec :  $t_{s_i} < \xi_{k_i} < t_{s_i} + 1$ . Si on définit  $Z$  et  $F$  par :

$$Z = (Z_1, \dots, Z_{m-1}), \quad F(Z_1, \dots, Z_{m-1}) = (F_1, \dots, F_{m-1})^t \in \mathbb{R}^{(m-1)(n+s)}.$$

Alors la trajectoire  $x(t)$  et les  $s$  points de commutations sont solutions du problème (SBVP) si et seulement si le vecteur  $Z = (Z_1, \dots, Z_{m-1})$  est un zéro de la fonction  $F : \mathbb{R}^{(m-1)(n+s)} \mapsto \mathbb{R}^{(m-1)(n+s)}$ .

**Étape 3 : Méthode de Newton.** Cette étape sert à résoudre le système d'équations non linéaires  $F(Z) = 0$ . On utilise alors la méthode de Newton itérative de schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_0 \text{ donné} \\ Z_{n+1} = Z_n + J^{-1}F(Z_n) \\ \text{et un test d'arrêt convenable,} \end{array} \right.$$

avec :

$$J = \begin{pmatrix} G_1 & -I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_2 & -I & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & G_{m-2} & -I \\ A_1 & \dots & A_{m-3} & A_{m-2} & A_{m-1} \end{pmatrix};$$

$$G_j = \frac{\partial}{\partial Z_j} z(t_{j+1}; t_j, Z_j), \quad j = 1, \dots, m-2;$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial Z_1} R(Z_1, Z_{m-1}) \\ \frac{\partial}{\partial Z_1} S(Z_1, \dots, Z_{m-1}) \end{bmatrix};$$

$$A_{m-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial Z_{m-1}} R(Z_1, Z_{m-1}) \\ \frac{\partial}{\partial Z_{m-1}} S(Z_1, \dots, Z_{m-1}) \end{bmatrix};$$

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial Z_j} S(Z_1, \dots, Z_{m-1}) \end{bmatrix}, \quad \text{pour } j = 2, \dots, m-2.$$

On signale ici que :

- si nécessaire (pour améliorer la convergence) on peut utiliser la méthode de Newton Modifiée au lieu de la Méthode Newton classique,
- pour calculer les éléments  $G_j$  du jacobien  $J$ , on calcule  $\frac{z(t_{j+1}; t_j, Z_j + \Delta Z_j) - z(t_{j+1}; t_j, Z_j)}{\Delta Z_j}$ , en utilisant les intégrateurs numériques déjà mentionnés,
- pour inverser le jacobien, on utilise les codes QR ou LU à partir de la boîte d'outil de Matlab,
- pour le test d'arrêt, beaucoup de choix sont envisageables. En particulier  $\|Z_{n+1} - Z_n\| \leq \epsilon$ , est l'un d'eux,
- le choix des noeuds dépend de l'évolution des fonctions (état, vecteur adjoint, contrôle), c'est-à-dire là où la solution du problème présente un comportement oscillatoire, une zone d'évolution rapide, on discrétise finement en utilisant un nombre élevé de noeuds, et lorsqu'à l'inverse la solution est localement très lisse, on se contente d'un nombre réduit de noeuds,
- dans la description de l'algorithme de tir multiple, si on prend  $m = 2$ , on retrouve le tir simple.

**Remarque 1.7.3** *L'algorithme de tir multiple ne permet pas une convergence rapide, surtout s'il n'est pas tourné avec une estimation initiale assez proche de la vraie solution, d'où la nécessité d'un couplage de cet algorithme avec la méthode de continuation sur la contrainte d'état, ou sur le contrôle, ou avec les deux.*

### 1.7.3 Méthode de continuation sur la borne extrême de la contrainte sur l'état

**Principe.** On considère le problème générique paramétrique suivant, que l'on note  $(OCP)_\alpha$ , où  $\alpha$  est un paramètre scalaire :

$$\begin{cases} \min g(t_f, x(t_f)), \\ t_f \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{W}_n^{1,\infty}([0, t_f]), u \in L_m^\infty([0, t_f]), \\ \dot{x} = f(t, x, u), t \in [0, t_f], \\ x(0) = x^0, h(t_f, x(t_f)) = 0, \\ u(t) \in B_f(0_{\mathbb{R}^m}, \rho), t \in [0, T], x \in A_\alpha(t, u). \end{cases}$$

On suppose que les données du problème sont suffisamment analytiques, que  $h$  est une submersion de  $\mathbb{R} \times M^n$  sur  $\mathbb{R}^l$ , où  $M^n$  est une sous variété ouverte de  $\mathbb{R}^n$  sur laquelle la dynamique est définie. Le paramètre  $\alpha$  intervient dans la contrainte d'état  $x \in A_\alpha(t, u)$ , et si on suppose que le problème  $(OCP)_\alpha$  vérifie l'hypothèse :

(H.1) La contrainte d'état est définie par  $C(t, x, u) \leq \alpha$ , où  $C : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$  est une fonction lisse,

alors  $A_\alpha(t, u) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q } C(t, x, u) \leq \alpha\}$  est un compact pour tout  $\alpha$  appartenant à un compact de  $\mathbb{R}$ . Soit  $(t_f^*, x^*, u^*)$  est une solution du  $(OCP)$  sans la contrainte  $A_\alpha(t, u)$  et  $\alpha^* = \max\{C(t, x^*, u^*), t \in [0, t_f^*]\}$ .

**Remarque 1.7.4** La variable  $T$  est fixée. Son choix est tel que  $[0, T]$  contient tous les  $t_{f_\alpha}$  solutions des problèmes  $(OCP)_\alpha$  possibles.

Ainsi la contrainte  $x \in A_\alpha(t, u)$  est-elle d'autant plus forte si  $\alpha \ll \alpha^*$ , et le problème  $(OCP)_\alpha$  a priori d'autant plus délicat à résoudre numériquement que  $\alpha \ll \alpha^*$ . C'est pourquoi on fait appel à une démarche de type homotopique pour connecter les problèmes difficiles avec  $\alpha \ll \alpha^*$ , à des problèmes plus simples où  $\alpha$  est plus proche de  $\alpha^*$ . En pratique cela se traduit par l'utilisation d'une suite décroissante de valeurs  $(\alpha_k)_k$ , qui génère aussi une suite de solutions dont on espère qu'elles évoluent de façon suffisamment continue avec le paramètre  $\alpha$  (de sorte que si  $\alpha_k$  et  $\alpha_{k+1}$  sont proches, les solutions correspondantes le soient aussi), on parle alors de la continuation sur  $\alpha$ .

**Remarque 1.7.5** Le problème numérique pour  $\alpha \ll \alpha^*$ , est de chercher la bonne estimation initiale pour démarrer l'algorithme de tir multiple, et la continuation sur  $\alpha$  vient pour résoudre ce problème, en tirant de la solution de  $(OCP)_{\alpha_k}$  une estimation initiale pour résoudre  $(OCP)_{\alpha_{k+1}}$ .

**Définition 1.7.1** On note  $V$  la fonction valeur de  $(OCP)_\alpha$  qui au paramètre  $\alpha \leq \alpha^*$  associe la valeur optimale  $V(\alpha) \in \bar{\mathbb{R}}$  de  $(OCP)_\alpha$ .

Notre but étant la résolution des problèmes avec  $\alpha \ll \alpha^*$ , la propriété de la continuité à droite de  $V$  est bien équivalente à la convergence de la suite  $V(\alpha_k)_k$  vers  $V(\alpha)$  quand  $(\alpha_k)_k$  est une suite qui décroît vers  $\alpha$ . Le paragraphe suivant donne un ensemble de conditions suffisantes, dont on verra qu'elles sont vérifiées dans le cas de rentrée atmosphérique pour la navette spatiale, garantissant cette propriété.

**Continuité à droite de la fonction valeur.** On fait les hypothèses ci-dessous sur  $(OCP)_\alpha$  :

(H.2) Il existe  $\alpha^{**}$  tel que quel que soit  $\alpha \in [\alpha^{**}, \alpha^*]$ , le système  $(OCP)_\alpha$  est contrôlable, c'est-à-dire que l'ensemble des triplets  $(t_f, x, u)$  admissibles pour  $(OCP)_\alpha$  est non vide,

(H.3)  $Q(t, x) = f(t, x, B_f(0_{\mathbb{R}^m}, \rho))$  est une partie convexe de  $\mathbb{R}^n$ ,  
 $(t, x) \in [0, T] \times A_\alpha(t, u)$ ,  $\alpha \in [\alpha^{**}, \alpha^*]$ .

Aussi l'hypothèse (H.1) implique que l'état  $x$  est dans le compact  $A_{\alpha^*}$ .

**Proposition 1.7.1** *Sous les hypothèses (H.1), (H.2) et (H.3),  $V$  est finie et décroissante.*

**Preuve.** Les hypothèses précédentes permettent d'appliquer le théorème de Filippov [15] à tout  $(OCP)_\alpha$ , pour  $\alpha \in [\alpha^{**}, \alpha^*]$  :  $V(\alpha)$  est donc finie. Par ailleurs, si  $\alpha^{**} \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha^*$ , l'ensemble des triplets admissibles  $(t_f, x, u)$  pour  $(OCP)_{\alpha_1}$  est inclu dans celui de  $(OCP)_{\alpha_2}$ , de sorte que  $V(\alpha_1) \geq V(\alpha_2)$ .

Pour obtenir la continuité à droite de la fonction valeur, on fait l'hypothèse qu'il est possible d'inverser de façon lisse la dynamique :

(H.4) Il existe  $R$  et  $S$  différentiables,  $R(t, x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  et  $S(t, x) \in \mathbb{R}^m$ , telles que si  $y = f(t, x, u)$  alors  $u = R(t, x)y + S(t, x)$ .

On obtient alors :

**Proposition 1.7.2** *Sous les hypothèses (H.1), (H.2), (H.3) et (H.4), la fonction valeur  $V$  est continue à droite sur  $[\alpha^{**}, \alpha^*]$ , et si  $(\alpha_k)_k$  est une suite de  $[\alpha^{**}, \alpha^*]$ , décroissante de limite  $\alpha \in [\alpha^{**}, \alpha^*]$ , quitte à prendre une sous-suite, les suites ci-dessous convergent :*

$$\begin{aligned} t_{f_k} &\rightarrow t_f \text{ dans } [0, T], \\ x_k &\rightarrow x \text{ dans } (C_n^0([0, T]), \|\cdot\|_\infty), \\ u_k &\rightarrow u \text{ dans } (L_m^\infty([0, T]), \sigma(L^\infty, L^1)), \end{aligned}$$

où  $(t_{f_k}, x_k, u_k)$  est solution de  $(OCP)_{\alpha_k}$  ( $x_k$  et  $u_k$  étant prolongés à  $[0, T]$  respectivement par constance et continuité pour  $x_k$ , et par 0 pour  $u_k$ ), et où  $(t_f, x, u)$  est solution du problème limite  $(OCP)_\alpha$ .

La preuve utilise le lemme suivant :

**Lemme 1.7.1** *Il existe  $K \geq 0$  tel que*

$$\|\dot{x}_k\|_{\mathbb{R}^n} \leq K, \quad t \in [0, t_{f_k}], \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Preuve.**

Soit  $N_{\alpha_0} = \{(t, x, u) \in \mathbb{R} \times M^n \times \mathbb{R}^m; (t, x) \in [0, T] \times A_{\alpha_0}, u \in B_f(0_{\mathbb{R}^m}, \rho)\}$ .

L'ensemble  $A$  étant compact donc  $N_{\alpha_0}$  l'est aussi.

Puisque  $f$  est continue et la suite  $(N_{\alpha_k})_k$  est décroissante, il existe donc  $K \geq 0$  tel que



$f(N_{\alpha_k}) \subseteq f(N_{\alpha_0}) \subseteq B_f(0_{\mathbb{R}^n}, K)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Soit  $(t_{f_k}, x_k, u_k)$  solution de  $(OCP)_{\alpha_k}$ . Pour  $t \in [0, t_{f_k}]$  on a :

$$(t, x_k) \in [0, T] \times A_{\alpha_k}, u_k \in B_f(0_{\mathbb{R}^m}, \rho),$$

i.e.  $(t, x_k, u_k) \in N_{\alpha_k} \subseteq N_{\alpha_0}$ ,  $t \in [0, t_{f_k}]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  
d'où  $f(t, x_k, u_k) \in B_f(0_{\mathbb{R}^n}, K)$ ,  $t \in [0, t_{f_k}]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  
ce qui implique le lemme 1.7.1.

**Lemme 1.7.2** [13] *Si  $(y_k)_k$  est une suite bornée de  $L_n^\infty([0, T])$  telle que  $(y_k)_k$  converge vers  $y$  au sens des distributions,  $y$  appartient à  $L_n^\infty([0, T])$ , alors  $(y_k)_k$  converge  $\star$ -faiblement vers  $y$  dans  $L_n^\infty([0, T])$ .*

**Théorème 1.7.1** [41, 44] *Soient  $E$  un espace topologique et  $F$  un espace semi-métrique. Soit  $f_n$  une suite équicontinue d'applications de  $E$  dans  $F$ , et soit  $e_n$  une suite de points de  $E$ ; on suppose que les  $e_n$  convergent vers  $e$ , et que les  $f_n$  convergent simplement vers une limite  $f$ . Alors les  $f_n(e_n)$  convergent vers  $f(e)$  dans  $F$ .*

**Preuve de la proposition 1.7.2.** D'après le lemme 1.7.1 la famille  $(x_k)_k$ , prolongée à  $[0, T]$  par constance et continuité, est donc équicontinue. Or pour  $t \in [0, T]$ , la famille  $\{x_k(t), k \in \mathbb{N}\}$  est incluse dans le compact  $A_{\alpha_0}$ , donc elle est relativement compacte. Quitte à prendre une sous suite,  $(x_k)_k$  converge donc uniformément vers  $x$  dans  $C_n^0([0, T])$  en vertu du théorème d'Ascoli, voir [45]. De même, on peut supposer  $(t_{f_k})_k \subset [0, T]$  convergente, de limite  $t_f$  dans  $[0, T]$ . Pour tout  $k$ ,  $x_k(0) = x^0$ , donc  $x(0) = x^0$ . Comme on a également  $h(t_{f_k}, x_k(t_{f_k})) = 0$ , le théorème 1.7.1 et la continuité de  $h$  impliquent que  $h(t_f, x(t_f)) = 0$ . En plus, on a

$$C(x_k(t)) - \alpha_k \leq 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

En passant à la limite, on obtient en particulier :

$$C(x(t)) - \alpha \leq 0, \quad \forall t \in [0, t_f],$$

i.e.  $x \in A_\alpha$ ,  $\forall t \in [0, t_f]$ .

Par le théorème 8.6.i de [15], on a :

$$\dot{x} \in Q(t, x), \quad \forall t \in [0, t_f],$$

puisque pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\dot{x}_k \in Q(t, x_k), \quad \forall t \in [0, t_{f_k}].$$

On en déduit qu'il existe  $u \in L_m^\infty([0, t_f])$  (que l'on prolonge à  $[0, T]$  par 0) tel que  $\dot{x} = f(t, x, u)$ ,  $u \in B_f(0_{\mathbb{R}^m}, M)$ . Or d'après l'hypothèse (H.4) il existe  $R$  et  $S$  différentiables telles que,  $\chi_k$  dénotant l'indicatrice de  $[0, t_{f_k}]$ ,  $u_k = (R(t, x_k)\dot{x}_k + S(t, x_k))\chi_k$  et  $u = R(t, x)\dot{x} + S(t, x)$  sur  $[0, T]$ . On montre alors que  $u_k \rightarrow u$   $\star$ -faiblement dans  $L_m^\infty([0, T])$ . En effet, soit alors  $\varphi \in L_m^1([0, T])$  :

$C_n^0([0, T])$  s'injectant continûment dans  $\mathcal{D}'_n([0, T])$ ,  $x_k$  converge vers  $x$  dans  $\mathcal{D}'_n([0, T])$ , donc  $\dot{x}_k \rightarrow \dot{x} \in L_n^\infty([0, T])$  au sens des distributions. Les lemmes 1.7.1 et 1.7.2 impliquent alors

que  $\dot{x}_k \rightarrow \dot{x}$   $\star$ -faiblement dans  $L_n^\infty([0, T])$ , et  $(\dot{x}_k)_k$  est équicontinue.  $R$  étant continue,  $R^t(t, x_k)\varphi\chi_k$  converge vers  $R^t(t, x)\varphi$  dans  $L_n^1([0, T])$ . Donc

$$\langle \dot{x}_k, R^t(t, x_k)\varphi\chi_k \rangle_{L_n^\infty, L_n^1} \rightarrow \langle \dot{x}, R^t(t, x)\varphi \rangle_{L_n^\infty, L_n^1},$$

soit

$$\langle R(t, x_k)\dot{x}_k\chi_k, \varphi \rangle_{L_m^\infty, L_m^1} \rightarrow \langle R(t, x)\dot{x}, \varphi \rangle_{L_m^\infty, L_m^1}.$$

De plus, par continuité de  $S$ ,

$$(S(t, x_k)\chi_k|\varphi) \text{ converge vers } (S(t, x)|\varphi) \text{ dans } L_m^1[0, T],$$

donc

$$S(t, x_k)\chi_k \rightarrow S(t, x) \star\text{-faiblement},$$

d'où l'on en déduit que :

$$u_k \rightarrow u \star\text{-faiblement dans } L_m^\infty([0, T]).$$

D'après ce qui précède on conclut que  $(t_f, x, u)$  est admissible de  $(OCP)_\alpha$ .  $V$  étant décroissante,  $(V(\alpha_k))_k$  est croissante majorée par  $V(\alpha)$ , donc convergente vers  $v \leq V(\alpha)$ . Or  $g(t_{f_k}, x_k(t_{f_k})) \rightarrow g(t_f, x(t_f))$  par le théorème 1.7.1. On en déduit  $g(t_f, x(t_f)) = v \leq V(\alpha)$  puisque  $V(\alpha_k) = g(t_{f_k}, x_k(t_{f_k}))$ . Nécessairement,  $v = V(\alpha)$  car  $V(\alpha)$  est l'élément inférieur de  $V$  sur l'ensemble des admissibles, donc  $(t_f, x, u)$  est solution de  $(OCP)_\alpha$ . Ainsi  $V(\alpha_k) \rightarrow V(\alpha)$ , et  $V$  est continue à droite.

#### 1.7.4 Méthode de continuation sur la borne extrême du contrôle

D'une manière similaire à la section précédente, on peut justifier cette méthode, en citant le principe de la méthode et les résultats associés.

**Principe.** On considère le problème générique paramétrique suivant, que l'on note  $(OCP)_\rho$ , où  $\rho$  est un paramètre scalaire positif :

$$\begin{cases} \min g(t_f, x(t_f)), \\ t_f \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{W}_n^{1, \infty}([0, t_f]), u \in L_m^\infty([0, t_f]), \\ \dot{x} = f(t, x, u), t \in [0, t_f], \\ x(0) = x^0, h(t_f, x(t_f)) = 0, \\ (t, x) \in [0, T] \times A, u \in U_\rho(t, x). \end{cases}$$

Le paramètre  $\rho$  intervient dans la contrainte sur le contrôle selon

$$U_\rho(t, x) = U(t, x) \cap B_f(0, \rho),$$

où  $U(t, x)$  est un fermé dans  $\mathbb{R}^m$  quel que soit  $(t, x) \in \mathbb{R} \times M^n$ .

Ainsi la contrainte  $u \in U_\rho(t, x)$  est-elle d'autant plus forte si  $\rho$  est proche de 0, et le problème  $(OCP)_\rho$  a priori d'autant plus délicat à résoudre numériquement que  $\rho$  est petit. C'est pourquoi on fait appel à une démarche de type homotopique pour connecter les problèmes difficiles avec  $\rho$  petit à des problèmes plus simples où  $\rho$  est plus grand. En

pratique cela se traduit par l'utilisation d'une suite décroissante de valeurs  $(\rho_k)_k$ , qui génère aussi une suite de solutions dont on espère qu'elles évoluent de façon suffisamment continue avec le paramètre  $\rho$  (de sorte que si  $\rho_k$  et  $\rho_{k+1}$  sont proches, les solutions correspondantes le soient aussi), on parle alors de la continuation sur  $\rho$ . On fait les hypothèses ci-dessous sur  $(OCP)_\rho$  :

- (H'.1) quel que soit  $\rho > 0$ , le système  $(OCP)_\rho$  est contrôlable,
- (H'.2)  $A$  est compact,
- (H'.3)  $Q_\rho(t, x) = f(t, x, U_\rho(t, x))$  est une partie convexe de  $\mathbb{R}^n$ ,  
 $(t, x) \in [0, T] \times M^n$ ,  $\rho > 0$ .

**Proposition 1.7.3** *Sous les hypothèses (H'.1), (H'.2) et (H'.3),  $V$  est finie et décroissante.*

**Proposition 1.7.4** *Sous les hypothèses (H'.1), (H'.2), (H'.3) et (H.4), la fonction valeur  $V$  est continue à droite sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et si  $(\rho_k)_k$  est une suite décroissante de limite  $\rho > 0$ , quitte à prendre une sous suite, les suites ci-dessous convergent*

$$\begin{aligned} t_{f_k} &\rightarrow t_f \text{ dans } [0, T], \\ x_k &\rightarrow x \text{ dans } (C_n^0([0, T]), \|\cdot\|_\infty), \\ u_k &\rightarrow u \text{ dans } (L_m^\infty([0, T]), \sigma(L^\infty, L^1)), \end{aligned}$$

où  $(t_{f_k}, x_k, u_k)$  est solution de  $(OCP)_{\rho_k}$  ( $x_k$  et  $u_k$  étant prolongés à  $[0, T]$  respectivement par constance et continuité pour  $x_k$ , et par 0 pour  $u_k$ ), et où  $(t_f, x, u)$  est solution du problème limite  $(OCP)_\rho$ .

## 1.8 Application au problème de transfert orbital plan

On considère le problème de transfert orbital à masse variable dans le plan ( $h_1 = h_2 = 0$  et  $u_c = 0$ ) que l'on choisit de représenter dans les coordonnées équinoxiales  $(P, e_1, e_2, l)$  où  $P$  est le paramètre,  $(e_1, e_2)$  est le vecteur excentricité et  $l$  est la longitude. On choisit également de décomposer le contrôle dans le repère radial/orthoradial en normalisant la contrainte sur le contrôle à  $|u| \leq 1$ , ce qui conduit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \frac{u_{\max}}{m} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \frac{2P}{W} u_{or}, \\ \dot{e}_1 &= \frac{u_{\max}}{m} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \left[ \sin(l) u_r + \left( \cos(l) + \frac{e_1 + \cos(l)}{W} \right) u_{or} \right], \\ \dot{e}_2 &= \frac{u_{\max}}{m} \sqrt{\frac{P}{\mu}} \left[ -\cos(l) u_r + \left( \sin(l) + \frac{e_2 + \sin(l)}{W} \right) u_{or} \right], \\ \dot{l} &= \sqrt{\frac{\mu}{P}} \frac{W^2}{P}, \\ \dot{m} &= -\delta u_{\max} |u|, \end{aligned}$$

avec  $W = 1 + e_1 \cos(l) + e_2 \sin(l)$  et  $u_{\max}$  est la valeur maximale du module de la poussée. Le problème consiste donc, en respectant la contrainte  $\sqrt{u_r^2 + u_{or}^2} \leq 1$ , à minimiser le temps

de transfert  $t_f$  d'une orbite basse définie par  $P(0) = 11625km$ ,  $e_1(0) = 0.75$ ,  $e_2(0) = 0$ ,  $l(0) = \pi$  à une orbite géostationnaire définie par  $P(t_f) = 42165km$ ,  $e_1(t_f) = 0$ ,  $e_2(t_f) = 0$ , la longitude finale étant libre.

### 1.8.1 Principe du minimum

Pour des raisons numériques, il est important de normaliser le paramètre en posant  $\bar{P} = \frac{P}{P(t_f)}$ , les équations s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F_o(x) + \frac{\epsilon}{m}(u_r F_r(x) + u_{or} F_{or}(x)), \\ \dot{m} &= -\delta u_{\max}|u|,\end{aligned}$$

avec  $x = (\bar{P}, e_1, e_2, l)$ , les champs de vecteurs  $F_o$ ,  $F_r$  et  $F_{or}$  étant définis par

$$F_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \frac{W^2}{\bar{P}^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix}, \quad F_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\bar{P}} \sin(l) \\ -\sqrt{\bar{P}} \cos(l) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_{or} = \begin{bmatrix} 2 \frac{\bar{P}^{\frac{3}{2}}}{W} \\ \sqrt{\bar{P}} \left( \frac{e_1 + \cos(l)}{W} + \cos(l) \right) \\ \sqrt{\bar{P}} \left( \frac{e_2 + \sin(l)}{W} + \sin(l) \right) \\ 0 \end{bmatrix},$$

avec les constantes  $\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{P(t_f)^3}}$  et  $\epsilon = \sqrt{\frac{P(t_f)}{\mu}} u_{\max}$ .

Pour se ramener à un problème à temps final fixé, on fait de  $t_f$  une variable d'état constante en posant  $\dot{t}_f = 0$  et en se ramenant à  $[0, 1]$  par homothétie. Dans le plan à masse variable on résout donc le problème sous la forme :

$$\begin{cases} \min t_f(1), \\ (t_f, x) \in \mathcal{W}_5^{1,\infty}([0, 1]), u \in L_2^\infty([0, 1]), \\ \dot{x} = t_f \left( F_o(x) + \frac{\epsilon}{m(t)} (u_r F_r(x) + u_{or} F_{or}(x)) \right), t \in [0, 1], \\ \dot{m} = -\delta t_f u_{\max}|u|, t \in [0, 1], \\ \dot{t}_f = 0, t \in [0, 1], \\ x(0) = x^0, m(0) = m^0, h(x(1)) = 0, \\ |u| \leq 1. \end{cases} \quad (1.12)$$

Le Hamiltonien de ce système s'écrit alors :

$$H = t_f \left( \langle \lambda, F_o + \frac{\epsilon}{m} (u_r F_r + u_{or} F_{or}) \rangle - \lambda_m \delta u_{\max}|u| \right), \quad (1.13)$$

où  $(\lambda, \lambda_m) = (\lambda_{\bar{P}}, \lambda_{e_1}, \lambda_{e_2}, \lambda_l, \lambda_m)$  est le vecteur adjoint, le système adjoint étant donné par :

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{\lambda}_m = -\frac{\partial H}{\partial m}.$$

On obtient le résultat suivant

**Lemme 1.8.1** *Le long d'une trajectoire optimale on a :*

1. les contrôles extrémaux vérifient  $\sqrt{u_r^2 + u_{or}^2} = 1$ ,
2.  $u_r \langle \lambda, F_r \rangle + u_{or} \langle \lambda, F_{or} \rangle \leq 0$  et  $\lambda_m$  est décroissant et positif avec  $\lambda_m = 0$  à l'instant final,
3. si  $(\langle \lambda, F_r \rangle, \langle \lambda, F_{or} \rangle) \neq 0$ , un contrôle optimal est donné par :

$$u_r = -\frac{\langle \lambda, F_r \rangle}{\sqrt{\langle \lambda, F_r \rangle^2 + \langle \lambda, F_{or} \rangle^2}},$$

$$u_{or} = -\frac{\langle \lambda, F_{or} \rangle}{\sqrt{\langle \lambda, F_r \rangle^2 + \langle \lambda, F_{or} \rangle^2}}.$$

**Preuve.** 1. D'après la proposition 1.6.1, on a le résultat 1.

2. D'après le principe du minimum [39], les contrôles extrémaux minimisent le Hamiltonien. On en déduit que  $u_r \langle \lambda, F_r \rangle + u_{or} \langle \lambda, F_{or} \rangle \leq 0$ . De plus

$$\dot{\lambda}_m = -\frac{\partial H}{\partial m} = \frac{\epsilon}{m^2} t_f (u_r \langle \lambda, F_r \rangle + u_{or} \langle \lambda, F_{or} \rangle).$$

$\lambda_m$  est donc décroissant et la condition de transversalité à l'instant final impose  $\lambda_m(1) = 0$ . On en déduit que  $\lambda_m$  est toujours positif.

3. En reparamétrant le contrôle par  $u = (u_r, u_{or}) = (\cos(\beta), \sin(\beta))$ , il vient alors

$$H = t_f \left( \langle \lambda, F_o \rangle + \frac{\epsilon}{m} (\cos(\beta) \langle \lambda, F_r \rangle + \sin(\beta) \langle \lambda, F_{or} \rangle) - \lambda_m \delta u_{\max} \right),$$

et la minimisation de  $H$  implique donc  $\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0$  et  $\frac{\partial^2 H}{\partial \beta^2} \geq 0$ , ce qui donne le résultat 3.

Le résultat du lemme précédent permet d'oublier la variable adjoint  $\lambda_m$  et le système état/adjoint, défini sur  $[0, 1]$ , est donné par :

### 1. Vecteur d'état

$$\begin{aligned} \dot{P} &= t_f \left( 2 \frac{\epsilon}{m} \frac{\bar{P}^{\frac{3}{2}}}{W} u_{or} \right), \\ \dot{e}_1 &= t_f \left( \frac{\epsilon}{m} \sqrt{\bar{P}} \sin(l) u_r + \frac{\epsilon}{m} \sqrt{\bar{P}} \left( \cos(l) + \frac{(e_1 + \cos(l))}{W} \right) u_{or} \right), \\ \dot{e}_2 &= t_f \left( -\frac{\epsilon}{m} \sqrt{\bar{P}} \cos(l) u_r + \frac{\epsilon}{m} \sqrt{\bar{P}} \left( \sin(l) + \frac{(e_2 + \sin(l))}{W} \right) u_{or} \right), \\ \dot{l} &= t_f \left( \alpha \frac{W^2}{\bar{P}^{\frac{3}{2}}} \right), \\ \dot{m} &= -\delta t_f u_{\max}, \end{aligned}$$

### 2. Vecteur adjoint

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_{\bar{P}} &= \frac{3}{2} t_f \frac{\alpha W^2}{\bar{P}^{\frac{5}{2}}} \lambda_l - t_f u_r \left( \frac{1}{2} \frac{\epsilon \sin(l)}{m \sqrt{\bar{P}}} \lambda_{e_1} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon \cos(l)}{m \sqrt{\bar{P}}} \lambda_{e_2} \right) - 3 t_f u_{or} \frac{\epsilon \sqrt{\bar{P}}}{m W} \lambda_{\bar{P}} \\
&\quad - t_f u_{or} \left( \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{m \sqrt{\bar{P}}} \left( \cos(l) + \frac{e_1 + \cos(l)}{W} \right) \lambda_{e_1} + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{m \sqrt{\bar{P}}} \left( \sin(l) + \frac{e_2 + \sin(l)}{W} \right) \lambda_{e_2} \right), \\
\dot{\lambda}_{e_1} &= 2 t_f u_{or} \left( \frac{\epsilon \bar{P}^{\frac{3}{2}} \cos(l)}{m W^2} \right) \lambda_{\bar{P}} - t_f u_{or} \frac{\epsilon \sqrt{\bar{P}}}{m} \left( \frac{1}{W} - \frac{(e_1 + \cos(l)) \cos(l)}{W^2} \right) \lambda_{e_1} \\
&\quad + t_f u_{or} \frac{\epsilon \sqrt{\bar{P}} (e_2 + \sin(l)) \cos(l)}{m W^2} \lambda_{e_2} - 2 t_f \frac{\alpha W \cos(l)}{\bar{P}^{\frac{3}{2}}} \lambda_l, \\
\dot{\lambda}_{e_2} &= 2 t_f u_{or} \left( \frac{\epsilon \bar{P}^{\frac{3}{2}} \sin(l)}{m W^2} \right) \lambda_{\bar{P}} + t_f u_{or} \frac{\epsilon \sqrt{\bar{P}} (e_1 + \cos(l)) \sin(l)}{m W^2} \lambda_{e_1} \\
&\quad - t_f u_{or} \frac{\epsilon \sqrt{\bar{P}}}{m} \left( \frac{1}{W} - \frac{(e_2 + \sin(l)) \sin(l)}{W^2} \right) \lambda_{e_2} - 2 t_f \frac{\alpha W \sin(l)}{\bar{P}^{\frac{3}{2}}} \lambda_l, \\
\dot{\lambda}_l &= 2 t_f u_{or} \frac{\epsilon \bar{P}^{\frac{3}{2}}}{m W^2} (-\sin(l) e_1 + \cos(l) e_2) \lambda_{\bar{P}} - t_f u_r \frac{\epsilon}{m} \sqrt{\bar{P}} \cos(l) \lambda_{e_1} \\
&\quad - t_f u_{or} \frac{\epsilon}{m} \sqrt{\bar{P}} \left( -\sin(l) - \frac{\sin(l)}{W} - \frac{(e_1 + \cos(l)) (-\sin(l) e_1 + \cos(l) e_2)}{W^2} \right) \lambda_{e_1} \\
&\quad - t_f u_r \frac{\epsilon}{m} \sqrt{\bar{P}} \sin(l) \lambda_{e_2} \\
&\quad - t_f u_{or} \frac{\epsilon}{m} \sqrt{\bar{P}} \left( \cos(l) + \frac{\cos(l)}{W} - \frac{(e_2 + \sin(l)) (-\sin(l) e_1 + \cos(l) e_2)}{W^2} \right) \lambda_{e_2} \\
&\quad - 2 t_f \frac{\alpha W}{\bar{P}^{\frac{3}{2}}} (-\sin(l) e_1 + \cos(l) e_2) \lambda_l,
\end{aligned}$$

avec les conditions limites

$$\begin{aligned}
\bar{P}(0) &= \frac{11625}{42165}, & \bar{P}(1) &= 1, \\
e_1(0) &= 0.75, & e_1(1) &= 0, \\
e_2(0) &= 0, & e_2(1) &= 0, \\
l(0) &= \pi, & \lambda_l(1) &= 0, \\
m(0) &= 1500, & \frac{H}{t_f}(1) &= 1,
\end{aligned}$$

et le contrôle est donné par le lemme précédent.

### 1.8.2 Couplage : algorithme de tir/méthode de continuation

Les extrémales du système sont donc paramétrées par le vecteur adjoint initial  $\lambda^0 = (\lambda_{\bar{P}}^0, \lambda_{e_1}^0, \lambda_{e_2}^0, \lambda_l^0)$  et le temps de transfert  $t_f$ . L'algorithme de tir permet d'obtenir un vecteur adjoint initial et le temps de transfert pour lesquels la trajectoire extrémale vérifie les conditions limites. Plus précisément on prend  $m = 2$  dans la définition de l'algorithme de tir multiple donné à la section 1.7 et on prend la fonction de tir directement sous la forme :

$$F(Z) = \begin{bmatrix} \bar{P}(1) - 1 \\ e_1(1) \\ e_2(1) \\ \lambda_l(1) \\ \frac{H}{t_f}(1) - 1 \end{bmatrix},$$

où  $Z = (\lambda^0, t_f)$  et  $\frac{H}{t_f} = \langle \lambda, F_o + \frac{\epsilon}{m}(u_r F_r + u_{or} F_{or}) \rangle - \lambda_m \delta u_{\max}$ .

Puisque  $\lambda_m(1) = \lambda_l(1) = 0$ , l'algorithme de tir a pour but de chercher  $Z = (\lambda^0, t_f)$  qui vérifie  $F(Z) = 0$  où

$$F(Z) = \begin{bmatrix} \bar{P}(1) - 1 \\ e_1(1) \\ e_2(1) \\ \lambda_l(1) \\ \frac{\epsilon}{m} \sqrt{\langle \lambda, F_r \rangle^2 + \langle \lambda, F_{or} \rangle^2}(1) - 1 \end{bmatrix},$$

avec  $\epsilon = \sqrt{\frac{P(t_f)}{\mu}} u_{\max}$ .

L'algorithme de tir est fondé sur l'estimation initiale de la recherche itérative de  $(\lambda^0, t_f)$ . Par ailleurs, si cette estimation est mauvaise (pas assez proche de la vraie solution), l'algorithme de tir diverge, surtout pour les poussées faibles. Afin d'améliorer la qualité des résultats, on a mis en oeuvre la méthode de continuation sur le module maximal de la poussée  $u_{\max}$  : partant d'un problème à forte poussée (le temps de transfert était moins long, la résolution du problème est plus simple), on réinjecte le résultat comme initialisation du problème voisin, mais plus compliqué de poussée plus faible. Plus précisément, partant de  $u_{\max} = 60N$  et passant d'une poussée courante  $u_{\max}^c$  à une poussée suivante  $u_{\max}^+$ , on se sert de  $\lambda^{0,c}$  pour initialiser la recherche itérative de  $\lambda^{0,+}$ . En ce qui concerne le temps de transfert, on ne peut pas se contenter d'utiliser la valeur  $t_f^c$  du temps de transfert optimal déterminé à la poussée courante  $u_{\max}^c$  pour initialiser la résolution à la poussée suivante  $u_{\max}^+$ . En effet, en procédant de la sorte, on rencontre très rapidement des difficultés de convergence, dès les poussées moyennes de l'ordre  $u_{\max} = 3N$ . Ce phénomène est issu du fait qu'avec une poussée faible, la fonction de tir est en générale globalement non injective, c'est à dire à un certain moment d'une trajectoire optimale, on peut suivre d'autres solutions extrémales qui annulent aussi la fonction de tir  $F(Z)$ , mais ont un nombre plus grand de tours ( $t_f$  non optimal). Un modèle intéressant pour comprendre ce phénomène est le Tore plat, voir [8]. C'est pourquoi on fait appel au résultat suivant :  $t_f \cdot u_{\max}$  est approximativement constant, voir [13]. On est donc amené à prendre, pour initialiser  $t_f^+$ , la valeur  $t_f^c \frac{u_{\max}^c}{u_{\max}^+}$ , qui s'avère très proche de la solution, ce qui évite de suivre les mauvaises extrémales.

### 1.8.3 Résultats numériques pour le transfert plan à masse variable

Dans l'algorithme de tir, on utilise le solveur Runge-Kutta pour les poussées fortes et pour les poussées moyennes ( $\geq 3N$ ). Par contre pour les poussées faibles, on remplace le solveur Runge-Kutta par un solveur de type Adams. L'initialisation de la continuation est faite à partir du résultat pour  $60N$ , l'algorithme de tir converge sans difficulté vers la solution jusqu'à la poussée  $3N$ . Pour la suite de poussées, prendre  $|u_{\max}^+ - u_{\max}^c|$  très petit permet d'assurer la convergence et d'atteindre  $u_{\max} = 0,7N$ . Les temps de transferts

obtenus, les temps d'exécutions de l'algorithme de tir et  $\|F(Z)\|$  sont résumés dans le tableau 1.1.

**Tableau 1.1 :** La poussée est en Newtons, le temps de transfert  $t_f$  est en Heures, et le temps d'exécution en secondes.

$u_{\max}$	$t_f$	$\ F(Z)\ $	temps d'exécution
60	14,93392195110724	1,620392708900909e-011	1,12351e+2
3	278,0944311063967	7,197598961283802e-009	2,496e+3
2	419,0319483179136	7,502549975594089e-011	3,596e+3
1,4	596,9243770272856	1,316209077492636e-012	1,1833e+4
1	838,0054599530993	6,780439226847668e-011	1,9994e+4
0,7	1196,292472762813	1,765254609153999e-013	1,038211e+5

Enfin les allures des composantes de l'état, de l'état adjoint, l'ellipse, le contrôle et les fonctions de commutations ( $\phi = \langle \lambda, F_r \rangle^2 + \langle \lambda, F_{or} \rangle^2$ ) pour différentes valeurs de la poussées sont données dans les figures 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 et 1.6.

### Commentaire

Pour les poussées inférieurs à  $3N$ , on observe que certaines composantes ( $P, e_1, l, \lambda_P, \lambda_{e_1}$ ) oscillent, mais faiblement, alors que d'autres ( $e_2, \lambda_{e_2}, \lambda_l$ ) sont fortement oscillatoires. Enfin, on retrouve bien le contrôle à deux phases séparées par la zone de points où la fonction de commutation  $\phi$  passe très près de l'origine : on commence par accroître le paramètre  $P$  dans un premier temps, pour corriger l'excentricité par la suite, en particulier sur  $e_2$ .

### Conclusion

Nous avons tout d'abord montré dans ce chapitre que le problème du transfert orbital était contrôlable. Nous nous sommes ensuite intéressés à la structure de ces commandes optimales, toujours d'un point de vue géométrique à l'aide du principe du minimum. De plus, nous avons consacré une importante partie de ce chapitre à expliquer l'algorithme de tir et la technique de continuation, considérés comme outil numérique adapté à résoudre un problème de contrôle optimal général à partir de ces conditions nécessaires d'optimalité. Enfin, d'un point de vue numérique le tir simple couplé à la méthode de continuation sur le contrôle, s'avère être la méthode la plus efficace pour traiter le problème de transfert orbital. Nous avons poussé les simulations plus loin dans le cas plan, en utilisant pour les poussées faibles une méthode multipas comme intégrateur.

### Notes et sources

La référence principale pour la modélisation du problème de transfert orbital est le livre de Zarrouati [50]. Le livre de Cesari [15] reste l'une des références les plus utilisées en contrôle optimal pour les équations différentielles ordinaires, l'article de Jurdjevic et Quinn [26]



traite le point de vue géométrique, par exemple concernant la contrôlabilité. Pour l'utilisation de l'algorithme de tir, on se reportera au livre de Stoer et Bulirsch [47], et aux travaux d'Oberle et Grimm [37, 38]. En ce qui concerne la méthode de continuation, on a utilisé le travail de thèse de Caillau [13].

