Autour d'une conjecture de B. Gross relative à l'existence de corps de nombres de groupe de Galois non résoluble et ramifiés en un unique premier p petit

LESSENI SYLLA

Université Bordeaux 1 - Caen

Lyon, le 28 Février 2006

Présentation du problème.

En utlisant les représentations modulaires d'Hilbert de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, B. Gross (1998) affirme l'existence de corps de nombres (de petit degré) de groupe de Galois non résoluble et ramifiés en un unique premier petit.

Méthodes utilisées: La géométrie des nombres et les bornes de discriminant d'Odlyzko-Poitou-Serre.

Présentation du problème.

En utlisant les représentations modulaires d'Hilbert de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, B. Gross (1998) affirme l'existence de corps de nombres (de petit degré) de groupe de Galois non résoluble et ramifiés en un unique premier petit.

(i) Pour les degrés $n = 5$ et $n = 6$: aucun corps (J. Jones $(1998 - 1999)$).

Méthodes utilisées: La géométrie des nombres et les bornes de discriminant d'Odlyzko-Poitou-Serre.

Présentation du problème.

En utlisant les représentations modulaires d'Hilbert de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, B. Gross (1998) affirme l'existence de corps de nombres (de petit degré) de groupe de Galois non résoluble et ramifiés en un unique premier petit.

(i) Pour les degrés $n = 5$ et $n = 6$: aucun corps (J. Jones $(1998 - 1999)$).

(ii) Pour le degré $n = 7$: aucun corps (S. Brueggeman (2001)).

Méthodes utilisées: La géométrie des nombres et les bornes de discriminant d'Odlyzko-Poitou-Serre.

Présentation du problème.

En utlisant les représentations modulaires d'Hilbert de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, B. Gross (1998) affirme l'existence de corps de nombres (de petit degré) de groupe de Galois non résoluble et ramifiés en un unique premier petit.

(i) Pour les degrés $n = 5$ et $n = 6$: aucun corps (J. Jones $(1998 - 1999)$).

(ii) Pour le degré $n = 7$: aucun corps (S. Brueggeman (2001)).

(iii) Pour $n = 8$? et $n = 9$?

Méthodes utilisées: La géométrie des nombres et les bornes de discriminant d'Odlyzko-Poitou-Serre.

- Etude de la ramification
- Polynômes définissant les corps
- Résultats numériques

Groupes de Galois.

Les notations utilisées ici sont celles de G. Butler et J. Mckay.

Tableau 1. Groupes de Galois non résolubles de degré 8

Groupes	T_{37}^{+}	T_{43}	T_{48}^{+}	T_{49}^{+}	T_{50}
Ordre	168	336	1 344	20 160	40 320

Tableau 2. Groupes de Galois non résolubles de degré 9

Groupes	T_{27}^{+}	T_{32}^{+}	T_{33}^{+}	T_{34}
Ordre	504	1 512	181 440	362 880

Bornes des discriminants.

Bornes des discriminants.

La valeur minimale de la valeur absolue du discriminant d'un corps de nombres de degré 8 est $1\,257\,728$ (Diaz y Diaz, 1987).

Bornes des discriminants.

La valeur minimale de la valeur absolue du discriminant d'un corps de nombres de degré 8 est $1\,257\,728$ (Diaz y Diaz, 1987).

Ses travaux (en 1980) permettent de minorer la valeur absolue du discriminant d'un corps de nombres de degré 9 par $23\,007\,468$.

Bornes des discriminants.

La valeur minimale de la valeur absolue du discriminant d'un corps de nombres de degré 8 est $1\,257\,728$ (Diaz y Diaz, 1987).

Ses travaux (en 1980) permettent de minorer la valeur absolue du discriminant d'un corps de nombres de degré 9 par $23\,007\,468$.

