



Vers une Modélisation Mathématique de la Filtration des Globules Blancs du Sang

Mohamed Belhadj

Directeurs de thèse : J-F. GERBEAU, T. HADHRI et B. PERTHAME

Plan de l'exposé

- ➔ I. Description du problème et modélisation
 - ➔ *J.-F. Gerbeau, INRIA*
 - ➔ *E. Cancès, ENPC*
 - ➔ *J.L Wautier, L. Barbe, Institut National de la Transfusion Sanguine*
- ➔ II. Analyse mathématique d'un modèle de transport réaction
 - ➔ *J.-F. Gerbeau, INRIA*
 - ➔ *B. Perthame, ENS & INRIA*
- ➔ III. Ecoulement dans un milieu fibreux
 - ➔ *J.-F. Gerbeau, INRIA*
 - ➔ *E. Cancès, ENPC*
 - ➔ *A. Mikelic, Univ. Lyon*
- ➔ IV. Quelques simulations

I. Description du problème et modélisation

Motivation

→ La transfusion a pour but de fournir des **globules rouges**

→ Pourquoi **déleucocyter?** :

Amélioration de la sécurité transfusionnelle

- réduction des complications observées chez certains receveurs
- prévention de la transmission d'agents infectieux vectorisés par les leucocytes (virus, bactéries)

Motivation

→ La transfusion a pour but de fournir des **globules rouges**

→ Pourquoi **déleucocyter?** :

Amélioration de la sécurité transfusionnelle

- réduction des complications observées chez certains receveurs
- prévention de la transmission d'agents infectieux vectorisés par les leucocytes (virus, bactéries)

Principe de la déleucocytation par filtration

- ➔ La poche de sang est suspendue, écoulement par gravité
- ➔ durée: 30 minutes env. (20 ml/minute)
- ➔ Filtre constitué de feuilles de fibres (porosité 90%)
- ➔ Diamètre des premiers pores: $60 \mu m$
- ➔ Rétention essentiellement physico-chimique (**adhésion**)
- ➔ Rétention mécanique (**tamissage**) ?
- ➔ environ 99.97 % des leucocytes sont retenus
- ➔ environ 15% des globules rouges perdues



Principe de la déleucocytation par filtration

- ➔ La poche de sang est suspendue, écoulement par gravité
- ➔ durée: 30 minutes env. (20 ml/minute)
- ➔ Filtre constitué de feuilles de fibres (porosité 90%)
- ➔ Diamètre des premiers pores: $60 \mu m$
- ➔ Rétention essentiellement physico-chimique (**adhésion**)
- ➔ Rétention mécanique (**tamissage**) ?
- ➔ environ 99.97 % des leucocytes sont retenus
- ➔ environ 15% des globules rouges perdues

En France:

- ➔ Filtration systématique
- ➔ Seuil légal: 10^6 de leucocytes dans le filtrat
- ➔ 3 millions de poches traitées par an



- ➔ Etude **macro** : A. Bruil *et al.* (1995) (modèle 1D)
- ➔ Etude **micro** : L. Barbe et J.L. Wautier (2002) (affinité chimique entre leucocytes et fibres)

- ➔ Etude **macro** : A. Bruil *et al.* (1995) (modèle 1D)
- ➔ Etude **micro** : L. Barbe et J.L. Wautier (2002) (affinité chimique entre leucocytes et fibres)

- ➔ **Difficultés de la modélisation :**
 - ➔ la taille des particules et des pores est du même ordre de grandeur: les échelles ne peuvent pas être séparées
 - ➔ fluide complexe
 - ➔ mécanisme de rétention (**adhésion**, tamisage, colmatage)
 - ➔ écoulement dans un **milieu fibreux**

Modélisation de la filtration

Écoulement: Fluide newtonien très visqueux, équation de Darcy:

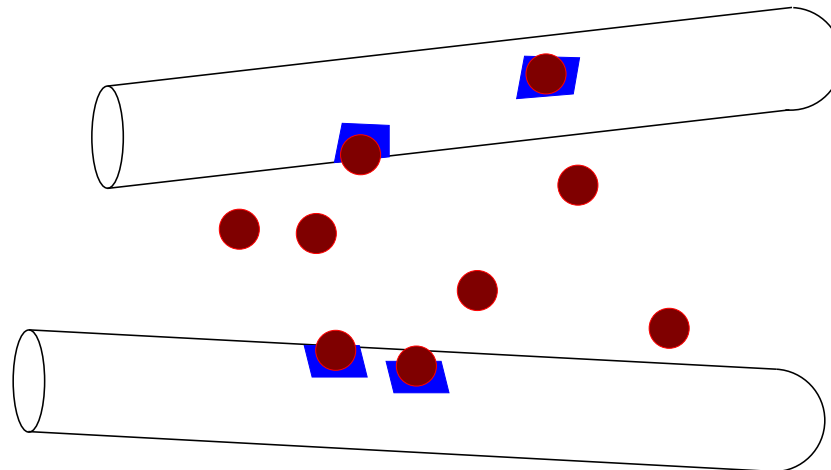
$$\begin{cases} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla p = \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

Modélisation de la filtration

Écoulement: Fluide newtonien très visqueux, équation de Darcy:

$$\begin{cases} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla p = \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

Adhésion:



c : concentration de leucocytes dans le sang

s : surface occupée par les leucocytes / surface libre sur les fibres

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\omega \mathbf{c}) + \operatorname{div}(\mathbf{u} \mathbf{c} - \omega \mathbf{A}(u) \nabla \mathbf{c}) = -\frac{f}{a} \frac{\partial s}{\partial t} \\ \frac{\partial s}{\partial t} = a k(\mathbf{u}) \mathbf{c} B(s) \end{array} \right.$$

avec par exemple:

$$B(s) = 1 - \frac{s}{s_{max}}$$

- ➔ a : aire occupée par un leucocyte sur la fibre
- ➔ f : surface spécifique du filtre, *i.e.* surface de fibres par unité de volume
- ➔ \mathbf{A} : dispersion
- ➔ ω : porosité
- ➔ k : vitesse de “réaction”

Remarques :

→ Applications :

- la pénétration d'anticorps dans des tissus tumoraux et leur réaction avec des antigènes (Fenmori *et al.*, 1989)
- le transport de colloïdes (virus, bactéries) dans des aquifères sableux (Elimelech, Sun, Ryan, 2001).

Remarques :

→ Applications :

- la pénétration d'anticorps dans des tissus tumoraux et leur réaction avec des antigènes (Fenmori *et al.*, 1989)
- le transport de colloïdes (virus, bactéries) dans des aquifères sableux (Elimelech, Sun, Ryan, 2001).

→ Eventuellement:

- $\omega = \omega_0 - \beta s$ (Herzig *et al.*, 2001)
- $\mathbf{K} = \mathbf{K}(s)$

Résultats d'expériences:

- ➔ Prélèvement au Centre de Transfusion de Armées
- ➔ 5 volontaires, 1 poche perdue

Résultats d'expériences:

- ➔ Prélèvement au Centre de Transfusion de Armées
- ➔ 5 volontaires, 1 poche perdue



Résultats d'expériences:

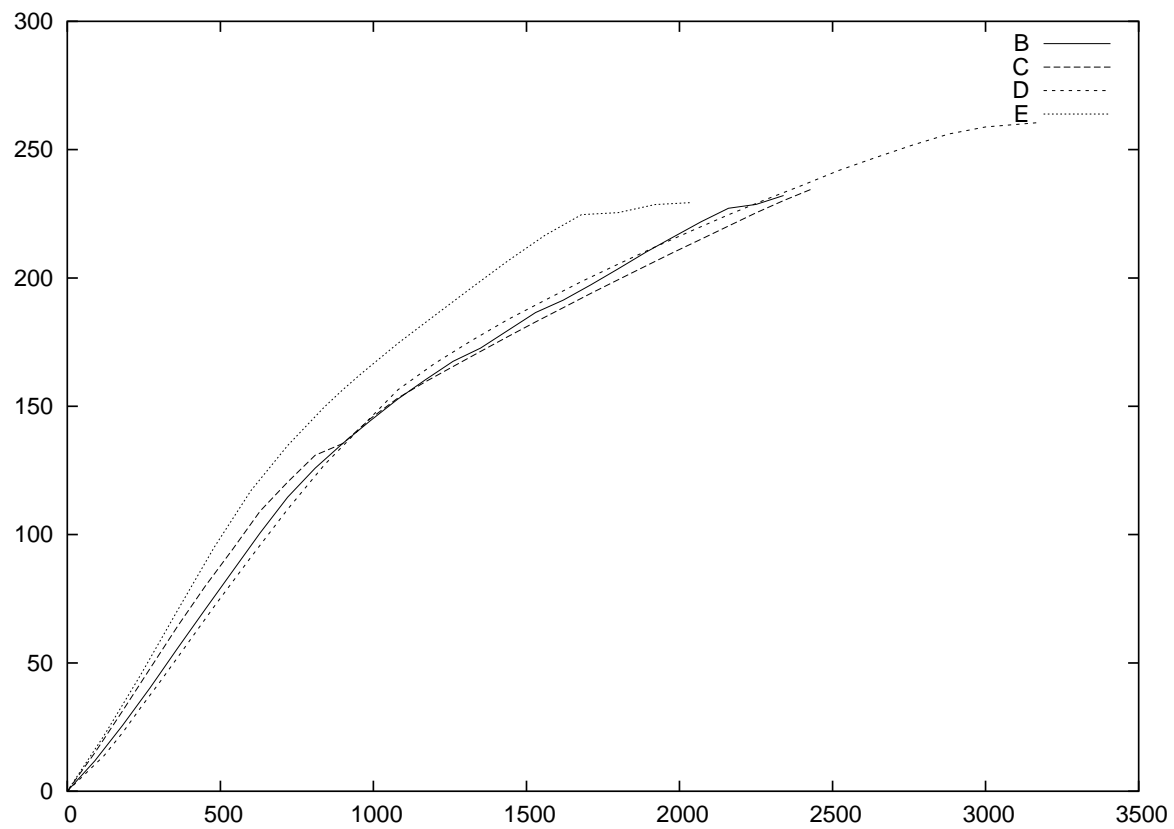
- ➔ Mesures débit et concentration dans le filtrat à l'Institut National de la Transfusion Sanguine

Résultats d'expériences:

