



HAL
open science

Réduction de variance et discrétisation d'équations différentielles stochastiques. Théorèmes limites presque sûre pour les martingales quasi-continues à gauche.

Ahmed Kebaier

► **To cite this version:**

Ahmed Kebaier. Réduction de variance et discrétisation d'équations différentielles stochastiques. Théorèmes limites presque sûre pour les martingales quasi-continues à gauche.. Mathématiques [math]. Université de Marne la Vallée, 2005. Français. NNT: . tel-00011947

HAL Id: tel-00011947

<https://theses.hal.science/tel-00011947>

Submitted on 14 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Marne-La-Vallée
Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées
CNRS UMR 8050

THESE

présentée
pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

de l'Université de Marne-La-Vallée

par
Ahmed KEBAIER

**Réduction de variance et discrétisation
d'équations différentielles stochastiques.**

**Théorèmes limites presque sûres pour les
martingales quasi-continues à gauche.**

soutenue le 13 Décembre 2005

devant le jury composé des professeurs :

Vlad Bally	Directeur de thèse
Faouzi Chaabane	Co-Directeur de thèse
Jean Jacod	Examineur
Damien Lambertson	Directeur de thèse
Philip Protter	Rapporteur
Denis Talay	Rapporteur

*À mes anges gardiens Mohamed, Najoua
É mon cœur Yasser*

Remerciements

Les premières lignes de cette page s'adressent à tout ceux qui ont contribué de près ou de loin à mener à bien cette thèse.

J'adresse toute ma gratitude aux Professeurs Vlad Bally & Damien Lamberton qui ont dirigé ma thèse avec une attention constante. Chacun d'eux mérite un remerciement particulier. Merci à Damien Lamberton pour avoir accepté de diriger cette thèse avec beaucoup de disponibilité. De ses larges connaissances scientifiques, de sa rigueur et de son sens pédagogique j'ai beaucoup appris. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude pour son aide, tous ses précieux conseils et sa grande générosité. Merci à Vlad Bally pour avoir accepté d'encadrer mon stage de DEA à l'école des ponts et chaussées et pour m'avoir renouvelé sa confiance en acceptant de diriger cette thèse. Sa compétence, sa clairvoyance m'ont beaucoup appris. Je tiens à le remercier pour son soutien constant et pour sa grande gentillesse.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au Professeur Faouzi Chaabane pour m'avoir épaulé dès ma maîtrise à la faculté des sciences de Bizerte et avoir accepté de co-diriger cette thèse. Sa compétence, son charisme et son dynamisme m'ont beaucoup appris. Je tiens à le remercier pour tout ce qu'il a fait pour moi ainsi que pour l'amour fraternel qu'il me porte.

Je désire exprimer ma gratitude aux Professeurs Philip Protter & Denis Talay pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant la charge d'être rapporteurs de ma thèse. Leurs travaux étaient indispensables pour mener à bien cette thèse, je suis très honoré et touché de leur présence dans le jury.

Je suis également très honoré que le Professeur Jean Jacod ait accepté de participer à mon

jury. Je le remercie du fond du cœur pour l'intérêt qu'il a porté pour ce travail.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude au Professeur et ami Arturo Kohatsu-Higa pour le temps qu'il m'a consacré à me faire part de son expérience et de ses larges connaissances scientifiques et de mener à bien cette thèse. Durant l'année qu'il a passé en tant que directeur de recherche à l'INRIA au sein du groupe mathfi il a su créer une ambiance exceptionnelle et génératrice d'inspirations. Je le remercie pour son aide et pour les délicieux dîners qu'on a partagés ensemble.

Je tiens à remercier le Professeur Gilles Pagès pour l'intérêt qu'il a porté pour mon travail. Séduit par la qualité de son cours de DEA en probabilités numériques, je décide de me consacrer à ce fascinant et passionnant domaine de recherche. Je le remercie du fond du cœur. Je suis redevable au Professeur Bernard Lapeyre pour m'avoir accueilli au laboratoire CERMICS à l'école des ponts et chaussées durant mon stage de DEA pour son soutien constant durant les premières années de cette thèse et pour sa générosité humaine. Je tiens à remercier Les Professeurs Marie Duflo & Abderrahmane Touati pour les encouragements et le soutien qu'ils m'ont prodigués durant cette thèse. Merci énormément.

Merci à l'équipe du laboratoire d'analyse et mathématiques appliquées de l'université de Marne-La-Vallée ainsi qu'à l'équipe de statistiques et processus de l'université du Maine. Je ne pourrais jamais oublier les doctorants avec qui j'ai partagé des moments de bonheur et de complicité, je pense à Bouhari Arouna, Marie Pierre Bavouzet, Etienne Chevalier, Margot Desgrouas, Ahmed El hajj, Mathieu Faure, Yousra Gati, Benoît Jottreau, Vincent Lemaire, Stéphane Menozzi, Marouane Messaoud, Mohamed Mikou, Nicola Moreni et Imen Rached.

Mes pensées se tournent vers mes parents Mohamed, Najoua & mon frère Yasser je les remercie tous pour leur soutien moral et affectif. Leur soutien quotidien, malgré qu'ils soient de l'autre côté de la Méditerranée, a été et sera pour moi un propulseur pour aller de l'avant. Un grand merci pour mon grand père Amor pour la sagesse de ses directives et conseils. Merci aussi à mes tantes et mes oncles pour le grand amour qu'ils me portent. Je ne peux oublier la famille Dridi qui m'a accueilli en France comme un fils. Un grand merci pour sa générosité. Merci à la famille Bouraoui pour son soutien.

Avant-Propos

Cette Thèse est composée de deux parties portant respectivement sur la discrétisation des équations différentielles stochastiques et sur le théorème de la limite centrale presque sûre pour les martingales.

La première Partie est composée de trois chapitres : Le chapitre 1 introduit le cadre de l'étude et présente les résultats obtenus. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'une nouvelle méthode d'accélération de convergence, appelée méthode de *Romberg statistique*, pour le calcul d'espérances de fonctions ou de fonctionnelles d'une diffusion. Ce chapitre est la version augmentée d'un article à paraître dans la revue *Annals of Applied Probability* (voir Kebaier (2005)). Le troisième chapitre traite de l'application de cette méthode à l'approximation de densité par des méthodes de noyaux. Ce chapitre est basé sur un travail en collaboration avec Arturo Kohatsu-Higa.

La deuxième partie de la thèse est composée de deux chapitres : le premier chapitre présente la littérature récente concernant le théorème de la limite centrale presque sûre et ses extensions. Le deuxième chapitre, basé sur un travail en collaboration avec Faouzi Chaâbane, étend divers résultats de type TLCPS à des martingales quasi-continues à gauche.

Table des matières

I Réduction de variance et discrétisation d'équations différentielles stochastiques	13
1 Introduction	15
1.1 Schéma d'Euler et erreur de discrétisation	16
1.1.1 Convergence faible du schéma d'Euler et erreur de discrétisation . .	17
1.1.2 Approximation de fonctionnelles de la trajectoire de X	19
1.2 Méthode de Monte Carlo et erreur statistique	20
1.3 La méthode de Romberg statistique	21
2 Variance reduction by Romberg's method	25
2.1 Introduction	25
2.2 On the discretization error of the Euler scheme	28
2.2.1 Stable convergence and the Euler scheme error	29
2.2.2 The discretization error	31
2.3 The Statistical Romberg method	33
2.3.1 The Euler scheme and the statistical Romberg method	35
2.3.2 Central limit theorem	36
2.3.3 Complexity analysis	39
2.4 Statistical Romberg method and Asian options	40
2.4.1 Trapezoidal scheme	41
2.4.2 Stable convergence of the trapezoidal scheme error	42
2.4.3 Statistical Romberg method and C.L.T	45

2.4.4	Complexity Analysis	48
2.5	Numerical tests and results	49
2.5.1	Statistical Romberg method for pricing Asian options	53
2.5.2	Conclusion	58
3	Estimation de la densité d'une diffusion non dégénérée	61
3.1	Introduction	61
3.2	Calcul de Malliavin	63
3.2.1	Formules de dualité et d'intégration par parties	64
3.2.2	Une extension de la formule d'intégration par parties	66
3.3	Erreur faible pour l'approximation de la densité d'une diffusion non-dégénérée	78
3.4	Approximations des densités de diffusions non-dégénérées par Monte Carlo	95
3.5	Convergence en loi de la dérivée de l'erreur normalisée	99
3.5.1	Equation du processus d'erreur	100
3.5.2	Dérivée du processus d'erreur	102
3.5.3	Un théorème de convergence en loi pour la dérivée du processus d'erreur normalisé	103
3.6	Une nouvelle variable de contrôle pour l'estimation des densités	114
3.6.1	Résultats Numériques	125
II	Théorèmes limites presque sûres pour les martingales quasi- continues à gauche	127
4	Introduction	129
4.1	Cadre général	129
4.2	Résultats relatifs aux martingales unidimensionnelles (discrètes ou continues)	131
4.3	Résultats relatifs aux martingales vectorielles discrètes	132
4.4	Estimation de la variance d'un P.A.I.S.	133

5	Théorèmes Limites Avec Poids Pour Les Martingales Vectorielles à Temps Continu	135
5.1	Préliminaires	135
5.2	Énoncé des principaux résultats	136
5.2.1	Théorème de la limite centrale presque-sûre généralisé.	137
5.2.2	Lois fortes quadratiques associées au TLCPS	138
5.2.3	Vitesses de convergence de la LFQ (cas d'une normalisation matricielle)	139
5.2.4	Théorème de la limite centrale logarithmique (cas d'une normalisation scalaire)	140
5.3	Démonstration des principaux résultats	141
5.3.1	Preuve du Théorème 5.2.1	142
5.3.2	Preuve du Théorème 5.2.2	149
5.3.3	Preuve du Théorème 5.2.3.	153
5.3.4	Preuve du Théorème 5.2.4	160
5.3.5	Preuve des Théorèmes 5.2.5.	161
5.4	Application : Estimation de la variance d'un P.A.I.S. pondéré	162
5.5	Annexe	163
5.5.1	Preuve du Lemme 5.3.3	163
5.5.2	Preuve de la Proposition 5.4.1	165

Première partie

Réduction de variance et discrétisation d'équations différentielles stochastiques

Chapitre 1

Introduction

Évaluer des espérances de fonctions de diffusions multidimensionnelles X_T telles que

$$\mathbb{E}f(X_T)$$

est devenu un enjeu de grande envergure dans différents domaines. En particulier, en finance, de telles quantités représentent les prix de certaines options¹ sur le marché. Pouvoir calculer les prix de ces options n'est pas toujours immédiat. En pratique, pour évaluer $\mathbb{E}f(X_T)$ on est souvent ramené à discrétiser la diffusion par un schéma d'approximation X_T^n (où n représente le nombre de pas de temps de la discrétisation) puis à approcher $\mathbb{E}f(X_T^n)$ par une méthode de Monte Carlo. Utiliser une méthode probabiliste plutôt qu'une méthode EDP ² permet de résoudre le problème en grande dimension, ou lorsque l'opérateur associé à l'équation aux dérivées partielles est dégénéré. Cependant, en optant pour une méthode Monte Carlo, on doit tenir compte de deux types d'erreurs :

- une erreur de discrétisation donnée par $\mathbb{E}f(X_T^n) - \mathbb{E}f(X_T)$,

¹Une option d'achat ou de vente est un contrat donnant le droit à son acquéreur d'acheter ou de vendre un bien financier à un prix et à une date fixés au préalable.

²L'espérance en question est solution d'une équation aux dérivées partielles. On peut résoudre cette EDP en ayant recours à une méthode de discrétisation en espace et en temps.

– une erreur statistique dite erreur de Monte Carlo donnée par

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_{T,i}^n) - \mathbb{E}f(X_T)$$

où $(X_{(T,i)}^n)_{1 \leq i \leq N}$ est un d'échantillon i.i.d. de taille N .

1.1 Schéma d'Euler et erreur de discrétisation

Précisons le cadre envisagé. On considère une diffusion d -dimensionnelle $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$, solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^d, \quad (1.1)$$

où $W = (W^1, \dots, W^q)$ désigne un mouvement Brownien q -dimensionnel défini sur un espace probabilisé filtré $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ étant la filtration Brownienne habituelle. Les fonctions $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times q}$ sont supposées de classe \mathcal{C}^1 vérifiant :

$\exists C_T > 0; \forall x, y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq C_T |y - x|.$$

On considère le schéma d'Euler continu X^n , de pas de discrétisation $\delta = T/n$, donné par :

$$dX_t^n = b(X_{\eta_n(t)})dt + \sigma(X_{\eta_n(t)})dW_t, \quad \eta_n(t) = [t/\delta]\delta. \quad (1.2)$$

Dans la suite, on rappelle quelques propriétés sur l'erreur d'approximation forte de la diffusion par le schéma d'Euler associé. Avec les notations précédentes, le schéma d'Euler vérifie les deux propriétés suivantes (voir par exemple Kloeden et Platen (1995))

$$\mathcal{P1}) \quad \forall p > 1, \quad \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} |X_t - X_t^n|^p \leq \frac{K_p(T)}{n^{p/2}}, \quad K_p(T) > 0.$$

$$\mathcal{P}2) \quad \forall p > 1, \quad \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} |X_t|^p + \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} |X_t^n|^p \leq K'_p(T), \quad K'_p(T) > 0.$$

1.1.1 Convergence faible du schéma d'Euler et erreur de discrétisation

Durant les dernières années, plusieurs travaux ont porté sur l'erreur de discrétisation donnée par :

$$\varepsilon_n := \mathbb{E} f(X_T^n) - \mathbb{E} f(X_T), \quad (1.3)$$

pour une fonction donnée f . Ces travaux peuvent être classés selon deux catégories, selon les hypothèses faites sur la dégénérescence de la diffusion X .

Sans hypothèses de non dégénérescence sur la diffusion X

Dans ce cadre, Talay et Tubaro (1990) ont démontré que pour une fonction f suffisamment régulière,

$$\varepsilon_n = \frac{C}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle.} \quad (*)$$

Le même résultat est donné dans Kurtz et Protter (1999) pour une fonction f de classe \mathcal{C}^3 . Des résultats similaires dans le cas de diffusions guidées par un processus de Lévy sont démontrés par Jacod et al. (2003). Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude de cette erreur de discrétisation, pour des diffusions éventuellement dégénérées. On démontre d'abord que pour des fonctions f de classe \mathcal{C}^1 on a $\varepsilon_n = o(\frac{1}{\sqrt{n}})$ (voir Proposition 2.2.2). Dans un deuxième temps, on démontre, par des contres exemples, que pour de telles fonctions l'ordre de l'erreur peut être $1/n^\alpha$ pour $\alpha \in (1/2, 1]$ (voir Proposition 2.2.3) .

Avec hypothèses de non dégénérescence sur la diffusion X

Sous des hypothèses de non dégénérescence de type Hörmander pour le générateur infinitésimal de X , Bally et Talay (1996a) ont démontré (*), à l'aide du calcul de Malliavin, pour une fonction f seulement borélienne bornée. À ce niveau, une question naturelle surgit : peut-on étendre ce résultat pour des distributions ? pour $f \equiv \delta$ (la fonction dirac par exemple) a-t-on des estimations du même genre ?

En fait, cette question est liée au problème de l'estimation de la densité de la diffusion X_T en un point donné x . Pour résoudre ce problème, Bally et Talay (1996b) proposent d'approximer la densité de la diffusion X_T , notée ici $p_T(x_0, x)$, par la densité $\tilde{p}_T(x_0, x)$ de la loi d'une petite perturbation du schéma d'Euler X_T^n . Dans ce cas, il prouvent, toujours en utilisant les techniques du calcul de Malliavin, que la différence entre les densités peut elle aussi être développée en puissances de $1/n$. Notons que sous des conditions de type Hörmander, la loi du schéma d'Euler n'admet pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue, alors que celle de la petite perturbation qui lui est associée, considérée ici, admet une densité. Dans un travail récent, Guyon (2005) étend le résultat de Bally et Talay (1996b) dans le cas où f est une distribution tempérée mais avec une condition plus forte sur la diffusion qui est supposée cette fois uniformément elliptique.

Pour répondre à la même question c'est à dire celle d'approximer la densité $P_T(x_0, x)$ d'une diffusion hypoelliptique, Kohatsu-Higa et Pettersson (2002) proposent d'approximer cette densité par

$$\mathbb{E}\phi_{h,x}(X_T^n + Z_n)$$

où $y \mapsto \phi_{h,x}(y)$ est un noyau de densité de taille de fenêtre donnée par h et Z_n est une variable aléatoire Gaussienne indépendante du mouvement Brownien W et de variance $1/n$. Dans ce cas, Kohatsu-Higa et Pettersson (2002) montrent que

$$|\mathbb{E}\phi_{h,x}(X_T^n + Z_n) - P_T(x_0, x)| \leq \frac{C}{n}, \quad \text{pour } C \text{ une constante donnée.}$$

Dans le chapitre 3 de cette thèse, qui est un travail en collaboration avec Arturo Kohatsu-Higa, nous nous intéressons à cette deuxième approche pour estimer la densité d'une diffusion. En effet, nous démontrons à l'aide des techniques du calcul de Malliavin que

$$\mathbb{E}\phi_{h,x}(X_T^n + Z_n) - P_T(x_0, x) = \frac{C}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et nous donnons une expression explicite de C (Voir Théorème 3.3.1).

1.1.2 Approximation de fonctionnelles de la trajectoire de X

Dans la suite, nous rappelons d'autres résultats concernant l'erreur de discrétisation lorsque on évalue des espérances de fonctionnelles de la trajectoire de la diffusion $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$. Nous commençons par citer les travaux de Gobet (1998) qui portent sur l'étude de

$$\varepsilon_n = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{T < \tau} f(X_T)] - \mathbb{E}[\mathbf{1}_{T < \tilde{\tau}^n} f(X_T^n)]$$

où τ désigne le premier temps de sortie de la diffusion $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ d'un ouvert D donnée de \mathbb{R}^d , alors que $\tilde{\tau}^n$ désigne le premier temps de sortie du schéma d'Euler du domaine D . Gobet démontre que pour f de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de ∂D (la frontière de D) l'erreur ε_n se développe à l'ordre 1 en $1/n$. Dans ce cadre, la diffusion est supposée elliptique.

Toujours dans le cadre de fonctionnelles dépendant de la trajectoire de la diffusion, on cite les travaux de Temam (2001) qui s'intéresse notamment, dans sa thèse, à étudier l'erreur

$$\varepsilon_n = \mathbb{E} (f(S_T, I_T^n) - f(S_T, I_T))$$

où S_T désigne le modèle de Black & Scholes (voir la partie 2.4) et $I_T := \frac{1}{T} \int_0^T S_u du$ alors que I_T^n est un schéma de discrétisation associé à I_T . Temam démontre, en réutilisant des techniques de Bally et Talay (1996a) que pour une fonction f mesurable bornée

$$\varepsilon_n = \frac{C}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

où la constante C dépend de l'EDP associée au problème. Dans la section 2.4 de cette thèse, nous nous intéressons à étudier l'erreur ε_n dans ce cadre bien précis. Nous retrouvons le résultat obtenu par Temam, mais pour une fonction f de classe \mathcal{C}^1 (voir la Remarque 2 de la partie 2.4). L'avantage de notre approche est que la constante C qui apparaît dans le développement à l'ordre 1 de l'erreur est plus explicite, puisqu'elle ne dépend pas de l'EDP associée au problème.

L'intérêt d'avoir un d.l. de l'erreur est que cela permet de mettre en œuvre une méthode d'extrapolation de Romberg (voir Talay et Tubaro (1990)) d'améliorer la vitesse de convergence. Avec l'extrapolation de Romberg, le schéma d'Euler, simple à implémenter, est plus

efficace en pratique qu'un schéma du second ordre tel que le schéma de Milshtein, connu pour être complexe à implémenter, surtout pour une dimension $d \geq 2$.

1.2 Méthode de Monte Carlo et erreur statistique

Après avoir approché $\mathbb{E}f(X_T)$ par $\mathbb{E}f(X_T^n)$, on est amené à approximer cette dernière espérance par une méthode de Monte Carlo (voir par exemple Glasserman (2004) et Lapeyre et al. (1998)). Cette tâche consiste à simuler $(f(X_{T,i}^n))_{1 \leq i \leq N}$, un échantillon i.i.d. de la variable aléatoire $f(X_T^n)$. C'est la loi des grands nombres alors qui assure que pour n fixé et pour f bornée (pour éviter les problèmes d'intégrabilité)

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_{T,i}^n) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}f(X_T^n) \text{ p.s..}$$

La vitesse de convergence en loi, donnée par le théorème limite centrale est $\sqrt{\frac{\text{Var}(f(X_T^n))}{N}}$.

A ce stade, deux problèmes sont alors à discuter :

1. trouver un équilibre entre l'erreur de discrétisation et l'erreur statistique,
2. réduire la variance dans la méthode Monte Carlo.

Le premier problème a été étudié par Duffie et Glynn (1995) et par Kurtz et Protter (1999) qui établissent un théorème limite centrale de type Lindberg-Feller :

Si $\varepsilon_n \simeq C/n$ alors

$$n \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n^2} f(X_{T,i}^n) - \mathbb{E}f(X_T) \right) \Rightarrow \sigma \bar{G} + C,$$

avec $\sigma^2 = \text{Var}(f(X_T))$ et \bar{G} une Gaussienne centrée réduite. Une version fonctionnelle de ce TLC est donnée par Kurtz et Protter (1999). Ce théorème peut être interprété comme suit : pour une erreur globale d'approximation d'ordre $1/n$ la taille minimale de l'échantillon i.i.d. nécessaire pour faire tourner la méthode de Monte Carlo est $N = n^2$, ce qui nous mène à une complexité optimale de l'algorithme donnée par

$$C_{MC} \simeq nN = n^3$$

Le second problème à été l'objet de divers travaux. En effet, plusieurs méthodes de réduction de Variance se sont développées afin de réduire l'erreur statistique dans la méthode Monte Carlo. Les plus connues sont la méthode de réduction de variance par variable antithétique et celle par variable de contrôle (pour plus de détails sur les méthodes de réduction de variance voir par exemple Boyle et al. (1997)). Notre intérêt va porter plutôt sur les méthodes de réduction de variance par variable de contrôle. Cette méthode consiste à construire une variable aléatoire Y_T^n de sorte que :

- $\mathbb{E}Y_T^n$ soit explicite
- $Var(f(X_T^n) - Y_T^n) \ll Var(f(x_T^n))$.

et à approcher ensuite $\mathbb{E}f(X_T^n)$ par

$$\mathbb{E}Y_T^n + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_{T,i}^n) - Y_{T,i}^n.$$

Cette variable de contrôle quand elle existe réduit efficacement l'erreur statistique dans la méthode Monte Carlo. Son unique défaut est que la construction de Y^n n'est pas toujours évidente. En pratique, les variables de contrôles connues sont toujours spécifiques aux problèmes, voir par exemple la variable de contrôle fournie par Kemna et Vorst (1990) dans le cas des options Asiatiques (voir partie 2.5.1).

1.3 La méthode de Romberg statistique

Dans cette Thèse, nous proposons et analysons une nouvelle méthode de réduction de variance. Elle consiste à construire une sorte de variable de contrôle universelle permettant la réduction de variance indépendamment du problème posé. Cette méthode sera appelée dans la suite *la méthode de Romberg statistique* car elle fait intervenir deux schémas d'Euler de nombres de pas de discrétisations différents comme dans la méthode de Romberg analytique (voir Talay et Tubaro (1990)). Le principe de la méthode est le suivant : On considère deux schémas d'Euler, un schéma "fin" de pas de discrétisations T/n et un schéma "grossier" de pas T/m avec $m \ll n$. Admettons provisoirement que la constante

$M_m := \mathbb{E}f(X_T^m)$ soit explicitement connue et posons :

$$Q = f(X_T^n) - f(X_T^m) + M_m.$$

Il est clair que $\mathbb{E}f(X_T^n) = \mathbb{E}Q$, de plus des estimations standards nous montrent que pour une fonction f lipschitzienne

$$\text{Var}(Q) = O(1/m),$$

(voir Proposition 2.3.1). Par conséquent, Q semble être une variable de contrôle parfaite pour réduire la variance dans la méthode de Monte Carlo. Cependant, dans la pratique la constante M_m n'est pas vraiment explicite et nécessite d'être évaluée par un nouveau Monte Carlo. Ainsi, on propose d'approximer $\mathbb{E}f(X_T^n)$ par

$$V_{n,m} := \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} f(\hat{X}_{T,i}^m) + \frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} f(X_{T,i}^n) - f(X_{T,i}^m),$$

où N_n et N_m désignent les tailles des échantillons i.i.d. considérés pour chacun des deux Monte Carlo précédents. On suppose que \hat{X}_T^m et (X_T^n, X_T^m) sont indépendants. Ceci traduit le fait que M_m doit être toujours considérée comme une constante explicite dans la variable aléatoire Q . Ainsi nous calculons M_m à l'aide du schéma "grossier" et on l'utilise comme variable de contrôle sur le schéma "fin". Nous avons alors une variance petite lors de l'estimation de $\mathbb{E}Q$ mais une quantité de calcul en plus pour l'évaluation de M_m . D'où la question fondamentale posée à ce niveau : comment choisir les trois paramètres de la méthode à savoir m , N_m et N_n en fonction de n pour assurer son bon fonctionnement ? En vue de répondre, de façon précise, à cette question nous montrons un théorème limite centrale de type Lindberg Feller analogue à celui prouvé par Duffie et Glynn (1995) et par Kurtz et Protter (1999) dans le cas d'une méthode Monte Carlo habituelle. L'outil fondamental pour démontrer un tel théorème est un résultat fonctionnel de Kurtz et Protter (1991) portant sur le comportement asymptotique pour la loi de l'erreur entre le schéma d'Euler et la diffusion, amélioré par la suite par Jacod et Protter (1998) :

$$\sqrt{n}U^n := \sqrt{n}(X^n - X) \Rightarrow U$$

où U désigne un processus donné (voir Théorème 2.2.1). Avec ce résultat, on démontre que pour $N_m = n^2$ et $N_n = n^{3/2}$ on a

$$n(V_{n,m} - \mathbb{E} f(X_T)) \Rightarrow \sigma \bar{G} + C,$$

avec $\sigma^2 = \text{Var}(\nabla f(X_T).U_T)$ et \bar{G} une Gaussienne centrée réduite (voir Théorème 2.3.1). On peut interpréter ce dernier théorème de la manière suivante : pour une erreur globale d'approximation d'ordre $1/n$ les paramètres de la méthode de Romberg statistique nécessaires pour faire tourner la méthode sont $N_m = n^2$ et $N_n = n^{3/2}$, ce qui nous mène à une complexité de l'algorithme donnée par

$$C_{RS} \simeq mN_m + nN_n = mn^2 + n^{5/2}.$$

Par conséquent, pour $m = n^{1/2}$ on a une complexité optimale de la méthode de Romberg statistique donnée par $C_{RS}^* \simeq n^{5/2}$. Ainsi on réalise un gain en complexité par rapport à une méthode de Monte Carlo classique d'ordre $n^{1/2}$, ce qui peut être un gain considérable en pratique (voir la partie 2.5).

La méthode de Romberg statistique s'avère très efficace pour le calcul des options asiatiques qui font intervenir l'intégrale de la diffusion sur un intervalle de temps dans le modèle de Black & Scholes. L'erreur de discrétisation provient du calcul de l'intégrale et l'analyse de l'erreur en vue d'appliquer la méthode de Romberg Statistique nécessite un équivalent du théorème de Jacod et Protter (1998) (voir section 2.4). Tous ces résultats sont illustrés par des exemples numériques.

Le chapitre 3 de la thèse est basé sur un travail en collaboration avec Arturo Kohatsu-Higa. Nous y étudions l'approximation de la densité d'une diffusion non-dégénérée par une méthode de noyau. Par des techniques de calcul de Malliavin nous obtenons le développement limité de l'erreur de discrétisation. Puis nous développons dans ce cadre la méthode de Romberg statistique. Après avoir établi un théorème de convergence en loi stable à la Jacod Kurtz Protter, pour la dérivée de Malliavin du processus d'erreur, nous obtenons un TLC pour la méthode de Romberg statistique qui permet d'optimiser le choix des paramètres. Les résultats numériques confirment l'efficacité de la méthode.

Chapitre 2

Variance reduction by Romberg's method

2.1 Introduction

In many numerical problems - in particular in mathematical finance - one has to compute, using the Monte Carlo method, $\mathbb{E}f(X_T)$ where X_T is a diffusion process. The advantage of using a probabilistic approach instead of a P.D.E. approach is that one may solve problems in high dimension. But on the other hand, The Monte Carlo algorithms are much slower and their practical efficiency highly depends on the variance of the random variables at hand. This is why variance reduction plays a crucial role in the practical implementation.

There are several classes of methods which are used to reduce variance : the control variate approach, the antithetic variate method, moment matching, importance sampling, conditional Monte Carlo methods . . . In this paper we introduce a new variance reduction method which we will call statistical Romberg method. This method can be viewed as a control variate method. Roughly speaking, the idea is : use many sample paths with a coarse time discretization step and few additional sample paths with a fine time discretization step. More precisely, in order to construct our control variate we discretize

the diffusion $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ by two Euler schemes with time steps T/n and T/m ($m \ll n$). Suppose for a while that $M_m := \mathbb{E} f(X_T^m)$ is known. Then we construct :

$$Q = f(X_T^n) - f(X_T^m) + M_m.$$

Clearly we have $\mathbb{E} f(X_T^n) = \mathbb{E} Q$ and we wish to simulate Q instead of $f(X_T^n)$. Standard arguments show that for f Lipschitz continuous we have

$$\text{Var}(Q) = O(1/m),$$

(see Proposition 2.3.1). So the variance of Q tends to zero as m tends to infinity and consequently, in order to achieve a given accuracy, we need a much smaller sample. This significantly reduces the complexity of the algorithm. But, on the other hand, we have to compute the quantity M_m , and this is done again by Monte Carlo sampling. This will increase the complexity of the algorithm and we need to find a good balance which guarantees that the global complexity decreases. Let N_m be the number of Monte Carlo simulations used for the evaluation of M_m and N_n be the number of Monte Carlo simulations used for the evaluation of $\mathbb{E} Q$. The question is how to choose m , N_m and N_n .

In the classical Monte Carlo method, one needs to choose the number n of interval's in the discretization and the number N of simulations. The parameter n drives the so-called *discretization error* due to discretization, whereas the number N controls the *statistical error*. For a rational choice of N versus n , one may try to minimize the error for a given computational time (see Duffie et Glynn (1995)) or equivalently to minimize the computational time for a given total error (see Kurtz et Protter (1999)).

An optimal choice of the number of Monte Carlo samples must be based on a precise evaluation of the discretization error . This requires some kind of regularity : in Bally et Talay (1996a), the regularizing effect of the diffusion process allows to prove that the rate of convergence is $1/n$ for measurable functions. A Hörmander type assumption is needed. In the case of general diffusions, the same order of convergence can be proved for regular

functions only (see the pioneering paper Talay et Tubaro (1990) for \mathcal{C}^6 -functions and for \mathcal{C}^3 -functions, see Kurtz et Protter (1999). For stochastic differential equations driven by a Lévy process see Jacod et al. (2003)).

Our first result shows that, in the context of possibly degenerate diffusions, the discretization error for \mathcal{C}^1 -functions is at least $o(1/\sqrt{n})$ (see Proposition 2.2.2). For such functions, we give an example for which the discretization error is of order $1/n^\alpha$ for any $\alpha \in (1/2, 1]$ (see Proposition 2.2.3).

Our second result is a Central Limit Theorem for the statistical Romberg method (see Theorem 2.3.2). This theorem uses the weak convergence of the normalized error of the Euler scheme for diffusions proved by Kurtz et Protter (1991) (and strengthened by Jacod et Protter (1998)).

Based on this Central Limit Theorem, we are able to fix the optimal balance between m , N_m and N_n . It turns out that for a given error level $\varepsilon = 1/n^\alpha$ we obtain $m = \sqrt{n}$, $N_m = n^{2\alpha}$ and $N_n = n^{2\alpha-(1/2)}$. With this choice, the complexity of our algorithm is $C_{SR} = C \times n^{2\alpha+(1/2)}$, $C > 0$, while the complexity in the standard Monte Carlo is $C_{MC} = C \times n^{2\alpha+1}$. So we have a clear gain.

Our approach can also be used for the Monte Carlo approximation of expectations of functionals of the whole path of a diffusion. In particular, we investigate the application to the pricing of Asian options. In this setting, the approximation relies on the discretization of the integral of the price process over a time interval. It was shown in Temam (2001) that the trapezoidal rule is one of the most efficient method for this discretization. We analyze the error process, which is of the order $1/n$. We prove a stable functional central limit theorem in the spirit of Jacod et Protter (1998). As a consequence of this result, we give an expansion of the analytical error, which, in contrast with Temam (2001) result, does not use the associated P.D.E.. We also use our result in order to optimize the choice of the parameters, which are different from the ones in the Euler scheme.

The organization of the paper is the following. We first recall essential facts about the Euler scheme including error evaluations. In section 3 we describe our statistical Romberg method for the Euler scheme. In section 4 we apply the idea of statistical Romberg ap-

proximation to the discretization of path integrals of a diffusion in the context of Asian option pricing. Section 5 is devoted to numerical tests and comparisons. In the last section we give conclusions and remarks.

2.2 On the discretization error of the Euler scheme

Let $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ be the process with values in \mathbb{R}^d , solution to

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^d, \quad (2.1)$$

where $W = (W^1, \dots, W^q)$ is a q -dimensional Brownian motion on some given filtered probability space $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ is the standard Brownian filtration. The functions $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ and $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times q}$ are continuously differentiable and satisfy $\exists C_T > 0; \forall x, y \in \mathbb{R}^d$, we have

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq C_T |y - x|.$$

We consider the Euler continuous approximation X^n with step $\delta = T/n$ given by

$$dX_t^n = b(X_{\eta_n(t)})dt + \sigma(X_{\eta_n(t)})dW_t, \quad \eta_n(t) = [t/\delta]\delta.$$

It is well known that the Euler scheme satisfies the following properties (see for instance Faure (1992))

$$\mathcal{P1}) \quad \forall p > 1 \quad \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} |X_t - X_t^n|^p \leq \frac{K_p(T)}{n^{p/2}}, \quad K_p(T) > 0.$$

$$\mathcal{P2}) \quad \forall p > 1 \quad \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} |X_t|^p + \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} |X_t^n|^p \leq K'_p(T), \quad K'_p(T) > 0.$$

2.2.1 Stable convergence and the Euler scheme error

We first recall basic facts about stable convergence. In the following we adopt the notation of Jacod et Protter (1998). Let X_n be a sequence of random variables with values in a Polish space E , all defined on the same probability space (Ω, \mathcal{F}, P) . Let $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ be an extension of (Ω, \mathcal{F}, P) , and let X be an E -valued random variable on the extension. We say that (X_n) converges in law to X stably and write $X_n \Rightarrow^{stably} X$, if

$$\mathbb{E}(Uh(X_n)) \rightarrow \tilde{\mathbb{E}}(Uh(X)),$$

for all $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ bounded continuous and all bounded random variable U on (Ω, \mathcal{F}) . This convergence, introduced by Rényi (1963) and studied by Aldous et Eagleson (1978), is obviously stronger than convergence in law. The following lemma will be crucial

If V is another variable with values in another Polish space F we have the following result :

Lemma 2.2.1. *let V_n and V be defined on (Ω, \mathcal{F}) with values in another metric space E' .*

$$\text{if } V_n \xrightarrow{\mathbb{P}} V, \quad X_n \Rightarrow^{stably} X, \quad \text{then } (V_n, X_n) \Rightarrow^{stably} (V, X).$$

This result remains valid when $V_n = V$.

For a proof of this lemma see Jacod et Protter (1998).

Note that all this applies when X_n, X are \mathbb{R}^d -valued càdlàg processes, with $E = \mathbb{D}([0, T], \mathbb{R}^d)$. Now assume that

$$\varphi(X_t) = \begin{pmatrix} b_1(X_t) & \sigma_{11}(X_t) & \dots & \sigma_{1q}(X_t) \\ b_2(X_t) & \sigma_{21}(X_t) & \dots & \sigma_{2q}(X_t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_d(X_t) & \sigma_{d1}(X_t) & \dots & \sigma_{dq}(X_t) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad dY_t := \begin{pmatrix} dt \\ dW_t^1 \\ \vdots \\ dW_t^q \end{pmatrix},$$

then the S.D.E. (3.25) becomes :

$$dX_t = \varphi(X_t)dY_t. \quad (2.2)$$

The Euler continuous approximation X^n with step $\delta = T/n$ is given by :

$$dX_t^n = \varphi(X_{\eta_n(t)})dY_t, \quad \eta_n(t) = [t/\delta]\delta.$$

The following result proven by Jacod et Protter (1998) is an improvement on the result given by Kurtz et Protter (1991).

Theorem 2.2.1. *With the above notations we have*

$$\sqrt{n}U^n =: \sqrt{n}(X^n - X) \Rightarrow^{\text{stably}} U,$$

with U a d -dimensional process satisfying

$$dU_t^i = \sum_{j=1}^{q+1} \sum_{k=1}^d \varphi_k^{ij}(X_t) \left[U_t^k dY_t^j - \sum_{l=1}^{q+1} \varphi^{kl}(X_t) dN_t^{lj} \right], \quad U_0^i = 0 \quad (2.3)$$

(φ_k^{ij} is the partial derivative of φ^{ij} with respect to the k -th coordinate), and N is given by :

$$\begin{cases} N^{1i} = 0, & 1 \leq i \leq q+1, \\ N^{j1} = 0, & 1 \leq j \leq q+1, \\ N^{ij} = \frac{B_{ij}}{\sqrt{2}}, & 2 \leq i, j \leq q+1, \end{cases}$$

where $(B^{ij})_{1 \leq i, j \leq q}$ is a standard $(q)^2$ -dimensional Brownian motion defined on an extension $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}, \tilde{P})$ of the space $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$, which is independent of W .

We will need the following property of the process U .

Proposition 2.2.1. *Under the assumptions of the above theorem we have*

$$\tilde{\mathbb{E}}(U_T/\mathcal{F}_T) = 0.$$

Proof. Consider the unique solution of the d -dimensional linear equation

$$\mathcal{E}_T = I_d + \sum_{j=1}^{q+1} \int_0^T \varphi^j(X_t) \mathcal{E}_t dY_t^j. \quad (2.4)$$

where φ^j is a $d \times d$ matrix with $(\varphi^j)_{ik} = \varphi_k^{ij}$. From Theorem 56 p.271 in Protter (1990), it follows that

$$U_T = - \sum_{j=1}^{q+1} \mathcal{E}_T \int_0^T \mathcal{E}_t^{-1} \varphi^j(X_t) \varphi(X_t) dN_t^j. \quad (2.5)$$

If Z is a bounded \mathcal{F}_T -measurable r.v., we have

$$\mathbb{E}(U_T Z) = - \sum_{j=1}^{q+1} \mathbb{E} \left(Z \mathcal{E}_T \int_0^T \mathcal{E}_t^{-1} \varphi^j(X_t) \varphi(X_t) dN_t^j \right) = 0,$$

as can be seen by representing $Z \mathcal{E}_T$ as a stochastic integral w.r.t. W . \square

2.2.2 The discretization error

In the following we focus on the discretization error given by the bias

$$\varepsilon_n := \mathbb{E} f(X_T^n) - \mathbb{E} f(X_T), \quad (2.6)$$

where f is a given function. Talay et Tubaro (1990) prove that if f is sufficiently smooth, then $\varepsilon_n \sim c/n$ with c a given constant. A similar result was proven by Kurtz et Protter (1999) for a function $f \in \mathcal{C}^3$. The same result was extended in Bally et Talay (1996a) for a measurable function f but with a non degeneracy condition of Hörmander type on the diffusion.

In the context of possibly degenerate diffusions, the discretization error for functions which are not \mathcal{C}^3 is not yet completely understood. For a Lipschitz-continuous function f , the estimate $|\varepsilon_n| \leq \frac{c}{\sqrt{n}}$ follows easily from $\mathcal{P}1$). The following proposition and the example below focus on the rate of convergence of ε_n for \mathcal{C}^1 functions.