Théorème (Ore, 1931). *Soient K un corps de nombres de degré n, d_K son discriminant, p un premier ramifié dans K et $e_\wp$ (resp. $f_\wp$) l'indice de ramification (resp. le degré résiduel) d'un idéal* premier $\wp$ au-dessus de p. Soit $n = \sum_{i=0}^{q} b_i p^i$ $(0 \leq b_i < p$ et $b_q \neq 0)$ le développement p-adic de l'entier n. Alors

i) la valeur maximale possible de $v_p(d_K)$, notée $N_{n,p}$ est donnée par:

$$N_{n,p} = \sum_{i=0}^{q} b_i (i+1) p^i - h,$$

où h désigne le nombre de coefficients b_i non nuls.

ii) Plus précisement :

$$v_p(d_K) \leq \sum_{\wp | p} f_\wp(e_\wp + e_\wp v_p(e_\wp) - 1).$$

En plus si p est impair, alors $v_p(d_K)$ peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et $N_{n,p}$ à l'exception de $\alpha p^\alpha - 1$ pour $n = p^\alpha$, $\alpha \geq 1$ ou pour $n = p^\alpha + 1$ avec $\alpha \geq 2$.

iii) Si $p = 2$ le résultat est le même qu'en $ii)$ avec en plus $v_p(d_K) \neq 1$.

Notation

K désigne un corps de nombres de degré 8 (resp. 9), $\mathbb{Z}_K$ son anneau des entiers et d_K son discriminant.

L désigne une clôture galoisienne fixe de K et d_L son discriminant.

Nous considérons les premiers $p = 2, 3, 5$ et 7.

$\wp$ désigne un idéal premier de $\mathbb{Z}_K$ au-dessus de p et $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $\mathbb{Z}_L$ au-dessus de $\wp$.

Proposition. *Si L est ramifié seulement en 2, alors les décompositions possibles de l'idéal engendré par 2 dans l'anneau $\mathbb{Z}_K$ d'un corps K de degré 8 sont:* $2\mathbb{Z}_K = \wp^8$, $2\mathbb{Z}_K = \wp_1^4\wp_2^4$ *et* $2\mathbb{Z}_K = \wp^4$.

Proposition. *Si L est ramifié seulement en 2, alors les décompositions possibles de l'idéal engendré par 2 dans l'anneau $\mathbb{Z}_K$ d'un corps K de degré 8 sont: $2\mathbb{Z}_K = \wp^8$, $2\mathbb{Z}_K = \wp_1^4\wp_2^4$ et $2\mathbb{Z}_K = \wp^4$.*

De plus le discriminant d_K prend ses valeurs dans l'ensemble

$$\{\pm 2^{21}, \pm 2^{22}, \pm 2^{24}, \pm 2^{25}, \pm 2^{26}, \pm 2^{27}, \pm 2^{28},$$
$$\pm 2^{29}, \pm 2^{30}, \pm 2^{31}\}.$$

Proposition. *Si* L *est ramifié seulement en* 3*, alors les décompositions possibles de l'idéal engendré par* 3 *dans l'anneau* $\mathbb{Z}_K$ *d'un corps* K *de degré* 9 *sont:* $3\mathbb{Z}_K = \wp^9$ *ou* $3\mathbb{Z}_K = \wp_1^6\wp_2^3$.

Proposition. *Si L est ramifié seulement en 3, alors les décompositions possibles de l'idéal engendré par 3 dans l'anneau $\mathbb{Z}_K$ d'un corps K de degré 9 sont: $3\mathbb{Z}_K = \wp^9$ ou $3\mathbb{Z}_K = \wp_1^6\wp_2^3$.*

De plus le discriminant d_K prend ses valeurs dans l'ensemble $\{3^{16}, 3^{18}, -3^{19}, 3^{20}, -3^{21}, 3^{22}, -3^{23}, 3^{24}, -3^{25}, 3^{26}\}$.

Proposition.

1) *Sous GRH, la clôture galoisienne L d'un corps de nombres K de degré 8 ne peut être ramifié seulement en 5.*

Proposition.

1) *Sous* GRH*, la clôture galoisienne* L *d'un corps de nombres* K *de degré* 8 *ne peut être ramifié seulement en* 5*.*

2) *Sans* GRH*, si* L *est ramifié seulement en* 5 *alors les décompositions possibles de l'idéal* 5 *dans* K *sont:* $5\mathbb{Z}_K = \wp_1^5\wp_2^3, 5\mathbb{Z}_K = \wp_1^5\wp_2^2\wp_3, 5\mathbb{Z}_K = \wp_1^5\wp_2\wp_3,$ $5\mathbb{Z}_K = \wp_1^5\wp_2\wp_3\wp_4$ *ou* $5\mathbb{Z}_K = \wp_1^5\wp_2$*.*
De plus d_K *prend ses valeurs dans l'ensemble* $\{5^9, 5^{10}, 5^{11}\}$*.*