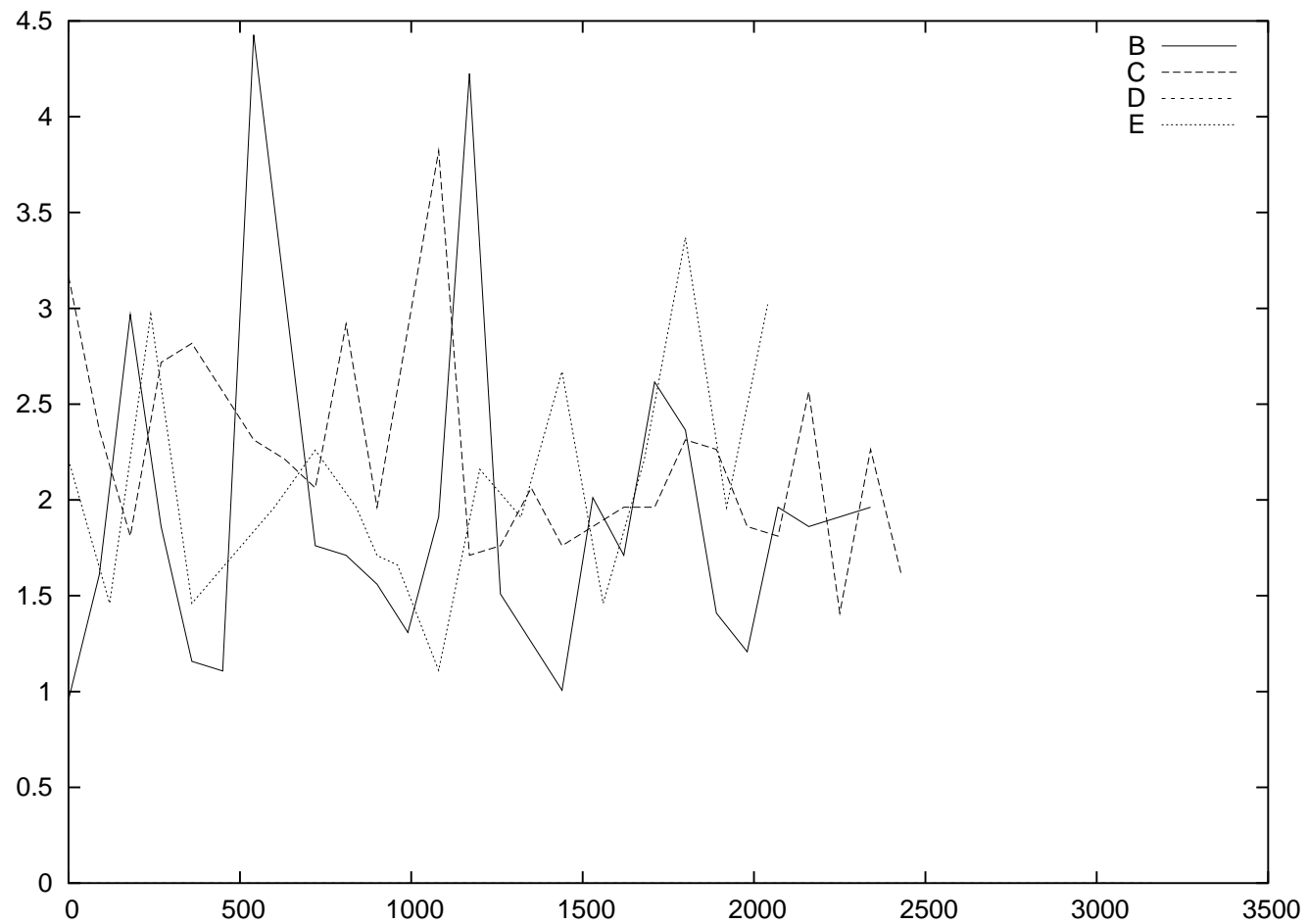
- ➔ Mesures débit et concentration dans le filtrat à l'Institut National de la Transfusion Sanguine



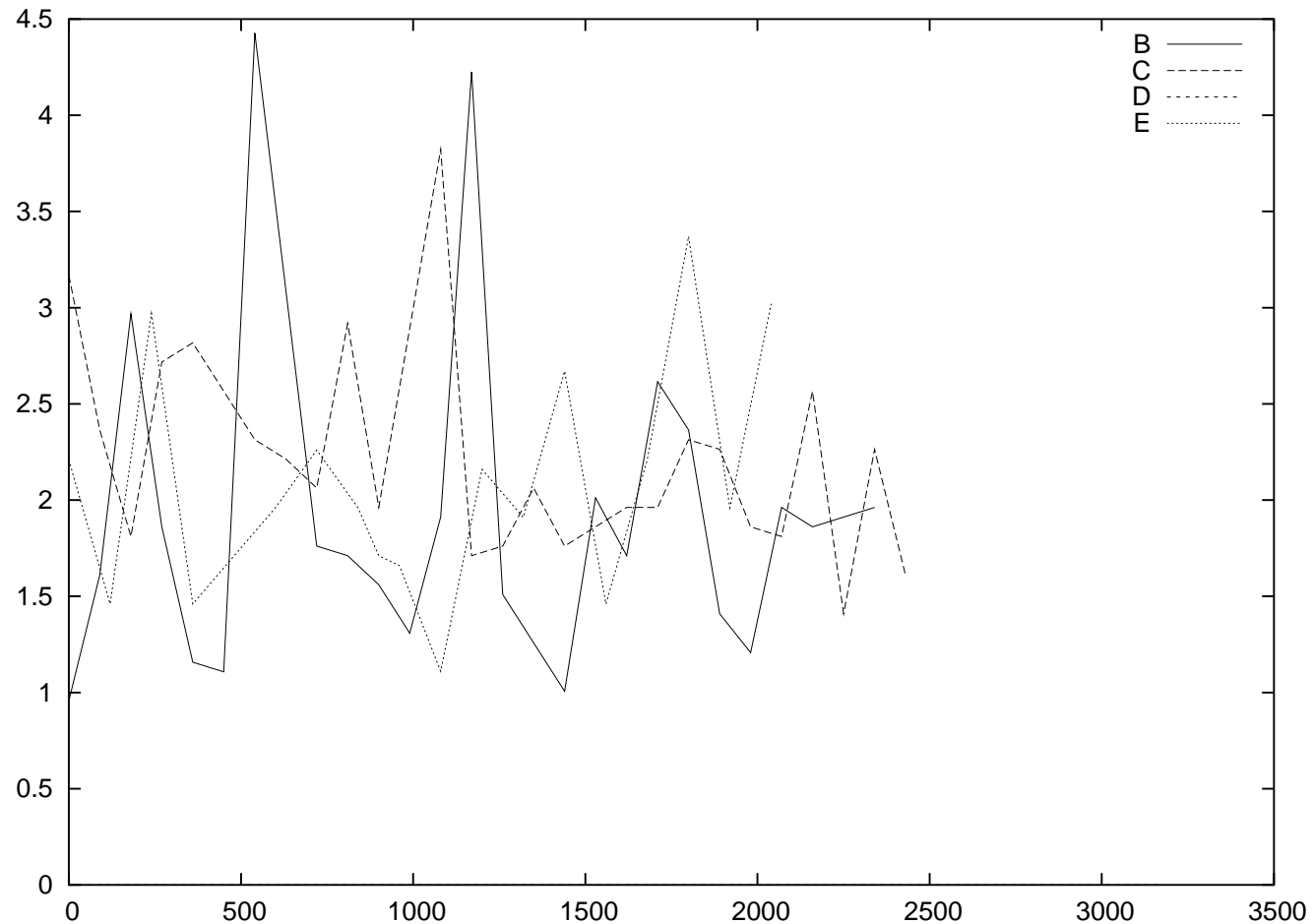
Volume filtré en fonction du temps:



Concentration des particules dans le filtrat en fonction du temps:



Concentration des particules dans le filtrat en fonction du temps:



→ ces résultats ne nous ont malheureusement pas permis de valider ou d'améliorer notre modèle.

II. Analyse d'un modèle de transport réaction

$$(P_k) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t c + \operatorname{div} \mathbf{A}(c) - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 \varphi_{ij}(c)}{\partial x_i \partial x_j} = -k c s, \\ \partial_t s = -k c s, \\ c(0, x) = c_0(x) \geq 0, \\ s(0, x) = s_0(x) \geq 0, \end{array} \right.$$

où $k > 0$

D. Hilhorst, R. van der Hout, L.A. Peletier (1996, 1997, 2000), R. Eymard (2000) et R. Eymard, D. Hilhorst (2001)

- ➔ Comportement asymptotique lorsque $k \rightarrow \infty$
- ➔ Plusieurs termes généraux de réaction.
- ➔ $\varphi(c) = \int_0^c D(\xi) d\xi$ avec $D(\xi) > 0$ pour $\xi > 0$.
- ➔ ...

Equation plus générale : **système hyperbolique parabolique avec diffusion dégénérée et non-isotrope.**

Hypothèses :

$(\varphi'_{ij}) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive,

$\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_d) \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}))^d$, $\mathbf{A}(0) = 0$,

$c_0 \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $c_0 \geq 0$ p.p. dans \mathbb{R}^d , et $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 c_0 dx < \infty$,

$s_0 \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, et $s_0 \geq 0$ p.p. dans \mathbb{R}^d .

Proposition 1 (P_k) admet une unique solution $(c, s) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^d))^2$.

De plus, on a les propriétés suivantes :

(i) **Principe du maximum** : $0 \leq c(x, t) \leq \|c_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$, $0 \leq s(x, t) \leq \|s_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$.

(ii) **Propriété de contraction** :

Soient (c, s) et (\bar{c}, \bar{s}) deux solutions correspondant à (c_0, s_0) et (\bar{c}_0, \bar{s}_0) :

$$\|c(t) - \bar{c}(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|s(t) - \bar{s}(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|c_0 - \bar{c}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|s_0 - \bar{s}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

(iii) **Propriété de comparaison** : Si $c_0 \leq \bar{c}_0$ et $s_0 \leq \bar{s}_0$ alors $\forall t \geq 0$,

$$c(t) \leq \bar{c}(t) \quad \text{et} \quad s(t) \leq \bar{s}(t) \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^d.$$

(iv) **Inégalité d'entropie** : Pour deux fonctions régulières, croissantes S et Σ ,

avec S convexe, et avec les notations $(\mathbf{A}^S)' = \mathbf{A}' S'$, $(\varphi_{ij}^S)' = \varphi'_{ij} S'$,

$(\psi_{ik}^S)' = (\varphi'_{ik} S'')^{1/2}$, on a $\nabla \cdot \psi^S(c) \in \left(L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)\right)^d$, et

$$\partial_t [S(c) + \Sigma(s)] + \operatorname{div} \mathbf{A}^S(c) - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 \varphi_{ij}^S(c)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^d |\nabla \cdot \psi^S(c)|^2 \leq 0.$$

Lemme 1 On suppose que

$$\boxed{(\varphi') \geq \alpha.Id}$$

avec $\alpha > 0$.

(i) Alors une solution $(c, s) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ de P_k satisfait les propriétés de la Proposition 1.

(ii) De plus, on a pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|\partial_t c(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|\partial_t s(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \beta \|\nabla c_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \left\| \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 \varphi_{ij}(c_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + 2k \|c_0 s_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

avec $\beta = \sup_{|\xi| \leq \|c_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}} |\mathbf{A}'(\xi)|$.

Lemme 2

On suppose que $c_0 \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, et la diffusion est non-dégénérée.

Alors, pour tout $T > 0$, le problème P_k admet une solution

$$(c, s) \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}([0, T]; L^2(\mathbb{R}^d))$$

Si on suppose de plus que $c_0, s_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathbf{A}, \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, alors $c, s \in \mathcal{C}^\infty((0, T); \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$.

Lemme 2

On suppose que $c_0 \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, et la diffusion est non-dégénérée.

