Les descentes de Shintani des groupes de Suzuki et de Ree

Olivier Brunat

N° d'ordre : 102-2005 Année 2005

THESE

présentée

devant l'**UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON 1**

pour l'obtention

du **DIPLOME DE DOCTORAT**

(arrêté du 25 avril 2002)

présentée et soutenue publiquement le 11 Juillet 2005 par

OLIVIER BRUNAT

SPECIALITE : MATHEMATIQUES

LES DESCENTES DE SHINTANI DES GROUPES DE SUZUKI ET DE REE

RAPPORTEURS

M. Gerhard HISS
M. R.A. WILSON

JURY

M. Cédric BONNAFÉ
M. Meinolf GECK, Directeur de thèse
M. Gerhard HISS
M. Olivier MATHIEU
M. Robert WILSON

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à Meinolf Geck qui a dirigé mes recherches durant cette thèse. Ses nombreux conseils, sa disponibilité et son expérience m'ont beaucoup apporté. Je tiens à le remercier particulièrement pour ses grandes qualités humaines et sa gentillesse.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Gerhard Hiss et Rob A. Wilson pour l'honneur qu'ils me font d'avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse. Je les remercie en particulier pour les suggestions qu'ils m'ont adressées.

Merci également à Cédric Bonnafé et Olivier Mathieu qui me font l'honneur de participer au Jury.

Je remercie sincèrement Philippe Caldero pour son soutien permanent et son amitié ainsi que Marc Chamarie pour m'avoir fait découvrir la théorie des groupes. Je tiens aussi à remercier Jérôme Germoni pour sa disponibilité et toutes les enrichissantes discussions qu'il m'a accordées.

Je remercie également tous les membres de *l'institut Camille Jordan*, plus particulièrement Thomas Blossier, Pierre Crépel, Michel Cretin, Thierry Dumont, Stéphane Lamy et Valentin Ovsienko. Un grand merci également aux thésards de l'institut, en particulier à Pierre Bousquet, Nicolas Chevrot, Antoine Flattot, Sébastien Foulle, Jérémie Guilhot, David Hézard, Martin Hils, Nicolas Jacon, Guillaume Jouve, Guillaume Malod et Séverine Verneyre. Pardon à tous ceux que j'oublie. Je voudrais adresser une pensée particulière à mes collègues de bureau Laurent Carrot et Ioana Serban qui ont su m'encourager et me motiver quand j'en avais besoin. Je remercie aussi Hélène Fack et Philippe Guy de L'INSA de Lyon. Un grand merci aussi à Monique Gaffier et Sybil Caraboeuf pour leur disponibilité.

Je tiens à adresser des remerciements plus personnels à Jean-Baptiste Gramain, Sophie Morier-Genoud et Boris Thibert pour leur amitié et leur constante présence.

Je remercie aussi mes amis, je pense en particulier à Stéphane et Pascal, ainsi que ma famille. Enfin, j'ai une pensée particulière pour Anne-Sophie, ma copine. Je la remercie sincèrement d'avoir supporté mes doutes et pour son soutien permanent pendant ces années.

Introduction

Dans ce travail, on se propose de calculer la table des caractères d'extensions de certains groupes finis simples.

Les *groupes finis simples* jouent un rôle capital en théorie des groupes finis. En effet, le théorème de Jordan-Hölder permet d'associer à tout groupe fini, une famille de groupes simples : *ses facteurs de décomposition*. Les groupes finis simples apparaissent ainsi comme les briques élémentaires de la théorie des groupes finis. Cependant, les facteurs de décomposition d'un groupe fini ne le caractérisent pas ; parvenir à déterminer tous les groupes finis ayant pour facteurs de décomposition une famille de groupes simples donnés, conduit naturellement au *problème de l'extension*.

En théorie des caractères, la problématique autour du problème de l'extension est la suivante : connaissant les caractères irréductibles de deux groupes finis H et K, quels renseignements a-t-on sur les caractères irréductibles des extensions de H par K ? C'est un problème très difficile en général. C'est pourquoi on l'aborde sur des extensions particulières : les *extensions par (un) automorphisme*, c'est à dire, les groupes de la forme $G \rtimes \langle \sigma \rangle$, où $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$. Ces extensions sont les plus « faciles » après les produits directs. En effet, d'une part le quotient est un groupe cyclique et d'autre part, on connaît assez précisément la loi du groupe. A. Reyes étudie dans [29] les représentations d'une telle extension. Les résultats qu'il obtient sont cependant inexploitables pour le calcul explicite des caractères irréductibles.

Pour aborder cette question, la *théorie de Clifford* donne un bon cadre : elle permet notamment de paramétrer les caractères irréductibles de $G \rtimes \langle \sigma \rangle$ en fonction de ceux de G. Cependant, elle a ses limites : elle ne permet pas en général de décrire complètement les classes de conjugaison de $G \rtimes \langle \sigma \rangle$, ni de calculer explicitement toutes les valeurs des caractères irréductibles (à partir de ceux de G et de $\langle \sigma \rangle$).

On trouve des exemples d'études de tables des caractères d'extension par automorphisme de certains groupes finis simples :

- Les tables des caractères des groupes sporadiques et de leurs extensions par automorphisme sont données dans *l'Atlas des groupes finis* [6]
- Parmi les groupes finis simples, les groupes finis simples de type Lie occupent une place importante. On connaît les automorphismes de ces groupes. Ils sont essentiellement de trois sortes : les « automorphismes de graphes », les « automorphismes de corps » et les « automorphismes diagonaux »(cf. [4] §12.5). Dans [25], G. Malle s'intéresse aux représentations des extensions par *automorphisme de graphe* des groupes finis de type A_l, D_l ou E_6. Pour cela, il interprète l'extension comme un sous-groupe fini d'un groupe réductif non connexe. Il développe alors *une théorie de Deligne-Lusztig* pour les groupes réductifs non

connexes et rejoint les travaux de F. Digne et J. Michel sur cette problématique générale ; [11].

Considérons G un groupe fini simple de type B_2 (resp. G_2 ou F_4) sur $\mathbb{F}_{2^{2n+1}}$ (resp. $\mathbb{F}_{3^{2n+1}}$ ou $\mathbb{F}_{2^{2n+1}}$). Alors G possède un automorphisme exceptionnel σ d'ordre 2, dont le sous-groupe des points fixes G^σ est le groupe de Suzuki (resp. le groupe de Ree de type G_2 ou F_4) de paramètre 2^{2n+1} (resp. 3^{2n+1} ou 2^{2n+1}). Cet automorphisme est compliqué ; en effet sa définition dépend fortement de l'arithmétique du corps sur lequel G est défini. Il est important, puisque G^σ est encore un groupe simple (sauf pour $n = 0$). On s'intéresse alors à l'extension $\widetilde{G} = G \rtimes \langle \sigma \rangle$ de G par cet automorphisme. Cette extension est « très tordue » et non-triviale. On peut interpréter les groupes G et G^σ comme des sous-groupes finis d'un même groupe algébrique ; en effet, il existe un groupe algébrique simple $\mathbf{G}$ muni d'un endomorphisme de Frobenius généralisé F, tel que $G^\sigma = \mathbf{G}^F$, $G = \mathbf{G}^{F^2}$ et la restriction de F à G est l'automorphisme σ. Cette structure donne de précieux renseignements pour l'étude de $\widetilde{G}$: elle permet notamment d'établir un lien important entre le groupe G^σ et la « partie extérieure » de $G \rtimes \langle \sigma \rangle$. Plus précisément, ce lien s'exprime à l'aide de la *correspondance de Shintani*, qui définit une bijection entre les classes de G^σ et les classes constituées d'éléments de l'ensemble $(G, \sigma) \subseteq G \rtimes \langle \sigma \rangle$. A partir de cette correspondance, on peut associer à toute fonction centrale de $G \rtimes \langle \sigma \rangle$ une fonction centrale de G^σ : sa *descente de Shintani.*

Dans cette thèse, on se propose de calculer la table des caractères de $G \rtimes \langle \sigma \rangle$, lorsque G est de type B_2 de paramètre 2^{2n+1} ($n \in \mathbb{N}$) ou de type G_2 de paramètre 3^{2n+1}. On donne ensuite deux applications de ce travail, l'une en théorie p-modulaire, l'autre en théorie des groupes algébriques :

- Soit p un diviseur premier de $|G^\sigma|$ qui ne divise pas $[G : G^\sigma]$. On établit alors qu'il existe une isométrie parfaite[1] entre les p-blocs principaux de $G \rtimes \langle \sigma \rangle$ et de G^σ.
- En calculant les descentes de Shintani des extensions des caractères unipotents de G, on obtient des résultats sur les caractères unipotents des groupes de Suzuki et de Ree. Plus précisement rappelons que si $\mathbf{G}$ est un groupe réductif connexe défini sur le corps fini à q éléments et F un endomorphisme de Frobenius généralisé sur $\mathbf{G}$, alors G. Lusztig a montré qu'il est possible d'associer à chaque caractère unipotent de $\mathbf{G}^F$ une racine de l'unité[2] et a calculé explicitement les racines associées aux caractères unipotents de $\mathbf{G}^F$; cf. [22] et [24]. Il reste cependant une indéterminée : pour certaines paires de caractères qui sont complexes conjugués, il reste un signe à déterminer. C'est le cas pour les caractères unipotents cuspidaux des groupes de Suzuki et de Ree. Les méthodes développées dans ce travail permettent de déterminer la racine des caractères unipotents cuspidaux des groupes de Suzuki ainsi que des résultats partiels pour les groupes de Ree de type G_2.
  Rappelons aussi que G. Lusztig a prouvé que l'on peut répartir les caractères unipotents de $\mathbf{G}^F$ en familles, et qu'il est possible d'associer à la plupart des familles une matrice, appelée *matrice de Fourier*; cf. [24]. Les groupes de Suzuki et de Ree ne possèdent pas de matrices de Fourier. Cependant, dans [18],

[1] Au sens de Broué.
[2] Une description plus précise de ces notions sera donnée plus loin dans le texte.

> M. Geck et G. Malle donnent une définition axiomatique de ces matrices, et les calculent explicitement pour ces groupes. Les méthodes développées ici permettent, dans le cas où $\mathbf{G}^F$ est un groupe de Suzuki, de donner une définition possible (avec un point de vue différent de l'approche proposée par Geck et Malle) de ses matrices de Fourier, en cohérence avec une conjecture générale de F. Digne et J. Michel. On constate que les résultats ainsi obtenus sont compatibles avec ceux de M. Geck et G. Malle, ce qui montre que les matrices de Fourier du groupe de Suzuki vérifient des propriétés de la théorie générale. On obtient également des résultats partiels pour le groupe de Ree de type G_2.

La taille et la complexité du groupe $F_4(2^{2n+1}) \rtimes \langle\,\sigma\,\rangle$ entrainent qu'il n'est pas envisageable d'utiliser des méthodes *ad hoc* comme celles developpées ici pour calculer ses caractères irréductibles. Le calcul de la table des caractères de ce groupe semble pour l'instant inabordable. On constate cependant que les tables des caractères de $B_2(2^{2n+1}) \rtimes \langle\,\sigma\,\rangle$ et de $G_2(3^{2n+1}) \rtimes \langle\,\sigma\,\rangle$ obtenues, présentent beaucoup de similitudes avec les tables des caractères des groupes réductifs finis. Cette observation suggère qu'il doit exister une théorie pour traiter ces groupes[3]. Parvenir à déterminer ce cadre général donnerait de puissants outils pour appréhender le calcul de la table des caractères de $F_4(2^{2n+1}) \rtimes \langle\,\sigma\,\rangle$ et de $F_4(2^{2n+1})$.

Plan de la thèse

Chapitre 1 : On présente dans ce chapitre des généralités sur les classes de conjugaison et la table des caractères d'une extension par automorphisme σ d'ordre 2 d'un groupe fini G. Dans le §1.2.1, on présente une méthode pour paramétrer les classes de conjugaison d'un groupe fini, bien adaptée à cette situation. Dans le §1.2.2, on introduit la notion de σ-réduction d'une fonction centrale de $G \rtimes \langle\,\sigma\,\rangle$, qui permet de « ramener » les calculs des caractères irréductibles de l'extension à des calculs uniquement sur l'ensemble (G, σ). Le reste du chapitre est consacré à des rappels et aux notations.

Chapitre 2 : On calcule explicitement un système de représentants des classes de conjugaison (et l'ordre des centralisateurs) des groupes $B_2(2^{2n+1}) \rtimes \langle\,\sigma\,\rangle$ (cf. Tab. 2.3 p. 34) et $G_2(2^{2n+1}) \rtimes \langle\,\sigma\,\rangle$ (cf. Tab. 2.4 p. 58), où σ est l'automorphisme exceptionnel du groupe qui défini respectivement le groupe de Suzuki et le groupe de Ree de type G_2. On utilise la méthode du lemme 1.2.1 ainsi que des techniques de groupes algébriques. En particulier, on a besoin de décrire un système de représentants des classes du groupe de Ree compatible avec le paramétrage des classes de $\mathrm{G}_2(3^{2n+1})$ donnée dans [13]. Cette description est donnée dans le théorème 2.2.1.

Chapitre 3 : On présente dans ce chapitre les résultats principaux de cette thèse. En utilisant les résultats du chapitre 2 et l'induction de caractères de sous-groupes, on obtient le résultat suivant :

Théorème 3.1.1 *Soit n un entier positif. On pose $q = 2^{2n+1}$ et σ l'automorphisme*

[3] Il existe probablement un groupe algébrique muni d'un Frobenius, dont le sous-groupe des points fixes est $G \rtimes \langle\,\sigma\,\rangle$.

exceptionnel de $B_2(q)$ dont le sous-groupe des points fixes est le groupe de Suzuki. Alors, le groupe $B_2(q) \rtimes \langle \sigma \rangle$ possède $(2q+6)$ extensions irréductibles de $(q+3)$ caractères σ-stable de $B_2(q)$. Les valeurs des extensions sur les classes extérieures sont données dans la table 3.12.

Le cas où le groupe est de type G_2 est plus difficile. L'induction des caractères des sous-groupes naturels ne suffit plus pour calculer tous les caractères irréductibles de l'extension. On utilise alors des techniques modulaires afin de complèter les valeurs manquantes. On prouve que :

Théorème 3.2.3 *Soit n un entier positif. On pose $q = 3^{2n+1}$ et σ l'automorphisme exceptionnel de $G_2(q)$ dont le sous-groupe des points fixes est le groupe de Ree de type G_2. Alors, le groupe $G_2(q) \rtimes \langle \sigma \rangle$ possède $(2q+16)$ extensions irréductibles de $(q+8)$ caractères σ-stable de $G_2(q)$. Les valeurs des extensions sur les classes extérieures sont données dans la table 3.25.*

Chapitre 4 : Les groupes $G \rtimes \langle \sigma \rangle$ et G^σ (où $G = B_2(2^{2n+1})$ ou $G_2(3^{2n+1})$) sont liés au niveau modulaire. Soit p un diviseur premier de $|G^\sigma|$ qui ne divise pas l'indice de G^σ dans G ; on exprime ce lien en prouvant que les p-blocs principaux de $G \rtimes \langle \sigma \rangle$ et de G^σ sont parfaitement isométriques. La condition sur p est une condition nécessaire donnée par la conjecture de Broué.

Chapitre 5 : Les résultats de ce chapitre sont des conséquences importantes de ce travail. En effet, on complète les résultats de Lusztig [22] et de Geck et Malle [18] en associant explicitement aux caractères cuspidaux unipotents du groupe de Suzuki, la racine correspondante. Pour cela, on calcule les *descentes de Shintani* de $G \rtimes \langle \sigma \rangle$ à G^σ. En utilisant un résultat de F. Digne et J. Michel, on obtient :

Théorème 5.2.2 *Soit $\rho = x_a x_b x_{a+b}$ et $\mathcal{W}$ le caractère unipotent du groupe de Suzuki de degré $2^n(2^{2n+1}-1)$ tel que $\mathcal{W}(\rho_0) = 2^n\sqrt{-1}$. Les racines de l'unité associées à $\mathcal{W}$ et $\overline{\mathcal{W}}$ sont :*

	$\mathcal{W}$	$\overline{\mathcal{W}}$
n impair	ζ_0	$\overline{\zeta_0}$
n pair	$\overline{\zeta_0}$	ζ_0

De plus, en utilisant une conjecture de Digne et Michel, on donne une définition possible de la matrice de Fourier associée à la famille des caractères cuspidaux unipotents du groupe de Suzuki.

Dans le cas où G est de type G_2, le calcul explicite de la correspondance de Shintani de certaines classes s'avère être trop compliqué. On apporte cependant des résultats partiels. En effet, les calculs permettent notamment de conjecturer que les matrices de Fourier introduites par Geck et Malle dans [18] vérifient des propriétés de la théorie générale.

Table des matières

Chapitre 1

Généralités

1.1 Rappels et notations

Dans ce paragraphe, on utilise des résultats généraux sur la théorie des caractères d'un groupe fini. Pour plus de détails, on se reporte à [20]. Rappelons quelques notations :

Soit G un groupe fini. On note $\mathrm{C}_G(g)$ le centralisateur d'un élément $g \in G$ et $\mathrm{N}_G(S)$ le normalisateur d'une partie $S \subseteq G$. Soient g et h deux éléments de G, on note $g^h = h^{-1}gh$ le conjugué de g par h. L'ensemble des classes de conjugaison de G est noté $\mathrm{Cl}(G)$.

On note $\mathrm{C}(G)$ l'espace vectoriel des fonctions centrales de G sur $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Irr}(G)$ l'ensemble des caractères irréductibles de G sur $\mathbb{C}$. L'ensemble $\mathbb{N}\mathrm{Irr}(G)$ (resp. $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(G)$) désigne l'ensemble des caractères (resp. des caractères généralisés) de G. L'espace $\mathrm{C}(G)$ est muni du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_G$ défini par :

$$\forall\, \varphi,\, \psi \in \mathrm{C}(G), \quad \langle\, \varphi, \psi\,\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \varphi(g)\overline{\psi(g)}.$$

Soit $\varphi \in \mathrm{C}(G)$. On appelle *constituant* de φ tout caractère irréductible qui apparaît avec un coefficient non nul dans la décomposition de φ dans la base $\mathrm{Irr}(G)$. Soit $c \in \mathrm{Cl}(G)$. On note $\mathbb{1}_c$ la fonction indicatrice de c. On rappelle que *la table des caractères* de G est la matrice de passage de la base $\{\mathbb{1}_c\}_{c\in\mathrm{Cl}(G)}$ vers la base $\mathrm{Irr}(G)$.

Soient H un sous-groupe de G, $\varphi \in \mathrm{C}(G)$ et $\phi \in \mathrm{C}(H)$. On note $\mathrm{Res}_H^G\,\varphi$ la restriction de φ à H et $\mathrm{Ind}_H^G\,\phi$ l'induit de ϕ de H à G.

On note $\mathbb{C}G$ l'algèbre du groupe G sur $\mathbb{C}$. Soit χ un caractère de G. On rappelle que l'on peut associer à χ un idempotent central de $\mathbb{C}G$ défini par :

$$e_\chi = \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi(g)}g. \tag{1.1}$$

Soit H un sous-groupe de G et e_H l'idempotent central de $\mathbb{C}H$ associé à la représentation triviale 1_H de H donné par (1.1). La sous-algèbre

$$\mathcal{H} = e_H\,(\mathbb{C}G)\,e_H$$

de $\mathbb{C}G$ est appelée l'algèbre de *Hecke* de H.

Soit ξ un caractère irréductible de G que l'on prolonge de manière unique par linéarité en un caractère de $\mathbb{C}G$ (noté encore ξ). Alors la restriction :

$$\xi \mapsto \xi|_{\mathcal{H}}$$

réalise une bijection entre les constituants de $\mathrm{Ind}_H^G 1_H$ et les caractères irréductibles de l'algèbre $\mathcal{H}$; cf. [8].

1.2 Généralités sur les extensions par automorphisme d'ordre 2

Soient G un groupe fini et σ un automorphisme d'ordre 2 de G. Si H est un sous-groupe σ-stable de G, alors on note H^σ le sous-groupe des points fixes de H sous σ. Posons :

$$\widetilde{G} = G \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle.$$

Le groupe $\widetilde{G}$ est une *extension par automorphisme* de G. On note (g, x) les éléments de $\widetilde{G}$, avec $g \in G$ et $x \in \langle\, \sigma \,\rangle$. On identifie G à un sous groupe d'indice 2 de $\widetilde{G}$ par $g \mapsto (g, 1)$.

La problématique est la suivante : on suppose connues les classes de conjugaison et la table des caractères de G. On voudrait construire les classes de conjugaison et la table des caractères de $\widetilde{G}$.

Comme G est un sous-groupe distingué de $\widetilde{G}$, les classes de conjugaison de $\widetilde{G}$ se répartissent en deux catégories : celles qui sont formées d'éléments de G (les *classes intérieures*) et celles qui ne rencontrent pas G (les *classes extérieures*). On appelle *caractère extérieur de* $\widetilde{G}$, tout caractère de $\mathrm{Irr}(\widetilde{G})$ qui prend des valeurs non nulles sur au moins une classe extérieure de $\widetilde{G}$.

1.2.1 Classes de conjugaison de $\widetilde{G}$

On dit que $c \in \mathrm{Cl}(G)$ est une *classe σ-stable* si $\sigma(c) = c$. Les classes intérieures de $\widetilde{G}$ sont décrites par :

Proposition 1.2.1 *L'ensemble des classes intérieures de $\widetilde{G}$ est $\{(c,1) \cup (\sigma(c),1)\}_{c \in \mathrm{Cl}(G)}$. Plus précisement, on a :*

- *si $c \in \mathrm{Cl}(G)$ est une classe σ-stable alors $(c,1) \in \mathrm{Cl}(\widetilde{G})$ et on a :*

$$\forall\, g \in c, \quad |\,\mathrm{C}_{\widetilde{G}}(g,1)| = 2|\,\mathrm{C}_G(g)|.$$

- *si $c \in \mathrm{Cl}(G)$ n'est pas une classe σ-stable alors $(c \cup \sigma(c), 1)$ est une classe de $\widetilde{G}$ et pour tout $g \in c$, on a $\mathrm{C}_{\widetilde{G}}(g,1) = \mathrm{C}_G(g)$.*

Preuve — Soit $\tilde{c}$ une classe intérieure de $\widetilde{G}$. Comme G est distingué dans $\widetilde{G}$, il suit que $\tilde{c}$ est réunion disjointe de classes de G. Soit $(g, 1) \in \tilde{c}$ et c la classe de g dans G. On a $(1, \sigma)^{-1}(c, 1)(1, \sigma) = (\sigma(c), 1)$ et le résultat suit. $\square$

Ainsi, on sait entièrement caractériser les classes intérieures de $\widetilde{G}$ à partir de celles de G. Connaître les classes de conjugaison de $\widetilde{G}$ revient à connaître ses classes extérieures.

Lemme 1.2.1 *Deux éléments extérieurs sont conjugués dans* $\widetilde{\mathrm{G}}$ *si et seulement si ils le sont par un élément de* G.

Preuve — Soit $g \in G$, alors pour tout $h \in G$, on a :

$$(h,\sigma)(g,\sigma)(\sigma(h^{-1}),\sigma) = (h\sigma(gh^{-1}),\sigma) = (hg^{-1}g\sigma(gh^{-1}),\sigma) = (g,\sigma)^{(gh^{-1},1)}.$$

On a bien le résultat annoncé.

□

On définit une action de G sur lui même par $g.x = gx\sigma(g^{-1})$ (avec $g, x \in G$). Deux éléments dans la même orbite seront dit *σ-conjugués* et on note $\mathrm{C}_{G,\sigma}(x)$ le stabilisateur de x. En utilisant le lemme 1.2.1, on déduit :

Corollaire 1.2.1 *Soit* $g, g' \in G$. *Alors* g *et* g' *sont* σ*-conjugués dans* G *si et seulement si* (g,σ) *et* (g',σ) *sont conjugués dans* $\widetilde{\mathrm{G}}$. *De plus, on a :*

$$|\,\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(g,\sigma)| = 2|\,\mathrm{C}_{G,\sigma}(g)|. \tag{1.2}$$

Grâce à la théorie de Clifford, on sait caractériser le nombre de classes extérieures de $\widetilde{G}$ (cf. [15] p.64-65) :

Proposition 1.2.2 *Il y a le même nombre de classes* σ*-stables dans* G *que de classes extérieures dans* $\widetilde{G}$.

Paramétrage des classes d'un groupe fini

Soit p un nombre premier. On donne dans ce paragraphe une méthode générale pour paramétrer les classes de conjugaison d'un groupe fini, basée sur la p-décomposition de Jordan.

On rappelle qu'un élément de G est dit *p-régulier* si son ordre est premier avec p, et *p-unipotent* si son ordre est une puissance de p. Les éléments *p-singuliers* sont les éléments dont l'ordre est divisible par p. Une classe de conjugaison de G est dite *p-régulière* (resp. *p-unipotente*) si elle est constituée d'éléments p-réguliers (resp. *p-unipotents*).

Soit $g \in G$. On rappelle qu'il existe un unique élément p-régulier $g_1 \in G$ et un unique élément p-unipotent $g_2 \in G$ tels que $g = g_1g_2 = g_2g_1$. Cette décomposition s'appelle *la p-décomposition de Jordan de g*.

Proposition 1.2.3 *Soit* G *un groupe fini et* p *un nombre premier. Soit* x_1, $x_2,\ldots,$ x_r *un système de représentants des classes* p*-régulières de* G. *Soit* $y_{i,1}$, $y_{i,2},\ldots,y_{i,r_i}$ *un système de représentants des classes* p*-unipotentes de* $\mathrm{C}_G(x_i)$.

1. *Alors l'ensemble*

$$\{\, x_iy_{i,j} \mid 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq r_i \,\}$$

est un système de représentants des classes de conjugaison de G.

2. De plus, on a :

$$\mathrm{C}_G(x_i y_{i,j}) = \mathrm{C}_G(x_i) \cap \mathrm{C}_G(y_{i,j}).$$

Preuve —

1. Soit $g \in G$ et soit $g_1 g_2$ la p-décomposition de Jordan de g. Comme g_1 est p-régulier, il existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ et $h \in G$ tel que $g_1 = h x_i h^{-1}$. Alors :

$$h^{-1} g h = x_i h^{-1} g_2 h = h^{-1} g_2 h x_i.$$

Ainsi $h^{-1} g_2 h \in \mathrm{C}_G(x_i)$ et est p-unipotent. Il existe $j \in \{1, \ldots, r_i\}$ et $k \in \mathrm{C}_G(x_i)$ tels que :

$$k^{-1} h^{-1} g_2 h k = y_{i,j}.$$

Finalement, on a :

$$k^{-1} h^{-1} g h k = k^{-1} x_i k k^{-1} h^{-1} g_2 h k = x_i k^{-1} h^{-1} g_2 h k = x_i y_{i,j}.$$

Ainsi on a bien montré que tout élément de G est conjugué à un élément $x_i y_{i,j}$. La réciproque est une conséquente immédiate de l'unicité de la p-décomposition de Jordan.

2. Supposons que $h \in \mathrm{C}_G(x_i y_{i,j})$. Alors on a :

$$x_i y_{i,j} = g x_i y_{i,j} g^{-1} = g x_i g^{-1} g y_{i,j} g^{-1}.$$

Par unicité de la p-décomposition de Jordan on en déduit que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_i & = & g x_i g^{-1} \\ y_{i,j} & = & g y_{i,j} g^{-1} \end{array} \right. .$$

Ainsi $g \in \mathrm{C}_G(x_i) \cap \mathrm{C}_G(y_{i,j})$. On en déduit alors que :

$$\mathrm{C}_G(x_i) \cap \mathrm{C}_G(y_{i,j}) = \mathrm{C}_G(x_i y_{i,j}).$$

□

Méthode pour déterminer les classes extérieures de $\widetilde{G}$

Revenons à notre situation et donnons une méthode pour paramétrer les classes exétrieures de $\widetilde{G}$:

Méthode 1.2.1 *Les classes extérieures de $\widetilde{G}$ peuvent être décrites de la façon suivante :*

- *On détermine un système de représentants des classes σ-stables de G d'ordre impair.*

- *On détermine ensuite les centralisateurs dans $\widetilde{G}$ de ces éléments.*

- *On détermine enfin un système de représentants des classes 2-unipotentes extérieures de ces centralisateurs.*

Preuve — On applique à $\widetilde{G}$ la proposition 1.2.3 avec $p = 2$. Les éléments 2-réguliers de $\widetilde{G}$ sont les éléments de $\widetilde{G}$ d'ordre impair. En particulier, ils appartiennent à G. On remarque par ailleurs que si g est la partie 2-régulière d'un élément extérieur alors g et $\sigma(g)$ sont conjugués dans G. Ainsi, la classe de g dans G est une classe σ-stable d'ordre impair. De plus, si un élément 2-unipotent $h \in \widetilde{G}$ est tel que gh est une 2-décomposition de Jordan alors $h \in \mathrm{C}_{\widetilde{G}}(g)$. Réciproquement, tout élément de G d'ordre impair appartenant à une classe σ-stable forme une 2-décomposition de Jordan avec n'importe quel élément 2-unipotent de son centralisateur dans $\widetilde{G}$. On en déduit le résultat.

□

Remarque 1.2.1 *Supposons que l'on choisisse un élément $g \in G$ d'ordre impair tel que $\sigma(g) = g$. Alors le groupe $\mathrm{C}_G(g)$ est σ-stable et on a :*

$$\mathrm{C}_{\widetilde{G}}(g) = \mathrm{C}_G(g) \rtimes \langle \sigma \rangle.$$

On peut préciser les choses lorsque le centralisateur dans G d'un élément de G^σ d'ordre impair est abélien :

Lemme 1.2.2 *Soit $g \in G$ d'ordre impair tel que $\sigma(g) = g$ et tel que $\mathrm{C}_G(g)$ est abélien. Notons $(x_1, \sigma), \ldots, (x_r, \sigma)$ les représentants des classes extérieures 2-unipotentes de $\mathrm{C}_{\widetilde{G}}(g)$. Alors :*

1. *le groupe $\mathrm{C}_{\widetilde{G}}(gx_i, \sigma)$ est abélien.*
2. *On a plus précisement :*

$$\mathrm{C}_{\widetilde{G}}(gx_i, \sigma) = \mathrm{C}_G(g)^\sigma.\langle (x_i, \sigma) \rangle = \mathrm{C}_G(g)^\sigma \times \langle (x_i, \sigma) \rangle / \mathrm{C}_G(g)^\sigma \cap \langle (x_i, \sigma) \rangle.$$

Preuve — Comme $\sigma(g) = g$, on a $\mathrm{C}_{\widetilde{G}}(g) = \mathrm{C}_G(g) \rtimes \langle \sigma \rangle$. Il suit que $x_i \in \mathrm{C}_G(g)$. Soit $k \in \mathrm{C}_G(g)^\sigma$ alors $k(x_i, \sigma)k^{-1} = (kx_ik^{-\sigma}, \sigma) = (x_i, \sigma)$ (car $\mathrm{C}_G(g)$ est abélien). Ceci prouve que $\mathrm{C}_G(g)^\sigma.\langle (x_i, \sigma) \rangle$ est abélien et que :

$$\mathrm{C}_G(g)^\sigma.\langle (x_i, \sigma) \rangle \subseteq \mathrm{C}_{\widetilde{G}}(gx_i, \sigma).$$

Réciproquement :

- Si $(k, 1) \in \mathrm{C}_{\widetilde{G}}(gx_i, \sigma)$, alors $k \in \mathrm{C}_G(g)$ et $(k, 1)(x_i, \sigma) = (x_i, \sigma)(k, 1)$, ie :

$$kx_i = x_i\sigma(k).$$

  Or $x_i \in \mathrm{C}_G(g)$ et $\sigma(k) \in \mathrm{C}_G(g)$. Comme $\mathrm{C}_G(g)$ est abélien, il suit que $k = \sigma(k)$, ie $k \in \mathrm{C}_G(g)^\sigma$.
- Si $(k, \sigma) \in \mathrm{C}_{\widetilde{G}}(gx_i, \sigma)$, alors on a d'une part $(k, \sigma)(g, 1) = (g, 1)(k, \sigma)$, ie $kg = gk$ (car $\sigma(g) = g$). Donc $k \in \mathrm{C}_G(g)$. D'autre part on a $(k, \sigma)(x_i, \sigma) = (x_i, \sigma)(k, \sigma)$, ie $k\sigma(x_i) = x_i\sigma(k)$. Comme k, $\sigma(k)$, x_i et $\sigma(x_i)$ commutent, on a

$$\sigma(kx_i^{-1}) = kx_i^{-1}.$$

  Donc $kx_i^{-1} \in \mathrm{C}_G(g)^\sigma$, ie $k \in \mathrm{C}_G(g)^\sigma x_i$. Ainsi il exite $l \in \mathrm{C}_G(g)^\sigma$ tel que $k = lx_i$. Donc $(k, \sigma) = (l, 1)(x_i, \sigma)$.

On vient de démontrer que :

$$\mathrm{C}_{\widetilde{G}}(gx_i,\sigma) = \mathrm{C}_G(g)^{\sigma}.\langle\,(x_i,\sigma)\,\rangle.$$

Comme $\mathrm{C}_G(g)^{\sigma}$ et $\langle\,(x_i,\sigma)\,\rangle$ commutent, on en déduit que :

$$\mathrm{C}_{\widetilde{G}}(gx_i,\sigma) = \mathrm{C}_G(g)^{\sigma} \times \langle\,(x_i,\sigma)\,\rangle / \,\mathrm{C}_G(g)^{\sigma} \cap \langle\,(x_i,\sigma)\,\rangle.$$

□

1.2.2 Table des caractères

Soit $\varphi \in \mathrm{C}(G)$. On définit $\varphi^{\sigma} \in \mathrm{C}(G)$ par :

$$\forall\, g \in G, \quad \varphi^{\sigma}(g) = \varphi(\sigma(g)).$$

Rappelons que si $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, alors $\chi^{\sigma} \in \mathrm{Irr}(G)$. Un caractère de G est dit *σ-stable* si $\chi = \chi^{\sigma}$. Soit ε le caractère linéaire de $\widetilde{G}$ de noyau G.

La théorie de Clifford permet de paramétrer les caractères de $\widetilde{G}$ en fonction de ceux de G. En effet, on a (cf. [15] p. 64) :

Proposition 1.2.4 *Soit* $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$.

- *Si* $\chi \neq \chi^{\sigma}$, *alors* $\mathrm{Ind}_G^{\widetilde{G}}(\chi)$ *est irréductible. De plus on a :*

$$\forall g \in G, \quad \mathrm{Ind}_G^{\widetilde{G}}(\chi)(g,\sigma) = 0 \quad \textit{et} \quad \mathrm{Ind}_G^{\widetilde{G}}(\chi)(g,1) = \chi(g) + \chi^{\sigma}(g).$$

- *Si* $\chi = \chi^{\sigma}$, *alors* $\mathrm{Ind}_G^{\widetilde{G}}(\chi)$ *est somme d'exactement deux caractères irréductibles distincts de* $\widetilde{G}$ *dont la restriction à* G *coïncide avec* χ. *De plus, si* $\widetilde{\chi}$ *désigne un constituant irréductible de* $\mathrm{Ind}_G^{\widetilde{G}}(\chi)$, *alors on a* $\mathrm{Ind}_G^{\widetilde{G}}(\chi) = \widetilde{\chi} + \widetilde{\chi}\varepsilon$.

Ainsi les caractères non extérieurs sont entièrement déterminés à partir des valeurs des caractères non σ-stables de G et sont stables par multiplication par ε. De plus, chaque caractère σ-stable possède exactement deux extensions, qui se déduisent l'une de l'autre par multiplication par ε. On obtient par ce procédé tous les caractères de $\widetilde{G}$.

Les propositions 1.2.1 et 1.2.4 montrent qu'il reste à connaître les valeurs des extensions des caractères σ-stables de G sur les classes extérieures.

Soit $\psi \in \mathrm{Irr}(\widetilde{G})$. Alors $\psi(1,\sigma) \in \mathbb{Z}$. Soit $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ un caractère σ-stable dont les extensions à $\widetilde{G}$ sont non nulles sur $(1,\sigma)$. **Par convention**, on note $\widetilde{\chi}$ l'extension de χ vérifiant :

$$\widetilde{\chi}(1,\sigma) > 0.$$

Complètons la proposition 1.2.2, en évaluant le nombre de caractères σ-stables de G ([15] p. 65) :

Proposition 1.2.2 bis *Le nombre de caractères σ-stables de G est le même que le nombre de classes σ-stables de G.*

La σ-réduction

Supposons qu'un caractère généralisé de $\widetilde{G}$ prenne des valeurs sur les classes extérieures. Comment se ramener à un caractère généralisé n'ayant dans sa décomposition que des constituants extérieurs, et dont l'étude se restreint à la « partie extérieure » ? Pour répondre à cette question, on introduit la notion de *σ-réduction.*

Soient ψ et ψ' deux fonctions centrales sur $\widetilde{G}$. On pose :

$$\langle \psi, \psi' \rangle_\sigma = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g,\sigma)\overline{\psi'(g,\sigma)}. \tag{1.3}$$

Soit $\phi \in \mathrm{Irr}(G)$ un caractère σ-stable. On note χ_ϕ une extension de ϕ à $\widetilde{G}$. Par la proposition 1.2.4, les caractères irréductibles de $\widetilde{G}$ sont :

$$\{\chi \mid \chi = \chi\varepsilon\} \cup \{\chi_\phi,\ \chi_\phi\varepsilon \mid \phi^\sigma = \phi\}.$$

Décomposons ψ dans la base $\mathrm{Irr}(\widetilde{G})$:

$$\psi = \sum_{\chi = \chi\varepsilon} a_\chi \chi + \sum_{\phi=\phi^\sigma} (a_{\psi,\phi}\chi_\phi + a_{\psi,\phi\varepsilon}\chi_\phi\varepsilon).$$

On définit la *σ-réduction de ψ*, notée $\rho(\psi)$, par :

$$\rho(\psi) = \sum_{\substack{\phi = \phi^\sigma \\ a_{\psi,\phi} - a_{\psi,\phi\varepsilon} \geq 0}} (a_{\psi,\phi} - a_{\psi,\phi\varepsilon})\chi_\phi + \sum_{\substack{\phi = \phi^\sigma \\ a_{\psi,\phi} - a_{\psi,\phi\varepsilon} < 0}} (a_{\psi,\phi\varepsilon} - a_{\psi,\phi})\chi_\phi\varepsilon.$$

Lemme 1.2.3 *Soit $\psi \in \mathrm{C}(\widetilde{G})$.*

- *Alors pour tout $g \in G$, on a $\rho(\psi)(g,\sigma) = \psi(g,\sigma)$. De plus, on a :*

$$\langle \psi, \psi' \rangle_\sigma = \sum_{\phi=\phi^\sigma} (a_{\psi,\phi} - a_{\psi,\phi\varepsilon})(a_{\psi',\phi} - a_{\psi',\phi\varepsilon}).$$

- *Si $\psi \in \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(\widetilde{G})$ (resp. $\phi \in \mathbb{N}\mathrm{Irr}(\widetilde{G})$), alors $\rho(\psi) \in \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(\widetilde{G})$ (resp. $\rho(\psi) \in \mathbb{N}\mathrm{Irr}(\widetilde{\mathrm{G}})$).*

Preuve — On a :

$$\begin{aligned}
\psi &= \sum_{\chi=\chi\varepsilon} a_\chi \chi + \sum_{\phi=\phi^\sigma} a_{\psi,\phi\varepsilon}(\chi_\phi + \chi_\phi\varepsilon) + \sum_{\phi=\phi^\sigma} (a_{\psi,\phi} - a_{\psi,\phi\varepsilon})\chi_\phi \\
\psi\varepsilon &= \sum_{\chi=\chi\varepsilon} a_\chi \chi + \sum_{\phi=\phi^\sigma} a_{\psi,\phi\varepsilon}(\chi_\phi + \chi_\phi\varepsilon) + \sum_{\phi=\phi^\sigma} (a_{\psi,\phi} - a_{\psi,\phi\varepsilon})\chi_\phi\varepsilon
\end{aligned}$$

Soit $g \in G$. Alors :

$$\psi(g,\sigma) = \sum_{\phi=\phi^\sigma} (a_{\psi,\phi} - a_{\psi,\phi\varepsilon})\chi_\phi(g,\sigma).$$

Comme $(\chi_\phi\varepsilon)(g,\sigma) = -\chi_\phi(g,\sigma)$, il suit que $\psi(g,\sigma) = \rho(\psi)(g,\sigma)$.
On a :

$$\psi - \psi\varepsilon = \sum_{\phi=\phi^\sigma} (a_{\psi,\phi} - a_{\psi,\phi\varepsilon})(\chi_\phi - \chi_\phi\varepsilon).$$

Comme :

$$\langle \chi_\phi - \chi_\phi\varepsilon, \chi_{\phi'} - \chi_{\phi'}\varepsilon\rangle_{\widetilde{G}} = 2\delta_{\phi,\phi'},$$

on en déduit que :

$$\langle \psi - \psi\varepsilon, \psi' - \psi'\varepsilon\rangle_{\widetilde{G}} = 2\sum_{\phi=\phi^\sigma}(a_{\psi,\phi} - a_{\psi,\phi\varepsilon})(a_{\psi',\phi} - a_{\psi',\phi\varepsilon}).$$

De plus, on a :

$$\langle \psi - \psi\varepsilon, \psi' - \psi'\varepsilon\rangle_{\widetilde{G}} = 2\langle \psi, \psi'\rangle_\sigma.$$

On en déduit donc que :

$$\langle \psi, \psi'\rangle_\sigma = \sum_{\phi=\phi^\sigma}(a_{\psi,\phi} - a_{\psi,\phi\varepsilon})(a_{\psi',\phi} - a_{\psi',\phi\varepsilon}).$$

□

Proposition 1.2.5 *Soit χ un caractère de $\widetilde{G}$.*

- *Si $\langle \chi, \chi\rangle_\sigma = 1$, alors $\rho(\chi)$ est l'extension du caractère $\phi \in \mathrm{Irr}(G)$ qui vérifie $\langle \mathrm{Res}_G^{\widetilde{G}}\chi, \phi\rangle_G \equiv 1 \mod 2$.*
- *Si $\langle \chi, \chi\rangle_\sigma = 2$, alors $\rho(\chi)$ est somme de deux caractères irréductibles. De plus ϕ est un constituant de $\mathrm{Res}_G^{\widetilde{G}}\rho(\chi)$ si et seulement si $\langle \mathrm{Res}_G^{\widetilde{G}}\chi, \phi\rangle_G \equiv 1 \mod 2$.*

Preuve — Soit $\chi \in \mathbb{N}\mathrm{Irr}(\widetilde{G})$. Pour tout $\phi \in \mathrm{Irr}(G)$, on a :

$$\langle \mathrm{Res}_G^{\widetilde{G}}\chi, \phi\rangle_G = 2a_{\chi,\phi\varepsilon} + \langle \chi, \chi_\phi\rangle_\sigma.$$

Ainsi si $\langle \chi, \chi\rangle_\sigma = 1$ alors il existe $\phi \in \mathrm{Irr}(G)$ tel que $a_{\chi,\phi} - a_{\chi,\phi\varepsilon} = \pm 1$ et pour tout $\phi' \neq \phi$ on a $a_{\chi,\phi'} - a_{\chi,\phi'\varepsilon} = 0$. Donc $\langle \mathrm{Res}_G^{\widetilde{G}}\chi, \phi\rangle_G = 2a_{\chi,\phi\varepsilon} \pm 1$ et $\langle \mathrm{Res}_G^{\widetilde{G}}\chi, \phi'\rangle_G = 2a_{\chi,\phi'\varepsilon}$. On raisonne de la même façon si $\langle \chi, \chi\rangle_\sigma = 2$. En effet, il existe ϕ_1 et ϕ_2 tels que $a_{\chi,\phi_1} - a_{\chi,\phi_1\varepsilon} = \pm 1$, $a_{\chi,\phi_2} - a_{\chi,\phi_2\varepsilon} = \pm 1$ et pour tout $\phi' \neq \phi_1,\ \phi_2$, on a $a_{\chi,\phi'} - a_{\chi,\phi'\varepsilon} = 0$.

□

Deux lemmes

On donne deux lemmes utiles pour construire des caractères irréductibles de sous-groupes de $\widetilde{G}$.

Lemme 1.2.4 *Soit K un sous-groupe de G stable par σ. On peut définir $\widetilde{K} = K \rtimes \langle\sigma\rangle$ sous-groupe de $\widetilde{G}$. Soit $\widetilde{\phi} \in \mathrm{C}(\widetilde{K})$ et $\phi = \mathrm{Res}_G^{\widetilde{G}}\widetilde{\phi}$.*
On a alors $\mathrm{Res}_G^{\widetilde{G}}\mathrm{Ind}_{\widetilde{K}}^{\widetilde{G}}\widetilde{\phi} = \mathrm{Ind}_K^G\phi$.

Preuve — On applique le théorème de Mackey (cf. [20]). Le groupe $\widetilde{G}$ est égal a la double classe $G\widetilde{K}$ (car $(1,\sigma) \in \widetilde{K}$), donc $\mathrm{Res}_G^{\widetilde{G}}\mathrm{Ind}_{\widetilde{K}}^{\widetilde{G}}\widetilde{\phi} = \mathrm{Ind}_{\widetilde{K}\cap G}^G\phi = \mathrm{Ind}_K^G\phi$.

□

Lemme 1.2.5 *(Construction de caractère linéaire)*
Soit χ un caractère linéaire de G tel que $\chi^\sigma = \chi$, alors

$$\widetilde{\chi} : \widetilde{G} \longrightarrow \mathbb{C} \quad (g,x) \longmapsto \chi(g)$$

est un caractère linéaire de $\widetilde{G}$.

Preuve — Vérifions que l'application $\widetilde{\chi}$ est un morphisme de groupe. Soient g, $g' \in G$ et x, $x' \in \langle\sigma\rangle$. En utilisant que $\chi^\sigma = \chi$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\chi}((g,x)(g',x')) &= \widetilde{\chi}((gx(g'),xx')) \\
&= \chi(gx(g')) \\
&= \chi(g)\chi(x(g')) \\
&= \chi(g)\chi^x(g') \\
&= \chi(g)\chi(g') \\
&= \widetilde{\chi}(g,x)\widetilde{\chi}(g',x').
\end{aligned}$$

□

1.3 Théorie p-modulaire

1.3.1 Les caractères de Brauer et p-blocs

Pour plus de détails sur les notions introduites dans ce paragraphe, on se réfère à [7], [14] et [19]. Soit $R \subseteq \mathbb{C}$ l'anneau des entiers algébriques sur $\mathbb{Q}$. Soient p un nombre premier et I un idéal maximal de R contenant p. Le quotient $k = R/I$ est un corps de caractéristique p, et on note π la projection canonique de R sur k, que l'on appelle réduction modulo p. On note S le sous-groupe multiplicatif de $R^\times$ constitué de toutes les racines de l'unité de R dont l'ordre est premier à p. On peut montrer que S est isomorphe à k^*, en particulier k est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$ (cf. (6.1) [19]).

Soit G un groupe fini. Soit ρ une représentation de G sur k de caractère ν. Soit g un élément p-régulier de G, alors $\rho(g)$ est d'ordre d premier avec p, donc le polynôme $X^d - 1$ est un polynôme annulateur de $\rho(g)$, qui est scindé sur k et dont les racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ sont distinctes. Soit μ_i l'antécédant de λ_i donné par l'isomorphisme entre S et k^*, on pose :

$$\phi(g) = \sum_{i=1}^{d} \mu_i.$$

La fonction ϕ ainsi définie sur les éléments p-réguliers est appelée *caractère de Brauer* de G associé à ρ. Par construction, on a que $\pi(\phi(g)) = \nu(g)$. Un caractère de Brauer est dit irréductible s'il provient d'une représentation irréductible de G sur k, et on note $\mathrm{IBr}_p(G)$ l'ensemble des caractères de Brauer irréductibles de G.

Soit $f \in \mathrm{C}(G)$, alors on note $\hat{f}$ la restriction de f aux classes p-régulières et

$$\hat{\mathrm{Irr}}_p(G) = \{\ \hat{\chi} \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}.$$

On a le résultat :

Théorème : *Les caractères irréductibles de Brauer sont linéairement indépendants. De plus, pour tout $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, il existe des uniques entiers positifs $d_{\chi\phi}$ tels que :*

$$\hat{\chi} = \sum_{\phi \in \mathrm{IBr}_p(G)} d_{\chi\phi}\phi.$$

La matrice $D = (d_{\chi\phi})$ est appelée la matrice de décomposition de G. De plus, si $d_{\chi\phi} \neq 0$, on dit que ϕ est un constituant de χ.

Soient $\chi, \chi' \in \mathrm{Irr}(G)$. On dit que χ est en relation avec χ' si et seulement s'il existe une suite de caractères irréductibles $(\chi_i)_{i=0\dots r}$ tels que $\chi_0 = \chi$, $\chi_r = \chi'$ et les caractères χ_i et χ_{i+1} ont un constituant en commun. La relation ainsi définie est une relation d'équivalence sur $\mathrm{Irr}(G)$. On appelle *p-blocs de G* les classes modulo cette relation. Le p-bloc de G qui contient le caractère trivial est appelé *le p-block principal de G*, on le note $B_0(G)$. Si A est un p-bloc de G, on note :

$$\hat{\mathrm{Irr}}_p(A) = \{ \ \hat{\chi} \mid \chi \in A\}.$$

On va donner une caractérisation des p-blocs de G. Soit C une classe de conjugaison de G, χ un caractère irréductible de G. On note $\hat{C}$ la somme des éléments de C et on pose :

$$w_\chi(\hat{C}) = \frac{|C|\chi(C)}{\chi(1)}.$$

La notation $\chi(C)$ désigne $\chi(g)$, pour $g \in C$, qui a un sens puisque χ est constant sur C. De plus les applications w_χ sont bien définies et sont à valeurs dans R et on a (cf. (5.7) et (7.8) de [19]) :

Critère de congruence : deux caractères χ_1 et χ_2 sont dans le même p-bloc de G si et seulement si, pour toute classe p-régulière C de G, on a

$$\frac{|C|\chi_1(C)}{\chi_1(1)} \equiv \frac{|C|\chi_2(C)}{\chi_2(1)} \mod pR. \tag{1.4}$$

On rappelle enfin les relations d'orthogonalité des p-blocs :

Relation d'orthogonalité : *soit B un p-bloc de G et soit x un élément p-singulier de G et y un élément p-régulier. Alors on a :*

$$\sum_{\chi \in B} \chi(x)\overline{\chi(y)} = 0. \tag{1.5}$$

1.3.2 Défaut d'un p-bloc

Soit χ un caractère irréductible de G. On peut montrer que $|G|/\chi(1)$ est un entier (cf [19]). On définit alors *le défaut* $d(\chi)$ de χ comme la plus grande puissance de p divisant $|G|/\chi(1)$. Soit B un p-bloc de $\mathrm{Irr}(G)$. On définit *le défaut* de B, noté $d(B)$ par :

$$d(B) = \max_{\chi \in B} \ d(\chi).$$

On sait caractériser les p-blocs de défaut 0 à partir de la table des caractères de G. Plus précisément, si χ est de défaut 0 alors le p-bloc contenant χ est $\{\chi\}$ et χ s'annule sur les éléments p-singuliers. Réciproquement, si un caractère s'annule sur les classes p-singulières, alors il est de défaut 0.

Le bloc principal est de défaut maximal. L'étude des p-blocs de défaut maximaux est difficile, on sait tout de même caractériser le nombre de ces p-blocs. Soit C une classe de conjugaison de G. On appelle *défaut* de C la plus grande puissance de p divisant l'ordre de son centralisateur. Le théorème de Brauer-Nesbitt ([7] p. 614) dit que le nombre de p-blocs de défaut maximal est égal au nombre de classes p-regulières de défaut maximal.

Précisons la relation de congruence (1.4) pour les caractères de défaut maximal. Il suffit dans ce cas de vérifier la congruence uniquement pour les classes de défaut maximal. En effet, considérons $C \in \mathrm{Cl}(G)$ une classe de conjugaison de défaut non maximal et $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ un caractère de défaut maximal. Soit ζ une racine primitive complexe $|G|$-ième de l'unité. Alors $\chi(C) \in \mathbb{Q}(\zeta)$. Comme $\chi(C)$ est un entier algébrique et que $R \cap \mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Z}[\zeta]$ (cf. [7] Th. 21.13), il existe $n_i \in \mathbb{Z}$ ($i \in \{0, \ldots, (|G|-1)\}$) tels que :

$$\chi(C) = \sum_{i=0}^{|G|-1} n_i \zeta^i.$$

Il suit donc que

$$\frac{|C|\chi(C)}{\chi(1)} = \sum_{i=0}^{|G|-1} \frac{n_i |C|}{\chi(1)} \zeta^i \in \mathbb{Q}(\zeta).$$

Or $\frac{\chi(C)}{\chi(1)}|C| \in R$, donc $\frac{\chi(C)}{\chi(1)}|C| \in \mathbb{Z}(\zeta)$. Ainsi, pour tout $i \in \{0, \ldots, (|G|-1)\}$, on a :

$$\frac{n_i |C|}{\chi(1)} \in \mathbb{Z},$$

donc $\chi(1)$ divise $n_i|C|$. Comme C n'est pas de défaut maximal, il existe $\alpha \geq 1$ et un entier m premier avec p tel que $|C| = p^\alpha m$. De plus χ est de défaut maximal, donc $\chi(1)$ est premier avec p. Par le lemme de Gauss, il suit que $\chi(1)$ divise $n_i m$, donc

$$\frac{n_i |C|}{\chi(1)} \equiv 0 \mod p.$$

Ainsi $\frac{\chi(C)}{\chi(1)}|C| \in pR$ et la congruence (1.4) est automatiquement vérifiée. Il suffit donc de vérifier le critère (1.4) pour les classes p-régulières de défaut maximal.

1.4 Un exemple : le groupe symétrique $\mathfrak{S}_6$

Lorsque $n \neq 6$, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ ne possède que des automorphismes intérieurs (cf. [30] Th. 7.5). Pour $n = 6$, on a (cf. [30] Th. 7.10) :

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6)/\,\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_6) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Le groupe $\mathfrak{S}_6$ possède un automorphisme extérieur σ d'ordre 2. Plus précisement on a (cf. [30] Cor. 7.13) :

		1^6	$1^4 2^1$	$1^2 2^2$	2^3	$1^3 3^1$	$1^1 2^1 3^1$	3^2	$1^2 4^1$	$2^1 4^1$	$1^1 5^1$	6^1
		$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\diamond$	$*$	$\diamond$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$*$
$\bullet$	χ_{1^6}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\bullet$	χ_{6^1}	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
$\circ$	$\chi_{1^4 2^1}$	5	-3	1	1	2	0	-1	-1	-1	0	1
$\bullet$	$\chi_{1^2 2^2}$	9	-3	1	-3	0	0	0	1	1	-1	0
$*$	χ_{2^3}	5	-1	1	3	-1	-1	2	1	-1	0	0
$\diamond$	$\chi_{1^3 3^1}$	10	-2	-2	2	1	1	1	0	0	0	-1
$\bullet$	$\chi_{1^1 2^1 3^1}$	16	0	0	0	-2	0	-2	0	0	1	0
$\circ$	χ_{3^2}	5	1	1	-3	-1	1	2	-1	-1	0	0
$\diamond$	$\chi_{1^2 4^1}$	10	2	-2	-2	1	-1	1	0	0	0	1
$\bullet$	$\chi_{2^1 4^1}$	9	3	1	3	0	0	0	-1	1	-1	0
$*$	$\chi_{1^1 5^1}$	5	3	1	-1	2	0	-1	1	-1	0	-1

TAB. 1.1 – Table des caractères de $\mathfrak{S}_6$.

Lemme 1.4.1 *Le morphisme σ de $\mathfrak{S}_6$ défini par :*

$$\begin{array}{rcl}
(1\ 2) & \mapsto & (1\ 5)(2\ 3)(4\ 6) \\
(1\ 3) & \mapsto & (1\ 4)(2\ 6)(3\ 5) \\
(1\ 4) & \mapsto & (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6) \\
(1\ 5) & \mapsto & (1\ 2)(3\ 6)(4\ 5) \\
(1\ 6) & \mapsto & (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)
\end{array}$$

est un automorphisme extérieur d'ordre 2.

On se propose de décrire la table des caractères du groupe $\mathfrak{S}_6 \rtimes \langle \sigma \rangle$.

Table des caractères de $\mathfrak{S}_6$

On rappelle que les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_6$ sont les ensembles de permutations ayant même écriture en cycles disjoints. On note $a_1^{r_1} \dots a_n^{r_n}$ la classe dont les éléments ont pour écriture en cycles disjoints

$$\prod_{i=1}^{n} \underbrace{\overbrace{(.,.,.)}^{a_i} \dots \overbrace{(.,.,.)}^{a_i}}_{r_i}.$$

Le groupe $\mathfrak{S}_6$ possède onze classes de conjugaison, qui sont 1^6, $1^4\,2^1$, $1^2\,2^2$, 2^3, $1^3\,3^1$, 3^2, $1^2\,4^1$, $1^1\,5^1$, 6^1, $1^1\,2^1\,3^1$ et $2^1\,4^1$. Ainsi, $\mathfrak{S}_6$ a exactement 11 caractères irréductibles, que l'on note $\chi_{a_1^{r_1} \dots a_n^{r_n}}$. Pour plus de détails sur ce paramétrage, on se reporte à [15]. Dans la table 1.1, on donne la table des caractères de $\mathfrak{S}_6$. Les classes (resp. caractères) notées avec un $\bullet$ sont σ-stables et les classes (resp. caractères) notées du même symbole sont permutées par σ.

On constate qu'il y a cinq classes et caractères σ-stables, on retrouve le résultat de la proposition 1.2.2.

Table des caractères de $\mathfrak{S}_6 \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle$

La proposition 1.2.2 affirme que $\mathfrak{S}_6 \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle$ possède 5 classes extérieures et 10 caractères extérieurs, chaque caractère σ-stable ayant exactement deux extensions. On pose $x = ((1,2),\sigma)$, $y = ((1,3,2,5),\sigma)$, $z = ((3,5)(4,6),\sigma)$ et $t = ((1,2,3,4,5),\sigma)$. On donne dans la table 1.2 les valeurs des caractères extérieurs sur les classes extérieures. On ne reporte les valeurs que de l'extension $\widetilde{\chi}_{a_1^{r_1}\dots a_n^{r_n}}$.

	σ	x	y	z	t
$\lvert \mathrm{C}_{\mathfrak{S}_6 \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle}(c) \rvert$	40	8	4	4	5
$\widetilde{\chi}_{1^6}$	1	1	1	1	1
$\widetilde{\chi}_{6^1}$	1	-1	-1	1	1
$\widetilde{\chi}_{1^2 2^2}$	1	1	0	-1	-1
$\widetilde{\chi}_{1^1 2^1 3^1}$	4	0	0	0	-1
$\widetilde{\chi}_{2^1 4^1}$	1	-1	1	-1	1

TAB. 1.2 – Table des caractères extérieurs de $\mathfrak{S}_6 \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle$

Le groupe $\mathfrak{S}_6$ est isomorphe au groupe symplectique $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$; cf. [9]. On va voir dans la suite que $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_{2^{2n+1}})$ possède un automorphisme d'ordre 2 non intérieur, dont l'ensemble des points fixes est le groupe de Suzuki. A une renumérotation près des éléments, l'automorphisme σ que l'on a construit dans ce paragraphe correspond à cet automorphisme de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$. Cet exemple est donc le cas pour $n = 0$ de cette famille de groupes, dont on se propose dans ce travail de faire l'étude dans le cas général.

1.5 Groupes réductifs

On se réfère à [5] et [16] pour des généralités sur les variétés algébriques et les groupes algébriques. Les variétés algébriques considérées sont munies de la topologie de Zariski.

1.5.1 Groupes réductifs finis

Soit p un nombre premier. On note $\overline{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique du corps fini $\mathbb{F}_p$. Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique défini sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On rappelle qu'il existe un isomorphisme de groupe algébrique $\imath$ de $\mathbf{G}$ dans un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_m(\overline{\mathbb{F}}_p)$ (pour un certain $m \in \mathbb{N}$). Un élément $x \in \mathbf{G}$ est dit *semi-simple*[1] (resp. *unipotent*) si $\imath(x)$ est diagonalisable (resp. si $\imath(x)$ n'a que 1 comme valeur propre). Le *radical unipotent de* $\mathbf{G}$ est l'unique sous-groupe maximal fermé et normal de $\mathbf{G}$ formé d'éléments unipotents. On rappelle que $\mathbf{G}$ est dit *réductif*, si son radical unipotent est trivial. Soit q une puissance de p. On note F_q *l'endomorphisme de Frobenius standard*[2]

[1] Cette définition a bien un sens, car elle ne dépend pas de la manière de plonger $\mathbf{G}$ dans un groupe linéaire.

[2] C'est à dire, l'application qui à une matrice $(a_{ij}) \in \mathrm{GL}_m(\overline{\mathbb{F}}_p)$ associe la matrice $(a_{ij}^q) \in \mathrm{GL}_m(\overline{\mathbb{F}}_p)$.

de $\mathrm{GL}_m(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Un endomorphisme F de $\mathbf{G}$ est appelé *endomorphisme de Frobenius* de $\mathbf{G}$ si

$$\forall\, x \in \mathbf{G}, \quad \imath(F(x)) = F_q(\imath(x)).$$

Un endomorphisme F de $\mathbf{G}$ est dit *endomorphisme de Frobenius généralisé* si une puissance de F est un endomorphisme de Frobenius de $\mathbf{G}$.