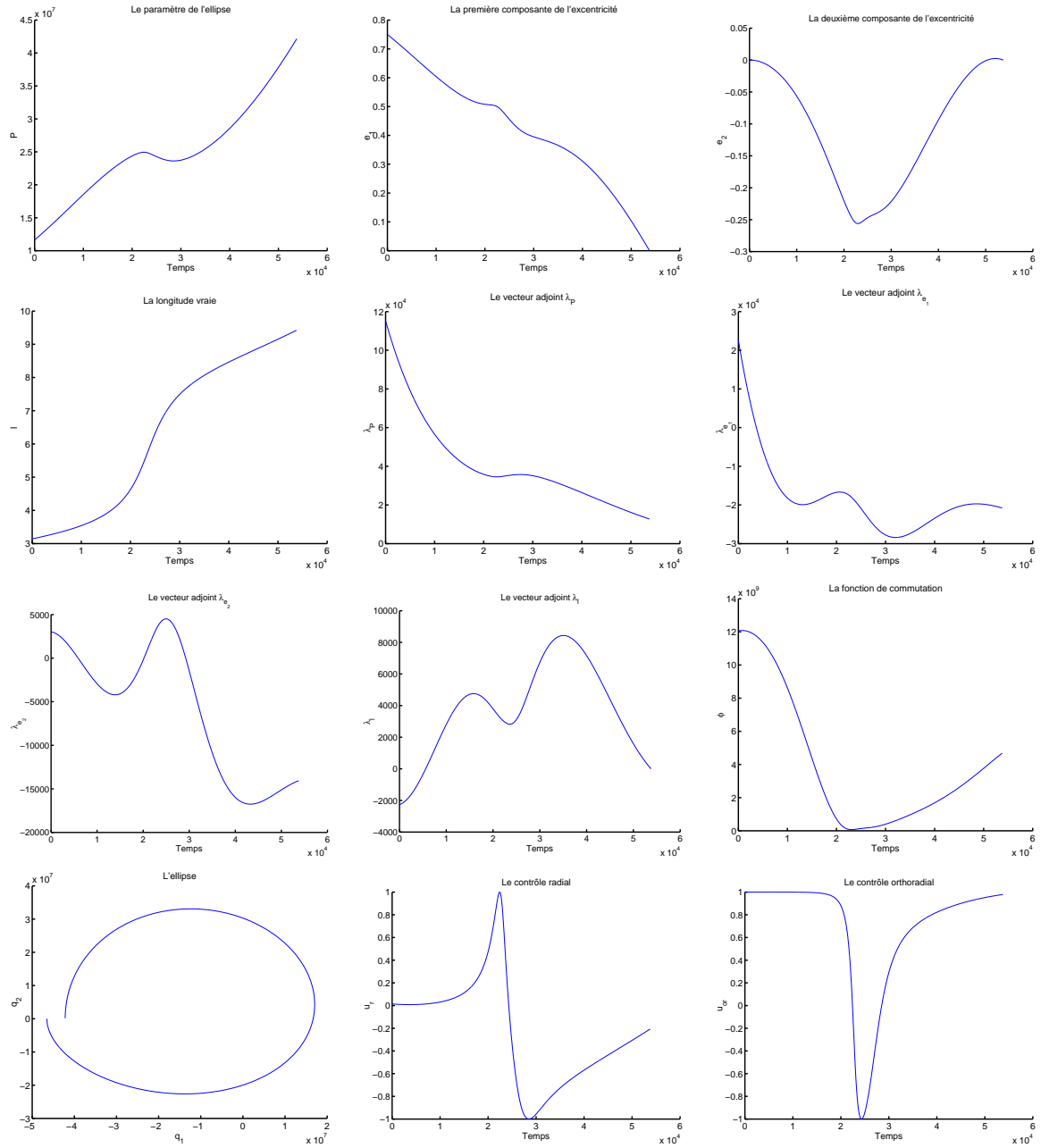


FIG. 1.1 – Poussée de 60 Newtons

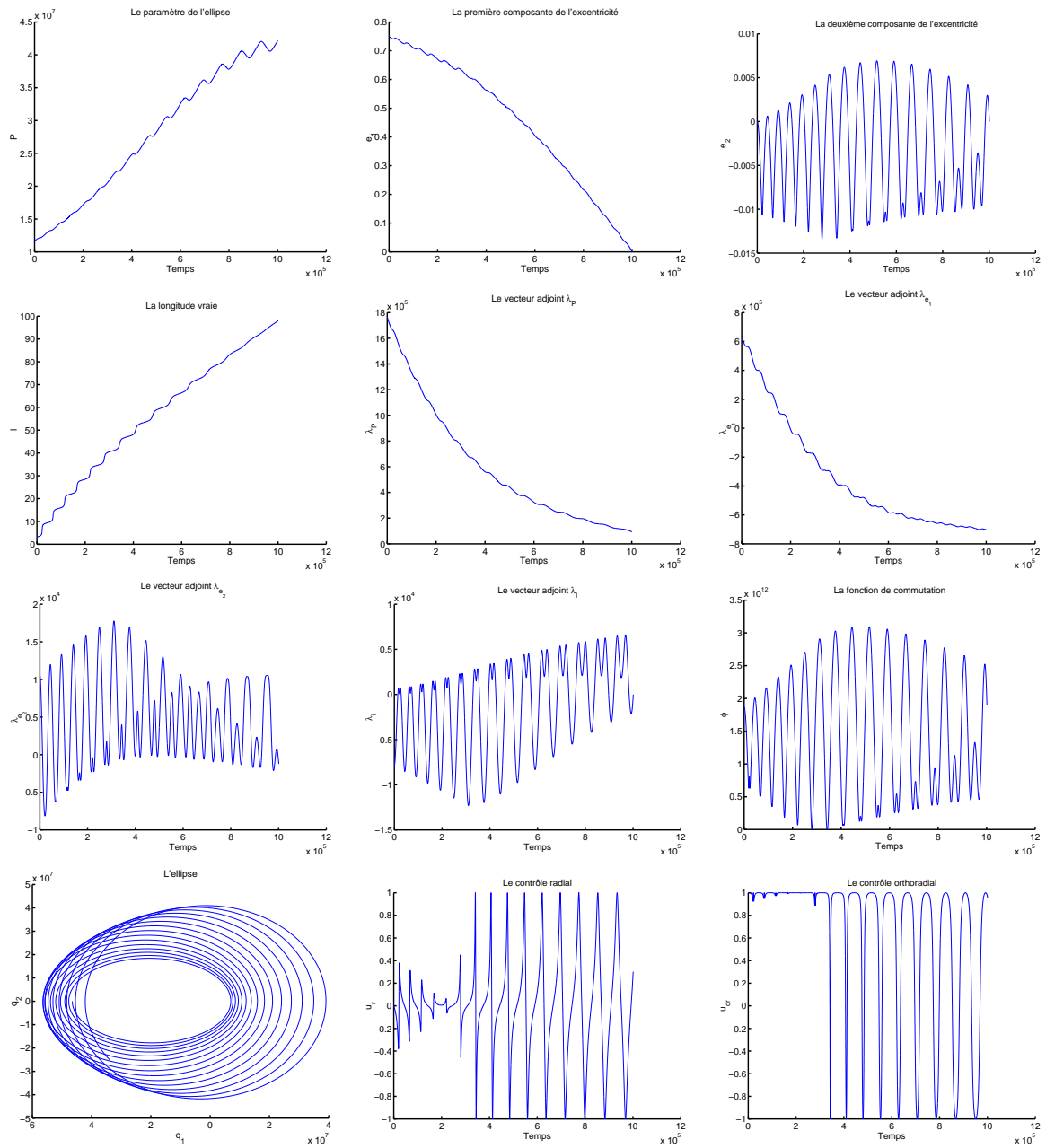


FIG. 1.2 – Poussée de 3 Newtons

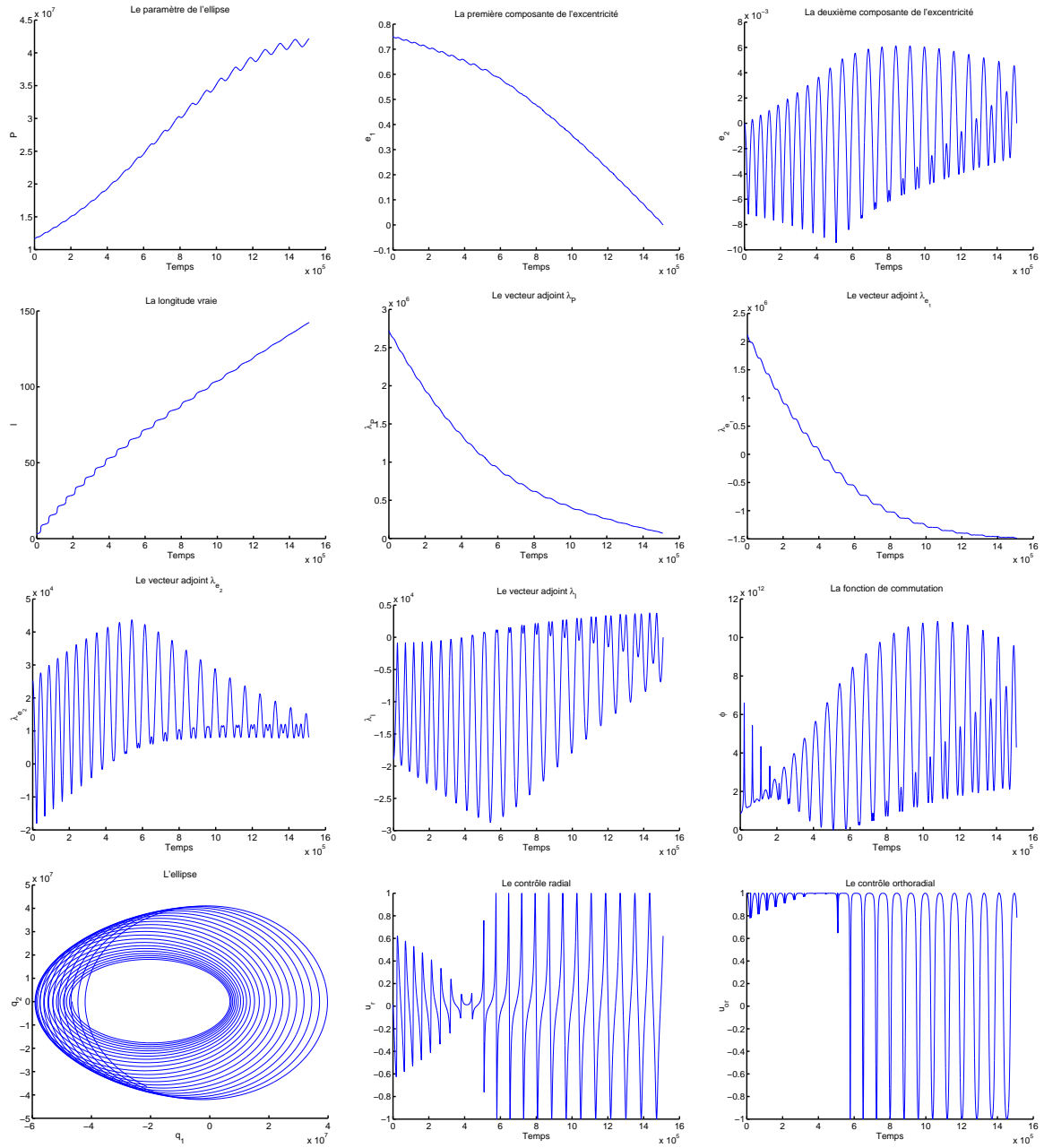


FIG. 1.3 – Poussée de 2 Newtons

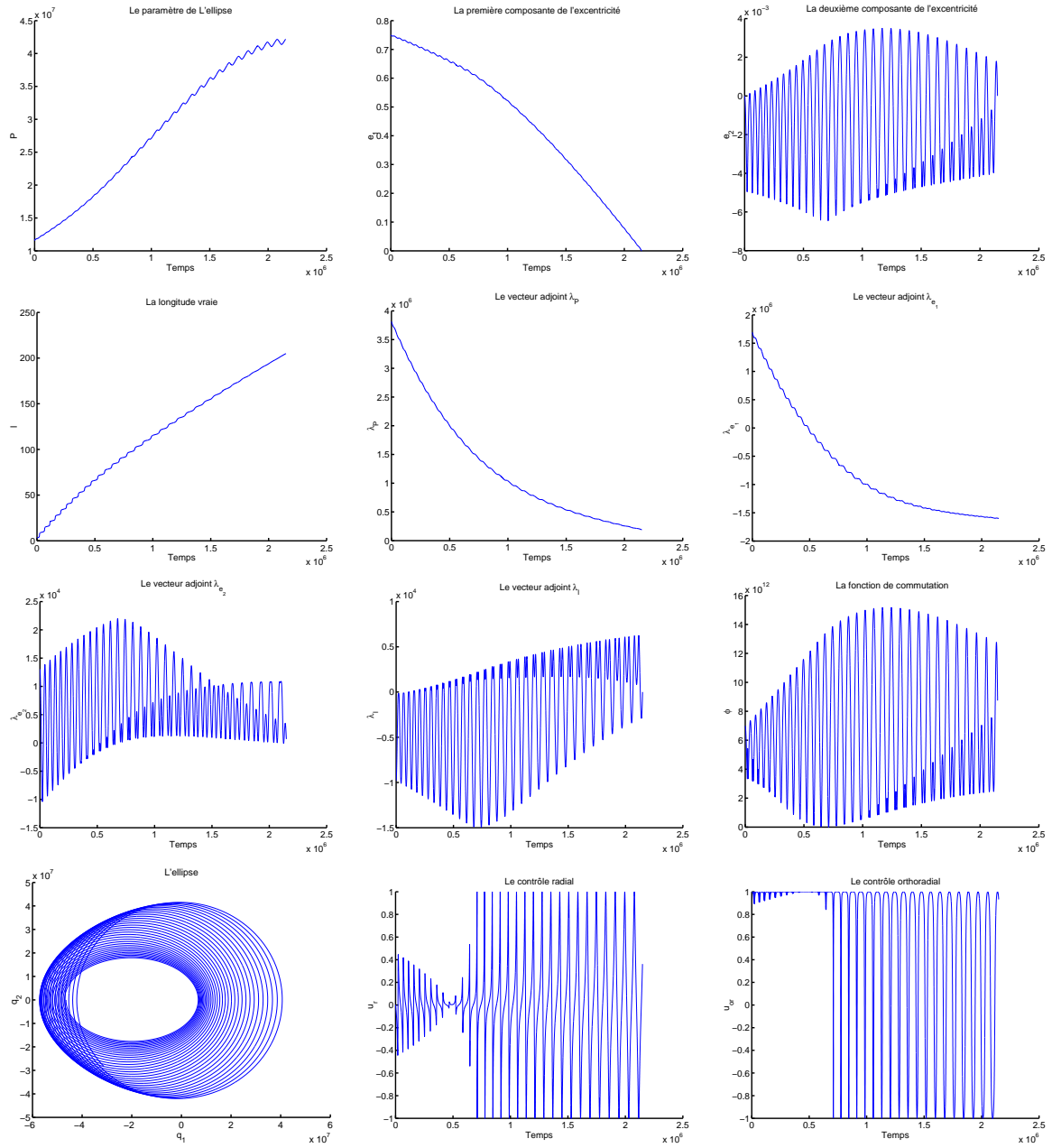


FIG. 1.4 – Poussée de 1,4 Newtons

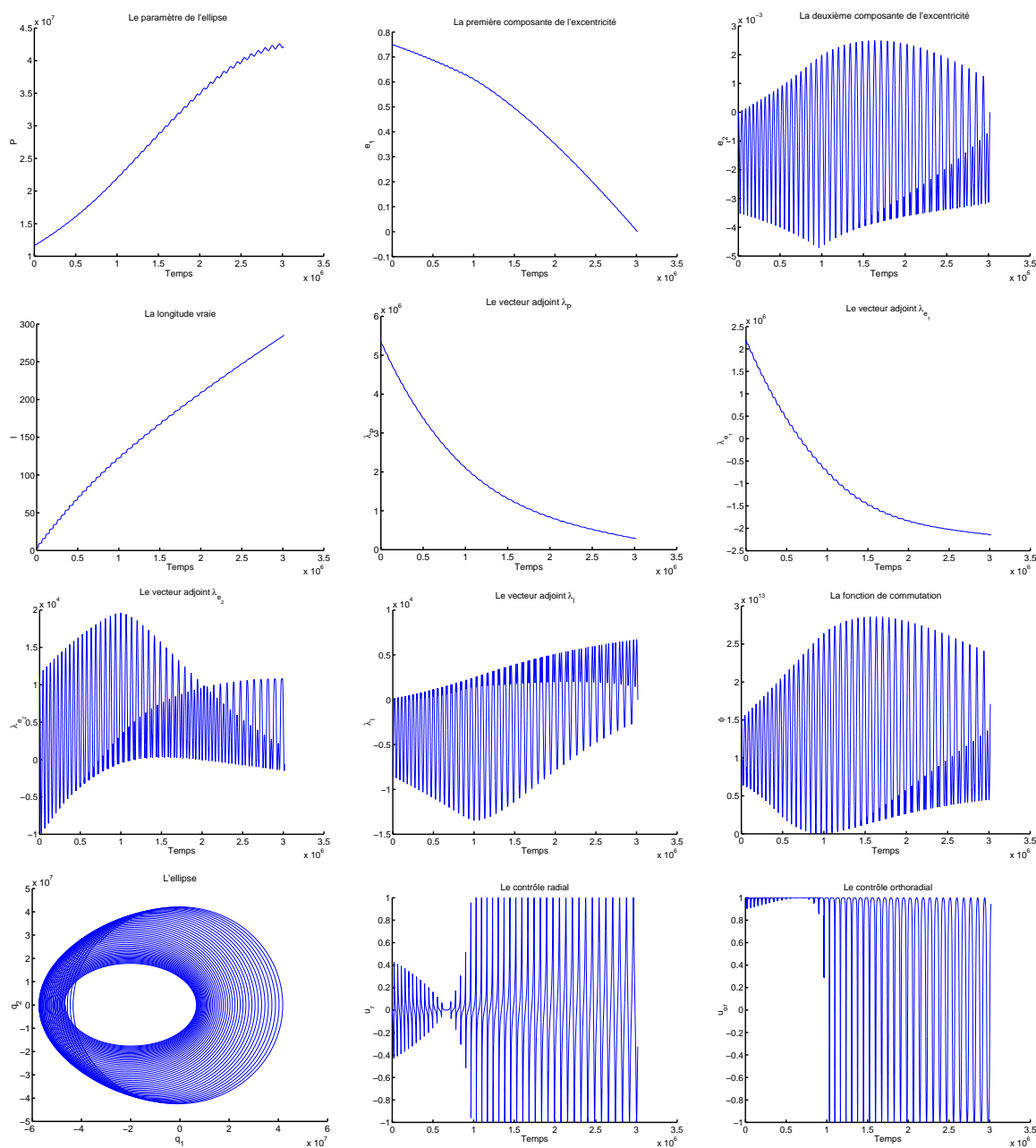


FIG. 1.5 – Poussée de 1 Newtons

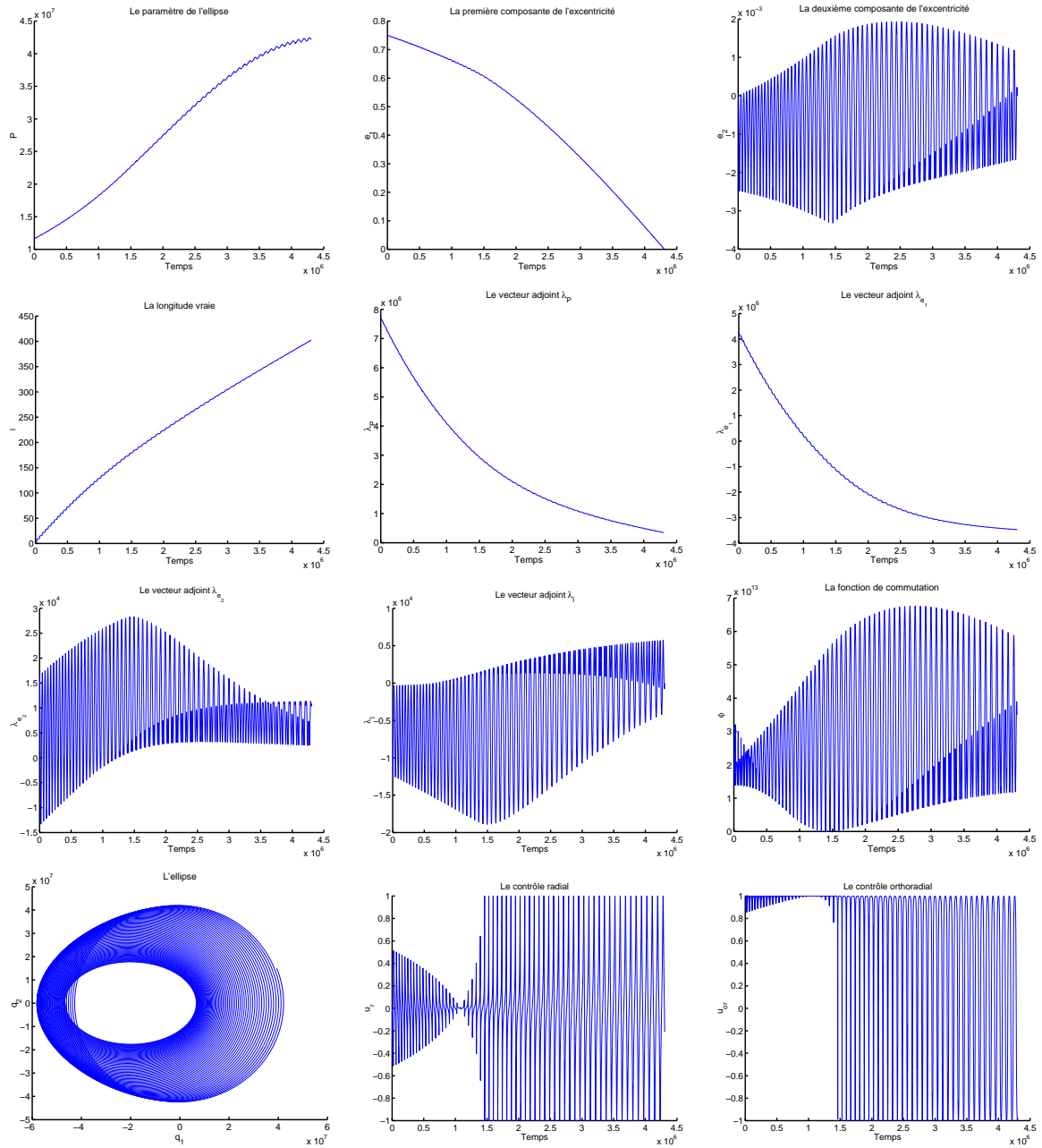


FIG. 1.6 – Poussée de 0,7 Newtons

## Chapitre 2

# Principe du minimum avec contraintes sur l'état



## 2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'établir des conditions nécessaires d'optimalité, pour des systèmes avec contraintes sur l'état, applicables aux problèmes de rentrée atmosphérique. En effet dans le problème de rentrée, il y a des contraintes actives pour le flux thermique, l'accélération normale ou la pression dynamique. Les conditions d'optimalité sont obtenues via des principes du minimum, la contrainte sur l'état pouvant être pénalisée de plusieurs façons dans le Hamiltonien. Nous avons choisi de faire une présentation heuristique de ces conditions, pour obtenir des conditions simples et applicables à notre situation. Le premier résultat présenté concerne les travaux de Weierstrass [2]. Nous établissons ensuite la théorie de Kuhn-Tucker dont la version en dimension infinie [25] permet d'obtenir les conditions nécessaires recherchées qui forment le principe du minimum de Maurer [33]. Enfin nous calculons les multiplicateurs associés à la contrainte, ce calcul étant lié à l'action de l'algèbre de Lie (engendré par les champs de vecteurs) agissant sur la fonction de la contrainte.

## 2.2 Les travaux de Weierstrass (1879)

On considère le problème de minimiser un critère de la forme  $\int_{t_0}^{t_1} F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$  où  $q = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  avec une contrainte sur l'état et en particulier dans le cas Riemannien. On suppose que  $F$  vérifie la condition d'homogénéité :

$$F(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = kF(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad \forall k > 0 \quad (2.1)$$

et que le coût ne dépend pas de la paramétrisation des courbes. On suppose que les conditions initiales et finales sont fixées :  $q(t_0) = q_0$ ,  $q(t_1) = q_1$ .

### 2.2.1 Formules préliminaires

Établissons quelques formules. En dérivant (2.1) par rapport à  $k$  et en évaluant pour  $k = 1$ , on obtient :

$$\dot{x}F_{\dot{x}} + \dot{y}F_{\dot{y}} = F, \quad (2.2)$$

où  $F_{\dot{x}}$  et  $F_{\dot{y}}$  désignent les dérivées partielles. Posons  $J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$ , il vient :

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} [(F_x \xi + F_y \eta) + (F_{\dot{x}} \dot{\xi} + F_{\dot{y}} \dot{\eta})] dt,$$

soit en intégrant par partie :

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} (F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}) \xi dt + \int_{t_0}^{t_1} (F_y - \frac{d}{dt} F_{\dot{y}}) \eta dt,$$

où  $\xi$  et  $\eta$  sont les variations. Comme elles sont indépendantes, on déduit de  $\delta J = 0$  à l'extrémum les équations d'Euler :

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0, \quad F_y - \frac{d}{dt} F_{\dot{y}} = 0.$$

Ces deux équations ne sont pas indépendantes du fait de la relation (2.2). En effet, en dérivant cette équation en  $x$  et  $y$ , il vient :

$$\begin{aligned} F_x &= \dot{x}F_{\dot{x}x} + \dot{y}F_{\dot{y}x}, \\ F_y &= \dot{x}F_{\dot{x}y} + \dot{y}F_{\dot{y}y}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

et en dérivant (2.2) en  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$ , il vient :

$$\begin{aligned} F_{\dot{x}} &= \dot{x}F_{\dot{x}\dot{x}} + F_x + \dot{y}F_{\dot{y}\dot{x}}, \\ F_{\dot{y}} &= \dot{x}F_{\dot{x}\dot{y}} + F_y + \dot{y}F_{\dot{y}\dot{y}}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{x}F_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{y}F_{\dot{y}\dot{x}}, \\ 0 &= \dot{x}F_{\dot{x}\dot{y}} + \dot{y}F_{\dot{y}\dot{y}}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

ce qui implique :

$$\frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{F_{\dot{y}\dot{x}}} = -\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{F_{\dot{x}\dot{y}}}{F_{\dot{y}\dot{y}}},$$

On pose :

$$F_{\dot{x}\dot{y}} = -\dot{x}\dot{y}F_1, \quad (2.5)$$

et on obtient :

$$F_{\dot{y}\dot{y}} = \dot{x}^2 F_1 \quad \text{et} \quad F_{\dot{x}\dot{x}} = \dot{y}^2 F_1, \quad (2.6)$$

la fonction  $F_1$  étant définie dans le domaine où  $(\dot{x}, \dot{y}) \neq 0$ . On obtient alors :

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} = F_x - (\dot{x}F_{\dot{x}x} + \dot{y}F_{\dot{x}y} + \ddot{x}F_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{y}F_{\dot{x}\dot{y}}),$$

et avec (2.3) et (2.6), cela se simplifie en :

$$\begin{aligned} F_x - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} &= \dot{y}(F_{\dot{y}x} - F_{\dot{x}y}) - (\ddot{x}F_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{y}\ddot{y}F_{\dot{x}\dot{y}}) \\ &= \dot{y}(F_{\dot{y}x} - F_{\dot{x}y}) - \dot{y}(\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y})F_1, \end{aligned}$$

Posons

$$T = (F_{\dot{y}x} - F_{\dot{x}y}) + (\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x})F_1.$$

On obtient :

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} = \dot{y}T, \quad (2.7)$$

et de même en changeant  $x$  en  $y$ , il vient :

$$F_y - \frac{d}{dt}F_{\dot{y}} = -\dot{x}T. \quad (2.8)$$

Avec la condition de régularité  $(\dot{x}, \dot{y}) \neq 0$ , l'équation d'Euler équivaut à  $T = 0$ . **C'est l'équation d'Euler sous la forme de Weierstrass.**

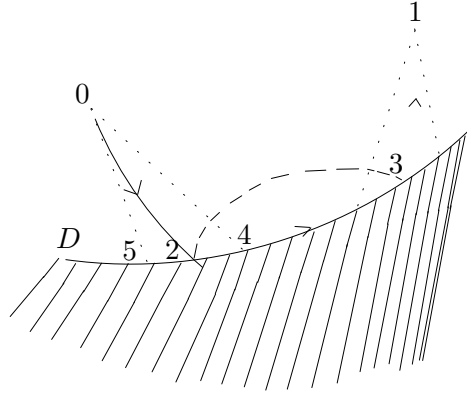


Figure 2.1

### 2.2.2 Application au problème avec contraintes

On se donne un domaine  $D$  du plan, dont le bord est lisse. Soit  $\tilde{x} = \tilde{\varphi}(t)$ ,  $\tilde{y} = \tilde{\psi}(t)$  un arc frontière joignant les points 2 et 3, avec  $t \in [t_2, t_3]$ , voir figure 2.1. En un point  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  de l'arc frontière, on construit un vecteur  $u$  de longueur  $u$  orienté vers l'intérieur du domaine. Les coordonnées de l'extrémité sont :

$$\bar{x} = \tilde{x} + \xi, \quad \bar{y} = \tilde{y} + \eta,$$

avec

$$\xi = -\frac{u\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \eta = \frac{u\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

Soient  $\epsilon > 0$  et  $p(t)$  une fonction positive, nulle lorsque  $t = t_2, t_3$  et  $u = \epsilon p(t)$ . On a  $\xi = \eta = 0$  aux extrémités et la variation de  $J$  associée est :

$$\delta J = \int_{t_2}^{t_3} \left[ (F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}) \xi + (F_y - \frac{d}{dt} F_{\dot{y}}) \eta \right] dt,$$

et avec nos formules précédentes :

$$\delta J = -\epsilon \int_{t_2}^{t_3} \tilde{T} p(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt,$$

on en déduit la condition :

**Lemme 2.2.1** *Dans le cas où l'arc frontière est minimisant, on doit avoir la condition nécessaire  $\tilde{T} \leq 0$  le long de l'arc frontière.*

Si  $F_1 > 0$ , le long de l'arc frontière, il vient :

$$\frac{F_{x\dot{y}} - F_{\dot{x}y}}{F_1} \leq -(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}). \quad (2.9)$$

Introduisons la courbure pour la métrique usuelle :

$$\frac{1}{\tilde{r}} = \frac{\dot{\tilde{x}}\ddot{\tilde{y}} - \ddot{\tilde{x}}\dot{\tilde{y}}}{(\sqrt{\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2})^3}. \quad (2.10)$$

La relation (2.9) s'écrit :

$$\frac{F_{x\dot{y}} - F_{\dot{x}y}}{F_1(\sqrt{\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2})^3} \leq -\frac{\dot{\tilde{x}}\ddot{\tilde{y}} - \ddot{\tilde{x}}\dot{\tilde{y}}}{(\sqrt{\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2})^3}. \quad (2.11)$$

Or une extrémale pour le problème non contraint vérifie  $T = 0$ , soit

$$-\frac{F_{x\dot{y}} - F_{\dot{x}y}}{F_1(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})^3} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})^3} = \frac{1}{r}.$$

Soit donc  $P$  un point de l'arc frontière et  $t \rightarrow \gamma(t)$  l'extrémale issue de  $P$  et tangente à la frontière. Le membre de gauche de (2.11) est alors l'opposé  $-\frac{1}{r}$  de la courbure de l'extrémale et l'on obtient la relation géométrique :

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{\tilde{r}}. \quad (2.12)$$

D'où :

**Lemme 2.2.2** Une condition nécessaire d'optimalité est  $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{\tilde{r}}$  où  $\frac{1}{\tilde{r}}$  est la courbure de l'arc frontière en  $P$  et  $\frac{1}{r}$  la courbure de l'extrémale tangente en  $P$  à la frontière.

En particulier on a :

**Corollaire 2.2.1** Si  $F = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$  est la métrique usuelle, l'arc frontière est optimal si le domaine de contrainte est convexe et non optimal s'il est concave.

### 2.2.3 Conditions de jonction

En introduisant d'autres variations on obtient des conditions nécessaires à vérifier lors de l'entrée et de la sortie de l'arc frontière 23. Traitons le cas de l'entrée. Soient 0 un point à l'extérieur de la frontière du domaine contraint et 4 un point d'entrée entre 2 et 3, voir figure 2.1 . On fait l'hypothèse que le coût le long de l'arc 024 est moindre que le long de l'arc 04. Introduisons :

- $\gamma(t)$ , l'arc 02 pour  $t \in [t_1, t_2]$ ,
- $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ , l'arc frontière 24,  $t \in [t_2, t_2 + h]$ ,  $h > 0$ ,
- $\gamma(t) + \nu(t)$ , l'arc 04,  $t \in [t_1, t_2]$ .

Utilisons la formule fondamentale du calcul des variations avec l'hypothèse que  $\gamma$  est extrémale :

$$\begin{aligned}
\delta J &= J_{04} - (J_{02} + J_{24}) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} (F(\gamma + \nu) - F(\gamma)) dt - \int_{t_2}^{t_2+h} F dt \\
&= [F_{\dot{x}}\xi + F_{\dot{y}}\eta]_{t_1}^{t_2} - F(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \dot{\tilde{x}}_2, \dot{\tilde{y}}_2)h + o(h).
\end{aligned}$$

Or  $\xi(t_1) = \eta(t_1) = 0$  car l'extrémité 0 est fixée. En  $t_2$ , la variation du point est  $\xi = \dot{\tilde{x}}h$ ,  $\eta = \dot{\tilde{y}}h$ . Donc :

$$\begin{aligned}
\delta J &= h(\dot{\tilde{x}}_2 F_{\dot{x}}(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2) + \dot{\tilde{y}}_2 F_{\dot{y}}(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2) - F(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \dot{\tilde{x}}_2, \dot{\tilde{y}}_2)) + o(h) \\
&= -hE(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{\tilde{x}}_2, \dot{\tilde{y}}_2) + o(h),
\end{aligned}$$

où  $E$  est la fonction de Weierstrass

$$E(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{\tilde{x}}_2, \dot{\tilde{y}}_2) = F(x_2, y_2, \dot{\tilde{x}}_2, \dot{\tilde{y}}_2) - (\dot{\tilde{x}}_2 F_{\dot{x}}(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2) + \dot{\tilde{y}}_2 F_{\dot{y}}(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2)),$$

et  $\dot{x}, \dot{y}$  dérivée de  $\gamma$  au point d'entrée 2 et  $\dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}$  dérivée de l'arc frontière au point 2.

On fait un calcul identique sur un arc 052 où 5 est un point d'entrée situé à gauche de 2 et on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta J &= (J_{05} + J_{52}) - J_{02} \\
&= \int_{t_2-h}^{t_2} F dt + \int_{t_1}^{t_2} (F(\gamma - \nu) - F(\gamma)) dt \\
&= hE(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{\tilde{x}}_2, \dot{\tilde{y}}_2) + o(h).
\end{aligned}$$

On en déduit finalement, la condition :

$$E(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{\tilde{x}}_2, \dot{\tilde{y}}_2) = 0.$$

Par ailleurs, par homogénéité on a :

$$E(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}, \tilde{k}\dot{\tilde{x}}, \tilde{k}\dot{\tilde{y}}) = k\tilde{k}E(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}) \quad \forall k, \tilde{k} > 0.$$

Introduisons alors :

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\dot{x}_2}{\sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2}} = \cos(\theta), & q &= \frac{\dot{y}_2}{\sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2}} = \sin(\theta), \\
\tilde{p} &= \frac{\dot{\tilde{x}}_2}{\sqrt{\dot{\tilde{x}}_2^2 + \dot{\tilde{y}}_2^2}} = \cos(\tilde{\theta}), & \tilde{q} &= \frac{\dot{\tilde{y}}_2}{\sqrt{\dot{\tilde{x}}_2^2 + \dot{\tilde{y}}_2^2}} = \sin(\tilde{\theta}),
\end{aligned}$$

et donc

$$E(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{\tilde{x}}_2, \dot{\tilde{y}}_2) = \sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2} \sqrt{\dot{\tilde{x}}_2^2 + \dot{\tilde{y}}_2^2} E(x_2, y_2, p, q, \tilde{p}, \tilde{q}).$$

**Lemme 2.2.3** Il existe  $\theta^* \in [\theta, \tilde{\theta}]$  tel que

$$E(x_2, y_2, \cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\tilde{\theta}), \sin(\tilde{\theta})) = (1 - \cos(\tilde{\theta} - \theta))F_1(x_2, y_2, \cos(\theta^*), \sin(\theta^*)).$$

**Preuve.** On a

$$E(x_2, y_2, p, q, \tilde{p}, \tilde{q}) = F(x_2, y_2, \tilde{p}, \tilde{q}) - (\tilde{p}F_{\dot{x}}(x_2, y_2, p, q) + \tilde{q}F_{\dot{y}}(x_2, y_2, p, q)).$$

D'après (2.2), on a donc

$$E(x_2, y_2, p, q, \tilde{p}, \tilde{q}) = \tilde{p}(F_{\dot{x}}(x_2, y_2, \tilde{p}, \tilde{q}) - F_{\dot{x}}(x_2, y_2, p, q)) + \tilde{q}(F_{\dot{y}}(x_2, y_2, \tilde{p}, \tilde{q}) - F_{\dot{y}}(x_2, y_2, p, q)).$$

On pose :  $w = \tilde{\theta} - \theta$ , et on obtient

$$\begin{aligned} E(x_2, y_2, p, q, \tilde{p}, \tilde{q}) &= \cos(\tilde{\theta}) \int_0^w \frac{d}{d\tau} F_{\dot{x}}(x_2, y_2, \cos(\theta + \tau), \sin(\theta + \tau)) d\tau \\ &\quad + \sin(\tilde{\theta}) \int_0^w \frac{d}{d\tau} F_{\dot{y}}(x_2, y_2, \cos(\theta + \tau), \sin(\theta + \tau)) d\tau \\ &= -\cos(\tilde{\theta}) \int_0^w \sin(\theta + \tau) F_{\dot{x}\dot{x}}(x_2, y_2, \cos(\theta + \tau), \sin(\theta + \tau)) d\tau \\ &\quad + \cos(\tilde{\theta}) \int_0^w \cos(\theta + \tau) F_{\dot{x}\dot{y}}(x_2, y_2, \cos(\theta + \tau), \sin(\theta + \tau)) d\tau \\ &\quad - \sin(\tilde{\theta}) \int_0^w \sin(\theta + \tau) F_{\dot{x}\dot{y}}(x_2, y_2, \cos(\theta + \tau), \sin(\theta + \tau)) d\tau \\ &\quad + \sin(\tilde{\theta}) \int_0^w \cos(\theta + \tau) F_{\dot{y}\dot{y}}(x_2, y_2, \cos(\theta + \tau), \sin(\theta + \tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Grâce à (2.5) et à (2.6), cela se simplifie en :

$$E(x_2, y_2, p, q, \tilde{p}, \tilde{q}) = \int_0^w \sin(w - \tau) F_1(x_2, y_2, \cos(\theta + \tau), \sin(\theta + \tau)) d\tau.$$

Pour  $w \in [-\pi, \pi]$  fixé, la fonction  $\tau : [0, w]$  (ou  $[w, 0]$ )  $\mapsto \sin(w - \tau)$  a un signe constant, donc d'après la première formule de la moyenne, on obtient le lemme.

**Définition 2.2.1** *Le problème est dit régulier sur l'ouvert  $U$  si pour tout  $\gamma \in U$ ,  $F_1(x, y, \cos(\gamma), \sin(\gamma)) \neq 0$ .*

**Corollaire 2.2.2** *Dans le cas régulier, la condition  $E = 0$  implique  $\theta = \tilde{\theta}$  et donc pour une jonction ou un départ avec un arc frontière, cela doit se faire de façon tangentielle.*

## 2.2.4 Conditions de réflexion

Considérons le cas où la courbe minimisante 021 admet comme seul point en commun avec la frontière le point 2  $(x(t_2), y(t_2))$ , voir figure 2.2.

Les arcs 02 et 21 doivent être extrémaux. Soit 3 un point de la frontière associé à la variation :

$$t = t_2 + h, \quad h > 0.$$

La courbe 031 est une variation de 021 et la variation du coût est :

$$\begin{aligned} \delta J &= (J_{03} + J_{31}) - (J_{02} + J_{21}) \\ &= (J_{03} - (J_{02} + J_{23})) - (J_{21} - (J_{23} + J_{31})). \end{aligned}$$

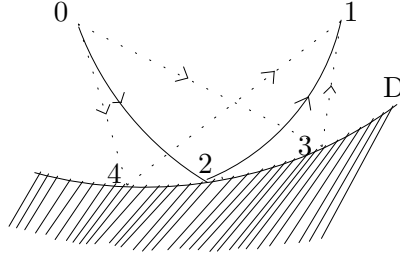


Figure 2.2

En calculant avec la formule fondamentale du calcul des variations, il vient :

$$\begin{aligned}\delta J &= \left( \int_{t_1}^{t_2} (F(\gamma + \nu) - F(\gamma)) dt - \int_{t_2}^{t_2+h} F dt \right) - \left( \int_{t_2}^{t_3} (F(\gamma) - F(\gamma + \nu)) dt - \int_{t_2}^{t_2+h} F dt \right) \\ &= h([F_{\dot{x}}\xi + F_{\dot{y}}\eta]_{t_1}^{t_2} - F(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{p}_2, \tilde{q}_2)) - h([-F_{\dot{x}}\xi - F_{\dot{y}}\eta]_{t_2}^{t_3} - F(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{p}_2, \tilde{q}_2)) + o(h).\end{aligned}$$

Or  $\xi(t_1) = \eta(t_1) = 0$  car les extrémités 0 et 1 sont fixées. En  $t_2$ , la variation du point est  $\xi = \dot{x}h$ ,  $\eta = \dot{y}h$ . Donc :

$$\delta J = h(E(x_2, y_2, p_2^+, q_2^+, \tilde{p}_2, \tilde{q}_2) - E(x_2, y_2, p_2^-, q_2^-, \tilde{p}_2, \tilde{q}_2)) + o(h),$$

où  $(p_2^-, q_2^-)$ ,  $(p_2^+, q_2^+)$  et  $(\tilde{p}_2, \tilde{q}_2)$  correspondent aux pentes associées respectivement à 02, 21 et 23. On fait le même calcul avec un point 4 de la frontière associée à  $t = t_2 - h$  et on obtient :

$$\begin{aligned}\delta J &= (J_{04} + J_{41}) - (J_{02} + J_{21}) \\ &= ((J_{04} + J_{42}) - J_{02}) + (J_{41} - (J_{42} + J_{21})) \\ &= \left( \int_{t_1}^{t_2} (F(\gamma - \nu) - F(\gamma)) dt + \int_{t_2-h}^{t_2} F dt \right) + \left( \int_{t_2}^{t_3} (F(\gamma - \nu) - F(\gamma)) dt - \int_{t_2-h}^{t_2} F dt \right) \\ &= h([-F_{\dot{x}}\xi - F_{\dot{y}}\eta]_{t_1}^{t_2} + F(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{p}_2, \tilde{q}_2)) + h([-F_{\dot{x}}\xi - F_{\dot{y}}\eta]_{t_2}^{t_3} - F(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{p}_2, \tilde{q}_2)) + o(h) \\ &= -h(E(x_2, y_2, p_2^+, q_2^+, \tilde{p}_2, \tilde{q}_2) - E(x_2, y_2, p_2^-, q_2^-, \tilde{p}_2, \tilde{q}_2)) + o(h).\end{aligned}$$

On en déduit finalement, la condition :

**Lemme 2.2.4** *En un point de réflexion avec la frontière, la fonction de Weierstrass doit vérifier :*

$$E(x_2, y_2, p_2^+, q_2^+, \tilde{p}_2, \tilde{q}_2) = E(x_2, y_2, p_2^-, q_2^-, \tilde{p}_2, \tilde{q}_2),$$

où  $(p_2^-, q_2^-)$ ,  $(p_2^+, q_2^+)$  et  $(\tilde{p}_2, \tilde{q}_2)$  sont les tangentes respectives à l'arc d'arrivée, de départ et de la frontière au point de contact.

**Corollaire 2.2.3** *On suppose que  $F = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$  est la métrique usuelle. Alors, en un point de contact avec la frontière, les droites extrémales doivent avoir des angles égaux avec la tangente à la frontière.*

**Preuve.** Le calcul montre que  $F_1 = 1$  et  $E(x, y, \cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\tilde{\theta}), \sin(\tilde{\theta})) = (1 - \cos(\tilde{\theta} - \theta))$ . On en déduit la condition

$$\cos(\tilde{\theta}_2 - \theta_2^-) = \cos(\tilde{\theta}_2 - \theta_2^+)$$

au point de contact. D'où le résultat.

## 2.2.5 Conclusion

Des variations spéciales et des estimés élémentaires utilisant la formule fondamentale du calcul des variations permettent d'obtenir des conditions nécessaires d'optimalité géométriquement simples et de calculer les trajectoires optimales.

## 2.3 Méthode des multiplicateurs de Lagrange et théorème de Kuhn-Tucker

### 2.3.1 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Rappelons la technique des multiplicateurs de Lagrange (1788) en dimension finie.

**Théorème 2.3.1** Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f_0, f_1, \dots, f_m$  des fonctions définies et  $C^1$  sur  $U$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Notons  $L = \sum_{k=0}^m p_k f_k$  la fonction de Lagrange où les  $p_i$  sont les multiplicateurs de Lagrange. Alors si  $\hat{x}$  est une solution locale du problème :  $\min f_0$  sous les contraintes  $f_1 = 0, \dots, f_m = 0$ , il existe  $\hat{p} = (\hat{p}_0, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m)$  non nul tel que  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$  en  $(\hat{x}, \hat{p})$ .

**Preuve.** Considérons les vecteurs  $\frac{\partial f_i}{\partial x}(\hat{x})$ , supposons qu'ils sont linéairement indépendants et montrons que  $\hat{x}$  n'est pas un minimum local. Notons

$$\Phi(x) = (f_0(x) - f_0(\hat{x}), f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

Comme les  $\frac{\partial f_i}{\partial x}(\hat{x})$  sont linéairement indépendants, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_1}(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial f_0}{\partial x_n}(\hat{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\hat{x}) \end{pmatrix}$$

est de rang  $(m + 1)$  et quitte à réordonner les indices, on peut supposer :

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_1}(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial f_0}{\partial x_{m+1}}(\hat{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{m+1}}(\hat{x}) \end{pmatrix} \neq 0.$$



D'après le théorème des fonctions implicites, pour tout  $\epsilon > 0$  assez petit, il existe des points  $x_1(\epsilon), \dots, x_{m+1}(\epsilon)$  tels que :

$$\begin{aligned} f_0(x_1(\epsilon), \dots, x_{m+1}(\epsilon), \hat{x}_{m+2}, \dots, \hat{x}_n) - f_0(\hat{x}) &= \epsilon \\ f_1(x_1(\epsilon), \dots, x_{m+1}(\epsilon), \hat{x}_{m+2}, \dots, \hat{x}_n) &= 0 \\ &\dots \\ f_m(x_1(\epsilon), \dots, x_{m+1}(\epsilon), \hat{x}_{m+2}, \dots, \hat{x}_n) &= 0 \end{aligned}$$

et  $x_i(\epsilon) \rightarrow \hat{x}_i$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ceci contredit le fait que  $\hat{x}$  est un minimum local.

**Remarque 2.3.1** On peut faire les remarques suivantes :

- Si les vecteurs  $\frac{\partial f_i}{\partial x}(\hat{x})$ ,  $i = 1, \dots, m$  sont indépendants, alors  $\hat{p}_0 \neq 0$ .
- Pour déterminer les  $n + (m + 1)$  inconnues,  $(\hat{x}, \hat{p})$ , on a  $n + m$  équations :

$$f_i(\hat{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x_j}(\hat{x}, \hat{p}) = 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

Elles sont homogènes en  $p$ . En normalisant une des composantes de  $p$  à 1, on a donc un nombre égal d'inconnues et d'équations.

Le théorème de Kuhn-Tucker démontré en 1951 exploite au maximum les idées de Lagrange.

**Théorème 2.3.2** Soit  $X$  un espace vectoriel réel (non nécessairement de dimension finie),  $A$  un sous-ensemble convexe de  $X$  et  $f_i : X \mapsto \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  des fonctions convexes. Considérons le problème :

$$\begin{cases} \min_{x \in A} f_0 \\ f_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Alors si  $\hat{x}$  est une solution du problème, il existe des multiplicateurs de Lagrange  $(\hat{p}_0, \hat{p})$  tel que si on définit le Lagrangien par  $L(x, p, p_0) = \sum_{k=0}^m p_k f_k(x)$ ,

1. Les conditions suivantes sont satisfaites :
  - a)  $\min_{x \in A} L(x, \hat{p}, \hat{p}_0) = L(\hat{x}, \hat{p}, \hat{p}_0)$  (principe du minimum),
  - b)  $\hat{p}_i \geq 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ ,
  - c)  $\hat{p}_i f_i(\hat{x}) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .
2. Si  $\hat{p}_i \neq 0$ , les conditions a, b et c sont suffisantes pour qu'un point admissible soit solution du problème.
3. Pour avoir  $\hat{p}_0 \neq 0$ , il suffit qu'il existe un point  $\bar{x} \in A$  vérifiant la condition de Slater :  $f_i(\bar{x}) < 0$ ,  $i = 1, \dots, m$  et on peut alors supposer  $\hat{p}_0 = 1$ .

**Preuve.** Soit  $\hat{x}$  une solution. Sans nuire à la généralité, on peut supposer  $f_0(\hat{x}) = 0$ . On introduit l'ensemble :

$$C = \{\mu \in \mathbb{R}^{m+1}, \mu = (\mu_0, \dots, \mu_m) \text{ t.q. } \exists x \in A, f_0(x) < \mu_0, f_i(x) < \mu_i, i = 1, \dots, m\}.$$

L'ensemble  $C$  a les propriétés suivantes :

- $C \neq \emptyset$ , car pour  $x = \hat{x}$ , on a  $f_0(\hat{x}) = 0$  et  $f_i(\hat{x}) \leq 0$ , d'où  $\mu$  tel que  $\mu_0 > 0$  et  $\mu_i > 0$  appartient à  $C$ ,
- $0 \notin C$  sinon il existe  $\bar{x}$  tel que  $f_0(\bar{x}) < 0$  et  $f_i(\bar{x}) \leq 0$ , ce qui contredit l'optimalité de  $\hat{x}$ .

Puisque  $C$  est un ensemble convexe de  $\mathbb{R}^{m+1}$  et que  $0 \notin C$ , on peut lui appliquer le théorème de séparation [10] et il existe des nombres  $\hat{p}_0, \dots, \hat{p}_m$  non tous nuls tels que :

$$\sum_{i=0}^m \hat{p}_i \mu_i \geq 0, \quad \forall \mu \in C. \quad (2.13)$$

Montrons alors les assertions :

- $\hat{p}_{i_0} \geq 0, i_0 = 0, \dots, m$  :

On a vu que le vecteur  $\mu$  avec  $\mu_i > 0, i = 0, \dots, m$  appartient à  $C$ . En particulier, soit  $\epsilon > 0$  et  $(\epsilon, \dots, \epsilon, 1, \epsilon, \dots, \epsilon)$  le vecteur de  $C$  où 1 est à la  $i_0^{\text{ème}}$  place. On déduit de (2.13) que :

$$\hat{p}_{i_0} + \epsilon \sum_{i \neq i_0} \hat{p}_i \geq 0, \quad \forall \epsilon > 0,$$

donc que  $\hat{p}_{i_0} \geq -\epsilon \sum_{i \neq i_0} \hat{p}_i$  et comme  $\epsilon$  est arbitraire, on a bien  $\hat{p}_{i_0} \geq 0$ .

- $\hat{p}_{i_0} f_{i_0}(\hat{x}) = 0, i_0 = 1, \dots, m$  :

En effet si  $f_{i_0}(\hat{x}) = 0$ , le résultat est vrai. Supposons que  $f_{i_0}(\hat{x}) < 0$ . Alors si  $\delta > 0$ , le vecteur  $(\delta, 0, \dots, 0, f_{i_0}(\hat{x}), 0, \dots, 0)$  est dans  $C$ , où  $f_{i_0}(\hat{x})$  est à la  $(i_0 + 1)^{\text{ème}}$  place. En utilisant (2.13), on obtient :

$$\delta \hat{p}_0 + \hat{p}_{i_0} f_{i_0}(\hat{x}) \geq 0, \quad \forall \delta > 0,$$

ce qui implique  $\hat{p}_{i_0} f_{i_0}(\hat{x}) \geq -\delta \hat{p}_0, \forall \delta > 0$ . On en déduit que  $\hat{p}_{i_0} \leq 0$ . Or  $\hat{p}_{i_0} \geq 0$ , donc  $\hat{p}_{i_0} = 0$ .

- Principe du minimum :

Soit  $x \in A$ , alors par définition de  $C$ , pour tout  $\delta > 0$  le point  $(f_0(x) + \delta, f_1(x), \dots, f_m(x))$ , est dans  $C$  et d'après (2.13) :

$$\hat{p}_0(f_0(x) + \delta) + \sum_{i=1}^m \hat{p}_i f_i(x) \geq 0.$$

On obtient donc :

$$\hat{p}_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^m \hat{p}_i f_i(x) \geq -\delta \hat{p}_0, \quad \forall \delta > 0,$$

et comme  $\delta > 0$  est arbitraire, on obtient la condition :

$$\sum_{i=0}^m \hat{p}_i f_i(x) \geq 0, \quad \forall x \in A.$$

Or  $f_0(\hat{x}) = 0$  et  $\hat{p}_i f_i(\hat{x}) = 0$  pour  $i = 1, \dots, m$ . Donc :

$$\sum_{i=0}^m \hat{p}_i f_i(x) \geq 0 = \sum_{i=0}^m \hat{p}_i f_i(\hat{x}), \quad \forall x \in A,$$

et le résultat est prouvé.