Preuve:
Si L est ramifié seulement en 5 alors il l'est sauvagement. On montre que son groupe de Galois G est T_{50} ou T_{49}^{+}. En notant e le cardinal du groupe d'inertie G_0 d'un idéal $\mathfrak{P}|5$, on montre que $v_5(e) = 1$ et que e divise 60. En utilisant le théorème de Ore, on a
$|d_L|^{1/|G|} \leq 5^{\frac{119}{60}} \approx 24.338$.
Sous GRH, les minorations de discriminants de Poitou (1976) avec corrections locales donnent
$\frac{1}{|G|} \log |d_L| \geq 3.801 - \frac{20.766}{(\log |G|)^2} - \frac{157.914(1+1/|G|)}{(\log |G|)^3\left(1+\frac{\pi^2}{(\log |G|)^2}\right)^2}$.

On obtient $|d_L|^{1/|T_{50}|} \geq 33.248$ et
$|d_L|^{1/|T_{49}^{+}|} \geq 31.678$. Contradiction. $\square$

Proposition. *Si L est ramifié seulement en 7, alors la seule décomposition possible de l'idéal engendré par 7 dans l'anneau $\mathbb{Z}_K$ du corps K de degré 8 est:*
$7\mathbb{Z}_K = \wp_1^7 \wp_2$.
De plus le discriminant d_K prend ses valeurs dans l'ensemble $\{7^8, -7^9, 7^{10}, -7^{11}, 7^{12}, -7^{13}\}$.

Polynômes définissant les corps

Les résultats sur les groupes de Galois de degré 8 (resp. 9) permettent de restreindre nos recherches aux corps de nombres K qui sont primitifs. Dans toute la suite, tous les corps K dont il sera question seront supposés primitifs.

Polynômes définissant les corps

Les résultats sur les groupes de Galois de degré 8 (resp. 9) permettent de restreindre nos recherches aux corps de nombres K qui sont primitifs. Dans toute la suite, tous les corps K dont il sera question seront supposés primitifs.

Notation.
Soit I le produit de tous les idéaux premiers de $\mathbb{Z}_K$ au-dessus des premiers ramifiés dans K. Tout élément $\theta \in I \backslash \mathbb{Z}$ a un polynôme minimal $f_\theta(x)$ $\in \mathbb{Z}[x]$ de la forme

$$f_\theta(x) =$$
$$x^8+a_1x^7+a_2x^6+a_3x^5+a_4x^4+a_5x^3+a_6x^2+a_7x+a_8.$$

$f_\theta(x) = x^8 + a_1x^7 + a_2x^6 + a_3x^5 + a_4x^4 + a_5x^3 + a_6x^2 + a_7x + a_8$.

(resp. $f_\theta(x) = x^9 + a_1x^8 + a_2x^7 + a_3x^6 + a_4x^5 + a_5x^4 + a_6x^3 + a_7x^2 + a_8x + a_9$).

On peut donc choisir les polynômes générateurs parmi les polynômes irréductibles des éléments $\theta \in I \backslash \mathbb{Z}$.

Nous utiliserons la forme quadratique $\mathcal{T}_2(\theta) = \sum_{i=1}^n |\theta_i|^2$ et les relations de Newton:

$S_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_i S_{k-i} + ka_k = 0$, où $S_k = \sum_{i=1}^n \theta_i^k$ et les θ_i les conjugués de l'élément primitif θ.

Les travaux de Hunter permettant la construction des tables de corps de nombres donnent une majoration de $\mathcal{T}_2(\theta)$ réduisant ainsi l'ensemble des valeurs prises par les coefficients a_i du polynôme minimal $f_\theta(x)$ à un ensemble fini.
Nous utiliserons une version du théorème de Hunter adaptée à ce contexte par J. Jones et D. Roberts. Leurs travaux assurent l'existence d'un élément $\theta \in I \backslash \mathbb{Z}$ tel que le nombre premier ramifié p divise les coefficients a_i.