Soit F un endomorphisme de Frobenius généralisé sur $\mathbf{G}$. On pose :

$$\mathbf{G}^F = \{x \in \mathbf{G} \mid F(x) = x\}.$$

Cet ensemble est un sous-groupe fini de $\mathbf{G}$. Si $\mathbf{G}$ est un groupe réductif connexe, alors $\mathbf{G}^F$ est appelé *groupe réductif fini.*

On rappelle qu'un tore de $\mathbf{G}$ est un sous-groupe algébrique de $\mathbf{G}$ isomorphe au produit direct :

$$\overline{\mathbb{F}}_p^* \times \cdots \times \overline{\mathbb{F}}_p^*.$$

Jusqu'à la fin du paragraphe §1.5, le groupe $\mathbf{G}$ désigne un groupe réductif connexe. Soit F un endomorphisme de Frobenius généralisé de $\mathbf{G}$. Soit $\mathbf{B}$ un *sous-groupe de Borel* de $\mathbf{G}$ (ie, un sous-groupe résoluble maximal fermé et connexe) F-stable qui contient $\mathbf{H}$ un tore maximal F-stable[3] de $\mathbf{G}$. On note :

$$W = \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H})/\mathbf{H},$$

le groupe de Weyl de $\mathbf{G}$ et π_W la projection canonique de $\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H})$ dans W. Les sous-groupes $\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H})$ et $\mathbf{H}$ étant F-stables, l'endomorphisme F induit un automorphisme de W (que l'on désigne également par F par abus de notations) donné par :

$$\forall n \in \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}), \quad F(\pi_W(n)) = \pi_W(F(n)).$$

On note δ l'ordre de cet automorphisme.

1.5.2 Tores maximaux des groupes réductifs finis

Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal F-stable de $\mathbf{G}$. Le sous-groupe $\mathbf{T}^F$ de $\mathbf{G}^F$ est appelé un *tore maximal* de $\mathbf{G}^F$. Les classes de conjugaison dans $\mathbf{G}^F$ des tores maximaux de $\mathbf{G}^F$ sont données par (cf. [16] §4.3.7) :

Proposition 1.5.1 *Soit $\mathbf{H}$ un tore maximal F-stable de $\mathbf{G}$ contenu dans un Borel F-stable $\mathbf{B}$. Alors, les F-classes de W sont en correspondance avec les $\mathbf{G}^F$-classes de conjugaison des tores maximaux F-stables de $\mathbf{G}$. Soit $w \in W$ un représentant d'une F-classe de W. On note $\mathbf{T}_w$ le tore maximal F-stable de $\mathbf{G}$ correspondant. Soit n_w tel que $\pi_W(n_w) = w$. Alors on a :*

$$\mathbf{T}_w^F \cong \mathbf{H}^{[w]} = \{h \in \mathbf{H} \mid F(h) = n_w^{-1} h n_w\}. \tag{1.6}$$

De plus :

$$W(\mathbf{T}_w)^F \cong \mathrm{C}_{W,F}(w) = \{x \in W \mid x^{-1} w F(x) = w\},$$

où $W(\mathbf{T}_w) = \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_w)/\mathbf{T}_w$.

[3] L'existence de $\mathbf{H}$ et de $\mathbf{B}$ est montré dans [16] §4.3.3.

1.5.3 Caractères de Deligne-Lusztig

Rappelons la construction des caractères de Deligne-Lusztig (cf. [16] §4.5). Soit ℓ un nombre premier différent de p et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique du corps ℓ-adique $\mathbb{Q}_\ell$. Soit $i \in \mathbb{N}$. On rappelle qu'à toute variété algébrique X, on peut associer un espace vectoriel de dimension finie, le i-ième espace de cohomologie ℓ-adique à support compact sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, noté $H^i_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal F-stable de $\mathbf{G}$ contenu dans un sous-groupe de Borel $\mathbf{B}'$ de $\mathbf{G}$. On note $\mathbf{U}'$ le radical unipotent de $\mathbf{B}'$. Alors, la variété algébrique $L^{-1}(\mathbf{U}')$ (où L est l'application de Lang[4]) est stable par multiplication à gauche par $\mathbf{G}^F$ et par multiplication à droite par $\mathbf{T}^F$, ce qui définit une action de $\mathbf{G}^F \times \mathbf{T}^F$ sur $L^{-1}(\mathbf{U}')$. Soit $\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}^F)$. On définit *le caractère de Deligne-Lusztig généralisé* associé à $(\mathbf{T}, \theta)$ par :

$$\forall\, g \in \mathbf{G}^F, \quad R_{\mathbf{T},\theta}(g) = \frac{1}{|\mathbf{T}^F|} \sum_{t \in \mathbf{T}^F} \sum_i (-1)^i \,\mathrm{Tr}((g,t)^{*^{-1}}, H^i_c(L^{-1}(U), \overline{\mathbb{Q}}_\ell))\theta(t). \quad (1.7)$$

Le caractère $R_{\mathbf{T},\theta}$ est un caractère généralisé[5] de $\mathbf{G}^F$ et ne dépend pas du choix de $\mathbf{U}'$ ni du nombre premier ℓ.

Donnons une autre construction des caractères $R_{\mathbf{T},1}$. Soit $w \in W$, on introduit la variété algébrique de Deligne-Lusztig :

$$X_w = \{x\mathbf{B} \in \mathbf{G}/\mathbf{B} \mid x^{-1}F(x) \in \mathbf{B}w\mathbf{B}\}.$$

On définit pour tout $g \in \mathbf{G}^F$ le caractère généralisé de Deligne-Lusztig par :

$$R_w(g) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \,\mathrm{Tr}((g^*)^{-1}, H^i_c(X_w, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)).$$

On a alors $R_w = R_{\mathbf{T}_w,1}$ (cf. [16] Prop. 4.5.6).

On appelle *caractères unipotents* de $\mathbf{G}^F$ les constituants irréductibles de R_w ($w \in W$). On note :

$$U_{\mathbf{G}^F} = \{\chi \in \mathrm{Irr}(\mathbf{G}^F) \mid \exists w \in W,\ \langle\, \chi, R_w \,\rangle \neq 0\},$$

l'ensemble des caractères unipotents de $\mathbf{G}^F$.

1.5.4 Caractères fantômes et matrices de Fourier

Dans ce paragraphe, on classe les caractères unipotents de $\mathbf{G}^F$ en familles. Pour cela, on introduit la notion de caractères fantômes.

On dit que $\mathbf{G}^F$ est *déployé* si $\delta = 1$. Deux cas peuvent se présenter :

– *Le groupe* $\mathbf{G}^F$ *est déployé.* Soit $\rho \in \mathrm{Irr}(W)$. On pose :

$$\mathcal{R}_\rho = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \rho(w) R_w.$$

[4] On rappelle que l'application de Lang L est définie pour tout $x \in \mathbf{G}$ par $L(x) = x^{-1}F(x)$.

[5] Les applications $R_{\mathbf{T},\theta}$ prennent leurs valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et le cadre dans lequel on s'est placé pour les représentations est $\mathbb{C}$. Cependant, le corps $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ contient comme sous-corps, le corps des nombres algébriques. Comme les valeurs des caractères sont des entiers algébriques, on peut indifféremment les considérer comme à valeurs dans $\mathbb{C}$ où dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

– *Le groupe $\mathbf{G}^F$ n'est pas déployé.* Soit ρ un caractère irréductible F-stable de W. En appliquant la théorie de Clifford (cf. [20]), on montre qu'il existe $\widetilde{\rho}$ une extension de ρ à $W \rtimes \langle F \rangle$. On pose alors :

$$\mathcal{R}_{\widetilde{\rho}} = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \widetilde{\rho}(w, F) R_w.$$

Les quantités introduites dans ces deux cas s'appellent *les caractères fantômes* [6] de $\mathbf{G}^F$. Les constituants irréductibles de ces fonctions de classes sont exactement les caractères unipotents de $\mathbf{G}^F$.

Soient χ, $\chi' \in U_{\mathbf{G}^F}$. On dit que χ et χ' sont dans la même famille, s'il existe une suite finie $(\chi_i)_{i=1,\ldots,m}$ de caractères unipotents de $\mathbf{G}^F$ telle que

- On a $\chi_1 = \chi$ et $\chi_m = \chi'$,
- Pour tout $2 \leq i \leq m-1$, il existe $\rho_i \in \operatorname{Irr}(W)$ tel que

$$\langle\, \chi_i, \mathcal{R}_{\rho_i} \,\rangle_{\mathbf{G}^F} \neq 0 \quad \text{et} \quad \langle\, \chi_{i+1}, \mathcal{R}_{\rho_i} \,\rangle_{\mathbf{G}^F} \neq 0.$$

On suppose que $\mathbf{G}^F$ n'est pas le groupe de Suzuki ou le groupe de Ree de type G_2 ou F_4. Soit $\mathcal{F}$ une famille de caractère unipotent obtenue par le procédé décrit ci-dessus. Dans [24], Lusztig prouve qu'il est possible d'associer à cette famille un groupe fini Γ et un ensemble de symboles $\mathcal{M}(\Gamma)$ qui permettent de paramétrer les caractères unipotents de $\mathcal{F}$. A partir de cet ensemble de symboles, on définit la *matrice de Fourier* de $\mathcal{F}$. On va préciser cette définition lorsque le groupe $\mathbf{G}^F$ est déployé : soit $\mathbf{G}^F$ un groupe déployé, $\mathcal{F}$ une famille de caractères unipotents de $\mathbf{G}^F$ et $\mathcal{M}(\Gamma)$ le système de symbole correspondant. Plus précisément, $\mathcal{M}(\Gamma)$ est l'ensemble des orbites de $\{\, (x, \chi) \mid x \in \Gamma,\ \chi \in \operatorname{Irr}(\mathrm{C}_\Gamma(x)) \,\}$ sous l'action par conjugaison de Γ.

On définit sur $\mathcal{M}(\Gamma)$ l'opération :

$$\{\, (x, \chi), (y, \psi) \,\} = \frac{1}{|\,\mathrm{C}_\Gamma(x)|} \frac{1}{|\,\mathrm{C}_\Gamma(y)|} \sum_{\{g \in \Gamma \mid\ gyg^{-1} \in \mathrm{C}_\Gamma(x)\}} \chi(gyg^{-1}) \overline{\psi}(g^{-1}xg)$$

La *matrice de Fourier* de $\mathcal{F}$ est la matrice $(\{\, (x,\chi), (y,\psi) \,\})$.

Le cas non déployé est beaucoup plus technique. On se reporte à [24] pour plus de détails.

Dans le cas où $\mathbf{G}^F$ est un groupe de Suzuki, ou un groupe de Ree de type G_2 ou F_4, ses familles ne possèdent pas d'ensemble de symboles ; On ne peut dans ce cas pas définir de matrices de Fourier pour ces groupes. Cependant, dans [18] §5, Geck et Malle donnent une axiomatisation des matrices de Fourier et calculent des candidats (en accord avec cette axiomatique) pour ces groupes.

[6] Notons que les caractères fantômes d'un groupe non déployé sont définis à un scalaire près.

1.5.5 Valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius

Soient $w \in W$ et $i \in \mathbb{N}$. L'endomorphisme F^δ agit sur X_w, ce qui induit une action sur $H^i_c(X_w, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Ainsi F^δ est un endomorphisme de $H^i_c(X_w, \overline{\mathbb{Q}}_l)$.

Soit $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ une valeur propre de F^δ. On note $F_{\lambda,i} \subseteq H^i_c(X_w, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ le sous-espace caractéristique de λ. Le groupe $\mathbf{G}^F$ agit sur $H^i_c(X_w, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ et cette action commute avec celle de $\langle F^\delta \rangle$. Le sous-espace caractéristique $F_{\lambda,i}$ est donc une représentation de $\mathbf{G}^F$.

Soit χ un caractère unipotent de $\mathbf{G}^F$. Il existe $w \in W$, $i \geq 0$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ tel que χ est un constituant du caractère de $F_{\lambda,i}$. G. Lusztig a montré que la valeur propre λ ne dépend, à une puissance de $q^{1/2}$ près, que de χ. Il existe donc une racine de l'unité ω_χ et un entier s, tels que $\lambda = \omega_\chi q^{s/2}$ (cf. [10]).

Dans [22], G. Lusztig obtient des formules combinatoires (cf. [22] §7, Th. 7.1 et Prop. 7.2) qui lui permettent de déterminer les valeurs propres associées aux caractères unipotents, à quelques ambiguités près pour certaines paires de caractères qui sont complexes conjugués, où un signe reste à déterminer. Lorsque $\mathbf{G}^F = {}^2D_n(q)$, Geck et Malle montrent que les racines des caractères unipotents valent 1 ([18] §4.10).

Dans les cas des groupes de Suzuki et de Ree de type G_2 et F_4, les méthodes de Lusztig [22] ou de Geck et Malle [18] ne permettent pas d'associer les racines des caractères cuspidaux.

1.5.6 Descentes de Shintani

Définition et premiers résultats

Les applications F et F^δ étant des endomorphismes de Frobenius de $\mathbf{G}$, il suit que :

– L'application de Lang L_F (resp. L_{F^δ}) associée à F (resp. F^δ) est surjective.
– Les sous-groupes $\mathbf{G}^F$ et $\mathbf{G}^{F^\delta}$ sont finis.

De plus, on a :

$$\mathbf{G}^F \subseteq \mathbf{G}^{F^\delta}.$$

L'application F est un isomorphisme du groupe abstrait $\mathbf{G}$. Par suite, la restriction de F à $\mathbf{G}^{F^\delta}$ (notée encore F) est un isomorphisme de groupe. Soit $g \in \mathbf{G}^F$. Par surjectivité de L_{F^δ}, il existe $x \in \mathbf{G}$ tel que $g = x^{-1}F^\delta(x)$. Alors, $xF(x^{-1}) \in \mathbf{G}^{F^\delta}$. On définit N_{F/F^δ} de $\mathbf{G}^F$ dans $\mathrm{Cl}(\mathbf{G}^{F^\delta} \rtimes \langle F \rangle)$ par :

$$N_{F/F^\delta}(g) = (xF(x^{-1}), F).$$

On a :

Proposition 1.5.2 *L'application N_{F/F^δ} induit une bijection[7] entre les classes de conjugaison de $\mathbf{G}^F$ et les classes de $\mathbf{G}^{F^\delta} \rtimes \langle F \rangle$ composées d'éléments de l'ensemble $(\mathbf{G}^{F^\delta}, F)$. De plus, on a :*

$$\forall g \in \mathbf{G}^F, \quad \left|\mathrm{C}_{\mathbf{G}^{F^\delta} \rtimes \langle F \rangle}\left(N_{F,F^\delta}(g)\right)\right| = \delta \left|\mathrm{C}_{\mathbf{G}^F}(g)\right|. \tag{1.8}$$

[7] L'inverse est l'application induite par $N_{F^\delta/F} : (\mathbf{G}^{F^\delta}, F) \to \mathrm{Cl}(\mathbf{G}^F),\ (xF(x^{-1}), F) \mapsto x^{-1}F^\delta(x)$.

Preuve —

1. Soient $x, y \in \mathbf{G}^{F^\delta}$. *Alors x et y sont F-conjugués dans $\mathbf{G}^{F^\delta}$ si et seulement si les éléments (x, F) et (y, F) sont conjugués dans $\mathbf{G}^{F^\delta} \rtimes \langle F \rangle$.* Si x et y sont F conjugués, alors il existe $h \in \mathbf{G}^{F^\delta}$ tel que $y = hxF(h^{-1})$. On a alors $h(x, F)h^{-1} = (y, F)$.
   Réciproquement, soit $(g, F^i) \in \mathbf{G}^{F^\delta} \rtimes \langle F \rangle$ tel que $(y, F) = (g, F^i)(x, F)(g, F^i)^{-1}$. On a :
   $$(g, F^i)(x, F)(g, F^i)^{-1} = \big(gF^i(x)F(g^{-1}), F\big)\,. \tag{1.9}$$
   Or (x, F) et $(F^i(x), F)$ sont conjugués par un élément de $\mathbf{G}^{F^\delta}$. En effet, en posant $g_i = xF(x)\ldots F^{i-1}(x) \in \mathbf{G}^{F^\delta}$, on a :
   $$(F^i(x), F) = g_i(x, F)g_i^{-1}. \tag{1.10}$$
   Finalement, en utilisant les égalités (1.9) et (1.10), on a $y = gF^i(x)F(g^{-1})$ et $F^i(x) = g_ixF(g_i^{-1})$. On en déduit donc par transitivité que x et y sont F-conjugués.
   En utilisant [10] §$I.7$ et ce qui précède, on déduit que l'application N_{F/F^δ} est bien définie, d'inverse $N_{F^\delta/F}$ et induit bien une bijection entre les classes de $\mathbf{G}^F$ et les classes conposées d'éléments de $(\mathbf{G}^{F^\delta}, F)$.
2. On a le résultat (cf. [10] §$I.7$) :
   $$\forall x \in \mathbf{G}, \quad \left|\mathrm{C}_{\mathbf{G}^{F^\delta},F}(xF(x^{-1}))\right| = \left|\mathrm{C}_{\mathbf{G}^F}(x^{-1}F^\delta(x))\right|.$$
   Pour obtenir l'égalité (1.8), il suffit de prouver que :
   $$\forall g \in \mathbf{G}^{F^\delta}, \quad \left|\mathrm{C}_{\mathbf{G}^{F^\delta} \rtimes \langle F \rangle}(g, F))\right| = \delta \left|\mathrm{C}_{\mathbf{G}^{F^\delta},F}(g)\right|,$$
   ce qui est le cas puisque $(x, F^i) \in \mathrm{C}_{\mathbf{G}^{F^\delta} \rtimes \langle F \rangle}(g, F)$ si et seulement si $x \in g_i^{-1}\,\mathrm{C}_{\mathbf{G}^{F^\delta},F}(g)$, où g_i est l'élément défini dans (1.9).

□

Soit $\psi \in \mathrm{C}(\mathbf{G}^{F^\delta} \rtimes \langle F \rangle)$. On définit $\mathrm{Sh}_{F^\delta/F}(\psi) \in \mathrm{C}(\mathbf{G}^F)$ la *descente de Shintani de ψ de $\mathbf{G}^{F^\delta} \rtimes \langle F \rangle$ à $\mathbf{G}^F$*, par :

$$\forall g \in \mathbf{G}^F, \quad \mathrm{Sh}_{F^\delta/F}(\psi)(g) = \psi(N_{F/F^\delta}(g)).$$

Lien avec les racines du Frobenius

Algèbre de Iwahori-Hecke de $W \rtimes \langle F \rangle$ Soit $1_{\mathbf{B}^{F^\delta}}$ le caractère trivial de $\mathbf{B}^{F^\delta}$. On note e l'idempotent central de $\mathbb{C}\mathbf{B}^{F^\delta}$ associé ; cf. (1.1). On pose :

$$\mathcal{H} = e(\mathbb{C}\mathbf{G}^{F^\delta})e \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathcal{H}} = e(\mathbb{C}\mathbf{G}^{F^\delta} \rtimes \langle F \rangle)e.$$

Les caractères irréductibles de l'algèbre $\mathcal{H}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{H}}$) sont en bijection avec les caractères de la *série principale*[8] de $\mathbf{G}^{F^\delta}$ (resp. $\mathrm{Ind}_{\mathbf{B}^{F^\delta}}^{\mathbf{G}^{F^\delta} \rtimes \langle F \rangle} 1_{\mathbf{B}^{F^2}}$) ; cf §1.1.

[8] On rappelle que la série principale de $\mathbf{G}^{F^\delta}$ est l'ensemble des constituants de $\mathrm{Ind}_{\mathbf{B}^{F^\delta}}^{\mathbf{G}^{F^\delta}} 1_{\mathbf{B}^{F^\delta}}$.

L'algèbre $\mathcal{H}$ est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{C}W$ (cf [5]). Soit $\rho \in \mathrm{Irr}(W)$. On note χ_ρ le consituant de la série principale correspondant.

De plus, dans [26] (1.5), G. Malle montre que :

$$\widetilde{\mathcal{H}} \simeq \mathbb{C}W \rtimes \langle F \rangle.$$

Soit $\widetilde{\rho} \in \mathrm{Irr}(W \rtimes \langle F \rangle)$. On note $\chi_{\widetilde{\rho}}$ le constituant de $\mathrm{Ind}_{\mathbf{B}^{F^\delta}}^{\mathbf{G}^{F^\delta} \rtimes \langle F \rangle} 1_{\mathbf{B}^{F^\delta}}$ correspondant.

Soit ρ un caractère F-stable de W, alors le caractère χ_ρ de la série principale de $\mathbf{G}^{F^\delta}$ est F-stable. De plus, si $\varepsilon \in \mathrm{Irr}(\langle F \rangle)$ et $\widetilde{\rho}$ une extension de ρ à $W \rtimes \langle F \rangle$, alors $\chi_{\widetilde{\rho}}$ et $\chi_{\varepsilon\widetilde{\rho}}$ sont deux extensions de χ_ρ à $\mathbf{G}^{F^\delta} \rtimes \langle F \rangle$ et on a :

$$\chi_{\varepsilon\widetilde{\rho}} = \varepsilon\chi_{\widetilde{\rho}}.$$

Théorème de Digne-Michel Soit ρ un caractère irréductible F-stable de W. On choisit $\widetilde{\rho}$ une extension de ρ à $W \rtimes \langle F \rangle$. Soient $\mathcal{R}_\rho$ le caractère fantome de $\mathbf{G}^F$ correspondant et $\chi_{\widetilde{\rho}}$ le constituant irréductible de $\mathrm{Ind}_{\mathbf{B}^{F^\delta}}^{\mathbf{G}^{F^\delta} \rtimes \langle F \rangle} 1_{\mathbf{B}^{F^\delta}}$ correspondant à $\widetilde{\rho}$. On a alors (cf. [10] §III.) :

$$\mathrm{Sh}_{F^\delta/F}\, \chi_{\widetilde{\rho}} = \sum_{V \in \mathcal{U}_{\mathbf{G}^F}} \langle \mathcal{R}_\rho, V \rangle_{\mathbf{G}^F} \omega_V V.$$

Conjecture de Digne-Michel

F. Digne et J. Michel conjecturent dans [10] p. 119 que les descentes de Shintani des caractères extérieurs (extensions de caractères unipotents de $\mathbf{G}^{F^\delta}$) de $\mathrm{Irr}(\mathbf{G}^{F^\delta} \rtimes \langle F \rangle)$ n'ont pour constituants que des caractères unipotents de $\mathbf{G}^F$. De plus les coefficients qui apparaissent ne dépendent, à une normalisation près, que de la racine du caractère et d'un coefficient de la matrice de Fourier.

Remarque 1.5.1 *Lorsque $\mathbf{G}^F$ ne possède pas d'ensemble de symboles, le calcul des descentes de Shintani des extensions de $\mathbf{G}^{F^\delta} \rtimes \langle F \rangle$ peut donner un moyen de définir les matrices de Fourier de $\mathbf{G}^F$, ce qui est un autre point de vue que celui proposé par M. Geck et G. Malle dans [18].*

1.6 Les groupes de Chevalley

1.6.1 Algèbre de Lie et base de Chevalley

On suppose connu la construction des algèbres de Lie simple complexe (cf. Carter [4]). Soit $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Lie simple complexe. Soit Φ le système de racine de $\mathfrak{g}$. On note $\mathcal{V} = \mathrm{vect}_{\mathbb{R}}(\Phi)$ l'espace euclidien muni du produit scalaire usuel $(\ ,\ )$. On note Π un système fondamental de racines. Soit $\Phi^+ = \{\sum_{r \in \Pi} \lambda_r r \in \Phi \mid \lambda_r \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble des racines positives. Soit $r \in \Phi$. On note w_r la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal à r. On a :

$$\forall\, x \in \mathcal{V}, \quad w_r(x) = x - \frac{2(r,x)}{(r,r)} r.$$

On définit alors W, le *groupe de Weyl*[9] de $\mathfrak{g}$, par :

$$W = \langle\, w_r \mid r \in \Phi \,\rangle.$$

Soit $s \in \Phi$. On note :

$$A_{rs} = \frac{2(r,s)}{(r,r)}.$$

En particulier on a $w_r(s) = s - A_{rs}r$. La matrice $(A_{rs})_{r,s\in\Phi}$ s'appelle la matrice de Cartan.

Il existe une base $\{h_r,\ r \in \Pi;\ e_r, r \in \Phi\}$ de $\mathfrak{g}$, appelée *base de Chevalley*, qui vérifie (cf. [4] Th. 4.2.1) :

$$\begin{array}{ll}
[e_r, e_{-r}] = h_r & r \in \Phi, \\
[h_r, h_s] = A_{rs}e_s & r \in \Pi,\ s \in \Phi, \\
[h_r, h_s] = 0 & r, s \in \Pi, \\
[e_r, e_s] = 0 & r, s \in \Pi, r + s \notin \Phi, \\
[e_r, e_s] = N_{r,s}e_{r+s} & r, s, r + s \in \Phi,\ N_{r,s} \in \mathbb{Z}.
\end{array}$$

On note $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ le $\mathbb{Z}$-module obtenu à partir de la base de Chevalley. Comme A_{rs} et $N_{r,s}$ sont des entiers, l'ensemble $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie sur $\mathbb{Z}$.

Soit K un corps alors on pose :

$$\mathfrak{g}_K = K \otimes \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}.$$

Soient $\bar{h}_r = 1_K \otimes h_r$ et $\bar{e}_r = 1_K \otimes e_r$. Alors $\mathfrak{g}_K$ est un K-espace vectoriel de base

$$\{\bar{h}_r,\ r \in \Pi;\ \bar{e}_r,\ r \in \Phi\}.$$

On munit $\mathfrak{g}_K$ d'une structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{g}_K$ en définissant le crochet sur les éléments de base par $[1_K \otimes x, 1_K \otimes y] = 1_K \otimes [x, y]$.

Soit $x \in \mathfrak{g}$. On rappelle que $\operatorname{ad} x$ est l'endomorphisme de $\mathfrak{g}$ défini par :

$$\forall y \in \mathfrak{g}, \quad \operatorname{ad} x(y) = [x, y].$$

Soient $r \in \Phi$ et $z \in \mathbb{C}$. On définit :

$$x_r(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{(\operatorname{ad} ze_r)^k}{k!}.$$

L'application $x_r(z)$ est bien définie (car $\operatorname{ad} ze_r$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathfrak{g}$, donc la somme du membre de droite est finie) et est un automorphisme d'algèbre de Lie (cf. [4] §4.3).

Soit $M_r(z)$ la matrice de $x_r(z)$ dans la base de Chevalley. Les coefficients de $M_r(z)$ sont de la forme az^i avec $a \in \mathbb{Z}$ (cf. [4] §4.3). Soit $t \in K$ et p la caractéristique de K. On définit la matrice de $\overline{M}_r(t)$ en remplaçant le coefficient az^i de $M_r(z)$ par $\bar{a}t^i$, où

[9]Les groupes de Chevalley obtenus par la construction présentée dans ce paragraphe, appliquée à $K = \overline{\mathbb{F}}_q$ sont des groupes réductifs connexes. Le groupe W est alors le groupe de Weyl introduit dans le paragraphe précédent.

$\bar{a}$ désigne la réduction modulo p. On note $\bar{x}_r(t)$ l'endomorphisme de $\mathfrak{g}_K$ ayant pour matrice $\overline{M}_r(t)$ dans la base $\{\bar{h}_r,\ r \in \Pi;\ \bar{e}_r,\ r \in \Phi\}$. Les endomorphismes $\bar{x}_r(t)$ sont des automorphismes de $\mathfrak{g}_K$ (cf. [4] Prop. 4.4.2).

Par abus de notation, on note dans la suite ces automorphismes $x_r(t)$, $r \in \Phi$, $t \in K$ et on note $\{h_r,\ r \in \Pi;\ e_r,\ r \in \Phi\}$ la base $\{\bar{h}_r,\ r \in \Pi;\ \bar{e}_r,\ r \in \Phi\}$ de $\mathfrak{g}_K$.

On note $\mathfrak{g}(K)$ le groupe engendré par les $x_r(t)$, $r \in \Phi$ et $t \in K$. On l'appelle *le groupe de Chevalley* de type $\mathfrak{g}$ sur K. La classification des algèbres de Lie simple complexe conduit à l'existence de quatre familles infinies A_n, B_n, C_n, D_n et de cinq types exceptionnels G_2, F_4, E_6, E_7 et E_8. On parlera donc d'algèbre de Lie simple de type A_n, B_n, C_n, D_n, G_2, F_4, E_6, E_7 et E_8 et par suite de groupe de Chevalley de type correspondant sur K.

1.6.2 Relations et sous-groupes

Pour plus de détails concernant les rappels de ce paragraphe, on se reporte au livre de Carter [4]. Soit $\mathfrak{g}(K)$ un groupe de Chevalley. Soit $r \in \Phi$ alors on a :

$$\forall\, t,\, t' \in K, \quad x_r(t+t') = x_r(t)x_r(t'). \tag{1.11}$$

On connaît les relations de commutation lorsque les racines sont positives.
Soient $r,\ s \in \Phi^+$ linéairement indépendantes alors on a :

$$x_s(-u)x_r(-t)x_s(u)x_r(t) = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ijrs}(-t)^i u^j), \tag{1.12}$$

où C_{ijrs} vaut ±1, ±2 ou ±3 et ne dépend pas de K. Soit $r \in \Phi$, on définit *le sous-groupe de la racine* r par :

$$X_r = \{x_r(t) \mid t \in K\}.$$

Ce sous-groupe est isomorphe à K.
Soit $r \in \Phi$, alors il existe un homomorphisme $\varphi_r : \mathrm{SL}(2,K) \longrightarrow \langle X_{-r}, X_r \rangle$ tel que :

$$\varphi_r\left(\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = x_r(t), \quad \varphi_r\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{bmatrix}\right) = x_{-r}(t).$$

On pose :

$$\forall\, r \in \Phi, \quad h_r(t) = \varphi_r\left(\begin{bmatrix}t & 0\\ 0 & t^{-1}\end{bmatrix}\right).$$

Il est immédiat de vérifier que :

$$\forall\, t,\, t' \in K, \quad h_r(tt') = h_r(t)h_r(t'). \tag{1.13}$$

Soit $\mathcal{P}$ le sous groupe additif engendré par les racines et χ un homomorphisme de $\mathcal{P}$ dans $K^\times$. On définit un automorphisme de $\mathfrak{g}_K$ par :

$$h(\chi).h_s = h_s \quad h(\chi).e_s = \chi(s)e_s.$$

On remarque que :

$$h_r(t) = h(\chi_{r,t}),$$

avec $\chi_{r,t}$ défini par :

$$\chi_{r,t}(a) = t^{2\frac{(a,r)}{(r,r)}}. \tag{1.14}$$

On pose :

$$n_r(t) = \varphi_r\left(\begin{bmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{bmatrix}\right) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t), \quad \text{et} \quad n_r = n_r(1).$$

Donnons les relations entre ces éléments. Soient $\chi \in \mathcal{P}$, $r \in \Phi$ et $t \in k$, on a :

$$h(\chi)x_r(t)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)\,t). \tag{1.15}$$

Soient r, $s \in \Phi$ et $t \in K$. On a :

$$n_r x_s(t) n_r^{-1} = x_{w_r(s)}(\eta_{r,s}t), \tag{1.16}$$

où les constantes $\eta_{r,s}$ sont des entiers valant ± 1 et qui ne dépendent pas de K. On trouve des relations permettant de calculer explicitement ces constantes dans Carter [4] §6.4.

Soient $r, s \in \Phi$. On a :

$$n_r n_s n_r^{-1} = h_{w_r(s)}(\eta_{r,s}) n_{w_r(s)}. \tag{1.17}$$

On note :

$$U = \prod_{r\in\Phi^+} X_r.$$

Les relations (1.11) et (1.12) montrent que U est un sous-groupe de $\mathfrak{g}(K)$ et que l'écriture dans cette décomposition est unique.

On note H le sous-groupe de $\mathfrak{g}(K)$ engendré par les $h_r(t)$ pour $r \in \Phi$ et $t \in K$. On pose :

$$B = UH.$$

La relation (1.15) montre que B est un groupe et que U est distingué dans B. Comme $U \cap H$ est trivial, on en déduit que B est le produit semi-direct de U par H. Ainsi, chaque élément de B s'écrit de manière unique sous la forme uh avec $u \in U$ et $h \in H$. De plus, on a $B = \mathrm{N}_G(U)$.

Soit $N = \langle H,\ n_r |\ r \in \Phi\rangle$. Il existe un homomorphisme π_W de N dans W tel que $\mathrm{Ker}(\pi_W) = H$ et $\pi_W(n_r) = w_r$. En particulier $N/H \simeq W$. Soient $n \in \mathbf{N}$, et $\chi \in \mathcal{P}$. Alors on a :

$$nh(\chi)n^{-1} = h(\chi') \text{ où } w = \pi_W(n) \text{ et } \chi'(r) = \chi(w^{-1}(r)). \tag{1.18}$$

Les sous-groupes B et N forment une (B, N)-pair pour $\mathfrak{g}(K)$. On rappelle la décomposition de Bruhat associée (cf. [4] p. 117). Pour tout $\omega \in W$, on pose :

$$\Phi_\omega^+ = \{r \in \Phi^+, \omega(r) \in \Phi^+\} \quad \text{et} \quad \Phi_\omega^- = \{r \in \Phi^+, \omega(r) \notin \Phi^+\}.$$

On a les sous groupes associés :

$$U_\omega^+ = \Pi_{r\in\Phi_\omega^+} X_r, \qquad U_\omega^- = \Pi_{r\in\Phi_\omega^-} X_r.$$

Alors, tout élément $g \in$ G s'écrit de manière unique :

$$g = uhn_\omega u_\omega^- \qquad u \in U,\ h \in H,\ \omega \in W,\ u_\omega^- \in U_\omega^-. \tag{1.19}$$

Remarque 1.6.1 *Lorsque K est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$, alors $\mathfrak{g}(K)$ est un groupe réductif connexe (cf. [16]). Le groupe B est alors un sous-groupe de Borel et H un tore maximal de B. Le groupe W s'identifie au quotient N/H. On peut donc appliquer à $\mathfrak{g}(K)$ les considérations de la partie 1.5.*

1.7 Groupes de type B_2

Soit $\mathbf{G}$ un groupe de Chevalley de type B_2 sur $\overline{\mathbb{F}}_2$. Le système de racines de $\mathbf{G}$ est :

$$\Phi = \{-a, -b, -a-b, -2a-b, a, b, a+b, 2a+b\}.$$

On choisit $\Pi = \{a, b\}$ comme système fondamental de racines. On note :

$$\Phi^+ = \{a, b, a+b, 2a+b\},$$

l'ensemble des racines positives qui respecte Π. Le diagramme des racines de $\mathbf{G}$ est donné dans la figure 1.1. Soit W le groupe de Weyl de $\mathbf{G}$. Alors W est isomorphe

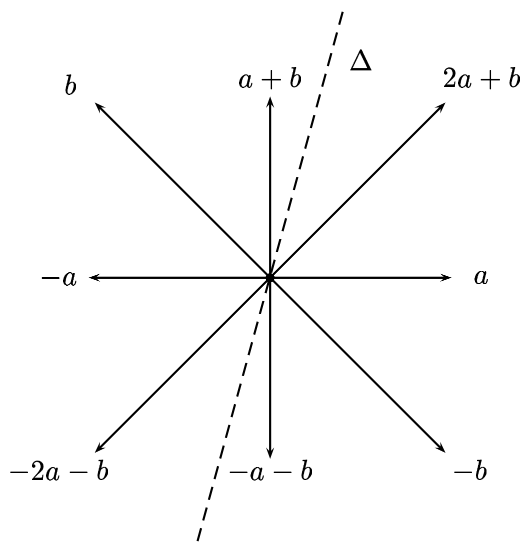

FIG. 1.1 – Diagramme des racines de type B_2

au groupe diédral à 8 éléments. On note $x_r(t)$ ($r \in \Phi$, $t \in \overline{\mathbb{F}}_2$) les générateurs de

Chevalley. Dans la suite, on identifie $\mathbf{G}$ avec $\mathrm{Sp}_4(\overline{\mathbb{F}}_2)$, le groupe symplectique de dimension 4 sur $\overline{\mathbb{F}}_2$, défini par :

$$\mathbf{G} = \{A \in \mathrm{M}_4(\overline{\mathbb{F}}_2) \mid {}^tAJA = J\}, \quad \text{où} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans cette identification, les générateurs de Chevalley ont pour représentant matriciel :

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad x_b(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$x_{a+b}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_{2a+b}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le sous-groupe $\mathbf{H}$ s'identifie au sous-groupe des matrices diagonales. Soit $z_1,\ z_2 \in \overline{\mathbb{F}}_2$. On note :

$$h(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1^{-1} \end{bmatrix}.$$

On pose $\mathbf{N} = \mathbf{N_G}(H)$. Les éléments n_a et n_b de $\mathbf{N}$ ont pour représentant matriciel :

$$n_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad n_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De plus, on vérifie que :

$$x_{-r}(t) = {}^t x_r(t).$$

Donnons les relations de Chevalley de $\mathbf{G}$. Pour tout $u,\ v,\ z_1,\ z_2 \in \overline{\mathbb{F}}_2$, on a :

$$\begin{array}{lcl} x_a(u)x_b(v) & = & x_b(v)x_a(u)x_{a+b}(uv)x_{2a+b}(u^2v) \\ x_{a+b}(u)x_{2a+b}(v) & = & x_{2a+b}(v)x_{a+b}(u) \\ h(z_1,z_2)x_a(u)h(z_1,z_2)^{-1} & = & x_a(z_1uz_2^{-1}) \\ h(z_1,z_2)x_b(u)h(z_1,z_2)^{-1} & = & x_b(z_2^2u) \\ h(z_1,z_2)x_{a+b}(u)h(z_1,z_2)^{-1} & = & x_{a+b}(z_1uz_2) \\ h(z_1,z_2)x_{2a+b}(u)h(z_1,z_2)^{-1} & = & x_{2a+b}(z_1^2u) \\ n_ah(z_1,z_2)n_a^{-1} & = & h(z_2,z_1) \\ n_bh(z_1,z_2)n_b^{-1} & = & h(z_1,z_2^{-1}) \end{array} \tag{1.20}$$

Le groupe $\mathbf{G}$ possède un automorphisme de graphe α décrit dans la proposition 12.3.3 de [4] qui fait intervenir l'axe Δ du diagramme des racines (cf. fig. 1.1). Plus pécisément, son action sur les générateurs est :

$$\begin{array}{lcl}\alpha(x_a(t)) & = & x_b(t^2)\\ \alpha(x_b(t)) & = & x_a(t)\\ \alpha(x_{a+b}(t)) & = & x_{2a+b}(t^2)\\ \alpha(x_{2a+b}(t)) & = & x_{a+b}(t)\\ \alpha(h(z_1,z_2)) & = & h(z_1\, z_2, z_1\, {z_2}^{-1})\\ \alpha(n_a) & = & n_b\\ \alpha(n_b) & = & n_a\end{array} \tag{1.21}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\theta = 2^n$ et $q = 2\theta^2$. Le groupe $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique simple. Le sous-groupe de Borel $\mathbf{B}$ obtenu dans la construction de §1.6 s'identifie au sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. Le radical unipotent $\mathbf{U}$ de $\mathbf{B}$ est alors le sous-groupe de $\mathbf{G}$ des matrices unipotentes supérieures. On considère F l'endomorphisme de $\mathbf{G}$ défini par [10] :

$$F = F_\theta \circ \alpha.$$

On remarque que $F^2 = F_q$ donc F est un Frobenius généralisé sur $\mathbf{G}$. Le groupe $\mathbf{G}^F$ est appelé le groupe de Suzuki de paramètre q. Il est étudié dans l'article de Suzuki [31]. On peut voir dans l'article d'Ono [27] que le groupe présenté par Suzuki est bien le sous-groupe de $\mathbf{G}$ des points fixes sous F. Le groupe $\mathbf{G}^{F^2}$ est le groupe symplectique de dimension 4 sur le corps fini à q éléments[11]. On remarque que $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{U}$, et $\mathbf{X}_r$, $r \in \Phi$ sont stables par F^2, on note alors $B = \mathbf{B}^{F^2}$, $H = \mathbf{H}^{F^2}$, $U = \mathbf{U}^{F^2}$ et $X_r = \mathbf{X}_r^{F^2}$ les sous-groupes correspondants de $\mathbf{G}^{F^2}$. La restriction de F à $\mathbf{G}^{F^2}$ est notée σ. On pose dans la suite $\mathbf{G}^F = \mathrm{Sz}(q)$ et $\mathbf{G}^{F^2} = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_q)$. On remarque que :

$$\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_q)^\sigma = \mathrm{Sz}(q).$$

1.8 Groupes de type G_2

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type G_2 sur $\mathbb{C}$ (cf. [4]). Une base de Chevalley et les constantes de structures correspondantes de $\mathfrak{g}$ sont données dans [28]. Soit $\mathbf{G}$ le groupe de Chevalley sur $\overline{\mathbb{F}}_3$ de type G_2 obtenu en utilisant la construction de §1.6. On choisit les notations de [13].

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, on pose $\xi_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\xi_2 = (1,0)$ et $\xi_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. On choisit pour système de racines de type G_2 l'ensemble

$$\Sigma = \{\pm\xi_i,\ \xi_i - \xi_j |\ 1 \leq i,\ j \leq 3,\ i \neq j\},$$

représenté dans la Figure 1.2. On choisit $a = \xi_2$ et $b = \xi_1 - \xi_2$ comme système fondamental de racines. On note Σ^+ le système de racines positives qui respecte $\{a,\ b\}$. Plus précisement :

$$\Sigma^+ = \{a,\ b,\ a+b,\ 2a+b,\ 3a+b,\ 3a+2b\}.$$

[10] Si l est une puissance de 2, on note F_l comme dans §1.5.1 l'endomorphisme de Frobenius standard de $\mathbf{G}$.

[11] Ce groupe est le groupe fini simple (sauf pour $n = 0$) de type B_2 de paramètre q.

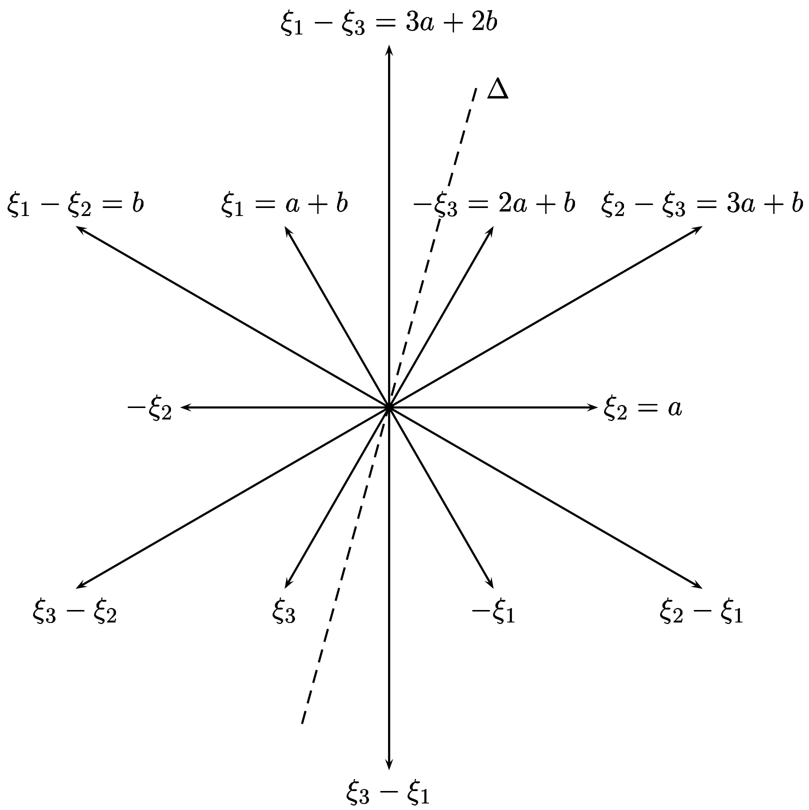

FIG. 1.2 – Diagramme des racines de type G_2

Le groupe de Weyl de $\mathbf{G}$, noté W, est isomorphe au groupe diédral à 12 éléments. On a $W = \langle w_a, w_b \rangle$.

Comme rappelé dans §1.6, pour toute racine $r \in \Sigma$, on note φ_r l'homomorphisme de $\mathrm{SL}(2, \overline{\mathbb{F}}_3)$ dans $\mathbf{G}$ tel que :

$$\varphi_r\left(\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = x_r(t), \quad \varphi_r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}\right) = x_{-r}(t).$$

Donnons les relations de commutation entre ces éléments. Pour tout $t, u \in \overline{\mathbb{F}}_3$, on a :

$$\begin{array}{lcl} x_a(t)x_b(u) & = & x_b(u)x_a(t)x_{a+b}(-tu)x_{3a+b}(t^3u)x_{2a+b}(-t^2u)x_{3a+2b}(t^3u^2) \\ x_a(t)x_{a+b}(u) & = & x_{a+b}(u)x_a(t)x_{2a+b}(tu) \\ x_b(t)x_{3a+b}(u) & = & x_{3a+b}(u)x_b(t)x_{3a+2b}(tu) \\ x_{a+b}(t)x_{3a+b}(u) & = & x_{3a+b}(u)x_{a+b}(t) \\ x_{a+b}(t)x_{2a+b}(u) & = & x_{2a+b}(u)x_{a+b}(t) \\ x_{a+b}(t)x_{3a+2b}(u) & = & x_{3a+2b}(u)x_{a+b}(t) \\ x_{2a+b}(t)x_{3a+b}(u) & = & x_{3a+b}(u)x_{2a+b}(t) \\ x_{2a+b}(t)x_{3a+2b}(u) & = & x_{3a+2b}(u)x_{2a+b}(t) \end{array} \tag{1.22}$$

Soit $\mathcal{P} = \mathbb{Z}\Sigma$ et χ un homomorphisme de $\mathcal{P}$ dans $\overline{\mathbb{F}}_3^{\times}$. On pose $z_i = \chi(\xi_i)$ (pour $i = 1,\ 2,\ 3$). On a $z_1z_2z_3 = 1$. Ainsi, χ est entièrement déterminé par z_1

et z_2. On note $h(z_1,\ z_2,\ z_3)$ l'élément associé à $h(\chi)$. En général, le sous-groupe d'automorphisme de $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{F}}_3}$ formé des automorphismes $h(\chi)$ avec $\chi \in \mathcal{P}$ est plus grand que $\mathbf{H}$, mais dans le cas de type G_2, ces deux groupes coïncident. Ainsi, on décrit bien exactement les éléments de $\mathbf{H}$ par ce procédé. On note $\mathbf{N} = \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(H)$. On a $\langle\, \mathbf{H}, n_r \mid r \in \Sigma\,\rangle$, où les n_r $(r \in \Sigma)$ sont les éléments donnés dans § 1.6. On note π_W la projection canonique de $\mathbf{N}$ dans W. En particulier, on a $\pi_W(n_r) = w_r$.

Dans la table 1.3, on donne les constantes $\eta_{r,s}$. Ainsi, en utilisant la relation (1.17), on peut décrire les relations de conjugaison entre les n_r.

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	$\xi_1-\xi_2$	$\xi_2-\xi_3$	$\xi_3-\xi_1$
ξ_1	-1	-1	1	-1	1	1
ξ_2	1	-1	-1	1	-1	1
ξ_3	-1	1	-1	1	1	-1
$\xi_1-\xi_2$	-1	1	1	-1	1	-1
$\xi_2-\xi_3$	1	-1	1	-1	-1	1
$\xi_3-\xi_1$	1	1	-1	1	-1	-1

TAB. 1.3 – Constante $\eta_{r,s}$ de G_2

Comme dans §1.6, on note $\mathbf{X}_r$ le sous-groupe engendré par $x_r(t),\ t \in \overline{\mathbb{F}}_3$ et

$$\mathbf{U} = \mathbf{X}_a\mathbf{X}_b\mathbf{X}_{a+b}\mathbf{X}_{3a+b}\mathbf{X}_{2a+b}\mathbf{X}_{3a+2b} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mathbf{UH}.$$

A partir de l'axe Δ du diagramme des racines (cf. fig. 1.2), on obtient une permutation des racines telle que :

$$\begin{aligned}
&\pm\, a && \leftrightarrow \pm\, b\\
&\pm\,(a+b) && \leftrightarrow \pm\,(3a+b)\\
&\pm\,(2a+b) && \leftrightarrow \pm\,(3a+2b)
\end{aligned}$$

Il existe un automorphisme de graphe α associé (cf. [4] §12.4), dont l'action sur les générateurs de $\mathbf{G}$ est :

$$\begin{aligned}
&x_{\pm a}(t) && \mapsto x_{\pm b}(t^3)\\
&x_{\pm b}(t) && \mapsto x_{\pm a}(t)\\
&x_{\pm(a+b)}(t) && \mapsto x_{\pm(3a+b)}(t^3)\\
&x_{\pm(3a+b)}(t) && \mapsto x_{\pm(a+b)}(t)\\
&x_{\pm(2a+b)}(t) && \mapsto x_{\pm(3a+2b)}(t^3)\\
&x_{\pm(3a+2b)}(t) && \mapsto x_{\pm(2a+b)}(t)
\end{aligned}$$

Soient $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \overline{\mathbb{F}}_3$ tels que $z_1z_2z_3 = 1$. Alors :

$$h(z_1, z_2, z_3)^\alpha = h(z_2z_3^{-1}, z_1z_2^{-1}, z_3z_1^{-1}) \tag{1.23}$$

Le groupe $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique simple. Le groupe $\mathbf{B}$ est un sous-groupe de Borel ayant pour tore maximal $\mathbf{H}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on définit l'endomorphisme de Frobenius standard F_{3^m} de $\mathbf{G}$ sur les générateurs par $x_r(t) \mapsto x_r(t^{3^m})$ ($t \in \overline{\mathbb{F}}_3$ et $r \in \Sigma$).

Soit n un entier naturel. On pose $\theta = 3^n$ et on considère F l'endomorphisme de $\mathbf{G}$ défini par :

$$F = F_\theta \circ \alpha.$$

On pose $q = 3^{2n+1} = 3\theta^2$. On remarque que $F^2 = F_q$. Ainsi, F est un endomorphisme de Frobenius généralisé sur $\mathbf{G}$. Le groupe $\mathbf{G}^F$ est appelé le groupe de Ree de type G_2 de paramètre q. Il est présenté dans [28]. Le groupe $\mathbf{G}^{F^2}$ est un groupe de Chevalley fini de type G_2 obtenu par la construction §1.6 en prenant pour corps $\mathbb{F}_q$. Les sous-groupes $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{U}$, et $\mathbf{X}_r$, $r \in \Phi$ sont stables par F^2. De plus, on constate que $B = \mathbf{B}^{F^2}$, $H = \mathbf{H}^{F^2}$, $U = \mathbf{U}^{F^2}$ et $X_r = \mathbf{X}_r^{F^2}$, où H, U, B et X_r sont les sous-groupes obtenus dans la construction de $\mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$. On note σ la restriction de F à $\mathbf{G}^{F^2}$, qui est un automorphisme d'ordre 2 de $\mathbf{G}^{F^2}$. On pose dans la suite $\mathbf{G}^F = \mathrm{R}(q)$ et $\mathbf{G}^{F^2} = \mathrm{G}_2(q)$. On remarque que :

$$\mathrm{G}_2(q)^\sigma = \mathrm{R}(q).$$

Chapitre 2

Classes de conjugaison extérieures

Dans le chapitre 1, on voit que les classes intérieures d'une extension par automorphisme d'ordre 2 d'un groupe fini G se déduisent immédiatement des classes de G ; cf. Prop. 1.2.1. On se propose dans ce chapitre de déterminer les classes extérieures de $G \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle$, où G est un groupe fini de type B_2 de paramètre 2^{2n+1} (resp. de type G_2 de paramètre 3^{2n+1}) et où σ est l'automorphisme exceptionnel de G dont le groupe des points fixes est le groupe de Suzuki (resp. le groupe de Ree de type G_2). Les méthodes utilisées sont celles données dans §1.2.1, en particulier la méthode 1.2.1.

2.1 Le type B_2

Soit n est un entier positif. On pose $q = 2^{2n+1}$, $\theta = 2^n$. On note $\mathrm{G} = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_q)$ et σ l'automorphisme d'ordre 2 de G dont l'ensemble des points fixes est $\mathrm{Sz}(q)$. On pose $\widetilde{\mathrm{G}} = \mathrm{G} \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle$. Les classes de conjugaison de G et de $\mathrm{Sz}(q)$ sont rappelées dans l'annexe A. On utilise les notations de §1.7 et de l'annexe A. Soit G un groupe et H un sous-groupe de G ; on rappelle que deux classes c_1 et c_2 de H *fusionnent* dans G si c_1 et c_2 sont des sous-ensembles d'une même classe de G. Ainsi, déterminer la *fusion* des classes de H dans G signifie décrire « la répartition » des classes de H dans celles de G.

2.1.1 Fusion des classes de $\mathrm{Sz}(q)$ dans $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_q)$

Comme dans l'annexe A, on note π_0, π_1 et π_2 des éléments de G d'ordre respectivement $(q-1)$, $(q+2\theta+1)$ et $(q-2\theta+1)$. On rappelle que E_0, E_1 et E_2 désignent respectivement l'ensemble des classes non nulles modulo la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/(q+2\theta+1)\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/(q-2\theta+1)\mathbb{Z}$. On pose :

$$E = \{\pi_0^i,\, \pi_1^j,\, \pi_2^k \mid i \in E_0,\, j \in E_1,\, k \in E_2\}.$$

Lemme 2.1.1 *Dans la table 2.2, on donne la fusion des classes de* $\mathrm{Sz}(q)$ *dans* G.

Preuve — L'ensemble E est un système de représentants des classes semi-simples non triviales de $\mathrm{Sz}(q)$. En utilisant la table A.1, on constate que ces éléments ne sont pas conjugués dans G. De plus, étant donné que $x_a\, \rho_0\, x_a^{-1} = \rho_0^{-1}$, on en déduit que

Classe	Représentant	Nombre
1	1	1
A_{32}	$x_{a+b}\, x_{2a+b}$	1
A_{41}	$x_a\, x_b$	1
A_{42}	$x_a\, x_b\, x_{2a+b}$	1
$B_1(i,(2\theta-1)i)$	π_0^i	$\frac{1}{2}(q-2)$
$B_5((q-2\theta+1)j)$	π_1^j	$\frac{1}{4}(q+2\theta)$
$B_5((q+2\theta+1)k)$	π_2^k	$\frac{1}{4}(q-2\theta)$

TAB. 2.1 – Classes σ-stables de G.

Représentant	Classe dans G
1	1
σ_0	A_{32}
ρ_0	A_{42}
ρ_0^{-1}	A_{42}
π_0^i	$B_1(i,(2\theta-1)i)$
π_1^j	$B_5((q-2\theta+1)j)$
π_2^k	$B_5((q+2\theta+1)k)$

TAB. 2.2 – Classes de $\mathrm{Sz}(q)$.

les deux classes ayant pour représentants ρ_0 et ρ_0^{-1} se « recollent » dans G. On peut supposer sans perte de généralité que $\pi_0 = h(\gamma, \gamma^{2\theta-1})$. Quitte à remplacer τ par une puissance première avec q^2+1, on peut supposer que éléments π_1 et π_2 sont respectivement dans $B_5(q-2\theta+1)$ et $B_5(q+2\theta+1)$.

□

2.1.2 Classes σ-stables de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_q)$

Proposition 2.1.1 *Le groupe* G *possède* $q+3$ *classes* σ*-stables. On donne dans la table 2.1 un système de représentants de ces classes.*

Preuve — Le groupe de Suzuki possède $q+3$ classes de conjugaison. En utilisant la correspondance de Shintani (cf. Prop.1.5.2), on en déduit que $\widetilde{G}$ a $q+3$ classes extérieures. Ainsi, la proposition 1.2.2 montre que G a $q+3$ classes σ-stables. De plus, les éléments de E ne sont pas conjugués dans G (cf. Lemme 2.1.1). C'est donc un système de représentants de $|E| = q-1$ classes σ-stables de G. Les quatre classes unipotentes A_1, A_{32}, A_{41} et A_{42} de G (cf. annexe A) sont σ-stables. On vient donc de trouver $q+3$ classes σ-stables distinctes de G. Ainsi, par cardinalité, on a déterminé toutes les classes σ-stables de G.

□

Remarque 2.1.1 *Le fait que* G *possède une classe* σ*-stable sans élément* σ*-stable ne contredit pas le théorème de Lang. En effet, soit* C *la classe de conjugaison de* **G** *qui contient* A_{41}*. Alors* C *est* F*-stable. Le théorème de Lang affirme uniquement que* C *a au moins un élément* F*-stable. Il suit que* $C^{F^2} = A_{41} \cup A_{42}$ *possède un élément* F*-stable. C'est effectivement le cas : l'élément* $\rho_0 \in C^{F^2} \cap \mathrm{Sz}(q)$*. Cependant, le théorème de Lang ne dit pas que les classes* A_{41} *et* A_{42} *ont des éléments* F*-stables. Dans le lemme 2.1.1, on a prouvé que* $\mathrm{Cl}(\rho_0) \subseteq A_{42}$ *et* $\mathrm{Cl}(\rho_0) \subseteq A_{42}$*. Ainsi* $C^F = \mathrm{Cl}(\rho_0) \cup \mathrm{Cl}(\rho_0^{-1}) \subseteq A_{42}$ *; il suit que* A_{41} *n'a aucun éléments* F*-stables.*

Par abus de langage, il arrive dans la suite que l'on confonde une classe de conjugaison avec son représentant et que l'on parle de classe de type π_0, π_1 et π_2

pour parler des classes de conjugaison ayant pour représentants les éléments de E.

2.1.3 Classes extérieures avec une partie 2-régulière non triviale

La proposition 2.1.1 montre que les classes σ-stables d'ordre impair de $\widetilde{\mathrm{G}}$ sont paramétrées par des éléments σ-stables. On est dans le cadre de la remarque 1.2.1.

Théorème 2.1.1 *Les classes extérieures de $\widetilde{\mathrm{G}}$ dont la partie 2-régulière est non triviale ont pour système de représentants $\{(\pi,\sigma) \mid \pi \in E\}$. De plus, pour tout $i \in E_0$, $j \in E_1$ et $k \in E_2$, on a :*

$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\pi_0^i,\sigma) = \langle\, \pi_0 \,\rangle \times \langle\, \sigma \,\rangle, \quad \mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\pi_1^j,\sigma) = \langle\, \pi_1 \,\rangle \times \langle\, \sigma \,\rangle \quad \textit{et } \mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\pi_2^k,\sigma) = \langle\, \pi_2 \,\rangle \times \langle\, \sigma \,\rangle.$$

Preuve — On applique la méthode 1.2.1. Soit $x \in E$. On étudie les classes 2-unipotentes de $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(x)$. Or comme x est σ-stable, il suit que :

$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(x) = \mathrm{C}_{\mathrm{G}}(x) \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle.$$

De plus, le centralisateur de $\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(x)$ est d'ordre impair, donc $\nu_2(|\,\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(x)|) = 2$ ($\nu_2(m)$ désigne la valuation diadique de l'entier m). Ainsi $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(x)$ possède une unique classe de conjugaison d'élément d'ordre 2 (car tout élément d'ordre 2 de $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(x)$ engendre un 2-Sylow). Choisissons $(1,\sigma)$ comme représentant de l'unique classe de $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(x)$ d'éléments d'ordre 2. Ainsi, les éléments (x,σ) (avec $x \in E$) paramètrent des classes extérieures distinctes. On obtient par ce procédé toutes les classes extérieures de $\widetilde{G}$ ayant une partie 2-régulière non triviale.

De plus, le groupe $\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(x)$ est abélien et $\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(x)^\sigma \cap \langle\,(1,\sigma)\,\rangle = \{1\}$. On déduit ainsi du lemme 1.2.2 que :

$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(x,\sigma) = \mathrm{C}_{\mathrm{G}}(x)^\sigma \times \langle\,(1,\sigma)\,\rangle.$$

Or on a $\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(x)^\sigma = \mathrm{C}_{\mathrm{Sz}(q)}(x)$. Dans la proposition 16 de [31], il est prouvé que pour pour tout $i \in E_0$, $j \in E_1$ et $k \in E_2$, on a $\mathrm{C}_{\mathrm{Sz}(q)}(\pi_0^i) = \langle\, \pi_0 \,\rangle$, $\mathrm{C}_{\mathrm{Sz}(q)}(\pi_1^j) = \langle\, \pi_1 \,\rangle$ et $\mathrm{C}_{\mathrm{Sz}(q)}(\pi_2^k) = \langle\, \pi_2 \,\rangle$, ce qui achève la démonstration.

□

2.1.4 Classes extérieures 2-unipotentes de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_q) \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle$

On vient de déterminer $(q-1)$ classes extérieures correspondant aux classes de partie 2-régulières non triviale. Il reste à obtenir les classes extérieures extérieures 2-unipotentes de $\widetilde{G}$. Par la proposition 1.2.2, on sait qu'il manque 4 classes extérieures. Ainsi, il suffit de trouver 4 éléments d'ordre une puissance de 2 qui ne sont pas deux à deux conjugués.

Les ordres de $(1,\sigma)$, (x_a,σ), (x_{a+b},σ) et $(x_a x_{a+b},\sigma)$ sont respectivement 2, 8, 4 et 8. Il suffit donc de montrer que (x_a,σ) et $(x_a x_{a+b},\sigma)$ ne sont pas conjugués. Posons $w_0 = (w_a\, w_b)^2 \in W$ et $n_0 = n_{w_0}$. On a $\mathrm{Sz}(q) \cap \langle\, n_w \mid w \in W \,\rangle = \{1, n_0\}$ et $U^-_{\omega_0} = U$.