• Prouvons l'assertion 2). Si  $\hat{p}_0 \neq 0$  on peut supposer  $\hat{p}_0 = 1$ . Soit  $x$  un point admissible, donc

$$f_0(x) \geq f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^m \hat{p}_i f_i(x),$$

car  $f_i(x) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$  et  $\hat{p}_i \geq 0$  (la condition b). La condition a implique donc :

$$f_0(x) \geq f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^m \hat{p}_i f_i(\hat{x}).$$

Enfin d'après la condition c :

$$f_0(x) \geq f_0(\hat{x}),$$

d'où le résultat.

• Montrons l'assertion 3). Supposons qu'il existe  $\bar{x}$  tel que  $f_i(\bar{x}) < 0$  pour  $i = 1, \dots, m$ , mais  $\hat{p}_0 = 0$ . Alors comme les  $\hat{p}_i$  ne sont pas tous nuls, on a :

$$0 + \sum_{i=1}^m \hat{p}_i f_i(\bar{x}) < 0 = 0 + \sum_{i=1}^m \hat{p}_i f_i(\hat{x}),$$

et le principe du minimum implique :

$$0 + \sum_{i=1}^m \hat{p}_i f_i(\bar{x}) \geq 0 + \sum_{i=1}^m \hat{p}_i f_i(\hat{x}),$$

d'où la contradiction.

### 2.3.2 Le théorème de Kuhn-Tucker en dimension infinie

L'objectif de cette section est de présenter des conditions nécessaires d'optimalité applicables pour analyser le problème de rentrée atmosphérique. Ces résultats sont extraits de [12, 32, 35, 42, 46] et développés dans [25].

**Préliminaire.** Le problème que l'on étudie est de minimiser  $\Phi(x(T))$  pour les trajectoires du système :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $T$  est fixé,  $u(t) \in \mathbb{R}$ , sous la contrainte sur l'état :

$$c(x(t)) \leq 0, \quad t \in [0, T].$$

**Définition 2.3.1** On appelle arc frontière un arc  $\gamma_b$  tel que  $c(\gamma_b(t)) = 0$  et on note  $u_b$  un contrôle frontière associé.

**Définition 2.3.2** L'ordre  $m$  de la contrainte pour le système est le plus petit entier non nul tel que, pour tout  $k = 0, \dots, m-1$ ,  $c^{(k)}(x(t), u(t))$  ne dépend pas explicitement de  $u$ .

On fait les hypothèses suivantes :

1.  $f$ ,  $\Phi$  et  $c$  sont des applications lisses.
2. L'ensemble  $\mathcal{U}$  des contrôles admissibles est l'ensemble des applications  $u$  définies et continues par morceaux sur  $[0, T]$ .
3. Le long d'un arc frontière, le contrôle est lisse. La trajectoire et le contrôle sont lisses par morceaux sur  $[0, T]$ .
4. Le long d'un arc frontière d'ordre  $m$ , la condition générique suivante est vérifiée :

$$\frac{\partial}{\partial u}(c^{(m)})(\gamma_b(t)) \neq 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

**Le théorème de Kuhn-Tucker en dimension infinie.** Dans cette section on considère le problème :

$$\begin{cases} \min \Phi(u), & u \in \mathcal{U}, \\ S(u) \leq 0, \end{cases}$$

où  $S$  est une application de  $\mathcal{U}$  dans  $C^0[0, T]$ ,  $0$  est le vecteur nul de cet espace.

**Théorème 2.3.3** On suppose que  $\Phi$  et  $S : \mathcal{U} \mapsto C^0[0, T]$  sont Fréchet dérivables. Si  $u^*$  minimise  $\Phi$  sous la contrainte  $S \leq 0$ , alors il existe  $r_0 \geq 0$ ,  $\eta^* \in C^0[0, T]^*$  avec  $\eta^* \geq 0$  et non décroissant tel que le Lagrangien

$$L = r_0 \Phi(u) + \langle \eta^*, S(u) \rangle$$

soit stationnaire en  $u^*$ . De plus

$$\langle \eta^*, S(u^*) \rangle = 0.$$

**Preuve.** On introduit les ensembles suivants dans  $W = \mathbb{R} \times C^0[0, T]$  :

- $A = \{(r, z); r \geq \delta\Phi(u^*, \delta u), z \geq S(u^*) + \delta S(u^*, \delta u) \text{ pour une variation } \delta u \in \mathcal{U}\}$   
où  $\delta$  désigne la dérivée de Fréchet.
- $B = \{(r, z); r \leq 0, z \leq 0\}$ .

Les ensembles  $A$  et  $B$  vérifient les propriétés suivantes :

1. Ils sont convexes et  $\text{Int}(B) \neq \emptyset$ .
2.  $A \cap \text{Int}(B) = \emptyset$ . Supposons le contraire. Il existe donc  $r < 0$  et  $z < 0$  tel que pour une variation  $\delta u$  :

$$\begin{aligned} r &\geq \delta\Phi(u^*, \delta u), \\ z &\geq S(u^*) + \delta S(u^*, \delta u). \end{aligned}$$

Soit alors

$$y = S(u^*) + \delta S(u^*, \delta u).$$

Il existe donc  $\rho > 0$  tel que la boule  $B(y, \rho)$  soit contenue dans le cône  $N = \{x < 0\}$  de  $C^0[0, T]$ . Soit  $0 < \alpha < 1$ , alors  $\alpha y$  est le centre de la sphère ouverte de rayon  $\alpha\rho$  contenue dans  $N$ . Or  $S(u^*) \leq 0$  et  $N$  convexe, donc  $(1 - \alpha)S(u^*) + \alpha y$  est aussi contenue dans  $N$ . Par ailleurs

$$(1 - \alpha)S(u^*) + \alpha y = S(u^*) + \alpha\delta S(u^*, \delta u).$$

Or

$$S(u^* + \alpha\delta u) = S(u^*) + \alpha\delta S(u^*, \delta u) + o(\alpha).$$

Donc pour  $\alpha$  assez petit  $S(u^* + \alpha\delta u) < 0$ .

On montre de même que pour  $\alpha$  assez petit  $\Phi(u^* + \alpha\delta u) < \Phi(u^*)$ . D'où la contradiction car  $u^*$  est optimal, ce qui prouve la propriété 2.

Les propriétés 1, 2 et le théorème de la séparation [10] impliquent qu'il existe un hyperplan fermé  $H$  séparant  $A$  et  $B$ , c'est-à-dire qu'il existe  $r_0, \eta^*$  et  $\delta \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\begin{aligned} r_0 r + \langle z, \eta^* \rangle &\geq \delta, & \forall r, z \in A, \\ r_0 r + \langle z, \eta^* \rangle &\leq \delta, & \forall r, z \in B. \end{aligned}$$

Comme  $(0, 0) \in A \cap B$  on a  $\delta = 0$ . D'où il vient :

$$r_0 r + \langle z, \eta^* \rangle \leq 0, \quad \forall r, z \leq 0,$$

et donc  $r_0 \geq 0, \eta^* \geq 0$  i.e.  $\langle z, \eta^* \rangle \geq 0, \forall z \geq 0$ .

Aussi pour  $\delta u \in \mathcal{U}$ , on a  $(\delta\Phi(u^*, \delta u), S(u^*) + \delta S(u^*, \delta u)) \in A$ . Donc :

$$r_0 \delta\Phi(u^*, \delta u) + \langle S(u^*) + \delta S(u^*, \delta u), \eta^* \rangle \geq 0, \quad \forall \delta u \in \mathcal{U}. \quad (2.14)$$

En utilisant (2.14) avec  $\delta u = 0$ , il vient :

$$\langle S(u^*), \eta^* \rangle \geq 0.$$

Or  $S(u^*) \leq 0$  et  $\eta^* \geq 0$  donc on a aussi

$$\langle S(u^*), \eta^* \rangle \leq 0,$$

on en déduit la relation

$$\langle S(u^*), \eta^* \rangle = 0.$$

En plus les deux applications  $\delta\Phi(u^*, \cdot)$  et  $\delta S(u^*, \cdot)$  sont linéaires, donc pour  $-\delta u$ , la relation (2.14) implique

$$r_0 \delta\Phi(u^*, \delta u) + \langle \delta S(u^*, \delta u), \eta^* \rangle \leq 0, \quad \forall \delta u \in \mathcal{U},$$

ce qui implique la condition de stationnarité :

$$r_0 \delta \Phi(u^*, \delta u) + \langle \delta S(u^*, \delta u), \eta^* \rangle = 0, \quad \forall \delta u \in \mathcal{U}.$$

En utilisant le théorème de Riesz, voir [49], sur le dual de  $C^0[0, T]$ , il existe une fonction  $\nu^*$  à variation bornée telle que

$$\langle S(u^*), \eta^* \rangle = \int_0^T S(u^*) d\nu^*,$$

où l'intégrale est prise au sens de Stieljès.

Par ailleurs

$$r_0 r + \langle z, \eta^* \rangle \leq 0, \quad \forall r, z \leq 0,$$

et  $r_0 \geq 0$  donc  $\langle z, \eta^* \rangle \leq 0, \forall z \leq 0$ , d'où

$$\langle z, \eta^* \rangle = \int_0^T z d\nu^* \leq 0, \quad \forall z \leq 0,$$

et donc  $d\nu^* \geq 0$  sur  $[0, T]$ , i.e.  $\eta^* \geq 0$ .

### 2.3.3 Conditions nécessaires d'optimalité pour des systèmes avec contraintes sur l'état

Une contrainte de la forme  $\dot{x} = f(x, u)$  peut être incluse dans le problème précédent et le Lagrangien s'écrit :

$$L = r_0 \Phi(x(T)) + \int_0^T p(f - \dot{x}) dt + \int_0^T c(x) d\nu^*,$$

où  $p, \nu^*$ , d'après le théorème de Kuhn-Tucker, sont des fonctions à variations bornées.

**Remarque 2.3.2** Pour la contrainte  $f = \dot{x}$ , on peut la reformuler en deux contraintes de la forme :  $f - \dot{x} \leq 0$  et  $\dot{x} - f \leq 0$ .

Chaque fonction à variations bornées peut être écrite comme la somme d'une fonction absolument continue pour la mesure de Lebesgue, d'une fonction saut et d'une fonction singulière. En supposant que la partie singulière nulle et en intégrant par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} L &= (r_0 \Phi(x(T)) - p(T)x(T)) + p(0)x(0) + \int_0^T (pf dt + xdp) + \int_0^T c(x) d\nu^* \\ &+ \sum (p(t_i^+) - p(t_i^-))x(t_i). \end{aligned}$$

Sachant que  $x(0)$  et les  $x(t_i)$  sont fixes et en considérant des variations en  $x$ , en  $x(T)$  et en  $u$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \delta L &= \left( r_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} - p(T) \right) \delta x(T) + \left( \int_0^T \left( p \frac{\partial f}{\partial x} dt + dp + \frac{\partial c}{\partial x} d\nu^* \right) \right) \delta x \\ &+ \left( \int_0^T p \frac{\partial f}{\partial u} dt \right) \delta u. \end{aligned}$$

Ceci conduit à choisir formellement  $p$  pour annuler les termes en  $\delta x$  et en  $\delta x(T)$ , et l'on obtient :

$$p(T) = r_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(T)), \quad (2.15)$$

et

$$dp = -p \frac{\partial f}{\partial x} dt - \frac{\partial c}{\partial x} d\nu^*, \quad (2.16)$$

et la condition de stationnarité donne :

$$p \frac{\partial f}{\partial u} = 0 \quad \text{p.p. sur } [0, T]. \quad (2.17)$$

Considérons la condition :

$$\int_0^T c(x(t)) d\nu^*(t) = 0, \quad (2.18)$$

où  $x(t)$  est un arc optimal. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que  $x(t)$  est formé de deux arcs intérieurs au domaine et un arc frontière, où les points d'entrée et de sortie sont notés respectivement  $t_1$  et  $t_2$ . Alors :

$$\int_0^{t_1} c d\nu^* + \int_{t_1}^{t_2} c d\nu^* + \int_{t_2}^T c d\nu^* = 0,$$

où  $c = 0$  sur le bord et  $c < 0$  à l'intérieur. Par ailleurs  $d\nu^* \geq 0$ , d'où :

$$\int_0^{t_1} c d\nu^* \leq 0, \quad \int_{t_1}^{t_2} c d\nu^* = 0 \quad \text{et} \quad \int_{t_2}^T c d\nu^* \leq 0.$$

On en déduit que  $\nu^*$  est constant sur  $[0, t_1]$  et  $[t_2, T]$ .

On peut calculer formellement  $\nu^*$  sur le bord sous nos hypothèses de régularité.

**Lemme 2.3.1** *Sous nos hypothèses de régularité, on a formellement le long d'un arc frontière :*

$$\frac{d\nu^*}{dt} = \frac{p(t)\psi(t)}{(c^{(m)})_u},$$

où  $\psi(t)$  est une fonction lisse.  $(c^{(m)})_u$  est la dérivée partielle de  $c^{(m)}$  par rapport à  $u$ .

**Preuve.** On a  $pf_u = 0$  et en dérivant formellement, il vient :

$$\frac{d}{dt}(pf_u) = p\dot{f}_u + \dot{p}f_u = 0,$$

et d'après (2.16) on a

$$\dot{p} = -pf_x - \frac{d\nu^*}{dt}c_x,$$

d'où

$$p\dot{f}_u - pf_x f_u - \frac{d\nu^*}{dt}c_x f_u = 0.$$

Or  $\dot{c} = c_x f$  et si la contrainte est d'ordre un on a  $(\dot{c})_u = c_x f_u \neq 0$  le long de l'arc frontière. Sous nos hypothèses, on a donc :

$$\frac{d\nu^*}{dt} = \frac{p(t)\psi(t)}{(\dot{c})_u}.$$

Le cas d'ordre supérieur se traite de façon similaire, en remarquant que :

$$d \left( \left( \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}(pf) \right)_u \right) = \psi(t)p(t)dt - d\nu^* \left( \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}c \right)_u = 0,$$

d'où le résultat.

On peut donc poser  $\eta = \frac{d\nu^*}{dt}$  où  $\eta$  est nulle sur le domaine et continue sur le bord.

Par ailleurs on peut calculer le saut lors de la jonction avec l'arc frontière ou lors du départ de l'arc frontière :

On a

$$dp = -pf_x dt - d\nu^* c_x,$$

et en  $t_1$  :

$$\begin{aligned} p(t_1^+) - p(t_1^-) &= - \int_{t_1^-}^{t_1^+} d\nu^* c_x \\ &= -(\nu^*(t_1^+) - \nu^*(t_1^-))c_x(t_1). \end{aligned}$$

Posons  $\nu(t_1) = \nu^*(t_1^+) - \nu^*(t_1^-) \geq 0$ . Il vient :

$$p(t_1^+) = p(t_1^-) - \nu(t_1)c_x(t_1). \quad (2.19)$$

On peut aussi utiliser [12] pour montrer la condition :

$$p(t_1^+)f = p(t_1^-)f, \quad (2.20)$$

et aussi  $r_0 \neq 0$ , donc en normalisant, on peut choisir  $r_0 = 1$ .

On a donc montré les conditions nécessaires de [25] :

**Théorème 2.3.4** *Les conditions nécessaires d'optimalité sont :*

$$\dot{p} = -pf_x - \eta c_x, \quad p(T) = \Phi_x(x(T)), \quad pf_u = 0,$$

où  $\eta(t)$  est une fonction nulle si  $c < 0$ , continue et positive sur l'arc frontière. De plus, lors d'un contact ou d'une jonction au temps  $t_i$  avec la frontière, on a la condition de saut suivante :

$$p(t_i^+) = p(t_i^-) - \nu(t_i)c_x(t_i),$$

où  $\nu(t_i) \geq 0$  et la fonction  $pf$  reste continue.

**Remarque 2.3.3** 1. *On a montré formellement les conditions nécessaires d'optimalité. Le problème technique est de justifier rigoureusement l'existence d'une mesure  $d\nu^*$  dont la composante singulière est nulle.*

2. *On peut aussi montrer des conditions nécessaires d'optimalité analogues avec des conditions finales imposées.*



## 2.4 Le cas affine et le principe du minimum de Maurer

### 2.4.1 Préliminaires

Dans cette section on se propose de calculer un contrôle  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$  scalaire et continu par morceaux qui minimise un coût de la forme

$$J(u) = \Phi(x(T)),$$

sous les conditions suivantes :  
le système considéré est affine

$$\dot{x}(t) = f(x, u) = X(x(t)) + u(t)Y(x(t));$$

les conditions limites sont

$$x(0) = x_0, \quad \Psi(x(T)) = 0;$$

la contrainte sur le contrôle est

$$|u(t)| \leq M, \quad \text{où } M > 0;$$

la contrainte sur l'état est

$$C(x(t)) \leq 0,$$

où  $f$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi$  et  $C$  sont supposés des applications lisses et le temps final  $T$  est fixé.

**Notation.** On note respectivement  $[X, Y](x)$  et  $Y.C(x)$ , le crochet et la dérivée de Lie calculés avec la convention :

$$[X, Y](x) = \frac{\partial Y}{\partial x}(x)X(x) - \frac{\partial X}{\partial x}(x)Y(x),$$

$$Y.C(x) = \frac{\partial C}{\partial x}(x)Y(x).$$

Avec ces notations, on peut redéfinir l'ordre de la contrainte par :

**Définition 2.4.1** *L'ordre de la contrainte  $C$  est le plus petit entier non nul  $m$  tel que :*

$$Y.C = Y.(X.C) = \dots = Y.(X^{m-2}.C) = 0 \quad \text{et} \quad Y.(X^{m-1}.C) \neq 0,$$

où les champs de vecteurs  $X, Y$  agissent sur  $C$  par la dérivée de Lie.

**Définition 2.4.2** *Un arc frontière  $t \mapsto \gamma_b(t)$  est une solution non triviale du système entièrement contenue dans  $C = 0$ .*

Si l'ordre de la contrainte est  $m$ , un arc frontière peut être calculé en dérivant  $m$  fois la fonction  $t \mapsto C(x(t))$  et en résolvant par rapport à  $u$  l'équation linéaire :

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} C(x(t)) = X^m.C + uY(X^{m-1}.C) = 0.$$

Un arc frontière est donc contenu dans :

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} C(x(t)) = 0, \quad 0 \leq k \leq m-1.$$

La contrainte  $C = 0$  est dite primaire. Les contraintes  $\frac{\partial^k}{\partial t^k} C(x(t)) = 0, 1 \leq k \leq m-1$  sont dites secondaires.

On note

$$u_b = -\frac{X^m \cdot C}{Y(X^{m-1} \cdot C)}$$

le feedback associé à un arc frontière non réduit à un point.

**Hypothèse 2** Soit  $t \mapsto \gamma_b(t), t \in [0, T]$  un arc frontière. On introduit les hypothèses suivantes :

- (C<sub>1</sub>) le long de  $\gamma_b, Y(X^{m-1} \cdot C) \neq 0$  où  $m$  est l'ordre de la contrainte,
- (C<sub>2</sub>)  $|u_b(t)| \leq M$  sur  $t \in ]0, T[$ , i.e. le contrôle frontière est admissible,
- (C<sub>3</sub>)  $|u_b(t)| < M$  sur  $t \in [0, T]$ , i.e. le contrôle frontière est admissible et non saturant.

#### 2.4.2 Formulation des conditions nécessaires

Supposons que  $t \mapsto x(t), t \in [0, T]$  est une solution optimale lisse par morceaux. Supposons de plus que le long d'un arc frontière les hypothèses (C<sub>1</sub>) et (C<sub>2</sub>) sont satisfaites. Introduisons le Hamiltonien :

$$H(x, p, u, \eta) = \langle p, X(x) + uY(x) \rangle + \eta(t)C(x),$$

où  $p$  est le vecteur adjoint et  $\eta$  le multiplicateur de Lagrange de la contrainte, alors les conditions nécessaires de Maurer [33] sont les suivantes :

1. Il existe une fonction  $t \mapsto \eta(t)$  positive et des constantes  $\eta_0 \geq 0, \sigma \in \mathbb{R}^n$  tels que le vecteur adjoint vérifie :

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -p \left( \frac{\partial X}{\partial x} + u \frac{\partial Y}{\partial x} \right) - \eta(t) \frac{\partial C}{\partial x} \quad (\text{p.p}), \quad (2.21)$$

$$p(T) = \eta_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(T)) + \sigma \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x(T)). \quad (2.22)$$

2. La fonction  $t \mapsto \eta(t)$  est continue à l'intérieur d'un arc frontière et vérifie :

$$\eta(t)C(x(t)) = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.23)$$

3. Lors d'un contact ou d'une jonction au temps  $t_i$  avec la frontière on a :

$$\begin{aligned} H(t_i^+) &= H(t_i^-), \\ p(t_i^+) &= p(t_i^-) - \nu_i \frac{\partial C}{\partial x}(x(t_i)), \quad \nu_i \geq 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

4. Le contrôle optimal  $u(t)$  minimise presque partout le Hamiltonien :

$$H(x(t), p(t), u(t), \eta(t)) = \min_{v \in [-M, M]} H(x(t), p(t), v, \eta(t)). \quad (2.25)$$

**Remarque 2.4.1** Dans ces conditions nécessaires, seule la contrainte  $C$  est pénalisée. D'autres choix sont possibles en utilisant en particulier les contraintes secondaires, voir [12].

### 2.4.3 Application au problème de temps minimal

Dans le problème de temps minimal, le temps de transfert n'est pas fixé. On reparamétrise les trajectoires sur  $[0, 1]$  en posant  $s = \frac{t}{T}$  et  $z = T$ . Le problème est alors de minimiser  $J(u) = t(1)$  pour le système étendu :

$$\frac{dx}{ds} = (X + uY)z, \quad \frac{dt}{ds} = z, \quad \frac{dz}{ds} = 0.$$

Le Hamiltonien s'écrit :

$$H = \langle p, (X(x) + uY(x))z \rangle + p_t z + \eta(t)C(x),$$

Le système adjoint se décompose en :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -p \left( \frac{\partial X}{\partial x} + u \frac{\partial Y}{\partial x} \right) z - \eta \frac{\partial C}{\partial x}, \\ \frac{dp_t}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \\ \frac{dp_z}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial z} = -p(X + uY) - p_t. \end{aligned}$$

Les conditions de transversalité impliquent :

$$p_t(1) \geq 0, \quad p_z(0) = 0.$$

Or on a de plus :  $h = \min_{v \in [-M, M]} H = 0$ , voir [24], d'où  $(p(X + uY) + p_t)z = 0$  et donc d'après le système adjoint  $p_z = 0$ .

En reparamétrisant par  $t$  et en remplaçant  $\eta$  par  $\frac{\eta}{z}$  et  $h$  par  $\frac{h}{z}$  on obtient :

**Proposition 2.4.1** Les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème de temps minimal sont :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = X(x) + uY(x), \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -p \left( \frac{\partial X}{\partial x} + u \frac{\partial Y}{\partial x} \right) - \eta(t) \frac{\partial C}{\partial x}, \\ \langle p, (X + uY) \rangle + p_t &= \min_{v \in [-M, M]} \langle p, (X + vY) \rangle + p_t = 0, \quad (p, p_t) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Lors d'un contact ou d'une jonction avec la frontière (condition de saut) :

$$p(t_i^+) = p(t_i^-) - \nu_i \frac{\partial C}{\partial x}(x(t_i)), \quad \nu_i \geq 0.$$

De plus  $p_t \geq 0$ ,  $\eta(t) \geq 0$  avec  $\eta(t) = 0$  quand  $C < 0$ , et  $t \mapsto \eta(t)$  est continue le long de la frontière  $C = 0$ .

**Définition 2.4.3** Pour le problème de temps minimal, on appelle extrémale  $(x, p, u, \eta, \nu_i)$  une solution des équations précédentes.

**Remarque 2.4.2** Dans le domaine où  $C < 0$  les conditions nécessaires précédentes ne sont que les conditions nécessaires du principe du minimum de Pontriaguine [39].

#### 2.4.4 Calcul des contrôles extrémaux

##### A : Extrémales Intérieures ( $\eta = \nu = 0$ )

Ce sont les extrémales incluses dans l'ensemble :  $C(x(t)) < 0$ . À partir de l'équation (3.24) on peut distinguer deux types d'extrémales :

- **Extrémales Régulières :**

Il n'existe pas un d'intervalle  $I \subseteq [0, T]$  tel que  $\langle p, Y \rangle = 0$  sur  $I$ . D'après (3.24) le contrôle est alors donné par :  $u(t) = -M \text{ signe } \langle p, Y \rangle$ .

- **Extrémales Singulières :**

Le triplet  $(x, p, u)$  est une extrémale singulière sur  $I$  si elle est solution des équations :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \langle p, Y \rangle = 0,$$

où  $H = \langle p, X + uY \rangle$ .

**Définition 2.4.4** Une extrémale singulière sur  $I$  est dite d'ordre minimal si

$$\langle p(t), [Y, [X, Y]](x(t)) \rangle \neq 0, \quad \forall t \in I$$

**Proposition 2.4.2** Si  $(x, p, u)$  est une extrémale singulière d'ordre minimal définie sur  $I$ , alors :

$$\forall t \in I \quad u_s(t) = -\frac{\langle p(t), [X, [X, Y]](x(t)) \rangle}{\langle p(t), [Y, [X, Y]](x(t)) \rangle}.$$

Pour tester l'optimalité d'une extrémale singulière, on utilise la condition nécessaire de Legendre-Clebsch, qui s'écrit :

$$\langle p(t), X(x) \rangle \langle p(t), [Y, [X, Y]](x) \rangle \geq 0,$$

$$\text{avec } \langle p(t), Y(x) \rangle = \langle p(t), [X, Y](x) \rangle = 0.$$

##### B : Extrémales Frontières

Sous les hypothèses  $(C_1)$  et  $(C_2)$  une extrémale frontière vérifie les conditions nécessaires précédentes, et inclue dans l'ensemble  $C(x(t)) = 0$ , en plus le contrôle est donné par :

$$u_b = -\frac{X^m.C}{Y(X^{m-1}.C)}.$$

Elle vérifie également :  $\langle p, Y \rangle = 0$ .

**Définition 2.4.5** On note  $\Phi(t) = \langle p(t), Y(x(t)) \rangle$  la fonction de commutation. L'ensemble  $\Sigma : \langle p(t), Y(x(t)) \rangle = 0$  s'appelle la surface formée des points où le contrôle est discontinu. Une extrémale est dite bang si  $u = +M$ , ou  $-M$  et bang-bang si  $u(t)$  est constant par morceaux et défini presque partout par  $u(t) = -M$  signe  $(\langle p, Y \rangle)$ . Une extrémale est dite singulière si elle est contenue dans l'ensemble  $\Sigma_1 = \Sigma / \{C = 0\}$  (appelée surface de commutation). Une extrémale est dite frontière si elle est contenue dans  $\{C = 0\}$ . On note respectivement  $\gamma_+$ ,  $\gamma_-$ ,  $\gamma_s$ ,  $\gamma_b$  un arc lisse associé à  $u = +M$ ,  $u = -M$ , un contrôle singulier  $u_s$ , un contrôle de la frontière  $u_b$ .  $\gamma_1 \gamma_2$  représente un arc  $\gamma_1$  suivi d'un arc  $\gamma_2$ .

### 2.4.5 Calcul des paramètres $(\eta, \nu_i)$

Dans le principe du minimum sans contrainte sur l'état, les indéterminées sont le vecteur adjoint et le temps calculés avec les conditions limites sur l'état. Dans le cas contraint, il y a des indéterminées supplémentaires  $(\eta, \nu_i)$ . La contribution essentielle de Maurer [33] sert à les calculer en utilisant le concept d'ordre. On va présenter ces calculs sous forme des formules de nature géométrique en utilisant les crochets de Lie itérés de  $X, Y$  agissant sur les contraintes.

#### 1. Calcul de $\eta(t)$ :

Soit  $(\psi_i)_{i \geq 0}$  la suite de champs de vecteurs définie par :

$$\begin{cases} \psi_0 = Y, \\ \psi_{i+1} = [X, \psi_i] + u[Y, \psi_i] \quad \forall i > 0. \end{cases}$$

On peut vérifier par récurrence que  $(\psi_i)_{i \geq 0}$  et la contrainte  $C$  (d'ordre  $m$ ) vérifient :

$$\psi_k \cdot \left( \frac{\partial^{i-(k+1)}}{\partial t^{i-(k+1)}} C(x(t)) \right) = (-1)^k \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial^i}{\partial t^i} C(x(t)) \right), \quad i = 1, \dots, m; \quad k = 0, \dots, i-1. \quad (2.26)$$

D'où :

**Lemme 2.4.1** La suite  $(\psi_i)_{i \geq 0}$  vérifie :

$$\psi_i \cdot C = \begin{cases} 0 & \forall i < m-1, \\ (-1)^{m-1} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial^m}{\partial t^m} C(x(t)) \right) = (-1)^{m-1} Y \cdot (X^{m-1} \cdot C) & \text{si } i = m-1. \end{cases} \quad (2.27)$$

En effet : pour  $k = i-1$ , la formule (2.26) donne :

$$\psi_{i-1} \cdot C(x(t)) = (-1)^{i-1} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial^i}{\partial t^i} C(x(t)) \right) \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (2.28)$$

donc :

$$\psi_i \cdot C(x(t)) = (-1)^i \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial^{i+1}}{\partial t^{i+1}} C(x(t)) \right) \quad \forall i = 0, \dots, m-1. \quad (2.29)$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial^{i+1}}{\partial t^{i+1}} C(x(t)) \right) = \begin{cases} 0 & \forall i < m-1 \\ Y \cdot (X^{m-1} \cdot C) & \text{si } i = m-1, \end{cases} \quad (2.30)$$

donc d'après (2.29) et (2.30), on obtient (2.27).

**Corollaire 2.4.1** *Le long d'un arc frontière définie sur  $[t_1, t_2]$ , on a :*

$$\begin{cases} \frac{\partial^i}{\partial t^i} \Phi(t) = \langle p(t), \psi_i \rangle = 0 & \forall i \leq m-1, \\ \frac{\partial^m}{\partial t^m} \Phi(t) = \langle p(t), \psi_m \rangle - (-1)^{m-1} \eta(t) Y.(X^{m-1}.C) = 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

De plus on a :

$$\eta(t) = (-1)^{m-1} \frac{\langle p(t), \psi_m \rangle}{Y.(X^{m-1}.C)} \quad \forall t \in [t_1^+, t_2^-]. \quad (2.32)$$

Pour la démonstration, il suffit d'appliquer le lemme 2.4.1 et l'équation adjoint :

$$\frac{dp}{dt} = -p \left( \frac{\partial X}{\partial x} + u \frac{\partial Y}{\partial x} \right) - \eta \frac{\partial C}{\partial x}.$$

**Lemme 2.4.2** *Si  $C$  est une contrainte d'ordre  $m \geq 2$ , alors on a :*

$$(*) \quad (ad^i X(Y)).C = 0 \quad \forall i = 0, \dots, m-2, \quad (2.33)$$

$$(**) \quad (ad^{m-1} X(Y)).C = (-1)^{m-1} Y.(X^{m-1}.C), \quad (2.34)$$

où :  $ad^i X(Y) = \underbrace{[X, [X, [\dots [X, Y] \dots]]}_{i \text{ fois } X}$ .

**Preuve.** On montre (\*) et (\*\*) par récurrence sur  $m$  :

Pour  $m = 2$ , on a :

$Y.C = 0$  d'où (\*) est vérifié.

$[X, Y].C = X.(Y.C) - Y.(X.C) = -Y.(X.C)$  d'où (\*\*) est vérifié.

Supposons que (\*) et (\*\*) sont vérifiés pour toute contrainte d'ordre  $\leq m-1$ .

Soit  $C$  une contrainte d'ordre  $m$ .

Pour  $1 \leq i \leq m-2$  on a :

$$(ad^i X(Y)).C = X.(ad^{i-1} X(Y)).C - ad^{i-1} X(Y).(X.C). \quad (2.35)$$

Or  $X.C = \frac{dC}{dt}$  est une contrainte d'ordre  $m-1$ , donc elle vérifie (\*) par hypothèse de récurrence, i.e. :  $ad^{i-1} X(Y).(X.C) = 0$  pour  $1 \leq i \leq m-2$ .

Donc (2.35) implique que la suite  $(ad^i X(Y)).C$  vérifie :

$(ad^i X(Y)).C = X.(ad^{i-1} X(Y)).C$  pour  $1 \leq i \leq m-2$ .

D'autre part  $((ad^i X(Y)).C)_{i=0} = Y.C = 0$ , donc  $(ad^i X(Y)).C = 0$  pour  $0 \leq i \leq m-2$ .

(I.e.  $C$  vérifie (\*)).

Aussi on a :

$$(ad^{m-1} X(Y)).C = X.(ad^{m-2} X(Y)).C - ad^{m-2} X(Y).(X.C). \quad (2.36)$$

Or,  $X.C = \frac{dC}{dt}$  est une contrainte d'ordre  $m-1$ , donc d'après l'hypothèse de récurrence elle vérifie (\*\*), ce qui implique :

$$(ad^{m-2} X(Y)).(X.C) = (-1)^{m-2} Y.(X^{m-2}.(X.C)) = (-1)^{m-2} Y.(X^{m-1}.C).$$

De plus  $ad^{m-2}X(Y).C = 0$  car  $C$  vérifie (\*), d'où  $X.(ad^{m-2}X(Y).C) = 0$ . Donc (2.36) donne :  $(ad^{m-1}X(Y)).C = (-1)^{m-1}Y.(X^{m-1}.C)$  (i.e.  $C$  vérifie (\*\*)).

**Remarque 2.4.3** *On peut remarquer que le lemme précédent est valable aussi pour  $m = 1$ .*

D'après le lemme et le Corollaire précédents, on obtient donc :

**Corollaire 2.4.2** *Durant un arc frontière définie sur  $[t_1, t_2]$ , on a :*

$$\eta(t) = \frac{\langle p(t), \psi_m \rangle}{(ad^{m-1}X(Y)).C} \quad \forall t \in [t_1^+, t_2^-], \quad (2.37)$$

$$u_b(t) = (-1)^m \frac{X^m.C}{(ad^{m-1}X(Y)).C} \quad \forall t \in [t_1^+, t_2^-], \quad (2.38)$$

où  $C$  est une contrainte d'ordre  $m$ .

## 2. Calcul de $\nu$ :

Soit  $t_1$  un point de jonction ou de contact.

On sait que :  $\frac{\partial^i}{\partial t^i} \Phi(t) = \langle p(t), \psi_i \rangle$  si  $i \leq m-1$ . D'où :  $\frac{\partial^i}{\partial t^i} \Phi(t_1^+) = \langle p(t_1^+), \psi_i(t_1^+) \rangle$  si  $i \leq m-1$ , avec  $\psi_i(t_1^+) = \psi_i(t)/_{t=t_1}$ , où  $\psi_i(t)$  est la suite déjà construite, en prenant  $u = u_b$ . La condition de saut implique :  $p(t_1^+) = p(t_1^-) - \nu \frac{\partial C}{\partial x}(x(t_1))$ ,  $\nu \geq 0$  donc  $\frac{\partial^i}{\partial t^i} \Phi(t_1^+) = \langle p(t_1^-), \psi_i(t_1^+) \rangle - \nu \langle \psi_i(t_1^+), C \rangle$  si  $i \leq m-1$ . D'après les lemmes 2.4.1 et 2.4.2 on obtient donc :

**Corollaire 2.4.3** *Si  $t_1$  est un point de jonction ou de contact, alors le saut  $\nu$  vérifie :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i}{\partial t^i} \Phi(t_1^+) &= \langle p(t_1^-), \psi_i(t_1^+) \rangle \quad \forall i < m-1, \\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} \Phi(t_1^+) &= \langle p(t_1^-), \psi_{m-1}(t_1^+) \rangle - \nu (ad^{m-1}X(Y)).C. \end{aligned}$$

En particulier si  $t_1$  est un point de jonction, le saut  $\nu$  vérifie :

$$\begin{aligned} \langle p(t_1^-), \psi_i(t_1^+) \rangle &= 0 \quad \forall i < m-1, \\ \nu &= \frac{\langle p(t_1^-), \psi_{m-1}(t_1^+) \rangle}{(ad^{m-1}X(Y)).C}. \end{aligned}$$

Maintenant on calcule  $\eta(t)$  et  $\nu$  pour  $m = 1$ ,  $m = 2$  et  $m = 3$  :

### 1. Le cas $m = 1$ :

D'après les calculs précédents on a :

$$\psi_0 = Y, \quad \psi_1 = [X, Y], \quad u_b = -\frac{X.C}{Y.C},$$

$$\eta(t) = \frac{\langle p(t), [X, Y] \rangle}{Y.C} \quad \forall t \in [t_1^+, t_2^-],$$

$$\nu = \frac{\Phi(t_1^-) - \Phi(t_1^+)}{Y.C}.$$

- Si  $t_1$  est un point de jonction entre un arc singulier et un arc frontière, on a :  $\Phi(t_1^-) = \Phi(t_1^+) = 0$ , d'où  $\nu = 0$ .
- Aussi on a :

**Lemme 2.4.3** *Supposons que le contrôle est discontinu lors du contact ou de la jonction d'un arc bang-bang avec la frontière, alors  $\nu = 0$ .*

**Preuve.** Posons  $a = X.C$  et  $b = Y.C$ . On a  $\dot{C} = a + ub$ . Soit  $Q$  le point de contact d'un arc bang  $t \mapsto x(t)$  avec la frontière au temps  $t_i$ . Soit  $\epsilon > 0$  petit, on a alors :

$$C(x(t_i - \epsilon)) < 0, \quad C(x(t_i + \epsilon)) < 0.$$

En passant à la limite avec  $\epsilon \rightarrow 0$ , on obtient

$$(a + bu)(t_i^-) \geq 0, \quad (a + bu)(t_i^+) \leq 0.$$

En faisant la différence, il vient :

$$b(x(t_i))(u(t_i^-) - u(t_i^+)) \geq 0.$$

Supposons par exemple que  $b(x(t_i)) > 0$ . Donc  $u(t_i^-) - u(t_i^+) > 0$  car le contrôle est discontinu. D'après le principe du minimum on doit avoir :

$$\Phi(t_i^+) = \Phi(t_i^-) - \nu_i b(x(t_i)),$$

et l'on en déduit  $\nu_i b(x(t_i)) \leq 0$ . Par ailleurs on doit avoir  $\nu_i \geq 0$ . Donc si  $\nu_i > 0$  on doit avoir  $b(x(t_i)) \leq 0$ , ce qui contredit l'hypothèse. Le cas  $b(x(t_i)) < 0$  est semblable.

La discussion est similaire lors de la jonction avec un arc frontière.

## 2. Le cas $m = 2$ :

D'après les calculs précédents on a :

$$\psi_0 = Y, \quad \psi_1 = [X, Y], \quad \psi_2 = [X, [X, Y]] + u[Y, [X, Y]].$$

**Lemme 2.4.4** 1. *Le long de l'arc frontière on a :*

$$u_b = \frac{X^2.C}{[X, Y].C},$$

$$\langle p(t), Y(x(t)) \rangle = 0,$$

$$\langle p(t), [X, Y](x(t)) \rangle = 0,$$

$$\eta(t) = \frac{\langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle + u_b \langle p(t), [Y, [X, Y]] \rangle}{[X, Y].C}.$$



2. En un point de contact ou de jonction :

$$\Phi(t_1^-) = \Phi(t_1^+),$$

$$\nu = \frac{\langle p(t_1^-), [X, Y] \rangle - \langle p(t_1^+), [X, Y] \rangle}{[X, Y].C}.$$

Donc d'après le lemme précédent :

- Si  $t_1$  est un point de jonction entre un arc singulier et un arc frontière, on a :  $\langle p(t_1^-), [X, Y] \rangle = \langle p(t_1^+), [X, Y] \rangle = 0$ , d'où  $\nu = 0$ .
- Si  $t_1$  est un point de jonction entre un arc bang-bang et un arc frontière, on a :  $\langle p(t_1^+), [X, Y] \rangle = 0$ , d'où

$$\nu = \frac{\langle p(t_1^-), [X, Y] \rangle}{[X, Y].C}.$$

3. **Le cas  $m = 3$  :**

D'après les calculs précédents on a :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= Y, & \psi_1 &= [X, Y], & \psi_2 &= [X, [X, Y]] + u[Y, [X, Y]], \\ \psi_3 &= [X, [X, [X, Y]]] + u^2[Y, [Y, [X, Y]]] + 2u[Y, [X, [X, Y]]] + ((X.u) + u(Y.u))[Y, [X, Y]]. \end{aligned}$$

**Lemme 2.4.5** 1. Le long de l'arc frontière, on a :

$$u_b = -\frac{X^3.C}{[X, [X, Y]].C},$$

$$\langle p(t), Y \rangle = \langle p(t), [X, Y] \rangle = \langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle + u_b \langle p(t), [Y, [X, Y]] \rangle = 0,$$

$$\eta(t) = \frac{(\langle p(t), \psi_3 \rangle_{u=u_b})}{([X, [X, Y]].C)}.$$

2. En un point de contact ou de jonction :

$$\Phi(t_1^-) = \Phi(t_1^+),$$

$$\langle p(t_1^-), [X, Y] \rangle = \langle p(t_1^+), [X, Y] \rangle,$$

$$\nu = \frac{\langle p(t_1^-), \psi_2(t_1^+) \rangle - \langle p(t_1^+), \psi_2(t_1^+) \rangle}{[X, [X, Y]].C}.$$

Donc d'après le lemme précédent :

- Si  $t_1$  est un point de jonction entre un arc bang-bang et l'arc frontière, alors  $\langle p(t_1^+), \psi_2(t_1^+) \rangle = 0$ , d'où :

$$\nu = \frac{\langle p(t_1^-), \psi_2(t_1^+) \rangle}{[X, [X, Y]].C} = \frac{\langle p(t_1^-), [X, [X, Y]] \rangle + u_b(t_1^+) \langle p(t_1^-), [Y, [X, Y]] \rangle}{[X, [X, Y]].C}.$$

- Si  $t_1$  est un point de jonction entre un arc singulier (d'ordre minimal) et l'arc frontière, or on sait que  $u_s$  vérifie :

$$\langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle + u_s \langle p(t), [Y, [X, Y]] \rangle = 0,$$

d'où

$$\nu = \frac{(u_b(t_1^+) - u_s(t_1^-)) \langle p(t_1^-), [Y, [X, Y]] \rangle}{[X, [X, Y]].C}.$$

### **Conclusion**

Nous avons tout d'abord donné dans ce chapitre les résultats de Weierstrass [2] dans le plan pour obtenir des conditions géométriques nécessaires d'optimalité . Nous nous sommes ensuite intéressés aux conditions analytiques nécessaires d'optimalité développées par Jacobson [25] pour un système général, en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange et le théorème de Kuhn-Tucker. Enfin nous avons traité le cas affine, en simplifiant le calcul des multiplicateurs supplémentaires.

### **Notes et sources**

Les travaux de Weierstrass présentés dans ce chapitre sont extraits de l'ouvrage de Bolza [2]. Les conditions nécessaires d'optimalité utilisées dans cette section sont dues à Bryson, Denham et Dreyfus [12], et prouvées formellement dans l'article de Jacobson, Lele et Speyer [25] pour le cas d'un système général. La version concernant le cas affine est due à Maurer [33].



## Chapitre 3

# Contrôle optimal de l'arc atmosphérique de la navette spatiale

## 3.1 Introduction

Nous nous intéressons au problème du contrôle optimal d'une navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique, où le contrôle est l'angle de gîte ou sa dérivée, et le coût est le flux thermique total (facteur d'usure de la navette). L'objectif est de déterminer une trajectoire optimale jusqu'à une cible donnée, sachant que la navette est de plus soumise à des contraintes sur l'état. La structure de ce chapitre est la suivante. Dans une première partie nous présentons une modélisation du problème de rentrée atmosphérique, nous posons les deux problèmes de contrôle optimal selon le choix du contrôle (angle de gîte ou dérivée de l'angle de gîte) et on suggère une approximation polynômiale pour les coefficients de traînée et de portance  $C_D$  et  $C_L$ . Dans une deuxième partie nous résolvons géométriquement et numériquement le problème simplifié en dimension trois (comme modèle mono-entrée), en traitant ses deux modèles associés suivant le choix du contrôle. Enfin dans une troisième partie nous traitons le modèle complet de la navette.

## 3.2 Modélisation du problème de rentrée atmosphérique

### 3.2.1 Présentation du projet

Ce projet a été proposé par le CNES et est motivé par l'importance croissante de la théorie du contrôle dans les domaines de la mécanique spatiale :

- problèmes de guidage, transferts d'orbites (voir chapitre 1),
- problèmes de rentrée atmosphérique qui consiste à envoyer une navette spatiale vers la planète Mars, dans le but de ramener sur Terre des échantillons martiens.

En gros, le rôle de l'arc atmosphérique est :

- d'amener l'engin spatial d'une position initiale précise à une cible donnée,
- de plus il faut prendre en compte certaines contraintes sur l'état : contrainte sur le flux thermique (sécurité des pilotes), sur l'accélération normale (confort du vol), et sur la pression dynamique (limite structurelle du véhicule),
- enfin on cherche de plus à minimiser un critère d'optimisation : le flux thermique total de la navette.

Le contrôle est lié à l'aérodynamique de la navette. La question qui se pose est la suivante : les forces aérodynamiques peuvent-elles jouer pour le freinage de la navette de manière adéquate ? En fait si l'altitude est trop élevée ( $\geq 120 \text{ km}$ ), la densité atmosphérique est trop faible et il est physiquement impossible de générer des forces aérodynamiques suffisamment intenses. Au contraire si l'altitude est trop basse ( $\leq 20 \text{ km}$ ), la densité atmosphérique est trop grande et que l'emploi des forces aérodynamiques conduirait à une violation du seuil autorisé pour le flux thermique ou pour la pression dynamique. En revanche si l'altitude est comprise entre  $20 \text{ km}$  et  $120 \text{ km}$ , on peut trouver un compromis, c'est ce qu'on appelle la phase atmosphérique. Durant cette phase, la navette se comporte comme un planeur, c'est-à-dire sans force de poussée. L'engin est donc soumis uniquement à la force de gravité et aux forces aérodynamiques. Le contrôle est l'angle de gîte (ou dérivée de l'angle de gîte) qui représente l'angle entre les ailes et un plan horizontal contenant la navette. Enfin, on choisit comme critère d'optimisation le flux thermique total de la navette.

### 3.2.2 Modélisation du problème

Le problème est de contrôler l'arc atmosphérique au voisinage d'une planète. Sans nuire à la généralité, on peut identifier cette planète à la Terre. Pour modéliser les équations du vol, on utilise les lois de la mécanique classique ainsi que certaines hypothèses sur la forme et la structure de la planète (modélisation de la force d'attraction), sur la nature de l'atmosphère et un modèle pour la force aérodynamique qui se décompose en une composante dite de traînée et une composante dite de portance, voir [18].

On note  $R_1 = (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  le référentiel lié à la Terre où  $\vec{K}$  est le vecteur ligne NS, axe de rotation uniforme de la Terre de vitesse angulaire  $\Omega\vec{K}$ , et  $\vec{I}$  est l'intersection avec le méridien de Greenwich.

Soit  $R$  le rayon de la Terre et  $G$  le centre de gravité de la navette. On note  $(r, l, L)$  les coordonnées sphériques de  $G$  où  $r (\geq R)$  désigne la distance  $OG$  de  $G$  par rapport au centre de la Terre et  $l, L$  représentent respectivement la longitude et la latitude,  $\vec{OG} = r\vec{e}_r$  et on note  $R'_1 = (\vec{e}_r, \vec{e}_l, \vec{e}_L)$  le repère mobile canonique associé, voir figure 3.1, (i).

