Chapitre 1

Etude théorique

1.1 Position du problème

On considère deux corps déformables occupant deux domaines Ω_L^+ et Ω_L^- de $\mathbb{R}^2$. Les deux corps sont en contact à travers une zone Γ_c.

$$\begin{aligned}\Omega_L^+ &= \{(x_1,x_2)/ \quad 0 < x_1 < L_1, \quad 0 < x_2 < L_2\}\\ \Omega_L^- &= \{(x_1,x_2)/ \quad 0 < x_1 < L_1, \quad -l < x_2 < 0\}\,,\end{aligned}$$

où L_1,L_2 et l sont les dimensions des deux corps, (cf. Figure 1.1). Un déplacement horizontal $(\hat{s},0)$ est imposé sur la partie $\Gamma^+_{u,L}$ de la frontière du corps Ω_L^+, $\hat{s}$ ne dépend que du x_1 et de t. Le corps Ω_L^- est encastré sur $\Gamma^-_{u,L}$. De plus le contact entre les deux corps est supposé vérifier une loi de frottement de type Coulomb non-local quasi-statique. L'ensemble des deux corps est soumis à une force volumique $\hat{f}$.

Notations:

$$\begin{aligned}\Omega_L &= \Omega_L^+ \cup \Omega_L^-\\ \Gamma_{u,L} &= \Gamma^+_{u,L} \cup \Gamma^-_{u,L}\\ \Gamma_{lat,L} &= \Gamma^+_{lat,L} \cup \Gamma^-_{lat,L}\end{aligned}$$

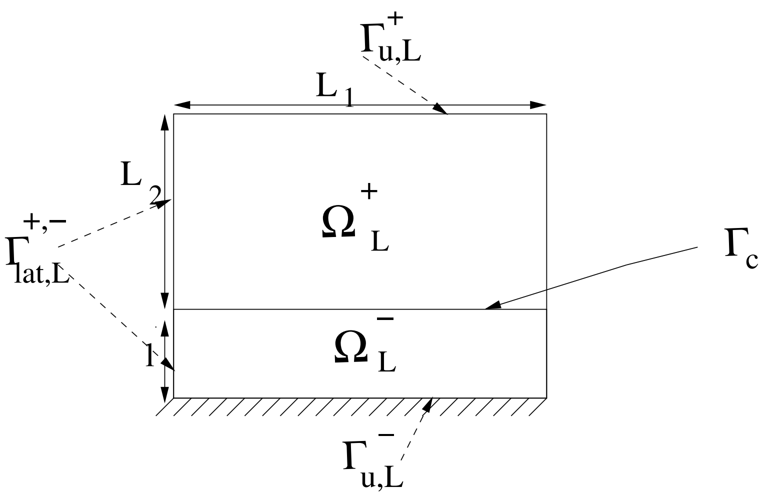


FIG. 1.1 – *Contact de deux corps élastiques*

Remarque 1 L'indice L est relatif au domaine réel avant l'adimensionnement qui sera effectué à partir de la section 1.2.

Le problème consiste à chercher le déplacement $\hat{u}$ et le tenseur de contraintes $\hat{\sigma}(\hat{u})$ tels que $\forall t \in (0,T)$

$$\begin{aligned}
div\,\hat{\sigma}(\hat{u}) + \hat{f} &= 0 && \text{dans } \Omega_L && (1.1)\\
\hat{\sigma}(\hat{u}).n &= 0 && \text{sur } \Gamma_{lat,L} && (1.2)\\
\hat{u} &= (\hat{s},0) && \text{sur } \Gamma^+_{u,L} && (1.3)\\
\hat{u} &= (0,0) && \text{sur } \Gamma^-_{u,L}. && (1.4)
\end{aligned}$$

Avec la convention des indices répétés, la loi d'élasticité linéaire est donnée par

$$\hat{\sigma}(\hat{u}) = \begin{cases} \lambda^+ e_{kk}(\hat{u})\delta_{ij} + 2\mu^+ e_{ij}(\hat{u}) & \text{dans } \Omega_L^+ \\ \lambda^- e_{kk}(\hat{u})\delta_{ij} + 2\mu^- e_{ij}(\hat{u}) & \text{dans } \Omega_L^-, \end{cases} \tag{1.5}$$

où μ^+ and λ^+ (resp. μ^-, λ^-) sont les coefficients de Lamé dans Ω_L^+ (resp. dans Ω_L^-), et (e_{ij}) est le tenseur de déformation défini par:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right).$$

Remarque 2 Pour ne pas alourdir l'écriture, et s'il n' y a pas d'ambiguïté, on note dans la suite $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(\hat{u})$.

La normale unitaire sur Γ_c considérée comme une partie de la frontière de Ω_L^+ (resp. de Ω_L^-) est notée $n^+ = (n_i^+)$ (resp. $n^- = (n_i^-)$), avec :
$n^+ = -n^- = (0,-1)$.
On définit les composantes normales et tangentielles du déplacement et du tenseur de contraintes sur Γ_c pour $\alpha = \pm$ par :

$$\hat{u}_N^\alpha = \hat{u}_i^\alpha n_i^\alpha, \qquad \hat{u}_T^\alpha = \hat{u}^\alpha - \hat{u}_N^\alpha n^\alpha. \tag{1.6}$$

$$\hat{\sigma}_N^\alpha = \hat{\sigma}_{ij}^\alpha n_i^\alpha n_j^\alpha, \qquad \hat{\sigma}_{T_i}^\alpha = \hat{\sigma}_{ij}^\alpha n_j^\alpha - \hat{\sigma}_N^\alpha n_i^\alpha. \tag{1.7}$$

Remarque 3 Les principes de la mécanique des milieux continus impliquent l'égalité des contraintes normale et tangentielle à travers la zone de contact Γ_c, qu'elles soient définies en considérant Γ_c comme une partie du bord de Ω_L^+ ou de Ω_L^-:

$$\hat{\sigma}^+ n^+ = -\hat{\sigma}^- n^- \qquad \textit{sur } \Gamma_c. \tag{1.8}$$

On note alors

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_N &= \hat{\sigma}_N^+ = \hat{\sigma}_N^-,\\
\hat{\sigma}_T &= \hat{\sigma}_T^+ = -\hat{\sigma}_T^-.
\end{aligned}$$

Sur l'interface Γ_c, les conditions de contact unilatéral sont

$$[\hat{u}_N] \leq 0, \quad \hat{\sigma}_N \leq 0, \quad \hat{\sigma}_N[\hat{u}_N] = 0 \quad \text{ sur } \Gamma_c \tag{1.9}$$

où $[v_T] = v_T^+ - v_T^-$, $\quad [v_N] = v^+.n^+ + v^-.n^-$, sont les sauts normaux et tangentiels à travers l'interface Γ_c d'un déplacement v.
Sur Γ_c, la loi de frottement non locale de Coulomb, où apparaît la vitesse notée $\dot{\hat{u}}$, est donnée par

$$\begin{cases} |\hat{\sigma}_T| \leq k|\hat{S}(\hat{\sigma}_N)| \\ |\hat{\sigma}_T| < k|\hat{S}(\hat{\sigma}_N)| \Longrightarrow [\dot{\hat{u}}_T] = 0 \\ |\hat{\sigma}_T| = k|\hat{S}(\hat{\sigma}_N)| \Longrightarrow \exists \nu \geq 0; \quad [\dot{\hat{u}}_T] = -\nu\, \hat{\sigma}_T, \end{cases} \tag{1.10}$$

où k est le coefficient du frottement et $\hat{S}$ est un opérateur linéaire compact introduit pour régulariser la force du contact normale et $\dot{\hat{u}}$ désigne la dérivée temporelle.
La condition initiale est:

$$\hat{u}(t=0) = \hat{u}_0 \qquad \text{dans} \quad \Omega_L. \tag{1.11}$$

Remarque 4 On peut montrer sans difficulté (voir par exemple [5]) que la loi (1.10) est équivalente à (le . désigne le produit scalaire usuel)

$$\begin{cases} |\hat{\sigma}_T| \leq k|\hat{S}(\hat{\sigma}_N)| \\ k|\hat{S}(\hat{\sigma}_N)||[\dot{\hat{u}}_T]| + \hat{\sigma}_T.[\dot{\hat{u}}_T] = 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

1.2 Translation et adimensionnement

Afin d'avoir des conditions au bord homogènes, on effectue un changement d'inconnue sur la première composante du déplacement en notant

$$\begin{cases} \tilde{u}_1 = \hat{u}_1 - \dfrac{\hat{s}}{L_2} x_2 & \text{dans } \Omega_L^+ \\ \tilde{u}_1 = \hat{u}_1 & \text{dans } \Omega_L^- \\ \tilde{u}_2 = \hat{u}_2 & \text{dans } \Omega_L. \end{cases}$$

Soit la matrice

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \partial_1 \hat{s} \dfrac{x_2}{L_2} & \hat{s} \dfrac{x_2}{2L_2} \\ \hat{s} \dfrac{x_2}{2L_2} & 0 \end{pmatrix},$$

en notant par $\tilde{\sigma}(\tilde{u})$ ou plus simplement $\tilde{\sigma}$ le correspondant de $\hat{\sigma}(\hat{u})$ après le changement de fonctions inconnues, le problème (1.1)-(1.11) devient

$$div\,\tilde{\sigma}(\tilde{u}) + \hat{f} = 0 \quad \text{dans } \Omega_L \tag{1.13}$$

$$\tilde{\sigma}(\tilde{u})n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{lat,L} \tag{1.14}$$

$$\tilde{u} = (0,0) \quad \text{sur } \Gamma_{u,L} \tag{1.15}$$

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{u}) = \begin{cases} \lambda^+(e_{kk}(\tilde{u}) + \hat{C}_{kk})\delta_{ij} + 2\mu^+(e_{ij}(\tilde{u}) + \hat{C}_{ij}) & \text{dans } \Omega_L^+ \\ \lambda^- e_{kk}(\tilde{u})\delta_{ij} + 2\mu^- e_{ij}(\tilde{u}) & \text{dans } \Omega_L^- \end{cases} \tag{1.16}$$

$$\tilde{\sigma}_N^+ = \tilde{\sigma}_N^- = \tilde{\sigma}_N = (\tilde{\sigma}^\alpha n_i^\alpha n_j^\alpha,\ \ \alpha = \pm) \text{ sur } \Gamma_c \tag{1.17}$$

$$\tilde{\sigma}_T^+ = -\tilde{\sigma}_T^- = \tilde{\sigma}_T \quad \text{sur } \Gamma_c \tag{1.18}$$

$$[\tilde{u}_N] \leq 0,\ \ \tilde{\sigma}_N \leq 0,\ \ \tilde{\sigma}_N.[\tilde{u}_N] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \tag{1.19}$$

$$\begin{cases} |\tilde{\sigma}_T| \leq k|\hat{S}(\tilde{\sigma}_N)| \\ k|\hat{S}(\tilde{\sigma}_N)||[\dot{\tilde{u}}_T]| + \tilde{\sigma}_T.[\dot{\tilde{u}}_T] = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_c \tag{1.20}$$

$$\tilde{u}(t=0) = \tilde{u}_0 \quad \text{dans } \Omega_L. \tag{1.21}$$

On adimensionne les domaines en introduisant

$$\begin{aligned} X &= \frac{x_1}{L_1} \quad \forall x_1 \in [0,L_1] \\ Y &= \frac{x_2}{L_2} \quad \forall x_2 \in [0,L_2] \\ Z &= \frac{x_2}{l} \quad \forall x_2 \in [-l,0]. \end{aligned} \tag{1.22}$$

On note les nouveaux domaines :

$$\begin{aligned} &\Omega^+ = \{(X,Y)/ \quad 0 < X < 1, \quad 0 < Y < 1\}, \\ &\Omega^- = \{(X,Z)/ \quad 0 < X < 1, \quad -1 < Z < 0\}, \\ &\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-. \end{aligned}$$

Les nouvelles frontières sont notées par:

$$\begin{aligned} \Gamma_u^+ &= \{(X,1)/ \quad 0 < X < 1\}, \qquad \Gamma_u^- = \{(X,-1)/ \quad 0 < X < 1\}, \\ \Gamma_u &= \Gamma_u^+ \cup \Gamma_u^-, \\ \Gamma_{lat}^+ &= \{(0,Y)/ \quad 0 < Y < 1\} \cup \{(1,Y)/ \quad 0 < Y < 1\}, \\ \Gamma_{lat}^- &= \{(0,Z)/ \quad -1 < Z < 0\} \cup \{(1,Z)/ \quad -1 < Z < 0\}, \\ \Gamma_{lat} &= \Gamma_{lat}^+ \cup \Gamma_{lat}^-. \end{aligned}$$

Soit Γ_c l'interface de contact qui est identifiée au segment $[0,1]$. (on garde la même notation qu'avant le rescaling).

Le changement d'inconnues est noté par

$$\begin{aligned}
u(X,Y) &= \tilde{u}(XL_1,YL_2) = \tilde{u}(x_1,x_2) \quad \forall(X,Y)\in\Omega^+\\
u(X,Z) &= \tilde{u}(XL_1,Zl) \quad = \tilde{u}(x_1,x_2) \quad \forall(X,Z)\in\Omega^-\\
\sigma(X,Y) &= \tilde{\sigma}(XL_1,YL_2) = \tilde{\sigma}(x_1,x_2) \quad \forall(X,Y)\in\Omega^+\\
\sigma(X,Z) &= \tilde{\sigma}(XL_1,Zl) \quad = \tilde{\sigma}(x_1,x_2) \quad \forall(X,Z)\in\Omega^-.
\end{aligned}$$

Le tenseur de déformation correspondant à $e(\tilde{v})$ après l'adimensionnement est:

$$e_{ij}^{ad}(v) = \begin{cases} \frac{1}{2}(L_i^{-1}\partial_i v_j + L_j^{-1}\partial_j v_i) & \text{dans } \Omega^+\\ \frac{1}{2}(l_i^{-1}\partial_i v_j + l_j^{-1}\partial_j v_i) & \text{dans } \Omega^-, \text{ où } l_1 = L_1 \text{ et } l_2 = l. \end{cases} \tag{1.23}$$

On note par

$$(div_L\tau)_j = \begin{cases} \sum_i L_i^{-1}\partial_i\tau_{ij} & \text{dans } \Omega^+\\ \sum_i l_i^{-1}\partial_i\tau_{ij} & \text{dans } \Omega^-, \text{ avec } l_1 = L_1 \text{ et } l_2 = l. \end{cases}$$

Le problème (1.13)-(1.21) devient

$$(div_L\sigma)_j = f_j \quad \text{dans } \Omega \tag{1.24}$$
$$\sigma(u)n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{lat} \tag{1.25}$$
$$u = (0,0) \quad \text{sur } \Gamma_u \tag{1.26}$$
$$\sigma_{ij}(u) = \begin{cases} \lambda^+(L_1^{-1}\partial_1 u_1 + L_2^{-1}\partial_2 u_2 + \mathcal{C}_{kk})\delta_{ij} + 2\mu^+\left(e_{ij}^{ad}(u) + \mathcal{C}_{ij}\right) & \text{dans } \Omega^+\\ \lambda^-(L_1^{-1}\partial_1 u_1 + l^{-1}\partial_2 u_2)\delta_{ij} + 2\mu^- e_{ij}^{ad}(u) & \text{dans } \Omega^- \end{cases} \tag{1.27}$$
$$\sigma_N^+ = \sigma_N^- = \sigma_N \quad \text{sur } \Gamma_c \tag{1.28}$$
$$\sigma_T^+ = -\sigma_T^- = \sigma_T \quad \text{sur } \Gamma_c \tag{1.29}$$
$$[u_N] \le 0,\ \sigma_N \le 0,\ \sigma_N.[u_N] = 0 \text{ sur } \Gamma_c \tag{1.30}$$
$$\begin{cases} |\sigma_T| \le k|S(\sigma_N)|\\ k|S(\sigma_N)||[\dot{u}_T]| + \sigma_T.[\dot{u}_T] = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_c \tag{1.31}$$
$$u(t=0) = u_0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{1.32}$$

où

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} L_1^{-1}\partial_1 sY & s\dfrac{Y}{2}\\ s\dfrac{Y}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le choix de σ_{ij} est tel que les relations entre σ_N, σ_T et σ soient conservées.

1.3 Cadre fonctionnel, espaces des traces et espaces duaux

Pour l'étude du problème (1.24)-(1.32), on introduit le cadre fonctionnel suivant:

$$V^\alpha = \{v \in \left(H^1(\Omega^\alpha)\right)^2, v = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\alpha\},\ \alpha = \pm. \tag{1.33}$$

Cet espace est muni de la norme $\|\cdot\|_{V^\alpha}$ qui est la norme usuelle de l'espace $\left(H^1(\Omega^\alpha)\right)^2$.

$$V \ = V^1 \times V^2. \tag{1.34}$$

$$K \ = \{v = (v_1,v_2) \in V; [v_N] \le 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_c\}. \tag{1.35}$$

$$\Sigma^\pm = \{\tau \in \left(L^2(\Omega^\pm)\right)^4; \tau_{ij} = \tau_{ji},\ i,j = 1,2,\ div_L\tau = \sum_i L_i^{-1}\partial_i\tau_{ij} \in L^2(\Omega^\pm)^2\} \tag{1.36}$$

et est muni de la norme $\|\tau\|_{\Sigma^\alpha} = \left(\|\tau\|^2_{L^2(\Omega^\alpha)} + \|div_L\tau\|^2_{L^2(\Omega^\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \alpha = \pm.$

$$\Sigma \ = \Sigma^+ \cup \Sigma^-. \tag{1.37}$$

On introduit les opérateurs suivants:

$$\begin{aligned}
F^+(v) &= \int_{\Omega^+} f_i v_i L_1 L_2 dX dY, \quad F^-(v) = \int_{\Omega^-} f_i v_i L_1 l dX dZ,\\
F(v) \ &= F^+(v) + F^-(v)\\
\mathcal{L}(v) \ &= \int_{\Omega^+} \left(\lambda^+\mathcal{C}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu^+\mathcal{C}_{ij}\right) e^{ad}_{ij}(v) L_1 L_2 dX dY\\
j(u,v) &= L_1 \int_{\Gamma_c} k|S(\sigma_N(u))|\,|[v_T]|\,dx_1.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Remarque 5 L'opérateur S qui apparaît dans le terme $j(\cdot,\cdot)$ est défini de $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)\right)'$ dans $L^2(\Gamma_c)$ comme étant un opérateur linéaire et compact régularisant la composante normale du tenseur des contraintes. Cette composante sera définie rigoureusement dans (1.56).

Remarque 6 Compte tenu des égalités (1.28) et (1.29), le terme $\sigma_N(u)$ qui apparaît dans (1.38) peut être considéré indifferemment comme $\sigma_N^+(u)$ ou $\sigma_N^-(u)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^+(\sigma,\tau) &= \int_{\Omega^+} \sigma_{ij}\tau_{ij} L_1 L_2 dX dY, \qquad \mathcal{B}^-(\sigma,\tau) = \int_{\Omega^-} \sigma_{ij}\tau_{ij} L_1 l dX dZ\\
\mathcal{B}(\sigma,\tau) \ &= \mathcal{B}^+(\sigma,\tau) + \mathcal{B}^-(\sigma,\tau)\\
\mathcal{A}^+(u,\tau) &= \int_{\Omega^+} \left(\lambda^+ e^{ad}_{kk}(u)\delta_{ij} + 2\mu^+ e^{ad}_{ij}(u)\right)\tau_{ij} L_1 L_2 dX dY\\
\mathcal{A}^-(u,\tau) &= \int_{\Omega^-} \left(\lambda^- e^{ad}_{kk}(u)\delta_{ij} + 2\mu^- e^{ad}_{ij}(u)\right)\tau_{ij} L_1 l dX dZ\\
\mathcal{A}(u,\tau) \ &= \mathcal{A}^+(u,\tau) + \mathcal{A}^-(u,\tau)\\
\mathcal{S}(\tau) \ &= \int_{\Omega^+} \left(\lambda^+\mathcal{C}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu^+\mathcal{C}_{ij}\right)\tau_{ij} L_1 L_2 dX dY
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B^{+}(\sigma,v) &= \int_{\Omega^+} \sigma^{+} e^{ad}(v) L_1 L_2 dX dY, \qquad B^{-}(\sigma,v) = \int_{\Omega^-} \sigma^{-} e^{ad}(v) L_1 l dX dZ \\
B(\sigma,v) &= B^{+}(\sigma,v) + B^{-}(\sigma,v) \\
a^{+}(u,v) &= \lambda^{+} \int_{\Omega^+} (L_1^{-1}\partial_1 u_1 + L_2^{-1}\partial_2 u_2)(L_1^{-1}\partial_1 v_1 + L_2^{-1}\partial_2 v_2) L_1 L_2 dX dY \\
&\quad + 2\mu^{+} \int_{\Omega^+} (L_1^{-1}\partial_1 u_1)(L_1^{-1}\partial_1 v_1) L_1 L_2 dX dY \\
&\quad + 2\mu^{+} \int_{\Omega^+} (L_2^{-1}\partial_2 u_2)(L_2^{-1}\partial_2 v_2) L_1 L_2 dX dY \\
&\quad + 2\mu^{+} \int_{\Omega^+} (L_1^{-1}\partial_1 u_2 + L_2^{-1}\partial_2 u_1)(L_1^{-1}\partial_1 v_2 + L_2^{-1}\partial_2 v_1) L_1 L_2 dX dY \\
a^{-}(u,v) &= \lambda^{-} \int_{\Omega^-} (L_1^{-1}\partial_1 u_1 + l^{-1}\partial_2 u_2)(L_1^{-1}\partial_1 v_1 + l^{-1}\partial_2 v_2) L_1 l dX dZ \\
&\quad + 2\mu^{-} \int_{\Omega^-} (L_1^{-1}\partial_1 u_1)(L_1^{-1}\partial_1 v_1) L_1 l dX dZ \\
&\quad + 2\mu^{-} \int_{\Omega^-} (l^{-1}\partial_2 u_2)(l^{-1}\partial_2 v_2) L_1 l dX dZ \\
&\quad + 2\mu^{-} \int_{\Omega^-} (L_1^{-1}\partial_1 u_2 + l^{-1}\partial_2 u_1)(L_1^{-1}\partial_1 v_2 + l^{-1}\partial_2 v_1) L_1 l dX dZ \\
a(u,v) &= a^{+}(u,v) + a^{-}(u,v).
\end{aligned}
$$

1.3.1 Définitions

Soit $\alpha = \pm$ et γ l'application trace de $H^1(\Omega^\alpha)$. On définit $H_0^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^\alpha)$ par

$$H_0^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^\alpha) = \left\{\gamma v; v \in H^1(\Omega^\alpha) \text{ et } \gamma v = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\alpha\right\}. \tag{1.39}$$

Cet espace est muni de la norme suivante (voir par exemple [8])

$$\|\varphi\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega^\alpha} = \inf\{\|v\|_{H^1(\Omega^\alpha)}; \gamma v = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\alpha,\ \gamma v = \varphi \text{ sur } \partial\Omega^\alpha\}. \tag{1.40}$$

On définit l'espace $H_{0,\alpha}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ par la restriction à Γ_c des éléments de $H_0^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^\alpha)$. A cet espace on associe la norme suivante

$$\|\varphi\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c} = \inf\{\|v\|_{H^1(\Omega^\alpha)}; v = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\alpha, \gamma v = \varphi \text{ sur } \Gamma_c\}. \tag{1.41}$$

Comme $\Gamma_u^\alpha \cap \Gamma_c = \emptyset$ et les domaines Ω^+ et Ω^- sont symétriques alors les espaces $H_{0,\alpha}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$, $\alpha = \pm$ sont identiques, on les note par $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$.

On généralise la définition précédente à l'espace $\left[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)\right]^2$ que l'on munit de la norme suivante:

$$\|\varphi\|_{\mathbf{\frac{1}{2},\Gamma_c}} = \inf\left\{\|v\|_{V^\alpha}; v \in V^\alpha, \gamma v = \varphi \text{ sur } \Gamma_c\right\}. \tag{1.42}$$

On note $[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)]_T^2$ l'espace des composantes tangentielles sur Γ_c des éléments de V^α:

$$[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)]_T^2 = \{v_T;\ v \in V^\alpha\} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) \times \{0\}.$$

1.3.2 Equivalence des normes

Dans le paragraphe suivant, nous allons définir des relèvements permettant de construire des fonctions sur $\Omega^\pm$ à partir de leur valeurs normales et tangentielles sur Γ_c.

Pour $\alpha = \pm$, soit

$$\begin{array}{rcl} R_N^\alpha : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) & \longrightarrow & V^\alpha \\ \psi & \longrightarrow & R_N^\alpha \psi. \end{array} \tag{1.43}$$

$$\text{tel que } \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\int_{\Omega^\alpha} e_{ij}(R_N^\alpha \psi) e_{ij}(v) = 0 & \forall v \in V^\alpha \text{ tel que } \gamma v = 0 \text{ sur } \Gamma_c \\ (R_N^\alpha \psi)_N = \psi \text{ et } (R_N^\alpha \psi)_T = 0 & \text{sur } \Gamma_c. \end{array} \right.$$

$R_N^\alpha \psi$ est solution d'un problème d'élasticité dont la forme forte est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} div\, \sigma^\alpha(\psi) = 0 \ \text{ dans } \Omega^\alpha, & \text{avec } \sigma_{ij}^\alpha(\psi) = e_{ij}(R_N^\alpha \psi) \\ (R_N^\alpha \psi)_N = \psi, & \text{sur } \Gamma_c \\ (R_N^\alpha \psi)_T = 0, & \text{sur } \Gamma_c \\ \sigma^\alpha(\psi) n^\alpha = 0 & \text{sur } \Gamma_{lat}^\alpha \\ \gamma(R_N^\alpha \psi) = 0 & \text{sur } \Gamma_u^\alpha. \end{array} \right. \tag{1.44}$$

Proposition 1.3.1 *Pour tout $\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$, les trois normes $\|\psi\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c}$ et $\|R_N^\alpha \psi\|_{V^\alpha}, \alpha = \pm$ sont équivalentes.*

Preuve:

En utilisant la définition de R_N^α, la composante normale de $R_N^\alpha(\psi)$ est égale à ψ, et de la définition de $\|\cdot\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c}$, on déduit que :

$$\|\psi\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c} \leq \|R_N^\alpha \psi\|_{V^\alpha}. \tag{1.45}$$

Inversement, on considère l'image de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ par R_N^α notée

$$W^\alpha = R_N^\alpha \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) \right).$$

Puisque pour chaque $\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$, le problème (1.43) a une solution unique, et que la restriction de la trace normale sur Γ_c de chaque élément de W^α est unique, alors l'application R_N^α est une bijection de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ dans W^α. Considèrons son inverse $\left(R_N^\alpha\right)^{-1}$. Cette dernière bijection est linéaire puisque ce n'est rien d'autre qu'une application trace, et on obtient sa continuité à l'aide de l'inégalité (1.45).

De plus, comme W^α est un sous-espace fermé de l'espace de Banach V^α, donc W^α est aussi

un espace de Banach.
En utilisant le théorème d'homéomorphisme de Banach (voir e.g. [9]), on obtient que R_N^α est continue de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ dans W^α. Il existe donc une constante (absolue) C_1 telle que:

$$\|R_N^\alpha \psi\|_{V^\alpha} \leq C_1 \|\psi\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c} \qquad \forall \psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c). \tag{1.46}$$

Par conséquent, les trois normes $\|\psi\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c}$ et $\|R_N^\alpha \psi\|_{V^\alpha}, \alpha = \pm$ sont équivalentes. ■

On peut de la même façon définir R_T^α comme un relèvement dans Ω^α à partir des valeurs tangentielles définies sur Γ_c.

Pour $\alpha = \pm$, soit

$$\begin{array}{rcl} R_T^\alpha : [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)]_T^2 & \longrightarrow & V^\alpha \\ \psi & \longrightarrow & R_T^\alpha \psi. \end{array} \tag{1.47}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega^\alpha} e_{ij}(R_T^\alpha \psi) e_{ij}(v) = 0 & \forall v \in V^\alpha \text{ tel que } \gamma v = 0 \text{ sur } \Gamma_c \\ (R_T^\alpha \psi)_T = \psi \text{ et } (R_T^\alpha \psi)_N = 0 & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases}$$

En utilisant un argument analogue à celui de la proposition précédente, on obtient le résultat suivant:

Proposition 1.3.2 *Les trois normes* $\|\psi\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c}$ *et* $\|R_T^\alpha \psi\|_{V^\alpha}, \alpha = \pm$ *sont équivalentes sur* $[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)]_T^2$.

1.3.3 Notations

Nous récapitulons ici des constantes qui seront souvent utilisées par la suite :

C_1 = la constante de continuité du relèvement R_N défini dans (1.43).

$\bar{k} = \|k\|_{L^\infty(\Gamma_c)}$

C_S = la constante de continuité de l'opérateur S.

$C_2 = C_1\, C_S$.

$C^{\pm}_{Kor}$ = la constante de Korn correspondant à $\Omega^{\pm}_L$

$(L^{-1}_{max})^2 = max(L_1^{-1},1)max(L_1^{-1},L_2^{-1})$.

$$\alpha^+ = \lambda^+ L_1 L_2 \left(1 - C_2 \bar{k} L_2 C^+_{Kor} \max_i L_i^{-1}\right). \tag{1.48}$$

$$\beta^+ = L_1 L_2 \left(2\mu^+ - C_2 \bar{k} L_2 C^+_{Kor} \max_i L_i^{-1}(2\mu^+ + \lambda^+)\right). \tag{1.49}$$

$$\alpha^- = \lambda^- L_1 l \left(1 - C_2 \bar{k} l C^-_{Kor} \max_i l_i^{-1}\right). \tag{1.50}$$

$$\beta^- = L_1 l \left(2\mu^- - C_2 \bar{k} l C^-_{Kor} \max_i l_i^{-1}(2\mu^- + \lambda^-)\right). \tag{1.51}$$

$$I^+(f,s) =$$
$$L_1 L_2 \left[(2\mu^+ + \lambda^+)\|s\|_{H^1(0,1)} \left(max(L_1^{-1},1) + C^+_{Kor} L_2 C_2 \bar{k} (L^{-1}_{max})^2\right) + L_2 \|f\|_{L^2(\Omega^+)} C^+_{Kor}(1 + C_2 \bar{k})\right]. \tag{1.52}$$

$$C_3 = C_2 C^+_{Kor} L_2 \max_i L_i^{-1}.$$

$$C_4 = C_2 C^-_{Kor}.$$

1.3.4 Espaces duaux

Dans le problème fort, nous avons défini σ_N et σ_T comme étant les composantes normales et tangentielles sur Γ_c du tenseur de contraintes σ, mais pour pouvoir définir une forme faible, nous avons besoin de donner un sens précis à ces deux composantes, car contrairement au cas statique [1], [7], les contraintes normales subsistent explicitement dans la forme faible.

Il est bien connu (voir par exemple [6]) que pour $\tilde{\sigma} \in \{\tau \in \left(L^2(\Omega_L)\right)^4 ; \tau_{ij} = \tau_{ji},\ i,j = 1,2, div\tau \in L^2(\Omega_L)^2\}$, $\tilde{\sigma} n$ appartient à $[H_0^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_L)^2]^{'}$, et on a la formule de Green écrite dans le domaine réel Ω^α_L

$$\forall w \in [H_0^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^\alpha_L)]^2, \quad \ll \tilde{\sigma} n, w \gg_{\alpha,L} = \int_{\Omega^\alpha_L} \tilde{\sigma}.e(\bar{w}) + \int_{\Omega^\alpha_L} (div\tilde{\sigma})\bar{w}, \tag{1.53}$$

où $\bar{w} \in V^\alpha_L$ est pris tel que $\bar{w} = w$ p.p sur $\partial\Omega^\alpha_L$, et $\ll \cdot,\cdot \gg_{\alpha,L}$ est le produit de dualité sur $H_0^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^\alpha_L), H_0^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega^\alpha_L)$.

Après adimensionnement, on note par

$\ll\ ,\ \gg_\alpha$ le produit de dualité sur $H_0^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^\alpha)$, $H_0^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega^\alpha)$

$\boldsymbol{\ll\ ,\ \gg_\alpha}$ le produit de dualité sur $[H_0^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^\alpha)]^2$, $[H_0^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega^\alpha)]^2$,

$<\ ,\ >_\alpha$ le produit de dualité sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c), \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)\right)'$,

$\boldsymbol{<\ ,\ >_\alpha}$ le produit de dualité sur $[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)]^2, \left([H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)]^2\right)'$.

– Nous définissons par un processus analogue à (1.53) les contraintes normales et tangentielles relatives aux domaines Ω^α:

$$\begin{aligned}&\forall w \in [H_0^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^\alpha)]^2, \qquad L_1 \ll \sigma n, w \gg_\alpha = B^\alpha(\sigma,\bar{w}) + \int_{\Omega^\alpha} (div_L\sigma)\bar{w} L_1 L_2^\alpha,\\ &\text{où} \quad \bar{w} \in V^\alpha \ \text{ est tel que } \ \bar{w} = w \quad \text{p.p sur } \ \partial\Omega^\alpha.\end{aligned} \tag{1.54}$$

– On aura besoin de traduire la condition (1.25) à l'aide du produit de dualité. On l'imposera par la condition

$$\ll \sigma n, \varphi \gg_\alpha = 0 \quad \forall \varphi \in [C_0^\infty(\Gamma_{lat}^\alpha)]^2. \tag{1.55}$$

– Pour tout $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma n = 0$ sur Γ_{lat}, la contrainte normale sur Γ_c est définie par

$$\begin{aligned}&\forall \psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c), \qquad L_1 < \sigma_N,\psi >_\alpha = B^\alpha(\sigma,\bar{\psi}) - \int_{\Omega^\alpha} div_L(\sigma)\bar{\psi} L_1 L_2^\alpha,\\ &\text{où} \quad \bar{\psi} \in V^\alpha \text{ est tel que } \ \bar{\psi}_T = 0 \text{ sur } \Gamma_c \text{ et } \bar{\psi}_N = \psi \text{ sur } \Gamma_c.\end{aligned} \tag{1.56}$$

– Pour tout $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma n = 0$ sur Γ_{lat}, la contrainte tangentielle sur Γ_c est définie par

$$\begin{aligned}&\forall \psi \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)]_T^2, \qquad L_1 \boldsymbol{<} \sigma_T,\psi \boldsymbol{>}_\alpha = B^\alpha(\sigma,\bar{\psi}) - \int_{\Omega^\alpha} div_L(\sigma)\bar{\psi} L_1 L_2^\alpha.\\ &\text{où} \quad \bar{\psi} \in V^\alpha \ \text{ est tel que } \ \bar{\psi}_N = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_c \text{ et } \ \bar{\psi}_T = \psi \ \text{ sur } \ \Gamma_c.\end{aligned} \tag{1.57}$$

Remarque 7 On aurait pu choisir de définir σ_N et σ_T en limitant le choix des fonctions test à des fonctions prolongeables par 0 en dehors de Γ_c. Mais dans la formulation variationnelle (1.60)-(1.62) on n'aurait pas pu appliquer ces opérateurs à des fonctions test du type $(v - \dot{u})$. On a donc choisi d'inclure dans la définition de manière implicite la condition (1.25) pour n'imposer aucune condition à la fonction test sur le bord Γ_{lat}.
Comme pour la définition classique, l'indépendance du relèvement $\bar{\psi}$ dans les formules (1.56) et (1.57) se vérifie facilement.
Pour démontrer la continuité, on choisit dans (1.56) (resp. (1.57)) comme relèvement $\bar{\psi} = R_N^\alpha(\psi)$ (resp. $R_T^\alpha(\psi)$). Celui-ci est continue, d'après la proposition 1.3.1, et puisque l'opérateur $B^\alpha(\sigma^\alpha,\cdot) - \int_{\Omega^\alpha} div_L\sigma(\cdot)$ est continue, le résultat est prouvé.
On note $\forall v \in V$

$$< \sigma_N,[v_N] > = < \sigma_N^+,v_N^+ >_+ + < \sigma_N^-,v_N^- >_- \tag{1.58}$$

$$\boldsymbol{<} \sigma_T,[v_T] \boldsymbol{>} = \boldsymbol{<} \sigma_T^+,v_T^+ \boldsymbol{>}_+ + \boldsymbol{<} \sigma_T^-,v_T^- \boldsymbol{>}_- . \tag{1.59}$$

1.4 Formulation variationnelle et théorème d'existence

1.4.1 Formulation variationnelle

Proposition 1.4.1 *Le problème (1.24)-(1.32) est* $\ll$ *équivalent* $\gg$ ([1]) *au problème suivant*
Trouver (u,σ) *dans* $W^{1,2}(0,T;V) \times W^{1,2}(0,T;\Sigma)$ *tel que*
$u(0) = u_0$ *et* $\forall t \in (0,T), u(t) \in K$

$$\mathcal{B}(\sigma(t),\tau) = \mathcal{A}(u(t),\tau) + \mathcal{S}(\tau) \qquad \forall \tau \in \left(L^2(\Omega)\right)^4. \tag{1.60}$$

$$a\left(u(t),v - \dot{u}(t)\right) + \mathcal{L}(v - \dot{u}(t)) + j(u(t),v) - j(u,\dot{u}(t)) \geq F(v - \dot{u}(t)) + L_1 \left\langle \sigma_N(t), [v_N] - [\dot{u}_N(t)] \right\rangle \quad \forall v \in V. \tag{1.61}$$

$$\left\langle \sigma_N(u(t)), [z_N] - [u_N(t)] \right\rangle \geq 0 \quad \forall z \in K, \tag{1.62}$$

où σ_N *est défini en (1.58).*

Preuve: Supposons que (u,σ) solution de (1.24)-(1.32) soit suffisamment régulière.

– L'égalité (1.60) s'obtient en multipliant (1.27) par τ avec τ dans $\left(L^2(\Omega)\right)^4$ et en l'intégrant sur Ω.
– Sur chaque sous domaine Ω^α de Ω on effectue le produit de (1.24) avec $(v - \dot{u})L_1 L_2^\alpha$. En utilisant la formule de Green et l'égalité (1.60) et par addition, il vient

$$a(u,v - \dot{u}) + \mathcal{L}(v - \dot{u}) - L_1 \int_{\partial\Omega^+} \sigma^+ n^+ (v - \dot{u}) - L_1 \int_{\partial\Omega^-} \sigma^- n^- (v - \dot{u}) - F(v - \dot{u}) = 0 \qquad \forall v \in V.$$

En tenant compte des conditions au bord (1.25) et (1.26), et en utilisant l'égalité des forces de contact (1.28), (1.29) sur Γ_c, on a

$$a(u,v - \dot{u}) + \mathcal{L}(v - \dot{u}) - L_1 \int_{\Gamma_c} \sigma_N([v_N] - [\dot{u}_N]) - L_1 \int_{\Gamma_c} \sigma_T([v_T] - [\dot{u}_T]) - F(v - \dot{u}) = 0 \qquad \forall v \in V. \tag{1.63}$$

D'autre part d'après (1.31)

$$j(u,v) - j(u,\dot{u}) + L_1 \int_{\Gamma_c} \sigma_T([v_T] - [\dot{u}_T]) \geq 0 \qquad \forall v \in V. \tag{1.64}$$

En combinant (1.63) et (1.64), on obtient (1.61) après avoir remplacé l'intégrale sur Γ_c par le produit de dualité $< \cdot,\cdot >$.
– Enfin, (1.62) s'obtient facilement en multipliant σ_N par $v - u$ et en utilisant (1.30).

1. *L'équivalence est formelle puisque dans le problème (1.24)-(1.32), on ne précise pas dans quel espace on cherche la solution.*

Inversement, soit (u,σ) solution du problème faible (1.60)-(1.62), montrons que (u,σ) est solution du problème (1.24)-(1.32). En effet:

- Puisque $\sigma \in \Sigma$ alors l'égalité variationnelle (1.60) implique directement (1.27) au sens $L^2(\Omega)$.
- Dans (1.61) on choisit comme fonction test $v = \dot{u} \pm \varphi$ avec $\varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^2$, on obtient

$$a(u,\varphi) + \mathcal{L}(\varphi) = F(\varphi) \qquad \forall \varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^2.$$

En utilisant (1.60), on en déduit

$$div_L \sigma(u) + f = 0 \qquad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega). \tag{1.65}$$

Or si $f \in (L^2(\Omega))^2$,

$$div_L \sigma(u) + f = 0 \qquad \text{p. p.} \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{1.66}$$

D'où (1.24).

- On multiplie (1.24) par $(v - \dot{u})L_1 L_2^\alpha$, en utilisant la formule de Green (1.54) et en soustrayant l'équation obtenue de l'inégalité (1.61), on obtient en utilisant la définition (1.54)

$$j(u,v) - j(u,\dot{u}) \geq -L_1 \sum_{\alpha=\pm} \ll \sigma n, v - \dot{u} \gg_\alpha + L_1 < \sigma_N, [v_N] - [\dot{u}_N] > \qquad \forall v \in V, \tag{1.67}$$

en choisissant $v = \dot{u}$ sur Γ_c et $v = \dot{u} \pm \psi$ sur Γ_{lat} tel que $\psi \in (C_0^\infty(\Gamma_{lat}))^2$, on obtient (1.55) qui est la forme faible de (1.25).

- En tenant compte de ce résultat et des définitions (1.56) et (1.57) l'équation (1.67) devient

$$\begin{aligned} j(u,v) - j(u,\dot{u}) \geq &- L_1 \sum_{\alpha=\pm} < \sigma_T^\alpha, v_T^\alpha - \dot{u}_T^\alpha >_\alpha - L_1 \sum_{\alpha=\pm} < \sigma_N^\alpha, v_N^\alpha - \dot{u}_N^\alpha >_\alpha \\ &+ < \sigma_N, [v_N] - [\dot{u}_N] > \qquad \forall v \in V. \end{aligned} \tag{1.68}$$

En choisissant $v_T^\alpha = \dot{u}_T^\alpha \pm \psi$ et $v_N^\alpha = \dot{u}_N^\alpha \pm \varphi$ avec $\psi \in (C_0^\infty(\Gamma_c))^2$ et $\varphi \in C_0^\infty(\Gamma_c)$, alors $[v] = [\dot{u}]$ et l'inégalité précédente implique

$$< \sigma_T^+, \psi >_+ = - < \sigma_T^-, \psi >_- \tag{1.69}$$

$$< \sigma_N^+, \varphi >_+ = - < \sigma_N^-, \varphi >_- . \tag{1.70}$$

D'où (1.28) et (1.29).

- En utilisant ces résultats, l'inégalité (1.68) devient

$$j(u,v) - j(u,\dot{u}) \geq -L_1 < \sigma_T, [v_T] - [\dot{u}_T] > \qquad \forall v \in V. \tag{1.71}$$

Cette inégalité variationnelle est la forme faible de (1.31) (voir [5]).

– Puisque $u \in K$, alors $[u_N] \leq 0$. Pour récupérer les autres conditions du contact unilatéral (1.30), on choisit dans (1.62) $v = 0$ et $v = 2u$, on obtient $< \sigma_N,[u_N] >= 0$, alors (1.62) implique

$$< \sigma_N,[v_N] > \geq 0 \qquad \forall v \in K,$$

donc $\sigma_N \leq 0$. ∎

1.4.2 Existence d'une solution

On suit dans cette partie la démonstration d'existence proposée dans [2] en l'adaptant à notre contexte de deux corps élastiques et en précisant l'hypothèse sous laquelle l'existence est prouvée.
On aura besoin des régularités suivantes sur les données :

- $f \in W^{1,2}(0,T;[L^2(\Omega)]^2), \qquad s \in W^{1,2}(0,T;H^1(0,1))$ (1.72)
- $k \in L^\infty(\Gamma_c), k \geq 0$ p. p. sur Γ_c et ne dépend pas de t (1.73)
- u_0 appartient à K et satisfait la condition de compatibilité suivante:

$$a(u_0,v-u_0) + \mathcal{L}(v-u_0) + j(u_0,v-u_0) \geq (f(0),v-u_0) \qquad \forall v \in K. \tag{1.74}$$

La méthode proposée dans [2] consiste en une discrétisation en temps de u et de $\dot{u}$ faisant intervenir des fonctions affines par morceaux. Des estimations de celles-ci par rapport au pas de temps, permettent d'obtenir une convergence faible vers une solution du problème (1.60)-(1.62). Ces estimations sont obtenues sous la condition que le coefficient du frottement soit suffisamment petit, i.e.

$$\|k\|_{L^\infty(\Gamma_c)} = \bar{k} < \frac{m}{C^*}, \tag{1.75}$$

où m est le coefficient de coercivité de $a(\cdot,\cdot)$ qui est égal au produit du coefficient de Lamé μ et de la constante du Korn, et C^* est une constante de continuité de $j(u,v)$. Pour notre problème où les coéfficients de Lamé seront variables, la condition (1.75) ne peut pas être verifiée dans le cas où le coefficient de Lamé μ tend vers zéro, ce qui sera envisagé dans la suite de ce travail. De plus les constantes dépendent de la géométrie (elle aussi variable) et doivent être aussi estimées en fonction des paramètres correspondants.
La première difficulté peut être contournée en explicitant la constante C^* qui en réalité dépend des coefficients de Lamé puisque cette constante relie $\|\sigma_N\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)'}$ à $\|u\|_{H^1(\Omega)^2}$ (cf lemme 1.4.5). Ceci permettra d'obtenir ultérieurement les conditions (1.96) et (1.97) qui seront utilisables même si μ^α est très petit. La seconde difficulté nécessite de prêter une attention particulière à la dépendance par rapport au paramètre l qui sera petit dans la suite du travail.
Nous montrons d'abord l'existence d'une solution du problème discrétisé en temps qui s'avère être pour chaque pas de temps un problème semblable à un problème de Coulomb. Ensuite,

nous donnons des lemmes qui relient $\|\sigma_N\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)'}$ et $\|u\|_{H^1(\Omega)^2}$, et induisent une majoration de $j(v,v)$ en fonction de norme de v. Ces lemmes seront utilisés pour avoir des estimations du déplacement à un instant t_i et des vitesses approchées.