Lemme 2.1.2 *Soient u_1 et u_2 deux éléments de U, alors (u_1,σ) et (u_2,σ) sont conjugués dans $\widetilde{\mathrm{G}}$ si et seulement s'ils le sont dans $\widetilde{B}$.*

Preuve — Supposons que (u_1, σ) et (u_2, σ) sont conjugués dans $\widetilde{\mathrm{G}}$. Par 1.2.1, ces deux éléments sont conjugués par $g \in \mathrm{G}$, ie $(u_2, \sigma) = (g, 1)(u_1, \sigma)(g, 1)^{-1} = (gu_1\sigma(g^{-1}), \sigma)$, on a donc $u_2 = gu_1\sigma(g^{-1})$, où encore $u_2\sigma(g) = gu_1$.
Par 1.19, g possède une unique décomposition de Bruhat $uhn_wu_w^-$, avec $u \in U$, $h \in H$, $w \in W$ et $u_w^- \in U_w^-$. En utilisant les relations de Chevalley, il existe $x' \in U_w^+$ et $u' \in U_w^-$ tels que $u_w^-u_1 = x'u'$. De plus, il existe $x_w \in U$ tel que $x_wn_w = n_wx'$. Comme $U \lhd B$, il existe $x'_w \in U$ tel que $hx_w = x'_wh$. On obtient finalement :

$$u_2\sigma(u)\sigma(h)\sigma(n_w)\sigma(u_w^-) = uhn_wu_w^-u_1 = ux'_whn_wu'.$$

Par unicité de la décomposition de Bruhat, on en déduit que $\sigma(n_w) = n_w$. Ainsi :

$$n_w \in \langle\, n_w \mid w \in W \,\rangle \cap \mathrm{Sz}(q) = \{1, n_0\}.$$

- Si $w = w_0$, alors $U_w^- = U$ et $u_w^-u_1 \in U_w^-$. Par unicité de la décomposition de Bruhat, on déduit que $u_2\sigma(u) = u$ et $\sigma(u_\omega^-)u_2 = u_\omega^-$. Ainsi (u_1, σ) et (u_2, σ) sont conjugués dans $\widetilde{U}$ à $(1, \sigma)$. Donc par transitivité, (u_1, σ) et (u_2, σ) sont conjugués dans $\widetilde{U}$.
- Si $w = 1$, alors $u_w^- = 1$ et $g = uh \in B$.

Finalement, (u_1, σ) et (u_2, σ) sont conjugués dans $\widetilde{B}$.

□

Proposition 2.1.2 *Les éléments (x_a, σ) et (x_ax_{a+b}, σ) ne sont pas conjugués dans* $\widetilde{\mathrm{G}}$.

Preuve — En appliquant le lemme 2.1.2, il suffit de prouver que (x_a, σ) et (x_ax_{a+b}, σ) ne sont pas conjugués dans $\widetilde{B}$, donc qu'ils ne sont pas conjugués par un élément de B (cf. lemme 1.2.1). Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe $b = uh \in B$, tel que $(b, 1)(x_a, \sigma) = (x_ax_{a+b}, \sigma)(b, 1)$, c'est à dire, $bx_a = x_ax_{a+b}\sigma(b)$. Soient z_1, $z_2 \in \mathbb{F}_q$ tels que $h = h(z_1, z_2)$. Posons $z_0 = z_1/z_2$. Alors $uhx_a = ux_a(z_0)h$. De plus :

$$\begin{array}{rcl} ux_a(z_0) & = & x_a(t_a)x_b(t_b)x_{a+b}(t_{a+b})x_{2a+b}(t_{2a+b})x_a(z_0) \\ & = & x_a(t_a + z_0)x_b(t_b)x_{a+b}(t_{a+b} + z_0t_b)x_{2a+b}(t_{2a+b} + z_0^2t_b). \\ x_ax_{a+b}\sigma(u) & = & x_a(1 + t_b^\theta)x_b(t_a^{2\theta})x_{a+b}(1 + t_{2a+b}^\theta + t_a^{2\theta}t_b^\theta) \\ & & x_{2a+b}(t_{a+b}^{2\theta} + t_a^{2\theta}t_b^{2\theta}) \end{array}$$

Par unicité de l'écriture des éléments de B, on en déduit que $\sigma(h) = h$ et :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t_a + z_0 & = & t_b^\theta + 1 \\ t_a^{2\theta} & = & t_b \\ z_0t_b + t_{a+b} & = & t_a^{2\theta}t_b^\theta + t_{2a+b}^\theta + 1 \\ z_0^2t_b + t_{2a+b} & = & t_a^{2\theta}t_b^{2\theta} + t_{a+b}^{2\theta} \end{array} \right.$$

Des deux premières relations, on tire tout d'abord que $z_0 = 1$, et $z_1 = z_2$. Or $\sigma(h) = h$, donc $z_1 = z_2 = 1$. Il suit que $h = 1$. On élève la troisième relation à la puissance θ. On déduit de la quatrième relation que $t_b^\theta + t_b + 1 = 0$. Elevons à la puissance 2θ cette dernière relation. On obtient $t_b^{2\theta} + t_b + 1 = 0$. D'où l'on déduit que $t_b^\theta = t_b^{2\theta}$. Ainsi, t_b^θ est racine du polynôme $X^2 + X$. Donc t_b^θ vaut zéro ou un, ce qui contredit dans les deux cas la relation $t_b^\theta + t_b + 1 = 0$. Finalement (x_a, σ) et (x_ax_{a+b}, σ) ne sont pas conjugués dans $\widetilde{\mathrm{G}}$.

□

On consacre la fin de ce paragraphe au calcul de l'ordre des centralistateurs de ces éléments.

Proposition 2.1.3 *On a :*

$$\begin{array}{lcl} |\,\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(1,\sigma)| & = & 2q^2(q-1)(q^2+1) \\ |\,\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(x_a,\sigma)| & = & 4q \\ |\,\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(x_{a+b},\sigma)| & = & 2q^2 \\ |\,\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(x_a x_{a+b},\sigma)| & = & 4q. \end{array}$$

Preuve — Par le corollaire 1.2.1, il suffit calculer $|\,\mathrm{C}_{\mathrm{G},\sigma}(x)|$ pour chacun des éléments 1, x_a, x_{a+b} et $x_a x_{a+b}$. Remarquons pour commencer que pour x_a, x_{a+b} et $x_a x_{a+b}$, en utilisant la décomposition de Bruhat, et avec un argument similaire à celui utilisé dans la preuve du lemme 2.1.2, on démontre que $\mathrm{C}_{\mathrm{G},\sigma}(x) \subseteq B$. Puis en faisant un calcul similaire a celui de la preuve de la proposition 2.1.2, on montre que $\mathrm{C}_{\mathrm{G},\sigma}(x) \subseteq U$.

- *Calcul de* $|\,\mathrm{C}_{\mathrm{G},\sigma}(x_a)|$ *et de* $|\,\mathrm{C}_{\mathrm{G},\sigma}(x_a x_{a+b})|$. Les relations de Chevalley conduisent dans ces deux cas au système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} t_a & = & t_b^\theta \\ t_{2a+b}^\theta + t_a^{2\theta} t_b^\theta & = & t_b + t_{a+b} \\ t_{a+b}^{2\theta} + t_a^{2\theta} t_b^{2\theta} & = & t_b + t_{2a+b} \end{array}\right.$$

  Ces relations entrainent que t_b vaut zéro ou un. Dans les deux cas, le nombre de solutions est :

$$|\{(t_{2a+b}, t_{a+b}) \mid t_{2a+b}^\theta = t_{a+b}\}| = q.$$

  Finalement, $|\,\mathrm{C}_{\mathrm{G},\sigma}(x_a)| = |\,\mathrm{C}_{\mathrm{G},\sigma}(x_a x_{a+b})| = 2q$.
- *Calcul de* $|\,\mathrm{C}_{\mathrm{G},\sigma}(x_{a+b})|$. On cherche $u \in U$ solution de $u x_{a+b} = x_{a+b}\sigma(u)$. Comme x_{a+b} est central dans U, on en déduit que :

$$\mathrm{C}_{\mathrm{G},\sigma}(x_{a+b}) = \{u \in U \mid \sigma(u) = u\} = U \cap \mathrm{Sz}(q).$$

  Dans [27], Ono démontre que $|U \cap \mathrm{Sz}(q)| = q^2$. On en déduit donc que :

$$\mathrm{C}_{\mathrm{G},\sigma}(x_{a+b}) = q^2.$$

- *Calcul de* $|\,\mathrm{C}_{\mathrm{G},\sigma}(1)|$. Comme $\mathrm{C}_{\mathrm{G},\sigma}(1) = \mathrm{Sz}(q)$ on en déduit que :

$$|\,\mathrm{C}_{\mathrm{G},\sigma}(1)| = q^2(q-1)(q^2+1).$$

□

2.1.5 Classes extérieures de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_q) \rtimes \langle\,\sigma\,\rangle$

Récapitulons les résultats obtenus dans les paragraphes précédents.

Théorème 2.1.2 *On donne dans la table 2.3 un paramétrage des classes extérieures de* $\mathrm{G} \rtimes \langle\,\sigma\,\rangle$.

Classe	Représentant		Nombre	Centralisateur	Cardinal
U_1	$(1, \sigma)$		1	$\mathrm{Sz} \times \langle \sigma \rangle$	$2q^2(q-1)(q^2+1)$
U_2	(x_{a+b}, σ)		1		$2q^2$
U_3	(x_a, σ)		1		$4q$
U_4	$(x_a\, x_{a+b}, \sigma)$		1		$4q$
$A_0(i)$	(π_0^i, σ)	$i \in E_0$	$\frac{1}{2}(q-2)$	$A_0 \times \langle \sigma \rangle$	$2(q-1)$
$A_1(j)$	(π_1^j, σ)	$j \in E_1$	$\frac{1}{4}(q+2\theta)$	$A_1 \times \langle \sigma \rangle$	$2(q+2\theta+1)$
$A_2(k)$	(π_2^k, σ)	$k \in E_2$	$\frac{1}{4}(q-2\theta)$	$A_2 \times \langle \sigma \rangle$	$2(q-2\theta+1)$

TAB. 2.3 – Classes extérieures de $\mathrm{Sp}(4, q) \rtimes \langle \sigma \rangle$

2.2 Le type G_2

Soit n est un entier positif, on pose $q = 3^{2n+1}$, $\theta = 3^n$. On note $\mathrm{G} = \mathrm{G}_2(q)$ et $\widetilde{\mathrm{G}} = \mathrm{G} \rtimes \langle \sigma \rangle$, où σ l'automorphisme d'ordre 2 de G dont l'ensemble des points fixes est $\mathrm{R}(q)$. Les classes de conjugaison de G et de $\mathrm{R}(q)$ sont données dans l'annexe B. On utilise dans ce paragraphe les notations de §1.8 et de l'annexe B.

2.2.1 Les classes de $\mathrm{R}(q)$ et leur répartition dans celles $\mathrm{G}_2(q)$

Les classes de G sont paramétrées soit à l'aide de générateurs de Chevalley, soit à partir de tores à coefficients dans une extension de $\mathbb{F}_q$ (cf. Prop. 1.5.1). Le groupe de Ree de paramètre q vérifie les conditions du groupe étudié par Ward dans [32]. Il possède donc $q+8$ classes de conjugaison. Cependant, la description donnée dans [32] ne permet pas de donner la fusion des classes de $\mathrm{R}(q)$ dans G. Pour l'obtenir, on se propose de décrire les classes de $\mathrm{R}(q)$ avec un paramétrage compatible avec celle de G. Hormis une classe, on va voir que les parties 2-régulières des classes extérieures de $\widetilde{\mathrm{G}}$ ont des représentants dans $\mathrm{R}(q)$.

Classes semi-simples de $\mathrm{R}(q)$

En utilisant la proposition 1.5.1, on va paramétrer les classes semi-simples de $\mathrm{R}(q)$. Commençons par déterminer des représentants (pour l'action de $\mathbf{G}^F$ par conjugaison) des tores maximaux de $\mathbf{G}^F$. Le groupe W a quatres F-classes de conjugaison ayant pour représentant 1, w_a, $w_aw_bw_a$ et $w_aw_bw_aw_bw_a$. On note C_W cet ensemble.

Proposition 2.2.1 *On a :*

$$\begin{array}{ll} T_1^F & \cong \mathbf{H}^{[1]} = \{\, h(z^{3\theta+1}, z, z^{-(3\theta+2)}) \mid z^{q-1} = 1 \,\}, \\ T_{w_a w_b w_a}^F & \cong \mathbf{H}^{[w_a w_b w_a]} = \{\, h(z, \epsilon z^{-(3\theta+1)/2}, \epsilon z^{(3\theta-1)/2}) \mid z^{(q+1)/2} = 1,\ \epsilon = \pm 1 \,\}, \\ T_{w_a}^F & \cong \mathbf{H}^{[w_a]} = \{\, h(z, z^{1-3\theta}, z^{3\theta-2}) \mid z^{q-3\theta+1} = 1 \,\}, \\ T_{w_a w_b w_a w_b w_a}^F & \cong \mathbf{H}^{[w_a w_b w_a w_b w_a]} = \{\, h(z^{1+3\theta}, z, z^{-(3\theta+2)}) \mid z^{q+3\theta+1} = 1 \,\}. \end{array}$$

Preuve — On calcule $\mathbf{H}^{[w]}$, où $w \in C_W$. Soit $h(z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{H}$. On a $F(h) = h$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{lll} z_1 & = & (z_2 z_3^{-1})^\theta \\ z_2 & = & (z_1 z_2^{-1})^\theta \\ z_3 & = & (z_3 z_1^{-1})^\theta \end{array} \right.$$

Supposons que z_1, z_2 et z_3 sont solutions du système. Alors en utilisant le fait que $z_3 = z_1^{-1} z_2^{-1}$ et en faisant le quotient des deux premières lignes on trouve que $z_1 = z_2^{3\theta+1}$, ce qui entraine que $z_2^{q-1} = 1$. Réciproquement, on vérifie que si $z^{q-1} = 1$ alors $(z^{3\theta+1}, z, z^{-(3\theta+2)})$ est bien solution du système.

On a :

$$w_a w_b w_a h(z_1, z_2, z_3)(w_a w_b w_a)^{-1} = h(z_1, z_3, z_2).$$

Ainsi $F(h(z_1, z_2, z_3)) = h(z_1, z_3, z_2)$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{lll} z_1 & = & (z_2 z_3^{-1})^\theta \\ z_3 & = & (z_1 z_2^{-1})^\theta \\ z_2 & = & (z_3 z_1^{-1})^\theta \end{array} \right.$$

On suppose que z_1, z_2 et z_3 sont solutions du système. Avec la condition $z_3 = z_1^{-1} z_2^{-1}$ le système est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{lll} z_2^{2\theta} & = & z_1^{1-\theta} \\ z_2^{\theta+1} & = & z_1^{-2\theta} \end{array} \right.$$

Or $z_1 z_2^2 = z_1^{-3\theta}$ d'où $z_2 = \pm z_1^{(-3\theta-1)/2}$. Soit $\epsilon = \pm 1$, si $z_2 = \epsilon z_1^{-(3\theta+1)/2}$ alors $z_3 = \epsilon z_1^{(3\theta-1)/2}$.
De plus :

$$z_1^{-2\theta} = (\epsilon \pm z_1^{(-3\theta-1)/2})^{1+\theta} = z_1^{-(q+1+4.\theta)/2}), \text{ ie } z_1^{-(q+1)/2} = 1.$$

On vérifie sans difficulté que réciproquement, si $z^{-(q+1)/2} = 1$ alors $(z, \epsilon z^{-(3\theta+1)/2}, \epsilon z^{(3\theta-1)/2})$ est bien solution du système.

On a :

$$w_a h(z_1, z_2, z_3) w_a^{-1} = h(z_3^{-1}, z_2^{-1}, z_1^{-1}).$$

Donc $F(h(z_1, z_2, z_3)) = h(z_3^{-1}, z_2^{-1}, z_1^{-1})$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{lll} z_3^{-1} & = & (z_2 z_3^{-1})^\theta \\ z_2^{-1} & = & (z_1 z_2^{-1})^\theta \\ z_1^{-1} & = & (z_3 z_1^{-1})^\theta \end{array} \right.$$

On procède comme précédemment et on trouve que les solutions de ce système sont :

$$\{\,(z, z^{1-3\theta}, z^{3\theta-2}) \in k^3 \mid z^{q-3\theta+1} = 1\,\}.$$

On a :

$$w_a w_b w_a w_b w_a h(z_1, z_2, z_3)(w_a w_b w_a w_b w_a)^{-1} = h(z_2^{-1}, z_1^{-1}, z_3^{-1}).$$

On trouve que $F(h(z_1, z_2, z_3)) = h(z_2^{-1}, z_1^{-1}, z_3^{-1})$ si et seulement si (z_1, z_2, z_3) appartient à l'ensemble :

$$\{\,(z^{1+3\theta}, z, z^{-(3\theta+2)}) \in k^3 \mid z^{q+3\theta+1} = 1\,\}.$$

La proposition 1.5.1 permet de conclure.

□

De plus, on a le résultat (cf. [5]) :

Proposition 2.2.2 *Soit* $h(z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{H}$. *Soit* χ *le caractère de* $\mathcal{P}$ *tel que* $\chi(\xi_i) = z_i$ *alors*

$$\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(h(z_1,\, z_2,\, z_3)) = \langle\, \mathbf{H},\, \mathbf{X}_r \mid r \in \Sigma,\, \chi(r) = 1 \rangle.$$

Un élément semi-simple $s \in \mathbf{G}$ est dit *régulier* si $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(s)$ est un tore maximal de $\mathbf{G}$. Soit $s \in \mathbf{G}^F$ un élément semi-simple régulier. On dit que s est de type w si s est conjugué à un élément de T_w^F. On remarque que w est unique à F-conjugaison près. Une classe de $\mathrm{R}(q)$ est dite de type w si elle a un représentant type w.

Proposition 2.2.3 *Les classes semi-simples de* $\mathrm{R}(q)$ *peuvent se décrire de la façon suivante :*

- $\frac{1}{2}(q-3)$ *classes semi-simples régulières de type* 1.
- $\frac{1}{6}(q-3)$ *classes semi-simples régulières de type* $w_a w_b w_a$.
- $\frac{1}{6}(q-3\theta)$ *classes semi-simples régulières de type* w_a.
- $\frac{1}{6}(q+3\theta)$ *classes semi-simples régulières de type* $w_a w_b w_a w_b w_a$.
- *La classe de l'identité.*
- *La classe ayant pour représentant l'élément* $J = h(1, -1, -1)$.

Preuve — Soit $w \in C_W$. Soit $g \in \mathrm{R}(q)$ un élément semi-simple régulier de type w. Comme g est semi-simple, il existe un tore maximal $\mathbf{T}$ de $\mathbf{G}$ contenant g tel que $F(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$. Comme g est régulier, il suit que $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(g) = \mathbf{T}$. Donc $\mathbf{T}$ est l'unique tore maximal de $\mathbf{G}$ contenant g. De plus $\mathbf{T}$ et T_w sont conjugués par un élément de $\mathrm{R}(q)$. Ainsi, g est conjugué dans $\mathrm{R}(q)$ à un unique élément de T_w^F. De plus, deux éléments de T_w^F sont conjugués dans $\mathrm{R}(q)$ si et seulement si ils le sont dans $\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(T_w)^F$. En effet, soient $h, h' \in T_w^F$ et $g \in \mathrm{R}(q)$ tels que $h' = ghg^{-1}$. Alors $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(h') = g\,\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(h)g^{-1}$, *ie* $T_w = gT_wg^{-1}$. Il suit que $g \in \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(T_w)$. Comme $g \in \mathrm{R}(q)$, alors $g \in \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(T_w)^F$. Supposons maintenant qu'il existe $g, g' \in \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(T_w)^F$ et $h \in T_w^F$ tels que $ghg^{-1} = g'hg'^{-1}$. Alors $g'^{-1}g \in \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(h) = T_w$. Comme $g, g' \in \mathrm{R}(q)$, on en déduit que $g = g'T_w^F$. Il suit que deux éléments de T_w^F sont conjugués dans $\mathrm{R}(q)$

si et seulement si ils appartiennent à la même orbite pour l'action de $\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(T_w)^F/T_w^F$ sur T_w^F. On a $\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(T_w)^F/T_w^F \cong \mathrm{C}_{W,F}(w)$ (cf. [16]§4.3.4) et $T_w^F \cong \mathbf{H}^{[w]}$ (in $\mathbf{G}$). Le groupe $\mathrm{C}_{W,F}(w)$ agit sur $\mathbf{H}^{[w]}$; dans [16] §4.3.4, il est prouvé que deux éléments de T_w^F sont dans la même $\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(T_w)^F/T_w^F$-orbite si et seulement si leurs conjugués dans $\mathbf{H}^{[w]}$ sont dans la même $\mathrm{C}_{W,F}(w)$-orbite. Or, on a :

$$\begin{array}{lcl} C_{W,\sigma}(1) & = & \{1, w_aw_bw_aw_bw_aw_b\} \\ C_{W,\sigma}(w_a) & = & \{1,\, w_aw_b,\, w_aw_bw_aw_b,\, w_aw_bw_aw_bw_aw_b,\, w_bw_aw_bw_a,\, w_bw_a\} \\ C_{W,\sigma}(w_aw_bw_a) & = & C_{W,\sigma}(w_a) \\ C_{W,\sigma}(w_aw_bw_aw_bw_a) & = & C_{W,\sigma}(w_a) \end{array}$$

La proposition 2.2.1 donne alors le résultat. Il y a deux classes semi-simples non régulières dans $\mathrm{R}(q)$, ayant pour représentants 1 et $J = h(1,-1,-1)$.

□

Classes unipotentes de $\mathrm{R}(q)$

On va exprimer des représentants des classes de conjugaison unipotentes de $\mathrm{R}(q)$ à l'aide des générateurs de Chevalley. Pour tout t, u, v de $\mathbb{F}_q$, on note :

$$\begin{array}{lcl} \alpha(t) & = & x_a(t^\theta)x_b(t)x_{a+b}(t^{\theta+1})x_{2a+b}(t^{2\theta+1}) \\ \beta(u) & = & x_{a+b}(u^\theta)x_{3a+b}(u) \\ \gamma(v) & = & x_{2a+b}(v^\theta)x_{3a+2b}(v) \end{array}$$

Dans [4] Prop. 13.6.4, on a :

Proposition 2.2.4 *Tout élément de $U^\sigma = \mathbf{U}^F$ s'écrit de manière unique sous la forme $\alpha(t)\beta(u)\gamma(v)$, avec $t,u,v \in \mathbb{F}_q$. De plus, on a les relations suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} \alpha(u)\alpha(v) & = & \alpha(u+v)\beta(-uv^{3\theta})\gamma(-u^2v^{3\theta}+uv^{3\theta+1}) \\ \beta(u)\alpha(v) & = & \alpha(v)\beta(u)\gamma(-uv) \\ \beta(u)\beta(v) & = & \beta(u+v) \\ \gamma(u)\alpha(v) & = & \alpha(v)\gamma(u) \\ \gamma(u)\beta(v) & = & \beta(v)\gamma(u) \\ \gamma(u)\gamma(v) & = & \gamma(u+v) \end{array}$$

On obtient alors les relations :

Lemme 2.2.1 *Soient $t,u,v \in \mathbb{F}_q$, alors on a :*

$$\begin{array}{rcl} \alpha(t)^{-1} & = & \alpha(-t)\beta(-t^{3\theta+1})\gamma(t^{3\theta+2}) \\ \beta(t)^{-1} & = & \beta(-t) \\ \gamma(t)^{-1} & = & \gamma(-t) \end{array}$$

De plus :

$$\alpha(v)^{-1}\alpha(u)\alpha(v) = \alpha(u)\beta(vu^{3\theta}-uv^{3\theta})\gamma(-v^2u^{3\theta}-u^2v^{3\theta}-uv^{3\theta+1}).$$

Preuve — Les deux premières relations sont des conséquences immédiates de la proposition 2.2.4. On montre la dernière relation par le calcul :

$$\begin{aligned}
\alpha(v)^{-1}\alpha(u)\alpha(v) &= \alpha(v)^{-1}\alpha(u+v)\beta(-uv^{3\theta})\gamma(-u^2v^{3\theta}+uv^{3\theta+1}) \\
&= \alpha(-v)\beta(-v^{3\theta+1})\gamma(v^{3\theta+2})\alpha(u+v)\beta(-uv^{3\theta})\gamma(-u^2v^{3\theta}+uv^{3\theta+1}) \\
&= \alpha(-v)\alpha(u+v)\beta(-uv^{3\theta}-v^{3\theta+1})\gamma(-u^2v^{3\theta}+uv^{3\theta+1}+v^{3\theta+2}+v^{3\theta+1}(u+v)) \\
&= \alpha(u)\beta(v(u+v)^{3\theta})\gamma(-v^2(u+v)^{3\theta}-v^{3\theta+2}) \\
&\quad \beta(-uv^{3\theta}-v^{3\theta+1})\gamma(-u^2v^{3\theta}+uv^{3\theta+1}+v^{3\theta+2}+v^{3\theta+1}(u+v)) \\
&= \alpha(u)\beta(-uv^{3\theta}-v^{3\theta+1}+v(u+v)^{3\theta}) \\
&\quad \gamma(-u^2v^{3\theta}+uv^{3\theta+1}+v^{3\theta+2}+v^{3\theta+1}(u+v)-v^2(u+v)^{3\theta}-v^{3\theta+2}) \\
&= \alpha(u)\beta(-uv^{3\theta}+vu^{3\theta})\gamma(-u^2v^{3\theta}-uv^{3\theta+1}-v^2u^{3\theta})
\end{aligned}$$

□

On a :

$$H^\sigma = \mathbf{H}^F = \{\ h(z^{3\theta+1}, z, z^{-(3\theta+2)}) \mid z^{q-1}=1\ \}, \quad \text{et} \quad B^\sigma = \mathbf{B}^F\mathbf{U}^F = B^\sigma U^\sigma.$$

De plus :

Lemme 2.2.2 *Deux éléments de U^σ sont conjugués dans $\mathrm{R}(q)$ si et seulement si ils le sont dans B^σ. De plus si $u \in U^\sigma$ alors $\mathrm{C}_{\mathrm{R}(q)}(u)$ est inclus dans B^σ.*

Preuve — C'est une conséquence immédiate de la décomposition de Bruhat, cf. (1.19).

□

On va donc déterminer les classes de conjugaison des éléments de U^σ dans B^σ. Le sous-groupe U^σ est distingué dans B^σ donc H^σ agit par automorphisme intérieur sur U^σ, plus pécisément on a :

Proposition 2.2.5 *Soient $u, v, w, z \in \mathbb{F}_q$. On pose $g(u,v,w) = \alpha(u)\beta(v)\gamma(w) \in U^\sigma$ et $h(z) = h(z^{3\theta+1}, z, z^{-(3\theta+2)}) \in H^\sigma$. Alors, on a :*

$$h(z)g(u,v,w)h(z)^{-1} = g(uz^{3\theta}, vz^{3\theta+3}, wz^{6\theta+3}).$$

Preuve —

$$h(z)\alpha(u)h(z)^{-1} = x_a(u^\theta z)x_b(uz^{3\theta})x_{a+b}(u^{\theta+1}z^{3\theta+1})x_{2a+b}(t^{2\theta+1}z^{3\theta+2}).$$

Si on pose $y = uz^{3\theta}$, on a :

$y^\theta = u^\theta z, \quad y^{\theta+1} = u^{\theta+1}z^{3\theta(\theta+1)} = u^{\theta+1}z^{1+3\theta}$ et $y^{2\theta+1} = u^{2\theta+1}z^{6\theta^2+3\theta} = u^{2\theta+1}z^{2+3\theta}$,

et on a bien $h(z)\alpha(u)h(z)^{-1} = \alpha(uz^{3\theta})$.

$$h(z)\beta(v)h(z)^{-1} = x_{a+b}(v^\theta z^{3\theta+1})x_b(vz^{3\theta+3}) = \beta(vz^{3\theta+3})$$

et

$$h(z)\gamma(w)h(z)^{-1} = x_{2a+b}(w^\theta z^{3\theta+2})x_b(vz^{6\theta+3}) = \gamma(vz^{6\theta+3}).$$

□

Lemme 2.2.3 *Supposons que $u \neq 0$. Alors tout élément de la forme $g(u,v,w)$ est conjugué par un unique élément de H^σ à un élément de la forme $g(1,v',w')$. En particulier, seule l'identité fixe la première composante de $g(u,v,w)$.*

Preuve — C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente, en appliquant à $z = u^{-\theta}$.

□

On est alors en mesure d'établir le résultat :

Proposition 2.2.6 *Soit $E = \{t^3 - t \mid t \in \mathbb{F}_q\}$, $\pi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q/E$ la projection canonique et $\xi \in \mathbb{F}_q$ tel que $\pi(\xi) = 1$. Les éléments de $\mathrm{R}(q)$ de la forme $\alpha(u)\beta(v)\gamma(w)$, avec $u \neq 0$, et $v, w \in \mathbb{F}_q$ se répartissent en trois classes de conjugaison paramétrées par :*

$$\alpha(1), \quad \alpha(1)\beta(\xi) \quad et \quad \alpha(1)\beta(-\xi).$$

En particulier l'élément $\alpha(1)\beta(v)\gamma(w)$ est conjugué à

$$\alpha(1)\beta(\pi(v)).$$

Preuve — Regardons à quelles classes de conjugaison de B^σ appartiennent les éléments de la forme $g(1,v,w)$. Etant donné qu'aucun élément non trivial de H^σ ne fixe la première composante de g, il suffit d'établir les classes de conjugaison de ces éléments dans U^σ. On remarque que l'on peut « négliger » la troisième composante, en effet, on a :

$$\beta(w)g(1,v,w)\beta(w)^{-1} = g(1,v,0).$$

On a :

$$\alpha(t)^{-1}\alpha(1)\alpha(t) = \alpha(1)\beta(t - t^{3\theta})\gamma(-t^2 - t^{3\theta} - t^{3\theta+1}).$$

On voit, quitte à appliquer une manipulation précédente, que l'élément $\alpha(1)\beta(v)$ est conjugué dans U^σ à :

$$\alpha(1)\beta(t - t^{3\theta} + v) \quad \forall t \in \mathbb{F}_q.$$

Soit φ un morphisme de $\mathbb{F}_q$ dans $\mathbb{F}_3$. Le corps $\mathbb{F}_q$ est un espace vectoriel de dimension $2n+1$ sur $\mathbb{F}_3$ en particulier, l'application φ peut être vue comme une application $\mathbb{F}_3$-linéaire entre $\mathbb{F}_q$ et $\mathbb{F}_3$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}_q$ d'indice 3. Notons π la projection canonique de $\mathbb{F}_q$ dans l'espace quotient $\mathbb{F}_q/\mathrm{Im}(\varphi)$. Soient x_1, x_2 et x_3 des représentants dans $\mathbb{F}_q$. En particulier :

$$\mathbb{F}_q = (x_1 + \mathrm{Im}(\varphi)) \sqcup (x_2 + \mathrm{Im}(\varphi)) \sqcup (x_3 + \mathrm{Im}(\varphi)).$$

Or π est $\mathbb{F}_3$-linéaire. On peut donc supposer que $x_1 = 0$ et que $x_3 = -x_2$.

Considérons les deux morphismes de $\mathbb{F}_q$ dans F_3 suivant :

$$\varphi_1(t) = t^3 - t$$

$$\varphi_2(t) = t - t^{3\theta}$$

En utilisant la discussion précédente, il existe ξ et ξ' deux éléments de $\mathbb{F}_q$ tels que :

$$\mathbb{F}_q = \mathrm{Im}(\phi_1) \sqcup (\xi + \mathrm{Im}(\varphi_1)) \sqcup (-\xi + \mathrm{Im}(\varphi_1))$$

$$\mathbb{F}_q = \mathrm{Im}(\phi_2) \sqcup (\xi' + \mathrm{Im}(\varphi_2)) \sqcup (-\xi' + \mathrm{Im}(\varphi_2))$$

Or on a $\mathrm{Im}(\varphi_1) = \mathrm{Im}(\varphi_2)$. En effet, si $y \in \mathrm{Im}(\varphi_2)$ alors il existe $t \in \mathbb{F}_q$ tel que :

$$y = t - t^{3\theta}.$$

Or :

$$t - t^{3\theta} = (t + t^3 + \ldots + t^\theta) - (t + t^3 + \ldots + t^\theta)^3.$$

Ainsi $y \in \mathrm{Im}(\varphi_1)$ (en posant $t' = -(t + t^3 + \ldots + t^\theta)$) donc :

$$\mathrm{Im}(\varphi_2) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi_1).$$

Ces deux ensembles dont égaux par cardinalité. Il suit que $\xi \notin \mathrm{Im}(\varphi_2)$ et on peut choisir $\xi' = \xi$.

□

Remarque 2.2.1 *Les trois classes de $R(q)$ paramétrées dans [32] par Y, YT and YT^{-1} sont les mêmes que les classes ayant ici pour représentants $\alpha(1)$, $\alpha(1)\beta(\xi)$ et $\alpha(1)\beta(-\xi)$. On ne sait cependant* a priori *pas explicitement identifier ces deux paramétrages.*

En récapitulant ce qui précède, on a :

Proposition 2.2.7 *Les classes unipotentes de $\mathrm{R}(q)$ ont pour représentant 1, $\gamma(1)$, $\beta(1)$, $\alpha(1)$, $\alpha(1)\beta(\xi)$, $\alpha(1)\beta(-\xi)$.*

Preuve — Ce résultat est une conséquence immédiate des propositions 2.2.5 et 2.2.6.

□

Classes de conjugaison de $\mathrm{R}(q)$

On est maintenant en mesure de donner une description des classes de conjugaison du groupe de Ree de paramètre q.

Théorème 2.2.1 *Le groupe $\mathrm{R}(q)$ possède $(q+8)$ classes de conjugaison. Les classes non triviales ont pour représentants :*

- *Les représentants des classes semi-simples régulières de type w (avec $w \in \{1, w_a, w_aw_bw_a, w_aw_bw_aw_bw_a\}$) de centralisteur d'ordre $|T_w^F|$.*
- *L'élément $J = h(1,-1,-1)$ de centralisateur d'ordre $q(q-1)(q+1)$.*
- *L'élément $\gamma(1)$ de centralisateur U^F d'ordre q^3.*
- *les éléments $\beta(1)$ et $\beta(-1)$ qui ont pour centralisateur (d'ordre $2q^2$) le groupe :*

$$\langle\, J \,\rangle \langle\, \beta(t),\, \gamma(u) \mid t, u \in \mathbb{F}_q \,\rangle.$$

- *Les éléments $\alpha(1)$, $\alpha(1)\beta(\xi)$ et $\alpha(1)\beta(-\xi)$ de centralisateur (d'ordre $3q$) respectif :*

$$\langle\, \alpha(1) \,\rangle \langle\, \gamma(t),\, t \in \mathbb{F}_q \,\rangle, \quad \langle\, \alpha(1)\beta(\xi) \,\rangle \langle\, \gamma(t),\, t \in \mathbb{F}_q \,\rangle \quad \textit{et} \quad \langle\, \alpha(1)\beta(-\xi) \,\rangle \langle\, \gamma(t),\, t \in \mathbb{F}_q \,\rangle.$$

- *Les éléments $\beta(1)J$ et $\beta(-1)J$ qui ont pour centralisateur (d'ordre $2q$) le groupe :*

$$\langle\, J\,\rangle\langle\, \beta(t),\ t \in \mathbb{F}_q\,\rangle.$$

Preuve — Dans [32], il est prouvé que $\mathrm{R}(q)$ possède $(q+8)$ classes de conjugaison. Il suffit donc d'obtenir $(q+8)$ éléments non conjugués deux à deux pour obtenir un système de représentants. La proposition 2.2.3 permet d'obtenir q éléments. Dans la proposition 2.2.7, on établit que les éléments $\gamma(1)$, $\beta(1)$, $\beta(-1)$, $\alpha(1)$, $\alpha(1)\beta(\xi)$ et $\alpha(1)\beta(-\xi)$ ne sont pas conjugués. Ils sont d'ordre impair. On trouve leur centralisteur en utilisant le lemme 2.2.2. Seul le centralisteur de $\beta(1)$ est d'ordre pair. On trouve une seule classe 2-unipotente dans $\mathrm{C}_{\mathrm{R}(q)}(\beta(1))$, ayant pour représentant J. Par la proposition 1.2.3, on obtient deux classes supplémentaires de $\mathrm{R}(q)$ ayant pour représentant $\beta(1)J$ et $\beta(-1)J$. Finalement, en utilisant [32], on obtient $|\,\mathrm{C}_{\mathrm{R}(q)}(J)| = q(q-1)(q+1)$.

□

Fusion des classes de $\mathrm{R}(q)$ dans $\mathrm{G}_2(q)$

On pose $h_0 = h(-1,1,-1)$. En utilisant le théorème 2.2.1 et les notations rappelées dans l'annexe B, on établit :

Théorème 2.2.2 *Les éléments $\beta(1)$ et $\beta(-1)$ sont conjugués dans G à $x_{a+b}(1)x_{3a+b}(1)$ et $\beta(1)J$ et $\beta(-1)J$ sont conjugués à $x_{a+b}(1)x_{3a+b}(1)J$. Les autres représentants des classes de conjugaison du groupe de $\mathrm{R}(q)$ ne sont pas conjugués dans G.*

Preuve — Si t est un représentant de type w, $w \in \{1, w_aw_bw_a, w_a, w_aw_bw_aw_bw_a\}$, alors t est conjugué dans $\mathbf{G}$ à un élément $h = h(z_1,z_2,z_3)$ de $\mathbf{H}^{[w]}$. En utilisant $\mathrm{C}_{W,F}(w)$, on calcule les conjugués dans $\mathbf{H}^{[w]}$ de $h(z_1,z_2,z_3)$. Plus précisément si $\omega = 1$ alors les conjugués de h dans $\mathbf{H}^{[1]}$ sont h et h^{-1}. Dans les autres cas, les conjugués de h dans $\mathbf{H}^{[w]}$ sont :

$$\{h,\ h^{-1},\ h(z_2,z_3,z_1),\ h(z_2^{-1},z_3^{-1},z_1^{-1}),\ h(z_3,z_1,z_2),\ h(z_3^{-1},z_1^{-1},z_2^{-1})\}.$$

En utilisant les classes de conjugaison de G (cf. annexe B), on voit d'une part, que les éléments de type 1 sont dans une classe de G de la forme $E_1(i,j)$, les éléments de type $w_aw_bw_a$ sont dans une classe de la forme $E_4(i,j)$ et que les éléments de type w_a et $w_aw_bw_aw_bw_a$ sont dans une classe de la forme $E_6(i)$. D'autre part, un calcul de congruence montre que les représentants de type w ne sont pas conjugués dans G.

Si $g \in \{1,\ J,\ \gamma(1)\}$, alors g est déjà un représentant choisi dans la table B.1. On a alors :

$$h_0)\beta(1)h_0^{-1} = \beta(-1) \quad \text{et} \quad h_0\beta(1)Jh_0^{-1} = \beta(-1)J.$$

Il reste les cas de $\alpha(1)$, $\alpha(1)\beta(\xi)$ et $\alpha(1)\beta(-\xi)$. Ces éléments sont des représentants des classes A_{51}, A_{52} et A_{53} de G (cf. Tab. B.1). En effet, un élément de la forme $x_a(1)x_b(1)x_{a+b}(u)x_{3a+b}(v)x_{2a+b}(w)x_{3a+2b}(t)$ est conjugué dans G à :

$$x_a(1)x_b(1)x_{3a+b}(\pi(u+v)).$$

On montre ce résultat en utilisant les deux manipulations suivantes :

- En conjugant g par $x_{a+b}(w)x_{3a+b}(t)$ on se ramène à un élément de la forme :
$$x_a(1)x_b(1)x_{a+b}(u)x_{3a+b}(v).$$
- En conjugant un élément de la forme $x_a(1)x_b(1)x_{a+b}(u)x_{3a+b}(v)$ par $x_a(t)x_b(t+u)$ et en appliquant l'étape précédente on se ramène à un élément de la forme :
$$x_a(1)x_b(1)x_{3a+b}(t^3-t+v+u).$$

Or :
$$\begin{aligned}\alpha(1) &= x_a(1)x_b(1)x_{a+b}(1)x_{2a+b}(1)\\ \alpha(1)\beta(\xi) &= x_a(1)x_b(1)x_{a+b}(1+\xi^\theta)x_{a+b}(\xi)x_{2a+b}(1)\\ \alpha(1)\beta(-\xi) &= x_a(1)x_b(1)x_{a+b}(1-\xi^\theta)x_{a+b}(-\xi)x_{2a+b}(1)\end{aligned}$$
De plus $\pi(\xi^\theta)=\pi(\xi)$, en effet on a :
$$\xi^\theta=(\xi+\xi^3+\ldots+\xi^{\theta/3})^3-(\xi+\xi^3+\ldots+\xi^{\theta/3})+\xi.$$
Ainsi on en déduit que :
$$\begin{aligned}\pi(\xi+\xi^\theta+1) &= 2\pi(\xi)+\pi(1)=\pi(1)-1\\ \pi(-\xi-\xi^\theta+1) &= -2\pi(\xi)+\pi(1)=\pi(1)+1\end{aligned}$$

Ce qui prouve que les trois éléments $\alpha(1)$, $\alpha(1)\beta(\xi)$ et $\alpha(1)\beta(-\xi)$ ne sont pas conjugués dans G et que leurs classes dans G dépend de la valeur de $\pi(1)$.

□

2.2.2 Tore maximal σ-stable de $\mathrm{G}_2(q)$ d'ordre $(q+1)^2$

Soit $x_0 \in \mathrm{G}$ d'ordre impair tel que $\sigma(x_0)=x_0$ et tel que $T'=\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(x_0)$ est un tore maximal d'ordre $(q+1)^2$. Comme x_0 est stable par σ, on a :
$$\mathrm{C}_{\mathrm{G}\rtimes\langle\sigma\rangle}(x_0)=T'\rtimes\langle\sigma\rangle.$$
Pour déterminer les classes extérieures de $\widetilde{G}$, on va appliquer la méthode 1.2.1. Pour cela, on doit trouver les classes extérieures 2-unipotentes de $\mathrm{C}_{\mathrm{G}\rtimes\langle\sigma\rangle}(x_0)$. Dans ce but, on décrit dans ce paragraphe explicitement T' et notamment l'action de σ sur ce tore. On va étudier $\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(J)$ et voir que l'on peut choisir x_0 tel que :
$$T'\subseteq \mathrm{C}_{\mathrm{G}}(J).$$

Etude de $\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(J)$

Par la proposition 2.2.2, on a :
$$\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(J)=\langle H, X_{\pm a+b}, X_{\pm 3a+b}\rangle.$$
Posons :
$$S_r=\langle X_r,\, X_{-r}\rangle.$$
Comme $S_r=\mathrm{Im}(\varphi_r)$, on en déduit que $S_r\cong SL(2,q)$.

Lemme 2.2.4 *On a :*

$$\begin{array}{rcl} h_{a+b}(t) & = & h(t^2, t^{-1}, t^{-1}) \\ h_{3a+b}(t) & = & h(1, t, t^{-1}) \end{array}$$

Preuve — On a $\xi_1 = a + b$, $\xi_2 = a$, et $\xi_3 = -(2a + b)$. Le calcul des constantes de structures donne :

$$\begin{array}{rclcrcl} A_{a+b,a+b} & = & 2 & \quad & A_{3a+b,a+b} & = & 0 \\ A_{a+b,a} & = & -1 & & A_{3a+b,a} & = & 1 \\ A_{a+b,-(2a+b)} & = & -1 & & A_{3a+b,-(2a+b)} & = & -1 \end{array}$$

Comme $h_r(t) = h(\chi_{r,t})$ avec $\chi_{r,t}(a) = t^{2(a,r)/(r,r)} = t^{A_{r,a}}$; cf. (1.14), on en déduit que :

$$\begin{array}{rclcrcl} \chi_{a+b,t}(\xi_1) & = & t^2 & \quad & \chi_{3a+b,t}(\xi_1) & = & 1 \\ \chi_{a+b,t}(\xi_2) & = & t^{-1} & & \chi_{3a+b,t}(\xi_2) & = & t \\ \chi_{a+b,t}(\xi_3) & = & t^{-1} & & \chi_{3a+b,t}(\xi_3) & = & t^{-1} \end{array}$$

□

Lemme 2.2.5 *Les groupes S_{a+b} et S_{3a+b} commutent.*

Preuve — Il suffit de vérifier que les générateurs commutent. Or S_r est engendré par les $x_r(t)$ et les $x_{-r}(t)$. Comme :

$$x_{-r}(t) = x_r(t^{-1})h_r(-t^{-1})n_r x_r(t^{-1}),$$

il suffit de vérifier que :

$$\begin{array}{rcl} x_r(t)x_s(u) & = & x_s(u)x_r(t) \\ x_r(t)h_s(u) & = & h_s(u)x_r(t) \\ x_r(t)n_s & = & n_s x_r(t) \\ h_r(t)n_s & = & n_s h_r(t) \\ h_r(t)h_s(u) & = & h_s(u)h_r(t) \\ n_r n_s & = & n_s n_r \end{array}$$

Par les relations de Chevalley (1.22), on a $x_{a+b}(t)x_{3a+b}(u) = x_{3a+b}(u)x_{a+b}(t)$. Or, en utilisant la relation (1.15), on a :

$$\chi_{a+b,t}(3a+b) = \chi_{a+b,t}(\xi_2 - \xi_3) = \chi_{a+b,t}(\xi_2)\chi_{a+b,t}(\xi_3)^{-1} = t^{-1}(t^{-1})^{-1} = 1$$

et :

$$\chi_{3a+b,t}(a+b) = \chi_{3a+b,t}(\xi_1) = 1.$$

Donc $h_r(t)$ et $x_s(u)$ commutent. Les racines r et s sont orthogonales donc $w_r(s) = s$ et $\eta_{r,s} = 1$. Ainsi, en utilisant la relation (1.16), on en déduit que n_r et $x_s(t)$ commutent. La relation (1.18) montre que n_r et $h_s(t)$ commutent. Enfin la relation (1.17) permet de conclure.

□

Soit $L = S_{a+b}S_{3a+b}$. Alors L est un sous groupe de $\mathrm{C_G}(J)$.

Donnons une description de L :

Soient $r \in \{a+b, 3a+b\}$ et $x, y, z, t \in \mathbb{F}_q$. On pose :

$$\varphi_r(x,y,z,t) = \varphi_r\left(\begin{bmatrix} x & y \\ t & z \end{bmatrix}\right) \quad \text{avec} \quad xz - yt = 1.$$

Lemme 2.2.6 *Soient $r \in \{a+b, 3a+b\}$ et $x, y, z, t \in \mathbb{F}_q$ tels que $xz - yt = 1$. Alors, on a :*

$$\begin{array}{lcl} \varphi_r(x,y,z,t) & = & x_r((x-1)t^{-1})x_{-r}(t)x_r((z-1)t^{-1}) \ \ \textit{si } t \neq 0. \\ \varphi_r(x,y,z,t) & = & x_{-r}((z-1)y^{-1})x_r(y)x_{-r}((x-1)y^{-1}) \ \ \textit{si } y \neq 0. \\ \varphi_r(x,0,x^{-1},0) & = & h_r(x) \end{array}$$

Preuve — On a les relations matricielles suivantes :
Si $t \neq 0$, alors :

$$\begin{bmatrix} x & y \\ t & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (x-1)t^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & (z-1)t^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si $y \neq 0$, alors on a :

$$\begin{bmatrix} x & y \\ t & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (z-1)y^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (x-1)y^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

En appliquant φ_r à ces égalités on en déduit le résultat.

□

Lemme 2.2.7 *Soient $\chi \in \mathcal{P}$ et $r, s \in \{a+b, 3a+b\}$, alors on a :*

$$\begin{array}{lcl} h(\chi)\varphi_r(x,y,z,t)h(\chi)^{-1} & = & \varphi_r(x, \chi(r)y, z, \chi(r)^{-1}t) \\ n_r\varphi_r(x,y,z,t)n_r^{-1} & = & \varphi_r(z, -t, x, -y) \\ n_s\varphi_r(x,y,z,t)n_s^{-1} & = & \varphi_r(x,y,z,t) \ \ \textit{si } s \neq r \end{array}$$

Preuve — On a :

- Si $t \neq 0$, alors $\varphi_r(x,y,z,t) = x_r((x-1)t^{-1})x_{-r}(t)x_r((z-1)t^{-1})$. Comme :

$$h(\chi)x_r(t)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t),$$

  on en déduit que :

$$\begin{array}{lcl} h(\chi)\varphi_r(x,y,z,t)h(\chi)^{-1} & = & x_r((x-1)(\chi(r)^{-1}t)^{-1})x_{-r}(\chi(r)^{-1}t)x_r((z-1)(\chi(r)^{-1}t)^{-1}) \\ & = & \varphi_r(x, \chi(r)y, z, \chi(r)^{-1}t). \end{array}$$

- Si $y \neq 0$, alors :

$$\begin{array}{lcl} h(\chi)\varphi_r(x,y,z,t)h(\chi)^{-1} & = & x_{-r}((z-1)(\chi(r)y)^{-1})x_r(\chi(r)y)x_{-r}((x-1)(\chi(r)^{-1}y)^{-1}) \\ & = & \varphi_r(x, \chi(r)y, z, \chi(r)^{-1}t). \end{array}$$

Enfin, on a :

– Si $t \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} n_r\varphi_r(x,y,z,t)n_r^{-1} &= x_{-r}((x-1)(-t)^{-1})x_r(-t)x_{-r}((z-1)(-t)^{-1}) \\ &= \varphi_r(z,-t,x,-y). \end{aligned}$$

– Si $y \neq 0$ alors :

$$\begin{aligned} n_r\varphi_r(x,y,z,t)n_r^{-1} &= x_r((z-1)(-y)^{-1})x_{-r}(-y)x_r((x-1)(-y)^{-1}) \\ &= \varphi_r(z,-t,x,-y). \end{aligned}$$

□

On rappelle que si $r \in \Sigma$, alors on note $\bar{r}$ l'image de r par ρ donnée par la permutation définie à partir de l'axe Δ. (cf. §1.7). De plus, si r est une racine courte (resp. longue) alors on pose $\lambda(r) = 1$ (resp. $\lambda(r) = 3$).

Lemme 2.2.8 *On a pour $r \in \{a+b, 3a+b\}$:*

$$\varphi_r(x,y,z,t)^\sigma = \varphi_{\bar{r}}(x^{\lambda(\bar{r})\theta}, y^{\lambda(\bar{r})\theta}, z^{\lambda(\bar{r})\theta}, t^{\lambda(\bar{r})\theta}).$$

Preuve — Soit $r \in \{a+b, 3a+b\}$.
Supposons que $t \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} \varphi_r(x,y,z,t)^\sigma &= (x_r((x-1)t^{-1})x_{-r}(t)x_r((z-1)t^{-1}))^\sigma \\ &= x_{\bar{r}}(((x-1)t^{-1})^{\lambda(\bar{r})\theta})x_{-\bar{r}}(t^{\lambda(\bar{r})\theta})x_{\bar{r}}(((z-1)t^{-1})^{\lambda(\bar{r})\theta}) \\ &= x_{\bar{r}}((x^{\lambda(\bar{r})\theta}-1)t^{-\lambda(\bar{r})\theta})x_{-\bar{r}}(t^{\lambda(\bar{r})\theta})x_{\bar{r}}((z^{\lambda(\bar{r})\theta}-1)t^{-\lambda(\bar{r})\theta}) \\ &= \varphi_{\bar{r}}(x^{\lambda(\bar{r})\theta}, y^{\lambda(\bar{r})\theta}, z^{\lambda(\bar{r})\theta}, t^{\lambda(\bar{r})\theta}), \end{aligned}$$

car $\lambda(\bar{r})\theta$ est une puissance de 3 et que $t^{\lambda(\bar{r})\theta} \neq 0$.
Supposons que $y \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} \varphi_r(x,y,z,t)^\sigma &= (x_r((z-1)y^{-1})x_{-r}(y)x_r((x-1)y^{-1}))^\sigma \\ &= x_{\bar{r}}(((z-1)y^{-1})^{\lambda(\bar{r})\theta})x_{-\bar{r}}(y^{\lambda(\bar{r})\theta})x_{\bar{r}}(((x-1)y^{-1})^{\lambda(\bar{r})\theta}) \\ &= x_{\bar{r}}((z^{\lambda(\bar{r})\theta}-1)y^{-\lambda(\bar{r})\theta})x_{-\bar{r}}(y^{\lambda(\bar{r})\theta})x_{\bar{r}}((x^{\lambda(\bar{r})\theta}-1)y^{-\lambda(\bar{r})\theta}) \\ &= \varphi_{\bar{r}}(x^{\lambda(\bar{r})\theta}, y^{\lambda(\bar{r})\theta}, z^{\lambda(\bar{r})\theta}, t^{\lambda(\bar{r})\theta}). \end{aligned}$$

Enfin :

$$h_r(t)^\sigma = h_{\bar{r}}(t^{\lambda(\bar{r})\theta}).$$

Donc :

$$\varphi_r(x,0,x^{-1},0)^\sigma = h_r(x)^\sigma = h_{\bar{r}}(x^{\lambda(\bar{r})\theta}) = \varphi_{\bar{r}}(x^{\lambda(\bar{r})\theta}, 0, x^{-\lambda(\bar{r})\theta}, 0).$$

□

Tore maximal σ-stable d'ordre $(q+1)^2$

On se réfère à [15] p. 68. Comme q est impair, tout générateur μ de $\mathbb{F}_q^\times$ n'est pas un carré dans $\mathbb{F}_q$. On a alors :

$$K_\mu = \left\{ \begin{bmatrix} x & \mu y \\ y & x \end{bmatrix} \right\} \quad \leftrightarrow \quad \zeta = x + y\sqrt{\mu} \ ,$$

avec K_μ sous groupe cyclique d'ordre $q+1$.

Soit ε un générateur de $\mathbb{F}_q$. Comme $(q-1)$ est premier avec 3, il suit que $\varepsilon^{3\theta}$ est aussi un générateur de $\mathbb{F}_q$. Soit $\sqrt{\varepsilon}$ une racine carré dans $\mathbb{F}_{q^2}$ de ε. Alors $\sqrt{\varepsilon}^{3\theta}$ est une racine carré de $\varepsilon^{3\theta}$. Dans la suite, on choisit ces deux racines pour l'identification de K_ε et de $K_{\varepsilon^{3\theta}}$. On pose :

$$\begin{array}{rcl} T_{a+b} & = & \varphi_{a+b}(K_\varepsilon) \\ T_{3a+b} & = & \varphi_{3a+b}(K_{\varepsilon^{3\theta}}). \end{array}$$

Les groupes T_{a+b} et T_{3a+b} commutent (car $T_r \subseteq S_r$ et que S_{a+b} et S_{3a+b} commutent). On pose $T = T_{a+b}T_{3a+b} \subseteq \mathrm{C}_G(J)$. Alors T est un sous-groupe abélien et on a :

$$T_{a+b} \cap T_{3a+b} = \{1, J\},$$

car $\{h_{a+b}(t) \mid t \in k\} \cap \{h_{3a+b}(t) \mid t \in k\} = \{1, J\}$. Il suit que :

$$|T| = (q+1)^2/2.$$

On note :

$$\begin{array}{rcl} t_{a+b}(x,y) & = & \varphi_{a+b}(x, \varepsilon y, x, y) \\ t_{3a+b}(x,y) & = & \varphi_{3a+b}(x, \varepsilon^{3\theta} y, x, y). \end{array}$$

Lemme 2.2.9 *On a :*

$$\begin{array}{rcl} t_r(x,y)^{-1} & = & t_r(x,-y) \\ h(\chi)t_r(x,y)h(\chi)^{-1} & = & t_r(x, \chi(r)y) \\ t_r(x,y)^\sigma & = & t_{\bar{r}}(x^{\lambda(\bar{r})\theta}, y^{\lambda(\bar{r})\theta}) \end{array}$$

Preuve — La première assertion provient du fait que dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_q)$, on a :

$$\begin{bmatrix} x & \mu y \\ y & x \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x & -\mu y \\ -y & x \end{bmatrix}$$

Les deux autres assertions sont des conséquences directes des lemmes précédents.

□

Considérons :

$$T_\sigma = \{t_{a+b}(x,y)t_{3a+b}(x^{3\theta}, y^{3\theta}) \mid x, y \in k \quad x^2 - y^2\varepsilon = 1\}.$$

Soit $x_0 \in T_\sigma$ dont l'ordre est impair et non trivial[1]. Posons $T' = \mathrm{C}_\mathrm{G}(x_0)$.

[1] Un tel élément existe dès que $q > 3$. Lorsque $q = 3$, le groupe $\mathrm{R}(q)$ n'a pas d'éléments semi-simples réguliers de type $w_a w_b w_a$. Il est inutile dans ce cas de procéder à cette étude.

Proposition 2.2.8 *On a :*

- *Le sous-ensemble T_σ est un sous-groupe de $\mathrm{R}(q)$ d'ordre $\frac{1}{2}(q+1)$.*
- *L'élément x_0 appartient à $\mathrm{R}(q)$ et est un élément semi-simple régulier de type $w_a w_b w_a$.*
- *Le sous-groupe T' est un tore maximal σ-stable de G d'ordre $(q+1)^2$. De plus, $T' \subseteq \mathrm{C}_{\mathrm{G}}(J)$.*

Preuve — Il est clair que T_σ est un sous-groupe abélien de $\mathrm{R}(q)$ d'ordre $\frac{1}{2}(q+1)$; ainsi $x_0 \in \mathrm{R}(q)$. En comparant l'ordre de x_0 avec l'ordre des éléments dans le théorème 2.2.1, on voit que x_0 est un élément semi-simple regulier de type type $w_a w_b w_a$. Or, en utilisant la Table B.1, on voit que les éléments semi-simples reguliers d'ordre impair non-trivial qui divise $(q+1)$ ont comme centralisateur (dans G) un tore maximal de $\mathrm{G}_2(q)$ d'ordre $(q+1)^2$. Donc T' est un tore maximal d'ordre $(q+1)^2$ de G. Comme $\sigma(x_0) = x_0$, il suit que T' est σ-stable. De plus, comme $x_0 \in \mathrm{C}_{\mathrm{G}_2(q)}(J)$, il suit que $J \in T'$. Or T' est abélien. Ainsi, chaque élément de T' commute avec J. Ainsi, $T' \subseteq \mathrm{C}_{\mathrm{G}_2(q)}(J)$.

□

Les éléments de T commutent avec x_0 (car $x_0 \in T$ et T est abélien). Donc :

$$T \subseteq T'.$$

Le groupe T étant d'ordre $\frac{1}{2}(q+1)^2$, il est d'indice 2 dans T'. Pour décrire complétement T' il suffit de trouver un élément dans T' qui n'est pas dans T.

Les éléments ε^{-1} et -1 ne sont pas des carrés de $\mathbb{F}_q$. Il suit donc que $-\varepsilon^{-1}$ en est un. Ainsi, il existe $a_0 \in \mathbb{F}_q$ tel que :

$$a_0^2 \varepsilon = -1.$$

En particulier :

$$a_0^{6\theta} \varepsilon^{3\theta} = -1.$$

Posons :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon a_0 \\ a_0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon^{3\theta} a_0^{3\theta} \\ a_0^{3\theta} & -1 \end{bmatrix}.$$

On a :

$$\det(A_0) = -1 + \varepsilon a_0^2 = -2 = 1.$$

De même, $\det(B_0) = 1$. On pose :

$$\tau = h(-1, 1, -1)\varphi_{a+b}(A_0)\varphi_{3a+b}(B_0).$$

Lemme 2.2.10 *L'élément τ ainsi défini commute avec les éléments de T et n'est pas dans T. De plus τ est d'ordre 4 et $\tau^2 \neq J$. On a :*

$$\tau^\sigma = h(-1, -1, 1)\varphi_{a+b}(A_0)\varphi_{3a+b}(B_0) = J\tau.$$

Preuve — Soient x_i, $y_i \in \mathbb{F}_q$ $(i \in \{1,2\})$ tels que $x_i^2 - \varepsilon y_i^2 = 1$. Vérifions que $t_{a+b}(x_1,y_1)t_{3a+b}(x_2,y_2)$ et τ commutent. On a :

$$t_{a+b}(x_1,y_1)^{\varphi_{a+b}(A_0)} = t_{a+b}(x_1,-y_1) \quad \text{et} \quad t_{3a+b}(x_2,y_2)^{\varphi_{a+b}(B_0)} = t_{3a+b}(x_2,-y_2).$$

Donc :

$$\begin{aligned}(t_{a+b}(x_1,y_1)t_{3a+b}(x_2,y_2))^{\tau} &= t_{a+b}(x_1,-y_1)^{h(-1,1,-1)}\,t_{3a+b}(x_2,-y_2)^{h(-1,1,-1)}\\ &= t_{a+b}(x_1,y_1)t_{3a+b}(x_2,y_2).\end{aligned}$$

L'élément $\varphi_{a+b}(A_0)\varphi_{3a+b}(B_0)$ est dans L et $h(-1,1,-1) \notin L$ car -1 n'est pas un carré de $\mathbb{F}_q$. Donc $\tau \notin L$, donc $\tau \notin T$.
On a :

$$\begin{aligned}\tau^2 &= h(-1,1,-1)\varphi_{a+b}(A_0)\varphi_{3a+b}(B_0)h(-1,1,-1)\varphi_{a+b}(A_0)\varphi_{3a+b}(B_0)\\ &= \varphi_{a+b}(A_0)^{h(-1,1,-1)}\varphi_{3a+b}(B_0)^{h(-1,1,-1)}\varphi_{a+b}(A_0)\varphi_{3a+b}(B_0)\\ &= \varphi_{a+b}(1,\varepsilon a_0,-1,-a_0)\varphi_{3a+b}(1,\varepsilon^{3\theta}a_0^{3\theta},-1,-a_0^{3\theta})\varphi_{a+b}(A_0)\varphi_{3a+b}(B_0)\\ &= \varphi_{a+b}(1,\varepsilon a_0,-1,-a_0)\varphi_{a+b}(A_0)\varphi_{3a+b}(1,\varepsilon^{3\theta}a_0^{3\theta},-1,-a_0^{3\theta})\varphi_{3a+b}(B_0)\end{aligned}$$

On introduit les matrices :

$$A_0' = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon a_0 \\ -a_0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_0' = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon^{3\theta}a_0^{3\theta} \\ -a_0^{3\theta} & -1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi :

$$\tau^2 = \varphi_{a+b}(A_0'A_0)\varphi_{3a+b}(B_0'B_0).$$

Or :

$$A_0'A_0 = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon a_0^2 & \varepsilon a_0 \\ a_0 & 1+\varepsilon a_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon a_0 \\ a_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors :

$$(A_0'A_0)^2 = \begin{bmatrix} \varepsilon a_0^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon a_0^2 \end{bmatrix} = h(-1).$$

On réalise le même genre de calcul avec $B_0'B_0$ et on en déduit que $(B_0'B_0)^2 = h(-1)$.
Ainsi :

$$\tau^4 = \varphi_{a+b}((A_0'A_0)^2)\varphi_{3a+b}((B_0'B_0)^2) = J^2 = 1.$$

Supposons que $\tau^2 = J$, alors :

$$J\varphi_{a+b}(A_0'A_0)\varphi_{3a+b}(B_0'B_0) = 1,$$

et comme $T_{a+b} \cap T_{3a+b} = \{1, J\}$, il suit que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} J\varphi_{a+b}(A_0'A_0) &=& 1 \\ \varphi_{3a+b}(B_0'B_0) &=& 1 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{lcl} J\varphi_{a+b}(A_0'A_0) &=& J \\ \varphi_{3a+b}(B_0'B_0) &=& J \end{array}\right.,$$

ce qui n'est pas possible dans les deux cas. Enfin :

$$\begin{aligned}\tau^{\sigma} &= h(-1,1,-1)^{\sigma}\varphi_{a+b}(A_0)^{\sigma}\varphi_{3a+b}(B_0)^{\sigma}\\ &= h(-1,-1,1)\varphi_{3a+b}(B_0)\varphi_{a+b}(A_0)\\ &= h(-1,-1,1)\varphi_{a+b}(A_0)\varphi_{3a+b}(B_0)\\ &= J\tau.\end{aligned}$$

□

On peut maintenant décrire précisement T'. Soit $\zeta = x_\zeta + y_\zeta\sqrt{\varepsilon}$ un générateur de K_ε. Alors ζ est d'ordre $(q+1)$. Soit $t_{a+b}(x_\zeta, y_\zeta)$ l'élément de T_{a+b} correspondant. L'image par σ de cet élément est aussi d'ordre $q+1$ donc $t_{3a+b}(x_\zeta^{3\theta}, y_\zeta^{3\theta})$ est d'ordre $q+1$ et engendre donc T_{3a+b}. Posons :

$$g_{a+b} = t_{a+b}(x_\zeta, y_\zeta)^4,\ g_{3a+b} = t_{3a+b}(x_\zeta^{3\theta}, y_\zeta^{3\theta})^4 \text{ et } \tau' = t_{3a+b}(x_\zeta^{3\theta}, y_\zeta^{3\theta})^{(q+1)/4}.$$

Il existe $C \in \mathrm{SL}(2,q)$ d'ordre 4 tel que :

$$\tau' = \varphi_{3a+b}(C).$$

Le groupe $K_{3\theta}$ étant cyclique, les seules possibilités pour C sont $B_0'B_0$ ou $-B_0'B_0$. Quitte à remplacer a_0 par son opposé, on peut supposer que $C = B_0'B_0$, ie :

$$\tau' = \varphi_{3a+b}(B_0'B_0).$$

Les éléments g_{a+b} et g_{3a+b} sont d'ordre $\frac{1}{4}(p+1)$.

