HAL open science

COMMANDE ROBUSTE DES SYSTÈMES PLATSAPPLICATION À LA COMMANDE D' UNE MACHINE SYNCHRONE.

Franck Cazaurang

To cite this version:

Franck Cazaurang. COMMANDE ROBUSTE DES SYSTÈMES PLATSAPPLICATION À LA COMMANDE D' UNE MACHINE SYNCHRONE.. Automatique / Robotique. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 1997. Français. NNT : . tel-00012110

HAL Id: tel-00012110

https://theses.hal.science/tel-00012110

Submitted on 10 Apr 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE
DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par

Franck CAZAURANG

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : AUTOMATIQUE

COMMANDE ROBUSTE DES SYSTÈMES PLATS
APPLICATION À LA COMMANDE D' UNE MACHINE SYNCHRONE.

Soutenue le 8 Décembre 1997

Après avis de : MM. J. LEVINE Maître de Recherche à l'École des Mines de Paris *Rapporteurs*

D. MEHDI Professeur à l'École Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers

Devant la Commission d'examen:

MM.

D. MEHDI Professeur à l'École Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers *President et rapporteur*

B. BERGEON Professeur à l'Université Bordeaux I *Examinateurs*

M. FADEL Maître de Conférences à l'E.N.S.E.E.I.H.T. Toulouse

A. GLUMINEAU Professeur à l'École Centrale de Nantes

J. LEVINE Maître de Recherche à l'École des Mines de Paris

S. YGORRA Maître de Conférences à l'Université Bordeaux I

-- 1997 --

Remerciements

Le travail présenté dans cette thèse a été effectué au sein de l'équipe Approche Robuste et Intégré de L'Automatique, du Laboratoire d'Automatique et de Productique de l'Université Bordeaux I / ENSERB.

Que Monsieur Jean Lévine Maître de Recherche au Centre Automatique et Système de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, et Monsieur Driss Mehdi Professeur au Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude, de m'avoir fait l'honneur de rapporter ce travail. Je leur adresse également mes plus sincères remerciements pour leur disponibilité et leurs conseils avisés qui m'ont permis d'améliorer la qualité de ce document.

Je remercie chaleureusement Monsieur Benoît Bergeon, Professeur à l'Université Bordeaux I, directeur de cette thèse, de m'avoir encadré et encouragé tout au long de ce travail. Je lui témoigne toute ma reconnaissance pour les fructueuses discussions que nous avons eues et pour m'avoir accordé sa confiance pour travailler à ses cotés.

Je tiens à remercier vivement Monsieur Maurice Fadel, Maître de conférence au Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique Industrielle de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electronique d'Electrotechnique, d'Informatique et d'Hydraulique de Toulouse, pour son accueil chaleureux et pour les collaborations que nous avons eues dans le cadre de l'inter GdR Automatique-Electrotechnique. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude pour sa participation à ce jury.

J'adresse tout particulièrement mes remerciements à Monsieur Alain Glumineau Professeur à l'Institut de Recherche en Cybernétique de Nantes de l'Ecole Centrale de Nantes, pour la qualité de son accueil lors de différentes manifestations scientifiques, ainsi que les discutions sur le domaine de la commande non linéaire des systèmes électrotechniques. Je suis très honoré de sa présence comme membre du jury.

Je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur Stéphane Ygorra, Maître de Conférences à l'Université Bordeaux I, pour m'avoir aidé à améliorer mes connaissances en Automatique

robuste. Qu'il trouve ici l'expression de mon amitié et de ma gratitude pour sa participation au jury.

Je remercie Monsieur Michel Monsion Professeur à l'université Bordeaux I pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe enseignante de l'U.F.R. de Physique, et m'avoir permis d'améliorer ma compétence en Automatique, en effectuant ce travail de recherche au sein de l'équipe ARIA.

Je tiens à remercier Monsieur Ali Zholgadri, Maître de Conférences à l'Université Bordeaux I, pour son amitié et son soutien continu durant ce travail.

Enfin je dois citer tous les amis et collègues du laboratoire et de l'U.F.R. de physique qui ont contribué à ce travail d'une façon directe ou indirecte, continue ou ponctuelle.

Je dédie ce travail à mes proches qui m'ont apporté un soutien indispensable.

Notations

A^t	: Transposée de la matrice A.
A^*	: Transposée conjuguée de la matrice A.
$tr(A)$	: Trace de la matrice A.
I_n	: Matrice identité de dimension n.
$\|x\|_2$	: Norme Euclidienne du vecteur x.
$\overline{\sigma}(A) = \underset{x\neq 0}{Sup} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$	: Norme spectrale de la matrice A, correspondant à la plus grande valeur propre de A^*A.
$\underline{\sigma}(A) = \underset{x\neq 0}{Inf} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$	: plus petite valeur propre de A^*A.
s	: Variable de Laplace.
C^+	: Le demi plan complexe ouvert droit.
$T_{yr}(s)$	: La matrice de transfert reliant la sortie y à l'entrée r.
$P(s) = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{pmatrix}$	: Une matrice de transfert partitionnée en quatre blocs telle que:
$\begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} = P(s) \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix}$	
$K(s)$	: Une matrice de transfert monobloc telle que: $u_2(s)=K(s)y_2(s)$
$\Delta(s)$	: Une matrice de transfert monobloc telle que: $u_1(s)=\Delta(s)y_1(s)$
$F_l(P,K):=P_{11}+P_{12}K(I-P_{22}K)^{-1}P_{21}$	: La transformation linéaire fractionnaire basse de $P(s)$ par $K(s)$.
$F_u(P,\Delta):=P_{11}+P_{12}\Delta(I-P_{22}\Delta)^{-1}P_{21}$	: La transformation linéaire fractionnaire haute de $P(s)$ par $\Delta(s)$.
$G_e = \left(\begin{array}{c\|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right)$	: Une matrice contenant une représentation d'état (A, B, C, D).
$G(s)=D+C(sI-A)^{-1}B=F_u(G_e,sI)$	: La matrice de transfert associée à la représentation précedente.

H_2	: Sous espace de L_2 des fonctions matricielles analytiques dans C^+.
H_∞	: Sous espace de L_∞ des fonctions matricielles analytiques dans C^+.
RH_2	: Sous espace de RL_2 des matrices de fractions réelles rationnelles $G(s)$ analytiques dans C^+ et verifiant: $\int_{-\infty}^{+\infty} tr\left(G^*(j\omega)G(j\omega)\right)d\omega < \infty$
RH_∞	: Sous espace de RL_∞ des matrices de fractions réelles rationnelles $G(s)$ analytiques dans C^+ qui satisfont $\underset{\omega \in R^+}{Sup}\ \overline{\sigma}\left(G(j\omega)\right) < \infty$
$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} tr\left(G^*(j\omega)G(j\omega)\right)d\omega\right\}^{1/2}$	: Norme 2 des matrices de transfert $G(s)$ de RL_2 ou RH_2 notée $\lVert G \rVert_2$.
$\lVert G \rVert_\infty = \underset{\omega \in R^+}{Sup}\ \overline{\sigma}\left(G(j\omega)\right)$	: Norme infinie des matrices de transfert $G(s)$ de RL_2 ou RH_2.
$\overline{\sigma}\left(G(j\omega)\right)$	: Gain minimal d'une matrice de transfert $G(s)$.
$\underline{\sigma}\left(G(j\omega)\right)$	: Gain maximal d'une matrice de transfert $G(s)$.

Sommaire

INTRODUCTION **1**

CHAPITRE I : DES PRINCIPES DE LA COMMANDE ROBUSTE **5**

1.1 LE RÔLE DU BOUCLAGE DANS LA COMMANDE 5
1.2 STABILITÉ ROBUSTE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES 7
1.2.1 Rappels de quelques notions de stabilité *7*
Flot associé à une équation différentielle 8
Singularités : Point singulier, orbite périodique 8
1.2.2 Stabilité locale au voisinage d'une singularité *9*
Stabilité au sens de Lyapounov: L-stabilité et L-stabilité asymptotique 9
Remarques: Autres outils d'analyse de la stabilité 9
1.2.3 Stabilité globale *10*
Stabilité globale d'un opérateur associé à un système non linéaire 10
Théorème du faible gain: cas général 13
Application du théorème du faible gain au cas des systèmes linéaires incertains 14
1.3 ÉLÉMENTS NÉCESSAIRES À LA SYNTHÈSE D'UN RÉGULATEUR ROBUSTE 15
1.3.1 Introduction *15*
1.3.2 La commande modèle interne de Wonham *15*
Cas des systèmes linéaires. 15
Cas des systèmes dynamiques analytiques 19
Conclusion 21
1.3.3 La commande à multiples modèles de références *22*
Historique 22
Principe 22
1.3.4 Une approche unifiée: Le problème standard *23*
Introduction 23
1.4 CONCLUSION 25

CHAPITRE II : OUTILS DE SYNTHÈSE ET D'ANALYSE DE LOI DE COMMANDE **26**

2.1 OUTILS POUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES MULTIVARIABLES 26
2.1.1 Classe des systèmes considérés *26*
Procédé nominal 26
Famille de modèles 27
Incertitudes non structurées 28
Incertitudes semi structurées 31
Incertitudes structurées 34
2.1.2 Théorèmes de stabilité robuste pour des incertitudes non structurées *36*
Incertitude modélisée par un opérateur non linéaire à gain borné :Théorème du faible gain 36
Incertitude modélisée par un opérateur linéaire : Théorème de Nyquist généralisé 36
Conclusion : 38
2.1.3 Théorèmes de stabilité robuste pour des incertitudes structurées *39*
Définitions 39
Interprétation de la valeur singulière structurée en terme de système bouclé. 39
Propriétés et évaluation de la valeur singulière structurée 40
Théorème de stabilité robuste vis à vis d'incertitudes structurées. 41
2.1.4 Robustesse en stabilité et en performance, et fonctions de sensibilité nominales *41*
Stabilité robuste 41
Performance robuste 42
2.1.5 Synthèse par optimisation de critère *45*
Introduction 45

Paramétrisation de Youla (Q Paramétrisation) 45
Synthèse H_2/LQG 47
Synthèse H_∞ 50
μ-synthèse 52
2.2 OUTILS POUR LES SYSTÈMES NON LINÉAIRES MULTIVARIABLES 53
2.2.1 Introduction 53
2.2.2 Commande des systèmes différentiellement plats [Flie 95c] 56
Platitude et défaut des systèmes non linéaires 56
Planification de trajectoire 57
Linéarisation par difféomorphisme et bouclage statique des systèmes plats mono-entrée 58
Linéarisation partielle par difféomorphisme et bouclage statique de système 60
Linéarisation par bouclage dynamique endogène des systèmes plats multi-entrées 60
2.3 CONCLUSION 61

CHAPITRE III : COMMANDE ROBUSTE DES SYSTÈMES PLATS 62

3.1 STABILITÉ LOCALE ROBUSTE DES SYSTÈMES PLATS 62
3.1.1 Classe des systèmes plats considérés 62
3.1.2 construction du bouclage dynamique endogène à partir des sorties plates 63
3.1.3 Perturbations de modèle, de mesures et de sorties 64
3.1.4 Famille de modèles issue de la boucle de linéarisation 66
Lemme: 67
3.1.5 Stabilité entrée-état 68
Définition 68
Stabilité robuste entrée-état 69
3.1.6 Conclusion 72
3.2 SÉPARATION DES OBJECTIFS DE RÉGULATION ET DE POURSUITE 73
3.2.1 Critères de poursuite robuste 74
3.2.2 Schéma générique à deux degrés de liberté 77
3.2.3 Spécification de poursuite nominale: synthèse du paramètre Q_{T0} 80
3.2.4 Cas des systèmes plats 81
3.3 SYNTHÈSE DE LOI DE COMMANDE ROBUSTE POUR LES SYSTÈMES PLATS 82
3.3.1 Méthodologie de synthèse 82
3.3.2 Synthèse du générateur de références à partir du concept de platitude 82
3.3.3 Bouclage découplant 83
3.3.3 famille de modèle 83
3.3.4 Spécification de stabilité robuste 85
Remarques: 86
3.3.5 Spécification de poursuite robuste 86
3.3.6 Synthèse du régulateur à stabilité et poursuite robuste 87
3.4 CONCLUSION 88

CHAPITRE IV : APPLICATION COMMANDE ROBUSTE D'UNE MACHINE SYNCHRONE 89

4.1 MODÉLISATION DES MACHINES À COURANTS ALTERNATIFS 89
4.1.1 Introduction: 89
Conversion électromécanique dans les machines à courants alternatifs 90
Constitution des machines industrielles standard 91
Equations électriques 92
Equation électromécanique 93
Equation mécanique 93
Machine primitive ou machine de Kron 94
Transformation d'un enroulement triphasé en trois enroulements orthogonaux 94
4.1.2 modèle des machines à courants alternatifs à structure magnétique isotrope 96
Hypothèses 96
Machine diphasée équivalente: 96
4.1.3 Modèle de machine synchrone à structure magnétique anisotrope sans amortisseur 98
Hypothèses 98
Machine diphasée équivalente: 98
4.2 CAS DES MACHINES À STRUCTURE MAGNÉTIQUE ISOTROPE 100
4.2.1 Platitude du modèle 100
4.2.2 Linéarisation entrées-état par bouclage dynamique 103
Modèle d'état d'une machine à structure magnétique isotrope dans le référentiel statorique 103

Modèle d'état d'une machine isotrope dans le référentiel lié au flux rotorique: 105
Remarques: 107
4.2.3 Choix des trajectoires de références *108*
Trajectoires de références pour une machine asynchrone 108
Trajectoires de référence pour une machine synchrone 109
Choix du paramètre t_r 109
4.2.4 Méthodologie de synthèse de la loi de commande robuste *110*
4.2.5 Remarques et perspectives *112*
4.3 CAS DES MACHINES SYNCHRONES À AIMANTS PERMANENTS ET SANS AMORTISSEUR 113
4.3.1 Platitude du modèle *113*
4.3.2 Linéarisation entrées-état par bouclage statique *115*
4.3.3 Choix des trajectoires de référence *116*
4.3.4 Synthèse de la loi de commande robuste *116*
Simulation 124
4.3.5 Remarques et perspectives *129*

CONCLUSION 130

ANNEXES I

A.1. ESPACES VECTORIELS NORMÉS I
A.1.1 définitions *i*
A.1.2 Propriété des espaces de Hilbert: Théorème de projection: *ii*
A.1.4 Espaces de fonction *ii*
A.1.4.1 Espace L_2 (R^n) ii
A.1.4.2 Espace L_2 étendu : L_{2e}(R^n) iii
A.1.4.3 Espace L_2^n (C^n) iii
A.2 NORME D'UNE FONCTION MATRICIELLE ET NORME INDUITE IV
A.2.1 Définitions *iv*
A.3 TRANSFORMATION LINÉAIRES FRACTIONNAIRES V
A.4 DONNÉES NUMÉRIQUES VIII
Machine synchrone utilisée par B. Lepioufle dans le cadre de sa thèse: *viii*
Machine synchrone du PRC-GdR : *viii*

BIBLIOGRAPHIE VI

Introduction

Une loi de commande robuste a pour objectif d'obtenir un fonctionnement acceptable d'un système réel dans son contexte normal d'utilisation. En premier lieu il est fondamental que le comportement du procédé commandé soit stable. Ainsi, on parlera de stabilité robuste pour une loi de commande lorsque la stabilité de la boucle fermée n'est pas altérée par les écarts entre le modèle utilisé pour la synthèse de la loi de commande et le procédé à commander. Ces imperfections de modèle peuvent être dues à des imprécisions intrinsèques liées à l'incapacité d'avoir une connaissance totale de tous les phénomènes mis en jeu, ou bien à des imprécisions fixées a priori, découlant d'approximations ou de réductions d'ordre, et permettant de mettre en oeuvre certaines techniques de synthèse.

Pour obtenir une loi de commande robuste il est donc nécessaire de prendre en compte ces imperfections de modèle. Pour ce faire, le modèle du procédé se compose d'une famille de systèmes (éventuellement non linéaires et de dimension infinie) définie à partir d'un modèle nominal. Cette famille est donnée en spécifiant soit des perturbations sur le système nominal soit des incertitudes sur le système.

En plus de la stabilité robuste, une loi de commande se doit d'atteindre les objectifs de régulation et de poursuite imposés par le cahier des charges. Ces performances peuvent alors être traduites sous la forme d'un système d'équations dynamiques.

Dans le premier chapitre, nous rappellerons le rôle primordial du bouclage pour la stabilisation robuste et le rejet des perturbations au sens le plus général du terme. Nous montrerons que le rôle du bouclage est valable aussi bien dans le cas des systèmes linéaires, que dans le cas des systèmes non linéaires. Nous préciserons à cette occasion les différentes notions de stabilité utilisées pour la stabilisation robuste.
Nous rappellerons ensuite que, d'une manière générale, le problème de la synthèse d'une loi de commande robuste repose d'une part sur la modélisation des écarts entre le modèle et le procédé, et d'autre part sur l'utilisation de schémas de synthèse incluant les différents

objectifs à atteindre. Nous présenterons alors la notion de système augmenté permettant d'associer le modèle avec ses incertitudes d'une part et les objectifs de stabilité, régulation et performances du procédé bouclé d'autre part. Le problème de la synthèse d'une loi de commande robuste sera alors formulé sous une forme standard. La synthèse consistera à déterminer une loi de commande telle que le procédé soit stable en boucle fermée et se comporte conformément aux spécifications du cahier des charges. Pour ce faire, un schéma de synthèse sera proposé pour permettre de séparer les objectifs du précompensateur et du régulateur de la loi de commande: le schéma générique de commande à deux degrés de liberté.

Le problème général de la synthèse d'une loi de commande robuste étant posé, le second chapitre traitera des différentes techniques de synthèse de loi de commande en fonction de la classe de systèmes considérée. Nous rappellerons les méthodes utilisées dans le cas des systèmes linéaires multivariables, et dans le cas d'une catégorie de systèmes non linéaires.

Dans le cadre de la commande robuste des systèmes linéaires, les méthodes modernes de synthèse multivariable intègrent un modèle du procédé comportant une famille de systèmes. Elles utilisent un modèle d'écarts, qui se définit soit par différents types de normes dans le domaine fréquentiel ou temporel, ou bien par des domaines d'incertitude sur les paramètres, ou encore par des secteurs du plan complexe. Pour certains types de modélisation d'erreurs se trouve associée une technique de synthèse. Une présentation de ces différentes techniques sera proposée, avec une attention particulière pour celles basées sur l'utilisation des normes H_2 et H_∞.

Pour la classe des systèmes non linéaires, la modélisation traduit le plus finement possible le comportement du procédé et les liens existant avec l'environnement associé (entrées, sorties, grandeurs d'influence) par un système d'équations dynamiques non linéaires. Parmi les systèmes non linéaire, il existe une catégorie particulière de systèmes, les systèmes plats, pour lesquels il est possible de paramètrer simplement leur trajectoire dans l'espace d'état. Dans ce cas la génération de trajectoire est relativement simple à déterminer. La poursuite de ces trajectoires en dépit de perturbations de modèle et exogènes peut-être obtenue en utilisant une commande comportant une boucle de linéarisation puis une boucle de régulation linéaire. Pour les autres procédés non linéaires, la synthèse de la commande est alors basée sur des méthodes adaptées au non linéaire comme la synthèse de Lyapunov par exemple.

Dans le cadre de ce second chapitre nous nous intéresserons plus particulièrement aux systèmes différentiellement plats. Cette classe est constituée par les modèles nominaux dont le système d'équations dynamiques a la propriété d'être différentiellement plat. Cette classe de systèmes a été introduite en 1992 par M. Fliess *et al* [Flie 92a]. La définition de la classe des systèmes plats et la détermination de critères de platitude, permettent de définir un ensemble de systèmes pour lesquels la linéarisation entrée-sortie ou entrée-état, et la génération de trajectoires en boucle ouverte, sont des problèmes résolus. Nous rappellerons à ce sujet les principaux résultats connus.

Le troisième chapitre portera sur une méthodologie de synthèse de loi de commande robuste pour les systèmes plats. Cette loi de commande intégrera une boucle de linéarisation et un régulateur linéaire. La linéarisation sera réalisée par des techniques classiques. Cependant ces techniques ne garantissent pas la linéarisation du comportement pour un procédé incertain. En effet pour un procédé dont le modèle comporte des paramètres incertains et des dynamiques négligées, le système bouclé ne se trouve plus sur sa trajectoire de références, et n'est plus découplé. Il subsiste des dynamiques non linéaires dues aux écarts entre le modèle et le procédé. En ce sens le découplage entrée-état n'est pas robuste. De même les perturbations de mesure sur l'état peuvent dégrader le découplage entrée-état du système bouclé. Ces perturbations éloigne le système de la trajectoire de référence définie vis à vis du système nominal. Ces limitations seront atténuées par une loi de commande linéaire robuste. Cette loi de commande permettra dans certaines limites, de stabiliser le système au voisinage de sa trajectoire de référence en dépit des erreurs de modélisation et des perturbations exogènes, et de fixer la dynamique de rejet des perturbations.

Cette loi de commande sera déterminée à partir d'un schéma de synthèse pour lequel les objectifs de régulation et de poursuite sont séparés: schéma générique de commande à deux degrés de liberté. Cette approche du problème proposée initialement par H. Bourles [Bour 82] a été étudiée par B. Bergeon, *et al.* [Berg 90], [Ygor 92] et [Berg 94] dans le cadre des commandes monovariables robustes. L'utilisation de ce schéma a été étendue au cas de la poursuite robuste multivariable par E. Prempain [Prem 95a]. Dans ce chapitre, son utilisation sera élargie au cas des systèmes non linéaires différentiellement plats. On montrera en particulier que ce schéma permet de justifier l'utilisation de l'approche par linéarisé tangent pour compenser les erreurs paramétriques de modèle, dans le cadre de la synthèse de la boucle de régulation. Un modèle augmenté basé sur ce schéma sera proposé permettant d'associer la

boucle de linéarisation et les spécifications de performances. La synthèse multi-objectifs de la loi de commande linéaire pourra être résolue dans un premier temps à l'aide d'une synthèse H_∞ suivie d'une μ-analyse pour la stabilité robuste. Nous proposerons une approche directe par μ-synthèse.

Le quatrième chapitre portera sur la mise en application de cette méthode de synthèse à la commande des machines à courants alternatifs avec une attention particulière pour une machine synchrone à aimant. Les différentes modélisations des machines à courants alternatifs et les transformations associées seront rappelées. On montrera le caractère plat de ces différents modèles de machines, et on présentera plusieurs sorties plates possibles suivant le type de machine considérée. On proposera d'établir avec la méthode proposée dans le troisième chapitre, un modèle augmenté pour la synthèse d'une loi de commande en vitesse, robuste vis à vis des variations du couple de charges pour les machines magnétiquement isotropes. Ensuite on s'intéressera à la commande en vitesse d'une machine synchrone à aimants. En utilisant la même démarche, nous construirons un schéma augmenté pour la synthèse d'une loi de commande robuste vis à vis de variations paramétriques de modèle et d'incertitudes additives. Nous montrerons sur un exemple que la synthèse débouche sur un correcteur non diagonal. L'expérimentation sera dans un premier temps réalisée à l'aide d'un simulateur sous logiciel MATLAB. Dans un avenir proche la simulation des performances obtenues grâce à ce régulateur sera implanté à l'aide d'un logiciel spécifique pour la simulation d'association convertisseur-machine POSTM5, développé par B. Dagues, M. Fadel, X. Roboam, et P. Azéma au Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique Industrielle de Toulouse [Dagu 95]. Les caractéristiques de la machine synchrone simulée correspondront à la machine du banc d'essai du PRCE-GdR « Commande des systèmes électrotechniques » situé au Laboratoire d'Automatique de Nantes. Ceci nous permettra dans le prolongement de cette thèse d'implanter la loi de commande sur le banc d'essai, et de comparer les comportements prévus, simulés et réels d'une part et de comparer cette démarche à d'autres approches du problème.

Chapitre I :

Des principes de la commande robuste

1.1 Le rôle du bouclage dans la commande

Considérons un procédé et des grandeurs indépendantes du procédé appelées grandeurs exogènes qui influent sur son comportement. Certaines de ces grandeurs sont considérées comme des moyens d'actions privilégiés et constituent l'ensemble des entrées de commande. Le reste forme l'ensemble des perturbations exogènes du procédé. Le comportement du procédé peut être modélisé par un ensemble d'équations. Cet ensemble d'équations appelé système dynamique permet d'obtenir, dans un domaine donné, une approximation valable du comportement dynamique du procédé. Le comportement du procédé est alors décrit par l'évolution de variables composant le vecteur d'état du système. La commande du procédé réside dans la conduite de certaines variables qui constituent l'ensemble des sorties du procédé à piloter. Ces variables sont fonction des composantes du vecteur d'état. Enfin le comportement du procédé peut être évalué par la mesure d'un certain nombre de variables constituant le vecteur de mesures. Ce dernier peut différer du vecteur de sortie. Tout ceci peut être schématisé par le synoptique suivant:

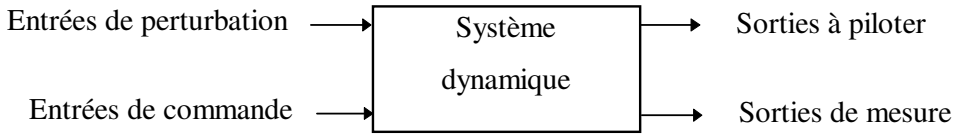


fig. 1.1

L'élaboration d'une loi de commande consiste donc à fournir au vecteur d'entrée de commande le signal nécessaire pour obtenir le comportement voulu du vecteur de sortie, en dépit des entrées de perturbation.

On peut imaginer dans un premier temps exploiter le fait que le comportement du système est déterminé à partir de la connaissance du modèle. Il suffit alors de déterminer un «modèle inverse» qui donne l'entrée de commande à partir de la trajectoire désirée pour la sortie. Ceci constitue le paradigme de la commande en boucle ouverte. En effet, sous l'hypothèse restrictive que la relation entre le vecteur d'entrée de commande et le vecteur de sortie soit inversible, on pourrait penser que la trajectoire du vecteur de sortie est conforme à la trajectoire désirée. Il n'en est rien, car les perturbations exogènes influent sur le comportement du vecteur de sortie et écartent celui-ci de la trajectoire désirée. De plus, en l'absence de perturbations exogènes la loi de commande proposée n'est valable qu'à la condition d'une égalité parfaite entre le comportement du procédé et le comportement du modèle. Cette dernière condition tend à donner un modèle fort complexe pour traduire le comportement total du procédé. Ceci est contraire à la démarche de l'automaticien qui recherche un modèle relativement simple (généralement linéaire) pour traduire le mieux possible le comportement d'un procédé complexe.

Une solution pour résoudre ce problème consiste à mesurer les perturbations et les écarts entre le modèle et le procédé. C'est le principe même de la commande par bouclage ou par rétroaction dont le synoptique est donné ci-après.

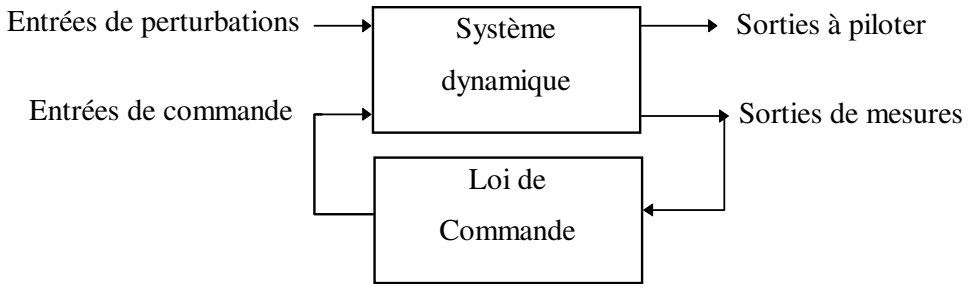


fig. 1.2

L'évaluation des perturbations est faite par l'exploitation des signaux issus du canal de mesure (vecteurs des sorties de mesure). Cette mesure permet d'atténuer l'effet des perturbations sur la sortie via le canal d'action que constitue le vecteur de commande. La trajectoire de consigne est alors considérée comme une perturbation particulière, tandis que l'écart entre la trajectoire de consigne et la trajectoire réelle est une des sorties à piloter. Cette sortie est déterminée à partir du canal de mesures. La contre réaction permet de plus de s'affranchir dans une certaine limite des écarts entre le procédé et le modèle.

Ainsi la commande d'un procédé en boucle fermée permet de rester dans un voisinage d'une trajectoire de référence malgré les perturbations exogènes et un certain niveau d'erreurs de modélisation. Autour de cette trajectoire la loi de commande est déterminée pour être stabilisante. Une telle loi de commande qui permet de garantir le bon fonctionnement du système réel, est appelée loi de commande robuste.

Il nous faut maintenant préciser cette notion de stabilité autour d'une trajectoire de référence ainsi que le rôle de la régulation.

1.2 Stabilité robuste des systèmes dynamiques

1.2.1 Rappels de quelques notions de stabilité

Dans le cas d'un système linéaire la stabilité autour d'une trajectoire de référence est évaluée par l'étude des valeurs propres de la matrice d'état. La stabilisation consiste alors à modifier par bouclage les valeurs propres de la matrice d'état pour obtenir un comportement stable. Cela revient donc à stabiliser le seul point singulier du système : l'origine.

Soit, un procédé non linéaire causal dont l'équation différentielle non linéaire sur l'état ne dépend pas directement du temps, et admet une solution unique sur tout intervalle temporel. L'étude de la stabilité locale et de la stabilisation autour d'une trajectoire de référence passe par l'étude des singularités du système. Nous rappelons ici quelques notions élémentaires que l'on peut trouver dans des ouvrages de synthèse comme [D'And 88], [Lamn 94], [Levi 93a].
Considérons le système dynamique commandé suivant:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) \tag{1.1}$$

où f *et* $g_1,\ldots g_m$ sont des champs de vecteurs C_∞ définis sur une variété différentielle C_∞ , M de dimension n vérifiant $f(0) = 0$ et rang $\{ g_1(0),\ldots g_m(0)\} = m$.

Supposons qu'il existe le bouclage statique d'état suivant:

$$u = \alpha(x)+\beta(x)*v \tag{1.2}$$

De telle manière que le système résultant suivant soit stable:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x)_i g_i(x) = X(x) \tag{1.3}$$

Flot associé à une équation différentielle

La solution $X_t(x_0)$ de l'équation différentielle (1.3) à valeur initiale x_0 définie sur un intervalle d'existence $I(x_0)$ est appelée flot du champ de vecteur X.

Singularités : Point singulier, orbite périodique

Un point x_0 de l'espace d'état R^n est un point d'équilibre de l'équation différentielle (1.3) si le champ vectoriel X s'annule en x_0. Si x_0 est un point d'équilibre alors c'est un point fixe du flot et on a $X_t(x_0) = x_0$. On dit encore que x_0 est un zéro, un point critique, ou un *point singulier* du champ de vecteurs X.

Un point d'équilibre est dit point d'équilibre hyperbolique de l'équation différentielle si le gradient de X en x_o n'a pas de valeur propre à partie réelle nulle.

On appelle orbite $\Omega(x)$ d'un point de l'espace d'état M, l'ensemble suivant:

$$\Omega(x) = \{\phi_t(x), t \in \mathrm{R}\} \tag{1.4}$$

Une orbite $\Omega(x)$ est dite *orbite périodique* si x n'est pas un point singulier du champ X et s'il existe un réel positif T tel que: $\phi_t(x) = \phi_{t+T}(x)$.

Soit W une section transverse à l'orbite $\Omega(x)$. Soit x appartenant à $V(x_0)$, un voisinage de x_o inclus dans W. L'application de Poincaré appelée aussi application de premier retour associée à x et W, est l'application $P{:}V(x_0) \subset W \to W$ telle que $P(x)$ soit le premier point où l'orbite de x, $\Omega(x)$, retourne intersecter la section transverse W. P est un difféomorphisme local de W dans W. On peut alors définir l'équation récurrente suivante:

$$z_{k+1} = P(z_k) \tag{1.5}$$

Cette équation récurrente admet x pour point fixe. L'étude du comportement de (1.3) se ramène alors à l'étude de la stabilité de l'équation récurrente (1.4). La nature de la singularité est alors à étudier. Le critère d'hyperbolicité du point singulier dans le cas d'une équation récurrente correspond à l'image du critère en continu (l'axe imaginaire) par la transformation du plan p au plan z soit le cercle de rayon unité. Ainsi l'orbite périodique $\Omega(x)$ sera une orbite hyperbolique si le gradient de P en x_o n'a pas de valeur propre de module égal à l'unité.

En conclusion, l'hyperbolicité d'une orbite $\Omega(x)$ se traite comme celle du point singulier x vis à vis de l'application de Poincaré. Il suffit de remplacer « n'appartient pas à l'axe imaginaire » par « n'appartient pas au cercle unité » dans le critère d'hyperbolicité.

1.2.2 Stabilité locale au voisinage d'une singularité

Le problème de la stabilité locale consiste à situer les singularités possibles, puis de déterminer leur domaine d'attraction, c'est à dire des ensembles de conditions initiales garantissant la convergence vers l'une ou l'autre de ces singularités.

Stabilité au sens de Lyapounov: L-stabilité et L-stabilité asymptotique

Le point x est stable au sens de Lyapounov (L-stabilité) si pour tout voisinage U_1 de x, il existe un voisinage U_2 de x contenant U_1 tel que tout flot ayant une condition initiale comprise dans le voisinage U_2 reste dans le voisinage U_1.

Le point x est asymptotiquement stable au sens de Lyapounov (L-stabilité asymptotique) si pour tout voisinage U_1 de x, il existe un voisinage U_2 de x contenant U_1 tel que tout flot ayant une condition initiale comprise dans le voisinage U_2 converge vers x.

<u>Condition nécessaire de stabilité asymptotique: Première méthode de Lyapounov</u>

Si les valeurs propres du gradient de X au point singulier x sont à partie réelle strictement négative, alors le point singulier est L-asymptotiquement stable.

Si l'une des valeurs propres du gradient de X au point singulier x est à partie réelle strictement positive, alors le point singulier n'est pas L-stable.

Remarques: Autres outils d'analyse de la stabilité

Dans ce travail, nous utiliserons uniquement la première méthode de Lyapounov appliquée à un système plat linéarisé par difféomorphisme et bouclage, pour étudier la stabilité de ce système linéaire perturbé par des termes non linéaires. Nous nous contenterons donc d'évoquer très succinctement l'existence de méthodes plus générales pour l'étude des systèmes non linéaires perturbés. Ces méthodes ont été initiées par le constat suivant : au voisinage d'une singularité hyperbolique, les comportements asymptotiques du système et de son linéarisé tangent sont semblables. Il est donc apparu nécessaire de déterminer la nature des liens entre le comportement du système et celui de son linéarisé tangent. Une approche possible a consisté à étudier la régularité du changement de coordonnées qui transforme le flot du système non linéaire en le flot du linéarisé tangent. C'est la base de l'équivalence locale par difféomorphisme du système et de son linéarisé tangent pour laquelle le théorème de Poincaré donne une condition suffisante. Lorsque cette équivalence n'est pas valable, il est possible d'utiliser la notion d'équivalence topologique, et d'étudier la stabilité du flot au voisinage

d'un point d'équilibre à l'aide du théorème d'Hartmann Grobman. Ce théorème a été étendu au cas des matrices non hyperboliques sous le nom de théorème des variétés centres. Enfin la stabilité d'un point singulier perturbé par des variations de paramètres du système non linéaire s'étudie à l'aide de la théorie des bifurcations. Pour une étude plus approfondie de toutes ces notions on pourra se reporter aux références suivantes: , [D'And 88], [Lamn 94], [Levi 93a].pour une présentation synthétique, et [Arno 74], [Guck 83], [Ruel 89] pour les références initiales.

1.2.3 Stabilité globale

Stabilité globale d'un opérateur associé à un système non linéaire

On définit l'espace étendu de $L_2(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^m)$, noté $L_{2e}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^m) = \bigcap_{T\geq 0} L_2([0,T],\mathbb{R}^m)$ avec T fini, comme l'espace des fonctions de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^m$ à énergie finie sur tout intervalle temporel $(0,T)$ donné. Cet espace inclut l'espace des fonctions $L_2(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^m)$. Pour définir cette espace on utilise la fonction x_T de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^m$ correspondant à la troncature de la fonction x de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^m$ sur l'intervalle $[0,T]$ de la manière suivante:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases} \tag{1.6}$$

•L'espace $L_{2e}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^m)$ est muni d'une famille de semi-normes $\left\{\| \ \|_{2,T}, \forall T \geq 0\right\}$ avec $\|x\|_{2,T} = \left\{\int_0^{+\infty} \|x_T\|_2^2 \, dt\right\}^{1/2} = \left\{\int_0^T \|x\|_2^2 \, dt\right\}^{1/2}$ la norme associée à $L_2([0,T],\mathbb{R}^m)$,

<u>Remarque:</u>

L'espace L_2 est très pratique pour décrire les signaux engendrés par des systèmes stables. En revanche l'utilisation de l'espace étendu L_{2e} incluant certains signaux divergeant à l'infini se justifie pour étudier ou définir la notion de stabilité.

On considère toujours la même catégorie de systèmes dynamiques. On rajoute à ce système, une équation reliant l'état x et la sortie y. Le système peut alors s'écrire de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) \\ y &= h(x,u) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Avec les fonctions f, $g_1 ... g_m$ et h remplissant la condition de Lipschitz, $x(t)$ le vecteur d'état de dimension n, $u(t)$ la commande de dimension m et $y(t)$ la sortie de dimension p.

Considérons que l'origine est un point d'équilibre du système, et que l'état initial soit nul.
On peut associer au système Σ un opérateur G (linéaire ou non) sur l'espace des fonctions L_{2e} défini par un sous ensemble de l'espace produit L_{2e} x L_{2e}.

$$G: \quad L_{2e} \to L_{2e} \quad x \to G(x) = y \tag{1.8}$$

Le domaine de l'opérateur G sur l'espace L_{2e} est l'ensemble défini par :

$$Do(G) = \left\{ x \in L_{2e} \middle| \exists y \in L_{2e}, y = G(x) \right\} \tag{1.9}$$

L'image de l'opérateur G sur l'espace L_{2e} est l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Im}(G) = \left\{ y \in L_{2e} \middle| \exists x \in L_{2e}, G(x) = y) \in G \right\} \tag{1.10}$$

La classe $\Re$ est l'ensemble des opérateurs G sur L_{2e} dont le domaine contient l'élément nul de l'espace L_{2e} et l'image de cet élément par l'opérateur et l'élément nul.

<u>L_2-stabilité et gain d'un opérateur</u>

La L_2-stabilité d'un opérateur est une stabilité entrée sortie avec conditions initiales nulles. Elle diffère en se sens de la stabilité entrée sortie du modèle, ou encore de la stabilité interne du modèle car elle ne prend pas en compte les modes non observables et les modes non commandables.

Un opérateur entrée sortie sera dit <u>L_2-stable</u> s'il est borné et continu, c'est à dire s'il vérifie les deux conditions suivantes:

Un opérateur G est dit borné si et seulement si

$$G: \quad L_{2e} \to L_{2e} \quad G(B) \text{ borné} \quad \forall B \text{ borné de } L_{2e} \tag{1.11}$$

L'opérateur G sur L_2 est continu au point x s'il possède la propriété suivante:

$$\forall x \in L_2, \forall \Delta > 0, \exists \delta > 0 \middle| \forall y \in L_2, \ \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|Gx - Gy\| < \Delta \tag{1.12}$$

Remarque:

Il s'agit ici de la continuité forte sur L_2.

La notion de gain des systèmes linéaires a été étendue aux opérateurs, sous la dénomination gain de l'opérateur G de classe $\Re$ notée $\gamma(G)$. Il se définit de la façon suivante:

$$\gamma(G) = \inf_a \left\{ a \in R^+ \middle| \forall x \in L_{2e}, \forall T \in R, \exists b \in R^+, \|Gx\|_{2,T} \le a\|x\|_{2,T} + b \right\} \tag{1.13}$$

On a donc:

$$b = \sup_{T,x} \left(\|Gx\|_{2,T} - a\|x\|_{2,T} \right) \ge \|Go\|_{2,T} \tag{1.14}$$

Lorsque le gain est borné avec la constante b nulle on parle de gain sans biais noté $\gamma_o(G)$. Dans le cas des opérateurs causaux, le gain de l'opérateur sans biais peut se calculer de la manière suivante:

$$\gamma_0(G) := \sup_{x(t) \in Do(G)} \left(\frac{\|G(x(t)\|_{2,T}}{\|x(t)\|_{2,T}} \right) \tag{1.15}$$

Critère de L_2-stabilité:

Un opérateur sera dit L_2-stable s'il possède un gain borné. Dans le cas des opérateurs causaux l'inégalité est vérifiée avec b nul; on parle alors d'opérateur L_2-stable sans biais.

Intérêt et limitation de l'approche par opérateur

Cette notion d'opérateur est particulièrement utile dans le cas de système dont la non-linéarité est représentée par une caractéristique statique entrée sortie. Par exemple considérons la non-linéarité suivante:

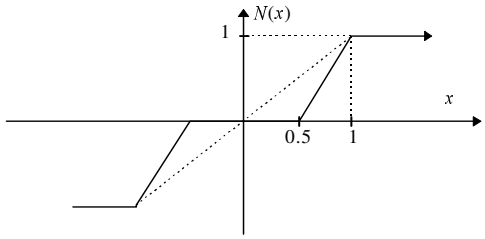


fig. 1.3

On définit l'opérateur G par l'équation suivante:

$$Ge(t) = N[x(t)] \tag{1.16}$$

Le gain de l'opérateur est alors déterminé par l'expression suivante:

$$\gamma_0(G) = \sup \left\{ \frac{\int_0^\infty N^2(x(t))dt}{\int_0^\infty x^2(t)dt} \right\}^{1/2} = 1 \tag{1.17}$$

De même G. Zames [Zame 66a] a utilisé la notion d'opérateur conique pour définir des secteurs dans le plan de la caractéristique entrée-sortie de la non-linéarité. Cette notion d'opérateur conique est ensuite utilisée pour étudier la stabilité d'un système bouclé par une non-linéarité statique.

Cependant dans le cas de systèmes dont la non-linéarité s'exprime dans les équations d'état, la notion d'opérateur perd de son intérêt. En effet, il est très facile d'obtenir un système pour lequel soit l'origine n'est pas un point asymptotiquemment stable, soit la sortie part à l'infini en un temps fini, pour une entrée bornée et des conditions initiales non nulles. Par exemple considérons le système commandé suivant:

$$\dot{x} = -x^2 + u \quad \text{et} \quad x(0) = x_0 \tag{1.18}$$

Ce système admet la solution suivante:

$$x(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{x_0}}, \quad \forall t \geq 0 \text{ pour } u(t) = 0 \tag{1.19}$$

Or si la condition initiale est négative pour une entrée nulle, la sortie part à l'infini en un temps fini (en t=-x_0^{-1}). La solution de ce type de système ne définit pas un opérateur de L_{2e}, puisque la solution n'appartient pas à L_{2e} alors que l'entrée appartient à L_2 donc à L_{2e}.

Théorème du faible gain: cas général

Considérons le système bouclé de la figure 1.3 dans lequel G_1 et G_2 sont des opérateurs causaux. Le théorème du faible gain proposé par Zames [Zame 66] donne une condition suffisante de stabilité du système bouclé ci-après. Nous le formulerons en utilisant la notion de gain d'opérateur définie précédemment.

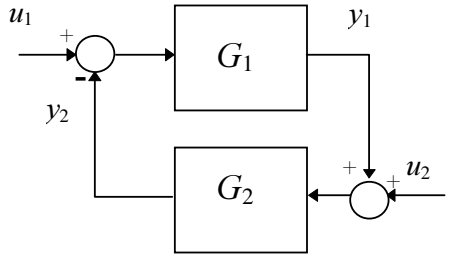


Fig. 1.3 Système bouclé

Théorème du faible gain [Zam 66]

Pour que le système bouclé de la figure 1.3 soit L_2-stable il suffit que chacun des opérateurs G_1 et G_2 soit L_2-stable, et que le produit des gains $\gamma(G_1)$ et $\gamma(G_2)$ des opérateurs G_1 et G_2 soit strictement inférieur à 1. Les gains des opérateurs étant définis par les relations suivantes:

$$\gamma(G_i) := \sup_{u(t)\in L_2}\left(\frac{\|G_i(u(t))\|_2}{\|u(t)\|_2}\right) \quad i\in\{1,2\} \text{ avec } \|G_i(u(t))\|_2 = \left(\int_0^{+\infty}\left|G_i(u(t))\right|^2 dt\right)^{1/2} \qquad (1.20)$$

Ce théorème donne une condition suffisante très restrictive puisqu'en aucun cas le gain de la boucle ouverte ne doit dépasser l'unité. Ce théorème devient plus intéressant lorsque l'opérateur G_1 est linéaire, stationnaire et de dimension finie, le théorème précèdent donne alors une condition nécessaire et suffisante de stabilité du système bouclé.

Application du théorème du faible gain au cas des systèmes linéaires incertains

Supposons l'opérateur G_1 linéaire invariant, de dimension finie. Alors la condition suivante est nécessaire et suffisante pour que le système bouclé de la figure 1.3 soit L_2-stable pour tout opérateur G_2 L_2-stable de gain $\gamma(G_2)$ inférieur à 1.

L'opérateur G_1 est L_2-stable et son gain maximal $\|\hat{G}_1\|_\infty$ est inférieur ou égal à 1.

Avec $\|\hat{G}_1\|_\infty$ la norme infinie de l'opérateur linéaire invariant G_1 définie à partir de la transformation de Laplace $\hat{G}_1(s) = L(G_1)(s)$ de l'opérateur linéaire G_1 et telle que:

$$\|\hat{G}_1\|_\infty = \gamma(G_1) = \sup_\omega \|\hat{G}_1\|_{L_2(j\mathbb{R})} = \sup_\omega\left\{\overline{\sigma}\left(\hat{G}(j\omega)\right)\right\} = \sup_\omega\left\{\max_{u\in L_2(j\mathbb{R})}\frac{\|\hat{G}(j\omega)u(j\omega)\|}{\|u(j\omega)\|}\right\} \qquad (1.21)$$

Remarques:

Cette formulation est intéressante car on peut imaginer que le système bouclé de la figure 1.3 représente un système modélisé par un modèle linéaire l'opérateur G_1 et un modèle d'erreur modélisé par l'opérateur G_2. La quantification de la norme de l'erreur permet alors de déterminer une condition nécessaire et suffisante de stabilité. On a donc stabilité pour un procédé modélisé par une classe de systèmes. La stabilisation est alors robuste puisqu'elle est valable pour l'ensemble des systèmes défini par un modèle nominal linéaire et un modèle d'erreur non linéaire.

Dans le second chapitre, nous présenterons ce théorème avec les outils de la théorie H_∞.

1.3 Éléments nécessaires à la synthèse d'un régulateur robuste

1.3.1 Introduction

La stabilité robuste d'un procédé bouclé par une loi de commande est une condition nécessaire mais non suffisante. La loi de commande doit de plus permettre au procédé bouclé d'atteindre et de remplir les objectifs fixés par le cahier des charges. La synthèse de la loi de commande doit donc prendre en compte tous les objectifs et inclure les limitations du procédé.

Parmi les nombreuses méthodes proposées, nous allons étudier plus particulièrement deux méthodes de synthèse basées sur l'intégration de différents modèles dans le régulateur. Nous rappellerons donc dans un premier temps la commande à modèle interne de Wonham qui constitue une première approche de la robustesse. Ensuite nous présenterons les intérêts de la commande à multiples modèles de référence. Ces deux approches nous amèneront à la formalisation du problème de la commande robuste, dans le cadre du problème standard proposé par B. Francis et J.C. Doyle [Fran 87].

1.3.2 La commande modèle interne de Wonham

Nous exposerons dans un premier temps le principe du modèle interne dans le cas des systèmes linéaires. Cette présentation permettra de mieux appréhender l'utilisation de ce principe pour les systèmes non linéaires, que nous présenterons en seconde partie. Ce principe fixe des contraintes sur la structure du régulateur et sur le vecteur de mesures nécessaire à l'obtention de la stabilité et la régulation asymptotiques.

Cas des systèmes linéaires.

Considérons un système linéaire multivariable commandable, décrit par le système d'équation suivant, avec x_1 le vecteur d'état du procédé de dimension n_1, x_2 le vecteur de consigne et/ou de perturbations de dimension n_2, u le vecteur d'entrée de dimension m, z le vecteur à réguler de dimension q, et y le vecteur de sortie de dimension p.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1x_1 + A_3x_2 + B_1u & z &= D_1x_1 + D_2x_2 \\ \dot{x}_2 &= A_2x_2 & y &= C_1x_1 + C_2x_2 \end{aligned} \tag{1.22}$$

La loi de commande est obtenue par un régulateur linéaire ayant pour entrée y, pour sortie u et pour vecteur d'état x_c tel que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_cx_c + B_cy \\ u &= F_cx_c + Fy \end{aligned} \tag{1.23}$$

L'espace d'état du système bouclé est défini par la somme directe de l'espace associé au système avec l'espace associé au correcteur. On obtient alors la représentation suivante:

$$\dot{x}_L = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1FC_1 & B_1F_c \\ B_cC_1 & A_c \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_c \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} A_3 + B_1FC_2 \\ B_cC_2 \end{bmatrix} \cdot x_2 \tag{1.24}$$

Le système bouclé associé à la représentation d'état des entrées exogènes peut se mettre sous la forme du système augmenté suivant:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_L \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_L & B_L \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_L \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

La variable à réguler s'exprimant alors sous la forme suivante:

$$z = \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \end{bmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_c \end{pmatrix} + D_2x_2 = D_Lx_L + D_2x_2 \tag{1.26}$$

Le régulateur a pour objectifs la stabilisation interne de la boucle et la régulation des écarts. Pour avoir la stabilité interne du système bouclé l'état, x_L doit tendre asymptotiquement vers zéro en l'absence d'entrée exogène x_2. On parlera de stabilité asymptotique robuste lorsque la boucle fermée sera stable pour un système défini dans un voisinage du modèle nominal. La régulation consiste à avoir la variable d'écart z qui tende asymptotiquement vers zéro quels que soient les états initiaux du système et des entrées exogènes. On parlera de rejet asymptotique robuste lorsque la variable d'écart tendra vers zéro pour un système défini dans un voisinage du modèle nominal. La notion de robustesse envisagée ici, consiste à avoir stabilité interne et régulation dans un voisinage du point P, élément de l'ensemble des données paramétriques dans R^N avec $N = n_1(n_1 + n_2 + m)$, constitué par les matrices A_1, A_3 et B_1 représentant une partie du modèle du procédé. La dimension du modèle est supposée fixe.

