

# Raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de l'élastodynamique

**Jerónimo Rodríguez García**

sous la direction de

**Éliane Bécache** et **Patrick Joly**

Université Paris-Dauphine

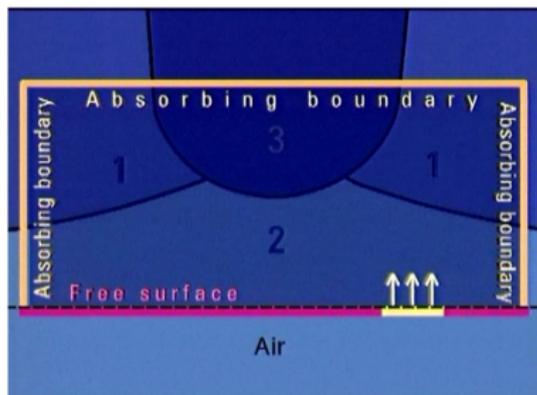
Projet **POems** en collaboration avec **EDF**

8 Décembre 2004

# Le contexte applicatif et scientifique

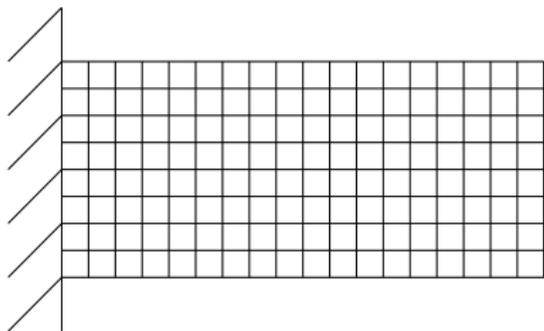
## Simulation numérique d'expériences de contrôle non-destructif

- Travail réalisé dans le cadre d'un contrat avec le département **SINETICS** de **EDF** (J. L. Vaudescal).
- Continuation de deux thèses financées par EDF:  
**C. Tsogka** et **G. Scarella**.



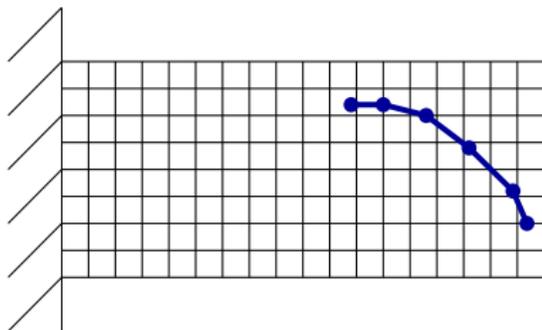
## Le contexte historique

- Code **ATHENA-2D** [Tsogka - Fouquet - Duwig].
  - Formulation **vitesse - contraintes**.
  - Éléments finis **mixtes** sur des maillages **réguliers**.
  - **Condensation** de masse.
  - Schéma **explicite** centré en temps, **non dissipatif**.



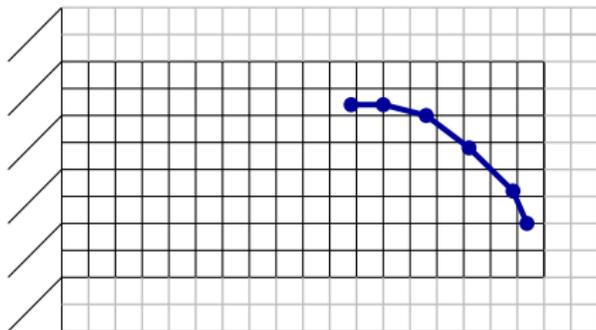
## Le contexte historique

- Code **ATHENA-2D** [Tsogka - Fouquet - Duwig].
  - Formulation **vitesse - contraintes**.
  - Éléments finis **mixtes** sur des maillages **réguliers**.
  - **Condensation** de masse.
  - Schéma **explicite** centré en temps, **non dissipatif**.
  - **Domaines fictifs** pour la prise en compte des fissures.



## Le contexte historique

- Code **ATHENA-2D** [Tsogka - Fouquet - Duwig].
  - Formulation **vitesse - contraintes**.
  - Éléments finis **mixtes** sur des maillages **réguliers**.
  - **Condensation** de masse.
  - Schéma **explicite** centré en temps, **non dissipatif**.
  - **Domaines fictifs** pour la prise en compte des fissures.
  - **PML** pour la simulation des domaines non-bornés.



## Le contexte historique

- Code **ATHENA-2D** [Tsogka - Fouquet - Duwig].
  - Formulation **vitesse** - **contraintes**.
  - Éléments finis **mixtes** sur des maillages **réguliers**.
  - **Condensation** de masse.
  - Schéma **explicite** centré en temps, **non dissipatif**.
  - **Domaines fictifs** pour la prise en compte des fissures.
  - **PML** pour la simulation des domaines non-bornés.

## Problématique

- Bien prendre en compte des **détails** géométriques.
  - **Microfissures**, présence de **trous**, **singularités** de la solution, ...

## Stratégie retenue

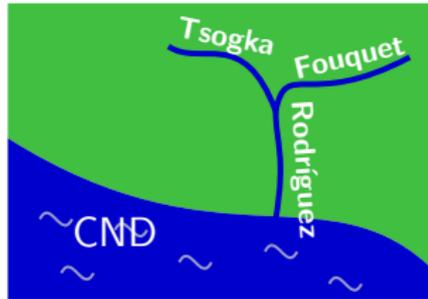
- Mettre au point des méthodes **non-conformes** de **raffinement** de maillage **espace-temps**.

## Stratégie retenue

- Mettre au point des méthodes **non-conformes** de **raffinement** de maillage **espace-temps**.
  - Continuité de la thèse de T. Fouquet en **électromagnétisme**.

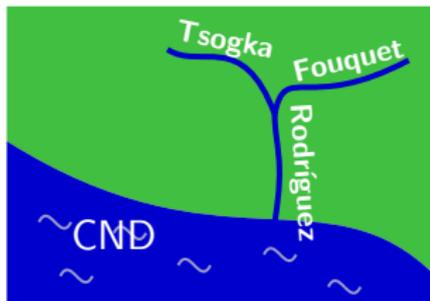
# Stratégie retenue

- Mettre au point des méthodes **non-conformes** de **raffinement** de maillage **espace-temps**.
  - Continuité de la thèse de T. Fouquet en **électromagnétisme**.



## Stratégie retenue

- Mettre au point des méthodes **non-conformes** de **raffinement** de maillage **espace-temps**.
  - Continuité de la thèse de T. Fouquet en **électromagnétisme**.



## Contraintes industrielles

- Doivent être facilement **intégrables** dans ATHENA-2D.
- Doivent pouvoir être **couplées** avec la méthode des **domaines fictifs**.

## Les contributions de la thèse

- Première Partie: **Raffinement de maillage spatio-temporel avec multiplicateur de Lagrange**
  - Méthode **conservative** ( $p - q$ ) pour l'**élastodynamique**.
  - **Nouvelles** analyses d'erreur 1-D:
    - Par techniques **énergétiques** (1 – 2).
    - Par techniques de **Fourier** ( $p - q$ ).
  - Construction d'une **nouvelle** méthode **stable** plus **précise**.
  - Implémentation en **élastodynamique** 2D.



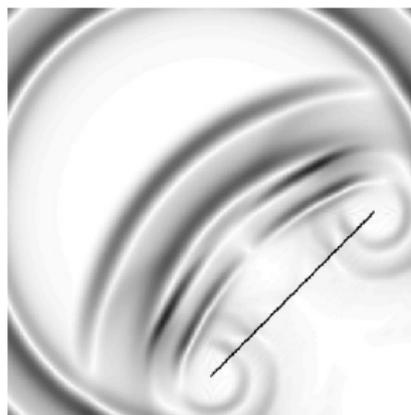
# Les contributions de la thèse

- Première Partie: **Raffinement de maillage spatio-temporel avec multiplicateur de Lagrange**
  - ➔ Méthode **conservative** ( $p - q$ ) pour l'**élastodynamique**.
  - ➔ **Nouvelles** analyses d'erreur 1-D:
    - Par techniques **énergétiques** (1 – 2).
    - ➔ Par techniques de **Fourier** ( $p - q$ ).
  - ➔ Construction d'une **nouvelle** méthode **stable** plus **précise**.
    - Implémentation en **élastodynamique** 2D.



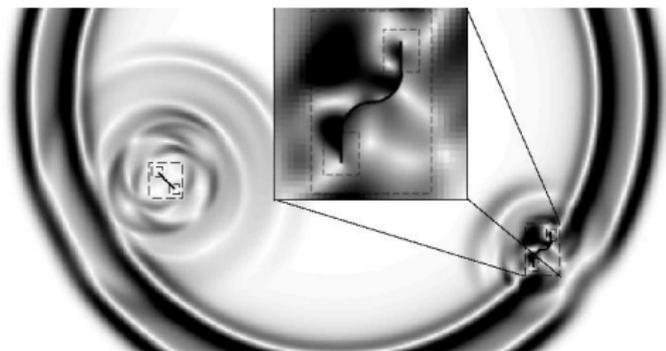
## Les contributions de la thèse

- Troisième Partie: **Sur la méthode des domaines fictifs**
  - **Correction** de la méthode des **domaines fictifs** initiale:
    - **Enrichissement** de l'espace de vitesses.
    - **Amortissement** des modes parasites.
  - Analyse de **convergence** dans le cas **acoustique**.
  - Implémentation en **élastodynamique** 2D.



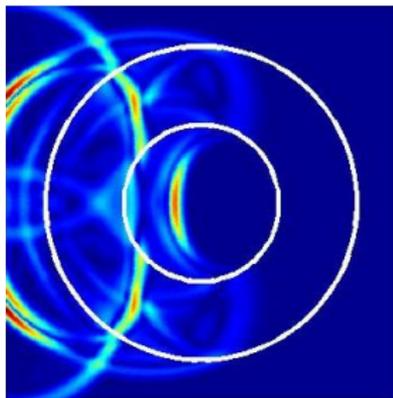
# Les contributions de la thèse

- Quatrième Partie: **Couplage entre les deux méthodes**
  - Conception de deux formulations variationnelles approchées **conservatives** du problème **couplé**.
  - Implémentation en **élastodynamique** 2D d'une d'entre elles.



## Les contributions de la thèse

- Deuxième Partie: **Raffinement de maillage spatio-temporel sans multiplicateur de Lagrange**
  - **Construction** d'une méthode **conservative** ( $p - q$ ).
  - **Analyse** dans le cas **multidimensionnel** ( $1 - 2$ ).
  - Même **précision** que pour la méthode avec multiplicateur.



[Diaz]

# Une présentation technique

## Raffinement de maillage spatio-temporel conservatif

- Présentation de la méthode

- Expériences numériques: Phénomènes parasites

- Analyse de Fourier 1D

## Une nouvelle technique de raffinement spatio-temporel

- Post-traitement en temps

- Expériences numériques avec la nouvelle méthode

- Un nouveau schéma

- Analyse de Fourier 1D

## Une expérience numérique moins académique

# Une présentation technique

## Raffinement de maillage spatio-temporel conservatif

- Présentation de la méthode

- Expériences numériques: Phénomènes parasites

- Analyse de Fourier 1D

## Une nouvelle technique de raffinement spatio-temporel

- Post-traitement en temps

- Expériences numériques avec la nouvelle méthode

- Un nouveau schéma

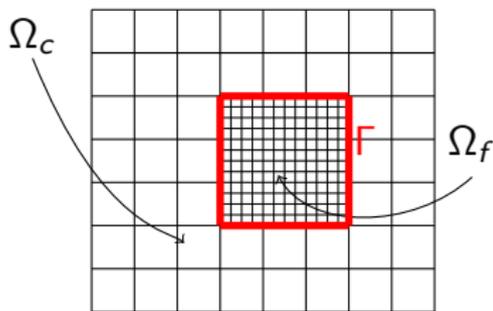
- Analyse de Fourier 1D

## Une expérience numérique moins académique

# Intérêt du raffinement spatio-temporel

Prendre en compte un **détail géométrique** (typiquement  $\Rightarrow$  une fissure)

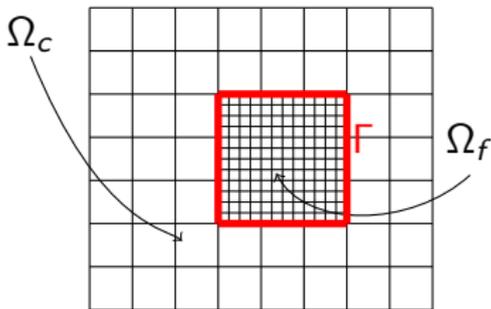
## Raffinement de maillage



# Intérêt du raffinement spatio-temporel

Prendre en compte un **détail géométrique** (typiquement  $\Rightarrow$  une fissure)

## Raffinement de maillage

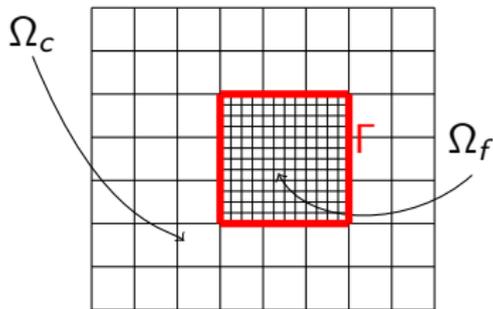


$\Rightarrow$  Inconvénients d'un raffinement seulement en espace:

# Intérêt du raffinement spatio-temporel

## Raffinement de maillage

Prendre en compte un **détail géométrique** (typiquement  $\implies$  une fissure)

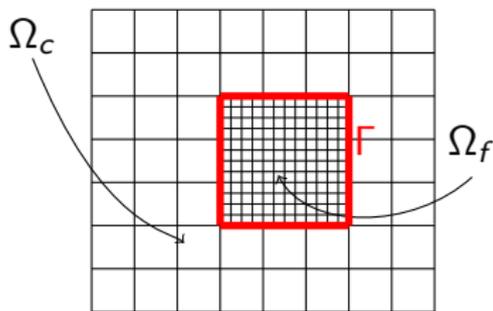


- ➔ Inconvénients d'un raffinement seulement en espace:
- Stable si **CFL**,  $\Delta t / \Delta x < C_{te} \implies$  Pas de temps global imposé par la grille fine (**coûteux**).

# Intérêt du raffinement spatio-temporel

Prendre en compte un **détail géométrique** (typiquement  $\implies$  une fissure)

## Raffinement de maillage

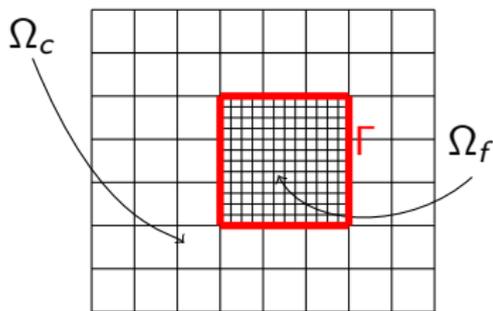


- ➔ Inconvénients d'un raffinement seulement en espace:
  - Stable si **CFL**,  $\Delta t / \Delta x < \text{Cte} \implies$  Pas de temps global imposé par la grille fine (**coûteux**).
  - La dispersion numérique augmente lorsque  $\Delta t / \Delta x$  diminue  $\implies$  Le schéma est **dispersif** dans la grille grossière.

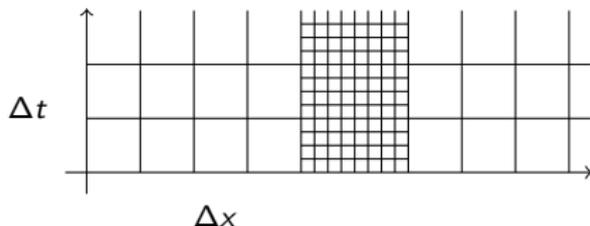
# Intérêt du raffinement spatio-temporel

Prendre en compte un **détail géométrique** (typiquement  $\Rightarrow$  une fissure)

## Raffinement de maillage



$\rightarrow$  Pas de temps **local** pour avoir la **même CFL** dans le domaine entier.



# État de l'art. Raffinement purement en espace

- La méthode des **éléments joints**.

[Bernardi - Maday - Patera] (94)

- Éléments joints pour les équations de **Maxwell**.

[Belgacem - Buffa - Maday - Rappetti] (01-03)

- Éléments joints avec **multiplicateur** de **Lagrange**.

[Belgacem] (99)

## État de l'art. Raffinement purement en espace

- La méthode des **éléments joints**.

[Bernardi - Maday - Patera] (94)

- Éléments joints pour les équations de **Maxwell**.

[Belgacem - Buffa - Maday - Rappeti] (01-03)

- Éléments joints avec **multiplicateur** de **Lagrange**.

[Belgacem] (99)

- Application à l'**acoustique** en **temporel**.

[Bamberger - Glowinski - Tran] (97)

## État de l'art. Raffinement espace - temps

- Méthodes avec des équations de raccord au sens fort:  
Techniques d'interpolation.

[Kunz - Simpson] (81), [Prescott - Shuley] (92), [Chevalier - Luebbers] (97)

[Zakharian - Brio - Moloney] (04)

[M. Berger - Colella - R.J. Leveque - Oliger] (84-98)

## État de l'art. Raffinement espace - temps

- Méthodes avec des équations de raccord au sens fort:  
Techniques d'**interpolation**.

[Kunz - Simpson] (81), [Prescott - Shuley] (92), [Chevalier - Luebbers] (97)

[Zakharian - Brio - Moloney] (04)

[M. Berger - Colella - R.J. Leveque - Olinger] (84-98)

➔ F.D.T.D.

➔ Consistance.

➔ Peuvent être **instables** sous la CFL habituelle si on couple des schémas intérieurs non-dissipatifs (Analyse G.K.S.).

## État de l'art. Raffinement espace - temps

- Méthodes avec des équations de raccord au sens **faible**:
  - **Décomposition de domaines** en espace-temps:  
[Gander - Halpern - Nataf] (03)

# État de l'art. Raffinement espace - temps

- Méthodes avec des équations de raccord au sens **faible**:
  - **Décomposition de domaines** en espace-temps:
    - [Gander - Halpern - Nataf] (03)
    - ➔ Volumes finis.
    - ➔ Consistance.
    - ➔ Stabilité prouvée pour certains cas.

# État de l'art. Raffinement espace - temps

- Méthodes avec des équations de raccord au sens **faible**:

- **Décomposition de domaines** en espace-temps:

[Gander - Halpern - Nataf] (03)

➔ Volumes finis.

➔ Consistance.

➔ Stabilité prouvée pour certains cas.

- Méthodes **conservatives**:

[Collino - Fouquet - Joly] (03) , [Bécache - Joly - R.] (04),

➔ F.D.T.D., éléments finis,

# État de l'art. Raffinement espace - temps

- Méthodes avec des équations de raccord au sens **faible**:

- **Décomposition de domaines** en espace-temps:

[Gander - Halpern - Nataf] (03)

➔ Volumes finis.

➔ Consistance.

➔ Stabilité prouvée pour certains cas.

- Méthodes **conservatives**:

[Collino - Fouquet - Joly] (03) , [Bécache - Joly - R.] (04), [Piperno] (03)

➔ F.D.T.D., éléments finis, volumes finis, G.D.

# État de l'art. Raffinement espace - temps

- Méthodes avec des équations de raccord au sens **faible**:

- **Décomposition de domaines** en espace-temps:

[Gander - Halpern - Nataf] (03)

➔ Volumes finis.

➔ Consistance.

➔ Stabilité prouvée pour certains cas.

- Méthodes **conservatives**:

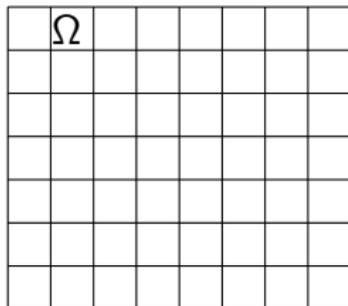
[Collino - Fouquet - Joly] (03) , [Bécache - Joly - R.] (04), [Piperno] (03)

➔ F.D.T.D., éléments finis, volumes finis, G.D.

➔ Stabilité assurée par construction.

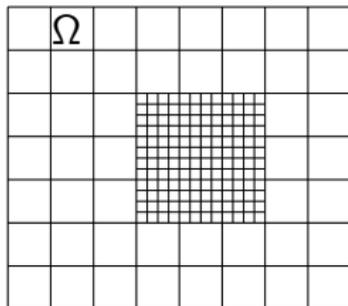
➔ Consistance.