Lemme 2.2.11 *On a :*

$$T' = \langle\, \tau g_{a+b}\,\rangle \times \langle\, \tau' g_{3a+b}\,\rangle.$$

Preuve — Comme g_{a+b} et g_{3a+b} sont d'ordre $\frac{1}{4}(p+1)$ qui est impair, et que τ et τ' sont d'ordre 4, il suit que τg_{a+b} et $\tau' g_{3a+b}$ sont d'ordre $(q+1)$. Prouvons que :

$$\langle\, \tau g_{a+b}\,\rangle \cap \langle\, \tau' g_{3a+b}\,\rangle = \{1\}.$$

Soit g dans l'intersection, alors il existe $x_i,\ y_i, \in \mathbb{F}_q$ et $k,\ l \in \mathbb{N}$ tels que :

$$g = \tau^k t_{a+b}(x_1, y_1) = \tau'^l t_{3a+b}(x_2, y_2),$$

avec $t_{a+b}(x_1, y_1)$ et $t_{3a+b}(x_2, y_2)$ d'ordre impair. On en déduit que :

$$\tau^k \tau'^{-l} = t_{a+b}(x_1, y_1) t_{3a+b}(x_2, y_2).$$

Donc l'ordre de $\tau^k\tau'^{-l}$ divise $\frac{1}{4}(p+1)$ donc est impair. Or $\tau^k\tau'^{-l}$ est d'ordre une puissance de 2. Ainsi la seule possibilité est que cet élément est l'identité, c'est à dire :

$$\tau^k = \tau'^l.$$

De plus :

$$\langle\, \tau\,\rangle \cap \langle\, \tau'\,\rangle = \{\,1\,\},$$

car $\tau^2 \neq J = \tau'^2$. Donc $\tau = \tau' = 1$ et $g = 1$.

□

2.2.3 Classes σ-stables de $\mathrm{G}_2(q)$

On pose $X = \gamma(1)$ et $T = \beta(1)$. En utilisant le théorème 2.2.1, on voit que les trois éléments $\alpha(1)$, $\alpha(1)\beta(\xi)$ et $\alpha(1)\beta(-\xi)$ ne sont pas conjugués dans G et que leur répartition parmi les classes de G dépend de la valeur de n modulo 3. Dans la suite, on désigne par Y_1, Y_2 et Y_3 une permutation de ces éléments, telle que Y_1 (resp. Y_2, Y_3) soit conjugué dans G à $x_a(1)x_b(1)$ (resp. à $x_a(1)x_b(1)x_{3a+b}(\xi)$ et $x_a(1)x_b(1)x_{3a+b}(-\xi)$). On note T'' un tore maximal σ-stable de G d'ordre $(q^2 - q + 1)$.

Proposition 2.2.9 *Le groupe* G *possède* $(q+8)$ *classes* σ*-stables. Plus précisement :*

- *Les classes ayant pour représentants* σ*-stables* 1, X, T, Y_1, Y_2, Y_3, J *et* JT.
- *Les deux classes* A_{42} *et* B_5 *(sans représentant* σ*-stable*[2]*).*
- $\frac{1}{2}(q-3)$ *classes de conjugaison ayant un représentant* σ*-stable* x *(de type* 1*) dans* H *et tel que* $\mathrm{C_G}(x) = H$.
- $\frac{1}{6}(q-3)$ *classes de conjugaison ayant un représentant* σ*-stable* x *(de type* $w_aw_bw_a$*) dans* T' *de* G *et tel que* $\mathrm{C_G}(x) = T'$.
- $\frac{1}{3}q$ *classes de conjugaison ayant un représentant* σ*-stable* x *(de type* w_a *ou* $w_aw_bw_aw_bw_a$*) dans* T'' *et tel que* $\mathrm{C_G}(x) = T''$.

Preuve — En utilisant la proposition 1.2.2, la correspondance de Shintani et le théorème 2.2.1, on montre que le groupe G possède $(q+8)$ classes σ-stables. Le théorème 2.2.2 donne $(q+6)$ représentants σ-stables de G. Les deux dernières classes σ-stables ne possédant aucun élément fixe par σ s'obtiennent en utilisant la liste des classes de conjugaison de G (cf. Table B.1).

□

Parmi les représentants donnés dans la proposition 2.2.9, on note L_1 et L_{aba} des systèmes de représentants d'ordre impair des classes de type 1 et $w_aw_bw_a$. On note L_a et L_{ababa} des systèmes de représentants des classes de type w_a et $w_aw_bw_aw_bw_a$ (qui sont d'ordre impair). On a :

$$|L_1| = \frac{1}{4}(q-3), \quad |L_{aba}| = \frac{1}{24}(q-3) \quad \text{et } |L_a| = |L_{ababa}| = \frac{1}{6}(q-3).$$

De plus, on note $\eta = x_{a+b}(1)x_{3a+b}(-1)$. On est en mesure d'établir :

Corollaire 2.2.1 *Les éléments de* L_1, L_a, L_{aba}, L_{ababa} *et* 1, X, T, Y_1, Y_2, Y_3 *et* η *forment un système de représentants des classes impaires* σ*-stables de* G.

2.2.4 Classes extérieures de $\mathrm{G}_2(q) \rtimes \langle \sigma \rangle$

Le but est d'appliquer la méthode 1.2.1. Pour cela, on va déterminer un système de représentants des classes 2-unipotentes de $\mathrm{C}_{\widetilde{G}}(g)$, où g est un représentant σ-stable donné dans le corollaire 2.2.1. Lorsque $g \neq \eta$, on parvient à calculer relativement simplement ces classes car on connaît $\mathrm{C}_{\widetilde{G}}(g)$ (cf. remarque 1.2.1). On étudie $\mathrm{C}_{\widetilde{G}}(\eta)$ « à la main ». On note :

$$h_0 = h(-1, 1, -1).$$

[2] Voir la remarque 2.1.1

Etude des classes extérieures de type 1

Soit H_0 le sous-groupe de H^σ formé des éléments d'ordre impair.

Proposition 2.2.10 *Les éléments (h, σ) et (hh_0, σ), où $h \in L_1$ sont des représentants de $\frac{1}{2}(q-3)$ classes extérieures de* G. *De plus, on a :*

$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(h, \sigma) = H^\sigma \times \langle\, \sigma \,\rangle \quad et \quad \mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(hh_0, \sigma) = H_0 \times \langle\, (h_0, \sigma) \,\rangle.$$

Preuve — Soit $h \in L_1$. On a $\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(h) = H$. Ainsi :

$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(h) = H \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle.$$

Déterminons les classes extérieures 2-unipotentes de $H \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle$. Pour cela décrivons un 2-sylow de ce groupe. Comme H est d'ordre $(q-1)^2$ et comme q est une puissance impaire de 3, il suit qu'un 2-sylow de $H \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle$ est d'ordre 8. L'ensemble

$$P_H = \{1, J, h_0, Jh_0\}$$

est un 2-sylow de H qui est σ-stable. On en déduit donc que :

$$P = P_H \rtimes \langle\, (h_0, \sigma) \,\rangle$$

est un 2-sylow de $H \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle$. Les éléments extérieurs de P sont $(1, \sigma)$, (J, σ), (h_0, σ) et $(h_0 J, \sigma)$ qui se répartissent en deux classes de P :

$$\{(1, \sigma), (J, \sigma)\} \;\text{ et }\; \{(h_0, \sigma), (h_0 J, \sigma)\}.$$

Comme l'élément $(1, \sigma)$ est d'ordre 2 alors que (h_0, σ) est d'ordre 4, on en déduit que ces deux classes de $H \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle$ sont distinctes. Ainsi, $H \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle$ possède deux classes extérieures 2-unipotentes paramétrées par $(1, \sigma)$ et (h_0, σ). Le sous-groupe H est abélien et $H^\sigma \cap \langle\, \sigma \,\rangle = \{1\}$ et $H_0 \cap \langle\, (h_0, \sigma) \,\rangle = \{1\}$. Ainsi par le lemme 1.2.2 on en déduit que :

$$\mathrm{C}_{\mathrm{G} \rtimes \langle \sigma \rangle}(h, \sigma) = H^\sigma \times \langle\, \sigma \,\rangle \quad \text{et} \quad C_{\mathrm{G} \rtimes \langle \sigma \rangle}(hh_0, \sigma) = H_0^\sigma \times \langle\, (h_0, \sigma) \,\rangle.$$

□

Etude des classes extérieures de type $w_a w_b w_a$

Soit $h \in L_{aba}$. Alors $\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(h) = T'$. Dans le lemme 2.2.11, on a une description explicite de la structure de T', ce qui permet d'en déterminer un 2-sylow P. Plus précisément on a :

$$P = \langle\, \tau \,\rangle \times \langle\, \tau' \,\rangle.$$

Ce sous-groupe est σ-stable. On rappelle que :

$$\tau^\sigma = J\tau \quad \text{et} \quad \tau'^\sigma = J\tau^2\tau'.$$

Lemme 2.2.12 *Le groupe P possède quatre σ-classes :*

$$\begin{array}{lcl} C_\sigma(1) & = & \{1, J, \tau^2, J\tau, J\tau^2\} \\ C_\sigma(\tau) & = & \{\tau, J\tau, \tau^3, J\tau^3\} \\ C_\sigma(\tau') & = & \{\tau', J\tau', J\tau'\tau^2, \tau'\tau^2\} \\ C_\sigma(\tau\tau') & = & \{\tau\tau', J\tau'\tau^3, \tau'\tau^3, J\tau\tau'\} \end{array}$$

Preuve — Il y a quatre éléments σ-stable dans P, donc quatre σ-classes. Notons $g_\sigma^h = hg\sigma(h^{-1})$. On a :

$$\begin{array}{lll} 1_\sigma^\tau = J, & 1_\sigma^{\tau'} = J\tau^2, & 1_\sigma^{\tau\tau'} = \tau^2 \\ \tau_\sigma^\tau = J\tau, & \tau_\sigma^{\tau'} = J\tau^3, & \tau_\sigma^{\tau\tau'} = \tau^3 \\ {\tau'}_\sigma^\tau = J\tau', & {\tau'}_\sigma^{\tau'} = J\tau'\tau^2, & {\tau'}_\sigma^{\tau\tau'} = \tau'\tau^2 \\ {\tau\tau'}_\sigma^\tau = J\tau\tau', & {\tau\tau'}_\sigma^{\tau'} = J\tau'\tau^3, & {\tau\tau'}_\sigma^{\tau\tau'} = \tau'\tau^3 \end{array}$$

□

Lemme 2.2.13 *Le groupe $T' \rtimes \langle \sigma \rangle$ possède quatre classes extérieures 2-unipotentes, paramétrées par :*

$$(1, \sigma),\ (\tau, \sigma),\ (\tau', \sigma) \quad \textit{et } (\tau\tau', \sigma).$$

Preuve — Il suffit de vérifier que les σ-classes de P ne se « recollent » pas dans $T' \rtimes \langle \sigma \rangle$. Soient p_1, $p_2 \in P$ que l'on suppose σ-conjugués dans T', ie :

$$\exists g \in T', \quad gp_1\sigma(g^{-1}) = p_2.$$

Il existe $x, y, x', y' \in \mathbb{F}_q$ et $(u, v) \in \langle \tau \rangle \times \langle \tau' \rangle$ tels que :

$$g = uvt_{a+b}(x, y)t_{3a+b}(x'^{3\theta}, y'^{3\theta}).$$

Alors :

$$\underbrace{p_2(p_1uu^{-\sigma}vv^{-\sigma})^{-1}}_{\text{d'ordre une puissance de 2}} = \underbrace{t_{a+b}(x, y)t_{a+b}(x', -y')t_{3a+b}(x'^{3\theta}, y'^{3\theta})t_{3a+b}(x^{3\theta}, -y^{3\theta})}_{\text{d'ordre impair}}$$

Donc :

$$p_2(p_1uu^{-\sigma}vv^{-\sigma})^{-1} = 1.$$

Ainsi, p_1 et p_2 sont σ-conjugués dans P.

□

Notons T'_0 le sous-groupe de T'^σ formé des éléments d'ordre impair et :

$$H_x = \langle T'_0, x \rangle, \quad x \in \{\tau^2, J, J\tau^2\}.$$

Proposition 2.2.11 *Les éléments (h, σ), $(h\tau, \sigma)$, $(h\tau', \sigma)$ et $(h\tau\tau', \sigma)$, où $h \in L_{aba}$, sont des représentants de $\frac{1}{6}(q-3)$ classes extérieures de $\widetilde{\mathrm{G}}$. De plus, on a :*

$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(h, \sigma) = T'^\sigma \times \langle \sigma \rangle$$

$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(h\tau, \sigma) = H_{\tau^2} \times \langle (\tau, \sigma) \rangle$$

$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(h\tau', \sigma) = H_J \times \langle (\tau', \sigma) \rangle$$

$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(h\tau\tau', \sigma) = H_{J\tau^2} \times \langle (\tau\tau'\sigma) \rangle$$

Preuve — Soit $h \in L_{aba}$. Alors $\mathrm{C_G}(h) = T'$. Le résultat est alors une conséquence de la méthode 1.2.1, du lemme 2.2.13 et du lemme 1.2.2.

$\square$

Etude des classes extérieures de type w_a et $w_a w_b w_a w_b w_a$

Proposition 2.2.12 *On a :*

- *Les éléments (h, σ), où $h \in L_a$ paramètrent $\frac{1}{6}(q - 3\theta)$ classes extérieures. De plus :*
$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(h, \sigma) = T^F_{w_a} \times \langle\, \sigma \,\rangle.$$
- *Les éléments (h, σ), où $h \in L_{ababa}$ paramètrent $\frac{1}{6}(q + 3\theta)$ classes extérieures. De plus :*
$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(h, \sigma) = T^F_{w_a w_b w_a w_b w_a} \times \langle\, \sigma \,\rangle.$$

Preuve — Soit $h \in L_a$ (respectivement $h \in L_{ababa}$). Alors $\mathrm{C_G}(h) = T''$. Ainsi :

$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(h) = T'' \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle.$$

Comme $|T''| = q^2 - q + 1$ est impair, il suit que $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(h)$ ne possède qu'une seule classe de 2-unipotente, de représentant $(1, \sigma)$. En utilisant la méthode 1.2.1 et le lemme 1.2.2, on a le résultat.

$\square$

Classes extérieures dont la partie 2-régulière est d'ordre une puissance de 3

Commençons par donner quelques notations. On pose :

$$\begin{array}{lcl}
C_{a+b,2a+b} & = & X_{a+b}X_{3a+b}X_{2a+b}X_{3a+2b} \\
C'_{a+b,2a+b} & = & \{x_{a+b}(-u)x_{3a+b}(-u^{3\theta})x_{2a+b}(-t)x_{3a+2b}(t^{3\theta}) \mid u, t \in \mathbb{F}_q\} \\
S_{a+b,3a+b} & = & \{x_{a+b}(t)x_{3a+b}(-t^{3\theta}) \mid t \in \mathbb{F}_q\} \\
S_{a,b} & = & \{\, x_{2a+b}(t)x_{3a+b}(t^{3\theta}) \mid t \in \mathbb{F}_q \,\}
\end{array}$$

Proposition 2.2.13 *Les éléments (X, σ), (T, σ), (T^{-1}, σ), $(\eta h_0, \sigma)$, $(\eta^{-1}h_0, \sigma)$, (Y_1, σ), (Y_2, σ) et (Y_3, σ) paramètrent 8 classes extérieures de $\widetilde{\mathrm{G}}$. On a de plus :*

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(X, \sigma) & = U^\sigma \times \langle\, \sigma \,\rangle \\
\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(T, \sigma) & = C^\sigma_{a+b,2a+b}\langle\, J \,\rangle \times \langle\, \sigma \,\rangle \\
\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(T^{-1}, \sigma) & = C'_{a+b,2a+b}\langle\, J \,\rangle \times \langle\, \sigma \,\rangle \\
\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\eta h_0, \sigma) & = S_{a+b,3a+b} \times \langle\, (h_0, \sigma) \,\rangle \\
\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\eta^{-1} h_0, \sigma) & = S_{a+b,3a+b} \times \langle\, (Jh_0, \sigma) \,\rangle \\
\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(Y_1, \sigma) & = \langle\, Y_1 \,\rangle S_{a,b} \times \langle\, \sigma \,\rangle \\
\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(Y_2, \sigma) & = \langle\, Y_2 \,\rangle S_{a,b} \times \langle\, \sigma \,\rangle \\
\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(Y_3, \sigma) & = \langle\, Y_3 \,\rangle S_{a,b} \times \langle\, \sigma \,\rangle
\end{array}$$

Preuve — En utilisant le corollaire 2.2.1, on constate que les classes σ-stable d'ordre une puissance de 3 sont paramétrées par X, T, Y_1, Y_2, Y_3 et η. On va appliquer la méthode 1.2.1 en calculant les classes 2-unipotentes des centralisateurs dans $\widetilde{\mathrm{G}}$ de ces éléments.

- On a $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(X) = \mathrm{C}_{\mathrm{G}}(X) \rtimes \langle \sigma \rangle$. Or $\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(X) = U$ est d'ordre impair. La seule classe 2-unipotente de $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}$ admet $(1,\sigma)$ pour représentant. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(X,\sigma) &= \mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(X) \cap \mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(1,\sigma) \\ &= \mathrm{C}_{\mathrm{G}}^{\sigma}(X) \times \langle \sigma \rangle = U^{\sigma} \times \langle \sigma \rangle. \end{aligned}$$

- On a $\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(T) = C_{a+b,2a+b}.\langle J \rangle$. Ainsi :

$$\mathrm{C}_{\mathrm{G} \rtimes \langle \sigma \rangle}(T) = C_{a+b,2a+b}.\langle J \rangle \rtimes \langle \sigma \rangle.$$

Etudions les classes 2-unipotentes extérieures de ce centralisateur. Le 2-sylow de ce groupe est :

$$P = \{1, J, (1,\sigma), (J,\sigma)\}.$$

Les éléments $(1,\sigma)$ et (J,σ) ne sont pas conjugués dans $C_{\widetilde{\mathrm{G}}}(T)$. Il y a donc dans ce groupe deux classes 2-unipotentes extérieures ayant pour représentants $(1,\sigma)$ et (J,σ). Soit τ_{h_0} la conjugaison par h_0 dans $\widetilde{\mathrm{G}}$. On constate que τ_{h_0} stabilise $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(T)$ et induit donc un automorphisme de ce groupe. De plus $\tau_{h_0}(1,\sigma) = (J,\sigma)$, donc il suit que :

$$\mathrm{C}_{\mathrm{C}_{a+b,2a+b}.\langle J \rangle \rtimes \langle \sigma \rangle}(J,\sigma) = \tau_{h_0}(\mathrm{C}_{C_{a+b,2a+b}.\langle J \rangle \rtimes \langle \sigma \rangle}(1,\sigma))$$

Or :

$$\mathrm{C}_{C_{a+b,2a+b}.\langle J \rangle \rtimes \langle \sigma \rangle}(1,\sigma) = (C_{a+b,2a+b}.\langle J \rangle)^{\sigma} \times \langle \sigma \rangle.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} (C_{a+b,2a+b}.\langle J \rangle)^{\sigma} &= C^{\sigma}_{a+b,2a+b}.\langle J \rangle \\ &= \{x_{a+b}(u)x_{3a+b}(u^{3\theta})x_{2a+b}(t)x_{3a+2b}(t^{3\theta}) \mid u,t \in \mathbb{F}_q\}\langle J \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\tau_{h_0}(C^{\sigma}_{a+b,2a+b}.\langle J \rangle) = \{x_{a+b}(-u)x_{3a+b}(-u^{3\theta})x_{2a+b}(-t)x_{3a+2b}(t^{3\theta}) \mid u,t \in \mathbb{F}_q\}\langle J \rangle.$$

On en déduit que :

$$C'_{a+b,2a+b}\langle J \rangle \times \langle (J,\sigma) \rangle = C'_{a+b,2a+b}.\langle J \rangle \times \langle \sigma \rangle.$$

- La classe de η ne possède pas d'éléments σ-stable. On a :

$$\sigma(\eta) = h_0^{-1}\eta h_0.$$

Comme $\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(\eta) = C_{a+b,2a+b}.\langle J \rangle$, on en déduit que :

$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(x_{a+b}(1)x_{3a+b}(-1)) = C_{a+b,2a+b}.\langle J \rangle.\langle (h_0,\sigma) \rangle = C_{a+b,2a+b} \rtimes \langle (h_0,\sigma) \rangle.$$

Le groupe :

$$P = \{1, J, (h_0,\sigma), (Jh_0,\sigma)\}$$

est un 2-sylow de $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\eta)$. Les éléments (h_0,σ) et (Jh_0,σ) ne sont pas conjugués dans $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\eta)$. Ils paramètrent donc les classes extérieures 2-unipotentes de ce groupe. L'automorphisme intérieur τ_{h_0} de $\widetilde{\mathrm{G}}$ induit un automorphisme de $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\eta)$. Comme $\tau_{h_0}(h_0,\sigma)=(Jh_0,\sigma)$, on en déduit que :

$$\mathrm{C}_{C_{a+b,2a+b}\rtimes\langle\,(h_0,\sigma)\,\rangle}(Jh_0,\sigma)=\tau_{h_0}(\mathrm{C}_{C_{a+b,2a+b}\rtimes\langle\,(h_0,\sigma)\,\rangle}(h_0,\sigma)).$$

Déterminons $\mathrm{C}_{C_{a+b,2a+b}\rtimes\langle\,(h_0,\sigma)\,\rangle}(h_0,\sigma)$. Soit $g=x_{a+b}(u)x_{3a+b}(v)x_{2a+b}(w)x_{3a+2b}(t)\in C_{a+b,2a+b}$ tel que $(g,1)(h_0,\sigma)(g,1)^{-1}=(h_0,\sigma)$. Alors :

$$x_{a+b}(u)x_{3a+b}(v)x_{2a+b}(w)x_{3a+2b}(t)h_0=h_0x_{a+b}(v^\theta)x_{3a+b}(u^{3\theta})x_{2a+b}(w^\theta)x_{3a+2b}(t^{3\theta})$$

$$=x_{a+b}(-v^\theta)x_{3a+b}(-u^{3\theta})x_{2a+b}(-w^\theta)x_{3a+2b}(t^{3\theta})h_0.$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} u &= -v^\theta\\ v &= -u^{3\theta}\\ w &= -t^\theta\\ t &= w^{3\theta}\end{cases}$$

On a $t^q=t=-t$ donc $2t=0$ et $t=0$. Réciproquement $x_{a+b}(t)x_{3a+b}(-t^{3\theta})$ centralise (h_0,σ). Soit $x\in C_{a+b,2a+b}$ tel que (xh_0,σ) centralise (h_0,σ) alors :

$$xh_0\sigma(h_0)=h_0\sigma(xh_0)$$

$$\text{ie,}\quad xJ=h_0\sigma(x)Jh_0$$

$$\text{ie,}\quad xh_0=h_0\sigma(x)$$

donc $x\in S_{a+b,3a+b}$ par ce qui précède. Ainsi, on en déduit que :

$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(x_{a+b}(1)x_{3a+b}(-1)h_0,\sigma)=S_{a+b,3a+b}\times\langle\,(h_0,\sigma)\,\rangle.$$

On a :

$$\tau_{h_0}(S_{a+b,3a+b})=S_{a+b,3a+b}.$$

Donc

$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(x_{a+b}(1)x_{3a+b}(-1)Jh_0,\sigma)=S_{a+b,3a+b}\times\langle\,(Jh_0,\sigma)\,\rangle.$$

- On va traiter en même temps les classes de représentants Y_1, Y_2 et Y_3. On pose x l'un de ces représentants. On a :

$$\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(x)=\langle\,x\,\rangle X_{2a+b}X_{3a+2b}$$

est d'ordre $3q^2$. De plus x est σ-stable donc :

$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(x)=\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(x)\rtimes\langle\,\sigma\,\rangle.$$

Comme $|\,\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(x)|$ est d'ordre impair, on déduit du lemme 1.2.2 que $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(x)$ ne possède qu'une classe 2-unipotente de représentant $(1,\sigma)$. On obtient donc trois nouveaux représentants de classe extérieure de $\widetilde{\mathrm{G}}$:

$$(Y_1,\sigma),\quad (Y_2,\sigma)\quad\text{et}\quad (Y_3,\sigma).$$

De plus on a :

$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(x,\sigma)=\langle\,x\,\rangle S_{a,b}\times\langle\,\sigma\,\rangle.$$

Remarquons finalement que les éléments (TJ, σ) et $(\eta, h_0 J, \sigma)$ sont respectivement conjugués à (T^{-1}, σ) et $(\eta^{-1} h_0, \sigma)$. En effet, comme :

$$T^{h_0} = T^{-1} \quad \text{et} \quad \eta^{h_0} = \eta^{-1},$$

il suit que :

$$(TJ, \sigma)^{h_0} = (T^{-1}, \sigma) \quad \text{et} \quad (\eta h_0 J, \sigma)^{h_0} = (\eta^{-1} h_0, \sigma).$$

□

Classes 2-unipotentes extérieures

On vient de déterminer $(q+6)$ classes extérieures avec une partie 2-régulière non triviale. Il manque deux classes extérieures.

Proposition 2.2.14 *Les éléments* $(1, \sigma)$ *et* (h_0, σ) *paramètrent deux classes* 2*-unipotentes de* $\widetilde{\mathrm{G}}$. *De plus on a :*

$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(1, \sigma) = \mathrm{R}(q) \times \langle\, \sigma \,\rangle \quad \textit{et} \quad \mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(h_0, \sigma) = S \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_q).$$

Preuve — Les éléments $(1, \sigma)$ et (h_0, σ) sont 2-unipotents et ne sont pas conjugués. En effet $(1, \sigma)$ est d'ordre 2 tandis que (h_0, σ) est d'ordre 4. Il est immédiat que :

$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(1, \sigma) = \mathrm{R}(q) \times \langle\, \sigma \,\rangle.$$

Précisons la structure de $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(h_0, \sigma)$. Pour cela, posons :

$$\forall\, t \in \mathbb{F}_q, \quad \eta_+(t) = x_{a+b}(t) x_{3a+b}(-t^{3\theta}), \quad \eta_-(t) = x_{-(a+b)}(t) x_{-(3a+b)}(-t^{3\theta}).$$

Pour tout $t \in \mathbb{F}_q$, les éléments $\eta_\pm(t)$ centralisent (h_0, σ). Notons :

$$S = \langle\, \eta_\pm(t) \mid t \in \mathbb{F}_q \,\rangle.$$

Considérons l'application φ_S de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$ dans S défini sur les générateurs par :

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \eta_+(t), \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} \mapsto \eta_-(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{F}_q.$$

Par définition des morphismes φ_{a+b} et φ_{3a+b} et en utilisant le lemme 2.2.5, on en déduit que φ_S est un morphisme de groupe. De plus $\operatorname{Ker} \varphi_S = \langle\, -I \,\rangle$, ainsi, par passage au quotient, le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_q)$ s'injecte dans S. De plus, on a :

$$\begin{array}{ll}
|\,\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(h\epsilon, \sigma)| = 2(q-1), & h \in L_1,\ \epsilon \in \{1, h_0\} \\
|\,\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(h\epsilon, \sigma)| = 2(q+1), & h \in L_{aba},\ \epsilon \in \{1, \tau, \tau', \tau\tau'\} \\
|\,\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(h, \sigma)| = 2(q - 3\theta + 1), & h \in L_a \\
|\,\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(h, \sigma)| = 2(q + 3\theta + 1), & h \in L_{ababa} \\
|\,\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(1, \sigma)| = 2q^3(q^2-1)(q^2-q+1) & |\,\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(X, \sigma)| = 2q^3 \\
|\,\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(Y_i, \sigma)| = 6q & i \in \{1, 2, 3\} \\
|\,\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(T, \sigma)| = |\,\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(TJ, \sigma)| = 4q^2 & |\,\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\eta h_0, \sigma)| = |\,\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\eta h_0 J, \sigma)| = 4q
\end{array} \tag{2.1}$$

Or en utilisant les relations (2.1) et les ordres des centralisateurs de $\mathrm{R}(q)$ (cf. théorème 2.2.1), la correspondance de Shintani permet de déduire que :

$$|\,\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(h_0, \sigma)| = q(q-1)(q+1).$$

Ainsi, par cardinalité, on en déduit que :

$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(h_0, \sigma) = S \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_q).$$

$\square$

Récapitulatif

En appliquant la méthode 1.2.1 et les résultats des paragraphes précédents, on a :

Théorème 2.2.3 *Dans la table 2.4, on donne un système de représentants des classes extérieures de* $\mathrm{G}_2(q) \rtimes \langle\, \sigma\, \rangle$*, leur centralisateur et l'ordre de ces derniers.*

Classe	Représentant		Nombre	Centralisateur	Cardinal
C_1	$(1,\sigma)$		1	$R\times\ \langle\,\sigma\,\rangle$	$2q^3(q^2-1)(q^2-q+1)$
C_2	(h_0,σ)		1	S	$2q(q^2-1)$
D_1	(X,σ)		1	$U^\sigma\times\langle\,\sigma\,\rangle$	$2q^3$
D_{21}	(T,σ)		1	$C^\sigma_{a+b,3a+b}.\langle\,J\,\rangle\times\langle\,\sigma\,\rangle$	$4q^2$
D_{22}	(T^{-1},σ)		1	$C'_{a+b,3a+b}.\langle\,J\,\rangle\times\langle\,\sigma\,\rangle$	$4q^2$
D_{31}	$(\eta h_0,\sigma)$		1	$S_{a+b,3a+b}\times\langle\,(h_0,\sigma)\,\rangle$	$4q$
D_{32}	$(\eta^{-1}h_0,\sigma)$		1	$S_{a+b,3a+b}\times\langle\,(Jh_0,\sigma)\,\rangle$	$4q$
D_{41}	(Y_1,σ)		1	$\langle\,Y_1\,\rangle S_{a,b}\times\langle\,\sigma\,\rangle$	$6q$
D_{42}	(Y_2,σ)		1	$\langle\,Y_2\,\rangle S_{a,b}\times\langle\,\sigma\,\rangle$	$6q$
D_{43}	(Y_3,σ)		1	$\langle\,Y_3\,\rangle S_{a,b}\times\langle\,\sigma\,\rangle$	$6q$
$E_1(h)$	(h,σ)	$h\in L_1$	$\dfrac{q-3}{4}$	$H^\sigma\times\ \langle\,\sigma\,\rangle$	$2(q-1)$
$E_2(h)$	(hh_0,σ)	$h\in L_1$	$\dfrac{q-3}{4}$	$H_0^\sigma\times\ \langle\,(h_0,\sigma)\,\rangle$	$2(q-1)$
$F_1(h)$	(h,σ)	$h\in L_{aba}$	$\dfrac{q-3}{24}$	$T^F_{\omega_a\omega_b\omega_a}\times\ \langle\,\sigma\,\rangle$	$2(q+1)$
$F_2(h)$	$(h\tau,\sigma)$	$h\in L_{aba}$	$\dfrac{q-3}{24}$	$H_{\tau^2}\times\ \langle\,(\tau,\sigma)\,\rangle$	$2(q+1)$
$F_3(h)$	$(h\tau',\sigma)$	$h\in L_{aba}$	$\dfrac{q-3}{24}$	$H_J\times\ \langle\,(\tau',\sigma)\,\rangle$	$2(q+1)$
$F_4(h)$	$(h\tau\tau',\sigma)$	$h\in L_{aba}$	$\dfrac{q-3}{24}$	$H_{J\tau^2}\times\ \langle\,(\tau\tau',\sigma)\,\rangle$	$2(q+1)$
$G_1(h)$	(h,σ)	$h\in L_a$	$\dfrac{q-3\theta}{6}$	$T^F_{\omega_a}\times\ \langle\,\sigma\,\rangle$	$2(q-3\theta+1)$
$H_1(h)$	(h,σ)	$h\in L_{ababa}$	$\dfrac{q+3\theta}{6}$	$T^F_{\omega_a\omega_b\omega_a\omega_b\omega_a}\times\ \langle\,\sigma\,\rangle$	$2(q+3\theta+1)$

TAB. 2.4 – Classes extérieures de $\widetilde{\mathrm{G}}$

Chapitre 3

Table des caractères

On calcule dans ce chapitre les valeurs des caractères extérieurs sur les classes extérieures du groupe $\mathrm{G} \rtimes \langle \sigma \rangle$ dans le cas où G est un groupe fini de type B_2 ou G_2 et σ l'automorphisme exceptionnel de G. On garde les notations du chapitre 2.

3.1 Le type B_2

L'outil principal utilisé dans ce paragraphe est l'induction de caractères. A partir d'induits de caractères de sous-groupes « naturels » de $\widetilde{\mathrm{G}}$, on détermine la table des caractères de $\widetilde{\mathrm{G}}$. Dans §1.7, on voit que les sous-groupes H, U, B et $\mathrm{Sz}(q)$ sont σ-stables. On va étudier les sous-groupes :

$$\widetilde{B} = B \rtimes \langle \sigma \rangle, \quad \widetilde{\mathrm{Sz}}(q) = \mathrm{Sz}(q) \times \langle \sigma \rangle, \quad \text{et} \quad \widetilde{U_0} = U_0 \rtimes \langle \sigma \rangle,$$

où U_0 est un sous-groupe σ-stable de U précisé plus tard dans le texte.

Dans un premier temps, on décrit les caractères σ-stables de G. On a vu leur importance dans §1.2.2 : les caractères irréductibles extérieurs de $\widetilde{\mathrm{G}}$ sont des extensions de ceux-ci (cf. proposition 1.2.4).

3.1.1 Caractères σ-stables de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_q)$

La table de G est construite dans [12]. On la redonne dans l'annexe A. On a :

Proposition 3.1.1 *On pose $\theta = 2^n$. Le groupe* G *possède $q+3$ caractères irréductibles σ-stables. Plus précisement :*

- *Les quatres caractères unipotents σ-stables : 1_{G}, θ_1, θ_4 et θ_5, de degré respectif 1, $\frac{1}{2}q(q+1)^2$, q^4 et $\frac{1}{2}q(q-1)^2$.*
- *Les $\frac{1}{2}(q-2)$ caractères $\chi_1(i,(2\theta-1)i)$, $i \in E_0$ de degré $(q+1)^2\,(q^2+1)$. On les note $\chi_{A_0}(i)$.*
- *Les $\frac{1}{4}(q+2\theta)$ caractères $\chi_5((q-2\theta+1)j)$, $j \in E1$ de degré $(q^2-1)^2$. On les note $\chi_{A_1}(j)$.*
- *Les $\frac{1}{4}(q-2\theta)$ caractères $\chi_5((q+2\theta+1)k)$, $k \in E_2$ de degré $(q^2-1)^2$. On les note $\chi_{A_2}(k)$.*

Preuve — Par la proposition 1.2.2, on voit qu'il y a $q+3$ caractères irréductibles σ-stables de G. On les détermine en utilisant la table des caractères de G.

$\square$

3.1.2 Quelques caractères extérieurs provenant d'induits de $\widetilde{B}$

Commençons par construire quelques caractères linéaires de $\widetilde{B}$. Le groupe H est abélien et isomorphe à $\mathbb{F}_q^\times \times \mathbb{F}_q^\times$. Ainsi, les caractères irréductibles de H sont :

$$\forall\, 1 \leq k,\, l \leq q-1 \quad \phi_{k,l}(\gamma^i, \gamma^j) = \gamma_0^{ik+jl}.$$

Déterminons les caractères irréductibles σ-stables de H :

Proposition 3.1.2 *Les caractères σ-stables de H sont :*

$$\forall k \in \{1, \ldots, q-1\}, \quad \phi_{k,(2\theta-1)k}.$$

Preuve — Soit $\phi_{k,l}$ un caractère linéaire de H. La relation (1.21) donne :

$$\sigma\left(h(\gamma^i, \gamma^j)\right) = h\left(\gamma^{\theta(i+j)}, \gamma^{\theta(i-j)}\right).$$

Soient $k, l \in \{1, \ldots, q-1\}$. Alors, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, q-1\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\phi_{k,l}^{\sigma}\left(h(\gamma^i, \gamma^j)\right) &= \phi_{k,l}^{\sigma}\left(h(\gamma^{\theta(i+j)}, \gamma^{\theta(i-j)})\right) \\
&= \gamma_0^{\theta(i+j)k+\theta(i-j)l} \\
&= \gamma_0^{\theta(k+l)i+\theta(k-l)j} \\
&= \phi_{\theta(k+l),\theta((k-l)}h(\gamma^i, \gamma^j).
\end{aligned}$$

Donc $\phi_{k,l}^{\sigma} = \phi_{\theta(k+l),\theta(k-l)}$. Ainsi, $\phi_{k,l}^{\sigma} = \phi_{k,l}$ si et seulement si k et l sont solutions du système de congruence suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcll}
\theta(k+l) &=& k & \mod q-1 \\
\theta(k-l) &=& l & \mod q-1
\end{array}\right.$$

Les solutions de ce système sont :

$$\{(k, (2\theta-1)k) \mid 1 \leq k \leq q-1\}.$$

$\square$

La table des caractères de B est donnée dans [12]. Les caractères linéaires de B sont notés $\chi_1(k,l)$. On déduit alors :

Proposition 3.1.3 *On définit, pour tout k tel que $1 \leq k \leq q-2$, l'application $\chi_{k,\widetilde{B}}$ par :*

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\chi_{k,\widetilde{B}}(g,1) &=& \chi_1(k,(2\theta-1)k)(g) \quad \forall g \in B \\
\chi_{k,\widetilde{B}}(\pi_0,\sigma) &=& \xi_0^{ki(4-4\theta)} = \varepsilon_0^{ki} \\
\chi_{k,\widetilde{B}}(1,\sigma) &=& 1 \\
\chi_{k,\widetilde{B}}(x_a,\sigma) &=& 1 \\
\chi_{k,\widetilde{B}}(x_{a+b},\sigma) &=& 1 \\
\chi_{k,\widetilde{B}}(x_a x_{a+b},\sigma) &=& 1
\end{array}\right.$$

Les fonctions $\chi_{k,\widetilde{B}}$ ainsi construites sont des caractères linéaires de $\widetilde{B}$.

Preuve — Le sous-groupe U est distingué dans B. De plus, U est σ-stable. Donc U est distingué dans $\widetilde{B}$. Notons π_U la projection canonique sur le quotient $\widetilde{B}/U$. Ce quotient est isomorphe à $H \rtimes \langle\sigma\rangle$. En utilisant le lemme 1.2.5 et la proposition 3.1.2, on construit $(q-2)$ caractères linéaires de $H \rtimes \langle\sigma\rangle$, notés $\varphi_k = \phi_{k,(2\theta-1)k}$. En posant $\phi_{k,\widetilde{B}} = \varphi_k \circ \pi_U$, on obtient $(q-2)$ caractères linéaires de $\widetilde{B}$. De plus, $\widetilde{B}$ possède $q+2$ classes extérieures (car il y a $q+2$ classes σ-stables dans B), qui sont les (π_0, σ), avec $\pi_0 \in A_0 - \{1\}$ et $(1,\sigma)$, (x_a, σ), (x_{a+b}, σ) et $(x_a x_{a+b}, \sigma)$ (cf. proposition 2.1.1 et 2.1.2). Les valeurs des $\phi_{k,\widetilde{B}}$ se calculent aisément à partir de φ_k. $\square$

On obtient alors :

Proposition 3.1.4 *Pour tout $k \in \{1, \ldots, \frac{1}{2}(q-2)\}$, on pose :*

$$\widetilde{\chi}_k = \mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \chi_{k,\widetilde{B}}.$$

Alors les caractères $\widetilde{\chi}_k$ et $\widetilde{\chi}_k\varepsilon$ sont les deux extensions de $\chi_{A_0}(k)$. De plus, les valeurs de $\widetilde{\chi}_{A_0}(k)$ sur les classes extérieures de $\widetilde{\mathrm{G}}$ sont :

	$(1,\sigma)$	(x_a,σ)	(x_{a+b},σ)	$(x_a x_{a+b},\sigma)$	(π_0^l,σ)
$\widetilde{\chi}_{A_0}(i)$	q^2+1	1	1	1	$\varepsilon_0^i(\pi_0^l)$

Preuve — On a :

$$\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}(\mathrm{Res}_B^{\widetilde{B}} \chi_{k,\widetilde{B}}) = \mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}(\chi_1(k,(2\theta-1)k)) = \chi_{A_0}(k).$$

En appliquant le lemme 1.2.4, on en déduit que $\mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \chi_{k,\widetilde{B}}$ est irréductible. Il suit que $\mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \chi_{k,\widetilde{B}}$ est un caractère irréducible de $\widetilde{\mathrm{G}}$. Le résultat découle immédiatement du fait que $\mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \chi_{k,\widetilde{B}} = \mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \chi_{-k,\widetilde{B}}$.

Donnons explicitement les valeurs de $\widetilde{\chi}_{A_0}(k)$. Les classes extérieures de $\widetilde{B}$ sont explicitées dans la preuve de la proposition 3.1.3 et le calcul des centralisateurs est similaire à celui des preuves des propositions 2.1.1 et 2.1.3. On trouve les mêmes centralisateurs dans $\widetilde{\mathrm{G}}$ et dans $\widetilde{B}$, sauf pour l'élément $(1,\sigma)$. On a :

$$\mathrm{C}_{\widetilde{B}}(1,\sigma) = (\mathrm{Sz}(q) \cap B, \sigma)$$

d'ordre $2q^2(q-1)$. Enfin, on constate que :

$$\mathrm{Cl}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\pi_0,\sigma) \cap \widetilde{B} = \mathrm{Cl}_{\widetilde{B}}(\pi_0,\sigma) \cup \mathrm{Cl}_{\widetilde{B}}(\pi_0^{-1},\sigma).$$

Résumons dans le tableau suivant :

	$(1,\sigma)$	(x_a,σ)	(x_{a+b},σ)	$(x_a x_{a+b},\sigma)$	(π_0,σ)
Nombre	1	1	1	1	$(q-2)$
$\lvert \mathrm{C}_{\widetilde{B}} \rvert$	$2q^2(q-1)$	$4q$	$2q^2$	$4q$	$2(q-1)$
Recollement dans $\widetilde{\mathrm{G}}$	$(1,\sigma)$	(x_a,σ)	(x_{a+b},σ)	$(x_a x_{a+b},\sigma)$	(π_0,σ) ou (π_0^{-1},σ)

Soit $\phi \in \mathbb{Z}\operatorname{Irr}(\widetilde{B})$. En utilisant ce qui précède, le calcul de $\operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}\phi$ ne pose plus de difficultés. Donnons les formules d'induction de $\widetilde{B}$ à $\widetilde{\mathrm{G}}$:

	$(1,\sigma)$	(x_a,σ)	(x_{a+b},σ)	$(x_a x_{a+b},\sigma)$	(π_0,σ)
$\operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}\phi$	$(q^2+1)\phi(1,\sigma)$	$\phi(x_a,\sigma)$	$\phi(x_{a+b},\sigma)$	$\phi(x_a x_{a+b},\sigma)$	$\phi(\pi_0,\sigma)+\phi(\pi_0^{-1},\sigma)$

Ainsi, en appliquant la proposition 3.1.3 et les formules d'induction qui précèdent, on en déduit le résultat.

□

Soit ε le caractère linéaire de $\widetilde{\mathrm{G}}$ de noyau G.

Proposition 3.1.5 *On a* $\widetilde{\theta}_4 = \rho\left(\operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} 1_{\widetilde{B}} - 1_{\widetilde{\mathrm{G}}} - \widetilde{\theta}_1 - \varepsilon\widetilde{\theta}_1\right)$. *Plus précisément :*

	$(1,\sigma)$	(x_a,σ)	(x_{a+b},σ)	$(x_a x_{a+b},\sigma)$	(π_0,σ)	(π_1,σ)	(π_2,σ)
$\widetilde{\theta}_4$	q^2	0	0	0	1	-1	-1

Preuve — On a :

$$\begin{array}{lcllcl}
\langle \operatorname{Ind}_B^{\mathrm{G}} 1_B, 1_{\widetilde{\mathrm{G}}}\rangle_{\mathrm{G}} & = & 1 & \langle \operatorname{Ind}_B^{\mathrm{G}} 1_B, \theta_1\rangle_{\mathrm{G}} & = & 2 \\
\langle \operatorname{Ind}_B^{\mathrm{G}} 1_B, \theta_4\rangle_{\mathrm{G}} & = & 1 & \langle \operatorname{Ind}_B^{\mathrm{G}} 1_B, \theta_5\rangle_{\mathrm{G}} & = & 0 \\
\langle \operatorname{Ind}_B^{\mathrm{G}} 1_B, \chi\rangle_{\mathrm{G}} & = & 0 & \forall \chi = \chi^\sigma \quad \text{tels} & \text{que} & \chi \neq 1,\, \theta_4,\, \theta_1,\, \theta_5
\end{array}$$

Par le lemme 1.2.4, $\operatorname{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}(\operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} 1_{\widetilde{B}}) = \operatorname{Ind}_B^{\mathrm{G}} 1_B$. Notons $\widetilde{\theta}_1$ une extention de θ_1 constituant de $\operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} 1_{\widetilde{B}}$. Comme $\langle \operatorname{Ind}_B^{\mathrm{G}} 1_B, \theta_1 \rangle_{\mathrm{G}} = 2$, il suit que la multiplicité de $\widetilde{\theta}_1$ dans $\operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} 1_{\widetilde{B}}$ est 1 ou 2. Or si cette multiplicité vaut 2, alors $\langle \operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} 1_{\widetilde{B}}, \operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} 1_{\widetilde{B}}\rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} \geq 6$. On calule $\langle \operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} 1_{\widetilde{B}}, \operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} 1_{\widetilde{B}}\rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}}$. On trouve :

$$\langle \operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} 1_{\widetilde{B}}, \operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} 1_{\widetilde{B}}\rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} = 5.$$

Il suit que $\widetilde{\theta}_1 + \varepsilon\widetilde{\theta}_1$ est un constituant de $\operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} 1_{\widetilde{B}}$. Le caractère $\rho\left(\operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} 1_{\widetilde{B}} - 1_{\widetilde{\mathrm{G}}} - \widetilde{\theta}_1 - \varepsilon\widetilde{\theta}_1\right)$ est irréductible. De plus sa restriction à G est θ_4. En utilisant les formules d'induction données dans la preuve de la proposition 3.1.4, le résultat suit.

□

3.1.3 Caractères extérieurs provenant d'induits de $\widetilde{\mathrm{Sz}}(q)$

Le groupe $\mathrm{Sz}(q)$ étant le groupe des points fixes sous σ, il suit que $\widetilde{\mathrm{Sz}}(q)$ est un produit direct. On obtient ainsi immédiatement ses classes extérieures et de sa table des caractères. Les classes de conjugaison et la table des caractères du groupe de Suzuki sont données dans les tables A.3 et A.4.

Proposition 3.1.6 *Dans la table 3.1, on donne les formules d'induction de* $\widetilde{\mathrm{Sz}}(q)$ *à* $\widetilde{\mathrm{G}}$.

	$\mathrm{Ind}_{\mathrm{Sz}(q)}^{G}\,\phi$
A_1	$q^2(q+1)(q^2-1)\phi(1)$
A_{32}	$q^2\phi(\sigma_0)$
A_{42}	$q(\phi(\rho_0)+\phi(\rho_0^{-1}))$
π_0	$(q-1)\phi(\pi_0)$
π_1	$(q-r+1)\phi(\pi_1)$
π_2	$(q+r+1)\phi(\pi_2)$

	$\mathrm{Ind}_{\widetilde{\mathrm{Sz}(q)}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}\,\phi$
(π_0,σ)	$\phi(\pi_0,\sigma)$
$(1,\sigma)$	$\phi(1,\sigma)+(q-1)(q^2+1)\phi(\sigma_0,\sigma)$
(x_a,σ)	0
(x_{a+b},σ)	$\frac{q}{2}(\phi(\rho_0,\sigma)+\phi(\rho_0^{-1},\sigma))$
$(x_a x_{a+b},\sigma)$	0
(π_1,σ)	$\phi(\pi_1,\sigma)$
(π_2,σ)	$\phi(\pi_2,\sigma)$

TAB. 3.1 – Formule d'induction de $\widetilde{\mathrm{Sz}}(q)$ à $\widetilde{\mathrm{G}}$.

	$(1,\sigma)$	(ρ_0,σ)	(σ_0,σ)	(ρ_0^{-1},σ)
Nombre	1	1	1	1
$\mid \mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{Sz}(q)}} \mid$	$2q^2(q-1)(q^2+1)$	$4q$	$2q^2$	$4q$
Recollement dans $\widetilde{\mathrm{G}}$	$(1,\sigma)$	(x_{a+b},σ)	$(1,\sigma)$	(x_{a+b},σ)

	(π_0,σ)	(π_1,σ)	(π_2,σ)	
Nombre	$\frac{1}{2}(q-2)$	$\frac{1}{4}(q+r)$	$\frac{1}{4}(q-r)$	
$\mid \mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{Sz}(q)}} \mid$	$2(q-1)$	$2(q+r+1)$	$2(q-r+1)$	
Recollement dans $\widetilde{\mathrm{G}}$	(π_0,σ)	(π_1,σ)	(π_2,σ)	

TAB. 3.2 – Fusion des classes de $\widetilde{\mathrm{Sz}}(q)$ dans $\widetilde{\mathrm{G}}$.

Preuve — La fusion des classes de $\mathrm{Sz}(q)$ dans G est donnée dans la table 2.2. Le théorème 2.1.1 montre que les classes de $\mathrm{Sz}(q)$ ayant des représentants d'ordre impair paramètrent les classes extérieures de $\widetilde{\mathrm{G}}$. De plus, $\mathrm{Cl}(1,\sigma)$ est une classe de $\widetilde{\mathrm{G}}$. Voyons ce qui se passe pour les trois classes restantes. D'une part, il est évident que $(x_{a+b}x_{2a+b},\sigma)$ et $(1,\sigma)$ sont conjugués et d'autre part, on a :

$$(x_a,1)(\rho_0,\sigma)(x_a,1)^{-1}=(x_{a+b},\sigma) \quad \text{et} \quad (x_b,1)(\rho_0^{-1},\sigma)(x_b,1)^{-1}=(x_{a+b},\sigma).$$

On en déduit donc que :

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{Cl}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(1,\sigma) & = & \mathrm{Cl}_{\widetilde{\mathrm{Sz}(q)}}(1,\sigma)\cup\mathrm{Cl}_{\widetilde{\mathrm{Sz}(q)}}(x_{a+b}x_{2a+b},\sigma) \\ \mathrm{Cl}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(x_{a+b},\sigma) & = & \mathrm{Cl}_{\widetilde{\mathrm{Sz}(q)}}(\rho_0,\sigma)\cup\mathrm{Cl}_{\widetilde{\mathrm{Sz}(q)}}(\rho_0^{-1},\sigma) \end{array}$$

On résume ces résultats dans la table 3.2. Les formules d'induction de $\widetilde{\mathrm{Sz}}(q)$ à $\widetilde{\mathrm{G}}$ s'obtiennent alors sans difficulté.

□

	A_1	A_{32}	A_{42}	π_0	π_1	π_2
$\mathrm{Ind}_{\mathrm{Sz}(q)}^{\mathrm{G}} 1_{\mathrm{Sz}(q)}$	$q^2(q+1)(q^2-1)$	q^2	$2q$	$q-1$	$q-\theta+1$	$q+\theta+1$
$\mathrm{Ind}_{\mathrm{Sz}(q)}^{\mathrm{G}} X$	$q^4(q+1)(q^2-1)$	0	0	$q-1$	$-(q-\theta+1)$	$-(q+\theta+1)$
$\mathrm{Ind}_{\mathrm{Sz}(q)}^{\mathrm{G}} X_i$	$q^2(q^2+1)(q+1)(q^2-1)$	q^2	$2q$	$(q-1)(\varepsilon_0^i\pi_0)$	0	0
$\mathrm{Ind}_{\mathrm{Sz}(q)}^{\mathrm{G}} Y_j$	$q^2(q-\theta+1)(q^2-1)^2$	$q^2(\theta-1)$	$-2q$	0	$-(q-\theta+1)\varepsilon_1^j(\pi_1)$	0
$\mathrm{Ind}_{\mathrm{Sz}(q)}^{\mathrm{G}} Z_k$	$q^2(q+\theta+1)(q^2-1)^2$	$-q^2(\theta+1)$	$-2q$	0	0	$-(q+\theta+1)\varepsilon_2^k(\pi_2)$
$\mathrm{Ind}_{\mathrm{Sz}(q)}^{\mathrm{G}} W$	$\frac{1}{2}q^2\theta(q^2-1)^2$	$-q^2\theta$	0	0	$q-\theta+1$	$-(q+\theta+1)$

TAB. 3.3 – Valeurs des induits de $\mathrm{Sz}(q)$ à G.

Soit $\widetilde{\phi} \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Sz}(q))$. Par abus de notation, on note encore $\widetilde{\phi}$ son induit de $\widetilde{\mathrm{Sz}}(q)$ à $\widetilde{\mathrm{G}}$. En utilisant les formules d'induction précédentes, on obtient :

Proposition 3.1.7 *Les valeurs des caractères induits de $\widetilde{\mathrm{Sz}}(q)$ à $\widetilde{\mathrm{G}}$ sont données dans les tables 3.3 et 3.4.*

	$(1,\sigma)$	(x_{a+b},σ)	(π_0,σ)	(π_1,σ)	(π_2,σ)
$\widetilde{1}_{\mathrm{Sz}(q)}$	$q(q^2-q+1)$	q	1	1	1
$\widetilde{X}$	q^2	0	1	-1	-1
$\widetilde{X}_i$	$q(q^2+1)$	q	$\varepsilon_0^i(\pi_0)$	0	0
$\widetilde{Y}_j$	$q-1)(q+q^2(\theta-1))$	$-q$	0	$-\varepsilon_1^j(\pi_1)$	0
$\widetilde{Z}_k$	$(q-1)(q-q^2(\theta+1))$	$-q$	0	0	$-\varepsilon_2^k(\pi_2)$
$\widetilde{W}$	$-\frac{1}{2}q^2\theta(q-1)$	0	0	1	-1

TAB. 3.4 – Valeurs des induits sur les classes extérieures.