Proposition 2.2.2. *Let f be an \mathbb{R}^d -valued function satisfying*

$$(\mathcal{H}_f) \quad |f(x) - f(y)| \leq C(1 + |x|^p + |y|^p)|x - y|, \quad \text{for some } C, p > 0.$$

Assume that $\mathbb{P}(X_T \notin \mathcal{D}_f) = 0$, where $\mathcal{D}_f := \{x \in \mathbb{R}^d \mid f \text{ is differentiable at } x\}$, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \varepsilon_n = 0.$$

Proof. We have, with probability 1,

$$\sqrt{n}(f(X_T^n) - f(X_T)) = \sqrt{n}\nabla f(X_T).U_T^n + R_n, \text{ with}$$

$R_n = \sqrt{n}|U_T^n|\varepsilon(X_T, U_T^n)$ and $\varepsilon(X_T, U_T^n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. It follows that $R_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, since $(\sqrt{n}|U_T^n|)$ is tight. Consequently we deduce using $(\mathcal{H}_f), \mathcal{P1}, \mathcal{P2}$ and Theorem 2.2.1 that

$$\sqrt{n}\varepsilon_n \rightarrow \tilde{\mathbb{E}}(\nabla f(X_T).U_T),$$

and using Proposition 2.2.1, it follows that

$$\tilde{\mathbb{E}}(\nabla f(X_T).U_T) = 0.$$

Which completes the proof. \square

The following example proves that for $\alpha \in (1/2, 1]$ there exists a \mathcal{C}^1 function with bounded derivatives and a diffusion X such that

$$n^\alpha \varepsilon_n \rightarrow C_f(T, \alpha). \quad (2.7)$$

where $C_f(T, \alpha)$ is positive. In other words, the rate of convergence can be $1/n^\alpha$ for all values of $\alpha \in (1/2, 1]$.

Example

Consider the bi-dimensional diffusion $Z = (X, Y)$ satisfying the following S.D.E.

$$\begin{cases} dX_t = -X_t/2 dt - Y_t dW_t \\ dY_t = -Y_t/2 dt + X_t dW_t \end{cases} \quad (2.8)$$

and the map $f_\alpha : z = (x, y) \mapsto ||z|^2 - 1|^{2\alpha}$. The solution of (2.8), subject to $Z_0 = (\cos \theta, \sin \theta)$, is given by $Z_t = (\cos(\theta + W_t), \sin(\theta + W_t))$. We assume that $\theta \in [0, 2\pi]$, so the diffusion Z lives on the unit circle.

Proposition 2.2.3. *Let Z^n be the Euler scheme associated with Z . For $\alpha \in [1/2, 1]$ we have*

$$n^\alpha \mathbb{E}(f_\alpha(Z_t^n) - f_\alpha(Z_t)) \rightarrow (2t)^\alpha \mathbb{E}|G|^{2\alpha}, \quad t \geq 0 \quad (2.9)$$

where G is a standard normal r.v..

Proof. We have, since f_α vanishes on the unit circle,

$$\begin{aligned} n^\alpha \mathbb{E} (f_\alpha(Z_t^n) - f_\alpha(Z_t)) &= n^\alpha \mathbb{E} \left| |Z_t^n|^2 - 1 \right|^{2\alpha} \\ &= n^\alpha \mathbb{E} \left| [Z_t + Z_t^n] \cdot [Z_t^n - Z_t] \right|^{2\alpha}. \end{aligned}$$

Using Theorem 2.2.1

$$n^\alpha \mathbb{E} (f_\alpha(Z_t^n) - f_\alpha(Z_t)) \rightarrow 2^{2\alpha} \mathbb{E} |Z_t \cdot \tilde{U}_t|^{2\alpha}, \quad (2.10)$$

where $\tilde{U} = (\tilde{U}^1, \tilde{U}^2)$ is given by

$$\begin{cases} d\tilde{U}_t^1 = -\frac{1}{2}\tilde{U}_t^1 dt - \tilde{U}_t^2 dW_t + \frac{1}{\sqrt{2}}X_t d\tilde{B}_t \\ d\tilde{U}_t^2 = -\frac{1}{2}\tilde{U}_t^2 dt + \tilde{U}_t^1 dW_t + \frac{1}{\sqrt{2}}Y_t d\tilde{B}_t \end{cases} \quad (2.11)$$

and \tilde{B} is a standard Brownian motion independent of W . The solution of (2.11) is given by

$$\begin{cases} \tilde{U}_t^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}X_t \tilde{B}_t \\ \tilde{U}_t^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}Y_t \tilde{B}_t, \end{cases} \quad (2.12)$$

which completes the proof. \square

2.3 The Statistical Romberg method

Before introducing our algorithm, we recall some essential facts about the Monte Carlo method. In many applications (in particular for the pricing of financial securities), the effective computation of $\mathbb{E} f(X_T)$ is crucial. The Monte Carlo method consists of the following steps :

- Approximate the process $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ by the Euler scheme $(X_t^n)_{0 \leq t \leq T}$, with step T/n , which can be simulated.
- Evaluate the expectation on the approximating process $f(X_T^n)$ by the Monte Carlo method.

In order to evaluate $\mathbb{E} f(X_T^n)$ by the Monte Carlo method, N independent copies $f(X_{T,i}^n)_{1 \leq i \leq N}$ of $f(X_T^n)$ are sampled and the expectation is approximated by the following quantity

$$\hat{f}^{n,N} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_{T,i}^n).$$

The approximation is affected by two types of errors. The discretization error ε_n , studied in the above section and the statistical error $\hat{f}^{n,N} - \mathbb{E} f(X_T)$, controlled by the central limit Theorem and which is of order $1/\sqrt{N}$. An interesting problem (studied in Duffie et Glynn (1995) and Kurtz et Protter (1999)) is to find N as a function of n so that both errors are of the same order.

The following result highlights the behavior of the global error in the classical Monte Carlo method. It can be proved in the same way as the limit theorem given in Duffie et Glynn (1995)

Theorem 2.3.1. *Let f be an \mathbb{R}^d -valued function satisfying*

$$(\mathcal{H}_f) \quad |f(x) - f(y)| \leq C(1 + |x|^p + |y|^p)|x - y|, \quad \text{for some } C, p > 0.$$

Assume that $\mathbb{P}(X_T \notin \mathcal{D}_f) = 0$, where $\mathcal{D}_f := \{x \in \mathbb{R}^d \mid f \text{ is differentiable at } x\}$, and that for some $\alpha \in [1/2, 1]$ we have

$$(\mathcal{H}_{\varepsilon_n}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \varepsilon_n = C_f(T, \alpha).$$

Then

$$n^\alpha \left(\frac{1}{n^{2\alpha}} \sum_{i=1}^{n^{2\alpha}} f(X_{T,i}^n) - \mathbb{E} f(X_T) \right) \Rightarrow \sigma \bar{G} + C_f(T, \alpha),$$

with $\sigma^2 = \text{Var}(f(X_T))$ and \bar{G} a standard normal.

A functional version of this theorem, with $\alpha = 1$ was proven by Kurtz et Protter (1999) for a function f of class \mathcal{C}^3 . We can interpret the theorem as follows. For a total error of order $1/n^\alpha$ the minimal computation effort necessary to run the Monte Carlo algorithm is obtained for $N = n^{2\alpha}$. This leads to an optimal time complexity of the algorithm given by

$$C_{MC} = C \times (nN) = C \times n^{2\alpha+1}, \quad \text{with } C \text{ some positive constant.} \quad (2.13)$$

Recall that the time complexity of an algorithm A is proportional to the maximum number of basic computations performed by A .

2.3.1 The Euler scheme and the statistical Romberg method

It is well known that the rate of convergence in the Monte Carlo method depends on the variance of $f(X_T^n)$ where X_T^n is the Euler scheme of step T/n . This is a crucial point in the practical implementation. A large number of reduction of variance methods are used in practice. Our algorithm proposes a control variate reduction of variance. Its specificity is that the control variate is constructed itself using the Monte Carlo method, applied to the same discretization scheme, but with a step m which is specifically lower than the approximation step n (using two discretization steps is an idea which already appears in Romberg's method). Let us be more precise. We fix $m \ll n$ and we denote

$$Q = f(X_T^n) - f(X_T^m) + M_m,$$

where $M_m = \mathbb{E} f(X_T^m)$ and we suppose for a while that M_m is known. Note that

$$\mathbb{E}(Q) = \mathbb{E} f(X_T^n).$$

So that $f(X_T^m) - M_m$ appears as a control variate.

Consider a function $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ which is Lipschitz continuous of constant $[f]_{lip}$ that is $[f]_{lip} = \sup_{u \neq v} \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|}$.

Proposition 2.3.1. *Under the above assumptions, we have*

$$\sigma_Q^2 := \text{Var}(Q) = O(1/m). \quad (2.14)$$

Proof. We have :

$$\begin{aligned} \sigma_Q &= \|Q - \mathbb{E} Q\|_2 \\ &\leq \|f(X_T^n) - f(X_T^m)\|_2 \\ &\leq [f]_{lip} \left[\sup_{t \in [0, T]} \|X_t - X_t^n\|_2 + \sup_{t \in [0, T]} \|X_t - X_t^m\|_2 \right]. \end{aligned}$$

Using $\mathcal{P1}$) we deduce that $\exists K' > 0$ such that

$$\sigma_Q \leq K' \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \right),$$

which completes the proof. \square

The inequality (2.14) shows that the variance of Q is significantly smaller than the variance of $f(X_T^n)$, so that Q appears as a good candidate for the reduction of variance method. However computing $\mathbb{E} Q$ supposes to compute $M_m = \mathbb{E} f(X_T^m)$ in the first place, and this is also done by the Monte Carlo method. So there is a certain extra quantity of computation to be done. In practice, the sample paths used for the computation of M_m will be independent of those used for the computation of Q .

In the following we make a complexity analysis which permits to choose m as a function of n in order to minimize the complexity of the algorithm which leads to $\mathbb{E} Q$. We will prove that with such a choice of m , the complexity of the algorithm for $\mathbb{E} Q$ is significantly smaller than the complexity of the standard Monte Carlo method for $\mathbb{E} f(X_T^n)$.

Let us present the algorithm for $\mathbb{E} Q$.

2.3.2 Central limit theorem

In the following we assume that the parameters of the statistical Romberg method depend only on n . That is

$$m = n^\beta, \quad \beta \in (0, 1), \quad N_m = n^{\gamma_1}, \quad \gamma_1 > 1, \quad N_n = n^{\gamma_2}, \quad \gamma_2 > 1.$$

We can now state the analogue of Theorem 2.3.1 in our setting. The statistical Romberg method approximates $\mathbb{E} f(X_T)$ by

$$V_n := \frac{1}{n^{\gamma_1}} \sum_{i=1}^{n^{\gamma_1}} f(\hat{X}_{T,i}^{n^\beta}) + \frac{1}{n^{\gamma_2}} \sum_{i=1}^{n^{\gamma_2}} f(X_{T,i}^n) - f(X_{T,i}^{n^\beta}),$$

where $\hat{X}_T^{n^\beta}$ is a second Euler scheme with step T/n^β and such that the Brownian paths used for X_T^n and $X_T^{n^\beta}$ has to be independent of the Brownian paths used in order to simulate $\hat{X}_T^{n^\beta}$. Here the quantity $\frac{1}{n^{\gamma_1}} \sum_{i=1}^{n^{\gamma_1}} f(\hat{X}_{T,i}^{n^\beta})$ must be viewed as an approximation for M_m .

Theorem 2.3.2. *Let f be an \mathbb{R}^d -valued function satisfying*

$$(\mathcal{H}_f) \quad |f(x) - f(y)| \leq C(1 + |x|^p + |y|^p)|x - y|, \quad \text{for some } C, p > 0.$$

Assume that $\mathbb{P}(X_T \notin \mathcal{D}_f) = 0$, where $\mathcal{D}_f := \{x \in \mathbb{R}^d; f \text{ is differentiable at } x\}$, and that for some $\alpha \in [1/2, 1]$ we have

$$(\mathcal{H}_{\varepsilon_n}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \varepsilon_n = C_f(T, \alpha).$$

Then, for $\gamma_1 = 2\alpha$ and $\gamma_2 = 2\alpha - \beta$, we have

$$n^\alpha (V_n - \mathbb{E} f(X_T)) \Rightarrow \sigma_2 \tilde{G} + C_f(T, \alpha),$$

with $\sigma_2^2 = \text{Var}(f(X_T)) + \tilde{\text{Var}}(\nabla f(X_T)U_T)$ and \tilde{G} a standard normal.

Lemma 2.3.1. *Under the assumptions of Theorem 2.3.2, for all $\gamma > 0$*

$$\frac{1}{n^{(\frac{\gamma-\beta}{2})}} \sum_{i=1}^{n^\gamma} f(X_{T,i}^{n^\beta}) - f(X_{T,i}) - \mathbb{E}(f(X_T^{n^\beta}) - f(X_T)) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_1^2) \quad (2.15)$$

where

$$\sigma_1^2 = \tilde{\text{Var}}(\nabla f(X_T).U_T) \quad (2.16)$$

and U the process on $\tilde{\mathcal{B}}$ given by (2.3).

Proof. If we set $Z_T^{n^\beta} = f(X_T^{n^\beta}) - f(X_T) - \mathbb{E}(f(X_T^{n^\beta}) - f(X_T))$, then we have

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{i u}{n^{(\frac{\gamma-\beta}{2})}} \sum_{k=1}^{n^\gamma} Z_{T,k}^{n^\beta} \right) \right] = \left[1 + \frac{1}{n^\gamma} \left(\frac{-u^2}{2} n^\beta \mathbb{E} |Z_T^{n^\beta}|^2 + n^\gamma \mathbb{E} C_n(\omega) \right) \right]^{n^\gamma},$$

where $|\mathbb{E} C_n(\omega)| \leq \frac{u^3}{6n^{\frac{3}{2}(\gamma-\beta)}} \mathbb{E} |Z_T^{n^\beta}|^3$.

Property $\mathcal{P}1)$ ensures the existence of a constant $K_3 > 0$ such that

$$|\mathbb{E} C_n(\omega)| \leq \frac{K_3 u^3}{6n^{\frac{3}{2}\gamma}}.$$

We have, with probability 1,

$$n^{\beta/2} (f(X_T^{n^\beta}) - f(X_T)) = n^{\beta/2} \nabla f(X_T).U_T^{n^\beta} + R_n, \text{ with}$$

$R_n = n^{\beta/2} |U_T^{n^\beta}| \varepsilon(X_T, U_T^{n^\beta})$ and $\varepsilon(X_T, U_T^{n^\beta}) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

From the tightness of $(n^{\beta/2}|U_T^{n^\beta}|)_n$ it follows that $R_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, then according to Lemma 2.2.1 and to Theorem 2.2.1

$$n^{\beta/2}(f(X_T^{n^\beta}) - f(X_T)) \Rightarrow \nabla f(X_T).U_T. \quad (2.17)$$

Using (\mathcal{H}_f) it follows from property $\mathcal{P}1$) that

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sup_n \mathbb{E} \left| n^{\beta/2}(f(X_T^{n^\beta}) - f(X_T)) \right|^{2+\varepsilon} < \infty.$$

Since $\mathbb{P}(X_T \notin \mathcal{D}_f) = 0$, we deduce using (2.17) that

$$\mathbb{E} \left(n^{\beta/2}(f(X_T^{n^\beta}) - f(X_T)) \right)^k \rightarrow \tilde{\mathbb{E}} \left(\nabla f(X_T).U_T \right)^k < \infty \quad \text{with } k \in \{1, 2\}.$$

Consequently,

$$n^\beta \mathbb{E} |Z_T^{n^\beta}|^2 \rightarrow \tilde{V}ar(\nabla f(X_T).U_T) < \infty. \quad (2.18)$$

Since $\gamma > 0$ we see that $n^\gamma \mathbb{E} C_n(\omega) \rightarrow 0$ and we conclude that

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{i u}{n^{(\frac{\gamma-\beta}{2})}} \sum_{k=1}^{n^\gamma} Z_{T,k}^{n^\beta} \right) \right] \rightarrow \exp \left[\frac{-u^2}{2} \tilde{V}ar(\nabla f(X_T).U_T) \right],$$

which completes the proof. \square

Lemma 2.3.2. *Under the assumptions of Theorem 2.3.2, for all $\gamma > 0$*

$$\frac{1}{n^{(\frac{\gamma-\beta}{2})}} \sum_{k=1}^{n^\gamma} f(X_{T,k}^n) - f(X_{T,k}^{n^\beta}) - \mathbb{E} (f(X_T^n) - f(X_T^{n^\beta})) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_1^2),$$

where $\sigma_1^2 = \tilde{V}ar(\nabla f(X_T).U_T)$.

Proof. We have

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{(\frac{\gamma-\beta}{2})}} \sum_{k=1}^{n^\gamma} f(X_{T,k}^n) - f(X_{T,k}^{n^\beta}) - \mathbb{E} (f(X_T^n) - f(X_T^{n^\beta})) = \\ \frac{1}{n^{(\frac{\gamma-\beta}{2})}} \sum_{k=1}^{n^\gamma} Z_{T,k}^n - \frac{1}{n^{(\frac{\gamma-\beta}{2})}} \sum_{k=1}^{n^\gamma} Z_{T,k}^{n^\beta}, \end{aligned}$$

By (2.18) it follows that

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{n^{(\frac{\gamma-\beta}{2})}} \sum_{k=1}^{n^\gamma} Z_{T,k}^n \right]^2 = n^\beta \mathbb{E} [Z_T^n]^2 \rightarrow 0. \quad (2.19)$$

The announced result follows from the above lemma. \square

Proof of Theorem 2.3.2. For $\gamma_1 = 2\alpha$, $\gamma_2 = 2\alpha - \beta$, we have

$$n^\alpha (V_n - \mathbb{E} f(X_T)) = V_n^1 + V_n^2 + V_n^3,$$

where

$$V_n^1 = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{i=1}^{n^{2\alpha}} f(\hat{X}_{T,i}^{n^\beta}) - \mathbb{E} f(\hat{X}_T^{n^\beta}), \quad (2.20)$$

$$V_n^2 = \frac{1}{n^{\alpha-\beta}} \sum_{i=1}^{n^{2\alpha-\beta}} f(X_{T,i}^n) - f(X_{T,i}^{n^\beta}) - \mathbb{E} (f(X_T^n) - f(X_T^{n^\beta})), \quad (2.21)$$

$$V_n^3 = n^\alpha (\mathbb{E} f(X_T^n) - \mathbb{E} f(X_T)). \quad (2.22)$$

Properties $\mathcal{P1}$) and $\mathcal{P2}$) guarantee that the Lindeberg-Feller theorem applies here (same argument as in Duffie et Glynn (1995)). That is

$$V_n^1 \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \text{Var}(f(X_T))\right).$$

On account of Lemma 2.3.2 it is obvious that

$$V_n^2 \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \tilde{\text{Var}}(\nabla f(X_T) \cdot U_T)\right).$$

Finally, by using the assumption $(\mathcal{H}_{\varepsilon_n})$ we complete the proof. \square

2.3.3 Complexity analysis

As in the Monte Carlo case we can interpret Theorem 2.3.2 as follows. For a total error of order $1/n^\alpha$ the minimal computational effort necessary to run the Statistical Romberg algorithm applied to the Euler scheme (with steps numbers n and $m = n^\beta$) is obtained for :

$$N_m = n^2\alpha \quad \text{and} \quad N_n = n^{2\alpha-\beta}. \quad (2.23)$$

Since the only constraint on β is that $\beta \in (0, 1)$, we will choose the optimal β^* minimizing the complexity of the statistical Romberg algorithm. The time complexity in the statistical

Romberg method is given by

$$\begin{aligned} C_{SR} &= C \times (mN_m + (n+m)N_n) \quad \text{with } C > 0 \\ &= C \times (n^{\beta+2\alpha} + (n+n^\beta)n^{2\alpha-\beta}). \end{aligned}$$

Simple calculations show that $\beta^* = 1/2$ is the optimal choice which minimizes the time complexity.

So the optimal parameters in this case are :

$$m = n^{1/2}, \quad N_m = n^{2\alpha}, \quad \text{and} \quad N_n = n^{2\alpha-1/2},$$

and the optimal complexity of the statistical Romberg method is given by

$$C_{SR} \simeq C \times n^{2\alpha+1/2}.$$

However for the same error of order $1/n^\alpha$ we have shown that the optimal complexity of a Monte Carlo method was given by

$$C_{MC} = C \times n^{2\alpha+1},$$

which is clearly larger than C_{SR} . So we deduce that the statistical Romberg method is more efficient.

2.4 Statistical Romberg method and Asian options

The payoff of an Asian option is related to the integral of the asset price process. Computing the price of an Asian option requires the discretization of the integral. The purpose of this section is to apply statistical Romberg extrapolation to the approximation of the integral and to carry on a complexity analysis in this context. This will lead us to prove a central limit theorem for the discretization error, which can be viewed as the analogue of Theorem 2.2.1 (see Theorem 2.4.1).

2.4.1 Trapezoidal scheme

Let S be the process on the stochastic basis $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ satisfying

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t, \quad \text{with } t \in [0, T], \quad T > 0, \quad (2.24)$$

where σ and r are real constants, with $\sigma > 0$ and $(W_t)_{t \in [0, T]}$ is a standard Brownian motion on \mathcal{B} . The solution of the last equation is given by

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right). \quad (2.25)$$

We set

$$I_T = \frac{1}{T} \int_0^T S_u du.$$

Let f be a given real valued function. Our aim will be to evaluate

$$\Pi(S, T) = e^{-rT} \mathbb{E} f(S_T, I_T).$$

In a financial setting, if $f(x, y) = (y - K)_+$, $\Pi(S, T)$ is the price of an Asian call option with fixed strike K . In this case there is no explicit formula that gives the real price. So, the computation of this price, by a probabilistic method, requires a discretization of the integral I_T . There are several approximation schemes used in practice. One of the most efficient is the trapezoidal scheme defined by

$$I_T^n = \frac{\delta}{T} \sum_{k=1}^n S_{t_{k-1}} \left(1 + \frac{r\delta}{2} + \sigma \frac{W_{t_k} - W_{t_{k-1}}}{2}\right), \quad (2.26)$$

where $\delta = \frac{T}{n}$ and $t_k = \frac{Tk}{n} = \delta k$. We call it trapezoidal because it is closely related to the trapezoidal approximation of the integral :

$$\mathbb{E} \left(I_T^n - \frac{\delta}{T} \sum_{k=1}^n \frac{S_{t_{k-1}} + S_{t_k}}{2} \right)^2 = O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Note that S_{t_k} has an explicit expression so we can simulate it without discretizing the S.D.E. The following result is proved in Temam (2001).

Proposition 2.4.1. *With the above notations, there exists a non decreasing map $K(T)$ such that, $\forall p > 0$*

$$\left[\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |I_t^n - I_t|^{2p} \right) \right]^{\frac{1}{2p}} \leq \frac{K(T)}{n}.$$

2.4.2 Stable convergence of the trapezoidal scheme error

In the following we prove a functional CLT analogous to Jacod and Protter's theorem (see Theorem 2.2.1 above).

Theorem 2.4.1. *Let $J_t = \frac{1}{T} \int_0^t S_u du$, $t \in [0, T]$ and J_n be the trapezoidal discretization associated with J :*

$$J_t^n := \frac{\delta}{T} \sum_{k=1}^{\lceil t/\delta \rceil} S_{t_{k-1}} \left(1 + \frac{r\delta}{2} + \sigma \frac{W_{t_k} - W_{t_{k-1}}}{2} \right).$$

We have

$$n(J - J^n) \Rightarrow^{stably} \chi, \quad (2.27)$$

where χ is the process defined by

$$\chi_t = \frac{\sigma}{2\sqrt{3}} \int_0^t S_s dB'_s,$$

where B' is a standard Brownian motion on an extension $\hat{\mathcal{B}}$ of \mathcal{B} , which is independent of W .

We have the following elementary lemma.

Lemma 2.4.1. *If H is deterministic satisfying $\int_0^t H_s^2 ds < \infty$ then we have*

$$\int_0^t \frac{\tau_\delta(s)}{\delta} H_s ds \longrightarrow \frac{1}{2} \int_0^t H_s ds$$

and

$$\int_0^t \left(2 \frac{\tau_\delta(s)}{\delta} - 1 \right)^2 H_s ds \longrightarrow \frac{1}{3} \int_0^t H_s ds,$$

with $\tau_\delta(s) = t \wedge ([s/\delta]\delta + \delta) - s$.

Proof. We sketch the proof for completeness. By a density argument, we may assume that H is piecewise constant : $H_s = c_i$ for $T_{i-1} < s < T_i$, where $0 = T_0 < \dots < T_k = T$ and (c_i) are constants for $i = 0, \dots, k$. It follows that

$$\int_0^t \frac{\tau_\delta(s)}{\delta} H_s ds = \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{\delta} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \tau_\delta(s) ds \rightarrow \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{2} (T_{i+1} - T_i) = \int_0^t \frac{H_s}{2} ds,$$

since it is easy to check that $\frac{1}{\delta} \int_x^y \tau_\delta(s) ds \rightarrow \frac{y-x}{2}$ as $n \rightarrow \infty$.

The second assertion is obtained in the same way but by using that

$$\frac{1}{\delta^2} \int_x^y \left(2 \frac{\tau_\delta(s)}{\delta} - \delta \right)^2 ds \rightarrow \frac{y-x}{3} \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

which completes the proof. \square

Proof of Theorem 2.4.1. We have

$$\begin{aligned} n(J_t - J_t^n) &= \frac{n}{T} \int_0^t S_u du - n \left(\frac{\delta}{T} \sum_{k=1}^{[t/\delta]} S_{t_{k-1}} + \frac{\delta^2 r}{2T} \sum_{k=1}^{[t/\delta]} S_{t_{k-1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta \sigma}{2T} \sum_{k=1}^{[t/\delta]} S_{t_{k-1}} (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \right) + \frac{n\delta}{T} S_{[t/\delta]\delta} \left(1 + \frac{r}{2} (t - [t/\delta]\delta) + \frac{\sigma}{2} (W_t - W_{[t/\delta]\delta}) \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

It follows that

$$n(J_t - J_t^n) = A_t^\delta - \frac{r}{2} \int_0^t S_{[u/\delta]\delta} du - \frac{\sigma}{2} \int_0^t S_{[u/\delta]\delta} dW_u, \quad (2.29)$$

with $A_t^\delta = \frac{1}{\delta} \int_0^t (S_u - S_{[u/\delta]\delta}) du$.

Note that by using (2.24) we obtain

$$A_t^\delta = A_t^{\delta,1} + A_t^{\delta,2},$$

with $A_t^{\delta,1} = \frac{r}{\delta} \int_0^t \int_{[u/\delta]\delta}^u S_s ds du$ and $A_t^{\delta,2} = \frac{\sigma}{\delta} \int_0^t \int_{[u/\delta]\delta}^u S_s dW_s du$,

and we have

$$\begin{aligned} A_t^{\delta,1} &= \frac{r}{\delta} \sum_{k=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{t_{k-1}}^u S_s ds du + \frac{r}{\delta} \int_{\lfloor t/\delta \rfloor \delta}^t \int_{\lfloor t/\delta \rfloor \delta}^u S_s ds du, \\ &= \frac{r}{\delta} \int_0^t (t \wedge ([s/\delta]\delta + \delta) - s) S_s ds, \\ &= \frac{r}{\delta} \int_0^t \tau_\delta(s) S_s ds. \end{aligned}$$

In the same manner we can see that

$$A_t^{\delta,2} = \frac{\sigma}{\delta} \sum_{k=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{t_{k-1}}^u S_s dW_s du + \frac{\sigma}{\delta} \int_{\lfloor t/\delta \rfloor \delta}^t \int_{\lfloor t/\delta \rfloor \delta}^u S_s dW_s du.$$

The integration by parts formula gives

$$\begin{aligned} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{t_{k-1}}^u S_s dW_s du &= (t_k - t_{k-1}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} S_s dW_s - \int_{t_{k-1}}^{t_k} (s - t_k) S_s dW_s \\ &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} ([s/\delta]\delta + \delta - s) S_s dW_s \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \int_{\lfloor t/\delta \rfloor \delta}^t \int_{\lfloor t/\delta \rfloor \delta}^u S_s dW_s du &= (t - \lfloor t/\delta \rfloor \delta) \int_{\lfloor t/\delta \rfloor \delta}^t S_s dW_s - \int_{\lfloor t/\delta \rfloor \delta}^t (s - \lfloor t/\delta \rfloor \delta) S_s dW_s \\ &= \int_{\lfloor t/\delta \rfloor \delta}^t (t - s) S_s dW_s, \end{aligned}$$

we deduce that

$$\begin{aligned} A_t^{\delta,2} &= \frac{\sigma}{\delta} \sum_{k=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor} \int_{t_{k-1}}^{t_k} ([s/\delta]\delta + \delta - s) S_s dW_s + \frac{\sigma}{\delta} \int_{\lfloor t/\delta \rfloor \delta}^t (t - s) S_s dW_s, \\ &= \frac{\sigma}{\delta} \int_0^t (t \wedge ([s/\delta]\delta + \delta) - s) S_s dW_s, \\ &= \frac{\sigma}{\delta} \int_0^t \tau_\delta(s) S_s dW_s. \end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned} n(J_t - J_t^n) &= \frac{r}{\delta} \int_0^t \tau_\delta(s) S_s ds + \frac{\sigma}{\delta} \int_0^t \tau_\delta(s) S_s dW_s - \frac{r}{2} \int_0^t S_{\lfloor s/\delta \rfloor \delta} ds \\ &\quad - \frac{\sigma}{2} \int_0^t S_{\lfloor s/\delta \rfloor \delta} dW_s. \end{aligned}$$

We deduce that

$$n(J_t - J_t^n) = B_t^\delta + \chi_t^\delta + C_t^\delta, \quad \text{with}$$

$$B_t^\delta = \frac{r}{2} \int_0^t \left(2 \frac{\tau_\delta(s)}{\delta} - 1 \right) S_s ds,$$

$$\chi_t^\delta = \frac{\sigma}{2} \int_0^t \left(2 \frac{\tau_\delta(s)}{\delta} - 1 \right) S_s dW_s,$$

$$C_t^\delta = \frac{r}{2} \int_0^t (S_s - S_{[s/\delta]\delta}) ds + \frac{\sigma}{2} \int_0^t (S_s - S_{[s/\delta]\delta}) dW_s.$$

According to the above lemma we obtain that $\sup_{t \in [0, T]} B_t^\delta \rightarrow 0$ a.s.. It is obvious that $\sup_{t \in [0, T]} C_t^\delta \rightarrow^{L^2} 0$. The only point remaining concerns the behavior of χ^δ .

In virtue of Theorem 2.1 of Jacod (1997) if we prove that for all $t \in [0, T]$ we have

$$\langle \chi^\delta, \chi^\delta \rangle_t \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{\sigma^2}{12} \int_0^t S_s^2 ds, \quad \langle \chi^\delta, W \rangle_t \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

then the process χ^δ will converge stably in law to the process χ of (2.27). According to the above lemma we have

$$\langle \chi^\delta, \chi^\delta \rangle_t = \frac{\sigma^2}{4} \int_0^t \left(2 \frac{\tau_\delta(s)}{\delta} - 1 \right)^2 S_s^2 dW_s \longrightarrow \frac{\sigma^2}{12} \int_0^t S_s^2 ds \quad \text{a.s.},$$

and

$$\langle \chi^\delta, W \rangle_t = \frac{\sigma}{2} \int_0^t \left(2 \frac{\tau_\delta(s)}{\delta} - 1 \right) S_s ds \longrightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

which completes the proof. \square

2.4.3 Statistical Romberg method and C.L.T

In order to evaluate $e^{-rT} \mathbb{E} f(S_T, I_T)$ we use the idea of statistical Romberg approximation :

- compute an approximation E_n^1 of $e^{-rT} \mathbb{E} f(S_T, \hat{I}_T^{n^\beta})$ by a Monte Carlo method

$$E_n^1 = \frac{e^{-rT}}{n^{\gamma_1}} \sum_{i=1}^{n^{\gamma_1}} f(\hat{S}_{T,i}, \hat{I}_{T,i}^{n^\beta}),$$

• compute

$$E_n^2 = \frac{e^{-rT}}{n^{\gamma_2}} \sum_{i=1}^{n^{\gamma_2}} f(S_{T,i}, I_{T,i}^n) - f(S_{T,i}, I_{T,i}^{n^\beta}).$$

Recall that the samples used, in order to construct

$$(\hat{S}_{T,i}, \hat{I}_{T,i}^{n^\beta}) \text{ and } ((S_{T,i}, I_{T,i}^n), (S_{T,i}, I_{T,i}^{n^\beta})),$$

are independent. The question now is how to choose β , γ_1 and γ_2 . Admittedly we can choose the optimal parameters given in the Euler scheme case but the following result proves that in the specific case of the trapezoidal scheme the optimal parameters are different.

Theorem 2.4.2. *Let f be an \mathbb{R}^2 -valued function satisfying*

$$(\mathcal{H}'_f) |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq C(1 + |x|^p + |y_1|^p + |y_2|^p)|y_1 - y_2|, \text{ for some } C, p > 0.$$

Assume that $\mathbb{P}((S_T, I_T) \notin \mathcal{D}_f) = 0$, with

$$\mathcal{D}_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid \partial_2 f(x, y) \text{ exists}\},$$

where $\partial_2 f$ denotes the partial derivative of f w.r.t. y . Then for all $\beta \in (0, 1)$, if $\gamma_1 = 2$ and $\gamma_2 = 2 - 2\beta$ we have

$$n(E_n - \mathbb{E} f(S_T, I_T)) \Rightarrow \hat{\sigma}_2 \hat{G} + \hat{\mathbb{E}} (\partial_2 f(S_T, I_T) \chi_T),$$

where $\hat{\sigma}_2^2 = \text{Var}(f(S_T, I_T)) + \hat{\text{V}}ar(\partial_2 f(S_T, I_T) \chi_T)$, χ is the limit process on $\hat{\mathcal{B}}$ given in Theorem 2.4.1, and \hat{G} a standard normal.

Remark 1. *The assumptions on f in the above theorem are satisfied in the case of typical Asian options :*

$$f(x, y) = (y - K)_+, \quad f(x, y) = (K - y)_+, \quad f(x, y) = (y - x)_+.$$

Lemma 2.4.2. *Under the assumptions of Theorem 2.4.2, for all $\gamma > 0$*

$$\frac{1}{n^{(\frac{\gamma}{2}-\beta)}} \sum_{k=1}^{n^\gamma} f(S_{T,k}, I_{T,k}) - f(S_{T,k}, I_{T,k}^{n^\beta}) -$$

$$\mathbb{E} \left(f(S_T, I_T) - f(S_T, I_T^{n^\beta}) \right) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \hat{\sigma}_1^2),$$

where $\hat{\sigma}_1^2 = \hat{\text{V}}ar(\partial_2 f(S_T, I_T) \chi_T)$.

Proof. If we set $H_T^{n^\beta} := f(S_T, I_T) - f(S_T, I_T^{n^\beta}) - \mathbb{E}(f(S_T, I_T) - f(S_T, I_T^{n^\beta}))$, then we have

$$\mathbb{E} \left[\exp\left(\frac{i u}{n^{(\frac{\gamma}{2}-\beta)}} \sum_{k=1}^{n^\gamma} H_{T,k}^{n^\beta}\right) \right] = \left[1 + \frac{1}{n^\gamma} \left(\frac{-u^2}{2} \text{Var}[n^\beta(f(S_T, I_T) - f(S_T, I_T^{n^\beta}))] \right. \right. \\ \left. \left. + n^\gamma \mathbb{E} C'_n(\omega) \right) \right]^{n^\gamma}, \quad (2.30)$$

with $|\mathbb{E} C'_n(\omega)| \leq \frac{u^3}{6n^{3(\frac{\gamma}{2}-\beta)}} \mathbb{E} |H_T^{n^\beta}|^3$. Proposition 2.4.1 ensures the existence of a constant $K(T) > 0$ such that :

$$|\mathbb{E} C'_n(\omega)| \leq \frac{K(T)u^3}{6n^{\frac{3}{2}\gamma}}.$$

We have, with probability 1,

$$n^\beta(f(S_T, I_T^{n^\beta}) - f(S_T, I_T)) = n^\beta \partial_2 f(S_T, I_T)(I_T^{n^\beta} - I_T) + R_n,$$

with $R_n = n^\beta |I_T^{n^\beta} - I_T| \varepsilon(S_T, I_T, I_T^{n^\beta})$ and $\varepsilon(S_T, I_T, I_T^{n^\beta}) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. From the tightness of $(n^\beta |I_T^{n^\beta} - I_T|)_n$ it follows that $R_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Consequently, according to lemma 2.2.1 and to Theorem 2.4.1 we obtain that

$$n^\beta(f(S_T, I_T^{n^\beta}) - f(S_T, I_T)) \Rightarrow \partial_2 f(S_T, I_T) \chi_T. \quad (2.31)$$

With our assumption (\mathcal{H}'_f) on f , it follows from Proposition 2.4.1 that

$$\sup_n \mathbb{E} \left| n^\beta \left(f(S_T, I_T) - f(S_T, I_T^{n^\beta}) \right) \right|^{2+\varepsilon} < \infty, \quad \text{with } \varepsilon > 0.$$

so we obtain

$$\mathbb{E} \left(n^\beta (f(S_T, I_T) - f(S_T, I_T^{n^\beta})) \right)^k \rightarrow \hat{\mathbb{E}} (\partial_2 f(S_T, I_T) \chi_T)^k < \infty, \quad \forall 0 < k \leq 2. \quad (2.32)$$

Hence we deduce that

$$\mathbb{E} \left[\exp\left(\frac{i u}{n^{(\frac{\gamma}{2}-\beta)}} \sum_{k=1}^{n^\gamma} H_{T,k}^{n^\beta}\right) \right] \longrightarrow \exp\left[\frac{-u^2}{2} \hat{\text{Var}}(\partial_2 f(S_T, I_T) \chi_T)\right],$$

which completes the proof. \square

Remark 2. It follows from the proof of the above lemma that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbb{E} (f(S_T, I_T^n) - f(S_T, I_T)) = \hat{\mathbb{E}}(\partial_2 f(S_T, I_T) \chi_T). \quad (2.33)$$

This gives us an expansion of the discretization error in our setting. Note that similar expansions are given in Temam (2001) for less regular functions. The advantage of our approach is that we do not need the associate P.D.E, so that our expansion is more explicit.

The proof of the following result is a consequence of the above lemma.

Lemma 2.4.3. *Under the assumptions of Theorem 2.4.2 and for all $\gamma > 0$ we have*

$$\frac{1}{n^{(\frac{\gamma}{2}-\beta)}} \sum_{k=1}^{n^\gamma} f(S_{T,k}, I_{T,k}^n) - f(S_{T,k}, I_{T,k}^{n^\beta}) - \mathbb{E} \left(f(S_T, I_T^n) - f(S_T, I_T^{n^\beta}) \right) \Rightarrow \mathcal{N} \left(0, \hat{\sigma}_1^2 \right),$$

with $\hat{\sigma}_1^2 = \tilde{V}ar(\partial_2 f(S_T, I_T) \chi_T)$.

Using Lemma 2.4.3, Theorem 2.4.2 can be proved in much the same way as Theorem 2.3.2. The equality (2.33) will be used instead of the assumption $(\mathcal{H}_{\varepsilon_n})$ on $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \varepsilon_n$ in Theorem 2.3.2.

2.4.4 Complexity Analysis

As in the Euler scheme case one can interpret the above theorem in the following way. For a total error of order $1/n$ the minimal computational effort necessary to run the statistical Romberg method applied to the trapezoidal scheme (with steps numbers n and $m = n^\beta$) is obtained for

$$N_m = n^2 \quad \text{and} \quad N_n = n^{2-2\beta}. \quad (2.34)$$

Since the only restriction on β is that $\beta \in (0, 1)$, we will choose the optimal β^* minimizing the complexity of the statistical Romberg algorithm. In this case the time complexity in the statistical Romberg method is given by :

$$\begin{aligned} C_{SR} &= C \times (mN_m + (n+m)N_n), \quad \text{with } C > 0 \\ &= C \times (n^{\beta+2} + (n+n^\beta)n^{2-2\beta}). \end{aligned}$$

Simple calculations show that $\beta^* \simeq 1/3$ is the optimal choice which minimizes the time complexity.

So the optimal parameters in this case are

$$m = n^{1/3}, \quad N_m = 2, \quad \text{and} \quad N_n = n^{4/3},$$

and the optimal complexity of the statistical Romberg method is given by :

$$C_{SR} \simeq C \times n^{7/3}.$$

But according to Proposition 2.4.1, Theorem 2.3.1 remains valid if we change the Euler scheme by the trapezoidal one. Hence, for the same error of order $1/n$ the optimal complexity of a Monte Carlo method applied to the trapezoidal scheme with step number n is given by :

$$C_{MC} = C \times n^3,$$

which is clearly larger than C_{SR} . So we deduce that the statistical Romberg method is more efficient.

2.5 Numerical tests and results

We test the efficiency of the statistical Romberg method to reduce the time complexity for the degenerate two dimensional diffusion given in the example of section 2.2.