Le système de coordonnées sphériques présente une singularité au pôle Nord et au pôle Sud. Pour représenter la dynamique de  $G$  sous une forme plus simple on introduit un second repère mobile  $R_2 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ainsi défini : soit  $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$  la trajectoire de  $G$  dans le référentiel  $R_1$  et  $\vec{v}$  la vitesse relative :

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{I} + \dot{y}\vec{J} + \dot{z}\vec{K}. \quad (3.1)$$

Par définition  $\vec{i} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ . Le vecteur unitaire  $\vec{i}$  est repéré par deux angles, voir figure 3.1, (ii) :

- la pente  $\gamma$ , aussi appelée angle de vol, représente l'angle entre un plan horizontal et un plan contenant la navette,
- l'azimut  $\chi$ , est l'angle entre la projection de  $\vec{v}$  dans un plan horizontal et le vecteur  $\vec{e}_L$ .

On note  $\vec{j}$  le vecteur unitaire dans le plan  $(\vec{e}_r, \vec{i})$ , perpendiculaire à  $\vec{i}$  et orienté par  $\vec{j} \cdot \vec{e}_r > 0$ . On pose  $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$ . Ceci définit le référentiel  $R_2$ . Ce repère mobile est bien adapté pour une expression simple des forces agissant sur la navette.

#### Modélisation des forces.

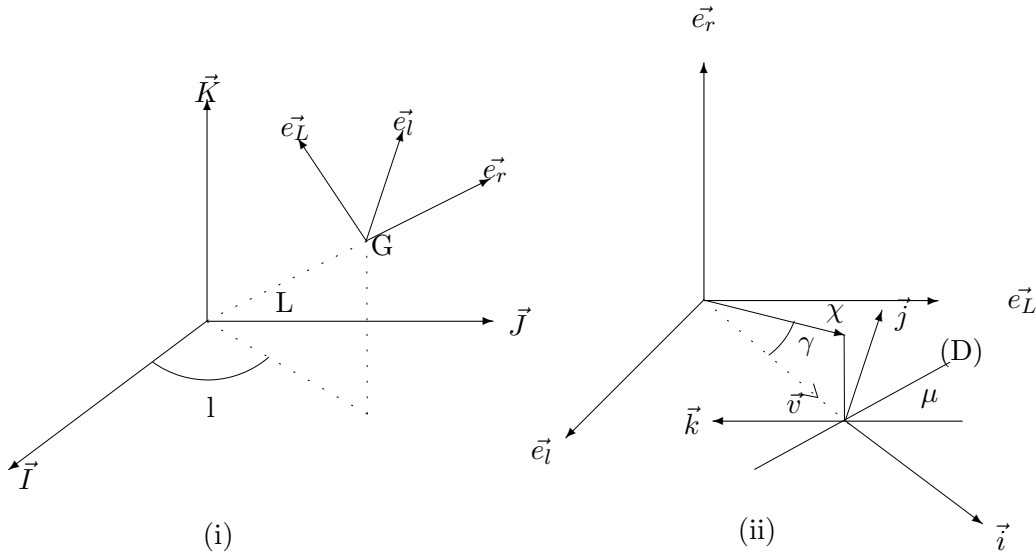
Pour la modélisation des forces, on fait l'hypothèse suivante le long l'arc atmosphérique :

**Hypothèse 3** *La navette est un planeur, c'est-à-dire que la poussée de la navette est nulle.*

Sous cette hypothèse, les forces sont de deux types : force gravitationnelle et forces aérodynamiques de traînée et de portance.

– **Action de la gravitation** : elle résulte de l'attraction terrestre. On néglige l'aplatissement de la Terre et on suppose donc qu'elle est orientée selon l'axe  $\vec{e}_r$ . Dans le repère  $R_2$ , elle s'écrit :

$$\vec{P} = -mg(\sin \gamma \vec{i} + \cos \gamma \vec{j}), \quad (3.2)$$

Figure 3.1— Repères  $R_1$ ,  $R'_1$  et  $R_2$ 

où l'accélération de la gravité est de la forme :  $g = \frac{g_0}{r^2}$ .

– **Action de l'atmosphère (forces aérodynamiques)** : pour modéliser l'action de l'atmosphère, il faut évidemment assimiler la navette à un solide et considérer deux angles :

- l'angle d'attaque  $\alpha$  qui représente l'inclinaison de la navette par rapport à la vitesse  $\vec{v}$ ,
- l'angle de gîte cinématique  $\mu$  qui est l'angle de la droite joignant les extrémités des deux ailes du planeur avec la direction  $\vec{k}$ .

Les forces aérodynamiques sont alors :

- une force dite de traînée opposée à la vitesse de la forme :

$$\vec{D} = -\left(\frac{1}{2}\rho S C_D v_a^2\right) \vec{i}, \quad (3.3)$$

- une force dite de portance perpendiculaire à  $\vec{v}$  donnée par :

$$\vec{L} = \frac{1}{2}\rho S C_L v_a^2 (\cos \mu \vec{j} + \sin \mu \vec{k}), \quad (3.4)$$

où  $v_a$  est la vitesse relative de la navette par rapport à l'atmosphère,  $\rho = \rho(r)$  est la densité de l'atmosphère, et  $C_D, C_L$  sont respectivement les coefficients de traînée et de portance.

**Hypothèse 4** On fait l'hypothèse que l'atmosphère se déplace à la même vitesse que la Terre donc :  $v_a = v$ .

**Hypothèse 5** Les coefficients  $C_D$  et  $C_L$  dépendent de l'angle d'attaque  $\alpha$ . C'est a priori un contrôle mais on suppose, pour garantir une portance maximum, qu'il est fixé durant l'arc atmosphérique.

Notre seule contrôle est donc l'angle de gîte  $\mu$  dont l'effet est double : modifier l'altitude mais aussi tourner à droite ou à gauche. On choisit pour densité atmosphérique un modèle exponentiel :

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\beta r}. \quad (3.5)$$

On utilise le principe fondamental de la dynamique pour obtenir les équations. Il s'écrit dans le référentiel  $R_1 = (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  :

$$m(\vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c) = \vec{P} + \vec{D} + \vec{L}, \quad (3.6)$$

où  $\vec{\gamma}_r$  est l'accélération relative,  $\vec{\gamma}_e$  est l'accélération d'entraînement et  $\vec{\gamma}_c$  est l'accélération de Coriolis :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_r &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{v}}{dt^2}, \\ \vec{\gamma}_e &= \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}), \\ \vec{\gamma}_c &= 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Finalement, l'arc atmosphérique est décrit par le système dynamique suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v \sin \gamma; \\ \frac{dv}{dt} &= -g \sin \gamma - \frac{1}{2}\rho \frac{SC_D}{m} v^2 + \Omega^2 r \cos L (\sin \gamma \cos L - \cos \gamma \sin L \cos \chi); \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \left(-\frac{g}{v} + \frac{v}{r}\right) \cos \gamma + \frac{1}{2}\rho \frac{SC_L}{m} v \cos \mu + 2\Omega \cos L \sin \chi \\ &\quad + \Omega^2 \frac{v}{r} \cos L (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \sin L \cos \chi); \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{v}{r} \cos \gamma \cos \chi; \\ \frac{dl}{dt} &= \frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r \cos L}; \\ \frac{d\chi}{dt} &= \frac{v}{r} \cos \gamma \tan L \sin \chi + \frac{1}{2}\rho \frac{SC_L}{m} \frac{v}{\cos \gamma} \sin \mu + 2\Omega (\sin L - \tan \gamma \cos L \cos \chi) \\ &\quad + \Omega^2 \frac{v \sin L \cos L \sin \chi}{r \cos \gamma}; \end{aligned} \quad (3.8)$$

où l'état est  $q = (r, v, \gamma, l, L, \chi)$  et le contrôle est l'angle de gîte  $\mu$ .

Dans la suite on pose  $r = r_T + h$ , où  $r_T$  est le rayon de la Terre, et  $h$  est l'altitude de la navette.

### 3.2.3 Problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état

**Dynamique** : le mouvement de l'engin spatial est régi par le système dynamique (3.8), où l'état est  $q = (r, v, \gamma, l, L, \chi)$ .

**Variable de contrôle** : pour la phase atmosphérique, on suppose que l'angle d'attaque



$\alpha$  est fixé, voir [3], la commande est donc la variable  $\mu \in [-\pi, \pi]$ , ou sa dérivée  $\dot{\mu}$  avec  $|\dot{\mu}| \leq M$ . Son effet est double : modifier l'altitude et faire tourner l'engin spatial à droite ou à gauche.

**Contraintes sur l'état** : au cours de la phase de rentrée atmosphérique, la navette est soumise à trois contraintes :

– **Contrainte sur le flux thermique** :

$$\varphi = C_q \sqrt{\rho} v^3 \leq \varphi^{\max}. \quad (3.9)$$

– **Contrainte sur l'accélération normale** :

$$\gamma_n = \gamma_{n0}(\alpha) \rho v^2 \leq \gamma_n^{\max}. \quad (3.10)$$

– **Contrainte sur la pression dynamique** :

$$P = \frac{1}{2} \rho v^2 \leq P^{\max}. \quad (3.11)$$

**Facteur de coût** : concernant le critère d'optimisation, plusieurs choix sont en fait possibles et les critères à prendre en compte sont le facteur d'usure lié à l'intégrale du flux thermique et le confort de vol lié à l'intégrale de l'accélération normale. On choisit le premier critère, donné par :

$$J(\mu) = \int_0^T C_q \sqrt{\rho} v^3 dt, \quad (3.12)$$

où  $C_q \geq 0$  est une constante et  $\varphi = C_q \sqrt{\rho} v^3$  représente le flux thermique. Le temps de transfert  $T$  est libre.

**Conditions aux limites** : le problème est d'amener l'engin spatial d'une variété initiale  $M_0$  à une variété finale  $M_1$ , où le temps terminal  $T$  est libre, et les conditions aux limites sont données dans la table 1.

	Conditions initiales	Conditions finales
altitude (h)	119.82 km	15 km
vitesse (v)	7404.95 m/s	445 m/s
angle de vol ( $\gamma$ )	-1.84 deg	libre
latitude (L)	0 deg	10.99 deg
longitude (l)	libre ou fixe à 116.59 deg	116.48 deg
azimut ( $\chi$ )	libre	libre

TAB. 1- Conditions aux limites

### 3.2.4 Données numériques et interpolation des coefficients aérodynamiques $C_D$ et $C_L$

D'après les données du cahier du CNES on a :

– Données générales :

Rayon de la Terre :  $r_T = 6\,378\,139 \text{ m}$ .

Vitesse de rotation de la Terre :  $\Omega = 7,292115853608596e - 5 \text{ rad.s}^{-1}$ .

Modèle de gravité :  $g(r) = \frac{g_0}{r^2}$  avec  $g_0 = 3,9800047e + 14 \text{ m}^3.\text{s}^{-2}$ .

– Modèle de densité atmosphérique :

$$\rho(r) = \rho_0 \exp\left(-\frac{r - r_T}{h_s}\right), \quad (3.13)$$

avec  $\rho_0 = 1,225 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $h_s = 7143 \text{ m}$ .

– Modèle de vitesse du son :  $v_{son}(r) = \sum_{i=0}^5 a_i r^i$ , avec :

$$\begin{aligned} a_5 &= -1.880235969632294e - 22, & a_4 &= 6,074073670669046e - 15, \\ a_3 &= -7,848681398343154e - 8, & a_2 &= 5,070751841994340e - 1, \\ a_1 &= -1,637974278710277e + 6, & a_0 &= 2,116366606415128e + 12. \end{aligned}$$

– Nombre de Mach :  $Mach(r, v) = \frac{v}{v_{son}(r)}$ .

– Profil d'incidence imposé en fonction du nombre de Mach :

$$\alpha = \begin{cases} 12 & \text{si } 0 \leq Mach \leq 2, \\ \frac{7}{2}(Mach) + 5 & \text{si } 2 \leq Mach \leq 10, \\ 40 & \text{si } 10 \leq Mach. \end{cases}$$

– Données sur la navette :

Masse :  $m = 7169,602 \text{ kg}$ .

Surface de référence :  $S = 15,05 \text{ m}^2$ .

Coefficient de traînée :  $k = \frac{1}{2} \frac{SC_D}{m}$ .

Coefficient de portance :  $k' = \frac{1}{2} \frac{SC_L}{m}$ .

– Contraintes sur l'état :

Contrainte sur le flux thermique :  $\varphi = C_q \sqrt{\rho} v^3 \leq \varphi^{\max}$ , où

$$C_q = 1,705e - 4 \text{ S.I.} \quad \text{et} \quad \varphi^{\max} = 717300 \text{ W.m}^{-2}.$$

Contrainte sur l'accélération normale :

$$\gamma_n = \frac{S}{2m} \rho v^2 C_D \sqrt{1 + \left(\frac{C_L}{C_D}\right)^2} \leq \gamma_n^{\max} = 29,34 \text{ m.s}^{-2}.$$

Contrainte sur la pression dynamique :  $P = \frac{1}{2} \rho v^2 \leq P^{\max} = 25000 \text{ kPa}$ .

– Coefficients aérodynamiques :

Table de  $C_D$  en fonction de Mach et de  $\alpha$  :

	0,00	10,00	15,00	20,00	25,00	30,00	35,00	40,00	45,00	50,00	55,00	deg
0,00	0,231	0,231	0,269	0,326	0,404	0,500	0,613	0,738	0,868	0,994	1,245	
2,00	0,231	0,231	0,269	0,326	0,404	0,500	0,613	0,738	0,868	0,994	1,245	
2,30	0,199	0,199	0,236	0,292	0,366	0,458	0,566	0,688	0,818	0,984	1,220	
2,96	0,159	0,159	0,195	0,248	0,318	0,405	0,509	0,628	0,757	0,892	1,019	
3,95	0,133	0,133	0,169	0,220	0,288	0,373	0,475	0,592	0,721	0,857	0,990	
4,62	0,125	0,125	0,160	0,211	0,279	0,363	0,465	0,581	0,710	0,846	0,981	
10,00	0,105	0,105	0,148	0,200	0,269	0,355	0,458	0,576	0,704	0,838	0,968	
20,00	0,101	0,101	0,144	0,205	0,275	0,363	0,467	0,586	0,714	0,846	0,970	
30,00	0,101	0,101	0,144	0,208	0,278	0,367	0,472	0,591	0,719	0,849	0,972	
50,00	0,101	0,101	0,144	0,208	0,278	0,367	0,472	0,591	0,719	0,849	0,972	
Mach												

Table de  $C_L$  en fonction de Mach et de  $\alpha$  :

	0,00	10,00	15,00	20,00	25,00	30,00	35,00	40,00	45,00	50,00	55,00	deg
0,00	0,000	0,185	0,291	0,394	0,491	0,578	0,649	0,700	0,729	0,734	0,756	
2,00	0,000	0,185	0,291	0,394	0,491	0,578	0,649	0,700	0,729	0,734	0,756	
2,30	0,000	0,172	0,269	0,363	0,454	0,535	0,604	0,657	0,689	0,698	0,723	
2,96	0,000	0,154	0,238	0,322	0,404	0,481	0,549	0,603	0,639	0,655	0,649	
3,95	0,000	0,139	0,215	0,292	0,370	0,445	0,513	0,569	0,609	0,628	0,626	
4,62	0,000	0,133	0,206	0,281	0,358	0,433	0,502	0,559	0,600	0,620	0,618	
10,00	0,000	0,103	0,184	0,259	0,337	0,414	0,487	0,547	0,591	0,612	0,609	
20,00	0,000	0,091	0,172	0,257	0,336	0,416	0,490	0,552	0,596	0,616	0,612	
30,00	0,000	0,087	0,169	0,258	0,338	0,418	0,493	0,555	0,598	0,619	0,613	
50,00	0,000	0,087	0,169	0,258	0,338	0,418	0,493	0,555	0,598	0,619	0,613	
Mach												

À partir de ces données, et en utilisant une méthode d'interpolation polynomiale, on peut approximer  $C_D$  et  $C_L$  par deux fonctions de classe  $C^2$  (par rapport à Mach d'où par rapport à  $r$  et  $v$  aussi), notées respectivement aussi par  $C_D$  et  $C_L$ , et qui ont la forme suivante :

$$C_D = \begin{cases} 0,245498422 & \text{si } 0 \leq Mach \leq 2, \\ \sum_{i=0}^{10} b_i(Mach)^i & \text{si } 2 \leq Mach \leq 10, \\ 0,586 & \text{si } 10 \leq Mach, \end{cases}$$

et :

$$C_L = \begin{cases} 0,2274108299 & \text{si } 0 \leq Mach \leq 2, \\ \sum_{i=0}^{10} c_i(Mach)^i & \text{si } 2 \leq Mach \leq 10, \\ 0,552 & \text{si } 10 \leq Mach, \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 b_0 &= -83,13479266, & b_1 &= 199,3477592, \\
 b_2 &= -206,0808306, & b_3 &= 121,4125617, \\
 b_4 &= -45,20106131, & b_5 &= 11,12503662, \\
 b_6 &= -1,835612804, & b_7 &= 0,2007769695, \\
 b_8 &= -0,01395399925, & b_9 &= 0,0005573598945, \\
 b_{10} &= -0,9732415415e - 5,
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 c_0 &= 16,61906710, & c_1 &= -39,70340153, \\
 c_2 &= 41,64916481, & c_3 &= -24,92284517, \\
 c_4 &= 9,425197669, & c_5 &= -2,354979507, \\
 c_6 &= 0,3940938518, & c_7 &= -0,04366697148, \\
 c_8 &= 0,003070292734, & c_9 &= -0,0001238936964, \\
 c_{10} &= 0,2182515569e - 5.
 \end{aligned}$$

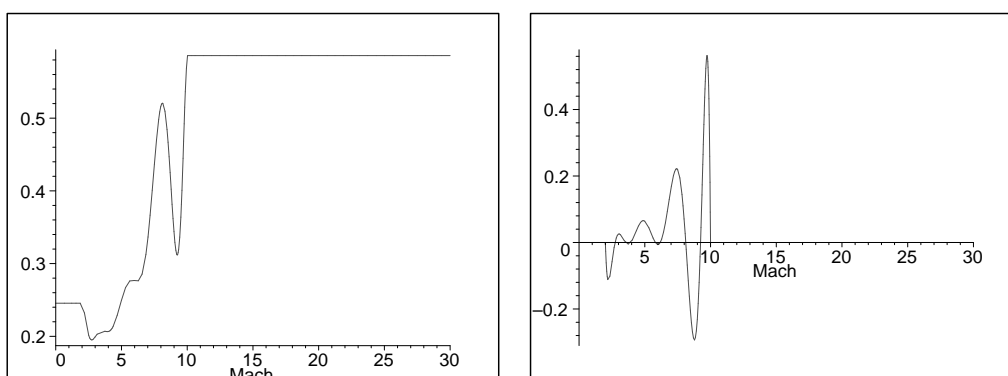


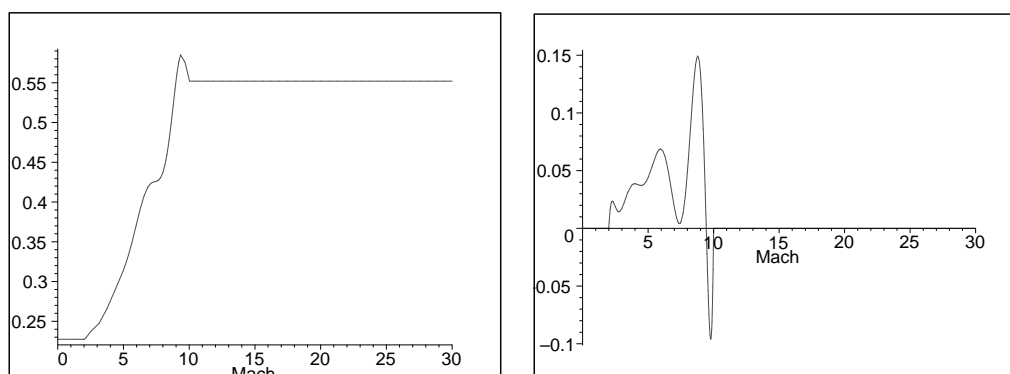
FIG. 3.1 –  $C_D$  et sa dérivée par rapport à Mach

### 3.2.5 Stratégie d'Harpold et Graves

Si on fait l'approximation  $\dot{v} \simeq d = \frac{1}{2} \rho \frac{S C_D}{m} v^2$ , le coût peut être écrit :

$$J(\mu) = K \int_{v_0}^{v_f} \frac{v^2}{\sqrt{d}} dv, \quad K > 0,$$

et la stratégie optimale consiste alors à maximiser l'accélération  $d$  pendant toute la durée du vol. C'est la politique décrite dans [23], qui réduit le problème à trouver une trajectoire suivant le bord du domaine d'états autorisés, dans l'ordre suivant : flux thermique

FIG. 3.2 –  $C_L$  et sa dérivée par rapport à Mach

maximal, accélération normale maximale, puis pression dynamique maximale, voir figure 3.2.

L'avantage de cette méthode est que le long d'un arc frontière le contrôle s'exprime sous forme d'une boucle fermée, cependant cette méthode n'est pas optimale pour notre critère et notre but tout d'abord est de chercher une trajectoire optimale.

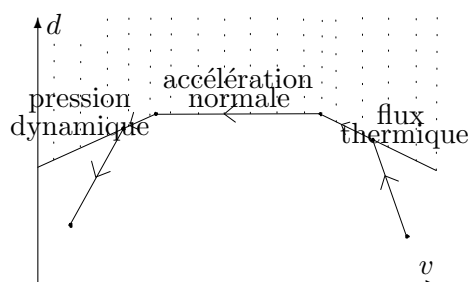


Figure 3.2— Contraintes sur l'état, et stratégie de Harpold/Graves

### 3.2.6 Réduction du problème et modèle simplifié

Remarquons que le système (3.8) décrivant l'arc atmosphérique est de la forme

$$\dot{q} = X(q) + u_1 Y_1(q) + u_2 Y_2(q),$$

avec  $u_1 = \cos \mu$ ,  $u_2 = \sin \mu$  et  $q = (r, v, \gamma, L, l, \chi)$ . Posons  $q_1 = (r, v, \gamma)$  et  $q_2 = (L, l, \chi)$ . On peut alors décomposer le système (3.8) de la façon suivante :

$$\dot{q}_1 = f_1(q_1, u_1) + O(\Omega), \quad \dot{q}_2 = f_2(q_2, u_2) + O(\Omega).$$

Plus précisément, le premier sous-système, qui représente le mouvement longitudinal de la navette, s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= v \sin \gamma; \\ \frac{dv}{dt} &= -g \sin \gamma - k\rho v^2 + o(\Omega); \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \left(-\frac{g}{v} + \frac{v}{r}\right) \cos \gamma + k' \rho v u_1 + O(\Omega); \end{aligned} \quad (3.14)$$

et le second sous-système, qui représente le mouvement latéral, est :

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{v}{r} \cos \gamma \cos \chi; \\ \frac{dl}{dt} &= \frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r \cos L}; \\ \frac{d\chi}{dt} &= \frac{v}{r} \cos \gamma \tan L \sin \chi + \frac{k' \rho v}{\cos \gamma} u_2 + O(\Omega); \end{aligned} \quad (3.15)$$

avec

$$k = \frac{1}{2} \frac{SC_D}{m}, \quad k' = \frac{1}{2} \frac{SC_L}{m}.$$

Pour le contrôle optimal de l'arc atmosphérique, le problème majeur au cours du vol est de respecter les contraintes. De plus ces dernières ne dépendent que de  $q_1$  et ceci requiert une analyse fine du mouvement longitudinal de l'engin. D'autres part les conditions limites ne portent que sur une partie des variables.

Ces remarques nous amènent à construire un modèle simplifié en dimension trois du problème de rentrée atmosphérique. En effet en négligeant la vitesse de rotation  $\Omega$  de la planète et le terme de Coriolis en  $\Omega$ , le système (3.8) se décompose en :

$$\dot{q}_1 = f_1(q_1, u_1), \quad \dot{q}_2 = f_2(q, u_2).$$

Dans les coordonnées  $q_1 = (r, v, \gamma)$ , ce modèle simplifié s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= v \sin \gamma; \\ \frac{dv}{dt} &= -g \sin \gamma - k\rho v^2; \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \left(-\frac{g}{v} + \frac{v}{r}\right) \cos \gamma + k' \rho v \cos \mu; \end{aligned} \quad (3.16)$$

où  $\mu \in [-\pi, \pi]$  et  $q_1$  vérifie les contraintes d'état (3.9), (3.10) et (3.11).

Pour le contrôle optimal du modèle simplifié, nous proposons deux choix de contrôle :

• Dans le premier choix, on prend  $u = \cos \mu$  comme contrôle, ce qui donne le nouveau sous-système appelé modèle simplifié  $I$  (en dimension trois) :

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= v \sin \gamma; \\ \frac{dv}{dt} &= -g \sin \gamma - k\rho v^2; \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \left(-\frac{g}{v} + \frac{v}{r}\right) \cos \gamma + k' \rho v u;\end{aligned}\tag{3.17}$$

où le contrôle  $u$  vérifie la contrainte  $|u| \leq 1$ .

• Dans le second choix, on prend la dérivée de l'angle de gîte comme contrôle, ce qui ajoute en plus une autre équation dans le modèle simplifié, ce nouveau sous-système sera appelé modèle simplifié  $II$  (en dimension quatre) :

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= v \sin \gamma; \\ \frac{dv}{dt} &= -g \sin \gamma - k\rho v^2; \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \left(-\frac{g}{v} + \frac{v}{r}\right) \cos \gamma + k' \rho v \cos \mu; \\ \frac{d\mu}{dt} &= u;\end{aligned}\tag{3.18}$$

où le contrôle  $u$  vérifie la contrainte  $|u| \leq M$ , avec  $M$  représentant la vitesse maximale de rotation de la navette.

**Remarque 3.2.1** *Dans le modèle simplifié  $II$ , en contrôlant la dérivée  $\mu$ , on exige la continuité et la dérivabilité de l'angle de gîte  $\mu$  par rapport au temps.*

**Remarque 3.2.2** *L'introduction du modèle simplifié  $II$  est justifiée par deux raisons :*

1. *Raison théorique : durant le vol de la navette, dans le modèle simplifié  $I$ , on trouve des trajectoires bang-bang et des trajectoires sur le bord. Les contraintes sont d'ordre deux. Par ailleurs dans le système  $II$ , on ajoute en plus des trajectoires, qui consistent à incliner la navette sur son bord. Les contraintes sont d'ordre trois plus élevé.*

2. *Raison numérique : dans le modèle simplifié  $I$ , on utilise la méthode de continuation sur la borne maximale de la contrainte en partant de la solution pour le problème sans contrainte. Par ailleurs, dans le modèle simplifié  $II$ , on utilise en plus la continuation sur la borne maximale du contrôle, partant d'un  $M$  plus petit pour atteindre un  $M$  assez grand.*

Dans la suite, nous analysons les différents modèles simplifiés issus du modèle complet, en prenant en compte  $g = \frac{g_0}{r^2}$  et l'interpolation de  $C_D$  et de  $C_L$  déjà mentionnée dans la section 3.2.4. À la fin nous présentons l'étude du système complet. Nous constaterons numériquement que la contrainte sur la pression dynamique n'est jamais violée, donc nous ne tiendrons compte dans la suite que des deux contraintes sur le flux thermique et sur l'accélération normale.

### 3.3 Contrôle optimal sur le modèle simplifié $I$

Dans cette section on résout théoriquement, puis numériquement le problème du contrôle optimal pour le système simplifié  $I$ . Pour appliquer la méthode de continuation sur la borne maximale de la contrainte, tout d'abord en ne tenant pas compte des contraintes sur l'état, puis en les prenant en compte.

#### 3.3.1 Le modèle sans contrainte

**Rappels sur le principe du minimum [39].** Rappelons un énoncé de ce théorème fondamental, déjà mentionné dans le chapitre 1, adapté à notre problème. On considère donc un système lisse :

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in \mathbb{R}^n,$$

où  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$ , les variétés initiales et finales sont notées  $M_0$  et  $M_1$ . L'ensemble des contrôles admissibles  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des applications mesurables bornées  $u : [0, T] \rightarrow U$  où  $U$  est un domaine de  $\mathbb{R}^m$ . Á un contrôle  $u(t)$  de réponse  $q(t)$  sur  $[0, T]$ , on assigne un coût :

$$J(u) = \int_0^T f^0(q(t), u(t)) dt,$$

où  $f^0$  est une fonction lisse. On introduit l'état augmenté

$$\tilde{q}(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ q^0(t) \end{pmatrix}, \quad \text{où } q^0(0) = 0,$$

et la trajectoire du système augmenté vérifie  $\dot{\tilde{q}} = \tilde{f}(\tilde{q}, u)$  défini par les équations :

$$\dot{q} = f(q, u), \quad \dot{q}^0 = f^0(q, u).$$

Soit  $\tilde{p} = (p, p^0) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) - \{0\}$  le vecteur adjoint associé à  $\tilde{q}$  et  $\tilde{H}$  le Hamiltonien :

$$\tilde{H} = \langle \tilde{p}, \tilde{f}(\tilde{q}, u) \rangle.$$

On a le résultat suivant :

**Théorème 3.3.1** *Considérons le système  $\dot{q} = f(q, u)$  avec pour ensemble des contrôles admissibles l'ensemble  $\mathcal{U}$ . Si  $u^*$  est un contrôle optimal sur  $[0, T^*]$  transférant le système de  $M_0$  à  $M_1$  avec une réponse augmentée  $\tilde{q}^*(t) = (q^*(t), q^{0*})$ , alors il existe  $\tilde{p}^*(t) = (p^*(t), p^{0*}) \neq 0$ , absolument continu tel que les équations suivantes sont vérifiées pour le triplet  $(\tilde{q}^*, \tilde{p}^*, u^*)$  :*

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}}^* &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}}(\tilde{q}^*, \tilde{p}^*, u^*) && p.p, \\ \dot{\tilde{p}}^* &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}}(\tilde{q}^*, \tilde{p}^*, u^*) && p.p, \\ \tilde{H}(\tilde{q}^*(t), \tilde{p}^*(t), u^*(t)) &= \min_{u \in U} \tilde{H}(\tilde{q}^*(t), \tilde{p}^*(t), u(t)) && p.p. \end{aligned}$$



De plus :

$$\tilde{H}(\tilde{q}^*(t), \tilde{p}^*(t), u^*(t)) = 0 \quad p.p \quad \text{et} \quad p^{0*} \geq 0,$$

et les conditions de transversalité suivantes sont vérifiées :

$$p^*(0) \perp T_{q^*(0)}M_0, \quad p^*(T^*) \perp T_{q^*(T^*)}M_1,$$

où  $T_qM$  désigne l'espace tangent.

**Corollaire 3.3.1 (temps minimal)** *Considérons le système de  $\mathbb{R}^n$  :  $\dot{q} = f(q, u)$ ,  $u \in \mathcal{U}$  et le problème de transfert du système de  $M_0$  en  $M_1$ , en temps minimal. Alors si  $u^*$  est optimal sur  $[0, T^*]$  de réponse  $q^*$ , il existe un vecteur adjoint  $p^*$  absolument continu tel que si  $H(q, p, u) = \langle p, f(q, u) \rangle$ , alors les équations suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned} \dot{q}^* &= \frac{\partial H}{\partial p}(q^*, p^*, u^*) & , & & \dot{p}^* &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q^*, p^*, u^*) & \quad p.p; \\ H(q^*(t), p^*(t), u^*(t)) &= \min_{u \in \mathcal{U}} H(q^*(t), p^*(t), u(t)) & \quad p.p. \end{aligned}$$

De plus  $\min_{u \in \mathcal{U}} H(q^*(t), p^*(t), u(t))$  est une constante négative et les conditions de transversalité suivantes sont vérifiées :

$$p^*(0) \perp T_{q^*(0)}M_0, \quad p^*(T^*) \perp T_{q^*(T^*)}M_1.$$

**Application au modèle simplifié I.** Le système (3.17) peut s'écrire comme un système de contrôle affine mono-entrée :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= X(q) + uY(q), \quad |u| \leq 1, \quad \text{où} \quad q = (r, v, \gamma), & (3.19) \\ X &= v \sin \gamma \frac{\partial}{\partial r} - \left( \frac{g_0 \sin \gamma}{r^2} + \frac{s}{2m} \rho C_D v^2 \right) \frac{\partial}{\partial v} + \cos \gamma \left( \frac{-g_0}{r^2 v} + \frac{v}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \gamma}, \\ Y &= \frac{s}{2m} \rho C_L v \frac{\partial}{\partial \gamma}, \end{aligned}$$

et un coût à minimiser de la forme :

$$J(u) = \int_0^T \varphi(q) dt, \quad \text{avec} \quad \varphi(q) = C_q \sqrt{\rho} v^3.$$

Supposons  $\varphi(q) > 0$  dans le domaine d'état. On introduit l'équation :

$$\dot{q}_0 = \varphi(q), \quad q_0(0) = 0, \quad (3.20)$$

et  $\tilde{q} = (q, q_0)$  l'espace d'états élargi. Les équations (3.19) et (3.20) définissent donc le système élargi :

$$\dot{\tilde{q}} = \tilde{X}(q) + u\tilde{Y}(q). \quad (3.21)$$

On introduit le Hamiltonien :

$$H(p, q, u) = \langle p, X + uY \rangle + p^0 \varphi(q),$$

où  $p = (p_r, p_v, p_\gamma)$  est le vecteur adjoint, et  $p^0$  est une constante telle que :  $(p, p^0) \neq (0, 0)$ .

**Définition 3.3.1** Si  $p^0 \neq 0$ , on est dans le cas normal, sinon on est dans le cas anormal.

**Définition 3.3.2** On appelle extrémale un triplet  $(q, p, u)$  solution du principe du minimum :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = X(q) + uY(q), \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -p\left(\frac{\partial X}{\partial q} + u\frac{\partial Y}{\partial q}\right) - p^0\frac{\partial \varphi(q)}{\partial q}, \\ H(q, p, u) &= \min_{w \in [-1,1]} H(q, p, w). \end{aligned}$$

On applique un nouveau paramétrage aux équations en posant :

$$ds = \varphi(q(t))dt,$$

le système (3.19) devient alors :

$$\dot{q} = \bar{X}(q) + u\bar{Y}(q), \quad |u| \leq 1, \quad (3.22)$$

où  $\bar{X} = \psi X$ ,  $\bar{Y} = \psi Y$  et  $\psi = \frac{1}{\varphi}$ . Le problème de contrôle optimal est équivalent alors à un problème de temps minimal.

On va analyser l'existence de trajectoires singulières pour ce problème.

**Définition 3.3.3** Considérons le système  $\dot{q} = X(q) + uY(q)$  noté  $(X, Y)$ . Une trajectoire singulière est la projection sur l'espace d'états des équations :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \langle p, Y \rangle = 0, \quad (3.23)$$

où  $H = \langle p, X + uY \rangle$ . Elle est dite exceptionnelle si  $H = 0$ , admissible si  $|u| \leq 1$  et strictement admissible si  $|u| < 1$ .

**Proposition 3.3.1** Dans le domaine de vol où  $\cos \gamma \neq 0$ , il n'y a pas d'arc singulier exceptionnel pour le système  $(X, Y)$ .

**Preuve.** Les extrémales singulières sont contenues dans  $\Sigma : \langle p, Y(q) \rangle = 0$ . En dérivant deux fois par rapport à  $t$  il vient :

$$\langle p, [X, Y](q) \rangle = 0,$$

$$\langle p, [X, [X, Y]](q) \rangle + u\langle p, [Y, [X, Y]](q) \rangle = 0.$$

Calculons les crochets de Lie associés à :

$$\begin{aligned} X &= v \sin \gamma \frac{\partial}{\partial r} - \left( \frac{g_0 \sin \gamma}{r^2} + \frac{s}{2m} \rho C_D v^2 \right) \frac{\partial}{\partial v} + \cos \gamma \left( \frac{-g_0}{r^2 v} + \frac{v}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \gamma}, \\ Y &= \frac{s}{2m} \rho C_L v \frac{\partial}{\partial \gamma}. \end{aligned}$$

Le concept de trajectoire singulière est invariant par feedback et dans nos calculs on peut donc remplacer  $X, Y$  par :

$$X = v \sin \gamma \frac{\partial}{\partial r} - \left( \frac{g_0 \sin \gamma}{r^2} + \frac{s}{2m} \rho C_D v^2 \right) \frac{\partial}{\partial v},$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial \gamma}.$$

On obtient donc :

$$[X, Y] = -v \cos \gamma \frac{\partial}{\partial r} + \frac{g_0 \cos \gamma}{r^2} \frac{\partial}{\partial v},$$

$$[Y, [X, Y]] = v \sin \gamma \frac{\partial}{\partial r} - \frac{g_0 \sin \gamma}{r^2} \frac{\partial}{\partial v},$$

$$[X, [X, Y]] = \frac{s}{2m} \rho C_D v^2 \cos \gamma \frac{\partial}{\partial r} + \left( \frac{s}{2m h_s} \rho C_D v^3 \cos \gamma \right. \\ \left. + \frac{g_0 s}{m r^2} \rho C_D v \cos \gamma + \frac{g_0 s}{2m r^2} \rho \frac{\partial C_D}{\partial v} v^2 \cos \gamma \right. \\ \left. - \frac{s}{2m} \rho \frac{\partial C_D}{\partial r} v \cos \gamma \right) \frac{\partial}{\partial v},$$

donc  $[X, Y]$  et  $[Y, [X, Y]]$  sont colinéaires.

Les extrémals singuliers sont situés sur  $\Sigma'$  :  $\langle p, Y \rangle = \langle p, [X, Y] \rangle = 0$ , c'est-à-dire :  $p_\gamma = \left(\frac{g_0}{r^2}\right) p_v - v p_r = 0$ . On introduit :

$$D1 = \det(Y, [X, Y], [Y, [X, Y]]),$$

$$D2 = \det(Y, [X, Y], [X, [X, Y]]),$$

$$D3 = \det(Y, [X, Y], X).$$

Il résulte de nos calculs que les arcs singuliers sont situés sur :  $D1 = D2 = 0$ , et de plus s'ils sont exceptionnels on doit avoir  $D3 = 0$ . Or :

$$D1 = 0,$$

$$D2 = \frac{s \rho v^2 \cos \gamma^2}{r^2 m h_s} \left( \frac{1}{2} v^2 r^2 h_s \frac{\partial C_D}{\partial r} - \frac{1}{2} v^2 r^2 C_D - \frac{1}{2} g_0 h_s v \frac{\partial C_D}{\partial v} - \frac{3}{2} g_0 h_s C_D \right),$$

$$D3 = \frac{s \rho v^3 C_D \cos \gamma}{2m}.$$

Puisque  $\cos \gamma \neq 0$ , la proposition est prouvée.

Les calculs montrent par ailleurs que :

**Lemme 3.3.1** *Si  $\cos \gamma \neq 0$  alors :*

1.  $X, Y, [X, Y]$  sont indépendants et forment un repère.
2.  $[Y, [X, Y]] \in \text{Vect}\{Y, [X, Y]\}$ .

On a donc montré que le système (3.17) n'admet pas d'extrémales anormales, c'est-à-dire indépendantes du coût ( $p^0 = 0$ ). On va étudier l'existence d'extrémales singulières et classifier localement les extrémales.

**Analyse des extrémales.** Considérons le problème de temps minimal pour le système (3.22) :

$$\dot{q} = \bar{X}(q) + u\bar{Y}(q), \quad |u| \leq 1.$$

**Définition 3.3.4** L'ensemble  $\Sigma : \langle p, \bar{Y} \rangle = 0$  s'appelle la surface de commutation. Soit  $(q, p, u)$  une extrémale définie sur  $[0, T]$ . Elle est dite singulière si elle est contenue dans  $\Sigma$ , bang si  $u = +1$  ou  $-1$ , et bang-bang si  $u(t)$  est constante par morceaux et définie presque partout par  $u(t) = -\text{signe} \langle p(t), \bar{Y}(q(t)) \rangle$ . On note respectivement  $\gamma_+$ ,  $\gamma_-$  et  $\gamma_s$  un arc lisse associé à  $u = +1$ ,  $u = -1$  et  $u$  est un contrôle singulier, et  $\gamma_1\gamma_2$  représente un arc  $\gamma_1$  suivi d'un arc  $\gamma_2$ .

Calculons les crochets de Lie associés à :

$$\bar{X} = \psi \left( v \sin \gamma \frac{\partial}{\partial r} - \left( \frac{g_0 \sin \gamma}{r^2} + \frac{s}{2m} \rho C_D v^2 \right) \frac{\partial}{\partial v} + \cos \gamma \left( \frac{-g_0}{r^2 v} + \frac{v}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \gamma} \right),$$

$$\bar{Y} = \psi \left( \frac{s}{2m} \rho C_L v \frac{\partial}{\partial \gamma} \right).$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} D4 &= \det(\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}], [\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]]) \\ &= 0, \\ D5 &= \det(\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}], [\bar{X}, [\bar{X}, \bar{Y}]]) \\ &= \frac{s^4 \rho C_L^3 (\cos \gamma)^2}{r^2 m^4 v^{12} h_s C_q^6} \left( \frac{1}{16} v r^2 h_s \frac{\partial C_D}{\partial r} - \frac{1}{32} v r^2 C_D - \frac{1}{16} g_0 h_s \frac{\partial C_D}{\partial v} \right), \\ D6 &= \det(\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}], \bar{X}) \\ &= \frac{1}{8} \frac{s^3 \rho C_D C_L^2 \cos \gamma}{v^7 m^3 C_q^4}. \end{aligned}$$

D'où :

**Lemme 3.3.2** Si  $\cos \gamma \neq 0$  alors :

1.  $\bar{X}, \bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]$  sont indépendants et forment un repère.
2.  $[\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]] \in \text{Vect}\{\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]\}$ .

Donc il existe des fonctions  $a, b, c$  telles que :

$$[\bar{X}, [\bar{X}, \bar{Y}]] = a\bar{X} + b\bar{Y} + c[\bar{X}, \bar{Y}].$$

Aussi d'après les calculs on trouve :

**Lemme 3.3.3** Si  $\cos \gamma \neq 0$  alors :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\det([\bar{X}, [\bar{X}, \bar{Y}]], \bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}])}{\det(\bar{X}, \bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}])} \\ &= \frac{s C_L \cos \gamma}{r^2 m v^5 h_s C_D C_q^2} \left( \frac{1}{2} v r^2 h_s \frac{\partial C_D}{\partial r} - \frac{1}{4} v r^2 C_D - \frac{1}{2} g_0 h_s \frac{\partial C_D}{\partial v} \right), \end{aligned}$$

de plus le coefficient  $a$  est négatif.

**Corollaire 3.3.2** Si  $\cos \gamma \neq 0$ , il n'existe pas de trajectoires singulières.

**Classification des extrémales au voisinage de  $\Sigma$ .** Soit  $(q, p, u)$  une extrémale lisse définie sur  $[0, T]$ . En dérivant par rapport à  $t$  la fonction de commutation :  $\phi(t) = \langle p(t), \bar{Y}(q(t)) \rangle$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= \langle p(t), [\bar{X}, \bar{Y}](q(t)) \rangle, \\ \ddot{\phi}(t) &= \langle p(t), [\bar{X}, [\bar{X}, \bar{Y}]](q(t)) \rangle + u \langle p(t), [\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]](q(t)) \rangle. \end{aligned}$$

On utilise les résultats de [28] pour classifier les extrémales au voisinage d'un point  $z_0 = (q_0, p_0)$  de la surface de commutation.

**1. Points ordinaires :** soit  $z_0 = (q_0, p_0)$  appartenant à  $\Sigma$ . Supposons  $\Sigma$  lisse et de codimension 1 en  $z_0$ . Dans ce cas on dit que  $z_0$  est un point de commutation ordinaire et chaque courbe extrémale dans un voisinage de  $z_0$  est alors de la forme  $\gamma_+ \gamma_-$  ou  $\gamma_- \gamma_+$ , voir figure 3.3.

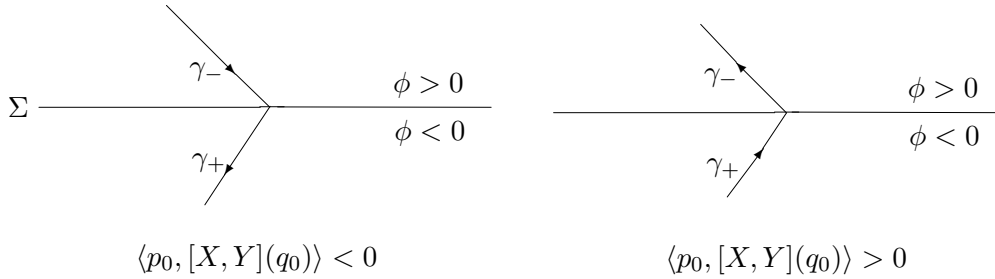


Figure 3.3

**2. Points plis :** soit  $z_0$  appartenant à  $\Sigma'$  :  $\langle p, \bar{Y} \rangle = \langle p, [\bar{X}, \bar{Y}] \rangle = 0$ . Supposons  $\Sigma, \Sigma'$  lisses et de codimensions respectives 1 et 2 en  $z_0$ . Dans ce cas on dit que  $z_0$  est un point pli. Si  $(q, p, u)$  est une extrémale lisse passant par  $z_0$ , la fonction de commutation vérifie en  $z_0$  :

$$\phi(t) = \dot{\phi}(t) = 0,$$

et de plus :

$$\ddot{\phi}(t) = \langle p(t), [\bar{X}, [\bar{X}, \bar{Y}]](q(t)) \rangle + u \langle p(t), [\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]](q(t)) \rangle,$$

et se réduit à  $\langle p(t), [\bar{X}, [\bar{X}, \bar{Y}]](q(t)) \rangle$  d'après le lemme 3.3.2. De plus  $\ddot{\phi}$  est non nulle sur  $\Sigma$  et son signe est celui de  $a \langle p(t), \bar{X}(q(t)) \rangle$ . En utilisant la classification de [28] le point

$z_0$  est un point parabolique et chaque extrémale est localement bang-bang et de la forme  $\gamma_+\gamma_-\gamma_+$  ou  $\gamma_-\gamma_+\gamma_-$ .

En utilisant cette analyse et le principe de minimum on peut résoudre le problème de synthèse optimale, résumé par le théorème suivant :

**Théorème 3.3.2** *Si  $\cos \gamma \neq 0$ , chaque trajectoire temps minimal est localement de la forme  $\gamma_-\gamma_+\gamma_-$ .*

**Preuve.** D'après le principe du minimum un arc optimal est extrémal et doit vérifier :

$$H = \langle p, \bar{X}(q) + u\bar{Y}(q) \rangle + p^0 = 0, \quad p_0 \geq 0.$$

Donc en  $z_0 \in \Sigma'$ , le vecteur adjoint est orienté avec la convention :  $\langle p, \bar{X}(q) \rangle = -p_0 \leq 0$  car  $(\langle p, \bar{Y} \rangle = 0)$ . Or d'après le lemme 3.3.3, on a :

$$[\bar{X}, [\bar{X}, \bar{Y}]] = a\bar{X} + b\bar{Y} + c[\bar{X}, \bar{Y}], \quad a < 0.$$

Donc seule une trajectoire extrémale de la forme  $\gamma_-\gamma_+\gamma_-$  peut être optimale, voir figure 3.4. L'assertion est prouvée.

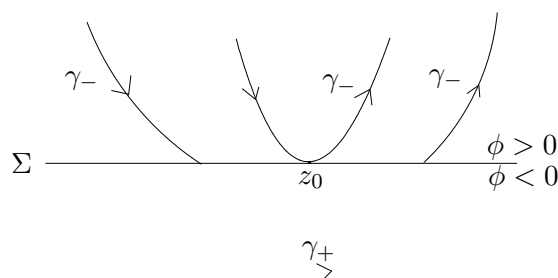


Figure 3.4– Solutions extrémales ( $a < 0$ )

En changeant le problème de temps minimal en temps maximal, on en déduit :

**Corollaire 3.3.3** *Si  $\cos \gamma \neq 0$ , chaque trajectoire temps maximal est localement de la forme  $\gamma_+\gamma_-\gamma_+$ .*

### 3.3.2 Le modèle avec contraintes sur l'état

On tient maintenant compte des contraintes sur l'état. On rappelle un principe du minimum avec contrainte sur l'état, détaillé dans le chapitre 2 et adapté à notre analyse.