On pose :

$$X_0 = \rho\left(\widetilde{1}_{\mathrm{Sz}(q)} - 1_{\widetilde{\mathrm{G}}} - \widetilde{\theta}_4 - \sum_{i\in E_0}\widetilde{\chi}_{A_0}(i)\right),$$

$$W_0 = \rho\left(\varepsilon\widetilde{W} - \theta(\widetilde{1}_{\mathrm{Sz}(q)} - 1_{\widetilde{\mathrm{G}}})\right).$$

Proposition 3.1.8 *Il existe, pour tout $k \in E_1$ (resp. $k \in E_2$), une extension ψ_k (resp. ψ'_k) de $\chi_{A_1}(k)$ (resp. $\chi_{A_2}(k)$), tels que :*

$$X_0 = \sum_{k\in E_2}\psi'_k + \sum_{k\in E_1}\psi_k,$$

$$W_0 = \sum_{k\in E_1}\psi_k - \sum_{k\in E_2}\psi'_k.$$

De plus, on donne les valeurs de X_0 et de W_0 dans la table suivante :

	$(1,\sigma)$	(x_a,σ)	(x_{a+b},σ)	$(x_a x_{a+b},\sigma)$	(π_0,σ)	(π_1,σ)	(π_2,σ)
X_0	$q(q-1)^2/2$	$-q/2$	$q/2$	$-q/2$	0	1	1
W_0	$-\theta(q-1)$	θ	$-\theta(q-1)$	θ	0	-1	1

Preuve — En utilisant les caractères irréductibles obtenus dans le paragraphe précédent, (théorème 3.1.4 et proposition 3.1.5), on a :

$$\begin{aligned}
\langle\widetilde{1}_{\mathrm{Sz}(q)}, 1_{\widetilde{\mathrm{G}}}\rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} &= 1\\
\langle\widetilde{1}_{\mathrm{Sz}(q)}, \varepsilon\rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} &= 0\\
\langle\widetilde{1}_{\mathrm{Sz}(q)}, \widetilde{\theta}_4\rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} &= 1\\
\langle\widetilde{1}_{\mathrm{Sz}(q)}, \widetilde{\theta}_4\varepsilon\rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} &= 0\\
\langle\widetilde{1}_{\mathrm{Sz}(q)}, \widetilde{\chi}_{A_0}(i)\rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} &= 1\\
\langle\widetilde{1}_{\mathrm{Sz}(q)}, \widetilde{\chi}_{A_0}(i)\varepsilon\rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} &= 0
\end{aligned}$$

De plus la décomposition en caractères σ-stables de $\mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}\widetilde{1}$ est

$$\begin{aligned}
\langle\mathrm{Ind}_{\mathrm{Sz}(q)}^{\mathrm{G}} 1_{\mathrm{Sz}(q)}, \theta_1\rangle_{\mathrm{G}} &= 0\\
\langle\mathrm{Ind}_{\mathrm{Sz}(q)}^{\mathrm{G}} 1_{\mathrm{Sz}(q)}, \theta_5\rangle_{\mathrm{G}} &= 0\\
\langle\mathrm{Ind}_{\mathrm{Sz}(q)}^{\mathrm{G}} 1_{\mathrm{Sz}(q)}, \chi_{A_1}(k)\rangle_{\mathrm{G}} &= 1\\
\langle\mathrm{Ind}_{\mathrm{Sz}(q)}^{\mathrm{G}} 1_{\mathrm{Sz}(q)}, \chi_{A_2}(k)\rangle_{\mathrm{G}} &= 1
\end{aligned}$$

Le caractère X_0 est somme de $q/2$ caractères irréductibles : exactement une extension de $\chi_{A_1}(k)$ ($k \in E_1$) et de $\chi_{A_2}(k)$ ($k \in E_2$). On note respectivement ψ_k ($k \in E_1$) et ψ'_k ($k \in E_2$), l'extension de $\chi_{A_1}(k)$ et $\chi_{A_2}(k)$ qui est constituant de X_0. On a :

$$X_0 = \sum_{k\in E_1}\psi_k + \sum_{k\in E_2}\psi'_k.$$

Décomposons maintenant $\widetilde{\mathcal{W}}$. Le calcul des produits scalaires donne :

$$\begin{array}{lcllcl} \langle \widetilde{\mathcal{W}}, 1_{\widetilde{\mathrm{G}}} \rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} & = & 0 & \langle \widetilde{\mathcal{W}}, \varepsilon \rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} & = & 0 \\ \langle \widetilde{\mathcal{W}}, \widetilde{\theta}_4 \rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} & = & 0 & \langle \widetilde{\mathcal{W}}, \widetilde{\theta}_4 \varepsilon \rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} & = & \theta \\ \langle \widetilde{\mathcal{W}}, \widetilde{\chi}_{A_0}(i) \rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} & = & 0 & \langle \widetilde{\mathcal{W}}, \widetilde{\chi}_{A_0}(i)\varepsilon \rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} & = & \theta \\ \langle \widetilde{\mathcal{W}}, X_0 \rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} & = & 0 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcllcl} \langle \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \widetilde{\mathcal{W}}, \theta_1 \rangle_{\mathrm{G}} & = & 0 & \langle \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \widetilde{\mathcal{W}}, \theta_5 \rangle_{\mathrm{G}} & = & 0 \\ \langle \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \widetilde{\mathcal{W}}, \chi_{A_1}(k) \rangle_{\mathrm{G}} & = & \theta - 1 & \langle \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \widetilde{\mathcal{W}}, \chi_{A_2}(k) \rangle_{\mathrm{G}} & = & \theta + 1 \end{array}$$

On est en mesure de calculer Θ, la σ-réduction (cf § 1.2.2) de $\widetilde{\mathcal{W}} - \theta(\widetilde{\theta}_4\varepsilon + \sum \widetilde{\chi}_{A_0}(i)\varepsilon)$. Comme $\widetilde{\mathcal{W}}$ et X_0 n'ont aucun constituant en commun, on en déduit la décomposition de Θ en composants irréductibles :

$$\Theta = (\theta - 1) \sum_{k \in E_1} \psi_k \varepsilon + (\theta + 1) \sum_{k \in E_2} \psi'_k \varepsilon.$$

On remarque que :

$$W_0 = \Theta\varepsilon - \theta X_0.$$

D'où l'on obtient que :

$$W_0 = \sum_{k \in E_2} \psi'_k - \sum_{k \in E_1} \psi_k.$$

Les valeurs sur les classes extérieures de X_0 et W_0 sont données dans le tableau suivant :

	$(1,\sigma)$	(x_a,σ)	(x_{a+b},σ)	$(x_a x_{a+b},\sigma)$	(π_0,σ)	(π_1,σ)	(π_2,σ)
X_0	$q(q-1)^2/2$	$-q/2$	$q/2$	$-q/2$	0	1	1
W_0	$-\theta(q-1)$	θ	$-\theta(q-1)$	θ	0	-1	1

□

Pour tout $j \in E_1$ et tout $k \in E_2$, on note :

$$\begin{aligned} \varphi_j &= \rho\left(\widetilde{Y}_j - \widetilde{Y}_1\right) \\ \vartheta_k &= \rho\left(\widetilde{Z}_k - \widetilde{Z}_1\right). \end{aligned}$$

Proposition 3.1.9 *Avec les notations précédentes, on a :*

$$\varepsilon\widetilde{\chi}_{A_1}(1) = \frac{4}{q + 2\theta}\left(\sum_{j \in E_1} \varphi_j + \frac{1}{2}(X_0 - W_0)\right),$$

$$\varepsilon\widetilde{\chi}_{A_2}(1) = \frac{4}{q - 2\theta}\left(\sum_{k \in E_2} \vartheta_k + \frac{1}{2}(X_0 + W_0)\right).$$

Preuve — On a :

$$\langle\, \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}(\varphi_j), \chi_{A_1}(j)\,\rangle_{\mathrm{G}} = -1, \qquad \langle\, \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}(\varphi_j), \chi_{A_1}(1)\,\rangle_{\mathrm{G}} = 1.$$

De plus, pour tout autre caractère σ-stable χ, on a $\langle\, \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}(\widetilde{\varphi}_j), \chi\,\rangle_{\mathrm{G}} = 0$. Ainsi :

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}(\varphi_j) = \chi_{A_1}(1) - \chi_{A_1}(j).$$

Un calcul similaire donne :

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}(\vartheta_k) = \chi_{A_2}(1) - \chi_{A_2}(k).$$

Notons θ_j (resp. $\theta_{1,j}$) le constituant irréductible de φ_j de restriction à G égal à respectivement $\chi_{A_1}(j)$ (resp. $\chi_{A_1}(1)$). En particulier, on a :

$$\varphi_j = \theta_{1,j} - \theta_j.$$

Démontrons dans un premier temps que $\theta_{1,j}$ ne dépend pas de j. En effet, un calcul direct montre que $\langle\, \varphi_j - \varphi_2, \varphi_j - \varphi_2\,\rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} = 2$ pour $j \geq 3$. Or, on a :

$$\varphi_j - \varphi_2 = \theta_2 - \theta_j + \theta_{1,j} - \theta_{1,2}.$$

De plus :

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}(\varphi_j - \varphi_2) = \chi_{A_1}(2) - \chi_{A_1}(j),$$

donc θ_2 et θ_j sont constituants de $\varphi_j - \varphi_2$, et comme $\varphi_j - \varphi_2$ possède exactement deux constituants, il suit que $\theta_{1,j} - \theta_{1,2} = 0$, ie :

$$\forall\, j \geq 2 \quad \theta_{1,j} = \theta_{1,2}.$$

On note θ_1 ce constituant commun. On a :

$$\langle \varphi_i, X_0 \rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} = 0.$$

Si $\theta_1 = \psi_1$, alors $\forall j \geq 2,\ \theta_j = \psi_j$. En effet, on aurait sinon $\langle \varphi_i, X_0 \rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} = 1 \neq 0$. Si $\theta_1 = \varepsilon\psi_1$, alors $\forall j \geq 2,\ \theta_j = \varepsilon\psi_j$ (sinon $\langle \varphi_i, X_0 \rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} = -1 \neq 0$).

En résumé :

$$\left\{ \begin{array}{lllr} \theta_j & = & \psi_j & \forall\, j \in E_1 \\ & \text{ou} & & \\ \theta_j & = & \psi_j\varepsilon & \forall\, j \in E_1 \end{array} \right.$$

De plus :

$$\frac{1}{4}(q+2\theta)\theta_1 = \frac{1}{4}(q+2\theta)\theta_1 - \sum_{j \in E_1} \theta_j + \sum_{i \in E_1} \theta_j = \sum_{j \neq 1} \varphi_j + \sum_{j \in E_1} \theta_j.$$

Ainsi,

$$\theta_1 = \frac{4}{q+2\theta} \left(\sum_{j \neq 1} \varphi_j + \sum_{j \in E_1} \theta_j \right).$$

De plus, par définition de X_0 et de W_0, on voit immédiatement que :

$$\sum_{j\in E_1} \psi_j = \frac{1}{2}(X_0 - W_0).$$

Ainsi, on a :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{j\in E_1} \theta_j & = & \displaystyle\frac{1}{2}(X_0 - W_0) \\ & \text{ou} & \\ \displaystyle\sum_{j\in E_1} \theta_j & = & \displaystyle\frac{1}{2}(X_0 - W_0)\varepsilon \end{array}\right.$$

On pose alors :

$$\left\{\begin{array}{ccc} f_1 & = & \displaystyle\frac{4}{q+2\theta}\left(\sum_{j\neq 1}\varphi_j + \frac{1}{2}(X_0 - W_0)\right) \\ & & \\ f_2 & = & \displaystyle\frac{4}{q+2\theta}\left(\sum_{j\neq 1}\varphi_j + \frac{1}{2}(X_0 - W_0)\varepsilon\right) \end{array}\right.$$

En vu de l'étude que l'on vient de faire, soit f_1, soit f_2 est un caractère irréductible. Or :

$$f_1(\pi_1, \sigma) = \varepsilon_1^1(\pi_1) + \frac{8}{q+2\theta}$$

n'est pas un entier algébrique, donc f_1 n'est pas un caractère. Il en résulte que f_2 est irréductible et que $f_2 = \varepsilon\psi_1$. On prouve de manière similaire que :

$$\varepsilon\psi_1' = \frac{4}{q-2\theta}\left(\sum_{k\neq 1}\vartheta_k + \frac{1}{2}(X_0 + W_0)\varepsilon\right).$$

□

Proposition 3.1.10 *Les valeurs des extensions $\widetilde{\chi}_{A_1}(k)$ $(k \in E_1)$ et $\widetilde{\chi}_{A_2}(k)$ $(k \in E_2)$ sont :*

	$(1,\sigma)$	(x_a,σ)	(x_{a+b},σ)	$(x_a x_{a+b},\sigma)$	(π_1,σ)	(π_2,σ)
$\widetilde{\chi}_{A_1}(j)$	$(q-1)(q-2\theta+1)$	-1	$2\theta-1$	-1	$-\varepsilon_1^j(\pi_1)$	0
$\widetilde{\chi}_{A_2}(k)$	$(q-1)(q+2\theta+1)$	-1	$-2\theta-1$	-1	0	$-\varepsilon_2^k(\pi_2)$

Preuve — Comme on l'a vu dans la preuve de la proposition 3.1.9, on a $\psi_1 = \varepsilon\phi_1$ entraine que, pour tout $j \in E_1$, on a :

$$\psi_j = \varepsilon\phi_j.$$

Donc les valeurs de ψ_j se déduisent immédiatement de la relation :

$$\psi_j = \psi_1 - \varepsilon\varphi_j.$$

De même, on déduit que :

$$\psi'_k = \psi'_1 - \varepsilon\vartheta_k.$$

Ces caractères prennent des valeurs non nulles sur $(1,\sigma)$. On applique donc la convention de §1.2.2.

□

En décomposant les $\widetilde{Y}_i$, on a :

$$\langle \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \widetilde{Y}_i, \theta_1\rangle_G = 1 \quad \text{et} \quad \langle \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \widetilde{Y}_i, \theta_5\rangle_G = 1.$$

Notons $\widetilde{\theta}_1$ et $\widetilde{\theta}_5$ les deux constituants[1] de $\widetilde{Y}_i$ dont les restrictions à G sont respectivement θ_1 et θ_5. On peut exprimer grâce à $\widetilde{Y}_i$ la somme $\widetilde{\theta}_1 + \widetilde{\theta}_5$. On décompose à l'aide du produit scalaire sur $\widetilde{\mathrm{G}}$ les caractères que l'on connaît déjà, et on obtient la relation sur les classes extérieures :

$$\begin{aligned}\widetilde{Y}_i = \;& (2\theta+1)\sum_{j=1}^{(q-2\theta)/4} \widetilde{\chi}_{A_2}(j) + (2\theta-3)\sum_{j=1}^{(q+2\theta)/4} \widetilde{\chi}_{A_1}(j) \\ & +(2\theta-1)\sum_{i=1}^{(q-2)/2} \widetilde{\chi}_{A_0}(i) + (2\theta-1)\widetilde{\theta}_4 + \widetilde{\theta}_1 + \widetilde{\theta}_5 - \widetilde{\chi}_{A_1}(i)\varepsilon.\end{aligned}$$

Voici les valeurs de $\widetilde{\theta}_1 + \widetilde{\theta}_5$ obtenues à partir de la relation ci-dessus :

	$(1,\sigma)$	(x_a,σ)	(x_{a+b},σ)	$(x_a x_{a+b},\sigma)$	(π_0,σ)	(π_1,σ)	(π_2,σ)
$\widetilde{\theta}_1 + \widetilde{\theta}_5$	$2\theta(q-1)$	0	-2θ	0	0	2	-2

Les induits des caractères de $\widetilde{\mathrm{Sz}}(q)$ sont insuffisants pour distinguer ces deux caractères et les relations d'orthogonalité ne permettent pas de conclure. Nous allons donc les construire par un autre moyen.

3.1.4 Induits de $\widetilde{U}_0$

Soit $\theta_3(1)$ le caractère de B de degré $\frac{1}{2}q(q-1)^2$. En utilisant la table des caractères de B donnée p. 87 de [12], on déduit que $\mathrm{Res}_B^{\mathrm{G}}\,\theta_5 = \theta_3(1)$. Ainsi $\mathrm{Res}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}\,\widetilde{\theta}_5$ vaut $\widetilde{\theta}_3(1)$ ou $\varepsilon\widetilde{\theta}_3(1)$. On va construire $\widetilde{\theta}_3(1)$. Pour cela, on introduit l'ensemble :

$$U_0 = \langle x_a(1)\rangle\langle x_b(1)\rangle X_{a+b}X_{2a+b}.$$

C'est un sous-groupe σ-stable de U. On pose alors :

$$\widetilde{U}_0 = U_0 \rtimes \langle\sigma\rangle.$$

On va induire à $\widetilde{B}$ un caractère linéaire de $\widetilde{U}_0$. Sur $\mathbb{F}_q$, on introduit le caractère du groupe additif (cf. [12]) :

$$\lambda : \mathbb{F}_q \longrightarrow \{-1,1\} \quad \begin{cases} 1 & \text{si } X^2+X+x \text{ a une racine dans K} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

[1] On va voir plus loin dans le texte que cette notation est cohérente avec la convention du §1.2.2. On adopte ici volontairement cet abus de notation dans un souci de clareté.

ce qui permet d'introduire sur U_0 les caractères linéaires $\lambda(k,l)$ suivant :

$$\lambda(k,l) = \begin{cases} x_a \longmapsto (-1)^k \\ x_b \longmapsto (-1)^l \\ x_{a+b}(u)x_{2a+b}(v) \longmapsto \lambda(u+v) \end{cases}$$

Lemme 3.1.1 *Les caractères $\lambda(0,0)$ et $\lambda(1,1)$ sont σ-stables.*

Preuve — Si $\lambda(v)=1$, alors il existe $t \in \mathbb{F}_q$ tel que $t^2+t=v$. Donc $(t^\theta)^2+t^\theta=v^\theta$, d'où $\lambda(v^\theta)=1$. Si $\lambda(v)=-1$, alors $\lambda(v^\theta)=-1$ (sinon en raisonnant par l'absurde, si $\lambda(v^\theta)=1$ alors il existe $t \in \mathbb{F}_q$ tel que $t^2+t=v^\theta$. Donc $(t^{2\theta})^2+t^{2\theta}=v$. Ainsi, $\lambda(v)=1$, ce qui est absurde). Il suit donc que :

$$\begin{aligned} \lambda(k,l)^\sigma(x_{a+b}(u)x_{2a+b}(v)) = \ & \lambda(k,l)(x_{a+b}(v^\theta)x_{2a+b}(u^{2\theta})) \\ & = \lambda(v^\theta+u^{2^\theta}) \\ & = \lambda(v^\theta)\lambda(u^{2\theta}) \\ & = \lambda(v)\lambda(u) \\ & = \lambda(k,l)(x_{a+b}(u)x_{2a+b}(v)). \end{aligned}$$

Pour les choix des paramètres $(0,0)$ et $(1,1)$, le morphisme a la même valeur sur x_a et x_b. Donc finalement, $\lambda(0,0)$ et $\lambda(1,1)$ sont σ-stables.

□

Par le lemme 1.2.5, on peut prolonger $\lambda(0,0)$ et $\lambda(1,1)$ sur $\widetilde{U}_0$, que l'on note $\widetilde{\lambda}(0,0)$ et $\widetilde{\lambda}(1,1)$. Le but maintenant est d'induire à $\widetilde{B}$ ces caractères de $\widetilde{U}_0$.

Etudions plus précisement le groupe U_0. Ce groupe est de cardinal $4q^2$. De plus, le groupe U_0 a $2q$ classes σ-stables. Les relations de Chevalley permettent de dresser la table de conjugaison de U_0, et les classes extérieures. On donne les classes de conjugaison de U_0 dans la table 3.5 et les classes extérieures de $\widetilde{U}_0$ dans la table 3.6
Voyons maintenant la fusion des classes dans B et $\widetilde{B}$. On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1.2 *Les deux ensembles $F = \operatorname{Ker}\lambda$ et $E = \{t+t^\theta \mid t \in \mathbb{F}_q\}$ sont égaux.*

Preuve — On pose, pour tout entier m, $E_m = \{t+t^{2^m} \mid t \in \mathbb{F}_q\}$. On va prouver par récurrence sur m que $E_m \subseteq F$. On a $E_1 = F$. Supposons que la propriété soit réalisée au rang m, c'est à dire que $E_m \subseteq F$. On va prouver qu'alors la propriété est vraie au rang $m+1$.
Soit $t+t^{2^{m+1}} \in E_{m+1}$. Montrons que $t+t^{2^{m+1}}$ est dans F. Comme $t+t^{2^m} \in F$, il existe $\alpha \in \mathbb{F}_q$ tel que $t+t^{2^m} = \alpha+\alpha^2$. On élève au carré et on obtient $t^{2^{m+1}} = t^2+\alpha^2+\alpha^4$. Ainsi $t+t^{2^{m+1}} = t+t^2+\alpha^2+\alpha^4 = (t+\alpha^2)+(t+\alpha^2)^2$, ce qui achève la récurrence. On a bien :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad E_m \subseteq F.$$

Soit :

$$f : \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{F}_q, \quad t \longmapsto t+t^\theta,$$

alors f est un morphisme additif de $\mathbb{F}_q$, de noyau $\{0,1\}$ (car $\theta-1$ est premier avec $q-1$). De plus $E = \operatorname{Im} f$ donc $|E| = q/2$. Finalement, $E = E_n \subseteq F$ et $|F| = q/2$ entraine que $E = F$.

□

	Représentant	nombre de classes	$\lvert C_{U_0}(x)\rvert$
	1	1	$4q^2$
	x_a	1	$2q^2$
	x_b	1	$2q^2$
	$x_{a+b}(u)$	$q-1$	$4q^2$
	$x_{2a+b}(v)$	$q-1$	$4q^2$
	x_ax_b	1	$2q^2$
	$x_{a+b}(u)x_{2a+b}(v)$	$(q-1)^2$	$4q^2$
$u \neq 0$	$x_ax_{a+b}(u)$	$q-1$	$2q^2$
$u \neq 0$	$x_bx_{a+b}(u)$	$q-1$	$2q^2$
$v \neq 0,1$	$x_ax_{2a+b}(v)$	$q-2$	$2q^2$
$v \neq 0,1$	$x_bx_{2a+b}(v)$	$q-2$	$2q^2$
$u \neq 0$	$x_ax_bx_{a+b}(u)$	$q-1$	$2q^2$
$v \neq 0,1$	$x_ax_bx_{a+b}(v)$	$q-2$	$2q^2$
$u,v \neq 0,1$	$x_ax_{a+b}(u)bx_{2a+b}(v)$	$\frac{1}{2}(q-2)^2$	$2q^2$
$u,v \neq 0,1$	$x_bx_{a+b}(u)bx_{2a+b}(v)$	$\frac{1}{2}(q-2)^2$	$2q^2$
$u,v \neq 0,1$	$x_ax_bx_{a+b}(u)bx_{2a+b}(v)$	$\frac{1}{2}(q-2)^2$	$2q^2$

TAB. 3.5 – Classes de Conjugaison de U_0.

	Représentant	nombre de classes	$\lvert C_{\widetilde{U}_0}(x)\rvert$
	$(1,\sigma)$	1	$4q$
	$(x_ax_{a+b}(u),\sigma)$	q	$4q$
$u \neq 0$	$(x_{a+b}(u),\sigma)$	$q-1$	$4q$

TAB. 3.6 – Classes extérieures de $\widetilde{U}_0$.

En utilisant l'article [12], le lemme A.1.1 et les relations de Chevalley, on obtient la répartition des $\widetilde{U}_0$-classes dans les $\widetilde{B}$-classes. On donne dans la table 3.7 la fusion des classes de U_0 dans B. La table 3.8 donne la fusion des classes extérieures. Elle est obtenue en utilisant les relations de Chevalley et le lemme 3.1.2. Par souci de clarté, on confond les classes de conjugaison de $\widetilde{U}_0$ avec l'un de leurs représentants. Les formules d'induction se déduisent alors directement des tables 3.7 et 3.8. On donne les formules d'induction dans les tables 3.9 et 3.10.

Appliquons ces formules d'induction à $\lambda(1,1)$. En remarquant que $\sum_{t\in K} \lambda(t) = 0$, les calculs se font sans difficulté. Le résultat est donné dans la table 3.11.

Lemme 3.1.3 *On a :*

$$\mathrm{Ind}_{\widetilde{U}_0}^{\widetilde{B}}\, \widetilde{\lambda}(1,1) = \frac{1}{4}(q+2\theta)\widetilde{\theta}_3(1) + \frac{1}{4}(q-2\theta)\widetilde{\theta}_3(1)\varepsilon.$$

$$
\begin{aligned}
A_1 \cap U_0 &= 1 \\
A_2 \cap U_0 &= \bigsqcup_{u \in \mathrm{K}^\times} x_{2a+b}(u) \\
A_{31} \cap U_0 &= \bigsqcup_{u \in \mathrm{K}^\times} x_{a+b}(u) \\
A_{32} \cap U_0 &= \bigsqcup_{u,v \in \mathrm{K}^\times} x_{a+b}(u)x_{2a+b}(v) \\
A_{41} \cap U_0 &= \bigsqcup_{u \neq u+1} x_b x_{a+b}(u)x_{2a+b}(u^2) \\
A_{42} \cap U_0 &= \bigsqcup_{u \in \mathrm{K}^\times} x_b x_{a+b}(u) \bigsqcup_{u \neq 0,1} x_b x_{2a+b}(u) \bigsqcup_{u \neq v^2} x_b x_{a+b}(u)x_{2a+b}(v) \\
A_{51} \cap U_0 &= \bigsqcup_{u \neq u+1} x_a x_{a+b}(u)x_{2a+b}(u) \\
A_{52} \cap U_0 &= \bigsqcup_{u \in \mathrm{K}^\times} x_a x_{a+b}(u) \bigsqcup_{u \neq 0,1} x_a x_{2a+b}(u) \bigsqcup_{u \neq v} x_a x_{a+b}(u)x_{2a+b}(v) \\
A_{61} \cap U_0 &= \bigsqcup_{\lambda(u)=1} x_a x_b x_{a+b}(u) \bigsqcup_{\lambda(u)=1, u\neq 0} x_a x_b x_{2a+b}(u) \\
&\quad \bigsqcup_{\lambda(u+v)=1} x_a x_b x_{a+b}(u)x_{2a+b}(v) \\
A_{62} \cap U_0 &= \bigsqcup_{\lambda(u)=-1} x_a x_b x_{a+b}(u) \bigsqcup_{\lambda(u)=-1, u\neq 1} x_a x_b x_{2a+b}(u) \\
&\quad \bigsqcup_{\lambda(u+v)=-1} x_a x_b x_{a+b}(u)x_{2a+b}(v)
\end{aligned}
$$

TAB. 3.7 – Fusion des classes de U_0 dans B.

$$
\begin{aligned}
(1,\sigma)_{\widetilde{B}} &= (1,\sigma) \\
(x_a,\sigma)_{\widetilde{B}} &= \bigsqcup_{\lambda(u)=1} (x_a x_{a+b}(u),\sigma) \\
(x_{a+b},\sigma)_{\widetilde{B}} &= \bigsqcup_{u\neq 0} (x_{a+b}(u),\sigma) \\
(x_a x_{a+b},\sigma)_{\widetilde{B}} &= \bigsqcup_{\lambda(u)=-1} (x_a x_{a+b}(u),\sigma)
\end{aligned}
$$

TAB. 3.8 – Fusion des classes extérieures de $\widetilde{U}_0$ dans $\widetilde{B}$.

	$\mathrm{Ind}_{U_0}^{B}\,\phi$
A_1	$\frac{1}{4}q^2(q-1)^2\phi(1)$
A_2	$\frac{1}{4}q^2(q-1)\sum_{u\in\mathrm{K}^\times}\phi(x_{2a+b}(u))$
A_{31}	$\frac{1}{4}q^2(q-1)\sum_{u\in\mathrm{K}^\times}x_{a+b}(u)$
A_{32}	$\frac{q^2}{4}\sum_{u,v\in\mathrm{K}^\times}\phi(x_{a+b}(u)x_{2a+b}(v))$
A_{41}	$\frac{1}{2}q(q-1)+\sum_{u\neq u+1}\phi(x_bx_{a+b}(u)x_{2a+b}(u^2))$
A_{42}	$\frac{q}{2}\sum_{u\in\mathrm{K}^\times}\phi(x_bx_{a+b}(u))+\sum_{u\neq 0,1}\phi(x_bx_{2a+b}(u))+\sum_{u\neq v^2}\phi(x_bx_{a+b}(u)x_{2a+b}(v))$
A_{51}	$\frac{1}{2}q(q-1)\sum_{u\neq u+1}\phi(x_ax_{a+b}(u)x_{2a+b}(u))$
A_{52}	$\frac{q}{2}\sum_{u\in\mathrm{K}^\times}\phi(x_ax_{a+b}(u))+\sum_{u\neq 0,1}\phi(x_ax_{2a+b}(u))+\sum_{u\neq v}\phi(x_bx_{a+b}(u)x_{2a+b}(v))$
A_{61}	$\sum_{\lambda(u)=1}\phi(x_ax_bx_{a+b}(u))+\sum_{\lambda(u)=1,u\neq 0}\phi(x_ax_bx_{2a+b}(u))$ $+\sum_{\lambda(u+v)=1}\phi(x_ax_bx_{a+b}(u)x_{2a+b}(v))$
A_{62}	$\sum_{\lambda(u)=-1}\phi(x_ax_bx_{a+b}(u))+\sum_{\lambda(u)=-1,u\neq 1}\phi(x_ax_bx_{2a+b}(u))$ $+\sum_{\lambda(u+v)=-1}\phi(x_ax_bx_{a+b}(u)x_{2a+b}(v))$

TAB. 3.9 – Formule d'induction de U_0 à B.

	$(1,\sigma)$	(x_a,σ)	(x_{a+b},σ)	(x_ax_{a+b},σ)
$\mathrm{Ind}_{\widetilde{U}_0}^{\widetilde{B}}\,\phi$	$\frac{1}{2}q(q-1)\phi(1,\sigma)$	$\sum_{\lambda(u)=1}\phi(x_ax_{a+b}(u),\sigma)$	$\frac{q}{2}\sum_{u\neq 0}\phi(x_{a+b}(u),\sigma)$	$\sum_{\lambda(u)=-1}\phi(x_ax_{a+b}(u),\sigma)$

TAB. 3.10 – Formule d'induction sur les classes extérieures.

	A_1	A_2	A_{31}	A_{32}	A_{41}
$\mathrm{Ind}_{U_0}^{B}\,\lambda(1,1)$	$\frac{1}{4}q^2(q-1)^2$	$-\frac{1}{4}q^2(q-1)$	$-\frac{1}{4}q^2(q-1)$	$\frac{q^2}{4}$	$-\frac{1}{4}q^2(q-1)$

	A_{42}	A_{51}	A_{52}	A_{61}	A_{62}
$\mathrm{Ind}_{U_0}^{B}\,\lambda(1,1)$	$\frac{q^2}{4}$	$-\frac{1}{4}q^2(q-1)$	$\frac{q^2}{4}$	$\frac{q^2}{4}$	$\frac{-q^2}{4}$

	$(1,\sigma)$	(x_a,σ)	(x_{a+b},σ)	$(x_a x_{a+b},\sigma)$
$\mathrm{Ind}_{\widetilde{U}_0}^{\widetilde{B}}\,\lambda(1,1)$	$\frac{1}{2}q(q-1)$	$-\frac{q}{2}$	$-\frac{q}{2}$	$\frac{q}{2}$

TAB. 3.11 – Induit de $\lambda(1,1)$.

Preuve — Posons $\chi = \mathrm{Ind}_{\widetilde{U}_0}^{\widetilde{B}}\,\widetilde{\lambda}(1,1)$. En utilisant la table des caractères de B (cf. [12] p.87), on prouve que $\langle \mathrm{Res}_B^{\widetilde{B}}\,\chi, \theta_3(1)\rangle_B = \frac{1}{2}q$, donc il existe n et n_ε vérifiant :

$$n + n_\varepsilon = \frac{1}{2}q,$$

et tels que :

$$\chi = n\widetilde{\theta}_3(1) + n_\varepsilon\widetilde{\theta}_3(1)\varepsilon.$$

On peut supposer sans perte de généralité que l'on a choisi $\widetilde{\theta}_3(1)$ tel que $n \geq n_\varepsilon$. On a $\chi\varepsilon = n_\varepsilon\widetilde{\theta}_3(1) + n\widetilde{\theta}_3(1)\varepsilon$, donc par soustraction, on en déduit que :

$$\chi - \chi\varepsilon = (n - n_\varepsilon)(\widetilde{\theta}_3(1) - \widetilde{\theta}_3(1)\varepsilon).$$

Il suit que $\langle \chi-\chi\varepsilon, \chi-\chi\varepsilon\rangle_{\widetilde{B}} = 2(n-n_\varepsilon)^2$. Or $\langle \chi-\chi\varepsilon, \chi-\chi\varepsilon\rangle_{\widetilde{B}} = q$, donc $2(n-n_\varepsilon)^2 = 2\theta^2$, ie $(n-n_\varepsilon)^2 = \theta^2$. Donc $n - n_\varepsilon = \theta$. On résout le système :

$$\begin{cases} n + n_\varepsilon &= \frac{1}{2}q \\ n - n_\varepsilon &= \theta \end{cases}$$

On trouve $n = \frac{1}{4}(q + 2\theta)$ et $n_\varepsilon = \frac{1}{4}(q - 2\theta)$.

$\square$

Lemme 3.1.4 *Les valeurs de $\widetilde{\theta}_3(1)$ sur les classes extérieures sont :*

	$(1,\sigma)$	(x_a,σ)	(x_{a+b},σ)	$(x_a x_{a+b},\sigma)$	(π_0,σ)
$\widetilde{\theta}_3(1)$	$\theta(q-1)$	$-\theta$	$-\theta$	θ	0

Preuve — Le calcul de $\widetilde{\theta}_3(1)$ se déduit aisément du lemme 3.1.3. Calculons par exemple $\widetilde{\theta}_3(1)(1,\sigma)=\alpha$. On a :

$$\frac{1}{4}(q+2\theta)\alpha-\frac{1}{4}(q-2\theta)\alpha=\frac{1}{2}q(q-1),$$

d'où l'on déduit que $\alpha=\theta(q-1)$.

□

Posons :

$$\phi=\mathrm{Res}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{G}}(\widetilde{\theta}_1+\widetilde{\theta}_5).$$

On a $\langle\,\phi,\,\widetilde{\theta}_3(1)\,\rangle_{\widetilde{B}}=1$ et $\langle\,\phi,\,\varepsilon\widetilde{\theta}_3(1)\,\rangle_{\widetilde{B}}=0$. D'autre part, $\mathrm{Res}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{G}}\widetilde{\theta}_5$ est une extension de $\theta_3(1)$. Ainsi :

$$\mathrm{Res}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{G}}\widetilde{\theta}_5=\widetilde{\theta}_3(1)\quad\text{et}\quad\mathrm{Res}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{G}}\widetilde{\theta}_1=\phi-\widetilde{\theta}_3(1).$$

On en déduit les valeurs de $\widetilde{\theta}_5$ et de $\widetilde{\theta}_1$ sur (π_0,σ), $(1,\sigma)$, (x_a,σ), (x_{a+b},σ) et (x_ax_{a+b},σ). Déterminons les valeurs de $\widetilde{\theta}_1$ et $\widetilde{\theta}_5$ sur (π_1,σ) et (π_2,σ).

Lemme 3.1.5 *On a :*

$$\widetilde{\theta}_1(\pi_1,\sigma)=\widetilde{\theta}_5(\pi_1,\sigma)=1\quad\textit{et}\quad\widetilde{\theta}_1(\pi_2,\sigma)=\widetilde{\theta}_5(\pi_2,\sigma)=-1.$$

Preuve — Notons $\alpha=\widetilde{\theta}_1(\pi_1,\sigma)$ et $\beta=\widetilde{\theta}_5(\pi_1,\sigma)$. On sait que $\alpha+\beta=2$. En utilisant les relations d'orthogonalité des colonnes, on en déduit que $|\alpha|^2+|\beta|^2=2$. Comme (π_1,σ) et $(\pi_1,\sigma)^{-1}$ sont conjugués, il suit que α et β sont réels. On substitue β par $2-\alpha$ et on trouve que α est racine du polynôme X^2-2X+1. Donc $\alpha=1$. Il suit que $\beta=1$. On raisonne de même pour montrer que $\widetilde{\theta}_1(\pi_2,\sigma)=\widetilde{\theta}_5(\pi_2,\sigma)=-1$.

□

On donne finalement les valeurs de $\widetilde{\theta}_1$ et de $\widetilde{\theta}_5$ sur les classes extérieures.

	$(1,\sigma)$	(x_a,σ)	(x_{a+b},σ)	(x_ax_{a+b},σ)	(π_0,σ)	(π_1,σ)	(π_2,σ)
$\widetilde{\theta}_1$	$\theta(q-1)$	θ	$-\theta$	$-\theta$	0	1	-1
$\widetilde{\theta}_5$	$\theta(q-1)$	$-\theta$	$-\theta$	θ	0	1	-1

3.1.5 Tables des caractères de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_q)\rtimes\langle\,\sigma\,\rangle$

Les résultats des paragraphes précédent permettent d'établir :

Théorème 3.1.1 *Soit n un entier positif. On pose $q=2^{2n+1}$, $\theta=2^n$ et σ l'automorphisme exceptionnel de $B_2(q)$ dont le sous-groupe des points fixes est le groupe de Suzuki de paramètre q. Alors, le groupe $B_2(q)\rtimes\langle\,\sigma\,\rangle$ possède $(2q+6)$ extensions irréductibles de $(q+3)$ caractères σ-stable de $B_2(q)$. Les valeurs des extensions sur les classes extérieures sont données dans la table 3.12.*

		$(1,\sigma)$	(x_a,σ)	(x_{a+b},σ)	(x_ax_{a+b},σ)	(π_0,σ)	(π_1,σ)	(π_2,σ)
$\|C_{\widetilde{\mathrm{G}}}\|$		$2q^2(q-1)(q^2+1)$	$4q$	$2q^2$	$4q$	$2(q-1)$	$2(q+2\theta+1)$	$2(q-2\theta+1)$
$1_{\widetilde{\mathrm{G}}}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\widetilde{\theta}_4$	1	q^2	0	0	0	1	-1	-1
$\widetilde{\theta}_1$	1	$\theta(q-1)$	θ	$-\theta$	$-\theta$	0	1	-1
$\widetilde{\theta}_5$	1	$\theta(q-1)$	$-\theta$	$-\theta$	θ	0	1	-1
$\widetilde{\chi}_{A_0}(i)$	$i\in E_0$	q^2+1	1	1	1	$\varepsilon_0^i(\pi_0)$	0	0
$\widetilde{\chi}_{A_1}(j)$	$j\in E_1$	$(q-1)(q-2\theta+1)$	-1	$2\theta-1$	-1	0	$-\varepsilon_1^j(\pi_1)$	0
$\widetilde{\chi}_{A_2}(k)$	$k\in E_2$	$(q-1)(q+2\theta+1)$	-1	$-2\theta-1$	-1	0	0	$-\varepsilon_2^k(\pi_2)$

TAB. 3.12 – Caractères extérieurs de $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{F}_q)\rtimes\langle\,\sigma\,\rangle$ sur les classes extérieures.

3.2 Le type G_2

Pour déterminer les valeurs des caractères extérieurs de $\widetilde{\mathrm{G}}=\mathrm{G}_2(q)\rtimes\langle\,\sigma\,\rangle$, on utilise d'une part des méthodes similaires au paragraphe précédent. En effet, on remarque que les centralisateurs des éléments extérieurs donnés dans la table 2.4 sont aussi des groupes qui prennent des valeurs non nulles sur les classes extérieures. En induisant des caractères irréductibles de certains de ces sous-groupes, on va déterminer quelques éléments de $\mathrm{Irr}(\widetilde{\mathrm{G}})$. D'autre part on se sert la théorie p-modulaire pour calculer les valeurs manquantes. Par exemple, on utilise la caractérisation des p-blocs de défaut 0 (cf. §1.3.2) ou les relations d'orthogonalité par blocs (cf. §1.3.1 (1.5)). On pose :

$$\widetilde{B}=B\rtimes\langle\,\sigma\,\rangle\quad\text{et}\quad\widetilde{\mathrm{R}}(q)=\mathrm{R}(q)\times\langle\,\sigma\,\rangle.$$

La table des caractères du groupe G est donnée dans [13]. On rappelle quelques éléments dans l'annexe B.

3.2.1 Caractères σ-stables de $\mathrm{G}_2(q)$

Le groupe G possède $(q+8)$ classes de conjugaison σ-stables. Ainsi, par le lemme 1.2.2, G a $(q+8)$ caractères σ-stables. On en dénombre $(q-2)$ qui sont des caractères de Deligne-Lusztig de norme 1. Il reste dix caractères σ-stables « isolés » dont 8 unipotents.

Caractères σ-stables « isolés »

Dans [13] (cf. Annexe B), ils sont notés 1_{G}, θ_1, θ_2, θ_5, θ_6, θ_7, θ_{10}, θ_{11}, $\theta_{12}(1)$ et $\theta_{12}(-1)$ et sont respectivement de degré 1, $\frac{1}{6}q(q+1)^2(q^2+q+1)$, $\frac{1}{2}q(q+1)(q^3+1)$, q^6, q^4+q^2+1, $q^2(q^4+q^2+1)$, $\frac{1}{6}q(q-1)^2(q^2-q+1)$, $\frac{1}{2}q(q-1)(q^3-1)$, $\frac{1}{3}q(q^2-1)^2$ et $\frac{1}{3}q(q^2-1)^2$.

Les 8 caractères unipotents σ-stables sont 1_{G}, θ_1, θ_2, θ_5, θ_{10}, θ_{11}, $\theta_{10}(1)$ et $\theta_{12}(-1)$ (cf. [5] p. 478).

Caractères σ-stables de degré $(q+1)(q^2+q+1)(q^3+1)$

On pose $\theta = 3^n$. On les trouve parmi les caractères irréductibles de Deligne-Lusztig notés $\chi_9(k,l)$ dans [13]. Soit γ_0 une racine primitive $(q-1)$-ième de l'unité. On pose :

$$\alpha_i = \gamma_0^i + \gamma_0^{-i}.$$

Soit $h(\gamma^i, \gamma^j, \gamma^{-i-j}) \in H$. On rappelle que la notation est choisie telle que :

$$\chi_9(k,l)\left(h(\gamma^i,\gamma^j,\gamma^{-i-j})\right) = \alpha_{ik+jl}+\alpha_{il+jk}+\alpha_{i(k-l)-jl}+\alpha_{il-j(k-l)}+\alpha_{i(k-l)+jk}+\alpha_{ik+j(k-l)}.$$

Ainsi :

$$\chi_9^\sigma(k,l)\left(h(\gamma^i,\gamma^j,\gamma^{-i-j})\right) = \chi_9(k,l)\left(h(\gamma^i,\gamma^j,\gamma^{-i-j})\right),$$

si et seulement si k et l sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \theta(2k+l) & = & k \\ \theta(k-l) & = & l \end{array}\right.$$

si et seulement si $l = (3\theta - 1)k$. On les obtient tous une et une seule fois si l'on impose $k \in \{1, \ldots, \frac{1}{2}(q-3)\}$. On note :

$$\chi_k = \chi_9(k, (3\theta-1)k).$$

Donnons la valeur de χ_k sur $h(\gamma^{(3\theta+1)j}, \gamma^j, \gamma^{-(3\theta+2)j}) \in H^\sigma$, un élément σ-stable de type 1. On a :

$$\begin{array}{rcl} \chi_{1,k}(h(\gamma^{(3\theta+1)j}, \gamma^j, \gamma^{-(3\theta+2)j}) & = & \alpha_{(3\theta+1)jk+(3\theta-1)jk} + \alpha_{(3\theta+1)(3\theta-1)jk+jk} \\ & & +\alpha_{(3\theta+1)j(2-3\theta)k-(3\theta-1)jk} \\ & & +\alpha_{(3\theta+1)j(3\theta-1)k-(2-3\theta)jk} \\ & & +\alpha_{(3\theta+1)j(2-3\theta)k+jk} + \alpha_{(3\theta+1)jk+(2-3\theta)jk} \\ & & \\ & = & \alpha_{2.3\theta jk} + \alpha_{3jk} + 2 + \alpha_{3\theta jk} + \alpha_{3\theta jk} + \alpha_{3jk} \\ & & \\ & = & \alpha_{2.3\theta jk} + 2\alpha_{3jk} + 2\alpha_{3\theta jk} + 2. \end{array}$$

Le lemme qui suit aide dans la suite, par exemple pour les calculs de produits scalaires :

Lemme 3.2.1 *Soient δ et δ' deux entiers. Alors :*

$$\sum_{j=1}^{(q-3)/2} \alpha_{j\delta} = -1 - (-1)^\delta.$$

$$\sum_{j=1}^{(q-3)/2} \alpha_{j\delta}\alpha_{j\delta'} = \left\{\begin{array}{ll} q-4-(-1)^{\delta+\delta'} \ \textit{si}\ \delta \equiv \pm\delta' & \mod q-1 \\ 2(-1-(-1)^{\delta+\delta'})\ \textit{sinon} & \end{array}\right.$$

Preuve — On a :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{j=1}^{(q-3)/2} \alpha_{j\delta} & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{(q-3)/2} \gamma_0^{j\delta} + \gamma_0^{-j\delta} = \sum_{j=1}^{(q-3)/2} \gamma_0^{j\delta} + \sum_{j=(q+1)/2}^{(q-2)} \gamma_0^{j\delta} \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{(q-2)/2} \gamma_0^{j\delta} - \gamma_0^{\delta(q-1)/2} \\ & = & -1-(-1)^\delta. \end{array}$$

De plus :

$$\alpha_{j\delta}\alpha_{j\delta'} = \alpha_{j(\delta+\delta')} + \alpha_{j(\delta-\delta')}.$$

Ainsi, en utilisant le résultat précédent on a :

$$\sum_{j=1}^{(q-3)/2} \alpha_{j\delta}\alpha_{j\delta'} = \sum_{j=1}^{(q-3)/2} \gamma_0^{j\delta} + \gamma_0^{-j\delta} = \sum_{j=1}^{(q-3)/2} \alpha_{j(\delta+\delta')} + \sum_{j=1}^{(q-3)/2} \alpha_{j(\delta-\delta')}.$$

Supposons que $\delta \equiv \pm\delta' \mod q-1$. Les quantités $\delta+\delta'$ et $\delta-\delta'$ ne sont pas nulles simultanément modulo $q-1$. Comme $\delta+\delta'$ et $\delta-\delta'$ sont de même parité, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{(q-3)/2} \alpha_{j\delta}\alpha_{j\delta'} &= (-1) - (-1)^{\delta+\delta'} + q - 3 \\ &= q - 4 - (-1)^{\delta+\delta'}. \end{aligned}$$

De même, on voit que si $\delta \not\equiv \delta' \mod q-1$ alors :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{(q-3)/2} \alpha_{j\delta}\alpha_{j\delta'} &= (-1) - (-1)^{\delta+\delta'} + -1 - (-1)^{\delta-\delta'} \\ &= -2(1 + (-1)^{\delta+\delta'}). \end{aligned}$$

□

Caractères σ-stables de degré $(q-1)(q^2-q+1)(q^3-1)$

On les trouve parmi les caractères irréductibles de Deligne-Lusztig notés $\chi_{12}(k,l)$ dans [13]. Soit τ_0 une racine primitive $(q+1)$-ième de l'unité. On pose :

$$\beta_i = \tau_0^i + \tau_0^{-i}.$$

On se réfère à l'annexe B pour les notations. Un caractère de la forme $\chi_{12}(k,l)$ est σ-stable si et seulement si (k,l) est solution de l'un des deux systèmes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \theta(k+l) & = & k-l \\ \theta(2k-l) & = & -l \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \theta(k+l) & = & l-k \\ \theta(2k-l) & = & l \end{array} \right. .$$

On passe facilement de l'un à l'autre en remarquant les ensembles d'indices du paramétrage sont stables par

$$(k,l) \leftrightarrow (l,k).$$

Résolvons par exemple le premier. On voit qu'il possède $(q+1)$ solutions qui sont données par :

$$(2k, (1-3\theta)k + \epsilon\frac{1}{2}(q+1)).$$

On enlève les paramètres (k,ϵ) (pour $k=0$, $k=\frac{1}{4}(q+1)$ et $\epsilon=\pm1$). On obtient $(q-3)$ couples qui donnent $\frac{1}{6}(q-3)$ caractères. En effet, si on note :

$$E = \{(2k, (1-3\theta)k + \epsilon\frac{1}{2}(q+1)) \mid (k,\epsilon) \neq (0,\pm1) \ (k,\epsilon) \neq (\frac{1}{4}(q+1), \pm1)\}$$

et si $(k,l) \in E$, alors (k,l) vérifient les conditions (B.1) ; cf. annexe B. Ainsi, les couples :

$$(k,l),\ (-l,k-l),\ (k-l,k),\ (-k,-l),\ (l-k,l),\ (l-k,-k)$$

sont dans E.

On note :

$$\chi_{aba,k,\epsilon} = \chi_{12}(2k, (1-3\theta)k + \epsilon\frac{1}{2}(q+1)).$$

On va maintenant donner la valeur de ces caractères sur les classes σ-stables paramétrées par un élément de type $w_a w_b w_a$. Plus précisément, ces classes sont paramétrées par :

$$h_\eta(i,\epsilon) = h(\eta^{2i}, \eta^{-(3\theta+1)i+\epsilon(q+1)/2}, \eta^{(1-3\theta)i+\epsilon(q+1)/2}).$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\chi_{aba,k,\epsilon}(h_\eta(i,\epsilon')) &= \beta_{4ik+(3\theta-1)(3\theta+1)ik} + \beta_{2(1-3\theta)ik-2(1+3\theta)ik} \\
&\quad +\beta_{2(3\theta+1)ik-(3\theta-1)(3\theta+1)ik} \\
&\quad +\beta_{2(1-3\theta)ik+(1+3\theta)^2 ik} \\
&\quad +\beta_{2(3\theta+1)ik-2(3\theta+1)ik} + \beta_{4ik+(3\theta+1)^2 ik} \\
&= 2 + \beta_{-4ik3\theta} + \beta_{(2.3\theta+6)ik} + 2 + 2 + \beta_{(-2.3\theta+6)ik} \\
&= \beta_{-4ik3\theta} + \beta_{(2.3\theta+6)ik} + \beta_{(-2.3\theta+6)ik} + 6
\end{aligned}$$

Caractères σ-stables de degré $(q+1)(q^2-1)(q^3-1)$

On les trouve parmi les caractères irréductibles de Deligne-Lusztig notés $\chi_{14}(k)$ dand [13]. Soit σ_0 une racine (q^2-q+1)-ième de l'unité. On pose :

$$\tau_i = \sigma_0^i + \sigma_0^{-i} + \sigma_0^{iq} + \sigma_0^{-qi} + \sigma_0^{iq^2} + \sigma_0^{-iq^2}.$$

Soit $h = h(\tau^i, \tau^{-iq}, \tau^{iq^2})$ un représentant d'une classe de G ayant pour centralisateur un tore d'ordre (q^2-q+1). Comme :

$$h(\tau^i, \tau^{-iq}, \tau^{iq^2})^\sigma = h(\tau^{(-2q+1)\theta}, \tau^{(q+1)\theta}, \tau^{(q-2)\theta}),$$

on en déduit que h^σ est conjugué à $h(\tau^{(q-2)\theta i}, \tau^{-q(q-2)\theta i}, \tau^{q^2(q-2)\theta i})$. Un caractère $\chi_{14}(k)$ est σ-stable si et seulement si $\chi_{14}(k)^\sigma(h) = \chi_{14}(k)(h)$. D'où, les équations :

$$\begin{array}{lllllll}
(q-2)\theta k & \equiv & k \mod q^2-q+1 & & (q-2)\theta k & \equiv & -k \mod q^2-q+1 \\
(q-2)\theta k & \equiv & qk \mod q^2-q+1 & & (q-2)\theta k & \equiv & -qk \mod q^2-q+1 \\
(q-2)\theta k & \equiv & q^2k \mod q^2-q+1 & & (q-2)\theta k & \equiv & -q^2k \mod q^2-q+1
\end{array}$$

Les quatre dernières équations n'ont pas de solutions, car $(q-2)\theta \pm q$ et $(q-2)\theta \pm q^2$ sont premiers avec (q^2-q+1). On a :

$$\mathrm{pgcd}((q-2)\theta \pm 1, q^2-q+1) = q \pm 3\theta + 1.$$

On obtient ainsi deux familles de caractères σ-stables. On pose :

$$\chi_{a,k} = \chi_{14}\left((q+3\theta+1)k\right) \quad \chi_{ababa,k} = \chi_{14}\left((q-3\theta+1)k\right).$$

Classe	représentant	Nombre de classes	Ordre centralisateur
c_1	$(1,\sigma)$	1	$2q^3(q-1)$
c_2	(h_0,σ)	1	$2q(q-1)$
d_1	$(x_{2a+b}(1)x_{3a+2b}(1),\sigma)$	1	$2q^3$
d_{21}	$(x_{a+b}(1)x_{3a+b}(1),\sigma)$	1	$4q^2$
d_{22}	$(x_{a+b}(1)x_{3a+b}(1)J,\sigma)$	1	$4q^2$
d_{31}	$(x_{a+b}(1)x_{3a+b}(-1)h_0,\sigma)$	1	$4q$
d_{32}	$(x_{a+b}(1)x_{3a+b}(-1)Jh_0,\sigma)$	1	$4q$
d_{41}	$(x_a(1)x_b(1)u_0,\sigma)$	1	$6q$
d_{42}	$(x_a(1)x_b(1)x_{3a+b}(\xi)u_1,\sigma)$	1	$6q$
d_{43}	$(x_a(1)x_b(1)x_{3a+b}(-\xi)u_2,\sigma)$	1	$6q$
$e_{11}(h)$	$(h,\sigma)\ h\in L_1$	$\frac{1}{4}(q-3)$	$2(q-1)$
$e_{12}(h)$	$(h^{-1},\sigma)\ h\in L_1$	$\frac{1}{4}(q-3)$	$2(q-1)$
$e_{21}(h)$	$(hh_0,\sigma)\ h\in L_1$	$\frac{1}{4}(q-3)$	$2(q-1)$
$e_{22}(h)$	$(h^{-1}h_0,\sigma)\ h\in L_1$	$\frac{1}{4}(q-3)$	$2(q-1)$

TAB. 3.13 – Classes extérieures de $\widetilde{B}$.

Soit h_{w_a} un élément de type w_a et $h_{w_aw_bw_aw_bw_a}$ un élément de type $w_aw_bw_aw_bw_a$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\chi_{a,k}(h_{w_a}) &= \tau_{(q+3\theta+1)^2ki}\\
\chi_{a,k}(h_{w_aw_bw_aw_bw_a}) &= 6\\
\chi_{ababa,k}(h_{w_a}) &= 6\\
\chi_{ababa,k}(h_{w_aw_bw_aw_bw_a}) &= \tau_{(q-3\theta+1)^2ki}
\end{aligned}$$

3.2.2 Quelques caractères irréductibles provenant d'induits de $\widetilde{B}$

Les classes de conjugaison et la table des caractères de B sont données dans [13]. On choisit la même notation que [13], au détail près que les lettres décrivant les classes de conjugaison sont en minuscule. On a :

Proposition 3.2.1 *Le groupe $\widetilde{B}$ possède $(q+7)$ classes extérieures, que l'on donne dans la table 3.13. Dans la table 3.14 (resp. dans la table 3.15), on donne la fusion des classes de B dans* G *(resp. la répartion des classes extérieures de $\widetilde{B}$ dans $\widetilde{\mathrm{G}}$). Enfin, dans les tables 3.16 et 3.17, on donne les formules d'induction de $\widetilde{B}$ à $\widetilde{\mathrm{G}}$.*

Preuve — Le groupe B possède $(q+7)$ classes σ-stables qui sont a_1, a_{42}, a_{53}, a_{54}, a_{81}, a_{82}, a_{83}, b_{11}, b_{14}, b_{15}, $e((3\theta+1)j,j)$ avec $j\neq\pm1$. Ainsi, par le lemme 1.2.2,

$$
\begin{array}{lcl}
B \cap A_1 & = & a_1 \\
B \cap A_2 & = & a_2 \sqcup a_3 \sqcup a_{61} \\
B \cap A_{31} & = & a_{41} \sqcup a_{51} \sqcup a_{71} \\
B \cap A_{32} & = & a_{42} \sqcup a_{43} \sqcup a_{52} \sqcup a_{65}(?) \sqcup a_{75}(1) \\
B \cap A_{41} & = & a_{53} \sqcup a_{62} \sqcup a_{63} \sqcup a_{72} \sqcup a_{74} \\
& & \sqcup\, a_{65}(t) \sqcup\ a_{66}(t) \sqcup\ a_{75}(t) \sqcup\ a_{76}(t) \\
B \cap A_{42} & = & a_{54} \sqcup a_{64} \sqcup a_{73} \\
& & \sqcup\, a_{65}(t) \sqcup\ a_{66}(t) \sqcup\ a_{75}(t) \sqcup\ a_{76}(t) \\
B \cap A_{51} & = & a_{81} \\
B \cap A_{52} & = & a_{82} \\
B \cap A_{53} & = & a_{83} \\
B \cap B_1 & = & b_{11} \sqcup b_{21} \sqcup b_{31} \\
B \cap B_2 & = & b_{12} \sqcup b_{22} \sqcup b_{32} \\
B \cap B_3 & = & b_{13} \sqcup b_{23} \sqcup b_{33} \\
B \cap B_4 & = & b_{14} \sqcup b_{24} \sqcup b_{34} \\
B \cap B_5 & = & b_{15} \sqcup b_{25} \sqcup b_{35} \\
B \cap C_{11}(i) & = & c_{11}(i) \sqcup c_{21}(i) \sqcup c_{31}(i) \\
B \cap C_{12}(i) & = & c_{12}(i) \sqcup c_{22}(i) \sqcup c_{32}(i) \\
B \cap C_{21}(i) & = & c_{41}(i) \sqcup c_{51}(i) \sqcup c_{61}(i) \\
B \cap C_{22}(i) & = & c_{42}(i) \sqcup c_{52}(i) \sqcup c_{62}(i) \\
B \cap E_1(i,j) & = & e(i,j) \sqcup\ e(j,i) \sqcup e(i,-(i+j)) \sqcup e(-(i+j),i) \sqcup e(j,-(i+j)) \sqcup e(-(i+j),j) \\
& & \sqcup\, e(-i,-j) \sqcup\ e(-j,-i) \sqcup e(-i,i+j) \sqcup e(i+j,-i) \sqcup e(-j,i+j) \sqcup e(i+j,-j)
\end{array}
$$

TAB. 3.14 – Fusion des classes de B dans G.

le groupe $\widetilde{B}$ a $(q+7)$ classes extérieures. En utilisant un calcul similaire à ceux du chapitre 2, on détermine les représentants des classes de $\widetilde{B}$ et la fusion de ces classes dans $\widetilde{\mathrm{G}}$. Les formules d'induction en découlent alors immédiatement.

□

Proposition 3.2.2 *Les extensions de χ_k ($k \in \{1, \ldots, \frac{1}{2}(q-3)\}$) s'obtiennent à partir des induits des caractères linéraires de $\widetilde{B}$.*

Preuve — On remarque que $U \lhd B \rtimes \langle \sigma \rangle$. Soit π_U la projection canonique de $B \rtimes \langle \sigma \rangle$ dans $B \rtimes \langle \sigma \rangle / U$. Le quotient s'identifie à $H \rtimes \langle \sigma \rangle$. Soit ϕ un caractère linéaire de $H \rtimes \langle \sigma \rangle$ alors $\phi \circ \pi_U$ est un caractère linéaire de $B \rtimes \langle \sigma \rangle$. Le groupe H étant

$$\begin{array}{lcl}
\widetilde{B} \cap C_1 & = & c_1 \\
\widetilde{B} \cap C_2 & = & c_2 \\
\widetilde{B} \cap D_1 & = & d_1 \\
\widetilde{B} \cap D_{21} & = & d_{21} \\
\widetilde{B} \cap D_{22} & = & d_{22} \\
\widetilde{B} \cap D_{31} & = & d_{31} \\
\widetilde{B} \cap D_{32} & = & d_{32} \\
\widetilde{B} \cap D_{41} & = & d_{41} \\
\widetilde{B} \cap D_{42} & = & d_{42} \\
\widetilde{B} \cap D_{43} & = & d_{43} \\
\widetilde{B} \cap E_1(h) & = & e_{11}(h) \sqcup e_{12}(h) \\
\widetilde{B} \cap E_2(h) & = & e_{21}(h) \sqcup e_{22}(h)
\end{array}$$

TAB. 3.15 – Fusion des classes extérieures de $\widetilde{B}$.

isomorphe au produit direct $\mathbb{F}_q^\times \times \mathbb{F}_q^\times$, les caractères irréductibles de H sont :

$$\phi_{k,l}(h(\gamma^i,\gamma^j,\gamma^{-i-j})) = \gamma_0^{ik+jl}.$$

Alors, on a $\phi_{k,l}^\sigma = \phi_{k,l}$ si et seulement si $\gamma_0^{\theta(2j+i)k+\theta(i-j)l} = \gamma_0^{ik+jl}$ si et seulement si

$$\gamma_0^{\theta(k+l)i+\theta(2k-l)j} = \gamma_0^{ik+jl}.$$

Ce qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} \theta(k+l) & = & k \\ \theta(2k-l) & = & l \end{cases}$$

On en déduit que les solutions sont $\{(k,(3\theta-1)k) \mid k \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}\}$. Notons :

$$\phi_k = \phi_{k,(3\theta-1)k} \circ \pi_U$$

les $q-1$ caractères linéaires de $\widetilde{B}$ ainsi obtenus. On rappelle que :

$$H^\sigma = \{h(\gamma^{(3\theta+1)j},\gamma^j,\gamma^{-(3\theta+2)j} \mid j \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}\ \}.$$

Le groupe H^σ est engendré par $h_\gamma = h(\gamma^{3\theta+1},\gamma,\gamma^{-(3\theta+2)})$. Les éléments d'ordre impair forment un sous groupe de H^σ engendré par h_γ^2. On a :

$$\begin{aligned}
\phi_k(h_\gamma^{2i}h_0^\epsilon,\sigma) &= \phi_k(h(\gamma^{2i(3\theta+1)+\epsilon(q+1)/2},\gamma^{2i},\gamma^{-(2i(3\theta+2)+\epsilon(q+1)/2)}) \\
&= \gamma_0^{(2i(3\theta+1)+\epsilon(q+1)/2)k+2ik(3\theta-1)} \\
&= (-1)^{\epsilon k}\gamma_0^{4.3\theta ik}
\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\phi_k(J) = \phi_k(h(1, \gamma^{(q-1)/2}, \gamma^{-(q-1)/2}) = \gamma_0^{(3\theta-1)k(q-1)/2} = 1,$$

car $3\theta - 1$ est pair.
Si $k \neq 0, (q-1)/2$, alors $\mathrm{Res}_G \, \mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \, \phi_k$ est irréductible, on en déduit que :

$$\widetilde{\chi}_k = \mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \, \phi_k,$$

est un caractère irréductible de $\widetilde{\mathrm{G}}$.

□

On en déduit alors immédiatement :

Proposition 3.2.3 *Les valeurs de $\widetilde{\chi}_k$ sur les classes extérieures sont :*

	C_1	C_2	D_1	D_{21}	D_{22}	D_{31}	D_{32}	D_{41}	D_{42}	D_{42}	$E_1(h^i)$	$E_2(h^i)$
$\widetilde{\chi}_k$	(q^3+1)	$(q+1)(-1)^k$	1	1	1	$(-1)^k$	$(-1)^k$	1	1	1	γ_{ik}	$(-1)^k\gamma_{ik}$

avec

$$\gamma_{ik} = \gamma_0^{4.3\theta ik} + \gamma_0^{-4.3\theta ik}.$$

Proposition 3.2.4 *Les valeurs de $\widetilde{\theta}_5$ sur les classes extérieures sont :*

	C_1	C_2	$E_1(h^i)$	$E_2(h^i)$
$\widetilde{\theta}_5$	q^3	q	1	1

Preuve — Induisons ϕ_0 et $\phi_{(q-1)/2}$:

	C_1	C_2	D_1	D_{21}	D_{22}	D_{31}	D_{32}	D_{41}	D_{42}	D_{42}	$E_1(h^i)$	$E_2(h^i)$
$\mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \, \phi_0$	(q^3+1)	$(q+1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2
$\mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \, \phi_{(q-1)/2}$	(q^3+1)	$-(q+1)$	1	1	1	-1	-1	1	1	1	2	-2

Comme dans (1.3), on note $\langle \, , \, \rangle_\sigma$ la restriction du produit scalaire de $\widetilde{\mathrm{G}}$ aux éléments extérieurs. On rappelle que la notion de σ-réduction est donnée dans le paragraphe §1.2.2. On a :

$$\langle \, \mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \, \phi_0, \mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \, \phi_0 \, \rangle_\sigma = 2,$$

et comme $\langle \, \mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \, \phi_0, 1 \, \rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} = 1$ et $\langle \, \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \, \mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \, \phi_0, \theta_5 \, \rangle_{\mathrm{G}} = 1$ est impair, on déduit que $\rho(\mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \, \phi_0 - 1)$ est irréductible et vaut q^2 sur $(1, \sigma)$. C'est donc $\widetilde{\theta}_5$.

□

En utilisant la preuve de la proposition 3.2.4, on a aussi :

$$\langle \, \mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \, \phi_{(q-1)/2}, \mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \, \phi_{(q-1)/2} \, \rangle_\sigma = 2.$$

Comme $\langle \, \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \, \mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \, \phi_{(q-1)/2}, \theta_6 \, \rangle_{\mathrm{G}}$ et $\langle \, \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \, \mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \, \phi_{(q-1)/2}, \theta_7 \, \rangle_{\mathrm{G}}$ sont impairs, on déduit de la proposition 1.2.5 que $\mathrm{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \, \phi_{(q-1)/2}$ est somme d'une extension de θ_6 et de θ_7.

3.2.3 Caractères irréductibles provenant d'induits de $\widetilde{\mathrm{R}}(q)$

Dans le §2.2.1, on a déterminé les classes de conjugaison de $\mathrm{R}(q)$ que l'on redonne dans la table 3.18. Le groupe $\widetilde{\mathrm{R}}(q)$ étant un produit direct, on déduit immédiatement de la table 3.18 une description des classes extérieures de $\widetilde{\mathrm{R}}(q)$ ainsi que les ordres de leurs centralisateurs.

On a vu dans le paragraphe §2.2.1 la fusion des classes de $\mathrm{R}(q)$ dans G, ce qui permet de déterminer la répartition des classes extérieures puis les formules d'induction de $\widetilde{\mathrm{R}}(q)$ à $\widetilde{\mathrm{G}}$; cf. table 3.19 et tables 3.20 et 3.21.