Consider the bi-dimensional diffusion

$$Z_t = (\cos(\theta + W_t), \sin(\theta + W_t)), \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

and the map

$$f_\alpha : z = (x, y) \mapsto ||z|^2 - 1|^{2\alpha}, \quad \alpha \in [1/2, 1],$$

given in the example of section 2.2. Note that in this case

$$\text{Var}(f_\alpha(Z_T)) = 0,$$

and this is because the bi-dimensional diffusion $Z = (X, Y)$ lives on the unit circle. Consequently, in order to obtain the optimal parameters given by Theorem 2.3.1 and Theorem

2.3.2 we consider $g_\alpha(x, y) = f_\alpha(x, y) + x$ instead of $f_\alpha(x, y)$. This choice leads us to a non vanishing variance of $g_\alpha(Z_T)$ and to a discretization error which is of order $1/n^\alpha$, $\alpha \in [1/2, 1]$. In the following we set

- **MC method** : the algorithm using a Monte Carlo method to approximate $\mathbb{E}(g_\alpha(Z_T))$ by

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_\alpha(Z_{T,i}^n).$$

- **SR method** : the algorithm using a statistical Romberg method to approximate $\mathbb{E}(g_\alpha(Z_T))$ by

$$\frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} [g_\alpha(Z_{T,i}^{N_n}) - g_\alpha(Z_{T,i}^{N_m})] + \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} g_\alpha(\hat{Z}_{T,i}^{N_m}). \quad (2.35)$$

To compare both methods, we use the methodology proposed by Broadie et Detemple (1997). Their idea is that for a given set of parameters of the concerned diffusion one of both algorithms will give better results. So they propose to test the algorithm on a large set of parameters chosen randomly.

Proceeding along this line, we produce randomly $M = 200$ values for $Z_0 = (X_0, Y_0)$. Then, for each method we compute the speed and an error measure. Speed is measured by the number of simulated values computed per second (the computations were done on a PC with a 2.00 GHz Pentium 4 processor). The error measure is given by the root-mean-squared error which is defined by

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (Real\ value - Simulated\ value)^2}, \quad (2.36)$$

and the real value is given by the formula $\mathbb{E}(g_\alpha(Z_T)) = \cos(\theta - T/2)$.

Our algorithm proceeds as follows. We fix the number of steps, say $n = 80$, in the Euler scheme. We compute by the Monte Carlo method (respectively the statistical Romberg method) the 200 simulated values. Then, we produce according to (2.36) $RMS^{(MC, n=200)}$ and we compute $Speed^{(MC, n=200)}$. So we have a couple of points

$$(RMS^{(MC, n=200)}, Speed^{(MC, n=200)}).$$

This point is plotted on Figure 1. So, each given n produces a couple of points : $(\text{RMS}^{\text{MC},n}, \text{Speed}^{\text{MC},n})$. This gives the continuous curve in Figure 1. The line marked by squares is produced in the same way, using the statistical Romberg method.

Tests are done for $\alpha = 1/2$. Note that, although, g_α is not \mathcal{C}^1 in that case, Theorem 2.3.2 can be extended to this specific example as we can handle the difference $g_{1/2}(Z_T^{\sqrt{n}}) - g_{1/2}(Z_T)$.

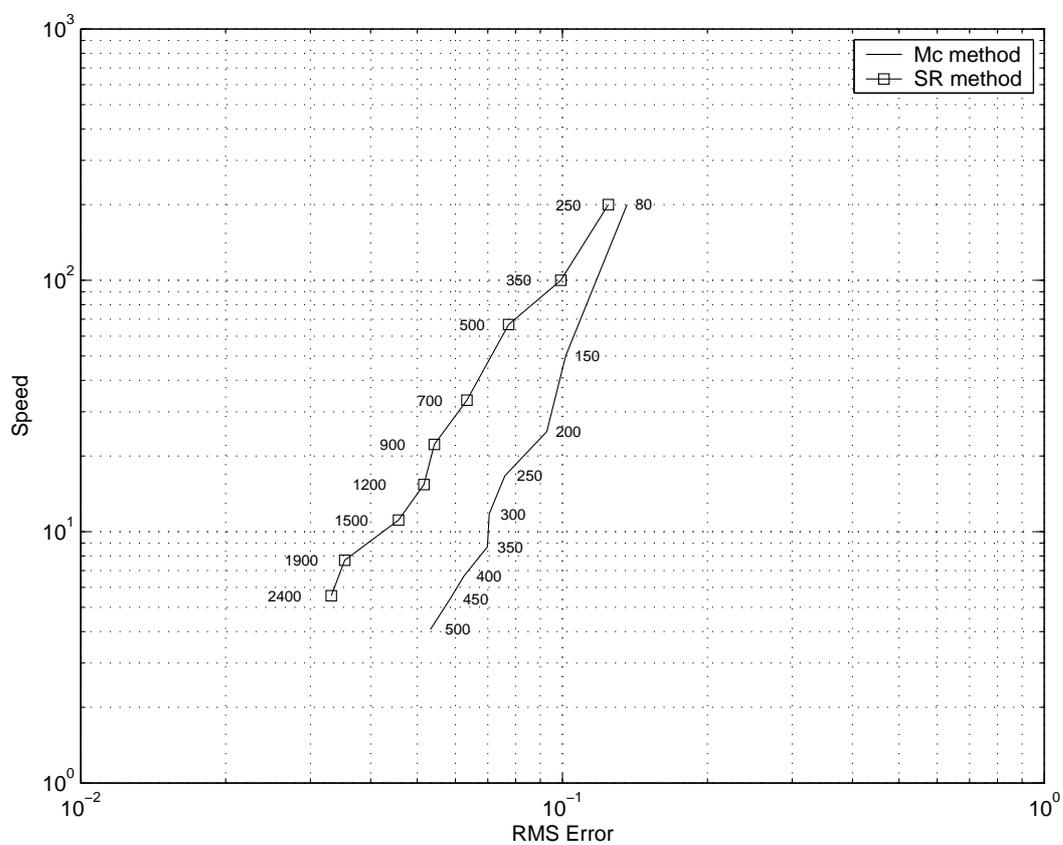


Figure 1 : Speed versus RMS Error

RMS relative error	MC method Speed	SR method Speed
10^{-1}	45.405	102.718
$9 \cdot 10^{-2}$	23.599	85.876
$8 \cdot 10^{-2}$	18.647	70.712
$7 \cdot 10^{-2}$	9.219	49.179
$6 \cdot 10^{-2}$	5.883	29.234

Table 1

Time complexity reduction for $\alpha = 1/2$

Let us now interpret the curves. The fact that the SR curve is higher than the MC one means that given an error ε , the number of values computed in one second (with this error) by the statistical Romberg algorithm is larger than the number of values computed by the Monte Carlo method. Note anyway that for a large ε (which corresponds to a small number of steps n) the differences between the two methods is less important. But as ε becomes small (n becomes large) the difference becomes more significant.

In Table 1 we compare the speed of the Monte Carlo method and the speed of the statistical Romberg one, for a fixed RMS-error. We note that, by using the statistical Romberg method and for an RMS-error fixed at 10^{-1} , one increases the speed by a factor of 2.26. For a small RMS-error fixed at 6.10^{-2} the speed gain reaches a factor of 4.96.

2.5.1 Statistical Romberg method for pricing Asian options

We follow the notations of section 2.4.2.

Asian options (or options on average) is the general name for a class of options the payoff of which depends on the average value of an underlying asset over a specified period.

We focus our attention on the case of a call with fixed strike, thus the price of an Asian option with maturity T is given by :

$$\Pi(T, S) = e^{-rT} \mathbb{E} \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+$$

In order to use a Monte Carlo method to compute the above price, we approximate the integral : $I_T = \frac{1}{T} \int_0^T S_u du$. by the trapezoidal scheme

$$I_T^n = \frac{h}{T} \sum_{k=0}^{n-1} S_{t_k} \left(1 + \frac{rh}{2} + \sigma \frac{W_{t_{k+1}} - W_{t_k}}{2} \right). \quad (2.37)$$

Note that S_{t_k} has an explicit expression so we can simulate it without discretization.

It was proved in Temam(2001) that this scheme is one of the most efficient. In the following we denote by :

– **T-SR** :

the algorithm using the statistical Romberg method to approximate $\Pi(S, T)$ by :

$$E_n = E_n^1 + E_n^2 \quad , \text{ where :}$$

$$E_n^1 = \frac{e^{-rT}}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} \left(\hat{I}_{T,i}^m - K \right)_+ ,$$

$$E_n^2 = \frac{e^{-rT}}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} \left(I_{T,i}^m - K \right)_+ - \left(I_{T,i}^m - K \right)_+ .$$

Recall that the samples used in order to construct $\hat{I}_{T,i}^m$ and $(I_{T,i}^m, I_{T,i}^m)$ are different.

In contrast we use the same Brownian motion in order to construct $I_{T,i}^m$ and $I_{T,i}^m$.

– **T-MC** :

the algorithm using a Monte Carlo method to approximate $\Pi(S, T)$ by :

$$\frac{e^{-rT}}{N} \sum_{i=1}^N \left(I_{T,i}^n - K \right)_+ .$$

On account of section 2.3.1 the minimal effort to have convergence of the statistical Romberg with a total error of order $1/n$ is obtained for :

$$m = n^{1/3}, \quad N_m = n^2 \quad \text{and} \quad N_n = n^{4/3} .$$

As we have shown this leads to a total complexity of order $n^{7/3}$. However the minimal effort to have convergence of the Monte Carlo method in this case with a total error of order $1/n$ is obtained for $N = n^2$. This leads to a total Time complexity of order n^3 .

• **Application of the statistical Romberg method to the control variate of Kemna et Vorst (1990) :**

In the literature there already exists a control variate given by Kemna et Vorst (1990) which is very efficient for computing Asian options. The basic idea of the method of control variate presented by Kemna et Vorst (1990) is to approximate the arithmetic average $\frac{1}{T} \int_0^T S_u du$ by the geometric average $\exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_u) du\right)$ for small r and σ .

It follows that :

$$e^{-rT} \mathbb{E} (I_T - K)_+ = e^{-rT} \mathbb{E} \left[(I_T - K)_+ - (\exp(\zeta_T) - K)_+ \right]$$

$$+ e^{-rT} \mathbb{E} (\exp(\zeta_T) - K)_+ \tag{2.38}$$

where $\zeta_T = \frac{1}{T} \int_0^T \log(S_u) du$. But it is obvious that ζ_T has a normal distribution, hence by the Black and Scholes formula we can easily evaluate $A = e^{-rT} \mathbb{E}(\exp(\zeta_T) - K)_+$.

Consequently in order to simulate $\left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \int_0^T W_U du} - K\right)_+$ we have to use the path of the Brownian motion already simulated and we compute :

$$\left(\exp(\zeta_T^n) - K\right)_+ := \left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2} (W_{t_k} + W_{t_{k+1}})} - K\right)_+$$

This is an approximation of ζ_T , based on a trapezoidal scheme. We will see in the sequel that the statistical Romberg method can be easily combined with the control variate of Kemna et Vorst (1990).

Let us be more precise. Our aim is to compute (2.38), so we will use the control variate of ? first with a Monte Carlo method and then with the statistical Romberg method.

In the following we denote by :

– **T-KV-MC** :

the algorithm using the Monte Carlo method and the control variate of Kemna et Vorst (1990) to approximate $\Pi(S, T)$ by :

$$\frac{e^{-rT}}{N} \sum_{i=1}^N (I_{T,i}^n - K)_+ - \left(\exp(\zeta_{T,i}^n) - K\right)_+ + A$$

– **T-KV-SR** :

the algorithm using the statistical romberg method and the control variate of Kemna et Vorst (1990) to approximate $\Pi(S, T)$ by :

$$F_n = F_n^1 + F_n^2$$

where

$$F_n^1 = \frac{e^{-rT}}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} \left(\hat{I}_{T,i}^{n,\beta} - K\right)_+ - \left(\exp(\hat{\zeta}_{T,i}^{n,\beta}) - K\right)_+ + A.$$

$$F_n^2 = \frac{e^{-rT}}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} (I_{T,i}^n - K)_+ - (\exp(\zeta_{T,i}^n) - K)_+ \\ - ((I_{T,i}^{\beta} - K)_+ - (\exp(\zeta_{T,i}^{\beta}) - K)_+).$$

We will take the optimal parameters used to pricing Asian option without control variate. As we explained before to obtain a total error of order $1/n$ the minimal effort is obtained for :

$$\beta = 1/3, \quad N_m = n^2, \quad \text{and} \quad N_n = n^{4/3}.$$

This leads to a total complexity of order $n^{7/3}$ in the statistical Romberg method case. And with :

$$N = n^2,$$

in the Monte Carlo case. This leads to a total complexity of order n^3 .

In order to compare the four algorithms T-SR, T-MC, T-KV-MC and T-KV-SR equipped with the above parameters we will use the methodology presented by Broadie et Detemple (1997). We produce 1000 sets of parameters (σ, T, r, S_0) as follows

- The volatility σ follows a uniform law between 0.1 and 0.6.
- The maturity T is, with probability 0.75, uniform between 0.1 and 1.0 year, and, with probability 0.25 uniform between 1.0 and 5.0 years .
- The interest rate r is, with probability 0.8, uniform between 0.0 and 0.10, and, with probability 0.2 equal to 0.
- The spot S_0 is uniform between 70 and 130.

To be able to evaluate RMS relative error we choose $K = 0$ which is the only case where there exists a closed formula for the real price, and we proceed as the above example.

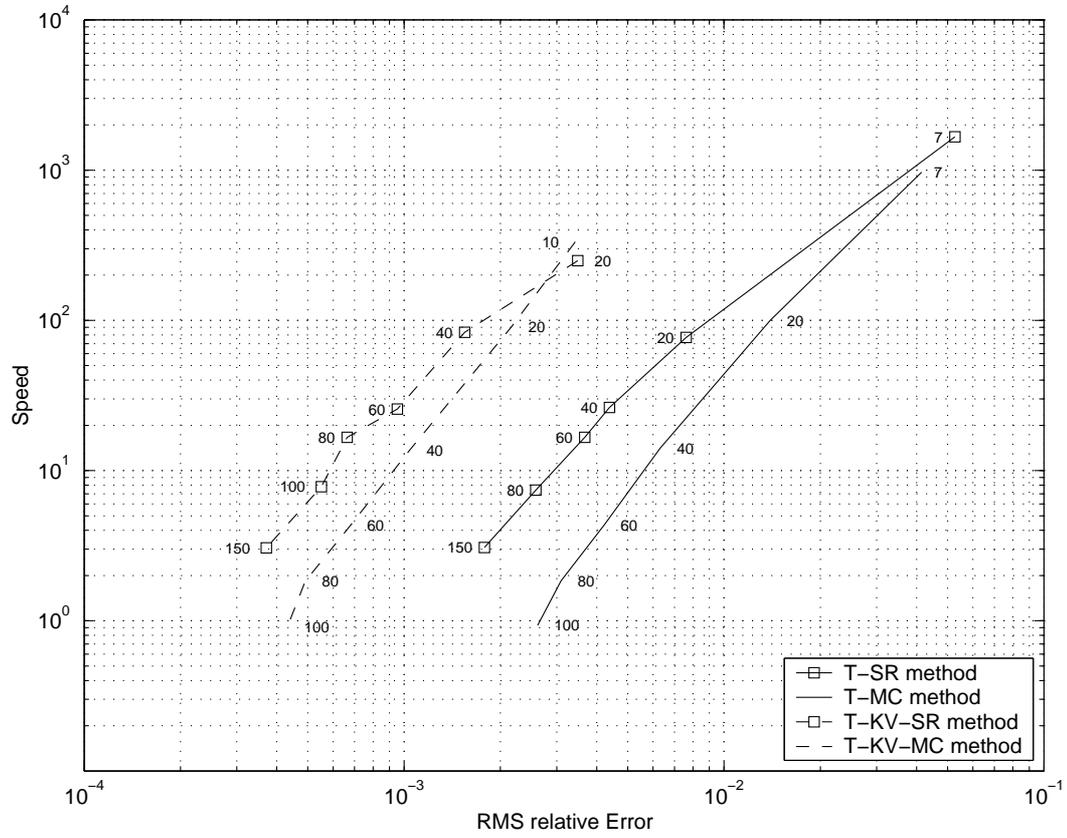


Figure 2 : Speed versus RMS relative error.

RMS relative error	T-MC method Speed	T-SR method Speed
3.10^{-2}	481.0529	777.8261
10^{-2}	55.5718	129.9244
7.10^{-3}	21.7690	67.2806
5.10^{-3}	7.9559	35.9739
3.10^{-3}	1.6662	10.9719

Table 2

Time complexity reduction for the Asian call with fixed strike

in the Black & Scholes model

Table 2 summarize the gain of time complexity obtained by using the statistical Romberg method and this without the control variate of Kemna et Vorst (1990). Note that given an RMS-error of order 3.10^{-2} the statistical Romberg method increases the speed by a factor of 1.6. For a small RMS-error of order 3.10^{-3} the gain factor is high and the speed gain has reached a factor of 6.5. Roughly speaking for an RMS-error of order 3.10^{-3} the statistical Romberg method computes in one second six times as many Asian option prices than the Monte Carlo one.

RMS relative error	T-KV-MC method	T-KV-SR method
	Speed	Speed
2.10^{-3}	79.3994	122.1907
10^{-3}	12.6353	30.2952
8.10^{-4}	7.4484	20.9045
6.10^{-4}	3.2687	11.6519
3.10^{-4}	0.1460	1.97

Table 3

Time complexity reduction for the Asian call wit fixed strike
with the control variate of Kemna & Vorst in the Black & Scholes model

In Table 3 we present the same comparison as above but with using this time the control variate of Kemna et Vorst (1990). Note that for an RMS-error of order 2.10^{-3} and by using the statistical Romberg method one increases the gain speed by a factor of 1.53. For an RMS-error fixed at 3.10^{-4} the gain factor is high. The speed gain has reached a factor of 14.07.

2.5.2 Conclusion

The statistical Romberg algorithm is a method that can be used in a general framework : as soon as we use a discretization scheme for the diffusion $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ in order to compute quantities such as $\mathbb{E} f(X_T)$ we can implement the statistical Romberg algorithm. And this is worth because it is more efficient than a classic Monte Carlo method.

In financial applications, it is sometimes essential to be able to price a given product on the market as soon as possible and this by setting a margin of error that one can tolerate. In this case the statistical Romberg method equipped with its parameters allowing complexity reduction is faster than the standard Monte Carlo one.

Chapitre 3

Estimation de la densité d'une diffusion non dégénérée

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème de l'approximation de la densité $p(x)$, d'une diffusion non-dégénérée X (sous l'hypothèse de Hörmander), à l'aide du schéma d'Euler X^n . On rappelle que sous ces hypothèses, Bally et Talay (1996b) ont démontré que $p(x) = p_n(x) + \frac{C}{n} + o(1/n)$, où $p_n(x)$ est la densité d'une régularisation de X^n . Ce résultat permet d'obtenir, en particulier, la vitesse de convergence de $\mathbb{E}f(X_T^n)$ vers $\mathbb{E}f(X_T)$ pour une fonction f mesurable, bornée. Mais du point de vue numérique on ne peut pas simuler $p_n(x) = \mathbb{E}\delta_x(X_T^n)$. Pour répondre à ce problème Kohatsu-Higa et Pettersson (2002) proposent la procédure suivante. On considère une fonction intégrable $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int \phi = 1$ et on définit les noyaux $\phi_{h,x}(y) = \frac{1}{h}\phi\left(\frac{y-x}{h}\right)$, $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On peut alors démontrer que $\phi_{h,x} \rightarrow \delta_x$ quand $h \rightarrow 0$, dans un sens plus ou moins fort, selon les hypothèses qu'on prend sur ϕ . L'idée est alors d'approximer $p(x) = \mathbb{E}\delta_x(X_T)$ par $\mathbb{E}\phi_{h,x}(X_T^n)$ où $h = n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. À ce niveau, un premier problème se pose, c'est celui de l'erreur faible donnée par

$$\varepsilon_n = \mathbb{E}\phi_{h,x}(X_T^n) - p(x).$$

Kohatsu-Higa et Pettersson (2002) démontrent que $|\varepsilon_n| \leq C/n$. Un des résultats principaux de notre travail est d'obtenir un développement d'ordre un de l'erreur. Nous démontrons que

$$\varepsilon_n = \frac{C}{n} + o(1/n).$$

(Voir Théorème 3.3.1). La preuve de ce résultat repose sur des techniques de calcul de Malliavin. Un deuxième problème consiste à calculer par la méthode de Monte Carlo la quantité $\mathbb{E}\phi_{h,x}(X_T^n)$. Dans leur papier, Kohatsu-Higa et Pettersson (2002) contournent, en quelque sorte, le problème en le mettant sous une nouvelle forme. À l'aide de la formule d'intégration par parties, Kohatsu-Higa et Pettersson (2002) obtiennent que

$$\mathbb{E}\phi_{h,x}(X_T^n) = \mathbb{E}\left(\psi_{h,x}(X_T^n)H_n\right),$$

où $\psi_{h,x}$ est la primitive de $\phi_{h,x}$ et H_n est le poids donné par le calcul de Malliavin. Avec cette nouvelle écriture, Kohatsu-Higa et Pettersson (2002) construisent une variable de contrôle, afin de réduire la variance dans le calcul de $\mathbb{E}\left(\psi_{h,x}(X_T^n)H_n\right)$. L'inconvénient de cette méthode, c'est que la complexité de l'algorithme proposé est plus élevée que celle d'une méthode d'approximation classique des densités par des noyaux.

Dans notre travail, nous partons pour calculer directement $\mathbb{E}\phi_{h,x}(X_T^n)$. Pour résoudre le problème de la réduction de variance, on construit une nouvelle variable de contrôle à l'aide de la méthode de Romberg statistique. Nous allons donc utiliser un schéma d'Euler auxiliaire X_T^m avec $m \ll n$ (voir chapitre 2 de la thèse). Le problème du réglage des paramètres de l'algorithme se pose de nouveau. Comme nous avons une erreur analytique de l'ordre $1/n$, nous exprimerons tous les paramètres de la méthode en fonction du nombre de pas de discrétisation n . Ainsi, nous choisissons $h = n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ (la taille de la fenêtre du noyau $\phi_{h,x}$), $m = n^\beta$ (le nombre de pas de discrétisation du schéma d'Euler auxiliaire), $N_m = n^{\gamma_1}$, $\gamma_1 > 0$ et $N_n = n^{\gamma_2}$, $\gamma_2 > 0$, où N_m , désigne la taille de l'échantillon nécessaire pour une estimation *grossière* de $\mathbb{E}\phi_{h,x}(X_T^n)$ par $\frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} \phi_{h,x}(X_{T,i}^{n^\beta})$, alors que N_n désigne la taille de l'échantillon pour une estimation *fine* de $\mathbb{E}\left\{\phi_{h,x}(X_T^n) - \phi_{h,x}(X_T^{n^\beta})\right\}$ par $\frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} \phi_{h,x}(X_{T,i}^n) - \phi_{h,x}(X_{T,i}^{n^\beta})$. Notre but est de trouver les paramètres optimaux aboutissant à une complexité optimale et inférieure à celle d'une méthode de Monte Carlo

classique. Comme dans le chapitre 2 de la thèse, cette optimisation est basée sur une extension du résultat obtenu par Jacod et Protter (1998) pour le comportement en loi de l'erreur dans le schéma d'Euler. Ce résultat, nous permettra d'établir un nouveau TLC de type Lindeberg-Feller, pour l'algorithme de Romberg statistique. Le problème spécifique que nous aurons à traiter, dans ce cas, concerne le calcul de la variance limite de la variable Gaussienne qui apparaît dans ce dernier TLC. Ce calcul nécessite encore l'utilisation des techniques du calcul de Malliavin. Nous terminerons, ce chapitre avec des essais numériques qui illustrent la méthode.

Le chapitre est organisé comme suit. Dans la section 3.2, nous faisons des rappels sur le calcul de Malliavin. Dans la section 3.3, nous étudions le développement de l'erreur de discrétisation. La section 3.4 est consacrée au TLC pour la méthode de Monte Carlo classique. La section 3.5 établit un théorème de convergence en loi stable pour la dérivée de Malliavin de l'erreur. Ce résultat permet d'établir un TLC pour la méthode de Romberg statistique dans la section 3.6, où sont également présentés des résultats numériques.

3.2 Calcul de Malliavin

Dans la suite on rappelle les notations de Nualart (1995) concernant le calcul de Malliavin. Soit $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ un mouvement Brownien standard sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ où $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ désigne la filtration engendré par W . On note $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telles que f et toutes ses dérivées partielles soient à croissance polynomiale.

On appelle S l'espace des variables aléatoires de la forme

$$F = f(W_{t_1}, \dots, W_{t_n}) \quad \text{avec } t_1, \dots, t_n \in [0, T], \quad f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (3.1)$$

Pour $F \in S$ on définit la dérivée de Malliavin comme :

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(W_{t_1}, \dots, W_{t_n}) \mathbf{1}_{[0, t_i]}(t), \quad t \in [0, T] \quad (3.2)$$

On note $H := L^2([0, T])$. On définit la $k^{\text{ième}}$ dérivée notée $D^k F$ comme la variable aléatoire à valeurs dans $H^{\otimes k}$ et donnée par

$$D_{t_1, \dots, t_k}^k F = D_{t_1} \dots D_{t_k} F \quad (3.3)$$

L'opérateur D^k est fermable et pour $p \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{D}^{k,p}(W)$ le complété de S par rapport à la norme

$$\|F\|_{k,p}^p := \mathbb{E}|F|^p + \sum_{j=1}^k \mathbb{E}(\|D^j F\|_{H^{\otimes j}}^p). \quad (3.4)$$

On note $\mathbb{D}^\infty(W) = \bigcap_{p \geq 1} \bigcap_{k \geq 1} \mathbb{D}^{k,p}(W)$.

Pour $F = (F^1, \dots, F^d) \in (\mathbb{D}^\infty(W))^d$, on note γ_F la matrice de Malliavin de F , matrice $d \times d$, définie par

$$\gamma_F^{ij} = \langle DF^i, DF^j \rangle_H.$$

3.2.1 Formules de dualité et d'intégration par parties

On note δ l'adjoint de D , appelé aussi *intégrale de Skorokhod*. Cet opérateur est fermable et on note par $Dom(\delta)$ son domaine (voir Définition 1.3.1 de Nualart (1995)). Notons que si $u \in L^2([0, T] \times \Omega; \mathbb{R})$ est un processus adapté, alors (voir Proposition 1.3.4 Nualart (1995)) $u \in Dom(\delta)$ et $\delta(u)$ coïncide avec l'intégrale d'Itô :

$$\delta(u) = \int_0^T u_t dW_t.$$

Si $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $u \in Dom(\delta)$ alors $Fu \in Dom(\delta)$ et

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \langle DF, u \rangle_H. \quad (3.5)$$

Comme δ est l'adjoint de D on a la formule de dualité suivante

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T u_s (D_s F) ds \right] = \mathbb{E} [F \delta(u)]. \quad (3.6)$$

Dans la suite on introduit la définition d'un vecteur aléatoire non-dégénéré.

Définition 3.2.1. Un vecteur aléatoire $F = (F^1, \dots, F^d) \in (\mathbb{D}^\infty(W))^d$ est dit non-dégénéré si la matrice de Malliavin de F est presque sûrement inversible et

$$(\det \gamma_F)^{-1} \in \bigcap_{p \geq 1} L^p(\mathbb{P}^W).$$

La formule d'intégration par parties suivante joue un rôle centrale dans la théorie du calcul de Malliavin (pour une preuve de cette proposition voir Nualart (1998)).

Proposition 3.2.1. Soit $F \in (\mathbb{D}^\infty(W))^d$ un vecteur aléatoire. Si F est non-dégénéré alors pour toute fonction $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, pour toute variable aléatoire $G \in \mathbb{D}^\infty(W)$ et pour tout $m = (m_1, \dots, m_k) \in \{1, \dots, d\}^k$ multi-indice de dérivation, on a

$$\mathbb{E}[\partial_m f(F)G] = \mathbb{E}[f(F) \mathbf{H}_m(F, G)], \quad (3.7)$$

où $\partial_m = \partial_{m_1} \dots \partial_{m_k}$ et la variable aléatoire $\mathbf{H}_m(F, G)$ est donnée par

$$\mathbf{H}_{(i)}(F, G) = \sum_{j=1}^d \delta \left(D F^j G (\gamma_F^{-1})^{ij} \right) \quad (3.8)$$

$$\mathbf{H}_m(F, G) = \mathbf{H}_{(m_k)}(F, \mathbf{H}_{(m_1, \dots, m_{k-1})}(F, G)). \quad (3.9)$$

Notons que les définitions et les résultats précédents peuvent être étendus au cas d'un mouvement Brownien multidimensionnel. Plus précisément, supposons qu'on travaille avec un mouvement Brownien m -dimensionnel $W = (W^1, \dots, W^m)$. on note par $D^i F$ la dérivée de Malliavin par rapport à W^i , $i = 1, \dots, m$. Alors on définit l'opérateur $D : \mathbb{D}^{1,2}(W) \longrightarrow H$ avec $H = L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$ et on emploie la notation $D_s F = (D_s^1 F, \dots, D_s^m F)$ pour $F \in \mathbb{D}^{1,2}(W)$. Notons que la matrice de Malliavin associée au vecteur $F = (F^1, \dots, F^d)$ est définie par

$$\gamma_F^{ij} = \sum_{l=1}^m \int_0^T D_s^l F^i D_s^l F^j ds \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

L'adjoint de D est δ défini par

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^m \delta^i(u^i)$$

où $u = (u^1, \dots, u^m)$ et δ^i est l'adjoint de D^i . La formule (3.5) reste vraie avec

$$\langle DF, u \rangle_H = \int_0^T \sum_{i=1}^m D_s^i F u_s^i ds$$

3.2.2 Une extension de la formule d'intégration par parties

Dans ce chapitre, on va travailler avec une diffusion d -dimensionnelle $X = (X^1, \dots, X^d)$ dirigé par un mouvement Brownien q -dimensionnel $W = (W^1, \dots, W^q)$. En vue d'une régularisation du schéma d'Euler associé à la diffusion, nous allons employer d bruits additionnels, correspondant à X^1, \dots, X^d . Pour cela, nous considérons un mouvement Brownien d -dimensionnel $\bar{W} = (W^{q+1}, \dots, W^{q+d})$, indépendants de $W = (W^1, \dots, W^q)$. On note par $\tilde{W} = (W, \bar{W}) = (W^1, \dots, W^q, W^{q+1}, \dots, W^{q+d})$. Donc nous travaillons sur l'espace de Wiener de dimension $m = q + d$, mais on a l'intérêt de distinguer entre les deux mouvements Browniens W et \bar{W} qui jouent des rôles différents dans notre calcul : W dirige la diffusion alors que \bar{W} est un bruit auxiliaire utilisé pour la régularisation. Ainsi, en reprenant les notations de la section précédente on aura

$$\tilde{D} = (D, \bar{D}) = (D^1, \dots, D^q, D^{q+1}, \dots, D^{q+d})$$

et pour $\tilde{u} = (u, \bar{u}) = (u^1, \dots, u^q, u^{q+1}, \dots, u^{q+d})$ on a

$$\tilde{\delta}(\tilde{u}) = \delta(u) + \bar{\delta}(\bar{u}).$$

Les normes $\|F\|_{k,p}$ sont des normes sur $\mathbb{D}^{k,p}(\tilde{W})$, donc engagent toutes les dérivées $\tilde{D} = (D, \bar{D})$. De même, la matrice de Malliavin associée au vecteur F est donnée par

$$\tilde{\gamma}_F = \langle \tilde{D}F, \tilde{D}F \rangle.$$

Le bruit auxiliaire, que nous allons utiliser, est donné par le vecteur aléatoire

$$Z_{n,\theta} := \frac{\bar{W}_T}{n^{\frac{1}{2}+\theta}}, \quad \theta \geq 0. \quad (3.10)$$

Dans la suite, nous allons travailler avec un vecteur $F = (F_1, \dots, F_d)$ qui ne dépend que de $W = (W^1, \dots, W^q)$ et une variable aléatoire G qui dépend de $\tilde{W} = (W, \bar{W})$. La proposition suivante, démontré dans Kohatsu-Higa et Pettersson (2002), donne la formule explicite des poids \tilde{H}_i qui apparaissent dans la formule d'intégration par parties.

Proposition 3.2.2. *Soit $F \in (\mathbb{D}^\infty(W))^d$, si de plus F est non-dégénéré alors pour toute fonction $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, pour toute variable aléatoire $G \in \mathbb{D}^{1,2}(\tilde{W})$ et pour tout $m =$*

$(m_1, \dots, m_k) \in \{1, \dots, d\}^k$, $k \geq 1$ multi-indice de dérivation, on a

$$\mathbb{E}[\partial_m f(F + Z_{n,\theta})G] = \mathbb{E}[f(F + Z_{n,\theta})\tilde{\mathbf{H}}_m(F, G)], \quad (3.11)$$

où la variable aléatoire $\tilde{\mathbf{H}}_m(F, G)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_{(i)}(F, G) &= \sum_{j=1}^d \tilde{\delta} \left(\bar{D}(F + Z_{n,\theta})^j G (\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ij} \right) \\ &= \sum_{j=1}^d \delta \left(G (\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ij} D F^j \right) \\ &\quad + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\theta}} \sum_{j=1}^d \bar{\delta} \left(G (\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ij} \bar{D} \bar{W}_T^j \right), \\ \tilde{\mathbf{H}}_m(F, G) &= \tilde{\mathbf{H}}_{(m_k)}(F, \tilde{\mathbf{H}}_{(m_1, \dots, m_{k-1})}(F, G)). \end{aligned}$$

Avec $\bar{\delta}$ et $\tilde{\delta}$ sont respectivement les opérateurs adjoints de \bar{D} et de \tilde{D} .

Les estimations suivantes seront utiles, par la suite, pour les preuves de nos principaux résultats. Afin de simplifier les notations on suppose que c est une constante positive pouvant changer de valeur d'une ligne à une autre.

Proposition 3.2.3. *Soit $G \in \mathbb{D}^\infty(\tilde{W})$, alors*

1. *Soit $F \in (\mathbb{D}^\infty(W))^d$ tel que $F + Z_{n,\theta}$ soit un vecteur aléatoire non-dégénéré. Pour $p > 1$ et pour tout multi-indice m on a*

$$\|\tilde{\mathbf{H}}_m(F, G)\|_p \leq c \|G\|_{r,r'} \|\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1}\|_a^{a'} \left[\|F\|_{b,l}^{b'} + \frac{1}{n^{(\frac{1}{2}+\theta)l'}} \right]$$

où c, \tilde{c} deux constantes dépendant de p , de m et de d alors que r, r', a, a', b, b', l et l' sont des paramètres dépendant de m et de p .

2. *On considère $F_1, F_2 \in (\mathbb{D}^\infty(W))^d$ tels que les vecteurs aléatoires $F_1 + Z_{n,\theta}$ et $F_2 + Z_{n,\theta}$ soient non-dégénérés. Pour multi-indice m il existe une constante c et une constante \tilde{c} et des paramètres $s, \bar{s}, s_1, \bar{s}_1, s_2, \bar{s}_2, s_3, \bar{s}_3, s_4, \bar{s}_4, s_5, \bar{s}_5, \gamma, \bar{\gamma}, \gamma_1, \bar{\gamma}_1$,*

$\gamma_2, \bar{\gamma}_2, \gamma_3$ et γ_4 dépendants de p de m et de d telles que

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{H}}_m(F_1, G) - \tilde{\mathbf{H}}_m(F_2, G)\|_p &\leq c \|G\|_{1,s} \|(\det \tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}})^{-1}\|_{s_1}^{\gamma_1} \|F_1 + Z_{n,\theta}\|_{2,s_2}^{\gamma_2} \|F_1 - F_2\|_{2,s_3}^{\gamma_3} \\ &\times \left\{ 1 + \|F_1\|_{2,s_4}^{\gamma_4} + (1 + \|F_1\|_{2,\bar{s}} + \|F_2\|_{2,\bar{s}_1})^2 \right. \\ &\times \left. \|(\det \tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}})^{-1}\|_{\bar{s}_3}^{\bar{\gamma}} \|F_2 + Z_{n,\theta}\|_{2,\bar{s}_4}^{\bar{\gamma}_1} \left(\|F_2\|_{2,s_5} + \frac{\tilde{c}}{n^{(\frac{1}{2}+\theta)\gamma_2}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

3. Soit $F \in (\mathbb{D}^\infty(W))^d$ un vecteur aléatoire non-dégénéré. Pour tout multi-indice m il existe une constante c et des paramètres $r_1, r_2, \bar{r}_2, r_3, \bar{r}_3, \mu, \mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2$ et $\bar{\mu}_2$ dépendant de p, m et de d telles que

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{H}}_m(F, G) - \mathbf{H}_m(F, G)\|_p &\leq \frac{c}{n^{(\frac{1}{2}+\theta)\mu}} \|G\|_{1,r_1} \|F + Z_{n,\theta}\|_{2,r_2}^{\mu_1} \|(\det \tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}})^{-1}\|_{\bar{r}_2}^{\bar{\mu}_1} \\ &\times \left(1 + \|(\det \gamma_F)^{-1}\|_{r_3}^{\mu_2} \left(1 + \|F\|_{2,\bar{r}_3}^{\bar{\mu}_2} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Lemme 3.2.1. Avec les notations précédentes on a les estimations suivantes,

1. pour tout $k > 1$, il existe des paramètres k_1 et k_2 tels que

$$\|(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ij}\|_k \leq c \|(\det \tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}})^{-1}\|_{k_1} \|F + Z_{n,\theta}\|_{1,k_2}^{2(d-1)}, \quad (3.12)$$

2. pour tout $a > 1$ il existe $a_1, a_2, a_3, \alpha_1, \alpha_2$ et α_3 tels que

$$\|D(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ij}\|_{L^a(\Omega, H)} \leq c \|(\det \tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}})^{-1}\|_{a_1}^{\alpha_1} \|F\|_{2,a_2}^{\alpha_2} \|F + Z_{n,\theta}\|_{1,a_3}^{\alpha_3}.$$

3. pour tout $b > 1$ il existe $b_1, b_2, \lambda, \lambda_1$ et λ_2 tels que

$$\|\bar{D}(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ij}\|_{L^b(\Omega, H)} \leq \frac{c}{n^{\lambda(\frac{1}{2}+\theta)}} \|(\det \tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}})^{-1}\|_{b_1}^{\lambda_1} \|F + Z_{n,\theta}\|_{1,b_2}^{\lambda_2}.$$

Preuve. La preuve de l'assertion 1. est une conséquence directe de la formule de Cramer pour l'inverse d'une matrice donnée. Pour démontrer la deuxième assertion, on rappelle que

$$D[(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ij}] = - \sum_{k,l=1}^d (\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ik} (\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{jl} D[(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}})^{kl}]. \quad (3.13)$$

En utilisant le fait que

$$D^l(F^i + Z_{n,\theta}^i) = D^l F^i, \quad \text{pour } l = 1, \dots, q$$

et

$$D^l(F^i + Z_{n,\theta}^i) = D^l Z_{n,\theta}^i, \quad \text{pour } l = q+1, \dots, q+d$$

on obtient que

$$(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}})^{kl} = (\gamma_F)^{kl} + (\tilde{\gamma}_{Z_{n,\theta}})^{kl}.$$

Comme $Z_{n,\theta}$ est indépendante de W on a $DZ_{n,\theta} = 0$, donc

$$\begin{aligned} D[(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}})^{kl}] &= D[(\gamma_F)^{kl}] \\ &= D[\langle DF^k, DF^l \rangle_H] \\ &= \langle D^{(2)} F^k, DF^l \rangle_H + \langle DF^k, D^{(2)} F^l \rangle_H. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz on obtient que

$$\begin{aligned} \|D[(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ij}]\|_H &\leq \sum_{k,l=1}^d |(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ik}| |(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{jl}| \\ &\quad \times \left[\|D^{(2)} F^k\|_{H \otimes H} \|DF^l\|_H + \|D^{(2)} F^l\|_{H \otimes H} \|DF^k\|_H \right]. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on déduit l'existence de paramètres a', a'' et a_2 tels que

$$\|D[(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ij}]\|_{L^a(\Omega, H)} \leq c \sum_{k,l=1}^d \|(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ik}\|_{a'} \|(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{jl}\|_{a''} \|F\|_{2,a_2}^2.$$

La relation cherchée est alors une conséquence directe de l'assertion 1.. On démontre maintenant la troisième assertion. En utilisant la relation (3.13), on obtient

$$\bar{D}[(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ij}] = - \sum_{k,l=1}^d (\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ik} (\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{jl} \bar{D}[(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}})^{kl}]. \quad (3.14)$$

Or, on a

$$(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}})^{kl} = (\gamma_F)^{kl} + (\tilde{\gamma}_{Z_{n,\theta}})^{kl}.$$

Comme F est indépendante de \bar{W} , on a $\bar{D}F = 0$, donc

$$\begin{aligned} \bar{D}[(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}})^{kl}] &= \bar{D}[(\tilde{\gamma}_{Z_{n,\theta}})^{kl}] \\ &= \bar{D}[\langle \bar{D}Z_{n,\theta}^k, \bar{D}Z_{n,\theta}^l \rangle_H] \\ &= \langle \bar{D}^{(2)}Z_{n,\theta}^k, \bar{D}Z_{n,\theta}^l \rangle_H + \langle \bar{D}Z_{n,\theta}^k, \bar{D}^{(2)}Z_{n,\theta}^l \rangle_H. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz on obtient que

$$\begin{aligned} \|\bar{D}[(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ij}]\|_H &\leq \sum_{k,l=1}^d |(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ik}| |(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{jl}| \\ &\quad \times \left[\|\bar{D}^{(2)}Z_{n,\theta}^k\|_{H \otimes H} \|\bar{D}Z_{n,\theta}^l\|_H + \|\bar{D}^{(2)}Z_{n,\theta}^l\|_{H \otimes H} \|\bar{D}Z_{n,\theta}^k\|_H \right]. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on déduit l'existence de paramètres b', b'' et b_3 tels que

$$\begin{aligned} \|D(\gamma_F^{-1})^{ij}\|_{L^b(\Omega, H)} &\leq c \sum_{k,l=1}^d \|(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ik}\|_{b'} \|(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{jl}\|_{b''} \|Z_{n,\theta}\|_{2, b_3}^2 \\ &\leq \frac{c}{n^{1+2\theta}} \sum_{k,l=1}^d \|(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ik}\|_{b'} \|(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{jl}\|_{b''} \end{aligned}$$

La dernière égalité est due au fait que $Z_{n,\theta} = \frac{\bar{W}}{n^{\frac{1}{2}+\theta}}$. Ainsi, comme précédemment la relation cherchée est alors une conséquence directe de l'assertion 1.. \square

Preuve de la Proposition 3.2.3. Nous partageons la preuve en quatre pas.