Alors, pour tout $T > 0$, le problème P_k admet une solution

$$(c, s) \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}([0, T]; L^2(\mathbb{R}^d))$$

Si on suppose de plus que $c_0, s_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathbf{A}, \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, alors $c, s \in \mathcal{C}^\infty((0, T); \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$.

Preuve.

Théorème du point fixe de Schauder et les résultats standards sur les problèmes paraboliques non-dégénérés. \diamond

Preuve de la proposition 1

Etape 1. On suppose que c_0 et $s_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Technique de **régularisation par convolution** : $\varphi_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \varphi$ et $\mathbf{A}_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \mathbf{A}$

En particulier, on suppose que $\varphi'_\varepsilon \geq \varepsilon > 0$.

On considère le problème approché

$$P_k^\varepsilon \begin{cases} \partial_t c_\varepsilon + \operatorname{div} \mathbf{A}_\varepsilon(c_\varepsilon) - \operatorname{div} \left(\varphi'_\varepsilon(c_\varepsilon) \cdot \nabla c_\varepsilon \right) & = & -k c_\varepsilon s_\varepsilon, \\ \partial_t s_\varepsilon & = & -k c_\varepsilon s_\varepsilon. \end{cases}$$

Montrons que $\{(c_\varepsilon, s_\varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$ est relativement **compact** dans $\mathcal{C}(0, T; L^1(\mathbb{R}^d))$.

Preuve de la proposition 1

Etape 1. On suppose que c_0 et $s_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Technique de **régularisation par convolution** : $\varphi_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \varphi$ et $\mathbf{A}_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \mathbf{A}$

En particulier, on suppose que $\varphi'_\varepsilon \geq \varepsilon > 0$.

On considère le problème approché

$$P_k^\varepsilon \begin{cases} \partial_t c_\varepsilon + \operatorname{div} \mathbf{A}_\varepsilon(c_\varepsilon) - \operatorname{div} \left(\varphi'_\varepsilon(c_\varepsilon) \cdot \nabla c_\varepsilon \right) & = -k c_\varepsilon s_\varepsilon, \\ \partial_t s_\varepsilon & = -k c_\varepsilon s_\varepsilon. \end{cases}$$

Montrons que $\{(c_\varepsilon, s_\varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$ est relativement **compact** dans $\mathcal{C}(0, T; L^1(\mathbb{R}^d))$.

Soit $h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d$, avec $h_i > 0$.

Soit $\tau_h c_\varepsilon(t, x) = c_\varepsilon(t, x + h)$ et $\tau_h s_\varepsilon(t, x) = s_\varepsilon(t, x + h)$.

$$\begin{aligned} \|\tau_h c_\varepsilon(t) - c_\varepsilon(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|\tau_h s_\varepsilon(t) - s_\varepsilon(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ \leq \|\tau_h c_0 - c_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|\tau_h s_0 - s_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Théorème de **Fréchet-Kolmogorov** $\implies \{(c_\varepsilon(t, \cdot), s_\varepsilon(t, \cdot))\}_{\varepsilon > 0}$ est relativement **localement compact** dans $(L^1(\mathbb{R}^d))^2 \quad \forall t \in [0, T]$.

Pour montrer la **compacité relative globale** dans $(L^1(\mathbb{R}^d))^2 \forall t \in [0, T]$, On multiplie

$$\partial_t c_\varepsilon + \operatorname{div} \mathbf{A}_\varepsilon(c_\varepsilon) - \operatorname{div} \left(\varphi'_\varepsilon(c_\varepsilon) \nabla c \right) = -k c_\varepsilon s_\varepsilon$$

par $|x|^2/2$ et on intègre par parties :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|x|^2}{2} c_\varepsilon \, dx - \int_{\mathbb{R}^d} x \cdot \mathbf{A}_\varepsilon(c_\varepsilon) \, dx - d \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(c_\varepsilon) \, dx \leq 0.$$

Pour montrer la **compacité relative globale** dans $(L^1(\mathbb{R}^d))^2 \forall t \in [0, T]$, On multiplie

$$\partial_t c_\varepsilon + \operatorname{div} \mathbf{A}_\varepsilon(c_\varepsilon) - \operatorname{div} \left(\varphi'_\varepsilon(c_\varepsilon) \nabla c \right) = -k c_\varepsilon s_\varepsilon$$

par $|x|^2/2$ et on intègre par parties :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|x|^2}{2} c_\varepsilon dx - \int_{\mathbb{R}^d} x \cdot \mathbf{A}_\varepsilon(c_\varepsilon) dx - d \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(c_\varepsilon) dx \leq 0.$$

On pose $\mathcal{R}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|x|^2}{2} c_\varepsilon dx$ et $M(t) = \int_{\mathbb{R}^d} c_\varepsilon dx$, on aura

$$\frac{d}{dt} \mathcal{R}(t) \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^d} |x| c_\varepsilon dx + \int_{\mathbb{R}^d} c_\varepsilon dx \right) \leq C(\mathcal{R}(t) + M(t)),$$

Puisque $M(t) \leq M(0)$ et $\mathcal{R}(0)$ est fini, le lemme de Gronwall $\implies \mathcal{R}(t)$ est borné par une valeur indépendante de ε . Ceci implique l'équi-intégrabilité de $\{c_\varepsilon\}_\varepsilon$. De même pour $\{s_\varepsilon\}_\varepsilon \dots$

Finalement, d'après le Lemme 1, $\forall 0 < t_1 < t_2 < T - \eta$,

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [t_1, t_2]} \|c_\varepsilon(t + \eta) - c_\varepsilon(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \sup_{t \in [t_1, t_2]} \|s_\varepsilon(t + \eta) - s_\varepsilon(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \sup_{t \in [t_1, t_2]} \left\| \int_0^\eta \partial_t c_\varepsilon(t + \xi) d\xi \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \sup_{t \in [t_1, t_2]} \left\| \int_0^\eta \partial_t s_\varepsilon(t + \xi) d\xi \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \beta\eta \|\nabla c_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \eta \|\Delta \varphi_\varepsilon(u_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + 2k\eta \|c_0 s_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Théorème Ascoli $\implies \{(c_\varepsilon, s_\varepsilon)\}_\varepsilon$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(0, T; L^1(\mathbb{R}^d))^2$. Par conséquent, on peut extraire une sous-suite $(c_\varepsilon, s_\varepsilon)$ qui converge dans $\mathcal{C}(0, T; L^1(\mathbb{R}^d))^2$ vers (c, s) .

En passant à la limite, on déduit que (c, s) est solution du problème P_k et satisfait les propriétés de la proposition 1.

Etape 2. Relaxation des hypothèses de régularité sur (c_0, s_0) .

Etape 2. Relaxation des hypothèses de régularité sur (c_0, s_0) .

Soient c_0^n et s_0^n deux suites de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui convergent vers c_0 et s_0 dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Il existe une solution (c_n, s_n) correspondant aux données initiales (c_0^n, s_0^n) qui satisfait en particulier la **propriété de contraction**.

Par conséquent, (c_n, s_n) est une **suite de Cauchy** dans l'espace de Banach $\mathcal{C}(0, T; L^1(\mathbb{R}^d))$.

A fortiori, (c_n, s_n) converge dans $\mathcal{C}(0, T; L^1(\mathbb{R}^d))^2$ vers (c, s) qui est solution du problème P_k et satisfait les propriétés de la proposition 1. \diamond

Proposition 2

Quand k tend vers l'infini, la solution (c_k, s_k) de (P_k) , admet une limite dans $L^1((0, T) \times \mathbb{R}^d)^2$ notée par $(c, s) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^d))^2$ qui satisfait

$$(P_\infty) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t(c - s) + \operatorname{div} \mathbf{A}(c) - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 \varphi_{ij}(c)}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^d), \\ c \geq 0, \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^d \times (0, T), \\ s \geq 0, \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^d \times (0, T), \\ cs = 0, \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^d \times (0, T), \\ c(0, x) - s(0, x) = c_0(x) - s_0(x), \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^d. \end{array} \right.$$

Proposition 2

Quand k tend vers l'infini, la solution (c_k, s_k) de (P_k) , admet une limite dans $L^1((0, T) \times \mathbb{R}^d)^2$ notée par $(c, s) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^d))^2$ qui satisfait

$$(P_\infty) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t(c - s) + \operatorname{div} \mathbf{A}(c) - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 \varphi_{ij}(c)}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^d), \\ c \geq 0, \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^d \times (0, T), \\ s \geq 0, \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^d \times (0, T), \\ cs = 0, \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^d \times (0, T), \\ c(0, x) - s(0, x) = c_0(x) - s_0(x), \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^d. \end{array} \right.$$

Remarque : (P_∞) est équivalent à :

$$(Q_\infty) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t w + \operatorname{div} \mathbf{A}(w_+) - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 \varphi_{ij}(w_+)}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^d), \\ w(0, x) = c_0(x) - s_0(x) \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^d. \end{array} \right.$$

Comme $c \geq 0$, $s \geq 0$ et $cs = 0$, la transformation $(c, s) \rightarrow w = c - s$ est inversible. En effet, si $w > 0$ alors $c = w$, $s = 0$ et si $w < 0$ alors $s = -w$, $c = 0$. Ainsi, $c = w_+$

Preuve de la proposition 2

Pour $h \in \mathbb{R}^d$, $\tau_h c_k(t, x) = c_k(t, x + h)$ et $\tau_h s_k(t, x) = s_k(t, x + h)$.

Soit $\omega(\cdot)$ le module initial L^1 de continuité

$$\omega(h) = \sup_{|\bar{h}| \leq h} \|c^0(\cdot + \bar{h}) - c^0(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|s^0(\cdot + \bar{h}) - s^0(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

► **Compacité de s_k .** En intégrant $\partial_t s_k = -k c_k s_k$ et en utilisant $s_k \geq 0$, on obtient pour tout $T > 0$,

$$k \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} c_k s_k \, dx \, dt = - \int_{\mathbb{R}^d} (s_k(T, x) - s_k(0, x)) \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} s_0 \, dx \stackrel{\text{def}}{=} m_0.$$

Ainsi, on a

$$k \|c_k s_k\|_{L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)} \leq m_0,$$

et

$$c_k s_k \rightarrow 0 \text{ in } L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d) \text{ quand } k \rightarrow \infty.$$

On a aussi $\|\partial_t s_k\|_{L^1_{t,x}} \leq m_0$, et comme

$$\begin{aligned} \|\tau_h s_k - s_k\|_{L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)} &\leq T \|\tau_h c_0 - c_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + T \|\tau_h s_0 - s_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq T \omega(|h|), \end{aligned}$$

On déduit la **compacité locale** de $(s_k)_k$ dans $L^1((0, T) \times \mathbb{R}^d)$.

On a aussi $\|\partial_t s_k\|_{L^1_{t,x}} \leq m_0$, et comme

$$\begin{aligned} \|\tau_h s_k - s_k\|_{L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)} &\leq T \|\tau_h c_0 - c_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + T \|\tau_h s_0 - s_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq T \omega(|h|), \end{aligned}$$

On déduit la **compacité locale** de $(s_k)_k$ dans $L^1((0, T) \times \mathbb{R}^d)$.

Montrons la **compacité** de $(c_k)_k$.