La table des caractères de $\mathrm{R}(q)$ est donnée dans la table B.3. Comme $\widetilde{\mathrm{R}}(q)$ est un produit direct, on en déduit immédiatement sa table des caractères de celle de $\mathrm{R}(q)$. Comme dans l'annexe B, on pose :

$$\pi_3 = \sigma_0^{(q+3\theta+1)^2} \quad \text{et} \quad \pi_4 = \sigma_0^{(q-3\theta+1)^2}.$$

Pour simplifier les notations, l'induit d'un caractère ξ de $\widetilde{\mathrm{R}}(q)$ à $\widetilde{\mathrm{G}}$ sera encore noté ξ.

Proposition 3.2.5 *Les caractères $\rho(\xi_9)$, $\rho(\xi_{10})$, $\rho(\eta_k^-)$ et $\rho(\eta_k^+)$ sont des extensions irréductibles de respectivement $\theta_{12}(1)$, $\theta_{12}(-1)$, $\chi_{a,k}$ et $\chi_{ababa,k}$. De plus, les caractères $\rho(\xi_1+\xi_2)$, $\rho(\xi_3+\xi_4)$, $\rho(\xi_5+\xi_6)$ et $\rho(\xi_7+\xi_8)$ sont sommes de deux caractères irréductibles.*

Preuve — On a :

$$\begin{array}{lcl}
\langle \xi_1+\xi_2, \xi_1+\xi_2 \rangle_\sigma & = & 2 \\
\langle \xi_3+\xi_4, \xi_3+\xi_4 \rangle_\sigma & = & 2 \\
\langle \xi_5+\xi_6, \xi_5+\xi_6 \rangle_\sigma & = & 2 \\
\langle \xi_7+\xi_8, \xi_7+\xi_8 \rangle_\sigma & = & 2 \\
\langle \xi_9, \xi_9, \rangle_\sigma & = & 1 \\
\langle \xi_{10}, \xi_{10} \rangle_\sigma & = & 1 \\
\langle \eta_i^-, \eta_i^- \rangle_\sigma & = & 1 \\
\langle \eta_i^+, \eta_i^+ \rangle_\sigma & = & 1
\end{array}$$

On déduit de la proposition 1.2.5 que les caractères $\rho(\xi_1+\xi_2)$, $\rho(\xi_3+\xi_4)$, $\rho(\xi_5+\xi_6)$ et $\rho(\xi_7+\xi_8)$ sont sommes de deux caractères irréductibles et que $\rho(\xi_9)$, $\rho(\xi_{10})$, $\rho(\eta_i^-)$ et $\rho(\eta_i^+)$ sont irréductibles. De plus, on a :

$$\begin{array}{lcl}
\langle \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}\, \xi_9, \theta_{12}(1), \rangle_{\mathrm{G}} & = & \theta \equiv 1 \mod 2 \\
\langle \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}\, \xi_{10}, \theta_{12}(-1) \rangle_{\mathrm{G}} & = & \theta \equiv 1 \mod 2 \\
\langle \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}\, \eta_k^-, \chi_{a,k} \rangle_{\mathrm{G}} & = & 9\theta^4+9\theta^3+9\theta^2+6\theta+2 \equiv 1 \mod 2 \\
\langle \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}\, \eta_k^+, \chi_{ababa,k} \rangle_{\mathrm{G}} & = & 9\theta^4-9\theta^3+9\theta^2-6\theta+2 \equiv 1 \mod 2
\end{array}$$

Ainsi, on en conclut que $\rho(\xi_9)$, $\rho(\xi_{10})$, $\rho(\eta_k^-)$ et $\rho(\eta_k^+)$ sont des extensions irréductibles de respectivement $\theta_{12}(1)$, $\theta_{12}(-1)$, $\chi_{a,k}$ et $\chi_{ababa,k}$.

□

Décomposition de $\rho(\xi_1+\xi_2)$

On a :

$$\begin{array}{lcl}
\langle \xi_1+\xi_2, 1_{\widetilde{\mathrm{G}}} \rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} & = & 1 \\
\langle \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}(\xi_1+\xi_2), \theta_6 \rangle_{\mathrm{G}} & = & 1
\end{array}$$

On déduit de la proposition 1.2.5 que $\rho(\xi_1+\xi_2)$ est somme du caractère trivial et d'une extension de θ_6. Les valeurs de cette extension sur les classes extérieures sont les même que celles du caractère $\xi_1+\xi_2-1$.

Décomposition de $\rho(\xi_3+\xi_4)$

On a :

$$\begin{array}{rcll} \langle \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}(\xi_3+\xi_4),\theta_5\,\rangle_{\mathrm{G}} & = & 18\theta^4+3\theta^2+2\equiv 1 & \mod 2\\ \langle \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}(\xi_3+\xi_4),\theta_7\,\rangle_{\mathrm{G}} & = & 18\theta^4+3\theta^2+6\equiv 1 & \mod 2 \end{array}$$

On déduit de la proposition 1.2.5 que $\rho(\xi_3+\xi_4)$ est somme d'une extension de θ_5 et d'une extension de θ_7, que l'on note $\widetilde{\theta}_7$. Or :

$$\langle\, \xi_3+\xi_4,\widetilde{\theta}_5,\rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}}=1.$$

Ainsi on obtient les valeurs de $\widetilde{\theta}_7$ sur les classes extérieures sont les même que celle du caractère $\xi_3+\xi_4-\widetilde{\theta}_5$.

Décomposition de $\rho(\xi_5+\xi_6)$ et de $\rho(\xi_7+\xi_8)$

On calcule :

$$\begin{array}{rcll} \langle \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}(\xi_5+\xi_6),\theta_1\,\rangle_{\mathrm{G}} & = & \theta\equiv 1 & \mod 2\\ \langle \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}(\xi_5+\xi_6),\theta_{10}\,\rangle_{\mathrm{G}} & = & \theta\equiv 1 & \mod 2\\ \langle \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}(\xi_7+\xi_8),\theta_1,\rangle_{\mathrm{G}} & = & \theta\equiv 1 & \mod 2\\ \langle \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}(\xi_7+\xi_8),\theta_{10}\,\rangle_{\mathrm{G}} & = & \theta\equiv 1 & \mod 2\\ \langle\, \xi_5+\xi_6,\xi_7+\xi_8\,\rangle_\sigma & = & 0 & \end{array}$$

Il suit donc que $\rho(\xi_5+\xi_6)$ et $\rho(\xi_7+\xi_8)$ sont tous les deux sommes de deux extensions de θ_1 et de θ_{10} et qu'ils possèdent un composant irréductible en commun. En effet :

$$\begin{array}{rcl} \langle\, \rho(\xi_5+\xi_6),\rho(\xi_7+\xi_8)\rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}} & = & \frac{1}{2}\left\langle \mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}\,\rho(\xi_5+\xi_6),\mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}\,\rho(\xi_7+\xi_8)\right\rangle_{\widetilde{\mathrm{G}}}\\ & & +\frac{1}{2}\,\langle\, \xi_5+\xi_6,\xi_7+\xi_8\rangle_\sigma\\ & = & 1 \end{array}$$

Soit ψ la composante commune et ζ l'autre. Alors on peut écrire sans perte de généralité que :

$$\begin{array}{rcl} \rho(\xi_5+\xi_6) & = & \psi+\zeta\\ \rho(\xi_7+\xi_8) & = & \psi+\zeta\varepsilon \end{array}$$

Ainsi $\rho(\xi_5+\xi_6)+\rho(\xi_7+\xi_8)$ et 2ψ coïncident sur les classes extérieures. On peut donc obtenir les valeurs de ψ sur les classes extérieures, puis celle de ζ. Les calculs donnent :

	$(1,\sigma)$	(X,σ)	(T,σ)	(T^{-1},σ)	(Y_1,σ)	(Y_2,σ)	(Y_3,σ)	(h_{w_a},σ)	$(h_{w_aw_bw_aw_bw_a},\sigma)$
ψ	$(q^2-1)\theta$	$-\theta$	$-\theta$	$-\theta$	2θ	$-\theta$	$-\theta$	-1	1
ζ	0	0	$\theta^2\sqrt{-3}$	$-\theta^2\sqrt{-3}$	0	$\theta\sqrt{-3}$	$-\theta\sqrt{-3}$	0	0

Il reste maintenant à déterminer lesquels de ψ et ζ sont les extensions de θ_1 et θ_{10}. Les degrés de θ_1 et de θ_{10} sont respectivement $\frac{1}{6}q(q+1)^2(q^2+q+1)$ et $\frac{1}{6}q(q-1)^2(q^2-q+1)$. Soit p un nombre premier qui divise q^2-q+1. Comme q^2-q+1 est premier avec $2q^6(q^2-1)(q^3-1)(q+1)$, il suit que θ_{10} est dans un p-bloc de défaut zéro et que θ_1 est dans un p-bloc de défaut maximal. Or un caractère est dans un p-bloc de défaut nul si et seulement s'il s'annule sur les classes p-singulières (cf §1.3.2), ce qui permet de conclure que l'extension de θ_{10} est ζ et que celle de θ_1 est ψ. On pose :

$$\widetilde{\theta}_1 = \psi \quad \text{et} \quad \widetilde{\theta}_{10} = \zeta.$$

3.2.4 Induits de $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\eta h_0, \sigma)$

Posons $\eta(t) = x_{a+b}(t)x_{3a+b}(-t^{3\theta})$. Dans la proposition 2.2.13, on a établi :

$$\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\eta h_0, \sigma) = S_{a+b,3a+b} \times \langle\, (h_0, \sigma)\,\rangle \quad \text{avec} \quad S_{a+b,3a+b} = \{\eta(t) \mid t \in \mathbb{F}_q\}.$$

Le groupe $S_{a+b,3a+b}$ est abélien et isomorphe au groupe additif $(\mathbb{F}_q, +)$ par :

$$t \mapsto \eta(t).$$

Il suit donc que $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\eta(1)h_0, \sigma)$ est abélien d'ordre $4q$. On calcule facilement ses caractères irréductibles. Ils sont de la forme :

$$\varphi = \phi\phi',$$

avec ϕ un caractère linéaire de $\mathbb{F}_q$ et ϕ' un caractère du groupe cyclique à 4 éléments.

Fusion des classes dans $\widetilde{\mathrm{G}}$

Les éléments non triviaux $\eta(t)$ de $S_{a+b,3a+b}$ sont conjugués dans G à $\eta(1)$ par :

$$h(t) = h(t^{-1}, t^{(1-3\theta)/2}, t^{(3\theta+1)/2}).$$

On en déduit donc que les éléments de la forme $\eta(t)J$ ($t \neq 0$) sont conjugués à $\eta(1)J$.

Lemme 3.2.2 *Soit* $g \in \{h_0, Jh_0\}$. *Les éléments* $(\eta(\xi^k)g, \sigma)$ *et* $(\eta(1)J^k g, \sigma)$ *sont conjugués dans* $\widetilde{\mathrm{G}}$.

Preuve — Comme on l'a précisé ci-dessus, les parties 2-régulières de $(\eta(\xi^k)g, \sigma)$ et $(\eta(1)J^k g, \sigma)$ sont conjuguées par $h(\xi^k)$. Voyons à quelles conditions $(g, \sigma)^{h(\xi^k)}$ et (g, σ) sont conjugués dans $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\eta(1)) = X_{a+b}X_{3a+b}X_{2a+b}X_{3a+b} \rtimes \langle (h_0, \sigma)\rangle$. Or :

$$\begin{array}{rcl}
(g,\sigma)^{h(t)} & = & (h(t)\sigma(h(t))^{-1}g, \sigma) \\
& = & (h(t^{\theta-1}t^{(3\theta-1)\theta}, t^{\theta}t^{(1-3\theta)(1+\theta)/2}, t^{-2\theta+1}t^{(\theta-1)(1-3\theta)/2}) \\
& = & (h(1, t^{(1-q)/2}, t^{(1-q)/2})g, \sigma)
\end{array}$$

Les éléments $(h(1, t^{(1-q)/2}, t^{(1-q)/2})g, \sigma)$ et (g, σ) sont conjugués dans $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\eta(1))$ si et seulement $h(1, t^{(1-q)/2}, t^{(1-q)/2}) = 1$, c'est à dire si et seulement si t est un carré. Sinon, $(h(1, t^{(1-q)/2}, t^{(1-q)/2})g, \sigma)$ est conjugué à (Jg, σ).

□

On en déduit la répartition des éléments de $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\eta(1)h_0, \sigma)$ parmi les classes de $\widetilde{\mathrm{G}}$ ainsi que les formules d'inductions. On les donne dans les tables 3.22 et 3.23.

Proposition 3.2.6 *Soit ϕ un caractère irréductible de $S_{a+b,3a+b}$, identifié à un caractère linéaire de $\mathbb{F}_q$. Soit ϕ' le caractère de $\langle\,(h_0,\sigma)\,\rangle$ tel que $\phi'(h_0,\sigma) = \sqrt{-1}$. Alors :*

$$\widetilde{\theta}_2 = \rho\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\eta h_0,\sigma)}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi\phi'\right)$$

est une extension de θ_2.

Preuve — Le caractère ϕ' vérifie $\phi'(J) = -1$ et $\phi'(Jh_0,\sigma) = -\sqrt{-1}$. Induisons le caractère $\phi\phi'$ de $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\eta h_0,\sigma)$ à $\widetilde{\mathrm{G}}$ en utilisant les formules de la table 3.23. Cet induit vaut zéro sur les classes extérieures sauf sur les deux classes $(\eta h_0,\sigma)$ et $\eta^{-1}h_0,\sigma)$. On a :

$$\mathrm{Ind}\,\phi\phi'(\eta h_0,\sigma) = -\,\mathrm{Ind}\,\phi\phi'(\eta^{-1}h_0,\sigma) = \sqrt{-1}\left(\sum_{t \text{ carré}} \phi(\eta(t)) - \sum_{t \text{ non carré}} \phi(\eta(t))\right).$$

On reconnaît ici une somme de Gauss :

$$\sum_{t \text{ carré}} \phi(\eta(t)) - \sum_{t \text{ non carré}} \phi(\eta(t)) = \theta\sqrt{-3}.$$

On a de plus :

$$\langle\,\mathrm{Ind}\,\phi\phi', \mathrm{Ind}\,\phi\phi'\,\rangle_\sigma = 1 \quad \text{et} \quad \langle\,\mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}\,\mathrm{Ind}\,\phi\phi', \theta_2\,\rangle_{\mathrm{G}} = \frac{1}{4}(q^4 + q^3 + q - 3).$$

Pour déterminer la parité de l'entier $\frac{1}{4}(q^4 + q^3 + q - 3)$, il suffit de regarder si le numérateur est divisible ou non par 8. Or $q \equiv 3 \mod 8$, donc :

$$q^4 + q^3 + q - 3 \equiv 4 \mod 8.$$

Le numérateur n'est pas divisible par 8, donc $\langle\,\mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\widetilde{\mathrm{G}}}\,\mathrm{Ind}\,\phi\phi', \theta_2\,\rangle_{\mathrm{G}}$ est impair. En appliquant la proposition 1.2.5, on en conclut que $\rho(\mathrm{Ind}\,\phi\phi')$ est une extension irréductible de θ_2.

□

3.2.5 Techniques modulaires

Il reste à déterminer les extensions de θ_{11} et des caractères $\chi_{aba,\epsilon}$ de degré $(q-1)^2(q^2-q+1)(q^3-1)$. Dans ce paragraphe, on va calculer les extensions de θ_{11} en utilisant des techniques modulaires. La stratégie est de trouver un nombre premier p de telle sorte qu'une extension de θ_{11} soit le seul caractère inconnu dans son p-bloc. En appliquant les relations d'orthogonalité des p-blocs, on peut alors déterminer les valeurs manquantes.

Théorème 3.2.1 *Soit p un nombre premier divisant (q^2-q+1).*

- *Si $q - 3\theta + 1 = p^d\alpha$ avec α premier avec p, alors il existe une extension ψ de θ_{11} appartenant au p-bloc principal de $\widetilde{\mathrm{G}}$. On a plus précisément :*

$$B_0(\widetilde{\mathrm{G}}) = \{1, \psi, \widetilde{\theta}_1, \varepsilon\widetilde{\theta}_5, \varepsilon\widetilde{\theta}_{12}(-1), \varepsilon\widetilde{\theta}_{12}(1), \varepsilon\widetilde{\chi}_{a,k\alpha}\}.$$

- *Si* $q + 3\theta + 1 = p^d\alpha$ *avec* α *premier avec* p*, alors il existe une extension* ψ *de* θ_{11} *appartenant au* p*-bloc principal de* $\widetilde{\mathrm{G}}$*. On a dans ce cas :*

$$B_0(\widetilde{\mathrm{G}}) = \{1, \psi, \varepsilon\widetilde{\theta}_1, \varepsilon\widetilde{\theta}_5, \widetilde{\theta}_{12}(1), \widetilde{\theta}_{12}(-1), \varepsilon\widetilde{\chi}_{ababa,\alpha k}\}.$$

Preuve — Soit p un nombre premier divisant $(q^2 - q + 1)$. On a :

$$q^2 - q + 1 = (q - 3\theta + 1)(q + 3\theta + 1),$$

avec $q-3\theta+1$ et $q+3\theta+1$ premiers entre eux. Supposons que p divise $q-3\theta+1$, on raisonne de manière similaire dans le cas où p divise $q+3\theta+1$. Les classes de défaut p-maximal de G sont les classes ayant un représentant dans le sous-groupe cyclique $\langle\, h\,\rangle$, où h est un élément de type $E_6(i)$ (cf. p. 239 de [13]). On a :

$$q - 3\theta + 1 = p^d\alpha, \quad \text{avec} \quad p \wedge \alpha = 1.$$

Comme $q-3\theta+1$ et $q+3\theta+1$ sont premiers entre eux, on en déduit que les classes p-régulières de défaut maximal ont leur représentant dans $\langle\, h^{p^d}\,\rangle$. On munit $\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$ de la relation $\pm i \sim \pm qi \sim \pm q^2 i$ et on note $\Re_0$ les classes non triviales modulo cette relation. En examinant les degrés des caractères irrdéductibles de G, on constate que les seuls caractères qui ne sont dans un p-bloc de défaut maximal sont 1, θ_1, θ_5, θ_{11}, $\theta_{12}(-1)$, $\theta_{12}(1)$ et $\chi_{14}(k)$. Par ailleurs, on a :

χ	$\dfrac{\mid \mathrm{Cl}(h^{p^d i})\mid\chi(h^{p^d i})}{\chi(1)}$ mod $\mathcal{P}$
1	6
θ_1	6
θ_5	6
θ_{11}	6
$\theta_{12}(-1)$	6
$\theta_{12}(1)$	6
$\chi_{14}(k)$	$\tau_{p^d ik}$

Or $\tau_{p^d ik} = 6 \;\forall\; i$ si et seulement si $k \equiv 0 \mod \alpha(q+3\theta+1)$. Comme :

$$\chi_{14}\left(k\alpha(q + 3\theta + 1)\right) = \chi_{a,\alpha k},$$

on déduit du critère de congruence (1.4) que :

$$B_0(\mathrm{G}) = \{1, \theta_1, \theta_5, \theta_{11}, \theta_{12}(-1), \theta_{12}(-1), \chi_{a,k\alpha}\}.$$

De plus :

$$\{\chi \in \mathrm{Irr}(\widetilde{\mathrm{G}}) \mid \chi_{\mathrm{G}} \in B_0(\mathrm{G})\} = B_0(\widetilde{\mathrm{G}}) \cup \varepsilon B_0(\widetilde{\mathrm{G}}).$$

Le p-bloc principal de $\widetilde{\mathrm{G}}$ contient une extension de chaque caractère du p-bloc principal de G, donc en particulier une extension de θ_{11}. Lorsque l'on connaît les valeurs des extensions sur les classes extérieures, on peut déterminer explicitement laquelle des deux extensions appartient au p-bloc principal de $\widetilde{\mathrm{G}}$, pour cela, il suffit d'appliquer le critère (1.4) sur une classe p-régulière extérieure, par exemple $(1,\sigma)$. Le calcul de congruence donne

χ	$\dfrac{\mid \mathrm{Cl}(1,\sigma)\mid\chi(1,\sigma)}{\chi(1)}$ mod $\mathcal{P}$
1	6θ
θ_1	6θ
θ_5	-6θ
$\theta_{12}(-1)$	-6θ
$\theta_{12}(1)$	-6θ
$\chi_{14}(k)$	-6θ

Ainsi le p-bloc principal de $\widetilde{\mathrm{G}}$ contient une extension de θ_{11} et les éléments de :

$$\{1, \widetilde{\theta}_1, \varepsilon\widetilde{\theta}_5, \varepsilon\widetilde{\theta}_{12}(-1), \varepsilon\widetilde{\theta}_{12}(1), \varepsilon\widetilde{\chi}_{a,k\alpha}\}.$$

□

Soit p un nombre premier qui divise $(q+3\theta+1)$. Notons ψ l'extension de θ_{11} qui se trouve dans le p-bloc principal de $\widetilde{\mathrm{G}}$.

Théorème 3.2.2 *Les valeurs de ψ sur les classes extérieures sont :*

	$(1,\sigma)$	$(\gamma(1),\sigma)$	(h_0,σ)	$(\eta(1)h_0,\sigma)$	$(\eta(1)h_0J,\sigma)$	$(h_{aba}\epsilon,\sigma)$	(h_a,σ)	(h_{ababa},σ)
ψ	$q(1-q)$	q	$q-1$	-1	-1	-2	1	1

Preuve — Pour déterminer les valeurs de ψ, on utilise les relations d'orthogonalité dans le p-bloc principal de $\widetilde{\mathrm{G}}$. Soit x un élément de type $E_6(i)$ dans une classe σ-stable de G et d'ordre divisible par p. On a :

$$\theta_1(x) = -1, \quad \theta_5(x) = 1, \quad \theta_{11}(x) = 1, \quad \theta_{12}(-1) = 1, \quad \theta_{12}(1) = -1.$$

En appliquant une première fois les relations d'orthogonalité avec l'élément p-régulier $x_a(1)x_b(1)$, on trouve que :

$$\sum_k \chi_{ababa,\alpha k}(x) = -1.$$

Comme la classe dans G est σ-stable, il suit que les extensions de ces caractères dans $\widetilde{\mathrm{G}}$ prennent les même valeurs sur x. Posons y un élément extérieur qui n'est pas de type (h_{ababa},σ). Alors y est d'ordre premier à p, donc est p-régulier. En posant $\beta_y := \psi(y)$ et en appliquant la relation d'orthogonalité dans le p-bloc principal, on obtient une équation linéaire d'inconnu β_y que l'on peut résoudre. Les calculs donnent :

$$\beta_\sigma = q(1-q), \quad \beta_{(\gamma(1),\sigma)} = q, \quad \beta_{(h_0,\sigma)} = q-1, \quad \beta_{(\eta(1)h_0,\sigma)} = \beta_{(\eta(1)h_0J,\sigma)} = -1,$$

$$\beta_{(h_{aba}\epsilon,\sigma)} = -2, \quad \beta_{(h_a,\sigma)} = 1, \quad \text{et}$$

$$\beta_{(\beta(1),\sigma)} = \beta_{(\beta(-1),\sigma)} = \beta_{(Y_1,\sigma)} = \beta_{(Y_2,\sigma)} = \beta_{(Y_3,\sigma)} = \beta_{(h_1,\sigma)} = 0.$$

Il reste à déterminer les valeurs sur les classes de type (h_{ababa},σ).

Supposons que $q > 3$ alors $q-3\theta+1$ n'est pas trivial, soit p un diviseur premier. On utilise à nouveau les relations d'orthogonalité dans le p-bloc principal. Tout d'abord, en calculant sur $(1, \sigma)$, on trouve que la valeur de l'extension est $q(1-q)$, ce qui assure que c'est ψ (et non $\epsilon\psi$) qui se trouve dans le p-bloc. Les éléments du type (h_{ababa}, σ) sont p-réguliers, après calcul, on trouve $\psi(h_{ababa}, \sigma) = 1$.

Pour $q = 3$, il y a qu'une classe de type (h_{ababa}, σ) et en calculant le produit scalaire avec le caractère trivial, on trouve que la valeur de ψ sur cette classe est aussi 1, ce qui achève la démonstration.

□

3.2.6 Induits de $T' \rtimes \langle \sigma \rangle$

On a décrit dans le lemme 2.2.11 un tore maximal σ-stable T' de G d'ordre $(q+1)^2$. On rappelle que :

$$T' = \langle \tau \rangle \times \langle \tau' \rangle \times \langle g_{a+b} \rangle \times \langle g_{3a+b} \rangle,$$

avec τ et τ' d'ordre 4 et g_{a+b} et g_{3a+b} d'ordre $\frac{1}{4}(q+1)$. On redonne l'action de σ sur les générateurs :

$$\begin{array}{rcl} \tau^\sigma & = & J\tau \\ \tau'^\sigma & = & J\tau^2\tau' \\ g_{a+b}^\sigma & = & g_{3a+b} \\ \tau'^2 & = & J \end{array}$$

Le tore T' possède $(q+1)$ classes de conjugaison σ-stables, donc par la proposition 1.2.2, le groupe $T' \rtimes \langle \sigma \rangle$ a $(q+1)$ classes extérieures paramétrées par :

$$(h, \sigma), \quad (h\tau, \sigma), \quad (h\tau', \sigma) \quad \text{et} \quad (h\tau\tau', \sigma),$$

où h désigne un élément σ-stable de T' d'ordre impair. De plus les $(2q+2)$ caractères extérieurs de $T' \rtimes \langle \sigma \rangle$ sont des caractères linéaires $\widetilde{\phi}$ et $\varepsilon\widetilde{\phi}$ tels que :

$$\widetilde{\phi}(h, \sigma) = \phi(h),$$

avec ϕ un caractère σ-stable de T'. Par abus de notation, on désigne $\widetilde{\phi}$ par ϕ. On peut décrire les caractères de T' par :

$$\chi_{k_1,k_2,k_3,k_4}(\tau^{i_1}\tau'^{i_2}g_{a+b}^{i_3}g_{3a+b}^{i_4}) = \tau_0^{\frac{q+1}{4}(i_1k_1+i_2k_2)+4(i_3k_3+i_4k_4)},$$

avec k_1 et k_2 dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et k_3 et k_4 dans $\mathbb{Z}/\frac{1}{4}(q+1)\mathbb{Z}$. Un calcul montre que les caractères σ-stables sont :

$$\phi_{k_1,k_2,k_3} = \chi_{2k_1,2k_2,k_3,k_3},$$

avec k_1, k_2 dans $\{0, 1\}$. Les éléments σ-stables de T' sont donnés par :

$$\tau^{2i_1}J^{i_2}(g_{a+b}g_{3a+b})^{i_3}.$$

On obtient ainsi les caractères extérieurs de $T' \rtimes \langle \sigma \rangle$ et les classes extérieures sont :

$$((g_{a+b}g_{3a+b})^i, \sigma), \ ((g_{a+b}g_{3a+b})^i\tau, \sigma), \ ((g_{a+b}g_{3a+b})^i\tau', \sigma) \quad \text{et} \quad ((g_{a+b}g_{3a+b})^i\tau\tau', \sigma).$$

Le centralisateur de ces éléments est d'ordre $2(q+1)$.

Fusion des classes

Soit E_{aba} l'ensemble des éléments non triviaux d'ordre impair et σ-stable de T'. Ces éléments se regroupent par 6 dans des classes de G, dont les représentants pour cette partition sont les éléments de L_{aba}.

Proposition 3.2.7 *Soit $h \in L_{aba}$, on a :*

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{Cl}(1,\sigma) \cap T' \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle & = & \mathrm{Cl}(1,\sigma) \\
\mathrm{Cl}(h_0,\sigma) \cap T' \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle & = & \mathrm{Cl}(\tau,\sigma) \cup \mathrm{Cl}(\tau',\sigma) \cup \mathrm{Cl}(\tau\tau',\sigma) \\
\mathrm{Cl}(h,\sigma) \cap T' \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle & = & \mathrm{Cl}(h^{\pm 1},\sigma) \cup \mathrm{Cl}(h^{\pm\frac{3\theta+1}{2}},\sigma) \cup \mathrm{Cl}(h^{\pm\frac{3\theta-1}{2}},\sigma) \\
\mathrm{Cl}(h\tau,\sigma) \cap T' \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle & = & \mathrm{Cl}(h^{\pm 1}\tau,\sigma) \cup \mathrm{Cl}(h^{\pm\frac{3\theta+1}{2}}\tau\tau',\sigma) \cup \mathrm{Cl}(h^{\pm\frac{3\theta-1}{2}}\tau',\sigma) \\
\mathrm{Cl}(h\tau',\sigma) \cap T' \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle & = & \mathrm{Cl}(h^{\pm 1}\tau',\sigma) \cup \mathrm{Cl}(h^{\pm\frac{3\theta+1}{2}}\tau,\sigma) \cup \mathrm{Cl}(h^{\pm\frac{3\theta-1}{2}}\tau\tau',\sigma) \\
\mathrm{Cl}(h\tau\tau',\sigma) \cap T' \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle & = & \mathrm{Cl}(h^{\pm 1}\tau\tau',\sigma) \cup \mathrm{Cl}(h^{\pm\frac{3\theta+1}{2}}\tau',\sigma) \cup \mathrm{Cl}(h^{\pm\frac{3\theta-1}{2}}\tau,\sigma)
\end{array}$$

Preuve — Le groupe des éléments σ-stables d'ordre impair est conjugué (dans $\mathbf{G}$) au groupe :

$$\{h(z^2, z^{-(3\theta+1)}, z^{(3\theta-1)}) \mid z^{(q+1)/2} = 1\}$$

et la répartition en classe de G des éléments de E_{aba} est telle que si $x \in E_{aba}$ est conjugué dans $\mathbf{G}$ à $h(z^2, z^{-(3\theta+1)}, z^{(3\theta-1)})$ alors les éléments de E_{aba} conjugués dans G à x sont exactement les éléments de E_{aba} conjugués dans $\mathbf{G}$ à l'un des six éléments :

$$\begin{array}{ll}
h(z^2, z^{-(3\theta+1)}, z^{(3\theta-1)}), & h(z^{-(3\theta+1)}, z^{(3\theta-1)}, z^2), \\
h(z^{(3\theta-1)}, z^2, z^{-(3\theta+1)}), & h(z^{-2}, z^{(3\theta+1)}, z^{-(3\theta-1)}), \\
h(z^{(3\theta+1)}, z^{-(3\theta-1)}, z^{-2}) \quad \text{et} & h(z^{-(3\theta-1)}, z^{-2}, z^{(3\theta+1)}).
\end{array}$$

En remarquant que si x est conjugué à y alors x^i est conjugué à y^i et que :

$$\begin{array}{lcl}
h(z^{-(3\theta+1)}, z^{(3\theta-1)}, z^2) & = & h(z^2, z^{-(3\theta+1)}, z^{(3\theta-1)})^{-(3\theta+1)/2} \\
h(z^{(3\theta-1)}, z^2, z^{-(3\theta+1)}) & = & h(z^2, z^{-(3\theta+1)}, z^{(3\theta-1)})^{(3\theta-1)/2} \\
h(z^{-2}, z^{(3\theta+1)}, z^{-(3\theta-1)}) & = & h(z^2, z^{-(3\theta+1)}, z^{(3\theta-1)})^{-1} \\
h(z^{(3\theta+1)}, z^{-(3\theta-1)}, z^{-2}) & = & h(z^2, z^{-(3\theta+1)}, z^{(3\theta-1)})^{(3\theta+1)/2} \\
h(z^{-(3\theta-1)}, z^{-2}, z^{(3\theta+1)}) & = & h(z^2, z^{-(3\theta+1)}, z^{(3\theta-1)})^{-(3\theta-1)/2},
\end{array}$$

on en déduit que les éléments de T'^{σ} qui sont conjugués dans G à $(g_{a+b}g_{3a+b})^i$ sont :

$$(g_{a+b}g_{3a+b})^{\pm i}, \quad (g_{a+b}g_{3a+b})^{\pm(3\theta+1)i/2}, \quad (g_{a+b}g_{3a+b})^{\pm(3\theta-1)i/2}$$

Soit $x \in \{1, \tau, \tau', \tau\tau'\}$, il reste à déterminer à quelle classe de $\widetilde{\mathrm{G}}$ appartient l'élément $((g_{a+b}g_{3a+b})^{i\alpha}x, \sigma)$. Dans l'article de Ward [32] p. 75, on voit qu'il existe un élément t_0 d'ordre 3 de $\mathrm{R}(q)$ tel que :

$$t_0(g_{a+b}g_{3a+b})^{-(3\theta+1)i/2}t_0^{-1} = (g_{a+b}g_{3a+b})^i \quad \text{et} \quad t_0\tau^2t_0^{-1} = J.$$

Il suit que :

$$t_0^2(g_{a+b}g_{3a+b})^{(3\theta-1)i/2}t_0^{-2} = (g_{a+b}g_{3a+b})^{(3\theta-1)i/2} \quad \text{et} \quad t_0\tau^2t_0^{-1} = J\tau.$$

Examinons l'action de t_0 et sur $(1,\sigma)$, (τ,σ), (τ',σ) et $\tau\tau',\sigma)$. On note :

$$P = \langle\, \tau, \tau' \,\rangle$$

le 2-sylow de T'. On a $t_0\tau t_0^{-1} \in P$ et $t_0\tau' t_0^{-1} \in P$. En effet comme

$$t_0(g_{a+b}g_{3a+b})^{-(3\theta+1)i/2}\tau t_0^{-1} = (g_{a+b}g_{3a+b})^i t_0\tau t_0^{-1}$$

est une décomposition de Jordan il suit que $t_0\tau t_0^{-1} \in T'$. Comme $t_0\tau t_0^{-1}$ est d'ordre une puissance de 2 et que T' est abélien (donc possède un unique 2-Sylow) on a bien que $t_0\tau t_0^{-1} \in P$. De même, $t_0\tau' t_0^{-1} \in P$. Or τ et τ' engendrent P (cf. §2.2.4), ainsi t_0 agit par conjugaison sur P. On va montrer que :

$$\begin{aligned}
t_0\{\tau, J\tau, \tau^3, J\tau^3\}t_0^{-1} &= \{\tau', J\tau', J\tau'\tau^2, \tau'\tau^2\} \\
t_0\{\tau', J\tau', J\tau'\tau^2, \tau'\tau^2\}t_0^{-1} &= \{\tau\tau', J\tau'\tau^3, \tau'\tau^3, J\tau\tau'\} \\
t_0\{\tau\tau', J\tau'\tau^3, \tau'\tau^3, J\tau\tau'\}t_0^{-1} &= \{\tau', J\tau', J\tau'\tau^2, \tau'\tau^2\}
\end{aligned}$$

En effet t_0 agit sur P donc sur les sous-groupes cycliques d'ordre 4 de P. Le groupe P possède 6 sous-groupes d'ordre 4, plus précisement on a

sous-groupe cyclique d'ordre 4		élément d'ordre 2
$\langle\,\tau\,\rangle$, $\langle\, J\tau\,\rangle$	$\rightsquigarrow$	τ^2
$\langle\,\tau'\,\rangle$, $\langle\, J\tau'\,\rangle$	$\rightsquigarrow$	J
$\langle\,\tau\tau'\,\rangle$, $\langle\, J\tau\tau'\,\rangle$	$\rightsquigarrow$	$J\tau^2$

Comme $t_0\tau^2 t_0^{-1} = J$, $t_0 J t_0^{-1} = J\tau^2$ et $t_0 J\tau^2 t_0^{-1} = J$ et que la conjugaison préserve l'ordre des éléments, on en déduit le résultat.

Redonnons les σ-classes des éléments 2-unipotents de $T' \rtimes \langle\,\sigma\,\rangle$:

$$\begin{aligned}
C_\sigma(1) &= \{\, 1, J, \tau^2, J\tau^2 \,\} \\
C_\sigma(\tau) &= \{\, \tau, J\tau, \tau^3, J\tau^3 \,\} \\
C_\sigma(\tau') &= \{\, \tau', J\tau', J\tau'\tau^2, \tau'\tau^2 \,\} \\
C_\sigma(\tau\tau') &= \{\, \tau\tau', J\tau'\tau^3, \tau'\tau^3, J\tau\tau' \,\}
\end{aligned}$$

On a :

	Classe dans $\widetilde{\mathrm{G}}$
$(h^{-(3\theta+1)/2},\sigma)$	(h,σ)
$(h^{-(3\theta+1)/2}\tau,\sigma)$	$(h\tau',\sigma)$
$(h^{-(3\theta+1)/2}\tau',\sigma)$	$(h\tau\tau',\sigma)$
$(h^{-(3\theta+1)/2}\tau\tau',\sigma)$	$(h\tau,\sigma)$
$(h^{(3\theta-1)/2},\sigma)$	(h,σ)
$(h^{(3\theta-1)/2}\tau,\sigma)$	$(h\tau\tau',\sigma)$
$(h^{(3\theta-1)/2}\tau',\sigma)$	$(h\tau,\sigma)$
$(h^{(3\theta-1)/2}\tau\tau',\sigma)$	$(h\tau',\sigma)$

L'élément $s_0 = h_0\tau \in \mathrm{R}(q)$ est invariant par σ. De plus,

$$s_0(g_{a+b}g_{3a+b})^i s_0^{-1} = (g_{a+b}g_{3a+b})^{-i}.$$

Examinons l'action de s_0 sur τ et τ' :

$$s_0\tau s_0^{-1} = h_0\tau h_0^{-1} = h_0\varphi_{a+b}(A_0')\varphi_{3a+b}(B_0')$$

Or $h_0\varphi_{a+b}(A_0')\varphi_{3a+b}(B_0') = \tau^{-1}$, en effet

$$\begin{aligned} h_0\varphi_{a+b}(A_0')\varphi_{3a+b}(B_0')\tau &= h_0\varphi_{a+b}(A_0')\varphi_{3a+b}(B_0')h_0\varphi_{a+b}(A_0)\varphi_{3a+b}(B_0) \\ &= \varphi_{a+b}(A_0^2)\varphi_{3a+b}(B_0^2) \\ &= J^2 = 1 \end{aligned}$$

On en déduit donc le résultat.

□

Corollaire 3.2.1 *Les formules d'induction de $T' \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle$ à $\widetilde{\mathrm{G}}$ sont données dans la table 3.24.*

Famille de caractères irréductibles de $\widetilde{\mathrm{G}}$

Pour alléger les notations, on note ϕ_{k_1,k_2,k_3} les induits des caractères irréductibles extérieurs de $T' \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle$ à $\widetilde{\mathrm{G}}$. On remarque que $\phi_{1,0,0} = \phi_{0,1,0} = \phi_{1,1,0}$. On note :

$$\psi_0 = \phi_{0,0,0} \quad \text{et} \quad \psi_1 = \phi_{1,0,0}.$$

On définit :

$$\begin{aligned} \varphi_{0,0,k} &= \psi_0 + \varepsilon\phi_{0,0,k} \\ \varphi_{1,0,k} &= \psi_1 + \varepsilon\phi_{1,0,k} \\ \varphi_{0,1,k} &= \psi_1 + \varepsilon\phi_{0,1,k} \\ \varphi_{1,1,k} &= \psi_1 + \varepsilon\phi_{1,1,k} \end{aligned}$$

Il y a $\frac{1}{24}(q-3)$ caractères différents dans chacune des familles. De plus, les caractères $\varphi_{0,0,k}$ sont de norme extérieure égale à 7 et les caractères $\varphi_{1,0,k}$, $\varphi_{0,1,k}$ et $\varphi_{1,1,k}$ sont de norme extérieure égale à 3.

Le cas de $\varphi_{0,0,k}$: après calculs des produits scalaires, on trouve :

$$\langle\, \varphi_{0,0,k}, 1_{\widetilde{\mathrm{G}}} \,\rangle_\sigma = 1, \quad \langle\, \varphi_{0,0,k}, \widetilde{\theta}_5 \,\rangle_\sigma = -1, \quad \langle\, \varphi_{0,0,k}, \widetilde{\theta}_{11} \,\rangle_\sigma = 2$$

et les produits scalaires extérieurs sont nuls sur tous les autres caractères connus. La fonction centrale $\varphi_{0,0,k} - 1_{\widetilde{\mathrm{G}}} - \varepsilon\widetilde{\theta}_5 - 2\widetilde{\theta}_{11}$ est un caractère et :

$$\langle\, \rho(\varphi_{0,0,k} - 1_{\widetilde{\mathrm{G}}} - \varepsilon\widetilde{\theta}_5 - 2\widetilde{\theta}_{11}), \rho(\varphi_{0,0,k} - 1_{\widetilde{\mathrm{G}}} - \varepsilon\widetilde{\theta}_5 - 2\widetilde{\theta}_{11}) \,\rangle_\sigma = 1.$$

Par la proposition 1.2.5, il suit que $\rho(\varphi_{0,0,k} - 1_{\widetilde{\mathrm{G}}} - \varepsilon\widetilde{\theta}_5 - 2\widetilde{\theta}_{11})$ est un caractère irréductible.

Les cas de $\varphi_{1,0,k}$*,* $\varphi_{0,1,k}$*, et* $\varphi_{1,1,k}$ *:* soit ϵ et ϵ' valant 0 ou 1 et non simultanément nuls. On donne les valeurs non nulles des produits scalaires extérieurs entre $\varphi_{\epsilon,\epsilon',k}$ avec les caractères extérieurs connus :

$$\langle\, \varphi_{\epsilon,\epsilon',k}, \widetilde{\theta}_6 \,\rangle_\sigma = 1 \quad \text{et} \quad \langle\, \varphi_{\epsilon,\epsilon',k}, \widetilde{\theta}_7 \,\rangle_\sigma = -1$$

La fonction centrale $\varphi_{\epsilon,\epsilon',k} - \widetilde{\theta}_6 - \varepsilon\widetilde{\theta}_7$ est un caractère et la norme extérieure de son réduit vaut 1. Il suit donc que $\rho(\varphi_{\epsilon,\epsilon',k} - \widetilde{\theta}_6 - \varepsilon\widetilde{\theta}_7)$ est un caractère irréducible.

Les caractères $\rho(\varphi_{0,0,k} - 1_{\widetilde{\mathrm{G}}} - \varepsilon\widetilde{\theta}_5 - 2\widetilde{\theta}_{11})$ et $\rho(\varphi_{\epsilon,\epsilon',k} - \widetilde{\theta}_6 - \varepsilon\widetilde{\theta}_7)$ sont tous deux à deux distincts. On obtient ainsi $\frac{1}{6}(q-3)$ caractères irréductibles de $\widetilde{\mathrm{G}}$.

On note :

$$\begin{aligned}
\chi_{aba,0,0}(k) &= \rho(\varphi_{0,0,k} - 1_{\widetilde{\mathrm{G}}} - \varepsilon\widetilde{\theta}_5 - 2\widetilde{\theta}_{11}),\\
\chi_{aba,1,0}(k) &= \rho(\varphi_{1,0,k} - \widetilde{\theta}_6 - \varepsilon\widetilde{\theta}_7),\\
\chi_{aba,0,1}(k) &= \rho(\varphi_{0,1,k} - \widetilde{\theta}_6 - \varepsilon\widetilde{\theta}_7),\\
\chi_{aba,1,1}(k) &= \rho(\varphi_{1,1,k} - \widetilde{\theta}_6 - \varepsilon\widetilde{\theta}_7).
\end{aligned}$$

Les restrictions de ces caractères à G sont exactement les $\frac{1}{6}(q-3)$ caractères σ-stables de degrés $(q-1)(q^2-q+1)(q^3-1)$. On a construit ces caractères à partir d'une description de T' qui ne nous permet pas d'associer le caractère σ-stable compatible avec les notations d'Enomoto. Par contre, en utilisant la relation p. 234 de [5] :

$$\pm R_{T,\phi}.\,\mathrm{St} = \mathrm{Ind}_T^{\mathrm{G}}\,\phi.$$

On en déduit que la restriction de $\chi_{aba,\epsilon,\epsilon'}(k)$ est $\pm R_{T,\phi_{\epsilon,\epsilon',k}}$.

3.2.7 Tables des caractères de $\mathrm{G}_2(q) \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle$

En récapitulant les résultats des paragraphes précédent, on obtient :

Théorème 3.2.3 *Soit* n *un entier positif. On pose* $q = 3^{2n+1}$*,* $\theta = 3^n$ *et* σ *l'automorphisme exceptionnel de* $G_2(q)$ *dont le sous-groupe des points fixes est le groupe de Ree de type* G_2*. Alors, le groupe* $G_2(q) \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle$ *possède* $(2q+16)$ *extensions irréductibles de* $(q+8)$ *caractères* σ*-stable de* $G_2(q)$*. Soient* $\gamma_i = \gamma_0^{4.3\theta i} + \gamma_0^{-4.3\theta i}$ *et :*

$$\delta_i = \pi_3^{i} + \pi_3^{-i} + \pi_3^{qi} + \pi_3^{-qi} + \pi_3^{q^2 i} + \pi_3^{-q^2 i} \quad \text{et} \quad \delta'_i = \pi_4^{i} + \pi_4^{-i} + \pi_4^{qi} + \pi_4^{-qi} + \pi_4^{q^2 i} + \pi_4^{-q^2 i},$$

avec $\pi_3 = \sigma_0^{(q+3\theta+1)^2}$ *et* $\pi_3 = \sigma_0^{(q-3\theta+1)^2}$*. On pose enfin :*

$$\begin{aligned}
\beta_{i,0} &= \tau_0^{8i} + \tau_0^{-8i} + \tau_0^{4(3\theta+1)i} + \tau_0^{-4(3\theta+1)i} + \tau_0^{4(3\theta-1)i} + \tau_0^{-4(3\theta-1)i},\\
\beta_{i,1} &= \tau_0^{8i} + \tau_0^{-8i} - \tau_0^{4(3\theta+1)i} - \tau_0^{-4(3\theta+1)i} - \tau_0^{4(3\theta-1)i} - \tau_0^{-4(3\theta-1)i},\\
\beta_{i,2} &= -\tau_0^{8i} - \tau_0^{-8i} + \tau_0^{4(3\theta+1)i} + \tau_0^{-4(3\theta+1)i} - \tau_0^{4(3\theta-1)i} - \tau_0^{-4(3\theta-1)i},\\
\beta_{i,3} &= -\tau_0^{8i} - \tau_0^{-8i} - \tau_0^{4(3\theta+1)i} - \tau_0^{-4(3\theta+1)i} + \tau_0^{4(3\theta-1)i} + \tau_0^{-4(3\theta-1)i}.
\end{aligned}$$

Dans la table 3.25, on donne la valeur des caractères extérieurs sur les classes extérieures.

$$
\begin{array}{lcl}
\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}\ \phi(A_1) & = & (q+1)^2(q^2+q+1)(q^2-q+1)\,\phi(a_1) \\
\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}\ \phi(A_2) & = & (q+1)(q^3+1)(q^3-1)\,\big(\phi(a_2)+q\phi(a_3)+q^2\phi(a_{61})\big) \\
\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}\ \phi(A_{31}) & = & (q+1)(q^3+1)(q^3-1)\,\big(\phi(a_{41})+q\phi(a_{51})+q^2\phi(a_{71})\big) \\
\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}\ \phi(A_{32}) & = & (q^2-1)(q^3+1)(q^3-1)\,(\phi(a_{42})+q\phi(a_{43})+q\phi(a_{52})+ \\
 & & q^2\phi(a_{65}(?))+q^2\phi(a_{75}(1))))\big) \\
\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}\ \phi(A_{41}) & = & \phi(a_{53})+2\phi(a_{62})+\phi(a_{63})+\phi(a_{72})+2\phi(a_{74})+ \\
 & & 2\left(\sum\phi(a_{65}(t))+\sum\phi(a_{66}(t))+\sum\phi(a_{75}(t))+\sum\phi(a_{76}(t))\right) \\
\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}\ \phi(A_{42}) & = & \phi(a_{54})+\phi(a_{64})+\phi(a_{73})+ \\
 & & 2\left(\sum\phi(a_{65}(t))+\sum\phi(a_{66}(t))+\sum\phi(a_{75}(t))+\sum\phi(a_{76}(t))\right) \\
\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}\ \phi(A_{51}) & = & \phi(a_{81}) \\
\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}\ \phi(A_{52}) & = & \phi(a_{82}) \\
\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}\ \phi(A_{53}) & = & \phi(a_{83}) \\
\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}\ \phi(B_1) & = & (q+1)^2(\phi(b_{11})+\phi(b_{21})+\phi(b_{31})) \\
\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}\ \phi(B_2) & = & (q+1)(\phi(b_{12})+\phi(b_{22})+\phi(b_{32})) \\
\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}\ \phi(B_3) & = & (q+1)(\phi(b_{13})+\phi(b_{23})+\phi(b_{33})) \\
\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}\ \phi(B_4) & = & \phi(b_{14})+\phi(b_{24})+\phi(b_{34}) \\
\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}\ \phi(B_5) & = & \phi(b_{15})+\phi(b_{25})+\phi(b_{35}) \\
\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}\ \phi(C_{11}(i)) & = & (q+1)(\phi(c_{11}(i))+\phi(c_{21}(i))+\phi(c_{31}(i))) \\
\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}\ \phi(C_{12}(i)) & = & \phi(c_{12}(i))+\phi(c_{22}(i))+\phi(c_{32}(i)) \\
\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}\ \phi(C_{21}(i)) & = & (q+1)(\phi(c_{41}(i))+\phi(c_{51}(i))+\phi(c_{61}(i))) \\
\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}\ \phi(C_{22}(i)) & = & \phi(c_{42}(i))+\phi(c_{52}(i))+\phi(c_{62}(i)) \\
\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{G}}\ \phi(E_1(i,j)) & = & \phi(e(i,j))+\phi(e(j,i))+\phi(e(i,-(i+j))) \\
 & & +\phi(e(-(i+j),i))+\phi(e(j,-(i+j)))+\phi(e(-(i+j),j) \\
 & & +\phi(e(-i,-j))+\phi(e(-j,-i))+\phi(e(-i,i+j)) \\
 & & +\phi(e(i+j,-i))+\phi(e(-j,i+j))+\phi(e(i+j,-j))
\end{array}
$$

TAB. 3.16 – Formules d'induction de B à G.

$$
\begin{array}{lcl}
\operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(C_1) & = & (q^3+1)\phi(c_1) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(C_2) & = & (q+1)\phi(c_2) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(D_1) & = & \phi(d_1) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(D_{21}) & = & \phi(d_{21}) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(D_{22}) & = & \phi(d_{22}) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(D_{31}) & = & \phi(d_{31}) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(D_{32}) & = & \phi(d_{32}) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(D_{41}) & = & \phi(d_{41}) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(D_{42}) & = & \phi(d_{42}) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(D_{43}) & = & \phi(d_{43}) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(E_1(h)) & = & \phi(e_{11}(h)) + \phi(e_{12}(h)) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(E_2(h)) & = & \phi(e_{21}(h)) + \phi(e_{22}(h))
\end{array}
$$

TAB. 3.17 – Formules d'inductions de $\widetilde{B}$ à $\widetilde{\mathrm{G}}$ sur les classes extérieures.

	représentant		Nombre	Ordre Centralisateur
R_1	1		1	$q^3(q^2-1)(q^2-q+1)$
R_2	$\gamma(1)$		1	q^3
$R_{3,1}$	$\beta(1)$		1	$2q^2$
$R_{3,2}$	$\beta(-1)$		1	$2q^2$
R_4	Y_1		1	$3q$
R_5	Y_2		1	$3q$
R_6	Y_3		1	$3q$
$R_{8,0}$	J		1	$q(q-1)(q+1)$
$R_{8,1}$	$\beta(1)J$		1	$2q$
$R_{8,2}$	$\beta(-1)J$		1	$2q$
$R_{1,1}(h)$	h	$h \in L_1$	$\frac{1}{4}(q-3)$	$q-1$
$R_{1,J}(h)$	hJ	$h \in L_1$	$\frac{1}{4}(q-3)$	$q-1$
$R_{aba,1}(h)$	h	$h \in L_{aba}$	$\frac{1}{24}(q-3)$	$q+1$
$R_{aba,J}(h)$	hJ	$h \in L_{aba}$	$\frac{1}{24}(q-3)$	$q+1$
$R_{aba,\tau^2}(h)$	$h\tau^2$	$h \in L_{aba}$	$\frac{1}{24}(q-3)$	$q+1$
$R_{aba,J\tau^2}(h)$	$hJ\tau^2$	$h \in L_{aba}$	$\frac{1}{24}(q-3)$	$q+1$
$R_a(h)$	h	$h \in L_a$	$\frac{1}{6}(q-3\theta)$	$q-3\theta+1$
$R_{ababa,1}(h)$	h	$h \in L_{ababa}$	$\frac{1}{6}(q+3\theta)$	$q+3\theta+1$

TAB. 3.18 – Les classes de conjugaison de $\mathrm{R}(q)$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{R}}(q) \cap C_1 &= R_1 \cup R_{8,0} \\
\widetilde{\mathrm{R}}(q) \cap D_1 &= R_2 \\
\widetilde{\mathrm{R}}(q) \cap D_{21} &= R_{3,1} \cup R_{8,2} \\
\widetilde{\mathrm{R}}(q) \cap D_{22} &= R_{3,2} \cup R_{8,1} \\
\widetilde{\mathrm{R}}(q) \cap A_{51} &= R_4 \\
\widetilde{\mathrm{R}}(q) \cap A_{52} &= R_5 \\
\widetilde{\mathrm{R}}(q) \cap A_{51} &= R_6 \\
\widetilde{\mathrm{R}}(q) \cap E_1(h) &= R_{1,1}(h) \cup R_{1,J}(h) \\
\widetilde{\mathrm{R}}(q) \cap F_1(h) &= R_{aba,1}(h) \cup R_{aba,J}(h) \cup R_{aba,\tau^2}(h) \cup R_{aba,J\tau^2}(h) \\
\widetilde{\mathrm{R}}(q) \cap G_1(h) &= R_a(h) \\
\widetilde{\mathrm{R}}(q) \cap H_1(h) &= R_{ababa}(h)
\end{aligned}
$$

TAB. 3.19 – Fusion des classes extérieures de $\widetilde{\mathrm{R}}(q)$ dans $\widetilde{\mathrm{G}}$.

$$
\begin{array}{lcll}
\operatorname{Ind}_{\mathrm{R}(q)}^{\mathrm{G}} \phi(A_1) & = & q^3(q^3-1)(q^2+q+1)\phi(R_1) & \\
\operatorname{Ind}_{\mathrm{R}(q)}^{\mathrm{G}} \phi(A_{32}) & = & q^3\phi(R_2) & \\
\operatorname{Ind}_{\mathrm{R}(q)}^{\mathrm{G}} \phi(A_{42}) & = & q^2(\phi(R_{3,1})+\phi(R_{3,2})) & \\
\operatorname{Ind}_{\mathrm{R}(q)}^{\mathrm{G}} \phi(A_{51}) & = & q\phi(R_4) & \\
\operatorname{Ind}_{\mathrm{R}(q)}^{\mathrm{G}} \phi(A_{52}) & = & q\phi(R_5) & \\
\operatorname{Ind}_{\mathrm{R}(q)}^{\mathrm{G}} \phi(A_{51}) & = & q\phi(R_6) & \\
\operatorname{Ind}_{\mathrm{R}(q)}^{\mathrm{G}} \phi(B_1) & = & q(q^2-1)\phi(R_{8,0}) & \\
\operatorname{Ind}_{\mathrm{R}(q)}^{\mathrm{G}} \phi(B_5) & = & q(\phi(R_{8,1})+\phi(R_{8,2})) & \\
\operatorname{Ind}_{\mathrm{R}(q)}^{\mathrm{G}} \phi(h) & = & (q-1)\phi(h) & h \in T_1 \\
\operatorname{Ind}_{\mathrm{R}(q)}^{\mathrm{G}} \phi(h) & = & (q+1)\phi(h) & h \in T_{\omega_a\omega_b\omega_a} \\
\operatorname{Ind}_{\mathrm{R}(q)}^{\mathrm{G}} \phi(h) & = & (q+3\theta+1)\phi(h) & h \in T_{\omega_a} \\
\operatorname{Ind}_{\mathrm{R}(q)}^{\mathrm{G}} \phi(h) & = & (q-3\theta+1)\phi(h) & h \in T_{\omega_a\omega_b\omega_a\omega_b\omega_a}
\end{array}
$$

TAB. 3.20 – Formules d'induction de $\mathrm{R}(q)$ à G.

$$
\begin{array}{lcl}
\operatorname{Ind}_{\widetilde{\mathrm{R}}(q)}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(C_1) & = & \phi(R_1)+q^2(q^2-q+1)\phi(R_{8,0}) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{\mathrm{R}}(q)}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(D_1) & = & \phi(R_2) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{\mathrm{R}}(q)}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(D_{21}) & = & \phi(R_{3,1})+q\phi(R_{8,2}) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{\mathrm{R}}(q)}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(D_{22}) & = & \phi(R_{3,2})+q\phi(R_{8,1}) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{\mathrm{R}}(q)}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(A_{51}) & = & \phi(R_4) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{\mathrm{R}}(q)}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(A_{52}) & = & \phi(R_5) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{\mathrm{R}}(q)}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(A_{51}) & = & \phi(R_6) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{\mathrm{R}}(q)}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(E_1(h)) & = & \phi(R_{1,1}(h))+\phi(R_{1,J}(h)) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{\mathrm{R}}(q)}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(F_1(h)) & = & \phi(R_{aba,1}(h))+\phi(R_{aba,J}(h))+\phi(R_{aba,\tau^2}(h)) \\
 & & +\phi(R_{aba,J\tau^2}(h)) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{\mathrm{R}}(q)}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(G_1(h)) & = & \phi(R_a(h)) \\
\operatorname{Ind}_{\widetilde{\mathrm{R}}(q)}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(H_1(h)) & = & \phi(R_{ababa}(h))
\end{array}
$$

TAB. 3.21 – Formules d'induction de $\widetilde{\mathrm{R}}(q)$ à $\widetilde{\mathrm{G}}$.

Représentant dans $\widetilde{\mathrm{G}}$	Représentant dans le centralisateur
1	1
$\eta(1)$	$\eta(t) \qquad t \neq 0$
J	J
$\eta(1)J$	$\eta(t)J \qquad t \neq 0$
(h_0, σ)	(h_0, σ), $(h_0 J, \sigma)$
$(\eta(1)h_0, \sigma)$	$(\eta(t)h_0, \sigma)$, t carré, $\quad (\eta(t)h_0 J, \sigma)$, t non carré
$(\eta(1)h_0 J, \sigma)$	$(\eta(t)Jh_0, \sigma)$, t carré, $\quad (\eta(t)h_0, \sigma)$, t non carré

TAB. 3.22 – Fusion des classes de $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\eta h_0, \sigma)$.

x	$\mathrm{Ind}_{\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\eta h_0,\sigma)}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \varphi(x)$
1	$\frac{1}{2} q^5 (q^6 - 1)(q^2 - 1)$
$\eta(1)$	$q^3 \sum_{t \neq 0} \phi(\eta(t))$
J	$\frac{1}{2} q^3 (q^2 - 1)^2 \phi'(J)$
$\eta(1)J$	$q \sum_{t \neq 0} \phi(\eta(t)) \phi'(J)$
(h_0, σ)	$\frac{1}{2} q (q^2 - 1)(\phi'(h_0, \sigma) + \phi'(h_0 J, \sigma)$
$(\eta(1)h_0, \sigma)$	$\sum_{t \text{ carré}} \phi(\eta(t)) \phi'(h_0, \sigma) + \sum_{t \text{ non carré}} \phi(\eta(t)) \phi'(h_0 J, \sigma)$
$(\eta(1)h_0 J, \sigma)$	$\sum_{t \text{ carré}} \phi(\eta(t)) \phi'(J h_0, \sigma) + \sum_{t \text{ non carré}} \phi(\eta(t)) \phi'(h_0, \sigma)$

TAB. 3.23 – Formules d'induction de $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\eta h_0, \sigma)$ à $\widetilde{\mathrm{G}}$.

x	$\mathrm{Ind}_{T' \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle}^{\widetilde{\mathrm{G}}} \phi(x)$
$(1, \sigma)$	$q^3(q-1)(q^2-q+1)\phi(1,\sigma)$
(h_0, σ)	$q(q-1)(\phi(\tau,\sigma) + \phi(\tau',\sigma) + \phi(\tau\tau',\sigma)$
(h, σ)	$\phi(h^{\pm 1},\sigma) + \phi(h^{\pm\frac{3\theta+1}{2}},\sigma) + \phi(h^{\pm\frac{3\theta-1}{2}},\sigma)$
$(h\tau, \sigma)$	$\phi(h^{\pm 1}\tau,\sigma) + \phi(h^{\pm\frac{3\theta+1}{2}}\tau\tau',\sigma) + \phi(h^{\pm\frac{3\theta-1}{2}}\tau',\sigma)$
$(h\tau', \sigma)$	$\phi(h^{\pm 1}\tau',\sigma) + \phi(h^{\pm\frac{3\theta+1}{2}}\tau,\sigma) + \phi(h^{\pm\frac{3\theta-1}{2}}\tau\tau',\sigma)$
$(h\tau\tau', \sigma)$	$\phi(h^{\pm 1}\tau\tau',\sigma) + \phi(h^{\pm\frac{3\theta+1}{2}}\tau',\sigma) + \phi(h^{\pm\frac{3\theta-1}{2}}\tau,\sigma)$

TAB. 3.24 – Formules d'induction de $T' \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle$ à $\widetilde{\mathrm{G}}$.

.