Discrétisation temporelle du problème

Pour la démonstration de l'existence de la solution du problème (1.60)-(1.62), on va utiliser un schéma implicite. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\Delta t = \dfrac{T}{n}$,$t_i = i\Delta t$, $f^i = f(t_i)$, $s^i = s(t_i)$ et on note par F^i, $\mathcal{L}^i$ et $\mathcal{S}^i$ les opérateurs F, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{S}$ définis dans le paragraphe 1.3 à l'instant t_i, $i = 0,..,n$. On définit à partir de u^0 dans K, une suite (P_i^n) de problèmes variationnels définis par:

$$
(P_i^n)\left\{
\begin{array}{l}
\text{Trouver} \quad (u^{i+1},\sigma^{i+1}) \in K \times \Sigma \text{ tel que} \\
i)\ \mathcal{B}(\sigma^{i+1},\tau) = \mathcal{A}(u^{i+1},\tau) + \mathcal{S}^{i+1}(\tau) \qquad \forall \tau \in \left(L^2(\Omega)\right)^4 \\
ii)\ a\left(u^{i+1}, v - \dfrac{u^{i+1}-u^i}{\Delta t}\right) + \mathcal{L}^{i+1}\left(v - \dfrac{u^{i+1}-u^i}{\Delta t}\right) + j(u^{i+1},v) - j\left(u^{i+1},\dfrac{u^{i+1}-u^i}{\Delta t}\right) \\
\qquad\qquad \geq F^{i+1}\left(v - \dfrac{u^{i+1}-u^i}{\Delta t}\right) + L_1\left\langle \sigma_N(u^{i+1}),[v_N] - \dfrac{[u_N^{i+1}-u_N^i]}{\Delta t}\right\rangle \quad \forall v \in V. \\
iii)\ \left\langle \sigma_N(u^{i+1}),[z_N] - [u_N^{i+1}]\right\rangle \geq 0 \quad \forall z \in K.
\end{array}
\right.
$$

Proposition 1.4.2 *Pour $i = 0,..,n-1$, le problème (P_i^n) a au moins une solution.*

Preuve:

On multiplie (P_i^n) par Δt et on pose $w = v\Delta t + u^i$, le problème (P_i^n) est équivalent au problème intermédiaire suivant:

$$
(Q_i^n)\left\{
\begin{array}{l}
\text{Trouver} \quad (u^{i+1},\sigma^{i+1}) \in K \times \Sigma \text{ tel que} \\
i)\ \mathcal{B}(\sigma^{i+1},\tau) = \mathcal{A}(u^{i+1},\tau) + \mathcal{S}^{i+1}(\tau) \qquad \forall \tau \in \left(L^2(\Omega)\right)^4 \\
a(u^{i+1},w-u^{i+1}) + \mathcal{L}^{i+1}(w-u^{i+1}) + j(u^{i+1},w-u^i) - j(u^{i+1},u^{i+1}-u^i) \\
\qquad\qquad \geq F^{i+1}\left(w-u^{i+1}\right) + L_1\left\langle \sigma_N(u^{i+1}),[w_N] - [u_N^{i+1}]\right\rangle \quad \forall w \in V. \\
\left\langle \sigma_N(u^{i+1}),[z_N] - [u_N^{i+1}]\right\rangle \geq 0 \quad \forall z \in K.
\end{array}
\right.
$$

Le problème (Q_i^n) est équivalent au suivant:

$$
(S_i^n)\left\{
\begin{array}{l}
\text{Trouver} \quad (u^{i+1},\sigma^{i+1}) \in K \times \Sigma \text{ tel que} \\
i)\ \mathcal{B}(\sigma^{i+1},\tau) = \mathcal{A}(u^{i+1},\tau) + \mathcal{S}^{i+1}(\tau) \qquad \forall \tau \in \left(L^2(\Omega)\right)^4 \\
a(u^{i+1},w-u^{i+1}) + \mathcal{L}^{i+1}(w-u^{i+1}) + j(u^{i+1},w-u^i) - j(u^{i+1},u^{i+1}-u^i) \\
\qquad\qquad \geq F^{i+1}\left(w-u^{i+1}\right) \qquad \forall w \in K.
\end{array}
\right.
$$

En effet:

- La démonstration du sens direct de l'équivalence est évidente.
- Inversement, démontrons tout d'abord la deuxième inégalité du problème (Q_i^n):
  Soit $z \in K$ et $R_T(z_T) = \left(R_T^+(z_T^+),R_T^-(z_T^-)\right)$, le relèvement de z_T défini sur Ω par (1.47).

Dans le problème (S_i^n), en choisissant $w = z - R_{_T}(z_T) + R_{_T}(u_T^{i+1})$, on obtient

$$a(u^{i+1}, z - R_{_T}(z_T) + R_{_T}(u_T^{i+1}) - u^{i+1}) + \mathcal{L}^{i+1}(z - R_{_T}(z_T) + R_{_T}(u_T^{i+1}) - u^{i+1})$$
$$-F^{i+1}(z_T + R_{_T}(u_T^{i+1}) - u^{i+1}) \quad \geq 0 \qquad \forall z \in K.$$

Remarquons que à partir du problème (S_i^n) et en utilisant l'hypothèse (1.72), on a

$$div_L\, \sigma^{i+1} + f^{i+1} = 0 \quad \text{p. p.} \quad \text{dans } \Omega^+ \cup \Omega^-. \tag{1.76}$$

En utilisant cette équation et la loi de Hooke discrétisée $(P_i^n)(i)$ (avec $\tau = e^{ad}(z - R_{_T}(z_T) + R_{_T}(u_T^{i+1}) - u^{i+1})$), dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\sum_{\alpha=\pm} \int_{\Omega^\alpha} \sigma^{i+1}.e^{ad}(z - R_{_T}(z_T) + R_{_T}(u_T^{i+1}) - u^{i+1}) L_1 L_2^\alpha +$$
$$\sum_{\alpha=\pm} \int_{\Omega^\alpha} (div_L \sigma^{i+1}) \left(z - R_{_T}(z_T) + R_{_T}(u_T^{i+1}) - u^{i+1}\right) L_1 L_2^\alpha \geq 0 \qquad \forall z \in K.$$

On note w^α la restriction de $z - R_{_T}(z_T) + R_{_T}(u_T^{i+1}) - u^{i+1}$ dans Ω^α, alors $w^\alpha \in V^\alpha$, $w_N^\alpha = z_N^\alpha - u_N^{i+1^\alpha}$ et $w_T^\alpha = 0$. En choisissant donc w^α comme un relèvement de $z_N^\alpha - u_N^{i+1^\alpha}$, l'inégalité précédente s'écrit en utilisant (1.56)

$$\sum_\alpha < \sigma_N^{i+1^\alpha}, z_N^\alpha - u_N^{i+1^\alpha} >_\alpha \leq 0 \qquad \forall z \in K.$$

En utilisant la notation (1.58) on obtient la deuxième inégalité du problème (Q_i^n).
Remarquons qu'en choisissant dans ce résultat, $z = 0$ et $z = u^{i+1}$, on déduit

$$< \sigma_N^{i+1}, [u_N^{i+1}] >= 0. \tag{1.77}$$

Montrons maintenant la première inégalité du problème (Q_i^n):
Soit $v \in V$ et $R_{_N}(v_N) = (R_{_N}^+(v_N^+), R_{_N}^-(v_N^-))$ le relèvement de v_N défini sur Ω par (1.43), alors $v - R_{_N}(v_N) \in K$. En choisissant $v - R_{_N}(v_N)$ comme fonction test, le problème (S_i^n) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver} \quad u^{i+1} \in K \\ a(u^{i+1}, v - u^{i+1}) + \mathcal{L}^{i+1}(v - u^{i+1}) + j(u^{i+1}, v - u^i) - j(u^{i+1}, u^{i+1} - u^i) \\ \qquad \geq F^{i+1}\left(v - u^{i+1}\right) + a(u^{i+1}, R_{_N}(v_N)) + \mathcal{L}^{i+1}(R_{_N}(v_N)) - F^{i+1}(R_{_N}(v_N)) \\ \hfill \forall v \in V. \end{array} \right.$$

Exprimons la somme des trois derniers termes de l'inégalité variationnelle précédente en fonction de produit de dualité $< \sigma_N^{i+1}, \cdot >$:
On sait d'après (1.58) que

$$< \sigma_N^{i+1}, [v_N] >=< \sigma_N^{i+1}, v_N^+ >_+ + < \sigma_N^{i+1}, v_N^- >_- \qquad v \in V$$

Pour le premier produit de dualité, on a

$$\begin{aligned} L_1 < \sigma_N^{i+1}, v_N^+ >_+ &= L_1 \ll \sigma^{i+1} n, \gamma R_N^+(v_N^+) \gg_+ && \text{d'après (1.56)} \\ &= \int_{\Omega^+} \sigma . e^{ad}(R_N^+(v_N^+)) L_1 L_2 + \int_{\Omega^+} (div_L \sigma) R_N^+(v_N^+) L_1 L_2 && \text{d'après (1.54).} \end{aligned}$$

En tenant compte de l'égalité variationnelle $i)$ du problème (P_i^n) et (1.76), l'équation précédente devient

$$L_1 < \sigma_N^{i+1}, v_N^+ >_+ = a^+(u^{i+1}, R_N^+(v_N^+)) + \mathcal{L}^{i+1}(R_N^+(v_N)) - (F)^{i+1^+}(R_N^+(v_N^+)). \quad (1.78)$$

De la même manière, on exprime le produit de dualité $< \sigma_N^{i+1}, v_N^- >$. En additionnant les deux expressions, il vient

$$a(u^{i+1}, R_N(v_N)) + \mathcal{L}^{i+1}(R_N(v_N)) - F^{i+1}(R_N(v_N)) = L_1 < \sigma_N^{i+1}, [v_N] > .$$

Donc la première inégalité du problème (Q_i^n) est prouvée en rajoutant le terme $< \sigma_N^{i+1}, [u_N^{i+1}] >$ qui est en réalité nul d'après (1.77).

Alors les problèmes (P_i^n) et (S_i^n) sont équivalents. Et le lemme 1.4.3 suivant montrera l'existence d'au moins une solution, ce qui terminera la démonstration de la proposition 1.4.2.
■

Lemme 1.4.3 *Le problème (S_i^n) a au moins une solution qui est unique si le coefficient du frottement est suffisament petit.*

Preuve:
La preuve est semblable à celle de l'existence d'une solution pour le problème de Coulomb classique. En effet, en utilisant la méthode du point fixe sur la contrainte tangentielle par l'intermédiaire d'un problème de Tresca, le problème (S_i^n) est équivalent au problème suivant:

$$(T_i^n) \begin{cases} \text{Trouver un point fixe de l'application} \\ \qquad T : L^2(\Gamma_c) \longrightarrow L^2(\Gamma_c) \\ \qquad\quad g \longrightarrow k|S(\sigma_N(u_g^{i+1}))|, \end{cases}$$

où u_g^{i+1} est la solution du problème suivant:

$$(R_i^n) \begin{cases} \text{Pour } g \text{ donné, trouver } u_g^{i+1} \in K \\ a(u_g^{i+1}, w - u_g^{i+1}) + \mathcal{L}^{i+1}(w - u_g^{i+1}) + \mathcal{J}(w - u^i) - \mathcal{J}(u_g^{i+1} - u^i) \\ \qquad \geq F^{i+1}\left(w - u_g^{i+1}\right) \qquad \forall w \in K, \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{J}(w - u^i) = L_1 \int_{\Gamma_c} g(|[w_T] - [u_T^i]|). \quad (1.79)$$

Le problème (R_i^n) est semblable à la formulation variationnelle d'un problème de contact statique avec frottement de Tresca, avec la présence du terme u^i donné. Alors en utilisant la preuve classique de l'existence d'une solution du problème de Tresca [5], on obtient l'existence et l'unicité de la solution de (R_i^n).

Le reste de la preuve est semblable à celui du problème de Coulomb classique [3]. ■

Remarque 8 L'équivalence entre les problèmes (P_i^n) et (S_i^n) montre que le problème quasi-statique peut s'écrire sous la forme d'une seule inégalité variationnelle (implicite) qui est très semblable à un problème classique de contact statique avec frottement de Coulomb, mais la fonction test dans le terme lié au frottement est $w - u^i$, où u^i est un terme de mémoire, car u^i est la solution obtenue à l'étape précédente t_i.

1.4.3 Lemmes généraux

Comme mentionné au début de cette section, les lemmes suivants donnent des estimations qui permettent de relier $\|\sigma_N\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)'}$ et $\|u\|_{H^1(\Omega)^2}$, et induisent une majoration de $j(v,v)$ en fonction de norme de v. Notons que le résultat de ces lemmes est indépendant de la discrétisation en temps utilisée dans cette section.

Lemme 1.4.4 *Pour tout $v \in V$, les deux inégalités suivantes ont lieu*

$$\|\partial_2 v_i\|_{L^2(\Omega^+)} \leq C_{Kor}^+ L_2 \sum_{ij} \|e_{ij}^{ad}(v)\|_{L^2(\Omega^+)} \tag{1.80}$$

$$\|\partial_2 v_i\|_{L^2(\Omega^-)} \leq C_{Kor}^- l \sum_{ij} \|e_{ij}^{ad}(v)\|_{L^2(\Omega^-)}, \qquad i = 1,2, \tag{1.81}$$

où $C_{Kor}^{\pm}$ est la constante de Korn correspondant à $\Omega_L^{\pm}$.

Preuve:

Soit $\tilde{v}$ la fonction correspondante de $v \in V$, alors

$$\begin{aligned}
\|\partial_2 v_i\|_{L^2(\Omega^+)} =& \|\partial_2 \tilde{v}_i\|_{L^2(\Omega_L^+)} \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^{\frac{1}{2}} && (1.82)\\
\leq& \|\nabla \tilde{v}\|_{L^2(\Omega_L^+)} \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^{\frac{1}{2}} && (1.83)\\
\leq& C_{Kor}^+ \|e(\tilde{v})\|_{L^2(\Omega_L^+)} \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^{\frac{1}{2}} && (1.84)\\
\leq& C_{Kor}^+ L_2 \Big(\|L_1{}^{-1}\partial_1 v_1\|_{L^2(\Omega^+)} + \|L_2^{-1}\partial_2 v_2\|_{L^2(\Omega^+)} \\
& + \|L_1{}^{-1}\partial_1 v_2 + L_2^{-1}\partial_2 v_1\|_{L^2(\Omega^+)} \Big). && (1.85)
\end{aligned}$$

En faisant les mêmes calculs, on obtient (1.81). ■

Remarque 9 On remarque que dans le cas où $l < L_2$, la constante de Korn C^-_{Kor} est indépendante de l car on peut prolonger le déplacement par 0 dans un domaine $[0,L_1] \times [0,L_2]$ et on a donc $C^-_{Kor} = C^+_{Kor}$.
Si Ω^+_L est carré (i.e. $L_1 = L_2$), on peut montrer facilement que la constante de Korn ne dépend pas de la dimension de ce domaine.

Lemme 1.4.5 *Sous l'hypothèse (1.72) et $\forall t \in (0,T)$, $\forall (u,\sigma) \in V \times \Sigma$ vérifiant (1.24), (1.25) et (1.27), la norme de l'application $< \sigma_N,\cdot >_\alpha$ définie en (1.56) vérifie*

$$\begin{aligned}\|\sigma^+_N\|_{\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)\right)'} &\leq C_1 L_2 (\max_i L_i^{-1}) \left(\lambda^+ \|e^{ad}_{kk}(u)\|_{L^2(\Omega^+)} + 2\mu^+ \sum_{ij} \|e^{ad}_{ij}(u)\|_{L^2(\Omega^+)}\right) \\ &+ C_1 L_2 \left(\|f\|_{L^2(\Omega^+)} + (2\mu^+ + \lambda^+)(L^{-1}_{max})^2 \|s\|_{H^1(0,1)}\right). \end{aligned} \tag{1.86}$$

$$\begin{aligned}\|\sigma^-_N\|_{\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)\right)'} &\leq C_1\, l\, (\max_i l_i^{-1}) \left(\lambda^- \|e^{ad}_{kk}(u)\|_{L^2(\Omega^-)} + 2\mu^- \sum_{ij} \|e^{ad}_{ij}(u)\|_{L^2(\Omega^-)}\right) \\ &+ C_1\, l\, \|f\|_{L^2(\Omega^-)}. \end{aligned} \tag{1.87}$$

Preuve:
Sit $v \in V$, en utilisant (1.24), (1.25) et (1.27) et en choisissant comme relèvement $\bar{v_N} = R^\alpha_{_N}(v_N)$, (1.56) s'écrit

$$|L_1 < \sigma^+_N, v^+_N >_+ | = |a^+(u, R^+_N(v_N)) + \mathcal{L}(R^+_N(v_N)) - F^+(R^+_N(v_N))|. \tag{1.88}$$

On va majorer chacun des termes du second membre de (1.88)
En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\forall v \in V^+$

$$\begin{aligned}&|a^+(u,v)| \leq \\ &L_1 L_2 \,(\max_i L_i^{-1}) \left(\lambda^+ \|e^{ad}_{kk}(u)\|_{L^2(\Omega^+)} + 2\mu^+ \sum_{ij} \|e^{ad}_{ij}(u)\|_{L^2(\Omega^+)}\right) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega^+)}. \end{aligned} \tag{1.89}$$

De même

$$|\mathcal{L}(v)| \quad \leq L_1 L_2 (2\mu^+ + \lambda^+) max(L_1^{-1}, 1) \|s\|_{H^1(0,1)} \sum_{ij} \|e^{ad}_{ij}(v)\|_{L^2(\Omega^+)}, \tag{1.90}$$

$$|F^+(v)| \leq L_1 L_2 \|f\|_{L^2(\Omega^+)} \|v\|_{L^2(\Omega^+)}. \tag{1.91}$$

D'où, en utilisant la définition de e^{ad}_{ij},

$$|\mathcal{L}(v)| \leq L_1 L_2 (2\mu^+ + \lambda^+) max(L_1^{-1}, 1) \|s\|_{H^1(0,1)} (\max_i L_i^{-1}) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega^+)}.$$

En notant

$$(L^{-1}_{max})^2 = max(L_1^{-1}, 1) max(L_1^{-1}, L_2^{-1}),$$

on a

$$|\mathcal{L}(v)| \leq L_1 L_2 (2\mu^+ + \lambda^+)(L_{max}^{-1})^2 \|s\|_{H^1(0,1)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega^+)}. \tag{1.92}$$

On remplace dans les inégalités (1.89), (1.91) et (1.92), v par $R_N^+(v_N)$. En combinant ces trois inégalités dans (1.88), et en utilisant de plus la proposition 1.3.1 ([2]), on obtient la première inégalité du lemme 1.4.5 en passant au sup sur v_N dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$. La deuxième inégalité se démontre de la même façon en considérant que σ_N est une trace provenant de Ω^-. ■

Lemme 1.4.6 *Pour $v \in V$ tel que $\sigma(v)$ vérifie (1.24), (1.25), (1.27), (1.28), l'inégalité suivante a lieu*

$$\begin{aligned} j(v,v) \quad \leq \quad & C_2 \bar{k} L_1 \Bigg[L_2^2 C_{Kor}^+ (\max_i L_i^{-1}) \left(\lambda^+ \|e_{kk}^{ad}(v)\|^2_{L^2(\Omega^+)} + (2\mu^+ + \lambda^+) \sum_{ij} \|e_{ij}^{ad}(v)\|^2_{L^2(\Omega^+)} \right) \\ & + L_2^2 C_{Kor}^+ \left(\|f\|_{L^2(\Omega^+)} + (2\mu^+ + \lambda^+)(L_{max}^{-1})^2 \|s\|_{H^1(0,1)} \right) \sum_{ij} \|e_{ij}^{ad}(v)\|_{L^2(\Omega^+)} \\ & + l^2 C_{Kor}^- (\max_i l_i^{-1}) \left(\lambda^- \|e_{kk}^{ad}\|^2_{L^2(\Omega^-)} + (2\mu^- + \lambda^-) \sum_{ij} \|e_{ij}^{ad}(v)\|^2_{L^2(\Omega^-)} \right) \\ & + l^2 C_{Kor}^- \|f\|_{L^2(\Omega^-)} \sum_{ij} \|e_{ij}^{ad}(v)\|_{L^2(\Omega^-)} \Bigg], \end{aligned} \tag{1.93}$$

où $\bar{k} = \|k\|_{L^\infty(\Gamma_c)}$.

Preuve:
En utilisant (1.28), on écrit $j(v,v)$ sous la forme

$$j(v,v) = L_1 \int_{\Gamma_c} k \left| S(\sigma_N^+(v)) v_T^+ + S(\sigma_N^-(v)) v_T^- \right|. \tag{1.94}$$

En notant C_S la constante de continuité de l'application de régularisation S de $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)\right)'$ dans $L^2(\Gamma_c)$ et en utilisant une inégalité de type Friedrichs;

$$\|u^\alpha\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq \|\partial_2 u^\alpha\|_{L^2(\Omega^\alpha)}, \qquad \alpha = \pm,$$

on obtient

$$j(v,v) \leq C_S L_1 \bar{k} \left(\|\sigma_N^+\|_{\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)\right)'} \|\partial_2 v\|_{(L^2(\Omega^+))^2} + \|\sigma_N^-\|_{\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)\right)'} \|\partial_2 v\|_{(L^2(\Omega^-))^2} \right). \tag{1.95}$$

$\sigma(v)$ vérifie (1.24), (1.25) et (1.27), alors les lemmes 1.4.5 et 1.4.4 permettent de conclure en posant $C_2 = C_S C_1$. ■

2. *La constante de l'équivalence ne dépend pas de L_1 et L_2 car on travaille sur* $\Omega^+ = [0,1] \times [0,1]$.

Estimations de la solution de (P_i^n)

La solution du problème (1.60)-(1.62) que nous allons construire sera la limite quand Δt tend vers zéro d'une interpolation des solutions incrémentales u^i, $i = 0,..,N$. Pour obtenir la convergence de celle-ci, nous établissons dans les deux lemmes suivants des estimations du déplacement et de la vitesse approchés u^i et Δu^i qui nécessitent les deux conditions suivantes :

$$\bar{k} < \frac{2\mu^+}{C_2\, L_2 C^+_{Kor}(\max_i L_i^{-1})(\lambda^+ + 2\mu^+)}, \tag{1.96}$$

$$\bar{k} < \frac{2\mu^-}{C_2\, l C^-_{Kor}(\max_i l_i^{-1})(\lambda^- + 2\mu^-)}. \tag{1.97}$$

Remarquons que ces conditions impliquent que $\alpha^\pm$ et $\beta^\pm$ définis dans (1.48)-(1.52) sont strictement positifs.

Lemme 1.4.7 *Sous les hypothèses (1.96) et (1.97),* $\forall i = 0,..,n-1$ *on a*

$$\|e^{ad}_{kk}(u^{i+1})\|_{L^2(\Omega^+)} \leq \frac{I^+(f^{i+1},s^{i+1})}{\sqrt{\alpha^+\beta^+}} + \frac{L_1 l^2 C^-_{Kor}(1 + C_2\bar{k})\|f^{i+1}\|_{L^2(\Omega^-)}}{\sqrt{\alpha^+\beta^-}} \tag{1.98}$$

$$\|e^{ad}_{ij}(u^{i+1})\|_{L^2(\Omega^+)} \leq \frac{I^+(f^{i+1},s^{i+1})}{\beta^+} + \frac{L_1 l^2 C^-_{Kor}(1 + C_2\bar{k})\|f^{i+1}\|_{L^2(\Omega^-)}}{\sqrt{\beta^+\beta^-}} \tag{1.99}$$

$$\|e^{ad}_{kk}(u^{i+1})\|_{L^2(\Omega^-)} \leq \frac{L_1 l^2 C^-_{Kor}(1 + C_2\bar{k})\|f^{i+1}\|_{L^2(\Omega^-)}}{\sqrt{\alpha^-\beta^-}} + \frac{I^+(f^{i+1},s^{i+1})}{\sqrt{\alpha^-\beta^+}} \tag{1.100}$$

$$\|e^{ad}_{ij}(u^{i+1})\|_{L^2(\Omega^-)} \leq \frac{L_1 l^2 C^-_{Kor}(1 + C_2\bar{k})\|f^{i+1}\|_{L^2(\Omega^-)}}{\beta^-} + \frac{I^+(f^{i+1},s^{i+1})}{\sqrt{\beta^+\beta^-}}, \tag{1.101}$$

où $\alpha^\pm$*,* $\beta^\pm$ *et* $I^+(f,s)$ *sont définis dans (1.48)-(1.52).*

Preuve:

Dans (S_i^n), on choisit comme fonction test $w = 0$, on obtient

$$a(u^{i+1},u^{i+1}) + \mathcal{L}^{i+1}(u^{i+1}) \leq j(u^{i+1},u^{i+1}) + F^{i+1}(u^{i+1}).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a

$$|\mathcal{L}(v)| \leq L_1 L_2 (2\mu^+ + \lambda^+) max(L_1^{-1},1)\|s\|_{H^1(0,1)} \sum_{ij} \|e^{ad}_{ij}(v)\|_{L^2(\Omega^+)} \qquad \forall v \in V, \tag{1.102}$$

D' après l'inégalité de Poincaré et le lemme 1.4.4, on a

$$|F(v)| \leq \sum_{\alpha=\pm} L_1\,(L_2^\alpha)^2\, C^\alpha_{Kor}\|f\|_{L^2(\Omega^\alpha)}\|e^{ad}(v)\|_{L^2(\Omega^\alpha)} \qquad \forall v \in V. \tag{1.103}$$

En utilisant le lemme 1.4.6, et en introduisant les notations (1.48)-(1.52), on obtient

$$\begin{aligned}
&\alpha^+\|e^{ad}_{kk}(u^{i+1})\|^2_{L^2(\Omega^+)} + \beta^+\sum_{ij}\|e^{ad}_{ij}(u^{i+1})\|^2_{L^2(\Omega^+)}+\\
&\alpha^-\|e^{ad}_{kk}(u^{i+1})\|^2_{L^2(\Omega^-)} + \beta^-\sum_{ij}\|e^{ad}_{ij}(u^{i+1})\|^2_{L^2(\Omega^-)}\\
&\quad\leq I^+(f^{i+1},s^{i+1})\sum_{ij}\|e^{ad}_{ij}(u^{i+1})\|_{L^2(\Omega^+)} + L_1 l^2\|f^{i+1}\|_{L^2(\Omega^-)}C^-_{Kor}(1+C_2\bar{k})\sum_{ij}\|e^{ad}_{ij}(u^{i+1})\|_{L^2(\Omega^-)}.
\end{aligned}$$

A partir de cette inégalité et en utilisant la formule $\beta x^2 - bx = \beta\left(x-\dfrac{b}{2\beta}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4\beta}$, pour $x = \|e^{ad}_{ij}(u^{i+1})\|_{L^2(\Omega^\pm)}$, $\beta=\beta^\pm$ et $b = I^+(f^{i+1},s^{i+1})$, (resp. $b = L_1 l^2\|f^{i+1}\|_{L^2(\Omega^-)}C^-_{Kor}(1+C_2\bar{k})$), on vérifie que les conditions (1.96) et (1.97) impliquent que $\alpha^\pm$ et $\beta^\pm$ sont strictement positifs et on déduit les estimations recherchées. ■

Posons $\Delta u^i = u^{i+1}-u^i$, $\Delta f^i = f^{i+1}-f^i$ et $\Delta s^i = s^{i+1}-s^i$ pour $i=0,..n-1$. Dans le lemme suivant, nous obtiendrons des estimations pour $\dfrac{\Delta u^i}{\Delta t}$

Lemme 1.4.8 *Sous les hypothèses (1.96) et (1.97),* $\forall i = 0,..,n-1$ *on a*

$$\|e^{ad}_{kk}(\frac{\Delta u^i}{\Delta t})\|_{L^2(\Omega^+)} \leq \frac{I^+(\frac{\Delta f^i}{\Delta t},\frac{\Delta s^i}{\Delta t})}{\sqrt{\alpha^+\beta^+}} + \frac{L_1 l^2 C^-_{Kor}(1+C_2\bar{k})\|\frac{\Delta f^i}{\Delta t}\|_{L^2(\Omega^-)}}{\sqrt{\alpha^+\beta^-}} \tag{1.104}$$

$$\|e^{ad}_{ij}(\frac{\Delta u^i}{\Delta t})\|_{L^2(\Omega^+)} \leq \frac{I^+(\frac{\Delta f^i}{\Delta t},\frac{\Delta s^i}{\Delta t})}{\beta^+} + \frac{L_1 l^2 C^-_{Kor}(1+C_2\bar{k})\|\frac{\Delta f^i}{\Delta t}\|_{L^2(\Omega^-)}}{\sqrt{\beta^+\beta^-}} \tag{1.105}$$

$$\|e^{ad}_{kk}(\frac{\Delta u^i}{\Delta t})\|_{L^2(\Omega^-)} \leq \frac{L_1 l^2 C^-_{Kor}(1+C_2\bar{k})\|\frac{\Delta f^i}{\Delta t}\|_{L^2(\Omega^-)}}{\sqrt{\alpha^-\beta^-}} + \frac{I^+(\frac{\Delta f^i}{\Delta t},\frac{\Delta s^i}{\Delta t})}{\sqrt{\alpha^-\beta^+}} \tag{1.106}$$

$$\|e^{ad}_{ij}(\frac{\Delta u^i}{\Delta t})\|_{L^2(\Omega^-)} \leq \frac{L_1 l^2 C^-_{Kor}(1+C_2\bar{k})\|\frac{\Delta f^i}{\Delta t}\|_{L^2(\Omega^-)}}{\beta^-} + \frac{I^+(\frac{\Delta f^i}{\Delta t},\frac{\Delta s^i}{\Delta t})}{\sqrt{\beta^+\beta^-}}. \tag{1.107}$$

Preuve:

Choisissons $w = u^{i+1}$ dans S^n_{i-1} et $w = u^i$ dans S^n_i. Par addition et en tenant compte du fait que $j(\cdot,\cdot)$ vérifie :

$$j(u,v) - j(u,w) \leq j(u,v-w) \quad \text{et} \quad j(u,w)-j(v,w) \leq j(u-v,w) \qquad \forall u,v,w \in V,$$

on obtient

$$a(\Delta u^i,\Delta u^i) + \Delta\mathcal{L}^i(u^i) \leq j(\Delta u^i,\Delta u^i) + \Delta F^i(u^i).$$

En appliquant le lemme 1.4.6 pour $v = \Delta u^i$, on obtient

$$\begin{aligned}
j(\Delta u^i,\Delta u^i) \leq\ & C_2\bar{k}L_1 \Bigg[L_2^2 C_{Kor}^+ (\max_i L_i^{-1}) \left(\lambda^+ \|e_{kk}^{ad}(\Delta u^i)\|_{L^2(\Omega^+)}^2 + (2\mu^+ + \lambda^+) \sum_{ij} \|e_{ij}^{ad}(\Delta u^i)\|_{L^2(\Omega^+)}^2 \right) \\
& + L_2^2 C_{Kor}^+ \left(\|\Delta f^i\|_{L^2(\Omega^+)} + (2\mu^+ + \lambda^+)(L_{max}^{-1})^2 \|\Delta s^i\|_{H^1(0,1)} \right) \sum_{ij} \|e_{ij}^{ad}(\Delta u^i)\|_{L^2(\Omega^+)} \\
& + l^2 C_{Kor}^- (\max_i l_i^{-1}) \left(\lambda^- \|e_{kk}^{ad}(\Delta u^i)\|_{L^2(\Omega^-)}^2 + (2\mu^- + \lambda^-) \sum_{ij} \|e_{ij}^{ad}(\Delta u^i)\|_{L^2(\Omega^-)}^2 \right) \\
& + l^2 C_{Kor}^- \|\Delta f^i\|_{L^2(\Omega^-)} \sum_{ij} \|e_{ij}^{ad}(\Delta u^i)\|_{L^2(\Omega^-)} \Bigg] \qquad (1.108)
\end{aligned}$$

et on termine la démonstration comme au lemme 1.4.7. ■

Théorème d'existence

Théorème 1.4.9 *Sous les hypothèses (1.96) et (1.97), le problème (1.60)-(1.62) a une solution* (u,σ) *dans* $W^{1,2}(0,T,V) \times W^{1,2}(0,T,\Sigma)$.

Preuve:
Considérons la fonction $U^n : [0,T] \longrightarrow V$ définie par

$$U^n(t) = \frac{t - t_i}{\Delta t}\Delta u^i + u^i \qquad \forall t \in [t_i,t_{i+1}],\ i = 0,..,n-1$$

En utilisant les estimations de u^i et de Δu^i trouvées sous les hypothèses (1.96) et (1.97) dans le paragraphe précédent, on déduit que la suite U^n définie ci-dessus est bornée dans l'espace $W^{1,2}(0,T;V)$ par une constante qui dépend des données du problème et est indépendante de Δt.
Il en résulte l'existence d'un élément u^* de $W^{1,2}(0,T;V)$, tel que en extrayant une sous-suite encore notée U^n, on ait

$$U^n \rightharpoonup_{n\to\infty} u^* \qquad W^{1,2}(0,T;V) \text{ faible.}$$

En écrivant u^{i+1} en fonction de U^n dans les problèmes (P_i^n) $i = 0,..n-1$, et en passant à la limite en utilisant les mêmes techniques que dans [2], on trouve que u^* est solution de (1.60)-(1.62), ce qui montre l'existence d'au moins une solution.

1.5 Estimations relatives aux paramètres variables

On considère les propriétés physiques et géométriques $(L_1, L_2, \mu^+,\lambda^+)$ du corps Ω_L^+ comme fixés et celles du corps Ω_L^- comme paramètres variables. On s'interesse au passage à la limite

quand l tend vers 0 pour différentes limites de μ^- et λ^-.
Pour passer à la limite dans la formulation faible (1.60)-(1.62), nous aurons besoin des estimations sur u, $\dot{u}$ et σ par rapport à l, μ^- et λ^-.
Il est possible d'adapter les estimations du problème discret en temps données par le lemme 1.4.7, et d'obtenir une estimation uniforme en l, μ^- et λ^- pour le déplacement et la vitesse dans $L^\infty(0,T;V)$. Cependant cette estimation ne serait en toute rigueur valable que pour les solutions du problème quasistatique obtenues par la méthode précédente (discrétisation). Nous sommes donc amenés à trouver des estimations plus adaptées à notre problème particulier directement à partir de la formulation(1.60)-(1.62).
A partir de la loi de Hooke, on obtient une relation entre les estimations sur les contraintes et celles sur les déformations y compris les contraintes normales.
En incorporant ces informations dans l'inéquation en déplacement, on en déduit des estimations sur les déplacements et ensuite sur les contraintes.
Procédant de la même façon, on obtient des estimations sur la vitesse, ce qui sera suffisant pour passer à la limite.

1.5.1 Hypothèses

On notera C toute constante par rapport aux paramètres variables qui sont les caractéristiques géométriques et mécaniques de la couche mince : l, λ^- et μ^-.
On suppose que

$$\|f\|_{(L^2(\Omega))^2} \leq C \quad \text{et } \|\dot{f}\|_{(L^2(\Omega))^2} \leq C \tag{1.109}$$

$$\|s\|_{H^1(0,1)} \leq C \quad \text{et} \quad \|\dot{s}\|_{H^1(0,1)} \leq C. \tag{1.110}$$

Compte tenu de la remarque 9 du paragraphe 1.4.2, on a $C^-_{Kor} = C^+_{Kor} \leq C$.
On note:

$$C_3 = C_2 C^+_{Kor} L_2 \max_i L_i^{-1}$$

$$C_4 = C_2 C^-_{Kor}.$$

On en déduit que

$$\alpha^- = \lambda^- L_1 l \left(1 - C_4 \bar{k}\right) \tag{1.111}$$

$$\beta^- = L_1 l \left(2\mu^- - C_4 \bar{k}(\lambda^- + 2\mu^-)\right), \tag{1.112}$$

et les conditions (1.96)-(1.97) deviennent

$$\bar{k} < \frac{2\mu^+}{C_3(\lambda^+ + 2\mu^+)}, \tag{1.113}$$

$$\bar{k} < \frac{2\mu^-}{C_4(\lambda^- + 2\mu^-)}. \tag{1.114}$$

De plus, on aura besoin dans la proposition 1.7.11 d'une hypothèse supplémentaire sur la convergence de la condition initiale u_0 quand l tend vers 0.

1.5.2 Estimations sur les déplacements

Théorème 1.5.1 *Soit (u,σ) solution du problème (1.60)-(1.62), sous les hypothèses de la section 1.5.1, les estimations suivantes sont vérifiées*

$$\|e^{ad}_{kk}(u)\|_{L^2(\Omega^+)} \leq C\left(1+\left(\frac{l}{L_2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\mu^-}{\mu^+}-C_4\bar{k}\left(\frac{\mu^-}{\mu^+}+\frac{\lambda^-}{2\mu^+}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{1.115}$$

$$\|e^{ad}_{ij}(u)\|_{L^2(\Omega^+)} \leq C\left(1+\left(\frac{l}{L_2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\mu^-}{\mu^+}-C_4\bar{k}\left(\frac{\mu^-}{\mu^+}+\frac{\lambda^-}{2\mu^+}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{1.116}$$

$$\|e^{ad}_{kk}(u)\|_{L^2(\Omega^-)} \leq C\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{l}{L_2}\left[\frac{\mu^-}{\mu^+}-C_4\bar{k}\left(\frac{\mu^-}{\mu^+}+\frac{\lambda^-}{2\mu^+}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{l}{L_2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{1.117}$$

$$\begin{aligned}\|e^{ad}_{ij}(u)\|_{L^2(\Omega^-)} \leq C&\left[\frac{\mu^-}{\mu^+}-C_4\bar{k}\left(\frac{\mu^-}{\mu^+}+\frac{\lambda^-}{2\mu^+}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\\ &\left(\left(\frac{l}{L_2}\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{l}{L_2}\left[\frac{\mu^-}{\mu^+}-C_4\bar{k}\left(\frac{\mu^-}{\mu^+}+\frac{\lambda^-}{2\mu^+}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\right).\end{aligned} \tag{1.118}$$

Preuve:
On choisit $v=-u+\dot{u}$ comme fonction test dans (1.61), on obtient

$$a(u,u) \leq F(u)-\mathcal{L}(u)+j(u,u).$$

En utilisant (1.102), (1.103) et le lemme 1.4.6, on obtient

$$\begin{aligned}&\alpha^+\|e^{ad}_{kk}(u)\|^2_{L^2(\Omega^+)}+\beta^+\sum_{ij}\|e^{ad}_{ij}(u)\|^2_{L^2(\Omega^+)}+\\ &\alpha^-\|L_1^{-1}\partial_1u_1+l^{-1}\partial_2u_2\|^2_{L^2(\Omega^-)}+\beta^-\sum_{ij}\|e^{ad}_{ij}(u)\|^2_{L^2(\Omega^-)}\\ &\qquad\leq I^+(f,s)\sum_{ij}\|e^{ad}_{ij}(u)\|_{L^2(\Omega^+)}+L_1l^2\|f\|_{L^2(\Omega^-)}C^-_{Kor}(1+C_2\bar{k})\sum_{ij}\|e^{ad}_{ij}(u)\|_{L^2(\Omega^-)}.\end{aligned}$$

Dans cette inégalité, on utilise la formule

$$\beta x^2-bx=\beta\left(x-\frac{b}{2\beta}\right)^2-\frac{b^2}{4\beta}$$

avec $x = \|e^{ad}_{ij}(u)\|_{L^2(\Omega^\pm)}$, $\beta = \beta^\pm$ et $b = I^+(f,s)$, (resp. $b = L_1 l^2 \|f\|_{L^2(\Omega^-)} C^-_{Kor}(1 + C_2\bar{k})$).
En utilisant les hypothèses (1.96) et (1.97), on obtient avec un simple calcul

$$\begin{aligned}
\|e^{ad}_{kk}\|_{L^2(\Omega^+)} &\leq \frac{I^+(f,s)}{\sqrt{\alpha^+\beta^+}} + \frac{L_1 l^2 C^-_{Kor}(1 + C_2\bar{k})\|f\|_{L^2(\Omega^-)}}{\sqrt{\alpha^+\beta^-}} \\
\|e^{ad}_{ij}(u)\|_{L^2(\Omega^+)} &\leq \frac{I^+(f,s)}{\beta^+} + \frac{L_1 l^2 C^-_{Kor}(1 + C_2\bar{k})\|f\|_{L^2(\Omega^-)}}{\sqrt{\beta^+\beta^-}} \\
\|e^{ad}_{kk}(u)\|_{L^2(\Omega^-)} &\leq \frac{L_1 l^2 C^-_{Kor}(1 + C_2\bar{k})\|f\|_{L^2(\Omega^-)}}{\sqrt{\alpha^-\beta^-}} + \frac{I^+(f,s)}{\sqrt{\alpha^-\beta^+}} \\
\|e^{ad}_{ij}(u)\|_{L^2(\Omega^-)} &\leq \frac{L_1 l^2 C^-_{Kor}(1 + C_2\bar{k})\|f\|_{L^2(\Omega^-)}}{\beta^-} + \frac{I^+(f,s)}{\sqrt{\beta^+\beta^-}}.
\end{aligned}$$

Les hypothèses de la section 1.5.1 permettent de conclure. ■

1.5.3 Estimations sur les contraintes

La loi de Hooke (1.60) permet d'obtenir immédiatement en choisissant des fonctions test adaptées :

Lemme 1.5.2 *Pour (u,σ) solution du problème (1.60)-(1.62), les inégalités suivantes sont vérifiées*

$$\|\sigma_{12}\|_{L^2(\Omega^+)} \leq 2\mu^+ \|{L_1}^{-1}\partial_1 u_2 + L_2^{-1}\partial_2 u_1\|_{L^2(\Omega^+)} + 2\mu^+\|s\|_{L^2(0,1)} \tag{1.119}$$

$$\begin{aligned}
\|\sigma_{11}\|_{L^2(\Omega^+)} &\leq \lambda^+ \|{L_1}^{-1}\partial_1 u_1 + L_2^{-1}\partial_2 u_2\|_{L^2(\Omega^+)} + 2\mu^+\|{L_1}^{-1}\partial_1 u_1\|_{L^2(\Omega^+)} + (2\mu^+ + \lambda^+)L_1^{-1}\|s\|_{H^1(0,1)} \\
\|\sigma_{22}\|_{L^2(\Omega^+)} &\leq \lambda^+ \|{L_1}^{-1}\partial_1 u_1 + L_2^{-1}\partial_2 u_2\|_{L^2(\Omega^+)} + \lambda^+ L_1^{-1}\|s\|_{H^1(0,1)} + 2\mu^+\|{L_2}^{-1}\partial_2 u_2\|_{L^2(\Omega^+)}.
\end{aligned} \tag{1.120}$$

Lemme 1.5.3 *Les inégalités suivantes sont vérifiées*

$$\|\sigma_{12}\|_{L^2(\Omega^-)} = 2\mu^- \|{L_1}^{-1}\partial_1 u_2 + l^{-1}\partial_2 u_1\|_{L^2(\Omega^-)} \tag{1.121}$$

$$\|\sigma_{11}\|_{L^2(\Omega^-)} \leq \lambda^- \|{L_1}^{-1}\partial_1 u_1 + l^{-1}\partial_2 u_2\|_{L^2(\Omega^-)} + 2\mu^-\|{L_1}^{-1}\partial_1 u_1\|_{L^2(\Omega^-)} \tag{1.122}$$

$$\|\sigma_{22}\|_{L^2(\Omega^-)} \leq \lambda^- \|{L_1}^{-1}\partial_1 u_1 + l^{-1}\partial_2 u_2\|_{L^2(\Omega^-)} + 2\mu^-\|l^{-1}\partial_2 u_2\|_{L^2(\Omega^-)}. \tag{1.123}$$