# Les équations de l'élastodynamique



$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = f \quad \text{dans } \Omega \\ A \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} - \varepsilon(\mathbf{v}) = 0 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

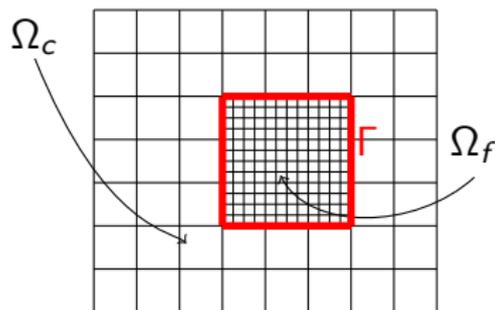
# Les équations de l'élastodynamique



$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = f \quad \text{dans } \Omega \\ A \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} - \varepsilon(\mathbf{v}) = 0 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

# Les équations de l'élastodynamique

- Le point de vue de la **décomposition de domaines**.
- Formulation comme un problème de **transmission** entre deux sous-domaines.



$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{v}_c}{\partial t} - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_c) = f & \text{dans } \Omega_c \\ A \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_c}{\partial t} - \varepsilon(\mathbf{v}_c) = 0 & \text{dans } \Omega_c \end{cases} \quad \begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_f) = f & \text{dans } \Omega_f \\ A \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_f}{\partial t} - \varepsilon(\mathbf{v}_f) = 0 & \text{dans } \Omega_f \end{cases}$$
$$\boldsymbol{\sigma}_c \mathbf{n}_c = -\boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n}_f, \quad \text{sur } \Gamma \quad \mathbf{v}_c = \mathbf{v}_f \quad \text{sur } \Gamma$$

## Formulation variationnelle

- Utiliser la **même** formulation sur chaque sous-domaine.

## Formulation variationnelle

- Utiliser la **même** formulation sur chaque sous-domaine.

- $$\left| \begin{array}{l} \sigma_I, \tau_I \in \underline{\underline{X}}_I^{\text{sym}} = \{ \tilde{\tau} \in \underline{\underline{L}}^2(\Omega_I) / \tilde{\tau} \text{ sym.}, \text{div}(\tilde{\tau}) \in \underline{\underline{L}}^2(\Omega_I) \} \\ \mathbf{v}_I, \mathbf{w}_I \in \underline{\underline{M}}_I = \underline{\underline{L}}^2(\Omega_I), \end{array} \right.$$

$$\int_{\Omega_I} \varepsilon(\mathbf{v}_I) : \tau_I'' = - \int_{\Omega_I} \text{div}(\tau_I) \cdot \mathbf{v}_I + \int_{\Gamma} \tau_I n_I \cdot \boxed{\mathbf{v}_I}$$

## Formulation variationnelle

- Utiliser la **même** formulation sur chaque sous-domaine.

- $$\left| \begin{array}{l} \sigma_I, \tau_I \in \underline{X}_I^{\text{sym}} = \{ \tilde{\tau} \in \underline{\underline{L}}^2(\Omega_I) / \tilde{\tau} \text{ sym.}, \text{div}(\tilde{\tau}) \in \underline{L}^2(\Omega_I) \} \\ v_I, w_I \in \underline{M}_I = \underline{L}^2(\Omega_I), \end{array} \right.$$

$$\int_{\Omega_I} \varepsilon(v_I) : \tau_I'' = - \int_{\Omega_I} \text{div}(\tau_I) \cdot v_I + \int_{\Gamma} \tau_I n_I \cdot \boxed{j_I}$$

- On introduit un multiplicateur de Lagrange ( $\equiv$  trace de  $v_I$ )

$$j_I, \mu \in \underline{\mathcal{J}} = \underline{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

## Formulation variationnelle

Trouver  $(\sigma_f, \sigma_c, v_f, v_c, j_f, j_c) \in \underline{X}_f^{\text{sym}} \times \underline{X}_c^{\text{sym}} \times \underline{M}_f \times \underline{M}_c \times \underline{\mathcal{J}}^2$

$$\left\{ \int_{\Omega_c} \rho \frac{\partial v_c}{\partial t} \cdot w_c - \int_{\Omega_c} \text{div}(\sigma_c) \cdot w_c = \int_{\Omega_c} f \cdot w_c \right.$$

$$\left. \int_{\Omega_c} A \frac{\partial \sigma_c}{\partial t} : \tau_c + \int_{\Omega_c} \text{div}(\tau_c) \cdot v_c - \int_{\Gamma} \tau_c n_c \cdot j_c = 0 \right.$$

$$\left\{ \int_{\Omega_f} \rho \frac{\partial v_f}{\partial t} \cdot w_f - \int_{\Omega_f} \text{div}(\sigma_f) \cdot w_f = \int_{\Omega_f} f \cdot w_f \right.$$

$$\left. \int_{\Omega_f} A \frac{\partial \sigma_f}{\partial t} : \tau_f + \int_{\Omega_f} \text{div}(\tau_f) \cdot v_f - \int_{\Gamma} \tau_f n_f \cdot j_f = 0 \right.$$

$$\int_{\Gamma} \sigma_f n_f \cdot \mu = - \int_{\Gamma} \sigma_c n_c \cdot \mu, \quad j_f = j_c.$$

# Conservation de l'énergie

## L'énergie

$$\mathbf{E} := \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_f,$$

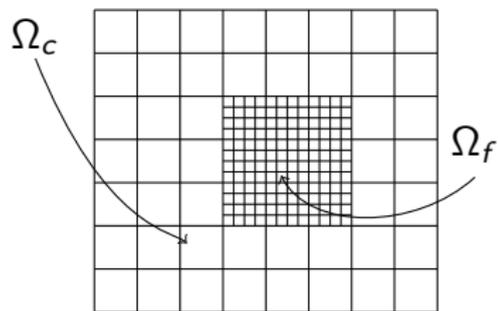
$$\mathbf{E}_I := \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega_I} A \sigma_I : \sigma_I + \rho |\mathbf{v}_I|^2 \right], \quad I \in \{c, f\}$$

satisfait

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \boxed{\int_{\Gamma} (\sigma_c n_c \cdot j_c + \sigma_f n_f \cdot j_f)} + \sum_{I \in \{c, f\}} \int_{\Omega_I} f_I \cdot \mathbf{v}_I$$

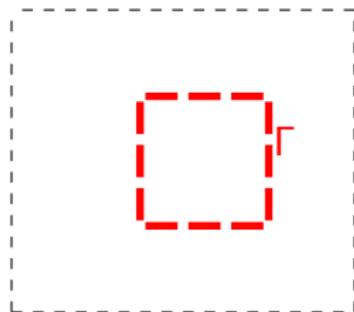
En l'absence de forces externes, elle est **conservée**.

## Discrétisation en espace



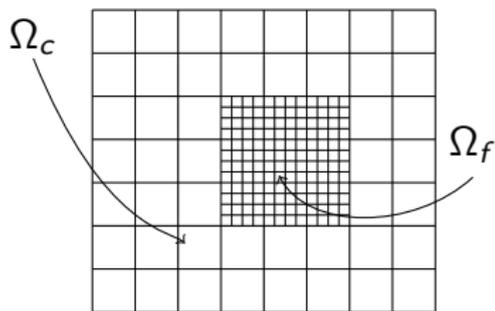
$$\Delta x_c = \Delta x$$

$$\Delta x_f = \Delta x / p$$



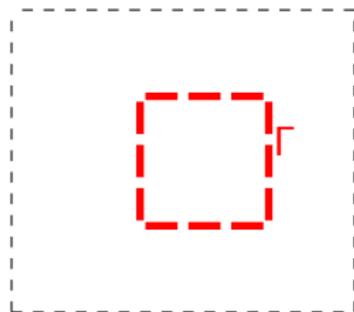
$$H = \Delta x$$

## Discrétisation en espace



$$\Delta x_c = \Delta x$$

$$\Delta x_f = \Delta x/p$$



$$H = \Delta x$$

$$\underline{X}_{h_l}^{\text{sym}} \subset \underline{X}_l, \quad \underline{M}_{h_l} \subset \underline{M}_l, \quad l \in \{c, f\},$$

$$\underline{\mathcal{J}}_H \subset \underline{\mathcal{J}}$$

## Discretisation en espace

Trouver  $(\sigma_l^h, v_l^h, j_l^H) \in \underline{X}_{h_l}^{sym} \times \underline{M}_{h_l} \times \underline{J}_H$

$$\begin{cases} \int_{\Omega_c} \rho \frac{\partial v_c^h}{\partial t} \cdot w_c^h - \int_{\Omega_c} \operatorname{div}(\sigma_c^h) \cdot w_c^h & = \int_{\Omega_c} f \cdot w_c^h \\ \int_{\Omega_c} A \frac{\partial \sigma_c^h}{\partial t} : \tau_c^h + \int_{\Omega_c} \operatorname{div}(\tau_c^h) \cdot v_c^h - \int_{\Gamma} \tau_c^h n_c \cdot j_c^H & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_{\Omega_f} \rho \frac{\partial v_f^h}{\partial t} \cdot w_f^h - \int_{\Omega_f} \operatorname{div}(\sigma_f^h) \cdot w_f^h & = \int_{\Omega_f} f \cdot w_f^h \\ \int_{\Omega_f} A \frac{\partial \sigma_f^h}{\partial t} : \tau_f^h + \int_{\Omega_f} \operatorname{div}(\tau_f^h) \cdot v_f^h - \int_{\Gamma} \tau_f^h n_f \cdot j_f^H & = 0 \end{cases}$$

$$\int_{\Gamma} \sigma_f^h n_f \cdot \mu^H = - \int_{\Gamma} \sigma_c^h n_c \cdot \mu^H, \quad j_c^H = j_f^H$$

## Discrétisation en espace

$$\left. \begin{aligned} M_{V,c} \frac{d}{dt} V_c - D_c \Sigma_c &= F_c \\ M_{\sigma,c} \frac{d}{dt} \Sigma_c + D_c^t V_c - C_{\Gamma,c} J_c &= 0 \end{aligned} \right|, \text{ dans } \Omega_c,$$

$$\left. \begin{aligned} M_{V,f} \frac{d}{dt} V_f - D_f \Sigma_f &= F_f \\ M_{\sigma,f} \frac{d}{dt} \Sigma_f + D_f^t V_f - C_{\Gamma,f} J_f &= 0 \end{aligned} \right|, \text{ dans } \Omega_f,$$

$$C_{\Gamma,c}^t \Sigma_c = - C_{\Gamma,f}^t \Sigma_f, \quad J_c = J_f, \quad \text{sur } \Gamma,$$

## Discrétisation en espace

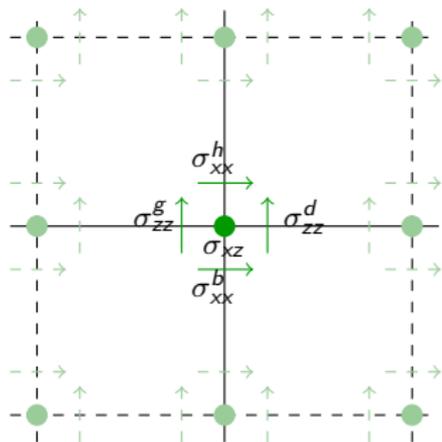
$$\left. \begin{aligned} M_{V,c} \frac{d}{dt} V_c - D_c \Sigma_c &= F_c \\ M_{\sigma,c} \frac{d}{dt} \Sigma_c + D_c^t V_c - C_{\Gamma,c} J &= 0 \end{aligned} \right|, \text{ dans } \Omega_c,$$

$$\left. \begin{aligned} M_{V,f} \frac{d}{dt} V_f - D_f \Sigma_f &= F_f \\ M_{\sigma,f} \frac{d}{dt} \Sigma_f + D_f^t V_f - C_{\Gamma,f} J &= 0 \end{aligned} \right|, \text{ dans } \Omega_f,$$

$$\begin{aligned} & \left[ C_{\Gamma,c}^t (M_{\sigma,c})^{-1} C_{\Gamma,c} + C_{\Gamma,f}^t (M_{\sigma,c})^{-1} C_{\Gamma,f} \right] J = \\ & C_{\Gamma,c}^t (M_{\sigma,c})^{-1} D_c^t V_c + C_{\Gamma,f}^t (M_{\sigma,f})^{-1} D_f^t V_c \end{aligned}$$

## Les espaces d'approximation

$$\underline{\underline{X}}_{h_I}^{sym} = \left\{ \tau_I^h \in \underline{\underline{X}}_I^{sym} : \tau_I^h|_C \in [Q_1(C)]^{2 \times 2} \right\},$$

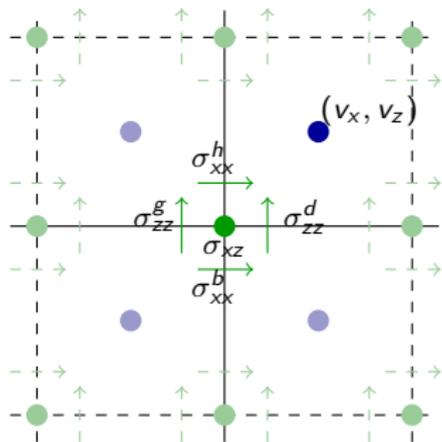


$M_{\sigma, I}$  est diagonale par blocs

## Les espaces d'approximation

$$\underline{\underline{X}}_{h_I}^{sym} = \left\{ \tau_I^h \in \underline{\underline{X}}_I^{sym} : \tau_I^h|_C \in [Q_1(C)]^{2 \times 2} \right\},$$

$$\underline{M}_{h_I} = \left\{ w_I^h \in \underline{M}_I : w_I^h|_C \in [Q_0(C)]^2 \right\}, \quad [\text{Tsogka}]$$



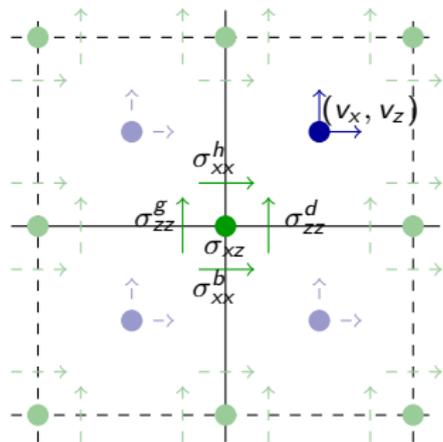
$M_{\sigma, I}$  est diagonale par blocs

$M_{v, I}$  est diagonale

## Les espaces d'approximation

$$\underline{X}_{h_I}^{sym} = \left\{ \tau_I^h \in \underline{X}_I^{sym} : \tau_I^h|_C \in [Q_1(C)]^{2 \times 2} \right\},$$

$$\underline{M}_{h_I} = \left\{ w_I^h \in \underline{M}_I : w_I^h|_C \in [\mathcal{P}_1(C)]^2 \right\},$$

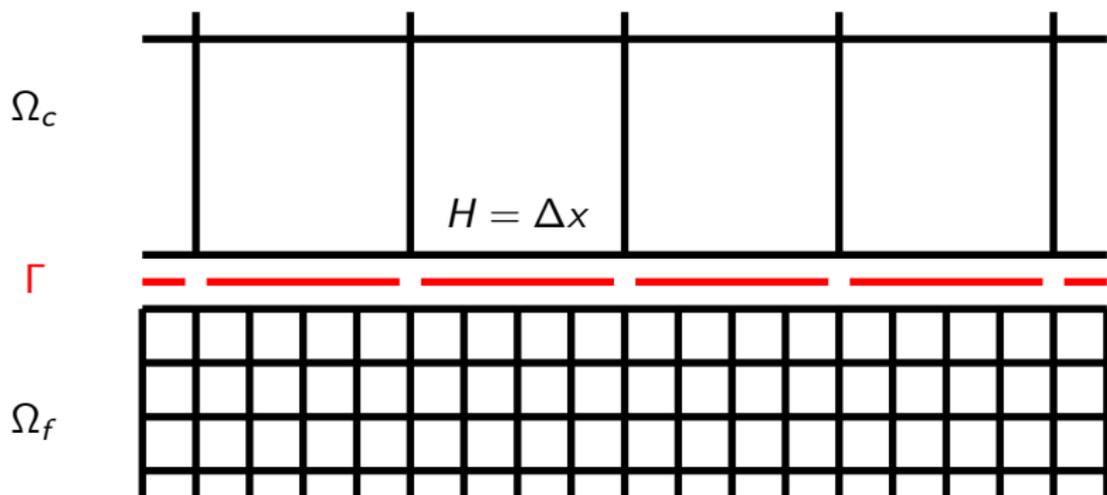


$M_{\sigma, I}$  est diagonale par blocs

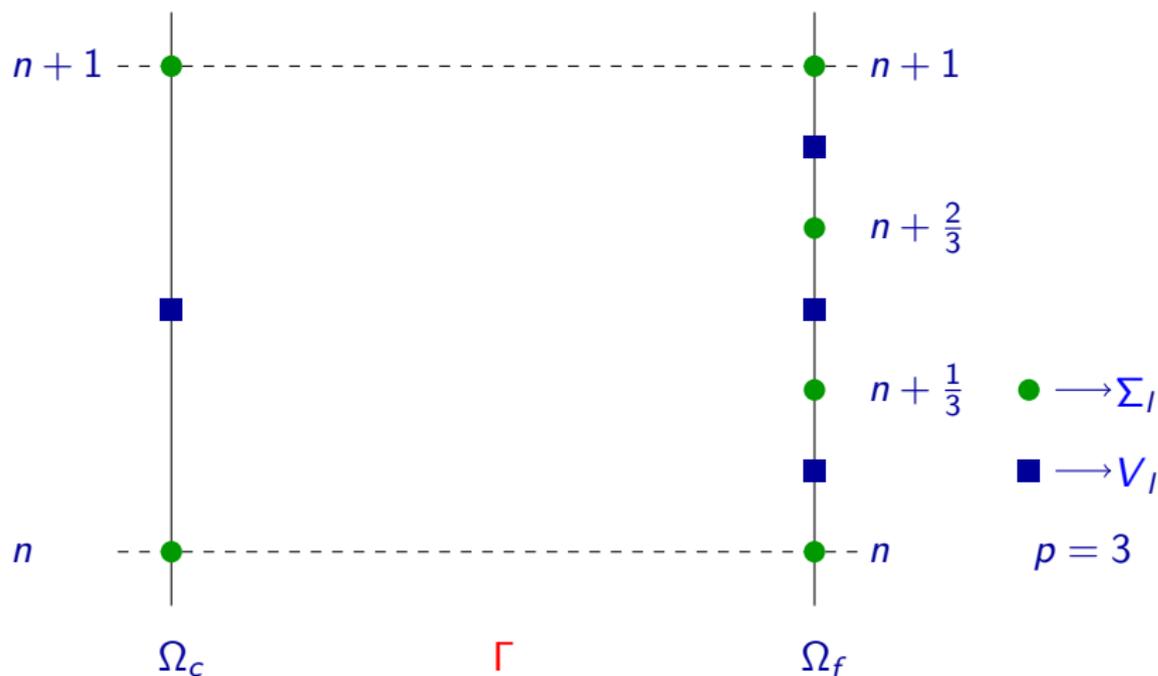
$M_{v, I}$  est diagonale

## Les espaces d'approximation

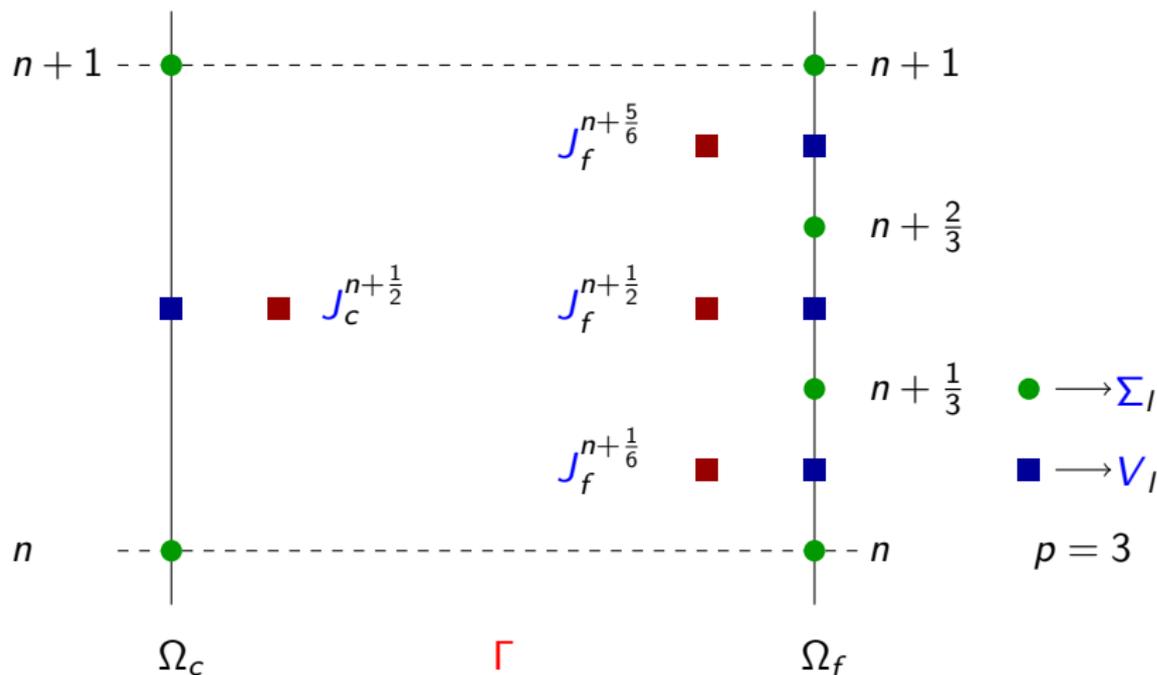
$$\underline{\mathcal{J}}_H = \left\{ \mu^H \in \underline{L}^2(\Gamma) : \mu|_S \in [\mathcal{P}_0(S)]^2 \right\} \not\subset \underline{\mathcal{J}}$$