En 1975, B. A. Francis et W. M. Wonham [Fran 75] introduisirent la notion de robustesse précédente dans le cadre de la synthèse de régulateur à stabilité structurelle et donnèrent des contraintes sur la sortie mesurée y et sur la structure du régulateur, nécessaires pour avoir stabilité et régulation asymptotiques robustes.

<u>Contrainte sur la sortie mesurée</u>

Notion de détectabilité

La variable z est détectable depuis y si et seulement si il existe une application Q de l'espace Y associé à y vers l'espace Z associé à z telle que $z = Q(y)$. Dans le cadre algébrique, la variable z est détectable depuis y si et seulement si le noyau de l'application ayant pour matrice $[C_1,C_2]$ est inclus dans le noyau de l'application ayant pour matrice $[D_1,D_2]$.

Théorème:

Les objectifs de stabilité et régulation asymptotiques robustes sont atteints par le régulateur seulement si la variable à réguler z est détectable depuis la sortie mesurable y.

<u>Contrainte sur la structure du régulateur: principe du modèle interne</u>

Notion de modèle interne

Une matrice d'état A_c incorpore un modèle interne de la matrice A_2 vis à vis de la variable à réguler z de dimension q, si et seulement si le polynôme minimal de la matrice A_2 divise q facteurs invariants de la matrice A_c. Le modèle interne est alors la duplication en q exemplaires dans la matrice A_c du composant cyclique maximal de la matrice A_2 .

Exemple:

Considérons le modèle des perturbations suivant:

$$\dot{x}_2 = \begin{pmatrix} \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} \text{ avec } A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

On interprète la solution comme un ensemble de deux entrées de type échelon tel que:

$$x_{2i}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad i \in \{1;2\} \tag{1.28}$$

Le polynôme minimal $m(\lambda)$ est le polynôme annulateur de A_2 de plus faible degré. Soit

$$m(\lambda) = \lambda \tag{1.29}$$

D'où le modèle interne pour un vecteur z de dimension deux comportera la double duplication du composant cyclique maximal de la matrice A_2. Soit:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.30}$$

Le modèle interne de matrice A_i admet comme facteurs invariants les deux polynômes suivants:

$$\begin{aligned} \alpha_1(\lambda) &= \lambda \\ \alpha_2(\lambda) &= \lambda^2 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Le polynôme minimal $m(\lambda)$ divise bien au moins deux facteurs invariants du modèle interne.

Principe du modèle interne:

Les objectifs de stabilité et de régulation asymptotiques robustes sont atteints par le régulateur seulement si le régulateur utilise une sortie de mesures y par laquelle la variable régulée z est détectable, et incorpore dans la boucle de retour un modèle convenablement dupliqué de la structure dynamique des signaux exogènes que le régulateur doit traiter.

Dans le cas du système linéaire considéré, la condition de duplication de la structure dynamique des signaux exogènes s'exprime sous la forme suivante:

Les objectifs de stabilité et de régulation asymptotiques robustes ne peuvent être atteints que si la matrice d'état A_c du régulateur incorpore un modèle interne de A_2 qui soit commandable par y et observable par u.

Méthode de synthèse

Considérons une représentation du modèle d'état du procédé et de l'exosystème, telle que la variable à réguler soit observable depuis le vecteur de mesures. La représentation d'état du régulateur se décompose de la manière suivante:

$$F_c = \begin{bmatrix} F_{c1} & F_{c2} \end{bmatrix},\ A_c = \begin{bmatrix} A_{c1} & 0 \\ 0 & A_{c2} \end{bmatrix}, \text{ et } B_c = \begin{bmatrix} B_{c1} \\ B_{c2} \end{bmatrix} \tag{1.32}$$

Le triplet (F_{c1}, A_{c1}, B_{c1}) est prévu pour contenir le modèle interne de l'exosystème et permettre la régulation robuste du vecteur z, tandis que le triplet (F_{c2}, A_{c2}, B_{c2}) a pour rôle d'assurer la stabilisation robuste de la boucle.
La synthèse du régulateur permettant d'avoir stabilité et régulation du procédé se trouvant dans un voisinage du modèle nominal (A_1, A_3, B_1), se décompose de la manière suivante:

1 - Détermination du modèle interne A_{c1} à incorporer dans la matrice d'état du correcteur.

2 - Détermination des matrices d'entrées et de sorties associées F_{c1} et B_{c1} telles que le correcteur et la boucle ouverte ainsi constitués soient observables et commandables.

3 - Détermination des éléments F_{c2}, A_{c2}, et B_{c2} du correcteur permettant d'avoir la stabilité interne et de fixer la dynamique de la boucle.

On trouvera une construction détaillée dans [Wonh 74] que nous ne donnons pas ici car elle n'est pas utilisée dans la suite de ce mémoire. Pour l'exemple des perturbations précédentes on obtient:

$$A_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F_{c_1} = B_{c_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

Il faut ensuite déterminer F_{c2}, A_{c2}, et B_{c2} en fonction du modèle du procédé nominal, et la dynamique de la boucle.

Remarques:

Le principe du modèle interne est une condition nécessaire pour obtenir la stabilité et la régulation asymptotiques robustes. Dans la pratique, il n'est pas nécessaire d'utiliser la méthode précédente pour avoir un correcteur à stabilité et régulation asymptotiques robustes, mais un correcteur possédant ces propriétés incorpore forcément un modèle interne.

La dimension de l'exosystème A_2 et la dimension du vecteur à réguler z joue directement sur la dimension du régulateur. Ainsi pour un exosystème dont le polynôme minimal est de degré μ, le modèle interne est de dimension μq. La dimension du système bouclé ainsi engendré est alors de dimension $n_1+\mu q$.

La robustesse de la stabilité et de la régulation sont encore obtenues pour un correcteur défini dans un voisinage de (F_{c1}, F_{c2}, A_{c2}, B_{c1}, B_{c2}). Les coefficients des matrices A_{c1}, et D_1 étant fixés, tous les paramètres de la boucle peuvent varier dans la limite de la stabilité de boucle, et les coefficients de la matrice A_3 peuvent varier arbitrairement sans affecter les propriétés de régulation asymptotique.

Cas des systèmes dynamiques analytiques

Cette notion de modèle interne initialement formalisée pour les systèmes linéaires, a été étendue au cas des systèmes non linéaires par B.A. Francis et W. M. Wonham en 1976 [Fran 76]. Le principe demeure identique, mais la formulation est plus générale.

Considérons un système non linéaire multivariable, décrit par le système d'équations suivant, avec x_1 le vecteur d'état du procédé de dimension n_1, x_2 le vecteur de consigne et/ou de perturbations de dimension n_2, u le vecteur d'entrée de dimension m, z le vecteur à réguler de dimension q, et y le vecteur de sortie de dimension p. On suppose de plus que le vecteur z est détectable depuis y. Pour simplifier, on considère dans la suite du paragraphe uniquement le cas $y = z$.

Le système est alors le suivant:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1) + A_3 x_2 + B_1 u \\ \dot{x}_2 &= A_2 x_2 \\ z &= D_1 x_1 + D_2 x_2 \end{aligned} \tag{1.34}$$

La non-linéarité est modélisée par la fonction f, que l'on décompose en série de Taylor sous la forme suivante avec f_1 supposée de classe C^1.

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = A_1(x_1) + f(x_1) + A_3 x_2 + B_1 u \\ &f_1 : R^{n_1} \to R^{n_1} \\ &\lim_{x_1 \to 0} f_1(x_1) = o(x_1) \end{aligned} \tag{1.35}$$

La loi de commande est obtenue par un régulateur linéaire ayant pour entrée z, pour sortie u et pour vecteur d'état x_c tel que:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_c = A_c x_c + B_c z \\ &u = F_c x_c + Fz \end{aligned} \tag{1.36}$$

L'espace d'état du système bouclé est défini par la somme directe de l'espace associé au système avec l'espace associé au correcteur. On obtient alors la représentation suivante:

$$\dot{x}_L = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 F D_1 & B_1 F_c \\ B_c D_1 & A_c \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_c \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(x_1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_3 + B_1 F D_2 \\ B_c D_2 \end{bmatrix} \cdot x_2 \tag{1.37}$$

Le système bouclé associé à la représentation d'état des entrées exogènes peut se mettre sous la forme du système augmenté suivant:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_L \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_L & B_L \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_L \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} f_L(x_L) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.38}$$

La variable à réguler s'exprimant alors sous la forme suivante:

$$z = \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \end{bmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_c \end{pmatrix} + D_2 x_2 = D_L x_L + D_2 x_2 \tag{1.39}$$

Le régulateur a pour objectifs dans ce cas la stabilisation interne de la partie linéaire et la régulation des écarts. Ceci se traduit par le fait que la matrice A_L doit être stable, et que la régulation de la variable z soit asymptotiquement stable. Cette condition est alors locale, et on suppose que la partie linéaire A_L est dominante.

Principe du modèle interne pour les systèmes dynamiques analytiques [Fran 76]

Principe du modèle interne

Supposons que la fonction f_1 est de classe C^1 avec $f_1(0) = 0$.

$$\underset{x_1}{D} f(0) = \lim_{x_1 \to 0} \frac{\|f_1(x_1)\|}{\|x_1\|} = 0 \tag{1.40}$$

Alors le régulateur permet d'atteindre les objectifs de stabilité et de régulation asymptotiques robustes seulement si la matrice d'état A_c du régulateur incorpore un modèle interne de A_2 qui soit commandable par y et observable par u.

De plus si l'on suppose que la boucle fermée est stable et que la matrice d'état A_c du régulateur incorpore un modèle interne de A_2 alors la régulation est asymptotiquement robuste vis à vis des variations paramétriques des différentes parties linéaires.

Cette dernière propriété montre qu'un régulateur linéaire déterminé à partir de son linéarisé tangent représenté par la matrice A_1, la fonction f_1 respectant les mêmes hypothèses, possède une régulation asymptotique robuste.

Remarque: La stabilité robuste d'un système linéaire perturbé peut être obtenue avec une contrainte moins sévère que l'équation 1.39. En particulier, J.H. Kim a montré qu'une contrainte du type $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq \mu_k$ permettait d'obtenir la stabilité robuste [Kim 95].

Conclusion

Comme le montre le principe du modèle interne, il est donc nécessaire pour obtenir une stabilité et une régulation asymptotique robuste d'avoir un régulateur incorporant un modèle de l'exosystème aussi bien dans le cas linéaire que non linéaire.

Cependant, la robustesse obtenue ne garantit qu'une régulation asymptotique. Elle ne garantit en aucun cas une dynamique de régulation, pour un ensemble de procédé défini dans un voisinage du modèle nominal. De plus, la robustesse du régulateur à modèle interne de Wonham n'est valable que lorsque la dimension du modèle du système perturbé est égale à celle du système nominal. Cette approche ne peut donc pas prendre en compte la notion de dynamique négligée. Enfin on ne prend pas en compte le fait que le régulateur puisse générer des trajectoires en dehors du domaine de stabilité du linéarisé tangent.

1.3.3 La commande à multiples modèles de références

Historique

Introduit initialement dans un contexte de commande L.Q.G [Bour 82], la commande à multiples modèles de référence est basée sur la décomposition de la loi de commande vis à vis de l'objectif des dynamiques de poursuite et des objectifs de régulation. Cette décomposition se traduit par un schéma de commande à deux degrés de liberté. Une méthodologie de synthèse de ce type de loi de commande a été proposée dans le cadre de la poursuite et de la régulation robuste d'un procédé monovariable en présence d'incertitudes paramétriques et de dynamiques négligées [Berg 94]. L'extension de cette commande au cas multivariable a fait l'objet de la thèse de E. Prempain [Prem 95].

Principe

Nous avons expliqué dans le paragraphe 1.1 qu'une loi de commande en boucle ouverte constitue un paradigme en raison des erreurs de modélisation et des perturbations exogènes. La fonction principale de la boucle de régulation est de réduire l'effet des perturbations sur la sortie et d'avoir un comportement stable malgré les erreurs de modélisation. La boucle n'a pas pour fonction de fixer la dynamique nominale entrée-sortie. Cette tâche peut être parfaitement remplie par une partie de la loi de commande qui soit externe à la boucle fermée.

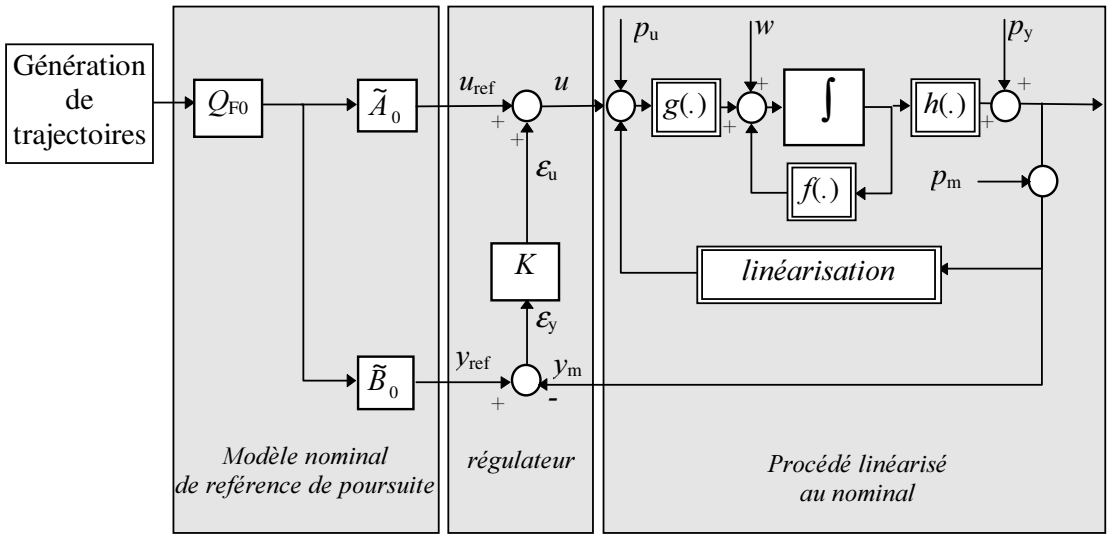


fig. 1.4

Le principe est alors le suivant:

le modèle nominal de référence de poursuite génère les signaux $u_{ref}(t)$ et $y_{ref}(t)$. Ces deux signaux correspondent aux signaux de référence du modèle nominal de poursuite désiré. Cette

génération est externe à la boucle de régulation. Elle s'effectue à partir du modèle nominal du procédé linéaire (ou linéarisé) $G_0 = \tilde{B}_0^{-1}\tilde{A}_0$, et de la dynamique entrée sortie désirée $Q_{F0} \cdot B_0$. Nous montrerons au troisième chapitre l'intérêt de cette décomposition particulière du schéma à deux degrés de liberté.

Une boucle interne permet si nécessaire la linéarisation du comportement nominal du procédé.

Le régulateur K est alimenté uniquement par l'écart ε_y entre la référence y_{ref} et le signal de mesure y_m. Lorsque le procédé est parfaitement modélisé par le modèle nominal, en l'absence de perturbations et pour un état initial nul, le régulateur K n'agit pas. Lorsqu'un signal d'erreur $\varepsilon_y(t)$ apparaît, dû à des erreurs de modèle, des perturbations, ou à un état initial non nul, alors le régulateur permet de maintenir la stabilité de la boucle fermée tout en compensant ces écarts, en superposant au signal de référence $u_{ref}(t)$ le signal $\varepsilon_u(t)$. La dynamique en régulation obtenue est réglée au moyen de K et définit le modèle de référence en régulation. Cette boucle de régulation est déterminée de manière à avoir un comportement robuste vis à vis des erreurs de modèles. Nous proposerons dans le chapitre 3, une méthode de synthèse qui intégrera la prise en compte des objectifs de performances et les limitations du modèle dans un système augmenté. Cette définition précise des objectifs à atteindre et des contraintes à respecter sera utilisée pour mettre le problème sous une forme standard pour laquelle diverses méthodes de résolution existent.

1.3.4 Une approche unifiée: Le problème standard

Introduction

Le problème standard a été proposé par B. Francis et J.C Doyle [Fran 87] pour fournir un cadre général aux différentes méthodes de synthèse de loi de commande comme la commande L.Q.G, la commande par optimisation H_2 ou encore la commande par optimisation H_∞.

Partant du principe qu'une loi de commande est déterminée pour réguler la sortie d'un procédé soumis à des entrées exogènes comme les perturbations, les bruits de capteurs et les signaux de référence, la synthèse ne peut se faire qu'à partir d'un modèle du procédé (le modèle pouvant être une famille de modèles), d'un modèle des perturbations exogènes (principe du modèle interne de Wonham), des performances désirées du système bouclé et de la classe des régulateurs autorisée.

Ceci étant posé, le régulateur doit être déterminé en premier lieu de manière à avoir la stabilité interne pour l'ensemble des modèles (i.e. stabilité robuste) et en second lieu d'obtenir le comportement en régulation désirée vis à vis des entrées exogènes pour le procédé nominal. L'entrée de consigne constitue une entrée exogène particulière, pour laquelle nous effectuerons un préfiltrage pour obtenir le comportement désiré en poursuite. Ce préfiltrage sera déterminé à l'aide du schéma de commande à multiples modèles de références R_2M_2. proposé dans le paragraphe précédent.

Une fois le problème mis sous forme standard la synthèse du régulateur sera obtenue par optimisation. Suivant la méthodologie choisie on pourra rechercher parmi l'ensemble des régulateurs stabilisant la boucle celui qui est optimal au sens d'un critère particulier vis à vis des objectifs de régulation. Nous rappellerons au second chapitre, dans le cadre des systèmes linéaires, la méthode d'optimisation H_2 et le lien avec la commande L.Q.G. ainsi que l'optimisation H_∞. Nous préciserons pour chaque méthode, les différents algorithmes permettant d'obtenir une solution.

Le problème standard peut alors s'exprimer comme un problème de synthèse vis à vis du schéma fonctionnel suivant, figure 1.5. Le modèle augmenté est alors constitué par l'ensemble des modèles du procédé auquel on associe les objectifs de régulation.

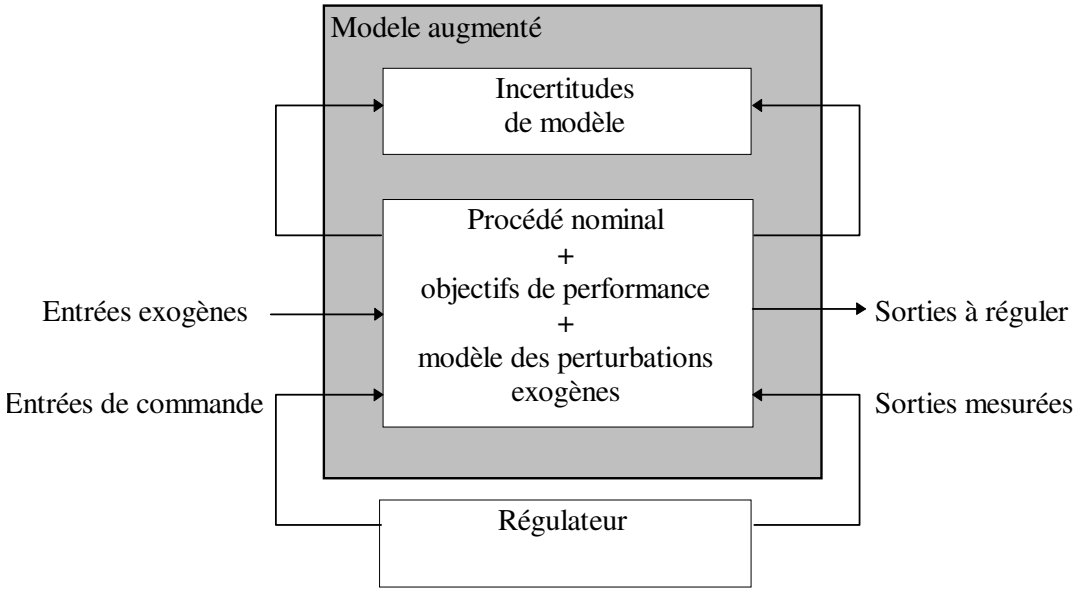


fig. 1.5

1.4 Conclusion

La commande robuste consiste donc à garantir la stabilité d'un système au voisinage d'une trajectoire de référence, en dépit de perturbations. Ce sont ces perturbations, liées aux erreurs de modélisation et aux effets sur le système réel de grandeurs d'influence non mesurables, qui nécessitent une commande par feed-back. La comparaison entre l'évolution de la sortie de référence et l'évolution de la sortie du système réel permet d'observer ces perturbations. Cependant si l'on veut réduire au mieux leur effet, il est nécessaire d'inclure un modèle de ces perturbations dans le schéma de synthèse de la loi de commande. On débouche alors naturellement sur la notion de système augmenté. La formulation du problème de synthèse peut alors se mettre sous une forme très générale dénommée « problème standard ». Nous montrerons dans le second chapitre quels sont les outils à notre disposition pour résoudre le problème standard dans le cas de la commande robuste des systèmes linéaires multivariables.

Cependant la synthèse d'une loi de commande dans le cas des systèmes linéaires est grandement simplifiée par le fait que la stabilité d'un système linéaire s'évalue simplement en regardant le comportement autour du seul point singulier que constitue l'origine. Dans le cas des systèmes non linéaires la notion de stabilité est plus complexe à analyser. Ces pourquoi nous nous restreindrons au cas des systèmes différentiellement plats, pour laquelle le problème de la stabilisation est plus simple à traiter. Nous rappellerons, à cet effet, dans le chapitre suivant les outils développés pour la commande de ces systèmes.

Chapitre II :

Outils de synthèse et d'analyse

de loi de commande

2.1 Outils pour les systèmes linéaires multivariables

2.1.1 Classe des systèmes considérés

Procédé nominal

On s'intéresse à la commande de procédé multivariable dont le comportement est modélisé par une famille de modèles. Cette famille se définit par un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants (système L.T.I.) représentant le comportement nominal du procédé et un modèle des incertitudes. Le système nominal Q_0 et le modèle des incertitudes Δ incluent l'ensemble des dynamiques possibles du procédé dans son contexte normal d'utilisation. Le système nominal admet une réalisation (A, B, C, D) dans l'espace d'état. Il est possible d'ecrire le modèle d'état sous la forme compacte suivante:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = Q_{0e} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

La matrice de fonction de transfert entrée-sortie $Q_0(s)$ se définit alors de la manière suivante:

$$Q_0(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{2.2}$$

La matrice de fonction de transfert $Q(s)$ peut se représenter comme la matrice associée au modèle d'état Q_{0e} rebouclée par une matrice S diagonale et à valeurs complexes représentant la dérivation d'état, dont les dimensions sont identiques à celles de la matrice A.

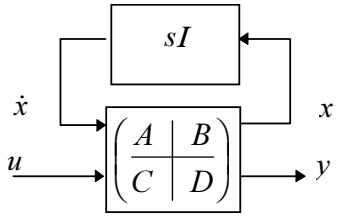


fig. 2.1

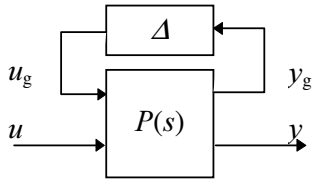
En utilisant la notion de transformation linéaire fractionnaire haute $F_u(\bullet,\bullet)$ (Annexe A) introduite par [Redh 60], la matrice de transfert entrée-sortie $Q_0(s)$ s'écrit:

$$Q_0(s) = F_u\left(Q_{0e}, S\right) = D + C \cdot sI(I - A \cdot sI)^{-1} B = C(sI - A)^{-1} B + D \tag{2.3}$$

Famille de modèles

Une famille de modèles entrée-sortie L.T.I. notée $Q(s)$ se définit dans le cas général par un modèle nominal $Q_0(s)$ et des incertitudes de modèle représentées par une matrice $\Delta(s)$. Ces dernières englobent les écarts entre le comportement nominal et le comportement réel du procédé dans son fonctionnement normal. Les incertitudes de modèle se décomposent habituellement en deux catégories, les incertitudes définies par une borne supérieure de l'écart de modèle dans le domaine fréquentiel, et les incertitudes définies par les variations des différents paramètres du modèle nominal. La matrice $\Delta(s)$ dépend du type d'incertitudes considérées. Ce peut être une matrice de transfert quelconque, une matrice de transfert diagonale par bloc, une matrice diagonale à deux blocs, ou enfin une matrice diagonale réelle.

On peut représenter la famille de modèles $Q(s)$ comme une matrice de transfert $P(s)$ contenant le procédé nominal $Q_0(s)$ bouclée par les incertitudes de modèle $\Delta(s)$ selon le schéma suivant:



Les matrices de transferts sont alors partitionnée de la manière suivante:

$$\begin{pmatrix} y_g \\ y \end{pmatrix} = P(s)\begin{pmatrix} u_g \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_g \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}u_g + P_{12}u \\ P_{21}u_g + P_{22}u \end{pmatrix} \text{et } u_g = \Delta \cdot y_g \tag{2.4}$$

La fonction de transfert reliant la sortie y à l'entrée u et représentant la famille de modèle $Q(s)$ peut s'écrire comme la transformation linéaire fractionnaire haute suivante:

$$y = F_u(P,\Delta)u := \left(P_{22} + P_{21}\Delta\left(I - P_{11}\Delta\right)^{-1} P_{12}\right)u \tag{2.5}$$

La matrice de transfert $P(s)$ peut contenir un majorant du module des incertitudes, de manière à ce que la matrice d'incertitude Δ soit bornée pour toutes les pulsations par l'unité:

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \left\|\Delta(j\omega)\right\|_2 = \bar{\sigma}\left(\Delta(j\omega)\right) < 1 \text{ ou encore } \left\|\Delta(j\omega)\right\|_\infty < 1 \tag{2.6}$$

Nous allons maintenant préciser les différentes formes que peuvent prendre les incertitudes de modèle et déterminer pour chaque forme la matrice de transfert nominale $P(s)$ associée.

Incertitudes non structurées

Incertitudes additives

Les formes additives (directe et inverse) se définissent comme des incertitudes absolues vis à vis du modèle nominal. Elles peuvent se représenter à l'aide des schémas blocs suivants:

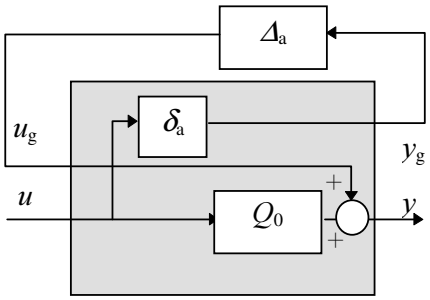


fig. 2.2
Incertitude additive directe

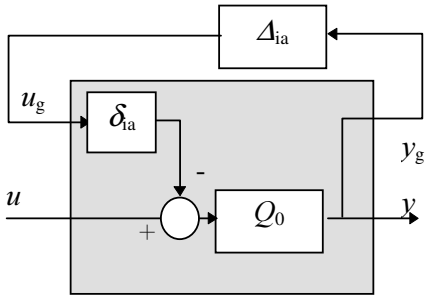


fig. 2.3
Incertitude additive inverse

Pour l'incertitude additive directe la famille de modèles Q se définit comme la transformation linéaire fractionnaire haute de la matrice P_a par la matrice d'incertitude additive directe Δ_a :

$$Q = F_u(P_a, \Delta_a) \text{ avec } P_a = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \delta_a I & Q_0 \end{bmatrix} \text{ soit } Q = Q_0 + \Delta_a \cdot \delta_a \tag{2.7}$$

Pour l'incertitude additive inverse la famille de modèles Q se définit comme la transformation linéaire fractionnaire haute de la matrice P_{ie} par la matrice d'incertitude additive inverse Δ_{ia} :

$$Q = F_u(P_{ia}, \Delta_{ia}) \text{ avec } P_{ia} = \begin{bmatrix} -\delta_{ia} P_0 & P_0 \\ -\delta_{ia} P_0 & P_0 \end{bmatrix} \text{ soit } P = \left(P_0^{-1} + \Delta_{ia} \cdot \delta_{ia}\right)^{-1} \tag{2.8}$$

Les éléments δ_a et δ_{ia} représentent les valeurs maximales des normes des matrices $\Delta_a.\delta_a$ et $\Delta_{ia}.\delta_{ia}$ en fonction de la pulsation ω. On a alors:

$$\left\|\Delta_a(j\omega)\delta_a(\omega)\right\| < \delta_a(\omega) \;\; \forall \omega \in \mathbb{R} \text{ soit } \left\|\Delta_a\right\|_\infty < 1 \tag{2.9}$$

$$\left\|\Delta_{ia}(j\omega)\delta_{ia}(\omega)\right\| < \delta_{ia}(\omega) \;\; \forall \omega \in \mathbb{R} \text{ soit } \left\|\Delta_{ia}\right\|_\infty < 1 \tag{2.10}$$

Les formes additives sont bien adaptées pour la modélisation d'écart de modèle de type non linéaire. Elles ne peuvent cependant pas englober l'ensemble des systèmes incertains. Il peut alors être préférable de relativiser l'incertitude Δ par rapport au modèle nominal Q_0, ce qui peut se faire en adoptant l'une des formes suivantes, dites formes multiplicatives.

Incertitudes multiplicatives en entrée

Les formes multiplicatives (directe et inverse) en entrée se définissent comme des incertitudes relatives vis à vis de l'entrée du modèle nominal. Elles peuvent se représenter à l'aide des schémas blocs suivants:

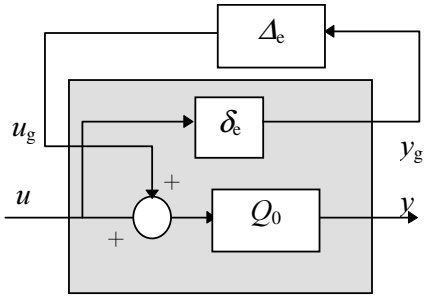


fig. 2.4
Incertitude multiplicative directe

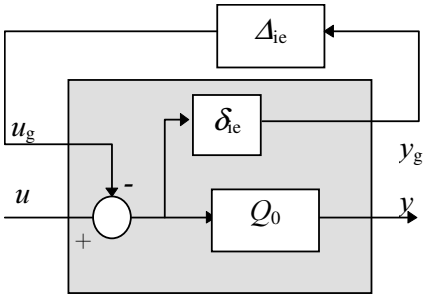


fig. 2.5
Incertitude multiplicative inverse

Pour une incertitude multiplicative directe en entrée la famille de modèles Q se définit comme la transformation linéaire fractionnaire haute de la matrice P_e par la matrice d'incertitude multiplicative Δ_e :

$$Q = F_u(P_e, \Delta_e) \text{ avec } P_e = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \delta_e Q_0 & Q_0 \end{bmatrix} \text{ soit } Q = Q_0(\mathrm{I} + \Delta_e \cdot \delta_e) \tag{2.11}$$

Pour une incertitude multiplicative inverse en entrée la famille de modèles Q se définit comme la transformation linéaire fractionnaire haute de la matrice P_{ie} par la matrice d'incertitude multiplicative inverse Δ_{ie} :

$$Q = F_u(P_{ie}, \Delta_{ie}) \text{ avec } P_{ie} = \begin{bmatrix} -\delta_{ie} I & -\delta_{ie} I \\ Q_0 & Q_0 \end{bmatrix} \text{ soit } Q = Q_0(\mathrm{I} + \Delta_{ie} \cdot \delta_{ie})^{-1} \tag{2.12}$$

Les éléments δ_e et δ_{ie} représentent les valeurs maximales des normes des matrices $\Delta_e.\delta_e$ et $\Delta_{ie}.\delta_{ie}$ en fonction de la pulsation ω. On a alors:

$$\|\Delta_e(j\omega)\delta_e(\omega)\| < \delta_e(\omega) \;\; \forall \omega \in \mathbb{R} \text{ soit } \|\Delta_e\|_\infty < 1 \tag{2.13}$$

$$\|\Delta_{ie}(j\omega)\delta_{ie}(\omega)\| < \delta_{ie}(\omega) \;\; \forall \omega \in \mathbb{R} \text{ soit } \|\Delta_{ie}\|_\infty < 1 \tag{2.14}$$

Cette forme est particulièrement bien adaptée pour prendre en compte les erreurs de modélisation concernant les actionneurs ainsi que les dynamiques négligées. On peut se référer à [Duc 93] ou [Thom 95] pour l'application de cette représentation sur des exemples relatifs à des procédés électriques.

Incertitudes multiplicatives en sortie

Les formes multiplicatives (directe et inverse) en sortie se définissent comme des incertitudes relatives vis à vis de la sortie du modèle nominal. Elles peuvent se représenter à l'aide des schémas blocs suivants:

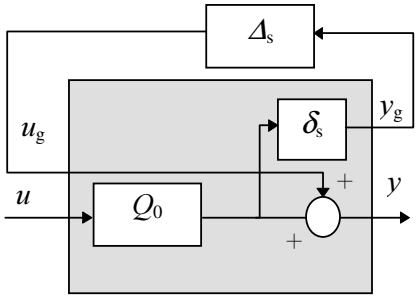


fig. 2.6
Incertitude multiplicative directe

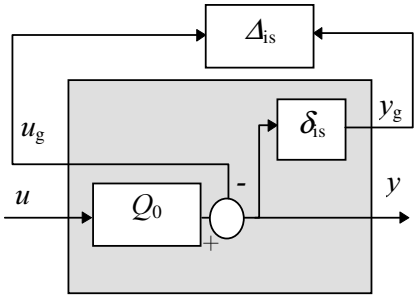


fig. 2.7
Incertitude multiplicative inverse

Pour une incertitude multiplicative directe en sortie, la famille de modèles Q se définit comme la transformation linéaire fractionnaire haute de la matrice P_s par la matrice d'incertitude multiplicative directe Δ_s :

$$Q = F_u(P_s, \Delta_s) \text{ avec } P_s = \begin{bmatrix} 0 & \delta_s Q_0 \\ I_0 & Q_0 \end{bmatrix} \text{ soit } Q = (\mathrm{I} + \Delta_s \cdot \delta_s) Q_0 \tag{2.15}$$

Pour une incertitude multiplicative inverse en sortie, la famille de modèles Q se définit comme la transformation linéaire fractionnaire haute de la matrice P_{is} par la matrice d'incertitude multiplicative inverse Δ_{is} :

$$Q = F_u(P_{is}, \Delta_{is}) \text{ avec } P_{is} = \begin{bmatrix} -\delta_{is} I & -\delta_{is} I \\ Q_0 & Q_0 \end{bmatrix} \text{ soit } Q = (\mathrm{I} + \Delta_{is} \cdot \delta_{is})^{-1} Q_0 \tag{2.16}$$

Les éléments δ_s et δ_{is} représentent les valeurs maximales des normes des matrices $\Delta_s.\delta_s$ et $\Delta_{is}.\delta_{is}$ en fonction de la pulsation ω. On a alors:

$$\left\| \Delta_s(j\omega)\delta_s(\omega) \right\| < \delta_s(\omega) \ \ \forall \omega \in \mathbb{R} \text{ soit } \left\| \Delta_s(j\omega) \right\|_\infty < 1 \tag{2.17}$$

$$\left\| \Delta_{is}(j\omega)\delta_{is}(\omega) \right\| < \delta_{is}(\omega) \ \ \forall \omega \in \mathbb{R} \text{ soit } \left\| \Delta_{is}(j\omega) \right\|_\infty < 1 \tag{2.18}$$

Cette forme est particulièrement bien adaptée pour prendre en compte les erreurs de modélisation concernant les capteurs. On peut, là encore, se référer à [Duc 93] pour l'application de cette représentation sur des exemples relatifs à des procédés électriques.

Conclusion

Les formes non structurées constituent les représentations les plus courantes des incertitudes de modélisation. Elles permettent de plus d'établir des conditions de robustesse en stabilité et de développer des procédures appropriées pour la synthèse de correcteur.

Cependant l'utilisation d'une seule des cinq formes précédentes pour représenter l'ensemble des incertitudes masque la nature des incertitudes considérées. Une solution consisterait à englober plusieurs formes dans une matrice globale Δ. Cette approche bien que séduisante a priori peut cependant présenter un caractère conservateur important en fonction de la mesure de matrice choisie. Nous préciserons cette idée dans le paragraphe sur les incertitudes structurées.

Une approche intermédiaire consiste à se limiter à une structure à deux blocs diagonaux. Ceci permet de mieux répartir les incertitudes suivant leur nature, et de modéliser plus facilement les incertitudes associées à des modes instables. Ceci constitue l'approche par incertitude semi-structurée, et utilise la décomposition en facteurs premiers stables de la matrice de transfert nominale du procédé.

Incertitudes semi structurées

Cette formulation dite semi-structurée est basée sur la décomposition en facteurs premiers de la matrice de transfert $Q_0(s)$. Cette écriture particulière permet de représenter une matrice de transfert instable par deux matrices stables co-premières. Ainsi, deux matrices de transfert réelles rationnelles et n'ayant pas de pôles dans le demi-plan droit (R.H.P.), $M(s) \in \mathrm{RH}_\infty^{m*m}$ et $N(s) \in \mathrm{RH}_\infty^{p*m}$ constituent une factorisation première à droite d'une matrice rationnelle $Q_0(s)$ de dimension p x m si et seulement si les trois conditions suivantes sont remplies:

- $M(s)$ est carrée, et inversible pour presque tout s de $\mathbb{C}$. (2.19)
- $\forall s \in \mathbb{C}\, G_0(s) = N(s)M(s)^{-1}$ (2.20)
- $M(s)$ et $N(s)$ sont co-premières à droite et vérifient donc la relation de Bezout suivante:
- $\exists\, \overline{U}(s) \in \mathrm{RH}_\infty^{m*p}, \overline{V}(s) \in \mathrm{RH}_\infty^{m*m}$ telles que: $\forall s \in \mathbb{C},\ \overline{U}(s) \cdot N(s) + \overline{V}(s) \cdot M(s) = I_m$ (2.21)

Les définitions des différents espaces de matrices sont rappelées dans l'annexe A.

En raison de la non-commutativité de la multiplication matricielle, on définit de manière duale la factorisation à gauche, de la manière suivante:

Deux matrices de transfert réelles rationnelles et n'ayant pas de pôles dans le demi-plan droit (R.H.P.), $\overline{M}(s) \in \mathrm{RH}_{\infty}^{p*p}$ et $\overline{N}(s) \in \mathrm{RH}_{\infty}^{p*m}$ constituent une factorisation première à droite d'une matrice rationnelle $Q_0(s)$ de dimension p x m si et seulement si les trois conditions suivantes sont remplies:

- $\overline{M}(s)$ est carrée, et inversible pour presque tout s de $\mathbb{C}$. (2.22)
- $\forall s \in \mathbb{C}, G_0(s) = \overline{M}(s)^{-1}\overline{N}(s)$ (2.23)
- $\overline{M}(s)$ et $\overline{N}(s)$ sont co-premières à gauche et vérifient donc la relation de Bezout suivante:
- $\exists\, V(s) \in \mathrm{RH}_{\infty}^{m*p}, U(s) \in \mathrm{RH}_{\infty}^{m*m}$ telles que:
  $\forall s \in \mathbb{C}, \overline{M}(s)\cdot V(s) + \overline{N}(s)\cdot U(s) = I_p$ (2.24)

A partir de la représentation par factorisation première de la matrice de transfert nominal $Q_0(s)$ on représente la famille de modèles à l'aide des schémas blocs suivants:

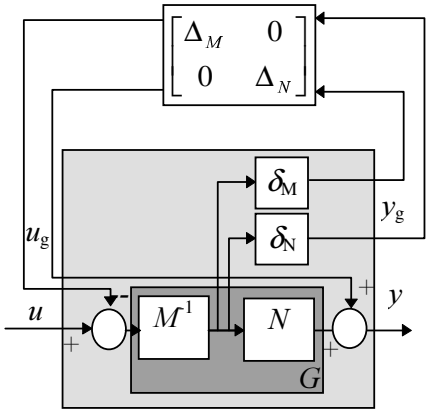


fig. 2.8
Factorisation à droite

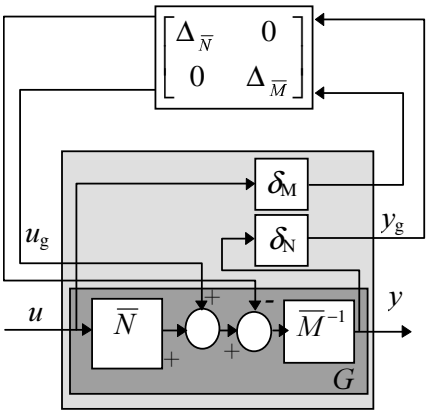


fig. 2.9
Factorisation à gauche

Pour une factorisation à droite, la famille de modèles $Q(s)$ se définit comme la transformation linéaire fractionnaire haute de la matrice $P_r(s)$ par la matrice d'incertitude Δ_r :

$$Q(s) = F_u\left(P_r(s), \Delta_r(s)\right) \text{ avec } P_r(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_M \cdot M^{-1}(s) & \delta_M \cdot M^{-1}(s) \\ 0 & -\delta_N \cdot M^{-1}(s) & \delta_N \cdot M^{-1}(s) \\ I & -N \cdot M^{-1}(s) & N \cdot M^{-1}(s) \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

$$\text{soit } Q(s) = (N(s) + \delta_N \cdot \Delta_N(s))\left(M(s) + \delta_M \cdot \Delta_M(s)\right)^{-1} \tag{2.26}$$

Pour une factorisation à gauche, la famille de modèles $Q(s)$ se définit comme la transformation linéaire fractionnaire haute de la matrice P_l par la matrice Δ_l :

$$Q(s) = F_u\left(P_l(s), \Delta_l(s)\right) \text{ avec } P_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta_M \\ -\delta_N \cdot \overline{M}^{-1}(s) & -\overline{M}^{-1}(s) & \overline{M}^{-1} \cdot \overline{N}(s) \\ \overline{M}^{-1}(s) & -\overline{M}^{-1}(s) & \overline{M}^{-1} \cdot \overline{N}(s) \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

$$\text{soit } Q(s) = \left(\overline{M}(s) + \delta_{\overline{M}} \cdot \Delta_{\overline{M}}(s)\right)^{-1}\left(\overline{N}(s) + \delta_{\overline{N}} \cdot \Delta_{\overline{N}}(s)\right) \tag{2.28}$$

<u>Conclusion</u>

Vidyasagar [Vidy 85] et Vidyasagar et Kimura [Vidy 86] ont montré qu'une telle écriture pour la modélisation de famille de modèles permettait de prendre en compte avec des matrices d'incertitudes sans pôles R.H.P. un ensemble de modèle plus important qu'avec une approche additive ou multiplicative.

En particulier, il est possible de représenter une famille de modèles dont le nombre de pôles instables entre le modèle nominal et le modèle perturbé varie à l'aide d'une représentation par factorisation première dont les matrices d'incertitudes n'ont pas de pôles R.H.P.. Dans le même cas de figure, les représentations par incertitude additive ou multiplicative nécessitent des matrices d'incertitudes ayant des pôles R.H.P..

La condition d'invariance du nombre de pôles R.H.P. pour la famille de modèles est alors nécessaire pour utiliser le théorème de stabilité robuste, ce qui n'est pas le cas pour des matrices d'incertitudes sans pôles R.H.P.. Ce dernier point a été mis à profit par D. C. McFarlane et K. Glover pour l'analyse de la stabilité robuste [McFa 90], et pour la méthode de synthèse H_∞ par «loop shaping» [McFa 92].

De plus H. Kwakernaak [Kwak 90] a proposé de se limiter à la factorisation première du transfert nominal par matrices de polynômes. Ceci constitue la base de son approche polynomiale du problème de la robustesse et de la synthèse de régulateur.

Enfin la décomposition des incertitudes en deux blocs diagonaux permet de mieux répartir les incertitudes en fonction des éléments auxquels elles sont associées (capteurs, actionneurs, paramètres...).

Incertitudes structurées

Dans le cadre de l'analyse de la stabilité ou de la synthèse de loi de commande pour une famille de modèles, l'utilisation conjointe des différentes formulations des incertitudes est intéressante car elle permet d'effectuer facilement le lien entre l'incertitude et l'élément physique considéré. La matrice d'incertitude globale Δ est alors structurée en plusieurs blocs. De même la prise en compte d'incertitude paramétrique conduit elle aussi à une structuration particulière de la matrice d'incertitude Δ. Tous ces cas peuvent être représentés par un schéma bloc du type suivant, pour lequel les matrices complexes Δ_i n'ont pas forcément la même dimension :

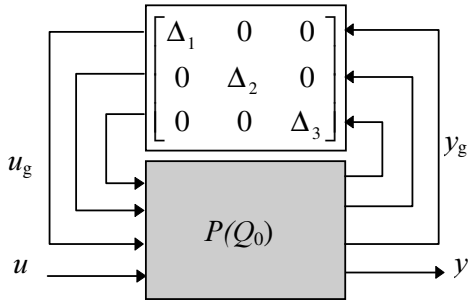


fig. 2.10

<u>Incertitudes multiformes</u>

La prise en compte simultanée de plusieurs formes d'incertitudes de modélisation se traduit par une structuration en blocs diagonaux de la matrice d'incertitude globale Δ. Chaque bloc diagonal correspondant à la matrice d'incertitudes associée à la forme considérée.

<u>Incertitudes paramétriques</u>

Soit une réalisation $S(\theta)$ associée à une famille de modèles et dépendant du vecteur de paramètre $\theta = (\theta_1,...,\theta_n)$, et $Q_{e0}=S(\theta_n) = (A_n, B_n, C_n, D_n)$ la réalisation associée au modèle nominal. Les variations du vecteur paramètre traduisent soit les incertitudes de modélisation associées à un paramètre fixe, soit le domaine d'évolution de ce paramètre pour l'ensemble des configurations normales de fonctionnement du procédé considéré.

Steinbuch *et al* [Stein 91] ont montré que ce système peut se définir comme la transformation linéaire fractionnaire haute de la matrice P_δ par la matrice d'incertitude Δ_δ si et seulement si, il existe une matrice réelle S_Δ:

$$S_\Delta := \begin{bmatrix} A_\Delta & B_\Delta \\ C_\Delta & D_\Delta \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} D_{11} & C_1 & D_{12} \\ B_1 & 0 & 0 \\ D_{21} & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ telle que } F_u(S_\Delta, \Delta(\delta)) = S(\theta_n + \delta) - S(\theta_n) \qquad (2.29)$$

Alors la famille de modèles s'écrit de la manière suivante:

$$Q(s) = F_u\left(F_u\left(P_{Q_{0e}}, \Delta(\delta)\right), sI\right) \tag{2.30}$$

$$\text{avec } P_{Q_{0e}} = \begin{bmatrix} A_n & B_1 & B_n \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_n & D_{21} & D_n \end{bmatrix} \text{ et } \Delta(\delta) = blocdiag\left(\delta_1 I_{r_1}, \ldots, \delta_n I_{r_n}\right) \tag{2.31)}$$

La matrice d'incertitudes associée a alors une structure diagonale, dont chaque terme est réel, et correspond à l'incertitude additive associée aux paramètres de la représentation d'état.

A. Packard et J. Doyle [Pack 93] ont montré que lorsque les coefficients de la matrice d'état s'expriment comme des fractions rationnelles en les paramètres, il est toujours possible de se ramener à l'expression ci-dessus. De plus ils donnent dans le même article, une méthode systématique pour construire la matrice S_Δ lorsque la réalisation est linéaire en les paramètres.

<u>Conclusion</u>

Nous rappellerons dans le paragraphe suivant que les théorèmes de stabilité robuste se définissent par rapport à la mesure de la matrice Δ. La norme H_∞ constitue une mesure de la matrice Δ basée sur la valeur singulière $\overline{\sigma}(\Delta)$. Cependant cette mesure ne prenant pas en compte la structure diagonale par blocs de la matrice Δ, elle définit une famille de matrice $\underline{\Delta}$ très vaste. Certains éléments de la famille $\underline{\Delta}$ ne correspondent pas à des cas d'incertitudes plausibles, ce qui confère alors à cette méthode un caractère conservateur important.

Pour prendre en compte l'organisation de la matrice globale Δ on utilise un outil plus adapté, la valeur singulière structurée $\mu_\Delta(\bullet)$ encore appelée μ fonction. Ceci constitue la base de l'approche par incertitudes structurées. Dans ce cas, la dimension de la matrice globale Δ est plus importante que celle obtenu en choisissant une seule formulation des mêmes incertitudes. Cependant l'utilisation de la valeur singulière structurée $\mu_\Delta(\bullet)$ permet d'écarter des matrices de même norme mais de structure quelconque, et donc d'être moins conservateur. Chaque bloc diagonal est alors borné en norme, ce qui revient à le considérer comme une matrice complexe dont le module est borné.

Lorsque le bloc diagonal ne contient que des éléments réels comme c'est le cas pour les incertitudes paramétriques associées à une réalisation d'état, il est alors nécessaire d'utiliser la valeur singulière structurée réelle.