► **Compacité en espace**: En vertu de la propriété de contraction, on a :

$$\begin{aligned} \|\tau_h c_k - c_k\|_{L^1((0, T) \times \mathbb{R}^d)} &\leq T \|\tau_h c_0 - c_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + T \|\tau_h s_0 - s_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq T \omega(|h|). \end{aligned}$$

On a aussi $\|\partial_t s_k\|_{L^1_{t,x}} \leq m_0$, et comme

$$\begin{aligned} \|\tau_h s_k - s_k\|_{L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)} &\leq T \|\tau_h c_0 - c_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + T \|\tau_h s_0 - s_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq T \omega(|h|), \end{aligned}$$

On déduit la **compacité locale** de $(s_k)_k$ dans $L^1((0, T) \times \mathbb{R}^d)$.

Montrons la **compacité de** $(c_k)_k$.

► **Compacité en espace:** En vertu de la propriété de contraction, on a :

$$\begin{aligned} \|\tau_h c_k - c_k\|_{L^1((0, T) \times \mathbb{R}^d)} &\leq T \|\tau_h c_0 - c_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + T \|\tau_h s_0 - s_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq T \omega(|h|). \end{aligned}$$

► **Compacité en temps.**

Pour $\eta \in \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_\eta c_k(t, x) = c_k(t + \eta, x)$.

Soit ε une constante positive constant qui sera fixée par la suite, et soit

$\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ une suite de régularisation s'annulant en dehors de la boule de rayon ε centerée en 0.

Soient t_1 et t_2 tels que $0 < t_1 < t_2 < T - \eta$, on a

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{T}_\eta c_k - c_k| &\leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{T}_\eta c_k - \mathcal{T}_\eta(c_k * \rho_\varepsilon)| + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |c_k * \rho_\varepsilon - c_k| \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{T}_\eta(c_k * \rho_\varepsilon) - c_k * \rho_\varepsilon|. \end{aligned}$$

Soient t_1 et t_2 tels que $0 < t_1 < t_2 < T - \eta$, on a

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{T}_\eta c_k - c_k| &\leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{T}_\eta c_k - \mathcal{T}_\eta(c_k * \rho_\varepsilon)| + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |c_k * \rho_\varepsilon - c_k| \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{T}_\eta(c_k * \rho_\varepsilon) - c_k * \rho_\varepsilon|. \end{aligned}$$

Le **premier** et le **second** term du second membre sont traité de la mête façon :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |c_k * \rho_\varepsilon - c_k| \leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{|y| < \varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} |c_k(t, x - y) - c_k(t, x)| \leq T \omega(\varepsilon).$$

Soient t_1 et t_2 tels que $0 < t_1 < t_2 < T - \eta$, on a

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{T}_\eta c_k - c_k| &\leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{T}_\eta c_k - \mathcal{T}_\eta(c_k * \rho_\varepsilon)| + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |c_k * \rho_\varepsilon - c_k| \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{T}_\eta(c_k * \rho_\varepsilon) - c_k * \rho_\varepsilon|. \end{aligned}$$

Le **premier** et le **second** term du second membre sont traité de la mêm façon :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |c_k * \rho_\varepsilon - c_k| \leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{|y| < \varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} |c_k(t, x - y) - c_k(t, x)| \leq T \omega(\varepsilon).$$

Pour le **troisième** terme du second membre, On note

$$\partial_t(c_k * \rho_\varepsilon) = - \sum_{i=1}^d A_i(c_k) * \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_i} + \varphi(c_k) * \Delta \rho_\varepsilon - (k c_k s_k) * \rho_\varepsilon,$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{T}_\eta(c_k * \rho_\varepsilon) - c_k * \rho_\varepsilon| &\leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\xi=0}^{\eta} |\partial_t(c_k * \rho_\varepsilon)(t + \xi, x)| \\
&\leq \frac{\eta}{\varepsilon} \|\mathbf{A}(c_k)\|_{L^1_{t,x}} + \frac{\eta}{\varepsilon^2} \|\varphi(c_k)\|_{L^1_{t,x}} + \eta \|kc_k s_k\|_{L^1_{t,x}} \\
&\leq C \left(\eta + \frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{\eta}{\varepsilon^2} \right),
\end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de ε , η et k .

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{T}_\eta(c_k * \rho_\varepsilon) - c_k * \rho_\varepsilon| &\leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\xi=0}^{\eta} |\partial_t(c_k * \rho_\varepsilon)(t + \xi, x)| \\
&\leq \frac{\eta}{\varepsilon} \|\mathbf{A}(c_k)\|_{L^1_{t,x}} + \frac{\eta}{\varepsilon^2} \|\varphi(c_k)\|_{L^1_{t,x}} + \eta \|kc_k s_k\|_{L^1_{t,x}} \\
&\leq C \left(\eta + \frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{\eta}{\varepsilon^2} \right),
\end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de ε , η et k .

Ainsi, en choisissant $\varepsilon = \eta^{1/3}$, il existe une constante $C > 0$, indépendante de k , telle que

$$\|\mathcal{T}_\eta c_k - c_k\|_{L^1((t_1, t_2) \times \mathbb{R}^d)} \leq C \left(\eta^{1/3} + \omega(\eta^{1/3}) \right).$$

Par conséquent, on a la **compacité locale** de $(c_k)_k$ dans $L^1((0, T) \times \mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{T}_\eta(c_k * \rho_\varepsilon) - c_k * \rho_\varepsilon| &\leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\xi=0}^{\eta} |\partial_t(c_k * \rho_\varepsilon)(t + \xi, x)| \\
&\leq \frac{\eta}{\varepsilon} \|\mathbf{A}(c_k)\|_{L^1_{t,x}} + \frac{\eta}{\varepsilon^2} \|\varphi(c_k)\|_{L^1_{t,x}} + \eta \|kc_k s_k\|_{L^1_{t,x}} \\
&\leq C \left(\eta + \frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{\eta}{\varepsilon^2} \right),
\end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de ε , η et k .

Ainsi, en choisissant $\varepsilon = \eta^{1/3}$, il existe une constante $C > 0$, indépendante de k , telle que

$$\|\mathcal{T}_\eta c_k - c_k\|_{L^1((t_1, t_2) \times \mathbb{R}^d)} \leq C \left(\eta^{1/3} + \omega(\eta^{1/3}) \right).$$

Par conséquent, on a la **compacité locale** de $(c_k)_k$ dans $L^1((0, T) \times \mathbb{R}^d)$.

Equi-intégrabilité de $(c_k)_k$ et $(s_k)_k$ idem que la preuve de la Proposition 1.

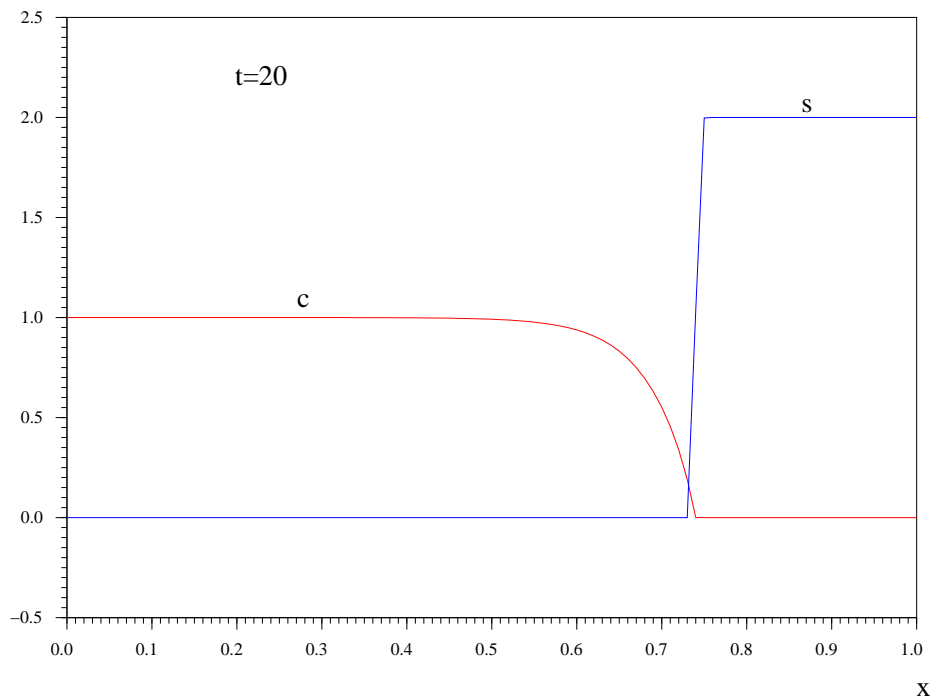
On déduit que la famille $(c_k, s_k)_k$ est **relativement compact dans**

$L^1((0, T) \times \mathbb{R}^d)$, et ainsi, par extraction, $(c_k, s_k) \rightarrow (c, s)$ dans $L^1((0, T) \times \mathbb{R}^d)$ quand $k \rightarrow \infty$. En passant à la limite, on obtient (P_∞) .

Exemple 1D: $k = 10^4$, $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ et $u = 0.1$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = -k c s,$$

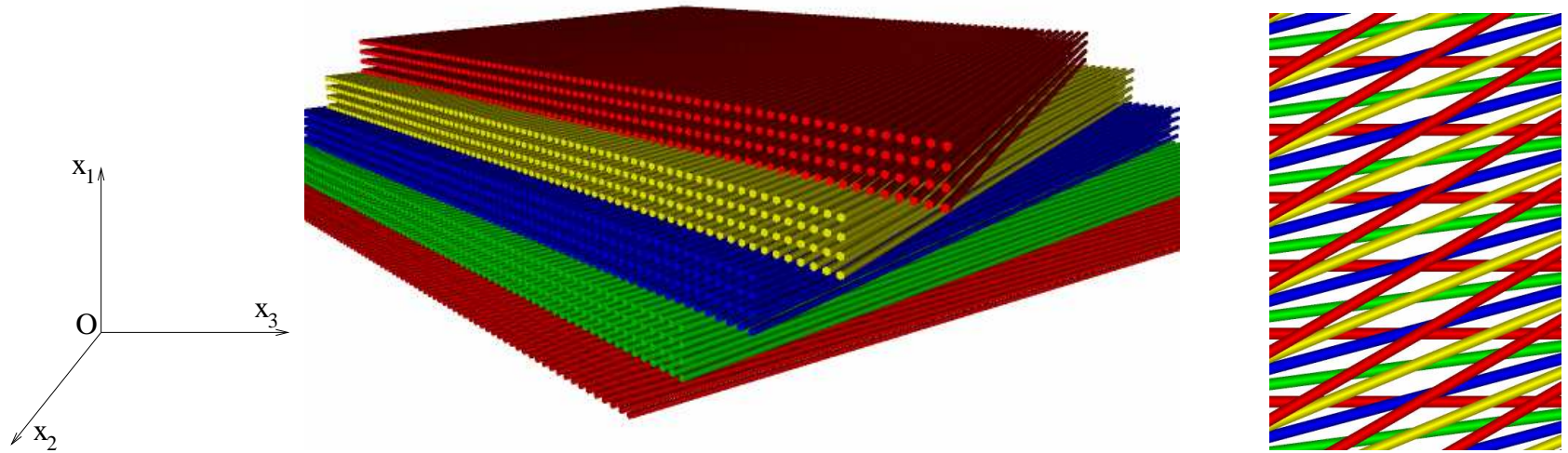
$$\frac{\partial s}{\partial t} = -k c s,$$