Théorème (Jones et Roberts, 1999). *Soient* K *un corps de nombres primitif de degré* $n \geq 3$*, de discriminant* d_K*,* l *le plus petit entier positif non nul de l'idéal* I *et* m *la norme de* I*. Soit* γ_n *la constante d'Hermite en dimension* n*. Alors il existe un élément* $\theta \in I \backslash \mathbb{Z}$ *de polynôme minimal* $f_\theta(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ *tel que*

Théorème (Jones et Roberts, 1999). *Soient* K *un corps de nombres primitif de degré* $n \geq 3$*, de discriminant* d_K*,* l *le plus petit entier positif non nul de l'idéal* I *et* m *la norme de* I*. Soit* γ_n *la constante d'Hermite en dimension* n*. Alors il existe un élément* $\theta \in I \backslash \mathbb{Z}$ *de polynôme minimal* $f_\theta(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ *tel que*

(i) $\mathcal{T}_2(\theta) \leq \frac{a_1^2}{n} + \gamma_{n-1}\left(\frac{m^2|d_K|}{l^2 n}\right)^{1/n-1}$

Théorème (Jones et Roberts, 1999). *Soient* K *un corps de nombres primitif de degré* $n \geq 3$, *de discriminant* d_K, l *le plus petit entier positif non nul de l'idéal* I *et* m *la norme de* I. *Soit* γ_n *la constante d'Hermite en dimension* n. *Alors il existe un élément* $\theta \in I \backslash \mathbb{Z}$ *de polynôme minimal* $f_\theta(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ *tel que*

(i) $\mathcal{T}_2(\theta) \leq \frac{a_1^2}{n} + \gamma_{n-1}\left(\frac{m^2|d_K|}{l^2 n}\right)^{1/n-1}$

(ii) $0 \leq a_1 \leq n.l/2.$

Amélioration des bornes des coefficients.

Amélioration des bornes des coefficients.

Définition. *L'exposant de Newton-Ore en p du coefficient a_i du polynôme $f_\theta(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, est la plus petite valuation en p du coefficient a_i de tous les polynômes f_θ (avec $\theta \in I\backslash\mathbb{Z}$) susceptibles d'engendrer le corps de nombres K de degré n, et dont p divise tous les coefficients $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ et a_n.*

d_K	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\pm 2^{31}$	4	3	4	2	4	3	4	1
$\pm 2^{30}$	3	3	4	2	4	3	4	1
$\pm 2^{29}$	3	2	4	2	4	3	4	1
$\pm 2^{28}$	3	2	3	2	4	3	4	1
$\pm 2^{27}$	3	2	3	1	4	3	4	1
$\pm 2^{26}$	3	2	3	1	3	3	4	1
$\pm 2^{25}$	3	2	3	1	3	2	4	1
$\pm 2^{24}$	3	2	3	1	3	2	3	1
$\pm 2^{22}$	2	2	3	1	3	2	3	1
$\pm 2^{21}$	2	1	3	1	3	2	3	1

Corollaire. *Soit K un corps de nombres primitif de degré 8 ramifié seulement en 2 ($d_K = \pm 2^r$). Alors il existe un élément $\theta \in I \backslash \mathbb{Z}$ tel que*

Corollaire. *Soit K un corps de nombres primitif de degré 8 ramifié seulement en 2 ($d_K = \pm 2^r$). Alors il existe un élément $\theta \in I \backslash \mathbb{Z}$ tel que*

(1) $a)$ *si* $2\mathbb{Z}_K = \wp^8$ *alors* $\mathcal{T}_2(\theta) \leq U_2 = \frac{a_1^2}{8} + 2^{\frac{3+r}{7}}$.

$b)$ *Si* $2\mathbb{Z}_K = \wp_1^4 \wp_2^4$ *ou* $2\mathbb{Z}_K = \wp^4$ *alors* $\mathcal{T}_2(\theta) \leq U_2 = \frac{a_1^2}{8} + 2^{\frac{5+r}{7}}$.

Corollaire. *Soit K un corps de nombres primitif de degré 8 ramifié seulement en 2 ($d_K = \pm 2^r$). Alors il existe un élément $\theta \in I \backslash \mathbb{Z}$ tel que*

(1) $a)$ *si* $2\mathbb{Z}_K = \wp^8$ *alors* $\mathcal{T}_2(\theta) \leq U_2 = \frac{a_1^2}{8} + 2^{\frac{3+r}{7}}$.

$b)$ *Si* $2\mathbb{Z}_K = \wp_1^4 \wp_2^4$ *ou* $2\mathbb{Z}_K = \wp^4$ *alors*

$\mathcal{T}_2(\theta) \leq U_2 = \frac{a_1^2}{8} + 2^{\frac{5+r}{7}}$.