Théorème 1.5.4 *Sous les hypothèses de la section 1.5.1, les estimations suivantes sont vérifiées*

$$\|\sigma_{ij}\|_{L^2(\Omega^+)} \leq (2\mu^+ + \lambda^+)C\left(1 + \left(\frac{l}{L_2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\mu^-}{\mu^+} - C_4\bar{k}\left(\frac{\mu^-}{\mu^+} + \frac{\lambda^-}{2\mu^+}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\|\sigma_{12}\|_{L^2(\Omega^-)} \leq \mu^- C\left[\frac{\mu^-}{\mu^+} - C_4\bar{k}\left(\frac{\mu^-}{\mu^+} + \frac{\lambda^-}{2\mu^+}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$\left(\left(\frac{l}{L_2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{l}{L_2}\left[\frac{\mu^-}{\mu^+} - C_4\bar{k}\left(\frac{\mu^-}{\mu^+} + \frac{\lambda^-}{2\mu^+}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\|\sigma_{ii}\|_{L^2(\Omega^-)} \leq C\left(\left(\frac{l}{L_2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{l}{L_2}\left[\frac{\mu^-}{\mu^+} - C_4\bar{k}\left(\frac{\mu^-}{\mu^+} + \frac{\lambda^-}{2\mu^+}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$\left(\lambda^-\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}\right)^{-\frac{1}{2}} + 2\mu^-\left[\frac{\mu^-}{\mu^+} - C_4\bar{k}\left(\frac{\mu^-}{\mu^+} + \frac{\lambda^-}{2\mu^+}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\right).$$

s **Preuve:**
Il suffit d'utiliser le théorème 1.5.1 dans les lemmes 1.5.2 et 1.5.3. ■

1.5.4 Estimations sur la vitesse

Notations:

$$\dot{F}(v) = \dot{F}^+(v) + \dot{F}^-(v) = L_1 L_2 \int_{\Omega^+} \dot{f} v dX dY + L_1 l \int_{\Omega^-} \dot{f}\, dX dZ,$$
$$\dot{\mathcal{L}}(v) = \int_{\Omega^+} \left(\lambda^+ \dot{\mathcal{C}}_{kk}\,\delta_{ij} + 2\mu^+ \dot{\mathcal{C}}_{ij}\right) e_{ij}^{ad}(v)\, L_1 L_2, dX dY$$
$$j(\dot{u},v) = L_1 \int_{\Gamma_c} k|S(\dot{\sigma}_N)||[v_T]|.$$

Lemme 1.5.5 *Soit (u,σ) solution du problème (1.60)-(1.62), la vitesse $\dot{u}$ vérifie l'équation variationnelle suivante:*

$$a(\dot{u},v) = \dot{F}(v) - \dot{\mathcal{L}}(v) + L_1 < \dot{\sigma}_N,[v_N] > +L_1 < \dot{\sigma}_T,[v_T] > \qquad \forall v \in V. \tag{1.124}$$

Preuve:
La régularité (1.72) de f implique que l'équation d'équilibre (1.24) est vraie p.p. dans le domaine Ω^α. En dérivant cette équation par rapport au temps, en la multipliant par $vL_1L_2^\alpha$ avec v dans V et en utilisant la formule de Green, on obtient le résultat. ■

Lemme 1.5.6

$$\forall \quad t \in (0,T) \qquad \langle \sigma_N(t),[\dot{u}_N(t)]\rangle = 0.$$

Preuve:
Pour tout $t \in [0,T], u(t) \in K$ satisfait l'inégalité variationnelle (1.62) alors, pour tout $\Delta t > 0$

$$\left\langle \sigma_N(t), \frac{[u_N(t+\Delta t)] - [u_N(t)]}{\Delta t}\right\rangle \geq 0$$

et

$$\left\langle \sigma_N(t), \frac{[u_N(t-\Delta t)] - [u_N(t)]}{-\Delta t} \right\rangle \leq 0.$$

Le résultat est obtenu par passage à la limite quand $\Delta t \to 0$. ■

Lemme 1.5.7

$$\forall \quad t \in (0,T) \qquad \langle \dot{\sigma}_N(t), [\dot{u}_N(t)] \rangle \leq 0.$$

Preuve:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\sigma_N(t+\Delta t) - \sigma_N(t)}{\Delta t}, \frac{[u_N(t+\Delta t)] - [u_N(t)]}{\Delta t} \right\rangle = \\ \left\langle \frac{\sigma_N(t+\Delta t)}{\Delta t}, \frac{[u_N(t+\Delta t)]}{\Delta t} \right\rangle - \left\langle \frac{\sigma_N(t)}{\Delta t}, \frac{[u_N(t+\Delta t)]}{\Delta t} \right\rangle \\ - \left\langle \frac{\sigma_N(t+\Delta t)}{\Delta t}, \frac{[u_N(t)]}{\Delta t} \right\rangle + \left\langle \frac{\sigma_N(t)}{\Delta t}, \frac{[u_N(t)]}{\Delta t} \right\rangle.\end{aligned}$$

Les conditions de contact unilatéral (1.62) impliquent que le premier et le dernier terme sont nuls tandis que le second et le troisième sont négatifs, donc

$$\left\langle \frac{\sigma_N(t+\Delta t) - \sigma_N(t)}{\Delta t}, \frac{[u_N(t+\Delta t)] - [u_N(t)]}{\Delta t} \right\rangle \leq 0.$$

En passant à la limite quand Δt tend vers 0, on obtient le résultat. ■

Lemme 1.5.8

$$\forall \quad t \in (0,T) \qquad < \dot{\sigma}_T(t), [\dot{u}_T(t)] > \leq \int_{\Gamma_c} k|S(\dot{\sigma_N})||[\dot{u}_T]|. \tag{1.125}$$

Preuve:
Dans (1.71), en on choisissant $v = 0$ et $v = 2\dot{u}$ comme fonctions test, il vient

$$\begin{cases} < \sigma_T, [\dot{u}_T(t)] > = - \int_{\Gamma_c} k|S(\sigma_N(t)|[\dot{u}_T(t)]| \\ |\sigma_T(t)| \leq k|S(\sigma_N(t)|, \end{cases} \qquad \text{p. p. sur } \Gamma_c,$$

donc

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\sigma_T(t) - \sigma_T(t-\Delta t)}{\Delta t}, [\dot{u}_T(t)] \right\rangle &\leq \frac{1}{\Delta t}\left(- \int_{\Gamma_c} k|S(\sigma_N(t)||[\dot{u}_T(t)]| + \int_{\Gamma_c} k|S(\sigma_N(t-\Delta t)|[\dot{u}_T(t)]| \right) \\ &\leq \int_{\Gamma_c} k\frac{|S(\sigma_N(t) - \sigma_N(t-\Delta t)|}{\Delta t}|[\dot{u}_T(t)]|.\end{aligned}$$

En faisant tendre Δt vers 0, on obtient le résultat. ■

Théorème 1.5.9 *Sous les hypothèses de la section 1.5.1, les estimations suivantes sont vérifiées*

$$\|e^{ad}_{kk}(\dot u)\|_{L^2(\Omega^+)} \leq C\left(1+\left(\frac{l}{L_2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\mu^-}{\mu^+}-C_4\bar k\left(\frac{\mu^-}{\mu^+}+\frac{\lambda^-}{2\mu^+}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{1.126}$$

$$\|e^{ad}_{ij}(\dot u)\|_{L^2(\Omega^+)} \leq C\left(1+\left(\frac{l}{L_2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\mu^-}{\mu^+}-C_4\bar k\left(\frac{\mu^-}{\mu^+}+\frac{\lambda^-}{2\mu^+}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{1.127}$$

$$\|e^{ad}_{kk}(\dot u)\|_{L^2(\Omega^-)} \leq C\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{l}{L_2}\left[\frac{\mu^-}{\mu^+}-C_4\bar k\left(\frac{\mu^-}{\mu^+}+\frac{\lambda^-}{2\mu^+}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{l}{L_2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{1.128}$$

$$\|e^{ad}_{ij}(\dot u)\|_{L^2(\Omega^-)} \leq C\left[\frac{\mu^-}{\mu^+}-C_4\bar k\left(\frac{\mu^-}{\mu^+}+\frac{\lambda^-}{2\mu^+}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{l}{L_2}\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{l}{L_2}\left[\frac{\mu^-}{\mu^+}-C_4\bar k\left(\frac{\mu^-}{\mu^+}+\frac{\lambda^-}{2\mu^+}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{1.129}$$

Preuve:
On choisit dans (1.124) $v=\dot u$, on a

$$a(\dot u,\dot u)=\dot F(\dot u)-\dot{\mathcal{L}}(\dot u)+L_1<\dot\sigma_N,[\dot u_N]>+L_1<\dot\sigma_T,[\dot u_T]>.$$

En utilisant les lemmes 1.5.7 et 1.5.8, on obtient

$$a(\dot u,\dot u)+\dot{\mathcal{L}}(\dot u)\leq \dot F(\dot u)+j(\dot u,\dot u). \tag{1.130}$$

Par une démonstration analogue à celle du théorème 1.5.1, on obtient

$$\begin{aligned}
\|e^{ad}_{kk}(\dot u)\|_{L^2(\Omega^+)} &\leq \frac{I^+(\dot f,\dot s)}{\sqrt{\alpha^+\beta^+}}+\frac{L_1 l^2 C^-_{Kor}(1+C_2\bar k)\|\dot f\|_{L^2(\Omega^-)}}{\sqrt{\alpha^+\beta^-}}\\
\|e^{ad}_{ij}(\dot u)\|_{L^2(\Omega^+)} &\leq \frac{I^+(\dot f,\dot s)}{\beta^+}+\frac{L_1 l^2 C^-_{Kor}(1+C_2\bar k)\|\dot f\|_{L^2(\Omega^-)}}{\sqrt{\beta^+\beta^-}}\\
\|e^{ad}_{kk}(\dot u)\|_{L^2(\Omega^-)} &\leq \frac{L_1 l^2 C^-_{Kor}(1+C_2\bar k)\|\dot f\|_{L^2(\Omega^-)}}{\sqrt{\alpha^-\beta^-}}+\frac{I^+(\dot f,\dot s)}{\sqrt{\alpha^-\beta^+}}\\
\|e^{ad}_{ij}(\dot u)\|_{L^2(\Omega^-)} &\leq \frac{L_1 l^2 C^-_{Kor}(1+C_2\bar k)\|\dot f\|_{L^2(\Omega^-)}}{\beta^-}+\frac{I^+(\dot f,\dot s)}{\sqrt{\beta^+\beta^-}}.
\end{aligned}$$

On obtient le résultat en utilisant les hypothèses de la section 1.5.1. ■

1.6 Cas critique

Notations :

$$\Delta = \frac{\mu^+}{\mu^-}\frac{l}{L_2}, \qquad \chi = \frac{\lambda^+}{\lambda^-}\frac{l}{L_2}.$$

Par analogie au problèmes de Tresca et de Coulomb statiques [7], [1], on va supposer que Δ et χ tendent vers des constantes i.e.

$$\frac{\lambda^+}{\lambda^-}\frac{l}{L_2} \text{ tend vers une constante notée } a \tag{1.131}$$

$$\frac{\mu^+}{\mu^-}\frac{l}{L_2} \text{ tend vers une constante notée } b. \tag{1.132}$$

On dit que ces conditions caractérisent le cas critique car à partir du problème limite obtenu sous ces conditions, on pourra en déduire une famille de problèmes en faisant tendre a et b vers 0 ou $+\infty$.

1.6.1 Estimation d'énergie

On peut définir l'énergie élastique de chacun des deux corps ainsi que l'énergie due au frottement par

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^+ &= \sum_{ij} \|\tilde{\sigma}\|^2_{L^2(\Omega_L^+)^4},\\
\mathcal{E}^- &= \sum_{ij} \|\tilde{\sigma}\|^2_{L^2(\Omega_L^-)^4},\\
\mathcal{E}_c &= \int_{\Gamma_c} k|S(\tilde{\sigma_N})|[\tilde{\dot{u}}_T])dx_1.
\end{aligned}$$

Proposition 1.6.1 *Sous les hypothèses de la section 1.5.1, on a les majorations suivantes:*

$$\mathcal{E}^+ \leq C\left(1 + \left(\frac{l}{L_2}\right)^2 \Delta\right) \tag{1.133}$$

$$\mathcal{E}^- \leq C\frac{l}{L_2}\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\chi} + \frac{\Delta}{\chi}\frac{l^2}{L_2^2} + \frac{l^2}{L_2^2}\right) \tag{1.134}$$

$$\mathcal{E}_c \leq C\left(1 + \left(\frac{l}{L_2}\right)^2 \Delta + \frac{\Delta}{\chi} + \frac{\Delta^2}{\chi}\frac{l^2}{L_2^2} + \sqrt{\Delta}\frac{l}{L_2}\right). \tag{1.135}$$

Preuve:

• D'après la définition

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^+ &= \int_{\Omega_L^+} \tilde{\sigma}^2 \, dx_1 \, dx_2 \\ &= L_1 L_2 \int_{\Omega^+} \sigma^2 \, dX \, dY \\ &= L_1 L_2 \|\sigma\|^2_{L^2(\Omega^+)^4}.\end{aligned}$$

La première inégalité du théorème 1.5.4 donne

$$\|\sigma\|^2_{L^2(\Omega^+)^4} \leq C \left(1 + \frac{l}{L_2}\sqrt{\Delta}\right)^2,$$

et l'inégalité (1.133) est démontrée.

• De même on a

$$\mathcal{E}^- = L_1 l \|\sigma\|^2_{L^2(\Omega^-)^4}.$$

D'après le théorème 1.5.4

$$\begin{aligned}\|\sigma_{12}\|_{L^2(\Omega^-)} &\leq C \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}} + \frac{l}{L_2}\right) \\ \|\sigma_{ii}\|_{L^2(\Omega^-)} &\leq C \left(\frac{1}{\sqrt{\chi}} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} + \sqrt{\frac{\Delta}{\chi}} \frac{l}{L_2} + \frac{l}{L_2}\right),\end{aligned}$$

ce qui montre la deuxième inégalité.

• D'après le théorème 1.5.1, on a

$$\begin{aligned}\|e^{ad}_{kk}(u)\|_{L^2(\Omega^+)} &\leq C \left(1 + \frac{l}{L_2}\sqrt{\Delta}\right) \\ \|e^{ad}_{ij}(u)\|_{L^2(\Omega^-)} &\leq C \left(1 + \frac{l}{L_2}\sqrt{\Delta}\right) \\ \|e^{ad}_{kk}(u)\|_{L^2(\Omega^-)} &\leq C \left(\sqrt{\chi}\sqrt{\Delta} + \frac{L_2}{l}\sqrt{\chi}\right) \\ \|e^{ad}_{ij}(u)\|_{L^2(\Omega^-)} &\leq C \left(\sqrt{\Delta}\frac{L_2}{l} + \Delta\right).\end{aligned}$$

On obtient l'inégalité (1.135) en utilisant ces résultats dans l'inégalité (1.93) (cf. lemme 1.4.6) et le fait que $\displaystyle\int_{\Gamma_c} k|S(\tilde{\sigma_N})|[\tilde{\dot{u}}_T])dx_1 = L_1 j(u,\dot{u})$. ■

Remarque 10 Sous les hypothèses du cas critique, on remarque que $\mathcal{E}^+$, $\mathcal{E}_c$ sont bornés et que $\mathcal{E}^-$ tend vers zéro.

1.7 Problème limite

Nous allons déterminer dans cette section, sous les hypothèses de la section 1.5.1, le problème limite correspondant au cas critique défini dans le paragraphe précédent.
Nous commençons par trouver le problème limite dans Ω^+ puis nous le complétons par une loi de contact limite sur l'interface Γ_c constituée de deux conditions:

- Une condition de contact unilatéral (cf. (1.194)),
- Une loi de frottement quasi-statique (cf. (1.193)).

Nous trouvons tout d'abord les conditions unilatérales en éliminant la vitesse dans la formulation variationnelle. En intégrant celle-ci par rapport au temps, on obtiendra ensuite la loi limite du frottement.

1.7.1 Cadre fonctionnel

Dans le domaine Ω^-, la convergence du déplacement a lieu dans un espace plus grand que H^1, espace que définissons et pour lequel nous rappelons un résultat de densité et un résultat de trace.
Soit

$$V_Z^- = \left\{ v \in \left(L^2(\Omega^-)\right)^2 ; \frac{\partial v}{\partial z} \in \left(L^2(\Omega^-)\right)^2 ; v = 0 \text{ sur } \Gamma_u^- \right\},$$

auquel on associe la norme

$$\|v\|_{V_Z^-} = \left\| \frac{\partial v}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega^-)^2}.$$

$$V_Z = \left\{ v;\ v/_{\Omega^+} \in V^+ \text{ et } v/_{\Omega^-} \in V_Z^- \right\},$$
$$K_Z = \{ v \in V_Z;\ [v_N] \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c \}.$$

Lemme 1.7.1 *Les espaces V et K sont denses respectivement dans V_Z et K_Z pour la norme de V_Z et l'application trace de V_Z^- dans $\left(L^2(\Gamma_c)\right)^2$ est linéaire et continue.*

Preuve: La densité de V dans V_Z et les propriétés de la trace sont prouvées dans [4]. La densité de K dans K_Z est démontrée dans [1]. ■

Nous introduisons les opérateurs suivants $\forall \tau,\sigma \in \left(L^2(\Omega^-)\right)^4$ et $\forall u,v \in V_Z$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_-^*(\sigma,\tau) &= L_1 \int_{\Omega^-} \sigma\tau dX dZ \\
\mathcal{A}_-^*(u,\tau) &= \frac{\lambda^+}{a}\frac{L_1}{L_2} \int_{\Omega^-} \partial_2 u_2 \tau_{kk} dX dZ \\
&+ 2\frac{\mu^+}{b}\frac{L_1}{L_2}\left[\int_{\Omega^-} \partial_2 u_2 \tau_{22} + \int_{\Omega^-} \frac{1}{2}\partial_2 u_1 (\tau_{12}+\tau_{21}) dX dZ \right].
\end{aligned}$$

$$B^*_-(\tau,v) = L_1 \int_{\Omega^-} \tau_{i2}\partial_2 v_i \, dX\, dZ \tag{1.136}$$

$$a^*_-(u,v) = \frac{\lambda^+}{a}\frac{L_1}{L_2}\int_{\Omega^-} \partial_2 u_2 \partial_2 v_2 dX dZ \tag{1.137}$$

$$+ 2\frac{\mu^+}{b}\frac{L_1}{L_2}\left[\int_{\Omega^-} \partial_2 u_2 \partial_2 v_2 dX dZ + \int_{\Omega^-} \partial_2 u_1 \partial_2 v_1 dX dZ\right]. \tag{1.138}$$

1.7.2 Problème limite global

Dans ce paragraphe nous obtenons le problème limite en passant à la limite dans (1.60)-(1.62). Pour cela nous avons besoin des lemmes suivants:

Lemme 1.7.2 *Sous les conditions (1.131), (1.132), il existe un couple (u^*_+,σ^*_+) dans $V^+ \times \Sigma^+$ tel que*

$$\textit{Dans } \Omega^+ \qquad u \rightharpoonup u^*_+ \qquad \textit{dans } V^+ \textit{ faible} \tag{1.139}$$

$$\textit{Dans } \Omega^+ \qquad \sigma \rightharpoonup \sigma^*_+ \qquad \textit{dans } \Sigma^+ \textit{ faible.} \tag{1.140}$$

Preuve:
D'après le théorème 1.5.1, u est borné dans V^+, donc il existe u^*_+ tel que u converge faiblement vers u^*_+ dans V^+.
D'après le théorème 1.5.4, σ est borné dans $\left(L^2(\Omega^+)\right)^4$. De plus, on sait que

$$\partial_i L_i^{-1}\sigma_{ij} = f_j \qquad \text{p.p.} \quad \text{dans } \Omega^+ \tag{1.141}$$

et que f est bornée dans $L^2(\Omega^+)$, donc $div_L\sigma$ est borné dans $L^2(\Omega^+)^2$. Ce qui montre la convergence faible de σ vers un tenseur σ^*_+ dans Σ^+. ■

En utilisant les définitions (1.56) et (1.57), on a le corollaire suivant:

Corollaire 1.7.3 *σ^+_N et σ^+_T convergent respectivement dans $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)\right)'$ et $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)\right)'^2$ faible.*

Lemme 1.7.4 *Sous les conditions (1.131), (1.132), il existe u^*_- dans $V_Z(\Omega^-)$ et σ^*_- dans $\left(L^2(\Omega^-)\right)^4$ tels que*

$$u \rightharpoonup u^*_- \qquad \textit{dans } V_Z(\Omega^-) \textit{ faible,} \tag{1.142}$$

$$\sigma \rightharpoonup \sigma^*_- \quad \textit{dans } \left(L^2(\Omega^-)\right)^4 \textit{ faible.} \tag{1.143}$$

Preuve:
• En utilisant l'inégalité (1.81) et l'estimation (1.118), on obtient, en tenant compte des conditions (1.131),(1.132), l'inégalité suivante:

$$\|\partial_2 u_i\|_{L^2(\Omega^-)} \le C\sqrt{b}, \tag{1.144}$$

d'où la convergence faible de u dans V_Z^-.

• D'après le théorème 1.5.4, on a

$$
\begin{aligned}
\|\sigma_{12}\|_{L^2(\Omega^-)} &\leq C\mu^+ \left(\sqrt{\frac{\mu^-}{\mu^+}}\sqrt{\frac{L_2}{l}} + \sqrt{\frac{\mu^-}{\mu^+}}\sqrt{\frac{l}{L_2}}\right) \\
&\leq C\mu^+ \left(\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\frac{l}{L_2}\right) \\
&\leq C\mu^+ \frac{1}{\sqrt{b}} \\
\|\sigma_{ii}\|_{L^2(\Omega^-)} &\leq C\lambda^+ \frac{b}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\frac{l}{L_2}\right).
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\|\sigma\|_{L^2(\Omega^-)^4} \leq C. \tag{1.145}
$$

Par conséquent, il existe σ_-^* dans $L^2(\Omega^-)^4$, tel que σ converge faiblement vers σ_-^* dans $L^2(\Omega^-)^4$.

■

Remarque 11 Dans la suite, on notera

$$
u^* = (u_+^*, u_-^*) \quad \textit{et} \quad \sigma^* = (\sigma_+^*, \sigma_-^*),
$$

où $u_\pm^*$ et $\sigma_\pm^*$ sont définis dans les lemmes 1.7.2 et 1.7.4 .

Lemme 1.7.5

$$
\frac{l}{L_2} u \rightharpoonup 0 \qquad \textit{dans } H^1(\Omega^-)^2 \textit{ faible.}
$$

Preuve:

D'après le lemme 1.7.4, u est borné dans V_Z^-, alors

$$
\frac{l}{L_2} u \longrightarrow 0 \qquad \text{dans } V_Z^- \text{ fort.} \tag{1.146}
$$

D'autre part, d'après le théorème 1.5.1, on a

$$
\begin{aligned}
\|\frac{l}{L_2}\partial_1 u_1\|_{L^2(\Omega^-)} &\leq C\sqrt{b}. \\
Or \qquad \|\frac{l}{L_2}\partial_1 u_2\|_{L^2(\Omega^-)} &\leq \frac{L_1}{L_2}\left(l\|e_{12}^{ad}(u)\|_{L^2(\Omega^-)} + \|\partial_2 u_1\|_{L^2(\Omega^-)}\right) \\
&\leq C\sqrt{b}.
\end{aligned}
$$

Donc $\frac{l}{L_2}u$ converge faiblement vers une fonction w dans $H^1(\Omega^-)^2$. Comme la trace de u_i sur Γ_u^- est nulle, donc la trace de w, qui est la limite faible dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)^2$ de la trace de $\frac{l}{L_2}u$, est nulle. De plus d'après (1.146), on a $\partial_2 w_i = 0$ dans $L^2(\Omega^-)$. Par conséquent w est nulle dans

$H^1(\Omega^-)^2$. ■

Lemme 1.7.6 *Les convergences suivantes ont lieu*

$$\begin{aligned}
&\dot{u} \rightharpoonup \dot{u}^*_+ \text{ dans } V^+\\
&\dot{u} \rightharpoonup \dot{u}^*_- \text{ dans } V_Z^-\\
&\gamma\dot{u}^- \rightharpoonup \gamma\dot{u}^{*^-} \text{ dans } L^2(\Gamma_c)^2.
\end{aligned}$$

Preuve:
En utilisant les estimations de la vitesse (cf. théorème 1.5.9), on déduit que u est borné dans $W^{1,2}(0,T,V_Z)$, donc converge dans cet espace vers u^* et par suite $\dot{u}$ converge faiblement vers $\dot{u}^* = \frac{d}{dt}u^*$ dans V_Z. ■

Proposition 1.7.7 *La loi de comportement limite de Hooke est donnée par*

$$\mathcal{B}^+(\sigma^*,\tau) = \mathcal{A}^+(u^*,\tau) + \mathcal{S}(\tau) \qquad \forall\tau \in \left(L^2(\Omega^+)\right)^4 \tag{1.147}$$

$$\mathcal{B}^*_-(\sigma^*,\tau) = \mathcal{A}^*_-(u^*,\tau) \qquad \forall\tau \in \left(L^2(\Omega^-)\right)^4, \tag{1.148}$$

où $\mathcal{B}^*_-(\cdot,\cdot)$ et $\mathcal{A}^*_-(\cdot,\cdot)$ sont définis dans la section 1.7.1.

Preuve:
Dans (1.60), on choisit $\tau = 0$ sur Ω^-, on obtient

$$\mathcal{B}^+(\sigma,\tau) = \mathcal{A}^+(u,\tau) + \mathcal{S}(\tau) \qquad \forall\tau \in \left(L^2(\Omega^+)\right)^4. \tag{1.149}$$

En utilisant le lemme 1.7.2, et le fait que les coefficients des opérateurs $\mathcal{B}^+(\cdot,\cdot)$, $\mathcal{A}^+(\cdot,\cdot)$, $\mathcal{S}(\cdot)$ sont fixés, on a

$$\begin{aligned}
&lim\, \mathcal{B}^+(\sigma,\tau) = \mathcal{B}^+(\sigma^*,\tau) \qquad \forall\tau \in \left(L^2(\Omega^+)\right)^4,\\
&lim\, \mathcal{A}^+(u,\tau) = \mathcal{A}^+(u^*,\tau),\\
&lim\, \mathcal{S}(\tau) = \mathcal{S}(\tau).
\end{aligned}$$

Alors en passant à la limite dans (1.149), on obtient (1.147).
Pour obtenir la deuxième équation, on passe à la limite dans l'équation suivante qui s'obtient en choisissant $\tau^+ = 0$ dans (1.60) et qui s'écrit :

$$\mathcal{B}^-(\sigma,\tau) = \mathcal{A}^-(u,\tau) \qquad \forall\tau \in \left(L^2(\Omega^+)\right)^4. \tag{1.150}$$

On passe à la limite après division par l:
• Pour le premier terme, on a

$$\begin{aligned}
lim(l^{-1}\mathcal{B}^-(\sigma,\tau)) &= lim \int_{\Omega^-} \sigma_{ij}\tau_{ij}L_1 dX dZ\\
&= \int_{\Omega^-} \sigma^*_{ij}\tau_{ij}L_1 dX dZ \qquad \text{d'après (1.143)}\\
&= \mathcal{B}^*_-(\sigma^*,\tau).
\end{aligned} \tag{1.151}$$

• Pour le terme $\mathcal{A}^-(u,\tau)$, nous allons passer à la limite en faisant apparaître les rapports $\dfrac{\lambda^+}{\lambda^-}\dfrac{l}{L_2}$ et $\dfrac{\mu^+}{\mu^-}\dfrac{l}{L_2}$:

$$\begin{aligned}
l^{-1}\mathcal{A}^-(u,\tau) &= \lambda^- \int_{\Omega^-} (L_1^{-1}\partial_1 u_1 + l^{-1}\partial_2 u_2)\tau_{kk} L_1 dX dZ \\
&\quad + 2\mu^- \int_{\Omega^-} e_{ij}^{ad}(u)\tau_{ij} L_1 dX dZ \\
&= \left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}\frac{L_2}{l}\right)\lambda^+ \frac{L_1}{L_2}\int_{\Omega^-} (L_1^{-1}\partial_1 l u_1 + \partial_2 u_2)\tau_{kk} dX dZ \\
&\quad + 2\left(\frac{\mu^-}{\mu^+}\frac{L_2}{l}\right)\mu^+ \frac{L_1}{L_2}\Bigg[\int_{\Omega^-} (L_1^{-1}\partial_1 l u_1)\tau_{11} dX dZ \\
&\quad + \int_{\Omega^-} \partial_2 u_2 \tau_{22}\, dX dZ + \int_{\Omega^-} (\partial_2 u_1 + L_1^{-1}\partial_1 l u_2)\frac{1}{2}(\tau_{12}+\tau_{21}) dX dZ\Bigg].
\end{aligned}$$

On passe à la limite en utilisant les lemmes 1.7.4 et 1.7.5, en tenant compte de (1.131) et de (1.132), on obtient:

$$\begin{aligned}
lim\,(l^{-1}\mathcal{A}^-(u,\tau)) &= \frac{\lambda^+}{a}\frac{L_1}{L_2}\int_{\Omega^-} \partial_2 u_2^* \tau_{kk} dX dZ \\
&\quad + 2\frac{\mu^+}{b}\frac{L_1}{L_2}\left[\int_{\Omega^-} \partial_2 u_2^* \tau_{22} dX dZ + \int_{\Omega^-} \partial_2 u_1^* \frac{1}{2}(\tau_{12}+\tau_{21}) dX dZ\right] \\
&= \mathcal{A}_-^*(u^*,v).
\end{aligned} \tag{1.152}$$

Le passage à la limite dans (1.150) en utilisant (1.151)-(1.152) permet d'obtenir (1.148). ■

Remarque 12 A partir de la proposition 1.7.7, les expressions explicites des composantes de σ^* *sont données par*

$$\sigma_{11}^* = \frac{\lambda^+}{aL_2}\partial_2 u_2^* \qquad p.p.\ \ dans\ \Omega^- \tag{1.153}$$

$$\sigma_{12}^* = \frac{2\mu^+}{bL_2}\partial_2 u_1^* \qquad p.p.\ \ dans\ \Omega^- \tag{1.154}$$

$$\sigma_{22}^* = \frac{\lambda^+}{aL_2}\partial_2 u_2^* + \frac{2\mu^+}{bL_2}\partial_2 u_2^* \quad p.p.\ \ dans\ \Omega^-. \tag{1.155}$$

Remarque 13 D'une façon analogue à la démonstration de la proposition 1.7.7, on a pour tout

v de V^- :

$$
\begin{aligned}
lim\, a^-(u,v) = lim\, \Bigg\{ & \left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}\frac{L_2}{l}\right)\lambda^+\frac{L_1}{L_2}\int_{\Omega^-}(L_1^{-1}\partial_1 lu_1+\partial_2 u_2)(L_1^{-1}\partial_1 lv_1+\partial_2 v_2)dXdZ \\
& + 2\left(\frac{\mu^-}{\mu^+}\frac{L_2}{l}\right)\mu^+\frac{L_1}{L_2}\Bigg[\int_{\Omega^-}(L_1^{-1}\partial_1 lu_1)(L_1^{-1}\partial_1 lv_1)dXdZ \\
& + \int_{\Omega^-}\partial_2 u_2\partial_2 v_2\, dXdZ + \int_{\Omega^-}(\partial_2 u_1+L_1^{-1}\partial_1 lu_2)(\partial_2 v_1+L_1^{-1}\partial_1 lv_2)dXdZ\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{1.156}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\lambda^+}{a}\frac{L_1}{L_2}\int_{\Omega^-}\partial_2 u_2^*\partial_2 v_2 dXdZ \\
&+ 2\frac{\mu^+}{b}\frac{L_1}{L_2}\left[\int_{\Omega^-}\partial_2 u_2^*\partial_2 v_2 dXdZ + \int_{\Omega^-}\partial_2 u_1^*\partial_2 v_1 dXdZ\right]
\end{aligned} \tag{1.157}
$$

$$
= a_-^*(u^*,v) \tag{1.158}
$$

et

$$
lim\, B^-(u,v) = B_-^*(u^*,v). \tag{1.159}
$$

Et comme

$$
a^-(u,v) = B^-(u,v) \qquad \forall v \in V^-,
$$

alors :

$$
a_-^*(u,v) = B_-^*(u,v) \qquad \forall v \in V^-. \tag{1.160}
$$

Pour obtenir les conditions limites du contact unilatéral, nous allons passer à la limite dans l'inégalité variationnelle (1.62), où le produit de dualité qui apparaît dans cette inégalité est la somme de $< \cdot,\cdot >_+$ et $< \cdot,\cdot >_-$. Puisque $div_L\sigma^-$ est bornée dans $L^2(\Omega^-)$, donc $\sigma_N^{-^*}$ existe dans $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)\right)^{'}$ d'après (1.56). De plus, on va montrer que σ_{i2}^* est indépendant de Z dans Ω^-, ce qui va permettre d'obtenir une régularité L^2 de la trace de σ_{i2}^* sur Γ_c. D'où une régularité supplémentaire des contraintes normales et tangentielles sur Γ_c.

Lemme 1.7.8 *σ_{i2}^* ne dépend pas de Z dans Ω^- et vérifie*

$$
a_-^*(u^*,v) = L_1\int_{\Gamma_c}\sigma_{i2}^{*^-}(X)\gamma v\; dX \qquad \forall v \in V_Z^-. \tag{1.161}
$$

Preuve:

• Soit $\varphi \in \left(\mathcal{D}(\Omega^-)\right)^2$, dans l'inégalité (1.61), on choisit comme fonction test $v = \dot{u}$ sur Ω^+ et $v = \dot{u} \pm \varphi$ sur Ω^- et on obtient

$$
a^-(u,\varphi) = F^-(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \left(\mathcal{D}(\Omega^-)\right)^2.
$$

On passe à la limite en utilisant (1.158), (1.160) et le fait que

$$\lim F^{-}(\varphi) = 0.$$

Alors on obtient

$$\int_{\Omega^-} \sigma^*_{i2} \partial_2 \varphi_i = 0 \qquad \forall \varphi \in \left(\mathcal{D}(\Omega^-)\right)^2, \tag{1.162}$$

alors

$$\partial_2 \sigma^*_{i2} = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega^-), \tag{1.163}$$

et par conséquent σ^*_{i2} ne dépend pas de Z.

• D'après (1.160) et en utilisant la définition de $B^*_-(\cdot,\cdot)$, $a^*_-(u^*,v)$ s'écrit

$$a^*_-(u^*,v) = L_1 \int_{\Omega^-} \sigma^*_{i2} \partial_2 v_i \; dX \, dZ \qquad \forall v \in V^-. \tag{1.164}$$

En utilisant le fait que σ^*_{i2} est indépendant de Z, et que v_i est nulle sur Γ^-_u, on obtient le résultat pour tout v dans V^-, et le lemme 1.7.1 permet de conclure. ■

Lemme 1.7.9 *On a le résultat de régularité suivant*

$$\sigma^{*+}_N \in L^2(\Gamma_c), \qquad \sigma^{*+}_T \in L^2(\Gamma_c)^2.$$
$$\sigma^{*+}_N = \sigma^{*-}_{22}(X), \qquad \sigma^{*+}_T = \sigma^{*-}_{12}(X) \qquad \textit{p.p. sur } \Gamma_c.$$

Preuve:

En utilisant la définition (1.56), on a pour tout ψ de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$

$$L_1 < \sigma^+_N, \psi >_+ = a^+(u,\bar{\psi}) + \mathcal{L}(\bar{\psi}) - F^+(\bar{\psi}) \tag{1.165}$$

$$L_1 < \sigma^-_N, \psi >_- = a^-(u,\bar{\psi}) - F^-(\bar{\psi}), \tag{1.166}$$

où $\bar{\psi}$ est un relèvement de ψ dont la composante normale de la trace sur Γ_c est égale à ψ et dont la composante tangentielle est nulle.

D'après (1.69), on a

$$L_1 < \sigma^+_N, \psi >_+ = L_1 < \sigma^-_N, \psi >_- \qquad \forall \psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c). \tag{1.167}$$

En remplaçant ces produits de dualité par leurs expresssions (1.165) et (1.166) et en passant à la limite, il vient

$$L_1 < \sigma^{*+}_N, \psi >_+ = a^*_-(u^*,\bar{\psi}).$$

En utilisant le lemme 1.7.8, on déduit l'égalité de σ^{*+}_N et σ^{*-}_{22} au sens de $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)\right)'$. La régularité $L^2(\Gamma_c)$ de σ^{*-}_{22} permet de conclure. On procède de la même façon pour σ^{*+}_T. ■

Proposition 1.7.10 *La loi limite de contact unilatéral est donnée par*

$$\int_{\Gamma_c} \sigma^{*+}_N ([v_N] - [u^*_N]) \geq 0 \qquad \forall v \in K_Z.$$

Preuve:

En utilisant les définitions (1.56), (1.57) dans l'inégalité (1.62), on a pour tout v de K

$$\begin{aligned}0 \leq lim < \sigma_N,[v_N] - [u_N] > &= lim \left\langle \sigma_N^+,v_N^+ - u_N^+ >_+ + < \sigma_N^-,v_N^- - u_N^- >_- \right) \\ &= lim \left(a^+(u,v-u) + \mathcal{L}(v-u) + F^+(v-u) + \right. \\ &\left. a^-(u,v-u) - F^-(v-u) - < \sigma_T,[v_T] - [u_T] > \right). \quad (1.168)\end{aligned}$$

• Pour le premier terme, en utilisant tout d'abord la convergence faible de u dans $H^1(\Omega^+)^2$ obtenue dans le lemme 1.7.2, le fait que les coefficients de la forme bilinéaire $a^+(\cdot,\cdot)$ sont fixés et la coercivité de la forme bilinéaire $a^+(\cdot,\cdot)$, on obtient à la limite :

$$a^+(u^*,v-u^*) \geq \underline{lim}\, a^+(u,v-u). \quad (1.169)$$

• Pour le terme $a^-(u,v-u)$, d'après (1.158) on a

$$lim\, a^-(u,v) = a^*_-(u^*,v).$$

De plus, en utilisant les lemmes 1.7.4 et 1.7.5 et la continuité inférieure de $\|\cdot\|^2_{L^2(\Omega^-)}$, on a

$$\begin{aligned}\underline{lim}\, \|L_1^{-1}\partial_1 l u_1 + \partial_2 u_2\|^2_{L^2(\Omega^-)} &\geq \|\partial_2 u_2^*\|^2_{L^2(\Omega^-)} \\ \underline{lim}\, \|L_1^{-1}\partial_1 l u_1\|^2_{L^2(\Omega^-)} &\geq 0 \\ \underline{lim}\, \|\partial_2 u_2\|^2_{L^2(\Omega^-)} &\geq \|\partial_2 u_2^*\|^2_{L^2(\Omega^-)} \\ \underline{lim}\, \|\partial_2 u_1 + L_1^{-1}\partial_1 l u_2\|^2_{L^2(\Omega^-)} &\geq \|\partial_2 u_1^*\|^2_{L^2(\Omega^-)}.\end{aligned}$$

Donc

$$-a^*_-(u^*,u^*) \geq \underline{lim}\; - a^-(u,u), \quad (1.170)$$

et

$$a^*_-(u^*,v-u^*) \geq \underline{lim}\, a^-(u,v-u). \quad (1.171)$$

• Pour les termes linéaires, on a immédiatement à partir de (1.139) et (1.142):

$$lim\, \mathcal{L}(v-u) = \mathcal{L}(v-u^*) \quad (1.172)$$

$$lim\, F^+(v-u) = F^+(v-u^*) \quad (1.173)$$

$$lim\, F^-(v-u) = 0. \quad (1.174)$$

• Pour le dernier terme de (1.168), on a d'abord d'après (1.71)

$$| < \sigma_T,[v_T] - [u_T] > | \leq \int_{\Gamma_c} k|S(\sigma_N)||[v_T] - [u_T]| \qquad \forall v \in V. \quad (1.175)$$

Le corollaire 1.7.3 donne la convergence faible de σ_N^+ dans $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)\right)'$, et en utilisant la compacité de l'opérateur de régularisation S, on a la convergence forte de $S(\sigma_N)$ vers $S(\sigma_N^*)$ dans $L^2(\Gamma_c)$, ce qui permet de passer à la limite dans l'inégalité précédente, et on obtient

$$lim| < \sigma_T,[v_T] - [u_T] > | \leq \int_{\Gamma_c} k|S(\sigma_N^*)||[v_T] - [u_T^*]| \qquad \forall v \in V. \tag{1.176}$$

En incorporant (1.169)-(1.176) dans (1.168), il vient

$$a^+(u^*,v-u^*) + \mathcal{L}(v-u^*) + F^+(v-u^*) + a_-^*(u^*,v-u^*) + \int_{\Gamma_c} k|S(\sigma_N^*)||[v_T] - [u_T^*]|) \geq 0 \qquad \forall v \in K. \tag{1.177}$$

En utilisant la définition de $< \cdot,\cdot >_+$ et le lemme 1.7.8, cette inégalité devient

$$< \sigma_N^{*+},v_N^+ - u_N^{*+} >_+ + < \sigma_T^{*+},v_T^+ - u_T^{*+} >_+ + \int_{\Gamma_c} \sigma_{22}^{*-}(v_2^- - u_2^{*-}) + \int_{\Gamma_c} \sigma_{12}^{*-}(v_1^- - u_1^{*-}) + \int_{\Gamma_c} k|S(\sigma_N^*)||[v_T] - [u_T^*]|) \geq 0 \qquad \forall v \in K. \tag{1.178}$$

Soit w dans K_Z. Comme K est dense dans K_Z (cf. lemme 1.7.1), on peut approcher w par une suite w_i de K et on a en particulier la convergence forte de la trace $\gamma w_i^{\pm}$ vers $\gamma w^{\pm}$ dans $L^2(\Gamma_c)$ quand i tend vers l'infini. Dans l'inégalité (1.178), en choisissant w_i comme fonction test et en passant à la limite quand i tend vers l'infini, on obtient

$$< \sigma_N^{*+},w_N^+ - u_N^{*+} >_+ + < \sigma_T^{*+},w_T^+ - u_T^{*+} >_+ + \int_{\Gamma_c} \sigma_{22}^{*-}(w_2^- - u_2^{*-}) + \int_{\Gamma_c} \sigma_{12}^{*-}(w_1^- - u_1^{*-}) + \int_{\Gamma_c} k|S(\sigma_N^*)||[w_T] - [u_T^*]|) \geq 0 \qquad \forall w \in K_Z. \tag{1.179}$$

En choisissant w tel que $w_T = u_T^*$ sur Γ_c, et en utilisant le lemme 1.7.9, on obtient

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_N^{*+}([w_N] - [u_N^*]) \geq 0 \qquad \forall w \in K_Z.$$

■

Proposition 1.7.11 *Sous l'hypothèse :*

$$u_0 \textit{ converge fortement dans } V_Z \textit{ quand } l \textit{ tend vers } 0, \tag{1.180}$$

l'inégalité variationnelle suivante a lieu

$$a^+(u^*(t),v-\dot{u}^*(t)) + a_-^*(u^*(t),v-\dot{u}^*(t)) + \mathcal{L}(v-\dot{u}^*(t)) \int_{\Gamma_c} k|S(\sigma_N^*)|(|[v_T]| - |[\dot{u}_T^*]|)$$
$$\geq F^+(v-\dot{u}^*(t)) + L_1 \int_{\Gamma_c} \sigma_N^{*+}(t)([v_N] - [\dot{u}_N^*(t)]), \qquad \forall v \in V_Z.$$

Preuve:
Le passage direct à la limite dans l'inégalité variationnelle (1.61) est difficile à cause de la présence du produit du déplacement et de la vitesse qui convergent tous les deux faiblement. L'idée est d'intégrer par rapport au temps pour éliminer la vitesse.