• **Pas 1** : Preuve de la première assertion.

La preuve de la première assertion est une conséquence immédiate de la continuité de

l'opérateur $\tilde{\delta}$ de $\mathbb{D}^{k+1,p}(\tilde{W})$ dans $\mathbb{D}^{k,p}(\tilde{W})$, de l'inégalité de Hölder pour la norme $\|\cdot\|_{k,p}$ et de l'égalité

$$\tilde{D}[(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj}] = - \sum_{k,l=1}^d (\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mk} (\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{jl} \tilde{D}[(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{kl}]. \quad (3.15)$$

• **Pas 2** : Preuve de la deuxième assertion.

Nous prouvons la deuxième assertion, pour un indice $m \in \mathbb{N}$. Le cas où m est un multi-indice découle par récurrence. On a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_m(F_1, G) - \tilde{\mathbf{H}}_m(F_2, G) &= \sum_{j=1}^d \tilde{\delta} \left(\tilde{D}(F_1 + Z_{n,\theta})^j G(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^d \tilde{\delta} \left(\tilde{D}(F_2 + Z_{n,\theta})^j G(\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \right) \\ &= \sum_{j=1}^d \delta \left(G(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} DF_1^j \right) - \sum_{j=1}^d \delta \left(G(\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} DF_2^j \right) \\ &\quad + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\theta}} \sum_{j=1}^d \bar{\delta} \left(G(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \bar{D}\bar{W}_T^j \right) \\ &\quad - \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\theta}} \sum_{j=1}^d \bar{\delta} \left(G(\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \bar{D}\bar{W}_T^j \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_m(F_1, G) - \tilde{\mathbf{H}}_m(F_2, G) &= \sum_{j=1}^d \delta \left(G(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} [DF_1^j - DF_2^j] \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^d \delta \left(G[(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj}] DF_2^j \right) \\ &\quad + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\theta}} \sum_{j=1}^d \bar{\delta} \left(G[(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj}] \bar{D}\bar{W}_T^j \right) \end{aligned}$$

Nous posons

$$\begin{aligned} I_n^1 &:= \sum_{j=1}^d \delta \left(G(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} [DF_1^j - DF_2^j] \right), \\ I_n^2 &:= \sum_{j=1}^d \delta \left(G[(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj}] DF_2^j \right), \end{aligned}$$

$$I_n^3 := \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\theta}} \sum_{j=1}^d \bar{\delta} \left(G[(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj}] \bar{D}\bar{W}_T^j \right),$$

et traitons chacun des termes précédents à part. Nous commençons par le terme I_n^1 . On a

$$\|I_n^1\|_p \leq \sum_{j=1}^d \left\| \delta \left(G(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} [DF_1^j - DF_2^j] \right) \right\|_p.$$

En utilisant, la Proposition 2.4.4 de Nualart (1998) on obtient que

$$\begin{aligned} \left\| \delta \left(G(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} [DF_1^j - DF_2^j] \right) \right\|_p &\leq c \left(\left\| \mathbb{E} \left\{ G(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} [DF_1^j - DF_2^j] \right\} \right\|_H \right. \\ &\quad \left. + \left\| D \left\{ G(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} [DF_1^j - DF_2^j] \right\} \right\|_{L^p(\Omega, H \otimes H)} \right). \end{aligned}$$

Pour p_1, p_2, p_3 tels que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{p}$, l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned} \left\| \delta \left(G(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} [DF_1^j - DF_2^j] \right) \right\|_p &\leq c \left(\|G\|_{p_1} \|(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj}\|_{p_2} \|DF_1^j - DF_2^j\|_{L^{p_3}(\Omega, H)} \right. \\ &\quad + \|DG\|_{L^{p_1}(\Omega, H)} \|(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj}\|_{p_2} \|DF_1^j - DF_2^j\|_{L^{p_3}(\Omega, H)} \\ &\quad + \|G\|_{p_1} \|D(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj}\|_{L^{p_2}(\Omega, H)} \|DF_1^j - DF_2^j\|_{L^{p_3}(\Omega, H)} \\ &\quad \left. + \|G\|_{p_1} \|(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj}\|_{p_2} \|D^{(2)}F_1^j - D^{(2)}F_2^j\|_{L^{p_3}(\Omega, H \otimes H)} \right). \end{aligned}$$

Des assertions 1. et 2. du lemme précédent, on déduit l'existence d'une constante c et de paramètres $q'_1, q'_2, q'_3, q'_4, q_5, \rho'_1, \rho'_2, \rho'_3$ et ρ'_4 dépendants de p et de d tels que

$$\begin{aligned} \left\| \delta \left(G(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} [DF_1^j - DF_2^j] \right) \right\|_p &\leq c \|G\|_{1, q'_1} \|(\det \tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}})^{-1}\|_{q'_2}^{\rho'_1} \\ &\quad \times \left(1 + \|F_1\|_{2, q'_3}^{\rho'_2} \right) \|F_1 + Z_{n,\theta}\|_{1, q'_4}^{\rho'_3} \|F_1^j - F_2^j\|_{2, q'_5}^{\rho'_4} \\ &\leq c \|G\|_{1, q'_1} \|(\det \tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}})^{-1}\|_{q'_2}^{\rho'_1} \\ &\quad \times \left(1 + \|F_1\|_{2, q'_3}^{\rho'_2} \right) \|F_1 + Z_{n,\theta}\|_{1, q'_4}^{\rho'_3} \|F_1 - F_2\|_{2, q'_5}^{\rho'_4}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|I_n^1\|_p \leq c \|G\|_{1, q'_1} \|(\det \tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}})^{-1}\|_{q'_2}^{\rho'_1} \left(1 + \|F_1\|_{2, q'_3}^{\rho'_2} \right) \|F_1 + Z_{n,\theta}\|_{1, q'_4}^{\rho'_3} \|F_1 - F_2\|_{2, q'_5}^{\rho'_4}. \quad (3.16)$$

Nous traitons maintenant le terme donné par

$$I_n^2 := \sum_{j=1}^d \delta \left(G [(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj}] DF_2^j \right),$$

on a

$$\begin{aligned} \|I_n^2\|_p \leq c \sum_{j=1}^d & \left(\left\| \mathbb{E} \left\{ G [(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj}] DF_2^j \right\} \right\|_H \right. \\ & \left. + \left\| D \left\{ G [(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj}] DF_2^j \right\} \right\|_{L^p(\Omega, H \otimes H)} \right). \end{aligned}$$

Pour p_1, p_2, p_3 tels que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{p}$, l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned} \|I_n^2\|_p \leq c \sum_{j=1}^d & \left(\|G\|_{p_1} \left\| (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \right\|_{p_2} \|DF_2^j\|_{L^{p_3}(\Omega, H)} \right. \\ & + \|DG\|_{L^{p_1}(\Omega, H)} \left\| (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \right\|_{p_2} \|DF_2^j\|_{L^{p_3}(\Omega, H)} \\ & + \|G\|_{p_1} \left\| D \left\{ (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \right\} \right\|_{L^{p_2}(\Omega, H)} \|DF_2^j\|_{L^{p_3}(\Omega, H)} \\ & \left. + \|G\|_{p_1} \left\| (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \right\|_{p_2} \|D^{(2)} F_2^j\|_{L^{p_3}(\Omega, H \otimes H)} \right). \end{aligned}$$

En écrivant que

$$\begin{aligned} (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} = \\ \sum_{k,k'=1}^d (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mk} \left[(\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{kk'} - (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{kk'} \right] (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j} \quad (3.17) \end{aligned}$$

on obtient d'une part l'existence de paramètres ρ_1, ρ_2 et ρ_3 tels que

$$\begin{aligned} \left\| (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \right\|_{p_2} & \leq \\ \sum_{k,k'=1}^d \left\| (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mk} \right\|_{\rho_1} & \left\| \left[(\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{kk'} - (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{kk'} \right] \right\|_{\rho_2} \left\| (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j} \right\|_{\rho_3} \\ \leq \sum_{k,k'=1}^d \left\| (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mk} \right\|_{\rho_1} & \left\| \left[(\gamma_{F_2})^{kk'} - (\gamma_{F_1})^{kk'} \right] \right\|_{\rho_2} \left\| (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j} \right\|_{\rho_3} \end{aligned}$$

La dernière égalité est due au fait que $\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}} = \gamma_{F_1} + \tilde{\gamma}_{Z_{n,\theta}}$ et que $\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}} = \gamma_{F_2} + \tilde{\gamma}_{Z_{n,\theta}}$.

Par conséquent, il vient que

$$\begin{aligned} & \left\| (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \right\|_{p_2} \leq \\ & \sum_{k,k'=1}^d \left\| (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mk} \right\|_{\rho_1} \left\| \left[\langle DF_2^k - DF_1^k, DF_2^{k'} \rangle_H + \langle DF_1^k, DF_2^{k'} - DF_1^{k'} \rangle_H \right] \right\|_{\rho_2} \left\| (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j} \right\|_{\rho_3} \\ & \leq \sum_{k,k'=1}^d \left\| (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mk} \right\|_{\rho_1} \left\| DF_2^k - DF_1^k \right\|_H \left\| DF_2^{k'} \right\|_H \\ & \quad + \left\| DF_1^k \right\|_H \left\| DF_2^{k'} - DF_1^{k'} \right\|_H \left\| (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j} \right\|_{\rho_3}. \end{aligned}$$

En utilisant l'assertion 1. du Lemme 3.2.1 on obtient l'existence de paramètres $e, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, \nu, \nu_1, \nu_2, \nu_3$, et ν_4 , tels que

$$\begin{aligned} & \left\| (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \right\|_{p_2} \leq \\ & c \left\| (\det \tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}})^{-1} \right\|_{e_1}^{\nu_1} \left\| (\det \tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}})^{-1} \right\|_{e_2}^{\nu_2} \left\| F_1 + Z_{n,\theta} \right\|_{1,e_3}^{\nu_3} \left\| F_2 + Z_{n,\theta} \right\|_{1,e_4}^{\nu_4} \\ & \quad \times \left(\left\| F_1 \right\|_{1,e_5} + \left\| F_2 \right\|_{1,e_6} \right) \left\| F_2 - F_1 \right\|_{1,e}^{\nu}. \quad (3.18) \end{aligned}$$

Et d'autre part, de la relation (3.17), on a

$$\begin{aligned} & D \left\{ (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \right\} = \\ & \sum_{k,k'=1}^d D(\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mk} \left[(\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}})^{kk'} - (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}})^{kk'} \right] (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j} \\ & + \sum_{k,k'=1}^d (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} D \left[(\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}})^{kk'} - (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}})^{kk'} \right] (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j} \\ & + \sum_{k,k'=1}^d (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \left[(\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}})^{kk'} - (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}})^{kk'} \right] D(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j}. \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment on obtient

$$\begin{aligned}
D\left\{(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj}\right\} = \\
\sum_{k,k'=1}^d D(\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mk} \left[(\gamma_{F_2})^{kk'} - (\gamma_{F_1})^{kk'}\right] (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j} \\
+ \sum_{k,k'=1}^d (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} D\left[(\gamma_{F_2})^{kk'} - (\gamma_{F_1})^{kk'}\right] (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j} \\
+ \sum_{k,k'=1}^d (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \left[(\gamma_{F_2})^{kk'} - (\gamma_{F_1})^{kk'}\right] D(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned}
D\left\{(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj}\right\} = \\
\sum_{k,k'=1}^d D(\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mk} \left[\langle DF_2^k - DF_1^k, DF_2^{k'} \rangle_H + \langle DF_1^k, DF_2^{k'} - DF_1^{k'} \rangle_H\right] (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j} \\
+ \sum_{k,k'=1}^d (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} D\left[\langle DF_2^k - DF_1^k, DF_2^{k'} \rangle_H + \langle DF_1^k, DF_2^{k'} - DF_1^{k'} \rangle_H\right] (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j} \\
+ \sum_{k,k'=1}^d (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \left[\langle DF_2^k - DF_1^k, DF_2^{k'} \rangle_H + \langle DF_1^k, DF_2^{k'} - DF_1^{k'} \rangle_H\right] D(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j}.
\end{aligned}$$

En utilisant les assertions 1. et 2. du Lemme 3.2.1 on déduit l'existence de paramètres \bar{e} , \bar{e}_1 , \bar{e}_2 , \bar{e}_3 , \bar{e}_4 , \bar{e}_5 , \bar{e}_6 , $\bar{\nu}$, $\bar{\nu}_1$, $\bar{\nu}_2$, $\bar{\nu}_3$, et $\bar{\nu}_4$, tels que

$$\begin{aligned}
\left\| D\left\{(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj}\right\} \right\|_{L^p(\Omega, H)} \leq \\
c \left\| (\det \tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}})^{-1} \right\|_{\bar{e}_1}^{\bar{\nu}_1} \left\| (\det \tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}})^{-1} \right\|_{\bar{e}_2}^{\bar{\nu}_2} \|F_1 + Z_{n,\theta}\|_{2,\bar{e}_3}^{\bar{\nu}_3} \|F_2 + Z_{n,\theta}\|_{2,\bar{e}_4}^{\bar{\nu}_4} \\
\times \left(1 + \|F_1\|_{2,\bar{e}_5} + \|F_2\|_{2,\bar{e}_6}\right)^2 \|F_2 - F_1\|_{2,\bar{e}}^{\bar{\nu}}. \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Par conséquent, des relations (3.18) et (3.21) on déduit l'existence de paramètres \tilde{e} , \tilde{e}_1 , \tilde{e}_2 , \tilde{e}_3 , \tilde{e}_4 , \tilde{e}_5 , \tilde{e}_6 , \tilde{e}_7 , \tilde{e}_8 , $\tilde{\nu}$, $\tilde{\nu}_1$, $\tilde{\nu}_2$, $\tilde{\nu}_3$, et $\tilde{\nu}_4$, tels que

$$\begin{aligned}
\|I_n^2\|_{L^p(\Omega, H)} \leq \\
c \left\| (\det \tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}})^{-1} \right\|_{\tilde{e}_1}^{\tilde{\nu}_1} \left\| (\det \tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}})^{-1} \right\|_{\tilde{e}_2}^{\tilde{\nu}_2} \|F_1 + Z_{n,\theta}\|_{2,\tilde{e}_3}^{\tilde{\nu}_3} \|F_2 + Z_{n,\theta}\|_{2,\tilde{e}_4}^{\tilde{\nu}_4} \\
\times \left(1 + \|F_1\|_{2,\tilde{e}_5} + \|F_2\|_{2,\tilde{e}_6}\right)^2 \|G\|_{1,\tilde{e}_7} \|F_2\|_{2,\tilde{e}_8} \|F_2 - F_1\|_{2,\tilde{e}}^{\tilde{\nu}}. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Nous traitons maintenant le terme donné par

$$I_n^3 := \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\theta}} \sum_{j=1}^d \bar{\delta} \left(G [(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj}] \bar{D} \bar{W}_T^j \right).$$

De la Proposition 2.4.4 de Nualart (1998) on a

$$\begin{aligned} \|I_n^3\|_p &\leq \frac{c}{n^{\frac{1}{2}+\theta}} \sum_{j=1}^d \left(\left\| \mathbb{E} \left\{ G [(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj}] \bar{D} \bar{W}_T^j \right\} \right\|_H \right. \\ &\quad \left. + \left\| D \left\{ G [(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj}] \bar{D} \bar{W}_T^j \right\} \right\|_{L^p(\Omega, H \otimes H)} \right). \end{aligned}$$

Pour p_1, p_2, p_3 tels que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{p}$, l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned} \|I_n^3\|_p &\leq \frac{c}{n^{\frac{1}{2}+\theta}} \sum_{j=1}^d \left(\|G\|_{p_1} \|(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj}\|_{p_2} \|\bar{D} \bar{W}_T^j\|_{L^{p_3}(\Omega, H)} \right. \\ &\quad \left. + \|\bar{D} G\|_{L^{p_1}(\Omega, H)} \left\| (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \right\|_{p_2} \|\bar{D} \bar{W}_T^j\|_{L^{p_3}(\Omega, H)} \right. \\ &\quad \left. + \|G\|_{p_1} \left\| \bar{D} \left\{ (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \right\} \right\|_{L^{p_2}(\Omega, H)} \|\bar{D} \bar{W}_T^j\|_{L^{p_3}(\Omega, H)}. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes de l'égalité précédente sont déjà traités dans l'évaluation de $\|I_n^2\|_p$. Il nous reste alors de traiter le dernier terme de cette inégalité. En utilisant la relation (3.17) on obtient

$$\begin{aligned} \bar{D} \left\{ (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \right\} &= \\ &\sum_{k,k'=1}^d \bar{D} (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mk} \left[(\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{kk'} - (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{kk'} \right] (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j} \\ &+ \sum_{k,k'=1}^d (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \bar{D} \left[(\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{kk'} - (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{kk'} \right] (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j} \\ &+ \sum_{k,k'=1}^d (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \left[(\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{kk'} - (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{kk'} \right] \bar{D} (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j}. \end{aligned}$$

On obtient que

$$\begin{aligned} \bar{D} \left\{ (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \right\} = \\ \sum_{k,k'=1}^d \bar{D}(\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mk} \left[(\gamma_{F_2})^{kk'} - (\gamma_{F_1})^{kk'} \right] (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j} \\ + \sum_{k,k'=1}^d (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \bar{D} \left[(\gamma_{F_2})^{kk'} - (\gamma_{F_1})^{kk'} \right] (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j} \\ + \sum_{k,k'=1}^d (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \left[(\gamma_{F_2})^{kk'} - (\gamma_{F_1})^{kk'} \right] \bar{D}(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j}. \end{aligned}$$

Vu que F_1 et F_2 sont indépendants du mouvement Brownien \bar{W} , on obtient que

$$\begin{aligned} \bar{D} \left\{ (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \right\} = \\ \sum_{k,k'=1}^d \bar{D}(\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mk} \left[\langle DF_2^k - DF_1^k, DF_2^{k'} \rangle_H + \langle DF_1^k, DF_2^{k'} - DF_1^{k'} \rangle_H \right] (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j} \\ + \sum_{k,k'=1}^d (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \left[\langle DF_2^k - DF_1^k, DF_2^{k'} \rangle_H + \langle DF_1^k, DF_2^{k'} - DF_1^{k'} \rangle_H \right] \bar{D}(\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{k'j}. \end{aligned}$$

En utilisant les assertions 1. et 2. du Lemme 3.2.1 on déduit l'existence de paramètres e' , e'_1 , e'_2 , e'_3 , e'_4 , e'_5 , e'_6 , ν' , ν'_1 , ν'_2 , ν'_3 , et ν'_4 , tels que

$$\begin{aligned} \left\| \bar{D} \left\{ (\tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} \right\} \right\|_{L^p(\Omega, H)} \leq \\ c \left\| (\det \tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}})^{-1} \right\|_{e'_1}^{\nu'_1} \left\| (\det \tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}})^{-1} \right\|_{e'_2}^{\nu'_2} \|F_1 + Z_{n,\theta}\|_{1,e'_3}^{\nu'_3} \|F_2 + Z_{n,\theta}\|_{1,e'_4}^{\nu'_4} \\ \times \left(\|F_1\|_{1,\bar{e}_5} + \|F_2\|_{1,e'_6} \right)^2 \|F_2 - F_1\|_{1,e'_7}^{\nu'_4}. \quad (3.21) \end{aligned}$$

Par conséquent, on déduit l'existence de paramètres f , f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , f_5 , f_6 , τ , τ_1 , τ_2 , τ_3 , et τ_4 , tels que

$$\begin{aligned} \|I_n^3\|_{L^p(\Omega, H)} \leq \\ \frac{c}{n^{\frac{1}{2}+\theta}} \left\| (\det \tilde{\gamma}_{F_1+Z_{n,\theta}})^{-1} \right\|_{f_1}^{\tau_1} \left\| (\det \tilde{\gamma}_{F_2+Z_{n,\theta}})^{-1} \right\|_{f_2}^{\tau_2} \|F_1 + Z_{n,\theta}\|_{2,f_3}^{\tau_3} \|F_2 + Z_{n,\theta}\|_{2,f_4}^{\tau_4} \\ \times \left(\|F_1\|_{1,f_5} + \|F_2\|_{1,f_6} \right)^2 \|G\|_{1,\bar{f}_7} \|F_2 - F_1\|_{1,f}^{\tau}. \quad (3.22) \end{aligned}$$

Des relations (3.16), (3.24) et (3.22) on retrouve le résultat de la deuxième assertion de la preuve.

• **Pas 3** : Preuve de la troisième assertion.

De même, on donne la preuve de la dernière assertion pour $m \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_m(F, G) - \mathbf{H}_m(F, G) &= \sum_{j=1}^m \delta \left(GDF^j [(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\tilde{\gamma}_F^{-1})^{mj}] \right), \\ &+ \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\theta}} \sum_{j=1}^d \delta \left(G(\gamma_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ij} \bar{D}\bar{W}_T^j \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

D'une part on sait que

$$\begin{aligned} \left\| \delta \left(G(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ij} \bar{D}\bar{W}_T^j \right) \right\|_p &\leq \left\| \mathbb{E} \left[G(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ij} \bar{D}\bar{W}_T^j \right] \right\|_H \\ &+ \left\| \bar{D} \left[G(\tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{ij} \bar{D}\bar{W}_T^j \right] \right\|_{L^p(\Omega, H \otimes H)}. \end{aligned}$$

Et d'autre part, de la relation (3.24), on déduit l'existence de paramètres \tilde{e} , \tilde{e}_1 , \tilde{e}_2 , \tilde{e}_3 , \tilde{e}_4 , \tilde{e}_5 , \tilde{e}_6 , \tilde{e}_7 , $\tilde{\nu}$, $\tilde{\nu}_1$, $\tilde{\nu}_2$, $\tilde{\nu}_3$, et $\tilde{\nu}_4$, tels que

$$\begin{aligned} \left\| \delta \left(GDF^j [(\gamma_{F+Z_{n,\theta}}^{-1})^{mj} - (\gamma_F^{-1})^{mj}] \right) \right\|_p &\leq \\ &c \left\| (\det \tilde{\gamma}_{F+Z_{n,\theta}})^{-1} \right\|_{\tilde{e}_1}^{\tilde{\nu}_1} \left\| (\det \tilde{\gamma}_F)^{-1} \right\|_{\tilde{e}_2}^{\tilde{\nu}_2} \|F + Z_{n,\theta}\|_{2,\tilde{e}_3}^{\tilde{\nu}_3} \|F\|_{2,\tilde{e}_4}^{\tilde{\nu}_4} \\ &\quad \times \left(1 + 2\|F\|_{2,\tilde{e}_5} \right)^2 \|G\|_{1,\tilde{e}_6} \|F\|_{2,\tilde{e}_7} \|Z_{n,\theta}\|_{2,\tilde{e}}^{\tilde{\nu}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Comme $\|Z_{n,\theta}\|_{2,\tilde{e}}^{\tilde{\nu}} \leq cn^{(-\frac{1}{2}+\theta)\tilde{\nu}}$, on retrouve le résultat par une démonstration analogue à celle faite pour l'évaluation de (3.22). \square

3.3 Erreur faible pour l'approximation de la densité d'une diffusion non-dégénérée

On considère $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ une diffusion à valeurs dans \mathbb{R}^d et solution de

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^d, \quad (3.25)$$

où $W = (W^1, \dots, W^q)$ est un mouvement Brownien q -dimensionnel défini sur un espace

probabilisé filtré donné $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$, avec $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ désigne la filtration habituelle. Les applications $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times q}$ sont supposées de classe \mathcal{C}^1 et vérifiant : $\exists C_T > 0; \forall x, y \in \mathbb{R}^d$, tel que

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq C_T |y - x|.$$

Dans la suite on note pour $1 \leq k \leq q + 1$

$$f(X_t) = \begin{pmatrix} b_1(X_t) & \sigma_{11}(X_t) & \dots & \sigma_{1q}(X_t) \\ b_2(X_t) & \sigma_{21}(X_t) & \dots & \sigma_{2q}(X_t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_d(X_t) & \sigma_{d1}(X_t) & \dots & \sigma_{dq}(X_t) \end{pmatrix}, \quad dY_t := \begin{pmatrix} dt \\ dW_t^1 \\ \vdots \\ dW_t^q \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_k := \begin{pmatrix} f_{1k} \\ \vdots \\ f_{dk} \end{pmatrix}.$$

Ainsi l'équation différentielle stochastique (3.25) devient :

$$dX_t = f(X_t) dY_t. \tag{3.26}$$

Le schéma d'Euler X^n associé à la diffusion X et de pas de discrétisation $\delta = T/n$ est donné par :

$$dX_t^n = f(X_{\eta_n(t)}^n) dY_t, \quad \eta_n(t) = [t/\delta]\delta.$$

La proposition suivante nous donne des contrôles en normes $\|\cdot\|_{k,p}$ de l'erreur dans le schéma d'Euler. Pour une preuve de ce résultat voir Kusuoka et Stroock (1984)

Proposition 3.3.1. *Sous les notations précédentes on a les deux propriétés suivantes :*

P₁) $\forall t > 0, \quad X_t^n \in \mathbb{D}^\infty$

P₂) $\forall p > 1, \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists K > 0$ tels que :

$$\sup_{t \in [0, T]} \|X_T\|_{k,p} + \sup_{t \in [0, T]} \|X_T^n\|_{k,p} \leq K(1 + \|x\|) \tag{3.27}$$

and

$$\sup_{t \in [0, T]} \|X_T^n - X_T\|_{k,p} \leq \frac{K}{\sqrt{n}}. \tag{3.28}$$

Notations :

Pour une application $V : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ on note $\mathbf{D}V$ la matrice Jacobienne de V et \mathbf{D}^2V sa différentielle deuxième. On considère la diffusion d -dimensionnelle $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$, solution de l'équation différentielle stochastique (3.25). On suppose de plus que les coefficients, σ et b , de la diffusion X vérifient la condition d'Hörmander (voir la section 2.3.2 de Nualart (1995)). Ainsi, X admet une densité régulière notée $p_T(x_0, x)$ (voir Kusuoka et Stroock (1985)). Afin d'alléger l'écriture on note

$$p_T(x_0, x) := p(x).$$

On considère le schéma d'Euler continu X^n , de pas de discrétisation $\delta = T/n$, donné par :

$$dX_t^n = b(X_{\eta_n(t)})dt + \sigma(X_{\eta_n(t)})dW_t, \quad \eta_n(t) = [t/\delta]\delta. \quad (3.29)$$

Notons que la condition d'Hörmander n'est pas suffisante pour garantir que la matrice de Malliavin, associée au schéma d'Euler X^n , est inversible (cela est vrai sous la condition d'ellipticité mais pas sous l'hypothèse d'Hörmander). Pour résoudre ce problème, nous allons en quelque sorte régulariser le schéma d'Euler en considérant $X^n + Z_{n,\theta}$ au lieu de X^n , $Z_{n,\theta}$ étant la variable aléatoire définie dans la section 3.2.2 par la relation

$$Z_{n,\theta} = \frac{\tilde{W}_T}{n^{\frac{1}{2}+\theta}}$$

où \tilde{W} est un mouvement Brownien d -dimensionnel indépendant de W . On a la proposition suivante

Proposition 3.3.2. *Pour $\lambda \in [0, 1]$ on note*

$$X_T^{n,\lambda} = X_T + \lambda(X_T^n - X_T).$$

Pour tout $p \geq 1$ il existe une constante $K_T > 0$ et des paramètres $p', p'' \geq 1$ tels que

$$\sup_n \left\| \left(\det \gamma_{X_T^{n,\lambda} + Z_{n,\theta}} \right)^{-1} \right\|_p \leq K_T \left\| \left(\det \gamma_{X_T} \right)^{-1} \right\|_{L^{p'}}^{p''} < \infty. \quad (3.30)$$

Preuve. On a $\mathbb{E} \left(\det \gamma_{X_T^{n,\lambda+Z_{n,\theta}}} \right)^{-p} = A_n + B_n$ avec

$$A_n := \mathbb{E} \left\{ \left(\det \gamma_{X_T^{n,\lambda+Z_{n,\theta}}} \right)^{-p} \mathbf{1}_{\left| \det \gamma_{X_T^{n,\lambda+Z_{n,\theta}}} - \det \gamma_{X_T} \right| < \frac{1}{2} \det \gamma_{X_T}} \right\}$$

et

$$B_n := \mathbb{E} \left\{ \left(\det \gamma_{X_T^{n,\lambda+Z_{n,\theta}}} \right)^{-p} \mathbf{1}_{\left| \det \gamma_{X_T^{n,\lambda+Z_{n,\theta}}} - \det \gamma_{X_T} \right| \geq \frac{1}{2} \det \gamma_{X_T}} \right\}$$

Comme la diffusion X est supposée non-dégénérée au sens de la définition 3.2.1, on en déduit que

$$\sup_n A_n \leq 2^p \mathbb{E} \left(\det \gamma_{X_T} \right)^{-p} < +\infty.$$

D'autre part, on a

$$\gamma_{X_T^{n,\lambda+Z_{n,\theta}}} = \gamma_{X_T^{n,\lambda}} + \frac{T}{n^{1+2\theta}} Id.$$

Comme $\gamma_{X_T^{n,\lambda}}$ est une matrice symétrique définie positive on en déduit que

$$\det \gamma_{X_T^{n,\lambda+Z_{n,\theta}}} \geq \left(\frac{T}{n^{1+2\theta}} \right)^d. \quad (3.31)$$

Par conséquent, on voit que

$$B_n \leq \left(\frac{T}{n^{1+2\theta}} \right)^{-dp} \mathbb{P} \left(\left| \det \gamma_{X_T^{n,\lambda+Z_{n,\theta}}} - \det \gamma_{X_T} \right| \geq \frac{1}{2} \det \gamma_{X_T} \right)$$

Ainsi par l'inégalité de Markov on conclut que

$$\begin{aligned} B_n &\leq 2^k \left(\frac{T}{n^{1+2\theta}} \right)^{-dp} \mathbb{E} \left\{ \left(\det \gamma_{X_T} \right)^{-1} \left| \det \gamma_{X_T^{n,\lambda+Z_{n,\theta}}} - \det \gamma_{X_T} \right|^k \right\}^k \\ &\leq 2^k \left(\frac{T}{n^{1+2\theta}} \right)^{-dp} \left\| \left| \det \gamma_{X_T^{n,\lambda+Z_{n,\theta}}} - \det \gamma_{X_T} \right|^k \right\|_{L^2} \left\| \left(\det \gamma_{X_T} \right)^{-k} \right\|_{L^2} \end{aligned}$$

Vu les relations (3.27) et (3.28), propres à la diffusion X et à son schéma d'Euler, on obtient que

$$\left\| \left| \det \gamma_{X_T^{n,\lambda+Z_{n,\theta}}} - \det \gamma_{X_T} \right|^k \right\|_{L^2} \leq \frac{C_k}{n^{\frac{k}{2}}}$$

où C_k est une constante donnée. En prenant maintenant $k = 2dp(1 + 2\theta)$ on obtient que

$$\sup_n B_n < \infty.$$

□

Dans la suite, on s'intéresse à l'approximation de la densité $p(x)$ de la diffusion X par des noyaux de densités.

Définition 3.3.1. On considère une fonction bornée $\phi \in C_b^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ telle que toutes ses dérivées soient bornées. On dit que l'application ϕ est un super-noyau d'ordre $s > 2$ si

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} x^i \phi(x) dx = 0 \quad \forall i = 1, \dots, s-1.$$

Dans la suite, On suppose que ϕ satisfait les propriétés suivantes :

- a) $\int_{\mathbb{R}} |x|^{s+1} |\phi(x)| dx < \infty$, où s désigne l'ordre du noyau,
- b) $\int_{\mathbb{R}} |\phi'(x)|^2 dx < \infty$.

Pour $h > 0$, on définit

$$\phi_{h,x}(y) = \frac{1}{h} \phi\left(\frac{y-x}{h}\right).$$

Le paramètre h est appelé *la taille de la fenêtre du noyau*. Dans la suite on va employer aussi d'autres noyaux construits à partir de ϕ , tel que

$$\phi_{(2),h,x}(y) = \frac{1}{h\phi_{(2)}} \left[\phi'\left(\frac{y-x}{h}\right)\right]^2, \quad \phi_{i,h,x}(y) = \frac{1}{h\phi_i} \left|\phi\left(\frac{y-x}{h}\right)\right|^i \quad (3.32)$$

avec

$$\phi_{(2)} = \int |\phi'(x)|^2 dx \quad \text{et} \quad \phi_i := \int |\phi(x)|^i dx, \quad \text{pour } i = 1, \dots, d.$$

Pour construire des super-noyaux sur \mathbb{R}^d , on fait des produits de super-noyaux unidimensionnels. On considère donc $\phi_i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ pour $i = 1, \dots, d$ et on définit

$$\phi(u_1, \dots, u_d) = \phi_1(u_1) \times \dots \times \phi_d(u_d) \quad (3.33)$$

et

$$\phi_{h,x}(y) = \frac{1}{h^d} \phi\left(\frac{y-x}{h}\right) = \prod_{i=1}^d \phi_{i,h,x}(y_i) \quad (3.34)$$

On dit que ϕ est un super-noyau d'ordre s si les fonctions ϕ_i , $i = 1, \dots, d$ sont des super-noyaux d'ordre s unidimensionnels.

Remarque 1. En effet, on peut construire des super-noyaux d'ordre infinis de la manière suivante. On prend une fonction $\psi \in \mathcal{S}$ (où \mathcal{S} désigne la classe de Schwarz) telle que $\psi(x) = 1$ dans un voisinage de zéro. Par suite, on définit ϕ comme la transformée de Fourier inverse de ψ , donc

$$\phi(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \psi(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alors la transformée de Fourier de ϕ est ψ :

$$\psi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \phi(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Comme $\psi^{(k)}(0) = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on conclut que $\int_{\mathbb{R}} x^k \phi(x) dx = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ aussi et comme $\psi(0) = 1$ on a $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = 1$. La transformée de Fourier inverse envoie les fonctions de \mathcal{S} dans \mathcal{S} . Donc $\phi \in \mathcal{S}$ et par conséquent, elle vérifie les conditions a) et b) ci-dessus.

La propriété intéressante des super-noyaux d'ordre s c'est qu'ils approximent la fonction Dirac à l'ordre $s + 1$. Plus précisément :

Lemme 3.3.1. 1. Soit $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ un super noyau d'ordre s , c'est à dire un super noyau multidimensionnel de la forme $\phi(x) = \prod_{j=1}^d \phi_j(x_j)$ où pour $j = 1, \dots, d$, $\phi_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ désignent des super noyaux unidimensionnels d'ordre s . Soit $f \in C_b^{s+1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$. Alors

$$\left| f(x) - \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \phi_{h,x}(y) dy - \frac{h^s}{s!} \sum_{|\alpha|=s} \partial^\alpha f(x) \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^s u_{\alpha_i} \phi(u) du \right| \leq C h^{s+1}, \quad (3.35)$$

où pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, de longueur $|\alpha| = k$, on définit $\partial^\alpha f$ comme la dérivée partielle de f correspondant au multi-indice α . Alors que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^k u_{\alpha_i} \phi(u) du, \quad 1 \leq k \leq s$$

est un produit d'intégrales de la forme

$$\int_{\mathbb{R}} u_j^{p_j} \phi_j(u_j) du_j, \quad \text{avec } j = 1, \dots, d \quad \text{et } 1 \leq p_j \leq k \leq s,$$

La constante C est donné par

$$C = c_s \left(\|f^{(s+1)}\|_\infty \right) \int_{\mathbb{R}^d} \|u\|^{s+1} |\phi(u)| du$$

où c_s est une constante universelle dépendant de s et $\|f^{(s+1)}\|_\infty$ est la norme sup des dérivées d'ordre $s+1$ de f .

2. Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, intégrable et bornée. On suppose que $\int \varphi = 1$. Si on pose $\varphi_{h,x}(y) = \frac{1}{h^d} \varphi\left(\frac{y-x}{h}\right)$, alors pour toute fonction continue et bornée f on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \varphi_{h,x}(y) dy = f(x).$$

Preuve. Nous partageons la preuve en deux pas.

- **Pas 1 :** Preuve de la première assertion

On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \phi_{h,x}(y) dy - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \phi_{h,x}(y) (f(y) - f(x)) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(u) (f(x+uh) - f(x)) du \end{aligned}$$

En faisant un développement en série de Taylor d'ordre s on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \phi_{h,x}(y) dy - f(x) &= \sum_{k=1}^s \frac{h^k}{k!} \sum_{|\alpha|=k} \partial^\alpha f(x) \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^k u_{\alpha_i} \phi(u) du \\ &\quad + \frac{h^{s+1}}{s!} \sum_{|\alpha|=s+1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 (1-\lambda)^s \partial^\alpha f(x+\lambda uh) \prod_{i=1}^{s+1} u_{\alpha_i} \phi(u) d\lambda du. \end{aligned}$$

Comme $(\phi_j)_{j=1,\dots,d}$ sont des super-noyaux d'ordre s , on conclut que pour $1 \leq p_j \leq s-1$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} u_j^{p_j} \phi_j(u_j) du_j = 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \phi_{h,x}(y) dy - f(x) &= \frac{h^s}{s!} \sum_{|\alpha|=s} \partial^\alpha f(x) \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^s u_{\alpha_i} \phi(u) du \\ &\quad + \frac{h^{s+1}}{s!} \sum_{|\alpha|=s+1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 (1-\lambda)^s \partial^\alpha f(x+\lambda uh) \prod_{i=1}^{s+1} u_{\alpha_i} \phi(u) d\lambda du. \end{aligned}$$

On évalue maintenant le reste. On majore

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 (1-\lambda)^s \partial^\alpha f(x + \lambda uh) \prod_{i=1}^{s+1} u_{\alpha_i} \phi(u) d\lambda du \right| \leq \|f^{(s+1)}\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \|u\|^{s+1} |\phi(u)| du.$$

Vu la propriété, a) de la Définition 3.3.1, vérifiée par le noyau ϕ et le fait que $f \in \mathcal{C}_b^{s+1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$. On conclut que

$$\|f^{(s+1)}\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \|u\|^{s+1} |\phi(u)| du < \infty.$$

D'où le résultat.

• **Pas 2** : Preuve de la deuxième assertion.

On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{h,x}(y) f(y) dy - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{h,x}(y) (f(y) - f(x)) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(u) (f(x + uh) - f(x)) du \\ &\leq 2\|f\|_\infty, \end{aligned}$$

et vu la continuité de f , le résultat découle par convergence dominée. \square

Le théorème suivant nous donne un développement limité à l'ordre 1 de l'erreur faible pour l'approximation de la densité de la diffusion hypoelliptique X .