2.1.2 Théorèmes de stabilité robuste pour des incertitudes non structurées

L'étude de la stabilité robuste consiste à déterminer si pour toutes les configurations de fonctionnement normal, modélisées par la famille de modèles, le comportement dynamique du système reste stable dans une approche entrée-sortie. Le modèle nominal étant considéré linéaire et stable, soit naturellement, soit par bouclage, l'étude de la stabilité robuste sera basée sur le théorème de Nyquist généralisé [Rose 72], ou sur le théorème du faible gain [Zam 66a] en fonction de la nature des incertitudes. Plusieurs cas d'études seront possibles en fonction d'une part de la position des pôles de la matrice d'incertitude Δ dans le plan complexe, et d'autre part de la linéarité de ces incertitudes.

Incertitude modélisée par un opérateur non linéaire à gain borné :Théorème du faible gain

Soit une famille de modèles $Q(s)$ définie par un modèle nominal linéaire $Q_0(s) = F_u(P_{Q_0}(s),0)$ invariant et de dimension finie, et une incertitude de modèle représentée par un opérateur $\Delta(\bullet)$ causal, non linéaire et de gain fini.

<u>Théorème:</u>

La famille de modèles $Q(s)$ sera stable pour tout opérateur $\Delta(.)$ causal, non linéaire et de gain fini si et seulement si :

$$\forall \omega \in \mathrm{R}^+, \gamma(\Delta).\|G_0(j\omega)\| \leq 1 \text{ avec } \gamma(\Delta) = \sup_{u(t)\in L_2}\left(\frac{\|\Delta(u(t))\|_{L_2}}{\|u(t)\|_{L_2}}\right) \text{le gain de } \Delta \qquad (2.32)$$

Ce théorème déjà énoncé au paragraphe précédent sous une forme un peu différente, est issu de l'application du théorème du faible gain à la L.F.T haute du modèle nominal par l'opérateur Δ associé aux incertitudes de modèle et définissant la famille de modèles.

Ce théorème n'a d'intérêt que dans le cas d'incertitudes non linéaires. Lorsque les incertitudes sont représentées par un opérateur linéaire, il est préférable d'utiliser le théorème de Nyquist généralisé car il est alors possible de considérer le cas de certains opérateurs linéaires instables.

Incertitude modélisée par un opérateur linéaire : Théorème de Nyquist généralisé

Généralement le modèle nominal $Q_o(s)$ est le résultat de l'action d'un régulateur $K(s)$ sur le modèle nominal $G_o(s)$ du procédé considéré. La famille de modèles corrigée par le régulateur peut alors se représenter sous la forme du problème standard suivant:

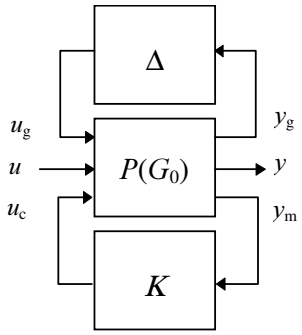


fig. 2.11

$\Leftrightarrow$

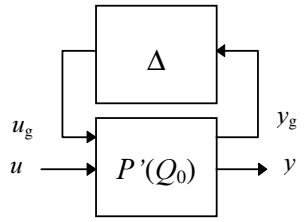


fig. 2.12

Le modèle nominal corrigé se définit alors comme la L.F.T suivante:

$$Q_0(s) = F_l\left(P_{G_0}(s), K(s)\right) \tag{2.33}$$

L'indice *l* (lower) indiquant que le bouclage se fait par le bas.

La famille de modèles se définit alors comme la L.F.T suivante:

$$G(s) \;=\; F_u(P_{G_0}(s), \Delta) \tag{2.34}$$

La famille de modèles $G(s)$ est définie par trois éléments. Le modèle nominal linéaire $G_0(s) \;=\; F_u(P_{G_0}(s), 0)$ invariant et de dimension finie, l'incertitude de modèle représentée par une matrice de transfert rationnelle à coefficients réels Δ normée et n'ayant pas de pôle sur l'axe imaginaire,et la fonction de pondération $\delta(s)$ scalaire définie par:

$$\left\|\Delta(j\omega)\delta\;(\omega)\right\| < \delta(\omega) \;\; \forall \omega \in \mathbb{R} \tag{2.35}$$

On définit l'ensemble des incertitudes suivant:

$$D_s = \left\{\Delta \in RH_\infty, \|\Delta\|_\infty < 1\right\} \tag{2.36}$$

$$D_{uG} = \left\{\Delta \in RL_\infty, \eta\left(G(s,0)\right) = \eta\left(G(s,\Delta)\right); \|\Delta\|_\infty < 1\right\} \tag{2.37}$$

$$D_Q = D_s \cup D_{uG} \tag{2.38}$$

avec $\eta(\bullet)$ la fonction donnant le nombre de pôles R.H.P. de la fonction de transfert.

<u>Théorème:</u>

Le régulateur K stabilise la famille de modèles $G(s)$ pour toute incertitude $\Delta \in D_G$, ssi :

- K stabilise le modèle nominal $G_0(s) \;=\; F_u(P_{G_0}(s), 0)$ (2.39)
- $\forall \omega \in \mathbb{R}^+, \left\|Q_0(j\omega)\right\| \le 1$ que l'on écrit aussi $\left\|Q_0(j\omega)\right\|_\infty = \left\|F_l(P_{G_0}, K)\right\|_\infty \le 1$ (2.40)

Ce théorème découle de l'utilisation du théorème de Nyquist généralisé proposé par Rosenbrock [Rose 72], en particulier pour pouvoir considérer le cas des matrices d'incertitude ayant des pôles R.H.P. La démonstration complète se trouve dans plusieurs ouvrages de référence comme [McFa 89], [Maci 89].

Conclusion :

La fonction de pondération $\delta(s)$ permet d'avoir une matrice Δ aussi proche que possible de la fonction passe-tout à gain unité, afin de ne pas surestimer l'effet des incertitudes sur la stabilité de la famille de modèles, et d'obtenir une contrainte raisonnable. Ainsi dans le théorème de stabilité robuste, la matrice d'incertitude Δ est normée et le critère porte sur la matrice $Q_o(s)$ qui incorpore via la matrice $P(s)$ la fonction de pondération $\delta(s)$. Cependant le théorème de stabilité robuste assure la stabilité pour une famille de modèles différente de celle considérée initialement. En effet, lorsque les conditions citées précédemment sont remplies, ce théorème assure la stabilité pour la famille définie par un modèle nominal $Q_o(s)$, et pour toute matrice d'incertitude dont la norme infinie est inférieure à l'unité. La nouvelle famille contient bien évidemment la famille initialement considérée, cependant il ne peut y avoir équivalence entre ces deux familles, car on ne considère que le gain et on ne prend pas en compte la phase de la matrice d'incertitude. Or il existe des matrices de transfert ayant uniquement des pôles L.H.P., dont le gain est identique mais la phase diffère. Par exemple en monovariable, les deux transferts suivants ont le même module:

$$T_1(s) = 1 \text{ et } T_2(s) = \frac{1-s}{1+s} \tag{2.41}$$

Il est alors évident que les contraintes à remplir pour valider le théorème sont plus contraignantes que les conditions imposées par la famille initiale.

Une première démarche consiste à comparer les résultats obtenus pour la même incertitude représentée suivant les différentes formes possibles, et à prendre en compte celle qui donne la contrainte la plus faible.

Une seconde approche consiste à affiner notre outil de mesure. En effet, pour réduire le caractère conservateur de cette approche, il est souhaitable de prendre en compte la structuration de la matrice d'incertitude d'une part, et la nature des éléments la contenant d'autre part. Pour ce faire, nous présenterons dans le paragraphe suivant un outil de mesure de matrice plus adapté : la valeur singulière structurée complexe et réelle.

2.1.3 Théorèmes de stabilité robuste pour des incertitudes structurées

La notion de valeur singulière structurée μ a été introduite initialement par J. Doyle [Doyl 82a] pour analyser la stabilité robuste des systèmes multivariables (μ-analyse). Au même moment M.G. Safonov [Safo 82] proposait une notion similaire avec la marge de stabilité multivariable k_m correspondant à l'inverse de la valeur singulière structurée μ. Ces techniques se sont ensuite étendues au cadre de la synthèse de correcteur à stabilité robuste (μ-synthèse). Nous rappellerons ici quelques définitions et propriétés importantes. On pourra pour approfondir le sujet, se référer à l'article de synthèse de A. Packard et J. Doyle [Pack 93] sur l'utilisation de valeur singulière structurée μ pour l'analyse et la synthèse de loi de commande robuste.

Définitions

Une matrice Δ appartient à la structure $\underline{\Delta}$ si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\underline{\Delta} = blocdiag\left(\delta_1^R I_{kr_1},\ldots,\delta_{m_r}^R I_{kr_{m_r}},\delta_1^C I_{kc_1},\ldots,\delta_{m_r}^C I_{kc_{m_r}},\Delta_1^C,\ldots,\Delta_f^C\right) \tag{2.42}$$

avec les éléments $\delta_q^R \in \mathbb{R}$, et $\delta_q^C \in \mathbb{C}$ qui définissent les ensembles des scalaires répétés réels et complexes, et les éléments Δ_q^C et qui constituent l'ensemble des matrices pleines complexes.

La valeur singulière structurée de la matrice M par rapport à la structure $\underline{\Delta}$ que l'on note $\mu_{\underline{\Delta}}(M)$ est définie par l'inverse de la valeur minimale de la norme de la matrice Δ appartenant à la structure $\underline{\Delta}$ qui rend I - $M\Delta$ singulière. Soit:

$$\mu_{\underline{\Delta}}(M) := \frac{1}{\min\left(\overline{\sigma}(\Delta) / \det(I - M\Delta) = 0\right)} \tag{2.43}$$

$\mu_{\underline{\Delta}}(M) := 0$ s'il n'existe pas de matrice Δ de $\underline{\Delta}$ telle que I - $M\Delta$ soit singulière. (2.44)

Interprétation de la valeur singulière structurée en terme de système bouclé.

Soit une matrice $M \in \mathbb{C}^{nxn}$, bouclée par une matrice d'incertitude Δ. Ce système admet les deux équations bouclées $u = Mv$ et $v = \Delta u$, que l'on peut représenter par le schéma suivant:

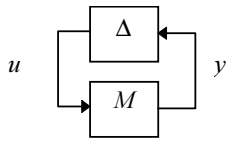


fig. 2.13.

Tant qu'il n'existe pas de matrice Δ de $\underline{\Delta}$ telle que la matrice I - $M\Delta$ soit non singulière, la seule solution pour les deux équations bouclées est $u = v = 0$. Par contre, lorsque une matrice Δ de structure $\underline{\Delta}$ est telle que la matrice I - $M\Delta$ soit singulière, alors il existe une infinité de solutions possibles pour lesquelles les normes de u et v peuvent être arbitrairement grandes. Dans la perspective de l'analyse de la stabilité des systèmes, on dira que dans ce cas le système bouclé est ''instable'', par opposition au cas ''stable'' correspondant à la solution identiquement nulle. Dans le cas ''instable'' la valeur singulière de la matrice M vis à vis de la structure $\underline{\Delta}$ nous donne l'inverse de la norme de la matrice de $\underline{\Delta}$ qui déstabilise le système.

Remarque:

Bien que la définition de la valeur singulière structurée se fasse par rapport à l'inverse d'une norme et qu'elle vérifie la linéarité vis à vis des scalaires ($\forall \alpha \in \mathbb{C}, \mu_{\Delta}(\alpha M) = \alpha \mu_{\Delta}(M)$), la fonction $\mu_{\Delta}(M)$ ne constitue pas une norme car elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire. Cependant il est habituel de noter par abus d'écriture $\underset{\omega \in R}{Sup}\left(\mu_{\underline{\Delta}}\left(M(j\omega)\right)\right) := \left\| M(s) \right\|_{\underline{\Delta}}$ [Pack 92].

Propriétés et évaluation de la valeur singulière structurée

La définition de la valeur singulière structurée ne permet pas d'évaluer facilement sa valeur. Pour les structures à deux et trois blocs complexes pleins le calcul exact est possible [Doyl 82a]. Dans le cas général on approche la valeur de la fonction $\mu_{\Delta}(M)$ à l'aide de l'encadrement suivant, en utilisant le rayon spectral de M et la plus grande valeur singulière de M $\overline{\sigma}(M)$.

$$\rho(M) \leq \mu_{\underline{\Delta}}(M) \leq \overline{\sigma}(M) \tag{2.45}$$

Pour des structures $\underline{\Delta}$ particulières (absence de structure, structure diagonale) les bornes sont atteintes, et l'évaluation de la fonction est alors relativement aisée.

Dans le cas contraire la distance entre les bornes peut être arbitrairement trop importante. M. G. Safonov et J. C. Doyle [Safo 84] ont proposé de faire une mise à l'échelle des bornes par une matrice D, et une matrice Q dont les structures sont liées à celle de $\underline{\Delta}$ et qui n'affecte pas la fonction $\mu_{\underline{\Delta}}(M)$. On obtient alors l'inégalité suivante:

$$\rho(QM) \leq \max_{Q \in \underline{Q}} \rho(QM) = \mu_{\underline{\Delta}}(M) \leq \inf_{D \in \underline{D}} \overline{\sigma}\left(DMD^{-1}\right) \tag{2.46}$$

$$\underline{D} = blocdiag\left(D_1^R, \ldots, D_{m_r}^R, D_1^C, \ldots, D_{m_r}^C I_{kc_{m_r}}, d_1 I_1, \ldots, d_f I_f\right) \text{et } \underline{Q} = \left\{ Q \in \underline{\Delta} / Q^* Q = I_n \right\} \tag{2.47}$$

L'inégalité haute est un problème convexe, ce qui n'est pas le cas de la borne inférieure. L'évaluation d'une valeur singulière structurée nécessitera donc dans le cas général un calcul par optimisation.

Théorème de stabilité robuste vis à vis d'incertitudes structurées.

Avec les notations utilisées pour le théorème de Nyquist généralisé, le théorème de stabilité robuste dans le cas d'incertitudes structurées peut se mettre sous la forme suivante:

Le régulateur K stabilise la famille de modèles $G(s) = F_u(P_{G_0}(s),\Delta)$ pour toute incertitude $\Delta \in D_G \cap \underline{\Delta}$, ssi :

- K stabilise le modèle nominal $G_0(s) = F_u(P_{G_0}(s),0)$ (2.48)
- $\forall \omega \in \mathbb{R}^+, \mu_{\underline{\Delta}}\left(Q_0(j\omega)\right) \leq 1$ avec $Q_0(j\omega) = F_l\left(P_{G_0}(\mathrm{s}),K\right)$ (2.49)

La démonstration de ce théorème [Doyl 82a] utilise conjointement la définition de μ et le théorème de Nyquist généralisé.

Remarques

Ce théorème n'est valable que dans le cas linéaire puisqu'il est basé sur l'utilisation du théorème de Nyquist. Des extensions de ce concept au cas des systèmes non linéaires et ou instationnaires ont été envisagées. En particulier H. Bourles [Bour 93] a proposé une méthode basée sur l'application du théorème des petits gains au cas des opérateurs non linéaires comportant des incertitudes structurées (Q analyse et Q synthèse).

2.1.4 Robustesse en stabilité et en performance, et fonctions de sensibilité nominales

Stabilité robuste

Les théorèmes de stabilité robuste évoqués précédemment peuvent s'exprimer à partir des différentes fonctions de sensibilité nominales associées au modèle nominal bouclé. Cette formulation va nous permettre de préciser le lien entre les fonctions de sensibilité et la stabilité robuste en fonction du type d'incertitude considéré. Pour ce faire nous utiliserons la valeur singulière structurée, sachant qu'en l'absence de structure, $\underline{\Delta} = \left\{\Delta \in \mathbb{C}^{nxn}\right\}$, la valeur singulière structurée d'une matrice M est égale à la valeur singulière supérieure $\overline{\sigma}(M)$.

On associe à chaque matrice d'incertitude Δ de $\underline{\Delta}$ une matrice scalaire δ telle que $\left\|\Delta(j\omega)\delta(\omega)\right\| < \delta(\omega)\ \ \forall \omega \in \mathbb{R}$. La stabilité robuste est alors obtenue:

dans le cas d'incertitude additive Δ_a de $\underline{\Delta}$, si et seulement si:

$$\mu_{\underline{\Delta}}\left(K\left(I_p + GK\right)^{-1}\right) < \frac{1}{\left|\delta_a(j\omega)\right|} \forall \omega \in \mathbb{R} \text{ ou encore } \left\|KS_s\right\|_{\underline{\Delta}} < \frac{1}{\left\|\Delta_a\right\|_\infty} \tag{2.50}$$

dans le cas d'incertitude multiplicative en entrée Δ_e de $\underline{\Delta}$, si et seulement si:

$$\mu_{\underline{\Delta}}\left(KG\left(I_m + KG\right)^{-1}\right) < \frac{1}{\left|\delta_e(j\omega)\right|} \forall \omega \in \mathbb{R} \text{ ou encore } \left\|T_e\right\|_{\underline{\Delta}} < \frac{1}{\left\|\Delta_e\right\|_\infty} \tag{2.51}$$

dans le cas d'incertitude multiplicative en sortie Δ_s de $\underline{\Delta}$, si et seulement si:

$$\mu_{\underline{\Delta}}\left(GK\left(I_p + GK\right)^{-1}\right) < \frac{1}{\left|\delta_s(j\omega)\right|} \forall \omega \in \mathbb{R} \text{ ou encore } \left\|T_s\right\|_{\underline{\Delta}} < \frac{1}{\left\|\Delta_s\right\|_\infty} \tag{2.52}$$

dans le cas d'incertitude multiplicative inverse en entrée Δ_{ie} de $\underline{\Delta}$, si et seulement si:

$$\mu_{\underline{\Delta}}\left(\left(I_m + KG\right)^{-1}\right) < \frac{1}{\left|\delta_{ie}(j\omega)\right|} \forall \omega \in \mathbb{R} \text{ ou encore } \left\|S_e\right\|_{\underline{\Delta}} < \frac{1}{\left\|\Delta_{ie}\right\|_\infty} \tag{2.53}$$

dans le cas d'incertitude multiplicative inverse en sortie Δ_{is} de $\underline{\Delta}$, si et seulement si:

$$\mu_{\underline{\Delta}}\left(\left(I_m + GK\right)^{-1}\right) < \frac{1}{\left|\delta_{is}(j\omega)\right|} \forall \omega \in \mathbb{R} \text{ ou encore } \left\|S_s\right\|_{\underline{\Delta}} < \frac{1}{\left\|\Delta_{is}\right\|_\infty} \tag{2.54}$$

Cette formulation des théorèmes de stabilité robuste fait apparaître très clairement que chaque fonction de sensibilité nominale caractérise la robustesse du système bouclé vis à vis d'une représentation des incertitudes. Ainsi, la conformation des normes de ces différentes fonctions à des gabarits fréquentiels revient à prendre en compte de manière plus ou moins explicite des incertitudes dans la synthèse de la loi de commande.

Performance robuste

Soit une famille de modèles $G(s)$, définie comme la LFT d'une matrice P par une matrice d'incertitudes $\Delta_G(s)$ appartenant à la structure $\underline{\Delta}_G$, de gain inférieur à un. La matrice des transferts de boucle fermée $T(s, \Delta_G, K)$ représente les différentes fonctions de transfert entre les entrées de perturbations contenues dans le vecteur u et les sorties à réguler contenues dans le vecteur y. On associe à cette matrice la matrice des pondérations $W_T(s)$ traduisant les performances attendues sur les différents transferts. Le problème de performance robuste consiste à déterminer le régulateur stabilisant $K(s)$ tel que pour toute incertitude de modèle Δ_G unitaire de structure $\underline{\Delta}_G$, on vérifie l'inégalité suivante:

$$\left\|T\left(s, \Delta_G, K\right) W_T(s)\right\|_\infty \leq 1 \tag{2.55}$$

J.C. Doyle a montré que ce problème pouvait se formuler comme un problème fictif de stabilité robuste vis à vis d'incertitudes ''augmentées'' Δ_E structurées en deux blocs diagonaux [Doyl 82b]. Cette matrice Δ_E est composée de la matrice d'incertitudes associée au modèle Δ_G et d'une seconde matrice d'incertitudes fictives Δ_P unitaire non structurée. La matrice des incertitudes fictives Δ_P est issue de l'application du théorème de robustesse à la relation (2.55). En effet la condition $\left\|T(s,\Delta_G,K)W_T\right\|_\infty < 1$ pour tout $\left\|\Delta_G\right\|_\infty < 1$ est équivalente à étudier la stabilité de $T(s,\Delta_G,K)W_T$ rebouclé par un bloc fictif d'incertitudes Δ_P. Ceci qui est encore équivalent à avoir une condition de stabilité robuste vis à vis de l'incertitude de modélisation $\Delta_E = diag\{\Delta_G, \Delta_P\}$.On peut le résumer par l'équivalence des trois schémas suivants:

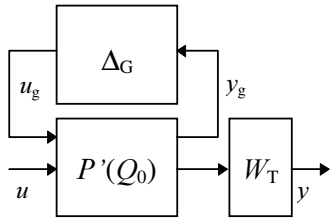


Fig. 2.14
Problème de performances robustes

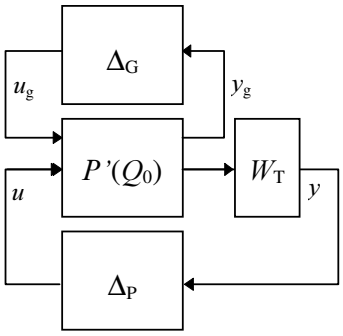


Fig. 2.15
Problème équivalent de stabilité robuste

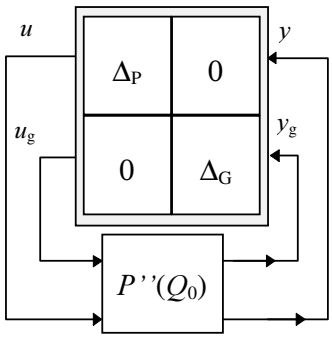


Fig. 2.16
Problème équivalent de stabilité robuste structurée

Ainsi la condition de performance robuste (2.55) sera satisfaite pour toute matrice Δ_G unitaire si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée:

$$\forall \omega \in R \quad \mu_{\underline{\Delta}_E}\left(P''\left(Q_0(j\omega)\right)\right) < 1 \;\; ; \; \underline{\Delta}_E = \left\{\Delta = diag\left\{\Delta_G, \Delta_P\right\}, \Delta_G \in \underline{\Delta}_G\right\} \tag{2.56}$$

Cette dernière relation nous montre tout l'intérêt du formalisme du problème standard, puisqu'il permet de traiter aussi bien des problèmes de stabilité robuste que de performances robustes. En effet la validation du critère de performances robustes implique la stabilité robuste car la structure $diag\{\Delta_G, 0\}$ est un sous ensemble de la structure $\underline{\Delta}_E$. Par contre lorsque la condition (2.56) n'est pas remplie mais que le critère de stabilité robuste est validé, il est alors nécessaire de revoir les spécifications des performances pour obtenir des performances robustes. Enfin la matrice $Q_0(s)$ constituant le modèle nominal corrigé, on retrouve là encore l'intérêt des différentes fonctions de sensibilité dans la spécification des performances.

2.1.5 Synthèse par optimisation de critère

Introduction

Pour les systèmes linéaires multivariables, le problème standard consiste à déterminer un régulateur K linéaire stationnaire stabilisant la boucle fermée et vérifiant l'inégalité suivante:

$$\left\| F_l(P,K) \right\|_\alpha < \gamma \text{ avec } \alpha = 2, \infty, \underline{\Delta} \tag{2.57}$$

Avant de passer en revue les différentes méthodes de résolution de l'inégalité précédente en fonction de la norme considérée, nous présenterons la paramétrisation de Youla. Cette paramétrisation permet de représenter l'ensemble des correcteurs K permettant d'obtenir la stabilité interne du modèle en boucle fermée.

Paramétrisation de Youla (Q Paramétrisation)

Bien que la paramétrisation de l'ensemble des correcteurs stabilisant date des années 50 [Ragg 58], son rôle principal dans la synthèse de loi de commande par optimisation H_2 a été mis en évidence dans les années 70 par V. Kucera [Kuce 74] et D. C. Youla [Youl 76]. En 1981, Zames [zame 81] étendit l'utilisation de la paramétrisation de Youla au cadre de la synthèse H_∞. Nous donnerons ici la formulation générale de la paramétrisation de Youla proposée par C. A. Desoer *et al*. [Deso 82]. Le principe consiste à décomposer le régulateur K sous la forme de la L.F.T suivante, dans laquelle la matrice J contient la structure d'un observateur-controleur et Q est une matrice de transfert propre et stable.

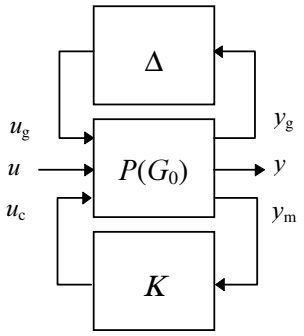


fig. 2.17

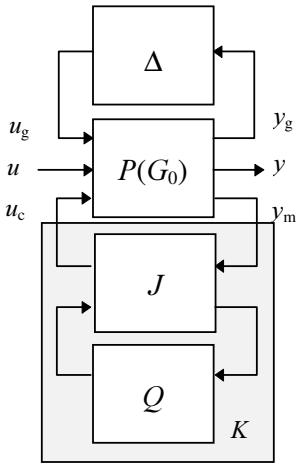


fig. 2.18

$$K = F_l(J,Q), \quad Q \in RH_\infty \tag{2.58}$$

Considérons la matrice de transfert K_0 d'un régulateur stabilisant le modèle nominal en boucle fermée. Le modèle nominal a pour matrice de transfert G_0. Ces deux matrices de transfert admettent une décomposition en facteurs premiers sur l'espace des matrices de transfert stables de la forme suivante:

$$K_0 = U_0 V_0^{-1} = \widetilde{V}_0^{-1} \widetilde{U}_0 \tag{2.59}$$

$$G_0 = B_0 A_0^{-1} = \widetilde{A}_0^{-1} \widetilde{B}_0 \tag{2.60}$$

Le régulateur garantissant la stabilité interne du modèle nominal en boucle fermée, les termes de la décomposition en facteurs coprimes vérifient l'identité de Bezout suivante:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{V}_0 & -\widetilde{U}_0 \\ -\widetilde{B}_0 & \widetilde{A}_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 & U_0 \\ B_0 & V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

On a alors la propriété suivante:

<u>Théorème</u>

La famille des régulateurs définie par (2.58), à partir de K_0 et de l'ensemble des matrices de transfert Q propres et stables, garantit la stabilité interne du modèle nominal en boucle fermée.

$$\begin{aligned} &\widetilde{U} = \widetilde{U}_0 + Q\widetilde{A}_0 \quad \widetilde{V} = \widetilde{V}_0 + Q\widetilde{B}_0 \\ &U = U_0 + A_0 Q \quad V = V_0 + B_0 Q \\ &K = UV^{-1} = \widetilde{V}^{-1}\widetilde{U} \end{aligned} \tag{2.62}$$

De plus tout régulateur stabilisant admet une décomposition sous la forme (2.58).

<u>Remarques:</u>

Cette paramétrisation n'est pas définie de manière unique mais dépend de la réalisation utilisée pour représenter l'ensemble observateur-contrôleur. Mais pour chaque structure J associée à une réalisation, tous les régulateurs K sont engendrés lorsque la matrice de transfert Q parcourt l'ensemble des matrices de transfert stables.De plus pour cette formulation (2.57) & (2.58), la boucle de retour est considérée positive. Certaines structures constituent des paramétrisations particulière de Youla. Ainsi on peut montrer que le modèle interne de Morari [Mora 82] constitue une forme particulière de paramétrisation de Youla [Macie 89]. De même E. Prempain a montré que le modèle R_2M_2 constitue la forme minimale de la paramètrisation de Youla pour les schémas à modèle de référence [Prem 95]. Enfin, ce formalisme va nous permettre de poser par la suite le problème de synthèse sous la forme d'un problème d'optimisation sans contrainte avec un critère relativement simple dépendant linéairement du paramètre Q supposé être une matrice de transfert propre et stable.

Synthèse H_2/LQG

Ph. De Larminat [DeLa 93] rappelle que si le critère L.Q.G. est par définition une somme de variances, relative aux écarts et aux commandes, dont le caractère aléatoire résulte des bruits blancs, générateurs des consignes, perturbations et bruits de mesure, il peut être interprété à l'aide de la norme H_2. En effet considérons un système stochastique défini par:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + v(t) \\ y_m(t) = Cx(t) + w(t) \end{cases} \tag{2.63}$$

On suppose que les bruits v(t) et w(t) sur l'état et sur la sortie sont des bruits blancs Gaussiens de moyennes nulles et de variances égales respectivement à V et W. On considère le critère quadratique suivant avec Q et R des matrices symétriques définies positives:

$$J = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^\infty E\left[x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t)\right]dt \;=\; \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^\infty E\left[y_1(t)^T y_1(t)\right]dt \tag{2.64}$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{1/2} & 0 \\ 0 & R^{1/2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \;;\; u_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^{1/2} & 0 \\ 0 & W^{1/2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

Ce critère peut s'écrire en raison de l'identité de Parseval comme la norme H_2 d'une matrice de transfert ayant pour réponse impulsionnelle le vecteur y_1(t) du critère L.Q.G.. Ainsi la synthèse d'un régulateur L.Q.G. n'est qu'un cas particulier de la synthèse H_2, pour laquelle on cherche un régulateur $K(s)$ stabilisant le système augmenté suivant:

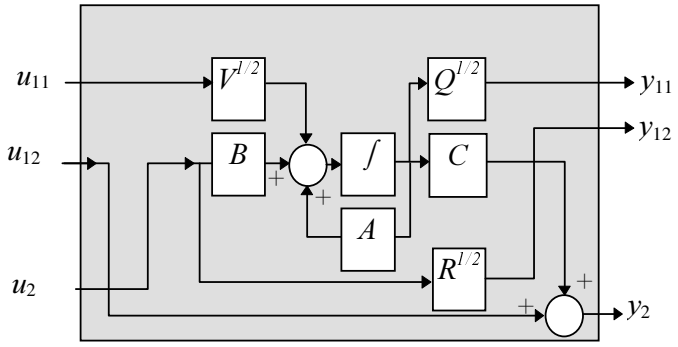


fig. 2.19

La matrice P d'interconnexion dans l'espace d'état étant la suivante:

$$P = \left[\begin{array}{c|ccc} A & V^{1/2} & 0 & B \\ \hline Q^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V^{1/2} \\ C & 0 & W^{1/2} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] ;\; y_1 \;=\; F_l(P,K)\, u_1 \tag{2.66}$$

La synthèse L.Q.G. peut donc s'exprimer dans le domaine fréquentiel comme la synthèse d'un régulateur linéaire invariant K stabilisant le système augmenté P et minimisant le critère suivant:

$$J_{LQG} = \left\| F_l(P,K) \right\|_2 \tag{2.67}$$

La dénomination de commande L.Q.G. étant réservée au contexte stochastique, c'est à dire lorsque les matrices V et W correspondent à des variances, nous nous placerons dans un contexte plus vaste en utilisant la dénomination de commande par optimisation H_2.

La résolution du problème d'optimisation H_2 passe par la résolution des deux équations de Riccati suivantes.

$$X = Ric\begin{bmatrix} A - B_2 D_{12}^T C_1 & -B_2 B_2^T \\ -\widetilde{C}_1^T \widetilde{C}_1 & -\left(A - B_2 D_{12}^T C_1\right)^T \end{bmatrix} \text{avec } \widetilde{C}_1 = \left(I - D_{12} D_{12}^T\right) C_1 \tag{2.68}$$

$$Y = Ric\begin{bmatrix} \left(A - B_1 D_{21}^T C_2\right)^T & -C_2^T C_2 \\ -\widetilde{B}_1^T \widetilde{B}_1 & -\left(A - B_1 D_{21}^T C_2\right) \end{bmatrix} \text{avec } \widetilde{B}_1 = B_1\left(I - D_{21}^T D_{21}\right) \tag{2.69}$$

Le régulateur optimal au sens du critère J_{LQG} se décompose alors en une structure observateur -régulateur d'état dont les matrices de retour d'état F et d'observation H sont les suivantes:

$$F = -\left(D_{12}^T C_1 + B_2^T X\right) \tag{2.70}$$

$$H = -\left(B_1 D_{21}^T + Y C_2^T\right) \tag{2.71}$$

Il est alors intéressant pour mieux appréhender la synthèse H_∞ de montrer que cette synthèse peut se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation vis à vis de l'ensemble des correcteurs stabilisants. Pour ce faire J.C Doyle *et al* [Doyl 89] d'une part et Safonov *et al* [Safo 89] d'autre part ont proposé l'utilisation d'une paramétrisation de Youla particulière consistant à prendre pour matrice J la structure observateur-régulateur d'état optimale définie par les matrices F et H. On obtient alors la matrice de structure suivante:

$$J = \left[\begin{array}{c|cc} A + B_2 F + H C_2 & -H & B_2 \\ \hline F & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{array}\right] \tag{2.72}$$

L'ensemble des régulateurs stabilisant le modèle nominal en boucle fermée s'écrit alors:

$$K = F_l(J,Q), \quad Q \in RH_\infty \tag{2.73}$$

Dans ce cas, le régulateur optimal s'écrit $K_{opt} = F_l(J,0)$. Le problème L.Q.G revient donc à déterminer le paramètre Q tel que le critère suivant soit minimal:

$$J_{LQG}(Q) = \left\| F_l\left(P, F_l(J,Q)\right) \right\|_2^2, \quad Q \in RH_\infty \tag{2.74}$$

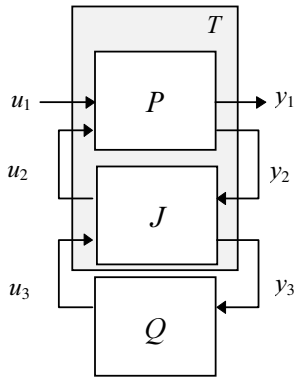


fig. 2.20

On peut montrer de plus que l'interconnexion des matrices P et J conformément à la figure (2.20) donne une matrice de structure T . Cette matrice de structure possède une la matrice d'état triangulaire supérieure, composée de deux blocs diagonaux $A+HC_2$ et $A+B_2F$, correspondant respectivement à la dynamique de l'observateur et du régulateur d'état. Ceci correspond au principe de séparation utilisé dans le cadre de la commande L.Q.G...

$$T = \left[\begin{array}{cc|cc} A+B_2F & -B_2F & B_1 & B_2 \\ 0 & A+HC_2 & B_1+HD_{21} & 0 \\ \hline C_1+D_{12}F & -D_{12}F & 0 & D_{12} \\ 0 & C_2 & D_{21} & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \tag{2.75}$$

Le transfert T_{22} entre u_3 et y_3 étant nul (on retrouve ici le principe de la paramétrisation de Youla), le critère à minimiser s'écrit :

$$J_{LQG}(Q) = \left\| F_l(T,Q) \right\|_2^2 = \left\| T_{11} + T_{12}QT_{21} \right\|_2^2, \quad Q \in RH_\infty \tag{2.76}$$

Ainsi le problème de commande optimale H_2 apparaît comme un problème d'optimisation sans contrainte sur l'ensemble des matrices de transfert propres et stables. Cette formulation est intéressante car elle est similaire à celle que nous obtiendrons dans le cadre de la synthèse H_∞

Synthèse H_∞

Cette nouvelle approche introduite par Zames au début des années 80 [Zame 81] consiste à remplacer la norme H_2 par la norme H_∞ dans le problème standard. L'utilisation de cette approche fut limitée jusqu'à la fin des années 80 en raison de l'absence d'algorithme de résolution donnant un régulateur de dimension proche de la dimension du modèle augmenté. La méthode existante était basée sur la paramétrisation de Youla, la factorisation spectrale et la résolution de l'approximation de Hankel. Le régulateur avait alors une dimension de 10 à 30 fois plus grande que le modèle du procédé. Ceci ne permettait pas de faire le lien avec une structure du type observateur régulateur d'état comme pour la synthèse LQG. En 1984, J. C. Doyle proposa une solution dont la dimension du régulateur était égale à trois fois celle du modèle augmenté. Cette solution consistait à réduire le problème général d'approximation de Hankel à quatre blocs au cas monobloc.

En 1988 K. Glover et J. C. Doyle [Glov 88] proposèrent une solution au problème de synthèse H_∞ pour laquelle, la dimension du régulateur était égale à celle du modèle augmenté. Le célèbre article de J.C Doyle et al [Doyl 89] fit une synthèse sur la résolution dans l'espace d'état des problèmes de commande H_2/L.Q.G. et H_∞ en plaçant ces deux approches sur un même pied d'égalité. Ainsi, avec l'algorithme DGKF, la loi de commande est obtenue par la résolution de deux équations de Riccati, et possède une structure du type régulateur observateur d'état. L'ensemble des régulateurs stabilisant et vérifiant que la norme H_∞ de la boucle fermée est inférieure à une valeur γ désirée, s'exprime alors en fonction d'un paramètre Q propre et stable comme dans la paramètrisation de Youla. Le lien entre la commande H_2 et la commande H_∞ apparaît naturellement puisqu'en faisant tendre γ vers l'infini les équations de Riccati du problème H_∞ sont identique a celle du problème H_2. Le régulateur L.Q.G optimal apparaît en se sens comme un cas particulier de la théorie générale de la commande H_∞.

La synthèse d'une loi de commande consiste alors à rechercher de manière itérative (γ-itérations) la plus faible valeur de γ pour laquelle il existe un régulateur vérifiant la contrainte de boucle fermée (problème standard). Pour un niveau γ admettant une solution, il existe alors une infinité de solutions, qui s'exprime en fonction du paramètre Q et du régulateur central $K_{\gamma 0} = F_l(J_\gamma, 0)$ obtenu en résolvant les deux équations de Ricatti. Le choix du paramètre Q minimisant l'ordre du régulateur ainsi obtenu reste un problème ouvert.

Pour un γ donné, on cherche à déterminer le régulateur linéaire invariant K stabilisant le système augmenté P et respectant le critère suivant vis à vis du schéma fig (2.21):

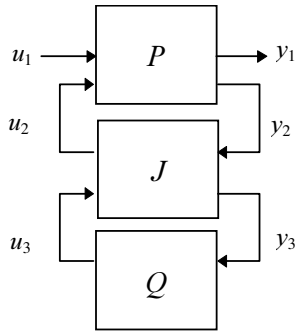


fig. 2.21

$$\left\| F_l(P,K) \right\|_\infty < \gamma \tag{2.77}$$

Soient la réalisation suivante pour le modèle augmenté P:

$$P = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \tag{2.78}$$

On suppose de plus que cette réalisation est telle que, (A,B_1) et (A,B_2) soient stabilisables, (A,C_1) et (A,C_2) soient détectables (de manière à ce qu'il existe des régulateurs stabilisant), les matrices D_{12} et D_{21} ont un rang égal au nombre d'entrées des vecteurs u_2 et y_2 respectivement, et enfin que les matrices D_{11} et D_{22} soient nulles.

<u>Théorème de Glover Doyle [Glov 88]</u>

Un régulateur stabilisant, vérifiant l'inégalité $\left\| F_l(P,K) \right\|_\infty < \gamma$ existe si et seulement si les deux équations de Riccati suivantes admettent deux solutions X_∞ et Y_∞ positives dont le rayon spectral du produit $\rho(X_\infty Y_\infty)$ est inférieur à γ^2.

$$X_\infty = Ric\begin{bmatrix} A - B_2 D_{12}^T C_1 & \gamma^{-2} B_1^T B_1 - B_2 B_2^T \\ -\widetilde{C}_1^T \widetilde{C}_1 & -\left(A - B_2 D_{12}^T C_1\right)^T \end{bmatrix} \text{ avec } \widetilde{C}_1 = \left(I - D_{12} D_{12}^T\right) C_1 \tag{2.79}$$

$$Y_\infty = Ric\begin{bmatrix} \left(A - B_1 D_{21}^T C_2\right)^T & \gamma^{-2} C_1 C_1^T - C_2^T C_2 \\ -\widetilde{B}_1^T \widetilde{B}_1 & -\left(A - B_1 D_{21}^T C_2\right) \end{bmatrix} \text{ avec } \widetilde{B}_1 = B_1\left(I - D_{21}^T D_{21}\right) \tag{2.80}$$

Le régulateur central se décompose alors en une structure observateur -régulateur d'état dont les matrices de retour d'état F et d'observation H sont les suivantes auxquelles se rajoute la matrice de mise à l'échelle Z.

$$F = -\left(D_{12}^T C_1 + B_2^T X\right) \tag{2.81}$$

$$H = -\left(B_1 D_{21}^T + Y C_2^T\right) \tag{2.82}$$

$$Z = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \tag{2.83}$$

L'ensemble des régulateurs stabilisant le modèle nominal en boucle fermée s'écrit alors:

$$K = F_l\left(J, Q\right), \quad Q \in RH_\infty \tag{2.84}$$

avec pour matrice d'interconnexion J la matrice suivante:

$$J = \left[\begin{array}{c|cc} A + B_2 F + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + ZH\left(C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X_\infty\right) & -ZH & Z\left(B_2 + \gamma^{-2} Y_\infty C_1^T D_{12}\right) \\ \hline F & 0 & I \\ -\left(C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X_\infty\right) & I & 0 \end{array}\right] \tag{2.85}$$

Dans ce cas, le régulateur central s'écrit $K_{\gamma 0} = F_l(J,0)$.

Remarques:

Les conditions sur la matrice *D,* nécessaires pour pouvoir appliquer ce théorème peuvent être obtenue par une mise à l'échelle et modification de boucle comme l'ont proposé M. Safonov *et al* [Safo 89]. De plus, ces contraintes de régularité sur le modèle augmenté ne sont plus nécessaires avec les nouveaux algorithmes basés sur la résolution d'Inégalités Linéaires Matricielles (L.M.I) proposé par P. Gahinet [Gahi 92] [Iwas 94]. Enfin les approches fréquentielles de Kwakernaak [Kwak 93] basées sur les factorisations spectrales de matrices polynomiales permettent de résoudre le problème standard sous des hypothèses plus faible que le précédent théorème. En contre partie, l'algorithme de calcul est plus complexe.

μ-synthèse

La μ-synthèse ne peut pas être résolue sous sa forme standard car il n'existe pas de méthode de calcul direct de la fonction μ. Cependant on peut évaluer celle ci en la majorant. Le problème consiste alors à déterminer le régulateur K vérifiant l'inégalité suivante:

$$\mu\left(F_l\left(P,K\right)\right) \leq \min_{D \in \underline{\Delta}} \left(D F_l\left(P,K\right) D^{-1}\right) < \gamma, \quad \forall \omega \in R \tag{2.86}$$

La D-K itération [Doyl 85] permet d'obtenir une solution, mais cette méthode ne converge pas forcement.

2.2 Outils pour les systèmes non linéaires multivariables

2.2.1 Introduction

Le découplage entrée-sortie stable par retour d'état des systèmes linéaires a été étudié par P.L Falb et W.A. Wolovitch [Falb 67], qui donnèrent des conditions nécessaires et suffisantes. W.M. Wonham et A.S Morse [Wonh 70] montrèrent que l'on pouvait s'affranchir d'une partie des contraintes en utilisant un précompensateur et un bouclage dynamique. Cependant, le découplage entrée-sortie peut rendre une partie de l'état inobservable. Cette perte d'observabilité de l'état correspond à des simplifications pôle-zéro dans le transfert en boucle fermée. Pour avoir la stabilité interne, et en particulier la stabilité de la partie de l'état inobservable, il est donc nécessaire, dans le cas linéaire, d'analyser la dynamique des zéros finis de la matrice de transfert.

Pour le cas des systèmes non linéaires, A. Isidori *et al* [Isid 81] d'une part et R.M. Hirschorn [Hirs 81] d'autre part, proposèrent une condition équivalente pour le découplage entrée-sortie, portant sur la régularité d'une matrice particulière: la matrice de découplage. L'étude de la stabilité de l'état inobservable, lorsqu'il existe, se fait avec la notion de dynamique des zéros proposée par C. Byrnes et A. Isidori [Byrn 86]. La stabilité interne du système non linéaire bouclé, s'évalue alors, à partir de critères de stabilité sur la dynamique des zéros, comme la stabilité exponentielle [Byrn 86] ou la K-stabilité [Char 89a]. De plus, B. Charlet a montré en 1989 [Char 89a] que la K-stabilité était robuste vis à vis de petites variations de la dynamique non linéaire. Par contre, dans le cas de dynamiques négligées, la robustesse de la stabilité interne du système bouclé n'est pas a priori simple à obtenir, comme le montre l'exemple de L.H Chen et H.C Chang [Chen 90].

La méthode de découplage entrée-sortie stable, proposée par W.M Wonham et A.S. Morse [Wonh 70] dans le cas linéaire, a son équivalent pour le cas des systèmes non linéaires. Cette technique proposée par A. Isidori *et al* [Isid 81] d'une part et R.M. Hirschorn [Hirs 81] d'autre part, utilise un changement de coordonnées sur l'état et un bouclage statique d'état permettant à la fois de découpler et de linéariser les relations entrée-sortie. Elle correspond à la généralisation du concept de sous espaces (A,B)-invariants au cas non linéaire, en utilisant les distributions (*f*-*g*)-invariantes [Isid 85].

L'extension de la classe des systèmes dont le comportement entrée-sortie peut être linéarisé a été rendue possible en remplaçant le bouclage statique d'état par un bouclage dynamique. Cette technique a été initialement développée par W. M. Wonham [Wonh 74] pour le

découplage linéaire entrée-sortie avec stabilité. R.M Hirshorn [Hirs 79] et S.N. Singh [Sing 80], [Sing 81] ont montré l'intérêt de cette technique dans le cadre de l'inversion et du découplage de système entrée-sortie non linéaire. J. Descusse et C. H. Moog [Desc 85], [Desc 87] d'une part M. Fliess [Flie 87], [Fliess 89] d'autre part, et enfin H. Nijmeijer et W. Respondek [Nijm 88] caractérisèrent les systèmes non linéaires entrée-sortie découplables par bouclage dynamique d'état.

La linéarisation entrée-état permet de s'affranchir du problème de stabilité de la dynamique des zéros. En effet, le changement de coordonnées local sur l'état, que constitue l'immersion dans le cas général, est dans ce cas un difféomorphisme. Le système non linéaire est alors équivalent par difféomorphisme et bouclage, à un système linéaire commandable. Par conséquent, la stabilité interne est garantie par le bouclage d'état car il n'existe plus de dynamique des zéros. Les conditions pour que le système non linéaire soit localement difféomorphe à un système linéaire furent proposées par A. J Krener [Kren 73]. Cette approche fut généralisée par Brockett [Broc 78] pour des lois du type $u = \alpha(x) + \beta v$ avec β une matrice carrée inversible. B. Jakubczyk et W. Respondek [Jaku 80], L.R Hunt, *et al* [Hunt 83] et R. Sommer [Somm 80] complétèrent ce résultat en considérant les lois de bouclage statiques du type $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ avec $\beta(x)$ une matrice carrée inversible pour tout x. Cette caractérisation et le faible nombre de systèmes susceptibles d'être linéarisables par difféomorphisme et bouclage, laissèrent à penser qu'il existait un sous système linéarisable. En 1986, le théorème de R. Marino [Mari 86] donna la taille et la structure du plus grand sous-système linéarisable. Dans ce cas, le système se décompose en une partie linéaire et une partie non linéaire de dimension minimale. Des conditions suffisantes pour découpler et linéariser par bouclage dynamique un système non linéaire entrée-sortie furent proposées par A. Isidori *et al* [Isid 86] d'une part et M. Fliess [Fliess 86] d'autre part. A. Glumineau et C. H. Moog [Glum 89] proposèrent une caractérisation des degrès relatifs minimaux des sorties après bouclage dynamique, et par la même la dimension minimale du compensateur découplant. En 1989, B. Charlet *et al* [Char 89], [Char 91] étudièrent l'apport du bouclage dynamique dans le cadre de la linéarisation entrée état. Ils montrèrent que les bouclages dynamiques sont intéressant uniquement pour les systèmes multi-entrée.

La concept de platitude d'un système non linéaire proposée par M. Fliess, J. Lévine, Ph Martin et P. Rouchon [Flie 92], introduit une notion d'équivalence entre un système linéaire commandable et un système non linéaire. Cette notion est plus générale que l'équivalence par

difféomorphisme et bouclage statique, car cette équivalence ne conserve pas nécessairement la dimension de l'état. Elle porte le nom d'équivalence par bouclage endogène dans le cadre de l'algèbre différentiel [Flie 93], [Mart 92] et [Flie 95a]. Elle existe également dans le cadre de la géométrie différentielle des jets et prolongations d'ordre infini sous le nom d'équivalence de Lie-Bäcklund [Flie 93], [Mart 92] et [Flie 95b]. Les sorties du système linéaire commandable équivalent mis sous la forme de Brunovsky constituent les sorties plates du système. Cependant, il n'existe pas actuellement de méthode constructive permettant de déterminer la platitude d'un système et d'en donner les sorties plates. La détermination des sorties candidates reste liée à une certaine pratique de la méthode, comme c'est le cas avec les fonctions de Lyapounov pour l'étude de la stabilité. Toutefois, la connaissance de certains critères de platitude peut aider au choix des sorties plates. Ainsi les systèmes linéarisables par bouclage statique caractérisés par B. Jakubczyk et W. Respondek [Jaku 80] sont plats. Pour le cas des systèmes affines en la commande, avec un état de dimension n, et une commande de dimension n-1, B. Charlet *et al* [Char 89b] montrèrent que la commandabilité et la platitude coïncident. La construction des sorties plates est alors relativement simple. Une condition nécessaire de platitude a été proposée par P. Rouchon [Rouc 94] sous la forme du critère de la variété réglée. Ph. Martin et P. Rouchon [Mart 95] ont montré que tout système sans dérive, à m commandes et m+2 états, est plat. E. Aranda-Bricaire *et al* [Aran 95] proposèrent un critère constructif pour la linéarisation par bouclage dynamique.