On intègre l'inégalité variationnelle (1.61) sur l'intervalle $[0,T]$, on obtient

$$\int_0^T a\left(u(t),v-\dot{u}(t)\right)\,dt+\int_0^T \mathcal{L}(v-\dot{u}(t))\,dt+\int_0^T j(u(t),v)\,dt-\int_0^T j(u,\dot{u}(t))\,dt$$
$$\geq \int_0^T F(v-\dot{u}(t))\,dt+\int_0^T L_1\left\langle \sigma_N(t),[v_N]-[\dot{u}_N(t)]\right\rangle\,dt \quad \forall v\in L^2(0,T,V). \quad (1.181)$$

Les termes qui posent problème lors du passage à la limite sont les termes $-a^-(u,\dot{u})$ et $\langle\sigma_N(t)\,[\dot{u}_N]\rangle$. Pour le premier terme, on sait que la forme $a(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire et symétrique, alors $a(u,\dot{u})=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u,u)$.
En utilisant le lemme 1.5.6, l'inégalité précédente devient

$$\int_0^T a^+(u(t),v)\,dt-a^+(u(T),u(T))+a^+(u(0),u(0))+\int_0^T a^-(u(t),v)\,dt-a^-(u(T),u(T))$$
$$+a^-(u(0),u(0))+\int_0^T \mathcal{L}(v-\dot{u}(t))\,dt+\int_0^T\int_{\Gamma_c} k|S(\sigma_N)|(|[v_T]|-|[\dot{u}_T]|)\,dt$$
$$\geq\int_0^T F^+(v-\dot{u}(t))\,dt+\int_0^T F^-(v-\dot{u}(t))\,dt+\int_0^T L_1\left\langle\sigma_N(t),[v_N]\right\rangle\,dt \qquad \forall v\in L^2(0,T,V).$$

En procédant de la même façon que dans la preuve de la proposition 1.7.10, et en utilisant de plus l'hypothèse (1.180) et le lemme 1.7.6, on obtient l'inégalité suivante

$$\int_0^T a^+(u^*(t),v)\,dt-a^+(u^*(T),u^*(T))+a^+(u^*(0),u^*(0))+\int_0^T a^*_-(u^*(t),v)dt$$
$$-a^*_-(u^*(T),u^*(T))+a^-(u^*(0),u^*(0))+\int_0^T \mathcal{L}(v-\dot{u}^*(t))\,dt\int_0^T\int_{\Gamma_c} k|S(\sigma^*_N)|(|[v_T]|-|[\dot{u}^*_T]|)\,dt$$
$$\geq\int_0^T F^+(v-\dot{u}^*(t))\,dt+\int_0^T L_1\int_{\Gamma_c}\sigma_N^{*+}(t)\,[v_N]\,dx\,dt \qquad \forall v\in L^2(0,T,V).$$

Alors

$$\int_0^T a^+(u^*(t),v-\dot{u}^*(t))\,dt+\int_0^T a^*_-(u^*(t),v-\dot{u}^*(t))\,dt+$$
$$\int_0^T \mathcal{L}(v-\dot{u}^*(t))\,dt+\int_0^T\int_{\Gamma_c} k|S(\sigma^*_N)|(|[v_T]|-|[\dot{u}^*_T]|)$$
$$\geq\int_0^T F^+(v-\dot{u}^*(t))\,dt+\int_0^T L_1\int_{\Gamma_c}\sigma_N^{*+}(t)\,[v_N]\,dx\,dt \qquad \forall v\in L^2(0,T,V_Z).$$

Pour obtenir le problème "ponctuel en temps", on considère w dans V_Z indépendant de t. On choisit comme fonction test dans l'inégalité précédente $v(\tau)$ telle que $v(\tau)=\dot{u}^*$ si $\tau\notin[t,t+h[$, sinon $v(\tau) = w$, il vient

$$\int_t^{t+h} a^+(u^*(t),w - \dot u^*(t))\,dt + \int_t^{t+h} a^*_-(u^*(t),w - \dot u^*(t))\,dt +$$
$$\int_t^{t+h} \mathcal{L}(w - \dot u^*(t))\,dt + \int_t^{t+h}\int_{\Gamma_c} k|S(\sigma^*_N)|(|[w_T]| - |[u^*_T]|)$$
$$\geq \int_t^{t+h} F^+(w - \dot u^*(t))\,dt + \int_t^{t+h} L_1 \int_{\Gamma_c} \sigma^{*+}_N(t)\,[w_N]\,dx\,dt \qquad \forall w \in V_Z.$$

En divisant par h et en le faisant tendre vers 0, il vient

$$a^+(u^*(t),w - \dot u^*(t)) + a^*_-(u^*(t),w - \dot u^*(t)) + \mathcal{L}(v - \dot u^*(t)) + \int_{\Gamma_c} k|S(\sigma^*_N)|(|[w_T]| - |[\dot u^*_T]|)$$
$$\geq F^+(w - \dot u^*(t)) + L_1 \int_{\Gamma_c} \sigma^{*+}_N\,[w_N]\,dx \qquad \forall w \in V_Z.$$

En utilisant la proposition 1.7.10 et une démonstration analogue à celle du lemme 1.5.6, on obtient finalement

$$\int_{\Gamma_c} \sigma^{*+}_N(t)\,[\dot u^*_N]\,dx = 0. \tag{1.182}$$

On achève la preuve, en rajoutant ce terme à l'inégalité précédente. ■

En rassemblant les résultats des propositions 1.7.7, 1.7.10 et 1.7.11, le problème limite défini sur $\Omega^+ \cup \Omega^-$ est donné par

Théorème 1.7.12 *Il existe u^* dans K_Z et σ^* dans Σ^+ tels que,*

$$\mathcal{B}^+(\sigma^*,\tau) = \mathcal{A}^+(u^*,\tau) + \mathcal{S}(\tau) \qquad \forall \tau \in \left(L^2(\Omega^+)\right)^4 \tag{1.183}$$

$$a^*_-(u^*,v) = L_1 \int_{\Gamma_c} \sigma^*_{i2}(X)\gamma v dX \qquad \forall v \in V^-_Z \tag{1.184}$$

$$a^+(u^*(t),v - \dot u^*(t)) + a^*_-(u^*,v - \dot u^*(t)) + \mathcal{L}(v - \dot u^*(t)) + \int_{\Gamma_c} k|S(\sigma^*_N)|(|[v_T]| - |[\dot u^*_T]|)$$
$$\geq F^+(v - \dot u^*(t)) + L_1 \int_{\Gamma_c} \sigma^{*+}_N(t)([v_N] - [\dot u^*_N(t)]) \qquad \forall v \in V_Z. \tag{1.185}$$

$$\int_{\Gamma_c} \sigma^{*+}_N(t)([v_N] - [u^*_N(t)]) \geq 0, \quad \forall v \in K_Z. \tag{1.186}$$

1.7.3 Problème limite complet "sur le premier corps"

On souhaite du point de vue des applications numériques revenir aux variables de départ et éliminer Ω^- et par suite définir le problème limite uniquement sur Ω^+_L. Dans ce paragraphe nous donnons une nouvelle formulation en introduisant une nouvelle loi de contact entre Ω^+_L et le milieu rigide, qui prend en considération la "mémoire" du domaine mince.

D'après le théorème 1.7.12, la loi limite d'interface constituée des conditions de contact unilatéral et d'une loi de frottement, fait intervenir le saut du déplacement. Celui-ci peut être exprimé en fonction de u^{*+} et σ^{*+}, en utilisant essentiellement la continuité de $\sigma^*_{ij}.n$ sur Γ_c. Alors la loi limite sera définie à partir des traces de u^* et σ^* provenant uniquement de Ω^+.

Lemme 1.7.13

$$
\begin{aligned}
{u^*_N}^- &= \frac{{\sigma^*_N}^+}{\left(\dfrac{\lambda^+}{a}+\dfrac{2\mu^+}{b}\right)\dfrac{1}{L_2}} && \textit{p.p.} \quad \textit{sur} \quad \Gamma_c \\
{u^*_T}^- &= \frac{{\sigma^*_T}^+}{\dfrac{2\mu^+}{bL_2}} && \textit{p.p.} \quad \textit{sur} \quad \Gamma_c.
\end{aligned}
$$

Preuve:
En intégrant (1.154) et (1.155) par rapport à la deuxième variable sur $[-1,Z]$ et en utilisant le lemme 1.7.8, il vient

$$
\begin{aligned}
u^*_2(X,Z) &= \frac{\sigma^*_{22}(X)}{\left(\dfrac{\lambda^+}{a}+\dfrac{2\mu^+}{b}\right)\dfrac{1}{L_2}}(Z+1) && \text{p.p.} \quad \text{sur} \quad \Omega^- \\
u^*_1(X,Z) &= \frac{\sigma^*_{12}(X)}{\dfrac{2\mu^+}{bL_2}}(Z+1) && \text{p.p.} \quad \text{sur} \quad \Omega^-.
\end{aligned}
$$

En utilisant le lemme 1.7.9, on obtient le résultat. ■

Lemme 1.7.14

$$
{\dot{u}^*_T}^-(X,Z) = \frac{{\dot{\sigma}^*_T}^+}{\dfrac{2\mu^+}{bL_2}} \qquad \textit{p.p.} \qquad \textit{sur}\ \Gamma_c. \tag{1.187}
$$

Preuve:
Il suffit de dériver la première équation du lemme précédent. ■

En introduisant le changement de variable réciproque de (1.22), les opérateurs $\mathcal{B}^+(\cdot,\cdot)$, $\mathcal{A}^+(\cdot,\cdot)$ et $\mathcal{S}(\cdot)$ seront notés respectivement par $\mathcal{B}^+_L(\cdot,\cdot)$, $\mathcal{A}^+_L(\cdot,\cdot)$ et $\mathcal{S}_L(\cdot)$, et on a le résultat suivant:

Théorème 1.7.15 *Il existe σ^* dans $W^{1,2}(0,T;\Sigma_L^+)$ et u^* dans $W^{1,2}(0,T;V_L^+)$ tels que*

$$\mathcal{B}_L^+(\sigma^*,\tau) = \mathcal{A}_L^+(u^*,\tau) + \mathcal{S}_L(\tau) \qquad \forall \tau \in \left(L^2(\Omega_L^+)\right)^4 \tag{1.188}$$

$$\begin{aligned} a_L^+(u^*(t),v-\dot{u}^*(t)) \; - \int_{\Gamma_c} \sigma_T^{*^+}\dot{\sigma}_T^{*^+}\frac{bL_2}{2\mu^+} + \int_{\Gamma_c} k|S(\sigma_N^*)| \left(|v_T^+| - |\dot{u}_T^{*^+} - \dot{\sigma}_T^{*^+}\frac{bL_2}{2\mu^+}|\right) \\ \geq F_L^+(v-\dot{u}^*(t)) \; + \int_{\Gamma_c} \sigma_N^* \left(v_N^+ - \dot{u}_N^{*^+}\right) \qquad \forall v \in V_L^+ \end{aligned} \tag{1.189}$$

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_N^{*+}\left(v_N - u_N^{*^+}\right) \geq 0 \qquad \forall v \in K_{\sigma^*}^+, \tag{1.190}$$

où

$$K_{\sigma^*}^+ = \left\{ v \in V^+; v_N \leq -\frac{\sigma_N^{*^+}abL_2}{\lambda^+ b + 2\mu^+ a} \; sur\; \Gamma_c \right\}.$$

Preuve:
En utilisant les lemmes 1.7.8 et 1.7.9, on a

$$a_-^*(u^*,v-\dot{u}^*) = L_1\int_{\Gamma_c} \sigma_{i2}^{*^-}(X)(v_i^- - \dot{u}^{*^-}) = L_1\int_{\Gamma_c}\sigma_N^{*^+}(v_N^- - \dot{u}^{*^-}) + L_1\int_{\Gamma_c}\sigma_T^{*^+}(v_T^- - \dot{u}^{*^-}). \tag{1.191}$$

Alors en simplifiant par le terme $L_1\int_{\Gamma_c}\sigma_N^{*^+}(v_N^- - \dot{u}_N^{*^-})$ dans l'inégalité (1.185) et en remplaçant $\dot{u}_T^{*^-}$ par son expression dans le lemme 1.7.14, il vient

$$\begin{aligned} &a^+(u^*(t),v-\dot{u}^*(t)) + \mathcal{L}(v-\dot{u}^*(t)) + \\ &L_1\int_{\Gamma_c}\sigma_T^{*+}\left(v_T^- - \frac{\dot{\sigma}_T^{*+}bL_2}{2\mu^+}\right) + \int_{\Gamma_c} k|S(\sigma_N^*)|\left(|[v_T]| - |\dot{u}_T^{*^+} - \frac{\dot{\sigma}_T^{*^+}bL_2}{2\mu^+}|\right) \\ &\qquad \geq F^+(v-\dot{u}^*(t)) \; + L_1\int_{\Gamma_c}\sigma_N^{*+}\left(v_N^+ - \dot{u}_N^{*^+}\right) \qquad \forall v \in V_Z. \end{aligned} \tag{1.192}$$

Ce problème ne fait intervenir que des fonctions définies sur Ω^+ et leurs traces. Pour cela on choisit $v^- = 0$ et on obtient le résultat.

Pour démontrer la troisième inégalité du théorème, on choisit dans (1.186) $v_N^- = u_N^{*^-}$. En remplaçant $u_N^{*^-}$ par son expression dans le 1.7.13, le fait que v soit dans $v \in K_Z$ implique que v^+ est dans $K_{\sigma^*}^+$ et l'inégalité (1.186) devient

$$\int_{\Gamma_c}\sigma_N^{*+}\left(v_N^+ - u_N^{*^+}\right) \geq 0 \qquad \forall v \in K_{\sigma^*}^+.$$

En utilisant le changement inverse (1.22), on obtient le résultat. ■

Remarque 14 L'interprétation forte de la loi limite sur l'interface Γ_c est donnée par:

$$
\begin{aligned}
&|\sigma_T^*| \leq K|S(\sigma_N^*)| \\
&\exists \nu \geq 0 \textit{ tel que } \dot{u}_T^{*+} + \frac{bL_2}{2\mu^+}\dot{\sigma}_T^* \nu \sigma_T^* = 0 \\
&\nu = 0 \textit{ si } |\sigma_T^*| < K|S(\sigma_N^*)| \qquad (1.193) \\
&\sigma_N^* \leq 0, \quad u_N^{*+} + \frac{\sigma_N^* abL_2}{\lambda^+ b + 2\mu^+ a} \leq 0, \quad \sigma_N^* . \left(u_N^* + \frac{\sigma_N^* abL_2}{\lambda^+ b + 2\mu^+ a} \right) = 0. \qquad (1.194)
\end{aligned}
$$

1.8 Comportement limite en fonction de a et de b

Dans la pratique, les coefficients a et b peuvent être relativement importants ou proche de 0. Il peut être intéressant d'examiner le comportement limite du problème (1.188)-(1.190) quand a, b tendent vers 0 ou l'infini.

Dans le cas statique, cette approche permet d'obtenir divers comportements limites aussi bien de manière formelle qu'en utilisant des estimations rigoureuses en fonction de a et b. Ces comportements limites sont identiques à ceux que l'on obtiendrait en posant à priori $\lambda^- = \lambda^+ \varepsilon^\alpha$ et $\mu^- = \mu^+ \varepsilon^\beta$. (Le cas par exemple $a \to 0$ correspond au cas $\alpha < 1$).

Dans le cas du problème quasistatique, on peut remarquer que les estimations du problème initial et par suite du problème limite ont été obtenues sous les conditions (1.96) et (1.97). Cette dernière condition peut s'écrire en fonction de a et b sous la forme :

$$\bar{k} < \frac{2a\mu^+}{C_4(2a\mu^+ + b\lambda^+)}. \qquad (1.195)$$

De manière évidente cette condition ne permet pas de prendre en compte certains cas mentionnés dans la liste ci-dessous :

Cas impossibles :

Cas 4 : $a \to 0$, $b \to$ fixe

Cas 7 : $a \to 0$, $b \to \infty$

Cas 8 : $a \to$ fixe , $b \to \infty$.

Cas Possibles :

Cas 2 : $a \to$ fixe , $b \to 0$

Cas 3 : $a \to \infty$, $b \to 0$

Cas 5 : $a \to$ fixe , $b \to$ fixe

Cas 6 : $a \to \infty$, $b \to$ fixe .

Cas possibles si a et b sont du même ordre :

Cas 1 : $a \to 0$, $b \to 0$

Cas 9 : $a \to \infty$, $b \to \infty$.

L'obtention des estimations rigoureuses à partir du problème limite (1.188)-(1.190) se heurte aux mêmes difficultés. Néanmoins, si on raisonne de manière formelle à partir du problème limite, on peut obtenir le tableau suivant où la couche mince n'est pas éliminée :

$b \to +\infty$	$\sigma_N^* \le 0 \qquad [u_N^*] \le 0$ $\sigma_N^* \, [u_N^*] = 0$ $u_N^{*-} = 0$ $\sigma_T^* = 0$	$\sigma_N^* \le 0 \qquad [u_N^*] \le 0$ $\sigma_N^* \, [u_N^*] = 0$ $\sigma_N^* = \dfrac{\lambda^+}{aL_2} u_N^{*-}$ $\sigma_T^* = 0$	$\sigma_{ij}^*(t) = 0$
b fixe	$\sigma_N^* \le 0, \qquad [u_N^*] \le 0$ $\sigma_N^* \, [u_N^*] = 0$ $u_N^{*-} = 0$ $\lvert\sigma_T^*\rvert \le k \lvert S(\sigma_N^*)\rvert$ $\exists \nu \ge 0$ $\dot{u}_T^* + \dfrac{bL_2}{2\mu^+}\dot{\sigma}_T^* + \nu \sigma_T^* = 0$ $\nu = 0$ si $\lvert\sigma_T^*\rvert < k \lvert S(\sigma_N^*)\rvert$	$\sigma_N^* \le 0 \qquad [u_N^*] \le 0$ $\sigma_N^* \, [u_N^*] = 0$ $\sigma_N^* = \left(\dfrac{\lambda^+}{a} + \dfrac{2\mu^+}{b}\right) \dfrac{1}{L_2} u_N^{*-}$ $\lvert\sigma_T^*\rvert \le k \lvert S(\sigma_N^*)\rvert$ $\exists \nu \ge 0$ $\dot{u}_T^* + \dfrac{bL_2}{2\mu^+}\dot{\sigma}_T^* + \nu \sigma_T^* = 0$ $\nu = 0$ si $\lvert\sigma_T^*\rvert < k \lvert S(\sigma_N^*)\rvert$	$\sigma_N^* \le 0, \qquad [u_N^*] \le 0$ $\sigma_N^* \, [u_N^*] = 0$ $\sigma_N^* = \dfrac{2\mu^+}{L_2 b} u_N^{*-}$ $\lvert\sigma_T^*\rvert \le k \lvert S(\sigma_N^*)\rvert$ $\exists \nu \ge 0$ $\dot{u}_T^* + \dfrac{bL_2}{2\mu^+}\dot{\sigma}_T^* + \nu \sigma_T^* = 0$ $\nu = 0$ si $\lvert\sigma_T^*\rvert < k \lvert S(\sigma_N^*)\rvert$
$b \to 0$	Coulomb quasistatique + contact unilatéral avec obstacle rigide	Coulomb quasistatique + contact unilatéral avec obstacle rigide	Coulomb quasistatique + contact unilatéral avec obstacle rigide
	$a \to 0$	a fixe	$a \to +\infty$

TAB. 1.1 – *Lois limites d'interface sans éliminer* Ω^-

En éliminant u_N^{*-}, on obtient les lois suivantes :

$b \to +\infty$	$\sigma_N^* \leq 0$ ${u_N^*}^+ \leq 0$ $\sigma_N^* {u_N^*}^+ = 0$ $\sigma_T^* = 0$	$\sigma_N^* \leq 0$ ${u_N^*}^+ + \sigma_N^* \frac{aL_2}{\lambda^+} \leq 0$ $\sigma_N^* \left({u_N^*}^+ + \sigma_N^* \frac{aL_2}{\lambda^+} \right) = 0$ $\sigma_T^* = 0$	$\sigma_{ij}^*(t) = 0$
b fixe	$\sigma_N^* \leq 0$ ${u_N^*}^+ \leq 0$ $\sigma_N^* {u_N^*}^+ = 0$ $\lvert\sigma_T^*\rvert \leq k\lvert S(\sigma_N^*)\rvert$ $\exists \nu \geq 0$ $\dot{u}_T^{*+} + \frac{bL_2}{2\mu^+} \dot{\sigma}_T^* + \nu \sigma_T^* = 0$ $\nu = 0$ si $\lvert\sigma_T^*\rvert < k\lvert S(\sigma_N^*)\rvert$	$\sigma_N^* \leq 0$ ${u_N^*}^+ + \frac{\sigma_N^* L_2}{\frac{\lambda^+}{a} + \frac{2\mu^+}{b}} \leq 0$ $\sigma_N^* \left({u_N^*}^+ + \frac{\sigma_N^* L_2}{\frac{\lambda^+}{a} + \frac{2\mu^+}{b}} \right) = 0$ $\lvert\sigma_T^*\rvert \leq k\lvert S(\sigma_N^*)\rvert$ $\exists \nu \geq 0$ $\dot{u}_T^{*+} + \frac{bL_2}{2\mu^+} \dot{\sigma}_T^* + \nu \sigma_T^* = 0$ $\nu = 0$ si $\lvert\sigma_T^*\rvert < k\lvert S(\sigma_N^*)\rvert$	$\sigma_N^* \leq 0$ ${u_N^*}^+ + \sigma_N^* \frac{L_2 b}{2\mu^+} \leq 0$ $\sigma_N^* \left({u_N^*}^+ + \sigma_N^* \frac{L_2 b}{2\mu^+} \right) = 0$ $\lvert\sigma_T^*\rvert \leq k\lvert S(\sigma_N^*)\rvert$ $\exists \nu \geq 0$ $\dot{u}_T^{*+} + \frac{bL_2}{2\mu^+} \dot{\sigma}_T^* + \nu \sigma_T^* = 0$ $\nu = 0$ si $\lvert\sigma_T^*\rvert < k\lvert S(\sigma_N^*)\rvert$
$b \to 0$	Coulomb quasistatique avec obstacle rigide	Coulomb quasistatique avec obstacle rigide	Coulomb quasistatique avec obstacle rigide
	$a \to 0$	a fixe	$a \to +\infty$

TAB. 1.2 – *Lois limites d'interface en éliminant* Ω^-

1.8.1 Commentaires sur les lois limites d'interface

- Cas $b \to 0$:
  Dans ce cas, la loi limite représente un contact unilatéral avec frottement de type Coulomb quasistatique. La couche mince est remplacée par la loi de départ. On représente le graphe de cette loi dans la Figure 1.2

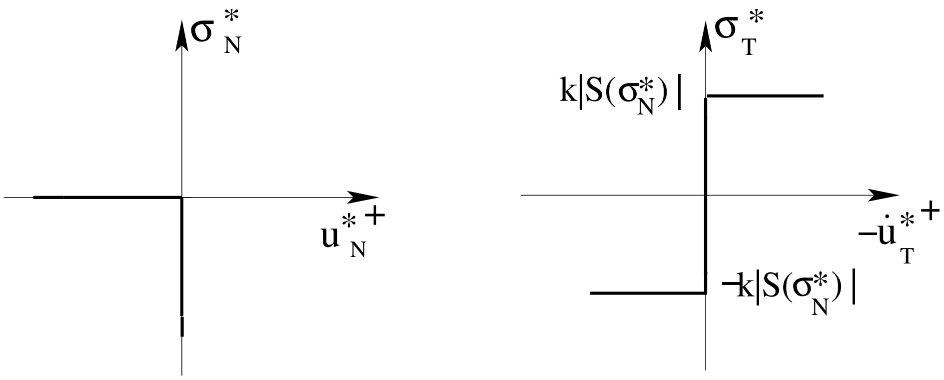


FIG. 1.2 – *Loi de contact sur l'interface: cas 1, 2, 3*

- Cas b fixe, $a \to 0$:

  Dans ce cas, on a une loi de type contact unilatéral (classique) avec la nouvelle loi de frottement suivante :

  Si σ_T^* n'atteint pas le seuil $k|S(\sigma_N^*)|$, $\dot{u}_T^{*^+} + \dfrac{bL_2}{2\mu^+}\dot{\sigma}_T^*$ est nul, c'est à dire: $\dot{u}_T^{*^+}$ et $\dot{\sigma}_T^*$ sont reliés linéairement. Ceci induit une relation affine entre le déplacement tangentiel u_T^* et σ_T^*, i.e. $u_T^{*^+} = -\dfrac{bL_2}{2\mu^+}\sigma_T^* + C_0$ où C_0 représente la limite des conditions initiales. On peut dire dans ce cas que la vitesse n'intervient pas et que le comportement ressemble au cas statique.

  Si σ_T^* atteint le seuil de glissement, σ_T^* est proportionnelle au $-(\dot{u}_T^{*^+} + \dfrac{bL_2}{2\mu^+}\dot{\sigma}_T^*)$.

  La Figure 1.3 représente le graphe de cette loi. La Figure 1.4 est une autre présentation de cette loi de frottement où les trois variables $\dot{u}_T^{*^+}$, $\dot{\sigma}_T^*$ et σ_T^* sont utilisées.

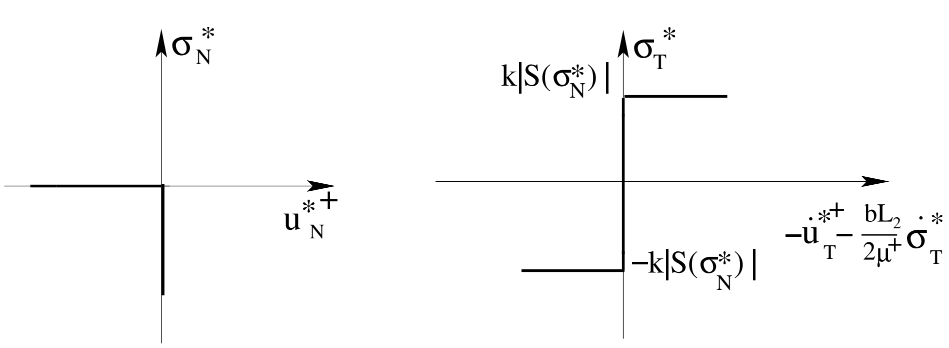


FIG. 1.3 – *Loi de contact sur l'interface: cas 4*

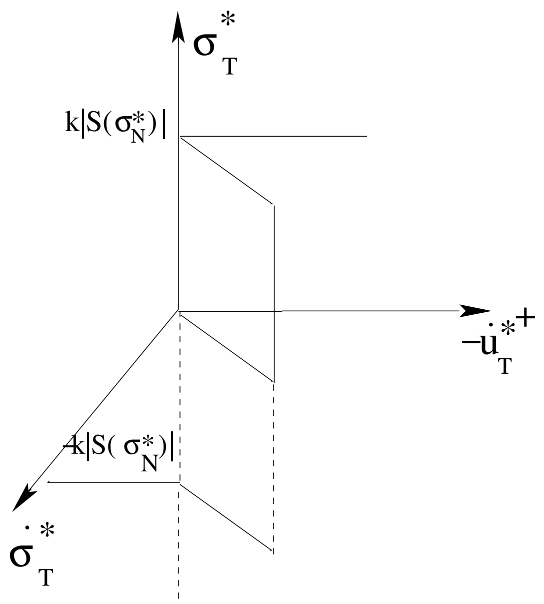


FIG. 1.4 – *Loi du frottement sur l'interface: b fixe (autre présentation)*

- Cas b fixe, a fixe:
  C'est ce qu'on a appelé cas critique. La loi limite est de type compliance normale avec la même loi du frottement que dans le cas précédent. On a une loi de type compliance normale car on peut écrire cette loi sous la forme :

$$\sigma^*_N = -\left(\frac{\lambda^+}{a} + \frac{2\mu^+}{b}\right)\frac{1}{L_2}\sup({u^*_N}^+,0). \tag{1.196}$$

En effet:
Si ${u^*_N}^+ < -\dfrac{\sigma^*_N L_2}{\dfrac{\lambda^+}{a} + \dfrac{2\mu^+}{b}}$, c'est à dire s'il y a décollement (${u^*_N}^+ < 0$), alors, la composante normale de la force est nulle ($\sigma^*_N = 0$).
Si $\sigma^*_N < 0$, alors, ${u^*_N}^+ = -\dfrac{\sigma^*_N L_2}{\dfrac{\lambda^+}{a} + \dfrac{2\mu^+}{b}}$, c'est à dire, la composante normale de la force est proportionnelle à $\dfrac{{u^*_N}^+}{L_2}\left(\dfrac{\lambda^+}{a} + \dfrac{2\mu^+}{b}\right)$. D'où l'écriture 1.196.
Le graphe de la loi est représenté par la Figure 1.5.

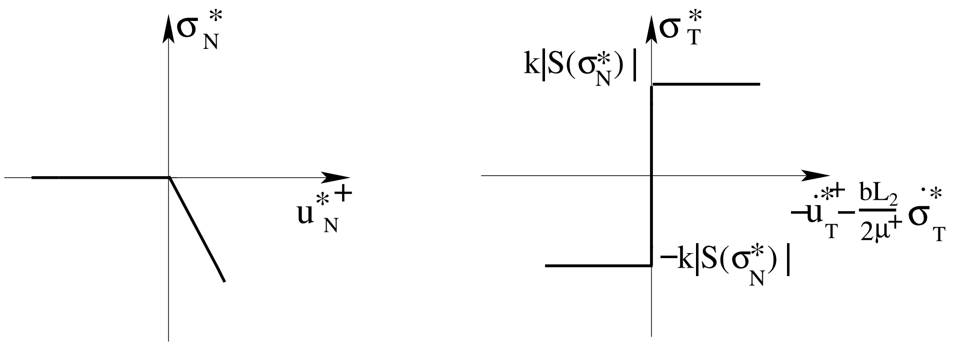


FIG. 1.5 – *Loi de contact sur l'interface: cas 5 critique*

- Cas b fixe, $a \to \infty$:
  Dans ce cas, la loi limite est de type compliance normale avec la même loi du frottement que le cas précédent. Le graphe de cette loi est représenté dans la Figure 1.6.

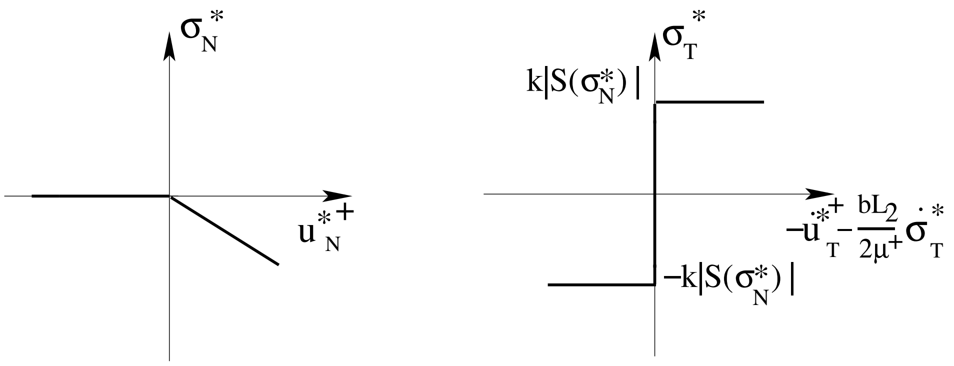


FIG. 1.6 – *Loi de contact sur l'interface: cas 6*

- Cas $b \to \infty$, $a \to 0$:
  Dans ce cas, la loi limite est de type contact unilatéral sans frottement. La Figure 1.7 représente le graphe de cette loi.

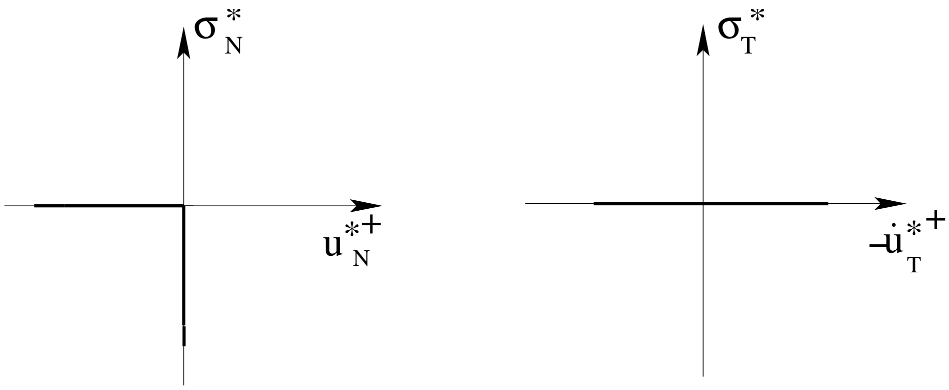


FIG. 1.7 – *Loi de contact sur l'interface: cas 7*

- Cas $b \to \infty$, a fixe:
  La loi limite dans ce cas est de type compliance normale sans frottement. Le graphe de cette loi est représenté dans la Figure 1.8.

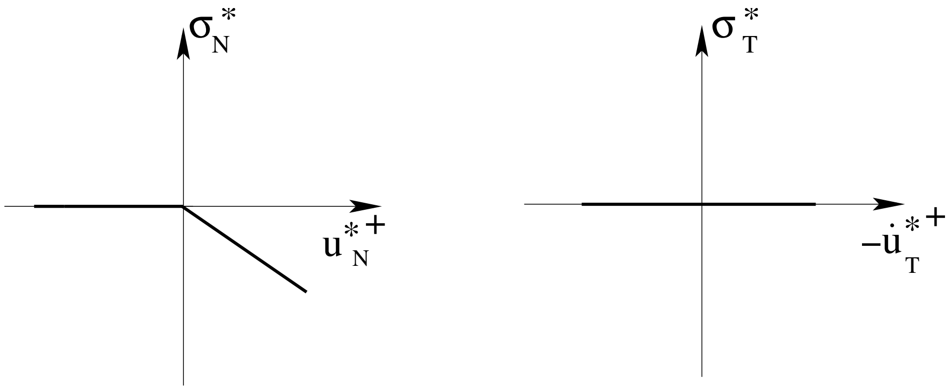


FIG. 1.8 – *Loi de contact sur l'interface: cas 8*

- Cas $b \to \infty$, $a \to \infty$:
  Dans ce cas, les forces σ_T^* et σ_N^* sont nulles, le corps est libre. La Figure 1.9 représente le graphe de cette loi.

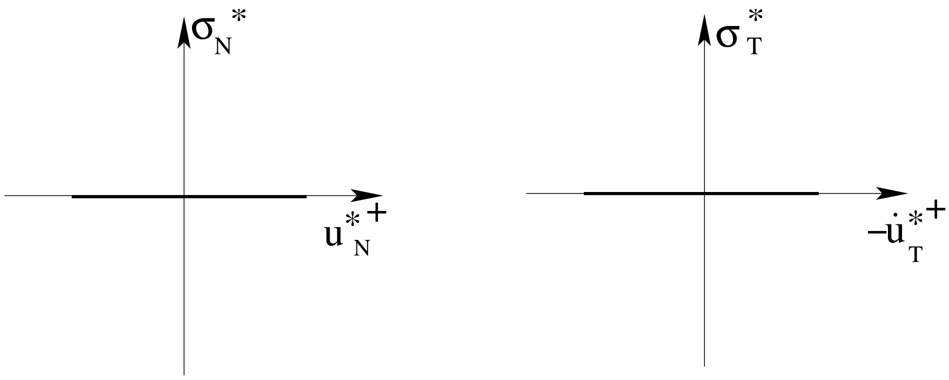


FIG. 1.9 – *Loi de contact sur l'interface: cas 9*

Remarque 15 En comparant ces lois avec le cas statique, on remarque que dans tous les cas limites la loi de contact (composantes normales) est la même que dans la cas statique [1].
Pour la loi de frottement, on remarque que lorsque b tend vers $+\infty$ la loi est la même que dans le cas statique. Dans le cas où b tend vers 0, la loi limite est analogue à celle trouvée dans le cadre statique (la couche disparaît et elle est remplacée par la loi de départ). Dans le cas où b est fixe, la loi de frottement trouvée est une loi régularisée dans le cadre statique, mais dans le cas quasistatique, l'interprétation n'est pas claire, il y a couplage entre $\dot{u}_T^{*+}$, $\dot{\sigma}_T^*$ et σ_T^*.

1.8.2 Idée de démonstration pour les cas admissibles

1)- Pour démontrer rigoureusement les problèmes limites pour les cas où les hypothèses le permettent, nous avons besoin d'établir des estimations de déplacement u^{*^+}, des contraintes σ^* et de la vitesse $\dot{u}^{*^+}$ en fonction de a et de b. Pour simplifier, nous considérons le problème limite (1.183)-(1.186) où u^{*^-} n'est pas éliminée.

En choisissant dans (1.185) $v = -u^* + \dot{u}^*$ comme fonction-test. Par les mêmes techniques que dans le problème initial, on obtient les estimations suivantes de déplacement :

$$\begin{aligned}
&\|e_{kk}^{ad}(u^*)\|^2_{L^2(\Omega^+)} \leq C\\
&\|e_{ij}^{ad}(u^*)\|^2_{L^2(\Omega^+)} \leq C\\
&\|u^{*-}_N\|^2_{L^2(\Gamma_c)} \qquad \leq C\left(\frac{\lambda^+}{a}+\frac{2\mu^+}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}\\
&\|u^{*-}_T\|^2_{L^2(\Gamma_c)} \qquad \leq C\sqrt{\frac{b}{2\mu^+}}.
\end{aligned}$$

Ces estimations sont aussi valables pour la vitesse.
En utilisant l'équation (1.184), on peut majorer les composantes normale et tangentielle de σ^*

en fonction de celles de u^*, et en déduit les estimations suivantes :

$$\|\sigma^*{}_N\|^2_{L^2(\Gamma_c)} \leq C\left(\frac{\lambda^+}{a} + \frac{2\mu^+}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\sigma^*{}_T\|^2_{L^2(\Gamma_c)} \leq C\sqrt{\frac{2\mu^+}{bL_2}}.$$

Ces estimations nous permettent comme pour le cas initial de passer rigoureusement à la limite dans les cas admissibles.

En effet, pour les cas 2 et 3 (i.e. b tend vers 0 et a tend vers l'infini ou fixe) et aussi pour le cas 1 si a et b sont du même ordre, on obtient immédiatement des limites nulles de $u^*{}_T^-$ et $u^*{}_N^-$. Donc en passant à la limite dans (1.185)-(1.186), on obtient un problème de contact avec frottement de type Coulomb quasistatique entre le premier corps et le rigide.

Pour le cas 4 (i.e. b fixe et a tend vers l'infini), tous les termes $u^*{}_T^-$, $u^*{}_N^-$, $\sigma^*{}_N^-$ et $\sigma^*{}_T^-$ sont bornés comme dans le cas critique, alors en procédant de la même manière que dans le cas critique, on obtient la problème limite.

Pour le cas 9 (i.e. a et b tendent vers l'infini) et si les coefficients a et b sont du même ordre, les estimations ci-dessus permettent d'avoir des limites nulles pour les composantes normale et tangentielle des contraintes.

2) On peut aussi obtenir ces mêmes problèmes limites à partir du problème initial (1.60)-(1.62) en faisant tendre $\frac{l}{L_2}$ vers 0 et a, b vers 0, l'infini ou fixe (selon les cas) (sans avoir passer par le cas critique).

- Cas : $b \to 0$

– D'après les estimations de u et de $\dot{u}$, on a

$$u \to 0 \qquad \text{dans } V_Z \text{ fortement}$$
$$\dot{u} \to 0 \qquad \text{dans } V_Z \text{ fortement.}$$

D'où la convergence forte de la trace de u vers 0 dans $L^2(\Gamma_c)$. Or $[u_N] \leq 0$, donc $u_N^{*+} \leq 0$.

Par définition on a, $\forall v \in K$

$$\begin{aligned} 0 \leq lim < \sigma_N,[v_N] - [u_N] > &= lim < \sigma_N^+,v_N^+ - u_N^+ >_+ - < \sigma_N^-,v_N^- - u_N^- >_- \\ &= lim \big(a^+(u,v-u) + \mathcal{L}(v-u) + F^+(v-u) + \\ &\quad a^-(u,v-u) - F^-(v-u) - < \sigma_T,[v_T] - [u_T] > \big) . \end{aligned}$$

On choisit $v = 0$ sur Ω^-, tel que $v_N^+ \leq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 \leq lim < \sigma_N,[v_N] - [u_N] > &= lim \big(a^+(u,v-u) + \mathcal{L}(v-u) + F^+(v-u) + \\ &\quad F^-(u) - < \sigma_T,v_T^+ - [u_T] > \big) . \end{aligned}$$

On obtient le résultat, en passant à la limite comme dans le cas critique.

– Pour trouver la loi du frottement, on choisit dans (1.60)-(1.62) (ii) $v = -u + \dot{u}$ dans Ω^-. En majorant le terme $-a^-(u,u)$ par 0, on passe à la limite et on obtient une formulation variationnelle de la loi limite du frottement.

Remarque 16 Puisque dans ce cas ($b \to 0$), $\dot{u}_T^{*-}$ et u_N^{*-} sont calculés (=0), on n'a pas besoin de passer à la limite dans le terme $a^-(\cdot,\cdot)$ c'est pour cela qu'on a choisi des fonctions test qui éliminent ce terme.

• Cas: b fixe, $a \to +\infty$

C'est pareil au cas critique, on a convergence de σ et de u.

• Cas: b fixe, $a \to 0$

On ne peut pas passer à la limite dans (1.60)-(1.62) car on a la convergence de σ_{12} et de $\sigma_{11} - \sigma_{22}$ mais u ne converge pas dans V_Z.

– Pour trouver la loi de contact unilatéral, on fait apparaître dans la définition du produit de dualité le terme $\frac{l}{L_2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})$ qui converge vers 0.

– Pour obtenir la loi limite du frottement, on choisit dans (1.60)-(1.62) (ii) $v_2 = 0$ dans Ω^- pour éliminer σ_{ii} et ne garder que σ_{12} qui représente la composante tangentielle; c'est cette dernière qui permet de définir le problème limite.

• Cas: $b \to +\infty$, $a \to +\infty$

Dans ce cas σ converge vers 0, et on a

– Loi de frottement : $\sigma_T^* = 0$.

– Contact unilatéral: $\sigma_N^* = 0$.

Bibliographie

[1] BAYADA G., LHALOUANI K., *Asymptotic and numerical analysis for unilateral contact problem with Coulomb's friction between an elastic body and a thin elastic soft layer*, Asymptotic Analysis, 25, 329-362, 2001

[2] COCU M., PRATT E., RAOUS M., *Formulation and approximation of quasistatique frictional contact*, Int. J. Engng Sci., 34 (7), 783-798, 1996.

[3] COCU M., *Existence of solutions of Signorini problems with friction*, Int. J. Engng Sci., 22, 567-575. 1984.

[4] DUMONT T., *Décomposition par projection de certains problèmes aux limites ellipiques non linéaires*, Thèse de troisième cycle, Université Claude Bernard, Lyon 1, 1978.

[5] DUVAUT G., LIONS J-L, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.

[6] KIKUCHI N., ODEN J. T. , *Contact Problem in Elasticity*, SIAM, Philadelphia, 1988.

[7] LHALOUANI K., *Analyse asymptotique et numérique de couches minces en élasticité*, Thèse, Université Claude Bernard, Lyon 1, 1996.

[8] LIONS J.L. ET MAGENES E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, Vol. 1 et 2, Springer Verlag, Heidelberg, 1972.

[9] LUSTERNIK L., SOBOLEV V., *Précis d'analyse fonctionnelle*, MIR, Moscou, 1989.

Chapitre 2

ANNEXE

Cette partie est extraite de l'article:

Finite element analysis of a contact with friction between an elastic body and a thin layer

(proposé à ASME Journal of Tribology 2004)

Par Vannina LINCK, Guy BAYADA, Laurent BAILLET, Taoufik SASSI, Jalila SABIL

2.1 Introduction

The study of contact with friction between two bodies (called first bodies) involves introducing a very thin layer called third body (about a few dozen micrometers thick) that separates the first bodies, see for example Godet [1] and Descartes et al. [2]. The order of magnitude of this third body is about 10000 times lower than that of the first bodies and its mechanical properties are rather different from the first bodies ones. Several analytical studies such as , Chen et al. [3], King et al. [4] and Walowit et al. [5] have examined the influence of thin layers in tribology by studying the contact between a cylindrical or spherical indenter and a layered half-space. The influence of thin layers in such a contact has also been studied using finite element analyses by several authors, Tian et al. [6], Komvopoulos [7] and Kral et al. [8]. In these later studies the contact-width size is really small (nearly punctual) which enables the use of a really small finite element mesh in order to calculate the contact stresses and deformations. However, modeling a contact on the scale of about 10 centimeters wide between the first bodies, and also modeling an approximately 10 micrometers thick third body layer between the first bodies, leads to model size and calculation time problems. The same problems appear when it is necessary to modelize a thin coating on one of the first bodies. The aim of this paper is to show that the specific asymptotic contact law proposed in the mathematical theory can be validated and implemented into a dynamic finite element code. The use of this law enables the use of a rougher mesh and thus the calculation time is divided by a factor of 100. After a presentation of finite element code, validation is carried out on a quasi-static sliding problem in order to find the relative thickness when the law models the elastic layer. Then a study of the influence of the thickness of a coating bonded to a rigid body has been studied. Finally the law is carried out on a dynamic simulation.