## Discrétisation en temps



# Discrétisation en temps



## Discrétisation en temps

$$\left. \begin{aligned} M_{V,c} \frac{V_c^{n+\frac{1}{2}} - V_c^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - D_c \Sigma_c^n &= F_c^n, \\ M_{\sigma,c} \frac{\Sigma_c^{n+1} - \Sigma_c^n}{\Delta t} + D_c^t V_c^{n+\frac{1}{2}} &= C_{\Gamma,c} J_c^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right|, \text{ dans } \Omega_c$$

$$\left. \begin{aligned} M_{V,f} \frac{V_f^{n+\frac{2k+1}{2p}} - V_f^{n+\frac{2k-1}{2p}}}{\Delta t/p} - D_f \Sigma_f^{n+\frac{k}{p}} &= F_f^{n+\frac{k}{p}}, \\ M_{\sigma,f} \frac{\Sigma_f^{n+\frac{k+1}{p}} - \Sigma_f^{n+\frac{k}{p}}}{\Delta t/p} + D_f^t V_f^{n+\frac{2k+1}{2p}} &= C_{\Gamma,f} J_f^{n+\frac{2k+1}{2p}}, \end{aligned} \right|, \text{ dans } \Omega_f$$

## Discrétisation en temps

$$\left. \begin{aligned} M_{V,c} \frac{V_c^{n+\frac{1}{2}} - V_c^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - D_c \Sigma_c^n &= F_c^n, \\ M_{\sigma,c} \frac{\Sigma_c^{n+1} - \Sigma_c^n}{\Delta t} + D_c^t V_c^{n+\frac{1}{2}} &= C_{\Gamma,c} J_c^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right|, \text{ dans } \Omega_c$$

$$\left. \begin{aligned} M_{V,f} \frac{V_f^{n+\frac{2k+1}{2p}} - V_f^{n+\frac{2k-1}{2p}}}{\Delta t/p} - D_f \Sigma_f^{n+\frac{k}{p}} &= F_f^{n+\frac{k}{p}}, \\ M_{\sigma,f} \frac{\Sigma_f^{n+\frac{k+1}{p}} - \Sigma_f^{n+\frac{k}{p}}}{\Delta t/p} + D_f^t V_f^{n+\frac{2k+1}{2p}} &= C_{\Gamma,f} J_f^{n+\frac{2k+1}{2p}}, \end{aligned} \right|, \text{ dans } \Omega_f$$

- Relation entre  $J_c^{n+\frac{1}{2}}$  et  $J_f^{n+\frac{2k+1}{2p}}$  ? (Approx. de  $J_c(t) = J_f(t)$ ).
- Comment peut-on discrétiser  $C_{\Gamma,c}^t \Sigma_c(t) = -C_{\Gamma,f}^t \Sigma_f(t)$  ?

## Conservation d'une énergie

$$\begin{aligned}E_c^n &= \frac{1}{2}(M_{\sigma,c} \Sigma_c^n, \Sigma_c^n) + \frac{1}{2}(M_{v,c} V_c^{n+\frac{1}{2}}, V_c^{n-\frac{1}{2}}) \\E_f^{\frac{n}{p}} &= \frac{1}{2}(M_{\sigma,f} \Sigma_f^{\frac{n}{p}}, \Sigma_f^{\frac{n}{p}}) + \frac{1}{2}(M_{v,f} V_f^{\frac{2n+1}{2p}}, V_f^{\frac{2n-1}{2p}}) \\E^n &= E_c^n + E_f^n \simeq \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \sigma : \sigma + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |v|^2\end{aligned}$$

## Conservation d'une énergie

$$\begin{aligned}
 E_c^n &= \frac{1}{2}(M_{\sigma,c} \Sigma_c^n, \Sigma_c^n) + \frac{1}{2}(M_{v,c} V_c^{n+\frac{1}{2}}, V_c^{n-\frac{1}{2}}) \\
 E_f^n &= \frac{1}{2}(M_{\sigma,f} \Sigma_f^n, \Sigma_f^n) + \frac{1}{2}(M_{v,f} V_f^{\frac{2n+1}{2p}}, V_f^{\frac{2n-1}{2p}}) \\
 E^n &= E_c^n + E_f^n \simeq \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \sigma : \sigma + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |v|^2
 \end{aligned}$$

**Conservation de l'énergie**

Si CFL satisfaite

**Stabilité**



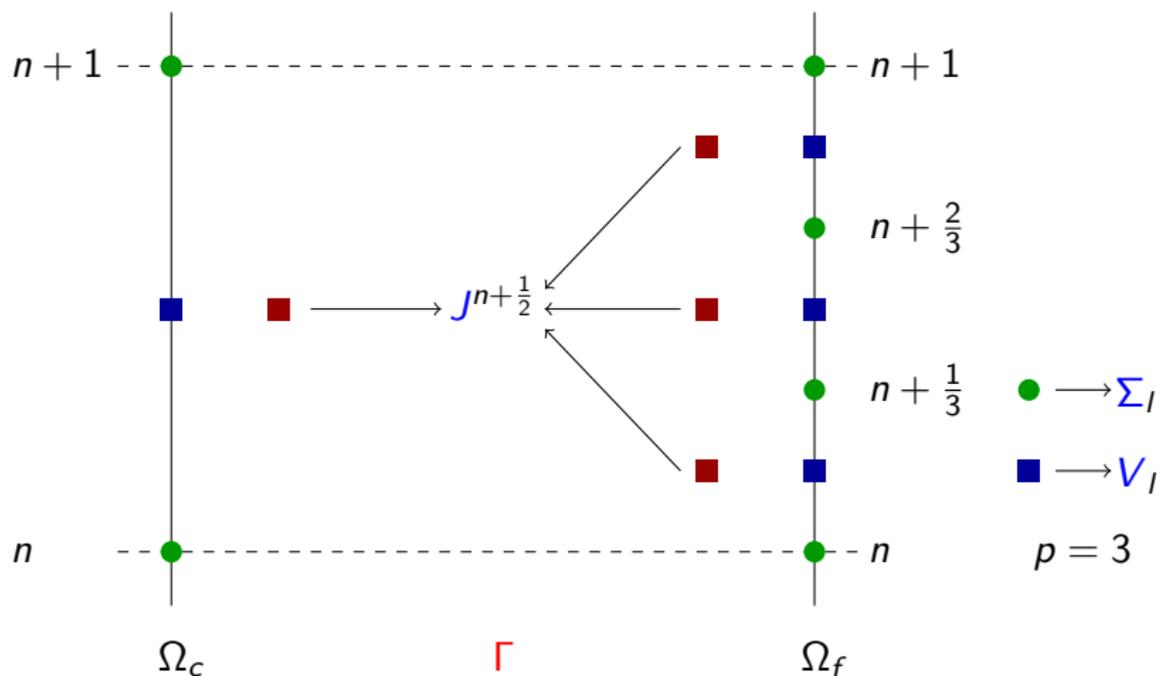
$$C_{\Gamma,c}^t \frac{\Sigma_c^{n+1} + \Sigma_c^n}{2} J_c^{n+\frac{1}{2}} = - \sum_{l=0}^{p-1} C_{\Gamma,f}^t \frac{\Sigma_f^{n+\frac{l+1}{p}} + \Sigma_f^{n+\frac{l}{p}}}{2p} J_f^{n+\frac{2l+1}{2p}}$$

## Conservation d'une énergie

$$\begin{aligned}E_c^n &= \frac{1}{2}(M_{\sigma,c} \Sigma_c^n, \Sigma_c^n) + \frac{1}{2}(M_{v,c} V_c^{n+\frac{1}{2}}, V_c^{n-\frac{1}{2}}) \\E_f^{\frac{n}{p}} &= \frac{1}{2}(M_{\sigma,f} \Sigma_f^{\frac{n}{p}}, \Sigma_f^{\frac{n}{p}}) + \frac{1}{2}(M_{v,f} V_f^{\frac{2n+1}{2p}}, V_f^{\frac{2n-1}{2p}}) \\E^n &= E_c^n + E_f^n \simeq \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \sigma : \sigma + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |v|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_c^{n+\frac{1}{2}} &= J^{n+\frac{1}{2}}, \\J_f^{n+\frac{2k+1}{2p}} &= J^{n+\frac{1}{2}}, \quad k \in \{0, \dots, p-1\}, \\C_{\Gamma,c}^t \frac{\Sigma_c^{n+1} + \Sigma_c^n}{2} &= - \sum_{l=0}^{p-1} C_{\Gamma,f}^t \frac{\Sigma_f^{n+\frac{l+1}{p}} + \Sigma_f^{n+\frac{l}{p}}}{2p}\end{aligned}$$

# Interaction entre les multiplicateurs de Lagrange



## Le schéma numérique

$$\left. \begin{aligned} M_{V,c} \frac{V_c^{n+\frac{1}{2}} - V_c^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - D_c \Sigma_c^n &= F_c^n, \\ M_{\sigma,c} \frac{\Sigma_c^{n+1} - \Sigma_c^n}{\Delta t} + D_c^t V_c^{n+\frac{1}{2}} &= C_{\Gamma,c} J^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right|, \text{ dans } \Omega_c$$

$$\left. \begin{aligned} M_{Vf} \frac{V_f^{n+\frac{2k+1}{2p}} - V_f^{n+\frac{2k-1}{2p}}}{\Delta t/p} - D_f \Sigma_f^{n+\frac{k}{p}} &= F_f^{n+\frac{k}{p}}, \\ M_{\sigma,f} \frac{\Sigma_f^{n+\frac{k+1}{p}} - \Sigma_f^{n+\frac{k}{p}}}{\Delta t/p} + D_f^t V_f^{n+\frac{2k+1}{2p}} &= C_{\Gamma,f} J^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right|, \text{ dans } \Omega_f$$

$$C_{\Gamma,c}^t \frac{\Sigma_c^{n+1} + \Sigma_c^n}{2} = - \sum_{l=0}^{p-1} C_{\Gamma,f}^t \frac{\Sigma_f^{n+\frac{l+1}{p}} + \Sigma_f^{n+\frac{l}{p}}}{2p}$$

## Le schéma numérique

$$\left. \begin{aligned} M_{V,c} \frac{V_c^{n+\frac{1}{2}} - V_c^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - D_c \Sigma_c^n &= F_c^n, \\ M_{\sigma,c} \frac{\Sigma_c^{n+1} - \Sigma_c^n}{\Delta t} + D_c^t V_c^{n+\frac{1}{2}} &= C_{\Gamma,c} J^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right|, \text{ dans } \Omega_c$$

$$\left. \begin{aligned} M_{Vf} \frac{V_f^{n+\frac{2k+1}{2p}} - V_f^{n+\frac{2k-1}{2p}}}{\Delta t/p} - D_f \Sigma_f^{n+\frac{k}{p}} &= F_f^{n+\frac{k}{p}}, \\ M_{\sigma,f} \frac{\Sigma_f^{n+\frac{k+1}{p}} - \Sigma_f^{n+\frac{k}{p}}}{\Delta t/p} + D_f^t V_f^{n+\frac{2k+1}{2p}} &= C_{\Gamma,f} J^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right|, \text{ dans } \Omega_f$$

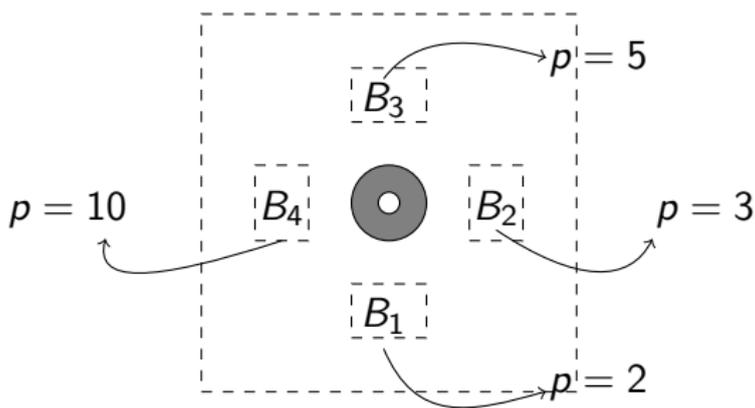
$$\left[ C_{\Gamma,c}^t (M_{\sigma,c})^{-1} C_{\Gamma,c} + C_{\Gamma,f}^t \mathcal{A}_f(\Delta t_f) C_{\Gamma,f} \right] J^{n+\frac{1}{2}} =$$

$$\mathcal{L}(\Sigma_c^n, V_c^{n+\frac{1}{2}}, \Sigma_f^n, V_f^{n+\frac{1}{2p}}, F)$$

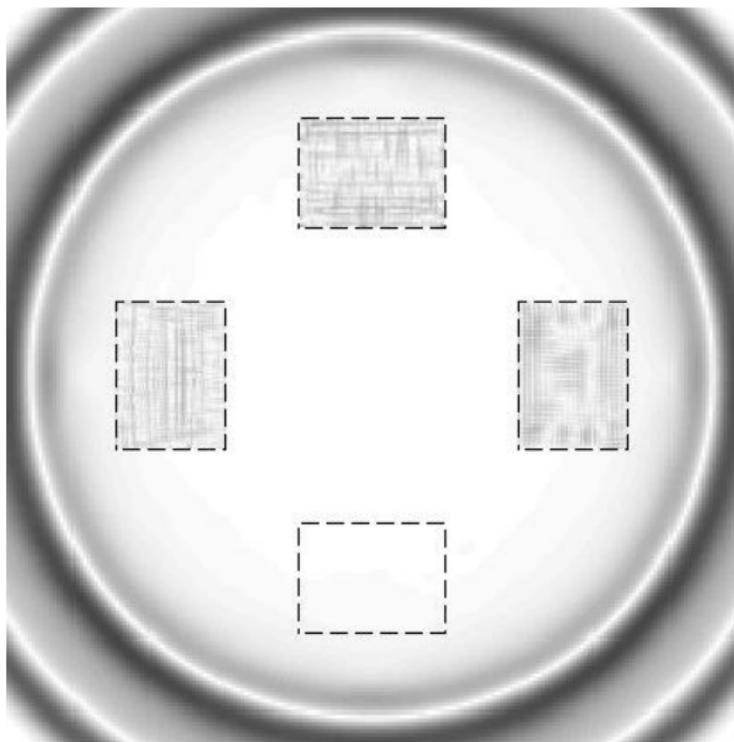
► Détails

## Expériences numériques

- Milieu homogène isotrope:  $\rho = 1$ ,  $\mu = 2.04$ ,  $\lambda = 3.45$ .
- Domaine de calcul:  $\Omega = [0, 10] \times [0, 10]$ .
- $\Delta x = 1/15$ .  $\alpha = \Delta t / \Delta x = 0.95 CFL_{opt}$ .
- Condition initiale de rayon 1.5.



## Expériences numériques



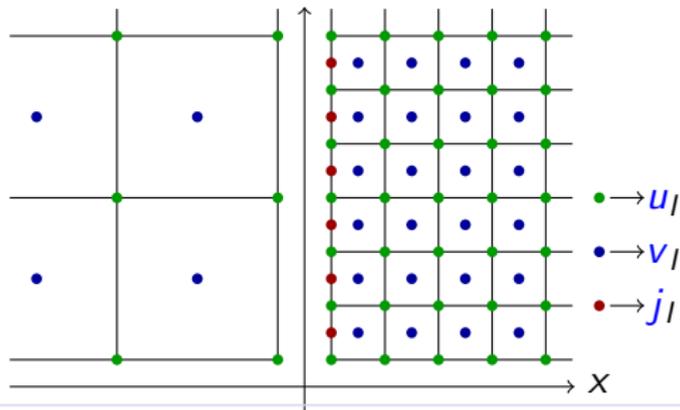
# Le modèle simplifié 1D

Grille **grossière** ( $x < 0$ ).

Grille **fine** ( $x > 0$ ).

$$\left| \begin{array}{l} A \frac{\partial u_c}{\partial t} - \frac{\partial v_c}{\partial x} = 0 \\ \rho \frac{\partial v_c}{\partial t} - \frac{\partial u_c}{\partial x} = 0 \\ v_c(0, t) = j_c(t) \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} A \frac{\partial u_f}{\partial t} - \frac{\partial v_f}{\partial x} = 0 \\ \rho \frac{\partial v_f}{\partial t} - \frac{\partial u_f}{\partial x} = 0 \\ v_f(0, t) = j_f(t) \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} u_c(0, t) = u_f(0, t) \\ j_c(t) = j_f(t) \\ A = I, \quad \rho = 1 \end{array} \right|$$



## Le modèle simplifié 1D

Dans la grille **grossière**:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{(v_c)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v_c)_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \frac{(u_c)_{j+1}^n - (u_c)_j^n}{\Delta x} = 0, \quad j < 0, \\ \frac{(u_c)_j^{n+1} - (u_c)_j^n}{\Delta t} + \frac{(v_c)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v_c)_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0, \quad j < 0. \end{array} \right.$$

Dans la grille **fine**:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{(v_f)_{\frac{2j+1}{2p}}^{\frac{2n+1}{2p}} - (v_f)_{\frac{2j+1}{2p}}^{\frac{2n-1}{2p}}}{\Delta t/p} + \frac{(u_f)_{\frac{j+1}{p}}^{\frac{n}{p}} - (u_f)_{\frac{j}{p}}^{\frac{n}{p}}}{\Delta x/p} = 0, \quad j \geq 0, \\ \frac{(u_f)_{\frac{j}{p}}^{\frac{n+1}{p}} - (u_f)_{\frac{j}{p}}^{\frac{n}{p}}}{\Delta t/p} + \frac{(v_f)_{\frac{2j+1}{2p}}^{\frac{2n+1}{2p}} - (v_f)_{\frac{2j-1}{2p}}^{\frac{2n+1}{2p}}}{\Delta t/p} = 0, \quad j > 0. \end{array} \right.$$

## Le modèle simplifié 1D

Les équations de **couplage**

$$\left| \begin{aligned} (v_c)_{-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} [(u_c)_0^{n+1} - (u_c)_0^n] &= j^{n+\frac{1}{2}}, \\ (v_f)_{\frac{1}{2p}}^{n+\frac{2k+1}{2p}} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} [(u_f)_0^{n+\frac{k+1}{p}} - (u_f)_0^{n+\frac{k}{p}}] &= j^{n+\frac{1}{2}}, \\ \frac{(u_c)_0^{n+1} + (u_c)_0^n}{2} &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(u_f)_0^{n+\frac{k+1}{p}} + (u_f)_0^{n+\frac{k}{p}}}{2p}. \end{aligned} \right.$$

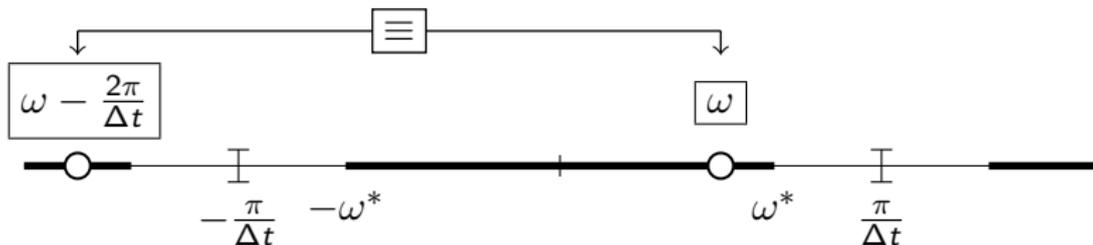
# Analyse par ondes planes sur une grille uniforme

Ondes planes harmoniques

$$u_j^n = U e^{i(kx_j - \omega t^n)}, \quad v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = V e^{i(kx_{j+\frac{1}{2}} - \omega t^{n+\frac{1}{2}})}$$

$$\sin^2\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = \alpha^2 \sin^2\left(\frac{k \Delta x}{2}\right) \quad \alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Relation de dispersion



## Analyse par ondes planes sur une grille uniforme

Soit  $\omega^* = \frac{2}{\Delta t} \arcsin(\alpha)$ , alors

- si  $\omega \in [-\omega^*, \omega^*] + \frac{2\pi}{\Delta t} \mathbb{Z}$ :

$$k^\pm(\omega) = \pm \frac{2}{\Delta x} \arcsin \left( \alpha^{-1} \sin \left( \frac{\omega \Delta t}{2} \right) \right), \quad U = \pm V,$$

l'onde est **propagative**.