Théorème 3.3.1. *Avec les notations précédentes,*

1. *soit $h = n^{-\alpha}$, $\alpha \geq 1/s$. il existe une constante $C_{\phi,p(x)}^s > 0$ dépendant du super-noyau ϕ de la densité $p(x)$ et du paramètre s telle que*

$$\mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) \right] - p(x) = \frac{C_{\phi,p(x)}^s}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.36)$$

2. *Soit $\varphi \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ une fonction positive, intégrable et bornée telle que toutes ses dérivées soient bornées aussi. On suppose que $\int \varphi = 1$. Si on pose $\varphi_{h,x}(y) = \frac{1}{h^d} \varphi\left(\frac{y-x}{h}\right)$, $h = n^{-\alpha}$ avec $\alpha > 0$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow 0} \mathbb{E} \varphi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) = p(x).$$

Preuve. On commence par prouver la première assertion.

• **Preuve de la première assertion du théorème**

On considère la décomposition suivante de l'erreur faible pour l'approximation de la densité de X :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) \right] - p(x) &= \mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) \right] - \mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T + Z_{n,\theta}) \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T + Z_{n,\theta}) \right] - \mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T) \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T) \right] - p(x). \end{aligned}$$

• **Pas 1 :**

On étudie d'abord le terme donné par : $\mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T) \right] - p(x)$. En effet, vu la régularité de la densité de la diffusion X sous la condition d'Hörmander on a d'après la première assertion du lemme précédent que

$$\mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T) \right] - p(x) = \frac{h^s}{s!} \sum_{|\beta|=s} \partial^\beta p(x) \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^s u_{\beta_i} \phi(u) du + o(h^s).$$

Avec $\partial^\beta p$ est la dérivée partielle de p correspondante au multi-indice β . Notons que pour $h = n^{-\alpha}$, $\alpha \geq 1/s$ on a $o(h^s) = o(1/n)$.

• **Pas 2 :**

Pour le second terme donné par : $\mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T + Z_{n,\theta}) \right] - \mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T) \right]$, on voit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T + Z_{n,\theta}) \right] - \mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T) \right] &= \frac{1}{2n^{1+2\theta}} \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \left(\partial_{kk}^2 \phi_{h,x}(X_T) \right) \\ &\quad + \frac{1}{3!} \mathbb{E} \int_0^1 (1-\lambda)^3 (Z_{n,\theta} \cdot \nabla)^4 \phi_{h,x}(X_T + \lambda Z_{n,\theta}) d\lambda. \end{aligned}$$

En utilisant la formule d'intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T + Z_{n,\theta}) \right] - \mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T) \right] &= \frac{1}{2n^{1+2\theta}} \sum_{k=1}^d \partial_{kk}^2 p(x) \\ &\quad + \frac{1}{2n^{1+2\theta}} \sum_{k=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \phi_{h,x}(y) \partial_{kk}^2 (p(y) - p(x)) dy \\ &\quad + \frac{1}{3!} \mathbb{E} \int_0^1 (1-\lambda)^3 (Z_{n,\theta} \cdot \nabla)^4 \phi_{h,x}(X_T + \lambda Z_{n,\theta}) d\lambda. \end{aligned}$$

En employant la première assertion du Lemme précédent on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi_{h,x}(y) \partial_{kk}^2 (p(y) - p(x)) dy = o(h^s) = o(1/n).$$

D'autre part, comme $Z_{n,\theta}$ est indépendant de X on obtient que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(Z_{n,\theta} \cdot \nabla)^4 \phi_{h,x}(X_T + \lambda Z_{n,\theta}) \right] &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d} (Z_{n,\theta} \cdot \nabla)^4 \phi_{h,x}(y + \lambda Z_{n,\theta}) p(y) dy \\ &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_{h,x}(y + \lambda Z_{n,\theta}) (Z_{n,\theta} \cdot \nabla)^4 p(y) dy \end{aligned}$$

Comme $\phi_{h,x}$ est bornée on obtient que

$$\left| \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_{h,x}(y + \lambda Z_{n,\theta}) (Z_{n,\theta} \cdot \nabla)^4 p(y) dy \right| \leq \frac{c}{n^{4(1+\theta)d}}$$

La dernière inégalité étant une conséquence de la définition de $Z_{n,\theta}$ et du fait que $\nabla^4 p$ est intégrable, vu que p est à décroissance rapide. Donc ce dernier terme est aussi de l'ordre de $o(1/n)$.

• **Pas 3 :**

Il reste à traiter le troisième terme donné par

$$\mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) \right] - \mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T + Z_{n,\theta}) \right].$$

En effet, on a

$$\mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) \right] - \mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T + Z_{n,\theta}) \right] = \int_0^1 \mathbb{E} \left(\nabla \phi_{h,x}(\zeta_\lambda^n + Z_{n,\theta}) \cdot (X_T^n - X_T) \right) d\lambda, \quad (3.37)$$

où $\zeta_\lambda^n = X_T + \lambda(X_T^n - X_T)$.

Dans la suite on reprend les notations de Jacod et Protter (1998). On rappelle alors que $U_T^n := X_T^n - X_T$ vérifie la relation matricielle

$$\begin{aligned} U_T^n &= \sum_{k=1}^{q+1} \int_0^T L_n f_k(u) \times (U_u^n) dY_u^k \\ &\quad + \sum_{k,k'=1}^{q+1} \int_0^T \tilde{L}_n f_k(u) \times (f_{k'}(X_{\eta_n^n(u)}^n)(Y_{\eta_n^n(u)}^{k'} - Y_u^{k'})) dY_u^k, \quad (3.38) \end{aligned}$$

avec

$$L_n f_k(u) = \int_0^1 \mathbf{D}f_k(X_u + \lambda(X_u^n - X_u)) d\lambda,$$

et

$$\tilde{L}_n f_k(u) = \int_0^1 \mathbf{D}f_k(X_{\eta_n(u)}^n + \lambda(X_u^n - X_{\eta_n(u)}^n)) d\lambda.$$

On rappelle que $\mathbf{D}f_k$ désigne la matrice Jacobienne de f_k . D'après le Théorème 56 p.271 de Protter (1990) on a

$$U_T^n = \sum_{k,k'=1}^{q+1} \bar{\mathcal{E}}_T \int_0^T \bar{\mathcal{E}}_u^{-1} F_k^n(u) \times f_{k'}(X_{\eta_n(u)}^n)(Y_{\eta_n(u)}^{k'} - Y_u^{k'}) dY_u^{k'}, \quad (3.39)$$

avec $\bar{\mathcal{E}}$ est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\bar{\mathcal{E}}_T = \mathbf{1}_d + \sum_{k=1}^{q+1} \int_0^T L_n f_k(u) \times (\bar{\mathcal{E}}_u) dY_u^k$$

et $F^n(u) := (F_k^n(u), 1 \leq k \leq q+1)$ est donnée par la relation

$$F_1^n(u) = \tilde{L}_n f_1(u) - \sum_{j=2}^{q+1} \tilde{L}_n f_j(u) L_n f_j(u), \quad F_k^n(u) = \tilde{L}_n f_k(u) \quad \text{pour } k = 2, \dots, q+1.$$

En utilisant (3.39) on voit que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\nabla \phi_{h,x}(\zeta_\lambda^n + Z_{n,\theta}) \cdot (X_T^n - X_T) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\nabla \phi_{h,x}(\zeta_\lambda^n + Z_{n,\theta}) \cdot \bar{\mathcal{E}}_T \int_0^T \bar{\mathcal{E}}_u^{-1} F_1^n(u) \times f_1(X_{\eta_n(u)}^n)(\eta_n(u) - u) du \right) \\ &+ \sum_{k=2}^{q+1} \mathbb{E} \left(\nabla \phi_{h,x}(\zeta_\lambda^n + Z_{n,\theta}) \cdot \bar{\mathcal{E}}_T \int_0^T \bar{\mathcal{E}}_u^{-1} F_k^n(u) \times f_1(X_{\eta_n(u)}^n)(\eta_n(u) - u) dY_u^{k'} \right) \\ &+ \sum_{k'=2}^{q+1} \mathbb{E} \left(\nabla \phi_{h,x}(\zeta_\lambda^n + Z_{n,\theta}) \cdot \bar{\mathcal{E}}_T \int_0^T \bar{\mathcal{E}}_u^{-1} F_1^n(u) \times f_{k'}(X_{\eta_n(u)}^n)(Y_{\eta_n(u)}^{k'} - Y_u^{k'}) du \right) \\ &+ B_{n,h}, \end{aligned}$$

avec

$$B_{n,h} := \sum_{k,k'=2}^{q+1} \mathbb{E} \left(\nabla \phi_{h,x}(\zeta_\lambda^n + Z_{n,\theta}) \cdot \bar{\mathcal{E}}_T \int_0^T \bar{\mathcal{E}}_u^{-1} F_k^n(u) \times f_{k'}(X_{\eta_n(u)}^n)(Y_{\eta_n(u)}^{k'} - Y_u^{k'}) dY_u^{k'} \right)$$

Tous les termes de l'égalité précédente se traitent de la même façon. Ainsi, on portera notre intérêt sur le dernier terme $B_{n,h}$. Pour simplifier les notations on observe que tous les termes engagés dans $B_{n,h}$ sont de la forme

$$J_{k,k'} = \mathbb{E} \left(A \int_0^T B_u(Y_{\eta_n(u)}^{k'} - Y_u^{k'}) dY_u^k \right),$$

où Y^k et $Y^{k'}$ sont des mouvements Browniens. Comme $B_u(Y_{\eta_n(u)}^{k'} - Y_u^{k'})$ est un processus adapté, l'intégrale stochastique par rapport à dY_u^k coïncide avec l'intégrale de Skorohod δ^k par rapport à Y^k , donc il vient que

$$J_{k,k'} = \mathbb{E} \left(A \delta^k (B(Y_{\eta_n(\cdot)}^{k'} - Y^{\cdot k'})) \right).$$

On peut donc appliquer la formule de dualité (3.6) pour obtenir

$$J_{k,k'} = \mathbb{E} \left(\int_0^T B_u(Y_{\eta_n(u)}^{k'} - Y_u^{k'}) D_u^k A du \right).$$

On note après que $Y_{\eta_n(u)}^{k'} - Y_u^{k'} = \delta^{k'}(\mathbf{1}_{(\cdot) \in [\eta_n(u), u]})$ et on applique encore une fois la formule de dualité la formule de dualité (3.6) pour obtenir

$$\begin{aligned} J_{k,k'} &= \int_0^T du \mathbb{E} \left(\int_0^T ds \mathbf{1}_{(s) \in [\eta_n(u), u]} D_s^{k'} (B_u(Y_{\eta_n(u)}^{k'} - Y_u^{k'}) D_u^k A) \right) \\ &= \int_0^T du \int_{\eta_n(u)}^u ds \mathbb{E} \left(D_s^{k'} (B_u D_u^k A) \right) \end{aligned}$$

En employant cette formule on obtient

$$B_{n,h} = \sum_{k,k'=2}^{q+1} \int_0^T \int_u^{\eta_n(u)} \mathbb{E} \left(D_s^{k'} \left(D_u^k (\nabla \phi_{h,x}(\zeta_\lambda^n + Z_{n,\theta}) \cdot \bar{\mathcal{E}}_T) \bar{\mathcal{E}}_u^{-1} F_k^n(u) f_{k'}(X_{\eta_n(u)}^n) \right) \right) ds du.$$

La règle de dérivation au sens de Malliavin donne

$$\begin{aligned} B_{n,h} &= \sum_{k,k'=2}^{q+1} \sum_{i=1}^d \int_0^T \int_u^{\eta_n(u)} \mathbb{E} (\partial_i \phi_{h,x}(\zeta_\lambda^n + Z_{n,\theta}) G_{k,k'}^{n,(i)}(s,u)) ds du \\ &+ \sum_{k,k'=2}^{q+1} \sum_{i,j=1}^d \int_0^T \int_u^{\eta_n(u)} \mathbb{E} (\partial_{ij}^2 \phi_{h,x}(\zeta_\lambda^n + Z_{n,\theta}) G_{k,k'}^{n,(i,j)}(s,u)) ds du \\ &+ \sum_{k,k'=2}^{q+1} \sum_{i,j,l=1}^d \int_0^T \int_u^{\eta_n(u)} \mathbb{E} (\partial_{ijl}^3 \phi_{h,x}(\zeta_\lambda^n + Z_{n,\theta}) G_{k,k'}^{n,(i,j,l)}(s,u)) ds du, \end{aligned}$$

avec

$$G_{k,k'}^{n,(i)}(s,u) := D_s^{k'} [D_u^k \bar{\mathcal{E}}_T^i] \bar{\mathcal{E}}_u^{-1} F_k^n(u) f_{k'}(X_{\eta_n(u)}^n) \\ + D_u^k \bar{\mathcal{E}}_T^i D_s^{k'} [\bar{\mathcal{E}}_u^{-1} F_k^n(u) f_{k'}(X_{\eta_n(u)}^n)], \quad (3.40)$$

$$G_{k,k'}^{n,(i,j)}(s,u) := \left(D_s^{k'} [D_u^k \zeta_\lambda^{n,j} \bar{\mathcal{E}}_T^i] + D_s^{k'} \zeta_\lambda^{n,j} \bar{\mathcal{E}}_T^i \right) \bar{\mathcal{E}}_u^{-1} F_k^n(u) f_{k'}(X_{\eta_n(u)}^n) \\ + D_u^k \zeta_\lambda^{n,j} \bar{\mathcal{E}}_T^i D_s^{k'} [\bar{\mathcal{E}}_u^{-1} F_k^n(u) f_{k'}(X_{\eta_n(u)}^n)] \quad (3.41)$$

et

$$G_{k,k'}^{n,(i,j,l)}(s,u) := D_s^{k'} \zeta_\lambda^{n,l} D_u^k \zeta_\lambda^{n,j} \bar{\mathcal{E}}_T^i \bar{\mathcal{E}}_u^{-1} F_k^n(u) f_{k'}(X_{\eta_n(u)}^n). \quad (3.42)$$

Par conséquent, pour tout multi-indice de dérivation $m \in \{1, \dots, d\}^k$ pour $k = 1, 2, 3$, l'extension de la formule d'intégration par partie (voir la section 3.2.2) donne :

$$B_{n,h} = \sum_{k,k'=2}^{q+1} \sum_{|m| \leq 3} \int_0^T \int_u^{\eta_m(u)} \mathbb{E} \left(\psi_{h,x}(\zeta_\lambda^n + Z_{n,\theta}) \tilde{\mathbf{H}}_{m^+}(\zeta_\lambda^n, G_{k,k'}^{n,m}(s,u)) \right) ds du.$$

$$\text{où } \psi_{h,x}(y) := \int_{(-\infty, y_i)^d} \phi_{h,x}(t) dt$$

$$m^+ = (1, \dots, d, m)$$

On termine la preuve de la première assertion du théorème en utilisant les deux lemmes suivants.

Lemme 3.3.2. *Soit $g, g_n : [0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. On suppose que*

i) la fonction g est continue sur le compact $[0, T] \times [0, T]$.

ii) $\sup_{0 \leq s, u \leq T} |g_n(s, u) - g(s, u)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Alors

$$\int_0^T \int_{\eta_n(u)}^u g_n(s, u) ds du = \frac{1}{2n} \int_0^T g(u, u) du + o(1/n).$$

Lemme 3.3.3. *Avec les notations précédentes on a*

$$B_{n,h} = \frac{1}{2n} \sum_{k,k'=2}^{q+1} \sum_{|m| \leq 3} \int_0^T \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{X_T > x\}} \mathbf{H}_{m^+} (X_T, G_{k,k'}^m(u, u)) \right) du + o \left(\frac{1}{n} \right), \quad (3.43)$$

$$\text{où } \mathbf{H}_{m^+} (X_T, G_{k,k'}^m(u, u)) = \mathbf{H}_{(1, \dots, d)} (X_T, \mathbf{H}_m (X_T, G_{k,k'}^m(u, u))),$$

avec $G_{k,k'}^m(s, u)$ est le processus limite donné par

$$G_{k,k'}^{(i)}(s, u) := D_s^{k'} [D_u^k \mathcal{E}_T^i] \mathcal{E}_u^{-1} F_k(u) f_{k'}(X_u) + D_u^k \mathcal{E}_T^i D_s^{k'} [\mathcal{E}_u^{-1} F_k(u) f_{k'}(X_u)], \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} G_{k,k'}^{(i,j)}(s, u) := & \left(D_s^{k'} [D_u^k X_T^j \mathcal{E}_T^i] + D_s^{k'} X_T^j \mathcal{E}_T^i \right) \mathcal{E}_u^{-1} F_k(u) f_{k'}(X_u) \\ & + D_u^k X_T^j \mathcal{E}_T^i D_s^{k'} [\mathcal{E}_u^{-1} F_k(u) f_{k'}(X_u)] \end{aligned} \quad (3.45)$$

et

$$G_{k,k'}^{(i,j,l)}(s, u) := D_s^{k'} X_T^l D_u^k X_T^j \mathcal{E}_T^i \mathcal{E}_u^{-1} F_k(u) f_{k'}(X_u). \quad (3.46)$$

où \mathcal{E} est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\mathcal{E}_T = \mathbf{1}_d + \sum_{k=1}^{q+1} \int_0^T \mathbf{D}f_k(\mathcal{E}_u) dY_u^k$$

et $F(u) := (F_k(u), 1 \leq k \leq q+1)$ est donnée par la relation

$$F_1(u) = \mathbf{D}f_1(X_u) - \sum_{j=2}^{q+1} [\mathbf{D}f_j(X_u)]^2, \quad F_k(u) = \mathbf{D}f_k(X_u).$$

• Preuve de la deuxième assertion du théorème

On procède, par la même décomposition que dans la preuve de la première assertion. En effet

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\varphi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) \right] - p(x) &= \mathbb{E} \left[\varphi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) \right] - \mathbb{E} \left[\varphi_{h,x}(X_T + Z_{n,\theta}) \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\varphi_{h,x}(X_T + Z_{n,\theta}) \right] - \mathbb{E} \left[\varphi_{h,x}(X_T) \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\varphi_{h,x}(X_T) \right] - p(x). \end{aligned}$$

De la deuxième assertion du Lemme 3.3.1 on a que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\varphi_{h,x}(X_T) \right] = p(x).$$

Pour le deuxième terme donné par : $\mathbb{E}[\varphi_{h,x}(X_T + Z_{n,\theta})] - \mathbb{E}[\varphi_{h,x}(X_T)]$, on a que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi_{h,x}(X_T + Z_{n,\theta})] - \mathbb{E}[\varphi_{h,x}(X_T)] &= \frac{1}{2n^{1+2\theta}} \sum_{k=1}^d \mathbb{E}(\partial_{kk}^2 \varphi_{h,x}(X_T)) \\ &\quad + \frac{1}{3!} \mathbb{E} \int_0^1 (1-\lambda)^3 (Z_{n,\theta} \cdot \nabla)^4 \varphi_{h,x}(X_T + \lambda Z_{n,\theta}) d\lambda. \end{aligned}$$

En utilisant la formule d'intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi_{h,x}(X_T + Z_{n,\theta})] - \mathbb{E}[\varphi_{h,x}(X_T)] &= \frac{1}{2n^{1+2\theta}} \sum_{k=1}^d \partial_{kk}^2 p(x) \\ &\quad + \frac{1}{2n^{1+2\theta}} \sum_{k=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{h,x}(y) \partial_{kk}^2 (p(y) - p(x)) dy \\ &\quad + \frac{1}{3!} \mathbb{E} \int_0^1 (1-\lambda)^3 (Z_{n,\theta} \cdot \nabla)^4 \varphi_{h,x}(X_T + \lambda Z_{n,\theta}) d\lambda. \end{aligned}$$

En employant la deuxième assertion du Lemme 3.3.1, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi_{h,x}(y) \partial_{kk}^2 (p(y) - p(x)) dy \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

On termine par le même raisonnement que dans le pas deux de la preuve de la première assertion de ce théorème. On mentionne que, dans le pas 3 ci-dessus, on n'a employé que le fait que ϕ est intégrable et $\int \phi = 1$. Donc les affirmations obtenues dans ce pas restent vraies. Il nous restent de démontrer les Lemmes 3.3.2 et 3.3.3. \square

Preuve du Lemme 3.3.2. On sait que

$$\int_0^T \int_{\eta_n(u)}^u g_n(s, u) ds du = \int_0^T \int_{\eta_n(u)}^u g(s, u) ds du + \int_0^T \int_{\eta_n(u)}^u (g_n(s, u) - g(s, u)) ds du.$$

En vertu de ii) on a que $R_n = o(1/n)$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} I_n &:= \int_0^T \int_{\eta_n(u)}^u g(s, u) ds du \\ &= \int_0^T g(u, u)(u - \eta_n(u)) du + \int_0^T du \int_{\eta_n(u)}^u (g(u, u) - g(s, u)) ds. \end{aligned}$$

On fixe $\varepsilon > 0$ et on suppose qu'il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$ on a

$$\sup_{0 \leq u \leq T} \sup_{|s-u| \leq 1/n} |g(u, u) - g(s, u)| \leq \varepsilon.$$

Ce n_ε existe car g est continue sur le compact $[0, T] \times [0, T]$ donc uniformément continue, ainsi pour $n \geq n_\varepsilon$ on aura

$$\left| \int_0^T \int_{\eta_n(u)}^u (g(u, u) - g(s, u)) ds du \right| \leq \frac{\varepsilon}{n}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} I'_n &:= \int_0^T g(u, u)(u - \eta_n(u)) du \\ &= \int_0^T g(\eta_n(u), \eta_n(u))(u - \eta_n(u)) du + \int_0^T [g(\eta_n(u), \eta_n(u)) - g(u, u)](u - \eta_n(u)) du. \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, pour $n \geq n_\varepsilon$ on a

$$\left| \int_0^T [g(\eta_n(u), \eta_n(u)) - g(u, u)](u - \eta_n(u)) du \right| \leq \frac{\varepsilon}{n}.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} I''_n &:= \int_0^T g(\eta_n(u), \eta_n(u))(u - \eta_n(u)) du \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} g(l/n, l/n) \int_{\frac{l}{n}}^{\frac{l+1}{n}} (u - \frac{l}{n}) du \\ &= \frac{1}{2n^2} \sum_{l=0}^{n-1} g(l/n, l/n) \\ &= \frac{1}{2n} \int_0^T g(\eta_n(u), \eta_n(u)) du \\ &= \frac{1}{2n} \int_0^T g(u, u) du + \frac{1}{2n} \int_0^T (g(\eta_n(u), \eta_n(u)) - g(u, u)) du. \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons qu'au paravant pour $n \geq n_\varepsilon$ on a

$$\frac{1}{n} \left| \int_0^T (g(\eta_n(u), \eta_n(u)) - g(u, u)) du \right| \leq \frac{\varepsilon}{n}.$$

On conclut que

$$\left| I_n - \frac{1}{2n} \int_0^T g(u, u) du \right| \leq \frac{\varepsilon}{n}.$$

En particulier

$$\overline{\lim}_n n \left| I_n - \frac{1}{2n} \int_0^T g(u, u) du \right| \leq \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on conclut que

$$I_n = \frac{1}{2n} \int_0^T g(u, u) du + o(1/n).$$

□

Preuve du Lemme 3.3.3. On commence par donner le résultat suivant :

Par conséquent, afin de prouver (3.43) il suffit de vérifier que

$$\sup_{u,s \in [0,T]} |\Delta_{n,h}(u, s)| := \sup_{u,s \in [0,T]} |\Delta_{n,h}^1(u, s) + \Delta_{n,h}^2(s, u)| \rightarrow 0 \quad (3.47)$$

où

$$\Delta_{n,h}^1(u, s) := \mathbb{E} \left[(\psi_{h,x}(\zeta_\lambda^n + Z_{n,\theta}) - \mathbf{1}_{\{X_T > x\}}) \mathbf{H}_{m^+}(X_T, G_{k,k'}^m(s, u)) \right] \quad (3.48)$$

et

$$\Delta_{n,h}^2(s, u) := \mathbb{E} \left[\psi_{h,x}(\zeta_\lambda^n + Z_{n,\theta}) \{ \tilde{\mathbf{H}}_{m^+}(\zeta_\lambda^n, G_{k,k'}^{n,m}(s, u)) - \mathbf{H}_{m^+}(X_T, G_{k,k'}^m(s, u)) \} \right] \quad (3.49)$$

Comme pour tout $p \geq 1$ on a

$$\psi_{h,x}(\zeta_\lambda^n + Z_{n,\theta}) \xrightarrow{L^p} \mathbf{1}_{\{X_T > x\}}$$

et

$$\sup_{u,s \in [0,T]} \left\| \mathbf{H}_{m^+}(X_T, G_{k,k'}^m(s, u)) \right\|_p < \infty$$

alors on en déduit que

$$\sup_{u,s \in [0,T]} |\Delta_{n,h}^1(u, s)| \rightarrow 0 \quad (3.50)$$

D'autre part on a que

$$\begin{aligned} \sup_{u,s \in [0,T]} |\Delta_{n,h}^2(s, u)| &\leq c \sup_{u,s \in [0,T]} \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{m^+}(\zeta_\lambda^n, G_{k,k'}^{n,m}(s, u)) - \mathbf{H}_{m^+}(X_T, G_{k,k'}^m(s, u)) \right\|_2 \\ &\leq c \sup_{u,s \in [0,T]} \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{m^+}(\zeta_\lambda^n, G_{k,k'}^{n,m}(s, u)) - \tilde{\mathbf{H}}_{m^+}(\zeta_\lambda^n, G_{k,k'}^m(s, u)) \right\|_2 \\ &\quad + c \sup_{u,s \in [0,T]} \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{m^+}(\zeta_\lambda^n, G_{k,k'}^m(s, u)) - \tilde{\mathbf{H}}_{m^+}(X_T, G_{k,k'}^m(s, u)) \right\|_2 \\ &\quad + c \sup_{u,s \in [0,T]} \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{m^+}(X_T, G_{k,k'}^m(s, u)) - \mathbf{H}_{m^+}(X_T, G_{k,k'}^m(s, u)) \right\|_2. \end{aligned}$$

Or on a

$$\left\| \tilde{\mathbf{H}}_{m^+}(\zeta_\lambda^n, G_{k,k'}^{n,m}(s,u)) - \tilde{\mathbf{H}}_{m^+}(\zeta_\lambda^n, G_{k,k'}^m(s,u)) \right\|_2 = \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{m^+}(\zeta_\lambda^n, G_{k,k'}^{n,m}(s,u) - G_{k,k'}^m(s,u)) \right\|_2.$$

Vu que $\zeta_\lambda^n + Z_{n,\theta}$ est non-dégénérée, On conclut à l'aide de la première assertion de la Proposition 3.2.3 et des propriétés (3.27) et (3.28), propres à la diffusion et à son schéma d'Euler que

$$\sup_{u,s \in [0,T]} \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{m^+}(\zeta_\lambda^n, G_{k,k'}^{n,m}(s,u) - G_{k,k'}^m(s,u)) \right\|_2 \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

De même, comme $\zeta_\lambda^n + Z_{n,\theta}$ et X_T sont non-dégénérés on conclut via la deuxième assertion de la Proposition 3.2.3 et des (3.27) et (3.28), que

$$\sup_{u,s \in [0,T]} \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{m^+}(\zeta_\lambda^n, G_{k,k'}^m(s,u)) - \tilde{\mathbf{H}}_{m^+}(X_T, G_{k,k'}^m(s,u)) \right\|_2 \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Enfin, de la troisième assertion de la Proposition 3.2.3 on a

$$\sup_{u,s \in [0,T]} \left\| \tilde{\mathbf{H}}_{m^+}(X_T, G_{k,k'}^m(s,u)) - \mathbf{H}_{m^+}(X_T, G_{k,k'}^m(s,u)) \right\|_2 \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

On conclut alors que

$$\sup_{u,s \in \mathbb{R}^d} |\Delta_{n,h}^2(u,s)| \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.51)$$

□

3.4 Approximations des densités de diffusions non-dégénérées par Monte Carlo

Soit X la diffusion hypoelliptique solution de l'EDS (3.25). Le but de cette section est d'étudier l'approximation de la densité $p(x)$ de X par la méthode de Monte Carlo. En vue d'évaluer $p(x)$:

- on discrétise la diffusion X par un schéma d'Euler régularisé donné par $X^n + Z_{n,\theta}$ de pas de discrétisation T/n (voir section 3.2.2),
- on approche l'application $y \mapsto \delta_x(y)$ par le super-noyau $\phi_{h,x}(y)$ d'ordre s , où h désigne

la taille de la fenêtre du noyau en question (voir la relation (3.32)).

- on estime $\mathbb{E} \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta})$ par la méthode de Monte Carlo.

Pour cela, on considère l'estimateur classique donné par

$$\hat{S}^{n,N} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi_{h,x}(X_{T,i}^n + Z_{n,\theta}^i)$$

où $(X_{T,i}^n)_{1 \leq i \leq N}$ et $(Z_{n,\theta}^i)_{1 \leq i \leq N}$ sont des copies i.i.d. respectivement de X_T^n et de $Z_{n,\theta}$. Dans la suite nous démontrons un théorème limite centrale analogue à celui démontré par Duffie et Glynn (1995) donnant une description précise sur le choix de la taille N de l'échantillon i.i.d. en fonction du nombre de pas de discrétisation n dans le schéma d'Euler, lors de l'approximation de $\mathbb{E} f(X_T^n)$ pour une fonction f assez régulière (voir Théorème 2.3.1). Le théorème suivant nous donne une description précise sur le choix des deux paramètres N et h en fonction du nombre de pas de temps n .

On suppose que $N = n^\gamma$, $h = n^{-\alpha}$ où $\gamma > 0$ et $\alpha \geq 1/s$

Théorème 3.4.1. *Avec les notations précédentes, si $\gamma = 2 + \alpha d$ alors*

$$n(S^{n,N} - p(x)) \Rightarrow \sigma G + C_{\phi,p(x)}^s$$

avec $\sigma^2 = \phi_2 p(x)$, G une Gaussienne centrée réduite, $C_{\phi,p(x)}^s$ la constante de discrétisation donnée par le Théorème 3.3.1 et $\phi_2 = \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(u)|^2 du$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} n(S^{n,N} - p(x)) &= \frac{1}{n^{\gamma-1}} \sum_{i=1}^{n^\gamma} \left\{ \phi_{h,x}(X_{T,i}^n + Z_{n,\theta}^i) - \mathbb{E}[\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta})] \right\} \\ &\quad + n \left[\mathbb{E}[\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta})] - p(x) \right]. \end{aligned}$$

Or d'après le Théorème 3.3.1, on a

$$n \left[\mathbb{E}[\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta})] - p(x) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C_{\phi,p(x)}^s$$

Il nous reste alors à démontrer un théorème limite centrale pour la quantité $\frac{1}{n^{\gamma-1}} \sum_{i=1}^{n^\gamma} \zeta_{T,i}^{n,h}$ où

$$\zeta_{T,i}^{n,h} := \left\{ \phi_{h,x}(X_{T,i}^n + Z_{n,\theta}^i) - \mathbb{E}[\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta})] \right\},$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\exp\left(\frac{i u}{n^{\gamma-1}} \sum_{k=1}^{n^\gamma} \zeta_{T,k}^{n,h}\right) \right] &= \left[\mathbb{E} \exp\left(\frac{i u \zeta_T^{n,h}}{n^{\gamma-1}}\right) \right]^{n^\gamma} \\ &= \left[1 + \frac{1}{n^\gamma} \left(\frac{-u^2}{2n^{\gamma-2}} \mathbb{E} |\zeta_T^{n,h}|^2 + \mathbb{E} C_{n,h}(\omega) \right) \right]^{n^\gamma}, \end{aligned}$$

avec

$$|\mathbb{E} C_{n,h}(\omega)| \leq \frac{u^3}{6n^{2\gamma-3}} \mathbb{E} |\zeta_T^{n,h}|^3.$$

Pour évaluer les termes ci-dessus on définit les noyaux

$$\phi_{2,h,x}(y) = \frac{1}{h^d \phi_2} \phi^2\left(\frac{y-x}{h}\right), \quad \phi_2 = \int_{\mathbb{R}^d} \phi^2(u) du$$

et

$$\phi_{3,h,x}(y) = \frac{1}{h^d \phi_3} \left| \phi^3\left(\frac{y-x}{h}\right) \right|, \quad \phi_3 = \int_{\mathbb{R}^d} |\phi^3(u)| du$$

Ces deux fonctions positives sont intégrables et d'intégrales égale à 1. Par conséquent, d'après la deuxième assertion du Théorème 3.3.1 on a

$$\mathbb{E} \left[\phi_{i,h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) \right] = p(x) + \varepsilon_i(x), \quad i = 2, 3.$$

avec $\lim_n \varepsilon(x) = 0$.

Étudions d'abord le terme donnée par $\mathbb{E} |\zeta_T^{n,h}|^2$. on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\zeta_T^{n,h}|^2 &= \mathbb{E} [\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta})]^2 - \left\{ \mathbb{E} [\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta})] \right\}^2 \\ &= \frac{\phi_2}{h^d} \mathbb{E} [\phi_{2,h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta})] - \left\{ \mathbb{E} [\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta})] \right\}^2. \end{aligned}$$

où $\phi_{2,h,x}(y)$ désigne le noyau donné par

$$\phi_{2,h,x}(y) := \frac{1}{h^d \phi_2} \phi^2\left(\frac{y-x}{h}\right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\zeta_T^{n,h}|^2 &= \frac{\phi_2}{h^d} \varepsilon_2(x) + \frac{\phi_2}{h^d} p(x) \\ &\quad + \left\{ \frac{C_{\phi,p(x)}^s}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + p(x) \right\}^2 \end{aligned}$$

où $C_{\phi,p(x)}^s$ est la constante de discrétisation donnée par le Théorème 3.3.1. Par conséquent, pour $h = n^{-\alpha}$, $\gamma = 2 + \alpha d$ et $\alpha \geq 1/s$ on a

$$\frac{1}{n^{\gamma-2}} \mathbb{E} |\zeta_T^{n,h}|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi_2 p(x).$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\zeta_T^{n,h}|^3 &= \mathbb{E} \left| \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \mathbb{E}[\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta})] \right|^3 \\ &\leq \mathbb{E} |\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta})|^3 + 3\mathbb{E} |\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta})|^2 |\mathbb{E} \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta})| \\ &\quad + 3|\mathbb{E} \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta})| \left\{ \mathbb{E} [\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta})] \right\}^2 + \left| \mathbb{E} [\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta})] \right|^3 \end{aligned}$$

de la même façon que précédemment on déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\zeta_T^{n,h}|^3 &\leq \mathbb{E} \phi_{3,h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) \\ &\quad + 3\mathbb{E} \phi_{2,h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) |\mathbb{E} \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta})| \\ &\quad + 3|\mathbb{E} \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta})| \left\{ \mathbb{E} [\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta})] \right\}^2 + \left| \mathbb{E} [\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta})] \right|^3 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\zeta_T^{n,h}|^3 &\leq p(x) + \varepsilon_3(x) \\ &\quad + 3 \left| p(x) + \varepsilon_2(x) \right| \left| \frac{C_{\phi,p(x)}^s}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + p(x) \right| \\ &\quad + 4 \left| \frac{C_{\phi,p(x)}^s}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + p(x) \right|^3, \end{aligned}$$

ainsi, pour $h = n^{-\alpha}$, $\gamma = 2 + \alpha d$ et $\alpha \geq 1/s$ on voit que

$$\frac{1}{n^{2\gamma-3}} \mathbb{E} |\zeta_T^{n,h}|^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

ce qui achève la preuve. \square

On peut interpréter le théorème précédent comme suit : afin d'approcher la densité $p(x)$ par une méthode Monte Carlo avec une erreur globale d'ordre $1/n$ les paramètres nécessaires pour faire tourner l'algorithme sont $h = n^{-\alpha}$ et $N = n^{2+\alpha d}$ avec $\alpha \geq 1/s$ où s désigne l'ordre du super-noyau utilisé. ce qui nous mène à une complexité de l'algorithme donnée par

$$C_{MC} = C \times nN = C \times n^{3+\alpha d},$$

pour une constante $C > 0$ donnée. Ainsi, la complexité optimale dans une méthode de Monte Carlo est donnée par

$$C_{MC}^* = C \times n^{3+\frac{d}{s}}.$$

On voit ici que, plus l'ordre s du noyau est grand plus la complexité est petite. Il faut quand même tenir compte que la constante $C_{\phi,p(x)}^s$ dépend de s d'une part et que l'implémentation de la méthode de Monte Carlo avec un noyau d'ordre très grand pose certains problèmes. Donc le choix de l'ordre du noyau reste quand même un problème pratique ouvert.

3.5 Convergence en loi de la dérivée de l'erreur normalisée

Dans cette section, on se place, pour simplifier certaines écritures, en dimension 1 ($d=q=1$) et on considère l'EDS

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t,$$

où b et σ sont des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à dérivées bornées. Le schéma d'Euler de pas T/n , noté $(X_t^n)_{0 \leq t \leq T}$ vérifie

$$dX_t^n = b(X_{\eta_n(t)}^n) dt + \sigma(X_{\eta_n(t)}^n) dW_t,$$

avec $\eta_n(t) = [t/\delta]\delta$ pour $\delta = T/n$.

3.5.1 Equation du processus d'erreur

Le processus d'erreur $U^n = (U_t^n)_{0 \leq t \leq T}$, défini par

$$U_t^n = X_t - X_t^n,$$

vérifie l'équation

$$\begin{aligned} dU_t^n &= [b(X_t) - b(X_{\eta_n(t)}^n)] dt + [\sigma(X_t) - \sigma(X_{\eta_n(t)}^n)] dW_t \\ &= \dot{b}_t^n(X_t - X_{\eta_n(t)}^n) dt + \dot{\sigma}_t^n(X_t - X_{\eta_n(t)}^n) dW_t, \end{aligned}$$

avec les notations

$$\begin{aligned} \dot{b}_t^n &= \int_0^1 b' \left(X_{\eta_n(t)}^n + \lambda(X_t - X_{\eta_n(t)}^n) \right) d\lambda, \\ \dot{\sigma}_t^n &= \int_0^1 \sigma' \left(X_{\eta_n(t)}^n + \lambda(X_t - X_{\eta_n(t)}^n) \right) d\lambda. \end{aligned}$$

On a ainsi :

$$dU_t^n = \dot{b}_t^n U_t^n dt + \dot{\sigma}_t^n U_t^n dW_t + \dot{b}_t^n (X_t - X_{\eta_n(t)}^n) dt + \dot{\sigma}_t^n (X_t - X_{\eta_n(t)}^n) dW_t$$

ou encore :

$$U_t^n = \int_0^t U_s^n (\dot{b}_s^n ds + \dot{\sigma}_s^n dW_s) + G_t^n, \quad (3.52)$$

avec

$$\begin{aligned} G_t^n &= \int_0^t \dot{b}_s^n (X_s - X_{\eta_n(s)}^n) ds + \int_0^t \dot{\sigma}_s^n (X_s - X_{\eta_n(s)}^n) dW_s \\ &= \int_0^t (X_s - X_{\eta_n(s)}^n) (\dot{b}_s^n ds + \dot{\sigma}_s^n dW_s). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Notons que

$$X_s^n - X_{\eta_n(s)}^n = \bar{b}_s^n (s - \eta_n(s)) + \bar{\sigma}_s^n (W_s - W_{\eta_n(s)}), \quad (3.54)$$

avec $\bar{b}_s^n = b(X_{\eta_n(s)}^n)$ et $\bar{\sigma}_s^n = \sigma(X_{\eta_n(s)}^n)$.