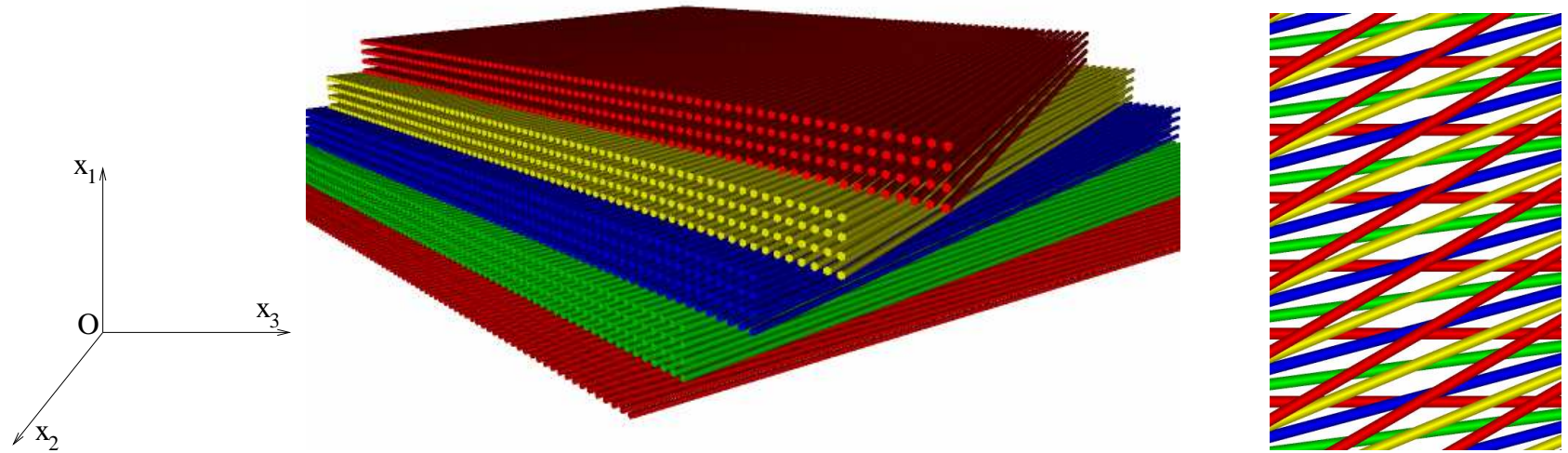
III. Ecoulement dans un milieu fibreux

→ Cas des fibrés localement stratifiés ([M. Briane](#), *M2AN*, 1993)

→ Cas des fibrés localement stratifiés (M. Briane, *M2AN*, 1993)



→ Cas des fibrés localement stratifiés (M. Briane, *M2AN*, 1993)



- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ composé de N_ε couches $\Omega^{\varepsilon,n}$
- Epaisseur suivant Ox_1 de chaque couche est ε^r , avec $0 < r < 1$.
- Soit $x^{\varepsilon,n}$ un point arbitraire dans $\Omega^{\varepsilon,n}$, pour $n = 1, \dots, N_\varepsilon$ et γ une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$
- Dans la couche $\Omega^{\varepsilon,n}$: réseau périodique, de périodicité ε , de fibres cylindriques, dont les axes sont parallèles, perpendiculaires à Ox_1 et font avec Ox_2 un angle $\gamma_{\varepsilon,n} = \gamma(x_1^{\varepsilon,n})$: $1/\varepsilon^{1-r}$ rangées de fibres.

→ $R \in (0, 1)$, $\mathcal{Y} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ et soit χ la fonction \mathcal{Y} -périodique définie sur \mathcal{Y} par :

$$\chi(y) = 1 \quad \text{si } |y| \leq R, \quad \text{et } \chi(y) = 0 \quad \text{si } |y| > R.$$

→ $\mathcal{Y}_F = \{y \in \mathcal{Y}, \chi(y) = 0\}$

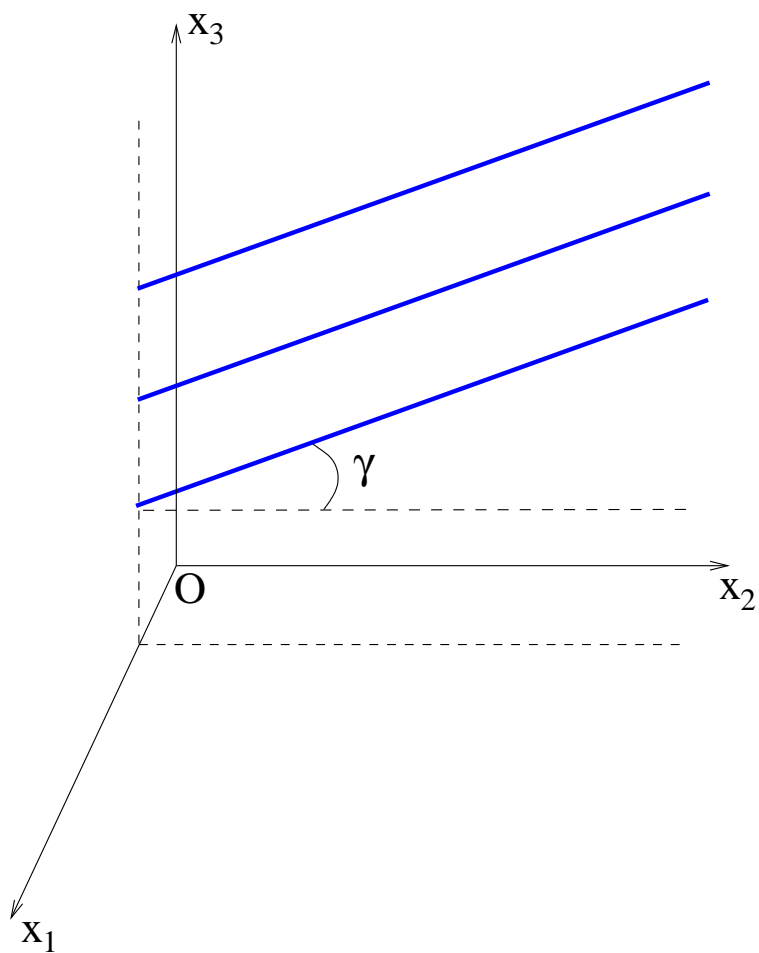
→ Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, et $\zeta \in \mathbb{R}$, on définit

$$\rho(\zeta, x) = \begin{cases} x_1 \\ x_3 \cos \gamma(\zeta) - x_2 \sin \gamma(\zeta) \end{cases}$$

→ dans la couche n , le domaine fibreux est défini par

$$\Omega_s^{\varepsilon, n} = \left\{ x \in \Omega, \chi \left(\frac{\rho(x_1^{\varepsilon, n}, x)}{\varepsilon} \right) = 1 \right\},$$

et le domaine fluide $\Omega^{\varepsilon, n}$ par : $\Omega^{\varepsilon, n} = \Omega^{\varepsilon, n} \setminus \bar{\Omega}_s^{\varepsilon, n}$



$$\rho(x_1^{\varepsilon, n}, x) = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_3 \cos \gamma(x_1^{\varepsilon, n}) - x_2 \sin \gamma(x_1^{\varepsilon, n}) \end{vmatrix}$$

→ Ecoulement lent visqueux et incompressible : **équations de Stokes**

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u}^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon &= \mathbf{f} && \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon &= 0 && \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ \mathbf{u}^\varepsilon &= 0 && \text{sur } \partial\Omega^\varepsilon. \end{aligned}$$

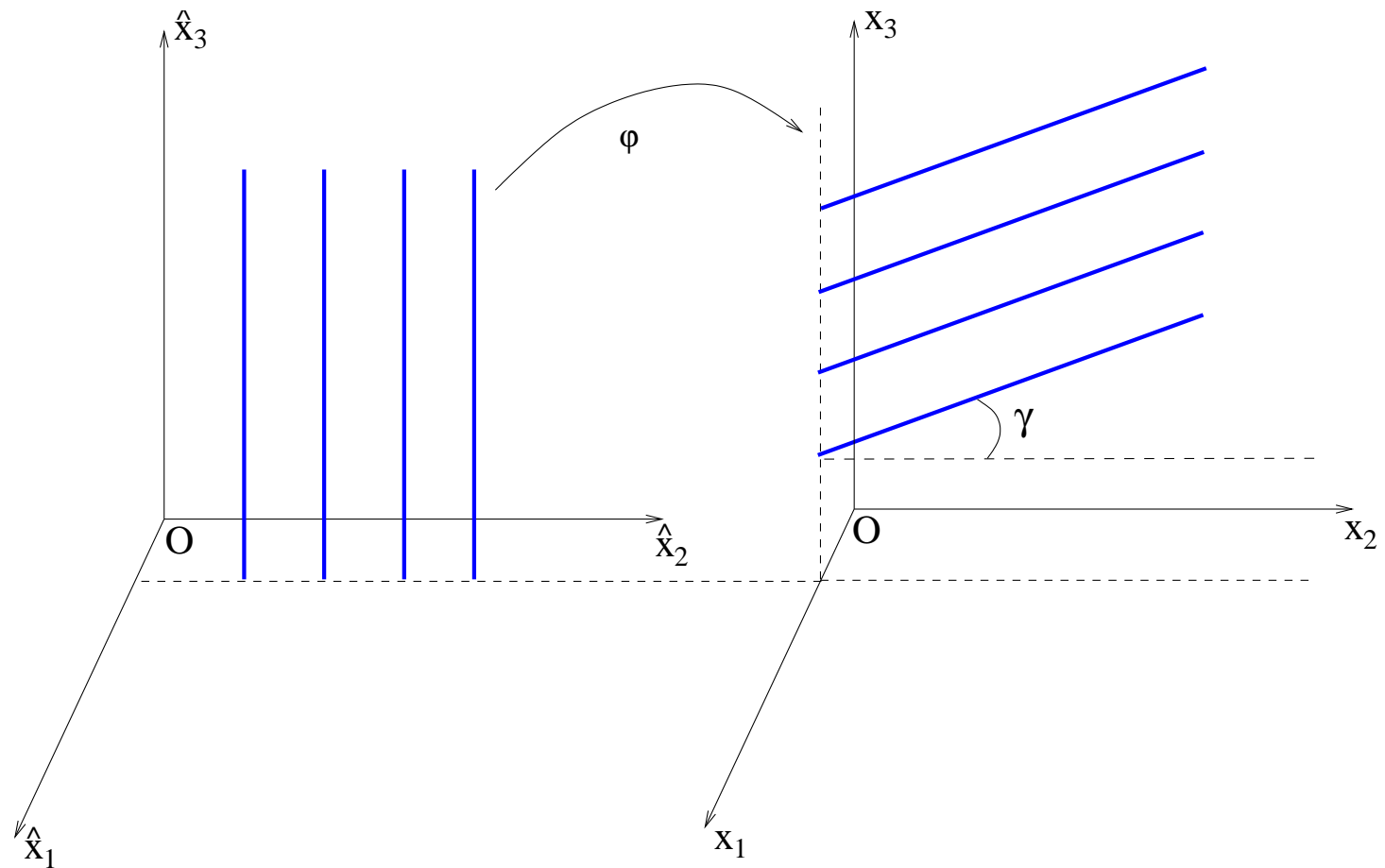
→ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^r} = 0 \implies$ Homogénéisation localement stratifiée ($\Omega^{\varepsilon,n}$)

→ \mathbf{u} et p admettent les développements asymptotiques suivants

$$\mathbf{u}^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 \mathbf{u}^0 \left(x, \frac{\rho(x_1^{\varepsilon,n}, x)}{\varepsilon} \right) + \dots$$

$$p^\varepsilon(x) = p^0 \left(x, \frac{\rho(x_1^{\varepsilon,n}, x)}{\varepsilon} \right) + \varepsilon p^1 \left(x, \frac{\rho(x_1^{\varepsilon,n}, x)}{\varepsilon} \right) + \dots$$

➔ On introduit la transformation $\varphi_{\varepsilon,n} : \hat{\Omega}^{\varepsilon,n} \rightarrow \Omega^{\varepsilon,n}$.