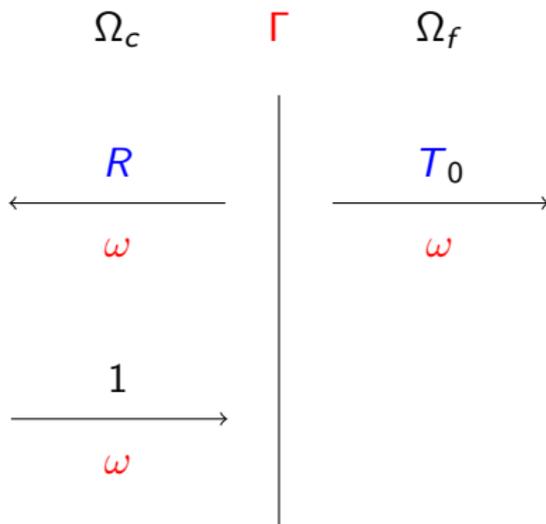
- si  $\omega \notin [-\omega^*, \omega^*] + \frac{2\pi}{\Delta t} \mathbb{Z}$ :

$$k^\pm(\omega) = \pm \frac{\pi}{\Delta x} \text{sign}(\omega) \pm \frac{2i}{\Delta x} \text{argch} \left( \alpha^{-1} \sin \left( \frac{\omega \Delta t}{2} \right) \right), \quad U = \pm V,$$

l'onde est **évanescence**.

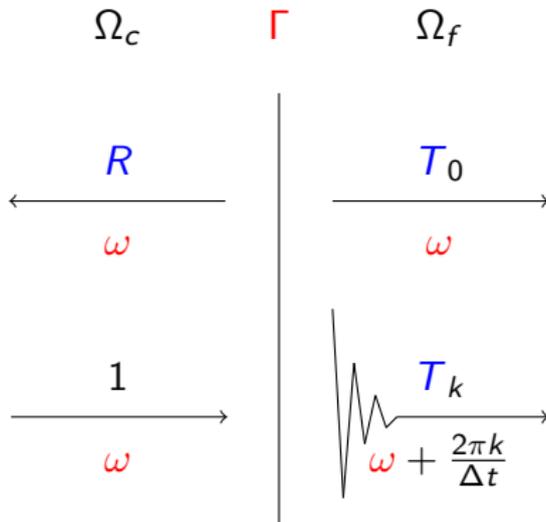
# Analyse par ondes planes sur deux grilles

Un problème de propagation d'ondes sur un milieu **bi-couche**



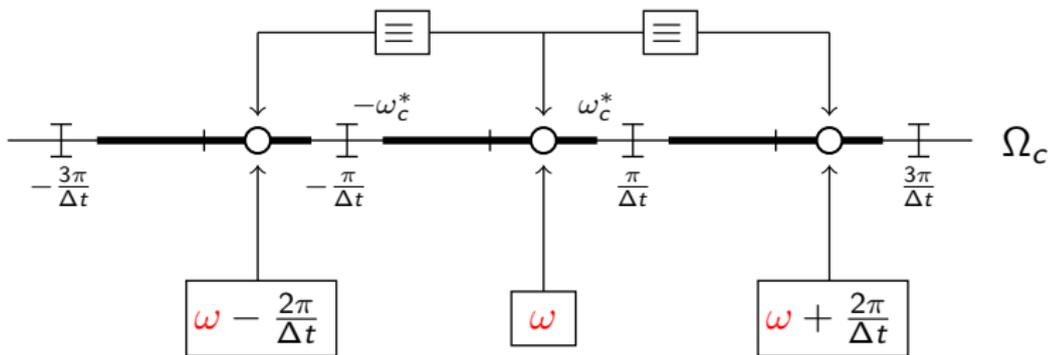
# Analyse par ondes planes sur deux grilles

Un problème de propagation d'ondes sur un milieu **bi-couche**

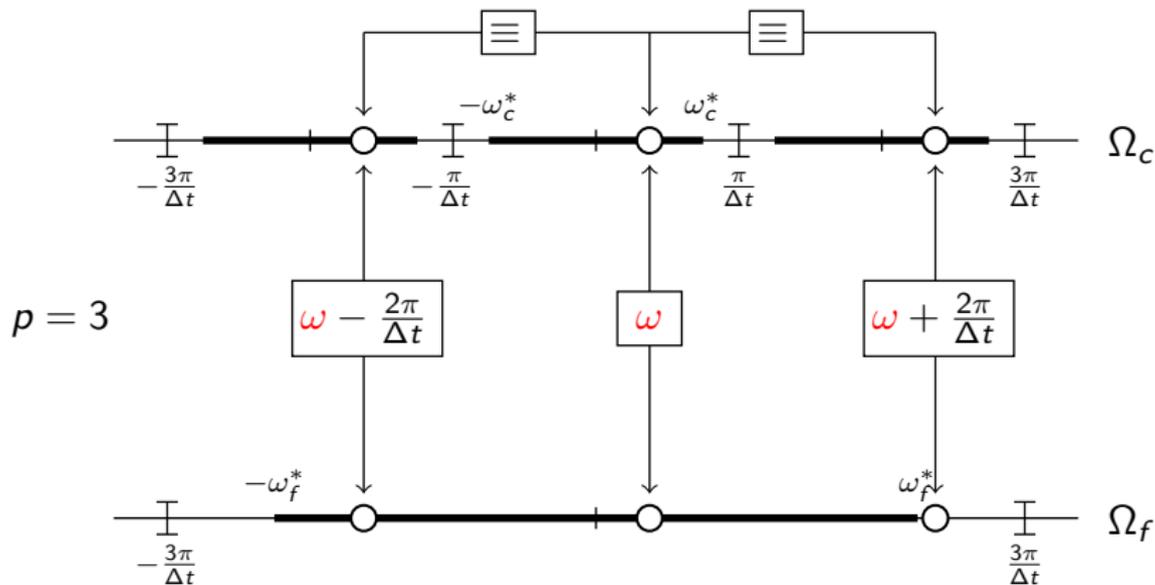


Dans la grille **fine** il faut considérer **plus** de fréquences...

## Analyse par ondes planes sur deux grilles



## Analyse par ondes planes sur deux grilles



## Analyse par ondes planes sur deux grilles

- Dans la grille grossière

$$\begin{aligned}(u_c)_j^n &= e^{i(k_c^+(\omega)x_j - \omega t^n)} + R e^{i(k_c^-(\omega)x_j - \omega t^n)}, \\ (v_c)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= e^{i(k_c^+(\omega)x_{j+\frac{1}{2}} - \omega t^{n+\frac{1}{2}})} - R e^{i(k_c^-(\omega)x_{j+\frac{1}{2}} - \omega t^{n+\frac{1}{2}})}.\end{aligned}$$

- Dans la grille fine

$$\begin{aligned}(u_f)_{\frac{j}{p}}^{\frac{n}{p}} &= \sum_{k=0}^{p-1} T_k e^{i(k_f^+(\omega + \frac{2\pi k}{\Delta t})x_{\frac{j}{p}} - (\omega + \frac{2\pi k}{\Delta t})t^{\frac{n}{p}})}, \\ (v_f)_{\frac{2j+1}{2p}}^{\frac{2n+1}{2p}} &= \sum_{k=0}^{p-1} T_k e^{i(k_f^+(\omega + \frac{2\pi k}{\Delta t})x_{\frac{2j+1}{2p}} - (\omega + \frac{2\pi k}{\Delta t})t^{\frac{2n+1}{2p}})}.\end{aligned}$$

Les  $p + 1$  amplitudes sont les inconnues.

## Analyse par ondes planes sur deux grilles

- On calcule  $R$ ,  $T_k$ ,  $k \in \{0, \dots, p-1\}$  avec les équations de **transmission**.

## Analyse par ondes planes sur deux grilles

- On calcule  $R$ ,  $T_k$ ,  $k \in \{0, \dots, p-1\}$  avec les équations de **transmission**.
- Pour la convergence:

## Analyse par ondes planes sur deux grilles

- On calcule  $R$ ,  $T_k$ ,  $k \in \{0, \dots, p-1\}$  avec les équations de **transmission**.
- Pour la convergence:
  - $R \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$ ,  $T_0 \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 1$ ,  $T_k \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$ ,  $k \in \{1, \dots, p-1\}$ .

## Analyse par ondes planes sur deux grilles

- On calcule  $R$ ,  $T_k$ ,  $k \in \{0, \dots, p-1\}$  avec les équations de **transmission**.
- Pour la convergence:
  - $R \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$ ,  $T_0 \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 1$ ,  $T_k \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$ ,  $k \in \{1, \dots, p-1\}$ .
  - La **nature** des ondes pour  $\omega \Delta t$  petit

## Analyse par ondes planes sur deux grilles

- On calcule  $R$ ,  $T_k$ ,  $k \in \{0, \dots, p-1\}$  avec les équations de **transmission**.
- Pour la convergence:
  - $R \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$ ,  $T_0 \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 1$ ,  $T_k \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$ ,  $k \in \{1, \dots, p-1\}$ .
  - La **nature** des ondes pour  $\omega \Delta t$  petit
    - Les ondes transmises et réfléchies de fréquence  $\omega$  sont **propagatives**.

## Analyse par ondes planes sur deux grilles

- On calcule  $R$ ,  $T_k$ ,  $k \in \{0, \dots, p-1\}$  avec les équations de **transmission**.
- Pour la convergence:
  - $R \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$ ,  $T_0 \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 1$ ,  $T_k \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$ ,  $k \in \{1, \dots, p-1\}$ .
  - La **nature** des ondes pour  $\omega \Delta t$  petit
    - Les ondes transmises et réfléchies de fréquence  $\omega$  sont **propagatives**.
    - Les ondes **parasites** dépendent de  $\alpha$ . Si  $0 < \alpha < \sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \implies$  Toutes **évanescentes**.

## Les résultats pour $p = 2$

- Si  $0 < \alpha < 1$  (l'onde parasite est **évanescence**):

$$R(\omega \Delta t, \alpha) = \frac{1}{64} \left[ 1 - \frac{3}{\alpha^2} \right] (\omega \Delta t)^2 + \mathcal{O}(\omega \Delta t)^3,$$

$$T_0(\omega \Delta t, \alpha) = 1 - \frac{3}{64} \left[ 1 + \frac{1}{\alpha^2} \right] (\omega \Delta t)^2 + \mathcal{O}(\omega \Delta t)^3,$$

$$T_1(\omega \Delta t, \alpha) = \frac{i\alpha}{4\sqrt{1-\alpha^2}} (\omega \Delta t) + \mathcal{O}(\omega \Delta t)^3.$$

## Les résultats pour $p = 2$

- Si  $0 < \alpha < 1$  (l'onde parasite est **évanescence**):

$$R(\omega\Delta t, \alpha) = \frac{1}{64} \left[ 1 - \frac{3}{\alpha^2} \right] (\omega\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\omega\Delta t)^3,$$

$$T_0(\omega\Delta t, \alpha) = 1 - \frac{3}{64} \left[ 1 + \frac{1}{\alpha^2} \right] (\omega\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\omega\Delta t)^3,$$

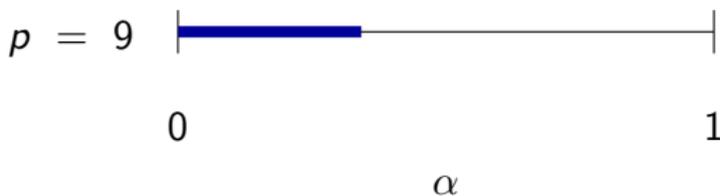
$$T_1(\omega\Delta t, \alpha) = \frac{i\alpha}{4\sqrt{1-\alpha^2}} (\omega\Delta t) + \mathcal{O}(\omega\Delta t)^3.$$

- Si  $\alpha = 1$  (l'onde parasite est **propagative**):

$$R(\omega\Delta t, 1) = 0, \quad T_0(\omega\Delta t, 1) = \cos(\omega\Delta t) = -T_1(\omega\Delta t, 1).$$

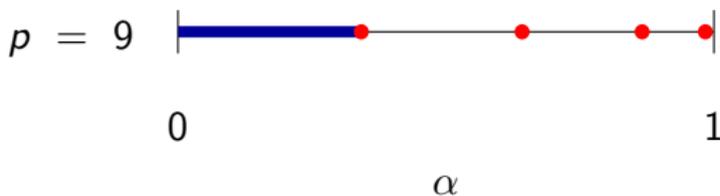
## Les résultats dans le cas général

- Si  $\alpha < \sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \implies \mathcal{O}(\Delta t)^{\frac{3}{2}}$ .



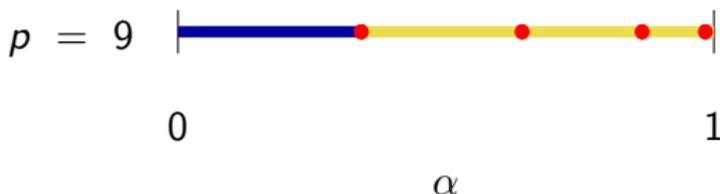
## Les résultats dans le cas général

- Si  $\alpha < \sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \implies \mathcal{O}(\Delta t)^{\frac{3}{2}}$ .
- Si  $0 \neq \alpha = \sin\left(\frac{\pi k}{p}\right), k \in \mathbb{N} \implies \mathcal{O}(\Delta t)^{\frac{1}{2}}$ .



## Les résultats dans le cas général

- Si  $\alpha < \sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \implies \mathcal{O}(\Delta t)^{\frac{3}{2}}$ .
- Si  $0 \neq \alpha = \sin\left(\frac{\pi k}{p}\right)$ ,  $k \in \mathbb{N} \implies \mathcal{O}(\Delta t)^{\frac{1}{2}}$ .
- Sinon  $\implies \mathcal{O}(\Delta t)$ . [▶ Détails](#)



# Une présentation technique

## Raffinement de maillage spatio-temporel conservatif

Présentation de la méthode

Expériences numériques: Phénomènes parasites

Analyse de Fourier 1D

## Une nouvelle technique de raffinement spatio-temporel

Post-traitement en temps

Expériences numériques avec la nouvelle méthode

Un nouveau schéma

Analyse de Fourier 1D

## Une expérience numérique moins académique

## Post-traitement en temps pour $p = 2$

- L'onde parasite

$$(u_f^{par})_{\frac{j}{2}}^{\frac{n}{2}} = T_1(\omega \Delta t, \alpha) e^{i(k(\omega - \frac{2\pi}{\Delta t})x_{\frac{j}{2}} - (\omega - \frac{2\pi}{\Delta t})t^{\frac{n}{2}})}$$

## Post-traitement en temps pour $p = 2$

- L'onde **parasite**

$$(u_f^{par})_{\frac{j}{2}}^{\frac{n}{2}} = (-1)^n T_1(\omega \Delta t, \alpha) e^{i(k(\omega - \frac{2\pi}{\Delta t})x_{\frac{j}{2}} - \omega t^{\frac{n}{2}})}$$

Comportement hautement oscillatoire

## Post-traitement en temps pour $p = 2$

- L'onde **parasite**

$$(u_f^{par})_{j\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} = (-1)^n T_1(\omega \Delta t, \alpha) e^{i(k(\omega - \frac{2\pi}{\Delta t})x_{j\frac{n}{2}} - \omega t^{\frac{n}{2}})}$$

- La valeur moyenne entre deux pas de temps consécutifs:

$$(\tilde{u}_f^{par})_{j\frac{2n+1}{4}}^{\frac{2n+1}{4}} := \frac{(u_f^{par})_{j\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} + (u_f^{par})_{j\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}}{2}$$

## Post-traitement en temps pour $p = 2$

- L'onde parasite

$$(u_f^{par})_{j, \frac{n}{2}} = T_1(\omega \Delta t, \alpha) e^{i(k(\omega - \frac{2\pi}{\Delta t})x_{j, \frac{n}{2}} - (\omega - \frac{2\pi}{\Delta t})t^{\frac{n}{2}})}$$

- La valeur moyenne entre deux pas de temps consécutifs:

$$(\tilde{u}_f^{par})_{j, \frac{2n+1}{4}} = \boxed{T_1(\omega \Delta t, \alpha) \left[ -\frac{\omega \Delta t}{4} + \mathcal{O}(\omega \Delta t)^3 \right]} e^{i(k(\omega - \frac{2\pi}{\Delta t})x_{j, \frac{2n+1}{4}} - (\omega - \frac{2\pi}{\Delta t})t^{\frac{2n+1}{4}})}$$

## Post-traitement en temps pour $p = 2$



- L'onde parasite

$$(u_f^{par})_{j, \frac{n}{2}} = T_1(\omega \Delta t, \alpha) e^{i(k(\omega - \frac{2\pi}{\Delta t})x_{j, \frac{n}{2}} - (\omega - \frac{2\pi}{\Delta t})t_{\frac{n}{2}})}$$

- La valeur moyenne entre deux pas de temps consécutifs:

$$(\tilde{u}_f^{par})_{j, \frac{2n+1}{4}} = \boxed{T_1(\omega \Delta t, \alpha) \left[ -\frac{\omega \Delta t}{4} + \mathcal{O}(\omega \Delta t)^3 \right]} e^{i(k(\omega - \frac{2\pi}{\Delta t})x_{j, \frac{n}{2}} - (\omega - \frac{2\pi}{\Delta t})t_{\frac{2n+1}{4}})}$$

- Encore mieux:

$$(\bar{u}_f^{par})_{j, \frac{n}{2}} := \frac{(u_f^{par})_{j, \frac{n+1}{2}} + 2(u_f^{par})_{j, \frac{n}{2}} + (u_f^{par})_{j, \frac{n-1}{2}}}{4}$$

## Post-traitement en temps pour $p = 2$

- L'onde **parasite**

$$(u_f^{par})_{j\frac{n}{2}} = T_1(\omega\Delta t, \alpha) e^{i(k(\omega - \frac{2\pi}{\Delta t})x_{j\frac{n}{2}} - (\omega - \frac{2\pi}{\Delta t})t\frac{n}{2})}$$

- La valeur moyenne entre deux pas de temps consécutifs:

$$(\tilde{u}_f^{par})_{j\frac{2n+1}{2}} = \boxed{T_1(\omega\Delta t, \alpha) \left[ -\frac{\omega\Delta t}{4} + \mathcal{O}(\omega\Delta t)^3 \right]} e^{i(k(\omega - \frac{2\pi}{\Delta t})x_{j\frac{n}{2}} - (\omega - \frac{2\pi}{\Delta t})t\frac{2n+1}{4})}$$

- Encore mieux:

$$(\bar{u}_f^{par})_{j\frac{n}{2}} = \boxed{T_1(\omega\Delta t, \alpha) \left[ \frac{(\omega\Delta t)^2}{16} + \mathcal{O}(\omega\Delta t)^4 \right]} e^{i(k(\omega - \frac{2\pi}{\Delta t})x_{j\frac{n}{2}} - (\omega - \frac{2\pi}{\Delta t})t\frac{n}{2})}$$

## Post-traitement en temps pour le cas général

La dernière équation de couplage suggère

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma}_c^{n+\frac{1}{2}} &:= \frac{\Sigma_c^{n+1} + \Sigma_c^n}{2}, \\ \overline{V}_c^n &:= \frac{V_c^{n+\frac{1}{2}} + V_c^{n-\frac{1}{2}}}{2}, \end{aligned} \left| \right.$$