L'égalité (3.52) fait apparaître U^n comme solution d'une équation linéaire qu'on peut résoudre en introduisant la solution $(Z_t^n)_{0 \leq t \leq T}$ de l'équation homogène

$$Z_t^n = 1 + \int_0^t Z_s^n (\dot{b}_s^n ds + \dot{\sigma}_s^n dW_s). \quad (3.55)$$

La méthode de variation de la constante donne en effet :

$$\begin{aligned} U_t^n &= Z_t^n \left\{ \int_0^t (Z_s^n)^{-1} dG_s^n - \int_0^t (Z_s^n)^{-1} \dot{\sigma}_s^n d\langle G^n, W \rangle_s \right\} \\ &= Z_t^n \left\{ \int_0^t (Z_s^n)^{-1} dG_s^n - \int_0^t (Z_s^n)^{-1} (\dot{\sigma}_s^n)^2 (X_s - X_{\eta_n(s)}^n) ds \right\}; \end{aligned}$$

On peut expliciter la solution de (3.55) sous la forme

$$Z_t^n = \exp \left\{ \int_0^t \left(\dot{b}_s^n - \frac{(\dot{\sigma}_s^n)^2}{2} \right) ds + \int_0^t \dot{\sigma}_s^n dW_s \right\}.$$

et on voit alors aisément que

$$\forall p \geq 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Z_t^n - Z_t|^p \right] = 0,$$

et

$$\forall p \geq 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{1}{Z_t^n} - \frac{1}{Z_t} \right|^p \right] = 0,$$

où

$$Z_t = \exp \left\{ \int_0^t \left(\dot{b}_s - \frac{(\dot{\sigma}_s)^2}{2} \right) ds + \int_0^t \dot{\sigma}_s dW_s \right\}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

avec $\dot{b}_t = b'(X_t)$ et $\dot{\sigma}_t = \sigma'(X_t)$.

Dans la suite, on notera \check{W}^n le processus défini par

$$\check{W}_t^n = \sqrt{\frac{2n}{T}} \int_0^t (W_s - W_{\eta_n(s)}) dW_s.$$

D'après le Theorème 3.2 de Jacod et Protter (1998), le processus \check{W}^n converge en loi stablement vers un mouvement Brownien \check{W} indépendant de W et le couple $(\check{W}^n, \sqrt{n}U^n)$ converge en loi stablement vers le couple (\check{W}, U) où le processus U est solution de

$$U_t = \int_0^t \dot{b}_s U_s ds + \int_0^t \dot{\sigma}_s U_s dW_s + \sqrt{\frac{T}{2}} \int_0^t \dot{\sigma}_s \sigma_s d\check{W}_s, \quad (3.56)$$

avec la notation $\sigma_s = \sigma(X_s)$.

3.5.2 Dérivée du processus d'erreur

Pour obtenir l'équation vérifiée par la dérivée de Malliavin du processus d'erreur, on dérive l'équation (3.52) :

$$D_s U_t^n = \int_0^t D_s U_v^n (\dot{b}_v^n dv + \dot{\sigma}_v^n dW_v) + \int_0^t U_v^n (D_s \dot{b}_v^n dv + D_s \dot{\sigma}_v^n dW_v) + \dot{\sigma}_s^n U_s^n \mathbf{1}_{\{s \leq t\}} + D_s G_t^n. \quad (3.57)$$

On a, en utilisant (3.53) et (3.54),

$$D_s G_t^n = (X_s^n - X_{\eta_n(s)}^n) \dot{\sigma}_s^n \mathbf{1}_{\{s \leq t\}} + \int_0^t D_s [(X_u^n - X_{\eta_n(u)}^n) \dot{b}_u^n] du + \int_0^t D_s [(X_u^n - X_{\eta_n(u)}^n) \dot{\sigma}_u^n] dW_u$$

et

$$D_s [(X_u^n - X_{\eta_n(u)}^n) \dot{b}_u^n] = (u - \eta_n(u)) D_s (\bar{b}_u^n \dot{b}_u^n) + (W_u - W_{\eta_n(u)}) D_s (\bar{\sigma}_u^n \dot{b}_u^n) + \bar{\sigma}_u^n \dot{b}_u^n \mathbf{1}_{\{\eta_n(u) \leq s \leq u\}}$$

$$D_s [(X_u^n - X_{\eta_n(u)}^n) \dot{\sigma}_u^n] = (u - \eta_n(u)) D_s (\bar{b}_u^n \dot{\sigma}_u^n) + (W_u - W_{\eta_n(u)}) D_s (\bar{\sigma}_u^n \dot{\sigma}_u^n) + \bar{\sigma}_u^n \dot{\sigma}_u^n \mathbf{1}_{\{\eta_n(u) \leq s \leq u\}}.$$

En revenant à (3.57) et en notant que $D_s Z = 0$ pour Z \mathcal{F}_u -mesurable avec $u < s$, on obtient, pour $s \leq t$,

$$D_s U_t^n = \dot{\sigma}_s^n (U_s^n + X_s^n - X_{\eta_n(s)}^n) + \int_s^t D_s U_v^n (\dot{b}_v^n dv + \dot{\sigma}_v^n dW_v) + \tilde{G}_{s,t}^n, \quad (3.58)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{s,t}^n &= \int_s^t U_v^n (D_s \dot{b}_v^n dv + D_s \dot{\sigma}_v^n dW_v) \\ &\quad + \int_s^t \left\{ D_s (\bar{b}_u^n \dot{b}_u^n) (u - \eta_n(u)) + D_s (\bar{\sigma}_u^n \dot{b}_u^n) (W_u - W_{\eta_n(u)}) \right\} du \\ &\quad + \int_s^t \left\{ D_s (\bar{b}_u^n \dot{\sigma}_u^n) (u - \eta_n(u)) + D_s (\bar{\sigma}_u^n \dot{\sigma}_u^n) (W_u - W_{\eta_n(u)}) \right\} dW_u \\ &\quad + \int_s^t \bar{\sigma}_u^n \mathbf{1}_{\{\eta_n(u) \leq s \leq u\}} (\dot{b}_u^n du + \dot{\sigma}_u^n dW_u). \end{aligned} \quad (3.59)$$

On déduit de (3.58) et de la méthode de la variation des constantes que, pour $t \geq s$,

$$D_s U_t^n = (Z_s^n)^{-1} \dot{\sigma}_s^n (U_s^n + X_s^n - X_{\eta_n(s)}^n) Z_t^n + Z_t^n \left\{ \int_s^t (Z_u^n)^{-1} d\tilde{G}_{s,u}^n - \int_s^t (Z_u^n)^{-1} \dot{\sigma}_u^n d\langle \tilde{G}_{s,\cdot}^n, W \rangle_u \right\}. \quad (3.60)$$

3.5.3 Un théorème de convergence en loi pour la dérivée du processus d'erreur normalisé

La dérivée de Malliavin de la variable aléatoire U_T^n peut être vue comme une variable aléatoire à valeurs dans l'espace de Hilbert $H = L^2([0, T])$. Le but de cette section est d'établir un théorème de convergence en loi pour la suite $\sqrt{n}DU_T^n$. Notons que le processus U , limite de $\sqrt{n}U^n$, est un processus adapté à la filtration des mouvements Browniens W et \check{W} . A partir de (3.56), on voit que l'on peut définir les dérivées DU_t et $\check{D}U_t$ par rapport à ces deux Browniens et que DU_t est caractérisé par l'égalité

$$D_s U_t = \dot{\sigma}_s U_s + \int_s^t D_s U_v (\dot{b}_v dv + \dot{\sigma}_v dW_v) + \int_s^t U_v (D_s \dot{b}_v dv + D_s \dot{\sigma}_v dW_v) + \sqrt{\frac{T}{2}} \int_s^t D_s (\dot{\sigma}_v \sigma_v) d\check{W}_v. \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (3.61)$$

ou encore, par variation des constantes,

$$D_s U_t = (Z_s)^{-1} \dot{\sigma}_s U_s Z_t + Z_t \left\{ \int_s^t (Z_u)^{-1} dG_{s,u} - \int_s^t (Z_u)^{-1} \dot{\sigma}_u d\langle G_{s,\cdot}, W \rangle_u \right\}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (3.62)$$

avec

$$G_{s,t} = \int_s^t U_v (D_s \dot{b}_v dv + D_s \dot{\sigma}_v dW_v) + \sqrt{\frac{T}{2}} \int_s^t D_s (\dot{\sigma}_v \sigma_v) d\check{W}_v. \quad (3.63)$$

Théorème 3.5.1. *Soit $H = (H_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus continu (éventuellement non adapté). Le couple de variables aléatoires $(\sqrt{n}U_T^n, \sqrt{n} \int_0^T H_s D_s U_T^n ds)$ converge en loi stablement vers le couple $(U_T, \int_0^T H_s D_s U_T ds)$ où DU_T est la dérivée de Malliavin de U par rapport au Brownien W , caractérisé par (3.62).*

Pour la démonstration du théorème, nous avons besoin des lemmes techniques suivants. Nous les démontrerons à la fin de cette section (voir Jacod et Protter (1998) pour des résultats voisins).

Lemme 3.5.1. Soit $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus continu (éventuellement non adapté). la suite de v.a.r. $(\sqrt{n} \int_0^T H_s (W_s - W_{\eta_n(s)}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers 0.

Lemme 3.5.2. Soit $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus continu (éventuellement non adapté) et soit $(K_u^n)_{0 \leq u \leq T}$ une suite de processus continus adaptés vérifiant $\sup_n \mathbb{E} \int_0^T (K_u^n)^2 du < \infty$. Alors la suite $(\sqrt{n} \int_0^T H_s (\int_0^T \mathbf{1}_{\{\eta_n(u) \leq s \leq u\}} K_u^n dW_u) ds)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers 0.

Preuve du Théorème 3.5.1. D'après la relation (3.60), on a

$$D_s U_T^n = (Z_s^n)^{-1} \dot{\sigma}_s^n (U_s^n + X_s^n - X_{\eta_n(s)}^n) Z_T^n + Z_T^n \left\{ \int_s^T (Z_u^n)^{-1} d\tilde{G}_{s,u}^n - \int_s^T (Z_u^n)^{-1} \dot{\sigma}_u^n d\langle \tilde{G}_{s,\cdot}^n, W \rangle_u \right\}. \quad (3.64)$$

et par conséquent,

$$\int_0^T H_s D_s U_T^n ds = Z_T^n \int_0^T H_s (Z_s^n)^{-1} \dot{\sigma}_s^n (U_s^n + X_s^n - X_{\eta_n(s)}^n) ds + Z_T^n I_T^n, \quad (3.65)$$

avec

$$I_T^n = \int_0^T H_s \left(\int_s^T (Z_u^n)^{-1} d\tilde{G}_{s,u}^n - \int_s^T (Z_u^n)^{-1} \dot{\sigma}_u^n d\langle \tilde{G}_{s,\cdot}^n, W \rangle_u \right) ds.$$

On a d'autre part, d'après la relation (3.62)

$$\int_0^T H_s D_s U_T ds = Z_T \int_0^T H_s (Z_s)^{-1} \dot{\sigma}_s U_s ds + Z_T I_T \quad (3.66)$$

avec

$$I_T = \int_0^T H_s \left(\int_s^T (Z_u)^{-1} dG_{s,u} - \int_s^T (Z_u)^{-1} \dot{\sigma}_u d\langle G_{s,\cdot}, W \rangle_u \right) ds.$$

On observe pour commencer que

$$\int_0^T H_s (Z_s^n)^{-1} \dot{\sigma}_s^n (U_s^n + X_s^n - X_{\eta_n(s)}^n) ds = \int_0^t H_s (Z_s)^{-1} \dot{\sigma}_s U_s ds + \xi_T^n \quad (3.67)$$

avec $\mathbb{P} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} \xi_T^n) = 0$, où la notation $\mathbb{P} \lim$ signifie la limite en probabilité.

En effet, la tension du processus $\sqrt{n} U^n$ et la convergence en probabilité vers 0 de $\sup_{0 \leq s \leq T} |(Z_s^n)^{-1} \dot{\sigma}_s^n - (Z_s)^{-1} \dot{\sigma}_s|$ impliquent

$$\mathbb{P} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^T H_s [(Z_s^n)^{-1} \dot{\sigma}_s^n - (Z_s)^{-1} \dot{\sigma}_s] U_s^n ds = 0.$$

D'autre part, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_0^T H_s(Z_s^n)^{-1} \dot{\sigma}_s^n (X_s^n - X_{\eta_n(s)}^n) ds &= \int_0^T H_s(Z_s^n)^{-1} \dot{\sigma}_s^n \bar{b}_s^n (s - \eta_n(s)) ds \\ &\quad + \int_0^T H_s(Z_s^n)^{-1} \dot{\sigma}_s^n \bar{\sigma}_s^n (W_s - W_{\eta_n(s)}) ds. \end{aligned} \quad (3.68)$$

On voit facilement, en utilisant la majoration $(s - \eta_n(s)) \leq T/n$, que

$$\mathbb{P} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^T H_s(Z_s^n)^{-1} \dot{\sigma}_s^n \bar{b}_s^n (s - \eta_n(s)) ds = 0.$$

Pour le deuxième terme, on remarque que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T H_s[(Z_s^n)^{-1} \dot{\sigma}_s^n \bar{\sigma}_s^n - (Z_s)^{-1} \dot{\sigma}_s \sigma_s] (W_s - W_{\eta_n(s)}) ds \right| &\leq \\ &\sup_{0 \leq s \leq T} \left| H_s[(Z_s^n)^{-1} \dot{\sigma}_s^n \bar{\sigma}_s^n - (Z_s)^{-1} \dot{\sigma}_s \sigma_s] \right| \int_0^T |W_s - W_{\eta_n(s)}| ds \end{aligned}$$

et la suite $\sqrt{n} \int_0^T |W_s - W_{\eta_n(s)}| ds$ étant tendue (car bornée dans L^1), on déduit du Lemme 3.5.1 que

$$\mathbb{P} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^T H_s(Z_s^n)^{-1} \dot{\sigma}_s^n \bar{\sigma}_s^n (W_s - W_{\eta_n(s)}) ds = 0.$$

On étudie maintenant la suite (I_T^n) . Pour cela, on récrit le processus $\tilde{G}_{s,t}^n$ en faisant apparaître les termes prépondérants.

A partir de (3.59) on a

$$\tilde{G}_{s,t}^n = \hat{G}_{s,t}^n + \int_s^t \alpha_{s,u}^n du + \int_s^t \beta_{s,u}^n dW_u,$$

avec

$$\hat{G}_{s,t}^n = \int_s^t U_v^n (D_s \dot{b}_v^n dv + D_s \dot{\sigma}_v^n dW_v) + \int_s^t D_s (\bar{\sigma}_u^n \dot{\sigma}_u^n) (W_u - W_{\eta_n(u)}) dW_u.$$

$$\alpha_{s,u}^n = D_s (\bar{b}_u^n \dot{b}_u^n) (u - \eta_n(u)) + D_s (\bar{\sigma}_u^n \dot{b}_u^n) (W_u - W_{\eta_n(u)}) + \bar{\sigma}_u^n \mathbf{1}_{\{\eta_n(u) \leq s \leq u\}} \dot{b}_u^n,$$

et

$$\beta_{s,u}^n = D_s (\bar{b}_u^n \dot{\sigma}_u^n) (u - \eta_n(u)) + \bar{\sigma}_u^n \dot{\sigma}_u^n \mathbf{1}_{\{\eta_n(u) \leq s \leq u\}}.$$

Avec ces notations, on a :

$$I_T^n = \hat{I}_T^n + J_T^n, \quad \text{avec} \quad (3.69)$$

$$\hat{I}_T^n = \int_0^T H_s \left(\int_s^T (Z_u^n)^{-1} d\hat{G}_{s,u}^n - \int_s^T (Z_u^n)^{-1} \dot{\sigma}_u^n d\langle \hat{G}_{s,\cdot}^n, W \rangle_u \right) ds$$

et

$$J_T^n = \int_0^T H_s \left(\int_s^T (Z_u^n)^{-1} \alpha_{s,u}^n du + (Z_u^n)^{-1} \beta_{s,u}^n dW_u \right) ds - \int_0^T H_s \left(\int_s^T (Z_u^n)^{-1} \dot{\sigma}_u^n \beta_{s,u}^n du \right) ds$$

$$= \int_0^T H_s \left(\int_s^T \gamma_{s,u}^n du \right) ds + \int_0^T H_s \left(\int_s^T \lambda_{s,u}^n dW_u \right) ds$$

avec

$$\gamma_{s,u}^n = (Z_u^n)^{-1} [\alpha_{s,u}^n - \dot{\sigma}_u^n \beta_{s,u}^n] \quad \text{et} \quad \lambda_{s,u}^n = (Z_u^n)^{-1} \beta_{s,u}^n.$$

Montrons que

$$\mathbb{P} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} J_T^n) = 0. \quad (3.70)$$

on a :

$$\int_0^T H_s \left(\int_s^T \gamma_{s,u}^n du \right) ds = A_T^n + B_T^n + C_T^n,$$

avec

$$A_T^n = \int_0^T H_s \left(\int_s^T (Z_u^n)^{-1} [D_s(\bar{b}_u^n \dot{b}_u^n) - \dot{\sigma}_u^n D_s(\bar{b}_u^n \dot{\sigma}_u^n)] (u - \eta_n(u)) du \right) ds,$$

$$B_T^n = \int_0^T H_s \left(\int_s^T (Z_u^n)^{-1} D_s(\bar{\sigma}_u^n \dot{b}_u^n) (W_u - W_{\eta_n(u)}) du \right) ds,$$

$$C_T^n = \int_0^T H_s \left(\int_s^T (Z_u^n)^{-1} \bar{\sigma}_u^n (\dot{b}_u^n - (\dot{\sigma}_u^n)^2) \mathbf{1}_{\{\eta_n(u) \leq s \leq u\}} du \right) ds.$$

On a

$$|A_T^n| \leq \int_0^T |Z_u^n|^{-1} (u - \eta_n(u)) \left(\int_0^u |H_s| |D_s(\bar{b}_u^n \dot{b}_u^n) - \dot{\sigma}_u^n D_s(\bar{b}_u^n \dot{\sigma}_u^n)| ds \right) du$$

$$\leq \int_0^T |Z_u^n|^{-1} (u - \eta_n(u)) |H|_2 \left(|D(\bar{b}_u^n \dot{b}_u^n)|_2 + |\dot{\sigma}_u^n| |D(\bar{b}_u^n \dot{\sigma}_u^n)|_2 \right) du,$$

avec la notation $|H|_2 = \left(\int_0^T H_s^2 ds \right)^{1/2}$, $|DZ|_2 = \left(\int_0^T (D_s Z)^2 ds \right)^{1/2}$. On en déduit aisément que $\mathbb{P} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} A_T^n = 0$. On a

$$B_T^n = \int_0^T \left(\int_0^u H_s D_s(\bar{\sigma}_u^n \dot{b}_u^n) ds \right) (Z_u^n)^{-1} (W_u - W_{\eta_n(u)}) du$$

$$= \int_0^T (Z_u^n)^{-1} (H, D(\bar{\sigma}_u^n \dot{b}_u^n))_2 (W_u - W_{\eta_n(u)}) du,$$

où $(\cdot, \cdot)_2$ désigne le produit scalaire dans $L^2([0, T])$. On en déduit, en utilisant le Lemme 3.5.1 et la convergence de $D(\bar{\sigma}_u^n \dot{b}_u^n)$ vers $D(\sigma_u \dot{b}_u)$ que $\mathbb{P} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} B_T^n = 0$. Le troisième terme C_T^n se traite de la manière suivante :

$$C_T^n = \int_0^T du (Z_u^n)^{-1} \bar{\sigma}_u^n (\dot{b}_u^n - (\dot{\sigma}_u^n)^2) \left(\int_{\eta_n(u)}^u H_s ds \right)$$

donc

$$|C_T^n| \leq \int_0^T (u - \eta_n(u)) |Z_u^n|^{-1} |\bar{\sigma}_u^n (\dot{b}_u^n - (\dot{\sigma}_u^n)^2)| |H|_\infty du$$

avec la notation $|H|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq T} |H_t|$. On en déduit aisément que

$$\mathbb{P} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} C_T^n) = 0.$$

Pour obtenir (3.70), il reste à montrer que

$$\mathbb{P} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n} \int_0^T H_s \left(\int_0^T \lambda_{s,u}^n dW_u \right) ds \right) = 0. \quad (3.71)$$

On a

$$\lambda_{s,u}^n = (Z_u^n)^{-1} D_s(\bar{b}_u^n \dot{\sigma}_u^n)(u - \eta_n(u)) + (Z_u^n)^{-1} \bar{\sigma}_u^n \dot{\sigma}_u^n \mathbf{1}_{\{\eta_n(u) \leq s \leq u\}}.$$

On déduit du Lemme 3.5.2 que

$$\mathbb{P} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n} \int_0^T H_s \left(\int_s^T (Z_u^n)^{-1} \bar{\sigma}_u^n \dot{\sigma}_u^n \mathbf{1}_{\{\eta_n(u) \leq s \leq u\}} dW_u \right) ds \right) = 0.$$

Notons

$$\bar{\lambda}_{s,u}^n = (Z_u^n)^{-1} D_s(\bar{b}_u^n \dot{\sigma}_u^n)(u - \eta_n(u)).$$

On a

$$\left| \int_0^T H_s \left(\int_s^T \bar{\lambda}_{s,u}^n dW_u \right) ds \right| \leq |H|_\infty \int_0^T \left| \int_s^T \bar{\lambda}_{s,u}^n dW_u \right| ds$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^T \left| \int_s^T \bar{\lambda}_{s,u}^n dW_u \right| ds &\leq \sqrt{T} \left\{ \mathbb{E} \int_0^T \left(\int_s^T \bar{\lambda}_{s,u}^n dW_u \right)^2 ds \right\}^{1/2} \\ &= \sqrt{T} \left\{ \mathbb{E} \int_0^T \left(\int_s^T (\bar{\lambda}_{s,u}^n)^2 du \right) ds \right\}^{1/2} \\ &= \sqrt{T} \left\{ \mathbb{E} \int_0^T \left(\int_0^u (\bar{\lambda}_{s,u}^n)^2 ds \right) du \right\}^{1/2} \\ &= \sqrt{T} \left\{ \mathbb{E} \int_0^T (Z_u^n)^{-2} (u - \eta_n(u))^2 |D(\bar{b}_u^n \dot{\sigma}_u^n)|_2^2 du \right\}^{1/2} \\ &\leq \frac{T^{3/2}}{n} \left\{ \mathbb{E} \int_0^T (Z_u^n)^{-2} |D(\bar{b}_u^n \dot{\sigma}_u^n)|_2^2 du \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $\sqrt{n} \int_0^T |\int_s^T \bar{\lambda}_{s,u}^n dW_u| ds$ tend vers 0 dans L^1 , d'où la relation (3.71). On étudie maintenant la suite $(\hat{I}_T^n)_{n \in \mathbb{N}}$. On va montrer que

$$\mathbb{P} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\hat{I}_T^n - \bar{I}_T^n) = 0, \quad (3.72)$$

où

$$\bar{I}_T^n = \int_0^T H_s \left(\int_s^T (Z_u)^{-1} dG_{s,u}^n - \int_s^T (Z_u)^{-1} \dot{\sigma}_u d\langle G_{s,\cdot}^n, W \rangle_u \right) ds$$

et le processus $(G_{s,t}^n)_{s \leq t}$ est défini par

$$G_{s,t}^n = \int_s^t U_v^n (D_s \dot{b}_v dv + D_s \dot{\sigma}_v dW_v) + \int_s^t D_s (\sigma_u \dot{\sigma}_u) (W_u - W_{\eta_n(u)}) dW_u. \quad (3.73)$$

On a :

$$\hat{I}_T^n - \bar{I}_T^n = \int_0^T H_s \left(\int_s^T U_u^n (\rho_{s,u}^n du + \sigma_{s,u}^n dW_u) + (W_u - W_{\eta_n(u)}) (\zeta_{s,u}^n du + \xi_{s,u}^n dW_u) \right)$$

avec

$$\begin{aligned} \rho_{s,u}^n &= (Z_u^n)^{-1} D_s \dot{b}_u^n - (Z_u)^{-1} D_s \dot{b}_u - \left((Z_u^n)^{-1} \dot{\sigma}_u^n D_s \dot{\sigma}_u^n - (Z_u)^{-1} \dot{\sigma}_u D_s \dot{\sigma}_u \right) \\ \sigma_{s,u}^n &= (Z_u^n)^{-1} D_s \dot{\sigma}_u^n - (Z_u)^{-1} D_s \dot{\sigma}_u \\ \zeta_{s,u}^n &= - \left((Z_u^n)^{-1} \dot{\sigma}_u^n D_s (\sigma_u^n \dot{\sigma}_u^n) - (Z_u)^{-1} \dot{\sigma}_u D_s (\bar{\sigma}_u \dot{\sigma}_u) \right) \\ \xi_{s,u}^n &= (Z_u^n)^{-1} D_s (\bar{\sigma}_u^n \dot{\sigma}_u^n) - (Z_u)^{-1} D_s (\sigma_u \dot{\sigma}_u). \end{aligned}$$

Pour $\alpha = \rho, \sigma, \zeta, \xi$, on a, pour tout $p \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_u \mathbb{E} \left(\int_0^T (\alpha_{s,u}^n)^2 ds \right)^{p/2} = 0$$

et, par ailleurs

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{0 \leq u \leq T} \|\sqrt{n} U_u^n\|_p + \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{0 \leq u \leq T} \|\sqrt{n} (W_u - W_{\eta_n(u)})\|_p < \infty.$$

On en déduit facilement que $\sqrt{n}(\hat{I}_T^n - \bar{I}_T^n)$ converge vers 0 en probabilité. On déduit des relations (3.69), (3.70), (3.72) que

$$\begin{aligned} I_T^n &= \bar{I}_T^n + i_T^n \\ &= \int_0^T H_s \left(\int_s^T (Z_u)^{-1} dG_{s,u}^n - \int_s^T (Z_u)^{-1} \dot{\sigma}_u d\langle G_{s,\cdot}^n, W \rangle_u \right) ds + i_T^n, \end{aligned}$$

où G^n est donné par la relation (3.73) et $\mathbb{P} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} i_T^n = 0$. On a

$$\begin{aligned} \bar{I}_T^n &= \int_0^T H_s \left(\int_s^T (Z_u)^{-1} U_u^n (D_s \dot{b}_u du + D_s \dot{\sigma}_u dW_u) \right) ds \\ &\quad + \sqrt{\frac{T}{2}} \int_0^T H_s \left(\int_s^T (Z_u)^{-1} D_s (\sigma_u \dot{\sigma}_u) d\check{W}_u^n \right) ds \\ &\quad - \int_0^T H_s \left(\int_s^T (Z_u)^{-1} \dot{\sigma}_u U_u^n D_s \dot{\sigma}_u du \right) ds - \bar{i}_T^n \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{i}_T^n &= \int_0^T H_s \left(\int_s^T (Z_u)^{-1} \dot{\sigma}_u D_s (\sigma_u \dot{\sigma}_u) (W_u - W_{\eta_n(u)}) du \right) ds \\ &= \int_0^T (Z_u)^{-1} \dot{\sigma}_u \left(\int_0^u D_s (\sigma_u \dot{\sigma}_u) H_s ds \right) (W_u - W_{\eta_n(u)}) du \end{aligned}$$

Notons que, d'après le Lemme 3.5.1, $\mathbb{P} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} \bar{i}_T^n) = 0$. On a par ailleurs

$$\begin{aligned} \bar{I}_t^n + \bar{i}_T^n &= \int_0^T H_s \left(\int_s^T (Z_u)^{-1} U_u^n (D_s \dot{b}_u - \dot{\sigma}_u D_s \dot{\sigma}_u) du \right) ds \\ &\quad + \int_0^T H_s \left(\int_s^T (Z_u)^{-1} U_u^n D_s \dot{\sigma}_u dW_u \right) ds \\ &\quad + \sqrt{\frac{T}{2}} \int_0^T H_s \left(\int_s^T (Z_u)^{-1} D_s (\sigma_u \dot{\sigma}_u) d\check{W}_u^n \right) ds \\ &= \int_0^T (Z_u)^{-1} U_u^n \left(\int_0^u H_s (D_s \dot{b}_u - \dot{\sigma}_u D_s \dot{\sigma}_u) ds \right) du \\ &\quad + \int_0^T H_s \left(\int_s^T (Z_u)^{-1} U_u^n D_s \dot{\sigma}_u dW_u \right) ds \\ &\quad + \sqrt{\frac{T}{2}} \int_0^T H_s \left(\int_s^T (Z_u)^{-1} D_s (\sigma_u \dot{\sigma}_u) d\check{W}_u^n \right) ds. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \int_0^T H_s D_s U_T^n ds &= Z_T^n \int_0^T \bar{H}_s U_s^n ds + Z_T^n \int_0^T H_s \left(\int_s^T U_u^n \xi_{s,u} dW_u \right) ds \\ &\quad + Z_T^n \int_0^T H_s \left(\int_s^T \zeta_{s,u} d\check{W}_u^n \right) ds + \varepsilon_T^n \end{aligned}$$

avec $\mathbb{P} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \varepsilon_T^n = 0$,

$$\begin{aligned} \bar{H}_s &= H_s (Z_s)^{-1} + (Z_s)^{-1} \int_0^s H_t (D_t \dot{b}_s - \dot{\sigma}_s D_t \dot{\sigma}_s) dt \\ &= (Z_s)^{-1} [\dot{\sigma}_s H_s + (H, D \dot{b}_s)_2 - \dot{\sigma}_s (H, D \dot{\sigma}_s)_2] \end{aligned}$$

$$\xi_{s,u} = (Z_u)^{-1} D_s \dot{\sigma}_u, \quad \zeta_{s,u} = \sqrt{\frac{T}{2}} (Z_u)^{-1} D_s (\sigma_u \dot{\sigma}_u).$$

D'après la relation (3.66)

$$\begin{aligned} \int_0^T H_s D_s U_T ds &= Z_T \int_0^T \bar{H}_s U_s ds + Z_T \int_0^T H_s \left(\int_s^T U_u \xi_{s,u} dW_u \right) ds \\ &\quad + Z_T \int_0^T H_s \left(\int_s^T \zeta_{s,u} d\check{W}_u \right) ds. \end{aligned}$$

La convergence en loi stable vers la limite souhaitée résulte alors du lemme suivant. On utilise la notation

$$\bar{U}_t^n = \sqrt{n} U_t^n.$$

Lemme 3.5.3. *Soit H, K, L trois processus à trajectoires continues sur $[0, T]$ et soit $(\xi_{s,u})_{0 \leq s \leq u \leq T}, (\zeta_{s,u})_{0 \leq s \leq u \leq T}$ deux processus à trajectoires continues tels que les processus $\xi_{s,\cdot}$ et $\zeta_{s,\cdot}$ soient adaptés pour tout $s \in [0, T]$ et :*

$$\mathbb{E} \int_0^T du \int_0^u ds \left(|\xi_{s,u}|^p + |\zeta_{s,u}|^p \right) < \infty \quad \text{pour un } p > 2.$$

Alors, le vecteur

$$\left(\bar{U}_T^n, \int_0^T H_s \bar{U}_s^n ds, \int_0^T K_s \left(\int_s^T \bar{U}_u^n \xi_{s,u} dW_u \right) ds, \sqrt{n} \int_0^T L_s \left(\int_s^T \zeta_{s,u} d\check{W}_u^n \right) ds \right)$$

converge en loi stablement vers

$$\left(U_T, \int_0^T H_s U_s ds, \int_0^T K_s \left(\int_s^T U_u \xi_{s,u} dW_u \right) ds, \int_0^T L_s \left(\int_s^T \zeta_{s,u} d\check{W}_u \right) ds \right)$$

Preuve. on partage la preuve du lemme en deux étapes

• **Pas 1 :** On suppose d'abord H, K et L déterministes. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^T K_s \left(\int_s^T \bar{U}_u^n \xi_{s,u} dW_u \right) ds &= \int_0^T \bar{U}_u^n \left(\int_0^u K_s \xi_{s,u} ds \right) dW_u \\ &= \int_0^T \bar{U}_u^n \bar{K}_u dW_u \end{aligned}$$

avec $\bar{K}_u = \int_0^u K_s \xi_{s,u} ds$. De même :

$$\int_0^T L_s \left(\int_s^T \zeta_{s,u} d\check{W}_u^n \right) ds = \int_0^T \bar{L}_u d\check{W}_u^n,$$

avec $\bar{L}_u = \int_0^u L_s \zeta_{s,u} ds$. Il s'agit maintenant de montrer que le vecteur

$$\left(\bar{U}_T^n, \int_0^T H_s \bar{U}_s^n ds, \int_0^T \bar{U}_u^n \bar{K}_u dW_u, \int_0^T \bar{L}_u d\check{W}_u^n \right)$$

converge en loi stablement vers

$$\left(U_T, \int_0^T H_s U_s ds, \int_0^T U_u \bar{K}_u dW_u, \int_0^T \bar{L}_u d\check{W}_u \right)$$

le processus H étant déterministe et les processus \bar{K} et \bar{L} continus adaptés. Cette convergence se ramène par un argument d'approximation à la convergence stable de $\sum_{i=1}^m Z_i V_i^n$ vers $\sum_{i=1}^m Z_i V_i$ quand Z_1, \dots, Z_m sont des variables aléatoires et (V_1^n, \dots, V_m^n) converge stablement vers (V_1, \dots, V_m) . C'est une propriété classique de la convergence stable (en effet, le vecteur $(Z, Z_1, \dots, Z_u, V_1^n, \dots, V_m^n)$ converge vers $(Z, Z_1, \dots, Z_u, V_1, \dots, V_m)$, donc $(Z, \sum_{i=1}^m Z_i V_i^n)$ converge en loi stablement vers $(Z, \sum_{i=1}^m Z_i V_i)$, cf. Jacod et Shiryaev (2003) chapitre VIII §5.c).

• **Pas 2** : Supposons maintenant H , K et L quelconques. On peut considérer H , K et L comme des variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}([0, T])$ et les approcher par des suites H^j , K^j , L^j de v. a. étagées à valeurs dans $\mathcal{C}([0, T])$. Notons

$$H \star \bar{U}^n = \int_0^T H_s \bar{U}_s^n ds \quad K \star U^n = \int_0^T K_s \left(\int_s^T \bar{U}_u^n \xi_{s,u} dW_u \right) ds$$

$$(L|\check{W}^n) = \int_0^T L_s \left(\int_s^T \zeta_{s,u} d\check{W}_u^n \right) ds.$$

On a $|H \star \bar{U}^n - H^j \star \bar{U}^n| \leq |H - H^j|_\infty \int_0^T |\bar{U}_s^n| ds$ avec la notation $|\cdot|_\infty$ pour la norme uniforme sur l'espace $\mathcal{C}([0, T])$. De même

$$|K \star U^n - K^j \star U^n| \leq |K - K^j|_\infty \int_0^T \left| \int_s^T \bar{U}_u^n \xi_{s,u} dW_u \right| ds$$

$$|(L|\check{W}^n) - (L^j|\check{W}^n)| \leq |L - L^j|_\infty \int_0^T \left| \int_s^T \zeta_{s,u} d\check{W}_u^n \right| ds.$$

Il suffit donc de montrer la tension des suites

$$\int_0^T |\bar{U}_s^n| ds, \quad P_n = \int_0^T \left| \int_s^T \bar{U}_u^n \xi_{s,u} dW_u \right| ds, \quad Q_n = \int_0^T \left| \int_s^T \zeta_{s,u} d\check{W}_u^n \right| ds.$$

Pour la suite $\int_0^T |\bar{U}_s^n| ds$, cela résulte de la convergence en loi de \bar{U}^n . Pour P_n et Q_n , cela résulte de l'hypothèse de bornitude dans L^p des processus $\xi_{s,u}$, $\zeta_{s,u}$. On en effet :

$$\begin{aligned} \|P_n\|_2 &\leq \int_0^T \left\| \int_s^T \bar{U}_u^n \xi_{s,u} dW_u \right\|_2 ds \\ &= \int_0^T \left\| \left(\int_s^T (\bar{U}_u^n \xi_{s,u})^2 du \right)^{1/2} \right\|_2 ds \\ &\leq \sqrt{T} \left(\mathbb{E} \int_0^T ds \int_s^T du (\bar{U}_u^n)^2 \xi_{s,u}^2 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{T} \left(\mathbb{E} \int_0^T du \left[\int_0^u ds \xi_{s,u}^2 \right] (\bar{U}_u^n)^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

comme $\sup_n \mathbb{E} \int_0^T |\bar{U}_u^n|^p du < \infty$ pour tout $p \geq 1$ est borné dans tous les L^p , le contrôle en norme L^p pour un $p > 2$ de $\xi_{s,u}$ suffit à impliquer

$$\sup_n \|P_n\|_2 < \infty.$$

On obtient $\sup_n \|Q_n\|_2 < \infty$. par un raisonnement analogue, ce qui achève la preuve du Lemme. \square

Il reste à démontrer les Lemmes 3.5.1 et 3.5.2. \square

Preuve du Lemme 3.5.1. La démonstration s'inspire de Jacod et Protter (1998). On remarque d'abord que si $0 \leq t < t' \leq T$, la suite $\left(\sqrt{n} \int_t^{t'} (W_s - W_{\eta_n(s)}) ds \right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 dans L^2 . On a en effet

$$\mathbb{E} \left(\int_t^{t'} (W_s - W_{\eta_n(s)}) ds \right)^2 = \mathbb{E} \int_t^{t'} ds \int_t^{t'} du (W_s - W_{\eta_n(s)})(W_u - W_{\eta_n(u)})$$

Si $|s - u| > T/n$, on a $\mathbb{E}(W_s - W_{\eta_n(s)})(W_u - W_{\eta_n(u)}) = 0$. D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_t^{t'} (W_s - W_{\eta_n(s)}) ds \right)^2 &\leq \mathbb{E} \int_t^{t'} ds \int_t^{t'} du \mathbf{1}_{\{|s-u| < T/n\}} |W_s - W_{\eta_n(s)}| |W_u - W_{\eta_n(u)}| \\ &\leq \frac{c}{n^2}, \quad c > 0. \end{aligned}$$

On a ensuite

$$\int_0^T H_s (W_s - W_{\eta_n(s)}) ds = \int_0^T (H_s - H_s^m) (W_s - W_{\eta_n(s)}) ds + \int_0^T H_s^m (W_s - W_{\eta_n(s)}) ds$$

avec

$$H^m = \sum_{i=1}^m H_{\frac{it}{m}} \mathbf{1}_{\left[\frac{(i-1)T}{n}, \frac{iT}{n}\right]}$$

D'où

$$\left| \int_0^T H_s (W_s - W_{\eta_n(s)}) ds \right| \leq \sup_{0 < s \leq T} |H_s - H_s^m| \int_0^T |W_s - W_{\eta_n(s)}| + \left| \int_0^T H_s^m (W_s - W_{\eta_n(s)}) ds \right|.$$

La suite $\sqrt{n} \int_0^T |W_s - W_{\eta_n(s)}| ds$ étant tendue, on en déduit aisément le lemme. \square

Preuve du Lemme 3.5.2. Notons

$$H \diamond K^n = \int_0^T H_s \left(\int_0^T \mathbf{1}_{\{\eta_n(u) \leq s \leq u\}} K_u^n dW_u \right) ds$$

et supposons dans un premier temps H déterministe on a alors

$$\begin{aligned} H \diamond K^n &= \int_0^T (K_u^n)^2 \left(\int_0^T \mathbf{1}_{\{\eta_n(u) \leq s \leq u\}} H_s ds \right) dW_u \\ &= \int_0^T K_u^n \left(\int_{\eta_n(u)}^u H_s ds \right) dW_u. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \|H \diamond K^n\|_2^2 &= \mathbb{E} \int_0^T (K_u^n)^2 \left(\int_{\eta_n(u)}^u H_s ds \right)^2 du \\ &\leq |H|_\infty^2 \mathbb{E} \int_0^T (K_u^n)^2 (u - \eta_n(u))^2 du \\ &\leq \frac{|H|_\infty^2 T^2}{n^2} \mathbb{E} \int_0^T (K_u^n)^2 du, \end{aligned}$$

et par conséquent $(\sqrt{n} H \diamond K^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 dans L^2 . Soit maintenant H quelconque et H^j une suite de v.a. étagées à valeurs dans $\mathcal{C}([0, T])$ vérifiant $|H - H^j|_\infty \rightarrow 0$ p.s.. On a

$$|(H - H^j) \diamond K^n| \leq |H - H^j|_\infty \int_0^T \left| \int_0^T \mathbf{1}_{\{\eta_n(u) \leq s \leq u\}} K_u^n dW_u \right| ds.$$

La suite

$$\left(\sqrt{n} \int_0^T \left| \int_0^T \mathbf{1}_{\{\eta_n(u) \leq s \leq u\}} K_u^n dW_u \right| ds \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

est tendue car bornée dans L^2 . D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sqrt{n}|H \diamond K^n| \geq \varepsilon\right) &\leq \mathbb{P}\left(\sqrt{n}|(H - H^j) \diamond K^n| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\sqrt{n}|H^j \diamond K^n| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(|H - H^j|_\infty \geq \frac{\varepsilon}{2\delta}\right) + \mathbb{P}\left(\sqrt{n} \int_0^T \left| \int_0^T \mathbf{1}_{\{\eta_n(u) \leq s \leq u\}} K_u^n dW_u \right| ds \geq \delta\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\sqrt{n}|H^j \diamond K^n| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned}$$

Fixons j . En choisissant δ et n assez grands pour que le deuxième terme soit inférieur à η , on obtient :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{n}|H \diamond K^n| \geq \varepsilon\right) \leq \eta + \mathbb{P}\left(|H - H^j|_\infty \geq \frac{\varepsilon}{2\delta}\right).$$

Comme η est arbitraire et $|H - H^j|_\infty \rightarrow 0$ *p.s.*, on conclut que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{n}|H \diamond K^n| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

D'où le résultat. □

3.6 Une nouvelle variable de contrôle pour l'estimation des densités

Le but de cette section est d'utiliser la méthode de Romberg statistique, étudiée dans chapitre précédent, afin de réduire la variance dans l'approximation des densités de diffusions non-dégénérées. On considère deux schémas d'Euler X^n et X^m , associées à la diffusion X , de pas de discrétisations T/n et T/m et tels que $m \ll n$. La méthode de Romberg statistique approxime $p(x)$, la densité de la diffusion hypoelliptique X , par

$$\frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} \phi_{h,x}(\hat{X}_{T,i}^m + \hat{Z}_{m,\theta}^i) + \frac{1}{N_{n,m}} \sum_{i=1}^{N_{n,m}} \phi_{h,x}(X_{T,i}^n + Z_{n,\theta}^i) - \phi_{h,x}(X_{T,i}^m + Z_{m,\theta}^i), \quad \theta \geq 0$$

avec \hat{X}_T^m est un nouveau schéma d'Euler de pas de discrétisation T/m et indépendant de (X_T^n, X_T^m) , alors que

$$Z_{n,\theta} = \frac{\tilde{W}_T}{n^{\frac{1}{2}+\theta}}, \quad Z_{m,\theta} = \frac{\hat{W}_T}{m^{\frac{1}{2}+\theta}}, \quad \theta \geq 0$$

où \hat{W} est un nouveau mouvement Brownien indépendant de W et de \tilde{W} .