2.2 Mathematical problem and asymptotic law

For the sake of simplicity, results are given only for 2D problems while the present theory is still valid for 3D problems. Classical elastic displacement and stress relations are valid for both the first bodies Ω^+ and coating Ω^- with Lame coefficients $\lambda^\pm$ and $\mu^\pm$, and subject to volume external forces F^{vol} and surface external forces Fext (definition of the initial problem in Fig.1.):

$$div(\sigma) = -F^{vol} \tag{2.1}$$

$$\sigma_{ij}^{\pm} = \lambda^\pm e_{kk}(u^\pm)\delta_{ij} + 2\mu^\pm e_{ij}(u^\pm). \tag{2.2}$$

On one side, the coating is bonded to a rigid substrate. On the other side Γ_c, it is in contact with the first body Ω^+. The tangential and normal contact stress are denoted as follows, see Kikuchi et al. [9]:

$$\sigma^{norm} = \sigma_{ij}n_in_j \qquad \sigma^{tang} = \sigma_{ij}n_j - \sigma^{norm}n_i. \tag{2.3}$$

The normal and tangential component of the displacement vector are denoted as following:

$$u^{norm} = u_in_i \qquad u_i^{tang} = u_i - u^{norm}n_i. \tag{2.4}$$

The normal displacement and tangential velocity jump along the interface are define as :

$$[u^{norm}] = u^{+norm} - u^{-norm} \qquad and \qquad [\dot{u}^{norm}] = \dot{u}^{+norm} - \dot{u}^{-norm}. \tag{2.5}$$

On the contacting interface, Eq. (2.6) describes the unilateral contact while Eq. (2.7) describes Coulomb's interface law (see Baillet et al. [12] and Zhong [13]):

$$[u^{norm}] \leq 0, \quad \sigma^{norm} \leq 0, \quad \sigma^{norm}[u^{norm}] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} |\sigma^{tang}| \leq \mathcal{F}|S(\sigma^{norm})| \\ \text{If } |\sigma^{tang}| < \mathcal{F}|S(\sigma^{norm})| \Longrightarrow [\dot{u}^{tang}] = 0 \\ \text{Else if } |\sigma^{tang}| = \mathcal{F}|S(\sigma^{norm})| \text{ then } \exists A > 0; \text{ such as } [\dot{u}^{tang}] = -A\,\sigma^{tang}. \end{cases} \tag{2.7}$$

To make the small thickness L^- which is characteristic of the coating manageable with respect to the first body width L^+, we define a small parameter $\varepsilon = \dfrac{L^-}{L^+}$.

It is convenient to introduce two real positive numbers a^* and b^* to allow us to manage the ratio between two small numbers ε and $\dfrac{\lambda^-}{\lambda^+}$ (or $\dfrac{\mu^-}{\mu^+}$). ε characterizes the relative thickness of the layer and $\dfrac{\lambda^-}{\lambda^+}$ (or $\dfrac{\mu^-}{\mu^+}$) the relative compliance of the two materials involved. Parameters a* and b* are defined as follows:

$$\lambda^- = \lambda^+a^*\varepsilon \tag{2.8}$$

$$\mu^- = \mu^+b^*\varepsilon. \tag{2.9}$$

The results of the asymptotic process by letting ε tends to zero are given in the following equations :

Equations (2.1)-(2.2) for the first body Ω^+ are still valid :

$$div(\sigma) = -F^{vol} \tag{2.10}$$

$$\sigma_{ij}^{+} = \lambda^+ e_{kk}(u^+)\delta_{ij} + 2\mu^+ e_{ij}(u^+). \tag{2.11}$$

Equations (2.1)-(2.2) for the layer Ω^- and boundary conditions (2.6)-(2.7) are to be replaced by new non-linear interface conditions between the first body and the solid substrate:
For the normal interface law:

$$u^{norm} - \frac{L^+\sigma^{norm}}{\lambda^+a^* + 2\mu^+b^*} \leq 0, \quad \sigma^{norm} \leq 0, \quad L^+\sigma^{norm}(u^{norm} - \frac{L^+\sigma^{norm}}{\lambda^+a^* + 2\mu^+b^*}) = 0. \quad (2.12)$$

For the tangential law:

$$\begin{cases} |\sigma^{tang}| \leq \mathcal{F}|S(\sigma^{norm})| \\ \text{If } |\sigma^{tang}| < \mathcal{F}|S(\sigma^{norm})| \Longrightarrow \dot{u}^{tang} = -\frac{L^+\dot{\sigma}^{tang}}{\mu^+b^*} \\ \text{Else if } |\sigma^{tang}| = \mathcal{F}|S(\sigma^{norm})| \text{ then } \exists A > 0; \text{ such as } \dot{u}^{tang} = -A\,\sigma^{tang} - \frac{L^+\dot{\sigma}^{tang}}{\mu^+b^*}. \end{cases} \quad (2.13)$$

In these expressions no bracket exists as we have only to consider the movement of one elastic solid on a rigid substrate.
The expression of the normal interface law, Eq. (2.12) could appear unusual. It can be given in an equivalent way by reintroducing the displacement u^{-norm} inside the coating by:

$$[u^{norm}] \leq 0, \quad \sigma^{norm} \leq 0, \quad \sigma^{norm}[u^{norm}] = 0 \text{ with } [u^{norm}] = u^{+norm} - u^{-norm}. \quad (2.14)$$

Together with the normal stress-normal deformation relation at the surface Γ_c of the coating:

$$\sigma^{norm} = \frac{u^{-norm}(\lambda^+a^* + 2\mu^+b^*)}{L^+} \quad (2.15)$$

Let us recall in this last expression that λ^+a^* and μ^+b^* are clearly related with the Lame coefficients of the coating due to the definitions of a^* and b^* (Eq. (2.8)-(2.9)).
Equations (2.10)-(2.13) give a complete description of a mechanical system equivalent to the initial one (2.1)-(2.2) and (2.6)-(2.7) for small values of ε and in which the geometrical description of the coating only appears expressed as coefficients. When using the specific contact law, the limit displacement field in the layer can be calculated. From this displacement field, it is then possible to calculate the stress distribution in the thin layer.

2.3 Finite element formulation

The specific asymptotic contact law presented in section 2.2 is implemented into an explicit dynamic finite element code PLAST2 in 2-dimensions using plane strain equations, see Linck et al. [13]. When simulating the contact between two elastic bodies, the code uses a forward incremental Lagrange multiplier method, see Carpenter et al. [14] and Baillet et al. [10]. The equation set of this method is constructed using the equations of motion developed by means of the principle of the virtual work equation at time step t_n ($t_n = n\Delta t$) augmented by displacement constraints acting on contacting surfaces at time t_{n+1} ($t_{n+1} = t_n + \Delta t$):

$$\begin{cases} M\ddot{u}_n + C\dot{u}_n + F_n^{int} + G_{n+1}^T F_n^{cont} = F_n^{ext} \\ G_{n+1}\{X_n + u_{n+1} - u_n\} \leq 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

where F_n^{cont} is the contact force vector acting on the nodes at the contact surface, G_{n+1} is the global assembled matrix of the constraint elementary matrices (it characterizes the condition of no penetration as well as the tangential contact law), $X_{n+1}(= X_n + u_{n+1} - u_n)$ is the coordinate vector at time t_{n+1}, M and C are respectively the mass and the damping matrices, F^{int} and F^{ext} are the nodal vectors of internal and external forces, $\dot{u}$ and $\ddot{u}$ are the velocity and the acceleration vectors.

When simulating with the asymptotic contact law, the law presented in section 2.2 is adapted to a penalty method, see Zong [11] and Bathe [15] to allow a small penetration of the surface nodes of the elastic body into the rigid surface. The equation set is constructed using the equations of motion developed by means of the principle of the virtual work equation at time step t_n ($t_n = n\Delta t$):

$$M\ddot{u}_n + C\dot{u}_n + F_n^{int} = F_n^{ext} + F_n^{cont} \tag{2.17}$$

where F_n^{cont} corresponds to the contact force due to the penetration at time t_n which is used to calculate the new coordinate at time t_{n+1}. Equations (2.18)-(2.20) show the formulation for the normal and tangential contact stresses. The penalty coefficient used in the penalty method is replaced by a function depending of a^*, b^* and the body Lame parameters as shown in Eq. (2.18):

$$\sigma_n^{norm} = \frac{(\lambda^+ a^* + 2\mu^+ b^*)u_n^{-norm}}{L^+}. \tag{2.18}$$

If $|\sigma_n^{tang}| < \mathcal{F}|S(\sigma_n^{norm})|$, the nodes is sticking :

$$\sigma_n^{tang} = -\frac{\mu^+ b^*(u_n^{tang} - u_{n-1}^{tang})}{L^+} + \sigma_{n-1}^{tang}. \tag{2.19}$$

If not, the node is sliding :

$$|\sigma_n^{tang}| = \mathcal{F}|S(\sigma_n^{norm})| \text{ and } \exists A > 0; \text{ such as } \dot{u}_n^{tang} = -A\,\sigma_n^{tang} - \frac{L^+\dot{\sigma}_n^{tang}}{\mu^+ b^*}. \tag{2.20}$$

The symbol ^{tang} and ^{norm} correspond respectively to the tangential and normal part of the vector, σ_n is the contact stress vector at time t_n, λ^+ and μ^+ are the Lame coefficients of the body, a^* and b^* are the specific contact law parameters and u_n^{-norm} (<0) corresponds to the normal penetration.

Fig.2 represents the equivalent problem when the layer thickness tends to 0. To modelize the friction between Ω^+ and Ω^-, a Coulomb friction law without regularization of the tangential stress against the tangential velocity component ($\mathcal{F}$ is the Coulomb friction coefficient) is used. The time integration numerical scheme used is the central difference method. With this scheme, the velocity and acceleration of the surface at time t_n are expressed as:

$$\dot{u}_n = \frac{1}{2}\left[\dot{u}_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_{n-1} + \frac{1}{\Delta t}(u_{n+1} - u_n)\right], \qquad \ddot{u}_n = \frac{2}{\Delta t^2}(u_{n+1} - u_n - \Delta t\dot{u}_n). \tag{2.21}$$

This scheme might introduce high numerical frequencies. In order to eliminate these frequencies the numerical scheme (Eq. (2.21)) is relaxed due to artificial numerical damping β_2 ($\in [0.5; 1[$) :

$$\begin{cases} \dot{u}_n = \dfrac{1}{1+2\beta_2}\left[\dot{u}_{n-1} + \Delta t(1-\beta_2)\ddot{u}_{n-1} + \dfrac{2\beta_2}{\Delta t}(u_{n+1}-u_n)\right] \\ \ddot{u}_n = \dfrac{2}{\Delta t^2}(u_{n+1}-u_n-\Delta t\dot{u}_n). \end{cases} \tag{2.22}$$

The value β_2 equals to 0.5, corresponds to the central difference method (no numerical damping) and when β_2 tends to 1, this corresponds to the greatest numerical damping. This numerical damping does not correspond to the use of a visco-elastic material. Notice also that the theoretical study presented in section 2.2 has been made for a quasi static problem. Studies carried out in section 2.6 will show that it can be numerically extended by Eq. (2.22) to a near dynamic problem in which the acceleration terms cannot be neglected but are not preponderant.

2.4 Validation with a quasi-static sliding problem

2.4.1 Description of the model

The contact between a thin flat elastic layer (with various thickness L^-) bonded to a rigid surface and an elastic body (with a width L^+) is studied. The surface of the elastic body in contact is slightly curved (Curvature Radius = 100 mm) to prevent from instabilities generated during plane/plane contact such as stick-slip-separation, see Linck et al. [13]. However, the validity of the asymptotic contact law is only linked with the geometrical ratio ε of the layer. This means that the important critical ratio in this study is not the ratio of the layer thickness to the radius of the body but the ratio between the layer thickness and the width of the elastic body. A comparison of the results is made between the simulation with an elastic body and an elastic layer (Fig.3.(a)) and the simulation with one body and a specific contact law replacing the layer (Fig.3.(b)).

Models are made of quadrilateral, 4-noded, isoparametric, plane-strain elements. The contact area has been refined. The mesh density has been checked for case 1 (elastic body + elastic layer) and case 2 (elastic body + specific contact law) in order to find the optimal mesh for each case, from which the result is mesh density-independent. A mesh density of $125\mu m$ by $125\mu m$ elements is sufficient for case 2 while a mesh density of $25\mu m$ by $25\mu m$ elements is necessary for case 1 to obtain mesh density-independent results.

The material properties of the elastic body and the parameter a^* and b^* of the law are fixed ($a^* = b^* = 0.01$ which correspond to the simulation of a soft layer). In the case of two elastic bodies, the layer thickness (L^-) varies between 0.03 mm and 2 mm. The material properties of each modelized layer are calculated using Eq. (2.8)-(2.9). Table 1 summarizes material and model characteristics of both models. The Coulomb coefficient of friction $\mathcal{F}$ is equal to 0.2.

The body is supposed to be just in contact (no contact force) with the layer at the initial time of the simulation. The first step corresponds to the loading of the layer: a normal and a tangential displacement of $1\mu m$ at a velocity of 50 mm/s is applied simultaneously in both directions (axes x and y) to the top surface of the elastic body. Then, the second step corresponds to the sliding of the body: no normal displacement of the top of the body is allowed and a tangential displacement of $50\mu m$ at a velocity of 50 mm/s is applied. Velocities applied are very low so that the assumption of a quasi-static problem is valid. A comparison of the stresses along the contacting surface for all the simulation cases is made at the end of the tangential displacement of $50\mu m$.

2.4.2 Result

Fig.4 shows the normal and tangential stresses on the contacting surface of the elastic body at the end of the simulation. This figure revealed that the contact width is about 1 mm around the center node A (Fig.3.). It clearly shows that when the relative layer thickness ε becomes small (less than 0.05) the result of the simulation with the asymtotic contact law (case 2) is close to the result of the simulation with the elastic layer (case 1). This convergence validates the fact that the approximation made with Eq. (2.9) is valid when the relative layer thickness ε is small (less than 0.05). Even if not presented in this paper, the same kind of results are obtained for a layer harder than the elastic body ($a^* = b^* = 10$). Therefore the dynamic formulation of the finite element code is able to simulate a thin layer thanks to a specific contact law developed for a quasi-static problem as long as the layer thickness (L^-) is small compared to the elastic body width (L^+).
The main advantage of this law compared to a simulation with two elastic bodies is the small calculation time for the same results. In fact, the contact algorithm for the contact of an elastic body on a rigid surface is quicker than that between two elastic bodies. Moreover, this specific law enables good results with a rougher mesh than that with a thin layer (5 times rougher) to be obtained. The saving in calculation time is therefore prodigious. In this case the calculation time with the specific contact law is 100 times less.

2.5 Study of the influence of the coating thickness

2.5.1 Description of the model

As the specific contact law has been validated on a quasi-static problem for layers less than 0.5 mm thick ($\varepsilon < 0.05$), a study was carried out to understand the influence of the thickness of the coating. Only the simulation with the specific contact law (Fig.3.(b)) of a quasi-static sliding contact has been carried out. Layers modelized with this specific law are between 0.01 and 0.5 mm thick. For each case (different layer thickness), a normal force of 10 Newtons and a tangential force of 7 Newtons is applied to the top surface of the elastic body.
The material properties of both the layer and the elastic are fixed. The Young modulus of the body and the layer are respectively 200 000 MPa and 2 000 MPa. Poisson coefficient is 0.3 and the body density is 7000 kg/m^3. Parameters a^* and b^* (enabling the layer to be modelized) are calculated with Eq. (2.8).
In order to compare the influence of the layer, a calculation is carried out without a layer, by simulating the contact of the elastic body on a rigid surface with a forward incremental Lagrange multiplier method (Eq. (2.16)). The friction coefficient $\mathcal{F}$ is 0.2.

2.5.2 Results

Fig.5 clearly shows that the contact width becomes smaller when the layer thickness decreases (from 1.4 mm for a 500μm layer to 0.25 mm without layer). Therefore, the contact stresses decrease with the increase of layer thickness. For example, between a case without a layer and one with a 10μm soft layer, the maximum contact stresses are more than halved. However this tendency is not infinite and the contact stresses (as well as the contact area) tend to a limit as shown on Fig.6.
It is therefore really important to take into account the coating or the third body layer when simulating the contact between bodies, especially if the material property of the layer (coating or third body) is different from the body on which the layer is bonded.

2.6 Validation of a quasi-dynamic problem : impact of a body on a layer

The theoretical study presented in section 2.2 has been carried out for quasi static problem. This section will show that it can be numerically extended by Eq. (2.22) to a near dynamic problem in which the acceleration terms cannot be neglected but are not preponderant. In order to simulate this type of dynamic problem, a low velocity impact between an elastic body and the layer is taken into account. In this dynamic problem, no physical contact instabilities, such

as stick-slip-separation problems, see Linck et al. [13], appears.
The section 2.4 meshes are used in this simulation with different initial conditions. The elastic body is at 0.001 mm from the layer at the initial time. An initial 150 mm/s normal velocity and 100 mm/s tangential velocity is applied to the entire elastic body. The trajectory and stresses at the center of the contacting surface (node A: x=0, y=0.001 at time t=0) are compared for the different cases (elastic layer (case 1) or specific contact law (case 2)) during the impact. The results of the simulation are given in Fig.7 and Fig.8.
In this dynamic case, the same observation as for the quasi-static case can be made. The trajectory (Fig.7.) as well as the normal and tangential contact stresses at node A (Fig.8.) show the convergence of the solution with an elastic layer (case 1) to the one with the specific contact law (case 2) when the relative thickness ε of the layer becomes small (less than 0.05). This therefore proves that the specific contact law, describing static and quasi-static problem can be implemented into a dynamic code to simulate a quasi dynamic case with no physical contact instabilities. However this specific law has not yet been validated on dynamic problem with physical contact instabilities (such as stick-slip-separation). In this dynamic problem, the saving of calculation time with this specific contact law is very great (100 times less).

2.7 Conclusion

When simulating the contact, with friction, between an elastic body and a really thin elastic layer bonded to a rigid surface, it is possible to use a specific contact law to modelize the thin layer which decreases the model size and calculation time considerably. This specific contact law has been validated on quasi-static problems as well as nearly dynamic problems with no physical contact instabilities (no stick-slip-separation instabilities) as long as the layer thickness is small.
As we have shown that the influence of the layer bonded to a rigid surface is really important, it seems necessary to take into account the third body (as well as the coating, if it exists) when simulating the contact between bodies. A future perspective would therefore be to find the same kind of specific law to simulate the contact, with friction, between an elastic body and a really thin elastic layer bonded to another elastic body.

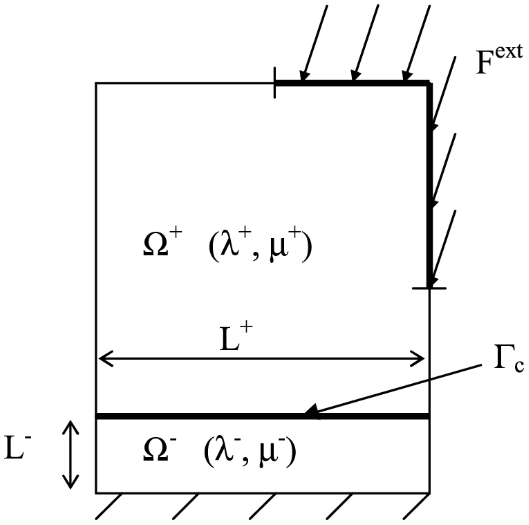
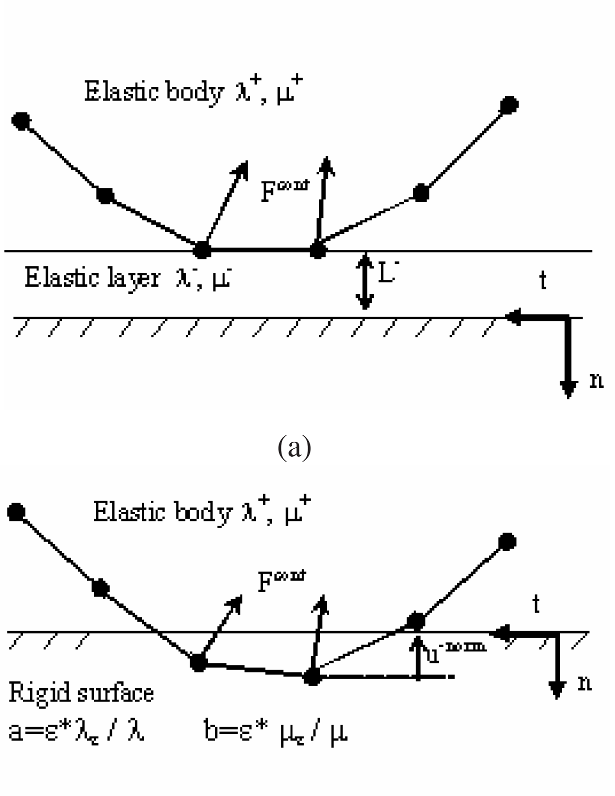


Fig.1. *Definition of the initial problem*



(a)

(b)

Fig.2. *Equivalent method when the ratio of thickness ε tends to 0*

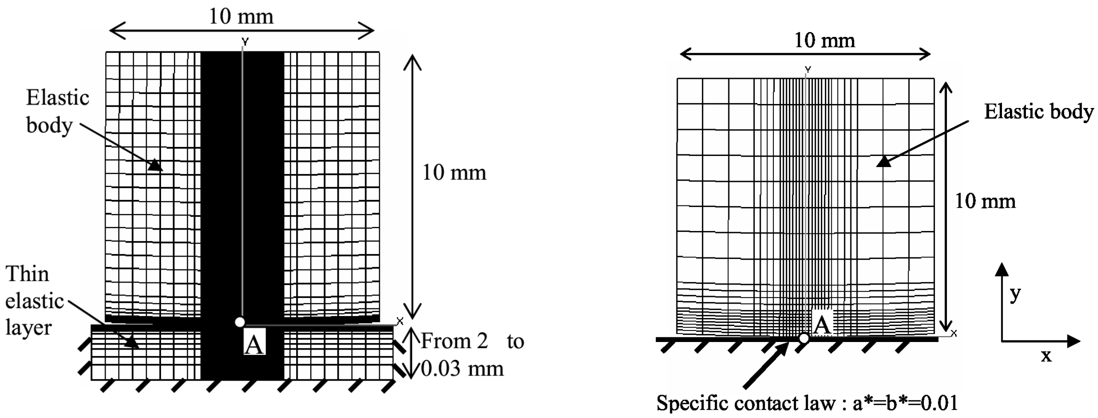


Fig.3. *Model and boundary conditions*

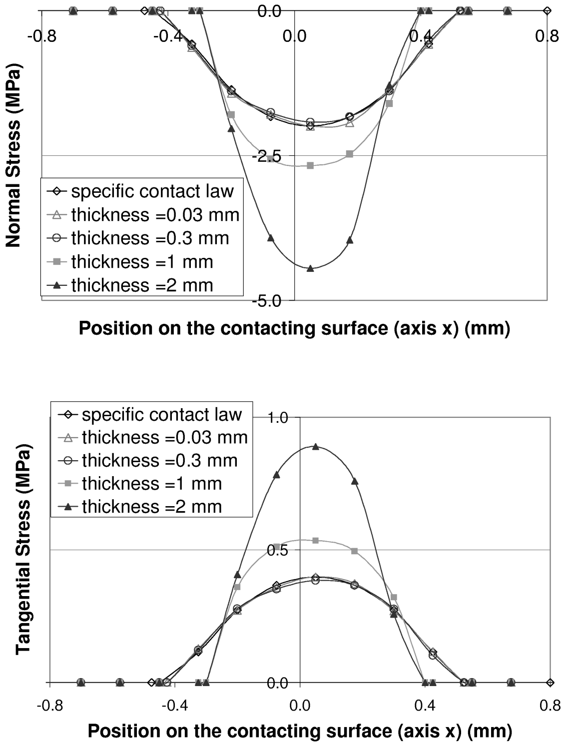
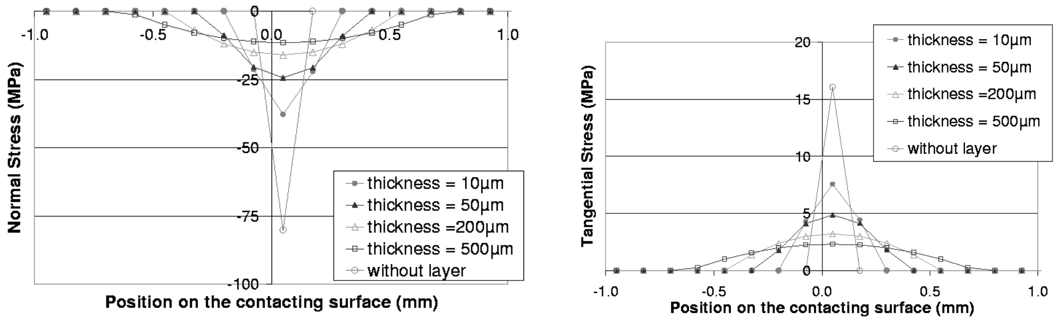


Fig.4. *Normal and tangential contact stresses at the end of the movement*



(a) (b)

Fig.5. *Normal and tangential contact stresses for different layer thickness at the end of the movement*

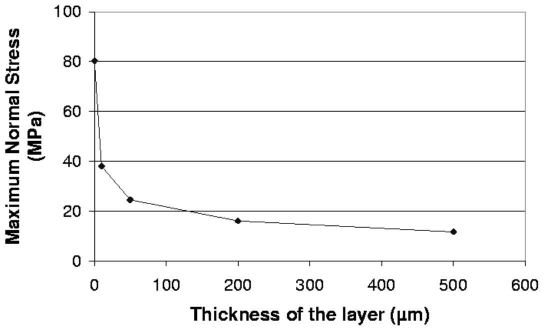


Fig.6. *Diminution of the normal contact stress with the layer thickness*

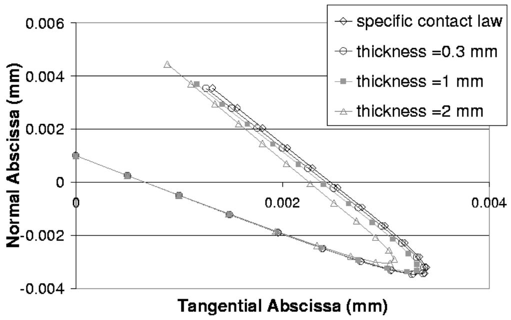
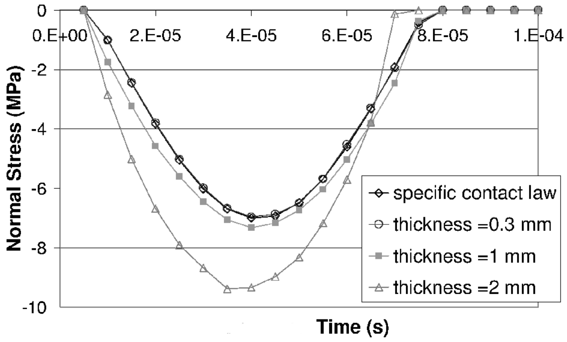
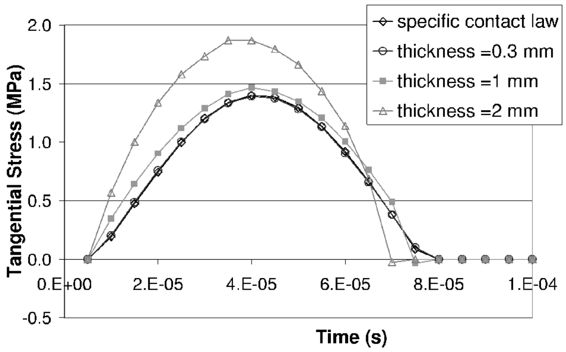


Fig.7. *Trajectory of the center node A for different thickness of the elastic layer (case 1) and the specific contact law (case 2) during impact*



(a)



(b)

Fig.8. *Normal and tangential contact stresses at node A for different thickness of the elastic layer (case 1) and the specific contact law (case 2) during impact*

	Case 1: Elastic body + elastic layer (various thickness)					Case 2: Elastic body + law: (a=b=0.01)
	Body L^+=10mm	Layer: L^- =2mm ε =0.2	Layer: L^- =1mm ε =0.1	Layer: L^- =0.3mm ε =0.03	Layer: L^- =0.03mm ε =0.003	Body L^+=10mm
E (MPa)	150 000	3000	1500	450	45	150 000
ν	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
ρ (kg/m^3)	10 000	2 000	2 000	2 000	2 000	10 000
Number of elements	4176	2006	1770	1298	472	600

Tab.1. *Material and law characteristics for the layer and the body*

LIST OF FIGURES AND TABLES

2.8 NOMENCLATURE

Subscript $_n$	=	nodal discrete value at time t_n
Superscript $^+$	=	relative to the first body
Superscript $^-$	=	relative to the layer
C	=	damping matrix
E	=	Young modulus, MPa
L^+	=	width of the elastic first body, mm
L^-	=	thickness of the elastic layer, mm
M	=	mass matrix
F^{cont}	=	vector of contact forces, N
F^{ext}	=	vector of surface external forces, N
F^{int}	=	vector of internal forces, N
F^{vol}	=	volume external forces
G_{n+1}	=	global assembled matrix of the constraint elementary matrices
X_n	=	coordinate vector at time t_n
a^*, b^*	=	specific contact law parameter:
		ratio of geometrical and elastic properties of both bodies
e_{ij}	=	strain tensor
f	=	Coulomb friction coefficient
n_i	=	components of the unitary vector
t_n	=	calculation time at $n\Delta t$, s
u	=	displacement vector, mm
$[u^{+norm}]$	=	relative normal displacement, mm
u^{+norm}	=	normal displacement of the elastic body, mm
u^{-norm}	=	normal displacement of the layer, mm
u^{tang}	=	tangential displacement at time t_n, mm
$\dot{u}$	=	velocity vector, mm.s^{-1}
$[\dot{u}^{tang}]$	=	relative tangential velocity, mm.s^{-1}
$\ddot{u}$	=	acceleration vector, mm.s^{-2}
Δt	=	time step, s
β_2	=	numerical damping parameter
δ_{ij}	=	Kronecker symbol
ε	=	ratio of lyer thickness to body width
λ, μ	=	Lame coefficients
ρ	=	density, kg.mm^{-3}
σ_{ij}	=	stress tensor

σ^{norm}	=	normal contact stress, MPa
σ^{tang}	=	tangential contact stress, MPa
$\dot{\sigma}^{tang}$	=	time derivative of the tangential contact stress
ν	=	Poisson coefficient

Bibliographie

[1] Godet, M., "The Third body approach: A Mechanical View of Wear", Wear, 100, pp. 437-452, 1984.
[2] Descartes, S., Berthier, Y., "Rheology an d flows of solid third bodies: background and application to an MoS1.6 coating", Wear, 252, pp. 546-556, 2002.
[3] Chen, W. T., Engel, P. A., "Impact and contact stress analysis in multilayer media", Int. J. Solids Structures, 8, pp. 1257-1281, 1972.
[4] King, R. B., O'Sullivan, T.C., "Sliding contact stresses in a two-dimensional layered elastic half-space.", Int. J. Solids Structures, 23, pp. 581-597, 1987.
[5] Walowit, J.A., Pinkus, O., "Effect of friction between cylinders and rubber staves of finite thickness", ASME J. Lub. Tech., 104, pp. 255-261, 1982.
[6] Tian, H., Saka, N., "Finite Element Analysis of an Elastic-Plastic Two-Layer Half-Space: Normal Contact", Wear, 148, pp. 47-68, 1991.
[7] Komvopoulos, K., "Finite Element Analysis of a Layered Elastic Solid in Normal Contact With a Rigid Surface", ASME Journal of Tribology, 110, pp. 447-485, 1988.
[8] Kral, E.R., Komvopoulos, K., "Three-Dimensional Finite Element Analysis of Subsurface Stress and Strain Fields Due to Sliding Contact on an Elastic-Plastic Layered Medium", ASME Journal of Tribology, 119, pp. 332-341, 1997.
[9] Kikuchi, N., Oden, J.T., "Contact Problems in Elasticity. A study of Variational Inequalities and Finite Element Methods", SIAM, Philadelphia, 495 p. 1988.
[10] Baillet, L., Sassi, T., "Finite element method with Lagrange multipliers for contact problems with friction", C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334, pp. 917-922, 2002.
[11] Zhong, Z-H, "Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems", Oxford University Press, Oxford, 372 p. 1993.
[12] Seeger, R.J., Templer, G., "Research Frontiers in Fluid Dynamics", Interscience Publishers, New York, 738 p., 1965.
[13] Linck, V., Baillet, L., Berthier., Y., "Modeling the consequences of local kinematics of the first body on friction and on third body sources in wear", Wear, 255/1-6, pp. 299-308, 2003.
[14] Carpenter, N.J., Taylor, R.L., Katona, M.G., "Lagrange Constraints for Tansient Fi-

nite Element Surface Contact", Int. J. Num. Meth. Engng., 32, pp. 103-128, 1991.
[15] Bathe, K.J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 735 p., 1982.

Partie II : Méthodes de décomposition de domaine en mécanique du contact

Introduction : partie II

Dans de nombreux domaines de l'ingénierie des structures, les méthodes numériques de résolution se heurtent à des contraintes de temps de calcul et de capacité mémoire dues à la complexité des géométries et aux grande taille des système engendrés. Les méthodes de décomposition de domaine et l'utilisation d'algorithmes spécifiques bien adaptés aux machines à architecture parallèle sont des voix permettant de se libérer de ces contraintes. Ces méthodes consistent à partager le domaine de résolution d'un problème initial en sous-domaine. La solution d'un problème mathématique de grande taille peut ainsi être obtenue par la résolution simultanée d'un ensemble de sous-problèmes de petite taille et sur des géométries plus simples (voir par exemple [15], [2], [4] et les références citées dans ces livres).

La première méthode de décomposition de domaine a été proposée par H. A. Schwarz en 1890 [1] dans le but de prouver l'existence d'une solution d'un problème de Poisson sur un domaine de géométrie complexe.Cette méthode consiste à décomposer le domaine initial en deux régions à géométrie simple qui se recouvrent : le procédé itératif consiste à imposer la trace de la solution d'un sous-domaine à l'itération précédente comme conditions aux limites de type Dirichlet pour la frontière intérieure de l'autre sous-domaine. Mais cette méthode n'est pas satisfaisante car sa convergence est lente et dépendante de la zone de recouvrement entre les sous-domaines : il s'agit alors d'équilibrer le gain en itérations avec la perte d'efficacité due au recouvrement. P. L. Lions a démontré de nombreux résultats théoriques sur ce sujet ([16], [17]) et il a aussi étendu la méthode au cas limite où le recouvrement n'existe plus en introduisant l'algorithme de Schwarz additif [18].

On s'est intéressé dés les années soixante au cas où le domaine initial Ω est divisé en plusieurs sous-domaines Ω^i distincts (ne se recouvrant pas); par élimination des inconnues intérieures à chaque sous-domaine, on transforme un problème posé sur Ω en un problème posé sur l'interface entre les sous-domaines. On introduit un opérateur, dit opérateur de Poincaré-Stecklov, agissant sur les sous-domaines par les conditions aux limites sur l'interface (d'un point de vue matriciel, cela revient à construire la matrice du complément de Schur). Joint à une méthode itérative, ceci permet de résoudre le problème global sur Ω par une suite de résolutions indépendantes sur chaque sous-domaine Ω^i. Les différences entre les méthodes proviennent du choix de l'algorithme qui ajuste les conditions aux limites dans un processus itératif de convergence vers la solution globale.
Nous introduisons ici les deux méthodes dont nous nous sommes inspirés pour développer de nouveaux algorithmes afin de résoudre un problème de contact frottant.

La première méthode est un algorithme de type Dirichlet-Neumann. Cette méthode a été introduite dans [5], [12]. Elle est basée sur un procédé itératif où à chaque itération, on résout sur un domaine un problème de type Dirichlet et à partir de la trace de la dérivé normale de la solution obtenue, on résout sur le domaine adjacent un problème de type Neumann. Ceci assure

la continuité des dérivées normales à chaque itération. La continuité des traces est satisfaite à la convergence du processus.
L' autre stratégie est une approche par complément de Schur préconditionné Neumann-Neumann (voir [7], [6]). Elle exige à chaque étape la résolution en parallèle sur chaque sous domaine d'un problème de Dirichlet, puis d'un problème de Neumann. Cette approche consiste à imposer la continuité du déplacement comme conditions aux limites pour les sous problèmes locaux et à satisfaire la continuité des contraintes par une équation supplémentaire à l'interface.

Dans le cas des problèmes de contact, peu de travaux existe. Une méthode de décomposition de domaine proposée et étudiée dans [14], [13] consiste à garder les interfaces de contact à l'intérieur des sous-domaines. Le traitement de la non linéarité (due au contact avec frottement) s'effectue en utilisant les méthodes classiques. Cette approche a été utilisée pour une structure (rideau métallique) formée de nombreux sous domaines.

Il peut paraître étonnant que la **décomposition naturelle** obtenue en prenant les interfaces (physiques) de contact comme interfaces (numériques) de décomposition en sous domaines ait été peu utilisée. Ceci semble du à la non linéarité des conditions imposées sur cette interface. Cependant, dans [19] des simulations numériques utilisant un algorithme de type Dirichlet-Neumann (où le problème de Dirichlet est un problème de contact) ont montré la validité de cette approche pour un problème de contact sans frottement.

L 'objectif des trois chapitres de cette partie est de proposer et de montrer la convergence de deux algorithmes de décomposition naturelle pour des problèmes de contact sans et avec frottement.
Le chapitre 3 est la publication [8] parue aux *C. R. Acad. Sci. Paris*, le chapitre 4 est un article soumis pour publication et a fait l'objet de la publication interne [9]. Le dernier chapitre est une version détaillée de la publication [10] qui va paraître dans Applied Mathematics Letters (AML).

Dans le **premier de ces chapitres**, nous nous intéressons à un problème de contact unilatéral sans frottement entre deux corps élastiques occupant les domaines $\overline{\Omega}^\alpha$, $\alpha = 1{,}2$, de $\mathbb{R}^2$, et susceptibles d'entrer en contact unilatéral sans frottement à travers une zone $\Gamma_c = \Gamma_c^1 = \Gamma_c^2$. Le problème étudié consiste à trouver les déplacements u^α et les contraintes $\sigma(u^\alpha)$ tels que :

$$\begin{cases} div\, \sigma(u^\alpha) + f^\alpha & = & 0 \ \text{ sur } \Omega^\alpha, \\ \sigma(u^\alpha) n^\alpha & = & 0 \ \text{ sur } \Gamma_l^\alpha, \\ u^\alpha & = & 0 \ \text{ sur } \Gamma_u^\alpha. \end{cases} \tag{2.23}$$

Γ_u^α,Γ_l^α,Γ_c^α forment une partition de la frontière $\Gamma^\alpha = \partial\Omega^\alpha$, avec $\Gamma_u^\alpha \neq \emptyset$. La force f^α est une donnée régulière. La loi de comportement élastique, avec les hypothèses habituelles de coercivité, est :

$$\sigma_{ij}(u^\alpha) = A_{ijkh}^\alpha e_{kh}(u^\alpha), \text{ avec } e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T), \tag{2.24}$$

où A^α est le tenseur d'élasticité du corps élastique occupant le domaine $\overline{\Omega}^\alpha$.
On définit la composante normale du déplacement u^α et le déplacement normal relatif d'un solide par rapport à l'autre sur la zone de contact Γ_c par: $u^\alpha_N = u^\alpha_i n^\alpha_i \, et \, [u_N] = u^1.n^1 + u^2.n^2$, où n^α est la normale unitaire extérieure à Ω^α. Les composantes normales et tangentielles du vecteur de contraintes σ^α sont définies, avec la convention des indices répétés, par: $\sigma^\alpha_N = \sigma_{ij}(u^\alpha)n^\alpha_i n^\alpha_j$ et $\sigma^\alpha_T = \sigma_{ij}(u^\alpha)n^\alpha_j - \sigma^\alpha_N n^\alpha_i$.
La continuité des contraintes sur l'interface Γ_c se traduit par :

$$\sigma^1_N = \sigma^2_N = \sigma_N, \qquad \sigma^1_T = \sigma^2_T = \sigma_T. \tag{2.25}$$

Les conditions sur Γ_c pour un contact unilatéral sans frottement sont :

$$\sigma_T = 0, \tag{2.26}$$

$$[u_N] \leq 0, \quad \sigma_N \leq 0, \quad \sigma_N[u_N] = 0. \tag{2.27}$$

Nous montrons que la formulation variationnelle de ce problème (qui se met sous la forme d'une inégalité variationnelle) est équivalente à deux problèmes couplés où chacun est défini sur un seul domaine et vérifie l'équation de l'équilibre et les conditions au bord (extérieures). Sur l'interface de contact, on impose d'une part la continuité des contraintes pour l'un des deux problèmes (problème de Neumann) et d'autre part les conditions de contact unilatéral sans frottement pour l'autre problème qui est un problème d'obstacle.

Ces deux problèmes sont donnés par:

$$\left\{\begin{array}{lll} div\,\sigma(u^2) + f^2 & = 0 & \text{sur } \Omega^2, \\ \sigma(u^2)n^2 & = 0 & \text{sur } \Gamma^2_l, \\ u^2 & = 0 & \text{sur } \Gamma^2_u, \\ \sigma^2_N = \sigma^1_N, \quad \sigma^2_T & = \sigma^1_T & \text{sur } \Gamma_c. \end{array}\right. \tag{2.28}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} div\,\sigma(u^1) + f^1 & = 0 & \text{sur } \Omega^1, \\ \sigma(u^1)n^1 & = 0 & \text{sur } \Gamma^1_l, \\ u^1 & = 0 & \text{sur } \Gamma^1_u, \\ \sigma^1_T & = 0 & \text{sur } \Gamma_c, \\ [u_N] \leq 0, \quad \sigma^1_N \leq 0, & \sigma^1_N[u_N] = 0, & \text{sur } \Gamma_c. \end{array}\right. \tag{2.29}$$

A partir de cette décomposition, nous présentons l'algorithme suivant :
Soit G_0 donnée. Pour $n \geq 1$, on construit les suites des fonctions $(u^1_n)_{n\geq 0}$ et $(u^2_n)_{n\geq 0}$, en résolvant les problèmes suivants: (On note par ${}_{nN}$ ou ${}_{nT}$ la composante normale (N) ou tangentielle (T) à l'itération n.)

Première étape:

$$\begin{cases} div\,\sigma_n(u_n^2) + f^2 & = 0 & \text{sur } \Omega^2, \\ \sigma_n(u_n^2)n^2 & = 0 & \text{sur } \Gamma_l^2, \\ u_n^2 & = 0 & \text{sur } \Gamma_u^2, \\ \sigma_{nN}^2 = G_{n-1N}, & \sigma_{nT}^2 = G_{n-1T} & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \tag{2.30}$$

Deuxième étape:

$$\begin{cases} div\,\sigma_n(u^1) + f^1 & = 0 & \text{sur } \Omega^1, \\ \sigma_n(u_n^1)n^1 & = 0 & \text{sur } \Gamma_l^1, \\ u_n^1 & = 0 & \text{sur } \Gamma_u^1, \\ \sigma_{nT}^1 & = 0 & \text{sur } \Gamma_c, \\ u_{nN}^1 \leq -u_{nN}^2,\ \sigma_{nN}^1 \leq 0, & \sigma_{nN}^1[u_{nN}] = 0, & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \tag{2.31}$$

Actualisation:

$$G_n := \theta_n \sigma_n^1 n^1 + (1 - \theta_n) G_{n-1},$$

où θ_n est un paramètre de relaxation positif qui sera déterminé pour assurer la convergence.

La démonstration de la convergence de cet algorithme est basée sur la convergence de la suite G_n. Nous montrons d'abord, en introduisant des relèvements continus de trace, que si la suite G_n converge, alors les suites u_n^α convergent vers les solutions u^α, $\alpha = 1{,}2$ des problèmes (2.28),(2.29) et donc du problème de départ (2.23)-(2.27).
Nous introduisons ensuite l'opérateur T_θ tel que $T_\theta(G_{n-1}) = G_n$ et nous montrons que pour certaines valeurs de θ, l'opérateur T_θ est contractant.
Notons que postérieurement à la publication de nos résultats sur la convergence de cet algorithme [8], une démonstration similaire a été proposée dans [3].