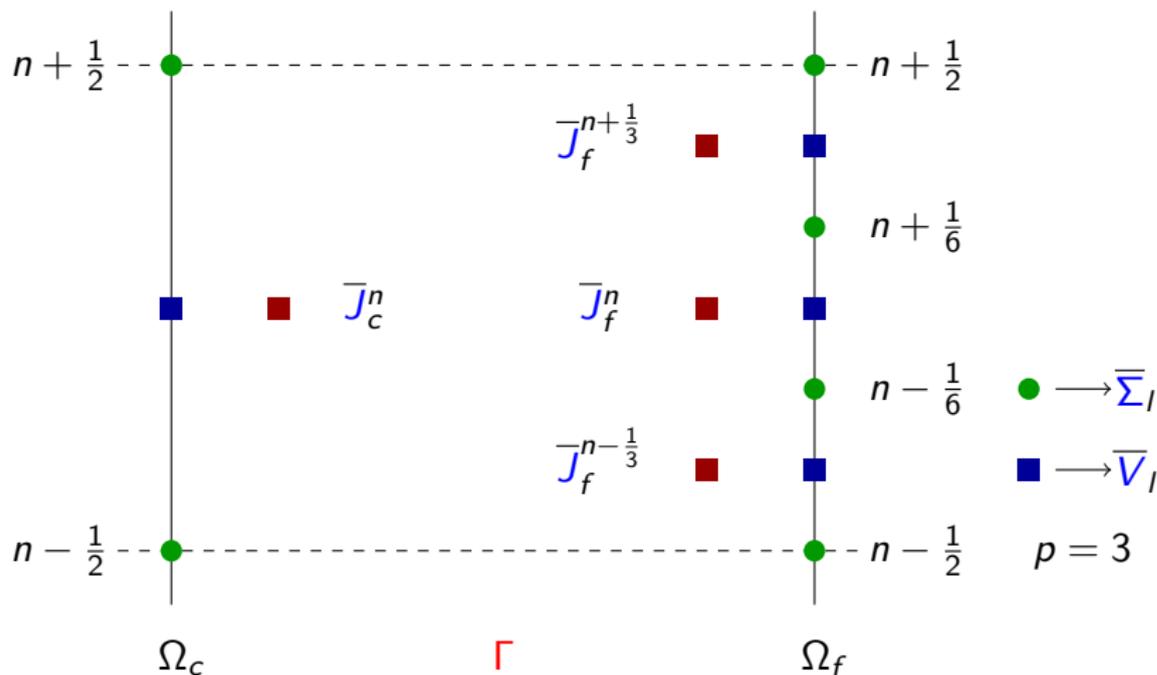
dans la grille grossière,

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma}_f^{\frac{n}{p}+\frac{1}{2}} &:= \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\Sigma_f^{\frac{n+l+1}{p}} + \Sigma_f^{\frac{n+l}{p}}}{2p}, \\ \overline{V}_f^{\frac{2n+1}{p}+\frac{1}{2}} &:= \sum_{l=0}^{p-1} \frac{V_f^{\frac{2n+2l+3}{2p}} + V_f^{\frac{2n+2l+1}{2p}}}{2p}, \end{aligned} \left| \right.$$

dans la grille fine,



# Le nouveau schéma



## Le nouveau schéma

$$\left. \begin{aligned} M_{v,c} \frac{\bar{V}_c^n - \bar{V}_c^{n-1}}{\Delta t} - D_c \bar{\Sigma}_c^{n-\frac{1}{2}} &= \bar{F}_c^{n-\frac{1}{2}}, \\ M_{\sigma,c} \frac{\bar{\Sigma}_c^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\Sigma}_c^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + D_c^t \bar{V}_c^n &= C_{\Gamma,c} \bar{J}_c^n, \end{aligned} \right|$$

$$\left. \begin{aligned} M_{v,f} \frac{\bar{V}_f^{n+\frac{2k+1}{2p}-\frac{1}{2}} - \bar{V}_f^{n+\frac{2k-1}{2p}-\frac{1}{2}}}{\Delta t/p} - D_f \bar{\Sigma}_f^{n+\frac{k}{p}-\frac{1}{2}} &= \bar{F}_f^{n+\frac{k}{p}-\frac{1}{2}}, \\ M_{\sigma,f} \frac{\bar{\Sigma}_f^{n+\frac{k+1}{p}-\frac{1}{2}} - \bar{\Sigma}_f^{n+\frac{k}{p}-\frac{1}{2}}}{\Delta t/p} + D_f^t \bar{V}_f^{n+\frac{2k+1}{2p}-\frac{1}{2}} &= C_{\Gamma,f} \bar{J}_f^{n+\frac{2k+1}{2p}-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right|$$

## Le nouveau schéma

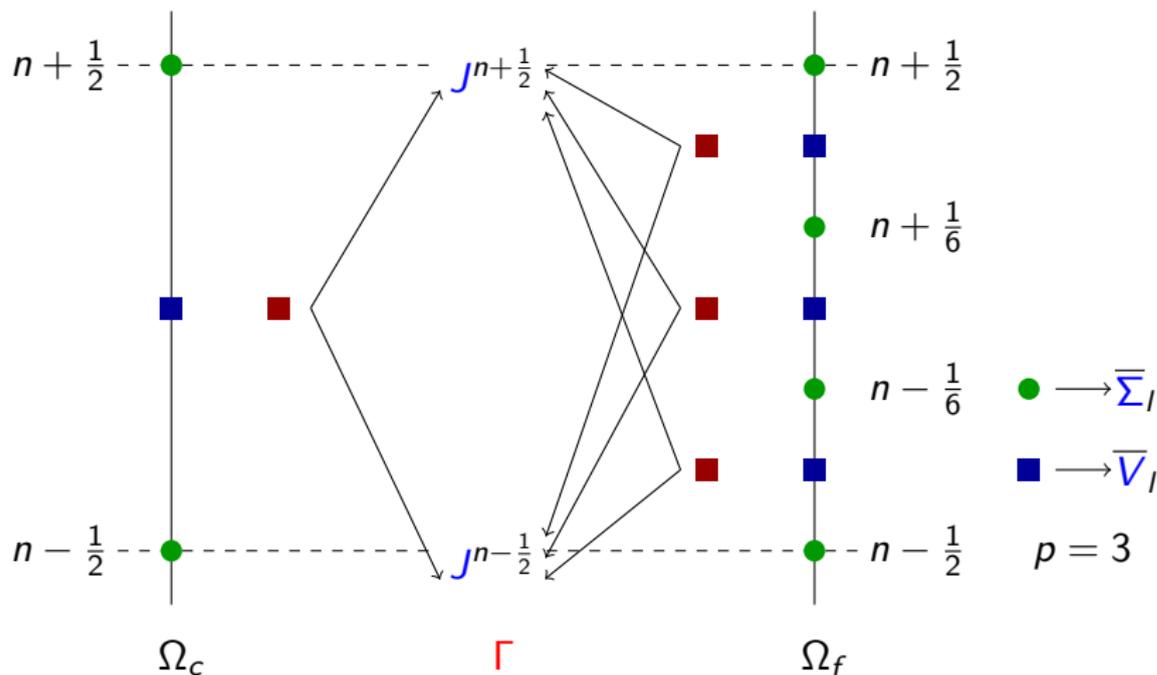
Toutes les équations de **transmission**

$$\begin{aligned}\bar{J}_c^n &= \frac{1}{2} J^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} J^{n-\frac{1}{2}}, \\ J_f^{n+\frac{2k+1}{2p}-\frac{1}{2}} &= \left[ 1 - \frac{2k+1}{2p} \right] J^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2k+1}{2p} J^{n+\frac{1}{2}}, \\ C_{\Gamma,c}^t \bar{\Sigma}_c^{n+\frac{1}{2}} &= -C_{\Gamma,f}^t \bar{\Sigma}_f^{n+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

sont **constantes** à l'ordre deux!

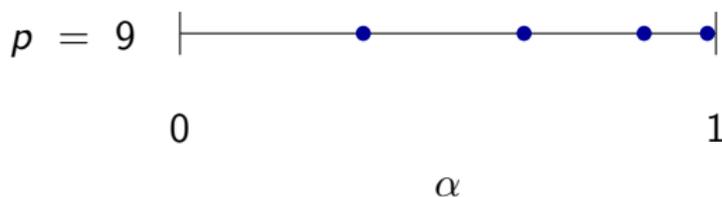


# Interaction entre les multiplicateurs de Lagrange ◀



## Les résultats dans le cas général

- Si  $0 \neq \alpha = \sin\left(\frac{\pi k}{p}\right)$ ,  $k \in \mathbb{N} \implies \mathcal{O}(\Delta t)^{\frac{3}{2}}$ .

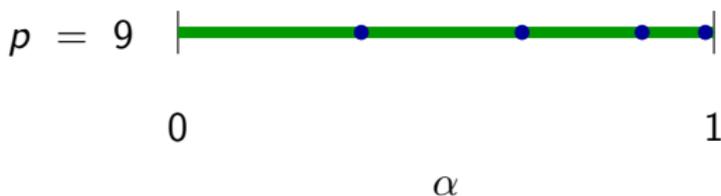


## Les résultats dans le cas général



- Si  $0 \neq \alpha = \sin\left(\frac{\pi k}{p}\right)$ ,  $k \in \mathbb{N} \implies \mathcal{O}(\Delta t)^{\frac{3}{2}}$ .
- Sinon  $\implies \mathcal{O}(\Delta t)^2$ .

▶ Détails



# Une présentation technique

## Raffinement de maillage spatio-temporel conservatif

- Présentation de la méthode

- Expériences numériques: Phénomènes parasites

- Analyse de Fourier 1D

## Une nouvelle technique de raffinement spatio-temporel

- Post-traitement en temps

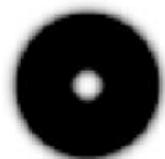
- Expériences numériques avec la nouvelle méthode

- Un nouveau schéma

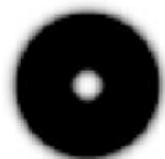
- Analyse de Fourier 1D

## Une expérience numérique moins académique

# Une expérience numérique moins académique



# Une expérience numérique moins académique





## Conclusions et ...

- Méthode de **raffinement** de maillage **spatio-temporel** performante et robuste bien adaptée au code ATHENA2D. Technique avec multiplicateur.

## Conclusions et ...

- Méthode de **raffinement** de maillage **spatio-temporel** performante et robuste bien adaptée au code ATHENA2D. Technique avec multiplicateur.
- Méthode de **couplage** des problèmes de propagation d'ondes capable de gérer des **maillages non-conformes** en **espace** et en **temps**. Technique sans multiplicateur [Diaz].

## Conclusions et ...

- Méthode de **raffinement** de maillage **spatio-temporel** performante et robuste bien adaptée au code ATHENA2D. Technique avec multiplicateur.
- Méthode de **couplage** des problèmes de propagation d'ondes capable de gérer des **maillages non-conformes** en **espace** et en **temps**. Technique sans multiplicateur [Diaz].
- **Nouvelles** analyses de **convergence**.

## Conclusions et ...

- Méthode de **raffinement** de maillage **spatio-temporel** performante et robuste bien adaptée au code ATHENA2D. Technique avec multiplicateur.
- Méthode de **couplage** des problèmes de propagation d'ondes capable de gérer des **maillages non-conformes** en **espace** et en **temps**. Technique sans multiplicateur [Diaz].
- **Nouvelles** analyses de **convergence**.
- Nouvel élément fini qui assure la **convergence** de la méthode des domaines fictifs. Analyse pour le cas scalaire.

## Conclusions et ...

- Méthode de **raffinement** de maillage **spatio-temporel** performante et robuste bien adaptée au code ATHENA2D. Technique avec multiplicateur.
- Méthode de **couplage** des problèmes de propagation d'ondes capable de gérer des **maillages non-conformes** en **espace** et en **temps**. Technique sans multiplicateur [Diaz].
- **Nouvelles** analyses de **convergence**.
- Nouvel élément fini qui assure la **convergence** de la méthode des domaines fictifs. Analyse pour le cas scalaire.
- Deux méthodes de **couplage** entre **domaines fictifs** et les techniques de **raffinement** spatio-temporel.

## ... perspectives

- **Implémentation:**

- Essayer des **autres choix** de multiplicateur de Lagrange.
- Coder la méthode sans multiplicateur.
- Implémentation **3-D**.

## ... perspectives

- **Implémentation:**

- Essayer des **autres choix** de multiplicateur de Lagrange.
- Coder la méthode sans multiplicateur.
- Implémentation **3-D**.

- **Développement des méthodes:**

- Construction des méthodes de raffinement plus **précises**.
- Développement des méthodes de raffinement **multi-conservatives**.

## ... perspectives

### ● Implémentation:

- Essayer des **autres choix** de multiplicateur de Lagrange.
- Coder la méthode sans multiplicateur.
- Implémentation **3-D**.

### ● Développement des méthodes:

- Construction des méthodes de raffinement plus **précises**.
- Développement des méthodes de raffinement **multi-conservatives**.

### ● Analyse mathématique:

- Pousser plus loin l'analyse de **convergence** des méthodes de raffinement spatio-temporel avec des **techniques énergétiques**.
- Effectuer l'analyse de **convergence** de la méthode des domaines fictifs pour l'**élastodynamique**.
- Comprendre le **défait** de **convergence** de la méthode des domaines fictifs avec l'élément  $Q_1^{div} \times Q_0$ .



# Resumé

La matrice  $\mathcal{A}_f(\Delta t_f)$

Analyse par Fourier de la méthode conservative

Analyse par Fourier de la méthode post-traitée

# Une présentation technique

La matrice  $\mathcal{A}_f(\Delta t_f)$

Analyse par Fourier de la méthode conservative

Analyse par Fourier de la méthode post-traitée

## La matrice $\mathcal{A}_f(\Delta t_f)$

Supposons que les matrices

$$N_l(\Delta t_l) := M_{\sigma,l} - \frac{\Delta t_l^2}{4} D_l^t (M_{v,l})^{-1} D_l, \quad l \in \{c, f\},$$

sont **définies positives** (condition **CFL** habituelle sur chaque domaine).

## La matrice $\mathcal{A}_f(\Delta t_f)$

- Si  $p > 2$  et impair

$$\frac{4^{p-1}}{p^2} \left\{ \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[ (M_{\sigma,f})^{-1} \left( N_f(\Delta t_f) - \cos^2 \left( \frac{\pi k}{p} \right) M_{\sigma,f} \right) \right]^2 \right\} (M_{\sigma,f})^{-1}$$

## La matrice $\mathcal{A}_f(\Delta t_f)$ ◀

- Si  $p > 2$  et impair

$$\frac{4^{p-1}}{p^2} \left\{ \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[ (M_{\sigma,f})^{-1} \left( N_f(\Delta t_f) - \cos^2 \left( \frac{\pi k}{p} \right) M_{\sigma,f} \right) \right]^2 \right\} (M_{\sigma,f})^{-1}$$

- Si  $p > 2$  et pair

$$\frac{4^{p-1}}{p^2} \left\{ [(M_{\sigma,f})^{-1} N_f(\Delta t_f)] \prod_{k=1}^{\frac{p}{2}-1} \left[ (M_{\sigma,f})^{-1} \left( N_f(\Delta t_f) - \cos^2 \left( \frac{\pi k}{p} \right) M_{\sigma,f} \right) \right]^2 \right\} (M_{\sigma,f})^{-1}$$

# Une présentation technique

La matrice  $\mathcal{A}_f(\Delta t_f)$

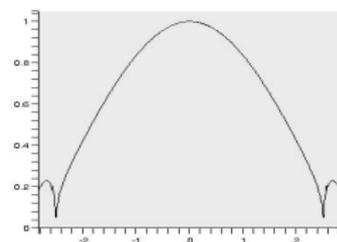
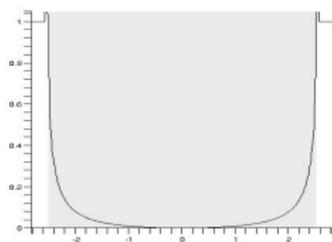
Analyse par Fourier de la méthode conservative

Analyse par Fourier de la méthode post-traitée

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9500,$$

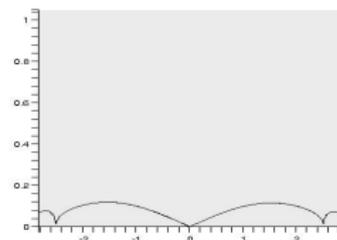
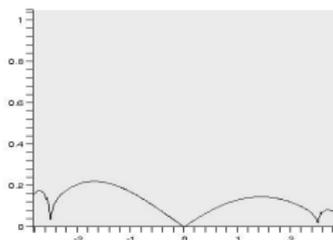
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

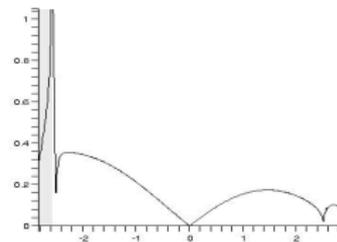
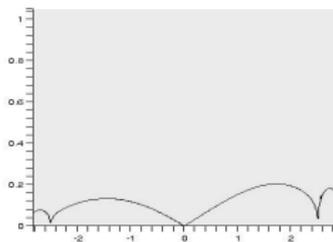


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



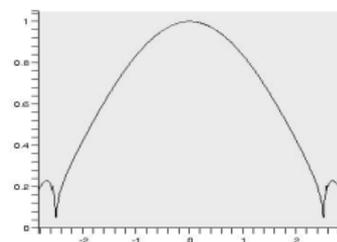
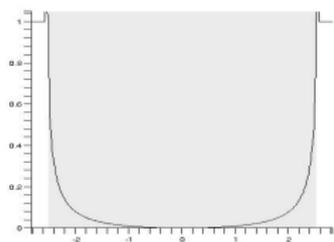
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9500,$$

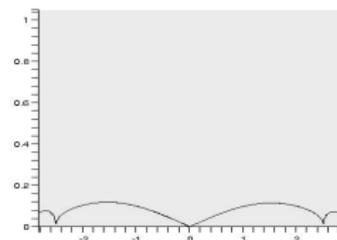
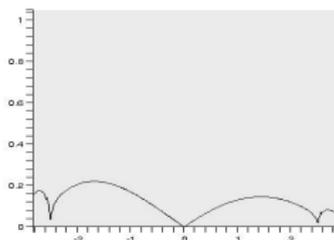
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

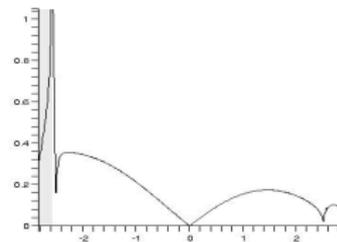
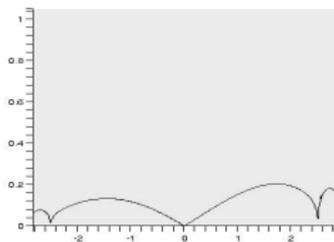


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

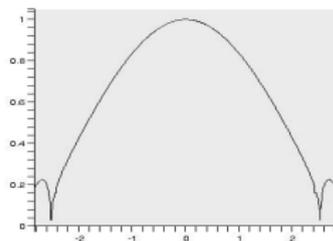
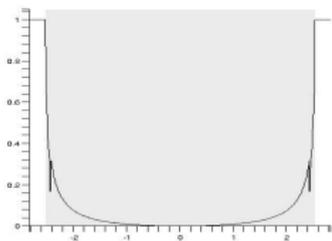


$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

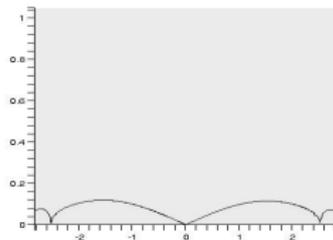
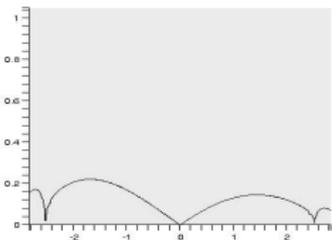
$p = 9,$   
 $\alpha = 0.9525,$

$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$



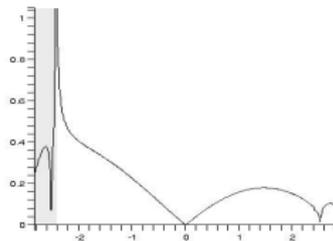
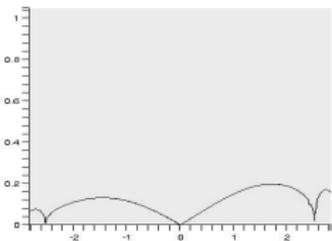
$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$

$|T_1(\omega\Delta t)| =$   
 $|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$



$|T_2(\omega\Delta t)| =$   
 $\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$

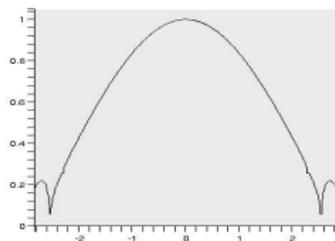
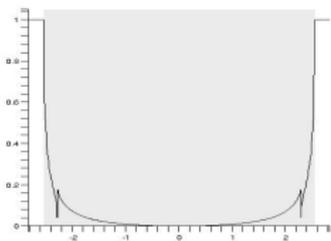
$|T_3(\omega\Delta t)| =$   
 $|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$



$|T_4(\omega\Delta t)| =$   
 $\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$

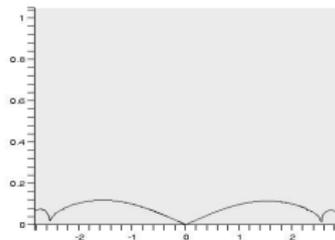
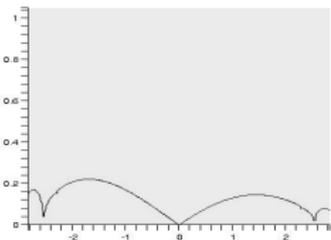
$p = 9,$   
 $\alpha = 0.9550,$

$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$



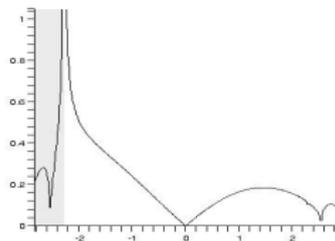
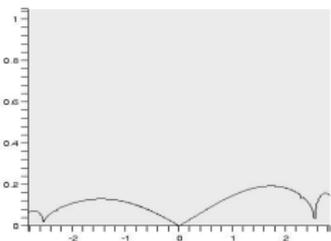
$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$