(2) *Si* $d_K = \pm 2^{31}$ *alors* $a_1 = 0$. *Si* $d_K = \pm 2^{24}, \pm 2^{25}, \pm 2^{26}, \pm 2^{28}, \pm 2^{29}$ *ou* $\pm 2^{30}$ *alors* $a_1 = 0$ *ou* $a_1 = 8$.

Si $d_K = \pm 2^{21}$ *ou* $\pm 2^{22}$ *alors* $a_1 = 0, 4$ *ou* 8.

L'amélioration des bornes des coefficients a_i du polynôme minimal f_θ passe aussi par:

L'amélioration des bornes des coefficients a_i du polynôme minimal f_θ passe aussi par:

1. les bornes de Michael Pohst (1982) qui sont des majorations pour les fonctions $\mathcal{T}_m(\theta) = \sum_{i=1}^{n} |\theta_i|^m$, avec $m \in \mathbb{Z} - \{0, 2\}$.

L'amélioration des bornes des coefficients a_i du polynôme minimal f_θ passe aussi par:

1. les bornes de Michael Pohst (1982) qui sont des majorations pour les fonctions $\mathcal{T}_m(\theta) = \sum_{i=1}^{n} |\theta_i|^m$, avec $m \in \mathbb{Z} - \{0, 2\}$.
2. Les corrections locales de Serre, Odlyzko et Poitou (1976).

Résultats numériques

Les étapes de l'algorithme:

Résultats numériques

Les étapes de l'algorithme:

1. On construit les polynômes f_θ susceptibles d'engendrer le corps K fixé.

Résultats numériques

Les étapes de l'algorithme:

1. On construit les polynômes f_θ susceptibles d'engendrer le corps K fixé.
2. La signature du corps K étant fixée, on vérifie les polynômes f_θ ayant le bon signe du discriminant d_{f_θ}.

Résultats numériques

Les étapes de l'algorithme:

1. On construit les polynômes f_θ susceptibles d'engendrer le corps K fixé.
2. La signature du corps K étant fixée, on vérifie les polynômes f_θ ayant le bon signe du discriminant d_{f_θ}.
3. On vérifie la relation $d_{f_\theta} = d_K a^2$ où $a = [\mathbb{Z}_K : \mathbb{Z}[\theta]]$.

Résultats numériques

Les étapes de l'algorithme:

1. On construit les polynômes f_θ susceptibles d'engendrer le corps K fixé.
2. La signature du corps K étant fixée, on vérifie les polynômes f_θ ayant le bon signe du discriminant d_{f_θ}.
3. On vérifie la relation $d_{f_\theta} = d_K a^2$ où $a = [\mathbb{Z}_K : \mathbb{Z}[\theta]]$.
4. On teste l'irréductibilité de f_θ.

Résultats numériques

Les étapes de l'algorithme:

1. On construit les polynômes f_θ susceptibles d'engendrer le corps K fixé.
2. La signature du corps K étant fixée, on vérifie les polynômes f_θ ayant le bon signe du discriminant d_{f_θ}.
3. On vérifie la relation $d_{f_\theta} = d_K a^2$ où $a = [\mathbb{Z}_K : \mathbb{Z}[\theta]]$.
4. On teste l'irréductibilité de f_θ.
5. On garde les f_θ dont le discriminant du corps a la même valeur que celle de d_K.

r	Polynômes $f_\theta(x)$	$Gal(L/\mathbb{Q})$
22	x^8+6x^4+1	T_4^+
24	x^8+1	T_2^+
24	$x^8+4x^6+8x^4+4x^2+1$	T_4^+
25	$x^8-4x^6+6x^4-4x^2+2$	T_{21}
26	$x^8-4x^6-2x^4-4x^2+1$	T_{10}^+
26	$x^8+4x^6-2x^4+4x^2+1$	T_{10}^+
26	$x^8+4x^4-4x^2+1$	T_{19}^+
27	x^8+2x^4+2	T_{17}
27	x^8-2x^4+2	T_{17}
27	$x^8-4x^6+10x^4-8x^2+2$	T_6