Dans le cadre de ce chapitre nous nous intéresserons donc plus particulièrement aux systèmes plats, qui incluent la classe des systèmes linéaires commandables mais aussi une partie des systèmes non-linéaires. Pour ces systèmes il existe une paramétrisation élémentaire des trajectoires dans l'espace d'état. De plus, le problème de la synthèse d'une loi de commande linéaire de poursuite robuste de trajectoire est simplifié par la connaissance des sorties plates. On utilise dans ce cas un bouclage dynamique endogène qui permet le découplage et la linéarisation du modèle nominal.

2.2.2 Commande des systèmes différentiellement plats [Flie 95c]

Platitude et défaut des systèmes non linéaires

Considérons le système non linéaire (Σ_1) sous forme d'état suivant:

$$\dot{x} = f(x,u) \text{ avec } x = (x_1,\ldots,x_n) \in R^n, u = (u_1,\ldots,u_m) \in R^m \tag{2.87}$$

où f est une fonction régulière de x et de u, vérifiant $f(0,0) = 0$ et $rang\left\{\frac{df}{du}(0,0)\right\} = m$.

<u>Définition de la platitude d'un système non linéaire:</u>

On dit que le système est différentiellement plat s'il existe un vecteur y appelé sortie plate composé de m sorties fictives ($y_1,\ldots,y_m$) telles que:

♦L'état x et la commande u s'expriment en fonction de y et d'un nombre fini de ses dérivées.

♦La sortie plate y s'exprime en fonction de l'état x, de la commande u, et d'un nombre fini des dérivées de u.

Il existe alors trois fonctions à valeur vectorielle $A=(A_1,\ldots,A_n)$, $B=(B_1,\ldots,B_m)$ et $C=(C_1,\ldots,C_m)$ telles que:

$$x = A(y,\dot{y},\ldots,y^{(\alpha)}) \tag{2.88}$$

$$u = B(y,\dot{y},\ldots,y^{(\alpha+1)}) \tag{2.89}$$

$$y = C(x,u,\dot{u},\ldots,u^{(\gamma)}) \tag{2.90}$$

où $y^{(\alpha)}$ représente la dérivée α-ième de y par rapport au temps. On peut remarquer qu'avec cette définition les composantes du vecteur de sortie y sont différentiellement indépendantes, car il n'existe pas de relation différentielle entre les composantes ($y_1,\ldots,y_m$) qui soit indépendante de u.

<u>Remarques:</u>

Un système linéaire commandable est plat, et admet pour sorties plates les sorties de Brunovsky issues de la forme canonique de contrôlabilité.

Un système non linéaire plat étant équivalent par bouclage dynamique endogène à un système linéaire commandable [Flie 92], on peut joindre, pour ces systèmes, toute paire de points de l'espace d'état par une courbe intégrale du système, comme en linéaire.

Définition du défaut d'un système non linéaire

Un système non plat est un système pour lequel aucune sortie ne permet d'exprimer l'état x et l'entrée u à l'aide de relations statiques du type (2.88) et (2.89). Ainsi quel que soit le vecteur de sorties choisi, il reste nécessairement des relations différentielles entre l'état et la sortie et entre l'entrée et la sortie. Le défaut d'un système est alors défini comme le nombre minimum de telles relations différentielles pour tout choix de sortie. Un système plat est donc un système ayant un défaut nul.

Remarque:

Il existe beaucoup de systèmes qui ne sont pas plats et qui en ce sens constituent ce que l'on serait tenté d'appeler de vrais systèmes non linéaires. Parmi les exemples connus, on peut citer dans le cas mono-entrée tout les systèmes qui ne sont pas linéarisables par bouclage statique et dans le cas multi-entrée le double pendule inversé. Pour ces systèmes, il a été développé des lois de commande haute fréquence permettant d'avoir un comportement moyen (basse fréquence) plat [Flie 95a].

Planification de trajectoire

L'objectif de la planification de trajectoire consiste à déterminer le vecteur de commande $u(t)$ sur un horizon temporel fini (T) pour permettre de faire évoluer le système dans l'espace d'état du point initial $x(0)$ au point final $x(T)$.

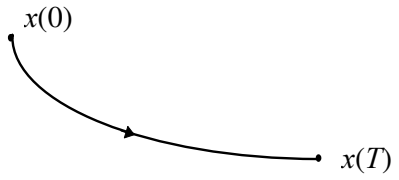


fig. 2.22

Pour les systèmes plats, le calcul d'une trajectoire du système (2.87) s'obtient à partir du vecteur de sortie sans intégrer d'équations différentielles. Il suffit de trouver une courbe dans l'espace $(y,....,y^{(\alpha)})$ vérifiant les conditions initiale et finale de la trajectoire. Soit:

$$x(0) = A(y(0),....,y^{(\alpha)}(0)) \tag{2.91}$$

$$x(T) = A(y(T),....,y^{(\alpha)}(T)) \tag{2.92}$$

Il existe alors plusieurs types de courbes possibles, comme les courbes polynomiales par exemple. Cependant, il est préférable de prendre en compte la structure et la physique du système pour obtenir une courbe adaptée au problème. Pour ce faire, les courbes de Bézier ou les B-splines semblent particulièrement utiles.

La commande en boucle ouverte u qui amène le système de l'état $x(0)$ à l'état $x(T)$ est alors obtenue à partir de l'expression (2.89) que nous rappelons ici:

$$u(t)=B(y(t),....,y^{(\alpha+1)}(t)) \tag{2.93}$$

Il reste alors à étudier les singularités des fonctions A et B existantes. P. Rouchon *et al* [Rouc 93a] proposent dans le cas des systèmes non holonomes plats, un reparamétrage de la courbe y(t) sur la planification de trajectoire pour éliminer les singularités en $u = 0$.

Linéarisation par difféomorphisme et bouclage statique des systèmes plats mono-entrée

B. Charlet *et al* [Char 89] ayant montré que le bouclage dynamique n'a d'intérêt que dans le cadre de la linéarisation des systèmes multi-entrée, nous considérerons pour cette partie uniquement le cas du bouclage statique.

<u>Equivalence par difféomorphisme et bouclage:</u>

Soit un système non linéaire (Σ_2) mono entrée de la forme suivante:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \text{ avec } x = (x_1,...,x_n) \in R^n, u \in R \tag{2.94}$$

Le théorème de Jakubczyk-Respondek [Jaku 80], Hunt-Su-Meyer [Hunt 83]et R. Sommer [Somm 80] donne dans le cas multi-entrées, la condition nécessaire et suffisante suivante pour que le système (2.89) soit difféomorphe à un système linéaire. On transforme alors le système non linéaire par un bouclage statique et un difféomorphisme en un système linéaire commandable. Dans le cas mono-entrée ce théorème se réduit aux deux conditions suivantes

G_{n-2} est de rang constant et involutive sur un voisinage V de l'origine (2.95)

G_{n-1} est de rang n (2.96)

où la distribution de champs de vecteurs G_i, est définie par

$$G_i = sp\{g, ad_f g,..., ad_f^i g\} \tag{2.97}$$

Avec $ad_f^i g$ correspondant au crochet de Lie de f et de g itéré i fois. $ad_f^i = \left[f, ad_f^{i-1}\right] \quad \forall i \geq 1$.

Lorsque ces deux conditions sont remplies, le système est linéarisable par un bouclage statique et un difféomorphisme de la forme suivante:

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \tag{2.98}$$

$$\xi = \phi(x) \tag{2.99}$$

Pour déterminer le bouclage et le difféomorphisme il est nécessaire de résoudre dans un voisinage V de l'origine, le système d'équations aux dérivées partielles suivant:

$$\begin{cases} L_g\phi_1 = 0 \\ L_{ad_f g}\phi_1 = 0 \\ \vdots \\ L_{ad_f^{n-2} g}\phi_1 = 0 \end{cases} \tag{2.100}$$

Le bouclage et le difféomorphisme local se déduisent de la solution à l'aide des formules suivantes:

$$\alpha = -\frac{L_f^n\phi_1}{L_g L_f^{n-1}\phi_1}, \ \beta = \frac{1}{L_g L_f^{n-1}\phi_1} \tag{2.101}$$

$$\phi_i = L_f^{i-1}\phi_1 \quad \forall i = 2,\cdots,n \tag{2.102}$$

Remarque:

Nous avons ici considéré uniquement le cas linéaire en entrée car il correspond à l'hypothèse faite sur le système par Jakubczyk-Respondek et Hunt-Su-Meyer. Ce résultat se généralise au cas non linéaire en entrée du type (Σ_1) (2.87) [Levi 93b] en prenant pour distribution de champs de vecteurs G_i les distributions définies par:

$$G_0 = sp\left\{\frac{\partial f}{\partial u}\right\} \tag{2.103}$$

$$G_i = G_{i-1} + ad_f G_{i-1} \text{ pour } i \geq 1 \tag{2.104}$$

Linéarisation partielle par difféomorphisme et bouclage statique de système

Lorsqu'un système non linéaire ne vérifie pas les conditions du théorème de Jakubczyk-Respondek [Jaku 80] et Hunt-Su-Meyer [Hunt 83], le système n'est plus localement linéarisable, mais plusieurs linéarisations partielles sont alors possibles. R. Marino [Mari 86] caractérisa la taille et la structure du plus grand sous système linéarisable. La stabilisation n'est alors assurée que pour la partie linéarisable. Le comportement de la partie non linéarisable est a priori inconnue et on ne peut que constater la stabilité ou l'instabilité après bouclage.

Au vu de ce théorème on peut s'interroger sur la platitude d'un système partiellement linéarisable par bouclage statique. Dans le cas de systèmes mono-entrée partiellement linéarisables par bouclage d'état statique, B. Charlet *et al* [Char 89] ont montré que l'extension au bouclage dynamique n'apporte rien de plus au problème de la linéarisation. Ces systèmes ne sont donc pas linéarisables et constituent des systèmes non plats. Par contre dans le cas multi-entrées il est possible de linéariser le comportement entrée-état par une extension dynamique endogène réalisée à l'aide d'un bouclage dynamique d'état comme cela est présenté dans le paragraphe suivant. Le système étant alors linéarisable sur l'état, la stabilisation s'effectue sur le système linéaire équivalent. Lorsque le système multi entrée n'est pas linéarisable par bouclage dynamique et difféomorphisme, ce système n'est pas plat.

Linéarisation par bouclage dynamique endogène des systèmes plats multi-entrées

Une fois que l'on a résolu la principale difficulté, c'est à dire la détermination de sorties plates (y_1, ..., y_m) du système, les techniques classiques de découplage par bouclage dynamique ou quasi-statique permettent la construction du bouclage linéarisant et du difféomorphisme qui transforme le système en une chaîne d'intégrateurs purs formée à partir de (y_1, ..., y_m).

On cherche à déterminer le bouclage dynamique endogène de la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{z} = a(x,z) + b(x,z)v \\ u = \alpha(x,z) + \beta(x,z)v \end{cases} \quad z \in R^q \quad v \in R^m \tag{2.105}$$

et un difféomorphisme Ξ sur l'espace étendu ξ

$$\xi = \Xi(x,z) \quad \xi \in R^{n+q} \tag{2.106}$$

De telle manière que le système étendu résultant suivant soit linéarisable par bouclage statique.

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\left(x, \alpha(x,z) + \beta(x,z)v\right) \\ a(x,z) + b(x,z)v \end{pmatrix} \quad \xi \in R^{n+q} \tag{2.107}$$

Alors en utilisant la technique de linéarisation par bouclage statique et difféomorphisme présentée précédemment sur ce système étendu on obtient un système linéaire équivalent que l'on peut mettre sous la forme canonique de Brunovsky suivante:

$$\begin{cases} y_1^{(k_1)} = v_1 \\ \vdots \\ y_m^{(k_m)} = v_m \end{cases} \tag{2.108}$$

Avec $k_1,...,k_m$ les indices de commandabilité associées à $(y_1, ..., y_m)$.

Remarques:

La linéarisation par bouclage n'a d'intérêt que si l'on sort du domaine ou l'approximation tangente est acceptable, car si un système est linéarisable par difféomorphisme et bouclage au voisinage d'un point d'équilibre, alors son linéarisé tangent est commandable en ce point. Ceci constitue une condition nécessaire mais pas suffisante. En effet il existe des systèmes dont le linéarisé tangent est commandable, mais qui ne sont pas linéarisables par bouclage.
La platitude peut être vue comme l'extension de la méthode dite du couple calculé au cas des systèmes ayant un vecteur de commande de dimension inférieure à la dimension du vecteur d'état. Les coordonnées généralisées q sont alors remplacées par les sorties plates, le bouclage statique est remplacé par un bouclage dynamique, et la dynamique du second ordre après bouclage est remplacée par $y^{(\kappa)}= v$.

2.3 Conclusion

L'approche linéaire permet de déterminer une loi de commande garantissant un niveau de performances pour une vaste famille de modèles. Cependant cette démarche n'est valable que sous l'hypothèse restrictive de linéarité. Dans le cas des systèmes plats, la linéarisation par bouclage n'est obtenue que pour le modèle non linéaire nominal, et c'est un régulateur linéaire qui assure une dynamique de poursuite en dépit des perturbations. La synthèse de ce régulateur doit donc prendre en compte la famille de modèles considérée. Dans le cadre du troisième chapitre nous proposerons une approche pour la commande robuste des systèmes plats. Elle consistera à mettre en commun les techniques de commande robuste et de linéarisation des systèmes plats. Une méthodologie de synthèse sera proposée pour déterminer, pour un système plat, la boucle de linéarisation au nominal et la loi de commande linéaire. Cette loi de commande sera à deux degrés de liberté composée d'un précompensateur T et d'un régulateur K garantissant la stabilité et la poursuite robustes.

Chapitre III :

Commande robuste des systèmes plats

3.1 Stabilité locale robuste des systèmes plats

3.1.1 Classe des systèmes plats considérés

Considérons le système (Σ) non linéaire plat suivant dont le vecteur de sortie y est constitué des m sorties plates y_i. On considère que le champ de vecteurs f, et les fonctions $h_1,...,h_m$ sont analytiques.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y_j = h_j\left(x,u,\dot{u},\cdots,u^{(\gamma)}\right) \end{cases} x \in R^n,\ u \in R^p \quad i \in \{1,\cdots,m\} \tag{3.1}$$

Le système étant plat (Σ), il existe un changement de coordonnées et un bouclage dynamique endogène régulier transformant le système non linéaire en un système linéaire commandable.

Le bouclage dynamique endogène régulier se définit par le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = X(x,\xi,v) \\ u = U(x,\xi,v) \end{cases} \quad x \in R^n, \quad \xi \in R^q, \quad v \in R^m, \tag{3.2}$$

Le changement de coordonnées est défini par le difféomorphisme Ξ d'un voisinage V de l'origine de l'espace d'état étendu R^{n+q} tel que:

$$\zeta = \Xi(x,\xi) \quad x \in R^n, \quad \zeta \in R^q \tag{3.3}$$

Le système linéaire équivalent peut alors se mettre sous la forme suivante:

$$\begin{cases} y_1^{(k_1)} = v_1 \\ \vdots \\ y_m^{(k_m)} = v_m \end{cases} \tag{3.4}$$

avec $k_1,...,k_m$ les indices de commandabilité associées à (y_1, ..., y_m).

3.1.2 construction du bouclage dynamique endogène à partir des sorties plates

L'étude du découplage dynamique entrée-sortie dans le cas d'un système non linéaire quelconque, consiste à déterminer un bouclage dynamique permettant d'avoir un comportement entrée-sortie découplé et linéaire au voisinage d'un point d'équilibre. Ce problème largement étudié ([Dess 85],[Dess 87],[Bene 89],[Flie 86],[Nijm 86a], [Nijm 86b] Singh 81]) admet une solution si et seulement si le système est inversible. L'utilisation d'un algorithme d'extension permet de construire un bouclage dynamique découplant, en utilisant une succession d'intégrateurs purs et un bouclage statique sur l'état étendu. Cependant, ce bouclage peut diverger au point d'équilibre. Plusieurs algorithmes basés sur des notions de régularités ont permis de contourner ce problème (voir [Bene 90a], [Huij 92], [Resp 88]). Toutes ces méthodes imposent des conditions successives de rang constant pour chaque ordre de dérivation des sorties *y*, correspondant aux étapes successives de l'algorithme d'extension dynamique.

Cependant, comme l'a rappelé W. Respondek [Resp 92], les bouclages ainsi obtenus ne sont pas suffisamment réguliers pour que ces méthodes constituent une démarche générale, bien que certains critères permettent de réduire le nombre des singularités[Sant 92].

P. Martin [Mart 93] propose d'améliorer ces notions de régularités en introduisant la notion d'inversibilité régulière. La condition de rang constant est ici aussi utilisée, mais au-delà d'un certain ordre de dérivation permettant une certaine dégénérescence des rangs antérieurs. Il indique également un algorithme d'extension dynamique applicable au cas des systèmes plats, et permettant de calculer explicitement le bouclage dynamique endogène découplant. Ce bouclage dynamique découplant est obtenu en utilisant la technique du bouclage statique découplant, appliqué sur l'état augmenté issu de l'extension dynamique.

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = f_e\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,u) \\ X(x,\xi,v) \end{pmatrix} \\ y_j = h_j\left(x,u,\dot{u},\cdots,u^{(\gamma)}\right) \end{cases} \quad x \in R^n,\ \xi \in R^q \quad u \in R^p \quad v \in R^m \quad i \in \{1,\cdots,m\} \tag{3.5}$$

On détermine alors le bouclage dynamique endogène suivant:

$$u = U(x,\xi,v) = \alpha(x,\xi) + \beta(x,\xi,v) \quad x \in R^n,\ \xi \in R^q,\ v \in R^m \tag{3.6}$$

tel que:

$$y_i^{\alpha_i+1} = h_i\left(x,u,\dot{u},\cdots,u^{(r)}\right) = h_i\left(x,\overline{U}^{(r)}(x,\xi,v)\right) = v_i \quad x \in R^n,\ \xi \in R^q,\ v \in R^m \quad i \in \{1,\cdots,m\} \tag{3.7}$$

avec la notation $\overline{U}^{(r)}(x,\xi,v) = \left(u,\dot{u},\cdots,u^{(r)}\right)$ et $u^{(i)}$ désignant la $i^{\text{ème}}$ dérivée temporelle de *u*.

3.1.3 Perturbations de modèle, de mesures et de sorties

Considérons le système plat nominal suivant:

$$\dot{x}_m = f_m(x_m, u_m) \tag{3.8}$$

Avec *f* un champ de vecteur lisse sur un ouvert $X \times U \subset R^n \times R^m$

Les sorties plates s'expriment sous la forme suivante:

$$y_m = h_m\left(x_m, u_m, \cdots, u_m^{(r)}\right) \tag{3.9}$$

La trajectoire $x(t)$ dépend de la condition initiale mais aussi de l'entrée $u(t)$ sur un intervalle de temps donné. Il y a donc une dépendance de dimension infinie de la trajectoire sur l'entrée u. Dans le cas des systèmes plats, l'utilisation des sorties plates permet une nouvelle paramétrisation des trajectoires, dépendant d'un nombre fini des dérivées de l'entrée. Dans ce cas, il est commode d'utiliser un sous espace de dimension infinie comme cela est proposé dans l'approche par difiété. On pourra se référer à l'article de M. Fliess *et al* [Fliess 997] pour une présentation plus complète sur cette notion dans le cadre de la platitude, ou encore dans un cadre plus général aux travaux de A. M. Vinogradov [Vino 89]. En complétant les coordonnées (x,u) par une suite infinie de coordonnées $\zeta_m = \left(x_m, \dot{u}_m, \ddot{u}_m, \cdots, u^{(\mu)}, \cdots\right) \in X \times U \times R_m^\infty$ avec $R_m^\infty = R_m \times R_m \times \cdots$. Il est alors possible de prolonger le champ de vecteur *f* de la manière suivante:

$$F_m(\zeta_m) = \left(f_m(x_m, u_m), \dot{u}_m, \ddot{u}_m, \cdots\right) \tag{3.10}$$

Le système initial s'écrit alors dans ce cadre:

$$\dot{\zeta}_m = F_m(\zeta_m) \quad avec \quad \zeta_m(0) = \zeta_{m\,0} = \left(x_{m0}, u_{m0}, \dot{u}_{m0}, \cdots\right) \tag{3.11}$$

La dérivation temporelle de h le long de la trajectoire du système initial s'écrit:

$$\frac{dh_m}{dt} = \frac{\partial h_m}{dx_m} f_m + \frac{\partial h_m}{du_m} \dot{u}_m + \cdots + \frac{\partial h_m}{du_m^{(r)}} u_m^{(r+1)} \tag{3.12}$$

En utilisant le formalisme de la dérivée de Lie, ceci peut se mettre sous la forme suivante:

$$\frac{dh_m}{dt} = L_{F_m}(h_m) \tag{3.13}$$

Avec F_m le champ de vecteur précèdent, que l'on peut aussi écrire sous la forme suivante:

$$F_m(x_m,u_m,\dot{u}_m,\ddot{u}_m,\cdots)=f_m(x_m,u_m)\frac{\partial}{\partial x_m}+\sum_{\mu=0}^{\infty}u_m^{(\mu+1)}\frac{\partial}{\partial u_m^{(\mu)}} \tag{3.14}$$

Le bouclage endogène associé au système plat est défini de la manière suivante:

$$\begin{cases} u_m = U_m(x_m,\xi_m,v_m) \\ \dot{\xi}_m = X_m(x_m,\xi_m,v_m) \end{cases} \tag{3.15}$$

Les sorties plates $y_{\mathrm{m,i}}$ s'expriment alors en fonction des entrées $v_{\mathrm{m,i}}$ ainsi:

$$y_{m,i}^{(\alpha_1+1)}=v_{m,i} \quad \forall i\in\{1,\cdots,m\} \text{ ou encore } y_m^{(\alpha+1)}=v_m \tag{3.16}$$

On note le modèle étendu de la manière suivante:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix}\dot{x}_m\\ \dot{\xi}_m\end{pmatrix}=f_{e,m}(x_m,\xi_m,v_m)=\begin{pmatrix} f(x_m,U_m(x_m,\xi_m,v_m)) \\ X_m(x_m,\xi_m,v_m)\end{pmatrix} \\ &y_m=h_m(x_m,\overline{U}_m(x_m,\xi_m,v_m))=h_m^{'}(x_m,\xi_m,\overline{v}_m) \end{aligned} \tag{3.17}$$

avec la notation condensée suivante:

$$\begin{aligned} &\overline{U}_m(x_m,\xi_m,v_m)=\overline{u}_m=\left(u,\cdots,u_m^{(r)},\cdots\right) \\ &\overline{v}_m=\left(v_m,\cdots,v_m^{(\alpha+1)},\cdots\right) \end{aligned} \tag{3.18}$$

d'où:

$$y_m=h_m^{'}(x_m,\overline{v}_m) \tag{3.19}$$

La prolongation du champ étendu $f_{\mathrm{e,m}}$ se note alors $F_{\mathrm{e,m}}$ et peut s'écrire sous la forme suivante:

$$F_{e,m}(x_m,\xi_m,u_m,\dot{u}_m,\ddot{u}_m,\cdots)=f_{e,m}(x_m,\xi_m,u_m)\frac{\partial}{\partial_m x}+\sum_{\mu=0}^{\infty}u_m^{(\mu+1)}\frac{\partial}{\partial u_m^{(\mu)}} \tag{3.20}$$

Considérons maintenant que le système plat précédent soit perturbé. On suppose que le champ étendu perturbé F_{e}, diffère du champ étendu nominal $F_{\mathrm{e,m}}$ d'une part, et que le système perturbé ne se trouve pas sur la trajectoire de référence nominale, mais au voisinage de celle-ci.

On note le modèle étendu perturbé de la façon suivante:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\xi}\end{pmatrix}=f_e(x,\xi,v)=\begin{pmatrix} f(x,U_m(x,\xi,v)) \\ X_m(x,\xi,v)\end{pmatrix} \\ &y=h_m(x,\overline{U}_m(x,\xi,v))=h_m^{'}(x,\xi,\overline{v}) \end{aligned} \tag{3.21}$$

La prolongation du champ étendu f_{e} se note alors F_{e} et peut s'écrire sous la forme suivante:

$$F_e(x,\xi,u,\dot{u},\ddot{u},\cdots)=f_e(x,\xi,u)\frac{\partial}{\partial x}+\sum_{\mu=0}^{\infty}u^{(\mu+1)}\frac{\partial}{\partial u^{(\mu)}} \tag{3.22}$$

3.1.4 Famille de modèles issue de la boucle de linéarisation

On cherche à déterminer la perturbation de modèle vis à vis du modèle nominal bouclé $y_m^{(\alpha+1)} = v_m$. Pour ce faire nous allons déterminer les écarts $y_m^{(k)} - y^{(k)}$ pour $k \in \{0,\cdots,\alpha+1\}$.

On note les écarts sur les trajectoires d'état x_m ,ξ_m de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \delta x &= x - x_m \\ \delta\xi &= \xi - \xi_m \\ \delta\bar{v} &= \left(v - v_m, \dot{v} - \dot{v}_m, \cdots\right) \end{aligned} \tag{3.23}$$

On obtient pour $k = 0$, la relation suivante en prenant le développement de y au voisinage des trajectoires x_m, ξ_m:

$$\begin{aligned} y - y_m &= h_m^{'}(x,\xi,\bar{v}) - h_m^{'}(x_m,\xi_m,\bar{v}) \\ y - y_m &= \frac{\partial h_m^{'}}{\partial x}(x,\xi,\bar{v})\delta x + \frac{\partial h_m^{'}}{\partial \xi}(x,\xi,\bar{v})\delta\xi + \frac{\partial h_m^{'}}{\partial \bar{v}}(x_m,\xi_m,\bar{v})\delta\bar{v} + o\left(|\delta x|^2 + |\delta\xi|^2\right) \\ y - y_m &= Dh_m(x_m,\xi_m,\bar{v}).\begin{pmatrix}\delta x \\ \delta\xi \\ \delta\bar{v}\end{pmatrix} + o\left(|\delta x|^2 + |\delta\xi|^2\right) \end{aligned} \tag{3.24}$$

avec la notation suivante:

$$Dh_m(x_m,\xi_m,\bar{v}) = \left(\frac{\partial h_m^{'}}{\partial x}(x,\xi,\bar{v})\frac{\partial h_m^{'}}{\partial \xi}(x,\xi,\bar{v})\frac{\partial h_m^{'}}{\partial v}(x_m,\xi_m,\bar{v})\frac{\partial h_m^{'}}{\partial \dot{v}}(x_m,\xi_m,\bar{v})\cdots\right) \tag{3.25}$$

De même, pour k=1 on obtient la relation suivante:

$$\begin{aligned} \dot{y} - \dot{y}_m &= L_{F_e} h_m^{'}(x,\xi,\bar{v}) - L_{F_{e,m}} h_m^{'}(x_m,\xi_m,\bar{v}_m) \\ y - y_m &= L_{F_e} h_m^{'}(x_m,\xi_m,\bar{v}) + \cdots \\ &\cdots DL_{F_e} h_m^{'}(x_m,\xi_m,\bar{v}).\begin{pmatrix}\delta x \\ \delta\xi \\ \delta\bar{v}\end{pmatrix} - L_{F_{e,m}} h_m^{'}(x_m,\xi_m,\bar{v}) + o\left(|\delta x|^2 + |\delta\xi|^2\right) \\ y - y_m &= \delta\left(L_{F_e} h_m^{'}\right)(x_m,\xi_m,\bar{v}) + \cdots \\ &\cdots\left(DL_{F_{e,m}} h_m^{'} + \delta\left(DL_{F_e} h_m^{'}\right)\right)(x_m,\xi_m,\bar{v}).\begin{pmatrix}\delta x \\ \delta\xi \\ \delta\bar{v}\end{pmatrix} + o\left(|\delta x|^2 + |\delta\xi|^2\right) \end{aligned} \tag{3.26}$$

avec:

$$\begin{aligned} \delta\left(L_{F_e} h_m^{'}\right)(x_m,\xi_m,\bar{v}) &= L_{F_e} h_m^{'}(x_m,\xi_m,\bar{v}) - L_{F_{e,m}} h_m^{'}(x_m,\xi_m,\bar{v}) \\ \delta\left(DL_{F_e} h_m^{'}\right)(x_m,\xi_m,\bar{v}) &= DL_{F_e} h_m^{'}(x_m,\xi_m,\bar{v}) - DL_{F_{e,m}} h_m^{'}(x_m,\xi_m,\bar{v}) \end{aligned} \tag{3.27}$$

Enfin pour $k=\alpha+1$ on obtient la relation suivante:

$$
\begin{aligned}
y^{(\alpha+1)} - y_m^{(\alpha+1)} &= L_{F_e}^{(\alpha+1)} h_m^{'}(x,\xi,\bar{v}) - L_{F_{,me}}^{(\alpha+1)} h_m^{'}(x_m,\xi_m,\bar{v}_m) \\
y^{(\alpha+1)} - y_m^{(\alpha+1)} &= L_{F_e}^{(\alpha+1)} h_m^{'}(x_m,\xi_m,\bar{v}) + \cdots \\
&\cdots DL_{F_e}^{(\alpha+1)} h_m^{'}(x_m,\xi_m,\bar{v}).\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta\xi\\ \delta\bar{v}\end{pmatrix} - L_{F_{e,m}} h_m^{'}(x_m,\xi_m,\bar{v}) + o\left(|\delta x|^2 + |\delta\xi|^2\right) \qquad (3.28)\\
y^{(\alpha+1)} - y_m^{(\alpha+1)} &= \delta\left(L_{F_e}^{(\alpha+1)} h_m^{'}\right)(x_m,\xi_m,\bar{v}) + \cdots \\
&\cdots\left(DL_{F_{,me}}^{(\alpha+1)} h_m^{'} + \delta\left(DL_{F_e}^{(\alpha+1)} h_m^{'}\right)\right)(x_m,\xi_m,\bar{v}).\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta\xi\\ \delta\bar{v}\end{pmatrix} + o\left(|\delta x|^2 + |\delta\xi|^2\right)
\end{aligned}
$$

Sachant que $y_m^{(\alpha+1)} = v_m$, on peut alors proposer le lemme suivant:

Lemme:

Soit un système plat linéarisé par un bouclage endogène, et suivant une trajectoire, y_m imposée par l'entrée v_m et telle que $y_m^{(\alpha+1)} = v_m$. La famille de modèles générée par une perturbation sur le champ du système étendu et sur l'état étendu au voisinage d'une trajectoire de référence nominale s'écrit:

$$
\begin{aligned}
y^{(\alpha+1)} = v_m + \delta\left(L_{F_e}^{(\alpha+1)} h_m^{'}\right)(x_m,\xi_m,\bar{v}) + \left(DL_{F_{,me}}^{(\alpha+1)} h_m^{'} + \delta\left(DL_{F_e}^{(\alpha+1)} h_m^{'}\right)\right)(x_m,\xi_m,\bar{v}).\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta\xi\\ \delta\bar{v}\end{pmatrix}\cdots \qquad (3.29)\\
+o\left(|\delta x|^2 + |\delta\xi|^2\right)
\end{aligned}
$$

Sachant que l'entrée v correspond à la somme de l'entrée de référence nominale v_m et du terme δv, il apparaît clairement que la fonction d'un régulateur linéaire est de générer ce terme δv afin de réduire l'effet des perturbations sur la trajectoire de référence. Cet écart est dû à la différence entre le champ étendu nominal $F_{e,m}$ et le champ étendu perturbé F_e d'une part, et au fait que le système perturbé ne se trouve pas sur la trajectoire de référence nominale mais au voisinage de celle-ci. Le modèle linéaire des perturbations ainsi obtenu est valable dans ce voisinage. Il est alors possible de déterminer, pour un domaine de fonctionnement donné, où les perturbations de modèle restent bornées, un régulateur linéaire garantissant la poursuite de trajectoire pour une famille de modèles pour des spécifications de poursuite adaptées.

3.1.5 Stabilité entrée-état

Dans le cas des systèmes linéaires, la stabilité ne peut être altérée que par des perturbations endogènes ou de modèle. Dans le cas d'un système non linéaire non affine en les commandes, stable au voisinage de ces singularités, une perturbation d'entrée bornée peut rendre l'état du système non borné. Ainsi le système suivant est stable pour une entrée de commande $u(t)$ nulle, par contre pour une entrée unitaire $u(t) = 1$ correspondant à une entrée bornée, et pour un état initial nul, l'état diverge vers l'infini pour $t>0$.

$$\dot{x} = -2x + \left(x^2 - 3\right)u \tag{3.30}$$

E. D. Sontag [Sont 89] proposa de définir la stabilité entrée-état (I.S.S.) comme la généralisation de la notion de stabilité asymptotique globale (G.A.S.) en incluant à la majoration de l'état un terme dépendant de la norme de l'entrée comme le montre la définition suivante:

Définition

Un système est à stabilité entrée-état si et seulement si :

$$\exists \gamma \in \mathrm{K},\ \beta \in \mathrm{KL},\ \text{tq}\ \forall \xi \in \mathrm{R}^n\ \ \forall u(\cdot)\ \forall t \geq 0, \left|f\left(t,\xi,u\right)\right| \leq \beta\left(\left|\xi\right|,t\right) + \gamma\left(\left\|u\right\|_\infty\right) \tag{3.31}$$

La classe K est définie par l'ensemble des fonctions continues, définies positives, et strictement croissante, la classe KL est l'ensemble des fonctions $\beta(s,t)$ de $\mathrm{R}\mathrm{x}\mathrm{R}$ dans R telles que pour tout t_0, $\beta(s,t_0)$ soit de classe K, et pour toute valeur fixée s_0, $\beta(s_0,t)$ décroisse vers zéro à l'infini.

Il montra que les systèmes linéarisables par feed-back sont des systèmes pour lesquels il existe des régulateurs tels que le système bouclé soit à stabilité entrée-état. Les régulateurs linéarisants constituent alors une sous catégorie des régulateurs, permettant d'obtenir la stabilité entrée-état. Nous nous sommes limités au rappel de la définition de la stabilité entrée-état et nous renvoyons le lecteur à l'article de E.D Sontag et Y. Wang [Sont 96] pour une présentation générale de la stabilité entrée-état et des différentes définitions proposées par la communauté automatique, avec en particulier le rappel de la formulation particulière utilisée dans le cadre du théorème du petit gain non linéaire par Z. P. Jiang *et al* [Jian 94].

Stabilité robuste entrée-état

La stabilité entrée-état des systèmes plats linéarisés par difféomorphisme et bouclage est robuste vis à vis des incertitudes de modèle, et des perturbations exogènes. Cette proposition revient, dans le cadre général, à utiliser la première méthode de Lyapunov en considérant le système (3.30) comme un système linéaire stable perturbé par des termes non linéaires d'erreurs dont on connaît le linéarisé tangent. Les termes d'erreurs doivent être suffisamment faibles pour que leurs linéarisés tangents ne modifient pas la nature du point singulier du système non perturbé.

Nous allons montrer que cette proposition se vérifie dans le cadre particulier de notre application. Le système est affine en la commande et nous modéliserons les perturbations de modèle et de mesures sur l'état, en prenant en compte des termes d'erreurs sur les champs de commande et le champ de la dynamique propre.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) \cdot u_i \\ y_j = h_j\left(x, u, \dot{u}, \cdots, u^{(r)}\right) \end{cases} \quad x \in R^n,\ u \in R^q,\ j = 1, \cdots, m \tag{3.32}$$

Ainsi le modèle dynamique sera représenté par le champ f, composé du modèle f_0 et d'un terme d'erreur Δ_f. Les champs de commande g_i sont eux aussi composés des modèles g_{i0} et de termes d'erreurs Δ_{gi}. Le champ dynamique f_0 et les champs de commande g_{i0} sont utilisés pour la synthèse du difféomorphisme et du bouclage. Les sorties plates forment m composantes du difféomorphisme ϕ, les autres composantes s'obtiennent par dérivations successives suivant le champ de vecteurs f_o jusqu'à un ordre égal à l'indice de commandabilité de la sortie considéré moins un. Ainsi on obtient:

$$\begin{aligned} &\phi_1^i = y_i \quad \forall i = 1, \cdots, m \\ &\phi_{k+1}^i = L_{f_0}^k \phi_1^i \quad \forall k = 0, \cdots, k_i - 1,\ \forall i = 1, \cdots, m. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Dans ce nouveau repère les champs de vecteurs relatifs au système avec erreur s'écrivent:

$$\dot{\phi}_{k+1}^i = L_f \phi_{1+k}^i + \sum_{j=1}^{m} u_j L_{g_j} \phi_{1+k}^i,\ \forall k = 0, \cdots, k_i - 1,\ \forall i = 1, \cdots, m \tag{3.34}$$

ce que l'on peut encore écrire de la manière suivante:

$$\begin{aligned} &\dot{\phi}_{k+1}^i = L_{f_0} \phi_{1+k}^i + \sum_{j=1}^{m} u_j L_{g_{j0}} \phi_{1+k}^i + L_{\Delta_f} \phi_{1+k}^i + \sum_{j=1}^{m} u_j L_{\Delta_{g_j}} \phi_{1+k}^i, \\ &\forall k = 0, \cdots, k_i - 1,\ \forall i = 1, \cdots, m \end{aligned} \tag{3.35}$$

avec:

$$\begin{aligned}
&L_{f_0}\phi^i_{1+k} = \phi^i_{2+k},\ \forall k = 0,\cdots,k_i-2\ \ \forall i = 1,\cdots,m\\
&L_{f_0}\phi^i_{k_i} = L^{k_i}_{f_0}\phi^i_1 = \Delta^i_0,\ \forall i = 1,\cdots,m\\
&L_{g_{j0}}\phi^i_{1+k} = 0,\ \forall k = 0,\cdots,k_i-2\ \ \forall i = 1,\cdots,m\\
&L_{g_{j0}}\phi^i_{k_i} = L_{g_{j0}}L^{k_i-1}_{f_0}\phi^i_1 = (-1)^{k_i-1}L_{ad^{k_i-1}_{f_0}g_{j0}}\phi^i_1 = \Delta^i_j,\ \forall i,j = 1,\cdots,m
\end{aligned} \tag{3.36}$$

On rappelle que le bouclage est défini à l'aide des champs f_o et g_{io} de la manière suivante:

$$\alpha = -\Delta^{-1}\Delta_0,\quad \beta = \Delta^{-1},\quad \Delta^i_j = L_{ad^{k_i-1}_f g_j}\phi^i_1,\quad \Delta_{0i} = L^{k_i}_f\phi^i_1,\quad \forall i,j = 1,\cdots m. \tag{3.37}$$

On obtient, en dehors des singularités de la matrice Δ, un système qui se comporte au nominal comme une suite d'intégrateurs, que l'on stabilise par un bouclage d'état linéaire dans le nouveau système de coordonnées:

$$v = K\xi + Lu_l,\ dim(v) = m,\ dim(\xi) = n,\ dim(u_l) = m,\ K \in \mathbb{R}^{mxn},\ L \in \mathbb{R}^{mxn}. \tag{3.38}$$

La matrice K est définie sur l'état ξ, et a valeur dans $\mathbb{R}^m$. La nouvelle entrée u_l est un vecteur colonne composé de m fonctions du temps à valeur dans $\mathbb{R}$. Ce bouclage étant linéaire, c'est une application lisse (C^∞) vérifiant $K(0) = 0$ et telle que le système nominal bouclé soit à stabilité asymptotique globale (G.A.S) sur l'espace d'état réduit des singularités de Δ. Le théorème proposé par E.D. Sontag [Sont 89] permet alors de conclure à la stabilité entrée-état du modèle composé des champs f_0, et g_{i0} linéarisés par difféomorphisme et bouclage. Pour ce même bouclage on obtient le système bouclé suivant si l'on considère le modèle comportant les champs perturbés:

$$\dot{\xi} = F\xi + Gu_l + \left(\Omega_0 + \Omega\Delta^{-1}\left(K\xi + Lu_l - \Delta_0\right)\right) \tag{3.39}$$

$$y = H\xi \tag{3.40}$$

L'ensemble (F, G, H) constitue une réalisation du système linéaire stable, équivalent au modèle non linéaire (f_0, g_{i0}) linéarisé et stabilisé par le difféomorphisme ϕ et le bouclage $\alpha(x) + \beta(x)\,(K\phi(x)+Lu_l)$. les termes Ω et Ω_0 sont des termes non linéaires dus aux écarts de modèles Δ_f et Δ_{gi}, et se définissent de la manière suivante:

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} L_{\Delta_f}\phi^1_1 \\ \vdots \\ L_{\Delta_f}\phi^1_{k_1} \\ \vdots \\ L_{\Delta_f}\phi^m_1 \\ \vdots \\ L_{\Delta_f}\phi^1_{k_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{\Delta_f}\phi^1_1 \\ \vdots \\ L_{\Delta_f}L^{k_1}_{f_0}\phi^1_1 \\ \vdots \\ L_{\Delta_f}\phi^m_1 \\ \vdots \\ L_{\Delta_f}L^{k_m}_{f_0}\phi^m_1 \end{pmatrix} \text{ et } \Omega = \begin{pmatrix} L_{\Delta_{g1}}\phi^1_1 & \cdots & L_{\Delta_{gm}}\phi^1_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ L_{\Delta_{g1}}\phi^1_{k_1} & \cdots & L_{\Delta_{gm}}\phi^1_{k_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ L_{\Delta_{g1}}\phi^m_1 & \cdots & L_{\Delta_{gm}}\phi^m_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ L_{\Delta_{g1}}\phi^m_{k_m 1} & \cdots & L_{\Delta_{gm}}\phi^m_{k_m 1} \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

En dehors des voisinages des singularités de Δ, le système perturbé est à stabilité locale robuste. En effet, dans le cas d'une linéarisation par difféomorphisme et bouclage, les termes résiduels d'erreurs sont généralement faibles et peuvent se mettre sous la forme de termes non linéaires multipliés par un paramètre μ petit. Le système perturbé linéarisé peut alors se mettre sous la forme suivante:

$$\dot{\xi} = F\xi + Gu_l + \mu\left(\Omega'_0 + \Omega'\Delta^{-1}\left(K\xi + Lu_l - \Delta_0\right)\right) \tag{3.42}$$

Avec les matrices Ω'_0 et Ω' correspondent aux matrices Ω_0 et Ω en remplaçant les champs Δ_f et Δ_{gi} par $\mu\Delta_f$ et $\mu\Delta_{gi}$.

Proposition:[Arno 74]

Soit $\bar{\xi}$ un point d'équilibre stable du système non perturbé linéarisé vérifiant $F\left(\bar{\xi}\right) + G\overline{u_i} = 0$, alors il existe un réel strictement positif $\eta\left(\bar{\xi}\right)$ tel que pour tout μ vérifiant $|\mu| < \eta\left(\bar{\xi}\right)$, le système perturbé ait un point d'équilibre exponentiellement stable $\overline{\xi_\mu}$ au voisinage de $\bar{\xi}$.

Remarques:

Cette méthode peut permettre de déterminer, dans certains cas particuliers, un régulateur assurant la stabilité exponentielle robuste. Ainsi dans le cas des variations paramétriques inconnues mais bornées sur les champs, les termes d'erreurs peuvent être calculés. Il est alors possible de déterminer le régulateur linéaire K stabilisant l'ensemble des modèles perturbés à partir du linéarisé tangent de l'erreur de modèle de type paramétrique. C'est cette idée que nous allons mettre en oeuvre dans le cadre du schéma à deux degrés de liberté pour prendre en compte les erreurs paramétriques de modèle. Une seconde utilisation possible consiste à déterminer à partir d'un régulateur donné, le domaine de variation des paramètres pour lequel on obtient la stabilité asymptotique.

Cette proposition est semblable à celle faite dans le cadre de la linéarisation entrée sortie par difféomorphisme et bouclage dans la référence [Char 91].

3.1.6 Conclusion

Nous avons montré que pour un modèle comportant des champs perturbés on obtient le système bouclé suivant:

$$y^{(\alpha+1)} = v_m + \delta\left(L_{F_e}^{(\alpha+1)} h_m^{'}\right)(x_m, \xi_m, \bar{v}) + \left(DL_{F_{me}}^{(\alpha+1)} h_m^{'} + \delta\left(DL_{F_e}^{(\alpha+1)} h_m^{'}\right)\right)(x_m, \xi_m, \bar{v}).\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta\xi \\ \delta\bar{v} \end{pmatrix} \cdot\cdot \quad (3.43)$$
$$+o\left(|\delta x|^2 + |\delta\xi|^2\right)$$

Le terme $y^{(\alpha+1)} = v_m$ constitue un système linéaire commandable, équivalent au modèle non linéaire utilisé pour déterminer le bouclage endogène. Les termes restants sont dus aux écarts de modèles f_e et $f_{e,m}$ et de trajectoires. Il apparaît donc ici clairement que le flot dynamique du système bouclé est sensible aux erreurs de modélisation, et que ces erreurs sur les champs de vecteurs induisent des dynamiques parasites (résiduelles) non linéaires mais localement stabilisables. Cependant, les termes d'erreur dépendent de la structure du système non linéaire et il existe des systèmes non linéaires pour lesquels certaines erreurs n'ont aucune influence sur le flot du système bouclé.

Le flot étant localement stable, il est alors possible de stabiliser le système le long d'une trajectoire de référence à l'aide d'un régulateur linéaire. Le choix de la dynamique de régulation nécessite la connaissance:

- des performances dynamiques désirées en régulation et en poursuite,
- des inconnues de modèles basse fréquence du type erreurs paramétriques
- des inconnues de modèle haute fréquence du type gabarit fréquentiel.

On propose donc d'utiliser le schéma générique à deux degrés de liberté pour séparer les objectifs de poursuite nominale et de régulation. Le régulateur est déterminé à partir du linéarisé tangent de l'erreur de poursuite de trajectoire, et du modèle d'erreur en haute fréquence. On se trouve donc toujours au voisinage d'un point d'équilibre le long de la trajectoire de référence. Le régulateur linéaire assure la stabilisation du modèle nominal linéarisé, il régule les effets des inconnues de modèle et des perturbations des champs sur la sortie.

3.2 Séparation des objectifs de régulation et de poursuite

Nous avons rappelé dans le cadre du premier chapitre qu'une loi de commande robuste a pour fonction essentielle de compenser les effets des perturbations exogènes et de modèle, sur la trajectoire d'une sortie d'un système *G,* défini par un modèle nominal G_0 et des incertitudes. Cette loi de commande doit, de plus, garantir la stabilité interne du système.

Dans le cadre de la commande linéaire standard, ce problème a été formulé sous la forme suivante: Déterminer une loi de commande à deux degrés de liberté, permettant d'imposer, sous certaines conditions, la relation entre l'entrée t_r et la sortie *y,* en dépit des perturbations exogènes (P_e, P_s, P_m), et pour un système *G* défini par une famille de modèles. Cette loi de commande s'implante suivant le schéma suivant (fig 3.1).

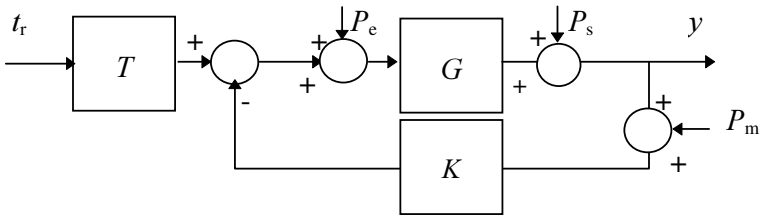


Fig 3.1

La fonction de transfert $T(s)$, appelée précompensateur, constitue un premier degré de liberté. La fonction de transfert $K(s)$, appelée régulateur, constitue le second degré de liberté. La détermination d'une loi de commande comporte donc deux étapes: la synthèse du régulateur *K,* placé dans la boucle d'une part et le calcul du précompensateur *T* d'autre part. La synthèse de ces deux éléments ne peut pas être disjointe, car il est nécessaire de prendre en compte l'influence mutuelle du précompensateur *T* et du régulateur *K* pour obtenir une loi de commande robuste. En effet, considérons qu'on détermine dans un premier temps, un régulateur *K,* permettant de garantir pour une famille de modèle la stabilité et le rejet de perturbations exogènes vis à vis d'une sortie particulière (stabilité et régulation robuste), sans prendre en compte explicitement la dynamique de poursuite (transfert entre t_r et *y*). La synthèse dans une seconde étape le précompensateur *T* pose un certain nombre de problèmes. Premièrement le calcul du précompensateur *T* utilise la fonction de transfert entrée sortie pour le modèle nominal G_0, rebouclé par le régulateur *K* (boucle fermée nominale). Cela ne garantit pas alors une dynamique entre l'entrée t_r et la sortie *y* (dynamique de poursuite) pour l'ensemble de la famille de modèle *G*. On dit alors qu'il n'y a pas de poursuite robuste. De plus

cette démarche pose des problèmes lorsque le régulateur K introduit un zéro parasite à partie réelle positive dont la dynamique se trouve dans la bande passante du transfert en poursuite désirée. Ainsi, il est intéressant d'adjoindre aux spécifications pour la synthèse du régulateur K, une spécification de poursuite, afin d'obtenir a posteriori une loi de commande robuste, à la fois en régulation et en poursuite.

Nous nous proposons d'étudier la démarche proposée par [Prem 95] dans le cadre de la commande robuste en poursuite des systèmes linéaires, dans le cadre de la synthèse de loi de commande robuste en régulation et poursuite des systèmes plats. Cette démarche consiste à synthétiser le modèle nominal de référence M, et à déterminer ensuite le régulateur K qui assure la robustesse. Pour ce faire, on utilise un schéma à deux degrés de liberté particulier permettant une spécification simple des objectifs de régulation et de poursuite robustes.