$|T_1(\omega\Delta t)| =$   
 $|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$



$|T_2(\omega\Delta t)| =$   
 $\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$

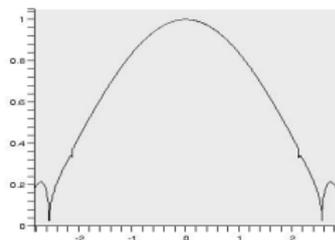
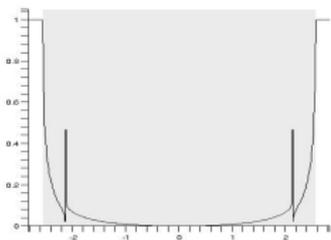
$|T_3(\omega\Delta t)| =$   
 $|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$



$|T_4(\omega\Delta t)| =$   
 $\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$

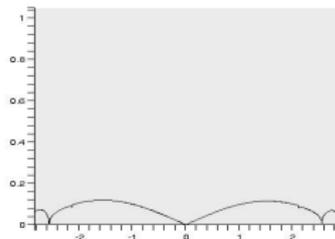
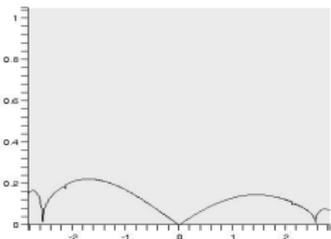
$p = 9,$   
 $\alpha = 0.9575,$

$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$



$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$

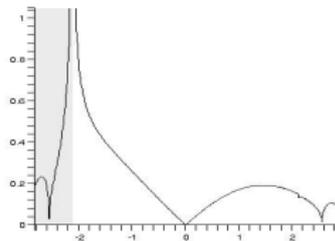
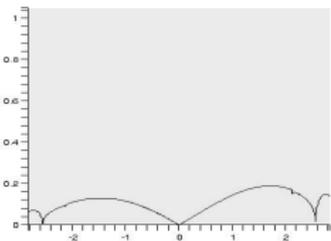
$|T_1(\omega\Delta t)| =$   
 $|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$



$|T_2(\omega\Delta t)| =$

$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$

$|T_3(\omega\Delta t)| =$   
 $|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$



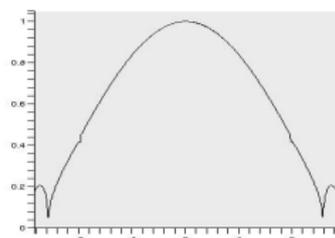
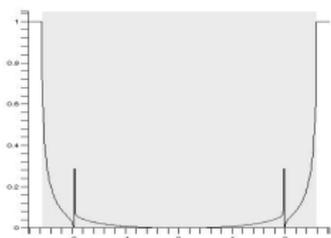
$|T_4(\omega\Delta t)| =$

$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9600,$$

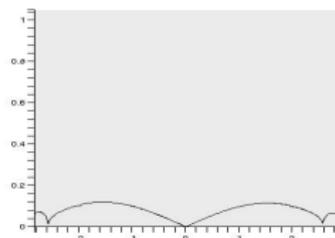
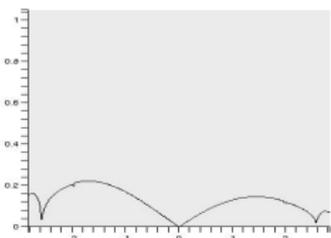
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

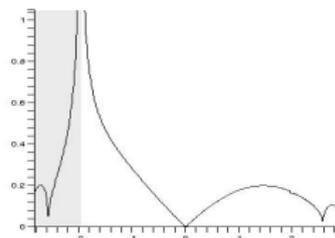
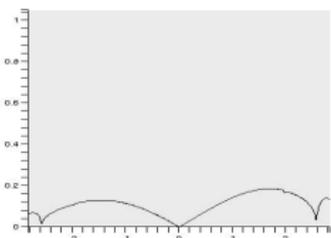


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



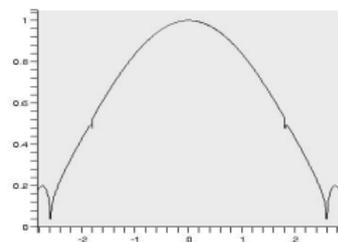
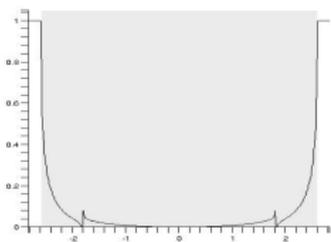
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9625,$$

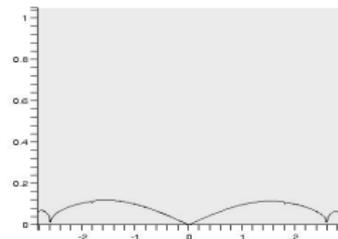
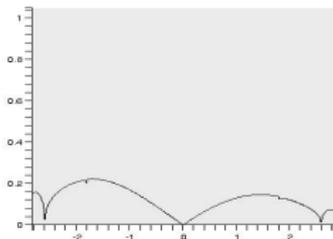
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

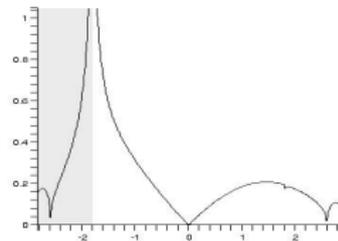
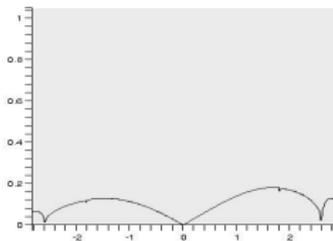


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



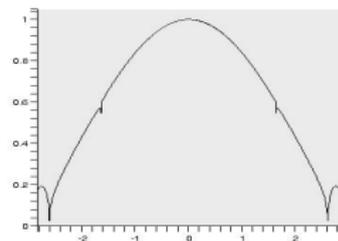
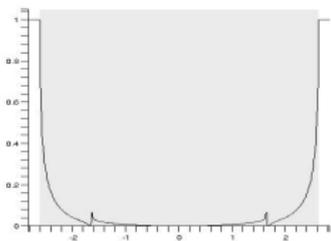
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9650,$$

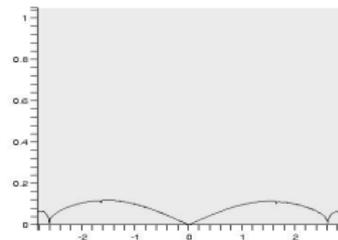
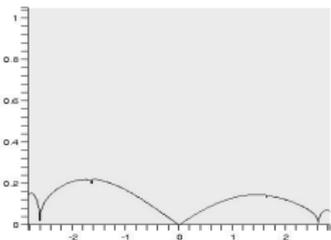
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

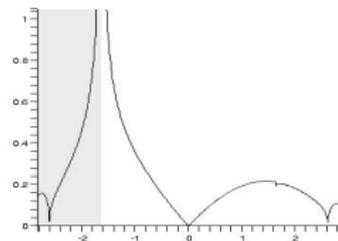
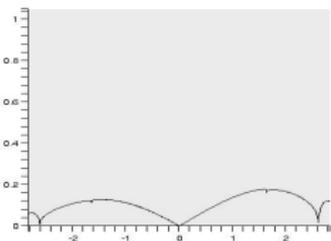


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



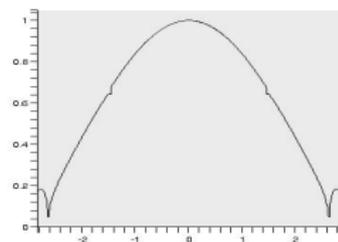
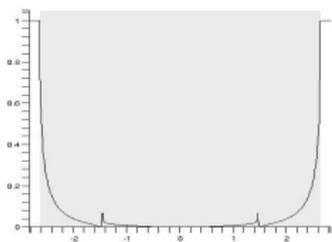
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9675,$$

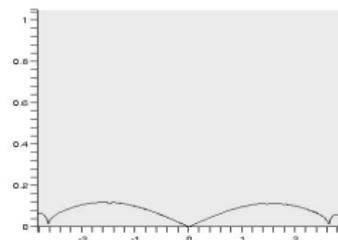
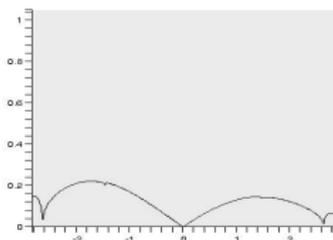
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

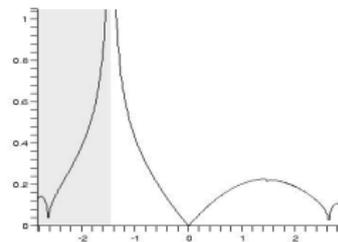
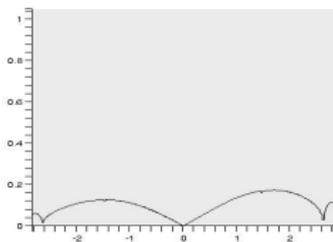


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



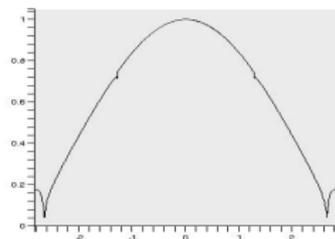
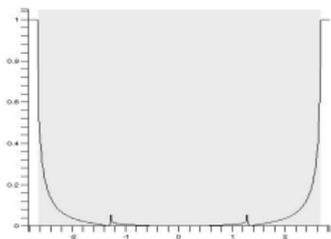
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9700,$$

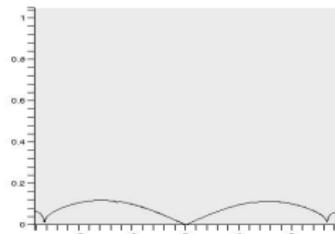
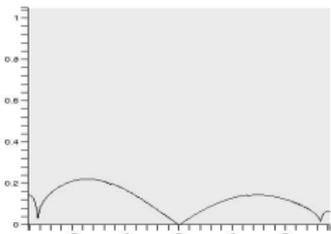
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

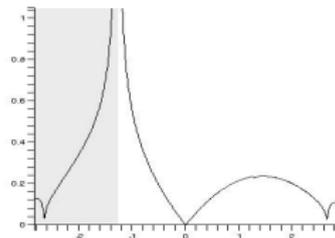
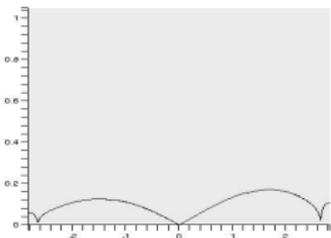


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



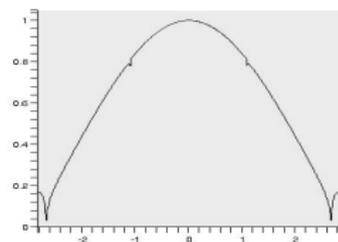
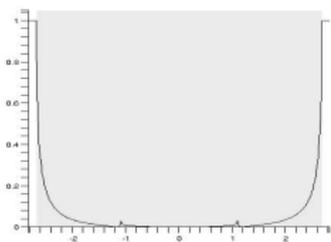
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9725,$$

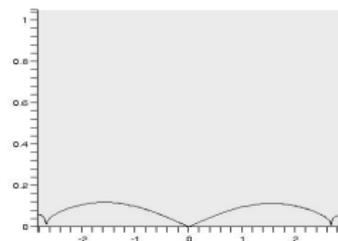
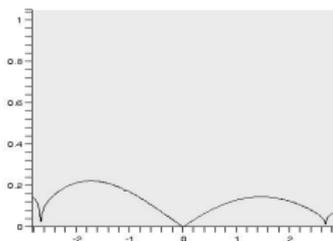
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

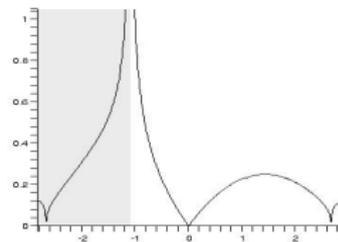
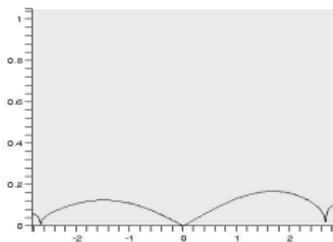


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



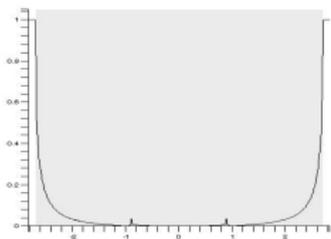
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9750,$$

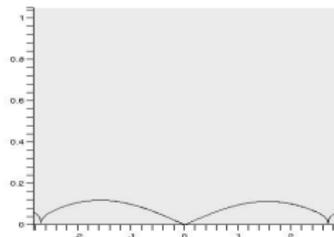
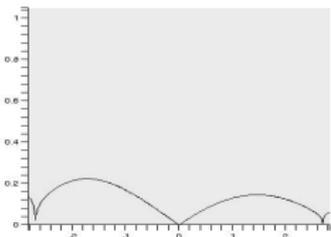
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

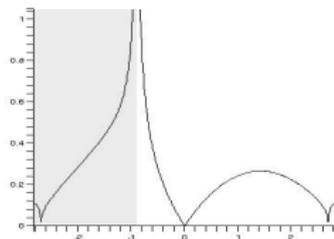
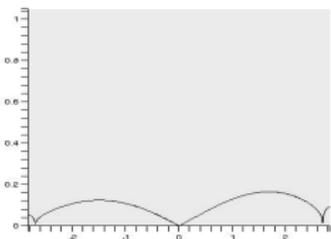


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



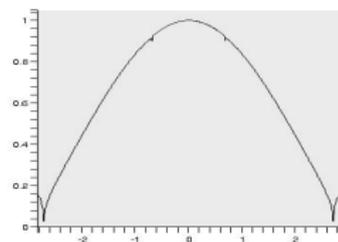
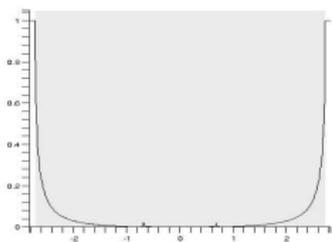
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9775,$$

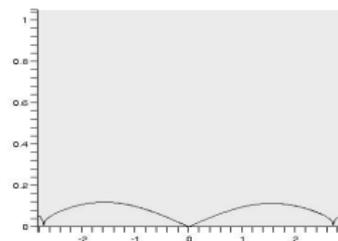
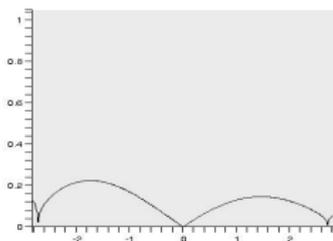
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

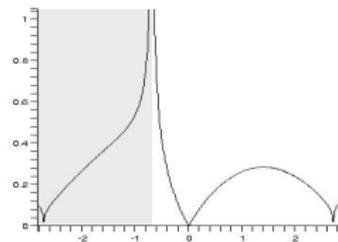
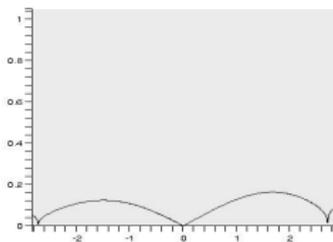


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



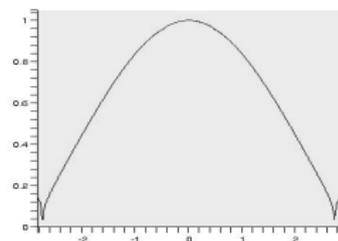
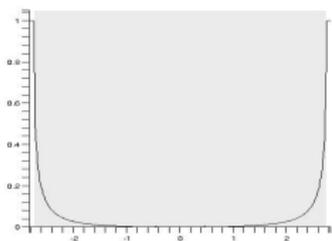
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9800,$$

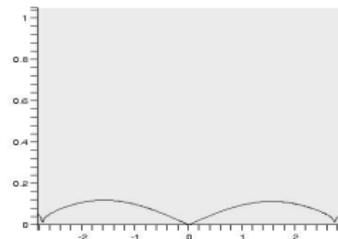
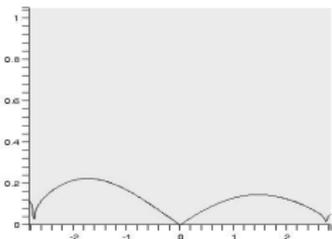
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

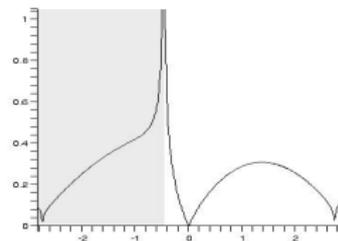
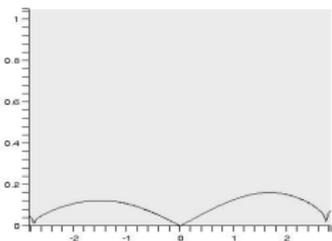


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



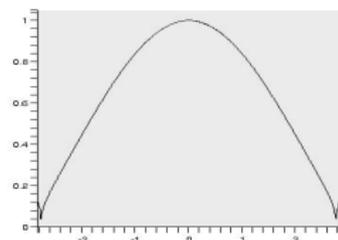
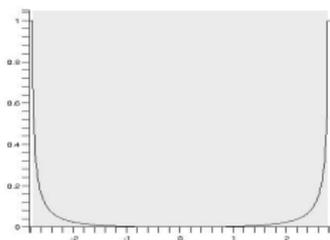
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9825,$$

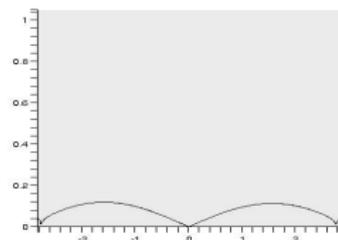
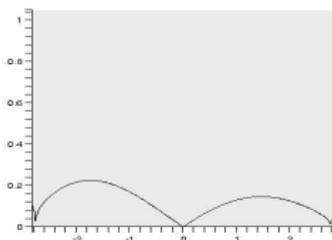
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

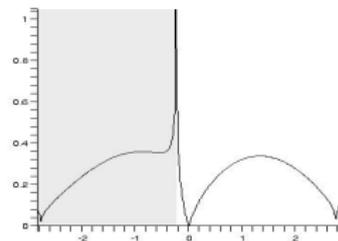
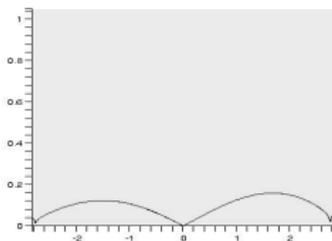


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



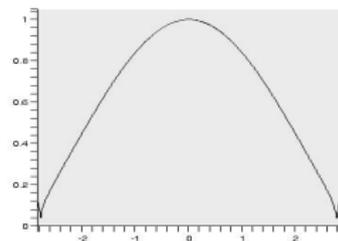
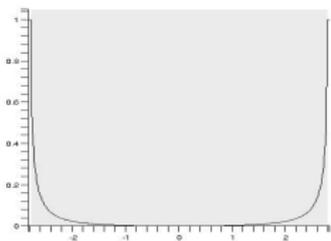
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9835,$$

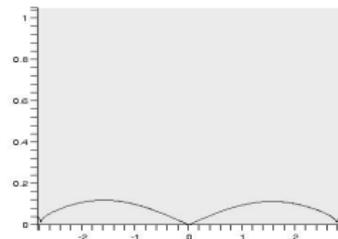
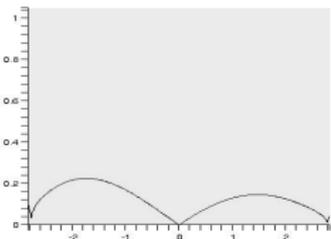
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

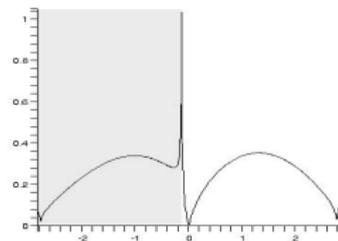
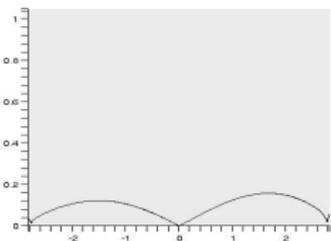