➔ On définit \hat{u} dans la configuration de référence par $\hat{u}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = u(x_1, x_2, x_3)$, avec $(x_1, x_2, x_3) = \varphi_{\varepsilon,n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$.

Notations:

→ Gradient de déformation : $\mathbf{F} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_j} \right]_{i,j=1,\dots,3}$.

→ $J = \det \mathbf{F}$

→ $\mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1}$

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = \varphi_{\varepsilon,n}^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1 \\ -x_2 \sin \gamma_{\varepsilon,n} + x_3 \cos \gamma_{\varepsilon,n} \\ -x_2 \cos \gamma_{\varepsilon,n} - x_3 \sin \gamma_{\varepsilon,n} \end{cases}$$

Pour ce choix, on a

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \gamma_{\varepsilon,n} & \cos \gamma_{\varepsilon,n} \\ 0 & -\cos \gamma_{\varepsilon,n} & -\sin \gamma_{\varepsilon,n} \end{bmatrix}, \quad J = 1, \quad \mathbf{G}\mathbf{G}^T = Id$$

En utilisant : $\nabla p = \mathbf{G}^T \nabla_{\hat{x}} \hat{p}$, $\nabla \mathbf{u} = \nabla_{\hat{x}} \hat{\mathbf{u}} \mathbf{G}$, $\operatorname{div}_{\hat{x}}(J \nabla \hat{\mathbf{u}} \mathbf{G}^T) = J \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u})$

On a dans la configuration de référence :

$$\begin{aligned} -\nu \operatorname{div}_{\hat{x}}(J \nabla_{\hat{x}} \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon \mathbf{G} \mathbf{G}^T) + \operatorname{div}_{\hat{x}}(J \hat{p}^\varepsilon \mathbf{G}^T) &= J \hat{\mathbf{f}} && \text{in } \hat{\Omega}^{\varepsilon, n}, \\ \operatorname{div}_{\hat{x}}(J \mathbf{G} \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon) &= 0 && \text{in } \hat{\Omega}^{\varepsilon, n}, \\ \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon &= 0 && \text{on } \partial \hat{\Omega}^{\varepsilon, n}. \end{aligned}$$

Développement à deux-échelles : Dans la configuration de référence $\hat{\Omega}^{\varepsilon, n}$, les fonctions $\hat{\mathbf{u}}$ et \hat{p} admettent les développements asymptotiques suivants :

$$\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon(\hat{x}) = \varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}^0 \left(\hat{x}, \frac{\hat{x}_1}{\varepsilon}, \frac{\hat{x}_2}{\varepsilon} \right) + \dots$$

$$\hat{p}^\varepsilon(x) = \hat{p}^0 \left(x, \frac{\hat{x}_1}{\varepsilon}, \frac{\hat{x}_2}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \hat{p}^1 \left(\hat{x}, \frac{\hat{x}_1}{\varepsilon}, \frac{\hat{x}_2}{\varepsilon} \right) + \dots$$

avec $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$. Soit $\hat{z} = (\hat{z}_1, \hat{z}_2) = (\hat{x}_1/\varepsilon, \hat{x}_2/\varepsilon)$ l'échelle fine (rapide).

Après identification des différents puissances en ε :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu \Delta_{\hat{z}_1, \hat{z}_2} \hat{u}_1^0 + \frac{\partial \hat{p}^1}{\partial \hat{z}_1} = \hat{f}_1 - \frac{\partial \hat{p}^0}{\partial \hat{x}_1} \\ -\nu \Delta_{\hat{z}_1, \hat{z}_2} \hat{u}_2^0 - \sin \gamma_{\varepsilon, n} \frac{\partial \hat{p}^1}{\partial \hat{z}_2} = \hat{f}_2 - \sin \gamma_{\varepsilon, n} \frac{\partial \hat{p}^0}{\partial \hat{x}_2} - \cos \gamma_{\varepsilon, n} \frac{\partial \hat{p}^0}{\partial \hat{x}_3} \\ -\nu \Delta_{\hat{z}_1, \hat{z}_2} \hat{u}_3^0 + \cos \gamma_{\varepsilon, n} \frac{\partial \hat{p}^1}{\partial \hat{z}_2} = \hat{f}_3 + \cos \gamma_{\varepsilon, n} \frac{\partial \hat{p}^0}{\partial \hat{x}_2} - \sin \gamma_{\varepsilon, n} \frac{\partial \hat{p}^0}{\partial \hat{x}_3} \\ \frac{\partial \hat{u}_1^0}{\partial \hat{z}_1} + \frac{\partial}{\partial \hat{z}_2} \left(-\hat{u}_2^0 \sin \gamma_{\varepsilon, n} + \hat{u}_3^0 \cos \gamma_{\varepsilon, n} \right) = 0 \end{array} \right.$$

Impossible de séparer les échelles dans ce système mais le second membre ne dépend pas des variables rapides.

On introduit les **problèmes des cellules**:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\hat{z}_1, \hat{z}_2} \omega_1^j(x_1, \hat{z}_1, \hat{z}_2) + \partial_{\hat{z}_1} \pi^j = \delta_{1j} \quad \text{dans } \mathcal{Y}_F, \\ -\Delta_{\hat{z}_1, \hat{z}_2} \omega_2^j(x_1, \hat{z}_1, \hat{z}_2) - \sin \gamma(x_1) \partial_{\hat{z}_2} \pi^j = \delta_{2j} \quad \text{dans } \mathcal{Y}_F, \\ -\Delta_{\hat{z}_1, \hat{z}_2} \omega_3^j(x_1, \hat{z}_1, \hat{z}_2) + \cos \gamma(x_1) \partial_{\hat{z}_2} \pi^j = \delta_{3j} \quad \text{dans } \mathcal{Y}_F, \\ \partial_{\hat{z}_1} \omega_1^j + \partial_{\hat{z}_2} (-\sin \gamma(x_1) \omega_2^j + \cos \gamma(x_1) \omega_3^j) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{Y}_F, \\ \omega^j(x_1, \hat{z}_1, \hat{z}_2) = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{Y}_F \setminus \partial \mathcal{Y}, \\ \{\omega^j, \pi^j\} \text{ est } \mathcal{Y}\text{-périodique en } (\hat{z}_1, \hat{z}_2), \end{array} \right.$$

Alors, la fonction u^0 est donnée par

$$u^0(x, z_1, z_2) = \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^3 \left(f_j(x) - \frac{\partial p^0}{\partial x_j}(x) \right) \omega^j(x_1, z_1, z_2)$$

La pression efficace p^0 dépend uniquement de x et elle est solution du problème de **Darcy** :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^D(x) &= \frac{\mathbf{K}(x_1)}{\nu} (\mathbf{f} - \nabla p^0(x)), & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^D &= 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^D \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

où la matrice de perméabilité $\mathbf{K} = [K_{i,j}]_{i,j=1\dots 3}$ est donnée par

$$K_{ij}(x_1) = \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}_F} \omega_i^j(x_1, z_1, z_2) dz_1 dz_2$$

Résolution efficace des problèmes des cellules :

Soient $(U_1^j(z_1, z_2), U_2^j(z_1, z_2), P^j(z_1, z_2))$, $j = 1, 2$ les solutions du problème de Stokes 2D:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{z_1, z_2} U_1^j + \partial_{z_1} P^j = \delta_{1j} \quad \text{dans } \mathcal{Y}_F, \\ -\Delta_{z_1, z_2} U_2^j + \partial_{z_2} P^j = \delta_{2j} \quad \text{dans } \mathcal{Y}_F, \\ \partial_{z_1} U_1^j + \partial_{z_2} U_2^j = 0 \quad \text{dans } \mathcal{Y}_F, \\ U_1^j = U_2^j = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{Y}_F \setminus \partial\mathcal{Y}, \\ \{U_1^j, U_2^j, P^j\} \text{ est } \mathcal{Y}\text{-périodique en } z_1, z_2, \end{array} \right.$$

et soit $V(z_1, z_2)$ la solution du problème de Poisson 2D:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta V = 1 \quad \text{dans } \mathcal{Y}_F, \\ V = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{Y}_F \setminus \partial\mathcal{Y}, \\ V \text{ est } \mathcal{Y}\text{-périodique en } z_1, z_2. \end{array} \right.$$

$$\mathbf{K}(x_1) = \mathbf{R}(x_1) \mathbf{K}_0 \mathbf{R}^{-1}(x_1)$$

avec

$$\mathbf{K}_0 = \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{Y}_F} U_1^1 & 0 & \int_{\mathcal{Y}_F} U_1^2 \\ 0 & \int_{\mathcal{Y}_F} V & 0 \\ \int_{\mathcal{Y}_F} U_2^1 & 0 & \int_{\mathcal{Y}_F} U_2^2 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{R}(x_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma(x_1) & -\sin \gamma(x_1) \\ 0 & \sin \gamma(x_1) & \cos \gamma(x_1) \end{bmatrix}$$

Limite de faible fraction solide : diamètre de la fibre $\rightarrow 0+$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\perp} \end{pmatrix}$$

où K_{\parallel} (resp. K_{\perp}) correspond à la perméabilité dans la direction parallèle (resp. orthogonale) aux fibres.

$$K_{\parallel} = \frac{a^2}{4\varphi} \left(\log(1/\varphi) - 1.5 + 2\varphi - \frac{\varphi^2}{2} \right),$$

$$K_{\perp} = \frac{a^2}{8\varphi} \left(\log(1/\varphi) + \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^2 + 1} \right).$$

Notre expression pour la perméabilité avec $\gamma(x_1) = 0$ est :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \bar{K}_{11} & 0 & \bar{K}_{12} \\ 0 & \bar{V} & 0 \\ \bar{K}_{21} & 0 & \bar{K}_{22} \end{pmatrix}$$

où \bar{K}_{ij} et \bar{V} sont définies par

$$\bar{V} = \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}_F} V \quad \text{and} \quad \bar{K}_{ij} = \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}_F} U_j^i$$