3.2.1 Critères de poursuite robuste

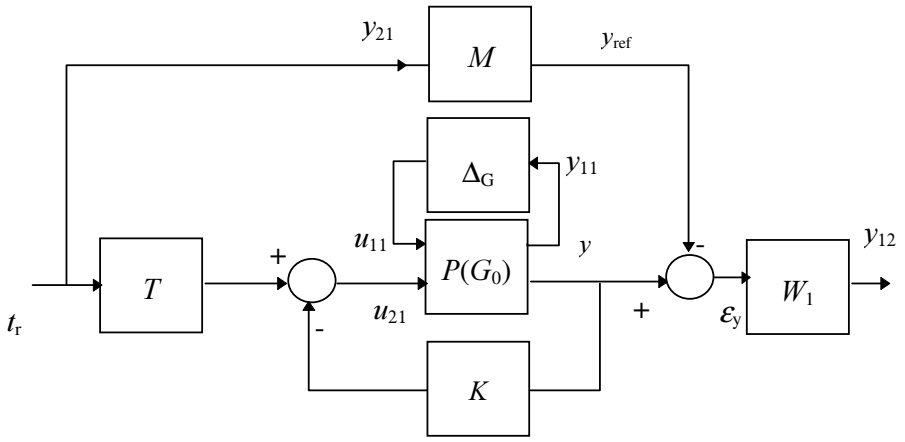


Fig. 3.2

La poursuite robuste consiste à déterminer une loi de commande à deux degrés de liberté C=[T,-K] conformément au schéma précédent (fig. 3.2), de manière à obtenir un transfert entre l'entrée t_r et la sortie y, semblable au transfert du modèle nominal de poursuite M entre t_r et y_{ref} dans un domaine fréquentiel fixé $D\omega$, pour une famille de modèle G, représentée par la transformation linéaire fractionnaire haute suivante:

$$G = F_u\left(P(G_0), \Delta_G\right) \tag{3.44}$$

Le domaine fréquentiel est représenté par la fonction de transfert W_{1P} appelée pondération ou encore gabarit fréquentiel. Cette fonction possède un gain unitaire dans le domaine fréquentiel $D\omega$ et inférieur à l'unité hors de ce domaine.

La loi de commande doit donc remplir les deux conditions suivantes [Lim 93]:

Pour l'ensemble des procédés, la loi de commande $C = [T,K]$ doit vérifier la stabilité interne de la boucle fermée, et respecter la condition imposée par le gabarit fréquentiel W_{1P}, soit:

$$F_l\left(F_u\left(P(G_0),\Delta_G\right),C\right) = F_l\left(P'(G),[T,K]\right) \quad \text{stable} \tag{3.45}$$

$$\left\| W_{1P}\left(\left(I+GK\right)^{-1}GT - M\right)\right\|_\infty \leq 1 \tag{3.46}$$

Le problème de la poursuite robuste peut se formuler sous la forme d'un problème standard, en utilisant le schéma de la figure 3.3, dans lequel P_a désigne le système augmenté, Δ_G la matrice d'incertitudes normée, associée au procédé G, et Δ_P une matrice fictive permettant de traduire le problème de performance en un problème de stabilité [Doyl 82b]. La matrice globale d'incertitudes ayant une structure diagonale par bloc, il est intéressant d'utiliser la fonction μ pour la synthèse de la loi de commande. Ainsi on obtient le critère à optimiser suivant:

$$\mu_{(\Delta_G,\Delta_P)}\left(F_l\left(P_{a,},C\right)\right) \leq 1 \tag{3.47}$$

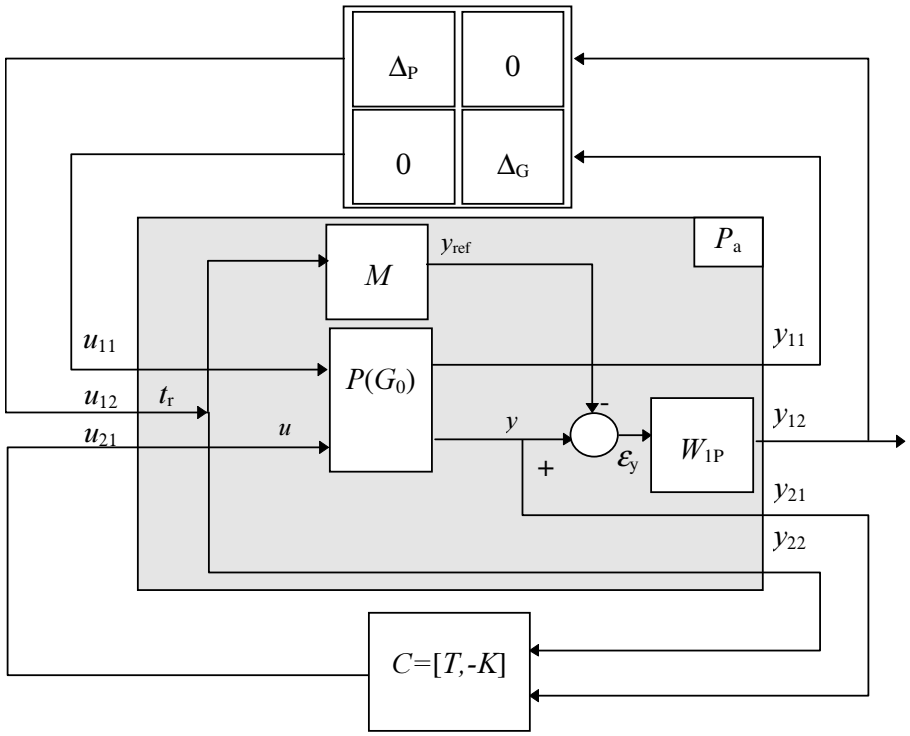


Fig. 3.3

Cependant la mise en oeuvre de cette synthèse se trouve confrontée à deux problèmes.

Premièrement, il n'est pas a priori évident de choisir un modèle cible M pour lequel il existe un modèle G du procédé dont le comportement en boucle fermée se confonde avec M. Cette incompatibilité peut être due à la différence de structure de M et de G [Dion 83] d'une part, ou encore au niveau admis par l'entrée du procédé.

Deuxièmement la mise en oeuvre algorithmique est rendue difficile car le système augmenté P_a ne vérifie pas structurellement une des conditions d'application de l'algorithme de Glover-Doyle [Prem 95b]. Il est alors nécessaire d'effectuer une régularisation en considérant un système perturbé vérifiant la condition de rang de la matrice D du système augmenté. Il a alors été démontré que la solution du problème perturbé est aussi une solution du problème originel en faisant tendre la perturbation vers zéro [Cope 92]. Cette méthode pose cependant un problème de conditionnement numérique lié au choix du niveau de la perturbation.

Il est donc préférable de vérifier que pour un modèle particulier (le nominal par exemple), le transfert entre l'entrée de référence t_r et la sortie y est confondu avec le modèle nominal de poursuite M. Cette condition peut se mettre sous la forme suivante:

$$\left(I + G_0 K\right)^{-1} G_0 T = M \tag{3.48}$$

Cette condition d'égalité rajoute une contrainte de structure qui simplifie considérablement le problème de poursuite robuste [Prem 95a]. On peut de plus imposer une condition sur le niveau admis par l'entrée du procédé, pour le cas du modèle nominal G_0. La loi de commande C est telle que l'amplitude ou l'énergie du signal de commande nominal u_n est limitée à l'aide d'une pondération W_{2P}. Cette dernière condition peut se mettre sous la forme suivante:

$$\left\| W_{2P} \left(I + K G_0\right)^{-1} T \right\|_{2,\infty} \leq 1 \tag{3.49}$$

Ces deux conditions s'intègrent naturellement sur un schéma à deux degrés de liberté particulier, le schéma générique à deux degrés de liberté R_2M_2. Il permet une spécification plus simple du problème de la synthèse d'une loi de commande robuste en poursuite.

3.2.2 Schéma générique à deux degrés de liberté

Pour arriver à ce schéma nous allons déterminer l'ensemble des lois de commande stabilisant le modèle nominal G_0, et vérifiant les conditions (3.48) et (3.49). Pour ce faire on pourra dans un premier temps considérer la loi de commande $C_0 = [T_0,-K_0]$ stabilisant le modèle nominal G_0 en boucle fermée dans le cadre du schéma suivant. Puis à l'aide de la paramétrisation de Youla on déterminera l'ensemble C des lois de commande stabilisant le modèle nominal G_0. Enfin nous utiliserons les conditions (3.48) et (3.49), pour en déduire la famille des lois de commande stabilisant le modèle nominal et vérifiant la contrainte structurelle d'égalité, et la contrainte d'admissibilité d'entrée nominale.

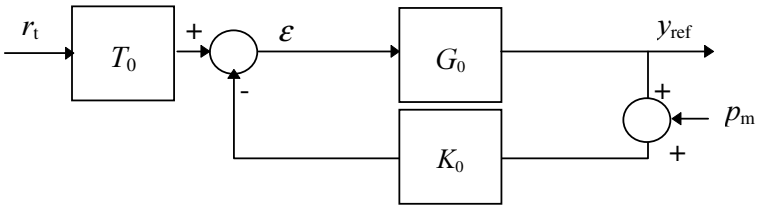


Fig. 3.4

Ce système peut être vu comme la transformation linéaire fractionnaire basse de la matrice de structure $P(G_0)$ par la loi de commande $C = [T_0,-K_0]$ conformément au schéma suivant.

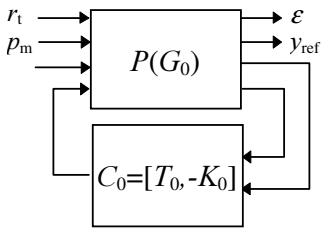


Fig.3.5

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ y_{ref} \end{pmatrix} = F_l\left(P(G_0), C_0\right)\begin{pmatrix} r_t \\ p_m \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

la matrice de structure $P(G_0)$ étant définie de la manière suivante:

$$P(G_0) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & I \\ 0 & I & G_0 \\ \hline I & 0 & 0 \\ 0 & I & G_0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

La loi de commande particulière $C_0=[T_0,K_0]$ assurant la stabilité interne du modèle nominal $P(G_0)$ en boucle fermée, les quatre matrices de transfert suivantes sont stables:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ y_{ref} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I + K_0 G_0)^{-1} F_0 & -K_0 (I + G_0 K_0)^{-1} \\ G_0 (I + K_0 G_0)^{-1} F_0 & (I + G_0 K_0)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_t \\ p_m \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

L'ensemble des correcteurs stabilisants peut alors se mettre sous la forme d'une paramétrisation de Youla comme nous l'avons rappelé au second chapitre. La loi de commande garantissant la stabilité interne du modèle nominal en boucle fermée, elle stabilise en particulier le transfert P_{22}. Les décompositions en facteurs premiers sur l'espace des matrices de transfert stables du transfert P_{22} et de la loi de commande C_0 sont alors les suivantes:

$$C_0 = U_0 V_0^{-1} = \widetilde{V}_0^{-1} \widetilde{U}_0 \tag{3.53}$$

$$P_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ G_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \widetilde{A}_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{B}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \end{pmatrix} A_0^{-1} \tag{3.54}$$

Les termes de cette décomposition en facteurs coprimes vérifient alors l'identité de Bezout suivante:

$$\left(\begin{array}{c|cc} \widetilde{V}_0 & 0 & -\widetilde{U}_0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ -\widetilde{B}_0 & 0 & \widetilde{A}_0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} A_0 & 0 & U_0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ B_0 & 0 & V_0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} I & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{array}\right) \tag{3.55}$$

Alors toute loi de commande garantissant la stabilité interne du modèle nominal en boucle fermée peut s'exprimer en fonction de C_0 et de l'ensemble des matrices de transfert $[Q_T, Q_K]$ propres et stables, sous la forme suivante:

$$[T, -K] = -\left([0 \quad U_0] + A_0 [Q_T \quad Q_K]\right)\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & V_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \end{pmatrix} [Q_T \quad Q_K]\right)^{-1} \tag{3.56}$$

ou encore:

$$K = (U_0 + A_0 Q_K)(V_0 - B_0 Q_K)^{-1} \tag{3.57}$$

$$T = -(A_0 + K B_0) \cdot Q_T = -(I + K G_0) \cdot A_0 Q_T = -G_0^{-1} (I + G_0 K) \cdot B_0 Q_T \tag{3.58}$$

En remplaçant K et T dans les expressions (3.37) et (3.38) on obtient les relations suivantes:

$$(I + G_0 K)^{-1} G_0 T = -B_0 Q_T = M \tag{3.59}$$

$$\left\| W_{2P} (I + K G_0)^{-1} T \right\|_{2,\infty} = \left\| W_{2P} \cdot (-A_0 Q_T) \right\|_{2,\infty} \leq 1 \tag{3.60}$$

Alors la famille des lois de commande C garantissant la stabilité interne du modèle nominal en boucle fermée et vérifiant la contrainte d'égalité, se définit de la manière suivante à partir

des décompositions premières à droite et à gauche de C_0 et de G_0 d'une part et de l'ensemble des matrices de transferts Q_K propres et stables d'autre part.

$$T = -A_0 Q_T + KM \tag{3.61}$$

$$K = \left(U_0 + A_0 Q\right)\left(V_0 - B_0 Q\right)^{-1} \tag{3.62}$$

La matrice de transfert Q_T résultante des deux relations (3.48) et (3.49) sera notée par la suite Q_{T0}. Le problème à deux degrés de liberté est réduit à un seul: le paramètre Q_K.

Si l'on considère maintenant un régulateur K qui permet d'obtenir la stabilité robuste, il stabilise bien évidement le modèle nominal G_0. Alors la loi de commande $C = [T, -K]$ avec le précompensateur défini par la relation (3.61) vérifie les conditions (3.48) et (3.49) relatives à l'accessibilité du modèle de poursuite au point de vue structurel (3.48) et au point de vue de l'entrée de commande (3.49). On obtient alors le schéma suivant:

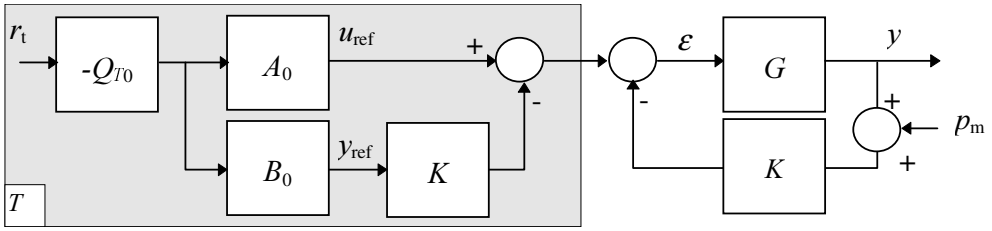


Fig.3.6

Cependant ce schéma n'a pas une structure minimale car le régulateur K se trouve dupliqué dans le précompensateur. Cela pose des problèmes pour la synthèse de la loi de commande. Pour éviter cela il suffit de supprimer le régulateur dupliqué dans le précompensateur et alimenter le régulateur de la boucle fermée par l'écart entre le signal de référence de sortie y_{ref} et la sortie mesurée. En modifiant ainsi le schéma précédant, on obtient alors le schéma générique à deux degrés de liberté R_2M_2 [Bour 82], [Berg 92], [Ygor 92], [Berg 94], [Prem 95a] dont le schéma est donné ci-après.

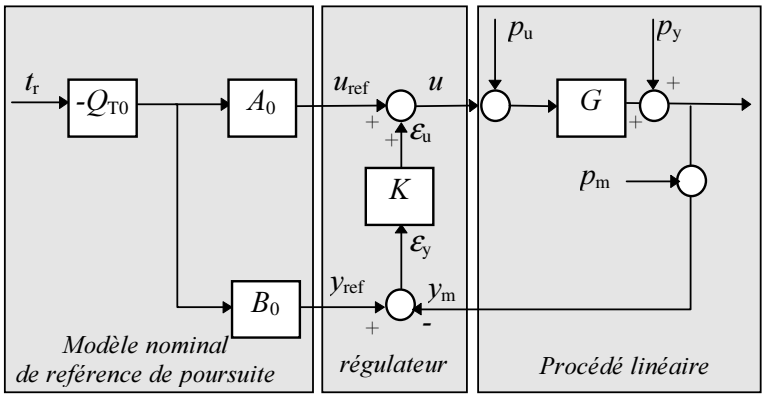


Fig. 3.7

Le transfert de boucle fermée reliant le signal d'erreur ε_y entre la sortie de référence y_{ref} et la sortie mesurée y_m au signal de trajectoire de référence t_r est alors donné par la relation suivante:

$$\varepsilon_y = (I + KG)^{-1}(G - G_0)A_0 Q_{T0} \cdot t_r \tag{3.63}$$

Si le modèle G est confondu avec le modèle nominal G_0, alors le transfert entre la trajectoire de référence t_r et l'entrée du régulateur ε_y est nul. Ceci montre bien que le régulateur compense les écarts vis à vis du modèle nominal pour obtenir une poursuite robuste, mais que pour le procédé nominal il n'intervient pas dans le cadre de la poursuite. La spécification de poursuite robuste peut donc se faire à partir de la fonction de transfert précédente (3.62) et d'une fonction de pondération W_{1P} de la manière suivante:

$$\left\| W_{1P} \cdot (I + GK)^{-1}(G - G_0)A_0 Q_{T0} \right\|_\infty \leq 1 \tag{3.64}$$

Alors on peut montrer [Prem 95a] que s'il existe une paramètrisation Q_{T0} du précompensateur T vérifiant (3.45) et (3.46) et un régulateur tel que pour l'ensemble des modèles $G = F_u(G_0,\Delta)$ on ait stabilité interne de la boucle fermée et l'inégalité précédente (3.64) vérifiée, alors la loi de commande $C = [T, K]$ vérifie la spécification de poursuite robuste (3.46):

$$\left\| W_{1P}\left((I + GK)^{-1} GT - M\right) \right\|_\infty \leq 1 \tag{3.65}$$

3.2.3 Spécification de poursuite nominale: synthèse du paramètre Q_{T0}

La démarche consiste dans un premier temps à déterminer le modèle nominal de référence cible M_0 stable et la contrainte sur l'entrée de commande à partir du cahier des charges. On cherche ensuite le paramètre Q_{T0} vérifiant les deux relations suivantes:

$$-B_0 Q_{T0} \cong M_0 \tag{3.66}$$

$$\left\| W_{2P} \cdot (-A_0 Q_{T0}) \right\|_{2,\infty} \leq 1 \tag{3.67}$$

Ceci peut se formuler sous la forme d'un problème type « model matching » à partir du système augmenté suivant:

$$P = \left(\begin{array}{c|c} M_0 W_{1P} & B_0 W_{1P} \\ 0 & A_0 W_{2P} \\ \hline I & 0 \end{array}\right) \tag{3.68}$$

On cherche alors le paramètre Q_{T0} tel que :

$$\left\| F_l(P, Q_{T0}) \right\|_\infty = \left\| \begin{matrix} (M_0 + B_0 Q_{T0}) W_{1P} \\ A_0 Q_{T0} W_{2P} \end{matrix} \right\| \leq 1 \tag{3.69}$$

Le calcul de Q_{T0} s'obtient alors en utilisant l'algorithme de Glover-Doyle [Glov 88]. Une fois le paramètre Q_{T0} déterminé, on vérifie que le transfert de référence $M = -B_0Q_{T0}$ et la contrainte d'entrée nominale A_0Q_{T0} sont en accord avec le cahier des charges. Dans le cas contraire, il est nécessaire de modifier les pondérations W_{1P} et W_{2P} ou de choisir un autre modèle de référence cible M_0.

Remarques:

Le paramètre Q_{T0} obtenu par l'algorithme de Glover-Doyle est forcément stable, car cet algorithme assure la stabilité interne de la boucle fermée.

Pour la synthèse du régulateur on considérera le modèle de référence M défini par le paramètre Q_{T0} et non le modèle de référence cible M_0.

3.2.4 Cas des systèmes plats

Un des intérêts des systèmes plats est le fait que les trajectoires d'état s'expriment en fonction des sorties plates et d'un nombre fini α de leurs dérivées. Or pour ces systèmes l'entrée u s'exprime également comme une fonction des sorties plates et d'un nombre fini α+1 de leurs dérivées. Cette paramétrisation des trajectoires d'état du système simplifie grandement la synthèse du modèle nominal de référence de poursuite. Le système plat et le bouclage endogène associé permettent d'obtenir le schéma simplifié suivant:

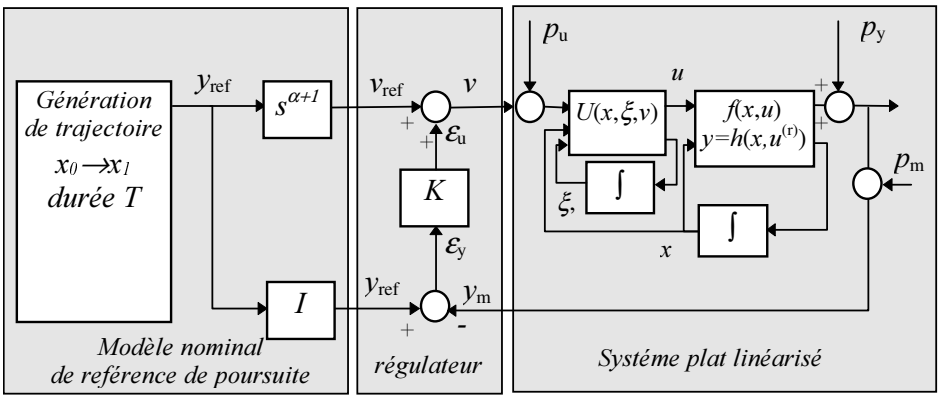


Fig. 3.8

Le modèle nominal avec le bouclage endogène est équivalent à une suite d'intégrateur que l'on retrouve dans le modèle nominal de poursuite. Nous allons préciser la démarche pour effectuer la synthèse du régulateur K dans le paragraphe suivant.

3.3 Synthèse de loi de commande robuste pour les systèmes plats

3.3.1 Méthodologie de synthèse

Dans le cadre de la synthèse d'une loi de commande robuste pour un système plat nous proposons d'utiliser la démarche suivante:

- ♦Génération des trajectoires de la sortie plate de référence y_{ref} possibles.
- ♦Génération des trajectoires de l'entrée de référence v_{ref} correspondantes.
- ♦Calcul du bouclage découplant.
- ♦Détermination de la famille de modèles générée par des variations sur le champ nominal et sur les trajectoires de références.
- ♦Prise en compte d'incertitudes non structurées traduisant une certaine méconnaissance du système.
- ♦Mise en forme du problème sous forme standard.
- ♦Synthèse du régulateur K.

3.3.2 Synthèse du générateur de références à partir du concept de platitude

Le concept de platitude [Flie 95] a permis de clarifier le lien entre les dérivées à considérer et le modèle nominal. En effet ce fixer une trajectoire de sortie revient à faire évoluer l'état suivant une trajectoire de référence définie par le point initial $x(0) = p$ et le point final $x(t_r) = q$. Or pour un système plat, l'état peut s'exprimer en fonction de la sortie plate y et d'un nombre fini de ses dérivées. Il est donc possible de trouver la trajectoire de la sortie plate y_{ref}(t) vérifiant ces conditions. De là, on en déduit aisément la commande u_{ref}(t) à générer pour qu'en l'absence de toute perturbation la sortie plate suive la sortie de référence.

Une solution consiste à déterminer une fonction temporelle y_{ref}(t) en utilisant un polynôme en t de degré minimal vérifiant les conditions initiales et finales. Cependant si l'on cherche à déterminer le transfert entre le signal de référence et un échelon d'entrée pour modéliser la génération de trajectoire comme cela se fait classiquement dans le cas du schéma à deux degrés de liberté, on constate que ce transfert est instable.

En effet, la trajectoire déterminée n'est valable que dans l'intervalle de temps [o ; t_r], car le polynôme en t diverge lorsque le temps tend vers l'infini. Il est alors nécessaire, Au-delà de l'instant t_r, de générer une nouvelle trajectoire y_{ref} et une nouvelle commande u_{ref}, même pour rester sur le même point. En se sens, un modèle cible linéaire ne peut pas convenir.

Que ce soit dans le cadre de l'approche linéaire ou dans l'approche pour les systèmes plats, le but est identique, déterminer un système hors boucle capable de générer la trajectoire de référence nominale y_{ref} et l'entrée de référence nominale u_{ref} .Ces deux références sont fournies au bloc de régulation, de manière à ce qu'en l'absence de toute perturbation (modèle, sorties, état) la sortie du système réel se déplace sur la trajectoire de référence, la sortie du bloc de régulation est alors égale à l'entrée de référence u_{ref}, la sortie du régulateur K étant nulle.

3.3.3 Bouclage découplant

Dans le cas général, il est nécessaire d'utiliser l'algorithme d'extension dynamique pour déterminer le bouclage dynamique endogène permettant de découpler le système plat.

Lorsque le système plat vérifie la condition nécessaire et suffisante pour être difféomorphe à un système linéaire, il n'est pas nécessaire de faire une extension dynamique. Le bouclage est alors obtenu en appliquant directement la technique simple de découplage et linéarisation par bouclage statique.

3.3.3 famille de modèle

La famille de modèles se compose d'un modèle nominal linéaire de matrice d'état F_{n} et d'un terme de perturbation linéaire. Nous utiliserons ce dernier dans le cadre de la spécification de la famille de modèles considérée pour la synthèse du régulateur linéaire K. L'expression du terme d'erreur a été déterminé dans le paragraphe 3.1. Nous nous limiterons pour la suite au cas de variation des paramètres du champ de vecteur nominal. On écrit alors le champ nominal $f_{\text{e,m}}=f_{\text{e,}\theta}(\theta_{\text{n}})$ et le champ perturbé $f_{\text{e,m}}= f_{\text{e,}\theta}(\theta)$ avec $\theta\neq \theta_{\text{n}}$.

Le modèle nominal linéaire se définit de la manière suivante:

$$F_n = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & F_m \end{pmatrix} \text{ avec } F_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et dim } (F_{\text{i}}) = k_{\text{i}} \tag{3.70}$$

Le modèle nominal peut alors se mettre sous la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^{k_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{s^{k_m}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = B_0 A_0^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

La décomposition en facteur premier n'étant pas unique, la méthode suivante permet de déterminer une décomposition particulière, la factorisation normalisée d'une matrice de transfert. La décomposition à droite normalisée du transfert nominal $G_0(s)$ vérifie alors la relation supplémentaire suivante:

$$\forall s \in \mathbb{C} \quad B_0(-s)^t \cdot B_0(s) + A_0(-s)^t \cdot A_0(s) = I_m \tag{3.72}$$

Le système nominal étant strictement propre, la factorisation première à droite normalisée s'exprime en fonction de la solution X de l'équation de Riccati suivante dans laquelle (F_0, G_0, H_0) constitue une réalisation du système linéaire nominal $G_0(s)$:

$$F_0^{\,t} \cdot X + X \cdot F_0 - X \cdot G_0 \cdot G_0^{\,t} \cdot X + H_0^{\,t} \cdot H_0 = 0 \tag{3.73}$$

La factorisation première à droite de $G_0(s)$ est alors donnée par:

$$B_0(s) = H_0 \cdot (sI - F_0 + G_0 L)^{-1} \cdot G_0 \tag{3.74}$$

$$A_0(s) = I_m - L \cdot (sI - F_0 + G_0 L)^{-1} \cdot G_0 \tag{3.75}$$

$$\text{avec } L = G_0^{\,t} \cdot X \tag{3.76}$$

Exemple:

$$\text{Soit } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = B_0 A_0^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{3.77}$$

On obtient alors la factorisation première à droite normalisée suivante

$$A_0(s) = \frac{1}{s^3 + (1+\sqrt{2})s^2 + (1+\sqrt{2})s + 1} \begin{pmatrix} s(s^2 + \sqrt{2}s + 1) & 0 \\ 0 & s^2(s+1) \end{pmatrix} \tag{3.78}$$

$$B_0(s) = \frac{1}{s^3 + (1+\sqrt{2})s^2 + (1+\sqrt{2})s + 1} \begin{pmatrix} s^2 + \sqrt{2}s + 1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \tag{3.79}$$

3.3.4 Spécification de stabilité robuste

La spécification de stabilité robuste consiste à déterminer le régulateur K pour qu'il assure la stabilité de la boucle fermée pour la famille de modèles définie au 3.4.1. Pour garantir la stabilité du système bouclé, on utilise la première méthode de Lyapounov. Pour ce faire, on considère la famille de modèles constituée par le modèle nominal de représentation (F_n, G_n, H_n) et l'ensemble des linéarisés tangents des termes d'erreurs. Cette famille est représentée par la réalisation $S(\theta)$ dépendant du vecteur de paramètres (θ_{fn}, θ_{gn}, θ_{hn}). La réalisation associée au modèle nominal étant $S(\theta_n) = (F_n, G_n, H_n,)$. Ce système peut se définir comme la transformation linéaire fractionnaire haute de la matrice P_δ par la matrice d'incertitude Δ_δ si et seulement si, il existe une matrice réelle S_Δ:

$$S_\Delta = \begin{bmatrix} F_\Delta & G_\Delta \\ H_\Delta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & H_1 & D_{12} \\ G_1 & 0 & 0 \\ D_{21} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.80}$$

$$\text{telle que } F_u\left(S_\Delta, \Delta_\delta(\delta)\right) = S(\theta_n + \delta) - S(\theta_n) \tag{3.81}$$

Alors la famille de modèles s'écrit de la manière suivante:

$$Q(s, \theta_n + \delta) = F_u\left(P(s), \Delta_\delta(\delta)\right) \tag{3.82}$$

$$\text{avec } P(s) = \begin{bmatrix} F_n & G_1 & G_n \\ H_1 & D_{11} & D_{12} \\ H_n & D_{21} & D_n \end{bmatrix} \text{ et } \Delta_\delta(\delta) = blocdiag\left(\delta_1 I_{r_1}, \ldots, \delta_n I_{r_n}\right) \tag{3.83))}$$

La matrice d'incertitudes associée possède une structure diagonale, dont chaque terme est réel. De plus, il est possible d'inclure une limitation fréquentielle de la famille de modèles par l'ajout d'un bloc d'incertitude non structuré Δ_w et d'une pondération associée w dans la matrice de structure. La synthèse d'un régulateur assurant la stabilité robuste se pose alors sous la forme du problème standard suivant:

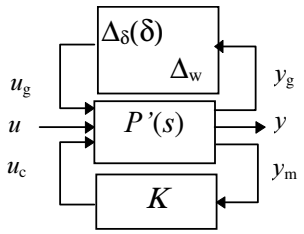


Fig. 3.9

On cherche le régulateur K tel que :

$$\mu_{\underline{\Delta}_\delta}\left(F_l\left(P(s), K\right)\right) \leq 1 \tag{3.84}$$

Remarques:

La famille de modèle a pour modèle nominal une matrice de transfert diagonale comportant uniquement des intégrateurs de degrés divers. Il est alors clair que le nombre de pôles instables du modèle ne peut être considéré constant pour l'ensemble de la famille. Cependant, ceci ne pose pas de problème pour la synthèse du régulateur *K,* car la matrice d'incertitudes Δ est composée de termes réels et de transferts stables, il est donc possible d'utiliser le théorème du petit gain. L'algorithme de mu-synthèse commence par une synthèse H_∞ qui détermine un premier régulateur stabilisant l'ensemble des modèles pour une matrice d'incertitudes pleine et complexe. Ensuite la mise à l'échelle (D-scaling) travaille sur la famille de modèles bouclée par ce premier régulateur, pour obtenir le niveau de performance désiré en prenant compte de la structuration de la matrice d'incertitudes.

L'approche additive bien que naturelle n'est pas utilisable ici. En effet la matrice d'incertitudes associée a une forte probabilité d'être instable et le nombre de pôles instables sur la famille de modèles n'a pas de raison d'être constant, ce qui interdit l'utilisation du théorème de stabilité robuste. Une approche possible, consisterait alors à déterminer la factorisation coprime de la famille de modèle vis à vis des variations paramétriques, pour obtenir une matrice d'incertitude stable.

3.3.5 Spécification de poursuite robuste

Le problème de la poursuite robuste ce simplifie avec l'approche par platitude puisque la génération des trajectoires de références vérifie la condition d'atteignabilité du modèle cible au nominal. Il nous faut donc concevoir parmi l'ensemble des régulateurs *K* stabilisant la famille de modèles, un régulateur particulier vérifiant la condition suivante:

$$\left\| W_{1P} \cdot (I + GK)^{-1} \left(G - G_0 \right) S^{(\alpha+1)} \right\|_\infty \leq 1 \tag{3.85}$$

Avec $S^{(\alpha+1)}$ une matrice de transfert contenant des dérivations sur la diagonale et dont les ordres correspondent au rang des sorties plates. L'utilisation du linéarisé tangent de l'erreur de modèle (G-G_0) se trouve alors justifiée si l'on considère que la stabilité robuste est acquise. Dans ce cas la sortie du système réel se trouve dans un voisinage de la sortie du modèle de référence, donc l'entrée du régulateur ε_y est proche d'un point d'équilibre, au voisinage duquel le linéarisé tangent a un sens.

3.3.6 Synthèse du régulateur à stabilité et poursuite robuste

Supposons maintenant que la famille de modèles linéarisés se mette sous la forme suivante:

$$Q = \left\{ G \middle| G = G_0 \left(I + W\Delta_G \right), \left\| \Delta_G \right\| \le 1 \right\} \tag{3.86}$$

Le problème de poursuite robuste peut se mettre sous la forme du problème standard suivant:

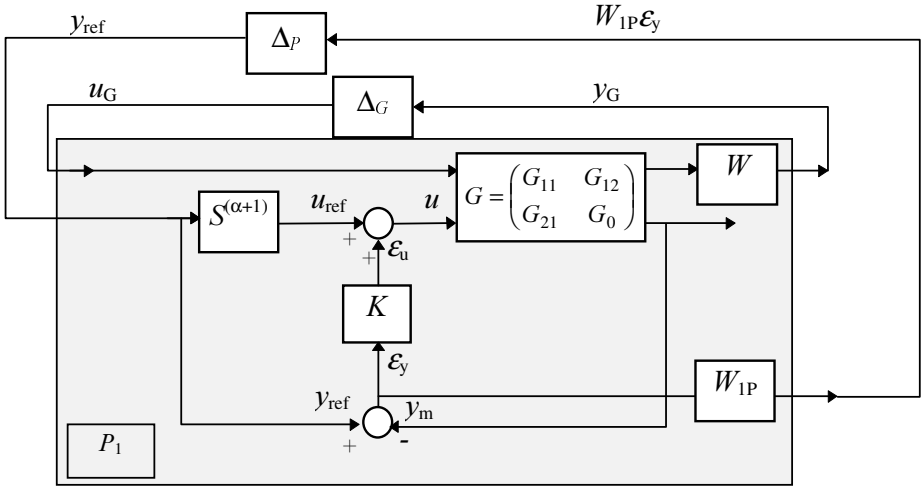


Fig. 3.10

Dans lequel le système augmenté est défini de la manière suivante:

$$\begin{pmatrix} y_G \\ W_{1P}\varepsilon_y \\ \varepsilon_y \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} u_G \\ y_{ref} \\ \varepsilon_u \end{pmatrix} \text{ avec } P_1 = \left(\begin{array}{cc|c} WG_{11} & WG_{12}S^{(\alpha+1)} & WG_{12} \\ -W_{1P}G_{21} & 0 & -W_{1P}G_0 \\ \hline -G_{21} & 0 & -G_0 \end{array} \right) \tag{3.87}$$

le bloc Δ_p est un bloc d'incertitudes fictives, utilisé pour traduire les objectifs de performance.

S'il existe un régulateur *K,* pour lequel les deux propriétés suivantes sont respectées:

$$F_l\left(P_1, K\right) \text{ est à stabilité interne pour la famille de modèles } G \tag{3.88}$$

$$\mu_{diag\left(\underline{\Delta}_\delta, \underline{\Delta}_G\right)}\left(F_l\left(P_1, K\right)\right) \le 1 \tag{3.89}$$

alors le régulateur *K* et la paramétrisation des trajectoires du système plat nominal est une solution au problème de stabilisation et poursuite robustes. La synthèse du régulateur *K* peut être obtenue par différentes approches dont la D-K itération et de l'optimisation H_∞ [Prem 95a]. Le précompensateur est défini par T=-A_0Q_{T0}+KM.

3.4 Conclusion

Nous avons proposé une méthodologie de synthèse de loi de commande dans le cas des systèmes plats. Cette approche consiste, dans un premier temps, à formuler le problème de la génération de trajectoire dans le cas d'un système plat. L'utilisation des sorties plates permet de simplifier considérablement le problème de la stabilisation car il n'y a plus de mode non observable. D'autre part, ces sorties sont fortement utiles pour déterminer la commande à fournir à l'entrée, à partir d'une trajectoire sur l'état. Cependant le découplage et la linéarisation par difféomorphisme et bouclage est sensible à la présence d'une famille de modèles et de perturbations exogènes. Mais, ces systèmes plats linéarisés ont des trajectoires nominales de système linéaire, les techniques de commande linéaire classique peuvent donc s'appliquer. Le régulateur a alors pour objectif de compenser les écarts de trajectoire par adjonction d'un signal supplémentaire sur l'entrée de référence. Ceci apparaît naturellement dans le schéma à deux degrés de liberté générique. Nous proposons dans un second temps de déterminer le régulateur linéaire K du schéma à deux degrés de liberté générique en posant la synthèse du régulateur sous la forme d'un problème standard. La prise en compte des perturbations de modèle est intégrée dans une matrice d'incertitudes Δ déterminée à partir du linéarisé tangent de l'erreur de modèle. La méconnaissance du système au-delà d'une certaine fréquence ce traduit par une pondération supplémentaire. Les perturbations exogènes sont modélisées par l'intermédiaire de filtre formeur et de fonctions de pondération. Une fois le problème posé, la synthèse peut être effectuée par différentes approches.

Chapitre IV : Application
Commande robuste d'une machine synchrone

4.1 Modélisation des machines à courants alternatifs

4.1.1 Introduction:

Nous rappellerons dans ce paragraphe quelques notions élémentaires sur le principe de fonctionnement et la modélisation des machines à courants alternatifs. Ces rappels permettront de mettre en relief les intérêts et les différences entre les stratégies de commande existantes et celle proposée dans ce mémoire. Le lecteur désirant une présentation synthétique du sujet pourra se référer aux ouvrages et articles suivants [Lese 81], [Chat 88], [Haut 93], [Caro 95], pour la modélisation des machines à courants alternatifs, et pour les méthodes de commande des machines à courants alternatifs aux références [Haut 93], [Caro 95], [Leon 96], [Grel 97].

Toutes les machines à courants alternatifs admettent sous réserve de certaines hypothèses simplificatrices un modèle décrit par un système algébro-différentiel non linéaire. Il a été proposé pour ce système un nombre important de réalisations en fonction des objectifs de commande (couple, vitesse, position), de la nature de la source de puissance (tension, courant), du référentiel de travail ($\{a,b,c\}$,$\{\alpha,\beta\}$ ou $\{d,q\}$) et des composantes du vecteur d'état (flux ou courants statoriques et rotoriques). Ainsi une des premières méthodes de commande a consisté à choisir et orienter le référentiel de travail $\{d,q\}$ de manière à linéariser au mieux le système d'équations. Ceci a débouché sur différentes commandes vectorielles à flux orienté. Pour la machine asynchrone une comparaison des différentes orientations possibles en vue de la commande à flux orienté est proposée dans [Piet 92]. Pour la machine synchrone, différentes stratégies de commande linéaire sont étudiées dans [Piou 91] en fonction du choix du référentiel ($\{a,b,c\}$ ou $\{d,q\}$). Un exemple d'utilisation industrielle est proposé dans [Caza 95]. Les méthodes de linéarisation exacte entrée-sortie [Isid 86] ont trouvé rapidement comme champ d'application la commande des machines à courants alternatifs. Ainsi, la linéarisation des transferts entrées de commande-couple électromagnétique [Luca 89], ou entrées de commande-vitesse [Bell 91] pour un modèle de machine asynchrone dans le référentiel de

travail $\{d,q\}$, a été obtenue par immersion et bouclage statique. Dans le référentiel de travail $\{\alpha,\beta\}$, [Mari 91] a proposé une loi de commande de linéarisation entrée-sortie. Pour la machine synchrone, on retrouve l'utilisation de techniques semblables dans [Piou 91], [Geor 92], [Chel 94]. A. Glumineau *et al* [Glum 93] proposèrent une approche de la commande robuste d'une machine synchrone par mode glissant. La technique de linéarisation entrées-état par bouclage dynamique [Char 89b], et le concept de platitude des systèmes dynamiques [Flies 92] ont pu être mis en pratique dans le cadre de la commande des machines asynchrones. En particulier, la linéarisation des dynamiques entrées-état de la machine asynchrone par bouclage dynamique a été déterminée [Chia 93], et des sorties plates ont été proposées [Mart 96]. Nous montrerons que ces sorties sont valables les machines à courants alternatifs « à pôles lisses ».

Enfin l'implantation numérique des lois de commande non linéaires pour la commande de système continu a été étudiée [Mona 88], [Geor 92], et a permis d'introduire la classe des systèmes finiment discrétisables [Chel 94].

Conversion électromécanique dans les machines à courants alternatifs

Le principe de la conversion électromécanique dans les machines à courants alternatifs est basé sur l'interaction magnétique entre une partie mobile, le rotor et une partie fixe le stator. Les deux parties sont constituées d'éléments ferromagnétiques permettant de conduire le flux magnétique et de supporter les efforts, et de conducteurs électriques en cuivre ou en aluminium formant des enroulements. Ces bobinages sont parcourus par des courants résultant de l'action de sources de tension ou de courant sur certains de ces circuits électriques d'une part et du couplage magnétique de ces circuits d'autre part.

Il est possible de montrer [Chat 88] pour ce type de machine que le couple électromagnétique entre le rotor et le stator existe uniquement si la machine a un nombre de pôles stator égal au nombre de pôles rotor. De plus, ce couple est à valeur moyenne non nulle en régime permanent si les champs magnétiques rotorique et statorique tournent à la même vitesse. On a donc en régime permanent, un bobinage statorique et un bobinage rotorique parcourus par des courants polyphasés. Chaque bobinage crée une force magnétomotrice résultante dont la répartition spatiale est $p\pi$ périodique. Sa répartition temporelle vis à vis du bobinage est égale à la phase du courant dans le bobinage divisé par le nombre de paires de pôles p.

En régime permanent ces forces magnétomotrices exprimées dans le même référentiel (ε_r, ε_s) sont sinusoïdales, et de même pulsation en raison de la condition de synchronisme. Les

amplitudes et les phases des forces magnétomotrices dépendent du point de fonctionnement considéré. On peut alors leur associer, deux nombres complexes ($\underline{\varepsilon}_r$, $\underline{\varepsilon}_s$) représentés ci-après dans le plan complexe.

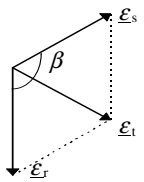


fig. 4.1

Le couple en régime permanent est alors fonction de l'amplitude des deux forces magnétomotrices et de leur déphasage.

$$Cem = f\left(\varepsilon_r, \varepsilon_{s,} \beta\right) \tag{4.1}$$

En régime transitoire, il n'est plus possible d'utiliser cette représentation car la condition de synchronisme n'est plus respectée. En effet une modification du point de fonctionnement en régime permanent se traduit par une modification de la position relative des forces magnétomotrices. Ceci n'est possible que si les forces magnétomotrices n'ont pas de manière transitoire la même vitesse. Néanmoins cette représentation est intéressante pour appréhender les différents modes d'alimentation utilisés pour la commande en couple et en vitesse. En effet, imposer un courant revient à imposer une force magnétomotrice dans une bobine couplée alors qu'imposer une tension revient à imposer un flux résultant dans une bobine couplée.

Constitution des machines industrielles standard

Une machine à courant alternatif est, du point de vue électrique, un ensemble de bobinages couplés magnétiquement. Les stators d'une machine synchrone et d'une machine asynchrone sont semblables. Ils sont constitués pour les machines industrielles de trois bobinages alimentés par des grandeurs triphasées, dont les axes sont décalés de $2\pi/3p$ avec p le nombre de paires de pôles. Ces bobinages sont répartis pour créer, lorsqu'ils sont alimentés par des courants sinusoïdaux triphasés, une force magnétomotrice résultante la plus sinusoïdale possible. La période spatiale de cette force magnétomotrice est de $2\pi/p$. Par contre en fonction du type de machine considéré, le rotor diffère. Dans le cas d'une machine asynchrone, le rotor comporte trois bobinages répartis pour avoir une force magnétomotrice résultante sinusoïdale dont la période mécanique est de $2\pi/p$. Dans le cas d'une machine synchrone, le rotor peut comporter un bobinage alimenté par une tension continue, ou bien des aimants permanents. La structure magnétique du rotor est plus ou moins homogène, mais comporte toujours p paires de pôles.

Equation algébrique flux-courants

Les flux dans les bobinages statoriques s'expriment en fonction des courants statoriques i_s et de la matrice des inductances propres $L_{ss}(\theta)$ d'une part, et de l'action des courants rotoriques i_r et de la matrice de couplage $L_{sr}(\theta)$ d'autre part. On obtient dans le référentiel statorique la relation suivante:

$$[\psi_s] = [L_{ss}(\theta)] \cdot [i_s] + [L_{sr}(\theta)][i_r] \tag{4.2}$$

Avec θ la position du rotor dans le référentiel statorique.

Les flux dans les bobinages rotoriques s'expriment en fonction des courants rotoriques i_r et de la matrice des inductances propres $L_{rr}(\theta)$ d'une part, et de l'action des courants statoriques i_s et de la matrice de couplage $L_{rs}(\theta)$ d'autre part. On obtient dans le référentiel rotorique la relation suivante:

$$[\psi_r] = [L_{rr}(\theta)] \cdot [i_r] + [L_{rs}(\theta)][i_s] \tag{4.3}$$

Les matrices des inductances propres statoriques ont la même structure pour une machine synchrone ou asynchrone. Par contre les rotors de ces machines pouvant être très différents, les matrices de couplage dépendent de la structure considérée (bobinage triphasé, bobinage continu, aimant permanent, existence d'amortisseurs...). Cependant grâce à la notion de machine primitive ou machine de Kron, il est possible de représenter toutes ces machines à l'aide d'un seul et même modèle de machine diphasée, en utilisant certaines transformations.

Equations électriques

L'équation électrique relative aux bobinages statoriques s'écrit dans le référentiel statorique:

$$[u_s] = [R_s] \cdot [i_s] + \frac{d}{dt}[\psi_s] \tag{4.4}$$

L'équation électrique relative aux bobinages rotoriques s'écrit dans le référentiel rotorique:

$$[u_r] = [R_r] \cdot [i_r] + \frac{d}{dt}[\psi_r] \tag{4.5}$$

Equation électromécanique

L'équation électromécanique reliant le couple électromagnétique fourni par la machine, aux flux et aux courants, s'obtient à partir du bilan énergétique suivant:

$$dW_e(t) = \left\{[u_r]^t \cdot [i_r] + [u_s]^t \cdot [i_s]\right\}dt = dW_j(t) + dW_{mag}(t) + dW_{mécaj}(t) \tag{4.6}$$

avec $dW_j(t)$ l'énergie dissipée par effet Joule, définie par la relation suivante:

$$dW_j(t) = \left\{([R_r]\cdot[i_r])^t \cdot [i_r] + ([R_s]\cdot[i_s])^t \cdot [i_s]\right\}dt \tag{4.7}$$

On en déduit une relation entre l'énergie mécanique, la variation d'énergie magnétique dans la machine et l'énergie fournie au circuit magnétique:

$$dW_e(t) - dW_j(t) = [i_r]^t \cdot d[\psi_r] + [i_s]^t \cdot d[\psi_s] = dW_{mécca}(t) + dW_{mag}(t) \tag{4.8}$$

Or l'énergie magnétique dans la machine dépend de la position du rotor et du flux dans la machine. On en déduit l'expression du couple électromagnétique suivante:

$$C_{em} = -\frac{\partial W_{mag}(\psi_r, \psi_s, \theta)}{\partial t} = \frac{\partial W'_{mag}(i_r, i_s, \theta)}{\partial t} \tag{4.9}$$

Il est généralement préférable d'utiliser la fonction d'état $W'_{mag}(i_r, i_s, \theta)$ appelée coénergie magnétique car cette fonction dépend des courants. On construit cette nouvelle fonction d'état à partir de l'énergie magnétique et de la relation suivante:

$$W_{mag}(\psi_r \psi_s, \theta) + W'_{mag}(i_r, i_s, \theta) = [i_r]^t \cdot [\psi_r] + [i_s]^t \cdot [\psi_s] \tag{4.10}$$

Equation mécanique

L'équation dynamique des parties tournantes s'écrit:

$$J\frac{d^2\theta}{dt} = C_{em} - C_{ch}(\theta, \dot{\theta}) \tag{4.11}$$

avec J le moment d'inertie total des masses tournantes, θ la position angulaire du rotor, C_{em} le couple électromagnétique fourni par la machine, et C_{ch} le couple exercé par la charge et les liaisons mécaniques dépendant de la position et la vitesse du rotor.

Machine primitive ou machine de Kron

La diversité des constitutions des machines réelles tant au niveau des enroulements (concentrés ou répartis) que de leur géométrie propre est trop grande pour pouvoir l'utiliser dans le cadre d'une analyse générale des machines. A chaque type de machine est donc associé un modèle dynamique. Cependant partant du constat que le principe physique d'interaction magnétique est commun à toutes ces machines, il était naturel de rechercher une approche unifiée basée sur un seul modèle. La théorie générale des machines apporte une solution à cette question avec la notion de machine primitive ou encore machine de Kron [Kron 51]. Ce modèle est caractérisé par une décomposition des grandeurs électriques suivant un système d'axes en quadrature indicés d (axe direct) et q (axe en quadrature). Le stator de la machine de Kron est constitué d'un enroulement aligné sur l'axe direct d et d'un enroulement aligné sur l'axe en quadrature q. Le rotor de la machine de Kron est à collecteur avec deux jeux de balais, calés selon les axes d et q. On obtient ainsi deux enroulements pseudo-stationnaires en quadrature. Il a été montré que tout modèle de machines électromagnétiques tournantes est équivalent à un modèle de machine primitive, ayant un certain nombre de bobinages disposés sur les axes d et q. En dehors des machines à courant continu, il est nécessaire de convertir les variables de la machine pour obtenir celles de la machine primitive. Cette conversion passe par la transformation des bobinages en des bobinages équivalents disposés sur les axes d et q statorique et rotorique.