Dans le **deuxième chapitre**, nous introduisons le frottement en remplaçant la condition (2.26) par la loi de frottement de Coulomb non locale suivante :

$$\begin{cases} |\sigma_T| \leq k|S(\sigma_N)| \\ |\sigma_T| < k|S(\sigma_N)| \Longrightarrow [u_T] = 0 \\ |\sigma_T| = k|S(\sigma_N)| \Longrightarrow \exists \nu \geq 0 \quad [u_T] = -\nu\sigma_T \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_c, \tag{2.32}$$

où $k(x)$ est le coefficient du frottement sur l'interface Γ_c: $k(x) \in L^\infty(\Gamma_c)$, $k(x) \geq 0$ p.p. sur Γ_c, et S est un opérateur de régularisation défini sur le dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ dans l'espace $L^2(\Gamma_c)$. Sur le bord latéral Γ_l^α on impose une traction ϕ^α, $\alpha = 1{,}2$.

Nous décomposons la formulation faible du problème en deux problèmes l'un est un problème de type Neumann linéaire (comme le cas de Signorini) et l'autre est un problème de contact avec frottement de Coulomb non local (avec un obstacle):

$$\begin{cases} div\,\sigma(u^2) + f^2 & = 0 & \text{sur } \Omega^2, \\ \sigma(u^2)n^2 & = \phi^2 & \text{sur } \Gamma_l^2, \\ u^2 & = 0 & \text{sur } \Gamma_u^2 \\ \sigma_N^2 = \sigma_N^1, & \sigma_T^2 = \sigma_T^1 & \text{sur } \Gamma_c \end{cases} \tag{2.33}$$

$$\begin{cases} div\,\sigma(u^1) + f^1 \quad = 0 & & & \text{sur } \Omega^1, \\ \sigma(u^1)n^1 \quad = \phi^1 & & & \text{sur } \Gamma_l^1, \\ u^1 \quad = 0 & & & \text{sur } \Gamma_u^1. \\ [u_N] \leq 0, & \sigma_N^1 \leq 0, & \sigma_N^1[u_N] = 0, & \text{sur } \Gamma_c, \\ \quad |\sigma_T^1| \leq k|S(\sigma_N^1)| & & & \\ \quad |\sigma_T^1| < k|S(\sigma_N^1)| \Longrightarrow [u_T] = 0 & & & \text{sur } \Gamma_c. \\ \quad |\sigma_T^1| = k|S(\sigma_N^1)| \Longrightarrow \exists \nu \geq 0 \quad [u_T] = -\nu\sigma_T^1. & & & \end{cases} \tag{2.34}$$

L'algorithme est le suivant: Pour G_0 donné on résout :

Première étape:

$$\begin{cases} div\,\sigma_n(u_n^2) + f^2 & = 0 & \text{sur } \Omega^2, \\ \sigma_n(u_n^2)n^2 & = \phi^2 & \text{sur } \Gamma_l^2, \\ u_n^2 & = 0 & \text{sur } \Gamma_u^2, \\ \sigma_{nN}^2 = G_{n-1N}, & \sigma_T^2 = G_{n-1T} & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \tag{2.35}$$

Deuxième étape:

$$\begin{cases} div\,\sigma_n(u^1) + f^1 \quad = 0 & & & \text{sur } \Omega^1, \\ \sigma_n(u_n^1)n^1 \quad = \phi^1 & & & \text{sur } \Gamma_l^1, \\ u_n^1 \quad = 0 & & & \text{sur } \Gamma_u^1, \\ u_{nN}^1 \leq -u_{nN}^2, & \sigma_n{}_N^1 \leq 0, & \sigma_n{}_N^1[u_{nN}] = 0, & \text{sur } \Gamma_c, \\ \quad |\sigma_{nT}^1| \leq k|S(\sigma_{nN}^2)| & & & \\ \quad |\sigma_{nT}^1| < k|S(\sigma_{nN}^2)| \Longrightarrow [u_{nT}] = 0 & & & \text{sur } \Gamma_c. \\ \quad |\sigma_{nT}^1| = k|S(\sigma_{nN}^2)| \Longrightarrow \exists \nu \geq 0 \quad [u_{nT}] = -\nu\sigma_{nT}^1 & & & \end{cases} \tag{2.36}$$

Actualisation:

$$G_n := \theta_n \sigma_n^1 n^1 + (1 - \theta_n)G_{n-1} = T_\theta(G_{n-1}).$$

La démonstration de la convergence de cet algorithme se fait comme dans le cas sans frottement. La présence du terme du frottement introduit cependant des termes supplémentaires qui rendent plus difficile le choix du paramètre θ tel que l'opérateur T_θ soit contractant. En utilisant des fonctions test convenables, nous avons pu établir des majorations de ces termes supplémentaires -qui à l'aide des calculs algébriques et en supposant que le coefficient de frottement est petit- permettent d'établir des intervalles de θ pour lesquels l'opérateur T_θ est contractant.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous présentons quelques résultats numériques qui valident cet algorithme. Nous avons implémenté cet algorithme en utilisant le code d'éléments finis PLAST2 développé au laboratoire LaMCoS (INSA) et destiné initialement à la résolution globale des problèmes de contact en deux dimensions [11]. Nous avons vérifié que les résultats (position de l'interface de contact, valeurs des contraintes normales et tangentielles) obtenus par notre algorithme sont identiques à ceux obtenus par une méthode de résolution globale. Nous avons ensuite montré numériquement que le paramètre de relaxation optimum est indépendant du maillage et que le coefficient de frottement n'a pas d'influence sur cet optimum.

Le deuxième algorithme que nous proposons consiste, à partir d'un déplacement donné sur l'interface, à résoudre simultanément un problème de Dirichlet sur l'un des deux domaines et un problème de contact avec obstacle (qui est représenté par la donnée du déplacement) sur l'autre domaine. Dans cette étape les conditions de contact unilatéral sont satisfaites. La continuité des contraintes sur l'interface sera vérifiée en résolvant simultanément dans une deuxième étape un problème auxiliaire de type Neumann sur chaque domaine.

Première étape:

$$\left\{\begin{array}{lll} div\,\sigma_n(u^1)+f^1 & =0 & \text{sur } \Omega^1,\\ \sigma_n(u^1)n^1 & =\phi^1 & \text{sur } \Gamma_l^1,\\ u_n^1 & =0 & \text{sur } \Gamma_u^1,\\ \gamma u_n^1 & =\lambda_{n-1} & \text{sur } \Gamma_c. \end{array}\right. \tag{2.37}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} div\,\sigma_n(u^2)+f^2 & =0 & \text{sur } \Omega^2, & \\ \sigma_n(u_n^2)n^2 & =\phi^2 & \text{sur } \Gamma_l^2, & \\ u_n^2 & =0 & \text{sur } \Gamma_u^2, & \\ \sigma_{nT}^{\,2} & =0 & \text{sur } \Gamma_c, & \\ u_{nN}^2\leq\lambda_{n-1}, & \sigma_{nN}^{\,2}\leq 0, & \sigma_{nN}^{\,2}(u_{nN}^2-\lambda_{n-1})=0 & \text{sur } \Gamma_c. \end{array}\right. \tag{2.38}$$

Deuxième étape: $\alpha = 1{,}2$

$$\left\{\begin{array}{lll} div\,\sigma_n(w^\alpha) & =0 & \text{sur } \Omega^\alpha,\\ \sigma_n(w^\alpha)n^\alpha & =0 & \text{sur } \Gamma_l^\alpha,\\ w_n^\alpha & =0 & \text{sur } \Gamma_u^\alpha\\ \sigma(w_n^\alpha)n^\alpha & =\dfrac{1}{2}\left(\sigma(u_n^1)n^1+\sigma(u_n^2)n^2\right) & \text{sur } \Gamma_c. \end{array}\right. \tag{2.39}$$

Actualisation:

$$\lambda_n=\lambda_{n-1}+\theta_n(\gamma w_n^1-\gamma w_n^2)=T_{\theta_n}(\lambda_{n-1}). \tag{2.40}$$

La convergence de cet algorithme est prouvée en utilisant la méthode de point fixe sur l'opérateur T_θ qui à chaque trace λ_{n-1} associe la trace λ_n. Nous montrons que λ_n converge vers le point fixe de T_θ qui est γu^1. Cette convergence de λ_n implique la convergence de l'algorithme vers la solution du problème de Signorini.

Bibliographie

[1] Schwarz H. A. Ueber einen grenzübergang durch alternirendes verfahren. *Gesamelete Mathematische Abhandlungen*, 2, 1890.

[2] Smith B., Bjorstad P., and Gropp W. *Domain Decomposition: parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations*. Cambridge University Press, 1996.

[3] Eck C. and Wohlmuth B. Convergence of a contact-neumann iteration for the solution of two-body contact problems. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 13(8):1103–1118, 2003.

[4] Farhat C. and Roux F. X. Implicit parallel processing in structural mechanics. *Computational Mechanics Advances*, 2(1):1–124, 1994.

[5] Funaro D., Quarteroni A., and Zanobli P. An iterative procedure with interface relaxation for domain decomposition methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25:1213–1236, 1988.

[6] Dautray and Lions J. L. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques*, volume 2, Chapitre VIII. Masson, Paris, 1995.

[7] Bourgat J. F., Glowinski R., P. Le Tallec, and M. Vidrascu. Variational formulation and alogorithm for trace operator in domain decomposition calculations. In *Proceeding on Domain Decomposition Methods, SIAM*, Los Angeles, California, 1988.

[8] Bayada G., Sabil J., and Sassi T. Algorithme de neumann-dirichlet pour des problèmes de contact unilatéral : Résultat de convergence. *C. R. Acad. Sci, Paris Sér.I*, 335(4):381–386, 2002.

[9] Bayada G., Sabil J., and Sassi T. Natural domain decomposition algorithm for coulomb's interface law. Technical Report 353, Laboratoire MAPLY, INSA de Lyon, 2002.

[10] Bayada G., Sabil J., and Sassi T. Natural neumann-neumann domain decomposition algorithm for signorini problem. *Applied Mathematics Letters (AML)*, 2004. A paraître.

[11] Baillet L. and Sassi T. Simulations numériques de différentes méthodes d'éléments finis pour les problèmes de contact avec frottement. *C. R. Acad. Sci, Paris, Ser.IIB*, 331:789–796, 2003.

[12] Marini L.D. and Quarteroni A. A relaxation procedure for domain decomposition methods using finite elements. *Numer. Math.*, 55(5):575–598, 1989.

[13] Barboteu M. *Contact, Frottement et techniques de calcul parallèle*. Thèse, Université Montpellier II, 1999.

[14] Alart P., Barboteu M., Le Tallec P., and Vidrascu M. Méthode de schwarz additive avec solveur grossier pour problèmes non-symétrique. *C. R. Acad. Sci, Paris Sér.I*, 331:399–404, 2000.

[15] Le Tallec P. Domain decomposition methods in computational mechanics. *Computational Mechanics Advances*, 1(2):121–220, 1994.

[16] Lions P.L. On the Schwarz alternating method (i): A variant for nonoverlapping subdomains. In Glowinski R., Golub G. H., Meurant G. A., and Périaux J., editors, *Proc. 1rst Conference on domain Decomposition Methods, SIAM*, pages 1–42, Philadelphia, 1988.

[17] Lions P.L. On the Schwarz alternating method (ii): A variant for nonoverlapping subdomains. In Chan T. F., Glowinski R., Périaux J., and Widlund O. B., editors, *Proc. of Second International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, SIAM*, pages 202–223, Philadelphia, 1989.

[18] Lions P.L. On the Schwarz alternating method (iii): A variant for nonoverlapping subdomains. In Chan T. F., Glowinski R., Périaux J., and Widlund O. B., editors, *Proc. 3rd Conference on Domain Decomposition Methods, SIAM*, pages 202–223, Philadelphia, 1990.

[19] Krause R.H. and Wohlmuth B.I. Nonconforming domain decomposition techniques for linear elasticity. *East-West J.Numer.Math.*, 8(3):177–206, 2000.

Chapitre 3

Algorithme de Neumann-Dirichlet pour des problèmes de contact unilatéral : Résultat de convergence [1]

1. *Ce chapitre a fait l'objet de la publication [8] citée dans l'introduction générale de cette deuxième partie.*

Résumé :

Dans ce chapitre, nous proposons et nous démontrons la convergence d'un algorithme de décomposition de domaine de type Neumann-Dirichlet. Celui-ci permet d'approcher un problème de contact unilatéral sans frottement entre deux matériaux élastiques en gardant les interfaces (physiques) de contact comme interfaces (numériques) de décomposition. L'idée est de remplacer dans l'approche proposée par [4], le problème de Dirichlet par une inéquation variationnelle.

Abstract :

In this chapter, we propose and we prove the convergence of a Neumann-Dirichlet algorithm in order to approximate a Signorini problem between two elastic bodies. The idea is to retain the natural interface between the two bodies as numerical interface for the domain decomposition and to replace the Dirichlet problem in [4] by a variational inequality.

Abridged English version :

We consider a Signorini problem between two elastic bodies Ω^α, $\alpha = 1{,}2$, in contact through an interface Γ_c. Assuming linear elasticity behavior and classical boundary conditions, the problem is given by (3.2)-(3.5), and the weak related formulation is:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Find} \quad u \in K \\ a(u,v-u) \geq F(v-u) \quad \forall v \in K, \end{array}\right. \tag{P_1}$$

where K is a convex defined in section 3.2.
Existence and uniqueness of solution are well known (see [3]).
The first step is to introduce the following equivalent multibody formulation.

$$\left\{\begin{array}{ll} div\,\sigma^2 + f = 0 & \text{in } \Omega^2 \\ \sigma_N^1 = \sigma_N^2,\, \sigma_T^1 = \sigma_T^2 & \text{on } \Gamma_c \\ \sigma^2 n^2 = 0 & \text{on } \Gamma_l^2 \\ u^2 = 0 & \text{on } \Gamma_u^2. \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{ll} div\,\sigma^1 + f = 0 & \text{in } \Omega^1 \\ [u_N] \leq 0 \;\; \sigma_N^1 \leq 0, \;\; \sigma_N^1[u_N] = 0 & \text{on } \Gamma_c \\ \sigma_T^1 = 0 & \text{on } \Gamma_c \\ \sigma^1 n^1 = 0 & \text{on } \Gamma_l^1 \\ u^1 = 0 & \text{on } \Gamma_u^1. \end{array}\right.$$

This allows us to define the following algorithm (Q_n) in which θ_n is a non negative parameter that will be determined in order te ensure the convergence of the algorithm, and R_D^α is an extension of traces which is defined by (3.6).
Let $g_0^2 \in V^{2'}$ be given. For $n \geq 1$, we build the sequence of functions $(u_n^1)_{n\geq 0} \in V^1$ and $(u_n^2)_{n\geq 0} \in$

V^2, by solving the following problems:

$$(Q_n) \begin{cases} i) \text{ Find } \ u_n^2 \in V^2 \\ a^2(u_n^2,v) = F^2(v) + < g_{n-1}^2,v >_2 \quad \forall v \in V^2 \\ \\ ii) \text{ Find } \ u_n^1 \in V^{1^-}(u_{n,N}^2) \\ a^1(u_n^1,\omega + R_{_D}^1(\gamma u_n^2) - u_n^1) \geq F^1(\omega + R_{_D}^1(\gamma u_n^2) - u_n^1) \ \ \forall \omega \in V^{1^-}(0) \\ \\ iii) < g_n^2,v >_2 := \theta_n \left(-a^1(u_n^1,R_{_D}^1\gamma v) + F^1(R_{_D}^1\gamma v)\right) + (1-\theta_n) < g_{n-1}^2,v >_2 \ \forall v \in V^2. \end{cases} \tag{3.1}$$

The convergence of this algorithm towards the solution of (P_2),(P_3) and then of (3.2)-(3.5) is given by a two-step procedure. We prove first in proposition 3.3.1 that the convergence of $(g_n)_n$ in $V^{2'}$ induces the strong convergence of $(u_n^\alpha)_n$. Then in proposition 3.3.4, the contraction of an auxilary operator T_θ defined by (3.11) is gained. This induces the convergence of the sequence $(g_n)_n$ by way of theorem 3.3.5 for $0 < \theta < \theta^*$.

3.1 Introduction

Les problèmes de contact et d'impact représentent depuis longtemps une part significative en calcul des structures non linéaires. Nous proposons une méthode de décomposition naturelle de domaine qui consiste à adapter l'approche de sous-structuration "Dirichlet" [4] à un problème de contact sans frottement en gardant la décomposition physique du problème (contrairement à [1]). Notons que cette méthode a déjà fait l'objet de simulations numériques [2] et permet d'utiliser des opérateurs des discrétisations différents dans chacun des domaines.

On considère deux matériaux élastiques, occupant deux domaines $\overline{\Omega}^\alpha$, $\alpha = 1{,}2$, de $\mathbb{R}^2$, et susceptibles d'entrer en contact unilatéral sans frottement à travers une zone $\Gamma_c = \Gamma_c^1 = \Gamma_c^2$. Le problème étudié consiste à trouver les déplacements u^α et les contraintes $\sigma(u^\alpha)$ tels que :

$$\begin{cases} div\, \sigma(u^\alpha) + f^\alpha & = & 0 \quad \text{sur } \Omega^\alpha, \\ \sigma(u^\alpha)n^\alpha & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_l^\alpha, \\ u^\alpha & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_u^\alpha. \end{cases} \tag{3.2}$$

Γ_u^α,Γ_l^α,Γ_c^α forment une partition de la frontière $\Gamma^\alpha = \partial\Omega^\alpha$, avec $\Gamma_u^\alpha \neq \emptyset$. La force f^α est une donnée régulière. La loi de comportement élastique, avec les hypothèses habituelles de coercivité, est :

$$\sigma_{ij}(u^\alpha) = A_{ijkh}^\alpha e_{kh}(u^\alpha), \ \text{avec} \ \ e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T), \tag{3.3}$$

où A^α est le tenseur d'élasticité du corps élastique occupant le domaine $\overline{\Omega}^\alpha$.
On définit la composante normale du déplacement u^α et le déplacement normal relatif d'un solide par rapport à l'autre sur la zone de contact Γ_c par: $u_N^\alpha = u_i^\alpha n_i^\alpha \, et \, [u_N] = u^1.n^1 +$

$u^2.n^2$, où n^α est la normale unitaire extérieure à Ω^α. Les composantes normales et tangentielles du vecteur de contraintes σ^α sont définies, avec convention des indices répétés, par: $\sigma_N^\alpha = \sigma_{ij}(u^\alpha)n_i^\alpha n_j^\alpha \, et \, \sigma_T^\alpha = \sigma_{ij}(u^\alpha)n_j^\alpha - \sigma_N^\alpha n_i^\alpha$.
Les conditions sur Γ_c pour un contact unilatéral sans frottement sont:

$$\sigma_N^1 = \sigma_N^2 = \sigma_N, \qquad \sigma_T^1 = \sigma_T^2 = 0, \tag{3.4}$$

$$[u_N] \leq 0, \quad \sigma_N \leq 0, \quad \sigma_N[u_N] = 0. \tag{3.5}$$

3.2 Formulation multidomaine du problème de Signorini.

Pour obtenir la formulation multidomaine du problème (3.2)-(3.5), on introduit le cadre fonctionnel suivant :

$$\begin{aligned}
V^\alpha \quad &= \left\{v^\alpha \in (H^1(\Omega^\alpha))^2, \, v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_u^\alpha\right\}, \text{ muni de la norme } \|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_{(H^1(\Omega^\alpha))^2},\\
V \quad &= V^1 \times V^2, \text{ muni de la norme } \quad \|\cdot\|_V = \left(\sum_\alpha \|\cdot\|_\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}},\\
K \quad &= \{v \in V, [v_N] \leq 0 \; p.p. \text{ sur } \Gamma_c\},\\
\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) &= \left\{\varphi \in (L^2(\Gamma_c))^2; \; \exists v \in V^\alpha; \; \gamma v_{|\Gamma_c} = \varphi\right\}, \text{ muni de la norme}\\
&\qquad \|\varphi\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c} = \inf\left\{\|v\|_{V^\alpha}; v \in V^\alpha, \gamma v_{|\Gamma_c} = \varphi\right\},\\
H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) &= \left\{\varphi \in L^2(\Gamma_c); \; \exists v \in H^1(\Omega^\alpha); \; \gamma v_{|\Gamma_c} = \varphi\right\},
\end{aligned}$$

où γ signifie l'application trace pour les fonctions vectorielles dans la définition de $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$, et scalaires dans la définition de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$.
On note $V^{\alpha'}$ l'espace dual de V^α et $< \cdot, \cdot >_\alpha$ le produit de dualité entre ces deux espaces. La norme duale induite est définie par $\|\psi\|_{V^{\alpha'}} = \sup\limits_{v \in V^\alpha} \dfrac{< \psi, v >_\alpha}{\|v\|_\alpha}$.
On utilise les notations suivantes:
$a^\alpha(u,v) = \displaystyle\int_{\Omega^\alpha} A_{ijkl}^\alpha e_{ij}(u) e_{kl}(v)\, dx, \quad a(u,v) = \sum_{\alpha=1}^{2} a^\alpha(u,v),$
$F^\alpha(v) = \displaystyle\int_{\Omega^\alpha} f v \, dx$ et $F(v) = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{2} F^\alpha(v).$
Pour $\alpha = 1,2$, on définit le relèvement:

$$\begin{aligned}
R_D^\alpha : \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) \;&\longrightarrow\; V^\alpha\\
\varphi \;&\longrightarrow\; R_D^\alpha \varphi.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases}
a^\alpha(R_D^\alpha \varphi, v) = 0 & \forall v \in V^\alpha \text{ tel que } v_N = 0 \text{ sur } \Gamma_c\\
\gamma(R_D^\alpha \varphi) n^\alpha = \varphi n^\alpha & \text{sur } \Gamma_c,
\end{cases}$$

dont la formulation forte est:

$$\begin{cases} div\,\sigma^\alpha = 0 \ \text{ dans } \Omega^\alpha, & \text{avec } A\,e(R^\alpha_{D}\varphi) = \sigma^\alpha \\ \gamma(R^\alpha_{D}\varphi)n^\alpha = \varphi n^\alpha, \ \sigma^\alpha{}_T = 0 & \text{sur } \Gamma_c \\ \sigma^\alpha n^\alpha = 0 & \text{sur } \Gamma^\alpha_l \\ \gamma(R^\alpha_{D}\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma^\alpha_u. \end{cases} \tag{3.7}$$

Proposition 3.2.1 *$i)$ Les trois normes $\|\varphi_N\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}$ et $\|R^\alpha_{D}\varphi\|_\alpha$,$\alpha = 1{,}2$ sont équivalentes sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$.*
$ii)$ Il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall v \in V^i$ $\|R^j_{D}\gamma v_{|\Gamma_c}\|_j \leq C\|v\|_i$ $i{,}j = 1{,}2$ et $i \neq j$.
Preuve: Voir la preuve de la proposition 4.4.1.

Remarque 17 Afin de ne pas alourdir les notations, on écrit $R^\alpha_D(\gamma v)$ au lieu de $R^\alpha_D(\gamma v_{|\Gamma_c})$.

On introduit pour tout $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ l'ensemble:

$$V^{1^-}(\varphi) = \{v^1 \in V^1, \ v^1.n^1 \leq -\varphi \ \ p.p \text{ sur } \Gamma_c\}.$$

Proposition 3.2.2 *La formulation variationnelle (P_1) est équivalente aux deux problèmes suivants:*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u^2 \in V^2 \\ a^2(u^2,v) = F^2(v) - a^1(u^1,R^1_D(\gamma v)) + F^1(R^1_D(\gamma v)) \ \ \forall v \in V^2 \end{cases} \tag{P_2}$$

et

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u^1 \in V^{1^-}(u^2_N) \\ a^1(u^1,v - u^1) \geq F^1(v - u^1) \ \ \forall v \in V^{1^-}(u^2_N). \end{cases} \tag{P_3}$$

Preuve: L'implication $(P_1) \Longrightarrow (P_3)$ est immédiate. Pour montrer que (P_1) implique (P_2), on considère pour tout $v^2 \in V^2$ les fonctions admissibles $\tilde{v} = \pm(R^1_D(\gamma v^2),v^2)$, ce qui implique :

$$a(u,\tilde{v}) = F(\tilde{v})$$

d'où le résultat.
Inversement, soit $v = (v^1,v^2) \in K$, puisque $v^1.n^1 - (v^2 - u^2).n^1 \leq -u^2_N$ sur Γ_c, alors $w = v^1 - R^1_D\gamma(v^2 - u^2) \in V^{1^-}(u^2_N)$. On choisit w (resp. $v^2 - u^2$) comme fonction-test dans (P_3) (resp.dans (P_2)). Par addition, on trouve (P_1). ■

Remarque 18 L'espace des fonctions admissibles du problème variationnel (P_3) dépend de la trace de la solution du problème de Neumann (P_2). Pour avoir un espace fixe, on effectue une translation des fonctions admissibles $v^1 \in V^{1^-}(u^2_N)$: $w = v^1 - R^1_{D}(\gamma u^2)$. On obtient le problème $(P_3^{'})$ qui est équivalent au problème (P_3):

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u^1 \in V^{1^-}(u^2_N) \\ a^1(u^1,w + R^1_D(\gamma u^2) - u^1) \geq F^1(w + R^1_D(\gamma u^2) - u^1) \ \ \forall w \in V^{1^-}(0). \end{cases} \tag{$P_3^{'}$}$$

3.3 Algorithme et convergence.

On considère l'algorithme (Q_n) introduit dans (3.1) qui permet de construire des suites $(u_n^\alpha)_{n\geq 0} \in V^\alpha$, $\alpha = 1{,}2$, à l'aide d'un paramètre de relaxation θ_n et du relèvement R_D^1.

Remarque 19 Grâce à l'inégalité $ii)$ de la proposition 3.2.1, l'écriture $< g_n^2{,}v >_2$ dans (3.1) $iii)$ a bien un sens, i.e. $g_n^2 \in V^{2'}$.

Proposition 3.3.1 *On suppose qu'il existe un réel strictement positif θ_{min} tel que $\forall\ \theta_n \geq \theta_{min}$, la suite $(g_n^2)_{n\geq 0}$ converge dans $V^{2'}$. Alors $u_n^\alpha \longrightarrow u^\alpha$ dans V^α fortement.*

Preuve: Soient $(u_n^1{,}u_n^2)$ et $(u_m^1{,}u_m^2)$ les solutions des problèmes (Q_n) et (Q_m) respectivement, alors

$$a^1(u_n^1 - u_m^1{,}R_{_D}^1\gamma v) = -< g_{n-1}^2 - g_{m-1}^2{,}v >_2 - < \frac{g_n^2 - g_{n-1}^2}{\theta_n} - \frac{g_m^2 - g_{m-1}^2}{\theta_m}{,}v >_2 \ \ \forall v \in V^2,$$

en choisissant $v = R_{_D}^2\gamma(u_n^1 - u_m^1)$ et en vérifiant que $R_{_D}^1\gamma(R_{_D}^2\gamma(u_n^1 - u_m^1)) = u_n^1 - u_m^1$, l'inégalité précédente devient:

$$\|u_n^1 - u_m^1\|_1^2 \leq c\left(\|g_{n-1}^2 - g_{m-1}^2\|_{V^{2'}} + \|g_n^2 - g_{n-1}^2\|_{V^{2'}} + \|g_m^2 - g_{m-1}^2\|_{V^{2'}}\right)\|R_{_D}^2\gamma(u_n^1 - u_m^1)\|_2$$

en utilisant la proposition 3.2.1 $i)$, et la convergence forte de $(g_n^2)_{n\geq 0}$ dans $V^{2'}$, on obtient la convergence de $(u_n^1)_n$.

La convergence forte de $(u_n^2)_n$ s'obtient à partir de celle de $(g_n^2)_{n\geq 0}$, en utilisant la coercivité de $a^2(\cdot{,}\cdot)$.
Pour finir la démonstration, on passe à la limite dans les équations $ii)$ et $iii)$ du problème (Q_n). La limite de $(u_n^\alpha)_n$, $\alpha = 1{,}2$ apparaît comme l'unique solution du problème $(P_2){,}(P_3)$. ■

Afin de prouver la convergence de $(g_n^2)_n$, on introduit l'opérateur T défini par:

$$\begin{aligned} T:\ \ V^{2'} &\longrightarrow V^{2'} \\ \psi\ \ &\longmapsto T\psi \end{aligned} \tag{3.8}$$

tel que:

$$< T\psi{,}v >_2 = -a^1(w^1{,}R_{_D}^1\gamma v) + F^1(R_{_D}^1\gamma v)\ \forall v \in V^2,$$

où w^1 est la solution du problème d'obstacle suivant:

$$a^1(w^1{,}v - \omega^1) \geq F^1(v - w^1)\ \ \forall v \in V^{1-}(w_{_N}^2) \tag{3.9}$$

et w^2 est la solution dans V^2 du problème de Neumann:

$$a^2(w^2{,}v) = F^2(v) + < \psi{,}v >_2\ \ \forall v \in V^2. \tag{3.10}$$

On définit également l'opérateur T_θ par:

$$\begin{aligned} T_\theta : \ V^{2'} &\longrightarrow V^{2'} \\ \psi &\longmapsto T_\theta(\psi) = \theta T(\psi) + (1-\theta)\psi. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Proposition 3.3.2 *L'opérateur T est lipschitzien.*

Preuve: Soient ψ et $\tilde{\psi}$ dans $V^{2'}$, w^1 (resp.$\tilde{w}^1$) et w^2 (resp.$\tilde{w}^2$) les solutions correspondantes de (3.9) et (3.10).

la continuité de $a^1(\cdot,\cdot)$ et la proposition 3.2.1 $i)$ impliquent

$$| < T\psi - T\tilde{\psi}, v >_2| \ \leq \ C\|w^1 - \tilde{w}^1\|_1 \|v\|_2. \tag{3.12}$$

En posant $x^1 = w^1 - R^1_D(\gamma w^2)$ et $\tilde{x}^1 = \tilde{w}^1 - R^1_D(\gamma\tilde{w}^2)$, l'inégalité (3.9) devient

$$a^1(x^1 + R^1_{_D}(\gamma w^2), v - x^1) \geq F^1(v - x^1) \quad \forall v \in V^{1^-}(0) \tag{3.13}$$

$$(resp.) \quad a^1(\tilde{x}^1 + R^1_{_D}(\gamma\tilde{w}^2), v - \tilde{x}^1) \geq F^1(v - \tilde{x}^1) \quad \forall v \in V^{1^-}(0). \tag{3.14}$$

On choisit dans (3.13) $v = \tilde{x}^1$, et dans (3.14), $v = x^1$. En rassemblant les deux inégalités, il vient:

$$\|w^1 - \tilde{w}^1\|_1 \leq \frac{M+m}{m}\|R^1_{_D}(\gamma\tilde{w}^2 - \gamma w^2)\|_1 \tag{3.15}$$

où m et M sont respectivement les constantes de coercivité et de continuité de la forme bilinéaire $a^1(.,.)$. En utilisant la proposition 3.2.1 et le fait que $R^2_{_D}(\gamma\tilde{w}^2 - \gamma w^2) = w^2 - \tilde{w}^2$, l'inégalité (3.15) devient:

$$\|w^1 - \tilde{w}^1\|_1 \leq C\|w^2 - \tilde{w}^2\|_2. \tag{3.16}$$

D'après l'équation (3.10), on a:

$$a^2(w^2 - \tilde{w}^2, v) \ = \ < \psi - \tilde{\psi}, v >_2 \ ,$$

en choisissant $v = w^2 - \tilde{w}^2$ et en utilisant la coercivité de $a^2(\cdot,\cdot)$ et la continuité du produit de dualité $< \cdot,\cdot >_2$, on obtient

$$\|w^2 - \tilde{w}^2\|_2 \ \leq \ C\|\psi - \tilde{\psi}\|_{V^{2'}}. \tag{3.17}$$

De (3.12), (3.16) et (3.17), on déduit l'existence d'une constante C_T telle que:

$$\|T(\psi) - T(\tilde{\psi})\|_{V^{2'}} \leq C_T\|\psi - \tilde{\psi}\|_{V^{2'}}.$$

∎

On définit le relèvement suivant :

$$\begin{aligned} R^2 : \ V^{2'} &\longrightarrow V^2 \\ \psi &\longmapsto R^2\psi, \end{aligned}$$

où $R^2\psi$ est l'unique solution du problème:

$$a^2(R^2(\psi),v) = <\psi,v>_2 \ \ \forall v \in V^2. \tag{3.18}$$

On introduit la norme suivante sur $V^{2'}$:

$$|||\psi||| = \left(a^2(R^2\psi,R^2\psi)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.19}$$

Proposition 3.3.3 *Les normes $|||.|||$ et $||.||_{V^{2'}}$ sont équivalentes sur l'espace $V^{2'}$.*

Preuve: Il suffit d'utiliser la continuité et la coercivité de la forme bilinéaire $a^2(.,.)$, dans (3.18). ∎

Proposition 3.3.4 *Il existe θ^* tel que $\forall 0 < \theta < \theta^*$, T_θ est contractante.*

Preuve: Soient ψ et $\tilde{\psi}$ dans $V^{2'}$ alors:

$$\begin{aligned} |||T_\theta(\psi) - T_\theta(\tilde{\psi})|||^2 = \theta^2|||T(\psi) - T(\tilde{\psi})|||^2 + (1-\theta)^2|||\psi - \tilde{\psi}|||^2 + \\ 2\theta(1-\theta)a^2(R^2(T(\psi) - T(\tilde{\psi})),R^2(\psi - \tilde{\psi})). \end{aligned}$$

Montrons que: $\quad a^2(R^2(T(\psi) - T(\tilde{\psi})),R^2(\psi - \tilde{\psi})) \leq 0.$

En gardant les mêmes notations utilisées dans la démonstration de la proposition 3.3.2, et puisque
$R^2(\psi - \tilde{\psi}) = w^2 - \tilde{w}^2$, alors:

$$\begin{aligned} a^2\left(R^2(T(\psi) - T(\tilde{\psi})),R^2(\psi - \tilde{\psi})\right) &= a^2\left(R^2(T(\psi) - T(\tilde{\psi})),w^2 - \tilde{w}^2\right) \\ &= -a^1\left(w^1 - \tilde{w}^1,R^1_D\gamma(w^2 - \tilde{w}^2)\right) \\ &= -a^1\left(w^1,\tilde{w}^1 - R^1_D\gamma\tilde{w}^2 + R^1_D\gamma w^2 - w^1\right) - \\ &\quad\ a^1\left(\tilde{w}^1,w^1 - R^1_D\gamma w^2 + R^1_D\gamma\tilde{w}^2 - \tilde{w}^1\right) - \\ &\quad\ a^1(w^1 - \tilde{w}^1,w^1 - \tilde{w}^1). \end{aligned}$$

Le choix $v = \tilde{w}^1 - R^1_D\gamma\tilde{w}^2 + R^1_D\gamma w^2$ (resp. $v = w^1 - R^1_D\gamma w^2 + R^1_D\gamma\tilde{w}^2$) dans (3.9), (resp. dans (3.9) avec $\tilde{\psi}$), montre que les deux premiers termes à droite de l'équation précédente sont négatifs, d'où

$$a^2\left(R^2(T(\psi) - T(\tilde{\psi})),R^2(\psi - \tilde{\psi})\right) \leq -a^1(w^1 - \tilde{w}^1,w^1 - \tilde{w}^1) \leq 0.$$

Par conséquent

$$|||T_\theta(\psi) - T_\theta(\tilde{\psi})|||^2 \leq \theta^2|||T(\psi) - T(\tilde{\psi})|||^2 + (1-\theta)^2|||\psi - \tilde{\psi}|||^2.$$

De la proposition 3.3.2, et en étudiant la fonction $K(\theta) = \theta^2C_T^2 + (1-\theta)^2$, on montre que $\forall\theta \in]0,\theta^*[$, où $\theta^* = \min(1,\frac{2}{1+C_T^2})$, on a $0 < K(\theta) < 1$, d'où le résultat. ∎

Théorème 3.3.5 *Si $0 < \theta < \theta^*$ alors la suite $(g^2_n)_{n\geq 0}$ converge vers g^2 défini par:*

$$<g^2,v>_2 = -a^1(u^1,R^1_D(\gamma v)) + F^1(R^1_D(\gamma v)) \ \ \forall v \in V^2.$$

où (u^1,u^2) est la solution du problème (P_1).

Preuve : D'après l'algorithme (Q_n), il est facile de remarquer que $T_\theta(g_{n-1}^2) = g_n^2$. D'autre part, on déduit des problèmes (P_2) et (P_3) que $T_\theta(g^2) = g^2$. La proposition 3.3.4 permet de conclure. ■

Bibliographie

[1] ALART P., BARBOTEU M., LE TALLEC P., VIDRASCU M., *Méthode de Schwarz additive avec solveur grossier pour problèmes non-symétryque*, C. R. Acad. Sci, Paris, 331, I, 399-404, 2000.

[2] KRAUSE R.H., WOHLMUTH B.I., *Nonconforming domain decomposition techniques for linear elasticity*, East-West J.Numer.Math. 8 (2000), no. 3, 177.

[3] LIONS J.L., STAMPACCHIA G., *Variational inequalities*, Comm. Pure Applied Math., XX(1967), 493-519.

[4] MARINI L.D., QUARTERONI A., *A relaxation procedure for domain decomposition methods using finite elements*, Numer. Math. 55 (1989), no. 5, 575–598.

Chapitre 4

Natural domain decomposition algorithm for contact problems with friction

Abstract

In this chapter, we propose and prove the convergence of a Neumann-Dirichlet algorithm in order to approximate a Coulomb's contact problem between two elastic bodies. In our analysis, we retain the natural interface between the two bodies as a numerical interface for the domain decomposition and we extend the work of [11] to handle the contact problem with Coulomb's friction.

4.1 Introduction

Domain decomposition methods are usually characterised by artificially splitting a given domain where a partial differential equation has to be solved. Then, suitable iterations are performed in which a sequence of local problems are considered. Each of these local problems being defined in a subdomain with convenient boundary conditions. One of the potential interest of this approach is that the computation of solutions for the local problems required much less time than the solution for the initial problem and can be made simultaneously by using parallel computers. Moreover various discretizations or various kinds of solvers can be used to deal with each of the local problems. Several methods have been reviewed in [5], [8] and [12].

At first glance, multibody contact problems in elasticity appear to be a natural domain of application for domain decomposition methods. These types of problems involve the solution of local elasticity equations in each body. The contact laws will be satisfied by linking these different local solutions. Many numerical procedures have been proposed in engineering literature, especially, by facing the discretized aspect of the problem (see [6], [7]), however rigourous proof of the convergence is not given. The mathematical proof of the convergence exists only for the algorithms where the decomposition is artificial (see [1]). The main difficulty is the kind of boundary conditions for each of the local problems. The usual method for artificial boundaries is to introduce linear Dirichlet, Neumann or Fourier boundary conditions. However, in the natural decomposition algorithm, these conditions are highly non-linear, both in the normal direction (Signorini unilateral constraint) and in the tangential direction (non-differentiable Tresca or Coulomb law).
The aim of the present chapter is to prove the convergence of such an iteration procedure in its continuous version by application of the fixed point theorem. In some way it can be viewed as a generalisation of the results of [11] concerning the domain decomposition method for a linear elliptic problem.
This approach corresponds to a Neuman-Dirichlet iteration, in which the Dirichlet problem is replaced by a unilateral contact problem with friction. A fixed point relaxed procedure is defi-

ned for the stresses on the contact surface. The plan is as follows:
In section 2 and 3 we give a precise statement of the problem in both strong and weak formulations. An equivalent multibody formulation is introduced in section 4 . This allows us to define the algorithm which includes a relaxation parameter. We then prove, under some assumptions concerning the data, the convergence of the stresses on the contact surface, which in turn proves the convergence of the whole algorithm. In the last section, we present some preliminary numerical results asserting the efficiency of our algorithm.
The case of a pure Signorini problem (without friction) has been treated in the paper [2], for which no assumption is actually needed. In the same case, we can cite the work of [4], where the convergence of an iterative Contact-Neumann problem is proved.

4.2 Stating the problem

Let us consider two elastic bodies, occupying two bounded domains Ω^α, $\alpha = 1{,}2$, of the space $\mathbb{R}^2$. The boundary $\Gamma^\alpha = \partial\Omega^\alpha$ is assumed piecewise continuous, and composed of three complementary non empty parts Γ_u^α, Γ_l^α and Γ_c^α. Each body $\overline{\Omega}^\alpha$ is fixed on the part Γ_u^α of positive measure and it is subjected to surface traction forces $\phi^\alpha \in (L^2(\Gamma_l^\alpha))^2$. The body forces are denoted by $f^\alpha \in (L^2(\Omega^\alpha))^2$. In the initial configuration, both bodies have a common contact portion $\Gamma_c = \Gamma_c^1 = \Gamma_c^2$. In other words, we consider the case when contact zone cannot grow during the deformation process.Unilateral contact with non local Coulomb's friction can take place along the boundary Γ_c. The problem consists in finding the displacement field $u = (u^1{,}u^2)$ (where the notation u^α stands for $u|_{\Omega^\alpha}$) and the stress tensor field $\sigma = (\sigma(u^1){,}\sigma(u^2))$ such that: for $\alpha = 1{,}2$

$$\left\{\begin{array}{lcl} div\,\sigma(u^\alpha) + f^\alpha & = & 0 \quad \text{on } \Omega^\alpha, \\ \sigma(u^\alpha)n^\alpha & = & \phi^\alpha \quad \text{on } \Gamma_l^\alpha, \\ u^\alpha & = & 0 \quad \text{on } \Gamma_u^\alpha, \end{array}\right. \tag{4.1}$$

where the symbol div denotes the divergence operator of a tensor function and is defined as

$$div\,\sigma = \Big(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\Big)_i.$$

The summation convention of repeated indices is adopted. The elastic constitutive law, is given by Hooke's law for homogeneous and isotropic solid:

$$\sigma_{ij}(u^\alpha) = A^\alpha_{ijkh} e_{kh}(u^\alpha), \quad e(u^\alpha) = \frac{1}{2}(\nabla u^\alpha + \nabla u^{\alpha T}), \tag{4.2}$$

where $A^\alpha(x) = (a^\alpha_{ijkh}(x))_{1\le i,j,k,h\le 2} \in (L^\infty(\Omega^\alpha))^{16}$ is a fourth-order tensor satisfying the usual symmetry and ellipticity conditions in elasticity, and $e(u^\alpha)$ is the strain tensor.

We will use the usual notations for the normal and tangential components of the displacement and stress vector on Γ_c

$$u_N^\alpha = u_i^\alpha n_i^\alpha, \qquad {u_T}_i^\alpha = u_i^\alpha - u_N^\alpha n_i^\alpha$$
$$\sigma_N^\alpha = \sigma_{ij}(u^\alpha) n_i^\alpha n_j^\alpha, \qquad {\sigma_T}_i^\alpha = \sum_j \sigma_{ij}(u^\alpha) n_j^\alpha - \sigma_N^\alpha n_i^\alpha,$$

in which we have denoted by n^α the outward normal unit vector to the boundary.
On the interface Γ_c, the unilateral contact law is described by

$$\sigma_N^1 = \sigma_N^2 = \sigma_N, \qquad \sigma_T^1 = \sigma_T^2 = \sigma_T, \tag{4.3}$$

$$[u_N] \leq 0, \quad \sigma_N \leq 0, \quad \sigma_N [u_N] = 0, \tag{4.4}$$

where $[v_N] = v^1.n^1 + v^2.n^2$, is the jump through the interface of any function v defined on Ω^α.
The Coulomb's law with non-local friction is given by

$$\begin{cases} |\sigma_T| \leq k|S(\sigma_N)| \\ |\sigma_T| < k|S(\sigma_N)| \Longrightarrow [u_T] = o \\ |\sigma_T| = k|S(\sigma_N)| \Longrightarrow \exists \nu \geq 0 \quad [u_T] = -\nu\sigma_T. \end{cases} \tag{4.5}$$

where $k(x)$ is the coefficient of friction on the interface Γ_c:
$k(x) \in L^\infty(\Gamma_c)$, $k(x) \geq 0$ a.e. on Γ_c.
S is a regularisation operator from the dual of $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ into $L^2(\Gamma_c)$.