Comme vu dans le chapitre précédent la difficulté dans l'application de la méthode de Romberg statistique consiste à trouver les paramètres optimaux de l'algorithme et

qui permettent une réduction efficace de la variance. Le théorème suivant donne une description précise sur le choix de N_m , $N_{n,m}$, m et h comme fonctions du paramètre n . Dans la suite, on suppose que pour $0 < \beta < 1$ on a

$$m = n^\beta, \quad N_n = n^{\gamma_1}, \quad N_{n,m} = n^{\gamma_2}, \quad h = n^{-\alpha},$$

où $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, et $\alpha \geq 1/s$ (le paramètre s désigne l'ordre du super-noyau ϕ). On pose

$$V_n := \frac{1}{n^{\gamma_1}} \sum_{i=1}^{n^{\gamma_1}} \phi_{h,x}(\hat{X}_{T,i}^{n^\beta} + \hat{Z}_{n^{\beta,\theta}}^i) + \frac{1}{n^{\gamma_2}} \sum_{i=1}^{n^{\gamma_2}} \phi_{h,x}(X_{T,i}^n + Z_{n,\theta}^i) - \phi_{h,x}(X_{T,i}^{n^\beta} + Z_{n^{\beta,\theta}}^i).$$

Le théorème suivant est énoncé et démontré dans le cas unidimensionnel $d = 1$.

Théorème 3.6.1. *Avec les notations précédentes, Si*

$$\gamma_1 = 2 + \alpha, \quad \gamma_2 = 3\alpha + 2 - \beta \quad \text{et} \quad 1/s \leq \alpha < \beta/3 \quad (\text{pour } 0 < \beta < 1)$$

alors

$$n(V_n - p(x)) \Rightarrow \tilde{\sigma}G + C_{\phi,p(x)}^s$$

avec

$$\tilde{\sigma}^2 = \phi_2 p(x) + \phi_{(2)} \left[\mathbb{E} \left\{ \delta_x(X_T) U_T^2 \right\} + Tp(x) \mathbf{1}_{\{\theta=0\}} \right], \quad \text{avec } \theta \geq 0$$

G une Gaussienne centrée réduite, $C_{\phi,p(x)}^s$ la constante de discrétisation donnée par le Théorème 3.3.1 (voir la relation (3.36)),

$$\phi_2 = \int_{\mathbb{R}} |\phi(u)|^2 du \quad \text{et} \quad \phi_{(2)} = \int_{\mathbb{R}} |\phi'(u)|^2 du.$$

Lemme 3.6.1. *Sous les hypothèses du Théorème 3.6.1, on a*

$$1. \quad n^{\beta-3\alpha} \mathbb{E} \left(\phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^{\beta,\theta}}) - \phi_{h,x}(X_T) \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi_{(2)} \left[\mathbb{E} \left\{ \delta_x(X_T) U_T^2 \right\} + Tp(x) \mathbf{1}_{\{\theta=0\}} \right].$$

2. de même on a

$$n^{\beta-3\alpha} \mathbb{E} \left(\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi_{(2)} \left[\mathbb{E} \left\{ \delta_x(X_T) U_T^2 \right\} + Tp(x) \mathbf{1}_{\{\theta=0\}} \right].$$

Preuve. Nous prouvons d'abord la première assertion du lemme.

• **Pas 1 :**

En utilisant la formule de Taylor on a

$$\phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T) = \phi'_{h,x}(X_T)(U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) + \frac{1}{2} \phi''_{h,x}(\xi_T^n)(U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta})^2$$

où $U_T^{n^\beta} = X_T^{n^\beta} - X_T$ et ξ_T^n une variable aléatoire entre $X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta}$ et X_T . On en déduit, à l'aide de l'inégalité triangulaire que

$$n^{\frac{\beta}{2}-\frac{3}{2}\alpha} \left\| \phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T) \right\|_2 - \left\| \phi'_{h,x}(X_T)(U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) \right\|_2 \leq \frac{n^{\frac{\beta}{2}-\frac{3}{2}\alpha}}{2} \left\| \phi''_{h,x}(\xi_T^n)(U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta})^2 \right\|_2.$$

Comme $\|\phi''_{h,x}\|_\infty \leq h^{-3} \|\phi''\|_\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \phi''_{h,x}(\xi_T^n)(U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta})^2 \right\|_2 &\leq h^{-3} \|\phi''\|_\infty \left\| (U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta})^2 \right\|_2 \\ &\leq C_T h^{-3} \|\phi''\|_\infty \frac{1}{n^\beta} \\ &= C_T \frac{\|\phi''\|_\infty}{n^{\beta-3\alpha}}. \end{aligned} \tag{3.74}$$

La deuxième inégalité étant une conséquence de la relation (3.28), propre à la diffusion X et à son schéma d'Euler. Mais par hypothèse, on a que $\alpha < \beta/3$, donc on conclut que

$$n^{\frac{\beta}{2}-\frac{3}{2}\alpha} \left\| \phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T) \right\|_2 - \left\| \phi'_{h,x}(X_T)(U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) \right\|_2 \leq C_T \frac{\|\phi''\|_\infty}{n^{\frac{\beta}{2}-\frac{3}{2}\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Il nous reste donc à démontrer que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\beta-3\alpha} \mathbb{E} \left\{ \phi'_{h,x}(X_T)(U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta}) \right\}^2 = \phi_{(2)} \left[\mathbb{E} \left\{ \delta_x(X_T) U_T^2 \right\} + T p(x) \mathbf{1}_{\{\theta=0\}} \right]. \quad (3.75)$$

• **Pas 2** : On a $\phi_{h,x}(y) = \frac{1}{h^2} \phi' \left(\frac{y-x}{h} \right)$ donc

$$\begin{aligned} n^{\beta-3\alpha} \mathbb{E} \left\{ \phi'_{h,x}(X_T)(U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta}) \right\}^2 &= \frac{n^{\beta-3\alpha}}{h^3} \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{h} \left[\phi' \left(\frac{X_T - x}{h} \right) \right]^2 (U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta})^2 \right\} \\ &= \phi_{(2)} n^\beta \mathbb{E} \left\{ \phi_{(2),h,x}(X_T)(U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta})^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.76)$$

où $y \mapsto \phi_{(2),h,x}(y)$ est donné par

$$\phi_{(2),h,x}(y) = \frac{1}{h\phi_{(2)}} \left[\phi' \left(\frac{y-x}{h} \right) \right]^2 \quad \text{et} \quad \phi_{(2)} = \int_{\mathbb{R}} [\phi'(u)]^2 du.$$

À l'aide d'une intégration par parties, on obtient

$$\phi_{(2)} n^\beta \mathbb{E} \left\{ \phi_{(2),h,x}(X_T)(U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta})^2 \right\} = \phi_{(2)} n^\beta \mathbb{E} \left\{ \psi_{(2),h,x}(X_T) \mathbf{H} \left(X_T, (U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta})^2 \right) \right\}$$

avec

$$\psi_{(2),h,x}(y) = \int_{-\infty}^y \phi_{(2),h,x}(u) du.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \phi_{(2)} n^\beta \mathbb{E} \left\{ \phi_{(2),h,x}(X_T)(U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta})^2 \right\} &= \\ \phi_{(2)} n^\beta \mathbb{E} \left\{ \left[\psi_{(2),h,x}(X_T) - \mathbf{1}_{\{X_T \geq x\}} \right] \mathbf{H} \left(X_T, (U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta})^2 \right) \right\} \\ &+ \phi_{(2)} n^\beta \mathbb{E} \left\{ \mathbf{1}_{\{X_T \geq x\}} \mathbf{H} \left(X_T, (U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta})^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Dans la suite , on va démontrer que le premier terme de l'égalité précédente tend vers 0.

D'une part, d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz on a

$$\mathbb{E} \left\{ \left[\psi_{(2),h,x}(X_T) - \mathbf{1}_{\{X_T \geq x\}} \right] \mathbf{H} \left(X_T, (U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta})^2 \right) \right\} \leq \left\| \psi_{(2),h,x}(X_T) - \mathbf{1}_{\{X_T \geq x\}} \right\|_2 \left\| \mathbf{H} \left(X_T, (U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta})^2 \right) \right\|_2 \quad (3.78)$$

En utilisant la Proposition 3.2.2 de Nualart (1998), on déduit l'existence d'une constante donnée c et de paramètres $r, r_1, r'_1, r_2, r'_2, k$ et k' tels que

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{H} \left(X_T, (U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta})^2 \right) \right\| &\leq c \|\gamma_{X_T}^{-1}\|_r^k \|X_T\|_{r_1, r-2}^{k'} \|(U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta})^2\|_{r_2, r'_2} \\ &\leq \frac{\tilde{C}_T}{n^\beta}, \quad \text{avec } \tilde{C}_T > 0. \end{aligned} \quad (3.79)$$

La deuxième inégalité étant une conséquence des relations (3.27) et (3.28), associées à la diffusion non dégénérée X . On obtient alors

$$n^\beta \left| \mathbb{E} \left\{ \left[\psi_{(2),h,x}(X_T) - \mathbf{1}_{\{X_T \geq x\}} \right] \mathbf{H} \left(X_T, (U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta})^2 \right) \right\} \right| \leq \tilde{C}_T \|\psi_{(2),h,x}(X_T) - \mathbf{1}_{\{X_T \geq x\}}\|_2.$$

Or de la définition même de $\psi_{(2),h,x}$, on a

$$\begin{aligned} \psi_{(2),h,x}(y) &= \int_{-\infty}^y \frac{1}{h} \phi_{(2)} \left(\frac{u-x}{h} \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{y-x}{h}} \phi_{(2)}(u) du. \end{aligned}$$

On a $\int_{\mathbb{R}} \phi_{(2)}(u) du = \frac{1}{\phi_{(2)}} \int_{\mathbb{R}} (\phi')^2(x) dx$ est finie et vaut 1 (voir la définition 3.3.1). Par conséquent, il vient que

$$\psi_{(2),h,x}(y) - \mathbf{1}_{\{y \geq x\}} = \left[\int_{-\infty}^{\frac{y-x}{h}} \phi_{(2)}(u) du - 1 \right] \mathbf{1}_{\{y \geq x\}} + \left[\int_{-\infty}^{\frac{y-x}{h}} \phi_{(2)}(u) du - 1 \right] \mathbf{1}_{\{y \leq x\}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi par convergence dominée on conclut que

$$\|\psi_{(2),h,x}(X_T) - \mathbf{1}_{\{X_T \geq x\}}\|_2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

donc que

$$n^\beta \left| \mathbb{E} \left\{ \left[\psi_{(2),h,x}(X_T) - \mathbf{1}_{\{X_T \geq x\}} \right] \mathbf{H} \left(X_T, (U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta})^2 \right) \right\} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.80)$$

• **Pas 3 :**

Il nous reste à étudier le terme donné par

$$n^\beta \mathbb{E} \left\{ \mathbf{1}_{\{X_T \geq x\}} \mathbf{H} \left(X_T, (U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta})^2 \right) \right\}.$$

En employant la relation (3.5), on déduit que

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \left(X_T, (U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta})^2 \right) &= \delta \left(\gamma_{X_T}^{-1} (U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta})^2 D X_T \right) \\ &= (U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta})^2 \mathbf{H}(X_T, 1) - 2(U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta}) \gamma_{X_T}^{-1} \int_0^T D_s U_T^{n^\beta} D_s X_T ds. \end{aligned}$$

Comme $s \mapsto D_s X_T$ est continue pour $s \in [0, T]$, le Théorème 3.5.1 s'applique et on a

$$\begin{aligned} n^\beta \mathbf{H} \left(X_T, (U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta})^2 \right) &\Rightarrow^{stable} \\ &(U_T + \hat{W}_T \mathbf{1}_{\{\theta=0\}})^2 \mathbf{H}(X_T, 1) - 2(U_T + \hat{W}_T \mathbf{1}_{\{\theta=0\}}) \gamma_{X_T}^{-1} \int_0^T D_s U_T D_s X_T ds \\ &= \mathbf{H} \left(X_T, (U_T + \hat{W}_T \mathbf{1}_{\{\theta=0\}})^2 \right). \end{aligned}$$

La dernière égalité étant obtenu à l'aide de l'égalité (3.5). (C'est le chemin inverse par rapport au développement qu'on a fait précédemment). Vu la définition de la convergence stable et les propriétés (3.27) et 3.28 associées à la diffusion X et à son schéma d'Euler (ces deux propriétés garantissent l'uniforme intégrabilité de la suite de v.a. $\mathbf{H} \left(X_T, (U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta})^2 \right)$) on conclut que

$$\begin{aligned} n^\beta \mathbb{E} \left\{ \mathbf{1}_{\{X_T \geq x\}} \mathbf{H} \left(X_T, (U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta, \theta})^2 \right) \right\} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \mathbf{1}_{\{X_T > x\}} \mathbf{H} \left(X_T, (U_T + \hat{W}_T \mathbf{1}_{\{\theta=0\}})^2 \right) \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \delta_x(X_T) (U_T + \hat{W}_T \mathbf{1}_{\{\theta=0\}})^2 \right\}. \end{aligned}$$

La dernière égalité étant due à une intégration par parties. Comme \hat{W}_T est indépendant

du mouvement Brownien W , on obtient que

$$\mathbb{E}(\delta_x(X_T)U_T\hat{W}_T) = 0$$

et

$$\mathbb{E}(\delta_x(X_T)\hat{W}_T^2) = \mathbb{E}(\delta_x(X_T))T = Tp(x),$$

Donc

$$\mathbb{E}\left\{\delta_x(X_T)(U_T + \hat{W}_T\mathbf{1}_{\{\theta=0\}})^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\delta_x(X_T)U_T^2\right\} + Tp(x)\mathbf{1}_{\{\theta=0\}}$$

Utilisant les relations (3.77) et (3.80) on obtient que

$$n^\beta \mathbb{E}\left\{\phi_{(2),h,x}(X_T)(U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta})^2\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left[\mathbb{E}\left\{\delta_x(X_T)U_T^2\right\} + Tp(x)\mathbf{1}_{\{\theta=0\}}\right]. \quad (3.81)$$

De la relation (3.76) on conclut que

$$n^{\beta-3\alpha} \mathbb{E}\left\{\phi'_{h,x}(X_T)(U_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta})^2\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi_{(2)} \left[\mathbb{E}\left\{\delta_x(X_T)U_T^2\right\} + Tp(x)\mathbf{1}_{\{\theta=0\}}\right]. \quad (3.82)$$

Ainsi, la relation (3.75) est démontrée et par conséquent la première assertion du lemme est démontré.

La deuxième assertion du lemme est une conséquence de la première assertion. En effet, d'après l'inégalité triangulaire on a

$$\begin{aligned} n^{\frac{\beta}{2}-\frac{3}{2}\alpha} & \left\| \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) \right\|_2 \\ & - \left\| \phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T) \right\|_2 \leq n^{\frac{\beta}{2}-\frac{3}{2}\alpha} \left\| \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T) \right\|_2. \end{aligned}$$

On note que la démonstration de la première assertion du lemme reste vraie pour $\beta' := 1$.

En particulier, comme $\alpha \leq \frac{\beta}{3} < \frac{\beta'}{3}$ il vient que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{\beta'}{2}-\frac{3}{2}\alpha} \left\| \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T) \right\|_2 = \phi_{(2)} \left[\mathbb{E}\left\{\delta_x(X_T)U_T^2\right\} + Tp(x)\mathbf{1}_{\{\theta=0\}} \right]$$

Il s'en suit que

$$n^{\frac{\beta}{2}-\frac{3}{2}\alpha} \left\| \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T) \right\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ce qui achève la fin de la preuve. \square

Preuve du Théorème 3.6.1. On a

$$n(V_n - p(x)) := \frac{1}{n^{\gamma_1-1}} \sum_{i=1}^{n^{\gamma_1}} \zeta_{T,i}^{n^{\beta,h}} + \frac{1}{n^{\gamma_2-1}} \sum_{i=1}^{n^{\gamma_2}} \tilde{\zeta}_{T,i}^{n,h}$$

avec

$$\zeta_T^{n^{\beta,h}} = \phi_{h,x}(\hat{X}_T^{n^{\beta}} + \hat{Z}_{n^{\beta},\theta}) - \mathbb{E} \phi_{h,x}(\hat{X}_T^{n^{\beta}} + \hat{Z}_{n^{\beta},\theta})$$

et

$$\tilde{\zeta}_T^{n,h} = \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T^{n^{\beta}} + Z_{n^{\beta},\theta}) - \mathbb{E} \left\{ \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T^{n^{\beta}} + Z_{n^{\beta},\theta}) \right\}.$$

D'après le Théorème 3.4.1 et pour $\gamma_1 = 2 + \alpha$ on a

$$\frac{1}{n^{\gamma_1-1}} \sum_{i=1}^{n^{\gamma_1}} \zeta_{T,i}^{n^{\beta,h}} \Rightarrow N(0, \sigma^2) \quad \text{avec} \quad \sigma^2 = \phi_2 p(x) \quad (3.83)$$

où $\phi_2 = \int_R \phi^2(u) du$. Par conséquent, en vu d'achever la preuve il nous suffit de démontrer un théorème centrale limite pour $\frac{1}{n^{\gamma_2-1}} \sum_{i=1}^{n^{\gamma_2}} \tilde{\zeta}_{T,i}^{n,h}$, on rappelle que les variables $\zeta_T^{n^{\beta,h}}$ et $\tilde{\zeta}_T^{n,h}$ sont supposées indépendantes. Le même calcul que dans la preuve du Théorème 3.4.1 donne

$$\mathbb{E} \left[\exp\left(\frac{i u}{n^{\gamma_2-1}} \sum_{k=1}^{n^{\gamma_2}} \tilde{\zeta}_{T,k}^{n,h}\right) \right] = \left[1 + \frac{1}{n^{\gamma_2}} \left(\frac{-u^2}{2n^{\gamma_2-2}} \mathbb{E} |\tilde{\zeta}_T^{n,h}|^2 + \mathbb{E} \tilde{C}_{n,h}(\omega) \right) \right]^{n^{\gamma_2}},$$

avec

$$|\mathbb{E} \tilde{C}_{n,h}(\omega)| \leq \frac{u^3}{6n^{2\gamma_2-3}} \mathbb{E} |\tilde{\zeta}_T^{n,h}|^3.$$

On va démontrer que

$$\frac{1}{n^{\gamma_2-2}} \mathbb{E} |\tilde{\zeta}_T^{n,h}|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \delta_x(X_T) U_T^2 \right\} + T p(x) \mathbf{1}_{\{\theta=0\}}$$

et

$$\frac{1}{n^{2\gamma_2-3}} \mathbb{E} |\tilde{\zeta}_T^{n,h}|^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ce qui, par le même raisonnement que dans le Théorème 3.4.1 donne

$$\frac{1}{n^{\gamma_2-1}} \sum_{i=1}^{n^{\gamma_2}} \tilde{\zeta}_{T,i}^{n,h} \rightarrow \hat{\sigma} G$$

où G est une gaussienne standard et $\hat{\sigma}^2 = \phi_{(2)} \left[\mathbb{E} \left\{ \delta_x(X_T) U_T^2 \right\} + Tp(x) \mathbf{1}_{\{\theta=0\}} \right]$.

Étudions d'abord le terme donnée par $\mathbb{E} |\tilde{\zeta}_T^{n,h}|^2$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\tilde{\zeta}_T^{n,h}|^2 &= \mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) \right]^2 \\ &\quad - \left\{ \mathbb{E} \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \mathbb{E} \phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) \right\}^2 \\ &= \mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) \right]^2 \\ &\quad - \left\{ \frac{C_{\phi,p(x)}^s}{n} - \frac{C_{\phi,p(x)}^s}{n^\beta} + o\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \right\}^2, \end{aligned}$$

où $C_{\phi,p(x)}^s$ est la constante de discrétisation donnée par le Théorème 3.3.1 propre au noyau $\phi_{h,x}$. Ainsi, d'après le Lemme 3.6.1 et pour $\gamma_2 = 3\alpha + 2 - \beta$ on a

$$\frac{1}{n^{\gamma_2-2}} \mathbb{E} |\tilde{\zeta}_T^{n,h}|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \phi_{(2)} \left[\mathbb{E} \left\{ \delta_x(X_T) U_T^2 \right\} + Tp(x) \mathbf{1}_{\{\theta=0\}} \right].$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} |\tilde{\zeta}_T^{n,h}|^3 &= \mathbb{E} \left| \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) \right. \\
&\quad \left. - \mathbb{E} \left\{ \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) \right\} \right|^3 \\
&\leq \mathbb{E} \left| \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) \right|^3 \\
&\quad + 3\mathbb{E} \left| \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) \right|^2 \\
&\quad \times \left| \mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) \right] \right| \\
&\quad + 4 \left\{ \mathbb{E} \left[\phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) \right] \right\}^4.
\end{aligned}$$

Ainsi, à l'aide du Théorème 3.3.1 on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} |\tilde{\zeta}_T^{n,h}|^3 &\leq \mathbb{E} \left| \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) \right|^3 \\
&\quad + 3\mathbb{E} \left| \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) \right|^2 \times \left\{ \frac{C_{\phi,p(x)}^s}{n} - \frac{C_{\phi,p(x)}^s}{n^\beta} + o\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \right\} \\
&\quad + 4 \left\{ \frac{C_{\phi,p(x)}^s}{n} - \frac{C_{\phi,p(x)}^s}{n^\beta} + o\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \right\}^4.
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.6.1 on voit que pour $\gamma_2 = 3\alpha + 2 - \beta$ on a

$$\frac{1}{n^{2\gamma_2-3}} \mathbb{E} \left| \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) \right|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Il nous reste donc à démontrer que

$$\frac{1}{n^{2\gamma_2-3}} \mathbb{E} \left| \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) \right|^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.84)$$

Comme $\phi_{h,x}$ est une fonction Lipschitzienne de constante de Lipschitz c/h^2 pour $c > 0$.

On obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n^{2\gamma_2-3}} \mathbb{E} \left| \phi_{h,x}(X_T^n + Z_{n,\theta}) - \phi_{h,x}(X_T^{n^\beta} + Z_{n^\beta,\theta}) \right|^3 \\
& \leq \frac{c}{n^{2\gamma_2-3}} \left[\mathbb{E} |X_T^n - X_T^{n^\beta}|^3 + \mathbb{E} |Z_{n,\theta} - Z_{n^\beta,\theta}|^3 \right] \\
& \leq \frac{c}{n^{2\gamma_2-3}} \times \frac{C_T}{n^{\frac{3\beta}{2}}} \\
& = \frac{c C_T}{n^{6\alpha+1-\frac{\beta}{2}}} \\
& \leq \frac{c C_T}{n^{6\alpha+\frac{1}{2}}} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du Théorème. \square

Comme dans le cas d'une méthode Monte Carlo nous pouvons interpréter le théorème précédent comme suit : afin d'approcher la densité $p(x)$ par une méthode de Romberg Statistique avec une erreur globale d'ordre $1/n$ les paramètres nécessaires pour faire tourner l'algorithme sont $h = n^{-\alpha}$, $N_1 = n^{2+\alpha}$, $N_2 = n^{3\alpha-\beta}$ avec $\beta/3 > \alpha \geq 1/s$ où s désigne l'ordre du super-noyau utilisé. ce qui nous mène à une complexité de l'algorithme donnée par

$$\begin{aligned}
C_{RS} &= C \times mN_1 + (n+m)N_2 \\
&\simeq C \times n^{\beta+\alpha+2} + n^{3\alpha-\beta+3}, \quad \text{où } \beta/3 > \alpha \geq 1/s.
\end{aligned}$$

Pour $\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{s}$ on obtient une complexité, de l'algorithme de Romberg statistique, optimale donnée par

$$C_{RS}^* \simeq C \times n^{\frac{5}{2} + \frac{2}{s}}$$

On rappelle que la complexité optimale pour une méthode de Monte Carlo est donnée par

$$C_{MC}^* \simeq C \times n^{3+\frac{1}{s}}.$$

Par conséquent, on conclut que la méthode de Romberg statistique réduit la complexité avec un facteur d'ordre $n^{1/2-1/s}$. Ainsi, en tenant compte de la condition $\beta/3 > \alpha \geq 1/s$ on

voit qu' en utilisant des super-noyaux d'ordre $s > 4$ on arrive à optimiser, théoriquement, les paramètres de Romberg statistique.

3.6.1 Résultats Numériques

Dans la suite, on se propose de comparer entre l'efficacité de la méthode de Romberg statistique et la méthode de Monte Carlo, pour l'estimation de $\mathbb{E}f(X_T)$ dans deux contextes différents à savoir :

- le cas d'une fonction f régulière
- le cas où $f(y) = \delta_x(y)$.

Plus précisément, on va considérer un processus d'Ornstein Uhlenbeck $(Y_t)_{0 \leq t \leq 1}$ satisfaisant à l'EDS

$$dY_t = -\frac{1}{2}Y_t dt + dW_t, \quad Y_0 = 0. \quad (3.85)$$

On sait alors que Y est un processus Gaussien tel que $Y_1 \sim \mathcal{N}(0, 1 - e^{-1})$ donc de densité $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-1})}} e^{-x^2/2(1-e^{-1})}$. D'une part nous comparons la méthode de Monte Carlo et la méthode de Romberg Statistique pour l'approximation de $\mathbb{E}Y_1$ (c'est à dire pour une fonction régulière $f(x) = x$) D'autre part, nous comparons encore une fois les deux algorithmes pour l'approximation de $p(0.1)$. Il est vrai, que théoriquement nous devons choisir des super-noyaux d'ordre $s > 4$. Mais d'un point de vue pratique, nous constatons par des simulations numériques q'utiliser des noyaux ordinaires tels que les noyaux Gaussiens ne constitue pas un obstacle pour la méthode de Romberg statistique en vu de réduire la complexité. Pour cela, on considère

$$\phi_{h,x}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2h^2}\right]$$

et on approxime la quantité $\mathbb{E}[\phi_{h,x}(X_T^n)]$, pour une valeur fixée de x , une fois par la méthode de Monte Carlo et une autre fois par la méthode de Romberg statistique. On réutilisant la méthodologie de Broadie et Detemple (1997), utilisée dans la partie numérique du chapitre 2, on obtient le graphique suivant.

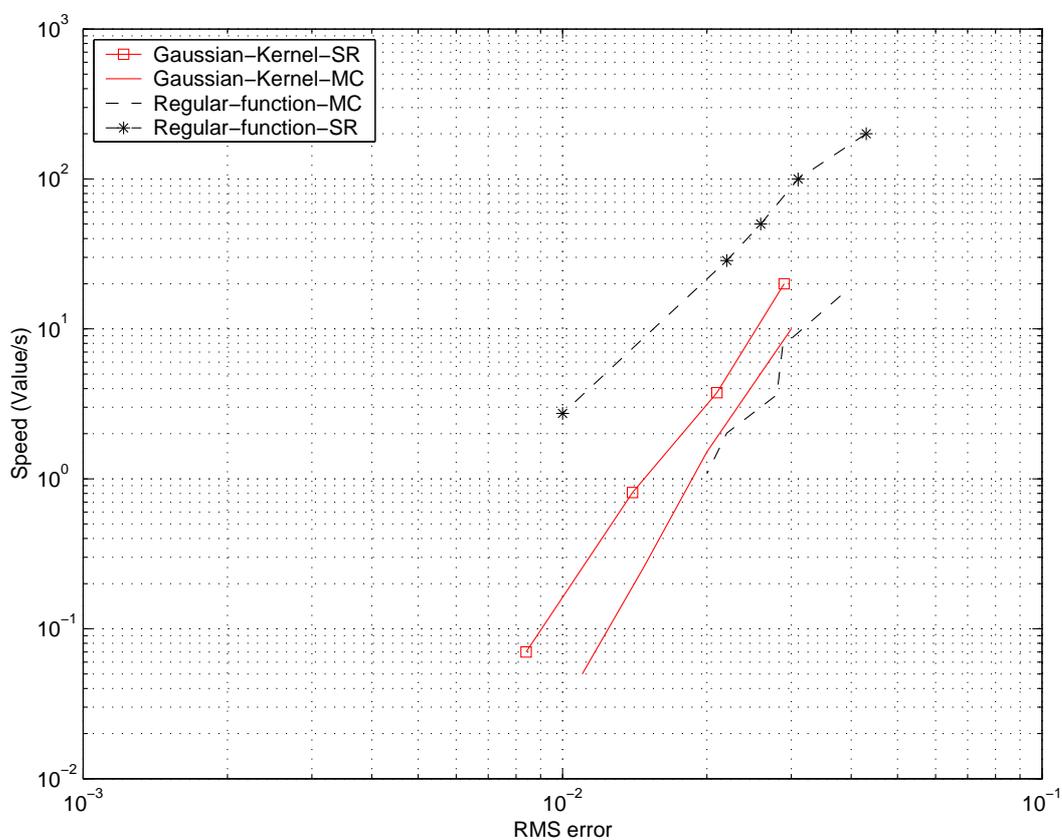


Figure 1 : Speed versus RMS Error

Notons que l'irrégularité de la fonction δ_x oblige en quelque sorte la méthode de Romberg statistique à diminuer de son efficacité comparé au cas d'une fonction régulière f où le gain en complexité est de l'ordre de $n^{1/2}$.

Deuxième partie

**Théorèmes limites presque sûres
pour les martingales
quasi-continues à gauche**

Chapitre 4

Introduction

4.1 Cadre général

Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien réel standard. Le processus $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ défini à partir de B par le changement de temps :

$$Y_t = e^{-t/2} B_{e^t}$$

est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Ce processus possède beaucoup de propriétés intéressantes. En particulier, c'est un processus Markovien, solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dY_t = -\frac{1}{2} Y_t dt + d\tilde{B}_t$$

où $\tilde{B} = \left(\int_1^{e^t} dB_s / \sqrt{s} \right)_{t \geq 0}$ est encore un mouvement Brownien standard. Il est récurrent positif, de mesure invariante la loi Gaussienne centrée réduite $G = \mathfrak{N}(0, 1)$ et vérifie les théorèmes limites suivants :

1. Loi forte des grands nombres

$$\forall f \in L^1(G), \quad \frac{1}{T} \int_0^T f \circ Y_s ds \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{} \int f dG \text{ p.s.}$$

2. Théorème de la limite centrale

$$\forall f \in L_0^2(G), \quad \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f \circ Y_s ds \Rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_f^2)$$

avec

$$L_0^2(G) = \left\{ f \in L^2(G) \mid \int f dG = 0 \right\} \quad \text{et} \quad \sigma_f^2 = -2 \int f g dG$$

pour une fonction donnée $g \in L^2(G)$.

3. Loi du logarithme itéré

$$\forall f \in L_0^2(G), \quad \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2 \log T \log \log T}} \left| \int_0^T f \circ Y_s ds \right| = \sigma_f \quad p.s..$$

L'écriture de ces théorèmes limites vérifiés par le processus Y pour le mouvement Brownien B , fournit les premiers théorèmes limites par moyennisation logarithmique. Plus précisément, B vérifie :

1. Une loi forte des grands nombres logarithmique (LFL) :

$$(LFL) : \forall f \in L^1(G), \quad (\log T)^{-1} \int_0^T f\left(\frac{B_s}{\sqrt{s}}\right) \frac{ds}{s} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int f dG \quad p.s..$$

2. Un théorème de la limite centrale logarithmique (TLCL)

$$\forall f \in L_0^2(G), \quad \frac{1}{\sqrt{\log T}} \int_0^T f\left(\frac{B_s}{\sqrt{s}}\right) \frac{ds}{s} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_f^2)$$

3. Une loi du logarithme itéré logarithmique (LLIL)

$$\forall f \in L_0^2(G), \quad \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2 \log T \log \log \log T}} \left| \int_0^T f\left(\frac{B_s}{\sqrt{s}}\right) \frac{ds}{s} \right| = \sigma_f \quad p.s..$$

Une conséquence immédiate de la relation (LFL) est la propriété suivante appelée par Brosamler (1988) théorème de la limite centrale presque-sûre (TLCPS)

$$\frac{1}{(\log T)^{-1}} \int_1^T \delta\left(\frac{B_s}{\sqrt{s}}\right) \frac{ds}{s} \Rightarrow G \quad p.s..$$

En exploitant la méthode de plongement de Skorokhod il en déduit un résultat analogue pour les marches aléatoires. En effet, pour une marche aléatoire $(S_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d et dont les accroissements sont des v.a. i.i.d., centrés de variance C , le (TLCPS) assure que les mesures empiriques logarithmiques associées aux v.a. $(n^{-1/2}S_n)$ c'est à dire :

$$\mu_N = (\log N)^{-1} \sum_{n=1}^N n^{-1} \delta_{n^{-1/2}S_n}$$

vérifient

$$\mu_N \Rightarrow \mu_\infty \text{ p.s.},$$

où μ_∞ est la loi Gaussienne de moyenne 0, de variance C et δ_x la mesure de Dirac en x . Ce résultat a été également établi par Schatte (1988) par une méthode assez proche de la méthode des moments. Dans ce cadre, et sous des conditions d'uniformes intégrabilité par exemple, on dispose de la propriété suivante appelée loi forte quadratique (LFQ) :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\log N)^{-1} \sum_{n=1}^N n^{-2} S_n S_n^* = C \text{ p.s.},$$

où S_n^* désigne le transposé du vecteur S_n .

Le théorème de la limite centrale presque-sûre ainsi que les divers théorèmes "logarithmiques" qui lui sont associés ont mené à une littérature étendue durant la décennie passée. En effet, ils ont été généralisés aux martingales discrètes unidimensionnelles par Chaabane (1996) et Lifshits (2002) puis aux martingales continues par Chaabane (2002) et ensuite aux martingales discrètes d -dimensionnelles par Chaâbane et al. (1998).

4.2 Résultats relatifs aux martingales unidimensionnelles (discrètes ou continues)

Soit $M = (M_t, t \in I)$ une martingale à valeurs réelles, localement de carré intégrable dans le cas discret où $I = \mathbb{N}$ ou une martingale locale à trajectoires continues dans le cas continu où $I = \mathbb{R}^+$. On suppose que M est adaptée à une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t \in I)$ supposée \mathbb{P} -complète et continue à droite. On considère aussi un processus croissant positif $V = (V_t, t \in I)$, \mathbb{F} -prévisible dans le cas discret et continu dans le cas continu,

appelé normalisation. Sous les conditions d'obtention du théorème limite centrale, on a les propriétés suivantes

- La propriété (TLCPS) : en effet, les mesures empiriques

$$\mu_R := \begin{cases} (\log V_R^2)^{-1} \sum_{r=1}^R \left(1 - \frac{V_r^2}{V_{r+1}^2}\right) \delta_{\frac{M_r}{V_r}}, & R \in \mathbb{N}^* \\ (\log V_R^2)^{-1} \int_1^R \frac{dV_r^2}{V_r^2} \delta_{\frac{M_r}{V_r}}, & R \in (1, \infty) \end{cases}$$

vérifient

$$\mu_R \Rightarrow G.$$

- La propriété (LFQ) (loi forte quadratique)

$$\begin{cases} (\log V_R^2)^{-1} \sum_{r=1}^R \left(1 - \frac{V_r^2}{V_{r+1}^2}\right) \frac{M_r^2}{V_r^2} \rightarrow \int x^2 dG = 1 \text{ p.s.}, & R \in \mathbb{N}^* \\ (\log V_R^2)^{-1} \int_1^R \frac{dV_r^2}{V_r^2} \frac{M_r^2}{V_r^2} \rightarrow 1 \text{ p.s.}, & R \in (1, \infty) \end{cases}$$

La méthodologie adoptée ici pour prouver la propriété (TLCPS) repose sur un plongement adéquat de la martingale M .

4.3 Résultats relatifs aux martingales vectorielles discrètes

Afin de démontrer le même type de résultats pour une martingale $M = (M_n, n \in \mathbb{N})$ à valeurs dans \mathbb{R}^d Chaâbane et al. (1998) ont utilisé la technique de la fonction caractéristique utilisée par Touati (1993) pour démontrer le théorème de la limite centrale généralisé pour les martingales (voir Théorème 5.1.1). En effet pour une normalisation adéquate $V = (V_n, n \in \mathbb{N})$ et sous les conditions l'obtention du théorème limite centrale généralisé on a les propriétés suivantes

- La propriété (TLCPS) : en effet, les mesures empiriques

$$\mu_N := (\log \det V_N^2)^{-1} \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{\det V_n^2}{\det V_{n+1}^2}\right) \delta_{V_n^{-1} M_n} \Rightarrow \mu_\infty \text{ p.s.}$$

où $\mu_\infty(\omega, \cdot)$ est la loi d'une v.a. de variance donnée C .

- La propriété (LFQ)(loi forte quadratique)

$$(\log \det V_N^2)^{-1} \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{\det V_n^2}{\det V_{n+1}^2}\right) V_n^{-1} M_n M_n^* V_n^{*-1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} C.$$

Le but de la partie suivante consiste d'une part à généraliser le théorème de la limite centrale presque-sûre aux martingales quasi-continues à gauches et d'autre part à établir des théorèmes limites précisant les vitesses de convergences (en loi et au sens presque-sûre) de la loi forte quadratique (LFQ) associée à ce théorème de la limite centrale presque-sûre pour les martingales quasi-continues à gauches. L'exemple suivant met en évidence l'application des différents théorèmes obtenus et leur usage en statistique

4.4 Estimation de la variance d'un P.A.I.S.

Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ un processus à accroissements indépendants et stationnaires (P.A.I.S.) dont la mesure de Lévy des sauts ν vérifie :

$$\nu(dt, dx) = dt F(dx), \quad \text{avec} \quad \int |x|^{2p} F(dx) < \infty \quad \text{pour un } p > 1, \quad (4.1)$$

où F est une mesure positive sur \mathbb{R} . On note :

$$m = \mathbb{E} S_1, \quad \sigma^2 = \mathbb{E} S_1^2 - m^2.$$

La loi forte quadratique (voir Théorème 5.2.2) nous permet de définir un estimateur fortement consistant de σ^2 . En effet on a le résultat suivant

$$\hat{\sigma}_t^2 := (\log(1+t))^{-1} \int_0^t \frac{(S_r - mr)^2}{(1+r)^2} dr \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sigma^2 \quad p.s..$$

Si de plus, pour un $\rho > 1/2$ on a

$$(1+t)^{-1} \sum_{r \leq t} (\Delta S_r)^2 - \int_{\mathbb{R}} |x|^2 F(dx) \leq c^{te} [\log(1+t)]^{-\rho} \quad p.s.,$$

alors le théorème de la limite centrale associé à la loi forte quadratique (voir Théorème 5.2.3) nous permet d'établir le résultat suivant

$$\sqrt{\log(1+t)}(\hat{\sigma}_t^2 - \sigma^2) \Rightarrow \mathfrak{N}(0, 4\sigma^4).$$

Ces résultats seront étendus à des P.A.I.S. pondérés. (voir la partie 4 du papier).