Transformation d'un enroulement triphasé en trois enroulements orthogonaux

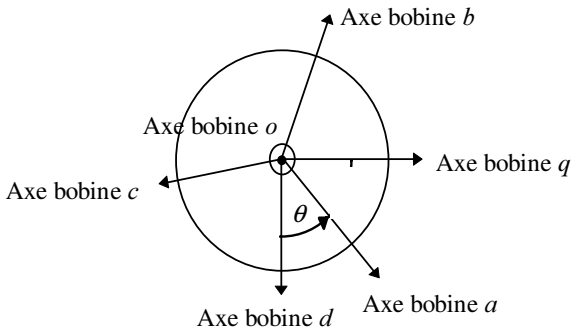


fig. 4.2

Le système constitué des bobinages a, b, c dont les axes sont décalés de 120° est équivalent du point de vue électrique et magnétique au système constitué des bobinages o, d, q dont les axes sont orthogonaux. Les matrices de passage des tensions, courants et flux sont déterminées pour respecter l'équivalence énergétique électrique et magnétique entre les deux systèmes. On obtient alors les matrices de passage suivantes:

Matrice de passage pour les courants:

$$\begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

Matrice de passage pour les tensions:

$$\begin{pmatrix} v_d \\ v_q \\ v_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} = \left[A^t\right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

Matrice de passage pour les flux:

$$\begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{pmatrix} = \left[A^t\right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

Remarques:

Ces matrices de passage résultent de deux transformations. Une première matrice traduit la transformation du système (a,b,c) en un système de composantes homopolaires fixes appelé (α,β,o). Une seconde matrice traduit la rotation d'un angle θ autour de l'axe o pour passer du repère orthogonal (α,β,o) au repère orthogonal (d,q,o).

Dans la pratique on ne considère pas les composantes homopolaires car les structures des machines standards sont telles que cette composante est nulle. On se limite alors aux composantes $\alpha\beta$ ou dq. La matrice de passage des grandeurs $\alpha\beta$ aux grandeurs dq s'obtient à l'aide de la matrice de rotation suivante:

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

On a alors les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_q \end{pmatrix} = P(-\theta) \cdot \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \psi_\beta \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

$$\begin{pmatrix} v_d \\ v_q \end{pmatrix} = P(-\theta) \cdot \begin{pmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

$$\begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} = P(-\theta) \cdot \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

4.1.2 modèle des machines à courants alternatifs à structure magnétique isotrope

Hypothèses

Pour pouvoir utiliser le principe de superposition et exprimer le comportement de la machine à partir de ses paramètres électriques en utilisant la notion d'inductance et de mutuelle, il est nécessaire de faire certaines hypothèses simplificatrices sur l'état magnétique de la machine. On supposera donc que:

- Le point de fonctionnement magnétique de la machine se trouve dans la zone linéaire.
- Les forces magnétomotrices rotorique et statorique sont à répartition sinusoïdale.
- Les pertes ferromagnétiques sont nulles.

De plus on considère que les structures magnétiques sont isotropes. Les inductances propres des bobinages rotorique et statorique ainsi que les mutuelles inductances stator-stator et rotor-rotor sont donc indépendantes de la position θ du rotor.

Machine diphasée équivalente:

On souhaite un modèle valable pour les machines asynchrones et synchrones respectant les hypothèses précédentes. D'après ce qui précède et sous l'hypothèse que les courants homopolaires sont nuls, ces machines peuvent être représentées sous la forme de bobinages en quadrature pour le stator et le rotor conformément au schéma suivant:

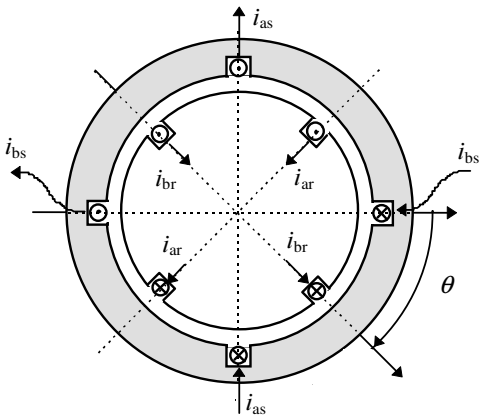


fig. 4.3

Les enroulements rotoriques sont court-circuités dans le cas de la machine asynchrone. Ils sont alimentés en tension dans le cas de la machine synchrone. Dans ce dernier cas, les tensions dépendent du mode d'excitation. Il sera ainsi possible de modèliser aussi bien une machine à aimants permanents qu'une machine à excitation continue et amortisseurs.

Une manière plus compacte pour exprimer les grandeurs orthogonales consiste à utiliser la représentation à un axe [chat 88]. Pour ce faire on adjoint à deux grandeurs orthogonales de même nature et dans le même repère une grandeur complexe associée. On définit ainsi les grandeurs suivantes:

Représentation des courants et tensions statoriques et rotoriques

$$\begin{aligned} \underline{i}_s &= i_{sa} + j \cdot i_{sb} \\ \underline{i}_r &= i_{ra} + j \cdot i_{rb} \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} \underline{u}_s &= u_{sa} + j \cdot u_{sb} \\ \underline{u}_r &= u_{ra} + j \cdot u_{rb} \end{aligned} \tag{4.20}$$

Flux électrique résultant dans les phases statoriques dans le référentiel statorique

$$\underline{\psi}_s = L_s \underline{i}_s + M e^{jp\theta} \underline{i}_r \tag{4.21}$$

Flux électrique résultant dans les phases rotoriques exprimé dans le référentiel rotorique

$$\underline{\psi}_r = L_r \underline{i}_r + M e^{-jp\theta} \underline{i}_s \tag{4.22}$$

Equations électriques statorique et rotorique

$$R_s \underline{i}_s + \frac{d\underline{\psi}_s}{dt} = \underline{u}_s \tag{4.23}$$

$$R_r \underline{i}_r + \frac{d\underline{\psi}_r}{dt} = \underline{u}_r \tag{4.24}$$

Equation électromécanique

$$C_{em} = p \operatorname{Im}\left\{ \underline{\psi}_s^* \cdot \underline{i}_s \right\} = p \operatorname{Im}\left\{ \underline{\psi}_r \cdot \underline{i}_r^* \right\} \tag{4.25}$$

Equation mécanique

$$J \frac{d\omega}{dt} = C_{em} - T_L \tag{4.26}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \tag{4.27}$$

Remarques:

Le cas de la machine asynchrone correspond à une tension u_r=0.

Pour certaines machines synchrones, la structure magnétique est anisotrope. il n'est alors plus possible d'utiliser cette représentation car les inductances propres du stator et du rotor ne sont plus les mêmes sur les deux axes en quadrature. Il faut alors utiliser une représentation à deux axes, soit $\alpha\beta$ si l'on se place dans le référentiel statorique, soit dq si l'on se place dans un référentiel tournant qui peut être lié au rotor, au flux rotorique, au f.m.m rotor,...

4.1.3 Modèle de machine synchrone à structure magnétique anisotrope sans amortisseur

Hypothèses

Les hypothèses sur l'état magnétique, les forces magnétomotrices et les pertes ferromagnétiques sont identiques à celles faites dans le paragraphe précédent.

Par contre on désire prendre en compte l'anisotropie de la structure magnétique du rotor. Les inductances propres et les mutuelles des bobinages rotorique et statorique sont donc toutes dépendantes de la position θ du rotor. On modélise l'anisotropie magnétique du rotor en définissant la structure magnétique suivant deux axes. Un axe d appelé axe direct est lié à la direction du flux à vide du rotor. Le deuxième axe q appelé axe en quadrature est décalé de 90° électrique vis à vis de l'axe direct. Suivant ces deux axes la réluctance magnétique diffère.

On suppose de plus que la machine n'a pas d'amortisseur, et ne comporte donc pas de bobinage auxiliaire court-circuité au rotor. Le rotor comporte donc soit un ensemble d'aimants permanents, soit un enroulement qui crée suivant l'axe direct le flux à vide.

Machine diphasée équivalente:

<u>Cas des machines à rotor bobiné</u>

Les inductances propres des bobinages statorique ainsi que les mutuelles inductances stator-stator sont donc dépendantes de la position θ du rotor. Cependant en se plaçant dans le référentiel dq lié au rotor, les expressions des matrices d'inductances et de mutuelles se simplifient considérablement. Ainsi on obtient:

Flux électriques statoriques exprimés dans le référentiel rotorique:

$$\begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{rs} i_{rd} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

Flux rotorique dans le référentiel rotorique:

$$\psi_{rd} = M_{sr} i_{sd} + L_r i_{rd} \tag{4.29}$$

Equations électriques statorique exprimées dans le référentiel rotorique:

$$R_s i_{sd} + \frac{d\psi_{sd}}{dt} - p\frac{d\theta}{dt}\psi_{sq} = v_d \tag{4.30}$$

$$R_s i_{sq} + \frac{d\psi_{sq}}{dt} + p\frac{d\theta}{dt}\psi_{sq} = v_q \tag{4.31}$$

Equation électrique rotorique exprimée dans le référentiel rotorique:

$$R_r i_{rd} + \frac{d\psi_{rd}}{dt} = v_r \tag{4.32}$$

Equation électromécanique

$$C_{em} = p\left(\psi_{sd} i_{sq} - \psi_{sq} i_{sd}\right) = p\left\{\left[\left(L_d - L_q\right) i_{sd} + M_{rs} i_{rd}\right] \cdot i_{sq}\right\} \tag{4.33}$$

<u>Cas des machines à aimants permanents</u>

Pour ces machines le bobinage rotorique est remplacé par des aimants permanents. Le modèle est alors plus simple car l'équation électrique rotorique (4.32) est supprimée, le flux rotorique crée par le rotor dans le flux statorique suivant l'axe *d* est alors noté ψ_f. La machine admet le modèle diphasé équivalent suivant:

Flux électriques statoriques exprimés dans le référentiel rotorique:

$$\begin{bmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_f \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

Equations électriques statoriques exprimées dans le référentiel rotorique:

$$R_s i_{sd} + \frac{d\psi_{sd}}{dt} - p\frac{d\theta}{dt}\psi_{sq} = v_d \tag{4.35}$$

$$R_s i_{sq} + \frac{d\psi_{sq}}{dt} + p\frac{d\theta}{dt}\psi_{sq} = v_q \tag{4.36}$$

Equation électromécanique

$$C_{em} = p\left(\psi_{sd} i_{sq} - \psi_{sq} i_{sd}\right) = p\left\{\left[\left(L_d - L_q\right) i_{sd} + \psi_f\right] \cdot i_{sq}\right\} \tag{4.37}$$

Remarque:

La saillance de ces machines est liée à la diversité des réluctances des matériaux constituant le rotor et non à la géométrie de l'entrefer. Ce dernier est en général d'épaisseur constante.

4.2 Cas des machines à structure magnétique isotrope

4.2.1 Platitude du modèle

La machine à structure magnétique isotrope qui a connu le plus grand engouement dans les vingt dernières années est certainement la machine asynchrone. Son principal intérêt réside dans sa simplicité de construction et la robustesse de son rotor. En contre partie la réalisation de loi de commande est moins aisée. En effet induire des courants au rotor via les tensions statoriques simplifie beaucoup la structure du rotor car il n'est plus nécessaire de l'alimenter. Cependant le fait de court-circuiter le bobinage rotorique revient à imposer une tension rotorique nulle, ce qui rend le réglage des flux ou des forces magnétomotrices statoriques et rotoriques plus complexe. Ceci se traduit pour le problème de la commande, par des variables d'état correspondant aux grandeurs rotoriques non mesurables et une modélisation non linéaire commune à toutes les machines à courant alternatif. De plus certains paramètres sont sensibles à des variations de la température ou de l'état magnétique de la machine, comme la résistance rotorique et les inductances. Enfin la méconnaissance de la nature de la charge se traduit par des incertitudes de modèle assez importantes. Ceci en fait un cas d'espèce suffisamment complexe pour inciter un travail de recherche important dans le cadre de la commande non linéaire des machines asynchrones [Chel 96], [Chia 93], [Chia 95], [Mari 93], [Mart 96], [Orte 93], [Raum 93].

En particulier P. Martin et P. Rouchon [Mart 96] ont montré que le modèle de la machine d'induction est un système différentiellement plat. La synthèse d'une loi de commande robuste pour ce type de machine s'en trouve grandement simplifiée. A partir de la modélisation d'une machine asynchrone, ils montrent que l'angle électrique α (correspondant à la phase du flux rotorique total ψ_r dans le référentiel rotorique), et l'angle θ (représentant la position du référentiel rotorique dans le référentiel statorique), constituent des sorties plates pour le modèle algébro-différentiel de la machine.

Nous nous proposons d'utiliser un raisonnement semblable pour le cas des machines à courant alternatif dont la structure magnétique est isotrope et dont le modèle diphasé comporte deux enroulements statoriques et deux enroulements rotoriques. Les enroulements rotoriques peuvent être alimentés ou court-circuités. On prend ainsi en compte aussi bien les machines asynchrones que les machines synchrones respectant les hypothèses énoncées au paragraphe 4.1.2.

Le flux total au rotor peut être représenté par une fonction temporelle complexe $\underline{\psi}_r = \rho.e^{j\alpha}$ comme cela est proposé au paragraphe 4.1.2. Dans le référentiel rotorique, la partie réelle de $\underline{\psi}_r$ correspond à la projection du flux suivant l'axe direct et la partie imaginaire de $\underline{\psi}_r$ correspond à la projection du flux suivant l'axe en quadrature. La position angulaire du flux dans le référentiel lié au rotor est alors une sortie plate. Pour la machine asynchrone, cette sortie évolue même en régime permanent puisque le flux rotorique glisse relativement à la position du rotor. Dans le cas de la machine synchrone, la position du flux rotorique par rapport au rotor est fixée en régime permanent par le point de fonctionnement considéré.

Cette démarche peut s'appliquer à toutes les machines à courant alternatif dont le modèle correspond aux équations (4.19 à 4.27). Le cas de la machine d'induction n'est alors qu'un cas particulier pour lequel les tensions rotoriques sont imposées égales à zéro. Lorsque les tensions rotoriques sont non nulles on obtient le cas des machines synchrones. Certains rotors de machine synchrone à aimants permanents ne comportent aucun conducteur électrique court-circuité. Dans ce cas le modèle précédent n'a plus d'intérêt car il prend en compte à la fois le couple synchrone et le couple asynchrone qui n'existe pas pour ces machines. Nous étudierons ce cas particulier au paragraphe 4.3.

Cependant si le modèle d'une machine asynchrone est structurellement identique à celui d'une machine synchrone, les paramètres diffèrent en raison de la différence du mode de génération du flux rotorique. En effet, la nécessité d'induire les courants rotoriques dans la machine asynchrone impose une épaisseur d'entrefer minimale, pour limiter l'amplitude du courant de magnétisation qui s'ajoute au courant principal. La magnétisation de la machine synchrone est obtenue soit par un ensemble d'aimants permanents, soit par un bobinage d'excitation, placé au rotor. Il n'est donc pas nécessaire d'avoir dans ce cas un entrefer de dimension minimale. Cette différence influe notablement sur les paramètres des deux catégories de machine.

L'expression (4.25) du couple électromoteur C_{em} s'exprime en fonction du flux ψ_r de la manière suivante:

$$\begin{aligned} C_{em} &= p\,\mathrm{Im}\left(\underline{i}_r^{\,*}\cdot\underline{\psi}_r\right) = p\,\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{R_r}\cdot\left(\underline{u}_r - \frac{d\underline{\psi}_r}{dt}\right)\right)^*\underline{\psi}_r\right) \\ C_{em} &= \frac{p}{R_r}\left(\rho^2\dot{\alpha}\right) + \frac{p}{R_r}\rho\left(\cdot u_{ra}\sin\alpha - u_{rb}\cos\alpha\right) = C_{asyn} + C_{syn} \end{aligned} \tag{4.38}$$

L'équation mécanique (4.26) devient:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{p}{R_r}\left(\rho^2\dot{\alpha}\right) + \frac{p}{R_r}\rho\left(u_{ra}\sin\alpha - u_{rb}\cos\alpha\right) - C_{ch} \tag{4.39}$$

Sous l'hypothèse réaliste que le couple de charge C_{ch} ne dépend que de la vitesse du rotor, de la position, et du temps, on peut exprimer le module ρ du flux rotorique total ψ_r en fonction des sorties plates α et θ et d'un nombre fini de leurs dérivées. Pour ce faire, on détermine la solution réelle positive de l'équation du second degré suivante:

$$\dot{\alpha}\rho^2 + \left(u_{ra}\sin\alpha - u_{rb}\cos\alpha\right)\cdot\rho - \frac{R_r\left(J\ddot{\theta} + C_{ch}\right)}{p} = 0 \tag{4.40}$$

On constate que cette équation n'admet plus de solution lorsque ψ_f et $\dot{\alpha}$ sont nuls, ce qui correspond à une singularité pour le cas de la machine asynchrone. En effet la dérivée de la position du flux rotorique α/p n'est autre que la vitesse de glissement de la machine asynchrone. Or à glissement nul l'induction magnétique est nulle, par conséquent il n'y a plus interaction magnétique et donc plus de couple.

Alors le vecteur d'état comprenant deux éléments parmi les flux et les courants rotoriques et statoriques d'une part, et, la vitesse et la position du rotor d'autre part, s'exprime comme une fonction du vecteur des sorties plates y et d'un nombre fini de ses dérivées. Ainsi pour les flux et les courants on obtient les relations suivantes:

$$\underline{\psi}_r = \frac{1}{2\dot{\alpha}}\left\{-u_{ra}\sin\alpha - u_{rb}\cos\alpha + \sqrt{\left(u_{ra}\sin\alpha - u_{rb}\cos\alpha\right)^2 + 4\dot{\alpha}\cdot\frac{R_r}{p}\left(J\ddot{\theta} + C_{ch}\right)}\right\}e^{j\alpha} \tag{4.41}$$

$$\underline{\psi}_r = A\left(y,\dot{y},\ddot{y}\right)$$

$$\underline{i}_r = \frac{1}{R_r}\left(\underline{u}_r - \frac{d\underline{\psi}_r}{dt}\right) = \dot{A}\left(y,\dot{y},\ddot{y},\dddot{y}\right) \tag{4.42}$$

$$\underline{i}_s = -\frac{1}{M}\left(\underline{\psi}_{tr} - L_r\underline{i}_r - \underline{\psi}_f\right)e^{jp\theta} = B\left(y,\dot{y},\ddot{y},\dddot{y}\right) \tag{4.43}$$

$$\underline{\psi}_s = L_s\underline{i}_s + e^{jp\theta}\left(\underline{M\cdot i}_r + \underline{\psi}_f^{'}\right) = C\left(y,\dot{y},\ddot{y},\dddot{y}\right) \tag{4.44}$$

De même le vecteur d'entrée $\underline{u}_s$ s'exprime en fonction du vecteur des sorties plates y et d'un nombre fini de ses dérivées de la manière suivante:

$$\underline{u}_s = R_s\underline{i}_s + \frac{d\underline{\psi}_s}{dt} = D\left(y,\dot{y},\ddot{y},\dddot{y},y^{(4)}\right) \tag{4.45}$$

La connaissance du vecteur des sorties plates y et de ses dérivées jusqu'à l'ordre quatre permet de connaître toutes les variables décrivant le comportement dynamique du moteur.

4.2.2 Linéarisation entrées-état par bouclage dynamique

Modèle d'état d'une machine à structure magnétique isotrope dans le référentiel statorique

Dans un premier temps nous allons exprimer l'équation (4.24) vis à vis des flux et des courants rotoriques ramenés au stator. Pour cela on utilise la matrice de rotation $P(p\theta)$ où p représente le nombre de pôles de la machine et θ la position du rotor telle que $\theta(0)=0$. On définit ces nouvelles grandeurs de la manière suivante:

$$\begin{pmatrix} i'_{ra} \\ i'_{rb} \end{pmatrix} = P(p\theta)\cdot\begin{pmatrix} i_{ra} \\ i_{rb} \end{pmatrix} \tag{4.46}$$

$$\begin{pmatrix} u'_{ra} \\ u'_{rb} \end{pmatrix} = P(p\theta)\cdot\begin{pmatrix} u_{ra} \\ u_{rb} \end{pmatrix} \tag{4.47}$$

$$\begin{pmatrix} \psi'_{ra} \\ \psi'_{rb} \end{pmatrix} = P(p\theta)\cdot\begin{pmatrix} \psi_{ra} \\ \psi_{rb} \end{pmatrix} \tag{4.48}$$

On déduit alors de l'équation (4.24) la relation suivante:

$$R_r\cdot\begin{pmatrix} i'_{ra} \\ i'_{rb} \end{pmatrix} + \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \psi'_{ra} \\ \psi'_{rb} \end{pmatrix} + p\frac{d\theta}{dt}\begin{pmatrix} +\psi'_{rb} \\ -\psi'_{ra} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_{ra} \\ u'_{rb} \end{pmatrix} \tag{4.49}$$

Pour les flux rotoriques ramenés au stator on obtient les relations suivantes:

$$\begin{pmatrix} \psi'_{ra} \\ \psi'_{rb} \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} i_{sb} \\ i_{sb} \end{pmatrix} + L_r\begin{pmatrix} i'_{ra} \\ i'_{rb} \end{pmatrix} \tag{4.50}$$

Pour les flux statoriques exprimés en fonction des courants rotoriques ramenés au stator on obtient les relations suivantes:

$$\begin{pmatrix} \psi_{sa} \\ \psi_{sb} \end{pmatrix} = L_s\begin{pmatrix} i_{sb} \\ i_{sb} \end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} i'_{ra} \\ i'_{rb} \end{pmatrix} \tag{4.51}$$

L'intérêt de cette première transformation est d'obtenir des relations entre les flux et les courants qui soient indépendantes de la position du rotor. La position du rotor intervient bien mais uniquement dans la transformation des flux et des courants.

Nous allons maintenant exprimer le système différentiel issu des équations (4.23 et 4.24) à l'aide des courants statoriques (i_{sa},i_{sb}) et les flux rotoriques ramenés au stator (ψ'_{ra}, ψ'_{rb}).

$$R_s\begin{pmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \end{pmatrix} + \frac{M}{L_r}\begin{pmatrix} \psi'_{ra} \\ \psi'_{rb} \end{pmatrix} + \left(L_s - \frac{M^2}{L_r}\right)\cdot\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sa} \\ u_{sb} \end{pmatrix} \tag{4.52}$$

$$\frac{R_r}{L_r}\begin{pmatrix} \psi'_{ra} \\ \psi'_{rb} \end{pmatrix} - M\frac{R_r}{L_r}\begin{pmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \end{pmatrix} + \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \psi'_{ra} \\ \psi'_{rb} \end{pmatrix} + p\frac{d\theta}{dt}\begin{pmatrix} \psi'_{rb} \\ \psi'_{ra} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_{ra} \\ u'_{rb} \end{pmatrix} \tag{4.53}$$

On déduit des relations (4.28) et (4.45) l'expression du couple électromagnétique suivante:

$$C_{em} = \frac{p * M}{L_r}\left(\psi'_{ra}\, i_{sb} - \psi'_{rb}\, i_{sa}\right) \tag{4.54}$$

On obtient alors la représentation d'état suivante:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\psi}'_{ra} \\ \dot{\psi}'_{rb} \\ \dot{i}_{sa} \\ \dot{i}_{sb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{pM}{JL_r}\left(\psi'_{ra}\, i_{sb} - \psi'_{rb}\, i_{sa}\right) - \frac{C_{ch}}{J} \\ -\frac{R_r}{L_r}\psi'_{ra} - p\omega\psi'_{rb} + M\frac{R_r}{L_r} i_{sa} + u'_{ra} \\ -\frac{R_r}{L_r}\psi'_{rb} - p\omega\psi'_{ra} + M\frac{R_r}{L_r} i_{sb} + u'_{rb} \\ \frac{MR_r}{\sigma L_s L_r^2}\psi'_{ra} + \frac{pM}{\sigma L_s L_r}\omega\psi'_{rb} - \left(\frac{M^2 R_r + L_r^2 R_s}{\sigma L_s L_r^2}\right) i_{sa} \\ -\frac{pM}{\sigma L_s L_r}\omega\psi'_{ra} + \frac{MR_r}{\sigma L_s L_r^2}\psi'_{rb} - \left(\frac{M^2 R_r + L_r^2 R_s}{\sigma L_s L_r^2}\right) i_{sb} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{sa} \\ u_{sb} \end{pmatrix} \tag{4.55}$$

Avec $\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r}$.

On notera cette représentation de la manière suivante:

$$\dot{x} = f(x) + g_{sa}(x) u_{sa} + g_{sb}(x) u_{sb} \tag{4.56}$$

Remarques:

On considère ici les tensions (u_{ra},u_{rb}) d'alimentation du rotor comme un paramètre de réglage et non comme une grandeur d'entrée. Les seules entrées sont donc les tensions (u_{sa},u_{sb}) d'alimentation du stator.

Ce système non linéaire n'est pas linéarisable par bouclage statique. La condition nécessaire et suffisante [Jaku 80] rappelée au paragraphe 2.2 n'est pas respectée car la distribution G_1 définie ci après n'est pas involutive.

$$G_1 = span\left\{g_{sa}, g_{sb}, ad_f\, g_{sa}, ad_f\, g_{sa}\right\} \tag{4.57}$$

Cette non-involutivité est due au fait que le champ de vecteur [$ad_f g_{sa}$, $ad_f g_{sb}$] n'est pas contenu dans G_1. Le plus grand sous système linéarisable par bouclage statique [Mari 86] est alors de dimension quatre car la distribution G_0={g_{sa},g_{sb}} est involutive et le rang de la distribution G_1 est quatre. Cependant, ce système admet pour sorties plates (la position du flux rotorique dans le référentiel électrique rotor et la position du rotor), il est donc linéarisable par bouclage dynamique d'état.

Modèle d'état d'une machine isotrope dans le référentiel lié au flux rotorique:

Il nous faut effectuer un changement de repère sur le modèle précédent pour nous placer dans le référentiel tournant lié au champ rotor ψ_r. Dans ce référentiel le flux rotorique est porté par l'axe direct. La transformation est composée d'une rotation de $-p\theta$ pour être dans le référentiel lié au rotor puis d'une rotation de $-\alpha$ pour être dans le référentiel lié au flux rotor. Pour ce faire on utilise la matrice $P(-p\theta-\alpha)$. On définit les nouvelles représentations des flux rotoriques et des courants statoriques de la manière suivante:

$$\begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_q \end{pmatrix} = P(-p\theta-\alpha)\cdot\begin{pmatrix} \psi'_{ra} \\ \psi'_{rb} \end{pmatrix} \tag{4.58}$$

$$\begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} = P(-p\theta-\alpha)\cdot\begin{pmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \end{pmatrix} \tag{4.59}$$

On posera pour la suite $\gamma_e = p\theta+\alpha = Arc\tan\left(\frac{\psi_{rb}}{\psi_{ra}}\right)$.

Le système admet alors dans ce nouveau référentiel la représentation suivante:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\psi}_d \\ \dot{\alpha} \\ \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\psi_d i_q - \frac{C_{ch}}{J} \\ -a\psi_d + aMi_d + u_{ra}\cos\alpha + u_{rb}\sin\alpha \\ aM\frac{i_q}{\psi_d} + u_{rb}\cos\alpha - u_{ra}\sin\alpha \\ -ci_d + ab\psi_d + p\omega i_q + aM\frac{i_q^2}{\psi_d} \\ -ci_q - pb\omega\psi_d - p\omega i_d - aM\frac{i_d i_q}{\psi_d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix} \tag{4.60}$$

Avec les paramètres *a, b, c* et *m* définis de la manière suivante:

$$a = \frac{R_R}{L_r}\ ;\ b = \frac{M}{\sigma L_r L_s}\ ;\ c = \frac{M^2 R_R}{\sigma L_s L_r^2} + \frac{R_s}{\sigma L_s}\ ;\ m = p\frac{M}{JL_r}$$

Afin de mettre en relief l'intérêt de l'approche et réduire la complexité du système nous allons nous ramener à un système réduit de dimension trois. Pour ce faire, nous linéariserons dans un premier temps la dynamique des courants statoriques(i_d, i_q). Cette dynamique sera ensuite réglée par une commande de type grand gain, de manière à pouvoir la considérer très rapide devant les autres dynamiques du système. On considérera alors que les courants rotoriques constituent les nouvelles entrées de commande. On effectue donc un asservissement des courants à partir des tensions u_{sa} et u_{sb} de l'onduleur alimentant la machine. La linéarisation des dynamiques des courants statoriques s'obtient par la commande non linéaire suivante:

$$\begin{pmatrix} u_{sa} \\ u_{sb} \end{pmatrix} = P(\gamma_e)\begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix} = \sigma L_s P(\gamma_e)\begin{pmatrix} -ab\psi_d - p\omega i_q - aM\dfrac{i_q^2}{\psi_d} + v_d \\ +pb\omega\psi_d + p\omega i_d + aM\dfrac{i_d i_q}{\psi_d} + v_q \end{pmatrix} \tag{4.61}$$

Le système partiellement linéarisé est alors le suivant:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\psi}_d \\ \dot{\alpha} \\ \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\psi_d i_q - \dfrac{C_{ch}}{J} \\ -a\psi_d + aMi_d + u_{ra}\cos\alpha + u_{rb}\sin\alpha \\ aM\dfrac{i_q}{\psi_d} + u_{rb}\cos\alpha - u_{ra}\sin\alpha \\ -ci_d \\ -ci_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_d \\ v_q \end{pmatrix} \tag{4.62}$$

On obtient alors par bouclage sur les courants le système réduit suivant:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\psi}_d \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\psi_d i_{qr} - \dfrac{C_{ch}}{J} \\ aMi_{dr} - a\psi_d + u_{ra}\cos\alpha + u_{rb}\sin\alpha \\ aM\dfrac{i_{qr}}{\psi_d} + u_{rb}\cos\alpha - u_{ra}\sin\alpha \end{pmatrix} = f'_r(x) + g'_d(x)i_{dr} + g'_q(x)i_{qr} \tag{4.63}$$

Ceci constitue une extension du modèle proposé initialement pour les machines asynchrones au cadre des machines à courants alternatifs isotropes. Ce système est linéarisable par bouclage dynamique car il admet θ et α pour sorties plates. Le bouclage dynamique est obtenu en rajoutant un intégrateur sur l'entrée i_{qr}, comme cela avait été proposé [Chia 95] dans le cadre de la commande de la machine asynchrone. Le nouveau système à considérer pour la linéarisation par bouclage statique est donc le suivant:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{i}_{qr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx_2x_4 - \dfrac{C_{ch}}{J} \\ -ax_2 + u_{ra}\cos x_3 + u_{rb}\sin x_3 + aMv_1 \\ aM\dfrac{x_4}{x_2} + u_{rb}\cos x_3 - u_{ra}\sin x_3 \\ v_2 \end{pmatrix} = f_r(x) + g_d(x)v_1 + g_q(x)v_2 \tag{4.64}$$

avec $v_1 = i_{dr}$ et $v_2 = \dfrac{di_{qr}}{dt}$. On définit les sorties de la manière suivante:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{4.65}$$

Considérons le changement de coordonnées suivant:

$$\begin{aligned}
z_1 &= T_1(x) = h_1(x) = x_1 \\
z_2 &= T_2(x) = L_{f_r} h_1(x) = m x_2 x_4 - \frac{C_{ch}}{J} \\
z_3 &= T_3(x) = h_2(x) = x_3 \\
z_4 &= T_4(x) = L_{f_r} h_2(x) = aM \frac{x_4}{x_2} + u_{rb} \cos x_3 - u_{ra} \sin x_3
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Dans ces coordonnées le système s'écrit:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= \dot{T}_2(x) = L^2{}_{f_r} h_1(x) + v_1 L_{g_d} L_{f_r} h_1(x) + v_2 L_{g_q} L_{f_r} h_1(x) \\
\dot{z}_3 &= z_4 \\
\dot{z}_4 &= \dot{T}_4(x) = L^2{}_{f_r} h_2(x) + v_1 L_{g_d} L_{f_r} h_2(x) + v_2 L_{g_q} L_{f_r} h_2(x)
\end{aligned} \tag{4.67}$$

avec:

$$\begin{aligned}
&L^2{}_{f_r} h_1(x) = m x_4 \left(-a x_2 + u_{ra} \cos x_3 + u_{rb} \sin x_3\right) - \frac{1}{J} \frac{\partial C_{ch}}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} \\
&L^2{}_{f_r} h_2(x) = a^2 M \frac{x_4}{x_2} - \left(aM \frac{x_4}{x_2^2}(1 - x_2) + u_{rb} \cos x_3 - u_{ra} \sin x_3 \right)\left(u_{rb} \sin x_3 + u_{ra} \cos x_3\right) \\
&L_{g_d} L_{f_r} h_1(x) = aMm x_4 \qquad L_{g_q} L_{f_r} h_1(x) = m x_2 \\
&L_{g_d} L_{f_r} h_2(x) = -a^2 M^2 \frac{x_4}{x_2^2} \quad L_{g_q} L_{f_r} h_2(x) = a \frac{M}{x_2}
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Le bouclage linéarisant suivant est non singulier en dehors du couple nul ($mx_2x_4 \neq 0$)

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L_{g_d} L_{f_r} h_1(x) & L_{g_q} L_{f_r} h_1(x) \\ L_{g_d} L_{f_r} h_2(x) & L_{g_q} L_{f_r} h_2(x) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 - L^2{}_{f_r} h_1(x) \\ u_2 - L^2{}_{f_r} h_2(x) \end{bmatrix} \tag{4.69}$$

Le système résultant est le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = u_1 \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{z}_1 = \ddot{\omega} = u_1 \\ \ddot{z}_3 = \ddot{\alpha} = u_2 \end{cases} \Leftrightarrow G_0(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{pmatrix} \tag{4.70}$$

Remarques:

En déplaçant l'intégrateur de l'entrée i_{qr} à l'entrée i_{dr}, on obtient un nouveau système linéarisable pour lequel les sorties sont la vitesse du rotor ω et le module du flux rotorique ψ_d [Chia 95]. On obtient alors une commande proche de la commande vectorielle classique des machines asynchrones et synchrones à amortisseurs [Leon 96].

La dérivée du couple de charge est généralement omise, car la charge n'est pas un élément bien défini. Le régulateur permet de réduire l'effet de cette omission sur le suivi de trajectoire.

4.2.3 Choix des trajectoires de références

Les trajectoires de références devront être des fonctions temporelles au moins deux fois dérivables, de manière à obtenir des commandes $u_{1\text{ref}}$ et $u_{2\text{ref}}$ bornées. Ces trajectoires sont déterminées en fonction des performances désirées, des niveaux de saturation des tensions d'alimentation, de l'état magnétique et des courants maxima admissibles par la machine. La trajectoire α_{ref} de la position du flux rotorique est fonction du type de machine (synchrone ou asynchrone). Chaque machine est conçue pour fournir en régime permanent, soit un couple synchrone, soit un couple asynchrone.

Trajectoires de références pour une machine asynchrone

Dans le cas d'une machine asynchrone il faut que la trajectoire de référence α_{ref} à vitesse constante glisse relativement à la position du rotor pour permettre le phénomène d'induction. [Chel 96] propose de déterminer la trajectoire de référence α_{ref} à vitesse constante de manière à minimiser la valeur efficace du courant statorique. Ceci revient à déterminer la valeur du glissement $\dot{\alpha}_{opt}$ à vitesse constante pour avoir un courant statorique dont la valeur efficace est minimale. Les conditions initiales et finales sont alors les suivantes:

$$\alpha_{ref}(0)=0;\ \dot{\alpha}_{ref}(t_r)=\dot{\alpha}_{opt};\ \ddot{\alpha}_{ref}(t_r)=0; \tag{4.71}$$

Il nous faut donc au minimum un polynôme d'ordre trois, pour respecter ces conditions. Il subsiste un degré de liberté pour la trajectoire, ce qui permet de répondre dans une certaine mesure à une condition supplémentaire (par exemple $\dot{\alpha}_{ref}(0)=\dot{\alpha}_0$.) Ainsi, on obtient:

$$\begin{aligned}
\alpha_{ref} &= \dot{\alpha}_0\left(\frac{t}{t_r}\right)+\left(\dot{\alpha}_{opt}-\dot{\alpha}_0\right)\left(\frac{t}{t_r}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\dot{\alpha}_{opt}-\dot{\alpha}_0\right)\left(\frac{t}{t_r}\right)^3 \quad 0\le t\le t_r \\
\alpha_{ref} &= \alpha_{opt}t\left(\frac{t}{t_r}\right)-\frac{1}{3}\left(\dot{\alpha}_{opt}-\dot{\alpha}_0\right) \quad t\ge t_r
\end{aligned} \tag{4.72}$$

De même, il est possible d'utiliser une démarche similaire pour déterminer la trajectoire de référence de vitesse. Il est ensuite nécessaire de gérer la singularité correspondant au glissement nul. On rencontre ce cas de figure en particulier lors de l'inversion du sens de rotation. Afin de permettre un traitement plus aisé de cette singularité, [Chel 96] montre qu'il est possible d'expliciter la trajectoire de la vitesse à partir de la trajectoire de α_{ref} en utilisant la relation du couple électromoteur (4.38) avec $u_{\text{ra}}=u_{\text{rb}}=0$.

Trajectoires de référence pour une machine synchrone

Dans le cas d'une machine synchrone, la trajectoire de référence α_{ref} à vitesse constante sera fixe par rapport à la position du rotor. La détermination de la trajectoire de référence α_{ref} à vitesse constante pour une machine sans saillance dépend du choix des grandeurs à optimiser. Une première approche consiste à déterminer la trajectoire pour avoir un facteur de puissance unitaire afin d'optimiser la dimension de l'alimentation de puissance de la machine. Une seconde approche consiste à déterminer la trajectoire pour obtenir un rapport couple/courant maximum correspondant à une utilisation optimale de la machine.

La trajectoire ω_{ref} de la vitesse du rotor peut être déterminée simplement en utilisant un polynôme dépendant du temps normalisé (t/t_{r}) qui respecte les conditions initiales $\omega_{\text{ref}}(0)=\omega(0)$ et $\ddot{\omega}_{ref}(0) = u_{1ref}(0) = 0$ et les conditions finales $\omega_{\text{ref}}(t_{\text{r}})=\omega_{\infty}$ et $\ddot{\omega}_{ref}(t_r) = u_{1ref}(t_r) = 0$. Par exemple :

$$\begin{aligned} \omega_{ref} &= 10\omega_{\infty}\left(\frac{t}{t_r}\right)^3 - 15\omega_{\infty}\left(\frac{t}{t_r}\right)^4 + 6\omega_{\infty}\left(\frac{t}{t_r}\right)^5 \quad 0 \le t \le t_r \\ \omega_{ref} &= \omega_{\infty} \quad t \ge t_r \end{aligned} \tag{4.73}$$

Pour cette référence de vitesse on obtient la commande de référence $u_{1\text{ref}}$:

$$\begin{aligned} u_{1ref} &= \frac{\omega_{\infty}}{t_r^2}\left\{60\cdot\left(\frac{t}{t_r}\right) - 180\cdot\left(\frac{t}{t_r}\right)^2 + 120\cdot\left(\frac{t}{t_r}\right)^3\right\} \quad 0 \le t \le t_r \\ u_{1ref} &= 0 \quad t \ge t_r \end{aligned} \tag{4.74}$$

Choix du paramètre t_r

Le paramètre t_{r} est déterminé pour respecter les contraintes sur les tensions et les courants nominaux à partir du modèle nominal de la machine avec la charge nominale. La régulation superpose une tension de commande supplémentaire, la dynamique de la régulation sera déterminée pour respecter les contraintes maximales sur les tensions et les courants. Une approche possible, consiste à déterminer le temps t_{r} minimum pour passer d'une vitesse ω_1 à une vitesse ω_2 sans dépasser une accélération maximale $\gamma_{\max}$ définie de la façon suivante:

$$\gamma_{\max} = \frac{d\omega_{ref}}{dt}\Big|_{\max} = \frac{1}{J}\left(C_{\max} - f\omega_{\max} - C_{r\max}\right) \tag{4.75}$$

avec $C_{\max}$ le couple maximum donné par le constructeur de la machine et correspondant à un courant maximum, C_{rmax} le couple de charge maximum et J l'inertie totale.

4.2.4 Méthodologie de synthèse de la loi de commande robuste

Il nous faut maintenant déterminer le régulateur linéaire K nous permettant de réduire l'effet des perturbations le long des trajectoires des sorties ω_{ref} et α_{ref}. En particulier, nous allons considérer les fluctuations du couple de charge. Pour ce faire, on définit le couple de charge à partir de la valeur C_0 du couple utilisée dans la loi de découplage et linéarisation. Soit:

$$C_{ch} = C_0 + \tilde{C}_{ch} \tag{4.76}$$

Le système 4.64 s'écrit alors:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{i}_{qr} \end{pmatrix} = f_r(x) + g_d(x)v_1 + g_q(x)v_2 + p_1 f_1(x) \tag{4.77}$$

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{J} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ f_r(x) = \begin{pmatrix} mx_2x_4 - \frac{C_{ch}}{J} \\ -ax_2 + u_{ra}\cos x_3 + u_{rb}\sin x_3 \\ aM\frac{x_4}{x_2} + u_{rb}\cos x_3 - u_{ra}\sin x_3 \\ 0 \end{pmatrix};\ g_d(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ aM \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ g_q(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.78}$$

Considérons le changement de coordonnées suivant:

$$\begin{aligned} z_1 &= T_1(x) = h_1(x) = x_1 \\ z_2 &= T_2(x) = L_{f_r} h_1(x) = mx_2x_4 - \frac{C_0}{J} \\ z_3 &= T_3(x) = h_2(x) = x_3 \\ z_4 &= T_4(x) = L_{f_r} h_2(x) = aM\frac{x_4}{x_2} + u_{rb}\cos x_3 - u_{ra}\sin x_3 \end{aligned} \tag{4.79}$$

Dans ces coordonnées le système s'écrit:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + p_1 L_{f_1} h_1(x) \\ \dot{z}_2 &= \dot{T}_2(x) = L^2{}_{f_r} h_1(x) + v_1 L_{g_d} L_{f_r} h_1(x) + v_2 L_{g_q} L_{f_r} h_1(x) + p_1 L_{f_1} L_{f_r} h_1(x) \\ \dot{z}_3 &= z_4 + p_1 L_{f_1} h_2(x) \\ \dot{z}_4 &= \dot{T}_4(x) = L^2{}_{f_r} h_2(x) + v_1 L_{g_d} L_{f_r} h_2(x) + v_2 L_{g_q} L_{f_r} h_2(x) + p_1 L_{f_1} L_{f_r} h_2(x) \end{aligned} \tag{4.80}$$

avec:

$$\begin{aligned} L_{f_1} h_1(x) &= -\frac{1}{J} \\ L_{f_1} L_{f_r} h_1(x) &= \frac{1}{J^2}\cdot\frac{dC_0}{dx_1} = \frac{f_0}{J^2} \\ L_{f_1} h_2(x) &= 0 \\ L_{f_1} L_{f_r} h_2(x) &= 0 \end{aligned} \tag{4.81}$$

$$
\begin{aligned}
&L^2_{f_r} h_1(x) = mx_4\left(-ax_2 + u_{ra}\cos x_3 + u_{rb}\sin x_3\right) - \frac{1}{J}\frac{\partial C_0}{\partial x_1}\cdot\left(mx_2x_4 - \frac{C_0}{J}\right)\\
&L^2_{f_r} h_2(x) = a^2 M\frac{x_4}{x_2} - \left(aM\frac{x_4}{x_2^2}(1-x_2) + u_{rb}\cos x_3 - u_{ra}\sin x_3\right)\left(u_{rb}\sin x_3 + u_{ra}\cos x_3\right)\\
&L_{g_d} L_{f_r} h_1(x) = aMmx_4 \qquad L_{g_q} L_{f_r} h_1(x) = mx_2\\
&L_{g_d} L_{f_r} h_2(x) = -a^2 M^2\frac{x_4}{x_2^2} \qquad L_{g_q} L_{f_r} h_2(x) = a\frac{M}{x_2}
\end{aligned}
\tag{4.82}
$$

Le bouclage linéarisant (4.69) donne en dehors de la singularité correspondant au couple nul, le système équivalent suivant:

$$
\begin{cases}
\dot{z}_1 = z_2 - \dfrac{\widetilde{C}}{J}\\
\dot{z}_2 = u_1 + \dfrac{f_0}{J^2}\cdot\widetilde{C}\\
\dot{z}_3 = z_4\\
\dot{z}_4 = u_2
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
Y(s) = \begin{pmatrix} Z_1(s)\\ Z_2(s)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s^2} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{s^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{Js+f_0}{J^2s^2}\\ 0\end{pmatrix}\widetilde{C}\\
Y(s) = G_0(s) + F_p(s)\widetilde{C}
\end{cases}
\tag{4.83}
$$

On constate que les fluctuations du couple de charge interviennent comme des perturbations exogènes vis à vis du modèle nominal. Ces fluctuations n'influencent pas la dynamique de z_3 qui correspond à la sortie plate α. Ceci est lié au fait que le changement de repère (passage $\alpha\beta$ en dq) dépend de la position du flux rotorique, donc de la position du rotor. Or la vitesse du rotor $\omega = z_1$ est influencée par les fluctuations du couple de charge. Donc le changement de repère annule les effets des fluctuations sur la position α du flux rotorique.

La spécification de réjection de la perturbation de couple se fera par une pondération W_1 entre l'entrée de perturbation et l'écart de trajectoire. Cependant, du fait de la structure de la matrice de transfert $F_p(s)$, la synthèse n'est pas complétement spécifiée. En effet, la perturbation de couple n'intervenant pas dans la dynamique de l'angle α on n'a pas spécifié de performance vis à vis de cette sortie. Il faut donc rajouter une spécification supplémentaire portant sur un transfert dans lequel l'angle α intervient. Par exemple, on peut associer au modèle de la dynamique α une incertitude additive traduisant le fait qu'au dela d'un certain niveau, le signal de sortie est noyé dans le bruit ambiant. Ceci peut être modélisé par une pondération W_2. Les données de synthèse peuvent alors se traduire sur le schéma suivant, par la spécification du transfert entre l'entrée y_{ref} et ε_y par la pondération $W'_1 = [W_1, 0]$ d'une part, et par la spécification du transfert entre l'entrée y_{ref} et y_{reg} par la pondération $W'_2 = [0, W_2]$ d'autre part.

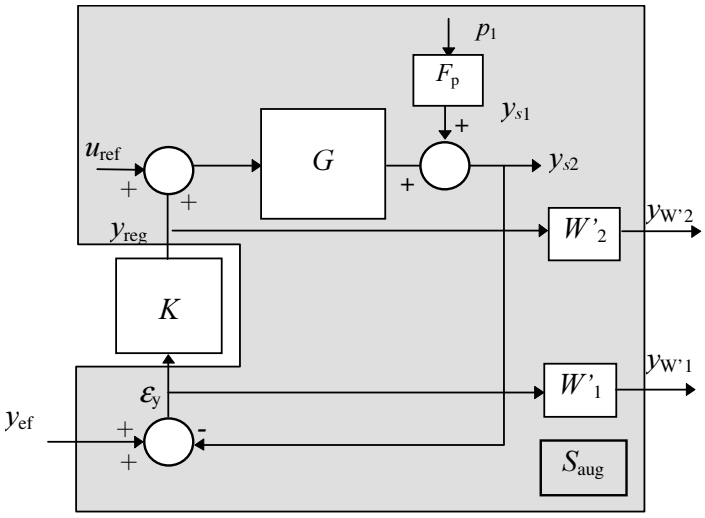


Fig. 4.4

Le problème standard consiste alors à déterminer un régulateur $K(s)$ garantissant la stabilité interne, et vérifiant les spécifications imposées par W'_1 et W'_2. On obtient alors par synthèse H_∞ un régulateur à structure diagonale en raison de la structure diagonale du modèle et des pondération W'_1 et W'_2.

4.2.5 Remarques et perspectives

Nous nous sommes ramenés à un système d'ordre trois pour clarifier l'approche. Dans la pratique, la linéarisation par bouclage dynamique et le calcul du régulateur linéaire, peuvent se faire sur le système non réduit. En particulier, le régulateur linéaire compense dans la bande passante, les écarts entre le modèle nominal et la famille de modèles qui interviennent à la fois sur la dynamique des courants et des flux.

Pour une perturbation de couple, il suffit d'un régulateur $K(s)$ diagonal pour compenser son effet sur les sorties. Cependant dans le cas général, les variations de paramètres ont pour consequence d'obtenir une famille de procédés qui n'est plus découplée. Il est alors nécessaire d'utiliser les méthodes de synthèses multivariables. En particulier, prendre en compte la variation de la résistance rotorique génère une famille de modèle non découplée dont l'expression est assez complexe en raison de la présence de ce paramètre dans les champs de vecteurs des commandes $g_d(x)$ et $g_q(x)$. Nous allons étudier dans le paragraphe suivant le cas de la machine synchrone à aimants. Nous montrerons que la famille de modèles générée par la variation de la résistance statorique est non découplée et que la synthèse de la loi de commande linéaire débouche sur un régulateur dont la structure n'est pas diagonale.