4.3 The variational formulation

Let us introduce the following functional spaces
For $\alpha = 1{,}2$

$$V^\alpha = \left\{ v^\alpha \in (H^1(\Omega^\alpha))^2, v^\alpha = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_u^\alpha \right\}, \text{ provided by the norm } \|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_{(H^1(\Omega^\alpha))^2},$$

$$V = V^1 \times V^2 \quad \text{provided by the norm} \quad \|\cdot\|_V = \left(\sum_{\alpha=1}^{2} \|\cdot\|_\alpha^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$
$$K = \{ v \in V, [v_N] \leq 0 \ a.e. \text{ on } \Gamma_c \},$$

$$\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) = \left\{ \varphi \in (L^2(\Gamma_c))^2;\ \exists v \in V^\alpha;\ \gamma v_{|\Gamma_c} = \varphi \right\}, \text{ provided by the norm}$$

$$\|\varphi\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c} = \inf\{ \|v\|_\alpha; v \in V^\alpha, \gamma v_{|\Gamma_c} = \varphi \},$$

where γ is the usual trace operator.

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) = \left\{\varphi \in L^2(\Gamma_c);\ \exists v \in H^1(\Omega^\alpha);\ \gamma v_{|\Gamma_c} = \varphi\right\}.$$

Let us denote by $V^{\alpha'}$ the dual space of V^α and by $< \cdot,\cdot >_\alpha$ the duality pairing of the two spaces. The dual norm is given by

$$\|\psi\|_{V^{\alpha'}} = \sup_{v \in V^\alpha} \frac{|< \psi,v >_\alpha|}{\|v\|_\alpha}.$$

We will denote by

$$a^\alpha(u,v) = \int_{\Omega^\alpha} A^\alpha_{ijkl} e_{ij}(u) e_{kl}(v)\, dx,$$

$$a(u,v) = \sum_{\alpha=1}^{2} a^\alpha(u,v),$$

$$L^\alpha(v) = \int_{\Omega^\alpha} f^\alpha v\, dx + \int_{\Gamma_c} \phi^\alpha v\, dx,$$

$$L(v) = \sum_{\alpha=1}^{2} L^\alpha(v).$$

The bilinear form $a^\alpha(.,.)$ is continuous and coercive as soon as $mes(\Gamma^\alpha_u) > 0$, so $a^\alpha(.,.)$ satisfies:

$$\begin{aligned} &\exists\, M^\alpha > 0, \quad |a^\alpha(u,v)| \leq M^\alpha \|u\|_\alpha \|v\|_\alpha, \qquad \forall u,v \in V^\alpha. \\ &\exists\, m^\alpha > 0, \quad a^\alpha(v,v) \geq m^\alpha \|v\|^2_\alpha \qquad\quad \forall v \in V^\alpha. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Let

$$M = \sum_{\alpha=1}^{2} M^\alpha, \qquad m = \min_{\alpha=1,2} m^\alpha, \tag{4.7}$$

so

$$\begin{aligned} &|a(u,v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V, \qquad \forall u,v \in V. \\ &a(v,v) \geq m \|v\|^2_V \qquad\quad \forall v \in V. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Proposition 4.3.1 *The variational formulation of problem (4.1)-(4.5)*

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \textit{Find} \quad u \in K \\ a(u,v-u) + \displaystyle\int_{\Gamma_c} k|S(\sigma_N)|(|\,[v_T]\,| - |\,[u_T]\,|) \geq L(v-u) \quad \forall v \in K, \end{array} \right. \tag{4.9}$$

has at least one solution and the solution is unique for a sufficiently small $|k|_{L^\infty(\Gamma_c)}$.

Proof:

The study of (4.9) and the relation between the weak formulation and the strong one, are well known (see [14]). ■

4.4 Multibody formulation

In the following, we will use some lift operators which allow us to build specific functions in Ω^α from their values on Γ_c.

For $\alpha = 1{,}2$, let

$$\begin{array}{rcl} R_{_D}^\alpha : \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) & \longrightarrow & V^\alpha \\ \varphi & \longrightarrow & R_{_D}^\alpha \varphi. \end{array} \tag{4.10}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} a^\alpha(R_{_D}^\alpha \varphi, v) = 0 & \forall v \in V^\alpha \text{ such that } \gamma v = 0 \text{ on } \Gamma_c \\ \gamma(R_{_D}^\alpha \varphi) = \varphi & \text{on } \Gamma_c, \end{array} \right.$$

whose strong formulation is given by

$$\left\{ \begin{array}{ll} div\, \sigma^\alpha = 0 \;\text{ in } \Omega^\alpha, & \text{with } A^\alpha\, e(R_{_D}^\alpha \varphi) = \sigma^\alpha \\ \gamma(R_{_D}^\alpha \varphi) = \varphi, & \text{on } \Gamma_c \\ \sigma^\alpha n^\alpha = 0 & \text{on } \Gamma_l^\alpha \\ \gamma(R_{_D}^\alpha \varphi) = 0 & \text{on } \Gamma_u^\alpha. \end{array} \right. \tag{4.11}$$

Proposition 4.4.1 *$i)$ The three norms $\|\varphi\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c}$ and $\|R_{_D}^\alpha \varphi\|_\alpha$,$\alpha = 1{,}2$ are equivalents for $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$.*
$ii)$ A constant $C > 0$ exists such that $\forall v \in V^i$ $\|R_{_D}^j \gamma v_{|\Gamma_c}\|_j \leq C\|v\|_i$ $i,j = 1{,}2$ and $i \neq j$.

Proof:

$i)$ Using the definition of R_D^α, we have

$$\gamma R_D^\alpha(\varphi) = \varphi,$$

so from the definition of $\|\cdot\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c}$, we gain

$$\|\varphi\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c} \leq \|R_{_D}^\alpha \varphi\|_1. \tag{4.12}$$

Conversely, we consider the range of $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ by $R_{_D}^\alpha$

$$W^\alpha = R_{_D}^\alpha \left(\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) \right).$$

As for any φ in $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$, problem (4.10) has a unique solution, and as the trace restriction on Γ_c of any function in W^α is unique, so the application $R_{_D}^\alpha$ is a bijection from $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ in W^α. Let us consider its inverse $R_{_D}^{\alpha\,-1}$. It is easy to prove that this last bijection is linear, and we can obtain its continuity from (4.12).

Moreover, as W^α is a closed sub-space of V^α which is a Banach space, so W^α is also a Banach one.

So, using the homeomorphism Banach theorem (see e.g.[10]), we obtain that $R_{_D}^\alpha$ is continuous from $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ in W^α, i.e.

$$\|R_{_D}^\alpha \varphi\|_1 \leq C\|\varphi\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c). \tag{4.13}$$

Consequently, the three norms $\|\varphi\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c}$ and $\|R_D^{\alpha}\varphi\|_{\alpha}$,$\alpha = 1,2$ are equivalents.
$ii)$ Let $v \in V^i$, using inequality (4.13) and the trace theorem, the result is achieved. ■

Remarque 20 For sake of simplicity, we will write $R_D^{\alpha}(\gamma v)$ in the following instead of $R_D^{\alpha}(\gamma v_{|\Gamma_c})$.

Let us introduce for all $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ the set:

$$V^{1-}(\varphi) = \{v^1 \in V^1,\ v^1.n^1 \leq -\varphi \ \ a.e \text{ on } \Gamma_c\}.$$

We are now able to give a multibody formulation of the initial problem.

Proposition 4.4.2 *The variational formulation (4.9) is equivalent to the following problems:*

$$(P_2)\left\{\begin{array}{l} \textit{Find } u^2 \in V^2 \\ a^2(u^2,v^2) = L^2(v^2) - a^1(u^1,R_D^1(\gamma v^2)) + L^1(R_D^1(\gamma v^2)) \quad \forall v^2 \in V^2 \end{array}\right. \tag{4.14}$$

and

$$(P_3)\left\{\begin{array}{l} \textit{Find } \ u^1 \in V^{1-}(u_N^2) \\ a^1(u^1,v^1-u^1) + \displaystyle\int_{\Gamma_c} k|S(\sigma_N)|\left(|v_T^1 - u_T^2| - |\,[u_T]\,|\right) \geq L^1(v^1-u^1) \quad \forall v^1 \in V^{1-}(u_N^2). \end{array}\right. \tag{4.15}$$

Proof:

Let $v = (v^1,u^2)$ such that $v^1 \in V^{1-}(u_N^2)$, so $v \in K$. We choose v as a test function in (P_1), then the implication $(P_1) \Longrightarrow (P_3)$ is obtained.
To show that (P_1) implies (P_2), let us consider for all $v^2 \in V^2$ the function $\tilde{v} = (R_D^1(\gamma v^2),v^2)$. From the definition of R_D^1 we obtain

$$[\tilde{v}_N] = 0 \qquad \text{and} \qquad [\tilde{v}_T] = 0,$$

so by choosing $\pm\tilde{v} + u$ as a test function in (P_1), we obtain

$$a(u,\tilde{v}) = L(\tilde{v}),$$

by replacing $\tilde{v}$ by its expression, the problem (P_2) is then gained.
Conversely, let $v = (v^1,v^2) \in K$, as $v^1.n^1 + (v^2 - u^2).n^2 = [v_N] - u_N^2 \leq -u_N^2$ on Γ_c, so $w = v^1 - R_D^1\gamma(v^2 - u^2) \in V^{1-}(u_N^2)$.
We choose w (resp. $v^2 - u^2$) as test function in (P_3) (resp. in (P_2)). By addition, we obtain (P_1).
■

Remarque 21 The strong formulation of problem (4.14) is

$$\left\{\begin{array}{ll} div\,\sigma^2 + f^2 = 0 & \textit{in } \ \Omega^2 \\ \sigma_N^1 = \sigma_N^2,\ \sigma_T^1 = \sigma_T^2 & \textit{on } \ \Gamma_c \\ \sigma^2 n^2 = \phi^2 & \textit{on } \ \Gamma_l^2 \\ u^2 = 0 & \textit{on } \ \Gamma_u^2. \end{array}\right.$$

and the one of problem (4.15) is

$$\begin{cases} div\,\sigma^1 + f^1 = 0 & in\ \ \Omega^1 \\ [u_N] \le 0 & on\ \ \Gamma_c \\ |\sigma^1_T| \le k|S(\sigma_N)| & on\ \ \Gamma_c \\ |\sigma^1_T| < k|S(\sigma_N)| \Longrightarrow [u_T] = 0 & \\ |\sigma^1_T| = k|S(\sigma_N)| \Longrightarrow \exists \nu \ge 0 \quad [u_T] = -\nu\sigma^1_T & \\ \sigma^1 n^1 = \phi^1 & on\ \ \Gamma^1_l \\ u^1 = 0 & on\ \ \Gamma^1_u. \end{cases}$$

Remarque 22 The test function space $V^{1-}(u^2_N)$ in the variational problem (P_3) is related to the trace of the solution of the Neumann problem (P_2). In order to obtain a fixed space, we make the following shift for the test function v^1: $w = v^1 - R^1_{\scriptscriptstyle D}(\gamma u^2)$. We obtain the problem $(P^{'}_3)$ which is equivalent to the problem (P_3):

$$(P^{'}_3)\begin{cases} \textit{Find}\ \ u^1 \in V^{1-}(u^2_N) \\ a^1(u^1,w + R^1_D(\gamma u^2) - u^1) + \displaystyle\int_{\Gamma_c} k|S(\sigma_N)|\,(|w_T| - |\,[u_T]\,|) \\ \qquad\qquad \ge L^1\left(w + R^1_D(\gamma u^2) - u^1\right) \ \ \forall w \in V^{1-}(0). \end{cases}$$

4.5 Algorithm and convergence

The multibody formulation allows us to define the following algorithm (Q_n) in which θ_n is a non-negative parameter that will be determined in order to ensure the convergence of the algorithm. Let $g^2_0 \in V^{2'}$ be given. For $n \ge 1$, we define the sequence of functions $(u^1_n)_{n\ge 0} \in V^1$ and $(u^2_n)_{n\ge 0} \in V^2$, by solving the following problems:

$$(Q_n)\begin{cases} i)\ \text{Find}\ \ u^2_n \in V^2 \\ a^2(u^2_n,v) = L^2(v) + < g^2_{n-1},v >_2 \ \ \forall v \in V^2 \\ \\ ii)\ \text{Find}\ \ u^1_n \in V^1(u^2_{n,N}) \\ a^1(u^1_n,\omega + R^1_{\scriptscriptstyle D}(\gamma u^2_n) - u^1_n) + \displaystyle\int_{\Gamma_c} k|S(\sigma_N(u^2_n))|\,(|w_T| - |\,[u_{n,T}]\,|) \\ \qquad\qquad\qquad \ge L^1(\omega + R^1_{\scriptscriptstyle D}(\gamma u^2_n) - u^1_n) \ \ \forall \omega \in V^{1-}(0) \\ \\ iii) < g^2_n,v >_2 := \theta_n\left(-a^1(u^1_n,R^1_{\scriptscriptstyle D}\gamma v) + L^1(R^1_{\scriptscriptstyle D}\gamma v)\right) + (1-\theta_n) < g^2_{n-1},v >_2 \ \forall v \in V^2. \end{cases} \tag{4.16}$$

Remarque 23 Using the inequality $ii)$ of the Proposition 4.4.1, the expression $< g^2_n,v >_2$ in (4.16) $iii)$ has a sense, i.e. $g^2_n \in V^{2'}$.

The convergence of the algorithm towards the solution of (P_2),(P_3) or its equivalent (P_2),$(P_3^{'})$ and then of (4.1)-(4.5) is given by a two-step procedure. We prove first in Proposition 4.5.1 that the convergence of $(g_n)_n$ in $V^{2'}$ induces the strong convergence of $(u_n^\alpha)_n$. Then in Proposition 4.5.5, the contraction of an auxiliary operator T_θ defined by (4.20) is obtained. This induces the convergence of the sequence $(g_n)_n$ by way of Theorem 4.5.6 for $0 < \theta < \theta^*$.

Remarque 24 In [11] the iteration process is defined for the trace on Γ_c in $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$. In our problem, displacement is discontinuous on Γ_c, only the stresses are continuous. This is why our algorithm is based upon stresses on Γ_c which are defined in the dual of V^2.

Proposition 4.5.1 *Let us suppose that θ_{min} exists such that $\forall\ \theta_n \geq \theta_{min}$, the sequence $(g_n^2)_{n\geq 0}$ converges in $V^{2'}$. Then the sequence (u_n^1,u_n^2) (strongly) converges in V to the solution (u^1,u^2) of (P_1).*

Proof:
Let (u_n^1,u_n^2) and (u_m^1,u_m^2) be solutions of the problems (Q_n) and (Q_m) respectively, so from (4.16)(iii) we have

$$a^1(u_n^1 - u_m^1,R_D^1\gamma v) = - < g_{n-1}^2 - g_{m-1}^2,v >_2 - < \frac{g_n^2 - g_{n-1}^2}{\theta_n} - \frac{g_m^2 - g_{m-1}^2}{\theta_m},v >_2 \ \ \forall v \in V^2.$$

The choice $v = R_D^2\gamma(u_n^1 - u_m^1)$ and the fact that $R_D^1\gamma(R_D^2\gamma(u_n^1 - u_m^1)) = u_n^1 - u_m^1$ in the previous inequality lead to:

$$\|u_n^1 - u_m^1\|_1^2 \leq c\left(\|g_{n-1}^2 - g_{m-1}^2\|_{V^{2'}} + \|g_n^2 - g_{n-1}^2\|_{V^{2'}} + \|g_m^2 - g_{m-1}^2\|_{V^{2'}}\right)\|R_D^2\gamma(u_n^1 - u_m^1)\|_2$$

using Proposition 4.4.1 i), and the strong convergence of $(g_n^2)_{n\geq 0}$ in $V^{2'}$, one obtains the convergence of $(u_n^1)_n$.

The strong convergence of $(u_n^2)_n$ can be obtained from the one of $(g_n^2)_{n\geq 0}$, by using the coercivness of $a^2(\cdot,\cdot)$.
At last, we pass to the limit in the equations $ii)$ and $iii)$ of the problem (Q_n). The limit of $(u_n^\alpha)_n$, $\alpha = 1,2$ appears to be the unique solution of problem $(P_2) - (P_3)$. ■.

In order to prove the convergence of $(g_n^2)_n$, let us introduce the operator T defined by:

$$\begin{aligned} T: \ V^{2'} &\longrightarrow V^{2'} \\ \psi &\longmapsto T\psi \end{aligned} \tag{4.17}$$

such that

$$< T\psi,v >_2 = -a^1(w^1,R_D^1\gamma v) + L^1(R_D^1\gamma v)\ \forall v \in V^2,$$

where w^1 is the solution of the following obstacle problem:

$$a^1(w^1,v-\omega^1)+\int_{\Gamma_c} k|S(\sigma_N(w^2))|\left(|v_T-w_T^2|-|w_T^1-w_T^2|\right)\geq L^1(v-w^1)\ \ \forall v\in V^{1-}(w_N^2) \tag{4.18}$$

and w^2 is the solution in V^2 of the Neumann problem:

$$a^2(w^2,v)=L^2(v)+<\psi,v>_2\ \ \forall v\in V^2. \tag{4.19}$$

We also define the operator T_θ by :

$$\begin{aligned} T_\theta :\ \ & V^{2'} && \longrightarrow V^{2'} \\ & \psi && \longmapsto T_\theta(\psi)=\theta T(\psi)+(1-\theta)\psi. \end{aligned} \tag{4.20}$$

We shall denote by

C_R : $\max\limits_{\alpha}$ of the constant of the continuity of R_D^α.

C_s : $\max\limits_{\alpha}$ of the constant of the continuity of the application $S(\sigma_N(\cdot))$ which to each w in V^α associates $S(\sigma_N(w))$ which is the regularization of $\sigma_N(w)$ in $L^2(\Gamma_c)$.

C_{tr} : $\max\limits_{\alpha}$ of the constant of the continuity of the following trace application:

$$\begin{array}{llll} Tr^\alpha : & V^\alpha & \longrightarrow & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) \\ & v & \longmapsto & v_T \end{array} \tag{4.21}$$

where v_T is the tangential component of v.

$C_K=\|k\|_{L^\infty(\Gamma_c)}C_sC_{tr}$, where k is the friction coefficient defined in (4.5).

Lemme 4.5.2 *Let w^1 and $\tilde{w}^1$ be solutions of the problems*

$$a^1(w^1,v-w^1)+\int_{\Gamma_c} k|S(\sigma_N(w^2))|\left(|v_T-w_T^2|-|[w_T]|\right)\geq L^1(v-w^1)\ \ \forall v\in V^{1-}(w_N^2) \tag{4.22}$$

$$a^1(\tilde{w}^1,v-\tilde{w}^1)+\int_{\Gamma_c} k|S(\sigma_N(\tilde{w}^2))|\left(|v_T-\tilde{w}_T^2|-|[\tilde{w}_T]|\right)\geq L^1(v-\tilde{w}^1)\ \ \forall v\in V^{1-}(\tilde{w}_N^2), \tag{4.23}$$

then the following estimate holds:

$$\|w^1-\tilde{w}^1\|_1\leq\left(\frac{2(MC_R+C_K)}{m}+\sqrt{\frac{C_K}{m}}\right)\|w^2-\tilde{w}^2\|_2. \tag{4.24}$$

Proof:
We choose $v=\tilde{w}^1-R_D^1(\tilde{w}^2)+R_D^1(w^2)$ in (4.22) and $v=w^1-R_D^1(w^2)+R_D^1(\tilde{w}^2)$ in (4.23). By adding both inequalities, we obtain

$$\begin{aligned} & a^1\left(w^1-\tilde{w}^1,w^1-\tilde{w}^1-R_D^1(w^2)+R_D^1(\tilde{w}^2)\right) \\ & \qquad\leq-\int_{\Gamma_c} k\left(|S(\sigma_N(w^2))|-|S(\sigma_N(\tilde{w}^2))|\right)(|\,[w_T]\,|-|\,[\tilde{w}_T]\,|). \end{aligned} \tag{4.25}$$

The continuity of the applications $S(\sigma_N(\cdot))$ and Tr induces

$$\begin{aligned} -\int_{\Gamma_c} k\left(|S(\sigma_N(w^2))| - |S(\sigma_N(\tilde{w}^2))|\right)(|[w_T]| - |[\tilde{w}_T]|) \\ \leq C_K\left(\|w^1-\tilde{w}^1\|_1\|w^2-\tilde{w}^2\|_2 + \|w^2-\tilde{w}^2\|_2^2\right). \end{aligned} \tag{4.26}$$

In equation (4.25), we use for the left hand side, the coercivness of $a^1(.,.)$, and for the right hand side, the continuity of the extension R_D^α and inequality (4.26) to obtain

$$m\|w^1-\tilde{w}^1\|_1^2 \leq (MC_R + C_K)\|w^1-\tilde{w}^1\|_1\|w^2-\tilde{w}^2\|_2 + C_K\|w^2-\tilde{w}^2\|_2^2, \tag{4.27}$$

hence

$$m\left(\|w^1-\tilde{w}^1\|_1 - \frac{MC_R+C_K}{2m}\|w^2-\tilde{w}^2\|_2\right)^2 \leq \left(\frac{(MC_R+C_K)^2}{4m} + C_K\right)\|w^2-\tilde{w}^2\|_2^2. \tag{4.28}$$

Then the required result is obtained.

Proposition 4.5.3 *The operator T is lipschitz continuous :*

$$\begin{aligned} \forall \psi,\tilde{\psi} \textit{ in } V^{2'} \qquad \|T\psi - T\tilde{\psi}\|_{V^{2'}} \leq C_T\|\psi-\tilde{\psi}\|_{V^{2'}}, \quad \textit{where} \\ C_T = \frac{MC_R}{m^2}\left(2(MC_R+C_K) + \sqrt{C_K m}\right). \end{aligned} \tag{4.29}$$

Proof:

Let ψ and $\tilde{\psi}$ in $V^{2'}$, w^1 (resp.$\tilde{w}^1$) and w^2 (resp.$\tilde{w}^2$) be the solutions of (4.18) and (4.19), so

$$< T\psi - T\tilde{\psi}, v >_2 = -a^1(w^1-\tilde{w}^1, R_D^1(\gamma v)) \qquad \forall v \in V^2. \tag{4.30}$$

From the continuity of $a^1(\cdot,\cdot)$ and the Proposition 4.4.1 $i)$, we get

$$\|T\psi - T\tilde{\psi}\|_{V^{2'}} \leq MC_R\|w^1-\tilde{w}^1\|_1. \tag{4.31}$$

According to (4.19), one has

$$\|w^2-\tilde{w}^2\|_2 \leq \frac{1}{m}\|\psi-\tilde{\psi}\|_{V^{2'}}. \tag{4.32}$$

From (4.31), (4.24) and (4.32), we get the existence of a constant C_T such that:

$$\|T(\psi) - T(\tilde{\psi})\|_{V^{2'}} \leq C_T\|\psi-\tilde{\psi}\|_{V^{2'}}.$$

■

Let us define the following operator R^2 :

$$\begin{aligned} R^2 : \ V^{2'} &\longrightarrow V^2 \\ \psi &\longmapsto R^2\psi \end{aligned}$$

where $R^2\psi$ is the unique solution in V^2, of the problem :

$$a^2(R^2(\psi),v) = <\psi,v>_2 \ \forall v \in V^2. \tag{4.33}$$

Let us consider the following norm in $V^{2'}$:

$$\|\psi\| = \left(a^2(R^2\psi,R^2\psi)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.34}$$

Proposition 4.5.4 *The norms* $\|.\|$ *and* $\|.\|_{V^{2'}}$ *are equivalent for the space* $V^{2'}$.

Proof:

Choosing $R^2(\psi)$ as a test function in (4.33), we have

$$\|\psi\|^2 \leq \|\psi\|_{V^{2'}} \|R^2(\psi)\|_2, \tag{4.35}$$

using the coercivness of $a^2(.,.)$, we get

$$\|\psi\| \leq \frac{1}{\sqrt{m}} \|\psi\|_{V^{2'}}. \tag{4.36}$$

Conversely, using the continuity of $a^2(.,.)$ in (4.33), we obtain

$$M\|R^2(\psi)\|_2 \geq \|\psi\|_{V^{2'}}. \tag{4.37}$$

Using the coercivness of $a^2(.,.)$ in the last inequality, we obtain

$$\frac{M}{\sqrt{m}}\|\psi\| \geq \|\psi\|_{V^{2'}}. \tag{4.38}$$

So the equivalence of the norms is then proved. ■

Proposition 4.5.5 *For sufficiently small* k, C_0, C_1 *with* $0 \leq C_0 < C_1 < 1$ *exist such that* T_θ *is a contraction in the norm* $\|\cdot\|$ *for* $\theta \in]C_0,C_1[/\{\frac{C_1}{2}\}$.

Proof:

Let ψ and $\tilde{\psi}$ in $V^{2'}$, w^1 (resp.$\tilde{w}^1$) and w^2 (resp.$\tilde{w}^2$) be the solutions of (4.18) and (4.19), so from the definition of T_θ we have

$$\begin{aligned}\|T_\theta(\psi) - T_\theta(\tilde{\psi})\|^2 = \theta^2\|T(\psi) - T(\tilde{\psi})\|^2 + (1-\theta)^2\|\psi - \tilde{\psi}\|^2 + \\ 2\theta(1-\theta)a^2(R^2(T(\psi) - T(\tilde{\psi})),R^2(\psi - \tilde{\psi})).\end{aligned} \tag{4.39}$$

To prove that the operator T_θ is a contraction, we give, in a first step, an estimate for the last term of the previous equation in term of $\|T(\psi) - T(\tilde{\psi})\|$ and $\|\psi - \tilde{\psi}\|$. In a second step, according to the sign of the coefficient of $\|T(\psi) - T(\tilde{\psi})\|$, we distinguish two cases which allow to conclude by using a simple algebric calculation and a condition for the friction coefficient.

1$^{\text{st}}$ step : From the uniqueness of the solution of (4.33), we get $R^2(\psi - \tilde{\psi}) = w^2 - \tilde{w}^2$ so

$$a^2\left(R^2(T(\psi) - T(\tilde{\psi})), R^2(\psi - \tilde{\psi})\right) = a^2\left(R^2(T(\psi) - T(\tilde{\psi})), w^2 - \tilde{w}^2\right), \tag{4.40}$$

using the definition (4.33) of R^2, we have

$$a^2\left(R^2(T(\psi) - T(\tilde{\psi})), w^2 - \tilde{w}^2\right) = \left\langle T\psi - T\tilde{\psi}, w^2 - \tilde{w}^2\right\rangle_2. \tag{4.41}$$

The definition (4.17) of T gives

$$\left\langle T\psi - T\tilde{\psi}, w^2 - \tilde{w}^2\right\rangle_2 = -a^1\left(w^1 - \tilde{w}^1, R^1_D\gamma(w^2 - \tilde{w}^2)\right). \tag{4.42}$$

From inequality (4.25), we obtain

$$\begin{aligned} -a^1\left(w^1 - \tilde{w}^1, R^1_D\gamma(w^2 - \tilde{w}^2)\right) \leq & -a^1\left(w^1 - \tilde{w}^1, w^1 - \tilde{w}^1\right) \\ & - \int_{\Gamma_c} k\left(|S(\sigma_N(w^2))| - |S(\sigma_N(\tilde{w}^2))|\right)(|\,[w_T]\,| - |\,[\tilde{w}_T]\,|). \end{aligned} \tag{4.43}$$

On the right-hand side, the first term will be estimated by using the coercivness of $a^1(.,.)$, the inequalities (4.31) and (4.36) :

$$-a^1\left(w^1 - \tilde{w}^1, w^1 - \tilde{w}^1\right) \leq -\frac{m^2}{M^2 C_R^2}\|T(\psi) - T(\tilde{\psi})\|^2, \tag{4.44}$$

for the second term, using the inequalities (4.24) (see lemma 4.5.2) and (4.32) in (4.26), we obtain

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_c} k\left(|S(\sigma_N(w^2))| - |S(\sigma_N(\tilde{w}^2))|\right)(|\,[w_T]\,| - |\,[\tilde{w}_T]\,|) \leq & \\ \frac{C_K}{m^2}\left(2(MC_R + C_K) + \sqrt{C_K m} + 1\right)\frac{M^2}{m}\|\psi - \tilde{\psi}\|^2. & \end{aligned}$$

By incorporating inequalities (4.41)-(4.45) in (4.40), we obtain

$$\begin{aligned} a^2\left(R^2(T(\psi) - T(\tilde{\psi})), R^2(\psi - \tilde{\psi})\right) \leq & -\frac{m^2}{M^2 C_R^2}\|T(\psi) - T(\tilde{\psi})\|^2 \\ & + \frac{C_K}{m^2}\left(2(MC_R + C_K) + \sqrt{C_K m} + 1\right)\frac{M^2}{m}\|\psi - \tilde{\psi}\|^2. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Incorporating (4.45) into (4.39), we get

$$\begin{aligned} \|T_\theta(\psi) - T_\theta(\tilde{\psi})\|^2 \leq & \left(\theta^2 - \frac{m^2 2\theta(1-\theta)}{M^2 C_R^2}\right)\|T(\psi) - T(\tilde{\psi})\|^2 + \\ & \left((1-\theta)^2 + 2\theta(1-\theta)\frac{C_K}{m^2}\left(2(MC_R + C_K) + \sqrt{C_K m} + 1\right)\frac{M^2}{m}\right)\|\psi - \tilde{\psi}\|^2. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Using (4.29), we get

$$\begin{aligned}\|T_\theta(\psi)-T_\theta(\tilde\psi)\|^2 \leq & \left(\theta^2-\frac{m^2 2\theta(1-\theta)}{M^2C_R^2}\right)\|T(\psi)-T(\tilde\psi)\|^2 \\ & +\left((1-\theta)^2+2\theta(1-\theta)\frac{M^2}{m}\left(\frac{C_KC_T}{MC_R}+\frac{C_K}{m^2}\right)\right)\|\psi-\tilde\psi\|^2.\end{aligned} \tag{4.47}$$

2nd step : Later on, it is convenient to write

$$\tilde m=\min\{m,1\}, \qquad \tilde M = M. \tag{4.48}$$

We immediately have

$$C_T\leq \tilde C_T=\frac{\tilde M C_R}{\tilde m^2}(2(\tilde M C_R+C_K)+\sqrt{C_K\tilde m}). \tag{4.49}$$

The inequality (4.47) becomes

$$\begin{aligned}\|T_\theta(\psi)-T_\theta(\tilde\psi)\|^2 \leq & \left(\theta^2-\frac{\tilde m^2 2\theta(1-\theta)}{\tilde M^2C_R^2}\right)\|T(\psi)-T(\tilde\psi)\|^2 \\ & +\left((1-\theta)^2+2\theta(1-\theta)\frac{\tilde M^2}{\tilde m}\left(\frac{C_K\tilde C_T}{\tilde MC_R}+\frac{C_K}{\tilde m^2}\right)\right)\|\psi-\tilde\psi\|^2.\end{aligned} \tag{4.50}$$

We distinguish two cases, according to the sign of the coefficient of $\|T(\psi)-T(\tilde\psi)\|^2$. In the first case, we use the Lipschitz continuity of the operator T, and in the second case,we have only to cancel it.

1st case :

$$\theta\geq C_0 \qquad \text{with} \qquad C_0=\frac{\dfrac{2\tilde m^2}{\tilde M^2C_R^2}}{1+\dfrac{2\tilde m^2}{\tilde M^2C_R^2}}. \tag{4.51}$$

In this case, $\theta^2-\dfrac{\tilde m^2 2\theta(1-\theta)}{\tilde M^2C_R^2}\geq 0$, so that the Proposition 4.5.3 implies

$$\left(\theta^2-\frac{\tilde m^2 2\theta(1-\theta)}{\tilde M^2C_R^2}\right)\|T(\psi)-T(\tilde\psi)\|^2\leq\left(\theta^2-\frac{\tilde m^2 2\theta(1-\theta)}{\tilde M^2C_R^2}\right)C_T^2\frac{\tilde M^2}{\tilde m^2}\|\psi-\tilde\psi\|^2. \tag{4.52}$$

Hence, the inequality (4.50) becomes

$$\|T_\theta(\psi)-T_\theta(\tilde\psi)\|^2\leq h_1(\theta)\|\psi-\tilde\psi\|^2, \tag{4.53}$$

where

$$\begin{aligned}h_1(\theta)&=\left(\theta^2-\frac{\tilde m^2 2\theta(1-\theta)}{\tilde M^2C_R^2}\right)C_T^2\frac{\tilde M^2}{\tilde m^2}+(1-\theta)^2+2\theta(1-\theta)\frac{\tilde M^2}{\tilde m}\left(\frac{C_K\tilde C_T}{\tilde MC_R}+\frac{C_K}{\tilde m^2}\right)\\ &=a\theta^2+b\theta+c,\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} a = & \tilde{C_T}^2 \frac{\tilde{M}^2}{\tilde{m}^2} + \frac{2\tilde{C_T}^2}{C_R^2} - 2\left(\frac{C_K\tilde{C_T}}{\tilde{M}C_R} + \frac{C_K}{\tilde{m}^2}\right)\frac{\tilde{M}^2}{\tilde{m}} + 1 \\ b = & \qquad -\frac{2\tilde{C_T}^2}{C_R^2} + 2\left(\frac{C_K\tilde{C_T}}{\tilde{M}C_R} + \frac{C_K}{\tilde{m}^2}\right)\frac{\tilde{M}^2}{\tilde{m}} - 2 \\ c = & 1. \end{aligned}$$

In the following, we prove first that a is positive and b is negative, so that, $h_1(\theta) < 1$ for any θ in $]0, -\frac{b}{a}[$. As θ is supposed be in $[C_0,1[$ (cf. (4.51)), then we prove under some conditions for the friction coefficient that $]0, -\frac{b}{a}[\cap[C_0,1[$ is not empty. This allows us to obtain an interval of θ such that T_θ is a contraction.

- From the definition of C_T, we have $\tilde{C_T} \geq \dfrac{2\tilde{M}C_RC_K}{\tilde{m}^2} + \dfrac{\tilde{M}C_R\sqrt{C_K\tilde{m}}}{\tilde{m}^2}$ so

$$\tilde{C}_T^2 \geq \frac{2\tilde{M}C_RC_K\tilde{C}_T}{\tilde{m}^2} + \frac{\tilde{M}^2C_R^2C_K}{\tilde{m}^3}.$$

Using (4.48), we get

$$\frac{\tilde{C}_T^2}{C_R^2} \geq \frac{2\tilde{M}C_K\tilde{C}_T}{\tilde{m}C_R} + \frac{\tilde{M}^2C_K}{\tilde{m}^3}.$$

So from the above expression of a, we get that a is strictly positive and b is strictly negative. (More precisely $a \geq 1$ and $b \leq -2$)

- Let

$$C_1 = -\frac{b}{a}. \tag{4.54}$$

So, as mentioned above, the contraction of T_θ is proved as soon as $\theta \in (]0,C_1[\}) \cap [C_0,1[$ if $C_0 < C_1$.

Using the expressions of a and b

$$C_0 < C_1 \Leftrightarrow -2\tilde{m}^2 - 2\tilde{M}^2C_R^2 + \frac{2\tilde{M}^2C_R^2}{\tilde{m}^3}g(C_K) < 0 \tag{4.55}$$

where

$$g(x) = 2M^2x^2 + \tilde{M}^2\sqrt{\tilde{m}}x^{\frac{3}{2}} + (2\tilde{M}^3C_R + \tilde{M}^2)x \quad \forall x \geq 0.$$

Using the fact that g increases strictly in $[0, +\infty[$, so the previous inequality is equivalent to

$$C_K \in [0,g^{-1}(\frac{\tilde{m}^5}{\tilde{M}^2C_R^2} + \tilde{m}^3)[.$$

<u>2nd case:</u>

If $\theta < C_0$, the inequality (4.47) becomes

$$\|T_\theta(\psi) - T_\theta(\tilde{\psi})\|^2 \leq \quad h_2(\theta)\|\psi - \tilde{\psi}\|^2, \tag{4.56}$$

where

$$h_2(\theta) = (1-\theta)^2 + 2\theta(1-\theta)\frac{M^2}{m}\left(\frac{C_K C_T}{MC_R} + \frac{C_K}{m^2}\right) \qquad (4.57)$$
$$= a^{'}\theta^2 + b^{'}\theta + 1,$$

with

$$a^{'} = 1 - 2\frac{M^2}{m}\left(\frac{C_K C_T}{MC_R} + \frac{C_K}{m^2}\right)$$
$$b^{'} = -2 + 2\frac{M^2}{m}\left(\frac{C_K C_T}{MC_R} + \frac{C_K}{m^2}\right).$$

We can see from (4.57) that h_2 is positive for all θ in $]0,1[$, moreover, using a simple algebric calculation, we obtain that if $a^{'}$ is postive, $0 < h_2(\theta) < 1$ $\forall\theta \in]0,1[$, and if not $0 < h_2(\theta) < 1$ $\forall\theta \in]-\frac{b^{'}}{a^{'}},1[$. As θ is supposed in $]0,C_0[$, we have to obtain $-\frac{b^{'}}{a^{'}} < C_0$.

Let us define

$$\mathcal{L}(x) = \frac{\tilde{M}^2}{\tilde{m}^3}(2x^2 + \sqrt{\tilde{m}}x^{\frac{3}{2}} + (1 + 2\tilde{M}C_R)x) \qquad \forall x \geq 0.$$

By a simple calculation, we get that $a^{'} > 0$ is equivalent to $C_K \in [0,\mathcal{L}^{-1}(1)]$ which implies that T_θ is a contraction for any θ in $]0,C_0[$.
$a^{'} < 0$ is equivalent to $C_K \in]\mathcal{L}^{-1}(1),\mathcal{L}^{-1}(\frac{2-C_0}{1-C_0})[$ which implies that T_θ is a contraction for any θ in $]\frac{\mathcal{L}(C_K)-1}{\mathcal{L}(C_K)-\frac{1}{2}},C_0[$. ■

Théorème 4.5.6 *For sufficiently small k, the sequence $(g_n^2)_{n\geq 0}$ converges in $V^{2'}$ towards g^2 defined by*

$$< g^2,v >_2 = -a^1(u^1,R_D^1(\gamma v)) + L^1(R_D^1(\gamma v)) \;\; \forall v \in V^2.$$

where (u^1,u^2) is the solution of the problem (P_1).
Moreover, for any initial $g_0^2 \in V^{2'}$, and $\forall\theta_{min} < \theta < \theta^*$, the solution $u_n^\alpha, \alpha = 1,2$ of the algorithm (Q_n) converges to the solution $u = (u^1,u^2)$ of the problem (P_1)(4.9) as n tends to infinity.

Proof :
From algorithm (Q_n), it is easy to prove that
$\left\langle Tg_{n-1}^2,v\right\rangle_2 = -a^1(u_n^1,R_D^1(\gamma v)) + L^1(R_D^1(\gamma v)) \quad \forall v \in V^2$, so $T_\theta(g_{n-1}^2) = g_n^2$.
On the other hand, one deduces from problems (P_2) and (P_3) that $T_\theta(g^2) = g^2$. Hence an application of Proposition 4.5.5 gives

$$\|g_n^2 - g^2\| = \|T_\theta(g_{n-1}^2) - T_\theta(g^2)\| \leq K(\theta)\|g_{n-1}^2 - g^2\|. \qquad (4.58)$$

The convergence of g_n^2 is obtained by a recursive application of (4.58). The Proposition 4.5.1 concludes the proof. ∎

Remarque 25 As a particular case, the Signorini problem in which $k = 0$, and in which only the unilateral contact is taken into account, corresponds to the application of Theorem 4.5.6.

4.6 Numerical results

The algorithm has been tested using the 2D finite element code PLAST2 developed in *Laboratoire de mecanique de contact (LaMCos) UMR 5514.*
Initially, this code solved problem (4.9) using global Lagrangian techniques, (see [3]), then a new version of PLAST2 has been developed by implementing the local domain decomposition algorithm (4.16).

4.6.1 Example test

For all experiments described below, a two dimensional linear elasticity problem of two elastic bodies initially in contact Ω^α, $\alpha = 1{,}2$ is considered. The elastic behavior law is given by Hooke's law for homogeneous isotropic elastic materials :

$$\sigma_{ij}^{\alpha}(u) = \frac{E_\alpha \nu_\alpha}{(1-2\nu_\alpha)(1+\nu_\alpha)}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}(u) + \frac{E_\alpha}{1+\nu_\alpha}\varepsilon_{ij}(u), \qquad \alpha = 1{,}2,$$

where E_α and ν_α denote Young's modulus and Poisson's ratio respectively for the body Ω^α, $\alpha = 1{,}2$, and the notation δ_{ij} stands for Kronecher's symbol.
The lower body Ω^1 is fixed on its lower side. The upper body Ω^2 is submitted to a vertical displacement of $-0.015mm$ on Γ_u^2 (see FIG. 4.1). Dimensions of Ω^1 and Ω^2 are respectively $2mm \times 0.3mm$ and $1.2mm \times 0.3mm$. Poisson's ratio is 0.3 for both solids, Young's modulus $E_1 = 7\,10^5\,MPa$ for the lower body and $E_2 = 2\,10^5\,MPa$ for the upper body are assumed.

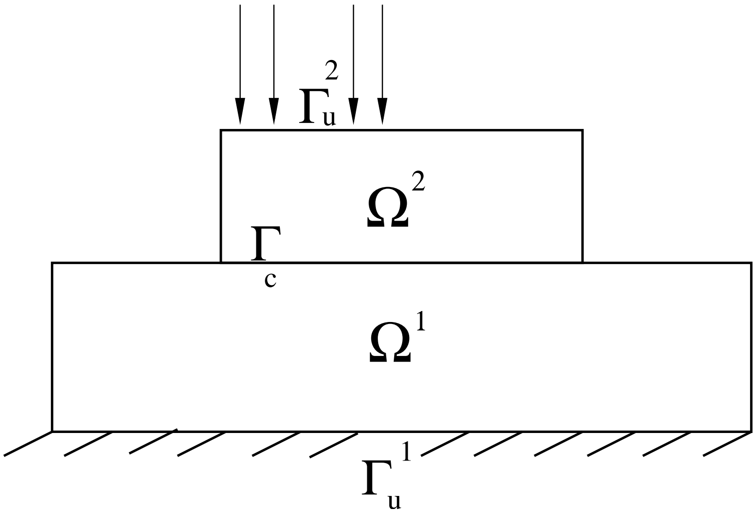


FIG. 4.1 – *The physical problem*

4.6.2 Comparison between global and domain decomposition methods

FIG. 4.2 and FIG. 4.3 depict the coordinates of the interface of the contact and the values of the normal and tangential constraints obtained by the global and the Neumann-Dirichlet methods. We use for both methods the same friction coefficient ($k = 0.2$) and the same mesh size (190 nodes). The results appear to be identical, so give confidence to the validity of the result.

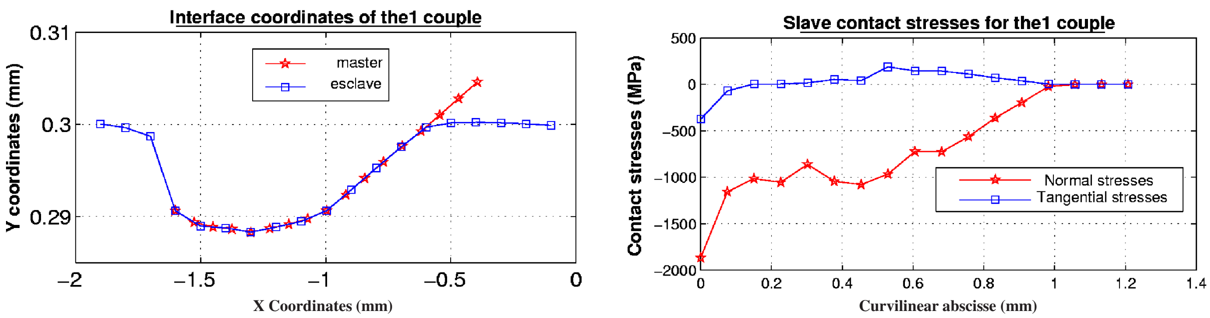


FIG. 4.2 – *Interface coordinates and contact stresses by the global method*

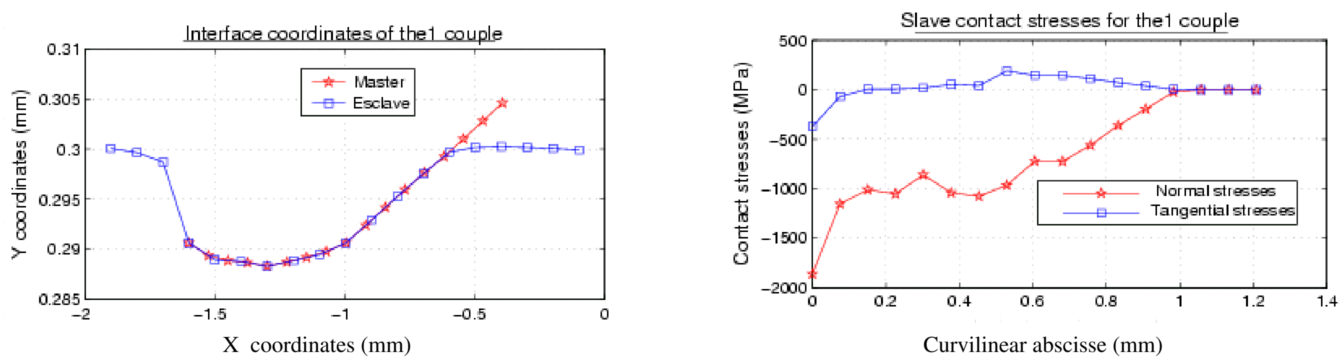


FIG. 4.3 – *Interface coordinates and contact stresses by the Neumann-Dirichlet method*

Note that by both methods the sticky nodes are located for $0 < x \leq 0.6$, the slippy ones for $0.6 < x < 1$, while the non contact area is located for $x > 1$ (see FIG. 4.4 and FIG. 4.5).