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



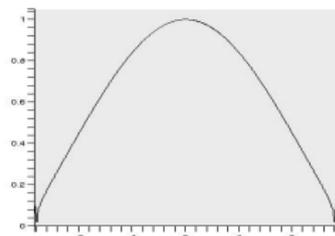
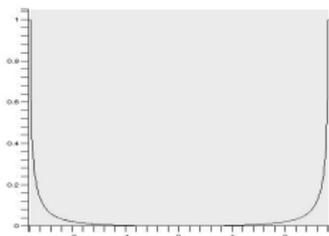
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9848,$$

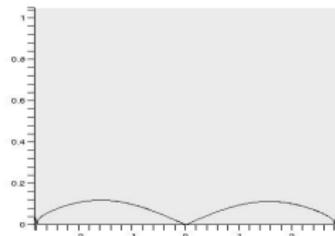
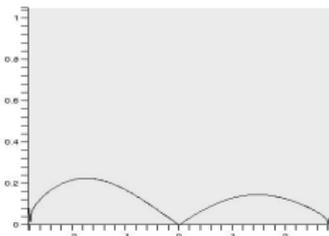
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

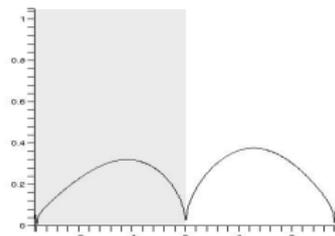
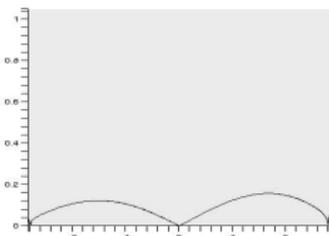


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

# Une présentation technique

La matrice  $\mathcal{A}_f(\Delta t_f)$

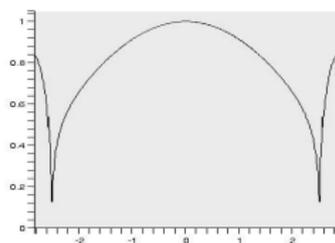
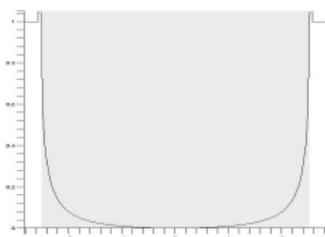
Analyse par Fourier de la méthode conservative

Analyse par Fourier de la méthode post-traitée

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9500,$$

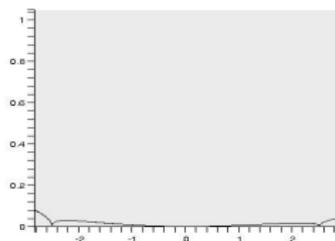
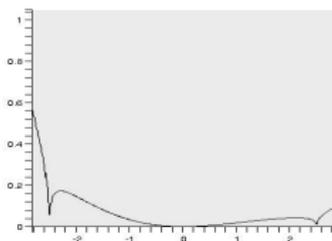
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

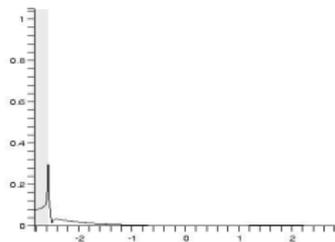
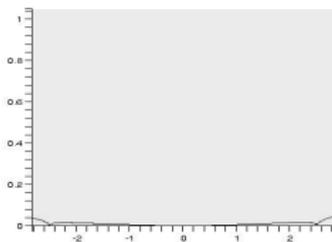


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



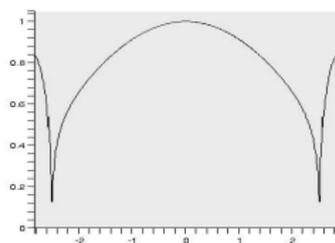
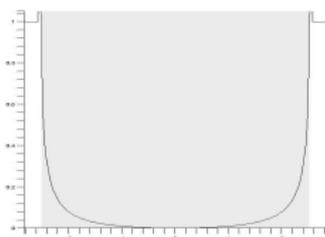
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9500,$$

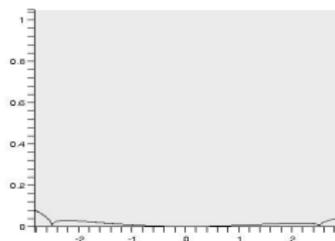
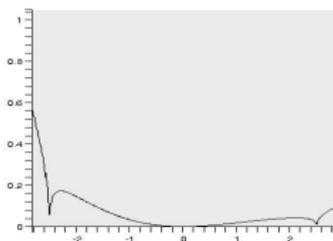
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

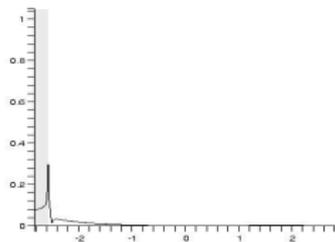
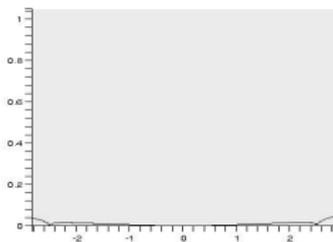


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



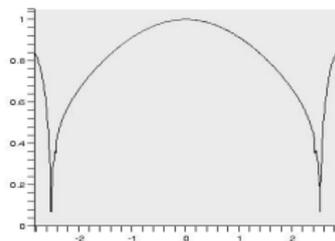
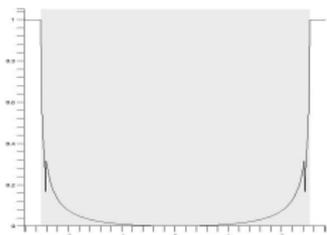
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9525,$$

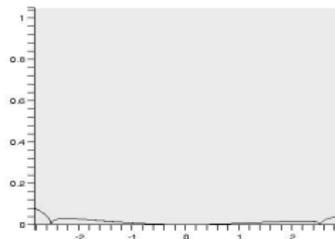
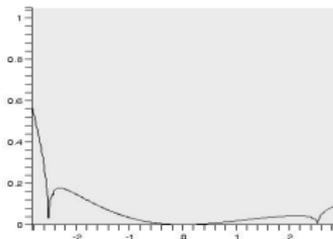
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

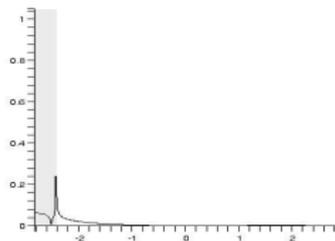
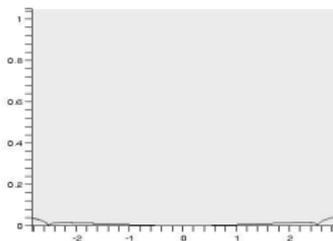


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



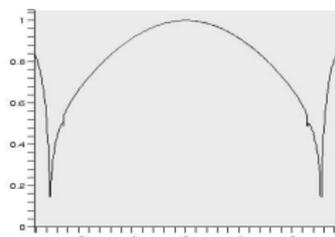
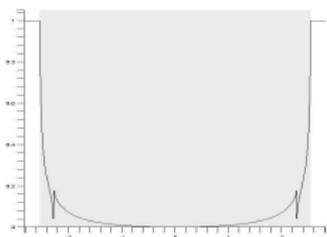
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9550,$$

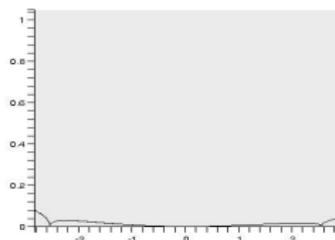
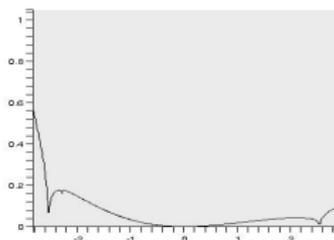
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

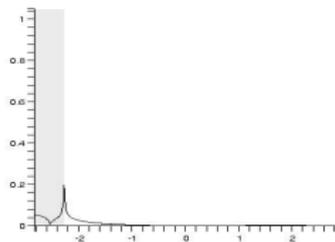
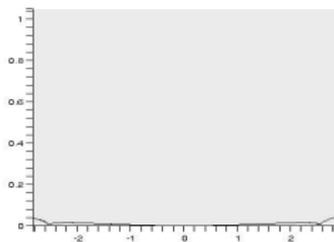


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



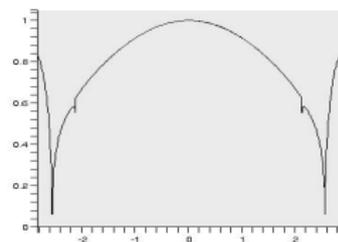
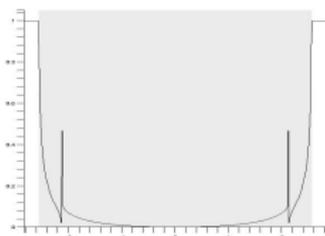
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9575,$$

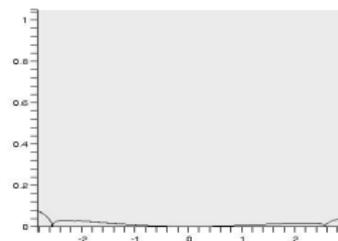
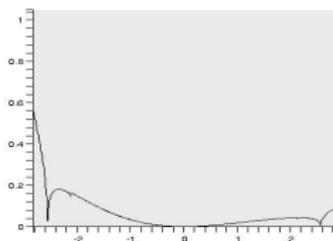
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

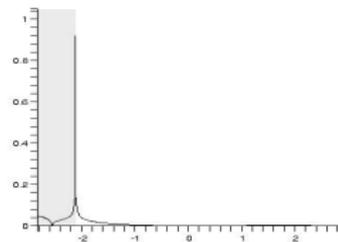
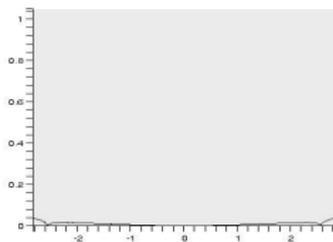


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



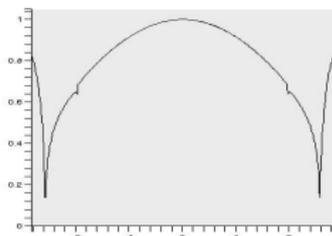
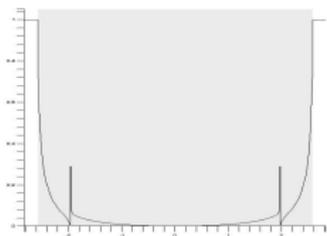
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9600,$$

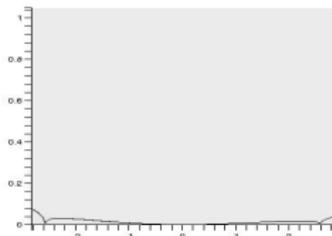
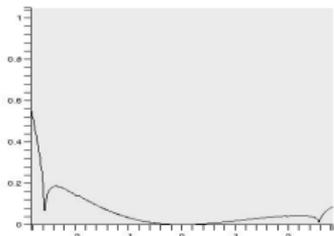
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

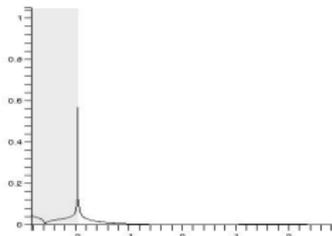
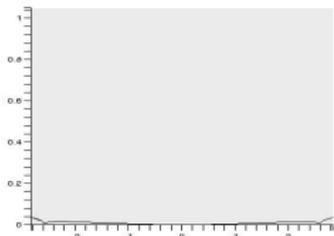


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



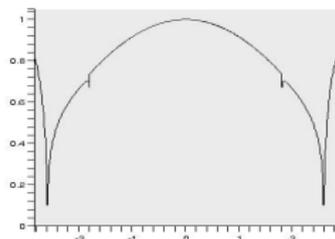
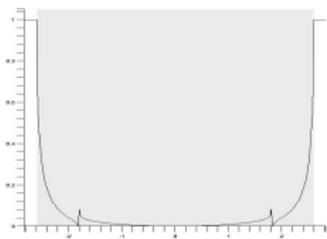
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9625,$$

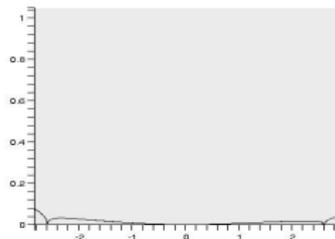
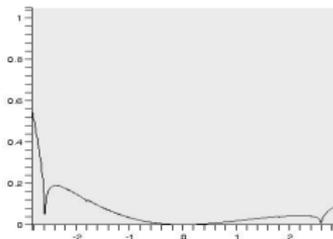
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

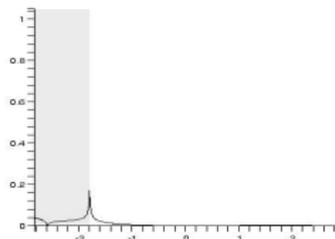
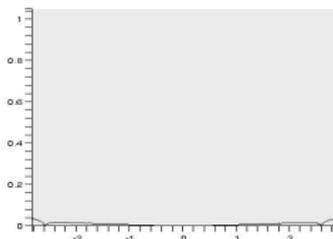


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



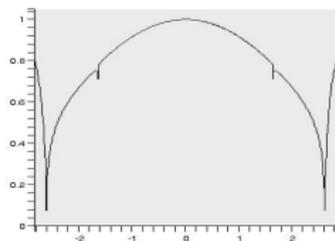
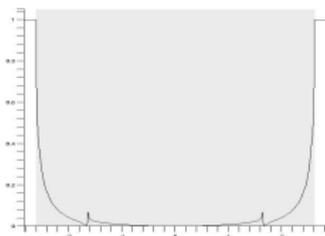
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9650,$$

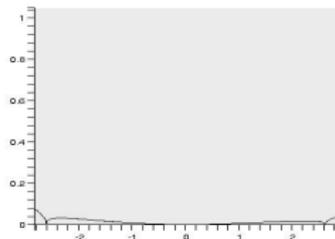
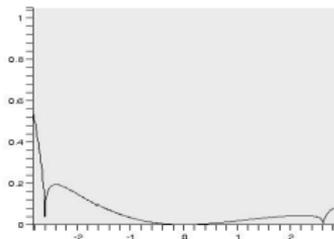
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

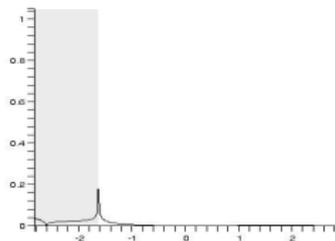
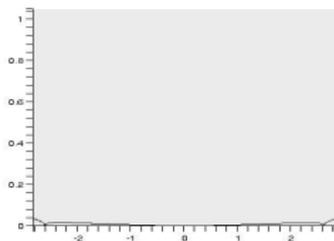


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



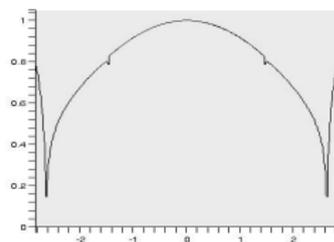
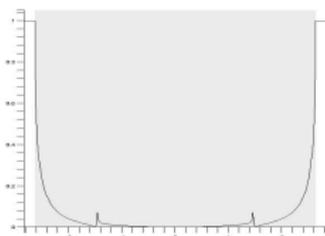
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9675,$$

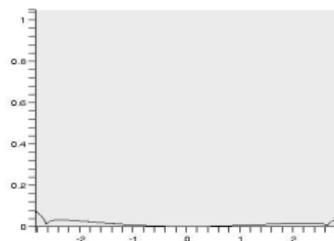
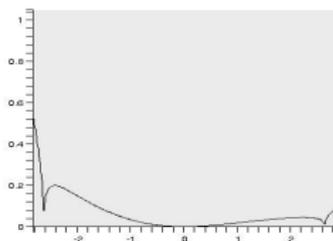
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

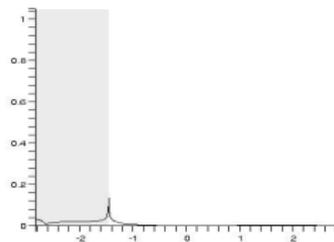
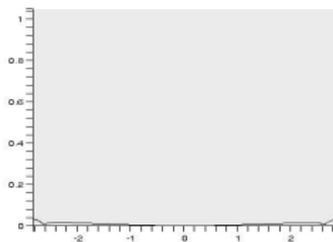


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



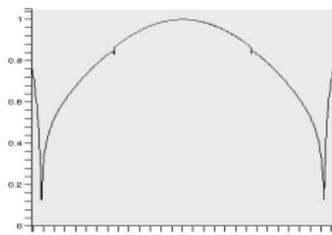
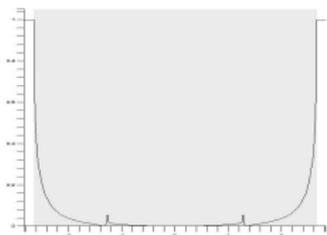
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9700,$$

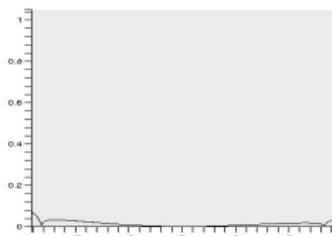
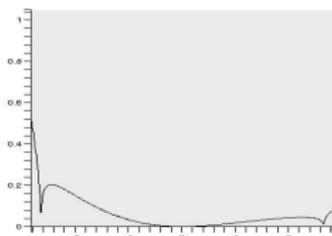
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

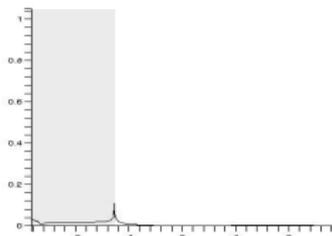
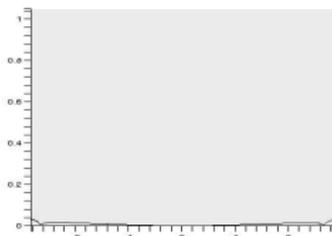


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



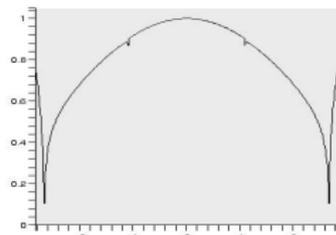
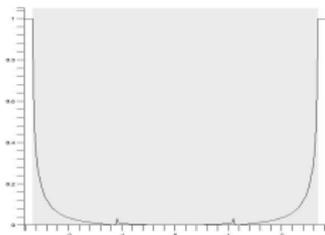
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9725,$$

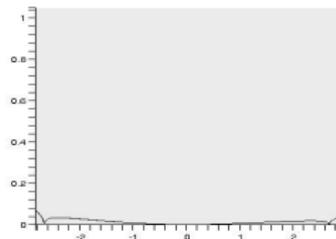
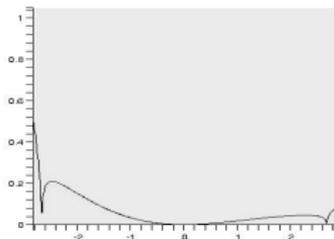
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

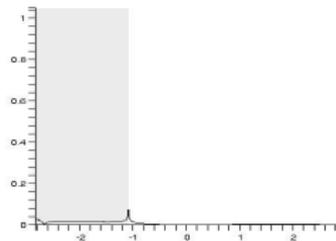
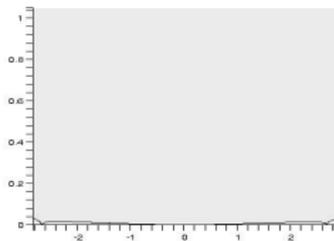


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



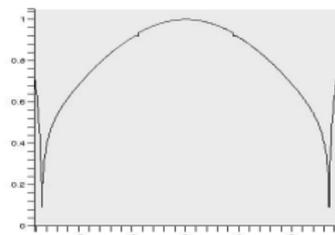
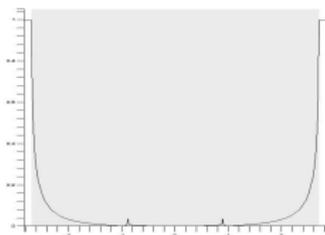
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9750,$$

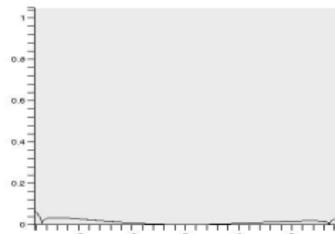
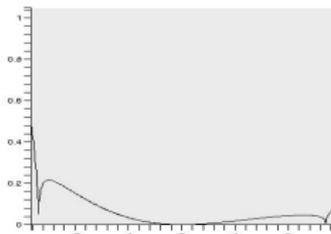
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