**Principe du minimum avec contrainte sur l'état [33].** On considère donc un système mono-entrée :

$$\dot{q}(t) = f(q, u) = X(q(t)) + u(t)Y(q(t)), \quad |u(t)| \leq M,$$

et un coût à minimiser de la forme :

$$J(u) = \Phi(q(T)),$$

où le temps de transfert  $T$  est fixé et  $q$  vérifie la contrainte :

$$C(q(t)) \leq 0,$$

les conditions frontières sont de la forme :

$$q(0) = q_0, \quad \Psi(q(T)) = 0.$$

**Conditions nécessaires d'optimalité** (Principe du Minimum). Supposons que  $t \mapsto q(t)$ ,  $t \in [0, T]$  est une solution optimale lisse par morceaux. Supposons de plus que le long d'un arc frontière les hypothèses  $(C_1)$  et  $(C_2)$ , voir chapitre 2, sont satisfaites. Introduisons le Hamiltonien :

$$H(q, p, u, \eta) = \langle p, X(q) + uY(q) \rangle + \eta(t)C(q),$$

où  $p$  est le vecteur adjoint et  $\eta$  le multiplicateur de Lagrange de la contrainte. Alors les conditions nécessaires de Maurer [33] sont les suivantes :

1. Il existe une fonction  $t \mapsto \eta(t)$  positive et des constantes  $\eta_0 \geq 0$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^n$  tels que le vecteur adjoint vérifie :

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -p \left( \frac{\partial X}{\partial q} + u \frac{\partial Y}{\partial q} \right) - \eta(t) \frac{\partial C}{\partial q} \quad (\text{p.p}), \\ p(T) &= \eta_0 \frac{\partial \Phi}{\partial q}(q(T)) + \sigma \frac{\partial \Psi}{\partial q}(q(T)). \end{aligned}$$

2. La fonction  $t \mapsto \eta(t)$  est continue à l'intérieur d'un arc frontière et vérifie :

$$\eta(t)C(q(t)) = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

3. Lors d'un contact ou d'une jonction au temps  $t_i$  avec la frontière on a :

$$\begin{aligned} H(t_i^+) &= H(t_i^-), \\ p(t_i^+) &= p(t_i^-) - \nu_i \frac{\partial C}{\partial q}(q(t_i)), \quad \nu_i \geq 0. \end{aligned}$$

4. Le contrôle optimal  $u(t)$  minimise presque partout le Hamiltonien :

$$H(q(t), p(t), u(t), \eta(t)) = \min_{v \in [-M, M]} H(q(t), p(t), v, \eta(t)).$$

**Le problème de temps minimal.** Le temps de transfert est ici non fixé. On reparamétrise les trajectoires sur  $[0, 1]$  en posant  $s = \frac{t}{T}$  et  $z = T$ . Le problème est alors de minimiser  $J(u) = t(1)$  pour le système étendu :

$$\frac{dq}{ds} = (X + uY)z, \quad \frac{dt}{ds} = z, \quad \frac{dz}{ds} = 0.$$

Le Hamiltonien s'écrit :

$$H = \langle p, (X(q) + uY(q))z \rangle + p_t z + \eta(t)C(q).$$

Le système adjoint se décompose en :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -p \left( \frac{\partial X}{\partial q} + u \frac{\partial Y}{\partial q} \right) z - \eta \frac{\partial C}{\partial q}, \\ \frac{dp_t}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \\ \frac{dp_z}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial z} = -p(X + uY) - p_t. \end{aligned}$$

Les conditions de transversalité impliquent :

$$p_t(1) \geq 0, \quad p_z(0) = 0.$$

Or on a de plus :  $h = \min_{v \in [-M, M]} H = 0$ , voir [24], d'où  $(p(X + uY) + p_t)z = 0$  et donc d'après le système adjoint  $p_z = 0$ .

En reparémétrisant par  $t$  et en remplaçant  $\eta$  par  $\frac{\eta}{z}$  et  $h$  par  $\frac{h}{z}$  on obtient :

### Conditions nécessaires d'optimalité pour le problème de temps minimal

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = X(q) + uY(q), \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -p \left( \frac{\partial X}{\partial q} + u \frac{\partial Y}{\partial q} \right) - \eta(t) \frac{\partial C}{\partial q}, \\ \langle p, (X + uY) \rangle + p_t &= \min_{v \in [-M, M]} \langle p, (X + vY) \rangle + p_t = 0, \quad (p, p_t) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Lors d'un contact ou d'une jonction au temps  $t_i$  avec la frontière, la condition de saut est :

$$p(t_i^+) = p(t_i^-) - \nu_i \frac{\partial C}{\partial q}(q(t_i)), \quad \nu_i \geq 0.$$

De plus  $p_t \geq 0$ ,  $\eta(t) \geq 0$  avec  $\eta(t) = 0$  quand  $C < 0$ , et  $t \mapsto \eta(t)$  est continue le long de la frontière  $C = 0$ .

### Calcul de l'ordre des contraintes sur l'état

**Flux thermique.** La contrainte est :

$$C_1 = C_q \sqrt{\rho} v^3 \leq \varphi^{\max}, \quad \text{où } \rho = \rho_0 \exp\left(\frac{r_T - r}{h_s}\right).$$

On obtient :

$$\dot{C}_1 = X.C_1 + uY.C_1 = 0,$$



or  $Y.C_1 = 0$  donc  $\dot{C}_1 = X.C_1 = 0$  est une contrainte secondaire, avec

$$\begin{aligned} X.C_1 &= -\frac{1}{2} \frac{C_q v^4 \sqrt{\rho} \sin \gamma}{h_s} \\ &\quad + 3 C_q \sqrt{\rho} v^2 \left( -\frac{g_0 \sin \gamma}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{s C_D \rho v^2}{m} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

De plus :

$$\ddot{C}_1 = X.(X.C_1) + uY.(X.C_1) = 0,$$

où

$$\begin{aligned} X.(X.C_1) &= -\frac{1}{4} \frac{C_q v \sqrt{\rho} h_s}{h_s^2 r^4 m^2} \left( 2 h_s m^2 v^4 r^3 (\cos \gamma)^2 - v^4 r^4 m^2 (\sin \gamma)^2 - 14 v^2 r^2 m^2 h_s g_0 \right. \\ &\quad + 12 h_s m^2 v^2 r^2 g_0 (\cos \gamma)^2 - 13 v^4 r^4 m \rho h_s s C_D \sin \gamma - 24 v^2 r m^2 h_s^2 g_0 \\ &\quad + 36 h_s^2 m^2 g_0 v^2 r (\cos \gamma)^2 + 6 v^4 r^4 m \rho h_s^2 s \frac{\partial C_D}{\partial r} \sin \gamma - 24 h_s^2 g_0^2 m^2 \\ &\quad + 12 h_s^2 m^2 g_0^2 (\cos \gamma)^2 - 36 \rho h_s^2 g_0 m s C_D v^2 r^2 \sin \gamma - 12 \rho^2 h_s^2 s^2 C_D^2 v^4 r^4 \\ &\quad \left. - 6 \rho h_s^2 v^3 s r^2 g_0 m \frac{\partial C_D}{\partial v} \sin \gamma - 3 \rho^2 h_s^2 v^5 s^2 r^4 C_D \frac{\partial C_D}{\partial v} \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

et

$$Y.(X.C_1) = -\frac{1}{4} \frac{C_q v^3 \rho^{\frac{3}{2}} s C_L (v^2 r^2 + 6 g_0 h_s) \cos \gamma}{h_s m r^2}. \quad (3.26)$$

Enfin, on conclut que  $\cos \gamma \neq 0$  est une condition nécessaire et suffisante pour que la contrainte sur le flux thermique soit d'ordre deux.

**Accélération normale.** La contrainte est :

$$C_2 = C_r \rho v^2 \leq \gamma_n^{\max}, \quad \text{où } C_r = \frac{S}{2m} C_D \sqrt{1 + \left( \frac{C_L}{C_D} \right)^2}.$$

On obtient :

$$\dot{C}_2 = X.C_2 + uY.C_2 = 0,$$

or  $Y.C_2 = 0$  donc  $\dot{C}_2 = X.C_2 = 0$  est une contrainte secondaire, avec

$$\begin{aligned} X.C_2 &= \rho v^3 \sin \gamma \left( \frac{\partial C_r}{\partial r} - \frac{C_r}{h_s} \right) \\ &\quad + \rho v \left( \frac{\partial C_r}{\partial v} v + 2 C_r \right) \left( -\frac{g_0 \sin(\gamma)}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{s C_D \rho v^2}{m} \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

De plus :

$$\ddot{C}_2 = X.(X.C_2) + uY.(X.C_2) = 0,$$

où

$$\begin{aligned}
 X.(X.C_2) = & -\frac{1}{4} \frac{\rho}{h_s^2 r^4 m^2} \left( -8 C_r g_0^2 m^2 h_s^2 + 12 h_s^2 m^2 g_0^2 v \frac{\partial C_r}{\partial v} (\cos \gamma)^2 \right. \\
 & - 4 v^4 r^4 m^2 C_r (\sin \gamma)^2 - 4 h_s^2 m^2 v^4 r^3 \frac{\partial C_r}{\partial r} (\cos \gamma)^2 + 4 m^2 v^4 r^3 C_r h_s (\cos \gamma)^2 \\
 & - 6 h_s^2 C_r s^2 C_D^2 \rho^2 v^4 r^4 - 6 h_s^2 v^5 s^2 C_D^2 \rho^2 r^4 \frac{\partial C_r}{\partial v} - 8 v^3 r^2 m^2 h_s g_0 \frac{\partial C_r}{\partial v} (\sin \gamma)^2 \\
 & - 8 v^3 r m^2 g_0 h_s^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} - 16 v g_0^2 m^2 h_s^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} + 2 v^5 r^4 m s \rho h_s^2 \frac{\partial C_D}{\partial r} \frac{\partial C_r}{\partial v} \sin \gamma \\
 & - 20 v^2 r^2 m^2 h_s C_r g_0 - 4 \rho v^3 s h_s^2 r^2 C_r g_0 m \frac{\partial C_D}{\partial v} \sin \gamma - \rho^2 v^6 s^2 h_s^2 r^4 C_D \frac{\partial C_r}{\partial v} \frac{\partial C_D}{\partial v} \\
 & - 20 v^3 g_0 m h_s^2 s C_D \rho r^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} \sin \gamma - 6 v^5 r^4 m h_s s C_D \rho \frac{\partial C_r}{\partial v} \sin \gamma \\
 & - 16 C_r g_0 m h_s^2 s C_D \rho v^2 r^2 \sin \gamma - 14 v^4 r^4 m h_s s \rho C_r C_D \sin \gamma \\
 & - 2 \rho v^4 s h_s^2 r^2 g_0 m \frac{\partial C_r}{\partial v} \frac{\partial C_D}{\partial v} \sin \gamma + 4 v^4 r^4 m C_r s \rho h_s^2 \frac{\partial C_D}{\partial r} \sin \gamma \\
 & - 2 \rho^2 v^5 s^2 h_s^2 r^4 C_r C_D \frac{\partial C_D}{\partial v} + 8 v^3 r^2 m^2 h_s^2 g_0 \frac{\partial^2 C_r}{\partial r \partial v} (\sin \gamma)^2 \\
 & + 24 h_s^2 m^2 g_0 C_r v^2 r (\cos \gamma)^2 + 12 h_s^2 m^2 g_0 v^3 r \frac{\partial C_r}{\partial v} (\cos \gamma)^2 \\
 & - 16 h_s^2 m^2 v^2 r^2 g_0 \frac{\partial C_r}{\partial r} (\cos \gamma)^2 + 8 v^4 r^4 m^2 h_s \frac{\partial C_r}{\partial r} (\sin \gamma)^2 \\
 & - 16 v^2 r m^2 C_r g_0 h_s^2 + 20 v^2 r^2 m^2 h_s^2 g_0 \frac{\partial C_r}{\partial r} - 4 h_s^2 v^4 g_0 m s C_D \rho r^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} \sin \gamma \\
 & + 4 v^5 r^4 m h_s^2 s C_D \rho \frac{\partial^2 C_r}{\partial r \partial v} \sin \gamma - 4 v^4 r^4 m^2 h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial r^2} (\sin \gamma)^2 \\
 & - h_s^2 v^6 s^2 C_D^2 \rho^2 r^4 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} - 4 h_s^2 v^2 g_0^2 m^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} (\sin \gamma)^2 \\
 & \left. + 10 v^4 r^4 m h_s^2 s C_D \rho \frac{\partial C_r}{\partial r} \sin \gamma + 16 h_s m^2 v^2 r^2 C_r g_0 (\cos \gamma)^2 \right), \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

et

$$Y.(X.C_2) = -\frac{1}{2} \frac{\rho^2 v^2 s C_L (v^2 r^2 C_r - v^2 r^2 h_s \frac{\partial C_r}{\partial r} + h_s g_0 v \frac{\partial C_r}{\partial v} + 2 h_s g_0 C_r) \cos \gamma}{h_s m r^2}. \quad (3.29)$$

De même, on conclut que  $\cos \gamma \neq 0$  est une condition nécessaire et suffisante pour que la contrainte sur l'accélération normale soit d'ordre deux.

On a donc montré :

**Lemme 3.3.4** *Pour le modèle simplifié I, dans le domaine de vol où  $\cos \gamma \neq 0$ , les contraintes sur le flux thermique et l'accélération normale sont d'ordre deux, et l'hypothèse  $(C_1)$  est vérifiée le long d'un arc frontière.*

Dans la suite on suppose que  $\cos \gamma \neq 0$ .

### Calcul des paramètres $u_b$ , $\eta$ et $\nu$

On calcule maintenant les paramètres  $u_b$ ,  $\eta$  et  $\nu$ . On rappelle alors le lemme 2.4.4 du chapitre précédent, qui traite le cas d'une contrainte d'ordre deux.

**Lemme 3.3.5** 1. Le long de l'arc frontière on a :

$$u_b = \frac{X^2.C}{[X, Y].C},$$

$$\langle p(t), Y(q(t)) \rangle = 0,$$

$$\langle p(t), [X, Y](q(t)) \rangle = 0,$$

$$\eta(t) = \frac{\langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle + u_b \langle p(t), [Y, [X, Y]] \rangle}{[X, Y].C}.$$

2. En un point de contact ou de jonction  $t_1$  on a :

$$\Phi(t_1^-) = \Phi(t_1^+),$$

$$\nu = \frac{\langle p(t_1^-), [X, Y] \rangle - \langle p(t_1^+), [X, Y] \rangle}{[X, Y].C}.$$

**Remarque 3.3.1** Dans le cas du modèle simplifié I, l'arc frontière est optimal (voir la section suivante), donc on rencontre une jonction entre un arc bang-bang et un arc frontière.

L'application du lemme précédent donne les résultats suivants :

**Flux thermique.** Le long de l'arc frontière on a :

- $u_b = \frac{X^2.C_1}{[X, Y].C_1} = \frac{X.(X.C_1)}{-Y.(X.C_1)}$ , où  $X.(X.C_1)$  et  $Y.(X.C_1)$  sont donnés respectivement par les formules (3.25) et (3.26),
- $\langle p, Y \rangle = 0$ , ce qui implique  $p_\gamma = 0$ ,
- $\langle p, [X, Y] \rangle = -\frac{1}{2} \frac{v s C_L \rho \cos \gamma}{r^2 m} (v r^2 p_r - g_0 p_v) = 0$ , ce qui implique  $v r^2 p_r - g_0 p_v = 0$ ,
- Le multiplicateur associé à la contrainte sur le flux thermique est donné par :

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \frac{\langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle}{[X, Y].C_1} = \frac{\langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle}{-Y.(X.C_1)} \\ &= -\frac{s p_r \sqrt{\rho} r^2}{m g_0 C_q (v^2 r^2 + 6 g_0 h_s)} \left( -3 g_0 h_s C_D + v^2 r^2 \frac{\partial C_D}{\partial r} h_s - v^2 r^2 C_D - v g_0 h_s \frac{\partial C_D}{\partial v} \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Le saut à l'instant de jonction  $t_1$  (point d'entrée à la frontière) est donné par :

$$\nu_1 = \frac{\langle p(t_1^-), [X, Y] \rangle}{[X, Y].C_1} = -\frac{2 (v r^2 p_r(t_1^-) - g_0 p_v(t_1^-)) h_s}{v^2 \sqrt{\rho} C_q (v^2 r^2 + 6 g_0 h_s)}. \quad (3.31)$$

**Remarque 3.3.2** De la même manière, on calcule le saut  $\nu_2$  à l'instant de jonction  $t_2$  (point de sortie), en remplaçant  $t_1^-$  par  $t_2^+$  dans la formule (3.31).

**Accélération normale.** Le long de l'arc frontière on a :

- $u_b = \frac{X^2.C_2}{[X, Y].C_2} = \frac{X.(X.C_2)}{-Y.(X.C_2)}$ , où  $X.(X.C_2)$  et  $Y.(X.C_2)$  sont donnés respectivement par les formules (3.28) et (3.29),
- $\langle p, Y \rangle = 0$ , ce qui implique  $p_\gamma = 0$ ,
- $\langle p, [X, Y] \rangle = -\frac{1}{2} \frac{v s C_L \rho \cos \gamma}{r^2 m} (v r^2 p_r - g_0 p_v) = 0$ , ce qui implique  $v r^2 p_r - g_0 p_v = 0$ ,
- Le multiplicateur associé à la contrainte sur l'accélération normale est donné par :

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \frac{\langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle}{[X, Y].C_2} = \frac{\langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle}{-Y.(X.C_2)} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{v s p_r \left( 3 g_0 h_s C_D - v^2 r^2 \frac{\partial C_D}{\partial r} h_s + v^2 r^2 C_D + v g_0 h_s \frac{\partial C_D}{\partial v} \right) r^2}{m g_0 \left( v^2 r^2 \frac{\partial C_r}{\partial r} h_s - v^2 r^2 C_r - g_0 h_s v \frac{\partial C_r}{\partial v} - 2 g_0 h_s C_r \right)}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Le saut à l'instant de jonction  $t_3$  (point d'entrée à la frontière) est donné par :

$$\nu_3 = -\frac{(v r^2 p_r(t_3^-) - g_0 p_v(t_3^-)) h_s}{(-v^2 r^2 h_s \frac{\partial C_r}{\partial r} + v^2 r^2 C_r + g_0 h_s v \frac{\partial C_r}{\partial v} + 2 g_0 h_s C_r) \rho v}. \quad (3.33)$$

**Remarque 3.3.3** De la même manière, on calcule le saut  $\nu_4$  à l'instant de jonction  $t_4$  (point de sortie), en remplaçant  $t_3^-$  par  $t_4^+$  dans la formule (3.33).

### 3.3.3 Synthèse temps minimal au voisinage de la contrainte

**Introduction.** On considère un système affine, mono-entrée :

$$\dot{q} = X(q) + u Y(q) \quad , \quad |u| \leq 1, \quad (3.34)$$

avec contrainte sur l'état :  $C(q) \leq 0$ .

Notre objectif est de présenter sous des hypothèses adaptées au modèle simplifié  $I$ , par calcul direct la synthèse temps minimal, au voisinage de la contrainte en dimensions deux et trois. Cette analyse fournit des conditions d'optimalité, à comparer avec les conditions nécessaires d'optimalité du principe du minimum.

**Synthèse temps minimal dans le cas plan.** Soit  $q = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $q_0$  un point de la frontière  $C = 0$ , identifié à 0. Le problème est de déterminer le statut d'optimalité locale d'un arc frontière  $t \mapsto \gamma_b(t)$  associé à un contrôle  $u_b$  et de calculer les synthèses optimales au voisinage de 0.

La première étape est de construire une forme normale en supposant la contrainte d'ordre un.

**Lemme 3.3.6** On suppose :

1.  $X(q_0), Y(q_0)$  indépendants,

2.  $YC(q_0) \neq 0$  (la contrainte est d'ordre un).

Alors quitte à changer  $u$  en  $-u$ , il existe un difféomorphisme local préservant 0 tel que le système contraint (3.34) s'écrive :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 + ya(q), \\ \dot{y} &= b(q) + u, \quad y \leq 0.\end{aligned}$$

**Preuve.** Par un difféomorphisme local préservant 0, on peut identifier  $Y$  à  $\frac{\partial}{\partial y}$  et l'arc contraint à  $\gamma_b : t \mapsto (t, 0)$ . La contrainte est l'espace  $y \geq 0$  ou  $y \leq 0$ . Quitte à changer  $u$  en  $-u$ , on peut l'identifier à  $y \leq 0$ .

**Hypothèse 6** Faisons de plus les hypothèses suivantes :

1.  $X(0), Y(0)$  sont indépendants,
2. l'arc frontière est admissible et non saturant en 0.

Sous ces hypothèses, dans la forme normale on a  $a(0) \neq 0, |b(0)| < 1$ . Pour analyser la synthèse optimale au voisinage de 0, on pose  $a = a(0), b = b(0)$  et le modèle local est :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 + ay, \\ \dot{y} &= b + u, \quad y \leq 0.\end{aligned}$$

On note  $w = pdq$ , la forme horloge de Miele définie sur le lieu des points où  $X$  et  $Y$  sont indépendants par :  $w(X) = 1, w(Y) = 0$  et elle s'écrit  $w = \frac{dx}{1+ay}$ , soit :  
 $dw = \frac{a}{(1+ay)^2} dx \wedge dy$ .

On distingue deux cas selon le signe de  $a$ .

- $a > 0$  : alors  $dw > 0$ . Considérons tout d'abord le cas non contraint, pour joindre  $q_1$  à  $q_2$  au voisinage de  $q_0 = 0$ , on a deux possibilités : un arc  $\gamma_- \gamma_+$  et un arc  $\gamma_+ \gamma_-$  de durée respective  $T_1$  et  $T_2$ , voir figure 3.5.

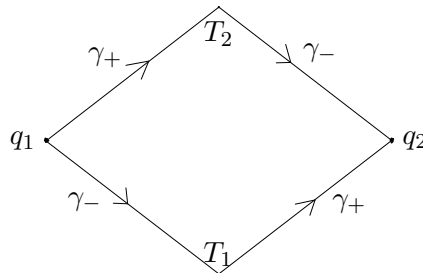


Figure 3.5

Puisque  $T_1 - T_2 = \int dw \geq 0$ , i.e.  $T_1 \geq T_2$ , donc  $\gamma_+ \gamma_-$  est optimal pour le problème non contraint. Pour le cas contraint, le même raisonnement utilisant  $w$  montre que l'arc frontière est temps minimal. La synthèse optimale est alors  $\gamma_+ \gamma_b \gamma_-$ , voir figure 3.6.(i).

- $a < 0$  : alors  $dw > 0$ . L'arc  $\gamma_-\gamma_+$  est optimal pour le problème non contraint et vérifie la contrainte. La synthèse optimale est donc  $\gamma_-\gamma_+$ , voir figure 3.6.(ii).

On a donc prouvé :

**Proposition 3.3.2** *Sous l'hypothèse précédente, on a :*

1. Pour le problème non contraint : si  $a > 0$  un arc  $\gamma_+\gamma_-$  est temps minimal et un arc  $\gamma_-\gamma_+$  est temps maximal et inversement si  $a < 0$ .
2. Pour le problème contraint, un arc frontière est optimal si et seulement si  $a > 0$  et dans ce cas une politique optimale est de la forme  $\gamma_+\gamma_b\gamma_-$ . Si  $a < 0$ , chaque politique optimale est de la forme  $\gamma_-\gamma_+$ .

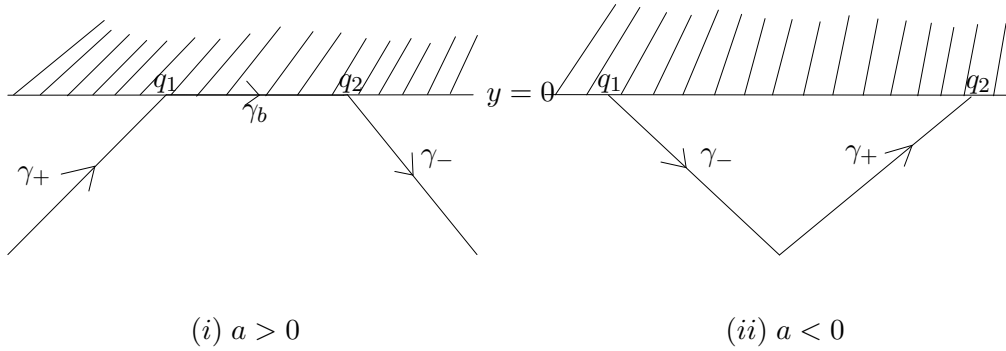


Figure 3.6

**Lien avec le principe de minimum.** Le long de la frontière  $\eta = \frac{\langle p, [X, Y](q) \rangle}{Y.C(q)}$  et  $\langle p, Y(q) \rangle = 0$ . En notant  $p = (p_x, p_y)$  et on obtient  $\eta = -a p_x$ , or  $p_x$  est orienté avec la convention  $\langle p, X + uY \rangle + p_t = 0$ ,  $p_t \geq 0$ , d'où  $p_x < 0$  et  $\text{sign}(\eta) = \text{sign}(a)$ . Donc la condition nécessaire du principe du minimum  $\eta \geq 0$  est violée si  $a < 0$ , ce qui confirme le résultat de la proposition 3.3.2.

**Synthèse temps minimal dans le cas de dimension trois.** On va analyser le cas contraint. Si la contrainte est d'ordre un, la situation est semblable au cas plan. On va donc considérer le cas d'ordre deux et pour des raisons de simplicité et d'application au modèle simplifié  $I$ , on se restreint au cas parabolique. La première étape est de construire une forme normale.

**Forme normale au voisinage de la contrainte pour le modèle simplifié  $I$ .**

Les champs  $X, Y$  et  $[X, Y]$  sont indépendants, et  $[Y, [X, Y]] \in \text{Vect}\{Y, [X, Y]\}$ . La contrainte est d'ordre deux. On suppose que les hypothèses  $(C_1)$  et  $(C_3)$  sont satisfaites le long de l'arc frontière  $\gamma_b$ , c'est-à-dire que  $Y.(X.C) \neq 0$  et que le contrôle  $u_b$  est admissible et non saturant. L'étude est localisée en  $q_0 = 0$ . On note  $q = (x, y, z)$ .

**Normalisation 1.** Puisque  $Y(0) \neq 0$ , on identifie localement  $Y$  à  $\frac{\partial}{\partial z}$ . Les difféomorphismes locaux  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  préservant 0 et  $Y$  vérifient alors :  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0$  et  $\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 1$ . Puisque la contrainte est d'ordre deux, on a  $Y.C = 0$  au voisinage de 0 et donc  $Y$  est tangent à toutes les surfaces  $C = \alpha$ ,  $\alpha$  petit. En particulier :  $\frac{\partial C}{\partial z} = 0$ .

**Normalisation 2.** Puisque  $C$  ne dépend pas de  $z$ , en utilisant un difféomorphisme local préservant 0 et  $Y = \frac{\partial}{\partial z}$ , on peut identifier la contrainte à  $C = x$ . Le système contraint (3.34) s'écrit alors :

$$\dot{x} = X_1(q), \quad \dot{y} = X_2(q), \quad \dot{z} = X_3(q) + u,$$

et  $x \leq 0$ . On suppose que l'arc frontière est un arc  $\sigma$  dans  $x = \dot{x} = 0$  passant par 0. En gardant une approximation affine, suffisante pour notre analyse, on obtient le modèle local suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1x + a_2y + a_3z, \\ \dot{y} &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3z, \\ \dot{z} &= c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + u, \end{aligned}$$

où l'approximation de  $\sigma$  est la droite :  $x = 0, a_2y + a_3z = 0$ .

**Normalisation 3.** On se restreint au plan  $x = 0$ . En utilisant une transformation de la forme  $Z = \beta y + z$ , on peut normaliser l'arc frontière à :  $x = z = 0$ . En changeant  $y$  en  $\lambda y$ , l'arc frontière peut être identifié à  $t \mapsto (0, t, 0)$ . En changeant si nécessaire  $z$  en  $-z$  et  $u$  en  $-u$ , ce qui a pour effet de permuter les arcs  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$ . On peut de plus supposer  $a_3 > 0$ . On a donc montré :

**Lemme 3.3.7** *Sous nos hypothèses, le modèle local dans le cas parabolique est :*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1x + a_3z, \\ \dot{y} &= 1 + b_1x + b_3z, \\ \dot{z} &= (c_0 + u) + c_1x + c_2y + c_3z, \quad |u| \leq 1, \end{aligned}$$

où  $a_3 > 0$  et la contrainte est  $x \leq 0$ . L'arc frontière est identifié à  $\sigma : t \mapsto (0, t, 0)$ . On obtient de plus  $[X, Y] = a_3 \frac{\partial}{\partial x} + b_3 \frac{\partial}{\partial y} + c_3 \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $[Y, [X, Y]] = 0$ ,  $[X, [X, Y]] = (a_1a_3 + a_3c_3) \frac{\partial}{\partial x} + (a_3b_1 + b_3c_3) \frac{\partial}{\partial y} + (a_3c_1 + b_3c_2 + c_3^2) \frac{\partial}{\partial z}$ , et  $[X, [X, Y]] = aX \text{ mod}\{Y, [X, Y]\}$ , avec  $a = a_3b_1 - a_1b_3 \neq 0$ . Puisque l'arc frontière est admissible et non saturant en 0, on a  $|c| < 1$ . De plus  $a_3 = -[X, Y].C$ .

Cette forme normale est utile pour calculer la synthèse optimale locale.

**Théorème 3.3.3** *Considérons le problème de temps minimal pour le système  $\dot{q} = X(q) + uY(q)$ ,  $q \in \mathbb{R}^3$ , avec la contrainte  $C(q) \leq 0$ . Soit  $q_0 \in \{C = 0\}$ . Faisons les hypothèses*

suivantes :

1. au voisinage de  $q_0$  :  $[Y, [X, Y]] \in \text{Vect}\{Y, [X, Y]\}$ ,
2.  $X, Y, [X, Y]$  sont linéairement indépendants en  $q_0$ , et  $[X, [X, Y]](q_0) = aX(q_0) + bY(q_0) + c[X, Y](q_0)$ ,
3. La contrainte est d'ordre deux et les hypothèses  $(C_1)$  et  $(C_3)$  sont satisfaites en  $q_0$ .

Alors l'arc frontière passant par  $q_0$  est localement temps minimal si et seulement si l'arc  $\gamma_-$  passant par  $q_0$  est contenu dans le domaine non admissible  $C > 0$ . Dans ce cas la synthèse temps minimal locale est de la forme  $\gamma_- \gamma_+^T \gamma_b \gamma_+^T \gamma_-$ , où  $\gamma_+^T$  sont des arcs associés à  $u = 1$ , tangents à la frontière.

**Preuve.** D'après le théorème 3.3.2, pour le problème non contraint, tout point accessible à partir de  $q_0$  en temps petit l'est par un arc  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_-$ .

Considérons le modèle normalisé construit précédemment au lemme 3.3.7 où  $q_0 = 0$  et l'arc frontière  $\gamma_b$  est identifié à  $t \mapsto (0, t, 0)$ . Soit  $B$  un point de l'arc frontière voisin de 0,  $B = (0, y_0, 0)$ ,  $y_0 > 0$  petit. Si  $u = \pm 1$ , les arcs associés issus de  $B$  sont approximés par

$$\begin{aligned} x(t) &= a_3(c_0 + c_2 y_0 + u) \frac{t^2}{2} + o(t^2) \\ z(t) &= (c_0 + c_2 y_0 + u)t + o(t). \end{aligned}$$

Les projections dans le plan  $(x, z)$  des arcs  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_-$  et  $\gamma_+ \gamma_- \gamma_+$  joignant 0 à  $B$  sont des boucles notées  $\tilde{\gamma}_- \tilde{\gamma}_+ \tilde{\gamma}_-$  et  $\tilde{\gamma}_+ \tilde{\gamma}_- \tilde{\gamma}_+$ . Puisque  $a_3 > 0$ , les boucles  $\tilde{\gamma}_- \tilde{\gamma}_+ \tilde{\gamma}_-$  et  $\tilde{\gamma}_+ \tilde{\gamma}_- \tilde{\gamma}_+$  sont respectivement contenues dans  $x \leq 0$  et  $x \geq 0$ , voir figure 3.7.

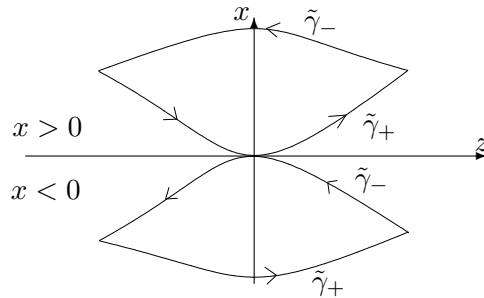


Figure 3.7

Pour le système d'origine, l'arc  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_-$  joignant 0 à  $B$  est temps minimal pour le système non contraint et s'il est contenu dans  $C \leq 0$ , alors il est optimal pour le problème contraint et l'arc frontière n'est pas optimal. S'il est contenu dans  $C \geq 0$ , on peut joindre 0 à  $B$  par un arc  $\gamma_+ \gamma_- \gamma_+$  contenu dans  $C \leq 0$ , mais cet arc est temps maximal. Dans ce cas l'arc frontière est optimal.

La synthèse optimale est alors la suivante. On peut utiliser le modèle local. Soient  $B_1 = (0, y_1, 0)$ ,  $B_2 = (0, y_2, 0)$ , avec  $y_1 < 0 < y_2$ , deux points de la frontière. Considérons les arcs  $\gamma_- \gamma_+$  arrivant en  $B_1$  et les arcs  $\gamma_+ \gamma_-$  partant de  $B_2$ , voir figure 3.8. En faisant varier  $B_1$  et  $B_2$  on décrit entièrement l'ensemble des trajectoires optimales.



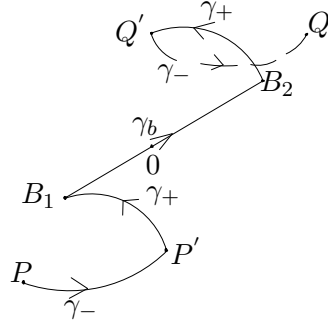


Figure 3.8

**Remarque 3.3.4** On peut aisément calculer la politique optimale joignant  $P$  à  $Q$  en utilisant le modèle :  $\dot{x} = a_3z$ ,  $\dot{y} = 1 + b_1x$ ,  $\dot{z} = c_0 + u + c_2y$ .

**Lien avec le principe de minimum.** D'après le calcul de  $\eta$  dans la section précédente, on a :

$$\eta = \frac{\langle p, [X, [X, Y]] \rangle}{[X, Y].C},$$

et  $[X, [X, Y]] = aX + bY + c[X, Y]$ , avec  $\langle p, Y \rangle = \langle p, [X, Y] \rangle = 0$ , le long de la frontière. Donc  $\eta = \frac{a\langle p, X \rangle}{[X, Y].C}$ . D'après le principe du minimum on a :  $\langle p, X \rangle < 0$  et dans le modèle normalisé :  $[X, Y].C = -a_3 < 0$ . La condition nécessaire  $\eta \geq 0$  impose  $a \geq 0$ . Dans ce cas  $\gamma_+ \gamma_- \gamma_+$  est la politique optimale du problème non contraint, elle est contenue dans  $C \geq 0$  et donc l'arc frontière est optimal. Donc la condition nécessaire d'optimalité  $\eta \geq 0$  imposé par le principe de minimum [33], est violée si  $a < 0$  et c'est le cas où l'arc frontière est non optimal.

Enfin pour le modèle simplifié  $I$ , en utilisant le modèle normalisé mentionné dans la remarque 3.3.4, on a :  $a = a_3b_1$ , où  $a_3$  et  $b_1$  sont positifs, ce qui donne  $a \geq 0$  donc l'arc frontière est optimal.

**Connection de deux contraintes d'ordre deux dans le cas parabolique.** Dans nos applications au modèle simplifié  $I$ , on va devoir analyser le cas où l'on doit connecter deux contraintes d'ordre deux, dans le cas parabolique.

**Proposition 3.3.3** Considérons un système :  $\dot{q} = X + uY$ ,  $|u| \leq 1$ ,  $q \in \mathbb{R}^3$  avec deux contraintes distinctes,  $C_i(q) \leq 0$ ,  $i = 1, 2$ . On suppose que les hypothèses du théorème précédent sont satisfaites. Supposons de plus que les arcs frontières sont optimaux. Soit  $O$  un voisinage de  $q_0$  contenant des arcs frontières  $\gamma_b^1$  et  $\gamma_b^2$  et supposons que l'arc  $\gamma_b^1$  traverse la frontière  $C_2 = 0$ . Alors il existe un modèle géométrique de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1x + a_2y + a_3z, \\ \dot{y} &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3z, \\ \dot{z} &= c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + u, \end{aligned}$$

où les arcs contraints sont identifiés à  $C_1(q) = x$ ,  $C_2(q) = x + \epsilon y$ ,  $\epsilon > 0$  petit. De plus la politique optimale locale est de la forme  $\gamma_- \gamma_+^T \gamma_b^1 \gamma_+^T \gamma_b^2 \gamma_+^T \gamma_-$ , où l'arc intermédiaire  $\gamma_+^T$  est le seul arc tangent aux deux contraintes.

**Preuve.** On normalise le système au voisinage de la première contrainte et on normalise ensuite  $C_2$ . La situation est clair car géométriquement il existe un seul arc  $\gamma_+^T$  tangent aux deux contraintes et qui forme un pont entre les frontières.

### 3.3.4 Algorithme et résultats numériques

Dans cette section on simule les extrémales solutions du principe du minimum de Maurer [33] pour le modèle simplifié  $I$ . On commence tout d'abord par rappeler les résultats de l'analyse géométrique précédemment traitée dans les sections précédentes, ensuite on explique notre algorithme numérique pour résoudre le problème aux valeurs limites issu des conditions nécessaires d'optimalité et enfin on présente les résultats numériques obtenus.

**Résultats de l'analyse géométrique.** L'application du principe du minimum de Maurer [33] au modèle simplifié  $I$  ramène le problème du contrôle optimal à un problème aux valeurs limites défini comme suit :

le couple état/état adjoint  $(q, p) = (r, v, \gamma, p_r, p_v, p_\gamma)$  vérifie les deux systèmes suivants :

#### Système d'état

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v \sin \gamma; \\ \frac{dv}{dt} &= -g \sin \gamma - \frac{1}{2} \frac{s C_D}{m} \rho v^2; \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \left( -\frac{g}{v} + \frac{v}{r} \right) \cos \gamma + \frac{1}{2} \frac{s C_L}{m} \rho v u; \end{aligned}$$

#### Système d'état adjoint

$$\begin{aligned} \frac{dp_r}{dt} &= -p_v \left( 2 \frac{g_0 \sin \gamma}{r^3} - \frac{1}{2} \frac{s \rho v^2}{m} \frac{\partial C_D}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{s \rho v^2 C_D}{m h_s} \right) - p_\gamma \cos \gamma \left( 2 \frac{g_0}{r^3 v} - \frac{v}{r^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} p_\gamma \frac{s \rho v}{m} \frac{\partial C_L}{\partial r} u + \frac{1}{2} p_\gamma \frac{s \rho v C_L}{m h_s} u + \frac{1}{2} p^0 \frac{C_q v^3 \sqrt{\rho}}{h_s} - \eta \frac{\partial C_i}{\partial r}; \\ \frac{dp_v}{dt} &= -p_r \sin \gamma - p_v \left( -\frac{1}{2} \frac{s \rho v^2}{m} \frac{\partial C_D}{\partial v} - \frac{s \rho v C_D}{m} \right) - p_\gamma \cos \gamma \left( \frac{g_0}{r^2 v^2} + \frac{1}{r} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} p_\gamma \frac{s \rho v}{m} \frac{\partial C_L}{\partial v} u - \frac{1}{2} p_\gamma \frac{s \rho C_L}{m} u - 3 p^0 C_q \sqrt{\rho} v^2 - \eta \frac{\partial C_i}{\partial v}; \\ \frac{dp_\gamma}{dt} &= -p_r v \cos \gamma + p_v \frac{g_0 \cos \gamma}{r^2} + p_\gamma \sin \gamma \left( -\frac{g_0}{r^2 v} + \frac{v}{r} \right); \end{aligned}$$

où  $C_i$  représente respectivement pour  $i = 1$  et  $2$  la contrainte sur le flux thermique et sur l'accélération normale. La fonction  $\eta$  définit le multiplicateur associé aux contraintes et est nulle sur le domaine intérieur, donnée respectivement sur le flux thermique et sur l'accélération normale par les formules (3.30) et (3.32).  $p^0$  représente le multiplicateur associé au coût, pour normaliser le système on a choisi  $p^0 = 1$  dans nos calculs numériques, de plus d'après l'analyse géométrique traitée précédemment on déduit :

**Proposition 3.3.4** *La trajectoire optimale satisfaisant les conditions finales requises, est de la forme  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_{flux} \gamma_+ \gamma_{acc} \gamma_+ \gamma_-$ . C'est-à-dire qu'elle est constituée de sept arcs consécutifs : un arc régulier associé à  $u = -1$ , un arc régulier associé à  $u = 1$ , un arc frontière associé à  $u = \frac{X.(X.C_1)}{[X.Y].C_1}$  correspondant au flux thermique, un arc régulier associé à  $u = 1$ , un arc frontière associé à  $u = \frac{X.(X.C_2)}{[X.Y].C_2}$  correspondant à l'accélération normale, un arc régulier associé à  $u = 1$ , puis un arc régulier associé à  $u = -1$ , voir figure 3.9. De plus aux points de jonctions  $t_2, t_3, t_4$  et  $t_5$ , les conditions de saut suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned} p(t_2^+) &= p(t_2^-) - \nu_1 \frac{\partial C_1}{\partial q}, \\ p(t_3^+) &= p(t_3^-) + \nu_2 \frac{\partial C_1}{\partial q}, \\ p(t_4^+) &= p(t_4^-) - \nu_3 \frac{\partial C_2}{\partial q}, \\ p(t_5^+) &= p(t_5^-) + \nu_4 \frac{\partial C_2}{\partial q}, \end{aligned}$$

où les  $\nu_i$  sont données par les formules (3.31) et (3.33).

Pour les conditions limites, on a choisi les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} r(0) &= 6\,497\,960, & r(t_f) &= 6,4115489e + 006, \\ v(0) &= 7404,95, & v(t_f) &= 1,80834e + 003, \\ \gamma(0) &= -0,032 \text{ rad}, & \gamma(t_f) &= -1,478e - 001 \text{ rad}, \\ \varphi^{\max} &= 1\,208e + 003, & \gamma_n^{\max} &= 29,34, \quad P^{\max} = 25\,000, \end{aligned}$$

de plus l'application du principe du minimum impose les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} C_1(t_2) &= \varphi^{\max}, & (X.C_1)(t_2) &= 0, \\ C_2(t_4) &= \gamma_n^{\max}, & (X.C_2)(t_4) &= 0, \\ p_\gamma(t_1) &= 0, & p_\gamma(t_2) &= 0, \\ p_\gamma(t_4) &= 0, & p_\gamma(t_6) &= 0. \end{aligned}$$

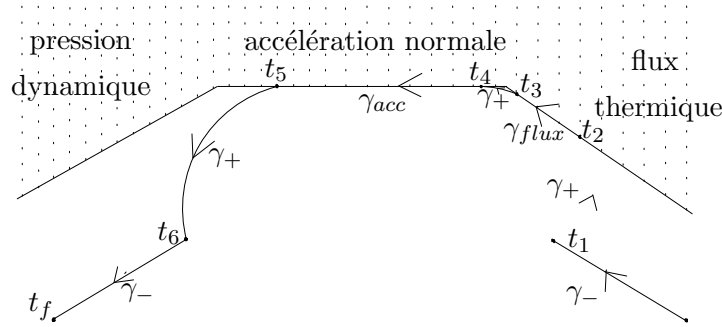


Figure 3.9— Trajectoire optimale du modèle simplifié  $I$

Les extrémales du système sont donc paramétrées par le vecteur adjoint initial  $p(0) = (p_r(0), p_v(0), p_\gamma(0))$ , par les temps de commutation du contrôle ( $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$  et  $t_f$ ) et par les sauts aux points de sorties des deux contraintes ( $\nu_2$  et  $\nu_4$ ). L'algorithme suivant permet d'obtenir ces paramètres pour lesquels la trajectoire extrémale vérifie les conditions limites, les conditions imposées par le principe du minimum et la condition sur le Hamiltonien puisque le temps final est libre.

**Algorithme et résultats numériques.** On peut résoudre le problème aux valeurs limites précédent en utilisant l'algorithme de tir multiple directement, mais la principale difficulté est de trouver une bonne estimation pour les inconnus  $p_r(0), p_v(0), p_\gamma(0), t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_f, \nu_2$  et  $\nu_4$ , qui produise une solution qui vérifie les conditions terminales et les conditions imposées par le principe du minimum. Pour surmonter cette difficulté rencontrée, on procède de la manière suivante : puisque le système état/état adjoint est découplé au sens où le système d'état est indépendant de l'état adjoint (surtout que le contrôle ne dépend pas explicitement du vecteur adjoint), notre algorithme consiste alors à résoudre le système état/état adjoint en deux étapes :

**Étape 1 :** cette étape sert à résoudre le système d'état et à déterminer les instants de commutation du contrôle. En effet le problème est de trouver  $Z = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_f)$  qui vérifie la fonction de tir  $F(Z) = 0$ , où

$$F(Z) = \begin{bmatrix} C_1(t_2) - \varphi^{\max} \\ (X.C_1)(t_2) \\ C_2(t_4) - \gamma_n^{\max} \\ (X.C_2)(t_4) \\ r(t_f) - 6,4115489e + 006 \\ v(t_f) - 1,80834e + 003 \\ \gamma(t_f) + 1,478e - 001 \end{bmatrix}.$$

Pour résoudre ce problème, on propose un couplage entre la méthode de continuation sur la borne maximale ( $\varphi^{\max}, \gamma_n^{\max}$ ) des contraintes sur l'état et l'algorithme de tir multiple, en procédant comme suit : on utilise l'algorithme de tir simple pour résoudre le système d'état sans contrainte, ce qui donne les résultats suivants :

- les points de commutation  $t_1^*, t_2^*$  et  $t_3^*$ ,

- les bornes maximales  $\varphi^{\max, \star}$  et  $\gamma_n^{\max, \star}$ ,
- les temps  $t_{11}^*$  et  $t_{22}^*$ , où atteignent les bornes maximales.

Ensuite on tire de ces résultats une estimation initiale  $Z^{0, \epsilon} = (t_1^*, t_{11}^*, t_{11}^* + \epsilon t_{11}^*, t_{22}^*, t_{22}^* + \epsilon t_{22}^*, t_2^*, t_3^*)$  pour lancer l'algorithme de tir multiple afin de résoudre le système d'état (perturbé) associé aux bornes maximales sur les contraintes suivantes :

$$\varphi^{\max, \epsilon} = \varphi^{\max, \star} - \epsilon \varphi^{\max, \star},$$

$$\gamma_n^{\max, \epsilon} = \gamma_n^{\max, \star} - \epsilon \gamma_n^{\max, \star},$$

où  $\epsilon$  est un réel petit et positif. Partant de ce système de référence, on réinjecte le résultat comme initialisation du système d'état voisin. Plus précisément, partant d'une borne maximale  $(\varphi^{\max, \epsilon}, \gamma_n^{\max, \epsilon})$  et passant d'une borne maximale  $(\varphi^{\max, c}, \gamma_n^{\max, c})$  courante à une borne maximale  $(\varphi^{\max, +}, \gamma_n^{\max, +})$ , on se sert de  $Z^{0, c}$  pour lancer l'algorithme de tir multiple afin de trouver  $Z^{0, +}$ . Les résultats sont tracés sur les figures *fig.3.3*.