	$(1,\sigma)$	(X,σ)	(T,σ)	(T^{-1},σ)	(Y_1,σ)	(Y_2,σ)	(Y_3,σ)	(h_0,σ)	$(\eta h_0,\sigma)$	$(\eta^{-1}h_0,\sigma)$
$\widetilde{\theta}_1$	$\theta(q^2-1)$	$-\theta$	$-\theta$	$-\theta$	2θ	$-\theta$	$-\theta$	0	0	0
$\widetilde{\theta}_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\sqrt{q}$	$-\sqrt{q}$
$\widetilde{\theta}_5$	q^3	0	0	0	0	0	0	q	0	0
$\widetilde{\theta}_6$	q^2-q+1	$1-q$	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
$\widetilde{\theta}_7$	$q(q^2-q+1)$	q	0	0	0	0	0	$-q$	0	0
$\widetilde{\theta}_{10}$	0	0	$\theta^2\sqrt{-3}$	$-\theta^2\sqrt{-3}$	0	$\theta\sqrt{-3}$	$-\theta\sqrt{-3}$	0	0	0
$\widetilde{\theta}_{11}$	$q(q-1)$	$-q$	0	0	0	0	0	$1-q$	1	1
$\widetilde{\theta}_{12}(1)$	$\theta(q^2-1)$	$-\theta$	$-\theta+\theta^2\sqrt{-3}$	$-\theta-\theta^2\sqrt{-3}$	$-\theta$	$\frac{\theta+\theta\sqrt{-3}}{2}$	$\frac{\theta-\theta\sqrt{-3}}{2}$	0	0	0
$\widetilde{\theta}_{12}(-1)$	$\theta(q^2-1)$	$-\theta$	$-\theta-\theta^2\sqrt{-3}$	$-\theta+\theta^2\sqrt{-3}$	$-\theta$	$\frac{\theta-\theta\sqrt{-3}}{2}$	$\frac{\theta+\theta\sqrt{-3}}{2}$	0	0	0
$\widetilde{\chi}_k$	q^3+1	1	1	1	1	1	1	$(-1)^k(q+1)$	$(-1)^k$	$(-1)^k$
$\widetilde{\chi}_{aba,0,0}(k)$	$(q-1)(q^2-q+1)$	$2q-1$	-1	-1	-1	-1	-1	$3(q-1)$	-3	-3
$\widetilde{\chi}_{aba,1,0}(k)$	$(q-1)(q^2-q+1)$	$2q-1$	-1	-1	-1	-1	-1	$1-q$	1	1
$\widetilde{\chi}_{aba,0,1}(k)$	$(q-1)(q^2-q+1)$	$2q-1$	-1	-1	-1	-1	-1	$1-q$	1	1
$\widetilde{\chi}_{aba,1,1}(k)$	$(q-1)(q^2-q+1)$	$2q-1$	-1	-1	-1	-1	-1	$1-q$	1	1
$\widetilde{\chi}_{a}(k)$	$(q^2-1)(q+3\theta+1)$	$-q-1-3\theta$	$-3\theta-1$	$-3\theta-1$	-1	-1	-1	0	0	0
$\widetilde{\chi}_{ababa}(k)$	$(q^2-1)(q-3\theta+1)$	$-q-1+3\theta$	$3\theta-1$	$3\theta-1$	-1	-1	-1	0	0	0

TAB. 3.25 – Caractères extérieurs de $\mathrm{G}_2(q) \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle$.

	(h_1,σ)	(h_1J,σ)	(h_{aba},σ)	$(h_{aba}\tau,\sigma)$	$(h_{aba}\tau',\sigma)$	$(h_{aba}\tau\tau',\sigma)$	(h_a,σ)	(h_{ababa},σ)
$\widetilde{\theta}_1$	0	0	0	0	0	0	-1	1
$\widetilde{\theta}_2$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\widetilde{\theta}_5$	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$\widetilde{\theta}_6$	1	-1	3	-1	-1	-1	0	0
$\widetilde{\theta}_7$	1	-1	-3	1	1	1	0	0
$\widetilde{\theta}_{10}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\widetilde{\theta}_{11}$	0	0	2	2	2	2	-1	-1
$\widetilde{\theta}_{12}(1)$	0	0	0	0	0	0	-1	1
$\widetilde{\theta}_{12}(-1)$	0	0	0	0	0	0	-1	1
$\widetilde{\chi}_k$	γ_{ik}	$(-1)^k\gamma_{ik}$	0	0	0	0	0	0
$\widetilde{\chi}_{aba,0,0}(k)$	0	0	$-\beta_{kj,0}$	$-\beta_{kj,0}$	$-\beta_{kj,0}$	$-\beta_{kj,0}$	0	0
$\widetilde{\chi}_{aba,1,0}(k)$	0	0	$-\beta_{kj,0}$	$-\beta_{kj,3}$	$-\beta_{kj,1}$	$-\beta_{kj,2}$	0	0
$\widetilde{\chi}_{aba,0,1}(k)$	0	0	$-\beta_{kj,0}$	$-\beta_{kj,1}$	$-\beta_{kj,2}$	$-\beta_{kj,3}$	0	0
$\widetilde{\chi}_{aba,1,1}(k)$	0	0	$-\beta_{kj,0}$	$-\beta_{kj,2}$	$-\beta_{kj,3}$	$-\beta_{kj,1}$	0	0
$\widetilde{\chi}_a(k)$	0	0	0	0	0	0	$-\delta_{kj}$	0
$\widetilde{\chi}_{ababa}(k)$	0	0	0	0	0	0	0	$-\delta'_{kj}$

TAB. 3.25 – Caractères extérieurs de $\mathrm{G}_2(q) \rtimes \langle\, \sigma \,\rangle$.

Chapitre 4

Isométrie parfaite

Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe et F un endomorphisme sur $\mathbf{G}$ tel que F^2 est un endomorphisme de Frobenius. Dans §1.5.6, on voit qu'il y a un lien fort entre la table des caractères de $\mathbf{G}^F$ et « la partie extérieure » de $\mathbf{G}^{F^2} \rtimes \langle F \rangle$. On va voir dans ce chapitre que si $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique simple de type B_2 ou G_2 et F l'endomorphisme de Frobenius défini dans §1.7 et §1.8, alors les deux groupes $\mathbf{G}^F$ et $\mathbf{G}^{F^2} \rtimes \langle F \rangle$ ont une structure modulaire très similaire. On va exprimer ce lien en montrant que les p-blocs principaux de ces deux groupes sont parfaitement isométriques. On s'intéresse aux nombres premiers p qui sont diviseurs de $|\mathbf{G}^F|$ et dont la valuation est maximale, dans le sens où :

$$\nu_p(|\mathbf{G}^F|) = \nu_p(|\mathbf{G}^{F^2}|).$$

4.1 Généralités sur les isométries parfaites

La référence pour ce paragraphe est l'article de Broué ; cf. [2]. Soient G et H deux groupes finis, p un nombre premier et $(K,\ \mathcal{O},\ k)$ un système p-modulaire assez gros pour G et H. A tout caractère généralisé μ de $G \times H$, on définit deux homomorphismes linéaires :

$$I_\mu : \mathbb{Z}\operatorname{Irr}(H) \to \mathbb{Z}\operatorname{Irr}(G) \quad \text{et} \quad R_\mu : \mathbb{Z}\operatorname{Irr}(G) \to \mathbb{Z}\operatorname{Irr}(H) \text{ tels que}$$

$$\forall g \in G,\ \ I_\mu(\zeta)(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} \mu(g,\ h^{-1})\zeta(h)$$

$$\forall h \in H,\ R_\mu(\eta)(h) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mu(g^{-1}, h)\eta(g).$$

Ces deux applications sont adjointes l'une de l'autre pour les produits scalaires usuels de $\mathbb{Z}\operatorname{Irr}(G)$ et $\mathbb{Z}\operatorname{Irr}(H)$. De plus, tout homomorphisme entre $\mathbb{Z}\operatorname{Irr}(H)$ et $\mathbb{Z}\operatorname{Irr}(G)$ est de la forme I_μ avec μ un caractère généralisé de $G \times H$.

On dit que le caractère μ est *parfait* s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

(1) Pour tout $g \in G$ et $h \in H$, on a $\dfrac{\mu(g,\ h)}{|\operatorname{C}_G(g)|} \in \mathcal{O}$ et $\dfrac{\mu(g,\ h)}{|\operatorname{C}_H(h)|} \in \mathcal{O}$.

(2) Si $\mu(g,\ h) \neq 0$, alors g est d'ordre premier à p si et seulement si h est d'ordre premier à p.

Soit e un idempotent central de $\mathcal{O}G$ et $A = \mathcal{O}Ge$ le p-bloc de G correspondant. On désigne par $\mathrm{Irr}(A)$ l'ensemble des caractères irréductibles de G appartenant au p-bloc A et $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(A)$ le sous ensemble de $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(G)$ engendré par les combinaisons linéaires à coefficient entier d'éléments de $\mathrm{Irr}(A)$.

Soit f un idempotent central de $\mathcal{O}H$ et $B = \mathcal{O}Hf$ le p-bloc de H correspondant. On dit que I_μ est *une isométrie parfaite* entre les p-blocs A et B si le caractère μ de $G \times H$ est parfait, et si I_μ induit une isométrie entre $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(A)$ et $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B)$.

Soit $\mathrm{C}_K(G,\ e)$ le K-espace vectoriel des fonctions centrales α sur G à valeur dans K qui vérifient $\alpha(eg) = \alpha(g)\ \forall g \in G$. Soit $\mathrm{C}_K(G,\ e,\ p')$ le sous espace de $\mathrm{C}_K(G,\ e)$ des fonctions qui s'annulent sur les éléments p-singulier de G. On définit de manière analogue $\mathrm{C}_{\mathcal{O}}(G,\ e)$ et $\mathrm{C}_{\mathcal{O}}(G,\ e,\ p')$. On contaste que I_μ et R_μ se prolongent par linéarité sur ces espaces. On a alors un critère pour déterminer si μ est parfait :

Proposition 4.1.1 *Le caractère μ est parfait si et seulement si*

(1) L'application I_μ envoie $\mathrm{C}_{\mathcal{O}}(H,\ f)$ dans $\mathrm{C}_{\mathcal{O}}(G,\ e)$ et l'application R_μ envoie $\mathrm{C}_{\mathcal{O}}(G,\ e)$ dans $\mathrm{C}_{\mathcal{O}}(H,\ f)$.

(2) L'application I_μ envoie $\mathrm{C}_K(H,\ f,\ p')$ dans $\mathrm{C}_K(G,\ e,\ p')$ et l'application R_μ envoie $\mathrm{C}_K(G,\ e,\ p')$ dans $\mathrm{C}_K(H,\ f,\ p')$.

Cette proposition suggère une méthode pour déterminer une isométrie parfaite entre deux p-blocs A et B :

Lemme 4.1.1 *Soient A et B deux p-blocs de G et H respectivement. Pour établir l'existence d'une isométrie parfaite entre ces deux p-blocs, on procède de la façon suivante :*

- *On construit une isométrie I entre $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B)$ et $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(A)$. On peut prolonger I en un homomorphisme de $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(H)$ à $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(G)$, donc I est de la forme I_μ pour un certain $\mu \in \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(G \times H)$.*
- *On verifie que μ est parfait en appliquant la proposition 4.1.1.*

4.2 Le type B_2

Soit p un diviseur de $|\,\mathrm{Sz}(q)|$ qui ne divise pas $[\mathrm{G} : \mathrm{Sz}(q)]$; c'est à dire, p est un diviseur premier de $q^2 + 1$. Soit $(K,\ \mathcal{O},\ k)$ un système p-modulaire assez gros pour $\mathrm{Sz}(q)$ et $\widetilde{\mathrm{G}}$. On note $\mathcal{P}$ l'idéal maximal premier de $\mathcal{O}$ tel que $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. Soit e_0 et f_0 deux idempotents centraux de $\mathcal{O}\,\mathrm{Sz}(q)$ et $\mathcal{O}\widetilde{\mathrm{G}}$, qui correspondent respectivement aux p-blocs principaux $A_0 = \mathcal{O}\,\mathrm{Sz}(q)e_0$ et $B_0 = \mathcal{O}\widetilde{\mathrm{G}}f_0$ de $\mathrm{Sz}(q)$ et de $\widetilde{\mathrm{G}}$. L'objectif de ce paragraphe est de démontrer que les p-blocs principaux de $\mathrm{Sz}(q)$ et de $\widetilde{\mathrm{G}}$ sont parfaitement isométriques. Avant de prouver ce résultat, on a besoin de connaître les p-blocs principaux de $\mathrm{Sz}(q)$ et de $\widetilde{\mathrm{G}}$.

4.2.1 Détermination des p-blocs principaux

On a :

$$q^2 + 1 = (q + 2\theta + 1)\,(q - 2\theta + 1).$$

Or $q+2\theta+1$ et $q-2\theta+1$ sont premiers entre eux, donc p n'est diviseur que d'un seul de ces facteurs. Selon le cas, on écrit :

$$q+2\theta+1=p^d\alpha \quad \text{ou} \quad q-2\theta+1=p^d\alpha, \quad \text{avec} \quad p\wedge\alpha=1.$$

On munit $\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$ de la relation d'équivalence :

$$i\sim j \quad \text{ssi} \quad i=j, \quad i=-j, \quad i=jq \quad \text{ou}\; i=-jq$$

et on note $\Re_0$ l'ensemble des classes non nulles modulo cette relation.

Le p-bloc principal de $\mathrm{Sz}(q)$.

Proposition 4.2.1 *Les caractères irréductibles du p-bloc principal de* Sz *sont :*

Si p divise $q+2\theta+1$, *alors* $\mathrm{Irr}(A_0)=\{\,1,\,\mathrm{St},\,\mathcal{W},\,\overline{\mathcal{W}},\,Y_{k\alpha}\,|\,k\in\Re_0\,\}$.

Si p divise $q-2\theta+1$, *alors* $\mathrm{Irr}(A_0)=\{\,1,\,\mathrm{St},\,\mathcal{W},\,\overline{\mathcal{W}},\,Z_{k\alpha}\,|\,k\in\Re_0\,\}$.

Preuve — On démontre le résultat pour les diviseurs premiers p de $q+2\theta+1$. Le cas où p divise $q-2\theta+1$ se traite de manière similaire. Les classes de défaut d sont l'identité et les classes p-régulières de type π_1. Or les classes de type π_1 ont leur représentant dans $\langle\,\pi_1\,\rangle$ et les éléments p-réguliers de $\langle\,\pi\,\rangle$ sont les éléments de $\langle\,\pi^{p^d}\,\rangle$. Il suffit donc d'établir les relations de congruence (1.4) pour les classes p-régulières de défaut maximal. Soit $\pi_1^{p^d i}$ un représentant d'une classe p-régulière de défaut d et $\xi_1=\varepsilon_1^{p^d}$ une racine α-ième de l'unité.

Les caratères X_i et Z_k sont de défaut zéro. Pour les autres caractères de $\mathrm{Irr}(\mathrm{Sz}(q))$, on obtient :

χ	$\dfrac{\mid \mathrm{Cl}(\pi_1^{p^d i})\mid\chi(\pi_1^{p^d i})}{\chi(1)}$ mod $\mathcal{P}$
1	4
st	4
$\mathcal{W}$	4
$\overline{\mathcal{W}}$	4
$Y_{k\alpha}$	4
$Y_{k\alpha+l}$	$\xi_1^{li}+\xi_1^{-li}+\xi_1^{qli}+\xi_1^{-qli}$

Ainsi, on constate que st, $\mathcal{W}$, $\overline{\mathcal{W}}$, et $Y_{k\alpha}$ sont dans le bloc principal, et ce sont les seuls car :

$$\xi_1^{li}+\xi_1^{-li}+\xi_1^{qli}+\xi_1^{-qli}\not\equiv 4 \mod \mathcal{P}.$$

On a finalement établi que :

$$\mathrm{Irr}(A_0)=\{id,\; st,\; W,\; \overline{W},\; Y_{k\alpha},\; k\in\Re_0\}.$$

□

Le p-bloc principal de $\widetilde{\mathrm{G}}$.

Proposition 4.2.2 *On a :*

Si p divise $q+2\theta+1$ alors $\mathrm{Irr}(B_0)=\{1,\ \varepsilon\widetilde{\theta}_1,\ \varepsilon\widetilde{\theta}_4,\ \widetilde{\theta}_5,\ \varepsilon\widetilde{\chi}_{A_1}(\alpha k),\ k\in\Re_0\}$

Si p divise $q-2\theta+1$ alors $\mathrm{Irr}(B_0)=\{1,\ \widetilde{\theta}_1,\ \varepsilon\widetilde{\theta}_4,\ \varepsilon\widetilde{\theta}_5,\ \varepsilon\widetilde{\chi}_{A_2}(\alpha k),\ k\in\Re_0\}$

Preuve — Soit p un diviseur premier de $q+2\theta+1$. Par le critère (1.4), on constate que les caractères 1 et ε ne sont pas dans le même p-bloc. De plus on a :

$$\{\widetilde{\chi}\mid\widetilde{\chi}_{\mathrm{G}}\in B_0(\mathrm{G})\}=B_0(\widetilde{\mathrm{G}})\cup\varepsilon B_0(\widetilde{\mathrm{G}}).$$

Par une méthode similiaire à la preuve de la proposition 4.2.1, on trouve que les caractères de G dans le bloc principal sont :

$$\{1,\ \theta_1,\ \theta_4,\ \theta_5,\ \chi_{A_1}(\alpha k),\ k\in\Re_0\}.$$

Soit χ un caractère du bloc principal de G. Alors, χ admet par la proposition 1.2.4 deux extensions à $\widetilde{\mathrm{G}}$. Il reste à déterminer laquelle de ces extensions est dans le p-bloc principal de $\widetilde{\mathrm{G}}$. On vérifie pour cela le critère de congruence sur les classes extérieures p-régulières de défaut maximal. Ces classes sont $\mathrm{Cl}(1,\sigma)$ et $\mathrm{Cl}(\pi_1^{p^{d}i},\sigma),\ i\in\Re_0$. On a :

$$|\,\mathrm{Cl}(1,\sigma)|\equiv-2\theta \mod \mathcal{P} \quad\text{et}\quad |\,\mathrm{Cl}(\pi_1^{p^{d}i})|\equiv-8\theta \mod \mathcal{P}$$

On vérifie que les caractères 1, $\varepsilon\widetilde{\theta}_1$, $\varepsilon\widetilde{\theta}_4$, $\widetilde{\theta}_5$, $\varepsilon\widetilde{\chi}_{A_1}(\alpha k),\ k\in\Re_0$ satisfont la congruence. Donnons un exemple d'un tel calcul :

$$\frac{\varepsilon\widetilde{\theta}_1(1,\sigma)|\,\mathrm{Cl}(1,\sigma)|}{\varepsilon\widetilde{\theta}_1(1)}=\frac{-\ \theta(q-1)/\ q^2(q+1)^2(q-1)}{q(q+1)^2/2}=-2q\theta(q-1)^2=-2q\theta(q^2-2q+1),$$

et comme $q^2\equiv-1 \mod \mathcal{P}$, il suit que :

$$\frac{\varepsilon\widetilde{\theta}_1(1,\sigma)|\,\mathrm{Cl}(1,\sigma)|}{\varepsilon\widetilde{\theta}_1(1)}\equiv 4\theta q^2\equiv-4\theta \mod \mathcal{P}.$$

Le cas où p est un diviseur premier de $q-2\theta+1$ se traite de façon similaire.

□

4.2.2 Isométrie parfaite

On va maintenant construire explicitement une une isométrie parfaite entre les p-blocs principaux de $\mathrm{Sz}(q)$ et de $\widetilde{\mathrm{G}}$. Pour cela on va la construire explicitement.

Théorème 4.2.1 *On définit l'application I par :*

- *Si p divise $q+2\theta+1$*

$$\left\{\begin{array}{ccc} 1 & & 1\\ st & & -\varepsilon\widetilde{\theta}_4\\ \mathcal{W} & \to & -\varepsilon\widetilde{\theta}_1\\ \overline{\mathcal{W}} & & \widetilde{\theta}_5\\ Y_{\alpha k} & & -\varepsilon\widetilde{\chi}_{A_1}(\alpha k)\end{array}\right.$$

- *Si p divise $q-2\theta+1$*

$$\left\{\begin{array}{lcc} 1 & & 1 \\ st & & -\varepsilon\widetilde{\theta}_4 \\ \mathcal{W} & \to & \widetilde{\theta}_1 \\ \overline{\mathcal{W}} & & -\varepsilon\widetilde{\theta}_5 \\ Z_{\alpha k} & & -\varepsilon\widetilde{\chi}_{A_2}(\alpha k) \end{array}\right.$$

L'application I ainsi définie réalise une isométrie parfaite entre les p-blocs principaux de $\mathrm{Sz}(q)$ *et de* $\widetilde{\mathrm{G}}$.

Preuve — Une fois encore, on démontre le résultat uniquement pour p diviseur premier de $q+2\theta+1$, la démarche étant exactement la même pour les diviseurs premiers de $q-2\theta+1$. On va appliquer la méthode donnée dans le lemme 4.1.1. L'application I définie précédemment réalise une isométrie entre $\mathbb{Z}\operatorname{Irr}(A_0)$ et $\mathbb{Z}\operatorname{Irr}(B_0)$, que l'on peut prolonger en un homomorphisme de $\mathbb{Z}\operatorname{Irr}(\mathrm{Sz}(q))$ dans $\mathbb{Z}\operatorname{Irr}(\widetilde{\mathrm{G}})$. Elle est donc de la forme I_μ, avec μ un caractère généralisé de $\widetilde{\mathrm{G}}\times\mathrm{Sz}(q)$. Pour montrer que μ est parfait, on utilise le critère donné dans la proposition 4.1.1.

(1) A toute classe de conjugaison C de $\mathrm{Sz}(q)$ ou de $\widetilde{\mathrm{G}}$, on peut associer un élément α_C de $\mathrm{C}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Sz}(q), e_0)$ et un élément β_C de $\mathrm{C}_{\mathcal{O}}(\widetilde{\mathrm{G}}, f_0)$ définis par :

$$\forall\, h \in \mathrm{Sz}(q) \quad \alpha_C(h) = 1_{Ce_0}(he_0) \quad \text{et} \quad \forall\, g \in \widetilde{\mathrm{G}} \quad \beta_C(g) = 1_{Cf_0}(gf_0).$$

La famille des $\{\alpha_C\}_C$ forme une $\mathcal{O}$-base de $\mathrm{C}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Sz}(q), e_0)$. De même, $\{\beta_C\}_C$ est une $\mathcal{O}$-base de $\mathrm{C}_{\mathcal{O}}(\widetilde{\mathrm{G}}, f_0)$. Soit C une classe de conjugaison de $\mathrm{Sz}(q)$. Décomposons α_C dans la K-base des caractères irréductibles de A_0. On obtient :

$$\alpha_C = \frac{|C|}{|\,\mathrm{Sz}\,|} \sum_{\phi \in \operatorname{Irr}(A_0)} \phi(C)\, \phi.$$

On va démontrer que $I_\mu(\alpha_C)$ est à valeur dans $\mathcal{O}$.

Si p^d divise $|C|$, comme les caractères irréductibles de $\widetilde{\mathrm{G}}$ et $\mathrm{Sz}(q)$ sont à valeurs dans $\mathcal{O}$, il suit immédiatement que $I_\mu(\alpha_C) \in \mathrm{C}_{\mathcal{O}}(\widetilde{\mathrm{G}},\ f_0)$.

Il reste à le vérifier lorsque p^d ne divise pas $|C|$, c'est à dire dans notre cas, lorsque p ne divise pas $|C|$. On va voir alors que $\sum_{\phi\in\operatorname{Irr}(A_0)} \phi(C)\, I_\mu(\phi)$ est à valeur dans $\mathbb{Z}$, et divisible par p^d.

Les classes de $\mathrm{Sz}(q)$ de cardinal premier à p sont les classes de défaut d de $\mathrm{Sz}(q)$, de représentant 1 et π_1^i, $i \in E_0$. Réduisons modulo p^d les valeurs des caractères de $\operatorname{Irr}(A_0)$ prises sur ces éléments. On obtient :

	1	π_1^i
1	1	1
st	-1	-1
W	1	1
$\overline{W}$	1	1
$Y_{k\alpha}$	-4	$-\varepsilon_1^{\alpha k}(\pi_1^i)$

On introduit alors :

$$\psi_1 = 1 + \varepsilon\widetilde{\theta}_4 - \varepsilon\widetilde{\theta}_1 + \widetilde{\theta}_5 + 4\sum \varepsilon\widetilde{\chi}_{A_1}(\alpha k)$$

$$\psi_{\pi_1^i} = \left\{\begin{array}{ll} 1 + \varepsilon\widetilde{\theta}_4 - \varepsilon\widetilde{\theta}_1 + \widetilde{\theta}_5 + 4\sum \varepsilon\widetilde{\chi}_{A_1}(\alpha k) & \text{si } \pi_1^i \text{ est p-régulier} \\ 1 + \varepsilon\widetilde{\theta}_4 - \varepsilon\widetilde{\theta}_1 + \widetilde{\theta}_5 + \sum \varepsilon_1^{\alpha k}(\pi_1)\,\varepsilon\widetilde{\chi}_{A_1}(\alpha k) & \text{si } \pi_1^i \text{ est p-singulier} \end{array}\right.$$

En remarquant que si δ_1 désigne une racine p^d-ième de l'unité alors on a les relations :

$$\sum \delta_1^i + \delta_1^{-i} + \delta_1^{qi} + \delta_1^{-qi} = -1,$$

$$\sum(\delta_1^i + \delta_1^{-i} + \delta_1^{qi} + \delta_1^{-qi})(\delta_1^j + \delta_1^{-j} + \delta_1^{qj} + \delta_1^{-qj}) = \left\{\begin{array}{ll} -4 & \text{si } i \neq j \\ p^d - 4 & \text{si } i = j \end{array}\right.$$

On remarque que ψ_1 et $\psi_{\pi_1^i}$ sont les mêmes. De plus, en utilisant la table des caractères de $\widetilde{\mathrm{G}}$, on montre que ψ_1 sont à valeurs entières divisibles par p^d. Soit $g \in \widetilde{\mathrm{G}}$. On a :

$$I_\mu(\alpha_1)(g) = \frac{|\,\mathrm{Cl}(1)|}{|\,\mathrm{Sz}\,|}\sum_{\phi\in\mathrm{Irr}(A_0)} \phi(1)\, I_\mu(\phi)(g) = \frac{1}{q^2(q-1)(q^2+1)}\psi_1(g) = \frac{a}{b}$$

$$I_\mu(\alpha_{\pi_1^i})(g) = \frac{|\,\mathrm{Cl}(\pi_1^i)|}{|\,\mathrm{Sz}\,|}\sum_{\phi\in\mathrm{Irr}(A_0)} \phi(1)\, I_\mu(\phi)(g) = \frac{1}{q+r+1}\psi_{\pi_1^i}(g) = \frac{a}{b}$$

avec a et b des entiers tels que $b \notin p\mathbb{Z} = \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}$, ie $b \notin \mathcal{P}$. Il suit que $\frac{a}{b} \in \mathcal{O}$. Ainsi s C est une classe de défaut d de $\mathrm{Sz}(q)$, alors $I_\mu(\alpha_C)$ prend ces valeurs dans $\mathcal{O}$.

Comme R_μ est l'adjoint de I_μ, on peut décrire R_μ sur la base de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ \varepsilon\widetilde{\theta}_4 & & -st \\ \varepsilon\widetilde{\theta}_1 & \to & -\mathcal{W} \\ \widetilde{\theta}_5 & & \overline{\mathcal{W}} \\ \varepsilon\widetilde{\chi}_{A_1}(\alpha k) & & -Y_{\alpha k} \end{array}\right.$$

On va démontrer que pour toute classe C de $\widetilde{\mathrm{G}}$, l'application $R_\mu(\beta_C) \in \mathrm{C}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Sz},\, f_0)$. On constate comme précédemment qu'il suffit de le vérifier sur les classes de $\widetilde{\mathrm{G}}$ de défaut d, qui ont pour représentant 1, $h(\tau^i, \tau^{qi})$, $(1,\sigma)$ et $(1,\pi_1^i)$. Donnons les valeurs modulo p^d des caractères irréductibles de $\mathrm{Irr}(B_0)$ sur ces éléments :

	1	$h(\tau^i,\tau^{qi})$	$(1,\sigma)$	(π_1^i,σ)
1	1	1	1	1
$\varepsilon\widetilde{\theta}_4$	1	1	1	1
$\varepsilon\widetilde{\theta}_1$	-1	-1	-1	-1
$\widetilde{\theta}_5$	1	1	1	1
$\varepsilon\widetilde{\chi}_{A_1}(\alpha k)$	4	$\varepsilon_1^{ik\alpha} + \varepsilon_1^{-ik\alpha} + \varepsilon_1^{ik\alpha q} + \varepsilon_1^{-ik\alpha q}$	4	$\varepsilon_1^{ik\alpha} + \varepsilon_1^{-ik\alpha} + \varepsilon_1^{ik\alpha q} + \varepsilon_1^{-ik\alpha q}$

Soit δ_1 une racine p^d-ième de l'unité quelconque. Le problème est ramené à vérifier que les applications ζ_1 et ζ_{δ_1} sont à valeurs entières divisibles par p^d, où ζ_1 et ζ_{δ_1} sont définies par :

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= 1 - st + \mathcal{W} + \overline{\mathcal{W}} - 4\sum Y_{\alpha k}\\ \zeta_{\delta_1} &= 1 - st + \mathcal{W} + \overline{\mathcal{W}} - \sum(\delta_1^k + \delta_1^{-k} + \delta_1^{qk} + \delta_1^{-qk})\, Y_{\alpha k}\end{aligned}$$

La table des caractères du groupe de $\mathrm{Sz}(q)$ permet de conclure sans difficulté.

On a finalement démontré que :

$$I_\mu(\mathrm{C}_\mathcal{O}(\mathrm{Sz}(q), e_0)) \subseteq \mathrm{C}_\mathcal{O}(\widetilde{\mathrm{G}}, f_0)$$

$$R_\mu(\mathrm{C}_\mathcal{O}(\widetilde{\mathrm{G}}, f_0)) \subseteq \mathrm{C}_\mathcal{O}(\mathrm{Sz}(q), e_0)$$

(2) Comme $\hat{\mathrm{Irr}}_p(A_0)$ engendre $\mathrm{C_K}(\mathrm{Sz}(q), e_0, p')$ et que $\hat{\mathrm{Irr}}_p(B_0)$ engendre $\mathrm{C_K}(\widetilde{\mathrm{G}}, e_0, p')$, il suffit de démontrer que :

$$I_\mu(\hat{\mathrm{Irr}}(A_0)) \subseteq \mathrm{C_K}(\widetilde{\mathrm{G}},\, f_0,\, p') \quad \text{et} \quad R_\mu(\hat{\mathrm{Irr}}(B_0)) \subseteq \mathrm{C_K}(\mathrm{Sz}(q),\, e_0,\, p').$$

Soit $\psi \in \mathrm{Irr}(A_0)$. Comme $\hat{\psi} \in \mathrm{C}(A_0)$, on peut l'exprimer dans la K-base $\mathrm{Irr}(A_0)$ de $\mathrm{C}(A_0)$. On a :

$$\hat{\psi} = \sum_{\phi \in \mathrm{Irr}(A_0)} a_\phi \phi.$$

Soit g un élément p-singulier de $\widetilde{\mathrm{G}}$, alors g est de la forme $(h(i, qi),\, 1)$ ou (π_1^i, σ). Si $g = (h(i,\, qi),\, 1)$, il existe δ_1 racine p^d-ième de l'unité et α_1 un élément p-singulier de $\mathrm{Sz}(q)$ tels que :

$$\chi_{A_1}(\alpha)(g) = \delta_1 + \delta_1^{-1} + \delta_1^q + \delta_1^{-q} = -Y_\alpha(\alpha_1).$$

En particulier :

$$\forall\, k, \quad \chi_{A_1}(\alpha k)(g) = \delta_1^k + \delta_1^{-k} + \delta_1^{qk} + \delta_1^{-qk} = -Y_{\alpha k}(\alpha_1).$$

De plus, on a :

$$1_{\widetilde{\mathrm{G}}}(g) = 1_{\mathrm{Sz}}(\alpha_1),\ \widetilde{\theta}_4\varepsilon(g) = -\,\mathrm{St}(\alpha_1),\ \widetilde{\theta}_1\varepsilon(g) = -\mathcal{W}(\alpha_1) \quad \text{et} \quad \widetilde{\theta}_5 = \overline{\mathcal{W}}(\alpha_1).$$

Ainsi, on en déduit que $I_\mu(\phi)(g) = \phi(\alpha_1)\ \forall \phi \in \mathrm{Irr}(A_0)$. Donc :

$$I_\mu(\hat{\psi})(g) = \sum_{\phi \in \mathrm{Irr}(A_0)} a_\phi \phi(\alpha_1) = \hat{\psi}(\alpha_1) = 0, \text{ car } \alpha_1 \text{ est } p\text{-singulier.}$$

Si $g = (\pi_1^i,\, \sigma)$, alors :

$$I_\mu(\hat{\psi})(g) = \sum_{\phi \in \mathrm{Irr}(A_0)} a_\phi I_\mu(\phi)(g) = \hat{\psi}(\pi_1^i) = 0.$$

Ainsi, $\forall\, \psi \in \mathrm{Irr}(A_0)$, on a $I_\mu(\hat{\psi}) \in \mathrm{C_K}(\widetilde{\mathrm{G}},\, f_0,\, p)$.

On procède de la même façon pour montrer que $R_\mu(\hat{\mathrm{Irr}}(B_0) \subseteq \mathrm{C_K}(\mathrm{Sz},\, e_0,\, p)$. En effet, soit $\chi \in \mathrm{Irr}(B_0)$, alors $\hat{\chi} = \sum_{\phi \in \mathrm{Irr}(B_0)} b_\phi \phi$. Soit α_1 un élément p-singulier de Sz, on a :

$$R_\mu(\hat{\chi})(\alpha_1) = \sum_{\phi \in \mathrm{Irr}(B_0)} b_\phi R_\mu(\phi)(\alpha_1) \sum_{\phi \in \mathrm{Irr}(B_0)} b_\phi \phi(\alpha_1,\, \sigma) = \hat{\chi}(\pi_1,\, \sigma) = 0.$$

On a démontré que :

$$I_\mu(\mathrm{C_K}(\mathrm{Sz}(q), e_0,\, p)) \subseteq \mathrm{C_K}(\widetilde{\mathrm{G}}, f_0,\, p)$$

$$R_\mu(\mathrm{C_K}(\widetilde{\mathrm{G}}, f_0,\, p)) \subseteq \mathrm{C_K}(\mathrm{Sz}(q), e_0,\, p)$$

Ceci démontre (2) de la proposition 4.1.1.

Il suit donc que I_μ est bien une isométrie parfaite entre les deux blocs principaux. □

4.3 Le type G_2

La méthode que l'on emploie est très similaire à celle du paragraphe précédent, on va montrer que :

Théorème 4.3.1 *Soit p un diviseur premier de $q^2 - q + 1$. Soient e_0 et f_0 deux idempotents centraux de $\mathcal{O}\,\mathrm{R}(q)$ et $\mathcal{O}\widetilde{\mathrm{G}}$, qui correspondent respectivement aux p-blocs principaux $A_0 = \mathcal{O}\,\mathrm{R}(q)e_0$ et $B_0 = \mathcal{O}\widetilde{\mathrm{G}}f_0$ de $\mathrm{R}(q)$ et de $\widetilde{\mathrm{G}}$. Alors :*

– Si p est un diviseur de $q - 3\theta + 1$, on écrit

$$q - 3\theta + 1 = p^d \alpha,$$

avec α premier avec p. On munit $\mathbb{Z}/p^d\mathbb{Z}$ de la relation $\pm i \sim \pm qi \sim \pm q^2 i$ et on note $\Re_0$ les classes d'équivalences non triviales pour cette relation, les p-blocs principaux sont alors :

$$\mathrm{Irr}(A_0) = \{\ 1,\, \xi_3,\, \xi_5, \xi_7,\, \xi_9,\, \xi_{10},\, \eta^-_{k\alpha}\ k \in \Re_0\ \},$$

$$\mathrm{Irr}(B_0) = \{\, 1,\, \widetilde{\theta}_1,\, \varepsilon\widetilde{\theta}_5,\, \varepsilon\widetilde{\theta}_{11},\, \varepsilon\widetilde{\theta}_{12}(1),\, \varepsilon\widetilde{\theta}_{12}(-1),\, \varepsilon\widetilde{\chi}_{a,\alpha k}\ k \in \Re_0\ \}$$

Il existe une isométrie parfaite entre A_0 et B_0 définie par

$$I = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ \xi_3 & & -\varepsilon\widetilde{\theta}_5 \\ \xi_5 & & \widetilde{\theta}_1 \\ \xi_7 & \longmapsto & -\varepsilon\widetilde{\theta}_{11} \\ \xi_9 & & -\varepsilon\widetilde{\theta}_{12}(-1) \\ \xi_{10} & & -\varepsilon\widetilde{\theta}_{12}(1) \\ \eta^-_{\alpha k} & & -\varepsilon\widetilde{\chi}_{a,\alpha k} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad R = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ \varepsilon\widetilde{\theta}_5 & & -\xi_3 \\ \widetilde{\theta}_1 & & \xi_5 \\ \varepsilon\widetilde{\theta}_{11} & \longmapsto & -\xi_7 \\ \varepsilon\widetilde{\theta}_{12}(-1) & & -\xi_9 \\ \varepsilon\widetilde{\theta}_{12}(1) & & -\xi_{10} \\ \varepsilon\widetilde{\chi}_{a,\alpha k} & & -\eta^-_{\alpha k} \end{array} \right.$$

– *Si p est un diviseur de $q+3\theta+1$, on a $q+3\theta+1 = p^d\alpha$, avec α premier avec p et comme précédement, on note $\Re_0$ les classes non nulles de $\mathbb{Z}/p^d\mathbb{Z}$ modulo la relation $\pm i \sim \pm qi \sim \pm q^2 i$. Les p-blocs principaux sont :*

$$\mathrm{Irr}(A_0) = \{\ 1,\ \xi_3,\ \xi_6, \xi_8,\ \xi_9,\ \xi_{10},\ \eta^+_{k\alpha}\ k \in \Re_0\ \},$$

$$\mathrm{Irr}(B_0) = \{\ 1,\ \varepsilon\widetilde{\theta}_1,\ \varepsilon\widetilde{\theta}_5,\ \varepsilon\widetilde{\theta}_{11},\ \widetilde{\theta}_{12}(1),\ \widetilde{\theta}_{12}(-1),\ \varepsilon\widetilde{\chi}_{ababa,\alpha k}\ k \in \Re_0\ \}$$

Il existe une isométrie parfaite entre A_0 et B_0 définie par

$$I = \left\{\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ \xi_3 & & -\varepsilon\widetilde{\theta}_5 \\ \xi_6 & & -\varepsilon\widetilde{\theta}_1 \\ \xi_8 & \longmapsto & \varepsilon\widetilde{\theta}_{11} \\ \xi_9 & & \widetilde{\theta}_{12}(-1) \\ \xi_{10} & & \widetilde{\theta}_{12}(1) \\ \eta^+_{\alpha k} & & -\varepsilon\widetilde{\chi}_{ababa,\alpha k} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad R = \left\{\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ \varepsilon\widetilde{\theta}_5 & & -\xi_3 \\ \varepsilon\widetilde{\theta}_1 & & -\xi_6 \\ \varepsilon\widetilde{\theta}_{11} & \longmapsto & \xi_8 \\ \widetilde{\theta}_{12}(-1) & & \xi_9 \\ \widetilde{\theta}_{12}(1) & & \xi_{10} \\ \varepsilon\widetilde{\chi}_{ababa,\alpha k} & & -\eta^+_{\alpha k} \end{array}\right.$$

Preuve — Le p-bloc principal de $\widetilde{\mathrm{G}}$ est donné dans les théorèmes 3.2.1 et 3.2.2. On calcule le p-bloc de $\mathrm{R}(q)$ par une méthode similaire, en utilisant le critère (1.4). Pour prouver que I est une isométrie parfaite, on calque la démonstration du théorème 4.2.1. Le choix des signes dans la définition de I est telle que l'argument de (2) s'applique automatiquement. Il reste à prouver (1). On remarque tout d'abord que si δ_1 est une racine p^d-ième de l'unité, alors :

$$\sum \delta_1^i + \delta_1^{-i} + \delta_1^{iq} + \delta_1^{-iq} + \delta_1^{iq^2} + \delta_1^{-iq^2} = -1, \quad \text{et}$$

$$\sum(\delta_1^i+\delta_1^{-i}+\delta_1^{iq}+\delta_1^{-iq}+\delta_1^{iq^2}+\delta_1^{-iq^2})(\delta_1^j+\delta_1^{-j}+\delta_1^{jq}+\delta_1^{-jq}+\delta_1^{jq^2}+\delta_1^{-jq^2}) = \left\{\begin{array}{ll} -6 & \text{si } i \neq j \\ q^d-6 & \text{sinon} \end{array}\right.$$

On introduit les deux quantités :

$$\psi_a = 1 + \varepsilon\widetilde{\theta}_5 - \widetilde{\theta}_1 + \varepsilon\widetilde{\theta}_{11} + \varepsilon\widetilde{\theta}_{12}(-1) + \varepsilon\widetilde{\theta}_{12}(1) + 6\sum \varepsilon\widetilde{\chi}_a(\alpha k), \tag{4.1}$$

$$\psi_{ababa} = 1 + \varepsilon\widetilde{\theta}_5 - \varepsilon\widetilde{\theta}_1 + \varepsilon\widetilde{\theta}_{11} + \widetilde{\theta}_{12}(-1) + \widetilde{\theta}_{12}(1) + 6\sum \varepsilon\widetilde{\chi}_{ababa}(\alpha k). \tag{4.2}$$

En utilisant les relations (4.1) et (4.2), on montre qu'il suffit de prouver que si p est un diviseur premier de $q-3\theta+1$ (respectivement de $q+3\theta+1$) alors ψ_a (resp. ψ_{ababa}) est à valeurs entières divisibles par p^d. On utilise la table de $\widetilde{\mathrm{G}}$ pour le montrer. On a donc bien :

$$I(\mathrm{C}_\mathcal{O}(\mathrm{R}(q), e_0)) \subseteq I(\mathrm{C}_\mathcal{O}(\widetilde{\mathrm{G}}, f_0)).$$

Réduisons les valeurs modulo p^d des caractères de B_0.Précisons le calcul sur la classe de l'identité pour $\widetilde{\theta}_1$, $\widetilde{\theta}_{11}$ et $\widetilde{\theta}_{12}(\pm 1)$. En effet dans ces cas, le degré est une fraction rationnelle en q, et il faut être prudent lorsque l'on réduit modulo p^d. On fait le calcul de $\widetilde{\theta}_1(1) \mod p^d$, les autres cas se traitent de manières similaires. On a :

$$\widetilde{\theta}_1(1) = \frac{1}{6}q(q+1)^2(q^2+q+1).$$

	1	$h(\tau^i, E_6(i)$	$(1,\sigma)$	(h_r^i,σ) $r = a$ ou $ababa$
1	1	1	1	1
$\varepsilon\widetilde{\theta}_1$	-1	-1	-1	-1
$\varepsilon\widetilde{\theta}_5$	1	1	1	1
$\widetilde{\theta}_{11}$	1	1	1	1
$\widetilde{\theta}_{12}(\pm 1)$	1	1	1	1
$\varepsilon\widetilde{\chi}_{r,\alpha k}$	6	$\delta_1^{\pm 1} + \delta_1^{\pm q} + \varepsilon_1^{\pm q^2}$	6	$\delta_1^{\pm 1} + \delta_1^{\pm q} + \varepsilon_1^{\pm q^2}$

TAB. 4.1 – Réduction modulo p^d de $\mathrm{Irr}(B_0)$

Réduisons $q(q+1)^2(q^2+q+1)$ modulo p^d, on trouve -6, il existe donc un entier m tel que :

$$q(q+1)^2(q^2+q+1) = p^d m - 6.$$

Or 6 divise $q(q+1)^2(q^2+q+1)$ donc 6 divise $p^d m$, mais p est différent de 2 et 3, donc 6 divise m. Ainsi $m = 6m'$ et il suit que :

$$\frac{1}{6}q(q+1)^2(q^2+q+1) = p^d m' - 1.$$

et on a le résultat.

En utilisant les relations (4.1) et (4.2) et la table 4.1, on montre qu'il suffit que les deux fonctions Ψ_a et Ψ_{ababa} prennent des valeurs entières divisibles par p^d, où :

$$\Psi_a = 1 - \xi_3 - \xi_5 - \xi_7 - \xi_9 - \xi_{10} - 6\sum \eta_{\alpha k}^- \quad \text{si} \quad p/q - 3\theta + 1,$$

$$\Psi_{ababa} = 1 - \xi_3 + \xi_6 + \xi_8 + \xi_9 + \xi_{10} - 6\sum \eta_{\alpha k}^+ \quad \text{si} \quad p/q + 3\theta + 1.$$

On vérifie que c'est effectivement le cas en utilisant la table B.3, ce qui prouve :

$$R(\mathrm{C}_{\mathcal{O}}(\widetilde{\mathrm{G}}, f_0)) \subseteq R(\mathrm{C}_{\mathcal{O}}(\mathrm{R}(q), e_0)).$$

$\square$

Chapitre 5

Racines et matrices de Fourier

Dans ce chapitre, on donne les racines associées aux caractères unipotents du groupe de Suzuki, ainsi qu'une définition possible d'une matrice de Fourier associée à la famille des caractères unipotents cuspidaux de ce groupe. On donne également des résultats sur le groupe de Ree.

5.1 Démarche

5.1.1 Stratégie « idéale »

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique simple de type B_2 (resp. G_2) sur $\overline{\mathbb{F}}_2$ (resp. $\overline{\mathbb{F}}_3$). Soit F l'endomorphisme dont le sous-groupe des points fixes est le groupe de Suzuki (resp. le groupe de Ree). On se reporte à §1.7 (resp. §1.8) pour les notations.

Soit $\rho \in \mathrm{Irr}(W)$ tel que $\rho^F = \rho$. On choisit une extension $\widetilde{\rho}$ de ρ à $W \rtimes \langle F \rangle$. Comme dans §1.5.6, on note χ_ρ le caractère de la série principale de $\mathbf{G}^{F^2}$ correspondant à ρ et $\chi_{\widetilde{\rho}}$ l'extension de χ_ρ, constituant de $\mathrm{Ind}_{\mathbf{B}^{F^2}}^{\mathbf{G}^{F^2} \rtimes \langle F \rangle} 1_{\mathbf{B}^{F^2}}$ correspondant à $\widetilde{\rho}$. On note $\mathcal{R}_{\widetilde{\rho}}$ le caractère fantôme de $\mathbf{G}^F$ associé à $\widetilde{\rho}$; cf. §1.5.4.

Détermination des racines associées aux caractères unipotents de $\mathbf{G}^F$.

1. On décompose $\mathcal{R}_{\widetilde{\rho}}$ dans la base $\mathrm{Irr}(\mathbf{G}^F)$.

2. On calcule $\mathrm{Sh}_{F^2/F}(\chi_{\widetilde{\rho}})$, que l'on décompose dans la base $\mathrm{Irr}(\mathbf{G}^F)$.

3. Soit $V \in \mathcal{U}_{\mathbf{G}^F}$ tel que $\langle \mathcal{R}_{\widetilde{\rho}}, V \rangle_{\mathbf{G}^F} \neq 0$. Soit ω_V la racine associée à V. Alors, par le théorème de Digne et Michel §1.5.6, on a :

$$\omega_V = \frac{\langle \mathrm{Sh}_{F^2/F}(\chi_{\widetilde{\rho}}), V \rangle_{\mathbf{G}^F}}{\langle \mathcal{R}_{\widetilde{\rho}}, V \rangle_{\mathbf{G}^F}}. \tag{5.1}$$

Calcul de la matrice de Fourier.

On suppose avoir déterminé les racines associées aux caractères unipotents de $\mathbf{G}^F$. Soit $\chi \in \mathcal{U}(\mathbf{G}^{F^2})$ tel que $\chi^F = \chi$. Soit $\widetilde{\chi}$ une extension de χ à $\mathbf{G}^{F^2} \rtimes \langle F \rangle$. On décompose $\mathrm{Sh}_{F^2/F}(\widetilde{\chi})$ dans la base $\mathrm{Irr}(\mathbf{G}^F)$. Conformément à la conjecture de Digne et Michel (cf. §1.5.6), si :

1. Les constituants de $\mathrm{Sh}_{F^2/F}(\widetilde{\chi})$ sont unipotents et dans une même famille $\mathcal{F}$; cf §1.5.4.

2. Il existe une racine de l'unité u telle que :
$$\pm u\,\mathrm{Sh}_{F^2/F}(\widetilde{\chi}) = \sum_{V \in \mathcal{F}} a_V \omega_V V.$$

Alors, les coefficients a_V définissent (au signe près), une ligne de la matrice de Fourier associée à la famille $\mathcal{F}$.

5.1.2 Difficultés

Signalons deux difficultés dans l'application pratique de cette méthode :

1. Déterminer explicitement la correspondance de Shintani $N_{F^2/F}$ entre les classes extérieures de $\mathbf{G}^{F^2} \rtimes \langle F \rangle$ et les classes de $\mathbf{G}^F$; cf §1.5.2.

2. Connaître explicitement laquelle des deux extensions de χ_ρ correspond à $\chi_{\widetilde{\rho}}$.

Pour obtenir la correspondance entre les classes extérieures de $\mathbf{G}^{F^2} \rtimes \langle F \rangle$ et les classes de $\mathbf{G}^F$, on utilise :
- Le fait que l'ordre des centralisateurs est « conservé » cf. Prop. 1.5.2, ce qui permet d'associer de nombreuses classes.
- La définition de $N_{F^2/F}$: soit $(g, F) \in \mathbf{G}^{F^2} \rtimes \langle F \rangle$. On cherche explicitement $x \in \mathbf{G}^{F^2}$, tel que $xF(x^{-1}) = g$, puis on calcule $x^{-1}F^2(x)$.

Pour obtenir $\chi_{\widetilde{\rho}}$ (où ρ est un caractère irréductible F-stable de W), on remarque qu'il suffit de connaître uniquement *le signe* d'une valeur extérieure de $\chi_{\widetilde{\rho}}$. Un espoir pour obtenir ce renseignement est d'utiliser la formule de Ree cf. [8] §11.D, qui donne les valeurs de $\chi_{\widetilde{\rho}}$ en fonction de celles de $\widetilde{\rho}$.

Dans la pratique, il n'a pas été possible[1] de calculer $\chi_{\widetilde{\rho}}$, ni dans le cas de type B_2, ni dans le cas de type G_2.
Dans le cas de type B_2, on donne la correspondance de Shintani. En utilisant [22], on parvient à « adapter » la stratégie de §5.1.1. On obtient explicitement :
- Les racines associées aux caractères unipotents cuspidaux $\mathcal{W}$ et $\overline{\mathcal{W}}$ de $\mathrm{Sz}(q)$.

[1] Les calculs se sont avérés trop compliqués.

- Les coefficients de la matrice de Fourier associée à la famille $\mathcal{F}$ constituée des caractères unipotents cuspidaux du groupe de Suzuki.

Dans le cas de type G_2, il n'a pas été possible de déterminer la correspondance de Shintani entre certaines classes. On donne des résultats partiels.

5.2 Le type B_2

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique simple de type B_2 sur $\overline{\mathbb{F}}_2$. Soit F le Frobenius généralisé de $\mathbf{G}$, tel que $\mathbf{G}^F = \mathrm{Sz}(q)$ (avec $q = 2^{2n+1}$). Comme dans 1.7, on pose $\mathrm{G} = \mathbf{G}^{F^2}$, $F|_{\mathrm{G}} = \sigma$ et $\widetilde{\mathrm{G}} = \mathrm{G} \rtimes \langle \sigma \rangle$. On utilise les notations de 1.7.

5.2.1 Descentes de Shintani de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_q) \rtimes \langle \sigma \rangle$ à $\mathrm{Sz}(q)$

Proposition 5.2.1 *Avec les notations de §1.5.6, on a :*
- *Si n est impair, alors $N_{F/F^2}\,\mathrm{Cl}(x_a x_b x_{a+b}) = \mathrm{Cl}(x_a, \sigma)$.*
- *Si n est pair, alors $N_{F/F^2}\,\mathrm{Cl}(x_a x_b x_{a+b}) = \mathrm{Cl}(x_a x_{a+b}, \sigma)$.*

Preuve — On cherche $g \in \mathbf{G}$ tel que $x_a = g^{-1}F(g)$. On suppose qu'il existe des éléments $u, v, w, t \in \overline{\mathbb{F}}_2$ tels que :

$$g = x_a(u)x_b(v)x_{a+b}(w)x_{2a+b}(t).$$

Alors en utilisant les relations de Chevalley, on a immédiatement :

$$g^{-1} = x_a(u)x_b(v)x_{a+b}(uv + w)x_{2a+b}(u^2v + t),$$

$$F(g) = x_a(v^{2^n})x_b(u^{2^{n+1}})x_{a+b}(t^{2^n} + v^{2^n}u^{2^{n+1}})x_{2a+b}(w^{2^{n+1}} + v^{2^{n+1}}u^{2^{n+1}}) \quad \text{et}$$

$$gx_a = x_a(u+1)x_b(v)x_{a+b}(w+v)x_{2a+b}(t+v).$$

Par unicité de l'écriture, on obtient le système :

$$\begin{cases} u+1 &= v^{2^n} \\ v &= u^{2^{n+1}} \\ t^{2^n} + v^{2^n}u^{2^{n+1}} + w + v &= 0 \\ w^{2^{n+1}} + v^{2^{n+1}}u^{2^{n+1}} + t + v &= 0 \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} u+1 &= v^{2^n} \\ v &= u^{2^{n+1}} \\ t^{2^n} + w + uv &= 0 \\ w^{2^{n+1}} + t + u^2v &= 0 \end{cases}$$

Supposons que ce système possède une solution. Alors, il en découle les relations suivantes :

$$\begin{cases} u^q + u + 1 &= 0 \\ v^q + v + 1 &= 0 \\ w^q + w + v &= 0 \\ t^q + t + v &= 0 \end{cases}$$

En utilisant ces dernières relations, on trouve que

$$gF^2(g^{-1}) = x_a x_b x_{a+b}(u+v+1)x_{2a+b}(u^2+v+1).$$

On va maintenant voir que le système possède bien une solution. On appele $h \in \overline{\mathbb{F}}_2$ une racine du polynôme X^2+X+1 et $k \in \overline{\mathbb{F}}_2$ une racine de X^2+X+h^2. Une récurrence immédiate montre que :

$$\begin{cases} h^{2^m} &= h+1 \quad \text{si m est impair} \\ h^{2^m} &= h \quad \text{si m est pair} \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} k^{2^m} &= k \quad \text{si m} = 0 \mod 4 \\ k^{2^m} &= k+h^2 \quad \text{si m} = 1 \mod 4 \\ k^{2^m} &= k+1 \quad \text{si m} = 2 \mod 4 \\ k^{2^m} &= k+h \quad \text{si m} = 3 \mod 4 \end{cases}$$

Examinons les différents cas :

premier cas : $n = 1 \mod 4$

Dans ce cas, n est impair. On pose $v = u = h$. Les deux premieres lignes du systèmes sont automatiquement vérifiées. On pose $t = w = k$, alors :

$$t^{2^n} + t + uv = 0 \quad \text{et} \quad t^{2^{n+1}} + t + u^2 v = 0.$$

L'élément $g = x_a(h)x_b(h)x_{a+b}(k)x_{2a+b}(k)$ convient.
Dans ce cas, $gF^2(g^{-1}) = x_a x_b x_{a+b}$.

Deuxième cas : $n = 3 \mod 4$

Dans ce cas, n est toujours impair et on pose encore $v = u = h$. Les deux premieres lignes du systèmes sont automatiquement vérifiées. On pose $t = w = h+k$, alors :

$$t^{2^n} + w + uv = 0 \quad \text{et} \quad w^{2^{n+1}} + t + u^2 v = 0.$$

L'élément $g = x_a(h)x_b(h)x_{a+b}(h+k)x_{2a+b}(h+k)$ convient.
Dans ce cas, $gF^2(g^{-1}) = x_a x_b x_{a+b}$.

Troisième cas : $n = 0 \mod 4$

Dans ce cas, n est pair. On pose $u = h$, $v = u+1$,$t = k$ et $w = k+1$. Le système est alors vérifié L'élément $g = x_a(h)x_b(h+1)x_{a+b}(k+1)x_{2a+b}(k)$ convient.
Dans ce cas, $gF^2(g^{-1}) = x_a x_b x_{2a+b}$.

Quatrieme cas : $n = 2 \mod 4$

Dans ce cas, n est pair. On pose $u = h$, $v = u+1$,$t = k$ et $w = k$. Le système est alors vérifié L'élément $g = x_a(h)x_b(h+1)x_{a+b}(k)x_{2a+b}(k)$ convient.
Dans ce cas, $gF^2(g^{-1}) = x_a x_b x_{2a+b}$.

On a bien montré le résulat annoncé.

□

On est en mesure de donner les descentes de Shintani de F^2 à F des extensions des caractères unipotents σ-stables de G. On note[2] 1, $\widetilde{\theta}_1$, $\widetilde{\theta}_4$ et $\widetilde{\theta}_5$ les extensions des caractères unipotents de G. On note St le caractère de Steinberg du groupe de Suzuki. Soit $\mathcal{W}$ le caractère cuspidal unipotent du groupe de Suzuki de degré $2^n(q-1)$ tel que :

$$\mathcal{W}(\rho_0) = 2^n\sqrt{-1}.$$

Le caractère $\overline{\mathcal{W}}$ complexe conjugué de $\mathcal{W}$ est l'autre caractère cuspidal unipotent de $\mathrm{Sz}(q)$.

Théorème 5.2.1 *On a :*

$$\mathrm{Sh}_{F^2/F}\, 1_{\widetilde{\mathrm{G}}} = 1_{\mathrm{Sz}(q)} \quad et \quad \mathrm{Sh}_{F^2/F}\, \widetilde{\theta}_4 = \mathrm{St}\,.$$

De plus, si $\zeta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1-\sqrt{-1}\right)$, *alors on a :*

- *Si n est pair :*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Sh}_{F^2/F}\, \widetilde{\theta}_5 & = & -\zeta_0\sqrt{2}/2\mathcal{W} - \overline{\zeta_0}\sqrt{2}/2\overline{\mathcal{W}} \\ \mathrm{Sh}_{F^2/F}\, \widetilde{\theta}_1 & = & -\overline{\zeta_0}\sqrt{2}/2\mathcal{W} - \zeta_0\sqrt{2}/2\overline{\mathcal{W}} \end{array}$$

- *Si n est impair :*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Sh}_{F^2/F}\, \widetilde{\theta}_1 & = & -\zeta_0\sqrt{2}/2\mathcal{W} - \overline{\zeta_0}\sqrt{2}/2\overline{\mathcal{W}} \\ \mathrm{Sh}_{F^2/F}\, \widetilde{\theta}_5 & = & -\overline{\zeta_0}\sqrt{2}/2\mathcal{W} - \zeta_0\sqrt{2}/2\overline{\mathcal{W}} \end{array}$$

Preuve — Les classes de types π_0, π_1 et π_2 s'envoient par N_{F/F^2} respectivement sur des classes de types (π_0,σ), (π_1,σ) et (π_2,σ) ; cf. la relation (1.8) de la proposition 1.5.2. Etant donné que les caractères 1, $\widetilde{\theta}_1$, $\widetilde{\theta}_4$ et $\widetilde{\theta}_5$ sont constants sur ces classes, il n'est pas necessaire de connaître explicitement la correspondance entre ces classes pour calculer les descentes de Shintani de ces caractères. En utilisant un argument analogue, on obtient :

$$N_{F/F^2}\,\mathrm{Cl}(1) = \mathrm{Cl}(1,\sigma) \quad \text{et} \quad N_{F/F^2}\,\mathrm{Cl}(x_{a+b}x_{2a+b}) = \mathrm{Cl}(x_{a+b},\sigma).$$

Comme on l'as vu dans la proposition 5.2.1, $N_{F/F^2}\,\mathrm{Cl}(\rho_0)$ et $N_{F/F^2}\,\mathrm{Cl}(\rho_0^{-1})$ dépendent de la la parité de n.

- Supposons que n soit impair. Alors :

$$N_{F/F^2}\,\mathrm{Cl}(\rho_0) = \mathrm{Cl}(x_a,\sigma) \quad \text{et} \quad N_{F/F^2}\,\mathrm{Cl}(\rho_0^{-1}) = \mathrm{Cl}(x_a x_{a+b},\sigma).$$

On obtient :

	1	ρ_0	σ_0	ρ_0^{-1}	π_0^i	π_1^j	π_2^k
$\mathrm{Sh}_{F^2/F}\,1$	1	1	1	1	1	1	1
$\mathrm{Sh}_{F^2/F}\,\widetilde{\theta}_4$	q^2	0	0	0	1	-1	-1
$\mathrm{Sh}_{F^2/F}\,\widetilde{\theta}_1$	$\theta(q-1)$	θ	$-\theta$	$-\theta$	0	1	-1
$\mathrm{Sh}_{F^2/F}\,\widetilde{\theta}_5$	$\theta(q-1)$	$-\theta$	$-\theta$	θ	0	1	-1

[2]En utilisant la convention de §1.2.2 pour le choix de l'extension.