28	$x^8 - 4x^6 - 2x^4 + 12x^2 + 1$	T_{20}^+
28	$x^8 + 4x^6 - 2x^4 - 12x^2 + 1$	T_{20}^+
28	$x^8 - 6x^4 - 8x^2 - 1$	T_6
28	$x^8 - 2x^4 - 1$	T_8
28	$x^8 + 2x^4 - 1$	T_8
28	$x^8 - 4x^6 + 10x^4 + 4x^2 + 1$	T_{19}^+
29	$x^8 - 4x^6 + 8x^4 - 8x^2 + 2$	T_{28}
29	$x^8 + 4x^6 + 8x^4 + 8x^2 + 2$	T_{28}
29	$x^8 - 4x^6 + 4x^4 - 2$	T_{30}
29	$x^8 + 4x^6 + 4x^4 - 2$	T_{30}

30	$x^8 - 4x^6 + 2x^4 + 4x^2 - 1$	T_{27}
30	$x^8 + 4x^6 + 2x^4 - 4x^2 - 1$	T_{27}
30	$x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 - 1$	T_{30}
30	$x^8 + 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 - 1$	T_{30}
30	$x^8 + 4x^6 + 2x^4 + 4x^2 - 1$	T_{30}
31	$x^8 - 8x^4 + 8x^2 - 2$	T_{27}
31	$x^8 - 8x^4 - 8x^2 - 2$	T_{27}
31	$x^8 - 2$	T_8
31	$x^8 + 8x^4 - 2$	T_6
31	$x^8 + 2$	T_6

31	$x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2$	T_1
31	$x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2$	T_1
31	$x^8 - 4x^4 + 2$	T_{16}
31	$x^8 + 4x^4 + 2$	T_{16}
31	$x^8 + 8x^6 + 24x^4 + 32x^2 + 18$	T_{17}
31	$x^8 - 8x^6 + 24x^4 - 32x^2 + 18$	T_{17}
31	$x^8 + 8x^6 - 12x^4 + 2$	T_7
31	$x^8 - 4x^4 - 8x^2 + 2$	T_{28}
31	$x^8 - 4x^4 + 8x^2 + 2$	T_{28}

s	Polynômes $f_\theta(x)$	$Gal(L/\mathbb{Q})$
19	$x^9 - 3x^6 - 6x^3 - 1$	T_4
21	$x^9 - 3x^6 + 1$	T_{13}
22	$x^9 - 6x^6 + 12x^3 + 1$	T_{11}^+
22	$x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x - 1$	T_1^+
23	$x^9 - 6x^6 + 9x^3 - 3$	T_{22}
23	$x^9 - 3x^6 + 3$	T_{22}
23	$x^9 - 3x^6 - 9x^3 + 3$	T_{22}

25	$x^9 - 9x^7 - 3x^6 + 27x^5 + 18x^4 - 24x^3 - 27x^2 - 9x + 23$	T_{20}
25	$x^9 - 9x^7 - 6x^6 + 27x^5 + 36x^4 - 24x^3 - 54x^2 - 9x + 22$	T_{20}
25	$x^9 - 9x^7 - 3x^6 + 27x^5 + 18x^4 - 15x^3 - 27x^2 - 36x - 4$	T_{20}
26	$x^9 - 9x^6 + 27x^3 - 3$	T_3^+
26	$x^9 - 3$	T_{10}^+
26	$x^9 - 9x^6 + 27x^3 - 24$	T_{10}^+

Conclusion

Conclusion

Théorème (L., $2004-2005$). *Il n'existe pas de corps de nombres primitif de degré* 8 *(resp.* 9*) ramifié en un unique premier* p*, pour* $p=2,3,5$ *et* 7.

Conclusion

Théorème (L., $2004 - 2005$)**.** *Il n'existe pas de corps de nombres primitif de degré* 8 *(resp.* 9*) ramifié en un unique premier* p*, pour* $p = 2, 3, 5$ *et* 7.

Corollaire. *Soit* K *un corps de nombres de degré* $n \leq 9$ *et ramifié en un unique premier* $p < 11$*. Alors le groupe de Galois de sa clôture galoisienne est résoluble.*

Conclusion

Théorème (L., $2004 - 2005$)**.** *Il n'existe pas de corps de nombres primitif de degré* 8 *(resp.* 9*) ramifié en un unique premier* p*, pour* $p = 2, 3, 5$ *et* 7.

Corollaire. *Soit* K *un corps de nombres de degré* $n \leq 9$ *et ramifié en un unique premier* $p < 11$. *Alors le groupe de Galois de sa clôture galoisienne est résoluble.*

Merci de votre attention!