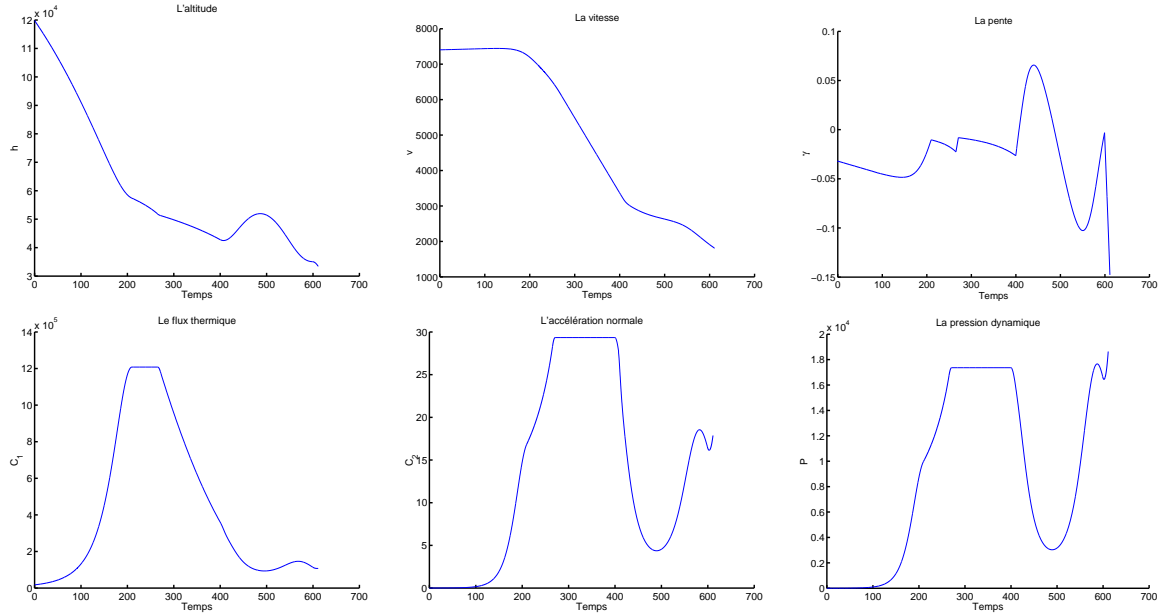


FIG. 3.3 – Coordonnées d'état et contraintes sur l'état pour le modèle simplifié *I*.

**Étape 2 :** Dans cette étape, la connaissance des points de commutation nous facilite l'application de l'algorithme de tir, surtout en ce qui concerne le choix des noeuds, afin de résoudre le système d'état adjoint. Plus précisément on cherche  $Z = (p_r(0), p_v(0), p_\gamma(0), \nu_2, \nu_4)$ , qui vérifie la fonction de tir  $F(Z) = 0$ , où

$$F(Z) = \begin{bmatrix} p_\gamma(t_1) \\ p_\gamma(t_2) \\ \langle p(t), X(q(t_2)) + u Y(q(t_2)) \rangle + 1 \\ p_\gamma(t_4) \\ p_\gamma(t_6) \end{bmatrix}.$$

Les résultats obtenus sont tracés sur les figures *fig.3.4* et *fig.3.5*. Le  $Z$  et  $F(Z)$  trouvés sont :

$$Z = \begin{bmatrix} 1,852548586224013e + 002 \\ 1,250976523316097e + 005 \\ 8,251019847212254e + 007 \\ 1,303082249555811e + 002 \\ 1,342809020295197e + 007 \end{bmatrix}, \quad F(Z) = \begin{bmatrix} 8,789356797933579e - 009 \\ -1,406297087669373e - 007 \\ 1,110223024625157e - 016 \\ 1,452281139791012e - 008 \\ 1,281499862670898e - 006 \end{bmatrix},$$

ainsi les sauts aux points d'entrées sont donnés par :

$$\nu_1 = 4,209164006513169e + 001 \quad , \quad \nu_3 = 1,506974540319433e + 006.$$

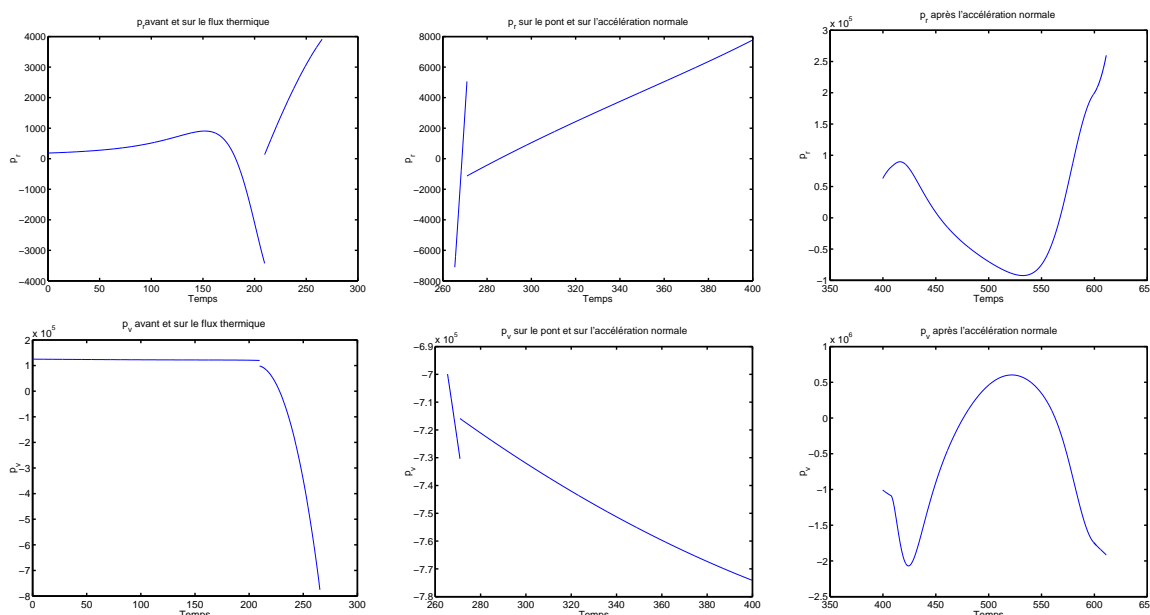
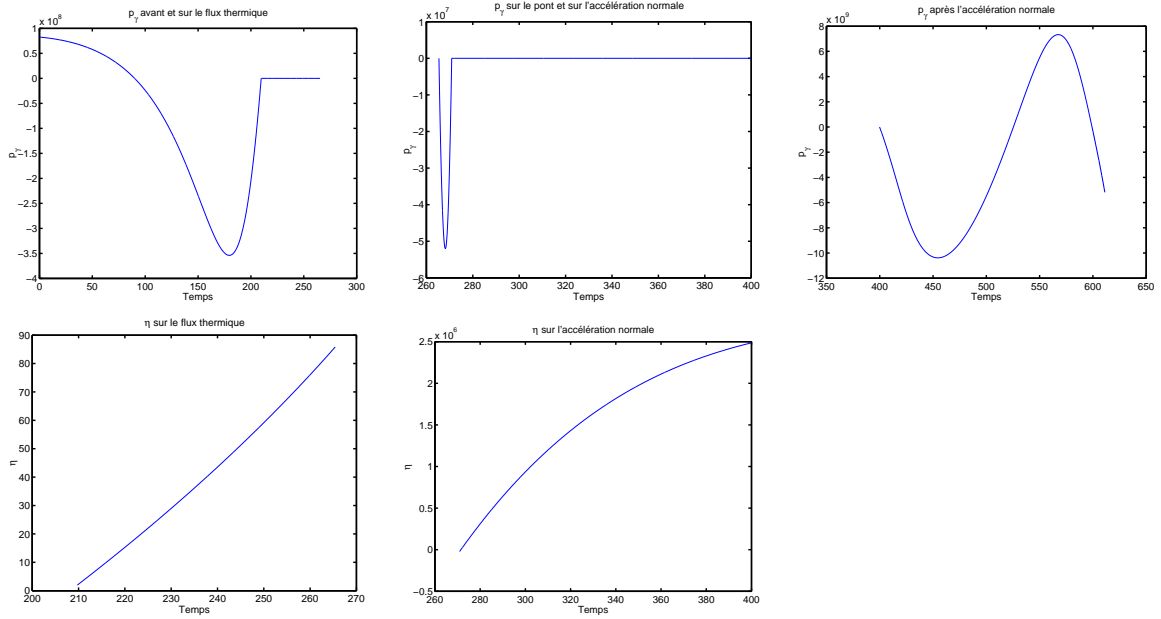


FIG. 3.4 –  $p_r$  et  $p_v$  sur différentes phases du domaine du vol

### Commentaire

Les vecteurs adjoints  $p_r$  et  $p_v$  sont discontinus aux points d'entrée (ou de sortie) dans les deux contraintes (actives) sur l'état. Par contre, comme les contraintes sur l'état ne dépendent pas de  $\gamma$ , le vecteur adjoint  $p_\gamma$  reste continu. Le multiplicateur  $\eta$  est positif sur les contraintes sur l'état. De plus le vecteur adjoint  $p_\gamma$ , qui a le même signe que la fonction de commutation, est positif (resp. négatif) sur une extrémale bang  $\gamma_-$  (resp.  $\gamma_+$ ) et est nul sur la frontière. Ces résultats confirment les conditions nécessaires d'optimalité de Maurer.

FIG. 3.5 –  $p_\gamma$  et  $\eta$  sur différentes phases du domaine du vol

### 3.4 Contrôle optimal sur le modèle simplifié II

Dans cette section on donne le lien entre les champs de vecteurs (en dimension quatre) associés au modèle simplifié II et ceux (en dimension trois) associés au modèle simplifié I, afin d'appliquer les résultats obtenus dans la section précédente pour résoudre ensuite théoriquement puis numériquement le problème du contrôle optimal pour le système simplifié II. Enfin pour appliquer la méthode de continuation sur la borne maximale de la contrainte, tout d'abord en ne tenant pas compte des contraintes sur l'état, puis en les prenant en compte.

#### 3.4.1 Énoncé du problème et notations

Le modèle simplifié II, défini par le système (3.18), peut s'écrire comme un système de contrôle optimal affine mono-entrée en dimension quatre :

$$\dot{\tilde{q}} = \tilde{X}(\tilde{q}) + u\tilde{Y}(\tilde{q}), \quad |u| \leq M, \quad (3.35)$$

où  $\tilde{q} = (q, \mu)$  est l'état augmenté en dimension quatre de l'état  $q = (r, v, \gamma)$ ,  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  sont les champs de vecteurs donnés par :

$$\tilde{X} = X + \cos \mu Y, \quad \tilde{Y} = \frac{\partial}{\partial \mu}, \quad (3.36)$$

avec

$$X = v \sin \gamma \frac{\partial}{\partial r} - \left( \frac{g_0 \sin \gamma}{r^2} + \frac{s}{2m} \rho C_D v^2 \right) \frac{\partial}{\partial v} + \cos \gamma \left( \frac{-g_0}{r^2 v} + \frac{v}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \gamma},$$

$$Y = \frac{s}{2m} \rho C_L v \frac{\partial}{\partial \gamma},$$

sont les champs de vecteurs associés au modèle simplifié  $I$ . Le coût à minimiser est :

$$J(u) = \int_0^T \tilde{\varphi}(\tilde{q}) dt, \text{ avec } \tilde{\varphi}(\tilde{q}) = \varphi(q) = c_q \sqrt{\rho} v^3.$$

Ainsi  $\tilde{q}$  vérifie les contraintes d'états (3.9) et (3.10) et les conditions limites :  $q(0)$  et  $q(T)$  sont données,  $\mu(0)$  et  $\mu(T)$  sont libres dans  $[-\pi, \pi]$ .

### 3.4.2 Le modèle sans contrainte

**Application du principe du minimum.** On introduit l'équation :

$$\dot{q}_0 = \varphi(q), \quad q_0(0) = 0, \quad (3.37)$$

et  $\bar{q} = (\tilde{q}, q_0) = (q, \mu, q_0)$  l'espace d'états élargi. Les équations (3.37) et (3.35) définissent donc le système élargi :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}} = \tilde{X}(\tilde{q}) + u\tilde{Y}(\tilde{q}) \\ \dot{q}_0 = \varphi(q), \end{cases} \quad (3.38)$$

On introduit le Hamiltonien :

$$H(\tilde{q}, \tilde{p}, u) = \langle \tilde{p}, \tilde{X}(\tilde{q}) + u\tilde{Y}(\tilde{q}) \rangle + p^0 \varphi(q) = \langle p, X(q) + \cos \mu Y(q) \rangle + p_\mu u + p^0 \varphi(q),$$

où  $\tilde{p} = (p, p_\mu) = (p_r, p_v, p_\gamma, p_\mu)$  est le vecteur adjoint, et  $p^0$  est une constante positive telle que :  $(\tilde{p}, p^0) \neq (0, 0)$ .

**Définition 3.4.1** Si  $p^0 \neq 0$ , on est dans le cas normal, et si  $p^0 = 0$  on est dans le cas anormal.

**Définition 3.4.2** On appelle extrémale un triplet  $(\tilde{q}, \tilde{p}, u)$  solution du principe du minimum :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}} = \tilde{X}(\tilde{q}) + u\tilde{Y}(\tilde{q}), \\ \dot{\tilde{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \tilde{q}} = -\tilde{p} \left( \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{q}} + u \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \tilde{q}} \right) - p^0 \frac{\partial \varphi(q)}{\partial \tilde{q}}, \\ H(\tilde{q}, \tilde{p}, u) &= \min_{w \in [-M, M]} H(\tilde{q}, \tilde{p}, w), \end{aligned}$$

c-à-d :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}} = \tilde{X}(\tilde{q}) + u\tilde{Y}(\tilde{q}), \\ \dot{p} = -p \left( \frac{\partial X}{\partial q} + \cos(\mu) \frac{\partial Y}{\partial q} \right) - p^0 \frac{\partial \varphi(q)}{\partial q}, \\ \dot{p}_\mu = \sin(\mu) \langle p, Y(q) \rangle, \\ H(\tilde{q}, \tilde{p}, u) = \min_{w \in [-M, M]} H(\tilde{q}, \tilde{p}, w), \end{cases}$$

en particulier :

$$u(t) = \begin{cases} M & \text{si } p_\mu(t) < 0, \\ -M & \text{si } p_\mu(t) > 0. \end{cases}$$



**Définition 3.4.3** *Considérons le système  $\dot{\tilde{q}} = \tilde{X}(\tilde{q}) + u\tilde{Y}(\tilde{q})$  noté  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ . Une trajectoire singulière est la projection sur l'espace d'état des équations :*

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}}, \quad \dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{q}}, \quad \langle \tilde{p}, \tilde{Y}(\tilde{q}) \rangle = 0, \quad (3.39)$$

où  $H = \langle \tilde{p}, \tilde{X} + u\tilde{Y} \rangle$ . Elle est dite *exceptionnelle* si  $H = 0$ , *admissible* si  $|u| \leq M$  et *strictement admissible* si  $|u| < M$ .

**Calcul des extrémals singuliers.** On calcule les crochets de Lie associés aux champs de vecteurs  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  (en dimension quatre) en fonction de ceux associés à  $X, Y$  (en dimension trois) :

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \begin{pmatrix} \sin(\mu)Y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] = \begin{pmatrix} \cos(\mu)Y \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] = \begin{pmatrix} \sin(\mu)[X, Y] \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les extrémals singuliers du système  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  sont contenues dans  $\Sigma : \phi(t) = \langle \tilde{p}, \tilde{Y}(\tilde{q}) \rangle = 0$ , i.e.  $p_\mu = 0$ . En dérivant par rapport à  $t$ , il vient :

$$\dot{\phi}(t) = \langle \tilde{p}, [\tilde{X}, \tilde{Y}](\tilde{q}) \rangle = 0,$$

ce qui implique :  $\sin \mu \langle p, Y \rangle = 0$ .

**Proposition 3.4.1** *Dans le domaine de vol où  $\cos(\gamma) \neq 0$ , les extrémals singuliers du système  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  sont données par  $u = 0$ ,  $\sin \mu = 0$  et  $\langle p, Y \rangle \neq 0$ .*

**Preuve.** Une extrémale singulière doit vérifier  $\phi = p_\mu = 0$  et  $\dot{\phi} = \sin(\mu) \langle p, Y \rangle = 0$ , ce qui donne 3 cas à distinguer :

1.  $\sin \mu = 0$  et  $\langle p, Y \rangle = 0$ .

Dans ce cas,  $\mu$  est constante et  $p_\mu$  est nul, or  $\langle p, Y \rangle$  est la fonction de commutation du système  $(X, Y)$ , d'où ce dernier accepte  $u = \cos(\mu) = +1$  ou  $-1$  comme extrémale singulière, ce qui est incompatible avec la proposition 3.3.1.

2.  $\sin \mu \neq 0$  et  $\langle p, Y \rangle = 0$ .

En dérivant  $\phi(t) = \langle \tilde{p}, \tilde{Y}(\tilde{q}) \rangle$  deux fois, il vient :

$$\ddot{\phi}(t) = \sin(\mu) \langle p, [X, Y] \rangle + u \cos(\mu) \langle p, Y \rangle = 0,$$

ce qui implique  $\langle p, [X, Y] \rangle = 0$ , d'où d'après 3.3.1, on a  $\langle p, [Y, [X, Y]] \rangle = 0$ . De plus :

$$\ddot{\phi} = u \cos \mu \langle p, [X, Y] \rangle - \sin \mu \langle p, [X, [X, Y]] \rangle + \cos \mu \sin \mu \langle p, [Y, [X, Y]] \rangle = 0,$$

donc  $\langle p, [X, [X, Y]] \rangle = 0$ . Ce qui implique d'après le lemme 3.3.1 que  $\langle p, X \rangle = 0$ . Or  $X, Y, [X, Y]$  sont indépendants et forment un repère, donc  $\tilde{p} = 0$ , ce qui est impossible.

Enfin on conclut que le cas possible est, celui qui, durant une extrémale singulière, vérifie  $\sin(\mu) = 0$ ,  $\langle p, Y \rangle \neq 0$  et  $u = 0$ .

**Optimalité des extrémales singulières.** On applique un nouveau paramétrage aux équations en posant  $ds = \varphi(q(t)) dt$ . Le système (3.37) devient :

$$\dot{\tilde{q}} = \bar{X}(\tilde{q}) + u\bar{Y}(\tilde{q}), \quad |u| \leq M, \quad (3.40)$$

où

$$\bar{X} = \psi \tilde{X}, \quad \bar{Y} = \psi \tilde{Y} \text{ et } \psi = \frac{1}{\varphi}.$$

Le problème de contrôle optimal est équivalent alors à un problème de temps minimal. On va analyser l'optimalité des extrémales singulières pour ce problème.

Calculons les crochets de Lie associés à  $\bar{X}, \bar{Y}$ , en utilisant la formule suivante :

$$[f_1 X_1, f_2 X_2] = f_1 f_2 [X_1, X_2] + f_1 (X_1 \cdot f_2) X_2 - f_2 (X_2 \cdot f_1) X_1,$$

où  $f_1, f_2$  sont des fonctions lisses et  $Z \cdot f(q) = \frac{\partial f}{\partial q}(q) \cdot Z$  est la dérivée de Lie. Il vient donc :

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = \psi^2 [\tilde{X}, \tilde{Y}] + \psi (\tilde{X} \cdot \psi) \tilde{Y} - \psi (\tilde{Y} \cdot \psi) \tilde{X}.$$

Puisque  $\tilde{Y} = \frac{\partial}{\partial \mu}$  et  $\psi$  ne dépend que de  $r$  et de  $v$ , on a alors  $\tilde{Y} \cdot \psi = 0$ . Donc :

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = \psi^2 [\tilde{X}, \tilde{Y}] + \psi (\tilde{X} \cdot \psi) \tilde{Y}.$$

En calculant de la même façon, sachant que  $[\tilde{X}, \tilde{Y}] \cdot \psi = 0$ , on obtient :

**Lemme 3.4.1** *On a les propriétés suivantes :*

1. l'ensemble  $\Sigma' : \langle \tilde{p}, \tilde{Y} \rangle = \langle \tilde{p}, [\tilde{X}, \tilde{Y}] \rangle = 0$  coïncide avec :  $\langle \tilde{p}, \tilde{Y} \rangle = \langle \tilde{p}, [\tilde{X}, \tilde{Y}] \rangle = 0$ ,
2.  $[\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] = \psi^3 [\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] \text{ mod } \{[\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]]\}$ ,
3.  $[\bar{X}, [\bar{X}, \bar{Y}]] = \psi^3 [\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] + \psi^2 ([\tilde{X}, \tilde{Y}] \cdot \psi) \tilde{X} = \psi^3 [\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] \text{ mod } \{[\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]]\}$ .

Pour tester l'optimalité d'une extrémale singulière pour le problème de temps minimal, on utilise la condition nécessaire de Legendre Clebsch, qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{p}, \bar{X} \rangle \langle \tilde{p}, [\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]] \rangle &\geq 0, \\ \langle \tilde{p}, \bar{Y} \rangle &= \langle \tilde{p}, [\bar{X}, \bar{Y}] \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Or d'après le principe du minimum on a  $\langle \tilde{p}, \bar{X} \rangle < 0$ , d'où  $\langle \tilde{p}, [\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Y}]] \rangle \leq 0$ , donc d'après le lemme précédent, on trouve :

**Proposition 3.4.2** *Durant une extrémale singulière solution du  $(\bar{X}, \bar{Y})$  on a :  $\cos(\mu) = -\text{signe}(\langle p, Y \rangle)$  i.e.*

$$\mu = \begin{cases} 0 & \text{si } \langle p, Y \rangle < 0, \\ \pm\pi & \text{si } \langle p, Y \rangle > 0. \end{cases} \quad (3.42)$$

**Remarque 3.4.1** Puisque  $\cos(\mu)$  est une fonction paire, alors  $\mu$  et  $-\mu$  donnent la même trajectoire pour  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ . Il suffit donc de prendre  $\mu \in [0, \pi]$  et alors on obtient deux genres de trajectoires singulières  $\mu = 0$  et  $\mu = \pi$ .

### Classification des trajectoires au voisinage de $\Sigma$ .

**Définition 3.4.4** L'ensemble  $\Sigma : \langle \tilde{p}, \tilde{Y} \rangle = 0$  ( $p_\mu = 0$ ) s'appelle la surface de commutation. Soit  $(\tilde{q}, \tilde{p}, u)$  une extrémale définie sur  $[0, T]$ . Elle est dite singulière si elle est contenue dans  $\Sigma$ , bang si  $u = +M$  ou  $-M$ , et bang-bang si  $u(t)$  est constant par morceaux et défini presque partout par  $u(t) = -M \text{signe}(p_\mu)$ . On note respectivement  $\gamma_+$ ,  $\gamma_-$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma_\pi$  un arc lisse associé à  $u = +M$ ,  $u = -M$ , ( $u = 0$  et  $\mu = 0$ ), ( $u = 0$  et  $\mu = \pi$ ) et  $\gamma_1 \gamma_2$  représente un arc  $\gamma_1$  suivi d'un arc  $\gamma_2$ .

On utilise les résultats de [9, 28] pour classifier les extrémales au voisinage d'un point  $z_0 = z(t_0) = (\tilde{q}_0, \tilde{p}_0)$  de la surface de commutation.

**1. Points ordinaires :** soit  $z_0 \in \Sigma$ . Supposons  $\Sigma$  lisse et de codimension 1 en  $z_0$ . Dans ce cas on dit que  $z_0$  est un point de commutation ordinaire et alors chaque courbe extrémale dans un voisinage de  $z_0$  est de la forme  $\gamma_+ \gamma_-$  ou  $\gamma_- \gamma_+$ , voir figure 3.10.

**2. Points plis :** soit  $z_0$  appartenant à  $\Sigma' : \langle \tilde{p}, \tilde{Y} \rangle = \langle \tilde{p}, [\tilde{X}, \tilde{Y}] \rangle = 0$  i.e. ( $p_\mu(t_0) =$

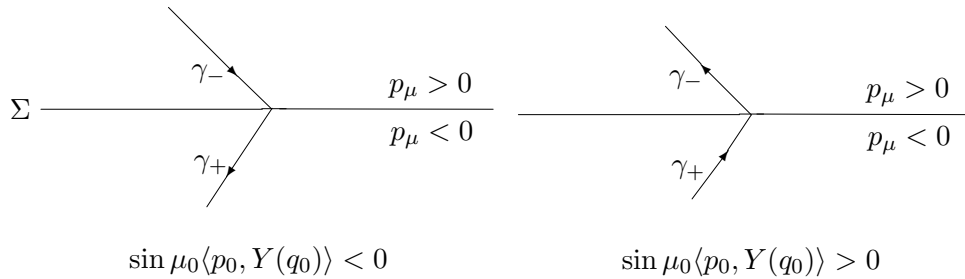


Figure 3.10

$0, \sin(\mu_0) = 0$ ). Supposons  $\Sigma, \Sigma'$  lisses et de codimensions respectives 1 et 2 en  $z_0$ . Dans ce cas on dit que  $z_0$  est un point de commutation pli. Or  $\ddot{\phi}(t_0) = \langle \tilde{p}, [\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] \rangle + u \langle \tilde{p}, [\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] \rangle$ , qui se réduit à  $\psi^3 \sin(\mu_0) \langle p_0, [X, Y](q_0) \rangle + u \psi^3 \cos(\mu_0) \langle p_0, Y(q_0) \rangle$  d'après le lemme 3.4.1. Soient :  $\lambda^\pm = \psi^3 \sin(\mu_0) \langle p_0, [X, Y](q_0) \rangle \pm M \psi^3 \cos(\mu_0) \langle p_0, Y(q_0) \rangle$ , et puisque :  $\sin(\mu_0) = 0$  et  $\cos(\mu_0) = -\text{signe} \langle p_0, Y(q_0) \rangle$  d'après la proposition 3.4.2, donc  $\lambda^+ < 0$  et  $\lambda^- > 0$ . En utilisant la classification de [9, 28] le point  $z_0$  est un point hyperbolique, et chaque courbe extrémale dans un voisinage de  $z_0$  est de la forme :  $\gamma_- \gamma_0 \gamma_+$  ou  $\gamma_+ \gamma_\pi \gamma_-$ , voir figure 3.11.

### 3.4.3 Le modèle avec contraintes sur l'état

On tient maintenant compte des contraintes sur l'état. Comme dans le modèle simplifié I, on applique le principe de minimum [33] pour analyser le modèle simplifié II. Pour

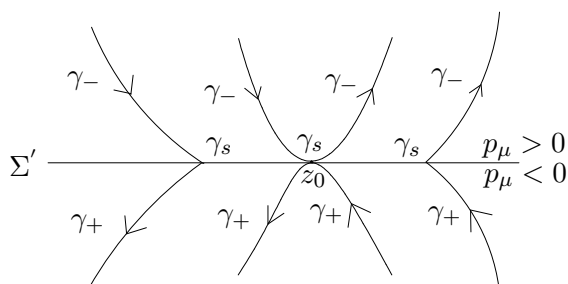


Figure 3.11

calculer l'ordre des contraintes et les indéterminés  $u_b$ ,  $\eta$  et  $\nu$ , on commence par le calcul des crochets et des dérivées de Lie associés à  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  en dimension quatre, en fonction de ceux associés à  $X$  et  $Y$  en dimension trois.

**Calcul de l'ordre des contraintes sur l'état.** D'après les calculs précédents, on a :

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \begin{pmatrix} \sin(\mu)Y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] = \begin{pmatrix} \cos(\mu)Y \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] = \begin{pmatrix} \sin(\mu)[X, Y] \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc si on note par  $C$  (qui ne dépend que de  $r$  et de  $v$ ) la contrainte sur le flux thermique ou sur l'accélération normale, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{X}.C &= X.C + \cos \mu Y.C, \\ [\tilde{X}, \tilde{Y}].C &= \sin \mu Y.C, \\ [\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]].C &= \sin \mu [X, Y].C, \\ [\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]].C &= \cos \mu Y.C = 0. \end{aligned}$$

De plus, si on impose l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 7** Le long de l'arc frontière  $\sin \mu \neq 0$ .

Alors on a le résultat suivant :

**Lemme 3.4.2** Pour le modèle simplifié II, dans le domaine de vol où  $\cos \gamma \neq 0$ , les contraintes sur le flux thermique et l'accélération normale sont d'ordre trois, et l'hypothèse  $(C_1)$  est vérifiée le long d'un arc frontière.

Dans la suite de cette section on impose l'hypothèse 7.

**Calcul de  $u_b$ ,  $\eta$  et de  $\nu$ .** On note par  $C$  la contrainte sur le flux thermique ou l'accélération normale. On rappelle alors le lemme 2.4.5 du chapitre précédent, qui traite le cas d'une contrainte d'ordre trois.

D'après la définition de la suite  $(\psi_i)_{i \geq 0}$ , mentionnée dans le chapitre précédent, on a :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \tilde{Y}, & \psi_1 &= [\tilde{X}, \tilde{Y}], & \psi_2 &= [\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] + u[\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]], \\ \psi_3 &= [\tilde{X}, [\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]]] + u^2[\tilde{Y}, [\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]]] + 2u[\tilde{Y}, [\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]]] + ((\tilde{X}.u) + u(\tilde{Y}.u))[\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]]. \end{aligned}$$

L'application du lemme 2.4.5 au système  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  donne

**Lemme 3.4.3** 1. *Le long de l'arc frontière on a :*

$$\begin{aligned} \tilde{Y}.C &= [\tilde{X}, \tilde{Y}].C = 0, \\ u_b &= -\frac{\tilde{X}^3.C}{[\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]].C}, \\ \langle \tilde{p}(t), \tilde{Y} \rangle &= \langle \tilde{p}(t), [\tilde{X}, \tilde{Y}] \rangle = \langle \tilde{p}(t), [\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] \rangle + u_b \langle \tilde{p}(t), [\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] \rangle = 0, \\ \eta(t) &= \frac{(\langle \tilde{p}(t), \psi_3 \rangle_{u=u_b})}{([\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]].C)}. \end{aligned}$$

2. *En un point de contact ou de jonction on a :*

$$\begin{aligned} \langle \tilde{p}(t_1^-), \tilde{Y} \rangle &= \langle \tilde{p}(t_1^+), \tilde{Y} \rangle, \\ \langle \tilde{p}(t_1^-), [\tilde{X}, \tilde{Y}] \rangle &= \langle \tilde{p}(t_1^+), [\tilde{X}, \tilde{Y}] \rangle, \\ \nu &= \frac{\langle \tilde{p}(t_1^-), \psi_2(t_1^+) \rangle - \langle \tilde{p}(t_1^+), \psi_2(t_1^+) \rangle}{[\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]].C}. \end{aligned}$$

On en déduit les résultats suivants :

**Corollaire 3.4.1** *Le long de l'arc frontière on a :*

$$\begin{aligned} X.C &= 0, \\ \cos \mu &= \frac{X^2.C}{[X, Y].C}, \\ u_b &= -\frac{X^3.C - \cos \mu [X, [X, Y]].C}{\sin \mu [X, Y].C}, \\ p_\mu(t) &= \langle p(t), Y \rangle = \langle p(t), [X, Y] \rangle = 0, \\ \eta(t) &= \frac{\langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle}{[X, Y].C}. \end{aligned}$$

**Remarque 3.4.2** *On sait que durant l'arc frontière on a  $\sin \mu \neq 0$ . On a supposé que  $\mu(t)$  est continue, ainsi on arrive et on quitte l'arc frontière par un régulier  $\gamma_+$  ou  $\gamma_-$ . Puisque l'arc frontière est optimal (voir la section suivante), on ne rencontre que des points de jonction avec les frontières.*

Comme précédemment, on calcule  $\psi_2$  et on applique le lemme précédent, pour obtenir :

**Corollaire 3.4.2** *En un point de jonction  $t_1$  entre un bang-bang et l'arc frontière on a :*

$$\begin{aligned} p_\mu(t_1^-) &= p_\mu(t_1^+), \\ \langle p(t_1^-), Y \rangle &= \langle p(t_1^+), Y \rangle, \\ \nu &= \frac{\langle p(t_1^-), [X, Y](q(t_1)) \rangle}{([X, Y].C)(q(t_1))}. \end{aligned}$$

### 3.4.4 Synthèse temps minimal au voisinage de la contrainte

**Introduction.** On considère un système affine, mono-entrée :

$$\dot{q} = X(q) + uY(q) \quad , \quad |u| \leq M, \quad C(q) \leq 0, \quad (3.43)$$

où  $q \in \mathbb{R}^4$  et  $C$  est une contrainte d'ordre trois.

Notre objectif est de présenter par calcul direct (en utilisant Maple) la synthèse temps minimal, au voisinage de la contrainte pour le modèle simplifié *II*. La première étape est de construire une forme normale.

#### Forme normale au voisinage de la contrainte pour le modèle simplifié *II*

**Lemme 3.4.4** *Au voisinage de la frontière on a :*

$$\begin{aligned} \tilde{X}, \tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}] &\text{ sont indépendants,} \\ [\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] &\in \text{vect}\{\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]\}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

**Preuve.** On sait que :

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} X + \cos(\mu)Y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\tilde{X}, \tilde{Y}] = \begin{pmatrix} \sin(\mu)Y \\ 0 \end{pmatrix},$$

or  $\sin(\mu) \neq 0$  au voisinage de la frontière, et les deux champs de vecteurs  $X, Y$  sont indépendants. D'où  $\tilde{X}, \tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]$  le sont aussi. On peut vérifier aussi que  $[\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] = \begin{pmatrix} \cos(\mu)Y \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{vect}\{\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]\}$ .

Les champs  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  et  $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$  sont indépendants, et  $[\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]] \in \text{Vect}\{Y, [X, Y]\}$ . La contrainte est d'ordre trois. On suppose que les hypothèses  $(C_1)$  et  $(C_3)$  sont satisfaites le long de l'arc frontière  $\gamma_b$ , c'est-à-dire que  $\tilde{Y}.(\tilde{X}^2.C) \neq 0$  et que le contrôle  $u_b$  est admissible et non saturant. L'étude est localisée en  $q_0 = 0$ . On note  $q = (x, y, z, \mu)$ .

**Normalisation.** Puisque le modèle simplifié *II* n'est qu'une extension du modèle simplifié *I*, en ajoutant l'équation  $\dot{\mu} = u$ , qui est déjà normalisée, donc pour normaliser le système simplifié *II*, on peut prendre le modèle normal  $\dot{x} = az, \dot{y} = 1 + bx, \dot{z} = c + \cos \mu$ , déjà

construit pour le modèle simplifié  $I$ , en ajoutant l'équation  $\dot{\mu} = u$ , de plus on identifie la contrainte à  $C = x$  et on localise notre étude au point  $q_0 = (0, 0, 0, \mu_0)$ , ce qui donne le modèle local suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = az, \\ \dot{y} = 1 + bx, \\ \dot{z} = c + \cos \mu, \\ \dot{\mu} = u, \quad x \leq 0, \end{cases}$$

et puisque la contrainte est d'ordre trois donc :

- $\ddot{x} = 0$ , ce qui implique  $c + \cos \mu = 0$ , donc sur la frontière  $c = -\cos \mu$ ,
- $\ddot{x} = 0$ , or  $\sin \mu \neq 0$ , donc  $u_b = 0$ , ce qui implique  $\mu = \mu_0$  sur la frontière.

On conclut alors :

**Lemme 3.4.5** *Sous nos hypothèses, le modèle local est :*

$$\begin{cases} \dot{x} = az, \\ \dot{y} = 1 + bx, \\ \dot{z} = \cos \mu - \cos \mu_0, \\ \dot{\mu} = u, \quad x \leq 0, \end{cases} \quad |u| \leq M,$$

où :  $a = -\frac{[\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]].C}{\sin \mu} = -[X, Y].C > 0$ , la contrainte est  $x \leq 0$ . L'arc frontière est identifié à  $\gamma : t \mapsto (0, t, 0, \mu_0)$ .

Cette forme normale est utile pour calculer la synthèse optimale locale.

**Remarque 3.4.3** *Dans la normalisation précédente, on a utilisé le changement de variable de  $y$  par  $\lambda y$ ,  $z$  par  $-z$ ,  $\mu$  par  $\pi - \mu$  et  $u$  par  $-u$ .*

## Synthèse locale temps minimal

**1. Comparaison de  $\gamma_b$  avec les autres arcs possibles pour rejoindre deux points voisins de la frontière.** On note  $T(\gamma)$  le temps nécessaire pour rejoindre deux points voisins  $A = (0, 0, 0, \mu_0)$  et  $B = (0, t, 0, \mu_0)$  de la frontière par un arc  $\gamma$ , en prenant le modèle local du lemme précédent.

On intègre le modèle normalisé, en utilisant Maple pour le calcul formel et on trouve alors le résultat suivant :

**Lemme 3.4.6** *On a 2 cas :*

1) si  $ab > 0$  alors :

i) si  $\mu_0 \in ]0, \pi[$  on a :

$$\begin{aligned} T(\gamma_- \gamma_+) &< T(\gamma_b) < T(\gamma_+ \gamma_-), \\ T(\gamma_- \gamma_0 \gamma_+) &< T(\gamma_b) < T(\gamma_+ \gamma_\pi \gamma_-), \end{aligned}$$

ii) si  $\mu_0 \in ]-\pi, 0[$  on a :

$$\begin{aligned} T(\gamma_+ \gamma_-) &< T(\gamma_b) < T(\gamma_- \gamma_+), \\ T(\gamma_+ \gamma_0 \gamma_-) &< T(\gamma_b) < T(\gamma_- \gamma_- \pi \gamma_+), \end{aligned}$$

2) si  $ab < 0$  alors :

i) si  $\mu_0 \in ]0, \pi[$  on a :

$$\begin{aligned} T(\gamma_+\gamma_-) &< T(\gamma_b) < T(\gamma_-\gamma_+), \\ T(\gamma_+\gamma_\pi\gamma_-) &< T(\gamma_b) < T(\gamma_-\gamma_0\gamma_+), \end{aligned}$$

ii) si  $\mu_0 \in ]-\pi, 0[$  on a :

$$\begin{aligned} T(\gamma_-\gamma_+) &< T(\gamma_b) < T(\gamma_+\gamma_-), \\ T(\gamma_-\gamma_-\pi\gamma_+) &< T(\gamma_b) < T(\gamma_+\gamma_0\gamma_-), \end{aligned}$$

## 2. Synthèse locale temps minimal :

D'après le lemme précédent, la synthèse locale optimale dépend de  $a$  et  $b$ , et on peut distinguer les cas suivants :

1<sup>er</sup> cas :  $\mathbf{a > 0, b > 0}$  :

1.i)  $\mu_0 \in ]0, \pi[$  :

Avant A

$$\dot{x} > 0 \rightarrow z > 0 \rightarrow \dot{z} < 0 \rightarrow \cos \mu < \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [\mu_0, \pi] \text{ ou } \mu \in [-\pi, -\mu_0].$$

$$\mu \in [\mu_0, \pi] \rightarrow \text{on rejoint A par } \gamma_-.$$

$$\mu \in [-\pi, -\mu_0] \rightarrow \text{non accessible.}$$

Après A

$$\dot{x} < 0 \rightarrow z < 0 \rightarrow \dot{z} < 0 \rightarrow \cos \mu < \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [\mu_0, \pi] \text{ ou } \mu \in [-\pi, -\mu_0].$$

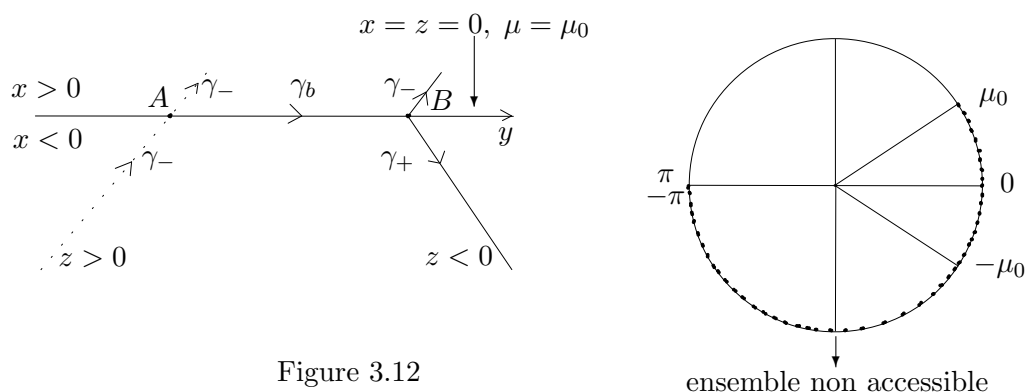
$$\mu \in [\mu_0, \pi] \rightarrow \text{on quitte A par } \gamma_+.$$

$$\mu \in [-\pi, -\mu_0] \rightarrow \text{non accessible.}$$

Donc pour rejoindre A et B, l'arc  $\gamma_-\gamma_+$  est non admissible. Or d'après le lemme précédent on a :

$$\begin{aligned} T(\gamma_-\gamma_+) &< T(\gamma_b) < T(\gamma_+\gamma_-), \\ T(\gamma_-\gamma_0\gamma_+) &< T(\gamma_b) < T(\gamma_+\gamma_\pi\gamma_-). \end{aligned}$$

Alors l'arc frontière  $\gamma_b$  est optimal, et la synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_-\gamma_b\gamma_+$ , voir figure 3.12.





1.ii)  $\mu_0 \in ]-\pi, 0[$  :

**Avant A**

$\dot{x} > 0 \rightarrow z > 0 \rightarrow \dot{z} < 0 \rightarrow \cos \mu < \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [-\mu_0, \pi]$  ou  $\mu \in [-\pi, \mu_0]$ .

$\mu \in [-\pi, \mu_0] \rightarrow$  on rejoint A par  $\gamma_+$ .

$\mu \in [-\mu_0, \pi] \rightarrow$  non accessible.

**Après A**

$\dot{x} < 0 \rightarrow z < 0 \rightarrow \dot{z} < 0 \rightarrow \cos \mu < \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [\mu_0, \pi]$  ou  $\mu \in [-\pi, -\mu_0]$ .

$\mu \in [-\pi, \mu_0] \rightarrow$  on quitte A par  $\gamma_-$ .

$\mu \in [-\mu_0, \pi] \rightarrow$  non accessible.

Donc pour rejoindre A et B,  $\gamma_+\gamma_-$  est non admissible. Or d'après le lemme précédent on a :

$$\begin{aligned} T(\gamma_+\gamma_-) &< T(\gamma_b) < T(\gamma_-\gamma_+), \\ T(\gamma_+\gamma_0\gamma_-) &< T(\gamma_b) < T(\gamma_-\gamma_-\pi\gamma_+). \end{aligned}$$

Alors l'arc frontière  $\gamma_b$  est optimal, et la synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_+\gamma_b\gamma_-$ , voir figure 3.13.

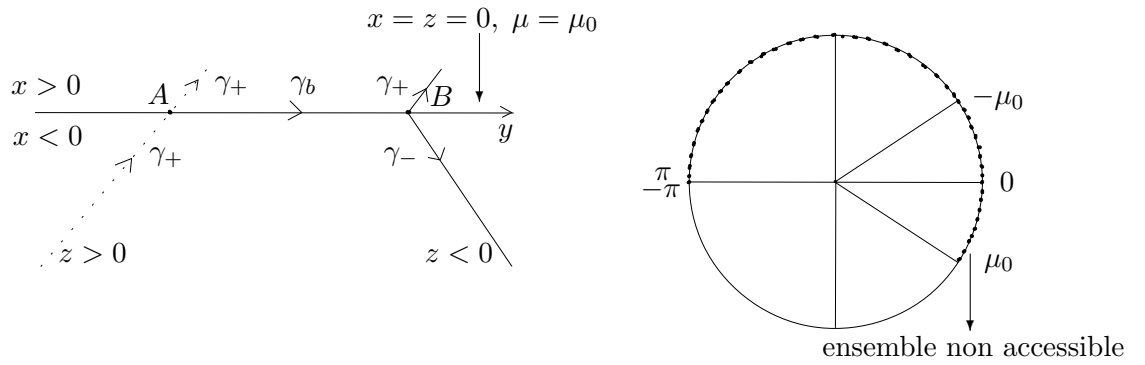


Figure 3.13

2<sup>ème</sup> cas :  $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{b} < \mathbf{0}$  :

2.i)  $\mu_0 \in ]0, \pi[$  :

**Avant A**

$\dot{x} > 0 \rightarrow z > 0 \rightarrow \dot{z} < 0 \rightarrow \cos \mu < \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [\mu_0, \pi]$  ou  $\mu \in [-\pi, -\mu_0]$ .

$\mu \in [\mu_0, \pi] \rightarrow$  on rejoint A par  $\gamma_-$ .

$\mu \in [-\pi, -\mu_0] \rightarrow$  non accessible.

**Après A**

$\dot{x} < 0 \rightarrow z < 0 \rightarrow \dot{z} < 0 \rightarrow \cos \mu < \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [\mu_0, \pi]$  ou  $\mu \in [-\pi, -\mu_0]$ .

$\mu \in [\mu_0, \pi] \rightarrow$  on quitte A par  $\gamma_+$ .

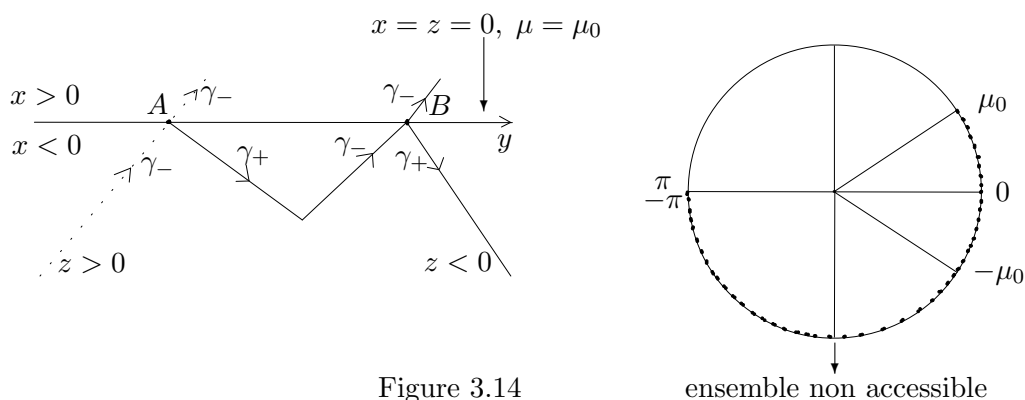
$\mu \in [-\pi, -\mu_0] \rightarrow$  non accessible.

Donc pour rejoindre A et B,  $\gamma_-\gamma_+$  est non admissible. Or d'après le lemme précédent on

a :

$$\begin{aligned} T(\gamma_+\gamma_-) &< T(\gamma_b) < T(\gamma_-\gamma_+), \\ T(\gamma_+\gamma_\pi\gamma_-) &< T(\gamma_b) < T(\gamma_-\gamma_0\gamma_+). \end{aligned}$$

Alors l'arc frontière  $\gamma_b$  est non optimal, et la synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_-\gamma_+\gamma_-\gamma_+$  ou  $\gamma_-\gamma_+\gamma_\pi\gamma_-\gamma_+$ , voir figure 3.14.



2.ii)  $\mu_0 \in ]-\pi, 0[$  :

**Avant A**

$$\begin{aligned} \dot{x} > 0 \rightarrow z > 0 \rightarrow \dot{z} < 0 \rightarrow \cos \mu < \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [-\mu_0, \pi] \text{ ou } \mu \in [-\pi, \mu_0]. \\ \mu \in [-\pi, \mu_0] &\rightarrow \text{on rejoint } A \text{ par } \gamma_+. \\ \mu \in [-\mu_0, \pi] &\rightarrow \text{non accessible.} \end{aligned}$$

**Après A**

$$\begin{aligned} \dot{x} < 0 \rightarrow z < 0 \rightarrow \dot{z} < 0 \rightarrow \cos \mu < \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [\mu_0, \pi] \text{ ou } \mu \in [-\pi, -\mu_0]. \\ \mu \in [-\pi, \mu_0] &\rightarrow \text{on quitte } A \text{ par } \gamma_-. \\ \mu \in [-\mu_0, \pi] &\rightarrow \text{non accessible.} \end{aligned}$$

Donc pour rejoindre A et B,  $\gamma_+\gamma_-$  est non admissible. Or d'après le lemme précédent on a :

$$\begin{aligned} T(\gamma_-\gamma_+) &< T(\gamma_b) < T(\gamma_+\gamma_-), \\ T(\gamma_-\gamma_-\pi\gamma_+) &< T(\gamma_b) < T(\gamma_+\gamma_0\gamma_-). \end{aligned}$$

Alors l'arc frontière  $\gamma_b$  est non optimal, et la synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_+\gamma_-\gamma_+\gamma_-$  ou  $\gamma_+\gamma_-\gamma_-\pi\gamma_+\gamma_-$ , voir figure 3.15.