On constate que $\mathrm{Sh}_{F^2/F}\, 1_{\widetilde{\mathrm{G}}} = 1_{\mathrm{Sz}(q)}$ et que $\mathrm{Sh}_{F^2/F}\, \widetilde{\theta}_4 = \mathrm{St}$. De plus, en utilisant la table des caractères de $\mathrm{Sz}(q)$, on calcule :

$$\begin{array}{ll}
\langle\, \mathrm{Sh}_{F^2/F}\, \widetilde{\theta}_1, 1_{\mathrm{Sz}(q)} \,\rangle_{\mathrm{Sz}(q)} = 0 & \langle\, \mathrm{Sh}_{F^2/F}\, \widetilde{\theta}_5, 1_{\mathrm{Sz}(q)} \,\rangle_{\mathrm{Sz}(q)} = 0 \\
\langle\, \mathrm{Sh}_{F^2/F}\, \widetilde{\theta}_1, \mathrm{St} \,\rangle_{\mathrm{Sz}(q)} = 0 & \langle\, \mathrm{Sh}_{F^2/F}\, \widetilde{\theta}_5, \mathrm{St} \,\rangle_{\mathrm{Sz}(q)} = 0 \\
\langle\, \mathrm{Sh}_{F^2/F}\, \widetilde{\theta}_1, \mathcal{W} \,\rangle_{\mathrm{Sz}(q)} = -\zeta_0\sqrt{2}/2 & \langle\, \mathrm{Sh}_{F^2/F}\, \widetilde{\theta}_5, \mathcal{W} \,\rangle_{\mathrm{Sz}(q)} = -\overline{\zeta_0}\sqrt{2}/2 \\
\langle\, \mathrm{Sh}_{F^2/F}\, \widetilde{\theta}_1, \overline{\mathcal{W}} \,\rangle_{\mathrm{Sz}(q)} = -\overline{\zeta_0}\sqrt{2}/2 & \langle\, \mathrm{Sh}_{F^2/F}\, \widetilde{\theta}_5, \overline{\mathcal{W}} \,\rangle_{\mathrm{Sz}(q)} = -\zeta_0\sqrt{2}/2
\end{array}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Sh}_{F^2/F}\, \widetilde{\theta}_1 & = & -\zeta_0\sqrt{2}/2\mathcal{W} - \overline{\zeta_0}\sqrt{2}/2\overline{\mathcal{W}} \\
\mathrm{Sh}_{F^2/F}\, \widetilde{\theta}_5 & = & -\overline{\zeta_0}\sqrt{2}/2\mathcal{W} - \zeta_0\sqrt{2}/2\overline{\mathcal{W}}
\end{array}$$

- Si n est pair, on procède de la même façon, avec cette fois

$$N_{F/F^2}\, \mathrm{Cl}(\rho_0) = \mathrm{Cl}(x_a x_{a+b}, \sigma) \quad \text{et} \quad N_{F/F^2}\, \mathrm{Cl}(\rho_0^{-1}) = \mathrm{Cl}(x_a, \sigma).$$

Le résultat suit.

□

5.2.2 Racines des caractères unipotents du groupe de Suzuki

On note $\omega_{\mathcal{W}}$ et $\omega_{\overline{\mathcal{W}}}$ les racines de l'unité associées à $\mathcal{W}$ et $\overline{\mathcal{W}}$ respectivement ; cf. §1.5.5. Dans [22] §7.4, G. Lusztig montre que :

$$\{\omega_{\mathcal{W}}, \omega_{\overline{\mathcal{W}}}\} = \{\zeta_0, \overline{\zeta}_0\}. \tag{5.2}$$

On précise ce résultat en associant explicitement la racine à son caractère :

Théorème 5.2.2 *Les racines de l'unité associées à $\mathcal{W}$ et $\overline{\mathcal{W}}$ sont :*

	$\mathcal{W}$	$\overline{\mathcal{W}}$
n impair	ζ_0	$\overline{\zeta_0}$
n pair	$\overline{\zeta_0}$	ζ_0

Preuve — Pour calculer les caractères fantômes du groupe de Suzuki, on a besoin des caractères de Deligne-Lusztig de la forme $\mathcal{R}_w$. Les F-classes de W ont pour représentant par 1, w_a et $w_a w_b w_a$. Le groupe de Suzuki possède donc trois caractères de Deligne-Lusztig de ce type, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_{w_a}$ et $\mathcal{R}_{w_a w_b w_a}$, de degré :

$$\mathcal{R}_1(1) = q^2 + 1, \quad \mathcal{R}_{w_a}(1) = (q-1)(q-r+1), \quad \mathcal{R}_{w_a w_b w_a}(1) = (q-1)(q+r+1).$$

Ces caractères sont calculés dans [16]. On redonne leur décomposition dans la base $\mathrm{Irr}(\mathrm{Sz}(q))$ (cf [16] Prop. 4.6.7) :

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{R}_1 & = & 1 + \mathrm{St} \\
\mathcal{R}_{w_a} & = & 1 - \mathcal{W} - \overline{\mathcal{W}} - \mathrm{St} \\
\mathcal{R}_{w_a w_b w_a} & = & 1 + \mathcal{W} + \overline{\mathcal{W}} - \mathrm{St}
\end{array}$$

Le groupe W possède trois caractères F-stables notés ρ_1, ρ_2 et ρ_3. Soient $\widetilde{\rho}_1$, $\widetilde{\rho}_2$ et $\widetilde{\rho}_3$ les extensions de ces caractères à $W \rtimes \langle F \rangle$ dont les valeurs sur les classes extérieures sont :

	$(1,F)$	(w_a,F)	$(w_aw_bw_a,F)$
$\widetilde{\rho}_1$	1	1	1
$\widetilde{\rho}_2$	1	-1	-1
$\widetilde{\rho}_3$	0	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

Les trois caractères fantômes de $\mathrm{Sz}(q)$ correspondant à ces extensions sont (§1.5.4) :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\widetilde{\rho}_1} &= 1 \\ \mathcal{R}_{\widetilde{\rho}_2} &= \mathrm{St} \\ \mathcal{R}_{\widetilde{\rho}_3} &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\mathcal{W}+\overline{\mathcal{W}}) \end{aligned}$$

En particulier, on a :

$$\langle \mathcal{R}_{\widetilde{\rho}_3}, \mathcal{W} \rangle_{\mathrm{Sz}} = \sqrt{2}/2 \quad \text{et} \quad \langle \mathcal{R}_{\widetilde{\rho}_3}, \overline{\mathcal{W}} \rangle_{\mathrm{Sz}} = \sqrt{2}/2.$$

Le caractère θ_1 est dans la série principale de G. La relation (5.1) entraine que :

$$\sqrt{2}\langle \mathrm{Sh}_{F^2/F}\,\widetilde{\theta}_1, \mathcal{W} \rangle_{\mathrm{Sz}} = \pm\omega_{\mathcal{W}}.$$

Le signe dans le membre de droite de l'égalité vient du fait que $\mathrm{Sh}_{F^2/F}\,\widetilde{\theta}_1 = \pm\,\mathrm{Sh}_{F^2,F}\,\chi_{\widetilde{\rho}_3}$. Par ailleurs, on sait par la relation (5.2) que $\omega_{\mathcal{W}}$ vaut ζ_0 ou $\overline{\zeta}_0$. Comme :

$$\overline{\zeta}_0 \neq -\zeta_0,$$

on arrive à déterminer la racine[3]. En utilisant le théorème 5.2.1, et en discutant selon la parité de n, on obtient le résultat.

□

5.2.3 Matrices de Fourier

Les caractères unipotents du groupe de Suzuki se classent en trois familles cf. §1.5.4 :

$$\mathcal{F}_1 = \{1\}, \quad \mathcal{F}_2 = \{\mathrm{St}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_3 = \{\mathcal{W}, \overline{\mathcal{W}}\}.$$

Proposition 5.2.2 *Les matrices de Fourier M_i ($i = 1,2,3$) associées aux familles $\mathcal{F}_i$ sont*[4]*, à une normalisation près :*

$$M_1 = M_2 = [1], \quad M_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$

[3] Plus précisement :
- Soit la quantité $\sqrt{2}\langle \mathrm{Sh}_{F^2/F}\,\widetilde{\theta}_1, \mathcal{W} \rangle$ vaut ζ_0 ou $\overline{\zeta}_0$. Alors, dans ce cas $\omega_{\mathcal{W}} = \sqrt{2}\langle \mathrm{Sh}_{F^2/F}\,\widetilde{\theta}_1, \mathcal{W} \rangle$.
- Soit $\sqrt{2}\langle \mathrm{Sh}_{F^2/F}\,\widetilde{\theta}_1, \mathcal{W} \rangle$ est différent de ζ_0 ou de $\overline{\zeta}_0$. Alors $\omega_{\mathcal{W}} = -\sqrt{2}\langle \mathrm{Sh}_{F^2/F}\,\widetilde{\theta}_1, \mathcal{W} \rangle$.

[4] On formule ici une définition possible des matrices de Fourier pour le groupe de Suzuki. Par ailleurs, si l'on se réfère à [18] et que l'on définit les matrices de Fourier pour le groupe de Suzuki de la manière proposée dans [18]§5, alors la proposition 5.2.2 se reformule en disant que les matrices de Fourier du groupe de Suzuki vérifient la conjecture de Digne et Michel.

Preuve — Le théorème 5.2.1 montre que les constituants de $\mathrm{Sh}_{F^2/F}\,\widetilde{\theta}_1$ et de $\mathrm{Sh}_{F^2/F}\,\widetilde{\theta}_5$ sont les caractères $\mathcal{F}_3$. D'autre part, on déduit du théorème 5.2.1 que :

$$\text{Si } n \text{ est pair : } \quad i\,\mathrm{Sh}_{F^2/F}\,\widetilde{\theta}_5 = -\overline{\zeta_0}\sqrt{2}/2\mathcal{W} + \zeta_0\sqrt{2}/2\overline{\mathcal{W}}$$

$$\text{Si } n \text{ est impair : } \quad i\,\mathrm{Sh}_{F^2/F}\,\widetilde{\theta}_5 = \zeta_0\sqrt{2}/2\mathcal{W} - \overline{\zeta_0}\sqrt{2}/2\overline{\mathcal{W}}$$

Ces relations permettent, en cohérence avec les conjectures de F. Digne et J. Michel, de définir à une normalisation près, une matrice de Fourier associée à la famille $\mathcal{F}_3$ pour le groupe de Suzuki.

□

5.3 Le type G_2

Soit $\mathbf{G}$ un groupe simple de type G_2 sur $\overline{\mathbb{F}}_3$. Soit F le Frobenius généralisé de $\mathbf{G}$, tel que $\mathbf{G}^F = \mathrm{R}(q)$ (avec $q = 3^{2n+1}$). Comme dans 1.8, on pose $\mathrm{G} = \mathbf{G}^{F^2}$, $F|_{\mathrm{G}} = \sigma$ et $\widetilde{\mathrm{G}} = \mathrm{G} \rtimes \langle \sigma \rangle$. On utilise les notations de 1.8.

On donne dans ce paragraphe uniquement des résultats partiels. La démarche donnée dans §5.1.1 n'a pas abouti principalement à cause de calculs pratiques trop techniques. Plus précisément :

- On n'arrive pas à établir complètement la correspondance de Shintani pour certaines classes.
- Soit ρ un caractère F-stable de W et χ_ρ le caractère de la série principale de G correspondant. Soit $\widetilde{\rho}$ une extension de ρ. Il n'a pas été possible d'identifier explicitement laquelle des deux extensions $\widetilde{\chi}_\rho$ ou $\varepsilon\widetilde{\chi}_\rho$ correspond à $\widetilde{\rho}$.

En utilisant la relation (1.8) de la proposition 1.5.2 on a :

Lemme 5.3.1 *On se reporte au théorème 2.2.1 et à la table 2.4 pour les notations. On a :*

$$\begin{array}{lcl}
N_{F/F^2}(\mathrm{Cl}(1)) & = & \mathrm{Cl}(1,\sigma) \\
N_{F/F^2}(\mathrm{Cl}(X)) & = & \mathrm{Cl}(X,\sigma) \\
N_{F/F^2}(\mathrm{Cl}(J)) & = & \mathrm{Cl}(h_0,\sigma) \\
\{N_{F/F^2}(\mathrm{Cl}(T)), N_{F/F^2}(\mathrm{Cl}(T^{-1}))\} & = & \{\mathrm{Cl}(T,\sigma), \mathrm{Cl}(T^{-1},\sigma)\} \\
\{N_{F/F^2}(\mathrm{Cl}(Y_1)), N_{F/F^2}(\mathrm{Cl}(Y_2)), N_{F/F^2}(\mathrm{Cl}(Y_3))\} & = & \{\mathrm{Cl}(Y_1,\sigma), \mathrm{Cl}(Y_2,\sigma), \mathrm{Cl}(Y_3,\sigma)\} \\
\{N_{F/F^2}(\mathrm{Cl}(JT)), N_{F/F^2}(\mathrm{Cl}(JT^{-1}))\} & = & \{\mathrm{Cl}(\eta h_0,\sigma), \mathrm{Cl}(\eta^{-1}h_0,\sigma)\} \\
\{N_{F/F^2}(\mathrm{Cl}(t)),\ t \text{ rep. de type } 1\} & = & \{E_1(h), E_2(h),\ h \in L_1\} \\
\{N_{F/F^2}(\mathrm{Cl}(t)),\ t \text{ rep. de type } w_a\} & = & \{F_1(h), F_2(h), F_3(h), F_4(h),\ h \in L_a\} \\
\{N_{F/F^2}(\mathrm{Cl}(t)),\ t \text{ rep. de type } w_a w_b w_a\} & = & \{G_1(h),\ h \in L_{aba}\} \\
\{N_{F/F^2}(\mathrm{Cl}(t)),\ t \text{ rep. de type } w_a w_b w_a w_b w_a\} & = & \{H_1(h),\ h \in L_{ababa}\}
\end{array}$$

On note ω_{ξ_i} la racine associée au caractère unipotent ξ_i ($i = 1,3,5,6,7,8,9,10$). Par ailleurs, Lusztig montre dans [22] que :

$$\{\omega_{\xi_5}, \omega_{\xi_7}\} = \{\pm\sqrt{-1}\}, \quad \{\omega_{\xi_6}, \omega_{\xi_8}\} = \{\pm\sqrt{-1}\} \quad \text{et } \{\omega_{\xi_9}, \omega_{\xi_{10}}\} = \left\{\frac{\pm\sqrt{-1}-\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

On pose i une racine carrée de -1. Les caractères de la série principale de G sont θ_1 et θ_2. Les extensions de ces caractères sont constantes sur beaucoup de classes extérieures. On a le résultat :

Proposition 5.3.1 *On a :*

$$N_{F^2/F}(Y_1,\sigma) = Y_2 \quad ou \quad N_{F^2/F}(Y_1,\sigma) = Y_3.$$

- *Supposons que $N_{F^2/F}(Y_1,\sigma) = Y_2$. Alors :*

$$\mathrm{Sh}_{F^2/F}\widetilde{\theta}_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-i\xi_5 - i\xi_6 + i\xi_7 + i\xi_8 + 2\frac{\sqrt{3}+i}{2}\xi_9 + 2\frac{\sqrt{3}-i}{2}\xi_{10}).$$

Dans ce cas, on a :

χ	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}
ω_χ	i	i	$-i$	$-i$	$\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$

- *Supposons que $N_{F^2/F}(Y_1,\sigma) = Y_3$. Alors :*

$$\mathrm{Sh}_{F^2/F}\widetilde{\theta}_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(i\xi_5 + i\xi_6 - i\xi_7 - i\xi_8 + 2\frac{\sqrt{3}-i}{2}\xi_9 + 2\frac{\sqrt{3}+i}{2}\xi_{10}).$$

Dans ce cas, on a :

χ	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}
ω_χ	$-i$	$-i$	i	i	$\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$

Preuve — En appliquant le théorème de Digne et Michel et en utilisant [18]§2.3, on a :

$$\pm\,\mathrm{Sh}_{F^2/F}\widetilde{\theta}_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\omega_{\xi_5}\xi_5 + \omega_{\xi_6}\xi_6 + \omega_{\xi_7}\xi_7 + \omega_{\xi_8}\xi_8 + 2\omega_{\xi_9}\xi_9 + 2\omega_{\xi_{10}}\xi_{10}).$$

Le caractère $\widetilde{\theta}_1$ est constant sur toutes les classes qui se permutent « éventuellement » par la correspondance de Shintani, sauf sur les trois classes (Y_1,σ), (Y_2,σ) et (Y_3,σ). Il y a *a priori* 6 choix possibles. Or :

$$\pm\langle\,\mathrm{Sh}_{F^2/F}\widetilde{\theta}_1, \xi_9\,\rangle_{\mathrm{R}(q)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\omega_{\xi_9}.$$

De plus, comme $\omega_{\xi_9} = \frac{1}{2}\left(\pm i - \sqrt{3}\right)$, en essayant les différentes possibilités, on constate que $N_{F^2/F}(Y_1,\sigma) \neq Y_1$. Si $N_{F^2/F}(Y_1,\sigma) = Y_2$, il y a encore deux possibilités pour la correspondance de Shintani : soit $N_{F^2/F}(Y_2,\sigma) = Y_1$, soit $N_{F^2/F}(Y_2,\sigma) = Y_1$. Ces deux cas sont les même pour le calcul de $\mathrm{Sh}_{F^2/F}\widetilde{\theta}_1$, puisque $\widetilde{\theta}_1(Y_2,\sigma) = \widetilde{\theta}_1(Y_3,\sigma)$. Ainsi, on peut calculer $\mathrm{Sh}_{F^2/F}\widetilde{\theta}_1$ et la décomposer dans la base des caractères unipotents de $\mathrm{R}(q)$. Pour déterminer les racines, on procède comme dans la preuve du théorème 5.2.2, en utilisant le fait que :

$$\pm\omega_{\xi_9} \neq -\overline{\omega_{\xi_9}}.$$

On procède de la même façon si $N_{F^2/F}(Y_1, \sigma) = Y_3$.

□

Les lignes des matrices de Fourier étant définies à un signe près, il n'est pas necessaire de connaître explicitement $\chi_{\widetilde{\rho}}$ pour déterminer les coefficients. Cependant, les extensions des caractères unipotents ne sont plus, en général, constants sur les classes de conjugaison suseptibles de se permuter par la correspondance de Shintani. Il y a beaucoup trop de choix possibles pour qu'un calcul *a priori* permette d'obtenir un résultat sûr. On peut cependant signaler qu'il y a de fortes chances que la conjecture de Digne et Michel soit encore vérifiée dans le cas du groupe de Ree de type G_2. En effet, il est possible de calculer la descente de Shintani de $\widetilde{\theta}_{11}$, ce caractère prenant des valeurs nulles sur les classes dont la correspondance est indéterminée.

Proposition 5.3.2 *On a :*

$$\mathrm{Sh}_{F^2/F}\,\widetilde{\theta}_{11} = \frac{1}{2}(\xi_5 - \xi_6 + \xi_7 - \xi_8).$$

On obtient donc, à une normalisation près :

$$\pm i\,\mathrm{Sh}_{F^2/F}\,\widetilde{\theta}_{11} = \frac{1}{2}(i\xi_5 - i\xi_6 - i\xi_7 + i\xi_8).$$

On remarque que les coefficients donnent une ligne de la matrice de Fourier de $\mathrm{R}(q)$ définie par Geck et Malle dans [18]§5 :

$$\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right].$$

Annexe A

A.1 Le groupe $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_{2^{2n+1}})$

Soit n un entier positif. On pose $q = 2^{2n+1}$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_q)$. On utilise les notations de 1.7. Pour tout $r \in \Phi$, on note :

$$x_r = x_r(1).$$

Les classes de conjugaison et la table des caractères du groupe simplectique de dimension 4 sur un corps fini sont étudiées dans [12]. Comme q est une puissance impair de 2, on peut préciser les notations :

Lemme A.1.1 *Les deux classes de G de centralisateur d'ordre $2q^2$ sont $\mathrm{Cl}(x_a x_b)$ et $\mathrm{Cl}(x_a x_b x_{a+b})$.*

Preuve — Soit $P = X^2+X+1$. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathrm{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$. On peut supposer que $\alpha \notin \{0,1\}$, car 0 et 1 ne sont pas solution de P. De plus, $1-\alpha^3 = (1-\alpha)(\alpha^2+\alpha+1) = 0$, car α est solution de P. On en déduit donc que l'ordre de α divise 3. Or $\alpha \neq 1$, donc l'ordre de α vaut 3. Il suit donc que 3 divise $(q-1)$, c'est à dire $q-1 = 0 \mod 3$, ie $2^{2n+1} = 1 \mod 3$. Donc $-1 = 1 \mod 3$ ce qui est absurde. Donc le polynôme X^2+X+1 est irréductible.

□

Rappelons les classes de conjugaison de G. Elles sont construites p. 92 de [12]. Donnons auparavant quelques notations. Soit κ (resp. κ_0) une racine primitive q^4-1-ième de l'unité dans $\overline{\mathbb{F}}_q$ (resp. dans $\mathbb{C}$). Alors, on pose $\tau = \kappa^{q^2-1}$, $\tau' = \kappa^{q^2+1}$, $\nu = \tau'^{\theta-1}$ et $\gamma = \tau'^{q+1}$. On note π_κ l'isomorphisme entre $\langle\, \kappa \,\rangle$ et $\langle\, \kappa_0 \,\rangle$ tel que $\kappa_0 = \pi_\kappa(\kappa)$. Pour tout $\zeta \in \langle\, \kappa \,\rangle$, on pose :

$$\zeta_0 = \pi_\kappa(\zeta).$$

Proposition A.1.1 *Dans la table A.1, on donne les classes de conjugaison de* G. *Avec ces notations, les 8 classes $B_a(\pm i, \pm j), B_a(\pm j, \pm i)$ sont les mêmes (pour $a = 1,4$). Les 4 classes $B_a(\pm i)$, et $B_a(\pm qi)$ sont les mêmes (pour $a = 2,5$). Les 4 classes $B_a(\pm i, \pm j)$. Enfin, pour $1 \leq \mu \leq 4$ on a $C_\mu(i) = C_\mu(-i)$ et $D_\mu(i) = D_\mu(-i)$*

La table des caractères est donnée dans [12] p. 93. Dans la table A.2, on donne les caractères irréductibles de G dont on a besoin pour notre travail. On corrige quelques erreurs de [12]. On pose :

$$\alpha_i = \gamma_0^i + \gamma_0^{-i} \quad \text{et} \quad \beta_i = \nu_0^k + \nu_0^{-k}.$$

Notation	Représentant	Nombre	Ordre du centralisateur
A_1	$h(1,1)$	1	$q^4(q^2-1)(q^4-1)$
A_2	x_{2a+b}	1	$q^4(q^2-1)$
A_{31}	x_{a+b}	1	$q^4(q^2-1)$
A_{32}	$x_{a+b}x_{2a+b}$	1	q^4
A_{41}	$x_a x_b$	1	$2q^2$
A_{42}	$x_a x_b x_{2a+b}$	1	$2q^2$
$B_1(i,j)$	$h(\gamma^i, \gamma^j)$	$\frac{(q-2)(q-4)}{8}$	$(q-1)^2$
$B_2(i)$	$h(\tau'^i, \tau'^{qi})$	$\frac{q(q-2)}{4}$	q^2-1
$B_3(i,j)$	$h(\gamma^i, \nu^j)$	$\frac{q(q-2)}{4}$	q^2-1
$B_4(i,j)$	$h(\nu^i, \nu^j)$	$\frac{q(q-2)}{8}$	$(q+1)^2$
$B_5(i)$	$h(\tau^i, \tau^{qi})$	$\frac{q^2}{4}$	q^2+1
$C_1(i)$	$h(1, \gamma^i)$	$\frac{q-2}{2}$	$q(q-1)(q^2-1)$
$C_2(i)$	$h(\gamma^i, \gamma^{-i})$	$\frac{q-2}{2}$	$q(q-1)(q^2-1)$
$C_3(i)$	$h(1, \nu^i)$	$\frac{q}{2}$	$q(q+1)(q^2-1)$
$C_4(i)$	$h(\nu^i, \nu^{-i})$	$\frac{q}{2}$	$q(q+1)(q^2-1)$
$C_1(i)$	$h(1, \gamma^i)x_{2a+b}$	$\frac{q-2}{2}$	$q(q-1)$
$C_2(i)$	$h(\gamma^i, \gamma^{-i})x_{a+b}$	$\frac{q-2}{2}$	$q(q-1)$
$C_3(i)$	$h(1, \nu^i)x_{2a+b}$	$\frac{q}{2}$	$q(q+1)$
$C_4(i)$	$h(\nu^i, \nu^{-i})x_{a+b}$	$\frac{q}{2}$	$q(q+1)$

TAB. A.1 – Classes de conjugaison de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_q)$.

A.2 Le groupe de Suzuki de paramètre 2^{2n+1}

On rappelle que $\theta = 2^n$. On utilise les notations de §A.1. Soient π_0, π_1 et π_2 des éléments de $\mathrm{Sz}(q)$ d'ordre respectivement $(q-1)$, $(q+2\theta+1)$ et $(q-2\theta+1)$. On munit $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ de la relation $\sim$ définie par :

$$j \sim i \iff j = \pm i \mod (q-1).$$

De même on munit $\mathbb{Z}/(q+2\theta+1)\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/(q-2\theta+1)\mathbb{Z}$ de la relation $\sim$ définie par :

$$j \sim i \iff j = \pm i \mod (m) \quad \text{ou} \quad j = \pm qi \mod m,$$

où m désigne respectivement $(q+2\theta+1)$ et $(q-2\theta+1)$. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/(q+2\theta+1)\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/(q-2\theta+1)\mathbb{Z}$. Les

	A_1	A_2	A_{31}	A_{32}	A_{41}	A_{42}	$B_1(i,j)$	$B_2(i)$	$B_3(i,j)$	$B_4(i,j)$
θ_1	$q(q+1)^2/2$	$q(q+1)/2$	$q(q+1)/2$	$q/2$	$q/2$	$-q/2$	2	0	0	0
θ_4	q^4	0	0	0	0	0	1	-1	-1	1
θ_5	$q(q-1)^2/2$	$-q(q-1)/2$	$-q(q-1)/2$	$q/2$	$q/2$	$-q/2$	0	0	0	-2
$\chi_1(k,l)$	$(q+1)^2(q^2+1)$	$(q+1)^2$	$(q+1)^2$	$2q+1$	1	1	$\alpha_{ik}\alpha_{jl}+\alpha_{il}\alpha_{jk}$	0	0	0
$\chi_4(k,l)$	$(q-1)^2(q^2+1)$	$(q-1)^2$	$(q-1)^2$	$-(2q-1)$	1	1	0	0	0	$\beta_{ik}\beta_{jl}+\beta_{il}\beta_{jk}$
$\chi_5(k)$	$(q^2-1)^2$	$-(q^2-1)$	$-(q^2-1)$	1	1	1	0	0	0	0

	$B_5(i)$	$C_1(i)$	$C_2(i)$	$C_3(i)$	$C_4(i)$	$D_1(i)$	$D_2(i)$	$D_3(i)$	$D_4(i)$
θ_1	-1	$q+1$	$q+1$	0	0	1	1	0	0
θ_4	1	q	q	$-q$	$-q$	0	0	-1	-1
θ_5	1	0	0	$q-1$	$q-1$	0	0	-1	-1
$\chi_1(k,l)$	0	$(q+1)(\alpha_{ik}+\alpha_{il})$	$(q+1)\alpha_{ik}\alpha_{il}$	0	0	$\alpha_{ik}+\alpha_{il}$	$\alpha ik\alpha_{il}$	0	0
$\chi_4(k,l)$	0	0	0	$-(q-1)(\beta_{ik}+\beta_{il})$	$-(q-1)\beta_{ik}\beta_{il}$	0	0	$\beta_{ik}+\beta_{il}$	$\beta_{ik}\beta_{il}$
$\chi_5(k)$	$\tau^{ik}+\tau^{-ik}+\tau^{ikq}+\tau^{-ikq}$	0	0	0	0	0	0	0	0

TAB. A.2 – Table des caractères de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_q)$.

Représentant	Nombre	Ordre du centralisateur
$h(1,1)$	1	$q^2(q-1)(q^2+1)$
σ_0	1	q^2
ρ_0	1	q
ρ_0^{-1}	1	q
$\pi_0^i,\ i \in E_0$	$\frac{q-2}{2}$	$q-1$
$\pi_1^j,\ j \in E_1$	$\frac{q+2\theta}{4}$	$q+2\theta+1$
$\pi_2^k,\ k \in E_2$	$\frac{q-2\theta}{4}$	$q-2\theta+1$

TAB. A.3 – Classes de conjugaison du groupe de Suzuki.

	1	σ_0	ρ_0	ρ_0^{-1}	π_0^l	π_1^l	π_2^l
1	1	1	1	1	1	1	1
St	q^2	0	0	0	1	-1	-1
$\mathcal{W}$	$\theta(q-1)$	$-\theta$	$\theta\sqrt{-1}$	$-\theta\sqrt{-1}$	0	-1	-1
$\overline{\mathcal{W}}$	$\theta(q-1)$	$-\theta$	$-\theta\sqrt{-1}$	$\theta\sqrt{-1}$	0	-1	-1
X_i	q^2+1	1	1	1	$\varepsilon_0^i(\pi_0^l)$	0	0
Y_j	$(q-2\theta+1)(q-1)$	$2\theta-1$	-1	-1	0	$-\varepsilon_1^j(\pi_1^l)$	0
Z_k	$(q+2\theta+1)(q-1)$	$-2\theta-1$	-1	-1	0	0	$-\varepsilon_2^k(\pi_2^l)$

TAB. A.4 – Table des caractères de $\mathrm{Sz}(q)$.

ensembles E_0, E_1 et E_2 désignent respectivement l'ensemble des classes non nulles modulo la relation $\sim$. On pose :

$$E = \{\pi_0^i,\ \pi_1^j,\ \pi_2^k \mid i \in E_0,\ j \in E_1,\ k \in E_2\}.$$

Les classes de conjugaison unipotentes non triviales de $\mathrm{Sz}(q)$ ont pour représentants :

$$\sigma_0 = x_{a+b}\, x_{2a+b}, \quad \rho_0 = x_a\, x_b\, x_{a+b} \quad \text{et} \quad \rho_0^{-1} = x_a\, x_b\, x_{2a+b}.$$

On pose :

$$\varepsilon_0 = \gamma_0^{(4-4\theta)}, \quad \varepsilon_1 = \tau_0^{(q-2\theta+1)^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \tau_0^{(q+2\theta+1)^2},$$

racines primitives respectivement $(q-1)$-ième, $(q+2\theta+1)$-ième et $(q-2\theta+1)$-ième de l'unité. Enfin, on pose :

$$\varepsilon_0^l(\pi_0^i) = \varepsilon_0^{il}+\varepsilon_0^{-il}, \quad \varepsilon_1^l(\pi_1^j) = \varepsilon_1^{jl}+\varepsilon_1^{-jl}+\varepsilon_1^{jlq}+\varepsilon_1^{-jlq} \quad \text{et} \quad \varepsilon_2^l(\pi_2^k) = \varepsilon_2^{kl}+\varepsilon_2^{-kl}+\varepsilon_2^{klq}+\varepsilon_2^{-klq}.$$

Proposition A.2.1 *Dans la table A.3, on donne les classes de conjugaison de* $\mathrm{Sz}(q)$*. Dans la table A.4, on donne sa table des caractères.*

Annexe B

B.1 Le groupe $\mathrm{G}_2(3^{2n+1})$

Soit n un entier positif. On pose $q = 3^{2n+1}$ et $\mathrm{G} = \mathrm{G}_2(q)$. On utilise les notations de 1.8. Les classes de conjugaison et la table des caractères de $\mathrm{G}_2(q)$ sont étudiées dans [13]. Comme q est une puissance impair de 3, on peut préciser les notations :

Lemme B.1.1 *Les deux classes de* G *de centralisateur d'ordre* $2q^4$ *sont :*

$$\mathrm{Cl}(x_{a+b}(1)x_{3a+b}(1)) \quad et \quad \mathrm{Cl}(x_{a+b}(1)x_{3a+b}(-1)).$$

Preuve — On utilise [13]. Il est montré que les deux classes de G dont le centralisateur est d'ordre $2q^4$ sont $\mathrm{Cl}(x_{a+b}(1)x_{3a+b}(1))$ et $\mathrm{Cl}(x_{a+b}(1)x_{3a+b}(\gamma))$, où γ n'est pas un carré de $\mathbb{F}_q$. Or $(q-1)/2$ est impair, donc -1 n'est pas un carré dans $\mathbb{F}_q$. On choisit donc -1 dans la suite. $\square$

Soit $E = \{t^3 + t \mid t \in \mathbb{F}_q\}$ et π_E la projection canonique de $\mathbb{F}_q$ dans $\mathbb{F}_q/E$. On note $\xi \in \mathbb{F}_3$ tel que $\pi_E(\xi) = 1$. Soit κ (resp. κ_0) une racine primitive q^6-1-ième de l'unité dans $\overline{\mathbb{F}}_q$ (resp. dans $\mathbb{C}$). Soit ω une racine complexe cubique de l'unité. On pose :

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma} &= \kappa^{(q+1)(q^3-1)}, \\
\tilde{\tau} &= \kappa^{(q-1)(q^3-1)}, \\
\tilde{\theta} &= \kappa^{q^4+q^2+1}, \\
\tilde{\eta} &= \tilde{\theta}^{q-1}, \\
\tilde{\gamma} &= \tilde{\theta}^{q+1}.
\end{aligned}$$

On note π_κ l'isomorphisme entre $\langle \kappa \rangle$ et $\langle \kappa_0 \rangle$ tel que $\kappa_0 = \pi_\kappa(\kappa)$. Pour tout $\zeta \in \langle \kappa \rangle$, on pose :

$$\zeta_0 = \pi_\kappa(\zeta).$$

Proposition B.1.1 *Dans la table B.1, on donne les classes de conjugaison de* G. *On pose :*

$$\alpha_i = \gamma_0^i + \gamma_0^{-i} \quad et \quad \beta_i = \tau_0^i + \tau_0^{-i}.$$

De plus, on pose :

$$\begin{array}{lcl}
\alpha_{i,j,k,l} & = & \alpha_{ik+jl}+\alpha_{il+jk}+\alpha_{i(k-l)-jl}+\alpha_{il-j(k-l)}+\alpha_{i(k-l)+jk}+\alpha_{ik+j(k-l)},\\
\beta_{i,j,k,l} & = & \beta_{ik+jl}+\beta_{il+jk}+\beta_{i(k-l)-jl}\beta_{il-j(k-l)}+\beta_{i(k-l)+jl}+\beta_{ik+j(k-l)}\\
\sigma_i & = & \sigma_0^{i}+\sigma_0^{-i}+\sigma_0^{iq}+\sigma_0^{-iq}+\sigma_0^{iq^2}+\sigma_0^{-iq^2}.\\
\alpha'_{i,j,k,l} & = & \alpha_{i(k+l)}+\alpha_{i(k-2l)}+\alpha_{i(l-2k)}\\
\alpha''_{i,k,l} & = & \alpha_{ik}+\alpha_{il}+\alpha_{i(k-l)}\\
\beta'_{i,k,l} & = & \beta_{i(k+l)}+\beta_{i(k-2l)}+\beta_{i(l-2k)}\\
\beta''_{i,j,k,l} & = & (\beta_{ik}+\beta_{il}+\beta_{i(k-l)})\\
\epsilon_{k,l} & = & (-1)^k+(-1)^l+(-1)^{k+l}
\end{array}$$

Alors, dans la table B.2, on donne les valeurs des caractères de Irr(G) *qui nous interesse dans ce travail.*

Corrigeons enfin une imprécision de l'article [13]. Les caractères $\chi_{12}(k,l)$, $k,l \in \mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z}$ sont les mêmes pour les indices

$$\begin{array}{l}(k,l),\ (l,k),\ (k-l,-l),\ (l,l-k),\ (k-l,k),\ (k,k-l),\\ (-k,-l),\ (-l,-k),\ (l-k,l),\ (-l,k-l),\ (l-k,-k),\ (-k,l-k).\end{array} \tag{B.1}$$

On tombe sur les conditions données par Enomoto en faisant le changement de variable

$$\left\{\begin{array}{lcl} l & = & -i\\ k & = & j\end{array}\right.$$

Ainsi les conditions sur (k,l) sont donc

$$l\neq 0,\ k\neq 0,\ l\neq \pm k\ \ 2k\neq l,\ 2l\neq k,$$

les égalités étant modulo $q+1$.

B.2 Le groupe de Ree de type G_2 de paramètre 3^{2n+1}

On rappelle que $\theta = 3^n$. On utilise les notations de §A.1. Le groupe R(q) est décrit dans [28]. La table des caractères est donnée dans [32]. Dans le chapitre 2 de cette thèse, on donne un système de représentant avec des générateurs de Chevalley ; cf. théorème 2.2.1.

Proposition B.2.1 *Soit $x \in \{1, a, aba, ababa\}$. On note h_x les représentants d'ordre impairs des classes de type T_x. Dans la table B.3, on donne la table des caractères de* R(q). *Soient $\gamma_i = \gamma_0^{4.3\theta i}+\gamma_0^{-4.3\theta i}$ et :*

$$\delta_i = \pi_3^{i}+\pi_3^{-i}+\pi_3^{qi}+\pi_3^{-qi}+\pi_3^{q^2 i}+\pi_3^{-q^2 i} \quad et \quad \delta'_i = \pi_4^{i}+\pi_4^{-i}+\pi_4^{qi}+\pi_4^{-qi}+\pi_4^{q^2 i}+\pi_4^{-q^2 i},$$

avec $\pi_3 = \sigma_0^{(q+3\theta+1)^2}$ et $\pi_3 = \sigma_0^{(q-3\theta+1)^2}$. On pose enfin :

$$\begin{array}{l}
\beta_{i,0} = \tau_0^{8i}+\tau_0^{-8i}+\tau_0^{4(3\theta+1)i}+\tau_0^{-4(3\theta+1)i}+\tau_0^{4(3\theta-1)i}+\tau_0^{-4(3\theta-1)i},\\
\beta_{i,1} = \tau_0^{8i}+\tau_0^{-8i}-\tau_0^{4(3\theta+1)i}-\tau_0^{-4(3\theta+1)i}-\tau_0^{4(3\theta-1)i}-\tau_0^{-4(3\theta-1)i},\\
\beta_{i,2} = -\tau_0^{8i}-\tau_0^{-8i}+\tau_0^{4(3\theta+1)i}+\tau_0^{-4(3\theta+1)i}-\tau_0^{4(3\theta-1)i}-\tau_0^{-4(3\theta-1)i},\\
\beta_{i,3} = -\tau_0^{8i}-\tau_0^{-8i}-\tau_0^{4(3\theta+1)i}-\tau_0^{-4(3\theta+1)i}+\tau_0^{4(3\theta-1)i}+\tau_0^{-4(3\theta-1)i}.
\end{array}$$

Notation	Représentant	Nombre	Ordre du centralisateur
A_1	$h(1,1,1)$	1	$q^6(q^2-1)(q^6-1)$
A_2	$x_{3a+2b}(1)$	1	$q^6(q^2-1)$
A_{31}	$x_{2a+b}(1)$	1	$q^6(q^2-1)$
A_{32}	$x_{2a+b}(1)x_{3a+2b}(1)$	1	q^6
A_{41}	$x_{a+b}(1)x_{3a+b}(-1)$	1	$2q^4$
A_{42}	$x_{a+b}(1)x_{3a+b}(1)$	1	$2q^4$
A_{51}	$x_a(1)x_b(1)$	1	$3q^2$
A_{52}	$x_a(1)x_b(1)x_{3a+b}(\xi)$	1	$3q^2$
A_{53}	$x_a(1)x_b(1)x_{3a+b}(-\xi)$	1	$3q^2$
B_1	$h(1,-1,-1)$	1	$q^2(q^2-1)^2$
B_2	$h(1,-1,-1)x_{3a+b}(1)$	1	$q^2(q^2-1)$
B_3	$h(1,-1,-1)x_{a+b}(1)$	1	$q^2(q^2-1)$
B_4	$h(1,-1,-1)x_{a+b}(1)x_{3a+b}(-1)$	1	$2q^2$
B_5	$h(1,-1,-1)x_{a+b}(1)x_{3a+b}(1)$	1	$2q^2$
$C_{11}(i)$	$h_{\tilde{\gamma}}(i,-2i,i)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$q(q-1)(q^2-1)$
$C_{12}(i)$	$h_{\tilde{\gamma}}(i,-2i,i)x_{3a+2b}(1)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$q(q-1)$
$C_{21}(i)$	$h_{\tilde{\gamma}}(i,-i,0)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$q(q-1)(q^2-1)$
$C_{22}(i)$	$h_{\tilde{\gamma}}(i,-i,0)x_{2a+b}(1)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$q(q-1)$
$D_{11}(i)$	$h_{\tilde{\eta}}(i,-2i,i)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$q(q+1)(q^2-1)$
$D_{12}(i)$	$h_{\tilde{\eta}}(i,-2i,i)x_{3a+2b}(1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$q(q+1)$
$D_{21}(i)$	$h_{\tilde{\eta}}(i,-i,0)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$q(q+1)(q^2-1)$
$D_{22}(i)$	$h_{\tilde{\eta}}(i,-i,0)x_{2a+b}(1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$q(q+1)$
$E_1(i,j)$	$h_{\tilde{\gamma}}(i,j,-i-j)$	$\frac{1}{12}(q-3)(q-5)$	$(q-1)^2$
$E_2(i,j)$	$h_{\tilde{\theta}}(i,(q-1)i,-qi)$	$\frac{1}{4}(q-1)^2$	q^2-1
$E_3(i)$	$h_{\tilde{\theta}}(i,qj,-(q+1)i)$	$\frac{1}{4}(q-1)^2$	q^2-1
$E_4(i,j)$	$h_{\tilde{\eta}}(i,j,-i-j)$	$\frac{1}{12}(q-1)(q-3)$	$(q+1)^2$
$E_5(i)$	$h_{\tilde{\tau}}(i,qi,q^2i)$	$\frac{1}{6}q(q+1)$	q^2+q+1
$E_6(i)$	$h_{\tilde{\sigma}}(i,-qi,q^2i)$	$\frac{1}{6}q(q-1)$	q^2-q+1

TAB. B.1 – Classes de conjugaison de $\mathrm{G}_2(q)$.

	A_1	A_2	A_{31}	A_{32}	A_{41}	A_{42}	A_{51}	A_{52}	A_{53}
θ_1	$\frac{1}{6}q(q+1)^2(q^2+q+1)$	$\frac{1}{6}q(q+1)(2q+1)$	$\frac{1}{6}q(q+1)(2q+1)$	$\frac{1}{6}q(3q+1)$	$\frac{1}{6}q(q+1)$	$-\frac{1}{6}q(q-1)$	$\frac{2}{3}q$	$-\frac{1}{3}q$	$-\frac{1}{3}q$
θ_2	$\frac{1}{2}q(q+1)(q^3+1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	0	0	0
θ_5	q^6	0	0	0	0	0	0	0	0
θ_6	q^4+q^2+1	q^2+1	q^2+1	q^2+1	1	1	1	1	1
θ_7	$q^2(q^4+q^2+1)$	q^2	q^2	q^2	0	0	0	0	0
θ_{10}	$\frac{1}{6}q(q-1)^2(q^2-q-1)$	$\frac{1}{6}q(q-1)(2q-1)$	$\frac{1}{6}q(q-1)(2q-1)$	$-\frac{1}{6}q(3q-1)$	$\frac{1}{6}q(q+1)$	$-\frac{1}{6}q(q-1)$	$\frac{2}{3}q$	$-\frac{1}{3}q$	$-\frac{1}{3}q$
θ_{11}	$\frac{1}{2}q(q-1)(q^3-1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	0	0	0
$\theta_{12}(1)$	$\frac{1}{2}q(q^2-1)^2$	$-\frac{1}{3}q(q^2-1)$	$-\frac{1}{3}q(q^2-1)$	$\frac{1}{3}q$	$\frac{1}{3}q(q+1)$	$\frac{1}{3}q(q-1)$	$\frac{1}{3}q$	$\frac{1}{3}q+q\omega$	$\frac{1}{3}q+q\omega^{-1}$
$\theta_{12}(-1)$	$\frac{1}{2}q(q^2-1)^2$	$-\frac{1}{3}q(q^2-1)$	$-\frac{1}{3}q(q^2-1)$	$\frac{1}{3}q$	$\frac{1}{3}q(q+1)$	$-\frac{1}{3}q(q-1)$	$\frac{1}{3}q$	$\frac{1}{3}q+q\omega^{-1}$	$\frac{1}{3}q+q\omega$
$\chi_9(k,l)$	$(q+1)(q^2+q+1)(q^3+1)$	$(q+1)(q^2+q+1)$	$(q+1)(q^2+q+1)$	$2q^2+2q+1$	$2q+1$	$2q+1$	1	1	1
$\chi_{12}(k,l)$	$(q-1)(q^2-q+1)(q^3-1)$	$-(q-1)(q^2-q+1)$	$-(q-1)(q^2-q+1)$	$2q^2-2q+1$	$-(2q-1)$	$-(2q-1)$	1	1	1
$\chi_{14}(k)$	$(q+1)(q^2-1)(q^3-1)$	$-(q+1)(q^3-1)$	$-(q+1)(q^3-1)$	$-(q^2-q+1)$	$q+1$	$q+1$	1	1	1

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$C_{11}(i)$	$C_{12}(i)$	$C_{21}(i)$	$C_{22}(i)$
θ_1	$\frac{1}{2}(q+1)^2$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$-\frac{1}{2}(q-1)$	$q+1$	1	$q+1$	1
θ_2	$\frac{1}{2}(q+1)^2$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$-\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$q+1$	1	$q+1$	1
θ_5	q^2	0	0	0	0	q	0	q	0
θ_6	$1-2q$	$1-q$	$1-q$	1	1	$1+(q+1)(-1)^i$	$1+(-1)^i$	$1+(q+1)(-1)^i$	$1+(-1)^i$
θ_7	q^2-2q	$-q$	$-q$	0	0	$q+(q+1)(-1)^i$	$(-1)^i$	$q+(q+1)(-1)^i$	$(-1)^i$
θ_{10}	$-\frac{1}{3}(q-1)^2$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$-\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	0	0	0	0
θ_{11}	$-\frac{1}{2}(q-1)^2$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$-\frac{1}{2}(q+1)$	0	0	0	0
$\theta_{12}(1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_{12}(-1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\chi_9(k,l)$	$(q+1)^2\epsilon_{k,l}$	$(q+1)\epsilon_{k,l}$	$(q+1)\epsilon_{k,l}$	$\epsilon_{k,l}$	$\epsilon_{k,l}$	$(q+1)\alpha'_{i,k,l}$	$\alpha'_{i,k,l}$	$(q+1)\alpha''_{i,k,l}$	$\alpha''_{i,k,l}$
$\chi_{12}(k,l)$	$(q-1)^2\epsilon_{k,l}$	$-(q-1)\epsilon_{k,l}$	$-(q-1)\epsilon_{k,l}$	$\epsilon_{k,l}$	$\epsilon_{k,l}$	0	0	0	0
$\chi_{14}(k)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	$D_{11}(i)$	$D_{12}(i)$	$D_{21}(i)$	$D_{22}(i)$	$E_1(i,j)$	$E_2(i)$	$E_3(i)$	$E_4(i,j)$	$E_5(i)$	$E_6(i)$
θ_1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	-1
θ_2	0	0	0	0	2	0	0	0	-1	0
θ_5	$-q$	0	$-q$	0	1	-1	-1	1	1	1
θ_6	$1-(q-1)(-1)^i$	$1+(-1)^i$	$1-(q-1)(-1)^i$	$1+(-1)^i$	$\epsilon_{k,l}$	$(-1)^i$	$(-1)^i$	$\epsilon_{k,l}$	0	0
θ_7	$-q-(q-1)(-1)^i$	$(-1)^i$	$-q-(q-1)(-1)^i$	$(-1)^i$	$\epsilon_{k,l}$	$-(-1)^i$	$-(-1)^i$	$\epsilon_{k,l}$	0	0
θ_{10}	$q-1$	-1	$q-1$	-1	0	0	0	-2	1	0
θ_{11}	$q-1$	-1	$q-1$	-1	0	0	0	-2	0	1
$\theta_{12}(1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
$\theta_{12}(-1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
$\chi_9(k,l)$	0	0	0	0	$\alpha_{i,j,k,l}$	0	0	0	0	0
$\chi_{12}(k,l)$	$-(q-1)\beta'_{i,k,l}$	$\beta'_{i,k,l}$	$-(q-1)\beta''_{i,k,l}$	$\beta''_{i,k,l}$	0	0	0	$\beta_{i,j,k,l}$	0	0
$\chi_{14}(k)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	σ_i

TAB. B.2 – Table des caractères de $\mathrm{G}_2(q)$.

	1	X	T	T^{-1}	Y_1	Y_2	Y_3	J
ξ_2	q^2-q+1	$1-q$	1	1	1	1	1	-1
ξ_3	q^3	0	0	0	0	0	0	q
ξ_4	$q(q^2-q+1)$	q	0	0	0	0	0	$-q$
ξ_5	$\frac{1}{2}(q-1)(q+3\theta+1)$	$-\frac{1}{2}(q+\theta)$	$\frac{1}{2}(-\theta+\theta^2\sqrt{-3})$	$\frac{1}{2}(-\theta-\theta^2\sqrt{-3})$	θ	$\frac{1}{2}(-\theta-\theta\sqrt{-3})$	$\frac{1}{2}(-\theta+\theta\sqrt{-3})$	$-\frac{1}{2}(q-1)$
ξ_6	$\frac{1}{2}(q-1)(q-3\theta+1)$	$\frac{1}{2}(q-\theta)$	$\frac{1}{2}(-\theta+\theta^2\sqrt{-3})$	$\frac{1}{2}(-\theta-\theta^2\sqrt{-3})$	θ	$\frac{1}{2}(-\theta-\theta\sqrt{-3})$	$\frac{1}{2}(-\theta+\theta\sqrt{-3})$	$\frac{1}{2}(q-1)$
ξ_7	$\frac{1}{2}(q-1)(q+3\theta+1)$	$-\frac{1}{2}(q+\theta)$	$\frac{1}{2}(-\theta-\theta^2\sqrt{-3})$	$\frac{1}{2}(-\theta+\theta^2\sqrt{-3})$	θ	$\frac{1}{2}(-\theta+\theta\sqrt{-3})$	$\frac{1}{2}(-\theta-\theta\sqrt{-3})$	$-\frac{1}{2}(q-1)$
ξ_8	$\frac{1}{2}(q-1)(q-3\theta+1)$	$\frac{1}{2}(q-\theta)$	$\frac{1}{2}(-\theta-\theta^2\sqrt{-3})$	$\frac{1}{2}(-\theta+\theta^2\sqrt{-3})$	θ	$\frac{1}{2}(-\theta+\theta\sqrt{-3})$	$\frac{1}{2}(-\theta-\theta\sqrt{-3})$	$\frac{1}{2}(q-1)$
ξ_9	$\theta(q^2-1)$	$-\theta$	$\theta+\theta^2\sqrt{-3}$	$-\theta-\theta^2\sqrt{-3}$	$-\theta$	$\frac{1}{2}(-\theta+\theta\sqrt{-3})$	$\frac{1}{2}(-\theta-\theta\sqrt{-3})$	0
ξ_{10}	$\theta(q^2-1)$	$-\theta$	$\theta-\theta^2\sqrt{-3}$	$-\theta+\theta^2\sqrt{-3}$	$-\theta$	$\frac{1}{2}(-\theta-\theta\sqrt{-3})$	$\frac{1}{2}(-\theta+\theta\sqrt{-3})$	0
η_r	q^3+1	1	1	1	1	1	1	$(q+1)$
η_r'	q^3+1	1	1	1	1	1	1	$-(q+1)$
η_t	$(q-1)(q^2-q+1)$	$2q-1$	-1	-1	-1	-1	-1	$3(q-1)$
$\eta_{t,1}'$	$(q-1)(q^2-q+1)$	$2q-1$	-1	-1	-1	-1	-1	$1-q$
$\eta_{t,2}'$	$(q-1)(q^2-q+1)$	$2q-1$	-1	-1	-1	-1	-1	$1-q$
$\eta_{t,3}'$	$(q-1)(q^2-q+1)$	$2q-1$	-1	-1	-1	-1	-1	$1-q$
η_k^+	$(q^2-1)(q+3\theta+1)$	$-q-1-3\theta$	$-3\theta-1$	$-3\theta-1$	-1	-1	-1	0
η_k^-	$(q^2-1)(q-3\theta+1)$	$-q-1+3\theta$	$3\theta-1$	$3\theta-1$	-1	-1	-1	0

TAB. B.3 – Table des caractères de $\mathrm{R}(q)$.

	JT	JT^{-1}	h_1	h_1J	h_{aba}	h_{aba}	$h_{aba}J$	$h_{aba}J\tau^2$	h_a	h_{ababa}
ξ_2	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	0	0
ξ_3	0	0	1	1	3	-1	-1	-1	-1	-1
ξ_4	0	0	1	-1	-3	1	1	1	0	0
ξ_5	$\frac{1}{2}(1-\theta\sqrt{-3})$	$\frac{1}{2}(1+\theta\sqrt{-3})$	0	0	1	1	1	1	-1	0
ξ_6	$\frac{1}{2}(-1+\theta\sqrt{-3})$	$\frac{1}{2}(-1-\theta\sqrt{-3})$	0	0	-1	-1	-1	-1	0	1
ξ_7	$\frac{1}{2}(1+\theta\sqrt{-3})$	$\frac{1}{2}(1-\theta\sqrt{-3})$	0	0	1	1	1	1	-1	0
ξ_8	$\frac{1}{2}(-1-\theta\sqrt{-3})$	$\frac{1}{2}(-1+\theta\sqrt{-3})$	0	0	-1	-1	-1	-1	0	1
ξ_9	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
ξ_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
η_r	1	1	γ_{ir}	γ_{ir}	0	0	0	0	0	0
η'_r	-1	-1	γ_{ir}	$-\gamma_{ir}$	0	0	0	0	0	0
η_t	-3	-3	0	0	$-\beta_{tj,0}$	$-\beta_{tj,0}$	$-\beta_{tj,0}$	$-\beta_{tj,0}$	0	0
$\eta'_{t,1}$	1	1	0	0	$-\beta_{tj,0}$	$-\beta_{tj,3}$	$-\beta_{tj,1}$	$-\beta_{tj,2}$	0	0
$\eta'_{t,2}$	1	1	0	0	$-\beta_{tj,0}$	$-\beta_{tj,1}$	$-\beta_{tj,2}$	$-\beta_{tj,3}$	0	0
$\eta'_{t,3}$	1	1	0	0	$-\beta_{tj,0}$	$-\beta_{tj,2}$	$-\beta_{tj,3}$	$-\beta_{tj,1}$	0	0
η_k^-	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\delta_{kj}$	0
η_k^+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\delta'_{kj}$

TAB. B.3 – Table des caractères de R(q).

Index des notations

Liste des tableaux

Bibliographie

[1] M. Aschbacher, The classification of the finite simple groups. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **102** (2000), no. 3, 95–101.

[2] M. Broué, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées, Astérisque **181-182** (1990), 61–92.

[3] O. Brunat, On the Characters of the Suzuki Group, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. **339**, 2004, 95-98.

[4] R.W. Carter, Simple groups of Lie Type, Wiley, New York, 1972.

[5] R.W. Carter, Finite Groups of Lie Type : Conjugacy classes and Complex Characters, Wiley, New York, 1985.

[6] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, The Atlas of Finite Groups, Oxford University Press, 1985.

[7] C. W. Curtis and I. Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, Wiley, 1962.

[8] C. W. Curtis and I. Reiner, Methods of Representation Theory with applications to Finite Groups and orders, vol. 1, Wiley, 1990.

[9] J. Dieudonné, Les isomorphismes exceptionnels entre les groupes classiques finis, Canadian J. Math **6**, (1954). 305–315.

[10] F. Digne et J. Michel, Fonctions $\mathcal{L}$ des variétés de Deligne–Lusztig et descente de Shintani, Bull. S.M.F., mémoires **20** (113), 1985.

[11] F. Digne et J. Michel, Groupes réductifs non connexes, Ann. École Normale Supérieure, 4ième série, t. 27, 1994, 345–406.

[12] H. Enomoto, The Characters of the Finite Symplectic Group $\mathrm{Sp}(4, q)$, $q = 2^f$, Osaka J. Math **9** (1972), 75–94.

[13] H. Enomoto, The Characters of the Finite Chevalley group $G_2(q), q = 3^f$. Japan. J. Math. **2** (1976), 191–248

[14] W. Feit, The representation Theory of finite groups, North-Holland Mathematical Library, 1982.

[15] W. Fulton and J. Harris, Representation theory. A first course, Graduate texts in math. vol. 129, Springer, 1991.

[16] M. Geck, An introduction to algebraic geometry and algebraic groups, Clarendon Press Oxford, 2003.

[17] M. Geck, On the representation theory of Iwahori-Hecke algebras of extended finite Weyl groups, Represent. Theory 4, 2000, 370–397.

[18] M. Geck and G. Malle, Fourier transforms and Frobenius eigenvalues for finite Coxeter groups, Journal of Algebra **260**, 162–193, 2003.

[19] D. M. Goldschmidt, Lectures on character theory, Publish or Perish, 1980.

[20] I. Isaacs, Character theory of finite groups, Dover Publications, Inc., New York, 1976.

[21] James and Kerber, The Representation Theory of the Symmetric Group. Encyclopedia of Mathematics, vol. 16, 1981.

[22] G. Lusztig, Coxeter Orbits and Eigenspaces of Frobenius, Invent. Math. **28** (1976), 101–159.

[23] G. Lusztig, Representations of Finite Chevalley Groups, in : CBMS Reg. Conf. Ser. Math. **39**, Amer. Math. Society, Providence, RI, 1977.

[24] G. Lusztig, Characters of reductive groups over a finite field, Annals Math. Studies 107, Princeton University Press, 1984.

[25] G. Malle, Generalized Deligne-Lusztig Characters, Journal of Algebra **159**, 1993, 64–97.

[26] G. Malle, Darstellungstheoretische Methoden bei der Realisierung einfacher Gruppen vom Lie Typ als Galoisgruppen, Progress in Mathematics **95**, 1991, 443–459.

[27] T. Ono, An identification of Suzuki groups of generalized Lie type, Annals of Mathematics Vol.75, No. 2, March, 1962, 251–259.

[28] R. Ree, A family of simple groups associated with the simple Lie Algebra of type G_2, Proc. Sympos. Pure Math., **VI**, 1962 , 111–112.

[29] A. Reyes, Representation theory of semi-direct products, J. London Math. Soc. (2),**13**, 1976, no. 2, 281–290.

[30] J. J. Rotman, An Introduction to the Theory of Groups, Springer-Verlag, 1995.

[31] M. Suzuki, On a class of doubly transitive groups. I, Annals of Math. **75** (1962), 105–145.

[32] H.N. Ward, On Ree's series of simple groups, Trans. Amer. Math. soc., **121** (1966), 62-89.

Résumé en Français

La thèse s'intègre dans la théorie des représentations d'un groupe réductif fini. Un tel groupe est défini comme $G = \mathbf{G}^F$, où $\mathbf{G}$ est un groupe réductif connexe sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et F est un endomorphisme tel que l'ensemble des points fixes $G = \mathbf{G}^F$ est fini. Dans cette situation, on obtient une famille de groupes finis en remplaçant F par une puissance F^m. Cette idée joue un rôle important dans la théorie générale des groupes réductifs finis ; elle est notamment developpée par Lusztig.

Dans le cas où $m = 2$, F agit comme un automorphisme sur $\tilde{G} = \mathbf{G}^{F^2}$. On peut donc former le produit semi-direct $\tilde{G} \rtimes \langle F \rangle$ et la « descente de Shintani » définit alors une isométrie de l'espace des fonctions centrales sur la tranche $\tilde{G}F$ dans l'espace des fonctions centrales sur G. Le but de la thèse est d'étudier cette isométrie dans le cas des groupes de Suzuki et de Ree de type B_2 et G_2, définis par un endomorphisme F qui est très « tordu » (dans le sens que F n'est pas un endomorphisme de Frobenius). Ce dernier fait entraîne un certain nombre de problèmes au niveau de la théorie générale. Nous déterminons donc explicitement la table des valeurs des fonctions centrales sur la tranche $\tilde{G}F$.

Comme applications, nous pouvons explicitement déterminer les valeurs propres associées par Lusztig aux représentations unipotentes cuspidales du groupe de Suzuki et de Ree. Nous pouvons aussi vérifier un certain nombre de conjectures dans la théorie des représentations modulaires : conjecture de Broué, existence des ensembles basiques. Plus généralement, la détermination des tables des caractères des groupes $\tilde{G} \rtimes \langle F \rangle$ rentre dans le projet de déterminer les tables des caractères de toutes les extensions des groupes finis simples.

Titre en Anglais

Shintani descents of Suzuki and Ree groups.

Résumé en Anglais

The thesis is about representation theory of finite reductive groups. Such a group is defined as $G = \mathbf{G}^F$, where $\mathbf{G}$ is a reductive connected group over an algebraically closed field of characteristic $p > 0$, and F is an endomorphism such that the fixed point subgroup $G = \mathbf{G}^F$ is finite. In this situation, we obtain a family of finite groups, when we replace F by F^m ($m \in \mathbb{N}$). This idea is important in the general theory of finite reductive groups, as developed by Lusztig. In the case where $m = 2$, F acts as an automorphism on $\widetilde{\mathrm{G}} = \mathbf{G}^{F^2}$. We can consider the semidirect product $\widetilde{\mathrm{G}} \rtimes \langle F \rangle$. Then the "Shintani descent" defines an isometry between the space of class functions on the class $\widetilde{\mathrm{G}}.F$ and the class function space of G. The aim of the thesis is to study this isometry in the case where G is the Suzuki group or the Ree group of type G_2, defined by a "very twisted" map F (in the sense that F is not a Frobenius map). The "very twisted" nature of F is the source of a number of problems as far as the general theory is concerned. We thus explicitly compute the table of the values of the class function on the set $\widetilde{\mathrm{G}}.F$. As applications, we can explicitly determine the eigenvalues associed by Lusztig to the cuspidal unipotent characters of the Suzuki and the

Ree group, and the Fourier matrices of these groups. We can verify many conjectures in the modular representation theory : Broué's conjecture, existence of basic set. More generally, the determination of the character tables of groups $\widetilde{\mathrm{G}} \rtimes \langle F \rangle$ is in the project to compute the character table of all extensions of finite simple groups.

Discipline

Mathématiques pures

Mots-clés

Groupes réductifs finis, Descentes de Shintani, Groupes de Chevalley, Ree, Suzuki, Tables des caractères, Produit semi-direct, Isométries parfaites, Valeurs propres du Frobenius, Matrices de Fourier.

Intitulé et adresse du Laboratoire

Institut Camille Jordan
Université Claude Bernard Lyon 1
Bâtiment Braconnier (ex–101)
21 avenue Claude Bernard
69622 Villeurbanne cedex
France