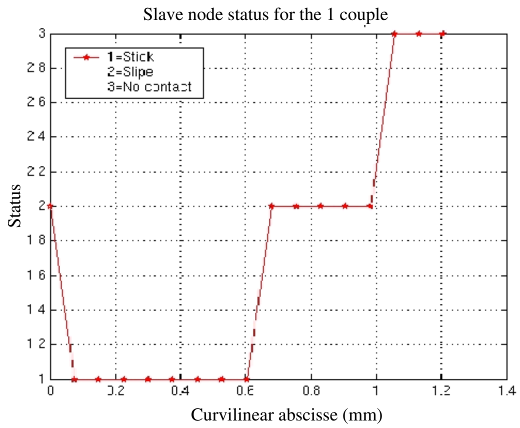


FIG. 4.4 – *Slave nodes status by the global method*

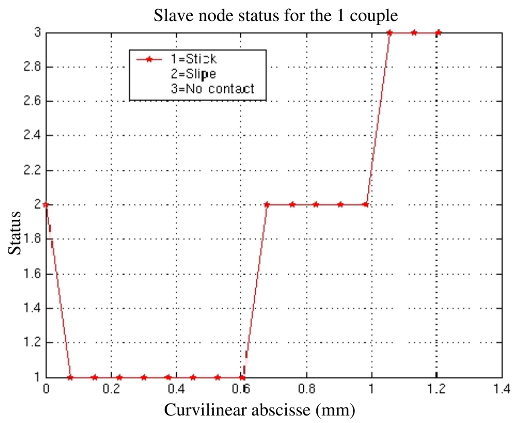


FIG. 4.5 – *Slave nodes status by the Neumann-Dirichlet method*

4.6.3 About the optimum relaxation parameter

• In FIG. 4.6, we give the number of iterations as a function of the parameter θ for various mesh size when the Coulomb's friction coefficient k is equal to 0.2. The mesh size varies according to the number of nodes, from 60 to 2482 nodes.

It clearly appears from the FIG. 4.6, that the optimum value is independent of the mesh size. The result is important as this will be sufficient to find the optimal parameter by solving small dimension problems first.

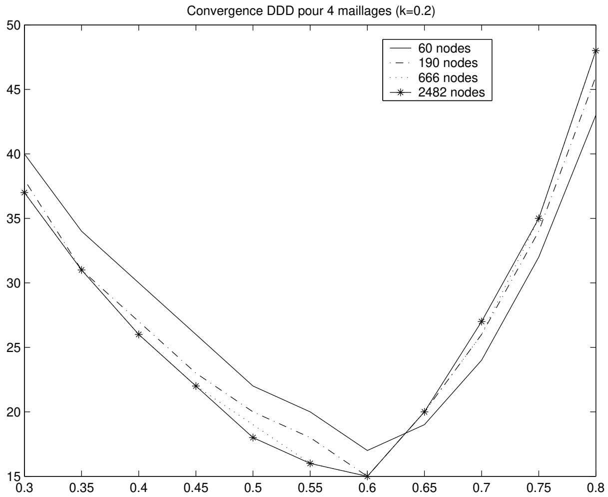


FIG. 4.6 – *Number of iterations as a function of the relaxation parameter θ, case:k=0.2*

• Changing the friction coefficient from $k = 0.2$ to $k = 0.4$ allows us to obtain the same kind of results (see FIG. 4.7). It is worth noting that the optimum parameter $\theta = 0.6$ is the same as for $k = 0.2$.

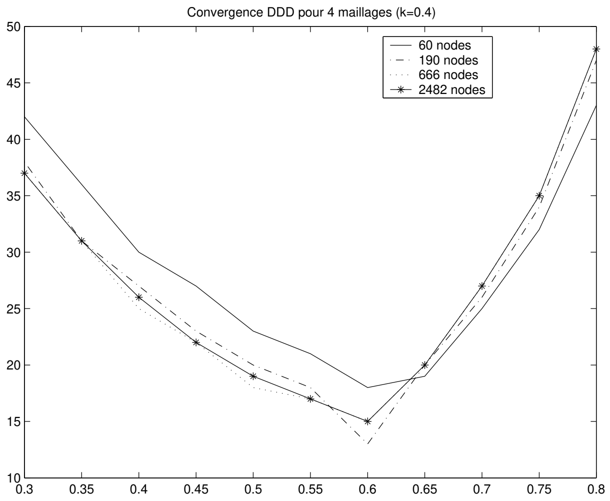


FIG. 4.7 – *Number of iterations as a function of the relaxation parameter θ, case:k=0.4*

Acknowledgements. *Special thanks to L. Baillet from Laboratoire LaMCos, UMR 5514, INSA de Lyon for his valuable help in the numerical part.*

Bibliographie

[1] ALART P., BARBOTEU M., LE TALLEC P., VIDRASCU M., *Méthode de Schwarz additive avec solveur grossier pour problèmes non-symétrique*, C. R. Acad. Sci, Paris, I, 331 (5), 399-404, 2000.

[2] BAYADA G., SABIL J., SASSI T., *Algorithme de Neumann-Dirichlet pour des problèmes de contact unilatéral : Résultat de convergence.*, C. R. Acad. Sci, Paris, I, 335 (4), 381-386, 2002.

[3] BAILLET L., SASSI T., *Simulations numériques de différentes méthodes d'éléments finis pour les problèmes contact avec frottement*, Rapport interne No 363, Laboratoire MAPLY, http://maply.univ-lyon1.fr/maply/indexframe.html, 2003.

[4] ECK C., WOHLMUTH B., *Convergence of a contact-Neumann iteration for the solution of two-body contact problems*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 13 (8), 1103-1118, 2003.

[5] FARHAT C., F.X. ROUX, *Implicit parallel processing in structural mechanics*, Computational Mechanics Advances, 1 (2), 1-124, 1994.

[6] KRAUSE R.H., WOHLMUTH B.I., *Nonconforming domain decomposition techniques for linear elasticity*, East-West J.Numer.Math., 8 (3), 177-206, 2000.

[7] LADEVÈSE P., LORONG P., *A large time increment approach with domain decomposition technique for mecanical non linear problems*, J. Comput. Meth. Appl. Sc. Engrg., 569-578, 1992.

[8] LE TALLEC P. , *Domain decomposition methods in computational mechanics*, Computational Mechanics Advances, 1 (2), 121-220, 1994.

[9] LIONS J.L., STAMPACCHIA G., *Variational inequalities*, Comm. Pure Applied Math., XX, 493-519, 1967.

[10] LUSTERNIK L., SOBOLEV V., *Précis d'analyse fonctionnelle*, MIR, Moscou, 1989.

[11] MARINI L.D., QUARTERONI A., *A relaxation procedure for domain decomposition methods using finite elements*, Numer. Math. 55 (5), 575-598, 1989.

[12] SMITH B., BJORSTAD P. GROPP W., *Domain Decomposition: parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations*, Cambridge University Press, 1996.

[13] TEMAM R., *Problèmes mathématiques en plasticité*, Gauthier-Villars, Paris, 1983.

[14] WRIGGERS P., PANAGIOTOPOULOS P., *New developments in contact problems* , Springer, 1999.

Chapitre 5

Parallel domain decomposition algorithm for Signorini problem [1]

1. *Ce chapitre est une version détaillée de la publication [9] citée dans l'introduction générale de cette deuxième partie.*

Abstract

In this chapter, we propose a Neumann-Neumann algorithm to approximate a frictionless static Signorini contact problem between two elastic bodies and we prove its convergence. The Neumann-Neumann algorithm is a paralell one, in which we have to solve a Dirichlet problem and then a Neumann one, simultaneously on each domain. The primary feature of this new algorithm is to retain the natural interface between the two bodies as a numerical interface for the domain decomposition.

Keywords: Domain decomposition methods, contact problems ...

5.1 Introduction

In the framework of domain decomposition methods for contact problem using the Neumann-Neumann preconditioner, the contact and the numerical interfaces are different [1]. In this chapter, a Neumann-Neumann algorithm for the frictionless static Signorini problem is proposed in which the contact zone and the decomposition interface are the same. The convergence of the algorithm is proved. The strategy consists in solving in parallel a Dirichlet problem on each domain for a given trace on the contact interface. Then using the solution of the previous problems, we solve in parallel a Neumann problem. The updating is given by adding the trace of the Dirichlet problem solution and the averaged trace of the Neumann one. The convergence of the algorithm towards the solution of the initial problem is given by a two-step procedure. We prove first, in Proposition 5.4.1 that the convergence of $(\lambda_n)_n$ in $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ induces the strong convergence of $(u_n^\alpha)_n$ and $(w_n^\alpha)_n$. Then, in Proposition 5.4.3, the contraction of an auxiliary operator T_θ defined by (5.34) is established. This yields the convergence of the sequence $(\lambda_n)_n$ by way of Theorem 5.4.4 for $0 < \theta < \theta^*$.
Let Ω^α, $\alpha = 1{,}2$, be two elastic bodies in contact through an interface Γ_c. Each body is fixed on a part Γ_u^α of its boundary $\partial\Omega^\alpha$, and subjected to body forces $f^\alpha \in (L^2(\Omega^\alpha))^2$ and surface traction ϕ_l^α on Γ_l^α. The problem consists in finding the displacement u^α and the stresses $\sigma(u^\alpha)$ such that

$$\left\{\begin{array}{lcl} div\,\sigma(u^\alpha) + f^\alpha & = & 0 \quad \text{on } \Omega^\alpha, \\ \sigma(u^\alpha)n^\alpha & = & \phi_l^\alpha \quad \text{on } \Gamma_l^\alpha, \\ u^\alpha & = & 0 \quad \text{on } \Gamma_u^\alpha. \end{array}\right. \tag{5.1}$$

Γ_u^α,Γ_l^α,Γ_c form a partition of the boundary $\Gamma^\alpha = \partial\Omega^\alpha$, where $\Gamma_u^\alpha \neq \emptyset$. The forces f^α and ϕ_l^α are regular data. With the usual coercivness hypothesis, the elastic behavior law is given by

$$\sigma_{ij}(u^\alpha) = A_{ijkh}^\alpha e_{kh}(u^\alpha), \quad e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T), \tag{5.2}$$

where A^α is the elasticity tensor of the elastic body occupying $\overline{\Omega}^\alpha$.
We will use the usual notations for the normal and tangential components of the displacement and stress vector on Γ_c

$$u_N^\alpha = u_i^\alpha n_i^\alpha, \qquad u_T^\alpha = u^\alpha - u_N^\alpha$$
$$\sigma_N^\alpha = \sigma_{ij}(u^\alpha)n_i^\alpha n_j^\alpha, \qquad \sigma_T^\alpha = \sigma_{ij}(u^\alpha)n_j^\alpha - \sigma_N^\alpha n_i^\alpha,$$

in which we have denoted by n^α the outward normal unit vector to the boundary.
On the interface Γ_c, the unilateral contact law is described by

$$\sigma_N^1 = \sigma_N^2 = \sigma_N, \qquad \sigma_T^1 = \sigma_T^2 = \sigma_T, \tag{5.3}$$

$$[u_N] \leq 0, \quad \sigma_N \leq 0, \quad \sigma_N.[u_N] = 0, \tag{5.4}$$

where $[v_N] = v^1.n^1 + v^2.n^2$, is the jump across the interface of any function v defined on Ω^α.
The contact is supposed frictionless, we have on Γ_c

$$\sigma_T = 0. \tag{5.5}$$

5.2 The variational formulation

Let us introduce the following functional spaces

$V^\alpha \quad = \left\{v^\alpha \in (H^1(\Omega^\alpha))^2,\ v = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_u^\alpha\right\}$, provided with the norm $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_{(H^1(\Omega^\alpha))^2}$.

$V \quad = V^1 \times V^2$ provided with the norm $\quad \|\cdot\|_V = \left(\sum_{\alpha=1}^{2} \|\cdot\|_\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

$K \quad = \{v \in V, [v_N] \leq 0\ a.e. \text{ on } \Gamma_c\}$.

$\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) = \left\{\varphi \in (L^2(\Gamma_c))^2;\ \exists v \in V^\alpha, \alpha = 1,2;\ \gamma v_{|\Gamma_c} = \varphi\right\}$, provided by the norm:

$\|\varphi\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c} = \inf\{\|v\|_\alpha; v \in V^\alpha, \alpha = 1,2, \gamma v_{|\Gamma_c} = \varphi\}$, where γ is the usual trace operator.

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) = \left\{\varphi \in L^2(\Gamma_c);\ \exists v \in H^1(\Omega^\alpha), \alpha = 1 \text{ or } 2;\ \gamma v_{|\Gamma_c} = \varphi\right\}$.

We will denote by

$$a^\alpha(u,v) = \int_{\Omega^\alpha} A_{ijkl}^\alpha e_{ij}(u) e_{kl}(v)\, dx, \quad a(u,v) = \sum_{\alpha=1}^{2} a^\alpha(u,v),$$

$$F^\alpha(v) = \int_{\Omega^\alpha} f^\alpha v\, dx + \int_{\Gamma_l^\alpha} \phi_l^\alpha v\, d\sigma, \quad F(v) = \sum_{\alpha=1}^{2} F^\alpha(v).$$

The bilinear forms $a^\alpha(.,.)$ are continuous and coercives since $mes(\Gamma_u^\alpha) > 0$.

Proposition 5.2.1 *The variational formulation of problem (5.1)-(5.5) is*

$$(P_1)\ \textit{Find} \quad u \in K; \qquad a(u, v - u) \geq F(v - u) \quad \forall v \in K, \tag{5.6}$$

and the problem has a unique solution.

Proof:
See [3]. ■

5.3 Multibody formulation

In the following, we will use lift operators allowing to build specific functions in Ω^α from their values on Γ_c.

For $\alpha = 1{,}2$, let

$$\begin{array}{rcl} R^\alpha_{D} : \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) & \longrightarrow & V^\alpha \\ \varphi & \longrightarrow & R^\alpha_{D}\varphi. \end{array} \tag{5.7}$$

$$\begin{cases} a^\alpha(R^\alpha_{D}\varphi, v) = 0 & \forall v \in \left(H^1(\Omega^\alpha)\right)^2 \text{ with } \gamma v = 0 \text{ on } \Gamma_c \cup \Gamma^\alpha_u \\ \gamma(R^\alpha_{D}\varphi) = \varphi & \text{on } \Gamma_c, \end{cases}$$

whose strong formulation is given by

$$\begin{cases} div\, \sigma^\alpha = 0 \text{ in } \Omega^\alpha, & \text{with } A^\alpha\, e(R^\alpha_{D}\varphi) = \sigma^\alpha \\ \gamma(R^\alpha_{D}\varphi) = \varphi, & \text{on } \Gamma_c \\ \sigma^\alpha n^\alpha = 0 & \text{on } \Gamma^\alpha_l \\ \gamma(R^\alpha_{D}\varphi) = 0 & \text{on } \Gamma^\alpha_u. \end{cases} \tag{5.8}$$

Proposition 5.3.1 $i)$ *The three norms* $\|\varphi\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c}$ *and* $\|R^\alpha_{D}\varphi\|_\alpha, \alpha = 1{,}2$ *are equivalents for* $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$.
$ii)$ *There exists a constant* $C > 0$ *such that* $\forall v \in V^i \ \ \|R^j_{D}\gamma v_{|\Gamma_c}\|_j \le C\|v\|_i \ \ i,j = 1{,}2$ *and* $i \neq j$.

Proof:
$i)$ Using the definition of R^α_D, we have

$$\gamma R^\alpha_D(\varphi) = \varphi,$$

so from the definition of $\|\cdot\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c}$, we gain

$$\|\varphi\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c} \le \|R^\alpha_{D}\varphi\|_1. \tag{5.9}$$

Conversely, we consider the range of $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ by R^α_{D}

$$W^\alpha = R^\alpha_{D}\left(\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)\right).$$

As for any $\varphi \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$, the problem (5.7) has a unique solution, and the trace restriction on Γ_c of any function in W^α is unique, then the application R^α_{D} is a bijection from $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ in W^α. Let us consider its inverse $R^{\alpha\,-1}_{D}$. It's easy to prove that this last bijection is linear, and we can get its continuity from (5.9).
Moreover, as W^α is a closed sub-space of V^α, and this one is a Banach space, then W^α is

Banach one.
So, using the homeomorphism Banach theorem (see e.g.[4]), we get that R_D^α is continuous from $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ in W^α, i.e.

$$\|R_D^\alpha \varphi\|_1 \leq C\|\varphi\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c). \tag{5.10}$$

Consequently, the three norms $\|\varphi\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c}$ and $\|R_D^\alpha \varphi\|_\alpha$,$\alpha = 1$,2 are equivalents.
$ii)$ Let $v \in V^i$, using inequality (5.10) and the trace theorem, the result is gained. ■

Remarque 26 For the sake of simplicity, we will write in the following $R_D^\alpha(\gamma v)$ *instead of* $R_D^\alpha(\gamma v_{|\Gamma_c})$.

To give a multibody formulation of the initial problem, let us introduce for all $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ the set:

$$V_-^2(\varphi) = \{v^2 \in V^2,\ v^2 n^2 \leq -\varphi \ \ a.e \text{ on } \Gamma_c\}.$$

Proposition 5.3.2 *1) The variational formulation (5.6) is equivalent to the following problems:*

$$(P_2)\begin{cases} \textit{Find } u^1 \in V^1 \\ a^1(u^1,v) = F^1(v) - a^2(u^2,R_D^2(v)) + F^2(R_D^2(v)) \ \ \forall v \in V^1 \end{cases} \tag{5.11}$$

and

$$(P_3)\begin{cases} \textit{Find } u^2 \in V_-^2(u_N^1) \\ a^2(u^2,v-u^2) \geq F^2(v-u^2) \ \ \forall v \in V_-^2(u_N^1). \end{cases} \tag{5.12}$$

Proof:
1) Let $v = (u^1,v^2)$ such that $v^2 \in V_-^2(u_N^1)$, so $v \in K$. We choose v as test function in (P_1), then the implication $(P_1) \Longrightarrow (P_3)$ is gained.
To show that (P_1) implies (P_2), let us consider for all $v^1 \in V^1$ the function $\tilde{v} = (v^1,R_D^2(\gamma v^1)$. From the definition of R_D^2 we have

$$[\tilde{v}_N] = 0 \qquad \text{and} \qquad [\tilde{v}_T] = 0,$$

so by choosing $\pm\tilde{v} + u$ as test function in (P_1), we obtain

$$a(u,\tilde{v}) = F(\tilde{v}),$$

by replacing $\tilde{v}$ by its expression, the problem (P_2) is then gained.
Conversely, let $v = (v^1,v^2) \in K$, as $v^2n^2 + v^1n^1 - u^1n^1 = [v_N] - u_N^1 \leq -u_N^1$ on Γ_c, so $w = v^2 - R_D^2\gamma(v^1 - u^1) \in V_-^2(u_N^1)$.
We choose w (resp. $v^1 - u^1$) as test function in (P_3) (resp. in (P_2)). By addition, we get (P_1).■

Remarque 27 In order to have a fixed test function space in (P_3)*, we make the following translation for the test function* v*:* $\tilde{v} = v - R^2_{_D}(\gamma u^1)$ *and we obtain the equivalent problem*

$$(P_3^{'}) \begin{cases} \textit{Find } \; u^2 \in V^2_-(u^1_N) \\ a^2(u^2,\tilde{v} + R^2_D(\gamma u^1) - u^2) \geq F^2\left(\tilde{v} + R^2_D(\gamma u^1) - u^2\right) \;\; \forall \tilde{v} \in V^2_-(0). \end{cases}$$

5.4 Algorithm and convergence

In the following, we define the Neumann-Neumann algorithm, in which θ_n is a non negative parameter that will be determined in order to ensure the convergence of the algorithm. Let $\lambda_0 \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ be given. For $n \geq 1$, we define the sequence of functions $(u^\alpha_n)_{n\geq 0} \in V^\alpha$ and $(w^\alpha_n)_{n\geq 0} \in V^\alpha$, $\alpha = 1{,}2$, by solving the following problems:

$$\begin{cases} \text{Find } \; u^1_n \in V^1 \\ a^1(u^1_n,v) = F^1(v) \;\; \forall v \in \left(H^1(\Omega^1)\right)^2 \text{ with } \gamma v = 0 \text{ on } \Gamma_c \cup \Gamma^1_u \\ \gamma u^1_n = \lambda_{n-1} \quad \text{ on } \Gamma_c \end{cases} \tag{5.13}$$

$$\begin{cases} \text{Find } \; u^2_n \in V^2_-(\lambda_{n-1} n^1) \\ a^2(u^2_n,v + R^2_{_D}(\lambda_{n-1}) - u^2_n) \geq F^2(v + R^2_{_D}(\lambda_{n-1}) - u^2_n) \;\; \forall v \in V^2_-(0) \end{cases} \tag{5.14}$$

$$\begin{cases} \text{Find } w^1_n \in V^1 \\ a^1(w^1_n,v) = \dfrac{1}{2}\left(-a^1(u^1_n,v) + F^1(v) - a^2(u^2_n,R^2_D(v)) + F^2(R^2_D(v))\right) \;\; \forall v \in V^1 \end{cases} \tag{5.15}$$

$$\begin{cases} \text{Find } w^2 \in V^2 \\ a^2(w^2_n,v) = \dfrac{1}{2}\left(a^2(u^2_n,v) - F^2(v) + a^1(u^1_n,R^1_D(v)) - F^1(R^1_D(v))\right) \;\; \forall v \in V^2 \end{cases} \tag{5.16}$$

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + \theta_n(\gamma w^1_n - \gamma w^2_n). \tag{5.17}$$

The convergence of the algorithm towards the solution of (P_2),(P_3) or equivalently (P_2),$(P_3^{'})$ then of (5.1)-(5.5) is given by a two-step procedure. We prove first in proposition 5.4.1 that the convergence of $(\lambda_n)_n$ in $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ induces the strong convergence of $(u^\alpha_n)_n$ and $(w^\alpha_n)_n$. Then in proposition 5.4.3, the contraction of an auxiliary operator T_θ defined by (5.34) is gained. This induces the convergence of the sequence $(\lambda_n)_n$ by way of theorem 5.4.4 for $0 < \theta < \theta^*$.

Proposition 5.4.1 *Let us suppose that a strictly positive* θ_{min} *exists such that* $\forall\ \theta_n \geq \theta_{min}$*, the sequence* $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ *converges in* $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$*. Then* $u^\alpha_n \longrightarrow u^\alpha$ *in* V^α *(strongly).*

Proof:
Let (u^1_n,u^2_n) and (u^1_m,u^2_m) be solutions of the problems (5.13)-(5.14) at iterations n and m,

respectively.
Using the definition (5.3) in (5.13), we have

$$R^1_{D}(\lambda_n - \lambda_m) = u^1_n - u^1_m.$$

Using the proposition 5.3.1 $i)$, we obtain

$$\|u^1_n - u^1_m\|_1 \leq c\|\lambda_n - \lambda_m\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c}.$$

As the sequence $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ converges in $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$, so the sequence $(u^1_n)_n$ converges strongly in V^1. In (5.14), the choices $v = u^2_m - R^2_{D}(\gamma u^1_m)$ and $v = u^2_n - R^2_{D}(\gamma u^1_n)$ at iterations n and m, respectively, lead to

$$a^2(u^2_n,u^2_m - R^2_{D}(\gamma u^1_m) + R^2_{D}(\gamma u^1_n) - u^2_n) \geq F^2(u^2_m - R^2_{D}(\gamma u^1_m) + R^2_{D}(\gamma u^1_n) - u^2_n)$$

$$a^2(u^2_m,u^2_n - R^2_{D}(\gamma u^1_n) + R^2_{D}(\gamma u^1_m) - u^2_m) \geq F^2(u^2_n - R^2_{D}(\gamma u^1_n) + R^2_{D}(\gamma u^1_m) - u^2_m).$$

By addition, we have

$$a^2(u^2_n - u^2_m,u^2_n - u^2_m) \leq a^2(u^2_n - u^2_m,R^2_{D}(\gamma u^1_n) - R^2_{D}(\gamma u^1_m)). \tag{5.18}$$

Using the coercivness, the continuity of the bilinear form $a^2(.,.)$ and the proposition 5.3.1, we obtain

$$\|u^2_n - u^2_m\|_2 \leq c\|u^1_n - u^1_m\|_1. \tag{5.19}$$

As $(u^1_n)_n$ converges strongly in V^1, then strong convergence of $(u^2_n)_n$ is obtained.
Let (w^1_n,w^2_n) and (w^1_m,w^2_m) be solutions of the problems (5.15)-(5.16) at iterations n and m, respectively. So

$$a^1(w^1_n - w^1_m,v) = \frac{1}{2}\left(-a^1(u^1_n - u^1_m,v) + a^2(u^2_n - u^2_m,R^2_{D}(\gamma v))\right) \quad \forall v \in V^1. \tag{5.20}$$

Choosing in this equation $v = w^1_n - w^1_m$, we have

$$a^1(w^1_n - w^1_m,w^1_n - w^1_m) = \frac{1}{2}\left(-a^1(u^1_n - u^1_m,w^1_n - w^1_m) + a^2(u^2_n - u^2_m,R^2_{D}(\gamma w^1_n - \gamma w^1_m))\right). \tag{5.21}$$

Using for the left-hand side the coercivness of the bilinear form $a^1(.,.)$, and for the right-hand side the continuity of the bilinear forms $a^\alpha(.,.)$, $\alpha = 1,2$, and Proposition 5.3.1, we obtain

$$\|w^1_n - w^1_m\|_1 \leq c\left(\|u^1_n - u^1_m\|_1 + \|u^2_n - u^2_m\|_2\right). \tag{5.22}$$

Using the convergence of $(u^1_n)_n$ and $(u^2_n)_n$, the convergence of $(w^1_n)_n$ is proved.
The convergence of $(w^2_n)_n$ is obtained by using the same method in (5.16).
Finally, by using the convergence of the sequences $(u^1_n)_n$, $(u^2_n)_n$, $(w^1_n)_n$ and $(w^2_n)_n$, we pass to

the limit in the equations (5.13)-(5.16). Moreover, as the sequence $(\lambda_n)_n$ converges $\forall\theta_n \geq \theta_{min}$, the continuity on Γ_c of the limit of $(\gamma w_n^\alpha)_n$ is obtained using (5.17).
Let $u^{\alpha *}$ and $w^{\alpha *}$ be the limits of $(u_n^\alpha)_n$ and $(w_n^\alpha)_n$, respectively. The limit problem obtained is given by

$$\begin{cases} \text{Find } \ u^{1*} \in V^1 \\ a^1(u^{1*},v) = F^1(v) \ \ \forall v \in \left(H^1(\Omega^1)\right)^2 \ \text{ with } v = 0 \text{ on } \Gamma_c \cup \Gamma_u^1 \\ \gamma u^{1*} = \lambda^* \quad \text{ on } \Gamma_c \end{cases} \tag{5.23}$$

$$\begin{cases} \text{Find } \ u^{2*} \in V_-^2(u_N^{1*}) \\ a^2(u^{2*},v + R_D^2(\gamma u^{1*}) - u^{2*}) \geq F^2(v + R_D^2(u^{1*}) - u^{2*}) \ \ \forall v \in V_-^2(0) \end{cases} \tag{5.24}$$

$$\begin{cases} \text{Find } w^{1*} \in V^1 \\ a^1(w^{1*},v) = \dfrac{1}{2}\left(-a^1(u^{1*},v) + F^1(v) - a^2(u^{2*},R_D^2(\gamma v)) + F^2(R_D^2(\gamma v))\right) \ \ \forall v \in V^1 \end{cases} \tag{5.25}$$

$$\begin{cases} \text{Find } w^{2*} \in V^2 \\ a^2(w^{2*},v) = \dfrac{1}{2}\left(a^2(u^{2*},v) - F^2(v) + a^1(u^{1*},R_D^1(\gamma v)) - F^1(R_D^1(\gamma v))\right) \ \ \forall v \in V^2 \end{cases} \tag{5.26}$$

$$\gamma w^{1*} = \gamma w^{2*} \quad \text{ on } \Gamma_c. \tag{5.27}$$

In (5.24), we choose as function test $\pm v - R_D^2(\gamma u^{1*}) + u^{2*}$ where $v \in \left(H^1(\Omega^2)\right)^2$ with $v = 0$ on $\Gamma_c \cup \Gamma_u^2$, so we have

$$a^2(u^{2*},v) = F^2(v) \ \ \forall v \in \left(H^1(\Omega^2)\right)^2 \ \text{ with } v = 0 \text{ on } \Gamma_c \cup \Gamma_u^2. \tag{5.28}$$

Using (5.28) and (5.23) in (5.26) and (5.25), we obtain

$$a^1(w^{1*},v) = 0 \quad \forall v \in \left(H^1(\Omega^1)\right)^2 \ \text{ with } v = 0 \text{ on } \Gamma_c \cup \Gamma_u^1 \tag{5.29}$$

$$a^2(w^{2*},v) = 0 \quad \forall v \in \left(H^1(\Omega^2)\right)^2 \ \text{ with } v = 0 \text{ on } \Gamma_c \cup \Gamma_u^2. \tag{5.30}$$

So using (5.27), we deduce

$$R_D^1(\gamma w^{2*}) = w^{1*} \quad \text{ and } \quad R_D^2(\gamma w^{1*}) = w^{2*}. \tag{5.31}$$

By choosing $v = w^{1*}$ in (5.25) and $v = w^{2*}$ in (5.26), we have

$$a^1(w^{1*},w^{1*}) = -a^2(w^{2*},w^{2*}), \tag{5.32}$$

So $w^{1*} = 0$ in V^1 and $w^{2*} = 0$ in V^2.
Hence, the problem (5.25) becomes

$$\begin{cases} \text{Find } \ u^{1*} \in V^1 \\ a^1(u^{1*},v) = F^1(v) - a^2(u^{2*},R_D^2(\gamma v)) + F^2(R_D^2(\gamma v)) \quad \forall v \in V^1. \end{cases} \tag{5.33}$$

We conclude from (5.33) and (5.24) that (u^{1*},u^{2*}) is the unique solution of (5.11)-(5.12). ■.

In order to prove the convergence of $(\lambda_n)_n$, let us introduce the operator T_θ defined by:

$$\begin{aligned} T_\theta :\ \ \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) &\longrightarrow \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) \\ \psi \quad &\longmapsto T_\theta\psi = \psi + \theta(\gamma w^1 - \gamma w^2) \end{aligned} \tag{5.34}$$

such that w^1 and w^2 are defined by solving the following problems

$$\begin{cases} \text{Find } \ u^1 \in V^1 \\ a^1(u^1,v) = F^1(v) \ \ \forall v \in \left(H^1(\Omega^1)\right)^2 \text{ with } \gamma v = 0 \text{ on } \Gamma_c \cup \Gamma_u^1 \\ \gamma u^1 = \psi \quad \text{ on } \Gamma_c \end{cases} \tag{5.35}$$

$$\begin{cases} \text{Find } \ u^2 \in V^2_-(\psi) \\ a^2(u^2,v + R^2_{_D}(\psi) - u^2) \geq F^2(v + R^2_{_D}(\psi) - u^2) \ \ \forall v \in V^2_-(0) \end{cases} \tag{5.36}$$

$$\begin{cases} \text{Find } w^1 \in V^1 \\ a^1(w^1,v) = \dfrac{1}{2}\left(-a^1(u^1,v) + F^1(v) - a^2(u^2,R^2_D(\gamma v)) + F^2(R^2_D(\gamma v))\right) \ \ \forall v \in V^1 \end{cases} \tag{5.37}$$

$$\begin{cases} \text{Find } w^2 \in V^2 \\ a^2(w^2,v) = \dfrac{1}{2}\left(a^2(u^2,v) - F^2(v) + a^1(u^1,R^1_D(\gamma v)) - F^1(R^1_D(\gamma v))\right) \ \ \forall v \in V^2. \end{cases} \tag{5.38}$$

For sake of simplicity, we define the operator T by :

$$\begin{aligned} T :\ \ \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) &\longrightarrow \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) \\ \psi \quad &\longmapsto T\psi = \gamma w^1 - \gamma w^2, \end{aligned} \tag{5.39}$$

so, we can write

$$T_\theta\psi = \psi + \theta T\psi.$$

In the following, we denote by $(5.\tilde{35})$,$(5.\tilde{36})$,$(5.\tilde{37})$ and $(5.\tilde{38})$ the corresponding problems to a given $\tilde{\psi} \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ and by $\tilde{u}^1$,$\tilde{u}^2$,$\tilde{w}^1$, and $\tilde{w}^2$ the corresponding solutions.

Proposition 5.4.2 *The operator T is Lipschitz continuous.*

Proof:
From the definition of T, we have for any $\psi,\tilde{\psi} \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$

$$\|T\psi - T\tilde{\psi}\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c} \leq \|\gamma w^1 - \gamma\tilde{w}^1\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c} + \|\gamma w^2 - \gamma\tilde{w}^2\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c}. \tag{5.40}$$

The problems (5.13)-(5.16) and (5.35)-(5.38) are similar because we have only to use ψ instead of λ_{n-1}. So the following inequality holds

$$\|w^\alpha - \tilde{w}^\alpha\|_1 \leq c\|\psi - \tilde{\psi}\|_{\frac{1}{2},\Gamma_c} \qquad \alpha = 1,2.$$

Using those inequalities and the continuity of the trace operator in (5.40), we obtain the required result. ■.

Let us consider the following norm in $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$:

$$\|\psi\| = \left(a^1(R^1_{_D}\psi,R^1_{_D}\psi)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.41}$$

The equivalence of the norms $\|.\|$ and $||.||_{\frac{1}{2},\Gamma_c}$ is proved in Proposition 5.3.1.

Proposition 5.4.3 *There exists $\theta^* > 0$ such that, $\forall\theta \in]0,\theta^*[$, the operator T_θ is a contraction.*

Proof :

Let ψ and $\tilde{\psi}$ in $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$, so

$$\|T_\theta(\psi) - T_\theta(\tilde{\psi})\|^2 = \|\psi - \tilde{\psi}\|^2 + \theta^2\|T\psi - T\tilde{\psi}\| + 2\theta a^1(R^1_{_D}(T\psi - T\tilde{\psi}),R^1_{_D}(\psi - \tilde{\psi})). \tag{5.42}$$

At first, let us simplify the last term in (5.42). Using (5.35) and the definition of the extension $R^1_{_D}$, we have

$$R^1_{_D}(\psi - \tilde{\psi}) = u^1 - \tilde{u}^1 \tag{5.43}$$

and using (5.37)

$$R^1_{_D}(\gamma w^1 - \gamma\tilde{w}^1) = w^1 - \tilde{w}^1, \tag{5.44}$$

so

$$R^1_{_D}(T\psi - T\tilde{\psi}) = (w^1 - \tilde{w}^1) - R^1_{_D}(\gamma w^2 - \gamma\tilde{w}^2). \tag{5.45}$$

Using $v = R^1_{_D}(\psi - \tilde{\psi})$ as a test function in the substracted equations (5.37)-($\tilde{5.37}$), we obtain

$$a^1(R^1_{_D}(T\psi - T\tilde{\psi}),R^1_{_D}(\psi - \tilde{\psi})) = a^1(w^1 - \tilde{w}^1,u^1 - \tilde{u}^1) - a^1(R^1_{_D}(\gamma w^2 - \gamma\tilde{w}^2),u^1 - \tilde{u}^1). \tag{5.46}$$

The choice $v = u^1 - \tilde{u}^1$ in the substracted equations (5.37)-($\tilde{5.37}$) implies

$$a^1(w^1 - \tilde{w}^1,u^1 - \tilde{u}^1) = \frac{1}{2}\left(-a^1(u^1 - \tilde{u}^1,u^1 - \tilde{u}^1) - a^2(u^2 - \tilde{u}^2,R^2_{_D}(\gamma u^1 - \gamma\tilde{u}^1))\right). \tag{5.47}$$

Using (5.18), we have

$$-a^2(u^2 - \tilde{u}^2,R^2_{_D}(\gamma u^1 - \gamma\tilde{u}^1) \leq -a^2(u^2 - \tilde{u}^2,u^2 - \tilde{u}^2). \tag{5.48}$$

So (5.47) becomes

$$a^1(w^1 - \tilde{w}^1,u^1 - \tilde{u}^1) \leq -\frac{1}{2}\left(\|\psi - \tilde{\psi}^2\| + a^2(u^2 - \tilde{u}^2,u^2 - \tilde{u}^2)\right). \tag{5.49}$$

On the other hand, the choice $v = w^2 - \tilde{w}^2$ in the substracted equations (5.38)-($\tilde{5.38}$) implies

$$a^2(w^2 - \tilde{w}^2,w^2 - \tilde{w}^2) = \frac{1}{2}\left(a^2(u^2 - \tilde{u}^2,w^2 - \tilde{w}^2) + a^1(u^1 - \tilde{u}^1,R^1_{_D}(\gamma w^2 - \gamma\tilde{w}^2))\right). \tag{5.50}$$

Putting (5.49) and (5.50) in (5.46), we obtain

$$
\begin{aligned}
a^1(R^1_{D}(T\psi - T\tilde{\psi}),R^1_{D}(\psi - \tilde{\psi})) \quad \leq \quad & \frac{1}{2}\left(-\|\psi - \tilde{\psi}^2\| - a^2(u^2 - \tilde{u}^2,u^2 - \tilde{u}^2)\right) - \\
& 2a^2(w^2 - \tilde{w}^2,w^2 - \tilde{w}^2) + a^2(u^2 - \tilde{u}^2,w^2 - \tilde{w}^2). \qquad (5.51)
\end{aligned}
$$

By factorization, the term $-\frac{1}{2}a^2(u^2-\tilde{u}^2,u^2-\tilde{u}^2)-2a^2(w^2-\tilde{w}^2,w^2-\tilde{w}^2)+a^2(u^2-\tilde{u}^2,w^2-\tilde{w}^2)$ is negative so

$$
a^1(R^1_{D}(T\psi - T\tilde{\psi}),R^1_{D}(\psi - \tilde{\psi})) \leq -\frac{1}{2}\|\psi - \tilde{\psi}\|^2. \qquad (5.52)
$$

Putting (5.52) in the inequality (5.42), and using the fact that the operator T is Lipschitzian, we have

$$
\|T_\theta(\psi) - T_\theta(\tilde{\psi})\|^2 \leq (\theta^2 C_T^2 - \theta + 1)\|\psi - \tilde{\psi}\|^2. \qquad (5.53)
$$

Let $\theta^* = min(1,\frac{1}{2C_T^2})$, the operator T_θ is a contraction $\forall\theta \in]0,\theta^*[$. ■

As θ^* is strictly positive, we can find a θ_{min} such that $0 < \theta_{min} < \theta^*$ and we have the following result:

Théorème 5.4.4 *$\forall\theta \in]0,\theta^*[$, the sequence $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ converges in $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ towards γu^1, where u^1 is the restriction on Ω^1 of the solution of the initial problem. Moreover, for any initial guess $\lambda_0 \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$, and $\forall\theta_{min} < \theta < \theta^*$, the solution $u_n^\alpha, \alpha = 1,2$ of the algorithm (5.13)-(5.17) converges to the solution $u = (u^1,u^2)$ of the problem (P_1)(5.6) when n tends to infinity.*

Proof :
From the algorithm (5.13)-(5.17), it is easy to prove that $T_\theta(\lambda_{n-1}) = \lambda_n$. On the other hand, one deduces from problems (P_2) and (P_3) that $T_\theta(\gamma u^1) = \gamma u^1$. Hence an application of Proposition 5.4.3 gives

$$
\|\lambda_n - \gamma u^1\| = \|T_\theta(\lambda_{n-1}) - T_\theta(\gamma u^1)\| \leq (\theta^2 C_T^2 - \theta + 1)\|\lambda_{n-1} - \gamma u^1\|. \qquad (5.54)
$$

The convergence of λ_n is obtained by a recursive application of (5.54). Proposition 5.4.1 concludes the proof. ■

Bibliographie

[1] P. Alart, M. Barboteu , P. Le Tallec, M. Vidrascu, *Additive Schwarz method for nonsymmetric problems: application to frictional multicontact problems*, Thirteenth International Conference on Domain Decomposition Methods, Lyon, 2000.

[2] G. Bayada, J. Sabil, T. Sassi , *Algorithme de Décomposition de Domaine Pour un Problème de Signorini sans Frottement*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 335 (4), 381-386, 2002.

[3] G. Fichera, *Existence theorems in elasticity*, in Handbuch der Physik, Band VIa/2, 347-389, Springer, Berlin, 1972.

[4] LUSTERNIK L., SOBOLEV V., *Précis d'analyse fonctionnelle*, MIR, Moscou, 1989.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons développé dans la **première partie** une modélisation mathématique pour l'approximation d'un problème à couche mince où interviennent le contact et le frottement.

Nous avons considéré un corps élastique en contact avec un solide revêtu d'un revêtement mince en régime quasistatique où le contact est avec frottement de type Coulomb. En adaptant des travaux antérieurs à notre problème à couche mince, nous avons établi un théorème d'existence sous des conditions faisant intervenir le coefficient de frottement, les paramètres physiques (λ^-, μ^-) et géométriques (l, L_1) de la couche mince.

Sous ces conditions, nous avons établi une nouvelle loi limite de contact pour un cas que nous avons appelé cas critique. Cette loi est de type compliance normale et la loi de frottement est donnée sous forme d'un couplage de σ_T^*, u_T^* et $\dot{\sigma}_T^*$ par : "Si la contrainte tangentielle n'atteint pas le seuil, alors sa dérivée par rapport au temps et la vitesse tangentielle sont reliées linéairement (i.e. $\dot{u}_T^{*+} + \dfrac{bL_2}{2\mu^+}\dot{\sigma}_T^* = 0$), sinon la composante tangentielle des contraintes est proportionnelle à $\dot{u}_T^{*+} + \dfrac{bL_2}{2\mu^+}\dot{\sigma}_T^*$".

Nous avons ensuite déterminé, à partir de ce cas critique, différents comportements limites : soit rigoureusement, si les conditions mentionnées ci-dessus le permettent, ou formellement sinon.

Nous avons présenté en annexe des résultats numériques qui valident les résultats théoriques que nous avons démontrés.

Dans **la deuxième partie**, nous nous sommes intéressés aux méthodes de décomposition naturelle de domaine pour des problèmes de contact. Celle-ci consiste à choisir la zone de contact comme interface de décomposition numérique.

Nous avons commencé par un problème de contact sans frottement entre deux corps élastiques. L'algorithme proposé consiste à résoudre, à partir d'une contrainte donnée sur l'interface, un problème de Neumann linéaire sur un corps, puis à résoudre en utilisant la trace de la solution obtenue un second problème de contact (avec obstacle) sur l'autre corps.

Dans le chapitre suivant, nous avons généralisé cette approche au cas d'un contact avec frottement de type Coulomb. La convergence est démontrée pour des coefficients de frottement petits. Nous avons ensuite présenté des résultats numériques qui valident la convergence de cet algorithme.

Dans le dernier chapitre, nous avons proposé et démontré la convergence d'un nouvel algorithme "Neumann-Neumann" parallélisable pour un problème de contact sans frottement. Cet algorithme consiste à résoudre simultanément, à partir d'un déplacement donné sur l'interface, un problème de Dirichlet sur l'un des deux domaines et un problème de contact avec un obstacle sur l'autre domaine. Et puis, à partir des traces des contraintes des solutions obtenues, on résout simultanément un problème supplémentaire de Neumann sur chaque domaine.

La généralisation de ce dernier algorithme pour un problème de contact avec frottement de Coulomb est en cours. Il apparaît nécessaire d'étudier l'efficacité et la performance de cet algorithme et le comparer avec celui du type “Neumann-Dirichlet” d’une part et avec les méthodes de décomposition globale d’autre part. Il serait intéressant d’étendre ces méthodes pour des structures multicorps (plusieurs zones de contact) et aussi pour un cadre quasistatique.