But: **COMPARER** K_{\parallel} avec \bar{V} et

$$\begin{pmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} K_{\perp} & 0 \\ 0 & K_{\perp} \end{pmatrix}$$

But: **COMPARER** K_{\parallel} avec \bar{V} et

$$\begin{pmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} K_{\perp} & 0 \\ 0 & K_{\perp} \end{pmatrix}$$

Résultats de (G. Allaire, 1995) \implies

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{|\log \eta| |\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}_F} U_k^j dy = \frac{\delta_{jk}}{\pi}$$

et

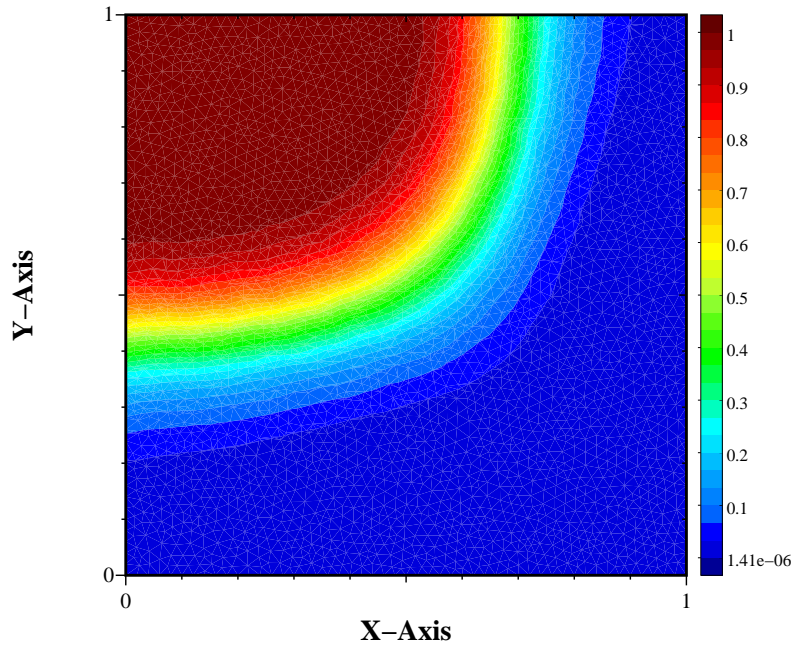
$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{|\log \eta| |\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}_F} V(y) dy = \frac{2}{\pi}$$

\rightarrow permet de montrer que nos résultats redonnent le premier terme des formules connues

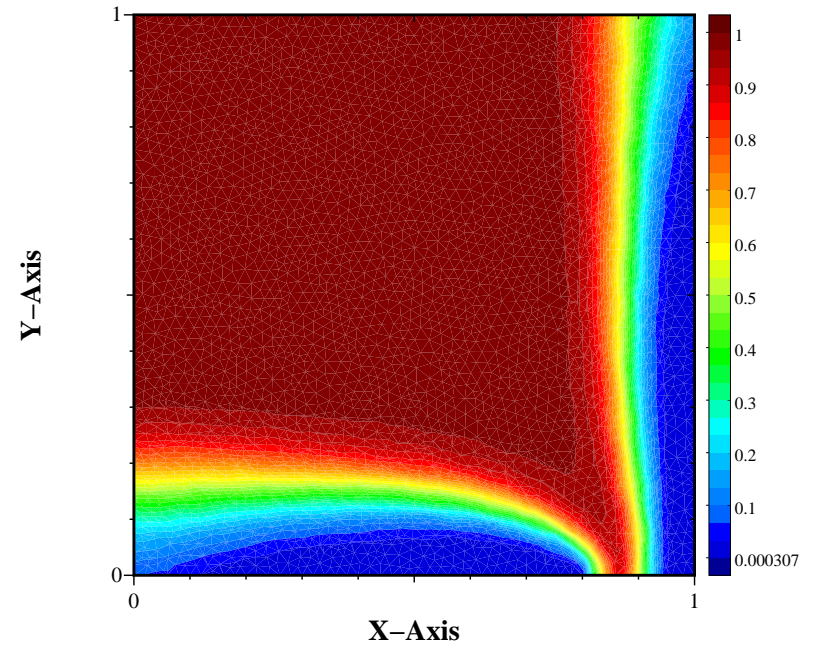
IV. Quelques simulations

Un exemple de transport réaction en 2D

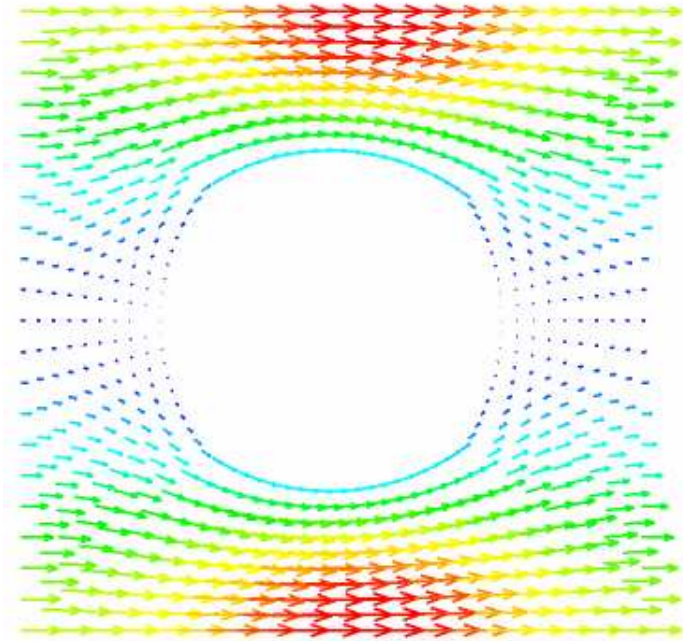
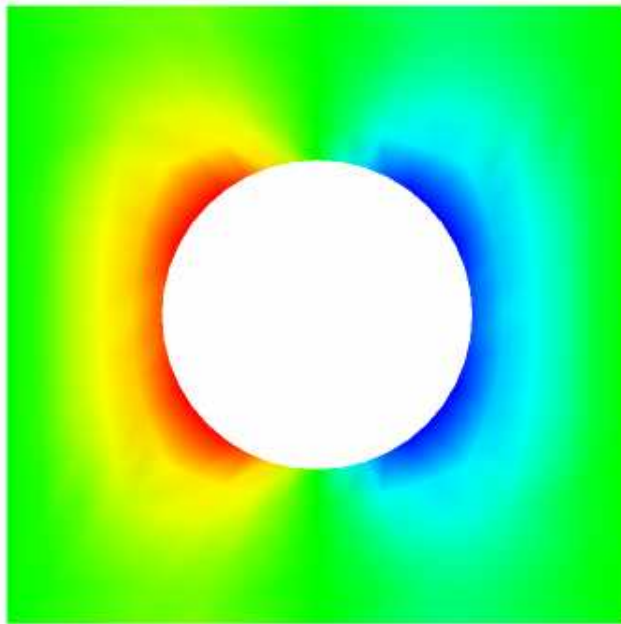
$t = 503.$



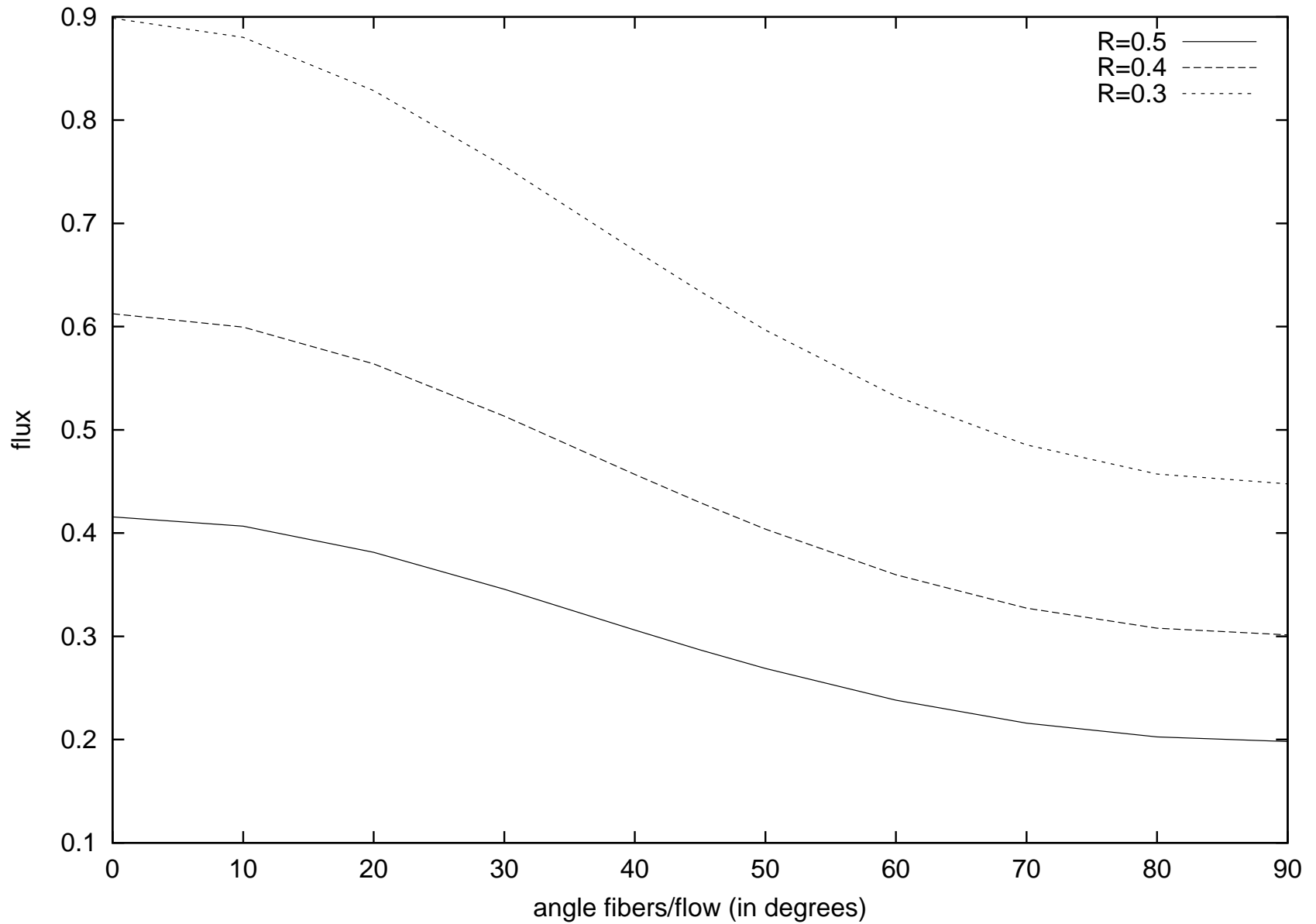
$t = 1199.$



- ➔ Problèmes de cellules périodiques 2D: éléments finis Q2/P1
- ➔ Equations de Darcy 3D: éléments finis RT0/P0 (www.lifev.org)
- ➔ Equations de transports 3D: schémas combinés volume finis-éléments finis mixte hybrides (www.lifev.org)