4.3 Cas des machines synchrones à aimants permanents et sans amortisseur

4.3.1 Platitude du modèle

Nous avons rappelé au paragraphe 4.1.3 les différentes équations régissant le comportement dynamique des grandeurs caractéristiques de la machine. Nous pouvons en déduire le modèle d'état nominal suivant:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{i}_{sd} \\ \dot{i}_{sq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{J}\left(L_d - L_q\right)x_2x_3 + p\frac{\psi_f}{J}x_3 - \frac{C_{ch}}{J} \\ -\frac{R_S}{L_d}x_2 + p\frac{L_q}{L_d}x_1x_3 + \frac{1}{L_d}v_d \\ -\frac{R_S}{L_q}x_3 - p\frac{L_d}{L_q}x_1x_2 - p\frac{\psi_f}{L_q}x_1 + \frac{1}{L_q}v_q \end{pmatrix} = f_r(x) + g_d(x)v_d + v_q \tag{4.84}$$

avec

$$f_r(x) = \begin{pmatrix} a_{11}x_2x_3 + a_{12}x_3 + a_{13} \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_1x_3 \\ a_{31}x_3 + a_{32}x_1x_2 + a_{33}x_1 \end{pmatrix};\ g_d(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_d} \\ 0 \end{pmatrix};\ g_q(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_d} \end{pmatrix}; \tag{4.85}$$

et

$$\begin{aligned} &a_{11} = \frac{p}{J}\left(L_d - L_q\right);\ a_{12} = p\frac{\psi_f}{J};\ a_{13} = -\frac{C_{ch}}{J}\ \ a_{21} = -\frac{R_S}{L_d};\ a_{22} = p\frac{L_q}{L_d} \\ &a_{31} = -\frac{R_S}{L_q};\ a_{32} = -p\frac{L_d}{L_q};\ a_{33} = -p\frac{\psi_f}{L_q} \end{aligned} \tag{4.86}$$

Les grandeurs i_{ds} et i_{qs} correspondent aux courants statoriques exprimés dans le référentiel rotorique, les tensions v_d et v_q correspondent aux tensions diphasées équivalentes statoriques exprimées dans le référentiel rotorique.

Considérons les sorties suivantes:

$$\begin{cases} y_1 = h_1(x) = x_1 \\ y_2 = h_2(x) = x_2 \end{cases} \tag{4.87}$$

Ces sorties constituent des sorties plates du système. En effet, en dérivant la première sortie, il est possible d'exprimer la coordonnée x_3 du vecteur d'état en fonction des sorties plates et de leurs dérivées premières.

L'état peut alors s'exprimer comme une fonction différentielle des sorties plates:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = \dfrac{\dot{y}_1 - a_{13}}{a_{11}y_2 + a_{12}} \end{cases} \Leftrightarrow x = A(y_1, \dot{y}_1, y_2) \tag{4.88}$$

A partir de l'expression précédente et de l'équation d'état on en déduit que l'entrée est une fonction différentielle des sorties plates:

$$\begin{cases} v_d = L_d\left(\dot{y}_2 - a_{21}y_2 - a_{22}y_1 \dfrac{\dot{y}_1 - a_{13}}{a_{11}y_2 - a_{12}}\right) \\ v_q = L_q\left(\dfrac{\ddot{y}_1(a_{11}y_2 - a_{12}) - \dot{y}_2(\dot{y}_1 - a_{13})}{(a_{11}y_2 - a_{12})^2} - a_{31}\dfrac{\dot{y}_1 - a_{13}}{a_{11}y_2 - a_{12}} - a_{32}y_1y_2 - a_{33}y_1\right)y_2 \end{cases} \tag{4.89}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_d \\ v_q \end{pmatrix} = B(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1 y_2, \dot{y}_2)$$

Remarques:

♦Pour les machines synchrones à aimants et sans amortisseur, on ne retrouve pas la sortie plate α correspondant à la position du flux rotorique. Cependant comme la trajectoire de la sortie plate i_{ds} est souvent choisie nulle, la direction du flux rotorique dû au stator est alors perpendiculaire à celle du flux rotorique à vide. On effectue donc une commande de la position de la partie du flux rotorique due aux courants rotoriques. Il est aussi possible d'utiliser l'entrée de référence associé à la sortie plate i_{ds} pour commander une nouvelle sortie plate liée à une grandeur physique comme l'énergie absorbée dans la machine par exemple.

♦Dans le cas d'une modélisation diphasée équivalente dans le référentiel statorique de la machine synchrone à aimants et sans amortisseur (modélisation en $\alpha\beta$), la position du rotor apparaît explicitement [Mada 96] dans les équations d'état. Le système est alors de dimension quatre, avec deux entrées de commande. Ce système n'est pas linéarisable par bouclage statique. Par contre, il admet un plus grand sous espace linéarisable. Ce bouclage peut être déterminé pour que la dynamique non observable soit l'intégrale existante entre la vitesse et la position, afin de ne pas avoir à faire l'étude de la stabilité de cette dynamique. Au final, on revient au cas précédent puisque le système partiellement linéarisé est identique à celui que l'on obtient à partir du modèle en *dq*. Le changement de repère initial pour obtenir la modélisation en dq peut donc être considéré comme une linéarisation partielle de la dynamique en $\alpha\beta$. Ce changement de repère se retrouve d'ailleurs dans le bouclage linéarisant pour lequel la dynamique non observable est celle correspondant à l'intégrale entre la vitesse et la position.

4.3.2 Linéarisation entrées-état par bouclage statique

Soit le changement de coordonnées locales suivant:

$$\begin{aligned} z_1 &= T_1(x) = h_1(x) = x_1 \\ z_2 &= T_2(x) = L_{f_r} h_1(x) = a_{11} x_2 x_3 + a_{12} x_3 + a_{13} \\ z_3 &= T_3(x) = h_2(x) = x_2 \end{aligned} \tag{4.90}$$

Dans ces coordonnées le système s'écrit:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= L_{f_r} h_1(x) = z_2 \\ \dot{z}_2 &= \dot{T}_2(x) = L^2{}_{f_r} h_1(x) + v_d L_{g_d} L_{f_r} h_1(x) + v_q L_{g_q} L_{f_r} h_1(x) \\ \dot{z}_3 &= L_{f_r} h_2(x) + v_d L_{g_d} h_2(x) + v_q L_{g_q} h_2(x) \end{aligned} \tag{4.91}$$

avec:

$$\begin{aligned} & L_{f_r} h_1(x) = a_{11} x_2 x_3 + a_{12} x_3 + a_{13} \\ & L^2{}_{f_r} h_1(x) = a_{11} x_3 (a_{21} x_2 + a_{22} x_1 x_3) + (a_{12} + a_{11} x_2)(a_{31} x_3 + a_{32} x_1 x_2 + a_{33} x_1) \\ & L_{f_r} h_2(x) = a_{21} x_2 + a_{22} x_1 x_3 \end{aligned} \tag{4.92}$$

$$L_{g_d} L_{f_r} h_1(x) = \frac{(a_{11} x_3)}{L_d};\ L_{g_q} L_{f_r} h_1(x) = \frac{(a_{12} + a_{11} x_2)}{L_q};\ L_{g_d} h_2(x) = \frac{1}{L_d};\ L_{g_q} L_{f_r} h_2(x) = 0; \tag{4.93}$$

Le bouclage est alors le suivant:

$$\begin{pmatrix} v_d \\ v_q \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L_{g_d} L_{f_r} h_1(x) & L_{g_q} L_{f_r} h_1(x) \\ L_{g_d} h_2(x) & L_{g_q} h_2(x) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 - L^2{}_{f_r} h_1(x) \\ u_2 - L_{f_r} h_2(x) \end{bmatrix} \tag{4.94}$$

Ce bouclage est singulier si et seulement si :

$$\frac{1}{L_d L_q}(a_{12} + a_{11} x_2) = 0 \Leftrightarrow (L_d - L_q) i_{ds} = \psi_f \tag{4.95}$$

Dans le cas d'une machine à pôles saillants ($L_d \neq L_q$), ceci ne correspond pas à un point de fonctionnement normal car cela se traduirait par la désexcitation magnétique complète de la machine. Or ceci nécessiterait d'une part un courant prohibitif, et de plus pourrait altérer les caractéristiques magnétiques des aimants permanents. Dans le cas d'une machine à pôles lisses ($L_d = L_q$) il n'y a pas de singularité. Ainsi, dans son domaine de fonctionnement normal, le système nominal de la machine synchrone à aimants permanents est équivalent par changements de repères et bouclage au système linéaire suivant:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = u_1 \\ \dot{z}_3 = u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{z}_1 = \ddot{\omega} = u_1 \\ \dot{z}_3 = \dot{i}_{ds} = u_2 \end{cases} \tag{4.96}$$

4.3.3 Choix des trajectoires de référence

La référence de vitesse ω_{ref} est déterminée en utilisant l'approche proposée dans le cadre des machines isotropes. Cette fonction temporelle est donc au moins deux fois dérivables, et son temps de réponse est déterminé pour respecter les contraintes sur le courant nominal i_{qs}.

La référence sur le courant i_{dsref} est choisie identiquement nulle conformément à la commande classique des machines synchrones, pour lesquelles on ne désire pas obtenir le meilleur couple massique mais une commande simple du couple [Leon 96].

4.3.4 Synthèse de la loi de commande robuste

On détermine les perturbations de modèle dues au couple de charge et a une incertitude sur la résistance rotorique. Le couple de charge intervient dans le coefficient a_{13} tandis que la résistance statorique joue sur les coefficients a_{21} et a_{31}. Le système incertain se définit à partir du modèle nominal et des champs de vecteurs $f_1(x)$ et $f_2(x)$ associés aux perturbations p_1 et p_2.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{i}_{sd} \\ \dot{i}_{sq} \end{pmatrix} = f_r(x) + g_d(x)v_d + g_q(x)v_q + p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x) \tag{4.97}$$

avec

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{x_2}{L_d} \\ \dfrac{x_3}{L_q} \end{pmatrix}; \tag{4.98}$$

Avec le changement de coordonnées (4.90) on obtient le système suivant:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= L_{f_r} h_1(x) + p_1 L_{f_1} h_1(x) + p_2 L_{f_2} h_1(x) \\ \dot{z}_2 &= \dot{T}_2(x) = L^2{}_{f_r} h_1(x) + v_d L_{g_d} L_{f_r} h_1(x) + v_q L_{g_q} L_{f_r} h_1(x) + p_1 L_{f_1} L_{f_r} h_1(x) + p_2 L_{f_2} L_{f_r} h_1(x) \\ \dot{z}_3 &= L_{f_r} h_2(x) + v_d L_{g_d} h_2(x) + v_q L_{g_q} h_2(x) + p_1 L_{f_1} h_2(x) + p_2 L_{f_2} h_2(x) \end{aligned} \tag{4.99}$$

avec

$$\begin{aligned} &L_{f_1} h_1(x) = 1; && L_{f_2} h_1(x) = 0; \\ &L_{f_1} L_{f_r} h_1(x) = \frac{\partial a_{13}}{dx_1} = f_0; && L_{f_2} L_{f_r} h_1(x) = \left(a_{11}\left(\frac{1}{L_d} + \frac{1}{L_q} \right) x_2 + a_{13} \right) x_3 \\ &L_{f_1} h_2(x) = 0; && L_{f_2} h_2(x) = \frac{x_2}{L_d} \end{aligned} \tag{4.100}$$

La famille de systèmes résultant du bouclage du système incertain par la loi de commande (4.93) calculée à partir du modèle nominal, est représentée par le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + p_1 \\ \dot{z}_2 = u_1 + p_1 \dfrac{\partial a_{13}}{dx_1} + p_2 \left(a_{11} \left(\dfrac{1}{L_d} + \dfrac{1}{L_q} \right) x_2 + a_{13} \right) x_3 \\ \dot{z}_3 = u_2 + p_2 x_2 \end{cases} \tag{4.101}$$

Or l'état x_1, x_2 et x_3 pouvant s'exprimer en fonction des sorties plates donc de z_1 et z_2 on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + p_1 \\ \dot{z}_2 = u_1 + p_1 \dfrac{\partial a_{13}}{dz_1} + p_2 \left(a_{11} \left(\dfrac{1}{L_d} + \dfrac{1}{L_q} \right) z_3 + a_{13} \right) \dfrac{(z_2 + p_1 - a_{13})}{a_{11} z_3 + a_{12}} \\ \dot{z}_3 = u_2 + p_2 z_3 \end{cases} \tag{4.102}$$

Ce système se compose donc du système nominal et d'un terme d'erreur non linéaire. Sachant que la trajectoire sur $i_{ds} = x_2 = z_3$ est identiquement nulle, nous allons considérer la famille de modèles définie par le modèle nominal, et le linéarisé tangent du terme d'erreur au voisinage de la trajectoire définie par $z_{30} = 0$. On obtient ainsi la famille de modèle suivante:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ f_0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot p_1 \tag{4.103}$$

Avec

$$\begin{aligned} l_{22} &= \frac{p_2}{a_{12}} \left(a_{11} \left(\frac{1}{L_d} + \frac{1}{L_q} \right) + a_{13} \right) \\ l_{23} &= p_2 \left\{ \left(a_{11} \left(\frac{1}{L_d} + \frac{1}{L_q} \right) \right) - \frac{a_{11} a_{13}}{a_{12}} \right\} \frac{(z_{20} + p_1 - a_{13})}{a_{12}} \\ l_{33} &= p_2 \end{aligned} \tag{4.104}$$

Remarques:

Le terme $\dfrac{(z_{20} + p_1 - a_{13})}{a_{12}}$ correspond à la variable d'état $x_3 = i_{qs}$ au voisinage de la trajectoire $x_{2ref} = i_{dsref} = 0$. Il nous est donc aisé de déterminer la plage de variation de ce terme, pour un fonctionnement normal de la machine.

La famille de modèles considérée n'est plus parfaitement découplée, il est donc nécessaire d'utiliser les outils adaptés à la synthèse de régulateur linéaire dans le cas multivariable.

La perturbation p_1 agissant comme une perturbation exogène, nous spécifierons la dynamique de rejet à l'aide de fonctions de pondération. On considère maintenant uniquement l'influence des perturbations p_2. Le système est alors le suivant:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{4.105}$$

que nous retranscrivons sous la forme compacte suivante:

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ v \end{pmatrix} = S(p_2) \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{22} & l_{23} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_{33} & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} \tag{4.106}$$

Pour représenter l'effet de la perturbation p_2 sur la matrice d'état, nous allons utiliser une transformation linéaire fractionnaire (L.F.T) comme nous l'avons rappelé au paragraphe 2.1.1.. Ainsi, on représente la dynamique (4.104) sous la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ v \end{pmatrix} = S(p_2) \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} = S(p_{2n}) \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} + B_\Delta u_\Delta$$
$$y_\Delta = C_\Delta \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} + D_\Delta u_\Delta \tag{4.107}$$
$$u_\Delta = \Delta(\delta) y_\Delta$$

On encore:

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ v \end{pmatrix} = S(p_{2n}) \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} + S_\Delta(\delta) \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad S_\Delta(\delta) = B_\Delta \Delta(\delta) \left(I - D_\Delta \Delta(\delta)\right)^{-1} C_\Delta \tag{4.108}$$

La matrice d'évolution étant linéaire en les paramètres, il est alors possible de prendre la matrice D_Δ identiquement nulle, et utiliser la démarche proposée dans [Pack 93] pour construire la matrice $S_\Delta(\delta)$.

On obtient ainsi:

$$S_\Delta(\delta)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\delta_2 l_{22}}{2} & \frac{\delta_2 l_{23}}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\delta_2 l_{33}}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_2 & 0\\ 0 & \delta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{l_{22}}{2} & \frac{l_{23}}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{l_{33}}{2} & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{4.109}$$

$$S_\Delta(\delta)=B\Delta^{-1}(\delta_2)C$$

La matrice $S_\Delta(\delta)$ peut se mettre sous la forme de transformation linéaire fractionnaire haute de la matrice d'incertitude D par une matrice de structure R_Δ. Ainsi on obtient:

$$S_\Delta(\delta)=F_u\left(R_\Delta,\Delta(\delta_2)\right)\quad\text{avec}\quad R_\Delta=\begin{pmatrix}D_\Delta & C_\Delta\\ B_\Delta & 0\end{pmatrix};\quad \Delta(\delta_2)\begin{pmatrix}\delta_2 & 0\\ 0 & \delta_2\end{pmatrix} \tag{4.110}$$

La transformation linéaire fractionnaire haute précédente peut correspondre au système $S(p_2)$, en intégrant la structure nominale $S(p_{2n})$ et en remplaçant le terme $R_{\Delta 22}$ nul par la matrice $S(p_{2n})$.

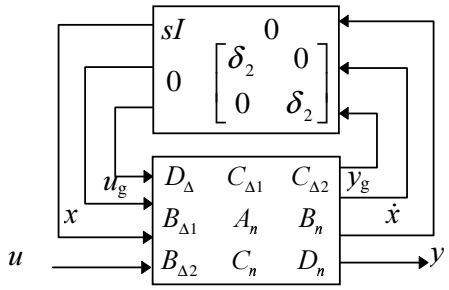


Fig. 4.5

$$S(p_2)=F_u\left(R'_\Delta,\Delta(\delta_2)\right)\quad\text{avec}\quad R'_\Delta=\begin{pmatrix}D_\Delta & C_\Delta\\ B_\Delta & S(p_{2n})\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|cc}D_\Delta & C_{\Delta 1} & C_{\Delta 2}\\ \hline B_{\Delta 1} & A_n & C_n\\ B_{\Delta 2} & B_n & D_n\end{array}\right); \tag{4.111}$$

Dans le cadre de la représentation matricielle standard des réalisations, on préférera la répartition par blocs suivante:

$$S(p_2)=F_u\left(R,\Delta(\delta_2)\right)\quad\text{avec}\quad R=\left(\begin{array}{c|cc}A_n & C_{\Delta 1} & B_n\\ \hline B_{\Delta 1} & D_\Delta & C_{\Delta 2}\\ C_n & B_{\Delta 2} & D_n\end{array}\right); \tag{4.112}$$

Nous avons ainsi défini la famille de modèles engendrée par la perturbation p_2.

Il nous faut maintenant spécifier d'une part le rejet des perturbations exogènes comprenant la perturbation p_1, et d'autre part inclure une incertitude non structurée sur notre modèle. Pour ce faire, nous allons traduire ces informations de synthèse sous la forme de pondération sur les transferts entrées-sorties que nous voulons réguler vis à vis du schéma suivant:

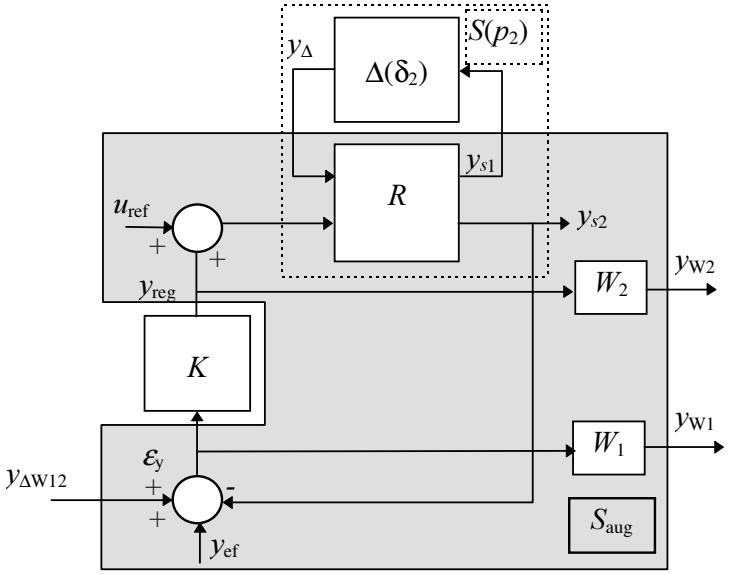


Fig. 4.6

Le problème va se formuler sous la forme d'un système augmenté comportant la famille de modèles engendrée par la perturbation p_2 ainsi que les pondérations W_1 et W_2. Ces pondérations seront bouclées sur une matrice d'incertitude fictive $[\Delta W_1 \ \Delta W_2]$, permettant de formuler le problème de la synthèse sous la forme standard suivante:

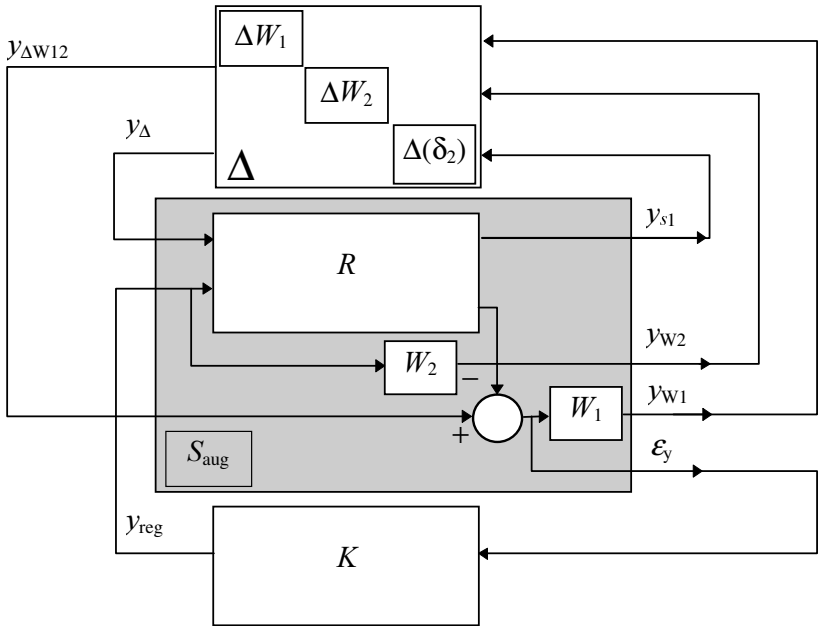


Fig. 4.7

Nous allons effectuer une synthèse de loi de commande robuste vis à vis du système augmenté S_{aug} précédent, en utilisant pour procédé nominal, la machine synchrone qu'a utilisé B. Le Pioufle dans sa thèse [Piou 91]. On considérera une erreur de 10% sur la valeur de la résistance R_s et on supposera le couple de charge inconnu ($C_0 = 0$). Les paramètres de la machine sont rappelés en annexe ainsi que celle du PRC-GdR.

La pondération W_1 a pour objet de fixer les objectifs de rejet des perturbations exogènes sur le suivi de trajectoires incluant la perturbation de couple. Ceci revient à pondérer la norme de la fonction de sensibilité $S(s)$ de la manière suivante:

$$\left(W_1(s)\right)^{-1} = K_h \frac{\left(\omega_h + s\right)^2}{\left(\omega_b + s\right)^2} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{4.113}$$

avec ω_h= 1000 rd/s; ω_b = 10 rd/s ; k_b = 3. Le choix de la pulsation ω_h traduit la dynamique de rejet des perturbations de sorties sur le suivi de consigne.

Nous allons ensuite pondérer à l'aide de la fonction W_2 la norme du transfert $K(s)G(s)$ pour traduire les incertitudes non structurées additives vis à vis du modèle nominal. Cela revient à considérer qu'en deçà d'un certain niveau, les sorties du procédé sont noyées dans du bruit. On a ainsi utilisé la fonction de pondération W_2 suivante.

$$\left(W_2(s)\right)^{-1} = 6 \cdot 10^6 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{4.114}$$

La matrice Δ inclut à la fois les incertitudes fictives ΔW_1 et ΔW_2 d'une part, et la matrice des incertitudes paramétriques $\Delta(\delta)$ d'autre part. Les matrices ΔW_1 et ΔW_2 sont des matrices complexes pleines, tandis que la matrice $\Delta(\delta)$ est diagonale réelle. Elle s'écrit donc:

$$\Delta = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} C_{W111} & C_{W112} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{W121} & C_{W122} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_{W211} & C_{W212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{W221} & C_{W222} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad C_{Wlij} \in \mathbb{C}, \quad \delta_2 \in \mathbb{R} \tag{4.115}$$

Le problème de synthèse consiste à déterminer le régulateur K tel que:

$$\mu_{\underline{\Delta}}\left(F_l\left(S_{aug}, K\right)\right) \leq 1 \tag{4.116}$$

Ce problème sera résolu en utilisant la méthode des D-K itérations [Doyl 85] incluse dans les routines de la μ-Analysis and Synthesis Toolbox de Matlab [Bal 93]. Cette méthode se base sur la majoration suivante de la fonction μ:

$$\mu_{\underline{\Delta}}\left(F_l\left(S_{aug},K\right)\right) \leq \left\| D(s)F_l\left(S_{aug},K\right)D^{-1}(s)\right\|_\infty \leq 1 \tag{4.117}$$

Le problème de μ-synthèse consiste alors en une suite de synthèse H_∞ et de mise à l'échelle par matrice D. La procédure des D-K itérations consiste donc à effectuer en boucle les trois étapes suivantes, jusqu'à obtenir un minimum:

♦ A $D(s)$ fixé, on détermine par synthèse H_∞ le régulateur minimisant la norme suivante:

$$\left\| D(s)F_l\left(S_{aug},K\right)D^{-1}(s)\right\|_\infty \leq 1 \tag{4.118}$$

♦ A K fixé, on calcule la matrice D_{opt} appartenant à la famille $\underline{\Delta}$ qui minimise l'approximation de la fonction μ pour un échantillonnage de fréquence$\{\omega_k\}$.

$$\min_{D\in\underline{\Delta}}\left(\overline{\sigma}\left(D(j\omega_k)F_l\left(S_{aug},K\right)(j\omega_k)D^{-1}(j\omega_k)\right)\right) \tag{4.119}$$

♦ On cherche la fonction stable D à inverse stable qui interpole en gain la matrice D_{opt} pour cet échantillonnage de fréquence$\{\omega_k\}$.

Ainsi on obtient après trois mises à l'échelle, une borne supérieure de la fonction μ inférieure à l'unité, et un régulateur dont la dimension d'état est quinze.

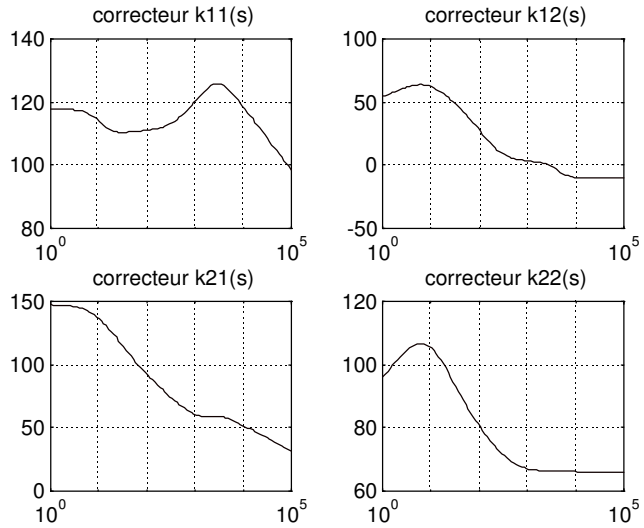


Fig. 4.8

Ce régulateur issu de cette synthèse sera réduit pour pouvoir l'implanter numériquement en utilisant la démarche proposée par [Duc 97]. On peut remarquer que pour obtenir une certaine robustesse vis à vis des incertitudes paramétriques, la synthèse a généré un régulateur dont structure n'est pas diagonale. Après plusieurs essais, donnant un résultat semblable, on peut s'interroger sur la robustesse vis à vis de variations paramétriques quand on se limite à des régulateurs à structure diagonale.

On vérifie que les contraintes imposées par les fonctions de pondération sur les différentes normes des fonctions de transferts $S(s)$ et $K(s)G(s)$ sont respectées.

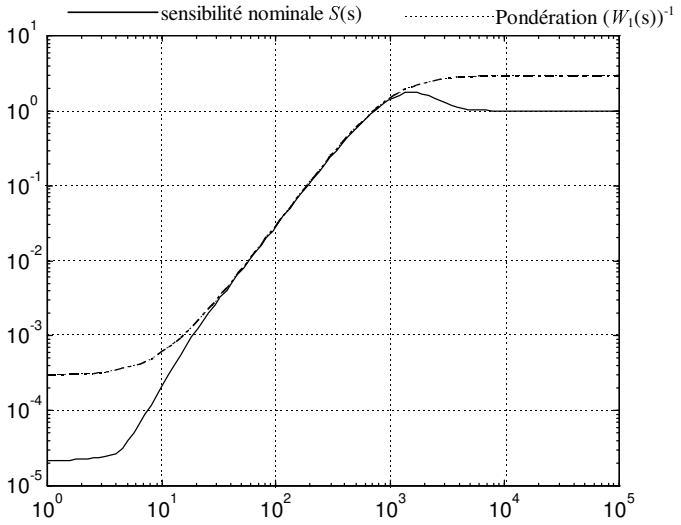


Fig. 4.9

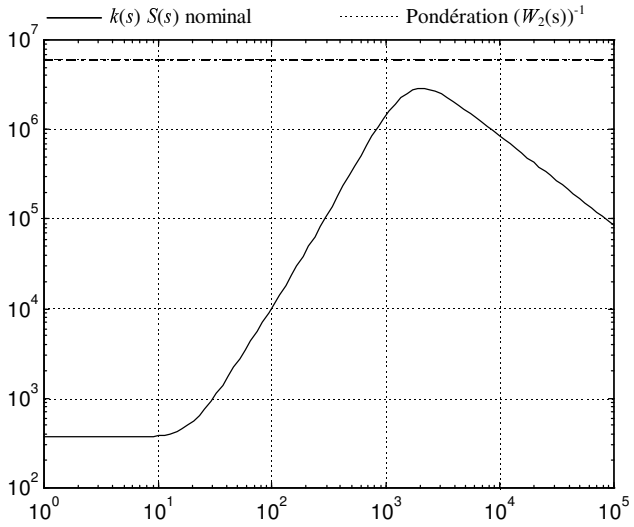


Fig. 4.10

Simulation

Nous avons simulé le comportement de la machine synchrone avec cette loi de commande. Le simulateur comporte une boucle de linéarisation du modèle nominal de la machine alimentée en tension. La boucle de régulation est implantée conformément au schéma générique à deux degrés de liberté. La génération de trajectoire fournit les commandes et les trajectoires de référence. La trajectoire du courant I_{dref} est nulle. La trajectoire de la vitesse V_{ref} est polynomiale et permet de passer d'une vitesse nulle à une vitesse de 100 rad/s en un temps t_r respectant la contrainte d'accélération maximale.

Nous avons simulé l'évolution des différentes grandeurs caractéristiques pour les trajectoires de référence précédentes, pour cinq valeurs de la résistance R_s comprise entre 0.95 R_s et 1.05 R_s, et avec une perturbation de couple de charge égale à 4 N.m à l'instant t = 0.05 s.

On obtient ainsi les chronogrammes suivants:

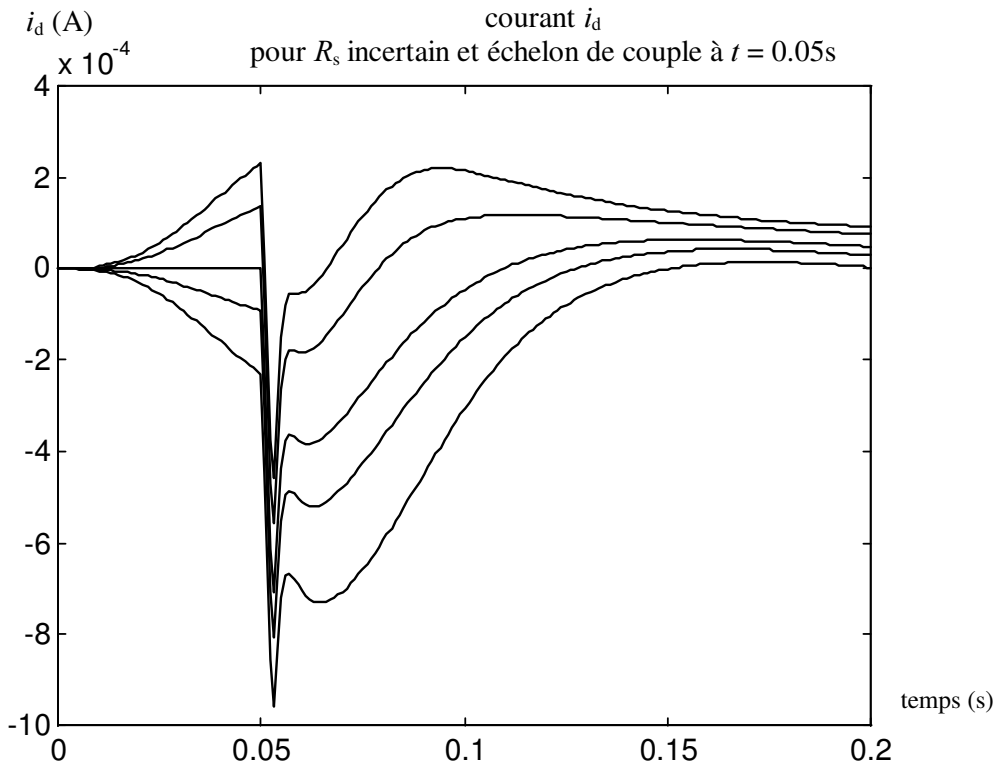


Fig. 4.11

Le courant I_d est maintenu à une valeur très faible (toujours inférieure au mA) pour la famille de modèles et en dépit d'une perturbation de couple.

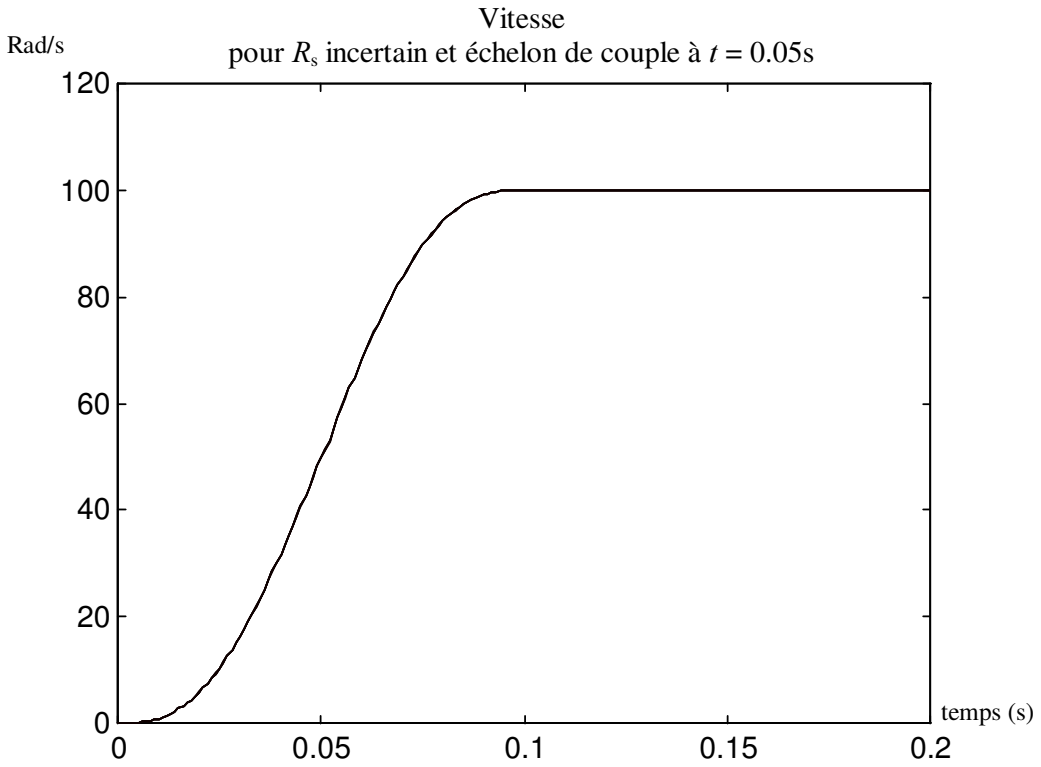


Fig. 4.12

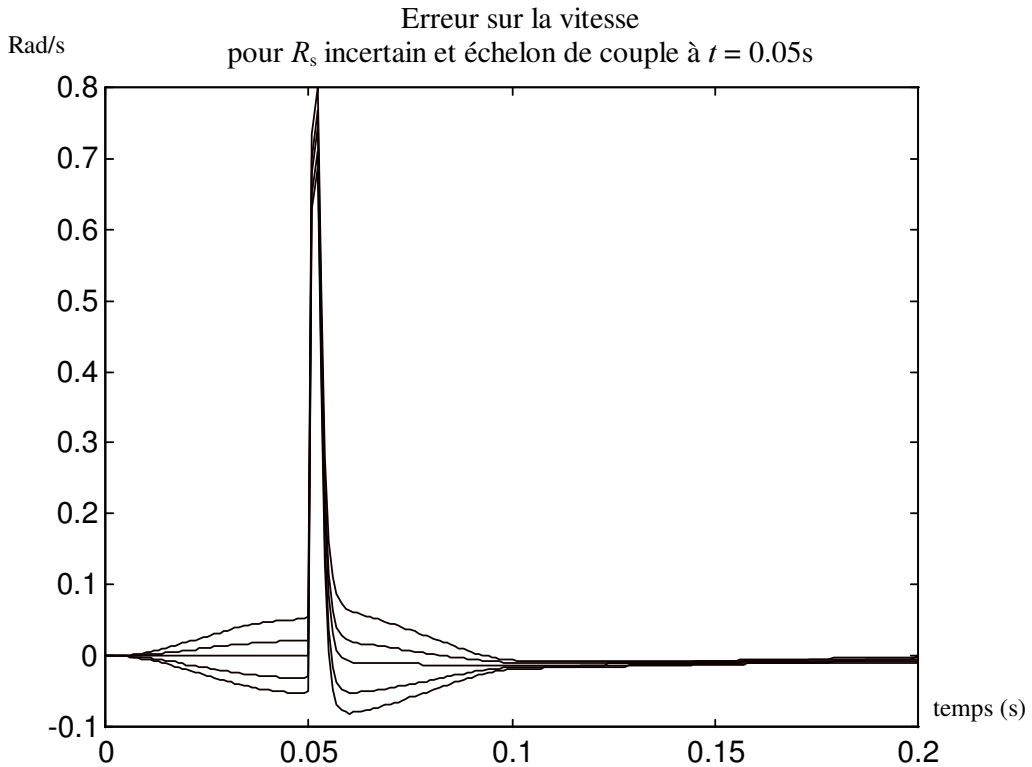


Fig. 4.13

L'erreur sur la vitesse est limitée à 0.8 rad/s et tend rapidement vers zéro.

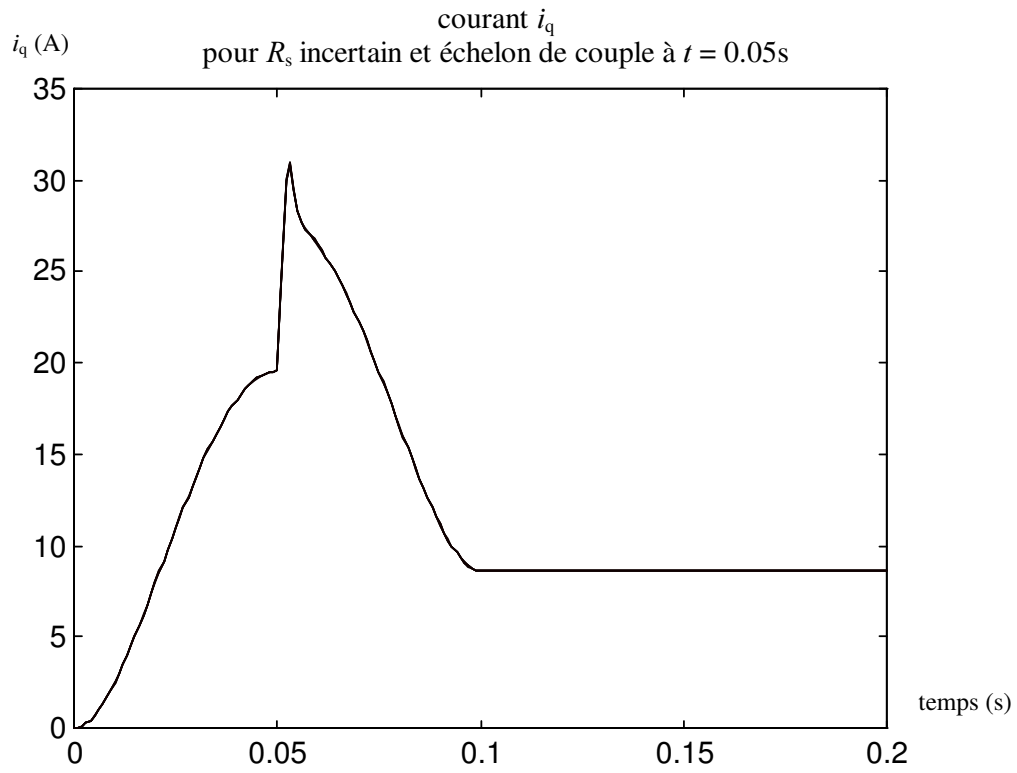


Fig. 4.14

Le courant I_q ne dépasse pas la valeur I_{max} durant le transitoire.

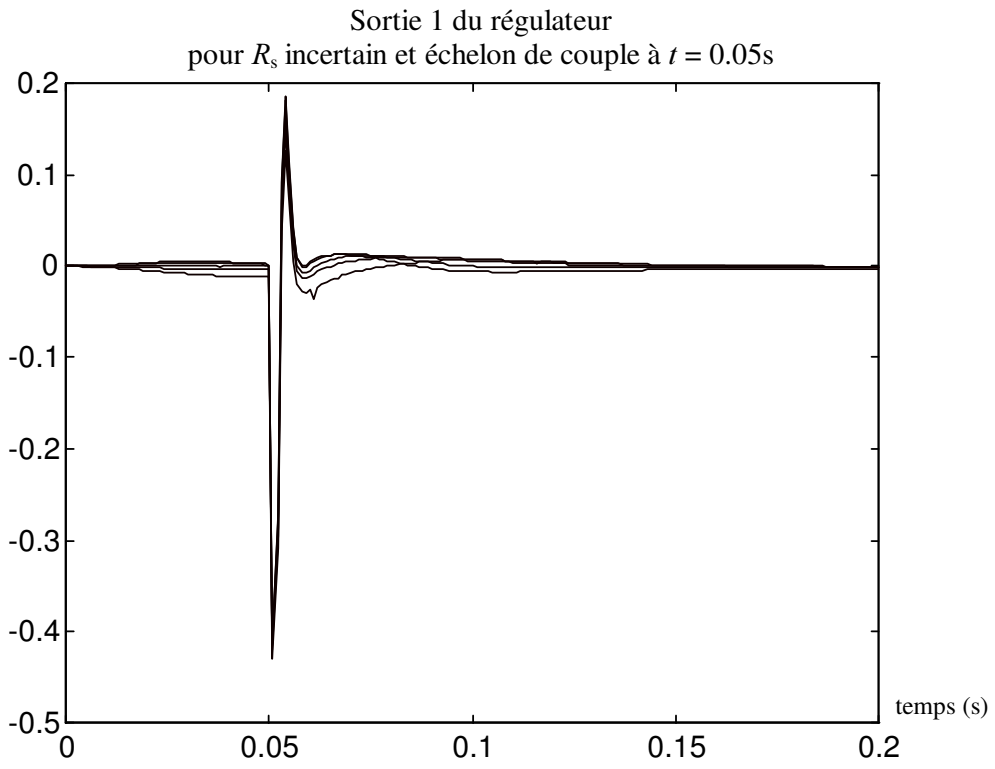


Fig. 4.15

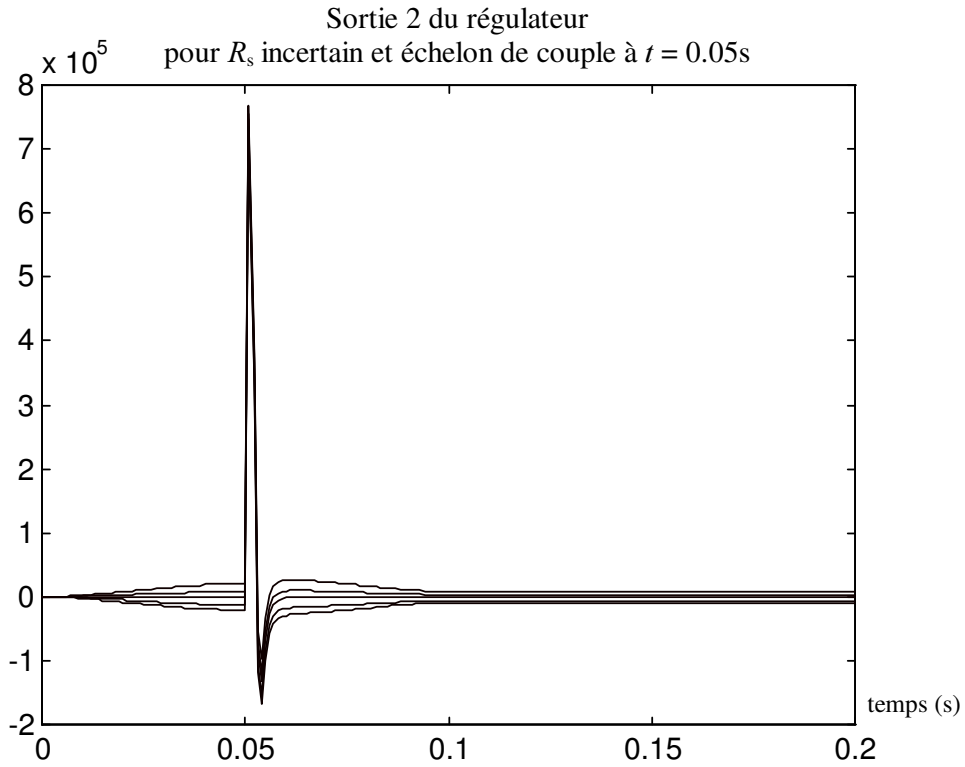


Fig. 4.16

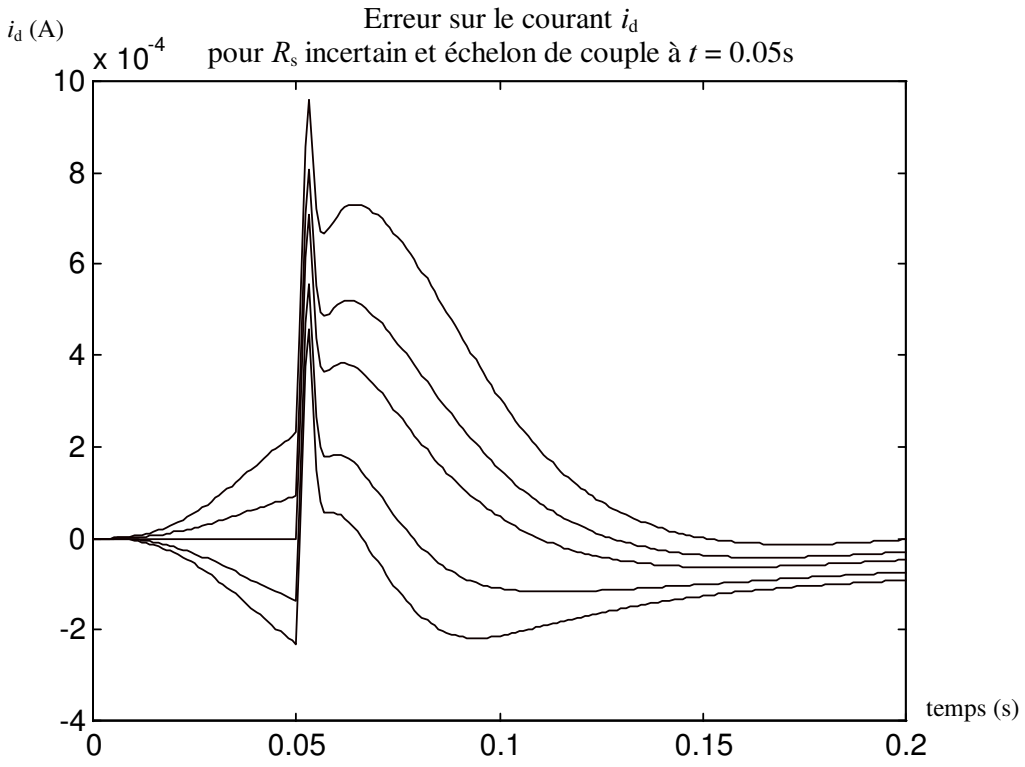


Fig. 4.17

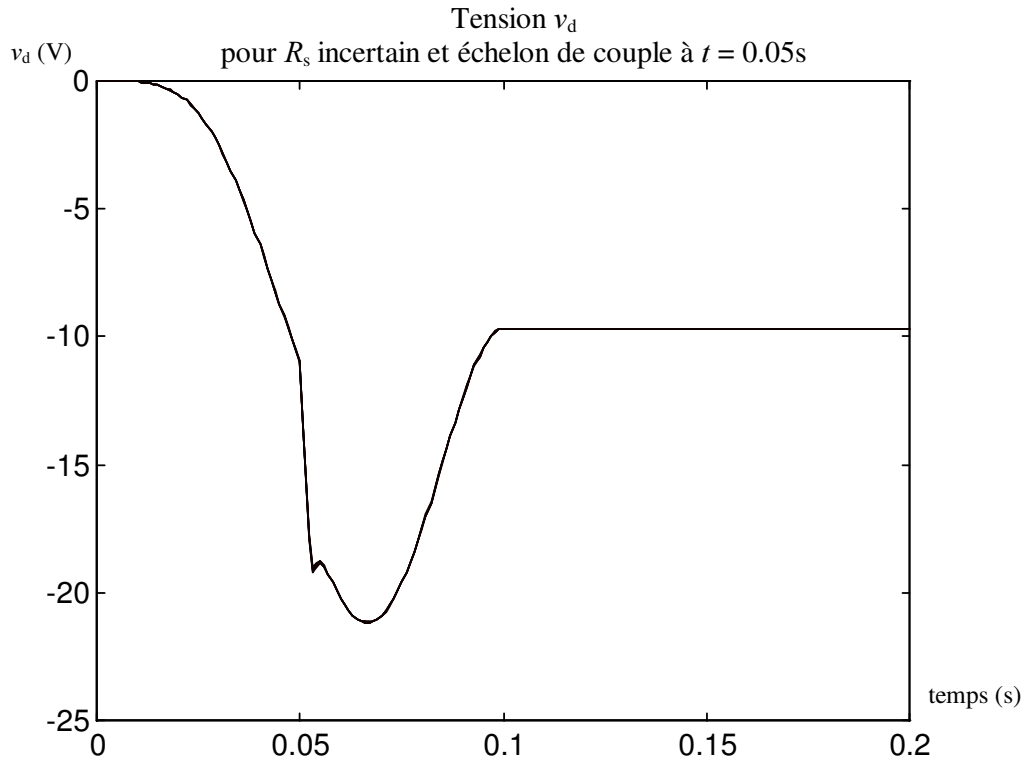


Fig. 4.18

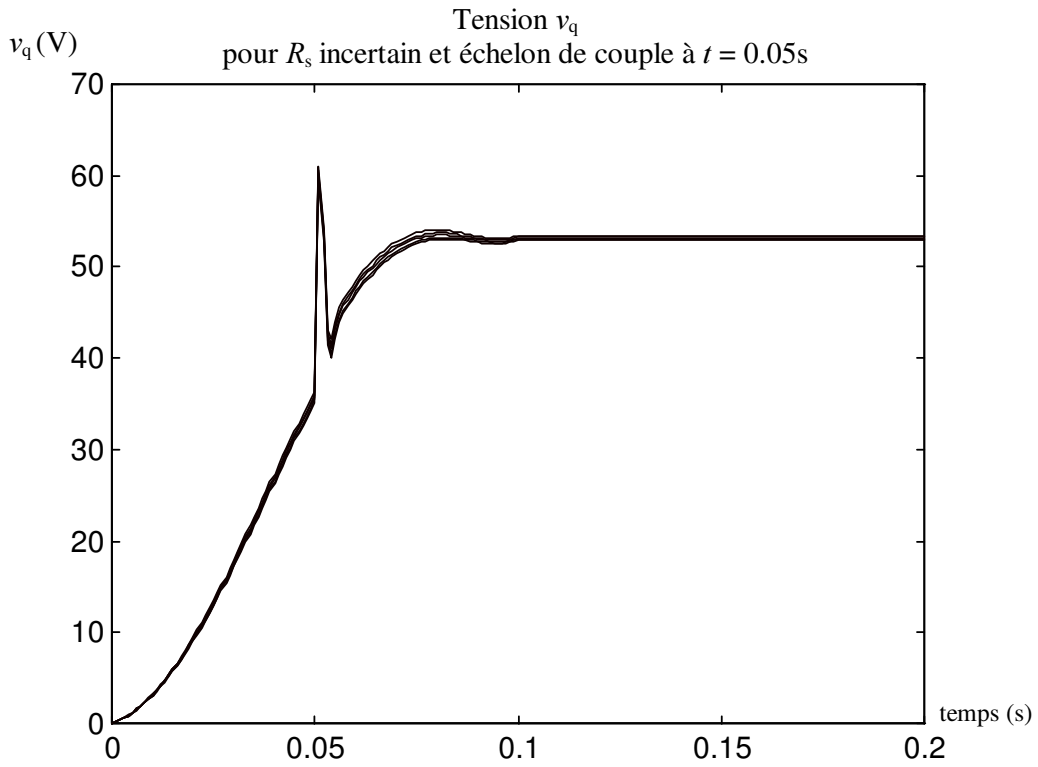


Fig. 4.19

Les tensions V_d et V_q demeurent dans un domaine acceptable.