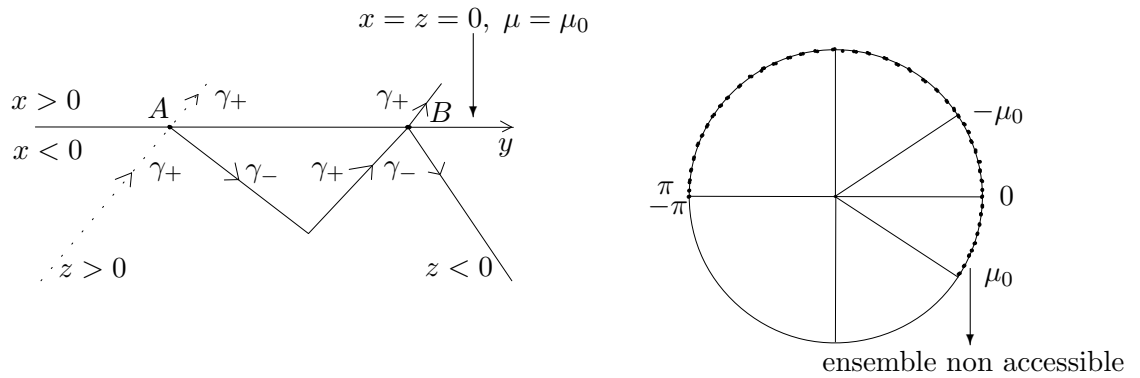


Figure 3.15

3<sup>ème</sup> cas :  $a < 0, b > 0$  :

3.i)  $\mu_0 \in ]0, \pi[$  :

Avant A

$$\dot{x} > 0 \rightarrow z < 0 \rightarrow \dot{z} > 0 \rightarrow \cos \mu > \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [-\mu_0, \mu_0].$$

$$\mu \in [-\mu_0, \mu_0] \rightarrow \text{on rejoint } A \text{ par } \gamma_+.$$

Après A

$$\dot{x} < 0 \rightarrow z > 0 \rightarrow \dot{z} > 0 \rightarrow \cos \mu > \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [-\mu_0, \mu_0].$$

$$\mu \in [-\mu_0, \mu_0] \rightarrow \text{on quitte } A \text{ par } \gamma_-.$$

Donc pour rejoindre A et B,  $\gamma_+\gamma_-$  est non admissible. Or d'après le lemme précédent on a :

$$T(\gamma_+\gamma_-) < T(\gamma_b) < T(\gamma_-\gamma_+),$$

$$T(\gamma_+\gamma_\pi\gamma_-) < T(\gamma_b) < T(\gamma_-\gamma_0\gamma_+).$$

Alors l'arc frontière  $\gamma_b$  est optimal, et la synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_+\gamma_b\gamma_-$ , voir figure 3.16.

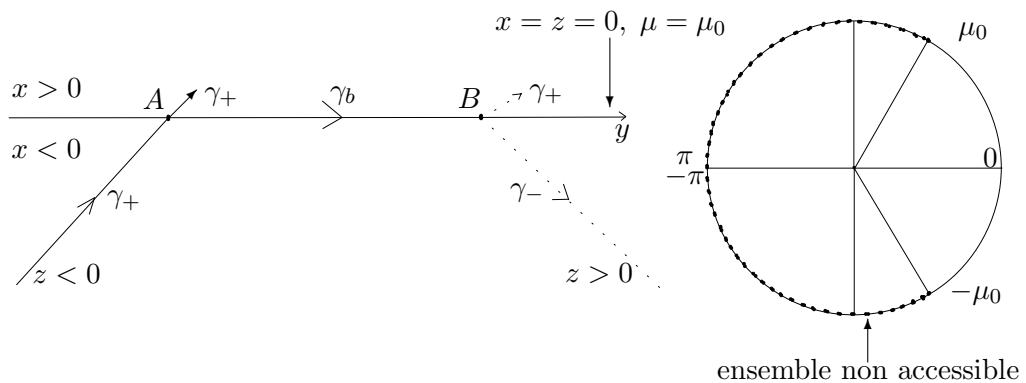


Figure 3.16

3.ii)  $\mu_0 \in ]-\pi, 0[$  :

Avant A

$$\begin{aligned} \dot{x} > 0 \rightarrow z < 0 \rightarrow \dot{z} > 0 \rightarrow \cos \mu > \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [\mu_0, -\mu_0]. \\ \mu \in [\mu_0, -\mu_0] \rightarrow \text{on rejoint } A \text{ par } \gamma_-. \end{aligned}$$

**Après A**

$$\begin{aligned} \dot{x} < 0 \rightarrow z > 0 \rightarrow \dot{z} > 0 \rightarrow \cos \mu > \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [\mu_0, -\mu_0]. \\ \mu \in [\mu_0, -\mu_0] \rightarrow \text{on quitte } A \text{ par } \gamma_+. \end{aligned}$$

Donc pour rejoindre A et B,  $\gamma_-\gamma_+$  est non admissible. Or d'après le lemme précédent on a :

$$\begin{aligned} T(\gamma_-\gamma_+) < T(\gamma_b) < T(\gamma_+\gamma_-), \\ T(\gamma_-\gamma_-\pi\gamma_+) < T(\gamma_b) < T(\gamma_+\gamma_0\gamma_-). \end{aligned}$$

Alors l'arc frontière  $\gamma_b$  est optimal, et la synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_-\gamma_b\gamma_+$ , voir figure 3.17.

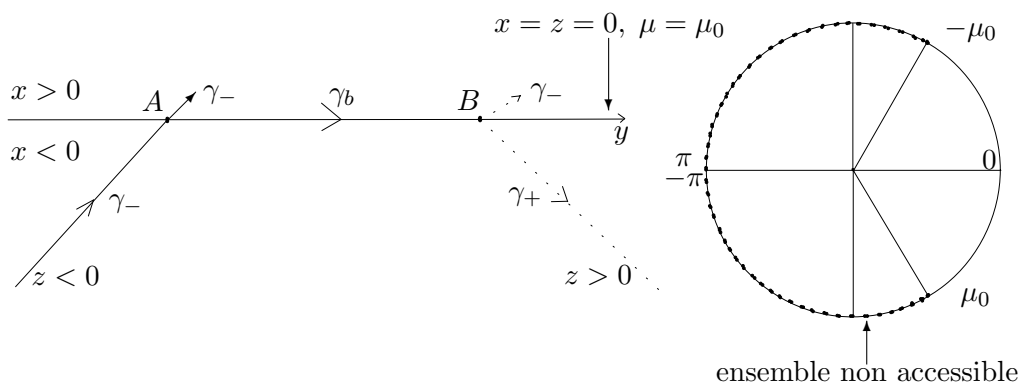


Figure 3.17

**4<sup>ème</sup> cas : a < 0, b < 0 :**

4.i)  $\mu_0 \in ]0, \pi[ :$

**Avant A**

$$\begin{aligned} \dot{x} > 0 \rightarrow z < 0 \rightarrow \dot{z} > 0 \rightarrow \cos \mu > \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [-\mu_0, \mu_0]. \\ \mu \in [-\mu_0, \mu_0] \rightarrow \text{on rejoint } A \text{ par } \gamma_+. \end{aligned}$$

**Après A**

$$\begin{aligned} \dot{x} < 0 \rightarrow z > 0 \rightarrow \dot{z} > 0 \rightarrow \cos \mu > \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [-\mu_0, \mu_0]. \\ \mu \in [-\mu_0, \mu_0] \rightarrow \text{on quitte } A \text{ par } \gamma_-. \end{aligned}$$

Donc pour rejoindre A et B,  $\gamma_+\gamma_-$  est non admissible. Or d'après le lemme précédent on a :

$$\begin{aligned} T(\gamma_-\gamma_+) < T(\gamma_b) < T(\gamma_+\gamma_-), \\ T(\gamma_-\gamma_0\gamma_+) < T(\gamma_b) < T(\gamma_+\gamma_\pi\gamma_-). \end{aligned}$$

Alors l'arc frontière  $\gamma_b$  est non optimal, et la synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_+\gamma_-\gamma_+\gamma_-$  ou  $\gamma_+\gamma_-\gamma_0\gamma_+\gamma_-$ , voir figure 3.18.

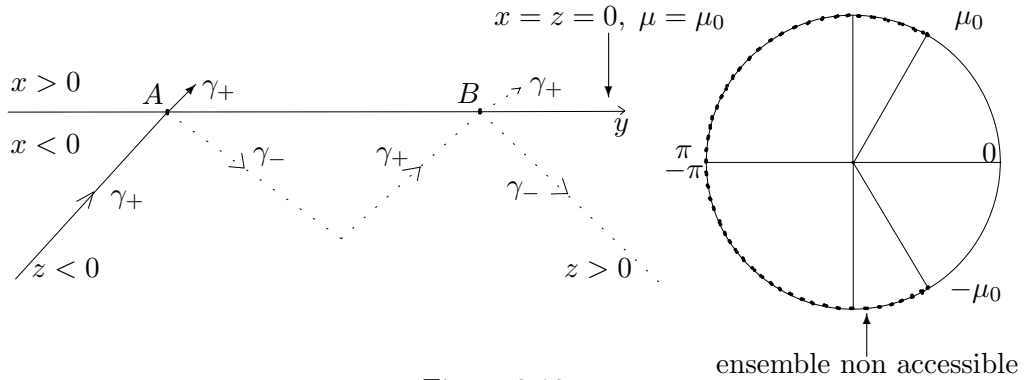


Figure 3.18

4.ii)  $\mu_0 \in ]-\pi, 0[$  :

**Avant A**

$$\begin{aligned} \dot{x} > 0 \rightarrow z < 0 \rightarrow \dot{z} > 0 \rightarrow \cos \mu > \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [\mu_0, -\mu_0]. \\ \mu \in [\mu_0, -\mu_0] \rightarrow \text{on rejoint } A \text{ par } \gamma_-. \end{aligned}$$

**Après A**

$$\begin{aligned} \dot{x} < 0 \rightarrow z > 0 \rightarrow \dot{z} > 0 \rightarrow \cos \mu > \cos \mu_0 \rightarrow \mu \in [\mu_0, -\mu_0]. \\ \mu \in [\mu_0, -\mu_0] \rightarrow \text{on quitte } A \text{ par } \gamma_+. \end{aligned}$$

Donc pour rejoindre A et B,  $\gamma_-\gamma_+$  est non admissible. Or d'après le lemme précédent on a :

$$\begin{aligned} T(\gamma_+\gamma_-) < T(\gamma_b) < T(\gamma_-\gamma_+), \\ T(\gamma_+\gamma_0\gamma_-) < T(\gamma_b) < T(\gamma_-\gamma_-\pi\gamma_+). \end{aligned}$$

Alors l'arc frontière  $\gamma_b$  est non optimal, et la synthèse optimale au voisinage de la frontière est  $\gamma_-\gamma_+\gamma_-\gamma_+$  ou  $\gamma_-\gamma_+\gamma_0\gamma_-\gamma_+$ , voir figure 3.19.

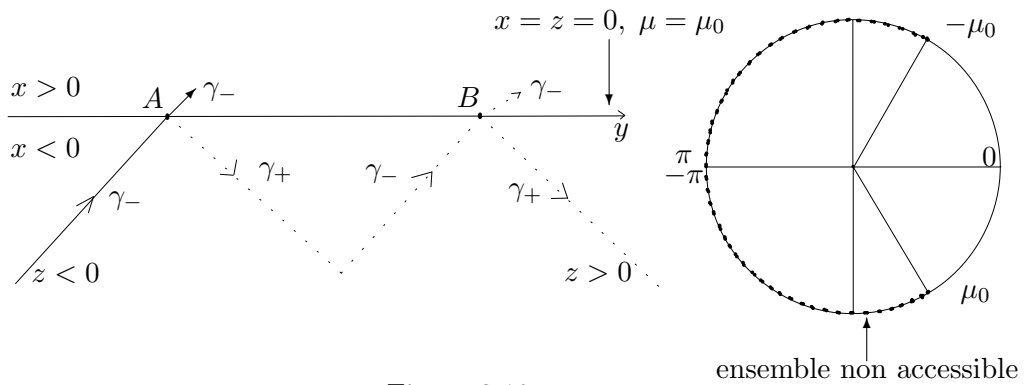


Figure 3.19

**Conclusion** Sur le modèle local on a :

$$\begin{cases} \dot{x} = az, \\ \dot{y} = 1 + bx, & x \leq 0, \\ \dot{z} = \cos(\mu) - \cos(\mu_0), & |u| \leq M \\ \dot{\mu} = u, \end{cases}$$

la condition  $b < 0$  viole l'optimalité de l'arc frontière.

**Lien avec le principe de minimum.** Pour le modèle simplifié  $II$ , d'après le corollaire 3.4.1, on a :

$$\eta(t) = \frac{\langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle}{([X, Y].C)_3}.$$

De plus sur le modèle normalisé, sur la frontière on a  $([X, Y].C)_3 = -a$  et  $[X, [X, Y]] = \begin{pmatrix} 0 \\ ab \\ 0 \end{pmatrix}$ , d'où  $\langle p(t), [X, [X, Y]] \rangle = p_2 ab$  avec  $p = (p_1, p_2, p_3)$ , donc  $\eta(t) = -p_2 b$ . Par ailleurs  $\langle p(t), Y \rangle = \langle p(t), [X, Y] \rangle = 0$ , d'où  $p_1 = p_3 = 0$ . Or d'après le principe du minimum  $\langle p(t), X \rangle < 0$ , ce qui implique  $p_2 < 0$ . Donc si  $b < 0$ , on obtient  $\eta(t) < 0$ . On conclut que  $b < 0$  viole les conditions nécessaires du principe du minimum [33] pour l'optimalité de l'arc frontière.

Enfin pour le modèle simplifié  $II$ , le calcul donne  $b$  positif, ce qui implique que l'arc frontière est optimal.

**Connection de deux contraintes d'ordre trois dans le cas hyperbolique.** Comme pour le modèle simplifié  $I$ , on va devoir analyser le cas où l'on doit connecter deux contraintes d'ordre trois, dans le cas hyperbolique pour le modèle simplifié  $II$ .

**Proposition 3.4.3** *Considérons le système :  $\dot{q} = \tilde{X} + u\tilde{Y}$ ,  $|u| \leq M$ ,  $\tilde{q} = (q, \mu) \in \mathbb{R}^4$  avec deux contraintes distinctes,  $C_i(q) \leq 0$ ,  $i = 1, 2$ . Supposons que les arcs frontières sont optimaux. Soit  $O$  un voisinage de  $q_0$  contenant des arcs frontières  $\gamma_b^1$  et  $\gamma_b^2$  et supposons que l'arc  $\gamma_b^1$  traverse la frontière  $C_2 = 0$ . Alors il existe un modèle géométrique de la forme :*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1 x + a_2 y + a_3 z, \\ \dot{y} &= b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z, \\ \dot{z} &= c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z + \cos(\mu), \\ \dot{\mu} &= M, \end{aligned}$$

où les arcs contraints sont identifiés à  $C_1(q) = x$ ,  $C_2(q) = x + \epsilon y$ ,  $\epsilon > 0$  petit. De plus la politique optimale locale est de la forme  $\gamma_+^T \gamma_b^1 \gamma_-^T \gamma_0 \gamma_+^T \gamma_b^2 \gamma_-^T$ .

**Preuve.** On normalise le système au voisinage de la première contrainte et on normalise ensuite  $C_2$ . La situation est claire car géométriquement, il existe un seul arc  $\gamma_-^T \gamma_0 \gamma_+^T$  tangent aux deux contraintes et qui forme un pont entre les frontières. Cet arc peut être réduit à  $\gamma_-^T \gamma_+^T$ , ce qu'on va constater numériquement pour  $M$  petit.

### 3.4.5 Algorithme et résultats numériques

Dans cette section on va s'intéresser à simuler le système d'état pour le système simplifié  $II$ , surtout pour différentes valeurs de la borne maximale  $M$  et en particulier pour un  $M$  assez grand. Numériquement le modèle simplifié  $II$  est plus compliqué à résoudre que

le modèle simplifié *I*. On rencontre un nombre plus élevé d'instants de commutation à déterminer. Il n'est pas évident de suivre la frontière en vérifiant les informations imposées par l'ordre de la contrainte. D'après l'analyse géométrique traitée précédemment, on déduit le problème aux valeurs limites défini de la manière suivante :

**Proposition 3.4.4** *La trajectoire optimale satisfaisant les conditions finales requises est de la forme  $\gamma_\pi \gamma_- \gamma_0 \gamma_+ \gamma_{flux} \gamma_- \gamma_0 \gamma_+ \gamma_{acc} \gamma_- \gamma_0 \gamma_+ \gamma_\pi$ . C'est-à-dire qu'elle est constituée de treize arcs consécutifs : un arc singulier associé à  $u = 0$  et  $\mu = \pi$ , un arc régulier associé à  $u = -M$ , un arc singulier associé à  $u = 0$  et  $\mu = 0$ , un arc régulier associé à  $u = M$ , un arc frontière associé à  $u = -\frac{X^3.C_1 - \cos \mu [X, [X, Y]].C_1}{\sin \mu [X, Y].C_1}$  correspondant au flux thermique, un arc régulier associé à  $u = -M$ , un arc singulier associé à  $u = 0$  et  $\mu = 0$ , un arc régulier associé à  $u = M$ , un arc frontière associé à  $u = -\frac{X^3.C_2 - \cos \mu [X, [X, Y]].C_2}{\sin \mu [X, Y].C_2}$  correspondant à l'accélération normale, un arc régulier associé à  $u = -M$ , un arc singulier associé à  $u = 0$  et  $\mu = 0$ , un arc régulier associé à  $u = M$ , puis un arc singulier associé à  $u = 0$  et  $\mu = \pi$ , voir figure 3.20.*

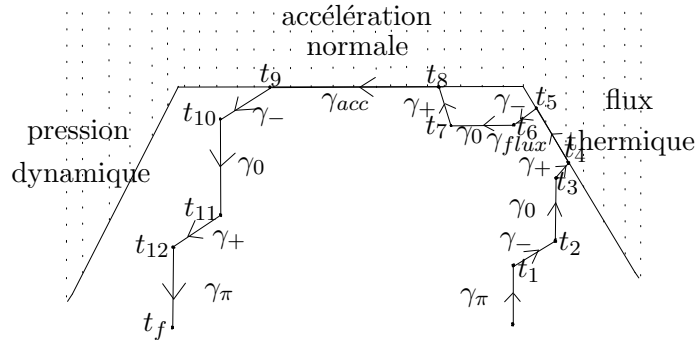


Figure 3.20– Trajectoire optimale du modèle simplifié *II*

Pour les conditions limites, on a choisi les mêmes valeurs que pour le système simplifié *I*. De plus l'application du principe du minimum impose les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
 C_1(t_4) &= \varphi^{\max}, & (X.C_1)(t_4) &= 0, \\
 \cos(\mu(t_4)) &= \frac{X^2.C_1}{[X, Y].C_1}, & \mu(t_2) &= 0, \\
 C_2(t_8) &= \gamma_n^{\max}, & (X.C_2)(t_8) &= 0, \\
 \cos(\mu(t_8)) &= \frac{X^2.C_2}{[X, Y].C_2}, & \mu(t_6) &= 0, \\
 \mu(t_{10}) &= 0, & \mu(t_{12}) &= \pi.
 \end{aligned}$$

Puisque  $\mu(t)$  est donnée par une fonction affine sur les extrémales régulières ( $u = \pm M$ ), on a alors le résultat suivant :

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 + \frac{\pi}{M}, & t_6 &= t_5 + \frac{\mu(t_5)}{M}, \\ t_{10} &= t_9 + \frac{\mu(t_9)}{M}, & t_{12} &= t_{11} + \frac{\pi}{M}. \end{aligned}$$

Les extrémales du système sont donc paramétrées par les temps de commutation du contrôle  $t_1, t_3, t_4, t_5, t_7, t_8, t_9, t_{11}$  et le temps final  $t_f$ . L'algorithme suivant permet d'obtenir ces paramètres pour lesquels la trajectoire extrémale vérifie les conditions limites et les conditions imposées par le principe du minimum.

**Remarque 3.4.4** Dans la trajectoire optimale du modèle simplifié II, en fonction de  $M$  on peut trouver des arcs vides et on va constater numériquement qu'il existe un  $\tilde{M}$  tel que le pont entre les deux frontières se réduit à  $\gamma_- \gamma_+$  pour tout  $M$  inférieur à  $\tilde{M}$  et en particulier pour  $M = \frac{\pi}{30}$  (rad/s).

**Algorithme et résultats numériques.** Numériquement, la difficulté est de résoudre le modèle simplifié II avec un  $M$  grand. Le temps de passage sur une extrémale régulière est très petit, ce qui complique l'arrivée sur la frontière en vérifiant les 3 informations issues de l'ordre de la contrainte. Pour surmonter cette difficulté, on suit les étapes suivantes :

**Étape 1 :** Cette étape sert à résoudre le modèle simplifié II avec  $M = \frac{\pi}{30}$  (rad/s) et à déterminer les instants de commutation du contrôle. En effet le problème est de trouver  $Z = (t_1, t_3, t_4, t_5, t_7, t_8, t_9, t_{11}, t_f)$  qui vérifie la fonction de tir  $F(Z) = 0$ , où

$$F(Z) = \begin{bmatrix} C_1(t_4) - \varphi^{\max} \\ (X.C_1)(t_4) \\ \cos(\mu(t_4)) - \frac{X^2.C_1}{[X, Y].C_1} \\ C_2(t_8) - \gamma_n^{\max} \\ (X.C_2)(t_8) \\ \cos(\mu(t_8)) - \frac{X^2.C_2}{[X, Y].C_2} \\ r(t_f) - 6,4115489e + 006 \\ v(t_f) - 1,80834e + 003 \\ \gamma(t_f) + 1,478e - 001 \end{bmatrix}.$$

Pour résoudre ce problème, on propose comme dans l'étape 1 de l'algorithme proposé dans la section 3.3.4, un couplage entre la méthode de continuation sur la borne maximale  $(\varphi^{\max}, \gamma_n^{\max})$  des contraintes sur l'état et l'algorithme de tir multiple. On commence par l'utilisation de l'algorithme de tir simple pour résoudre le système d'état sans contrainte, puis on tire à partir des résultats obtenus une estimation initiale pour lancer l'algorithme de tir multiple afin de résoudre le système simplifié perturbé défini de la même manière que dans l'étape 1 de la section 3.3.4. Partant de ce système de référence, on réinjecte le résultat comme initialisation du système d'état voisin. Plus précisément, partant d'une



borne maximale  $(\varphi^{\max, \epsilon}, \gamma_n^{\max, \epsilon})$  et passant d'une borne maximale  $(\varphi^{\max, c}, \gamma_n^{\max, c})$  courante à une borne maximale  $(\varphi^{\max, +}, \gamma_n^{\max, +})$  on se sert de  $Z^{0, c}$  pour lancer l'algorithme de tir multiple afin de trouver  $Z^{0, +}$ . Les résultats sont tracés sur les figures fig.3.6. Par ailleurs on observe qu'on ne suit pas l'arc singulier  $\gamma_0$  dans le pont entre les deux frontières.

**Étape 2 :** Dans cette étape on résout le modèle simplifié *II* avec  $M$  grand en mettant en oeuvre la méthode de continuation sur la borne maximale du contrôle  $M$ . Partant du modèle simplifié *II* avec  $M = \frac{\pi}{30}$  (rad/s), on réinjecte le résultat comme une initialisation du modèle avec un  $M$  voisin. Plus précisément partant de  $M = \frac{\pi}{30}$  (rad/s) et passant d'une borne  $M^c$  à une borne suivante  $M^+$ , on se sert de  $Z^{0, c}$  pour lancer l'algorithme de tir multiple afin de trouver  $Z^{0, +}$ . Avec la méthode de continuation on trouve qu'à partir de  $\tilde{M}$  proche de  $M = \frac{\pi}{8}$  (rad/s), on commence à suivre l'arc singulier  $\gamma_0$ , voir fig .3.7.

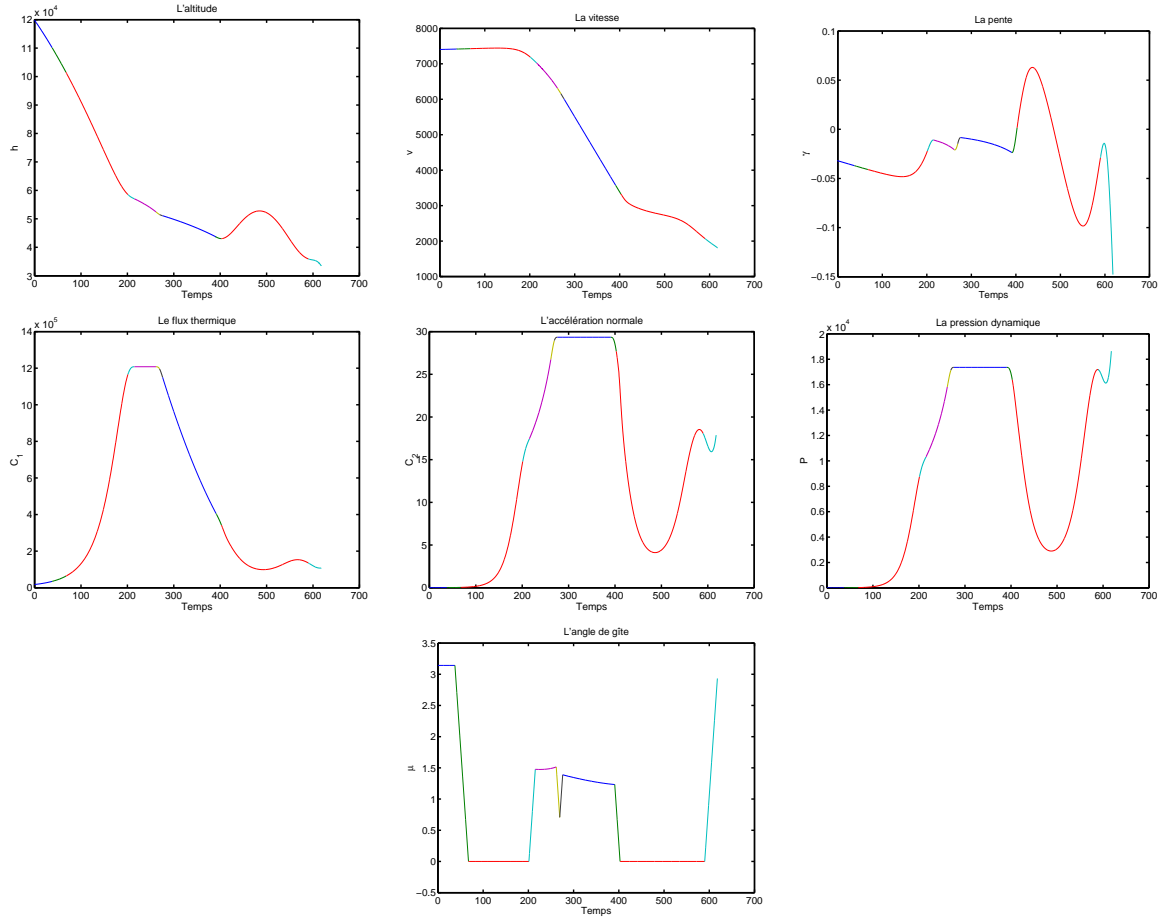


FIG. 3.6 – Coordonnées d'état et contraintes sur l'état pour  $M = \frac{\pi}{30}$  (rad/s)

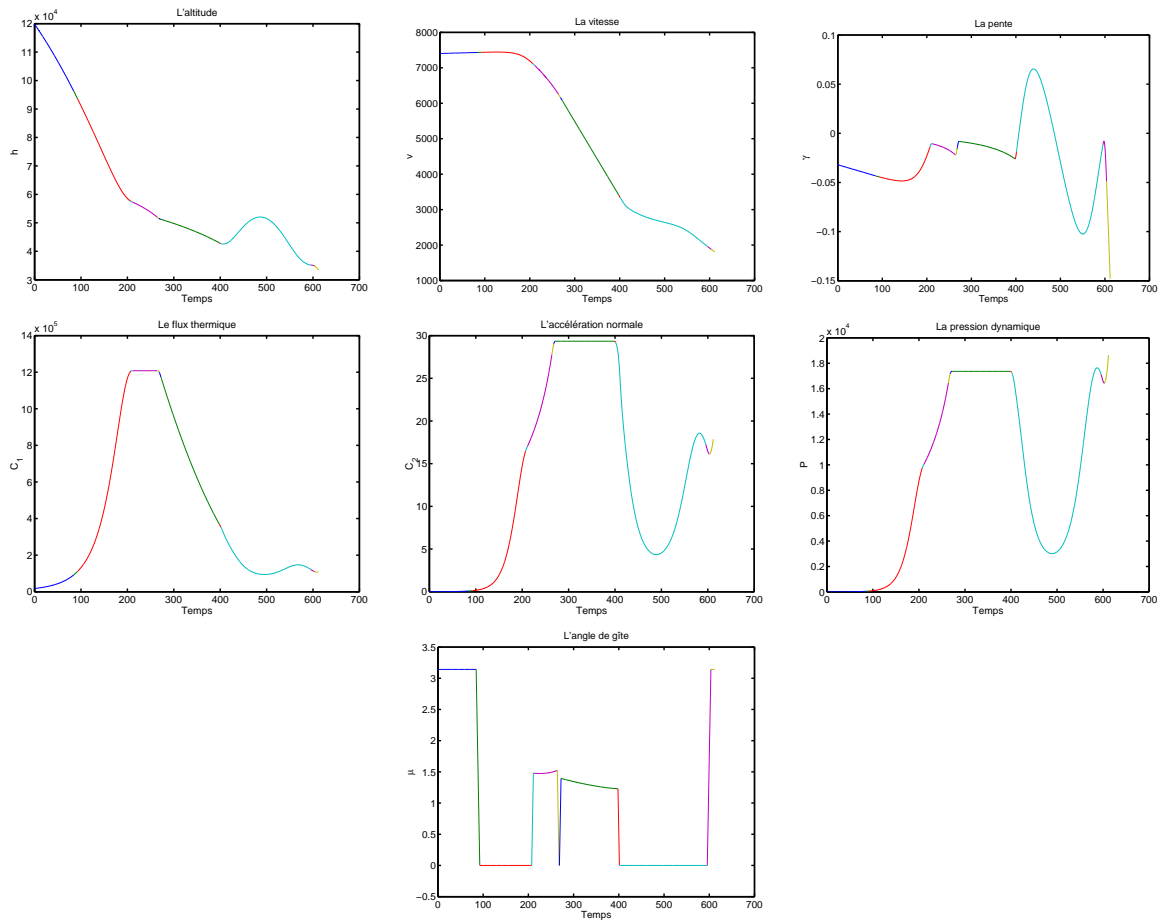


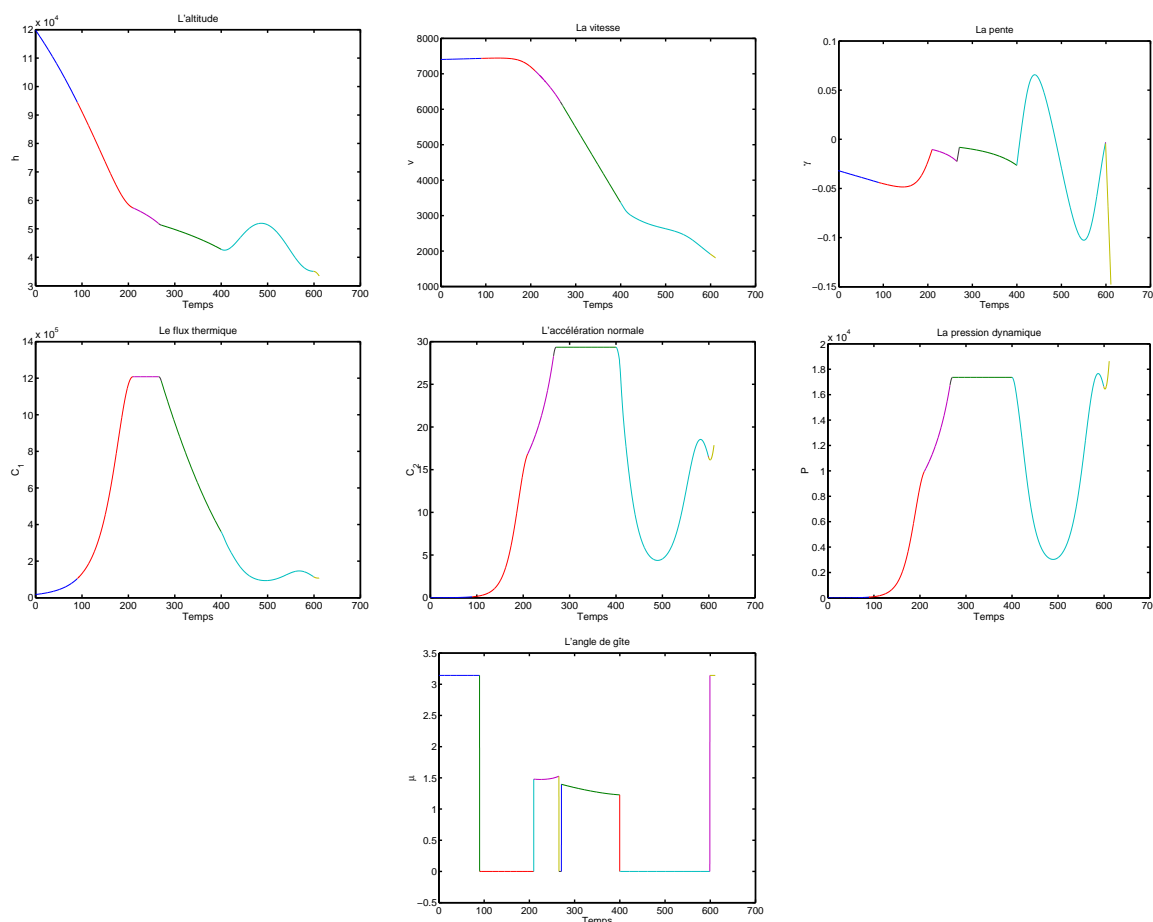
FIG. 3.7 – Coordonnées d'état et contraintes sur l'état pour  $M = \frac{\pi}{8}(\text{rad/s})$

On continue la procédure de la méthode de continuation et on pousse vers un  $M$  assez grand de l'ordre de  $M \simeq 15(\text{rad/s})$ , voir fig .3.8.

Enfin les coût obtenus pour chaque modèle sont donnés dans le tableau TAB. 2.

Modèle	Coût associé
Modèle simplifié I	2,696725223086439e+008
$M = \frac{\pi}{30} (\text{rad/s})$	2,708435475756367e+008
$M = \frac{\pi}{8} (\text{rad/s})$	2,697682207536621e+008
$M \simeq 15 (\text{rad/s})$	2,696723098307244e+008

TAB. 2- Coûts obtenus

FIG. 3.8 – Coordonnées d'état et contraintes sur l'état pour  $M \simeq 15(rad/s)$ 

### Commentaire

Pour  $M = \frac{\pi}{30}(rad/s)$ , le pont entre les deux contraintes se décompose seulement en  $\gamma_-$  et en  $\gamma_+$ ; dans ce cas, on ne suit pas l'extrémale singulière  $\gamma_0$ . Par ailleurs, pour  $M = \frac{\pi}{8}(rad/s)$ , on commence à toucher  $\gamma_0$  et on le suit brièvement pour  $M \simeq 15(rad/s)$ .

On constate que, pour une petite dérivée de l'angle de gîte ( $\simeq \frac{\pi}{30}(rad/s)$ ), on perd l'optimalité du coût par rapport au modèle simplifié  $I$ . Par contre, pour une grande dérivée de l'angle de gîte ( $\simeq 15(rad/s)$ ), on remarque que le coût se rapproche de celui obtenu dans le modèle simplifié  $I$ .

## 3.5 Contrôle optimal du problème complet

Dans cette section on effectue le contrôle optimal de l'arc atmosphérique du système complet (3.8), en dimension six, soumis aux trois contraintes sur l'état (3.9), (3.10) et

(3.11), et vérifie les conditions limites.

### 3.5.1 Extrémales du problème non contraint

Remarquons que le système (3.8) décrivant l'arc atmosphérique est de la forme :

$$\dot{q} = X(q) + u_1 Y_1(q) + u_2 Y_2(q),$$

avec  $u_1 = \cos \mu$ ,  $u_2 = \sin \mu$  et  $q = (r, v, \gamma, L, l, \chi)$ . On introduit le Hamiltonien :

$$H(q, p, u) = \langle p, X(q) \rangle + u_1 \langle p, Y_1(q) \rangle + u_2 \langle p, Y_2(q) \rangle + p^0 \varphi,$$

où  $u = (u_1, u_2)$  et  $p = (p_r, p_v, p_\gamma, p_L, p_l, p_\chi)$  est le vecteur adjoint.

En paramétrisant les trajectoires par  $ds = \varphi(q)dt$ , on se ramène à un problème de temps minimal, les contrôles vérifiant la contrainte non convexe  $u_1^2 + u_2^2 = 1$ .

**Définition 3.5.1** On appelle problème optimal convexifié le problème où la contrainte  $u_1^2 + u_2^2 = 1$  est remplacée par la contrainte convexe  $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$ .

L'analyse du problème convexifié est cruciale car les théorèmes d'existence de trajectoires optimales s'appliquent dans ce cadre. La procédure est donc d'analyser les extrémales du problème convexifié pour en déduire les trajectoires optimales de notre problème d'origine, puis de vérifier si elles satisfont la contrainte initiale  $u_1^2 + u_2^2 = 1$ .

**Calcul des extrémales régulières.** D'après le principe du minimum, les contrôles extrémaux sont donnés, en dehors de la surface  $\Sigma : \langle p, Y_1 \rangle = \langle p, Y_2 \rangle = 0$ , par :

$$\begin{aligned} u_1 = \cos \mu &= -\frac{\langle p, Y_1 \rangle}{\sqrt{\langle p, Y_1 \rangle^2 + \langle p, Y_2 \rangle^2}} = -\frac{\cos \gamma p_\gamma}{\sqrt{\cos^2 \gamma p_\gamma^2 + p_\chi^2}}, \\ u_2 = \sin \mu &= -\frac{\langle p, Y_2 \rangle}{\sqrt{\langle p, Y_1 \rangle^2 + \langle p, Y_2 \rangle^2}} = -\frac{p_\chi}{\sqrt{\cos^2 \gamma p_\gamma^2 + p_\chi^2}}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Les extrémales correspondantes sont dites régulières, et celles qui sont contenues dans la surface  $\Sigma$  sont dites singulières.

**Analyse des extrémales singulières.** On utilise les résultats des calculs effectués dans [7]. Les extrémales singulières sont celles du système :

$$\dot{q} = \bar{X}(q) + u_1 Y_1(q) + u_2 Y_2(q),$$

avec  $\bar{X} = \psi X$ ,  $\psi = \frac{1}{\varphi}$ .

Elles sont par définition contenues dans la surface  $\Sigma$  de commutation :  $\langle p, Y_1 \rangle = \langle p, Y_2 \rangle = 0$ , soit :

$$p_\gamma = p_\chi = 0.$$

En dérivant par rapport à  $t$ , on obtient qu'elles vérifient de plus les contraintes :

$$\langle p, [X, Y_1] \rangle = \langle p, [X, Y_2] \rangle = 0,$$

qui définissent la surface  $\Sigma'$ .

Des calculs formels sur les crochets de Lie conduisent au résultat suivant :

**Lemme 3.5.1** *Les trajectoires singulières du système  $\dot{q} = X(q) + u_1 Y_1(q) + u_2 Y_2(q)$  vérifient  $\chi = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .*

Les simulations numériques montrent que cette situation n'arrive jamais. En fait on verra que  $\chi(t) \in ]0, \frac{\pi}{2}]$  dans le domaine de vol.

Le calcul du système extrémal est compliqué en raison du nombre de termes, et a été réalisé avec Maple.

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v \sin \gamma; \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{g_0 \sin \gamma}{r^2} - \frac{1}{2} \rho \frac{SC_D}{m} v^2 + \Omega^2 r \cos L (\sin \gamma \cos L - \cos \gamma \sin L \cos \chi); \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \left( -\frac{g_0}{r^2 v} + \frac{v}{r} \right) \cos \gamma + \frac{1}{2} \rho \frac{SC_L}{m} v \cos \mu + 2\Omega \cos L \sin \chi \\ &\quad + \Omega^2 \frac{v}{r} \cos L (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \sin L \cos \chi); \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{v}{r} \cos \gamma \cos \chi; \\ \frac{dl}{dt} &= \frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r \cos L}; \\ \frac{d\chi}{dt} &= \frac{v}{r} \cos \gamma \tan L \sin \chi + \frac{1}{2} \rho \frac{SC_L}{m} \frac{v}{\cos \gamma} \sin \mu + 2\Omega (\sin L - \tan \gamma \cos L \cos \chi) \\ &\quad + \Omega^2 \frac{v \sin L \cos L \sin \chi}{r \cos \gamma}; \\ \frac{dp_r}{dt} &= -p_v \left( 2 \frac{g_0 \sin \gamma}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{s \rho v^2}{m} \left( \frac{C_D}{h_s} - \frac{\partial C_D}{\partial r} \right) + \Omega^2 \cos L (\sin \gamma \cos L - \cos \gamma \sin L \cos \chi) \right) \\ &\quad - p_\gamma \left( \cos \gamma \left( 2 \frac{g_0}{r^3 v} - \frac{v}{r^2} \right) + \frac{\Omega^2 \cos L (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \sin L \cos \chi)}{v} \right) + p_L \frac{v \cos \gamma \cos \chi}{r^2} \\ &\quad + p_l \frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r^2 \cos L} - p_\chi \left( -\frac{v \cos \gamma \tan L \sin \chi}{r^2} + \frac{\Omega^2 \sin L \cos L \sin \chi}{v \cos \gamma} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} p_\gamma \frac{\rho v s}{m} \left( \frac{C_L}{h_s} - \frac{\partial C_L}{\partial r} \right) \cos \mu + \frac{1}{2} p_\chi \frac{\rho v s}{m \cos \gamma} \left( \frac{C_L}{h_s} - \frac{\partial C_L}{\partial r} \right) \sin \mu + \frac{1}{2} p_0 \frac{C_q v^3 \sqrt{\rho}}{h_s}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_v}{dt} &= -p_r \sin \gamma - p_v \left( -\frac{1}{2} \frac{s \rho v^2}{m} \frac{\partial C_D}{\partial v} - \frac{s \rho v C_D}{m} \right) \\
 &\quad - p_\gamma \left( \cos \gamma \left( \frac{g_0}{r^2 v^2} + \frac{1}{r} \right) - \frac{\Omega^2 r \cos L (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \sin L \cos \chi)}{v^2} \right) \\
 &\quad - p_L \frac{\cos \gamma \cos \chi}{r} - p_l \frac{\cos \gamma \sin \chi}{r \cos L} - p_\chi \left( \frac{\cos \gamma \tan L \sin \chi}{r} - \frac{\Omega^2 r \sin L \cos L \sin \chi}{v^2 \cos \gamma} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} p_\gamma \frac{\rho v s}{m} \left( \frac{C_L}{v} + \frac{\partial C_L}{\partial v} \right) \cos \mu - \frac{1}{2} p_\chi \frac{\rho v s}{m \cos \gamma} \left( \frac{C_L}{v} + \frac{\partial C_L}{\partial v} \right) \sin \mu - 3 p_0 C_q \sqrt{\rho} v^2; \\
 \frac{dp_\gamma}{dt} &= -p_r v \cos \gamma - p_v \left( -\frac{g_0 \cos \gamma}{r^2} + \Omega^2 r \cos L (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \sin L \cos \chi) \right) \\
 &\quad - p_\gamma \left( -\sin \gamma \left( -\frac{g_0}{r^2 v} + \frac{v}{r} \right) + \frac{\Omega^2 r \cos L (-\sin \gamma \cos L + \cos \gamma \sin L \cos \chi)}{v} \right) \\
 &\quad + p_L \frac{v \sin \gamma \cos \chi}{r} + p_l \frac{v \sin \gamma \sin \chi}{r \cos L} - \frac{1}{2} p_\chi \frac{s \rho v \sin \gamma C_L}{m (\cos \gamma)^2} \sin(\mu) \\
 &\quad - p_\chi \left( -\frac{v \sin \gamma \tan L \sin \chi}{r} - 2 \Omega \left( 1 + (\tan \gamma)^2 \right) \cos L \cos \chi + \frac{\Omega^2 r \sin L \cos L \sin \chi \sin \gamma}{v (\cos \gamma)^2} \right); \\
 \frac{dp_L}{dt} &= -p_v \left( -2 \Omega^2 r \sin L \sin \gamma \cos L - \Omega^2 r \cos 2L \cos \gamma \cos \chi \right) \\
 &\quad - p_\gamma \left( -2 \Omega \sin L \sin \chi - \frac{2 \Omega^2 r \sin L \cos \gamma \cos L - \Omega^2 r \cos 2L \sin \gamma \cos \chi}{v} \right) \\
 &\quad - p_l \frac{v \cos \gamma \sin \chi \sin L}{r (\cos L)^2} \\
 &\quad - p_\chi \left( \frac{v \cos \gamma \left( 1 + (\tan L)^2 \right) \sin \chi}{r} + 2 \Omega (\cos L + \tan \gamma \sin L \cos \chi) + \frac{\Omega^2 r \cos 2L \sin \chi}{v \cos \gamma} \right); \\
 \frac{dp_l}{dt} &= 0; \\
 \frac{dp_\chi}{dt} &= -p_v \Omega^2 r \cos L \cos \gamma \sin L \sin \chi - p_\gamma \left( 2 \Omega \cos L \cos \chi - \frac{\Omega^2 r \cos L \sin \gamma \sin L \sin \chi}{v} \right) \\
 &\quad + p_L \frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r} - p_l \frac{v \cos \gamma \cos \chi}{r \cos L} \\
 &\quad - p_\chi \left( \frac{v \cos \gamma \tan L \cos \chi}{r} + 2 \Omega \tan \gamma \cos L \sin \chi + \frac{\Omega^2 r \sin L \cos L \cos \chi}{v \cos \gamma} \right);
 \end{aligned}$$

**Remarque 3.5.1** Les remarques préliminaires citées dans [7] montrent qu'au cours du vol, on peut considérer, avec une bonne approximation, que la trajectoire se projette sur la trajectoire optimale du système simplifié I en dimension trois, étudié précédemment.

On est alors amené à choisir  $\sin \mu = 0$  en dehors des arcs frontières. Dans la suite on note respectivement par  $\gamma_-$  et  $\gamma_+$ , un arc associé à  $\cos \mu = -1$  et un arc associé à  $\cos \mu = 1$ .

### 3.5.2 Le problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état

On prend maintenant en compte les contraintes sur l'état. Les simulations numériques et la stratégie de Harpold/Graves montrent que si la trajectoire contient des arcs frontières, cela doit être dans l'ordre suivant : flux thermique, accélération normale, pression dynamique. On vérifie numériquement que les deux contraintes sur le flux thermique et sur l'accélération normale sont actives, mais si on cherche à saturer la contrainte sur la pression dynamique alors le point final désiré n'est plus accessible. Ainsi, les conditions aux limites impliquent que la contrainte sur la pression dynamique n'est pas active au cours du vol et alors on ne tiendra pas compte de cette contrainte dans la suite de cette section.