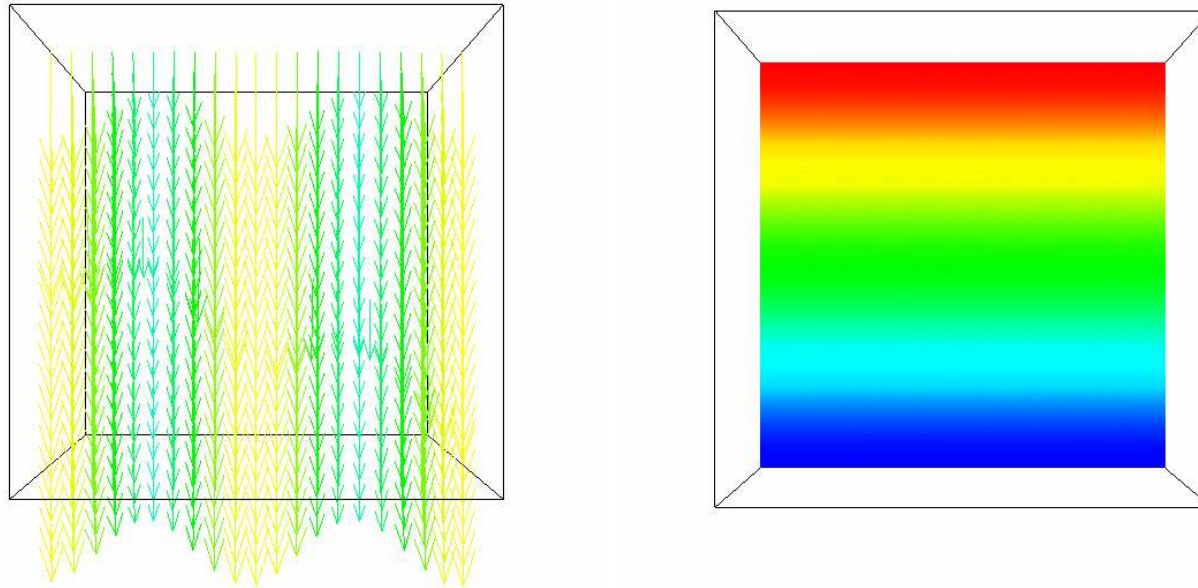


Influence de l'orientation : $\gamma(x_1) = 0$



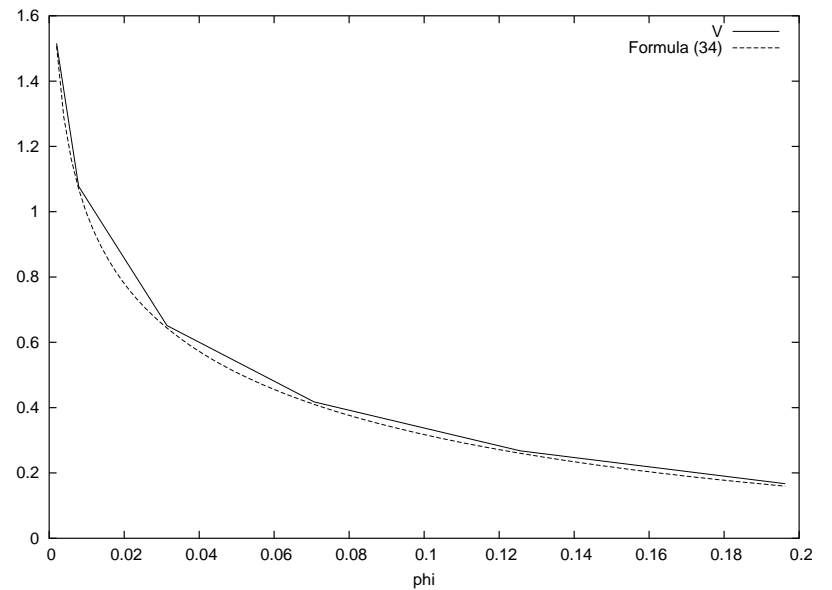
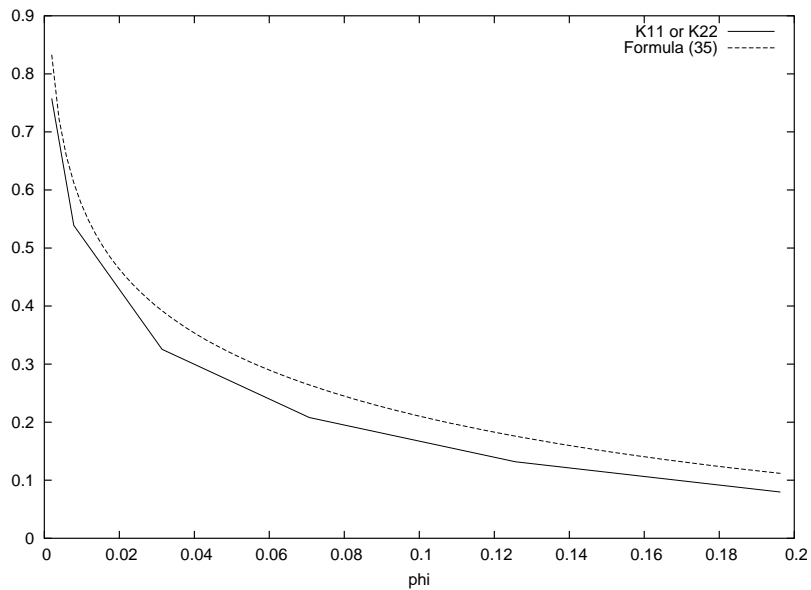
Influence de l'orientation : $\gamma(x_1) = 2\pi x_1$

Un exemple: pression constante en $y = 0$ et $y = 1$

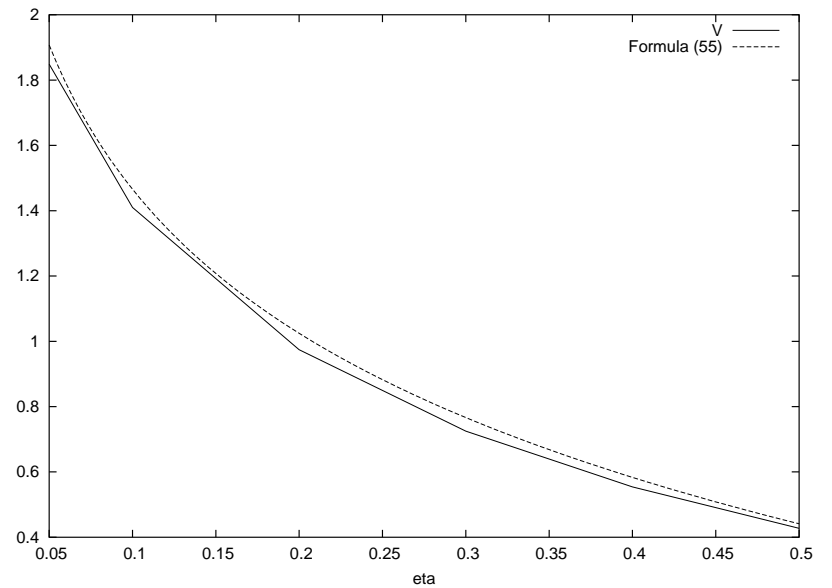
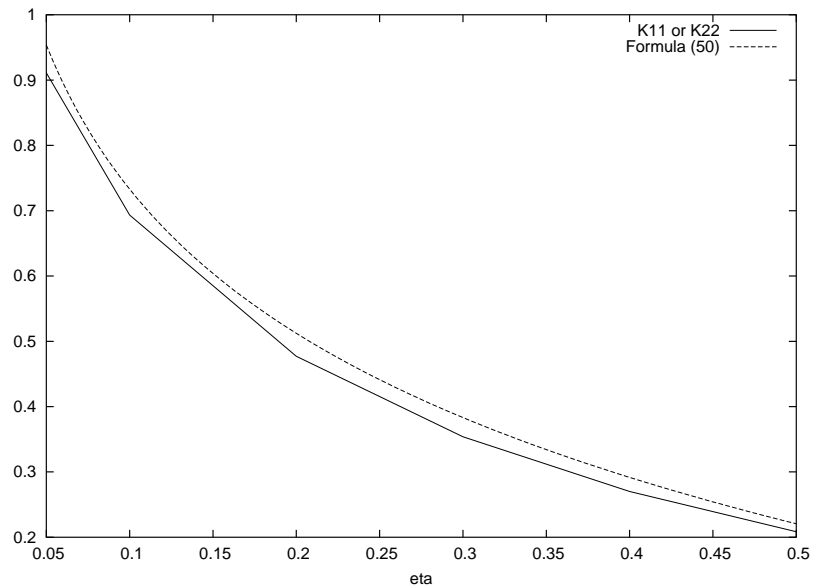


simulation 3D, transport réaction en milieu fibreux

- Fibres avec sections circulaires
- Fraction solide 0.2 to 0.002



- Fibres avec sections carrés
- Fraction solide 0.05 to 0.5



Conclusion:

- ➔ Nous avons proposé un modèle de filtration des globules blancs
- ➔ Nous avons réalisé des expériences qui n'ont malheureusement pas permis de valider le modèle
- ➔ Nous avons effectué une analyse mathématique de ce modèle
- ➔ Nous avons proposé une méthode de calcul de la perméabilité d'un milieu fibreux

Suites possibles:

Conclusion:

- ➔ Nous avons proposé un modèle de filtration des globules blancs
- ➔ Nous avons réalisé des expériences qui n'ont malheureusement pas permis de valider le modèle
- ➔ Nous avons effectué une analyse mathématique de ce modèle
- ➔ Nous avons proposé une méthode de calcul de la perméabilité d'un milieu fibreux

Suites possibles:

- ➔ Sang total: trop difficile ! Ne considérer la filtration que d'une lignée cellulaire

Conclusion:

- ➔ Nous avons proposé un modèle de filtration des globules blancs
- ➔ Nous avons réalisé des expériences qui n'ont malheureusement pas permis de valider le modèle
- ➔ Nous avons effectué une analyse mathématique de ce modèle
- ➔ Nous avons proposé une méthode de calcul de la perméabilité d'un milieu fibreux

Suites possibles:

- ➔ Sang total: trop difficile ! Ne considérer la filtration que d'une lignée cellulaire
- ➔ D'autres problèmes dont les modèles sont proches:
 - ➔ Modélisation de la perfusion dans le myocarde
 - ➔ Pénétration de l'oxygène et des lipoprotéines dans les parois vasculaires

Conclusion:

- ➔ Nous avons proposé un modèle de filtration des globules blancs
- ➔ Nous avons réalisé des expériences qui n'ont malheureusement pas permis de valider le modèle
- ➔ Nous avons effectué une analyse mathématique de ce modèle
- ➔ Nous avons proposé une méthode de calcul de la perméabilité d'un milieu fibreux

Suites possibles:

- ➔ Sang total: trop difficile ! Ne considérer la filtration que d'une lignée cellulaire
- ➔ D'autres problèmes dont les modèles sont proches:
 - ➔ Modélisation de la perfusion dans le myocarde
 - ➔ Pénétration de l'oxygène et des lipoprotéines dans les parois vasculaires