4.3.5 Remarques et perspectives

Cette démarche donne actuellement satisfaction à l'aide d'un modèle non linéaire d'une machine synchrone implantée sous le logiciel Matlab. En particulier, l'effet des perturbations du couple de charge et des incertitudes sur la résistance statorique, sur les trajectoires de référence, est reduit. La loi de commande ainsi obtenue donne des résultats similaires à celle proposée dans la thèse de B. Le Pioufle [Piou 91] ce qui semble logique puisque les spécifications de performance en sont issues. L'intérêt de notre approche réside donc essentiellement dans le formalisme de la méthodologie utilisée pour la synthèse du régulateur linéaire. Ceci nous permet de garantir que les performances de rejet des perturbations sont atteintes pour la famille de modèle. Le régulateur ainsi obtenu peut cependant être amélioré. Ceci passe par une définition plus fine des fonctions de pondération W_1 et W_2 en différenciant les transferts diagonaux. En particulier la prise en compte explicite du type de perturbation par des filtres formeurs devrait permettre d'obtenir des résultats plus précis.

Il pourrait de plus être intéressant de prendre en compte d'autres termes d'erreur comme le flux à vide, par exemple. Cependant, bien que le problème soit semblable, lorsque le terme d'erreur intervient dans la matrice de découplage Δ, les calculs deviennent plus complexes. En effet, la matrice du système Δ' diffère alors de la matrice Δ du bouclage. Le produit n'étant plus égal à l'identité, il est nécessaire de déterminer les termes d'erreur correspondant à la matrice $\Delta'_0 - \Delta'\Delta^{-1}\Delta_0$.

La prise en compte de l'échantillonnage de la loi de découplage par les techniques proposées par [Mona 88] est en cours. Cette loi de commande échantillonnée sera appliquée dans un premier temps sur le modèle non linéaire d'une machine synchrone implantée sous le logiciel Matlab. Ensuite nous utiliserons un simulateur de machine synchrone plus performant, POSTM5 développé par le L.E.E.I. qui permet de faire évoluer le degré de complexité du modèle de la machine. Ce simulateur permet ainsi de passer graduellement du modèle simulink de Matlab avec une commande continue, à un modèle intégrant les saturations, les temps morts dus à l'électronique de puissance, et une commande échantillonnée. Une attention particulière sera portée à la gestion des saturations en utilisant des techniques étudiées au sein de l'équipe ARIA [Ygor 96], [Caza 96]. Une fois validée sur ce simulateur, la loi de commande sera testée sur le banc de test du PRC-GdR au Laboratoire d'Automatique de Nantes.

Conclusion

Nous avons dans un premier temps précisé le problème général de la commande robuste. Ensuite, nous avons rappelé les outils de synthèse et d'analyse de loi de commande pour les systèmes linéaires nultivariables d'une part et pour les systèmes plats d'autre part. La connaissance de ces deux domaines disjoints de l'automatique, nous a permis de proposer une démarche pour la synthèse d'une loi de commande robuste des systèmes plats. Cette approche intègre à la fois le concept de linéarisation par difféomorphisme et bouclage, le concept de platitude et la synthèse de loi de commande robuste des systèmes linéaires perturbés. La séparation des objectifs de poursuites nominales et de régulation est précisée. Pour ce faire l'utilisation du schéma générique de commande à deux degrés de liberté a été étendue au cas de la commande des systèmes plats. Le concept de platitude a permis de simplifier la méthode basé sur le schéma générique à deux degrés de liberté grâce à la génération des trajectoires de référence déduite de la platitude. Cette loi de commande comporte deux éléments. Un élément non linéaire permet le découplage et la linéarisation du modèle nominal et simplifie la génération de trajectoire nominale. Un élément linéaire permet de corriger les écarts vis-à-vis de la trajectoire nominale pour un ensemble de modèles défini par un modèle nominal, des incertitudes paramétriques et des incertitudes additives non structurées. Nous avons de plus déterminé dans le cas des systèmes plats découplé par bouclage dynamique endogène les termes d'erreurs due aux perturbations sur le champ et sur la trajectoire de référence.

La détermination de la boucle de linéarisation utilise le concept de sorties plates pour l'obtention d'un découplage entrée-état. Ceci permet de s'affranchir de l'étude de la stabilité des modes instables que l'on fait lors d'une linéarisation partielle par bouclage statique.

Le calcul du régulateur linéaire passe par la mise en forme du problème de synthèse sous la forme standard. La synthèse de la loi de commande est basée sur l'utilisation de la fonction μ permettant la prise en compte de la structuration des incertitudes, afin de réduire le caractère conservateur des techniques basées sur la minimisation de norme.

La mise en application de cette méthode de synthèse porte sur la commande des machines à courants alternatifs. Ce faisant, nous avons appliqué le concept de platitude utilisé pour les machines asynchrones, au cas des machines synchrones à pôles lisses et amortisseurs. Pour cette catégorie de machines, nous avons proposé un schéma augmenté pour la synthèse H_∞ d'un régulateur robuste vis à vis des variations du couple de charge. Cette synthèse permet de retrouver la structure diagonale des régulateurs utilisés habituellement dans le cadre de la poursuite des sorties plates. Nous avons ensuite déterminé une loi de commande dans le cas des machines synchrones à aimants sans amortisseur, robuste vis à vis des variations du couple de charge, de la résistance statorique et d'une incertitude additive non structurée. La synthèse effectuée par D-K itération a abouti à un régulateur dont la structure n'est pas diagonale.

La loi de commande donne toutes les garanties de fonctionnement sous simulateur Matlab. Cependant, il est nécessaire d'approfondir le problème de l'implantation numérique de la loi de commande non linéaire. Une première approche consistera à utiliser la méthode proposée par [Mona 88] pour effectuer une implantation sur site. Cette implantation sera précédée d'une simulation plus approfondie à l'aide du simulateur POSTM5 du L.E.E.I.

Cette démarche devrait pouvoir, dans un avenir proche, être utilisée dans de nouveaux domaines d'application, comme les systèmes aéronautiques dans le cadre du projet GARTEUR, ou encore la commande d'un système hydraulique [Caza 96].

Annexes

A.1. Espaces Vectoriels Normés

A.1.1 définitions

Soit V un espace vectoriel de dimension finie *n* sur le corps des scalaires **K**. Un vecteur *v* de cette espace se décompose sur une base composée de *n* vecteurs linéairement indépendant sous la forme suivante: $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ Ce vecteur sera représenté en notation matricielle par le vecteur colonne *v*. Le vecteur ligne v^* est le vecteur adjoint du vecteur colonne *v*. $\overline{\alpha}$ désigne le nombre complexe conjugué du nombre α. On a $v^* = \begin{pmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n} \end{pmatrix}$.

L'application VxV dans K définie par $(u,v) = v^* u = \overline{u^* v} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}$ est *appelée produit scalaire canonique*. On parlera de produit scalaire euclidien avec le corps des réels $\mathbb{R}$ et de produit scalaire hermitien sur le corps des complexes $\mathbb{C}$.

On appelle *espace préhilbertien* un espace munie d'un produit scalaire.

Une *norme* sur V est une application de V dans $\mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes:

(1) $f(v) \geq 0 \ \forall \ v \in V$

(2) $f(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(3) $f(u+v) \geq f(u) + f(v) \ \forall \ u,v \in V$

(4) $f(\alpha v) = |\alpha| f(v) \ \forall \ \alpha \in \mathbb{K}, v \in V$

Soit V un espace de dimension finie. Les normes de Hölder sont définies par l'application suivante :

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On utilisera plus particulièrement les trois normes suivantes:

$$\|v\|_1 = \left(\sum_{i=1}^{n}|v_i|\right);\ \|v\|_2 = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}|v_i|^2\right)} = \sqrt{v^* v} \text{ et } \|v\|_\infty = \max_i |v_i|$$

Les inégalités suivantes démontrent l'équivalence de ces trois normes:

$$\|v\|_2 \le \|v\|_1 \le \sqrt{n}\|v\|_2\ ;\ \|v\|_\infty \le \|v\|_2 \le \sqrt{n}\|v\|_\infty\ ;\ \|v\|_\infty \le \|v\|_1 \le n\|v\|_\infty$$

Un *espace de Hilbert* est un espace vectoriel normé complet. Sachant que tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet, L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire est un exemple d'espace de Hilbert.

A.1.2 Propriété des espaces de Hilbert: Théorème de projection:

Soit U un sous-ensemble non vide convexe fermé, d'un espace de Hilbert V. Etant donné un élément quelconque w appartenant à V, il existe un et un seul élément Pw tel que:

$$Pw \in U \text{ et } \|w - Pw\| = \inf_{v \in U} \|w - v\|$$

Cet élément vérifie : $(Pw - v, v - Pw) \ge 0\ \forall v \in U$

et réciproquement si un élément u vérifie

$$u \in U \text{ et } (u - v, v - u) \ge 0\ \forall v \in U \text{ alors } u = Pw.$$

L'application P de V vers U ainsi définit s'appelle l'opérateur projection, et est telle que:

$$Pw \in U \text{ et } \|Pw_1 - Pw_2\| \le= \|w_1 - w_2\| \text{ pour tout } w_1, w_2 \in V.$$

Enfin, l'application P est linéaire, si et seulement si, le sous ensemble U est un sous espace vectoriel, les inégalités précédentes sont alors remplacées par des égalités.

A.1.4 Espaces de fonction

A.1.4.1 Espace $L_2(\mathbb{R}^n)$

<u>Définitions</u>

L'espace $L_2(\mathbb{R}^n)$ est un espace Hilbertien de fonctions vectorielles x à valeur dans $\mathbb{R}^n$ pour t réel, mesurables au sens de Lebesgue et telles que l'énergie du signal $x(t)$ sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$ soit finie. Avec $\|x(t)\|_2$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$, on a:

$$\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \|x(t)\|_2^2 dt < \infty .$$

La valeur de cette intégrale constitue la norme de la fonction x dans $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Cet espace ne contient pas de fonctions correspondant aux systèmes instables. Par exemple la fonction $f(t) = e^t$ n'appartient pas à l'espace $L_2(\mathbb{R}^n)$. Pour pouvoir étudier la stabilité, il est alors courant de se placer dans un espace élargi aux fonctions non bornées à l'infini (comme e^t).

A.1.4.2 Espace L_2 étendu : $L_{2e}(\mathbb{R}^n)$

Définitions

On définit l'opérateur de troncature P_T défini sur l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $(P_T(x))(t) = x(t)$ si $t < T$ et nulle au-delà de T.

L'espace L_{2e} est l'espace des fonctions x de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ mesurables au sens de Lebesgue et telles que pour tout réel T l'énergie de la troncature du signal $x(t)$, sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$ soit finie. En posant $\|x(t)\|_2$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\|x\|_T^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \|P_T x(t)\|_2^2 dt < \infty .$$

La valeur de cette intégrale constitue une famille de semi-normes de la fonction x dans L_{2e}. Cette semi-norme est finie mais peut tendre vers l'infini lorsque T tend vers l'infini.

A.1.4.3 Espace $L_2^n(\mathbb{C}^n)$

Définitions

L'espace $L_2(\mathbb{C}^n)$ est un espace Hilbertien de fonctions vectorielles x à valeur dans $\mathbb{C}^n$ pour t réel, mesurables au sens de Lebesgue et telles que l'énergie du signal $x(t)$ sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$ soit finie. Avec $\|x(t)\|_2$ la norme vectorielle euclidienne dans $\mathbb{C}^n$, on a:

$$\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \|x(t)\|_2^2 dt < \infty .$$

La valeur de cette intégrale constitue la norme de la fonction x dans $L_2(\mathbb{C}^n)$.

Le sous espace de L_2^n constitué par des fonctions analytiques se note H_2^n

Le sous espace de L_2^n constitué des fractions rationnelles à coefficients réels se note RH_2^n.

A.2 Norme d'une fonction matricielle et norme induite

A.2.1 Définitions

Une norme matricielle est une application de l'anneau $\mathcal{A}_n$ des matrices carrées d'ordre n à éléments dans le corps K vérifiant les quatre propriétés des normes vectorielles ainsi que l'inégalité suivante appelée inégalité de Hölder.

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \text{ pour tout } A, B \in \mathcal{A}_n$$

Une norme matricielle peut se définir à partir d'une norme vectorielle, on parle alors de norme induite. Les normes de Hölder induisent les normes matricielles suivantes:

$$\|A\|_p = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in C^n}} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \forall A \in C^{m \times n}$$

Ces normes se calculent aisément dans le cas linéaire pour les valeurs de p suivantes:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \text{ ; } \|A\|_\infty = \max_i \sum_{ji=1}^{n} |a_{ij}| \text{ et } \|A\|_2 = \max_i \lambda_i \left(A^* A\right) = \max_i \sigma_i \left(A\right) = \overline{\sigma}(A)$$

Avec a_{ij} l'élément de A se trouvant à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne.

On utilisera de plus la norme de Frobenius définie de la manière suivante:

Dans le cas linéaire on obtient: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$. Cette norme n'est pas une norme induite, mais est équivalente aux trois normes matricielles précédentes par la relation suivante: $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$.

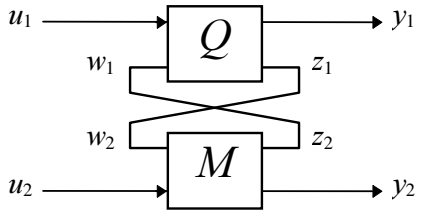
A.3 Transformation linéaires fractionnaires

Les transformations linéaires fractionnaires résultent de l'application du produit en étoile (star product) de matrices proposé par Redheffer au cas de la représentation des systèmes linéaires.

Soient deux matrices Q et M définies de la manière suivante:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} z_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} w_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_2 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Supposons que ces deux systèmes algébriques soient connectés de la manière suivante:



Le produit en étoile traduisant l'interconnexion précédente se définit par la relation

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = S(Q, M)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

avec

$$S(Q, M) = \begin{pmatrix} Q_{11} + Q_{12} M_{11}(I - Q_{22} M_{11})^{-1} Q_{21} & Q_{12}(I - M_{11} Q_{22})^{-1} M_{12} \\ M_{21}(I - Q_{22} M_{11})^{-1} Q_{21} & M_{22} + M_{21} Q_{22}(I - M_{11} Q_{22})^{-1} M_{12} \end{pmatrix}$$

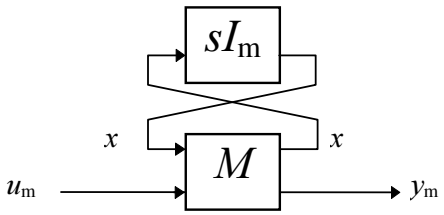
Considérons maintenant que les matrices M et Q sont des matrices contenant chacune une réalisation d'un système linéaire conformément aux équations suivantes:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_m \\ y_{n1} \\ y_{n2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} A_n & B_{m1} & B_{m2} \\ \hline C_{n1} & D_{m11} & D_{m12} \\ C_{m2} & D_{m21} & D_{m22} \end{array}\right)\begin{pmatrix} x_m \\ u_{m1} \\ u_{m2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_q \\ y_{q1} \\ y_{q2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} A_q & B_{q1} & B_{q2} \\ \hline C_{q1} & D_{q11} & D_{q12} \\ C_{q2} & D_{q21} & D_{q22} \end{array}\right)\begin{pmatrix} x_q \\ u_{q1} \\ u_{q2} \end{pmatrix}$$

La matrice de transfert associée à la réalisation d'état M s'obtient en interconnectant à la matrice M, la matrice complexe diagonale suivante représentant l'intégration de l'état.

$$S = sI_m \text{ avec } m = \dim(A_m)$$



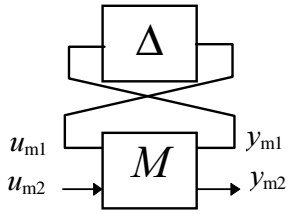
Ainsi on obtient:

$$\begin{pmatrix} Y_{m1} \\ Y_{m2} \end{pmatrix} = M(s)\begin{pmatrix} U_{m1} \\ U_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{m1} \\ U_{m2} \end{pmatrix}$$

$$M(s) = F_u(M,S) = \begin{pmatrix} C_1(sI_m - A_m)^{-1}B_1 + D_{11} & C_1(sI_m - A_m)^{-1}B_2 + D_{12} \\ C_2(sI_m - A_m)^{-1}B_1 + D_{21} & C_2(sI_m - A_m)^{-1}B_2 + D_{22} \end{pmatrix}$$

où F_u désigne la transformation linéaire fractionnaire haute de la matrice M par la matrice S.

Considérons maintenant l'interconnexion entrées-sorties de deux systèmes conformément au schéma suivant:



La représentation d'état associée au système résultant de la connexion de la matrice M à la matrice Δ est donnée par la transformation linéaire fractionnaire haute. Pour la représentation par matrice de transfert elle se définit de la manière suivante:

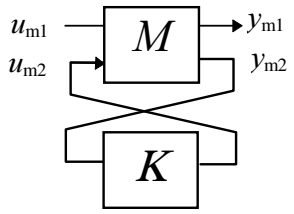
$$Y_{m2} = F_u\left(M(s),\Delta(s)\right)U_{m2} = \left(M_{22}(s) + M_{21}(s)\Delta(s)\left(I - M_{11}(s)\Delta(s)\right)^{-1}M_{12}(s)\right)U_{m2}$$

Pour la représentation par réalisation d'état elle se définit de la manière suivante:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{x}_\Delta \\ y_{m2} \end{pmatrix} = F_u(M,\Delta)\begin{pmatrix} x_m \\ x_\Delta \\ u_{m2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} A_m + B_1FD_\Delta C_1 & B_1FC_\Delta & B_2 + B_1FD_\Delta D_{12} \\ B_\Delta EC_1 & A_\Delta + B_\Delta ED_{11}C_\Delta & B_\Delta ED_{12} \\ \hline C_2 + D_{21}FD_\Delta C_1 & D_{21}FC_\Delta & D_{22} + D_{21}FD_\Delta D_{12} \end{array}\right)\begin{pmatrix} x_m \\ x_\Delta \\ u_{m2} \end{pmatrix}$$

$$E = (I - D_{11}D_\Delta)^{-1}, \quad F = (I - D_\Delta D_{11})^{-1} \quad et \quad \Delta = \begin{pmatrix} A_\Delta & B_\Delta \\ C_\Delta & D_\Delta \end{pmatrix}$$

Considérons maintenant l'interconnexion entrées-sorties de deux systèmes conformément au schéma suivant:



La représentation d'état associé au système résultant de la connexion de la matrice M à la matrice Δ est donnée par la transformation linéaire fractionnaire haute. Pour la représentation par matrice de transfert elle se définit de la manière suivante:

$$Y_{m1} = F_u\left(M(s), K(s)\right)U_{m1} = \left(M_{11}(s) + M_{12}(s)K(s)\left(I - M_{22}(s)K(s)\right)^{-1} M_{21}(s)\right)U_{m1}$$

Pour la représentation par réalisation d'état elle se définit de la manière suivante:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{x}_k \\ y_{m1} \end{pmatrix} = F_u\left(M, K\right)\begin{pmatrix} x_m \\ x_k \\ u_{m1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} A_m + B_2 F D_k C_2 & B_2 F C_k & B_1 + B_2 F D_k D_{21} \\ B_k E C_2 & A_k + B_k E D_{22} C_k & B_k E D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} F D_k C_2 & D_{12} F C_k & D_{11} + D_{12} F D_k D_{21} \end{array}\right)\begin{pmatrix} x_m \\ x_k \\ u_{m1} \end{pmatrix}$$

$$E = \left(I - D_{22} D_k\right)^{-1}, \quad F = \left(I - D_k D_{22}\right)^{-1} \quad et \quad K = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix}$$

A.4 Données Numériques

Machine synchrone utilisée par B. Lepioufle dans le cadre de sa thèse:

Courant nominal: I_n = 20 A.

Courant transitoire maximal: I_{max} = 30A.

Couple maximal transitoire: C_{max} = 14 N.m.

Couple permanent à l'arrêt: C_{p0} =10 N.m.
Couple permanent à 2200 tr/min: C_{pn} = 8.5 N.m.
Résistance statorique par phase: R_s = 0.6Ω.
Inductance directe: L_d = 2.8 mH.
Inductance en quadrature: L_q = 2.8 mH. (Machine à saillance inversée)
Nombre de paire de pôle: p = 4.
Flux à vide Φ_f = 0.12 Wb.
Inertie du rotor J_m = 11 10^{-4} Kg.m^2.
Inertie de la charge J_{ch} = 38 10^{-4} Kg.m^2.
Frottement sec C_0 = 0.3 N.m.
Frottement visqueux f = 1.4 N.m.s

Machine synchrone du PRC-GdR :

Courant nominal: I_n = 3.75 A.

Courant transitoire maximal: I_{max} = 11.3A.

Couple maximal transitoire: C_{max} = 18 N.m.

Couple permanent à l'arrêt: C_{p0} = 6 N.m.
Couple permanent à 2200 tr/min: C_{pn} = 5.4 N.m.
Résistance statorique par phase: R_s = 3.25 Ω.
Inductance directe: L_d = 22.4 mH.
Inductance en quadrature: L_q = 25.5 mH. (Machine à saillance inversée)
Nombre de paire de pôle: p = 3.
Flux à vide Φ_f = 0.183 Wb.
Inertie du rotor J_m = 3.7 10^{-4} Kg.m^2.
Inertie de la charge J_{ch} = 38 10^{-4} Kg.m^2.
Frottement sec C_0 = 0.3 N.m.
Frottement visqueux f = 1.4 N.m.s

Bibliographie

[Aran 95] Aranda-Bricaire E., C. H. Moog, and J. B. Pomet, *A linear algebraic framework for dynamic feedback linearization,* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-40**, pp. 127-132, 1995.

[Arno 74] Arnold V., *Equations différentielles ordinaires*, Editions de Moscou, Traduction française Editions Mir 1974.

[Bell 91] Bellini A., G. Figalli, and F. Tosti, *Linearized model of induction motors drives via non linear state feedback decoupling,* in 4th European Conference on Power Electronics and Applications (EPE'91), Vol 3, pp. 36-41, Firenze, Sept. 1991.

[Bene 89] Benedetto (Di) M. D., J. H. Grizzle and C. H. Moog, *Rank invariants of nonlinear systems,* SIAM J. Control Optimization, 27, pp. 658-672, 1989.

[Bene 90a] Benedetto (Di) M. D., and J. H. Grizzle, *Intrinsic notions of regularity for local inversion, output nulling and dynamic extension of nonsquare systems,* C-TAT 6, pp. 357-381, 1990.

[Bene 90b] Benedetto (Di) M. D., and J. H. Grizzle, *An anlysis of regularity conditions in nonlinear synthesis*, in Proc. 9th Int. Conf. on Analysis and Optimisation Systems, Lecture Note in Control and Information sciences, Vol. 144, Springer, Berlin, pp. 843-850, 1990.

[Berg 90] Bergeon B. M. Monsion and S. Ygorra, *Frequential synthesis of multiple reference model control,* Proc. ACC, San Diego, pp. 3041-3043, 1990.

[Berg 94] Bergeon B., *Commande monovariable robuste H_∞ et QFT*, APII vol. 28.2, pp. 159-178, 1994.

[Bour 82] Bourles H., *Qualification et amélioration de la robustesse des régulateurs multivariables, application au pilotage d'avion,* Thèse de docteur ingénieur, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1982.

[Bour 93] Bourlès H. and F. Aïoum, *Approche H_∞ et μ-synthèse,* in A. Oustaloup Ed., Proc. Ecole d'été d'automatique de Grenoble du 6 au 10 septembre 1993, pp. 163-235, Hermes 1994.

[Broc 78] Brockett R.W., *Feedback invariants for nonlinear systems,* Proc. VII IFAC Congress, Helsinki, pp. 1115-1120, 1978.

[Byrn 86] Byrnes C. and A. Isodori, *Asymptotic expansions, root-loci and the global stablility of non linear feedback systems,* in M. Fliess and M. Hazewinkel, Eds, Algebraic and Geometric Methods in control theory, Reidel, Dordrecht-Boston, 1986.

[Camp 90] Campo P.J and M. Morari, *Robust control of processes subject to saturation nonlinearities,* Computers & Chemical Engeneering, 14 (4/5), pp. 343-358, 1990

[Caro 95] Caron J. P. and J. P. Hautier, *Modélisation et Commande de la machine synchrone*, Journées 3 E.I, Supélec, Gif-sur Yvette, 30-31Mars 1995.

[Caza 95] Cazaurang F., *Mise en oeuvre d'une machine synchrone autopilotée industrielle,* Ecole d'été « Methodes de contrôle des machines à champs tournants » MAFPEN, ENSAM Bordeaux, Sept 1995.

[Caza 96] Cazaurang F., A. Zolghadri, et S. Ygorra, *Commande et surveillance d'un procédé multivariable,* Journées « Automatique et Expérimentation en laboratoire », in Proc. Club E.E.A, ISTIA, Angers, Avril 1996.

[Caza 96] Cazaurang F., S.Ygorra, B. Bergeon, M.Fadel, and J.Faucher*, Anti Windup Position control of synchronous machine with current limitation*, in Proc. ELECTRIMACS 96, 5th international conference, St Nazaire, Sept. 1996.

[Char 89a] Charlet B., *Sur quelques problèmes de stabilisation robuste des systèmes non linéaires,* Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 1989.

[Char 89b] Charlet B., J. Lévine and R. Marino. *On dynamic feedback linearization,* Systems & Control Letters, 13, pp. 143-151, 1989.

[Char 91] Charlet B., J. Lévine and R. Marino. *Sufficient condition for dynamic feedback linearization,* SIAM J. Control Optimization, 29, pp. 38-57, 1991.

[Chat 83] Chatelain J., *Machines électriques* Vol X du Traité d'électricité, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne , Presse Polytechniques Romandes, 1983.

[Chel 94] Chelouah A., *Sur la commande en temps discret de systèmes non linéaires continu,* Thèse Université de Paris-Sud Centre d'Orsay, 1994.

[Chel 96] Chelouah A., E. Delcheau, P. Martin, and P. Rouchon, *Differential flatness and control of induction motors,* Proc. CESA'96,Vol.1 ,pp. 80-83, 1996.

[Chen 90] Chen L.-H. and H.-C. Chang, *Robustness of large-gain linearizing feedback in the presence of fast dynamics,* Proc. ACC 90, San Diego, California pp. 2741-2745, 1990.

[Chia 93] Chiasson J., *Dynamic feedback linearization of induction motor,* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-38**, pp. 1588-1594, 1993.

[Chia 95] Chiasson J., *A New Approach to Dynamic Feedback Linearization Control of an Induction Motor,* in Proc. Of the 34th I.E.E.E. Conf. Dec. Contr., pp. 2173-2178, New Orleans, LA, December 1995.

[D'And 88] D'Andréa-Novel B., *Commande non linéaire des robots,* Traité des Nouvelles Technologies, Série Automatique, Hermès, Paris, 1988.

[DeLa 93] De Larminat Ph., *Automatique: Commande des systèmes linéaires,* Traité des Nouvelles Technologies, Série Automatique, Hermès, Paris, 1993.

[Desc 85] Descusse J. and C. H. Moog, *Decoupling with dynamic conpensation for strong invertible affine nonlinear systems*, Int. Journal of Control, vol. 42, N°6, pp. 1387-1398, 1985.

[Desc 87] Descusse J. and C. H. Moog, *Dynamic decoupling for right-invertible nonlinear systems*, Systems & Control Letters, vol. 8, N°4, pp. 345-349, 1987.

[Deso 80] Desoer C. A., R. W. Liu, J. Murray and R. Saeks, *Feedback system design: The fractional representation approach to analysis and synthesis,* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-25**, pp. 399-412, 1980.

[Doyl 82a] Doyle J. C., *Analysis of feedback systems with structured uncertainties,* Proc. I.E.E-D, vol. 129, pp. 242-250, 1982.

[Doyl 82b] Doyle J. C., J. E. Wall and G. Stein, *Performance and robustness analysis for structured uncertainty,* Proc. I.E.E.E C.D.C, Orlando, FL, pp. 629-636, 1982.

[Doyl 85] Doyle J. C., *Structured uncertainty in control system design,* Proc. I.E.E.E C.D.C, Fort Lauderdale, FL, pp. 260-265, 1985.

[Doyl 89] Doyle J. C., K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis, *State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problems,* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-34**, pp. 831-847, 1989.

[Duc 93] Duc G., *Robustesse des systèmes linéaires multivariables*, Cours E.S.E, 1993.

[Falb 67] Falb P. L. and W.A. Wolovitch, *Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems,* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-12**, pp. 651-659, 1967.

[Flie 86] Fliess M., *Some remarks on non linear invertibility and dynamic state feedback,* in Theory and Application of nonlinear control systems, C. I. Byrnes and A. Lindquist eds., North-Holland pp. 115-122, 1986.

[Flie 87] Fliess M., *Nonlinear control theory and differential algebra : some illustrative examples,* , 10th IFAC Word Congress, Munich, vol.8, pp. 114-118, 1987.

[Flie 89] Fliess M., *Généralisation non linéaire de la forme canonique de commande et linéarisatyion par bouclage,* C.R Acad. Sci. Paris, I-308, pp. 377-379,1989.

[Flie 92] Fliess M., J. Lévine, Ph. Martin and P. Rouchon, *Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats,* C.R Acad. Sci. Paris, I-315, pp.619-624,1992.

[Flie 93] Fliess M., J. Lévine, Ph. Martin and P. Rouchon, *Linéarisation par bouclage dynamiques et transformation de lie-Bäcklund,* C.R Acad. Sci. Paris, I-317, pp. 981-986,1993.

[Flie 95a] Fliess M., J. Lévine, Ph. Martin and P. Rouchon, *Flatness and defect of nonlinear systems: introduction theory and examples,* Int. Journal of Control, 61, pp. 1327-1361, 1995.

[Flie 95b] Fliess M., J. Lévine, Ph. Martin and P. Rouchon, *A geometric framework for flatness and equivalence,* Rapport du Séminaire Développement Récents en Non-Linéaire, GdR Automatique du C.N.R.S, Cachan, pp. 131-142, Juin 1995.

[Flie 95c] Fliess M., J. Lévine, Ph. Martin and P. Rouchon, *Commande des systèmes différentiellement plats,* Rapport du Séminaire Développement Récents en Non-Linéaire, GdR Automatique du C.N.R.S, Cachan, 43-78, Juin 1995.

[Flie 97] Fliess M., J. Lévine, Ph. Martin, F. Ollivier and P. Rouchon, *Controlling nonlinear systems by flatness,* in Systems and Control in the twenty-First Century, C. I. Byrnes, B. N. Datta, D. S. Gilliam and C. F. Martin Eds, 137-154, Birkäuser, Boston, 1997.

[Fran 75] Francis B. A. and W. M. Wonham, *The internal model principe for linear multivariable regulators,* Appl. Maths & and Optimization 2 (2), pp. 170-194, 1975.

[Fran 76] Francis B. A. and W. M. Wonham, *The internal model principe of control theory,* Automatica 12 (5), pp. 457-465, 1976.

[Fran 87] Francis B. A. and J. C. Doyle, *linear control theory with an H optimality criterion,* SIAM, J. Control and Optimisation Vol 25 (4), 1987.

[Gahi 92] Gahinet P., *A convex parametrization of suboptimal controllers,* Proc. C.D.C, Tucson Arizona, Dec 92.

[Garc 82] Garcia E.C. and M. Morari, *Internal Model control : 1. A Unifying review and some results;* Industrial and Engineering Chimistery Process Desing and developpement, 21, pp. 308-323, 1982.

[Geor 92] Georgiou G., *Sur des Méthodes de Commande Non Linéaire Adaptative: Aspects Echantillonnés et Applications,* Thèse Université de Paris-Sud Centre d'Orsay, 1992.

[Glov 88] Glover K. and J. C. Doyle, *State space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H norm bound, and relations to risk sensitivity,* Systems and Control Letters, n° 11, pp. 167-172, Nov. 1988.

[Glum 89] Glumineau A. and C. H. Moog, *The essential orders and the nonlinear decoupling problem, ,* Int. J. Control, vol 50, n°6, pp.1825-1834, 1989.

[Glum 93] Glumineau A. M. Hamy, C. Lanier and C. H. Moog, *Robust control of a brushless servo motor via sliding modes techniques,* Int. J. Control, vol 50, n°6, pp.1825-1834, 1989.

[Grele 97] Grellet G. and G. Clerc, *Actionneurs électriques, Principes, Modèles, Commande,* Ed. Eyrolles, Paris, 1997

[Guck 83] Guckenheimer J. and P. Holmes, *Non Linear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields,* Springer-Verlag, New-York, 1967.

[Haut 93] Hautier J. P. and J. P. Caron, *Modélisation et Commande de la machine asynchrone*, Journées 3 E.I, Supélec, Gif-sur Yvette, 18-19 Mars 1993.

[Hirs 79] Hirshorn R. M., *(A-B) invertibility of multivariable nonlinear control systems,* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-22**, pp. 728-740, 1979.

[Hirs 81] Hirshorn R. M., *(A-B) invariant distributionss and disturbances decoupling of nonlinear systems,* SIAM J. Control Optimization, 19, pp. 1-19, 1981.

[Huij 92] Huijberts H. J.C. and H. Nijmeijer, *Strong dynamic input-output decoupling: from linearity to nonlinearity*, in Proc. IFAC NOLCOS'92 Conf., Bordeaux, France, 1992.

[Hunt 83] Hunt L. R., R. Su, and G. Meyer, *Design for multi-input nonlinear systems* Differential geometric control theory, R. Brockett, R. Millman, H. Sussmann eds, pp. 268-298, Birkhäuser, 1983.

[Isid 81] Isidori A., A.J. Krener, C. Gori-Giorgi, and S. Monaco, *Nonlinear decoupling via feedback,* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-26**, pp. 331-345, 1981.

[Isid 85] Isidori A., *Nonlinear Control Systems,* 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, 1989

[Isid 86] Isidori A., C. H. Moog, and A. De Luca, *A sufficient condition for full linearization via dynamic state feedback,* proc. 25th I.E.E.E. C.D.C, Athens, 1986.

[Iwas 94] Iwasaki and R.E. Skelton, *All controllers for general H_∞ control problem: LMI existence condition and state space formulas,* Automatica, vol. 30, n° 8, pp. 1307-1317,1994.

[Jaku 80] Jakubvzyk B. and W. Respondek, *On linearization of control systems,* Bull. Acad. Pol. Sci., ser. Sci. Math., vol 28, 9-10, pp.517-522, 1980.

[Jian 94] Jiang Z. P. , A. R. Tell and L. Praly, *Small-gain theorem for ISS systems and applications,* Mathematics of control, Signals, and systems, 7 (2), pp. 95-120, 1994.

[Kail 80] Kailath T., *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.

[Kim 95] Kim J. H., *Comments on Improved Quantitative Measures of Robustness for Multivariable Systems,* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-40**, pp. 1619-1620, 1995.

[Kren 73] A. J. Krener *On the equivalence of control systems and the linearization of non linear systems,* S.I.A.M. Journal on Control & Optimization, 11, 4, pp. 670-676, 1973.

[Kron 51] Kron G. *Equivalent circuits of electrical machinery*,Ed. John Wiley and sons, Londres, 1951.

[Kuce 74] Kucera V., *Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach,* Wiley, New York, 1974.

[Kwak 90] Kwakernaak H., *The polynomial approach to H_∞-optimal regulation,* Lectures Notes 1990 CIME Course on recent developments in H_∞ control theory, Cormo, Villa Olmo, June 18-26, 1990.

[Kwak 93] Kwakernaak H., *Frequency domain solution of the standard H_∞ problem,* I.F.A.C. Symposium on Robust Control, Rio de Janeiro, 1993.

[Lamn 94] Lamnabhi-Lagarigue F., *Analyse des systèmes non linéaires*, Traité des Nouvelles Technologies, Série Automatique, Hermès, Paris, 1994.

[Leon 96] Leonhard W., *Control of Electrical Drives*, Springer-Verlag 2nd ed. 1996.

[Lese 81] Lesenne J., F. Notelet, and G. Seguier, *Introduction à l'électrotechnique appronfondie,* Technique et Documentation, Paris, 1981.

[Levi 93a] Levine J., *Comportements asymptotiques des systèmes non commandés*, in A. J. Fossard and D. Normand-Cyrot Eds, Systèmes non linéaires 2. Stabilité stabilisation, Masson, Paris, 1993.

[Levi 93b] Levine J., *Linéarisation entrée-état* in A. J. Fossard and D. Normand-Cyrot Eds, Systèmes non linéaires 3. Commande, Masson, Paris, 1993.

[Lime 93] Limebeer, D. J. N., E. M. Kasenally and J. D. Perkins, *On the design of robust two degree of freedom controllers,* Automatica 29, pp. 157-168, 1993

[Luca 89] Luca (De) A. and G. Ulivi, *Design of exact nonlinear controller for induction motors,* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-34**, n°12, pp. 1304-1307, 1989.

[Maci 89] Maciejowski J. M., *Multivariable feedback design,* Addison-Wesley, Wokingham, 1989.

[Mada 96] Madani A. And Y. Bonnassieux, *Implementation of nonlinear digital speed controller for a synchronous servomotor,* Proc. ELECTRIMACS'96, Saint-Nazaire, pp. 823-828, 1996.

[Mari 86] Marino R., *On the largest feedback linearizable subsystem,* Systems & Control Letters, 6, pp. 345-351, 1986.

[Mari 93] Marino R., S. Peresada and P. Valigi, *Adaptative Input-Output Linearizing Control of Induction Motors* ,I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-38**, pp. 208-221, 1993.

[Mart 92] Martin Ph., *Contribution à l'étude des systèmes differentiellement plats,* Thèse de l'Ecole des Mines de Paris, 1992.

[Mart 93] Martin Pn., *An Intrinsic sufficient condition for regular decoupling,* Systems & Control Letters, 20, pp. 383-391, 1993.

[Mart 95] Martin Ph. and P. Rouchon, *Any (controllable) drifftless system whith m inputs and m+2 states is flat,* Internal report C.A.S, Ecole des Mines de Paris, 1995.

[Mart 96] Martin Ph. and P. Rouchon, *Two remarks on induction motors,* Proc. CESA'96,Vol.1 ,pp. 76-79, 1996.

[Mcfa 90] Mc Farlane D. C. and K. Glover, *Robust controller design using normalized coprime factor plant descriptions,* Springer Verlag, Berlin, 1990.

[Mcfa 92] Mc Farlane D. C. and K. Glover, *A loop shaping design procedure using H_∞ synthesis,* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-37**, pp. 759-769, 1992.

[Mona 88] Monaco S. and D. Normand-Cyrot, *Multirate digital control,* rap. D.I.S. Université « La spienza » Rome; 1988.

[Nijm 86a] Nijmeijer,H., and W. Respondek, *Decoupling via dynamic compensation for nonlinear control systems,* in proc. 25th I.E.E.E. C.D.C, Athens,, pp. 192-197, 1986.

[Nijm 86b] Nijmeijer,H., *Right invertibility for a class of nonlinear control systems: A geometric approach,* Systems & Control Letters, 7, pp. 125-132, 1986.

[Nijm 88] Nijmeijer,H., and W. Respondek, *Dynamic input-output decoupling of nonlinear control systems,* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-33,** pp. 1065-1070, 1988.

[Orte 93] Ortega R., C. Canudas, and S. I. Seleme, *Non-linear control of induction motors: Torque tracking with unknown load disturbance,* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-38,** N°11, pp. 1675-1680, 1993.

[Pack 93] Packard A. and J. Doyle, *The complex structured singular value,* Automatica 29 (1), pp. 71-109, 1993.

[Piet 92] Pietrzak-David M. and B. De Fornel, *Comparaison et synthèse des procédés de commande vectorielle,* Journée d'Etude S.E.E., Lille, Dec. 92.

[Piou 91] Le Pioufle B., *Comparaison de stratégies pour la commande numérique de servomoteurs synchrones, algorithmes linéaires et non linéaires, robustesse, implantation,* Thèse Université de Paris-Sud Centre d'Orsay, 1991.

[Pral 93] Praly L. and Z. P. Jiang, *Stabilisation by output feedback for systems with ISS inverse dynamics,* Systems and Control letters, **21**, pp. 19-33, 1993.

[Prem 95] Prempain E., *Contribution du schéma à modèles de référence multiples au lois de commande robustes multivariables H_∞ et μ-synthèse ,* Thèse, Université Bordeaux I, 1995.

[Prem 95a] Prempain E. and B. Bergeon, *Robust tracking via the Robust Multiple Reference,* Proc. E.C.C. 95, Rome, vol. 1/4, pp.584-589,1995.

[Prem 95b] Prempain E. and B. Bergeon, *Méthodologie R_2M_2 multivariable,* A.P.I.I.,vol. 29.6, pp. 655-678, 1995.

[Ragg 58] Raggazini J. R. and G. F. Franklin, *Sampled Data Control Systems,* McGraw-Hill, New York, 1958.

[Raum 93] Raumer T., J.M Dion and L. Dugard, *Adaptative nonlinear speed and torque control of induction motor,* in Proc. ECC'93, Groningen, pp 592-596, 1993.

[Redh 60] Redheffer R., *On a certain linear fractional transformation,* Em. J. Math. Phys., vol. 39, pp. 269-286, 1960.

[Resp 88] Respondek W. and H. Nijmeijer, *On local right-invertibility of nonlinear control systems*, C-TAT 4, pp. 325-328, 1988.

[Resp 92] Respondek W., *Intrinsic singularities of dynamic extensions*, in Proc. IFAC NOLCOS'92 Conf., Bordeaux, France, 1992.

[Rose 72] Rosenbrock H., *The stability of multivariable systems,* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-17**, pp. 105-107, 1972.

[Rouc 93] Rouchon P., M. Fliess, J. Lévine, and Ph. Martin *Flatness and motion plannig: the car with n-trailers,* in Proc. ECC'93, Groningen, pp 1518-1522, 1993.

[Rouc 94] Rouchon P., *Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearisation,* J. Math. Systems Estim. Control, 4 (2), 1994.

[Ruel 89] Ruelle D., *Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory*, Academic Press, 1989.

[Safo 82] Safonov M. G., *Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems,* Proc. I.E.E-D, vol. 129, pp. 251-256, 1982.

[Safo 89] Safonov M. G., D. J. N. Limebeer, and R. Y. Chiang, *Simplifying the H_∞ theory via loop-shifting, matrix pencil and descriptor concepts,* Int. J. Control, vol 50, n°6, pp. 2467-2488, 1989.

[Sain 77] Saint-Jean B., *Electrotechnique et machines électriques*, Editions Eyrolles, 1977.

[Sant 92] Santosuosso, *Necessary conditions for the removal of singularities with dynamic decoupling,* in Proc. IFAC NOLCOS'92 Conf., Bordeaux, France, 1992.

[Sing 80] Singh S. N. *Decoupling of invertible nonlinear systems with state feedback and precompensation,* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-25**, pp. 1237-1239, 1980.

[Sing 81] Singh S. N. *A modified algorithm for invertibility in non linear systems,* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-26**, pp. 595-598, 1981.

[Somm 80] Sommer R., *Control design for multivariable nonlinear time-varying systems,* Int. Journal of Control, 31, pp. 883-891, 1972.

[Sont 89] Sontag E., *Smooth stabilization implies coprime factorization,* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-34**, pp. 435-443, 1989.

[Sont 90] Sontag E., *Further Facts about Imput to State Stabilization,* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-35**, pp. 473-476, 1990.

[Sont 96] Sontag E. and Y. Wang, *New characterisations of input to state stability,* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-41**, pp. 1283-1293, 1996.

[Stein 91] Steinbuch M., J. C. Terlouw, and O. H. Bosgra, *Robustness analysis for real and complex perturbation applied to electro-mechanical system,* Proc. A.C.C pp. 556-561, Boston, 1991.

[Thom 95] Thomas J. L., *Contribution à la commande robuste des machines asynchrones*, Thèse, Conservatoire National des Arts et Métiers de Paris, 1995.

[Vido 89] Vidogradov A. M. , *Symmetries of Partial Differential Equations*, Kluwer, Dordrecht, 1989.

[Vidy 85] Vidyasagar M., *Control System Synthesis: A coprime factorization approach,* M.I.T. Press.

[Vidy 86] Vidyasagar M. and H. Kimura, *Robust controllers for uncertain linear multivariable systems,* Automatica 86 (1), pp. 85-94, 1986.

[Wonh 70] Wonham W.M. and A.S Morse, *Decoupling and pole assignement in linear multivariable systems : a geometric approach,* SIAM J. Control 8 (1), pp.1-18, 1970.

[Wonh 74] Wonham W. M., *Linear Multivariable Control: A geometric approach,* Springer Verlag, New York 1974.

[Ygor 91] Ygorra S. B. Bergeon, and M. Monsion, *Design Methodology for Robust Multiple Reference Model Control,* Proc. E.C.C.91, vol. 2, pp. 1257-1261, Grenoble, 1991.

[Ygor 92] Ygorra S., *Commande Robuste à Modèles de Références Multiples, application à une table de découpe,* Thèse, Université Bordeaux I, 1992.

[Ygor 96] Ygorra S., F. Cazaurang, and B. Bergeon, *Anti-windup control of plants with input saturation*, in Proc. CESA96, Lille, July 1996.

[You 76] Youla D. C., H. A. Jabr and J.J Bongiorno, *Modern Wienner Hopf design of optimal controllers-part II: the multivariable case*, I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-21**, pp. 319-338, 1976.

[Zame 66a] Zames G., *On the input-output stability of time-varing non linear feedback systems, Part I: Conditions using concepts of loop gain, conicity and positivity,* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-11**, pp. 228-238, 1966.

[Zame 66b] Zames G., *On the input-output stability of time-varing non linear feedback systems, Part II: Conditions involving circles in the frequency plane and sector nonlinearities,* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-11**, pp. 465-476, 1966.

[Zame 81] Zames G., *Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative semi-norms, and approximate inverses.* I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, **AC-26**, pp. 301-320, 1981.

Ce travail propose une méthodologie de synthèse de loi de commande robuste pour les systèmes dynamiques plats. La génération de trajectoires de référence est simple à mettre en oeuvre pour un système plat car il est équivalent à un système linéaire par difféomorphisme et bouclage. Cependant cette démarche n'est valable que pour un modèle, et en l'absence de perturbations. Pour une famille de modèles, et en présence de perturbations exogènes, le suivi de trajectoire défini à partir du modèle nominal est garanti par un régulateur linéaire synthétisé par optimisation de critères. L'utilisation d'un schéma à deux degrés de liberté générique permet de poser clairement le problème de synthèse en séparant les objectifs de poursuite nominale et les objectifs de régulation et de poursuite robustes. Cette démarche est ensuite appliquée à la synthèse d'une loi de commande robuste d'une machine synchrone.