#### Calcul des contrôles frontières.

**Flux thermique.** La contrainte est :

$$C_1 = C_q \sqrt{\rho} v^3 \leq \varphi^{\max}, \quad \text{où } \rho = \rho_0 \exp\left(\frac{r_T - r}{h_s}\right).$$

On obtient :

$$\dot{C}_1 = X.C_1 + \cos \mu (Y_1.C_1) + \sin \mu (Y_2.C_1) = 0,$$

or  $Y_1.C_1 = 0$  et  $Y_2.C_1 = 0$  donc  $\dot{C}_1 = X.C_1 = 0$  est une contrainte secondaire, avec

$$\begin{aligned} X.C_1 = & -\frac{1}{2} \frac{C_q v^4 \sqrt{\rho} \sin \gamma}{h_s} \\ & + 3 C_q \sqrt{\rho} v^2 \left( -\frac{g_0 \sin \gamma}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{s C_D \rho v^2}{m} + \Omega^2 r \cos L (\sin \gamma \cos L - \cos \gamma \sin L \cos \chi) \right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

De plus :

$$\ddot{C}_1 = X.(X.C_1) + \cos \mu (Y_1.(X.C_1)) + \sin \mu (Y_2.(X.C_1)) = 0, \quad (3.47)$$

où

$$\begin{aligned} Y_1.(X.C_1) = & \frac{1}{4} \frac{C_q v^3 s C_L \rho^{\frac{3}{2}}}{h_s r^2 m} \left( -v^2 \cos \gamma r^2 - 6 h_s g_0 \cos \gamma + 6 h_s \Omega^2 r^3 (\cos L)^2 \cos \gamma \right. \\ & \left. + 6 h_s \Omega^2 r^3 \cos L \sin \gamma \sin L \cos \chi \right), \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$Y_2.(X.C_1) = \frac{3}{2} \frac{C_q \rho^{\frac{3}{2}} s C_L v^3 \Omega^2 r \cos L \sin L \sin \chi}{m}, \quad (3.49)$$

et

$$\begin{aligned}
 X.(X.C_1) = & -\frac{1}{4} \frac{C_q v \sqrt{\rho}}{h_s^2 r^4 m^2} \left( -v^4 r^4 m^2 - 24 h_s^2 g_0^2 m^2 - 12 \Omega^2 r^4 h_s^2 m^2 v^2 (\cos \gamma)^2 \right. \\
 & -24 \Omega^3 r^5 \sin \chi h_s^2 m^2 \cos L v \cos \gamma + 48 h_s^2 g_0 m^2 \Omega^2 r^3 (\cos L)^2 \\
 & -12 \Omega^4 r^6 h_s^2 m^2 (\cos L)^4 - 12 v^2 r^4 m^2 h_s^2 \Omega^2 (\cos L)^2 + 14 v^2 r^5 m^2 h_s \Omega^2 (\cos L)^2 \\
 & -12 h_s^2 \Omega^4 r^6 (\cos L)^2 m^2 (\cos \gamma)^2 (\cos \chi)^2 + 12 h_s^2 \Omega^4 r^6 (\cos L)^4 m^2 (\cos \gamma)^2 (\cos \chi)^2 \\
 & -12 \Omega^4 r^6 h_s^2 m^2 (\cos L)^2 - 24 v^2 r m^2 h_s^2 g_0 - 14 v^2 r^2 m^2 h_s g_0 \\
 & -12 \rho^2 h_s^2 s^2 C_D^2 v^4 r^4 - 3 \rho^2 h_s^2 v^5 s^2 r^4 \frac{\partial C_D}{\partial v} C_D + v^4 r^4 m^2 (\cos \gamma)^2 \\
 & +12 h_s^2 m^2 g_0^2 (\cos \gamma)^2 - 13 v^4 \sin \gamma r^4 m \rho h_s s C_D \\
 & +36 \rho h_s^2 s C_D v^2 r^5 \Omega^2 (\cos L)^2 m \sin \gamma + 24 h_s^2 \Omega^4 r^6 (\cos L)^3 m^2 \sin \gamma \cos \gamma \sin L \cos \chi \\
 & -6 \rho h_s^2 v^3 s r^2 \frac{\partial C_D}{\partial v} g_0 \sin \gamma m + 6 \rho h_s^2 v^3 s r^5 \frac{\partial C_D}{\partial v} \Omega^2 (\cos L)^2 m \sin \gamma \\
 & -6 \rho h_s^2 v^3 s r^5 \frac{\partial C_D}{\partial v} \Omega^2 m \cos L \cos \gamma \sin L \cos \chi \\
 & -12 v^2 \sin \gamma r^5 m^2 h_s \Omega^2 \cos L \cos \gamma \sin L \cos \chi + 6 v^4 \sin \gamma r^4 m \rho h_s^2 s \frac{\partial C_D}{\partial r} \\
 & +24 h_s^2 m^2 g_0 \cos \gamma \Omega \cos L \sin \chi r^2 v - 24 h_s^2 m^2 g_0 (\cos \gamma)^2 \Omega^2 r^3 (\cos L)^2 \\
 & +12 h_s m^2 v^2 (\cos \gamma)^2 r^2 g_0 + 24 v^2 \sin \gamma r^4 m^2 h_s^2 \Omega^2 \cos L \cos \gamma \sin L \cos \chi \\
 & -36 \rho h_s^2 g_0 \sin \gamma m s C_D v^2 r^2 - 24 h_s^2 g_0 \sin \gamma m^2 \Omega^2 r^3 \cos L \cos \gamma \sin L \cos \chi \\
 & +12 h_s^2 m^2 \Omega^2 r^4 (\cos L)^2 (\cos \gamma)^2 v^2 - 36 \rho h_s^2 s C_D v^2 r^5 \Omega^2 \cos L m \cos \gamma \sin L \cos \chi \\
 & +12 v^2 \Omega^2 r^4 (\cos \gamma)^2 (\cos \chi)^2 h_s^2 m^2 (\cos L)^2 + 4 h_s m^2 v^3 \cos \gamma r^4 \Omega \cos L \sin \chi \\
 & -12 h_s m^2 v^2 (\cos \gamma)^2 r^5 \Omega^2 (\cos L)^2 + 2 h_s m^2 v^4 (\cos \gamma)^2 r^3 + 36 h_s^2 m^2 g_0 (\cos \gamma)^2 v^2 r \\
 & \left. + 12 h_s^2 m^2 \Omega^4 r^6 (\cos L)^4 (\cos \gamma)^2 \right), \tag{3.50}
 \end{aligned}$$

Ces calculs impliquent le résultat suivant :

**Lemme 3.5.2** *La contrainte sur le flux thermique est d'ordre deux et durant l'arc frontière on a :*

$$\mu = \arcsin \frac{-Y_2.(X.C_1)}{\sqrt{(Y_1.(X.C_1))^2 + (Y_2.(X.C_1))^2}} \pm \arccos \frac{-X.(X.C_1)}{\sqrt{(Y_1.(X.C_1))^2 + (Y_2.(X.C_1))^2}} \quad (2\pi). \tag{3.51}$$

**Accélération normale.** La contrainte est :

$$C_2 = C_r \rho v^2 \leq \gamma_n^{\max}, \quad \text{où } C_r = \frac{S}{2m} C_D \sqrt{1 + \left( \frac{C_L}{C_D} \right)^2}.$$

On obtient :

$$\dot{C}_2 = X.C_2 + \cos \mu (Y_1.C_2) + \sin \mu (Y_2.C_2) = 0,$$



or  $Y_1.C_2 = 0$  et  $Y_2.C_2 = 0$  donc  $\dot{C}_2 = X.C_2 = 0$  est une contrainte secondaire, avec

$$\begin{aligned} X.C_2 &= \rho v^3 \sin \gamma \left( \frac{\partial C_r}{\partial r} - \frac{C_r}{h_s} \right) + \rho v \left( \frac{\partial C_r}{\partial v} v + 2 C_r \right) \\ &\left( -\frac{g_0 \sin(\gamma)}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{s C_D \rho v^2}{m} + \Omega^2 r \cos L (\sin \gamma \cos L - \cos \gamma \sin L \cos \chi) \right). \end{aligned} \quad (3.52)$$

De plus :

$$\ddot{C}_2 = X.(X.C_2) + \cos \mu (Y_1.(X.C_2)) + \sin \mu (Y_2.(X.C_2)) = 0, \quad (3.53)$$

où

$$\begin{aligned} X.(X.C_2) &= \frac{1}{4} \frac{\rho}{h_s^2 r^4 m^2} \left( 8 C_r g_0^2 m^2 h_s^2 + 8 h_s^2 m^2 v^3 \cos \gamma r^4 \frac{\partial C_r}{\partial r} \Omega \cos L \sin \chi \right. \\ &- 24 \frac{\partial C_r}{\partial v} v \Omega^4 (\cos L)^3 r^6 m^2 h_s^2 \sin \gamma \cos \gamma \sin L \cos \chi \\ &+ 2 \rho v^4 s h_s^2 r^5 \frac{\partial C_r}{\partial v} \frac{\partial C_D}{\partial v} \Omega^2 \cos L m \cos \gamma \sin L \cos \chi \\ &+ 24 h_s^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v g_0 (\cos \gamma)^2 \Omega^2 r^3 (\cos L)^2 - 12 h_s^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v \Omega^4 r^6 (\cos L)^4 (\cos \gamma)^2 \\ &- 4 \rho v^3 s h_s^2 r^5 C_r \frac{\partial C_D}{\partial v} \Omega^2 (\cos L)^2 m \sin \gamma - 16 h_s^2 m^2 v^2 (\cos \gamma)^2 r^5 \frac{\partial C_r}{\partial r} \Omega^2 (\cos L)^2 \\ &- 8 h_s^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v^2 g_0 \cos \gamma \Omega \cos L \sin \chi r^2 - 16 h_s^2 m^2 C_r g_0 \cos \gamma \Omega \cos L \sin \chi r^2 v \\ &- 8 h_s^2 m^2 v^3 \cos \gamma r^4 C_r \Omega \cos L \sin \chi + 16 h_s^2 m^2 v^2 (\cos \gamma)^2 r^5 C_r \Omega^2 (\cos L)^2 \\ &- 4 h_s^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v^3 \Omega^2 r^4 (\cos L)^2 (\cos \gamma)^2 - 8 h_s^2 m^2 C_r \Omega^2 r^4 (\cos L)^2 (\cos \gamma)^2 v^2 \\ &+ 14 v^4 \sin \gamma r^4 m h_s C_r s C_D \rho + 16 v^2 \sin \gamma r^5 m^2 h_s C_r \Omega^2 \cos L \cos \gamma \sin L \cos \chi \\ &- 16 v^2 \sin \gamma r^4 m^2 C_r \Omega^2 \cos L h_s^2 \cos \gamma \sin L \cos \chi \\ &- 16 v^2 \sin \gamma r^5 m^2 h_s^2 \frac{\partial C_r}{\partial r} \Omega^2 \cos L \cos \gamma \sin L \cos \chi \\ &- 2 v^5 \sin \gamma r^4 m \frac{\partial C_r}{\partial v} s \frac{\partial C_D}{\partial r} \rho h_s^2 - 8 v^3 \sin \gamma r^4 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} \Omega^2 \cos L h_s^2 \cos \gamma \sin L \cos \chi \\ &+ 24 \frac{\partial C_r}{\partial v} v g_0 \sin \gamma m^2 h_s^2 \Omega^2 r^3 \cos L \cos \gamma \sin L \cos \chi \\ &+ 8 v^3 \sin \gamma r^5 m^2 h_s \frac{\partial C_r}{\partial v} \Omega^2 \cos L \cos \gamma \sin L \cos \chi \\ &\left. - 8 v^2 \Omega^2 r^4 (\cos \gamma)^2 (\cos \chi)^2 h_s^2 m^2 C_r (\cos L)^2 + 2 \rho v^4 s h_s^2 r^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} \frac{\partial C_D}{\partial v} g_0 \sin \gamma m \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -4v^4 \sin \gamma r^4 m C_r s \frac{\partial C_D}{\partial r} \rho h_s^2 + 4\rho v^3 s h_s^2 r^2 C_r \frac{\partial C_D}{\partial v} g_0 \sin \gamma m \\
 & -8v^3 r^5 m^2 h_s \frac{\partial C_r}{\partial v} \Omega^2 (\cos L)^2 + 20 \frac{\partial C_r}{\partial v} v^3 g_0 \sin \gamma m h_s^2 s C_D \rho r^2 \\
 & -16 h_s m^2 v^2 (\cos \gamma)^2 r^2 C_r g_0 - 12 h_s^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v g_0^2 (\cos \gamma)^2 \\
 & +16 h_s^2 m^2 v^2 (\cos \gamma)^2 r^2 \frac{\partial C_r}{\partial r} g_0 - 24 h_s^2 m^2 C_r g_0 (\cos \gamma)^2 v^2 r \\
 & +8 \Omega^2 r^4 h_s^2 m^2 C_r v^2 (\cos \gamma)^2 - 12 h_s^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v^3 g_0 (\cos \gamma)^2 r \\
 & -8v^4 r^4 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial r} h_s + 8v^3 r^2 m^2 h_s \frac{\partial C_r}{\partial v} g_0 + 4 \Omega^4 r^6 h_s^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v (\cos L)^2 \\
 & +16 v^2 r m^2 C_r g_0 h_s^2 - 20 v^2 r^2 m^2 h_s^2 \frac{\partial C_r}{\partial r} g_0 + 8v^3 r m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} g_0 h_s^2 \\
 & -32 \frac{\partial C_r}{\partial v} v g_0 m^2 h_s^2 \Omega^2 r^3 (\cos L)^2 + 12 \frac{\partial C_r}{\partial v} v \Omega^4 (\cos L)^2 r^6 m^2 h_s^2 (\cos \gamma)^2 (\cos \chi)^2 \\
 & -20 v^2 r^5 m^2 h_s C_r \Omega^2 (\cos L)^2 - 4v^4 r^4 m^2 C_r (\cos \gamma)^2 + 8v^4 r^4 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial r} h_s (\cos \gamma)^2 \\
 & +16 \frac{\partial C_r}{\partial v} v g_0^2 m^2 h_s^2 + 20 v^2 r^5 m^2 h_s^2 \frac{\partial C_r}{\partial r} \Omega^2 (\cos L)^2 - 8v^3 r^2 m^2 h_s \frac{\partial C_r}{\partial v} g_0 (\cos \gamma)^2 \\
 & +20 v^2 r^2 m^2 h_s C_r g_0 - 12 \frac{\partial C_r}{\partial v} v \Omega^4 (\cos L)^4 r^6 m^2 h_s^2 (\cos \gamma)^2 (\cos \chi)^2 \\
 & +4v^3 r^4 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} \Omega^2 (\cos L)^2 h_s^2 - 16 C_r g_0 m^2 h_s^2 \Omega^2 r^3 (\cos L)^2 \\
 & +8v^3 r^5 m^2 h_s \frac{\partial C_r}{\partial v} \Omega^2 (\cos L)^2 (\cos \gamma)^2 + 12 \Omega^4 r^6 h_s^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v (\cos L)^4 \\
 & +4 \Omega^2 r^4 h_s^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v^3 (\cos \gamma)^2 + 20 h_s^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v^3 s C_D \rho r^5 \Omega^2 \cos L m \cos \gamma \sin L \cos \chi \\
 & +16 h_s^2 C_r s C_D \rho v^2 r^5 \Omega^2 \cos L m \cos \gamma \sin L \cos \chi \\
 & +4\rho v^3 s h_s^2 r^5 C_r \frac{\partial C_D}{\partial v} \Omega^2 \cos L m \cos \gamma \sin L \cos \chi + 16 \Omega^3 r^5 \sin \chi h_s^2 m^2 C_r \cos L v \cos \gamma \\
 & +8 \Omega^3 r^5 \sin \chi h_s^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v^2 \cos L \cos \gamma + 8v^2 r^4 m^2 C_r \Omega^2 (\cos L)^2 h_s^2 \\
 & -2\rho v^4 s h_s^2 r^5 \frac{\partial C_r}{\partial v} \frac{\partial C_D}{\partial v} \Omega^2 (\cos L)^2 m \sin \gamma - 16 h_s^2 C_r s C_D \rho v^2 r^5 \Omega^2 (\cos L)^2 m \sin \gamma \\
 & -20 h_s^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v^3 s C_D \rho r^5 \Omega^2 (\cos L)^2 m \sin \gamma + 6 h_s^2 C_r s^2 C_D^2 \rho^2 v^4 r^4 \\
 & +6v^5 \sin \gamma r^4 m h_s \frac{\partial C_r}{\partial v} s C_D \rho + 2\rho^2 v^5 s^2 h_s^2 r^4 C_r \frac{\partial C_D}{\partial v} C_D \\
 & -4v^3 \Omega^2 r^4 (\cos \gamma)^2 (\cos \chi)^2 h_s^2 m^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} (\cos L)^2 - 10v^4 \sin \gamma r^4 m h_s^2 \frac{\partial C_r}{\partial r} s C_D \rho \\
 & +16 C_r g_0 \sin \gamma m h_s^2 s C_D \rho v^2 r^2 + 4v^4 r^4 m^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial r^2} h_s^2 + 4 h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^4 g_0 \sin \gamma m s C_D \rho r^2 \\
 & -8 h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^2 \Omega^4 r^6 (\cos L)^3 m^2 \sin \gamma \cos \gamma \sin L \cos \chi \\
 & +8 h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^2 g_0 m^2 \Omega^2 r^3 (\cos L)^2 (\cos \gamma)^2 + 4 h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^2 g_0^2 m^2 \\
 & -8v^3 r^5 m^2 h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial r \partial v} \Omega^2 (\cos L)^2 (\cos \gamma)^2 + 4 h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^4 s C_D \rho r^5 \Omega^2 \cos L m \cos \gamma \sin L \cos \chi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -8v^3 \sin \gamma r^5 m^2 h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial r \partial v} \Omega^2 \cos L \cos \gamma \sin L \cos \chi - 4v^5 \sin \gamma r^4 m h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial r \partial v} s C_D \rho \\
& -4h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^2 \Omega^4 r^6 (\cos L)^4 m^2 (\cos \gamma)^2 (\cos \chi)^2 + 4h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^2 \Omega^4 r^6 (\cos L)^4 m^2 \\
& + 8v^3 r^2 m^2 h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial r \partial v} g_0 (\cos \gamma)^2 + 4h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^2 \Omega^4 r^6 (\cos L)^2 m^2 (\cos \gamma)^2 (\cos \chi)^2 \\
& -4h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^4 s C_D \rho r^5 \Omega^2 (\cos L)^2 m \sin \gamma + 8\Omega^4 r^6 h_s^2 m^2 C_r (\cos L)^2 \\
& + 8v^3 r^5 m^2 h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial r \partial v} \Omega^2 (\cos L)^2 + h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^6 s^2 C_D^2 \rho^2 r^4 \\
& -4h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^2 \Omega^4 r^6 (\cos L)^4 m^2 (\cos \gamma)^2 - 8v^3 r^2 m^2 h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial r \partial v} g_0 - 4v^4 r^4 m^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial r^2} h_s^2 (\cos \gamma)^2 \\
& -4h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^2 g_0^2 m^2 (\cos \gamma)^2 - 8h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^2 g_0 m^2 \Omega^2 r^3 (\cos L)^2 \\
& + 8h_s^2 \frac{\partial^2 C_r}{\partial v^2} v^2 g_0 \sin \gamma m^2 \Omega^2 r^3 \cos L \cos \gamma \sin L \cos \chi + 6h_s^2 \frac{\partial C_r}{\partial v} v^5 s^2 C_D^2 \rho^2 r^4 \\
& + 4h_s^2 m^2 v^4 (\cos \gamma)^2 r^3 \frac{\partial C_r}{\partial r} + \rho^2 v^6 s^2 h_s^2 r^4 \frac{\partial C_r}{\partial v} \frac{\partial C_D}{\partial v} C_D - 4h_s m^2 v^4 (\cos \gamma)^2 r^3 C_r \\
& + 4v^4 r^4 m^2 C_r), \tag{3.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_1.(X.C_2) &= \frac{1}{2} \frac{\rho^2 v^2 s C_L}{h_s r^2 m} \left( v^2 \cos \gamma r^2 \left( \frac{\partial C_r}{\partial r} h_s - C_r \right) - h_s \frac{\partial C_r}{\partial v} v g_0 \cos \gamma \right. \\
& + h_s \frac{\partial C_r}{\partial v} v \Omega^2 r^3 (\cos L)^2 \cos \gamma + h_s \frac{\partial C_r}{\partial v} v \Omega^2 r^3 \cos L \sin \gamma \sin L \cos \chi \\
& - 2h_s C_r g_0 \cos \gamma + 2h_s C_r \Omega^2 r^3 (\cos L)^2 \cos \gamma \\
& \left. + 2h_s C_r \Omega^2 r^3 \cos L \sin \gamma \sin L \cos \chi \right), \tag{3.55}
\end{aligned}$$

et

$$Y_2.(X.C_2) = \frac{1}{2} \frac{\rho^2 v^2 s C_L \left( \frac{\partial C_r}{\partial v} v + 2C_r \right) \Omega^2 r \cos L \sin L \sin \chi}{m}. \tag{3.56}$$

De même on a le résultat suivant :

**Lemme 3.5.3** *La contrainte sur l'accélération normale est d'ordre deux et durant l'arc frontière on a :*

$$\mu = \arcsin \frac{-Y_2.(X.C_2)}{\sqrt{(Y_1.(X.C_2))^2 + (Y_2.(X.C_2))^2}} \pm \arccos \frac{-X.(X.C_2)}{\sqrt{(Y_1.(X.C_2))^2 + (Y_2.(X.C_2))^2}} \quad (2\pi). \tag{3.57}$$

**Construction d'une trajectoire optimale.** La remarque 3.5.1 et la synthèse locale au voisinage de la contrainte pour le modèle simplifié  $I$  conduisent au résultat suivant :

**Lemme 3.5.4** *La synthèse locale pour le modèle complet avec contraintes sur l'état, en approximation, est de la forme  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_{flux} \gamma_+ \gamma_{acc} \gamma_+ \gamma_-$ , où  $\gamma_-$ ,  $\gamma_+$  sont des arcs réguliers et  $\gamma_{flux}$ ,  $\gamma_{acc}$  sont des arcs frontières.*

À ce point de l'étude, il faut distinguer deux problèmes selon la longitude, car dans les conditions aux limites la longitude initiale peut être fixée ou non.

*Problème 1 : longitude initiale libre.* Dans ce cas  $p_l = 0$  durant le vol, la longitude  $l$  n'apparaissant pas dans le système, on se ramène à un système de dimension cinq. L'angle final  $\gamma(t_f)$  étant libre, on en déduit  $p_\gamma(t_f) = 0$ , et la politique optimale dans ce cas, en approximation, est de la forme  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_{flux} \gamma_+ \gamma_{acc} \gamma_+$ , où  $\gamma_+$  (resp.  $\gamma_-$ ) est un arc associé au contrôle  $\cos \mu = 1$  (resp.  $\cos \mu = -1$ ), et  $\gamma_{flux}$  (resp.  $\gamma_{acc}$ ) est un arc frontière pour la contrainte sur le flux thermique (resp. pour l'accélération normale).

*Problème 2 : longitude initiale fixée.* Numériquement on constate, dans ce cas, que la contrainte sur l'accélération normale n'est plus active. On en déduit que la politique optimale est donnée, en approximation, par  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_{flux} \gamma_+ \gamma_-$ .

### 3.5.3 Algorithme et résultats numériques.

Dans cette section on simule les extrémales solutions du principe du minimum de Maurer [33] pour le modèle complet avec les conditions aux limites données au TAB. 1. Puisque dans la politique optimale le contrôle est indépendant du vecteur adjoint, alors on va s'intéresser à simuler que le système d'état.

**Problème 1 : longitude initiale libre.** D'après l'analyse géométrique traitée précédemment on déduit :

**Proposition 3.5.1** *La trajectoire optimale satisfaisant les conditions aux limites, en approximation, est de la forme  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_{flux} \gamma_+ \gamma_{acc} \gamma_+$ . C'est-à-dire qu'elle est constituée de six arcs consécutifs : un arc associé à  $\cos \mu = -1$ , un arc associé à  $\cos \mu = 1$ , un arc frontière associé au flux thermique, un arc associé à  $\cos \mu = 1$ , un arc frontière associé à l'accélération normale et un arc associé à  $\cos \mu = 1$ , voir figure 3.21. De plus l'application du principe du minimum impose les conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} C_1(t_2) &= \varphi^{\max} \quad , \quad (X.C_1)(t_2) = 0, \\ C_2(t_4) &= \gamma_n^{\max} \quad , \quad (X.C_2)(t_4) = 0. \end{aligned}$$

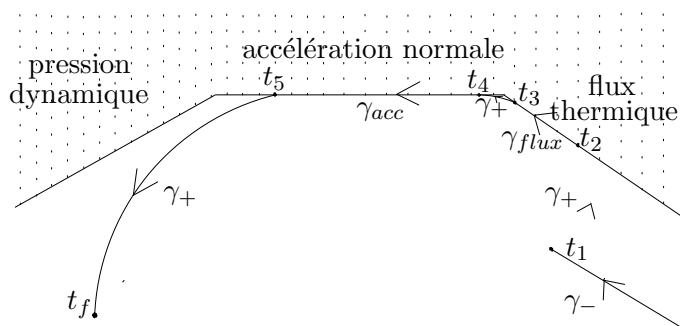


Figure 3.21— Trajectoire optimale (en approximation) pour le problème 1.

Les extrémales du système sont donc paramétrées par les temps de commutation du contrôle ( $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$  et  $t_f$ ) et par les conditions initiales ( $\chi(0)$  et  $l(0)$ ). L'al-

gorithme de tir multiple permet d'obtenir ces paramètres pour lesquels la trajectoire extrémale vérifie les conditions limites et les conditions imposées par le principe du minimum. Plus précisément on applique l'algorithme de tir multiple pour chercher  $Z = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_f, \chi(0), l(0))$  qui vérifie  $F(Z) = 0$ , où

$$F(Z) = \begin{bmatrix} C_1(t_2) - 717,30e + 003 \\ (X.C_1)(t_2) \\ C_2(t_4) - 29,34 \\ (X.C_2)(t_4) \\ r(t_f) - 6,393140e + 006 \\ v(t_f) - 4,45e + 002 \\ L(t_f) - 0,1918 \\ l(t_f) - 2,9056 \end{bmatrix} .$$

Les résultats obtenus sont tracés sur les figures fig. 3.9.

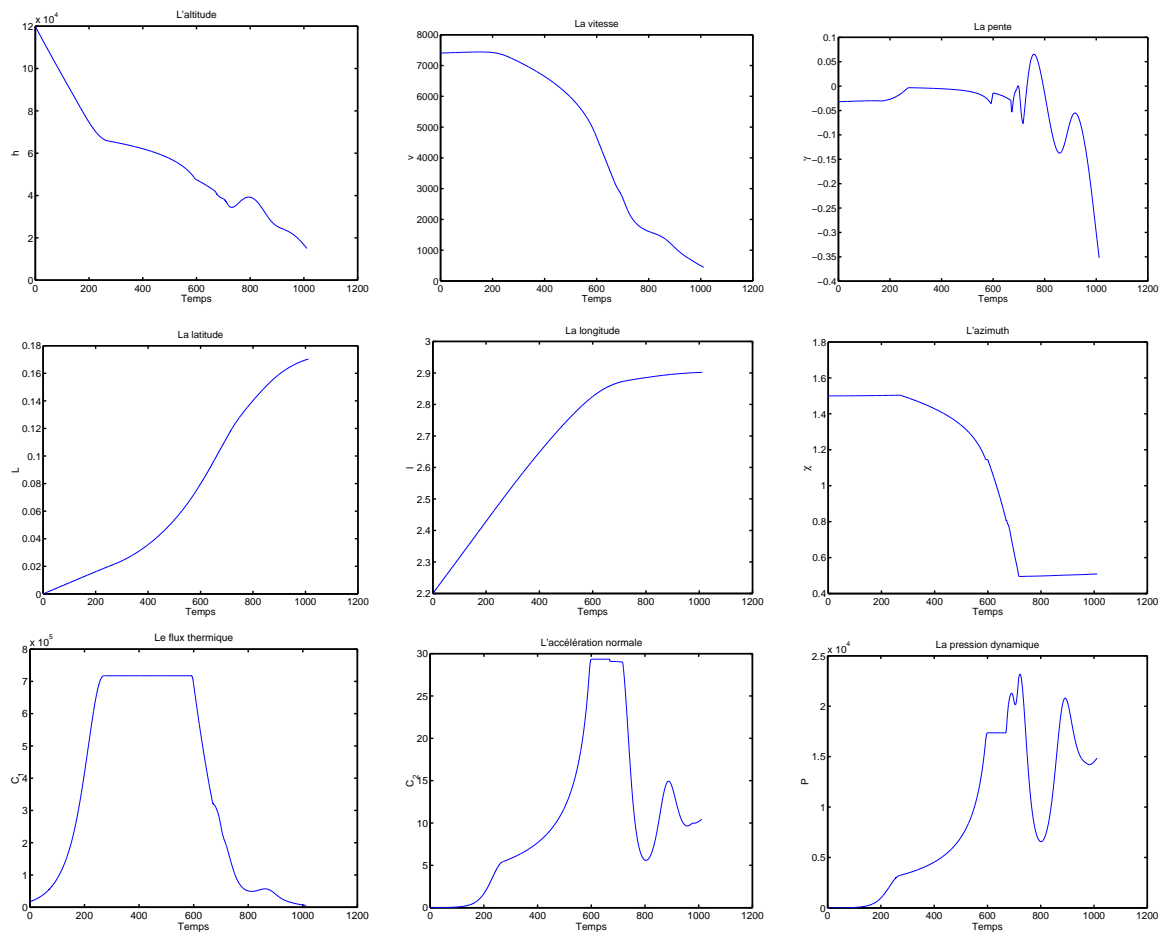


FIG. 3.9 – Coordonnées d'état et contraintes sur l'état pour le problème 1

**Commentaire**

Le freinage de la navette est faible au début de la trajectoire du vol. Par ailleurs, il devient très important sur les deux contraintes sur l'état (flux thermique et accélération normale). La contrainte sur la pression dynamique est désactivée. L'azimut est toujours entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , ce qui confirme l'absence d'extrémale singulière. Le temps de freinage est approximativement de 1000 s.

**Problème 2 : longitude initiale fixée.** D'après l'analyse géométrique traitée précédemment on déduit :

**Proposition 3.5.2** *La trajectoire optimale satisfaisant les conditions aux limites, en approximation, est de la forme  $\gamma_- \gamma_+ \gamma_{flux} \gamma_+ \gamma_-$ . C'est-à-dire qu'elle est constituée de cinq arcs consécutifs : un arc associé à  $\cos \mu = -1$ , un arc associé à  $\cos \mu = 1$ , un arc frontière associé au flux thermique, un arc associé à  $\cos \mu = 1$  et un arc associé à  $\cos \mu = -1$ , voir figure 3.22. De plus l'application du principe du minimum impose les conditions suivantes :*

$$C_1(t_2) = \varphi^{\max} \quad , \quad (X.C_1)(t_2) = 0.$$

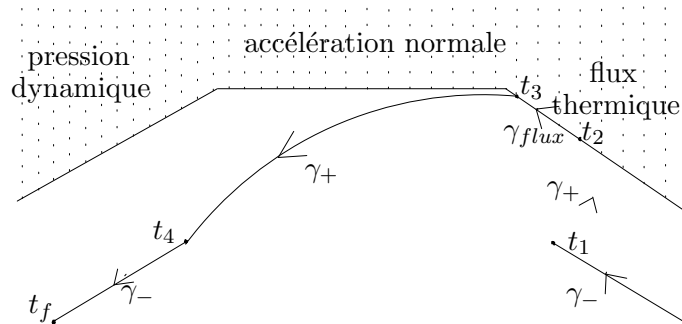


Figure 3.22 – Trajectoire optimale (en approximation) pour le problème 2.

Les extrémales du système sont donc paramétrées par les temps de commutation du contrôle ( $t_1, t_2, t_3, t_4$  et  $t_f$ ) et par la condition initiale ( $\chi(0)$ ). L'algorithme de tir multiple permet d'obtenir ces paramètres pour lesquels la trajectoire extrémale vérifie les conditions limites et les conditions imposées par le principe du minimum. Plus précisément on applique l'algorithme de tir multiple pour chercher  $Z = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_f, \chi(0))$  qui vérifie  $F(Z) = 0$ , où

$$F(Z) = \begin{bmatrix} C_1(t_2) - 717,30e + 003 \\ (X.C_1)(t_2) \\ r(t_f) - 6,393140e + 006 \\ v(t_f) - 4,45e + 002 \\ L(t_f) - 0,1918 \\ l(t_f) - 2,9056 \end{bmatrix}.$$

Les résultats obtenus sont tracés sur les figures fig. 3.10.

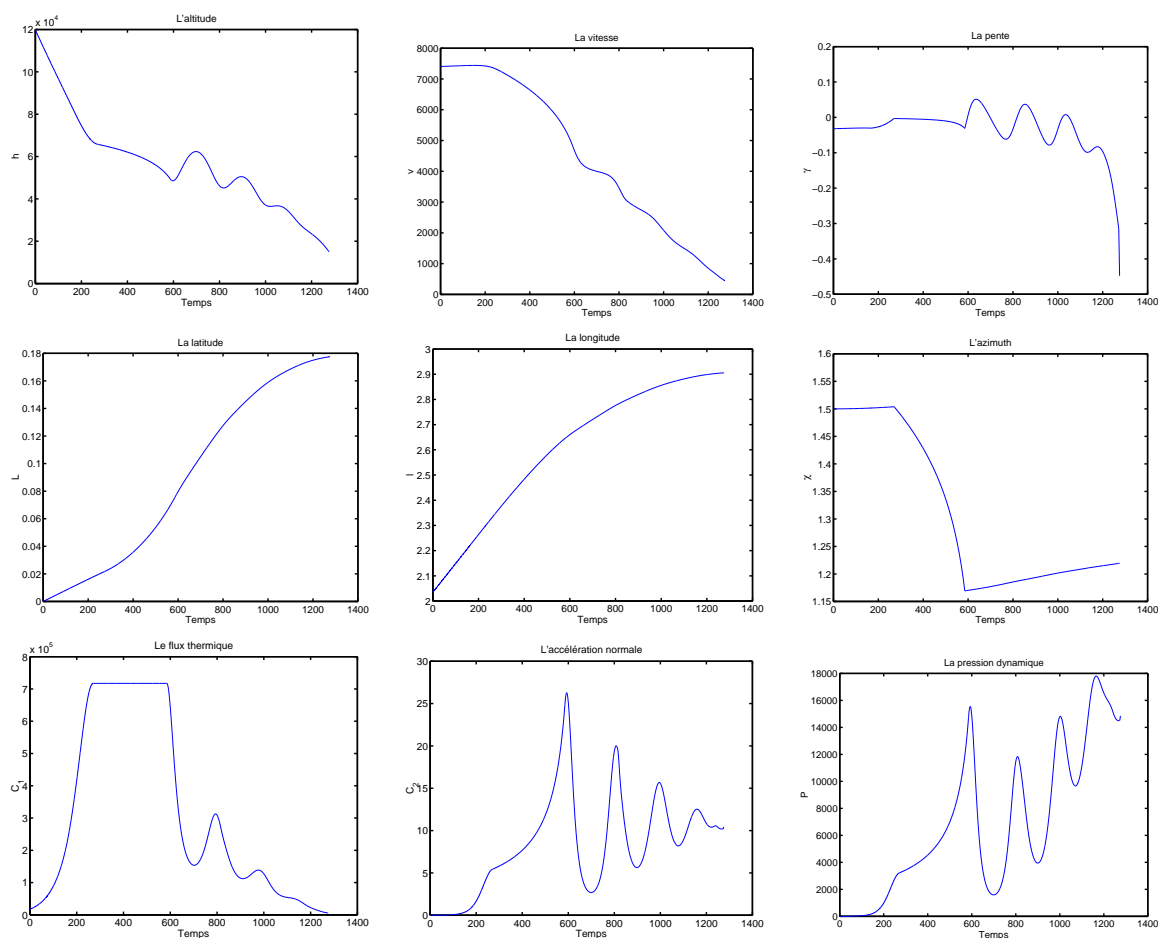


FIG. 3.10 – Coordonnées d'état et contraintes sur l'état pour le problème 2

### Commentaire

De nouveau, le freinage de la navette est faible au début de la trajectoire du vol et il devient très important sur le flux thermique. L'accélération normale et la pression dynamique sont désactivées. L'azimut est encore entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , ce qui confirme l'absence d'extrémale singulière. Comme le freinage est important sur les contraintes sur l'état, le temps de freinage est plus grand que celui réalisé dans le problème 1 et est approximativement de 1260 s.

### Conclusion

Nous avons commencé dans ce chapitre par une modélisation de la rentrée atmosphérique, ensuite nous avons expliqué ses différents modèles simplifiés suivant le choix de contrôle. Ce choix avait pour but, d'appliquer, entièrement, la théorie du contrôle optimal avec

ou sans contraintes sur l'état et les méthodes numériques (expliquées dans les chapitres précédents), et de donner une étude préliminaire du modèle complet. Nous avons étudié géométriquement et numériquement les deux modèles simplifiés. Enfin, avec une bonne approximation, nous avons traité le modèle complet.



## Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse nous avons d'abord étudié le problème de temps minimal pour le transfert orbital. Nous avons ensuite expliqué l'algorithme de tir et la technique de continuation, considérés comme des outils numériques adaptés à résoudre un problème de contrôle optimal général à partir de conditions nécessaires d'optimalité. D'un point de vue numérique, le tir simple couplé à la méthode de continuation sur la borne maximale du contrôle s'avère être parmi les méthodes les plus efficaces pour traiter le problème de transfert orbital. Nous avons poussé les simulations plus loin dans le cas plan, en utilisant pour les poussées faibles un intégrateur multipas.

Nous nous sommes ensuite intéressés à établir des conditions nécessaires d'optimalité, pour des systèmes avec contraintes sur l'état, applicables aux problèmes de rentrée atmosphérique. Nous avons tout d'abord donné les résultats de Weierstrass dans le plan pour obtenir des conditions géométriques nécessaires d'optimalité. Nous avons établi ensuite la théorie de Kuhn-Tucker dont la version en dimension infinie a permis d'obtenir les conditions nécessaires recherchées qui forment le principe du minimum de Maurer. Enfin nous avons calculé les multiplicateurs associés à la contrainte, ce calcul étant lié à l'action de l'algèbre de Lie (engendré par les champs de vecteurs) agissant sur la fonction de la contrainte.

Dans le dernier chapitre, Nous avons étudié le problème de contrôle optimal d'une navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique. Nous avons commencé cette étude par une modélisation du problème physique et par une interpolation polynomiale de  $C_D$  et de  $C_L$  (respectivement coefficient de traînée et de portance). Nous avons résolu géométriquement et numériquement le problème simplifié en dimension trois (extrait du modèle complet), en traitant deux modèles simplifiés suivant le choix du contrôle. Les résultats obtenus nous ont donné une étude préliminaire pour traiter le modèle complet.

La contribution de cette thèse se résume aux points suivants :

1. Adapter l'algorithme de tir (couplé par la méthode de continuation) pour résoudre le problème numérique (non convergence) issu d'une part de la singularité observée par l'inversion de poussée (pour le transfert orbital), d'autre part de la non injectivité totale de la fonction de tir.
2. Établir des conditions nécessaires d'optimalité applicables au problème de rentrée atmosphérique.
3. Simplifier le calcul des indéterminées  $(\eta, \nu, u_b)$  associées à la contrainte sur l'état.
4. Chercher la synthèse optimale au voisinage de la contrainte (d'ordre  $\leq 3$ ).
5. Étudier le problème de la navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique ; dans la validation numérique nous avons utilisé de plus la méthode de continuation sur la contrainte. Cependant, le problème numérique est d'ajuster la trajectoire avant et après la traversée de la contrainte pour bien réaliser les informations imposées par l'ordre de la contrainte.

En ce qui concerne les axes de recherche à suivre après cette thèse, on peut citer entre autres :

1. Étudier le système complet de la navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique en prenant la dérivée de l'angle de gîte comme contrôle.
2. Chercher la synthèse optimale au voisinage d'une contrainte d'ordre plus grand que 3 et surtout avec l'existence des trajectoires singulières et la présence des points conjugués.
3. Une fois la trajectoire optimale déterminée, on propose comme perspective de stabiliser la navette autour de cette trajectoire, de façon à prendre en compte de possibles perturbations en respectant les contraintes sur l'état.
4. Implémenter, dans le cadre numérique, un code numérique de résolution d'un problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état par l'algorithme de tir multiple couplé à la méthode de continuation sur la borne extrême du contrôle et/ou à la méthode de continuation sur la borne extrême de la contrainte.



# Bibliographie

- [1] K.J. Arrow, L. Hurwicz, and H. Uzawa. *Studies in Linear and Non-Linear Programming*. Stanford University Press, Stanford, California, 1958.
- [2] O. Bolza. *Lectures on the calculus of variations*. Chelsea Publishing Co., New York, 2nd edition, 1961.
- [3] F. Bonnans and G. Launay. Large scale direct optimal control applied to the re-entry problem. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 21(6) :996–1000, 1998.
- [4] B. Bonnard. Contrôlabilité de systèmes mécaniques sur les groupes de Lie. *SIAM J. Control Optim.*, 22 :711–722, 1984.
- [5] B. Bonnard and M. Chyba. *Singular trajectories and their role in control theory*, volume 40 of *Mathematics and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [6] B. Bonnard, L. Faubourg, G. Launay, and E. Trélat. Optimal control with state constraints and the space shuttle re-entry problem. *J. Dyn. Cont. Syst.*, 9(2) :155–199, 2003.
- [7] B. Bonnard, L. Faubourg, and E. Trélat. Optimal control of the atmospheric arc of a space shuttle and numerical simulations by multiple shooting-technique. *Math. Models Methods Applied Sci.*, 2(15), 2005.
- [8] B. Bonnard, M. Jabeur, and G. Janin. *Control of mechanical systems from aerospace engineering*. Springer-Verlag. Article d’ouvrage, 65-113, à paraître.
- [9] B. Bonnard and I. Kupka. Théorie des singularités de l’application entrée/sortie et optimalité des singulières. *Forum Math.*, 5 :111–159, 1993.
- [10] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle-Théorie et Applications*. Masson, 1992.
- [11] A. Bryson and Y.C. Ho. *Applied Optimal Control*. Hemisphere Pub. Corporation, 1975.
- [12] A.E. Bryson, W.F. Denham, and S.E. Dreyfus. Optimal programming problems with inequality constraints, I. *AIAA Journal*, 1(11) :2544–2550, 1963.
- [13] J.B. Caillau. *Contribution à l’étude du contrôle en temps minimal*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2000.
- [14] J.B. Caillau and J. Noailles. Coplanar of satellite around the earth. *ESAIM COCV*, 6 :239–258, 2001.
- [15] L. Cesari. *Optimization Theory and Applications*. Springer-Verlag, 1983.
- [16] D. E. Chang, D. F. Chichka, and J. E. Marsden. Lyapunov-based transfer between elliptic keplerian orbits. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, 2(1) :57–67, 2002.

- [17] A. Ciampi. *Classical Hamiltonian linear systems*. Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, Queen's University, Kingston, Ont., 1972. No. 31.
- [18] CNES. *Mécanique Spatiale*. Cepadues Eds, 1993.
- [19] J.M. Coron and L. Praly. Transfert orbital à l'aide des moteurs ioniques. Rapport CNES 1442, 1996.
- [20] J.M. Coron and L. Praly. Guidage en rentrée atmosphérique. Rapport 415 CNES, Octobre 2000.
- [21] S. Geffroy. *Généralisation des techniques de moyennisation en contrôle optimal-Application aux problèmes de transfert et de rendez-vous orbitaux à poussée faible*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1997.
- [22] I.M. Gelfand and S.V. Fomin. *Calculus of variations*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1963. Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman.
- [23] J. Harpold and C. Graves. Shuttle entry guidance. *J. Astronautical Sciences*, 27 :239–268, 1979.
- [24] A.D. Ioffe and V.M. Tikhomirov. *Theory of extremal problems*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1979. Translated from the Russian by Karol Makowski.
- [25] D.H. Jacobson, M.M. Lele, and J.L. Speyer. New necessary conditions of optimality for control problems with state-variable inequality constraints. *J. Math. Anal. Appl.*, 35(2) :255–284, 1971.
- [26] V. Jurdjevic and J. P. Quinn. Controllability and stability. *J. Differential Equations*, 28(3) :381–389, 1978.
- [27] A. J. Krener and H. Schättler. The structure of small-time reachable sets in low dimensions. *SIAM J. Control Optim.*, 27(1) :120–147, 1989.
- [28] I. Kupka. Geometric theory of extremals in optimal control problems. *Transactions AMS*, 299 :225–243, 1987.
- [29] L. Landau and E. Lifchitz. *Mécanique*. Ed. Mir, Moscou, 1969.
- [30] E. B. Lee and L. Markus. *Foundations of optimal control theory*. Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, second edition, 1986.
- [31] C. Lobry. Controllability of nonlinear systems on compact manifolds. *SIAM J. Control*, 12 :1–4, 1974.
- [32] D.G. Luenberger. *Optimization by Vector Space Methods*. J. Wiley and Sons, New York, 1969.
- [33] H. Maurer. On optimal control problems with bounded state variables and control appearing linearly. *SIAM J. Control Optimization*, 15(3) :345–362, 1977.
- [34] A. Miele. Recent advances in the optimization and guidance of aeroassociated orbital transfers. *Acta astronautica*, 38(10) :747–768, 1996.
- [35] L.W. Neustadt. A general theory of extremals. *J. Comp. System Sci.*, 3 :57–92, 1969.
- [36] D.O. Norris. Nonlinear Programming Applied to State-Constraint Optimization Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 43(1) :261–272, 1973.

- [37] H.J. Oberle. Numerical solution of minimax optimal control problems by multiple shooting technique. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 50(2) :331–357, 1986.
- [38] H.J. Oberle and W. Grimm. BNDSCO-A Programm for the Numerical Solution of Optimal Control Problems. Internal Report 515-89/22, Institute for Flight Systems Dynamics, DLR, Oberpfaffenhofen, Germany, 1989.
- [39] L. Pontriaguine, V. Boltiansky, R. Gamkrelidze, and E. Michtchenko. *Théorie Mathématique des Processus Optimaux*. Editions. Mir, Moscow, 1974. Traduit du Russe par Djilali Embarek.
- [40] N. Rouche and J. Mawhin. *Equations Différentielles Ordinaires*. tome 2. Masson, Paris, 1973.
- [41] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, 1978.
- [42] D.L. Russell. The Kuhn-Tucker conditions in Banach space with an application to control theory. *J. Math. Anal. Appl.*, 15 :200–212, 1966.
- [43] H. Schättler. The local structure of time-optimal trajectories in dimension 3 under generic conditions. *SIAM J. on Control and Optimization*, 26(4) :899–918, 1988.
- [44] L. Schwartz. *Topologie générale et analyse fonctionnelle*. Hermann, 1970.
- [45] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, 1973.
- [46] J.L. Speyer. *Optimization and control of nonlinear systems with inflight constraints*. PhD thesis, Harvard University, 1968.
- [47] J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1980. Translated from the Germany by R. Bartels, W. Gautschi and C. Witzgall.
- [48] H.J. Sussmann. The structure of time-optimal trajectories for single-input systems in the plane : the  $C^\infty$  non singular case. *SIAM J. on Control and Optimization*, 25 :856–905, 1987.
- [49] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York Inc., 1968.
- [50] O. Zarrouati. *Trajectoires Spatiales*. CNES-Cepadues, Toulouse, France, 1967.