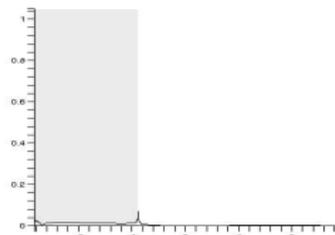
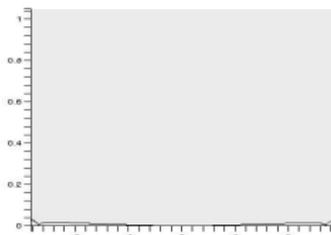


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



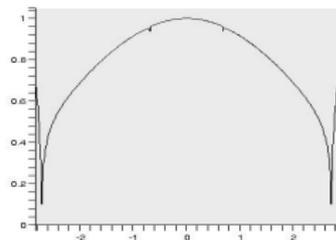
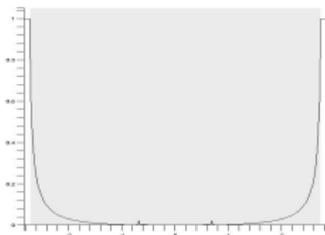
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9775,$$

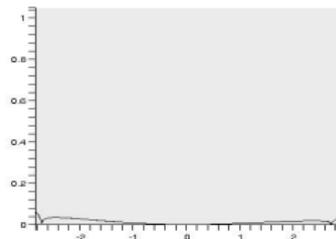
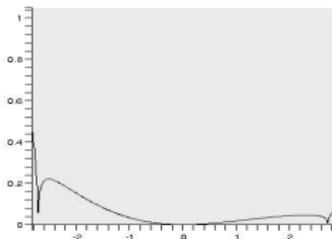
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

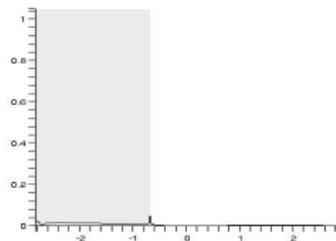
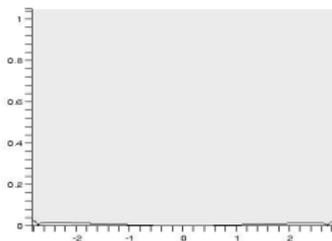


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



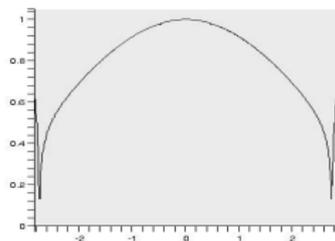
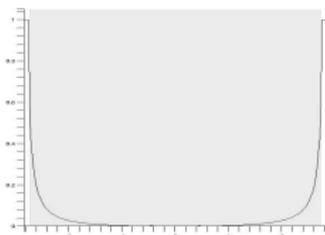
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9800,$$

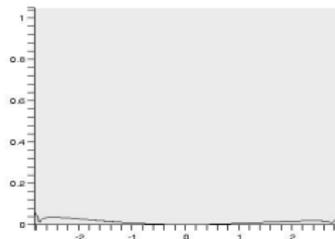
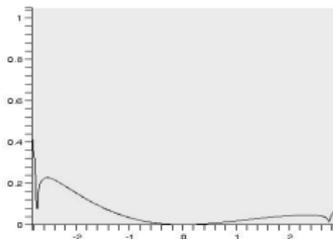
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

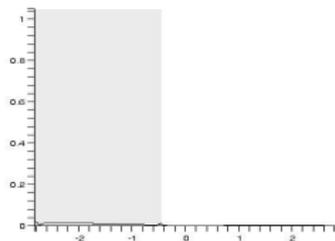
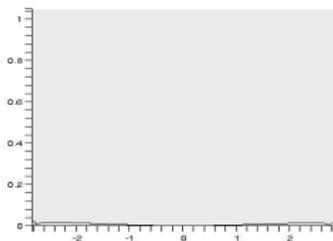


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



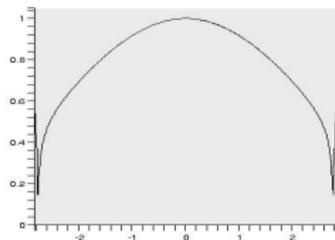
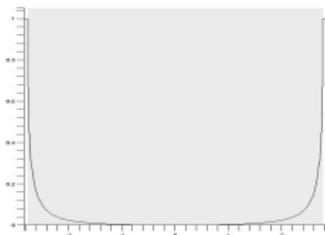
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9825,$$

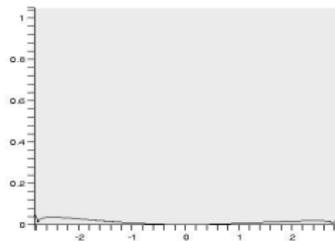
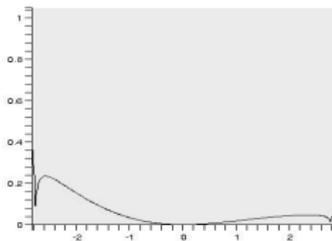
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

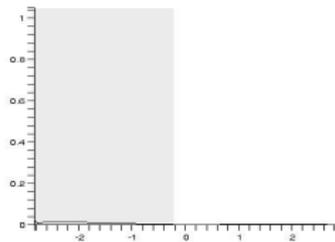
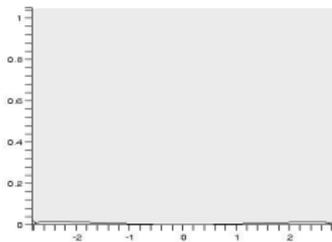


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



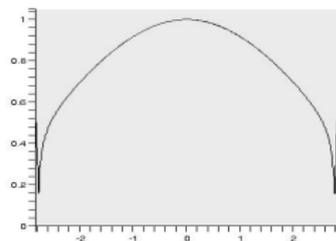
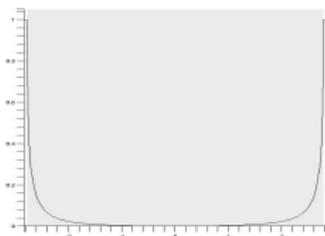
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9835,$$

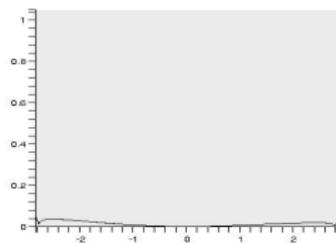
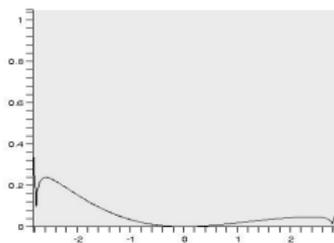
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

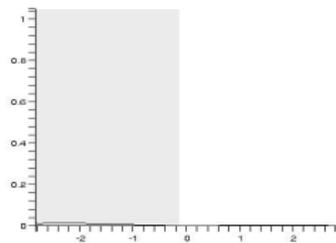
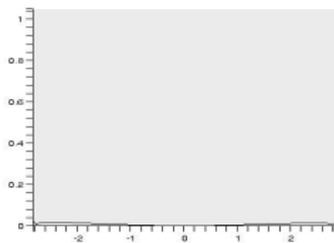


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



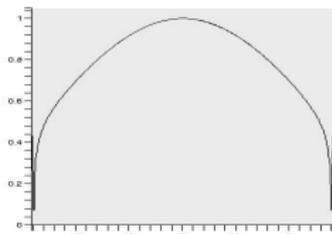
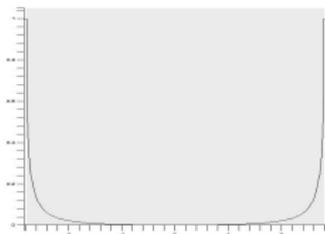
$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

$$p = 9,$$

$$\alpha = 0.9848,$$

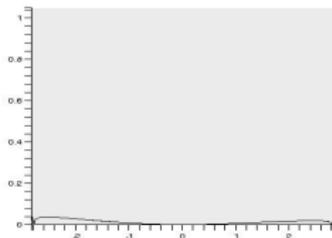
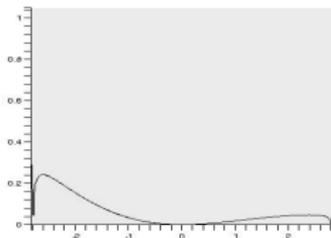
$$|R(\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$\leftarrow |T_0(\omega\Delta t)|$$

$$|T_1(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_8(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$

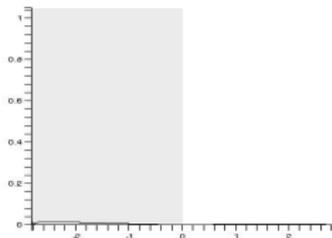
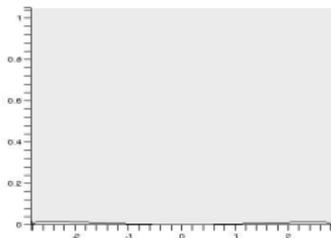


$$|T_2(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_7(-\omega\Delta t)|$$

$$|T_3(\omega\Delta t)| =$$

$$|T_6(-\omega\Delta t)| \rightarrow$$



$$|T_4(\omega\Delta t)| =$$

$$\leftarrow |T_5(-\omega\Delta t)|$$

# Resumé

## Présentation

L'élément  $Q_1^{div} \times Q_0 \times P_1^{cont}$

L'élément  $Q_1^{div} \times P_1^{disc} \times P_1^{cont}$

Amortissement des ondes parasites. Schéma dissipatif

# Une présentation technique

## Présentation

L'élément  $Q_1^{div} \times Q_0 \times P_1^{cont}$

L'élément  $Q_1^{div} \times P_1^{disc} \times P_1^{cont}$

Amortissement des ondes parasites. Schéma dissipatif

# Une présentation technique

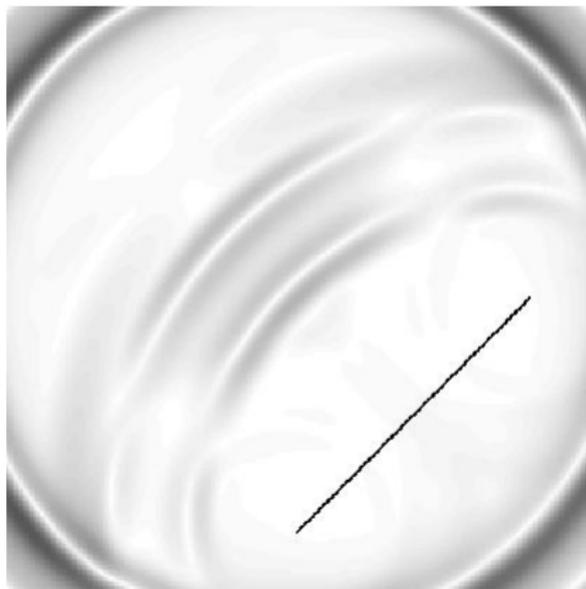
## Présentation

L'élément  $Q_1^{div} \times Q_0 \times P_1^{cont}$

L'élément  $Q_1^{div} \times P_1^{disc} \times P_1^{cont}$

Amortissement des ondes parasites. Schéma dissipatif

Expériences numériques avec  $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{P}_1^{cont}$



Onde S incidente



Onde P incidente

# Une présentation technique

## Présentation

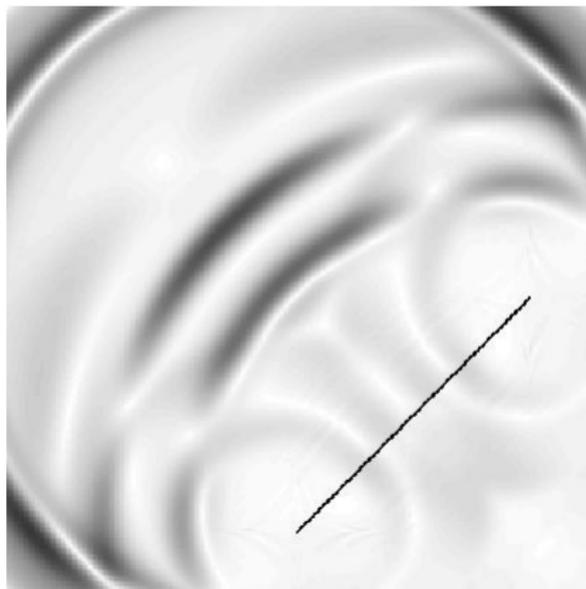
L'élément  $Q_1^{div} \times Q_0 \times P_1^{cont}$

L'élément  $Q_1^{div} \times P_1^{disc} \times P_1^{cont}$

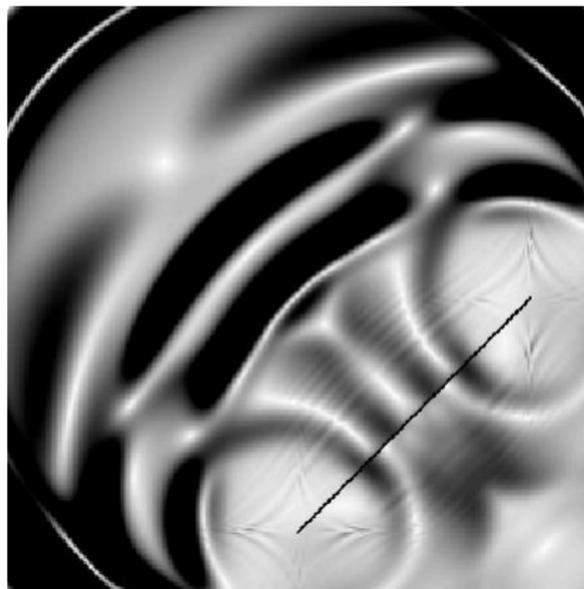
Amortissement des ondes parasites. Schéma dissipatif



Expériences numériques avec  $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc} \times \mathcal{P}_1^{cont}$



Onde S incidente



Onde S incidente X 4

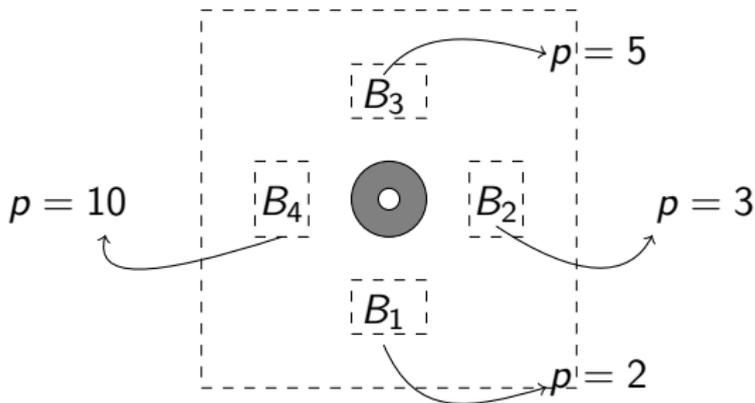


# Une présentation technique

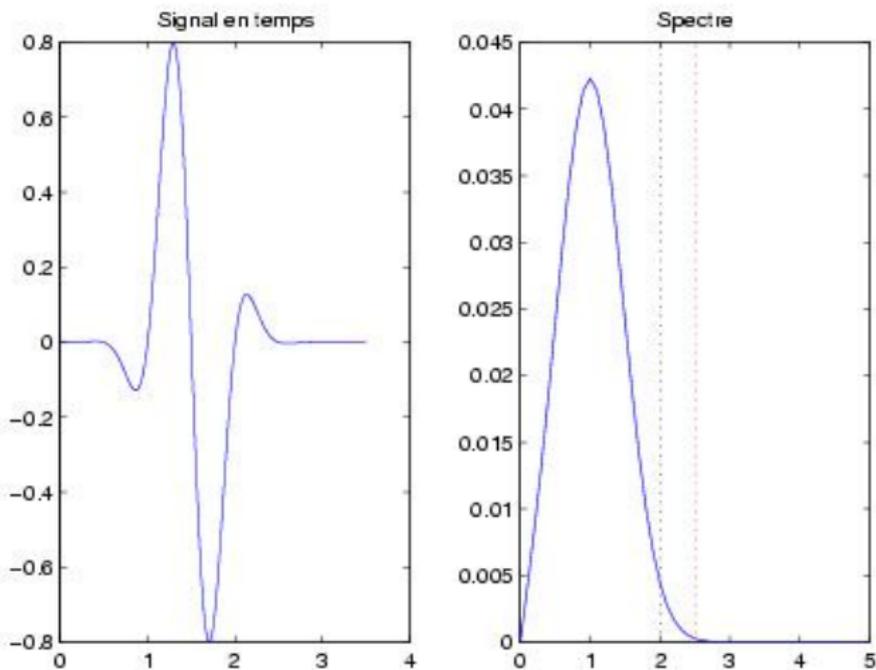
Nombre de points par longueur d'onde

## Expériences numériques

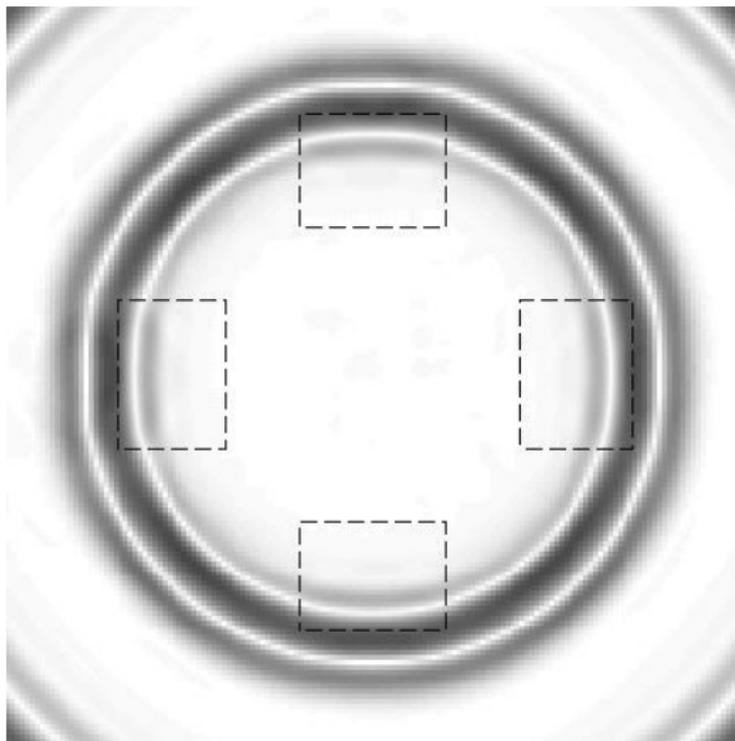
- Milieu homogène isotrope:  $\rho = 1$ ,  $\mu = 2.04$ ,  $\lambda = 3.45$ .
- Domaine de calcul:  $\Omega = [0, 10] \times [0, 10]$ .
- $\Delta x = 1/15$ .  $\alpha = \Delta t / \Delta x = 0.95 CFL_{opt}$ .
- Second membre.



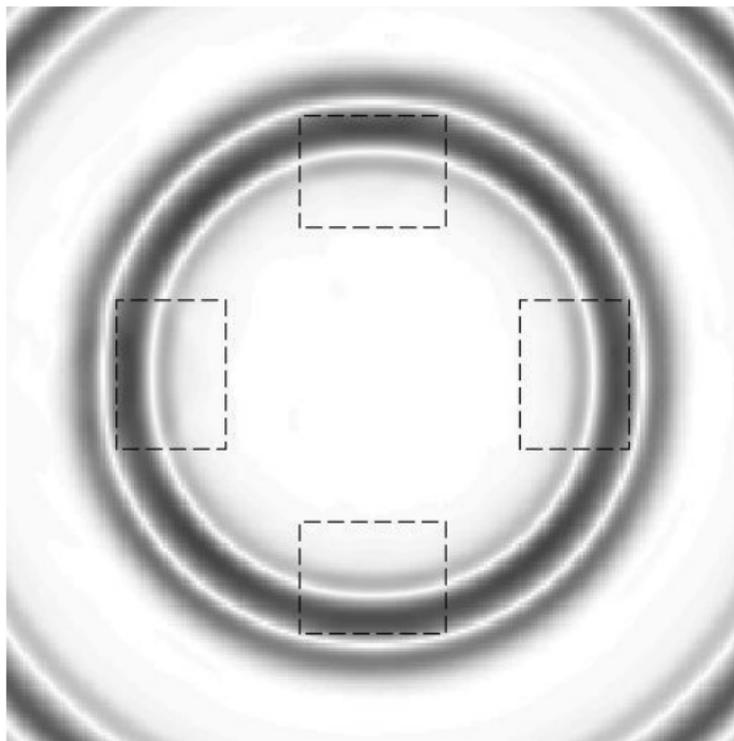
# Expériences numériques



$$N_{\Lambda, 10\div} = 10, \quad N_{\Lambda, 1\div} = 8,$$



$$N_{\Lambda, 10\div} = 13, \quad N_{\Lambda, 1\div} = 11,$$



$$N_{\Lambda, 10\div} = 17, \quad N_{\Lambda, 1\div} = 14,$$