Chapitre 5

Théorèmes Limites Avec Poids Pour Les Martingales Vectorielles à Temps Continu

On développe une approche générale du Théorème limite centrale presque sûre pour les martingales vectorielles quasi-continues à gauches convenablement normalisées et on dégage une extension quadratique de ce théorème tout en précisant les vitesses de convergence qui lui sont associés. L'application de ce résultat à un P.A.I.S. illustre l'usage qu'on peut en faire en statistique.

5.1 Préliminaires

On note $\|\cdot\|$ la norme Euclidienne sur \mathbb{R}^d . Pour une matrice réelle carrée $A : A^*$, $\text{tr}(A)$, et $\det(A)$ désignent respectivement la matrice transposée, la trace et le déterminant de A . La norme de A est définie par : $\|A\|^2 = \text{tr}(A^*A)$. On considère une martingale quasi-continue à gauche $M = (M_t)_{t \geq 0}$ d -dimensionnelles, localement de carré intégrable, définies sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. On considère de même un processus déterministe $V = (V_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans l'ensemble des matrices inversibles. Dans la suite on rappelle un théorème fondamental de Touati (1991) qui nous sera utile

dans les preuves de nos principaux résultats.

Pour $u \in \mathbb{R}^d$ on définit

$$\Phi_t(u) := \exp\left(-\frac{1}{2}u^* \langle M^c \rangle_t u + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (\exp(i\langle u, x \rangle) - 1 - i\langle u, x \rangle) \nu^M(ds, dx)\right)$$

où M^c , ν^M sont respectivement la partie martingale continue et la mesure de Lévy des sauts de M .

Théorème 5.1.1 (Théorème Limte Centrale Généralisé pour les Martingales). *Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une martingale locale, d -dimensionnelle, nulle en 0 et quasi-continue à gauche. Soit $V = (V_t)_{t \geq 0}$ une famille déterministe de matrices inversibles. Si le couple (M, V) vérifie l'hypothèse :*

$$(\mathcal{H}) \quad \begin{cases} \Phi_t((V_t^*)^{-1}u) \rightarrow \Phi_\infty(\eta, u) \text{ p.s.} \\ \Phi_\infty(\eta, u) \text{ non nulle p.s.} \end{cases}$$

(où η désigne une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, éventuellement dégénérée et à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie \mathfrak{X}) alors on a

$$Z_t := V_t^{-1}M_t \Rightarrow Z_\infty := \Sigma(\eta) \quad (t \rightarrow \infty)$$

de manière stable où $(\Sigma(x), x \in \mathfrak{X})$ est un processus de loi \mathcal{Q} et indépendant de la v.a η .

Notons que pour $(x, u) \in \mathfrak{X} \times \mathbb{R}^d$:

$$\Phi_\infty(x, u) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle u, \xi \rangle) \pi(x, d\xi)$$

désigne la transformée de Fourier des lois marginales unidimensionnelles $(\pi(x, \cdot); x \in \mathfrak{X})$ d'une loi de probabilité \mathcal{Q} sur l'espace $\mathfrak{C}(\mathfrak{X}, \mathbb{R}^d)$ des fonctions continues de \mathfrak{X} dans \mathbb{R}^d .

5.2 Énoncé des principaux résultats

Dans la suite, on donne quelques propriétés aux quelles doit obéir la normalisation matricielle (V_t) . On dit que la famille (V_t) vérifie la condition (\mathcal{C}) si les trois propriétés

$\{(C1), (C2), (C3)\}$ ont lieu :

- (C1) $t \mapsto V_t$ est de classe \mathcal{C}^1 ;
- (C2) il existe $s_0 \geq 0$ tel que pour tout $t \geq s \geq s_0$ on a $V_s V_s^* \leq V_t V_t^*$ (au sens des matrices réelles symétriques positives) ;
- (C3) il existe une fonction $a = (a_t)$ continue, décroissante vers 0 à l'infini, telle que :

$$A_t := \int_0^t a_s ds \uparrow \infty \text{ pour } t \uparrow \infty$$

et une matrice U vérifiant :

$$a_t^{-1} V_t^{-1} \frac{dV_t}{dt} - U = \Delta_t, \quad \text{avec } \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_t = 0$$

et telle que la matrice symétrique $S := U + U^*$ soit définie positive.

5.2.1 Théorème de la limite centrale presque-sûre généralisé.

Théorème 5.2.1. *Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une martingale locale, d -dimensionnelle, nulle en 0 et quasi-continue à gauche. Soit $V = (V_t)_{t \geq 0}$ une famille déterministe de matrices inversibles satisfaisant aux conditions (C). Si le couple (M, V) vérifie l'hypothèse (\mathcal{H}) et l'hypothèse*

$$(\mathcal{H}1) : V_t^{-1} \langle M \rangle_t (V_t^*)^{-1} \rightarrow C \text{ p.s., } (t \rightarrow \infty)$$

(où C est une matrice aléatoire ou non) alors les mesures aléatoires (μ_R) définies par :

$$\mu_R = (\log (\det V_R^2))^{-1} \int_0^R \delta_{Z_r} d \log (\det V_r^2), \quad \text{où } Z_r = V_r^{-1} M_r$$

vérifient la version généralisée suivante du TLCPS :

$$(TLCPSG) : \quad \mu_R \Longrightarrow \mu_\infty \text{ p.s., } (R \rightarrow \infty).$$

Remarques 1. *Notons que sous l'hypothèse $(\mathcal{H}1)$ et l'hypothèse*

$$(\mathcal{H}') : \forall \delta > 0, \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t \|V_t^{-1}x\|^2 \mathbf{1}_{\{\|V_t^{-1}x\| > \delta\}} \nu^M(ds, dx) \rightarrow 0, \quad (t \rightarrow \infty).$$

l'hypothèse (\mathcal{H}) a lieu avec

$$\eta = C^{1/2} \quad \text{et} \quad \Phi_\infty(x, u) = \exp\left(-\frac{1}{2}u^*xx^*u\right).$$

L'hypothèse (\mathcal{H}') est plus connue sous le nom de condition de Lindeberg.

5.2.2 Lois fortes quadratiques associées au TLCPS

Le théorème suivant donne une loi forte des grands nombres avec une normalisation matricielle :

Théorème 5.2.2. *Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une martingale locale, d -dimensionnelle, quasi-continue à gauche et nulle en 0. On suppose que pour une famille de matrices inversibles $V = (V_t)_{t \geq 0}$ vérifiant la condition (\mathcal{C}) . Si le couple (M, V) satisfait aux hypothèses : (\mathcal{H}) , $(\mathcal{H}1)$,*

$$(\mathcal{H}2) : V_t^{-1}[M]_t(V_t^*)^{-1} \rightarrow C \quad \text{p.s.}, \quad (t \rightarrow \infty),$$

et

$$(\mathcal{H}3) : C = \int xx^* d\mu_\infty(x).$$

(où $\mu_\infty = \mu_\infty(\omega, \cdot)$ désigne la probabilité de transition (éventuellement non aléatoire) loi de la v.a $\Sigma(\eta(\omega))$ (voir Théorème 5.1.1)). Alors on a les résultats suivants :

$$(LFQ) : (\log(\det V_R^2))^{-1} \int_0^R V_s^{-1} M_{s-} M_{s-}^* V_s^{*-1} d(\log(\det V_s^2)) \rightarrow C \quad \text{p.s.}, \quad (t \rightarrow \infty).$$

$$(LL) : \|V_r^{-1}M_r\| = o(\sqrt{\log(\det V_r^2)}) \quad \text{p.s..}$$

Remarque 2. *Notons que l'hypothèse $(\mathcal{H}3)$ est automatiquement vérifiée sous les hypothèses (\mathcal{H}') et $(\mathcal{H}1)$.*

5.2.3 Vitesses de convergence de la LFQ (cas d'une normalisation matricielle)

Dans la suite on donne un TLC associé à la LFQ qu'on notera TLCL.

Théorème 5.2.3. *Soit $M=(M_t, t \geq 0)$ une martingale locale, d -dimensionnelle, quasi-continue à gauche, nulle en 0. On suppose que pour une famille de matrices inversibles $V = (V_t)_{t \geq 0}$ vérifiant la condition (C) et que le couple (M, V) satisfait aux hypothèses : (H), (H1), (H2) et (H3). Supposons de plus, que la condition (C3) est vérifiée avec $\Delta_t = O(A_t^{-3/2})$, ($t \rightarrow \infty$). Alors si R désigne la matrice symétrique, positive solution de l'équation de Lyapounov :*

$$I = RU + U^*R,$$

on obtient pour ($t \rightarrow \infty$) :

$$\begin{aligned} (\log(\det V_t^2))^{-1/2} \int_0^t \operatorname{tr} \left[V_s^{-1} (M_{s-} M_{s-}^* - [M]_s) (V_s^*)^{-1} \right] d(\log(\det V_s^2)) \\ \Rightarrow 2\sqrt{\operatorname{tr}(S) \operatorname{tr}(\tilde{C}RCR)} G, \end{aligned} \quad (5.1)$$

où $\tilde{C} := UC + CU^*$, $S = U + U^*$ (U étant la matrice définie dans la condition (C)) et G une Gaussienne centrée réduite. Si de plus pour un $\rho > 1/2$ on a que :

$$\log(\det(V_t^2))^\rho \left| \operatorname{tr} \{ V_t^{-1} ([M]_t) (V_t^*)^{-1} - C \} \right| = O(1) \text{ p.s., } (t \rightarrow \infty)$$

alors pour ($t \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} (\log(\det V_t^2))^{-1/2} \int_0^t \operatorname{tr} \left[V_s^{-1} (M_{s-} M_{s-}^*) (V_s^*)^{-1} - C \right] d(\log(\det V_s^2)) \\ \Rightarrow 2\sqrt{\operatorname{tr}(S) \operatorname{tr}(\tilde{C}RCR)} G. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dans ce cas, on donne une loi du logarithme itéré logarithmique associée à la (LFQ) qu'on notera : (LILL)

Théorème 5.2.4. *Soit $M=(M_t, t \geq 0)$ une martingale locale, d -dimensionnelle, quasi-continue à gauche, nulle en 0. On suppose que pour une famille de matrices $V = (V_t)_{t \geq 0}$*

vérifiant la condition (C), le couple (M, V) satisfait aux hypothèses : (\mathcal{H}) , $(\mathcal{H}1)$, $(\mathcal{H}2)$ et $(\mathcal{H}3)$. Supposons de plus que :

$$\mathbb{E} \left[\sup_t M_t (\Delta M_t)^* \right] < \infty.$$

On considère R la matrice symétrique, positive solution de l'équation de Lyapounov :

$$I = RU + U^*R.$$

Si pour un $\rho > 1/2$ on a que :

$$\log(\det(V_t^2))^\rho \left| \text{tr} \left\{ V_t^{-1} [M]_t (V_t^*)^{-1} - C \right\} \right| = O(1) \text{ p.s., } (t \rightarrow \infty)$$

alors

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h(\log(\det V_t^2))} \int_0^t \text{tr} \left\{ V_s^{-1} (M_{s-} M_{s-}^*) (V_s^*)^{-1} - C \right\} d(\log(\det V_s^2)) \\ \leq \sqrt{\text{tr}(S) \text{tr}(\tilde{C}RCR)} \text{ p.s.,} \end{aligned}$$

où $\tilde{C} := UC + CU^*$, $S = U + U^*$ (U étant la matrice définie dans la condition (C)) et $h(u) = \sqrt{2u \log \log u}$ pour $u \geq e$.

5.2.4 Théorème de la limite centrale logarithmique (cas d'une normalisation scalaire)

On dira que V_t est une normalisation scalaire vérifiant la condition (C) si elle est de la forme

$$V_t = v_t I_d$$

où v_t est une fonction scalaire de classe C^1 satisfaisant au deux conditions suivantes

- il existe un $s_0 \geq 0$ tel que pour tout $t \geq s \geq s_0$ on a $v_s^2 \leq v_t^2$
- il existe une fonction $a = (a_t)$ continue, décroissante vers 0 à l'infini, telle que :

$$A_t = \int_0^t a_s ds \uparrow \infty \text{ pour } t \uparrow \infty$$

et un scalaire positif η tel que

$$a_t^{-1}v_t^{-1}v'_t - \eta = \delta_t, \text{ avec } \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_t = 0. \quad (5.3)$$

Ainsi le théorème limite centrale associé à la (LFQ) est donné par le résultat suivant

Théorème 5.2.5. *Soit $M=(M_t, t \geq 0)$ une martingale locale, d -dimensionnelle, quasi-continue à gauche, nulle en 0. Soit $V = (V_t)_{t \geq 0}$ une normalisation scalaire vérifiant la condition (C) et tel que le couple (M, V) satisfait aux hypothèses : (H), (H1), (H2) et (H3). Supposons de plus que la relation (5.3) est vérifiée avec $\delta_t = O(A_t^{-3/2})$, ($t \rightarrow \infty$). Alors il vient que*

$$(\log(v_t^2))^{-1/2} \int_0^t v_s^{-2} [M_{s-} M_{s-}^* - [M]_s] d(\log(v_s^2)) \Rightarrow (2\eta C) G, \quad (t \rightarrow \infty) \quad (5.4)$$

où G est une Gaussienne centrée réduite. Si de plus on suppose que pour un $\rho > 1/2$ on a

$$\log(v_t^{2\rho}) \left| v_t^{-2} [M]_t - C \right| = O(1) \text{ p.s.}, \quad (t \rightarrow \infty)$$

alors

$$(\log(v_t^2))^{-1/2} \int_0^t [v_s^{-2} M_{s-} M_{s-}^* - C] d(\log(v_s^2)) \Rightarrow (2\eta C) G, \quad (t \rightarrow \infty). \quad (5.5)$$

L'intérêt d'un tel résultat, c'est qu'il nous donne une convergence matricielle et non en norme comme dans le cas d'une normalisation matricielle.

5.3 Démonstration des principaux résultats

Au début de ce paragraphe, on donne une propriété simple nous permettant de simplifier les preuves des principaux résultats. En effet, on rappelle que la différentielle du déterminant d'une matrice inversible X est donnée par

$$d \det(X) = \det(X) \operatorname{tr}(X^{-1} dX) \quad (5.6)$$

On en déduit alors que

$$\int_0^t 2 \operatorname{tr} \left[V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} \right] ds = \log(\det V_t)^2, \quad (5.7)$$

Compte tenu des conditions (C) on voit que

$$\frac{\log(\det(V_t^2))}{A_t \operatorname{tr}(S)} \rightarrow 1 \quad \text{p.s.} \quad (5.8)$$

avec $S = U + U^*$ la matrice introduite dans (C₃). Ainsi, cette propriété permettra de remplacer certaines normalisations logarithmiques par des normalisations pondérées par la fonction a .

5.3.1 Preuve du Théorème 5.2.1

Pour démontrer le Théorème 5.2.1 on va étudier la fonction caractéristique associée aux mesures (μ_R) donnée par

$$\psi_R(u) = (\log(\det V_R^2))^{-1} \int_0^R \exp\{i\langle u, Z_r \rangle\} d \log(\det V_r^2)$$

En vue de simplifier la preuve on démontre tout d'abord le lemme suivant

Lemme 5.3.1. *Sous les hypothèses du Théorème 5.2.1*

$$\lambda_R := \psi_R(u) - A_R^{-1} \int_0^R \exp\{i\langle u, Z_r \rangle\} dA_r \rightarrow 0 \quad \text{p.s.} \quad (R \rightarrow 0).$$

Preuve. En décomposant l'expression de λ_R comme suit

$$\lambda_R = \lambda_R^1 + \lambda_R^2,$$

avec

$$\lambda_R^1 := (\log(\det V_R^2))^{-1} \int_0^R \exp\{i\langle u, Z_r \rangle\} d(\log(\det V_r^2) - \operatorname{tr}(S)A_r)$$

et

$$\lambda_R^2 := ((\operatorname{tr}(S) \log(\det V_R^2))^{-1} - A_R^{-1}) \int_0^R \exp\{i\langle u, Z_r \rangle\} dA_r,$$

en remarquant que

$$|\lambda_R^1| \leq |\log(\det V_R^2)|^{-1} |\log(\det V_R^2) - \operatorname{tr}(S)A_R|$$

on déduit par la relation (5.8) que $\lambda_R^1 \rightarrow 0$, ($R \rightarrow 0$). De la même façon on voit que

$$|\lambda_R^2| \leq \left| \frac{A_R \operatorname{tr}(S)}{\log(\det V_R^2)} - 1 \right| \rightarrow 0.$$

Ce qui termine la preuve du lemme. □

Compte tenu du lemme précédent on conclut que pour démontrer la propriété (TLCPS) il nous suffit de prouver que

$$A_R^{-1} \int_0^R \exp \{i \langle u, Z_r \rangle\} dA_r \rightarrow \Phi_\infty(\eta, u) \quad (5.9)$$

avec $\Phi_\infty(\eta, u)$ est la fonction caractéristique associée à la mesure limite μ_∞ . Ainsi, en vue de démontrer cette dernière relation, on va expliciter l'expression de la variable aléatoire complexe $\exp \{i \langle u, Z_r \rangle\}$. Pour ce faire, on rappellera quelques résultats utiles dans la suite. On note $\Phi_t(u) := \exp\{B_t(u)\}$ avec

$$B_t(u) := -\frac{1}{2} u^* \langle M^c \rangle_t u + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left(\exp \{i \langle u, x \rangle\} - 1 - i \langle u, x \rangle \right) \nu^M(ds, dx).$$

Soit $(L_t(u))_{t \geq 0}$ le processus défini par

$$L_t(u) := [\Phi_t(u)]^{-1} \exp i \langle u, M_t \rangle,$$

alors on a le résultat suivant

Lemme 5.3.2. *Le processus $(L_t(u))_{t \geq 0}$ est une martingale locale complexe. De plus on a*

$$|L_t(u)| \leq \exp \left\{ \frac{1}{2} u^* \langle M \rangle_t u \right\}. \quad (5.10)$$

Preuve. Comme $(B_t(u))_{t \geq 0}$ est un processus continu on en déduit que $(L_t(u))_{t \geq 0}$ est une martingale locale complexe (cf. Jacod et Shiryaev (2003)). D'autre part on voit que son module vaut

$$|L_t(u)| = \exp \left\{ \frac{1}{2} u^* \langle M^c \rangle_t u \right\} \times \exp \left\{ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos \langle u, x \rangle) \nu^M(ds, dx) \right\}. \quad (5.11)$$

Ainsi, la majoration (5.10) découle directement du fait que

$$1 - \cos x \leq x^2/2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Par conséquent, démontrer la relation (5.9) revient à prouver que

$$A_R^{-1} \int_0^R L_r((V_r^*)^{-1}u) \Phi_r((V_r^*)^{-1}u) dA_r \rightarrow \Phi_\infty(\eta, u). \quad (5.12)$$

Afin d'exploiter le lemme précédent, on introduit les temps d'arrêts suivants. Pour u fixé dans \mathbb{R}^d , soit $b > 0$ un point de continuité de la v.a. $\text{tr}(C)$ et $c > 0$ un point de continuité de la v.a. $|\Phi_\infty(\eta, u)|^{-1}$. Considérant les événements

$$E_r^b = \{\text{tr}(C_r) > b\} \quad \text{et} \quad E_r^{u,c} = \{|\Phi_r(u)|^{-1} > c\},$$

où

$$C_r := V_r^{-1} \langle M \rangle_r (V_r^*)^{-1},$$

on définit le temps d'arrêt :

$$T_r := T_r^{b,c}(u) = T_r^b \wedge T_r^c(u),$$

avec

$$T_r^b := \begin{cases} \inf \{t \leq r / \text{tr}(V_r^{-1} \langle M \rangle_t (V_r^*)^{-1}) > b\} & \text{si } E_r^b \text{ est réalisé,} \\ r & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$T_r^c(u) := \begin{cases} \inf \{t \leq r / |\Phi_t((V_r^*)^{-1}u)|^{-1} > c\} & \text{si } E_r^{u,c} \text{ est réalisé,} \\ r & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons que d'après l'inégalité (5.10), $(L_{t \wedge T_r}((V_r^*)^{-1}u))_{t \geq 0}$ est une martingale locale complexe dont le module est majoré par $\exp(b \|u\|^2 / 2)$. C'est donc une martingale d'espérance

1. D'où la propriété :

$$\mathbb{E} L_{r \wedge T_r}((V_r^*)^{-1}u) = 1.$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned} A_R^{-1} \int_0^R L_r((V_r^*)^{-1}u) \Phi_r((V_r^*)^{-1}u) dA_r - \Phi_\infty(\eta, u) = \\ A_R^{-1} \int_0^R [L_{r \wedge T_r}((V_r^*)^{-1}u) - 1] \Phi_\infty(\eta, u) dA_r + \Delta_R(b, c, u) \\ + \delta'_R(b, c, u) + \delta''_R(b, c, u) \quad (5.13) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta_R(b, c, u) := & A_R^{-1} \int_0^R \exp \{i \langle u, V_r^{-1} M_r \rangle\} dA_r \\ & - A_R^{-1} \int_0^R \exp \{i \langle u, V_r^{-1} M_{r \wedge T_r} \rangle\} dA_r, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\delta'_R(b, c, u) := A_R^{-1} \int_0^R L_r((V_r^*)^{-1}u) [\Phi_r((V_r^*)^{-1}u) - \Phi_\infty(\eta, u)] dA_r,$$

et

$$\delta''_R(b, c, u) := A_R^{-1} \int_0^R L_r((V_r^*)^{-1}u) [\Phi_{r \wedge T_r}((V_r^*)^{-1}u) - \Phi_r((V_r^*)^{-1}u)] dA_r.$$

Par conséquent la relation (5.12) est immédiate dès que les deux propriétés suivantes sont vérifiées

$$\Delta_R(b, c, u) + \delta'_R(b, c, u) + \delta''_R(b, c, u) \rightarrow 0 \quad (5.15)$$

et

$$A_R^{-1} \int_0^R [L_{r \wedge T_r}((V_r^*)^{-1}u) - 1] dA_r \rightarrow 0 \text{ p.s..} \quad (5.16)$$

Vérification de la propriété (5.15)

Comme $L_r((V_r^*)^{-1}u) \leq c$, on en déduit que

$$|\delta'_R(b, c, u)| \leq c A_R^{-1} \int_0^R |\Phi_r((V_r^*)^{-1}u) - \Phi_\infty(\eta, u)| dA_r.$$

Ainsi, vu l'hypothèse (\mathcal{H}) il vient que

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} |\delta'_R(b, c, u)| \longrightarrow 0 \text{ p.s..}$$

Par ailleurs, on voit que

$$\Delta_R(b, c, u) \vee \delta''_R(b, c, u) \leq 2c A_R^{-1} \int_0^R \mathbf{1}_{\{T_r < r\}} dA_r.$$

Or on sait que, d'une part,

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\{T_r < r\}} & \leq \mathbf{1}_{\{T_r^b < r\}} + \mathbf{1}_{\{T_r^c(u) < r\}} \\ & \leq \mathbf{1}_{E_r^b} + \mathbf{1}_{E_r^{u,c}} \end{aligned}$$

et que d'autre part, $\mathbb{P}(\text{tr}(C) = b) = \mathbb{P}(|\Phi_\infty(\eta, u)|^{-1} = c) = 0$. Par conséquent, à l'aide des hypothèses $(\mathcal{H}1)$ et (\mathcal{H}) il vient que

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \Delta_R(b, c, u) \vee \delta_R''(b, c, u) \leq 2c \left(\mathbf{1}_{\{\text{tr}(C) > b\}} + \mathbf{1}_{\{|\Phi_\infty(\eta, u)|^{-1} > c\}} \right).$$

Ainsi, en faisant tendre b et c de manière séquentielle et de sorte qu'on ait toujours $\mathbb{P}(\text{tr}(C) = b) = \mathbb{P}(|\Phi_\infty(\eta, u)|^{-1} = c) = 0$, on obtient que

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} |\delta_R(b, c, u)| \longrightarrow 0 \text{ p.s..}$$

En vue de simplifier les notations, on pose

$$\tilde{L}_r(u) := L_{r \wedge T_r}((V_r^*)^{-1}u).$$

Le reste de la preuve du théorème, consiste à établir la convergence p.s. des moyennes $A_R^{-1} \int_0^R \tilde{L}_r(u) dA_r$ vers 1. On se propose alors de montrer d'abord que cette convergence a lieu en moyenne quadratique. D'où l'étape cruciale suivante consacrée à l'estimation de la covariance du couple $(\tilde{L}_r(u), \tilde{L}_\rho(u))$.

Estimation de la covariance du couple $(\tilde{L}_r(u), \tilde{L}_\rho(u))$.

Pour tous $u \in \mathbb{R}^d$, $(\rho, r) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ avec $\rho \leq r$, notons

$$K_{\rho, r}(u) := \mathbb{E} \left\{ \left(\tilde{L}_\rho(u) - 1 \right) \overline{\left(\tilde{L}_r(u) - 1 \right)} \right\}.$$

Comme $(L_{r, t \wedge T_r}(u))_{t \geq 0}$ est une martingale, on vérifie aisément que :

$$\begin{aligned} K_{\rho, r}(u) &= \mathbb{E} \left\{ \tilde{L}_\rho(u) \overline{\tilde{L}_r(u)} \right\} - 1 \\ &= \mathbb{E} \left\{ \tilde{L}_\rho(u) \overline{\mathbb{E} \left\{ \tilde{L}_r(u) / \mathfrak{F}_{\rho \wedge T_\rho} \right\}} \right\} - 1; \\ &= \mathbb{E} \left\{ \tilde{L}_\rho(u) \overline{L_{\rho \wedge T_\rho}((V_r^*)^{-1}u)} \right\} - 1 \\ &= \mathbb{E} \left\{ \tilde{L}_\rho(u) \left[\overline{L_{\rho \wedge T_\rho}((V_r^*)^{-1}u)} - 1 \right] \right\} \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité de Cauchy Schwarz donne

$$\begin{aligned} |K_{\rho, r}(u)| &\leq \left(\mathbb{E} \left| \tilde{L}_\rho(u) \right|^2 \right)^{1/2} \left(\mathbb{E} \left| L_{\rho \wedge T_\rho}((V_r^*)^{-1}u) - 1 \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\mathbb{E} \left| L_\rho(u) \right|^2 \right)^{1/2} \left(\mathbb{E} \left| L_{\rho \wedge T_\rho}((V_r^*)^{-1}u) \right|^2 - 1 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Or, de l'inégalité (5.10), on voit que, d'une part

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |L_\rho(u)|^2 &\leq \mathbb{E} \exp \left\{ u^* V_\rho^{-1} \langle M \rangle_{\rho \wedge T_\rho} (V_\rho^*)^{-1} u \right\} \\ &\leq \exp \left\{ b \|u\|^2 \right\} \end{aligned}$$

et que d'autre part,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |L_{\rho \wedge T_\rho}((V_r^*)^{-1}u)|^2 &\leq \exp \left\{ u^* V_r^{-1} \langle M \rangle_{\rho \wedge T_\rho} (V_r^*)^{-1} u \right\} \\ &\leq \exp \left\{ b \|u\|^2 \|V_r^{-1}V_\rho\|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité : $\forall t > 0, e^t - 1 \leq te^t$ il vient que

$$\mathbb{E} |L_{\rho \wedge T_\rho}((V_r^*)^{-1}u)|^2 - 1 \leq b \|u\|^2 \|V_r^{-1}V_\rho\|^2 \exp \left\{ b \|u\|^2 \|V_r^{-1}V_\rho\|^2 \right\}.$$

La preuve du lemme suivant est donnée dans la dernière section.

Lemme 5.3.3. *Si la normalisation (V_r) vérifie les conditions (C) alors, pour tout $(r, \rho) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ avec $\rho \leq r$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\|V_r^{-1}V_\rho\|^2 \leq d^{n_0} \left(\frac{\det V_\rho}{\det V_r} \right)^{\frac{2}{d}}.$$

En tenant compte du résultat précédent, il vient que

$$|K_{\rho,r}(u)| \leq c^{te} \left(\frac{\det V_\rho}{\det V_r} \right)^{\frac{2}{d}} \quad (5.17)$$

pour une constante indépendante de ρ et de r .

Convergence presque sûre de $A_R^{-1} \int_0^R \tilde{L}_r(u) dA_r$ vers 1.

Dans la suite on vérifie d'abord que

$$\mathbb{E} \left\{ \left| \int_0^R (\tilde{L}_r(u) - 1) dA_r \right|^2 \right\} = O(A_R) (R \rightarrow \infty), \quad (5.18)$$

En effet,

$$\mathbb{E} \left\{ \left| \int_0^R (\tilde{L}_r(u) - 1) dA_r \right|^2 \right\} = 2 \int_0^R \int_0^r K_{\rho,r} dA_\rho dA_r$$

et par l'inégalité (5.17), il vient que

$$\mathbb{E} \left\{ \left| \int_0^R (\tilde{L}_r(u) - 1) dA_r \right|^2 \right\} \leq c^{te} \int_0^R \int_0^r \left| \frac{\det V_\rho}{\det V_r} \right|^{\frac{2}{d}} dA_\rho dA_r. \quad (5.19)$$

Or, en utilisant la relation (5.7) on voit que

$$\begin{aligned} \frac{\det V_\rho}{\det V_r} &= \exp \left\{ - \int_\rho^r \operatorname{tr} [V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}] ds \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_\rho^r \operatorname{tr} [a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}] dA_s \right\} \end{aligned}$$

et donc par la condition (C3) il vient que

$$\frac{\det V_\rho}{\det V_r} = \exp \left\{ - \operatorname{tr} [U] (A_r - A_\rho) - \int_\rho^r \Delta_s dA_s \right\}.$$

On en déduit alors, qu'il existe $r_0 > 0$ tel que $\forall r \geq r_0$ on a

$$\begin{aligned} \int_0^r \left(\frac{\det V_\rho}{\det V_r} \right)^{\frac{d}{2}} dA_\rho &\leq \int_0^r \exp \left\{ - \frac{d}{4} \operatorname{tr} [U] (A_r - A_\rho) \right\} dA_\rho \\ &\leq \frac{4}{d \operatorname{tr} U} \left[1 - \exp \left\{ - \frac{d}{4} \operatorname{tr} [U] A_r \right\} \right] \\ &\leq \frac{4}{d \operatorname{tr} U} \end{aligned}$$

puisque U est une matrice définie positive. D'où le résultat annoncé en (5.18). Ainsi, $A_R^{-1} \int_0^R \tilde{L}_r(u) dA_r$ tend vers 1 en moyenne quadratique. Posant

$$R_k = \inf \{ r / \forall t > r, A_t > k^2 \},$$

il est clair que $A_{R_k} = O(k^2)$ ($k \rightarrow \infty$). Ainsi il vient que

$$\mathbb{E} \left\{ \left| A_{R_k}^{-1} \int_0^{R_k} (\tilde{L}_r(u) - 1) dA_r \right|^2 \right\} = O(k^{-2}) \quad (k \rightarrow \infty),$$

on en déduit alors que

$$A_{R_k}^{-1} \int_0^{R_k} \tilde{L}_r(u) dA_r \rightarrow 1 \text{ p.s..}$$

Or, pour $R \in [R_k, R_{k+1}[$ on a :

$$\begin{aligned}
& \left| A_R^{-1} \int_0^R (\tilde{L}_r(u) - 1) dA_r - A_{R_k}^{-1} \int_0^{R_k} (\tilde{L}_r(u) - 1) dA_r \right| \\
& \leq \left| A_R^{-1} \int_0^R (\tilde{L}_r(u) - 1) dA_r - A_R^{-1} \int_0^{R_k} (\tilde{L}_r(u) - 1) dA_r \right| \\
& \quad + \left| A_R^{-1} \int_0^{R_k} (\tilde{L}_r(u) - 1) dA_r - A_{R_k}^{-1} \int_0^{R_k} (\tilde{L}_r(u) - 1) dA_r \right| \\
& \leq A_{R_k}^{-1} \int_{R_k}^{R_{k+1}} (|\tilde{L}_r(u)| + 1) dA_r + |A_R^{-1} - A_{R_k}^{-1}| \int_0^{R_k} (|\tilde{L}_r(u)| + 1) dA_r \\
& \leq 2(1 + c)A_{R_k}^{-1}(A_{R_{k+1}} - A_{R_k}) \\
& = O\left(\frac{1}{k}\right) (k \rightarrow \infty).
\end{aligned}$$

Puisque $(A_{R_{k+1}} - A_{R_k}) = O\left(\frac{1}{k}\right)$. Ce qui achève la preuve du Théorème 5.2.1. \square

5.3.2 Preuve du Théorème 5.2.2

Pour $Z_t := V_t^{-1}M_t$ et $S = U + U^*$ (S étant la matrice régulière de la condition (\mathcal{C}_3)), La première partie de cette preuve consiste à démontrer la relation suivante

$$A_t^{-1}(\|Z_t\|^2 + \int_0^t Z_{s-}^* S Z_{s-} dA_s) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \text{tr}(C^{1/2} S C^{1/2}) \text{ p.s.} \quad (5.20)$$

En effet, en appliquant la formule d'Itô à la semi-martingale $\|Z_t\|^2$ on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned}
\|Z_t\|^2 = 2 \int_0^t Z_{s-}^* V_s^{-1} dM_{s-} + \text{tr} \left(\int_0^t (V_s^*)^{-1} V_s^{-1} d[M]_s \right) \\
- \int_0^t Z_{s-}^* V_s^{-1} d(V_s V_s^*) (V_s^*)^{-1} Z_{s-}, \quad (5.21)
\end{aligned}$$

Dans la suite on pose :

$$\begin{aligned}
D_t &= \int_0^t Z_{s-}^* V_s^{-1} d(V_s V_s^*) (V_s^*)^{-1} Z_{s-}, \\
K_t &= \int_0^t V_s^{-1} d[M]_s (V_s^*)^{-1} \quad \text{et} \quad L_t = \int_0^t Z_{s-}^* V_s^{-1} dM_{s-}.
\end{aligned}$$

Avec ces notations, l'égalité (5.21) s'écrit :

$$\|Z_t\|^2 + D_t = 2L_t + \text{tr}(K_t) \quad (5.22)$$

et on a les résultats suivants

Lemme 5.3.4.

$$\frac{K_t}{A_t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} CU^* + UC \text{ p.s..} \quad (5.23)$$

Preuve. Par la formule d'intégration par parties on voit que

$$\begin{aligned} d(V_s^{-1}[M]_s(V_s^*)^{-1}) &= V_s^{-1}d[M]_s(V_s^*)^{-1} - V_s^{-1}(dV_s)V_s^{-1}[M]_s(V_s^*)^{-1} \\ &\quad - V_s^{-1}[M]_s(V_s^*)^{-1}(dV_s)^*(V_s^*)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

donc

$$K_t = C'_t + \int_0^t C'_s(V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds})^* ds + \int_0^t (V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}) C'_s ds$$

avec $C'_t := V_t^{-1}[M]_t(V_t^*)^{-1}$. Par conséquent,

$$K_t = C'_t + \int_0^t C'_s(a_s^{-1}V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds})^* dA_s + \int_0^t (a_s^{-1}V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}) C'_s dA_s.$$

Vu l'hypothèse (H2) et les conditions (C), on déduit le résultat par lemme de Toeplitz. \square

Lemme 5.3.5.

$$D_t \sim \int_0^t Z_s^* S Z_s dA_s \text{ p.s. } (t \rightarrow \infty). \quad (5.25)$$

Preuve. On a

$$D_t = \int_0^t Z_{s-}^* V_s^{-1} d(V_s V_s^*) (V_s^*)^{-1} Z_{s-} = \int_0^t Z_s^* \left[(V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}) + (V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds})^* \right] Z_s ds,$$

ainsi compte tenu des conditions (C) et du Lemme de Toeplitz, on déduit aisément le résultat annoncé. \square

Lemme 5.3.6.

$$L_t = o(A_t) \text{ p.s..} \quad (5.26)$$

Preuve. La variation quadratique prévisible de la martingale locale $(L_t)_{t \geq 0}$ vaut :

$$\langle L \rangle_t = \int_0^t Z_s^* V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} Z_s = \int_0^t Z_{s-}^* d\tilde{K}_s Z_{s-}$$

où

$$\tilde{K}_t = \int_0^t V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1},$$

est le compensateur prévisible du processus $(K_t)_{t \geq 0}$. En utilisant une décomposition semblable à celle de K_t , on vérifie que

$$\tilde{K}_t = C_t + \int_0^t C_s (V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}) ds + \int_0^t (V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}) C_s ds$$

avec $C_t = V_t^{-1} \langle M \rangle_t (V_t^*)^{-1}$. Par suite

$$\begin{aligned} \langle L \rangle_t &= \int_0^t Z_{s-}^* dC_s Z_{s-} + \int_0^t Z_{s-}^* \left[C_s (a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds})^* + (a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}) C_s \right] Z_{s-} dA_s \\ &= \int_0^t \text{tr}(Z_{s-} Z_{s-}^* dC_s) \\ &\quad + \int_0^t \text{tr} \left[Z_{s-} Z_{s-}^* \left[C_s (a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds})^* + (a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}) C_s \right] \right] dA_s \\ &= O \left(\int_0^t \|Z_s\|^2 \text{tr}(dC_s) \right) \\ &\quad + O \left(\int_0^t \|Z_s\|^2 \text{tr} \left[\left[C_s (a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds})^* + (a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}) C_s \right] \right] dA_s \right) \end{aligned}$$

Vu l'hypothèse $(\mathcal{H}1)$, on obtient par le Lemme de Toeplitz :

$$\langle L \rangle_t = O \left(\int_0^t \|Z_s\|^2 \text{tr}(dC_s) \right) + O(D_t) \text{ p.s.}$$

La formule d'intégration par parties et la relation (5.22) donnent :

$$\begin{aligned} \int_0^t \|Z_s\|^2 \text{tr}(dC_s) &= \|Z_t\|^2 \text{tr}(C_t) + \int_0^t \text{tr}(C_s) dD_s \\ &\quad - \int_0^t \text{tr}(C_s) \text{tr}(dK_s) - 2 \int_0^t \text{tr}(C_s) dL_s \\ &= O(\|Z_t\|^2 + D_t + \text{tr}(K_t) + \tilde{L}_t). \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{L}_t := \int_0^t \text{tr}(C_s) dL_s.$$

Deux cas sont alors possibles

- soit $\langle \tilde{L} \rangle_\infty < \infty$ on déduit alors que $\tilde{L}_t = O(D_t)$

• soit $\langle \tilde{L} \rangle_\infty = \infty$ et on conclut par la loi forte des grands nombres pour les martingales scalaires que $\tilde{L}_t = o(\langle L \rangle_t)$. Ainsi on voit que

$$\int_0^t \|Z_s\|^2 \operatorname{tr}(dC_s) = O(\|Z_t\|^2 + D_t + \operatorname{tr}(K_t)),$$

et par conséquent

$$\langle L \rangle_t = O(\|Z_t\|^2 + D_t + \operatorname{tr}(K_t)) \text{ p.s..}$$

Encore une fois, la loi forte des grands nombres pour les martingales scalaires assure que

$$L_t = o(\|Z_t\|^2 + D_t + \operatorname{tr}(K_t)) \text{ p.s..} \quad (5.27)$$

Compte tenu du Lemme 5.3.4 et de la relation (5.22), on conclut que :

$$L_t = o(A_t) \text{ p.s..} \quad (5.28)$$

□

Par conséquent la relation

$$A_t^{-1}(\|Z_t\|^2 + \int_0^t Z_s^* S Z_s dA_s) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \operatorname{tr}(C^{1/2} S C^{1/2}) \text{ p.s..} \quad (5.29)$$

découle aisément de la relation (5.22) et des lemmes 5.3.4, 5.3.5 et 5.3.6.

Compte tenu de la preuve du Théorème 5.2.1 et sous les hypothèses $(\mathcal{H}1)$ et (\mathcal{H}) , on a que

$$\tilde{\mu}_t := A_t^{-1} \int_0^t \delta_{Z_s} dA_s \implies \mu_\infty \text{ p.s..}$$

On en déduit alors que

$$\varliminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} x^* S x d\tilde{\mu}_t(x) \geq \int_{\mathbb{R}^d} x^* S x d\mu_\infty(x) \text{ p.s..}$$

Or, d'après l'hypothèse $(\mathcal{H}3)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} x^* S x d\mu_\infty(x) = \operatorname{tr}(S \int x^* x d\mu_\infty(x)) = \operatorname{tr}(SC) = \operatorname{tr}(C^{1/2} S C^{1/2})$$

donc

$$\varliminf_{t \rightarrow \infty} A_t^{-1} \int_0^t Z_s^* S Z_s dA_s \geq \operatorname{tr}(C^{1/2} S C^{1/2}) \text{ p.s..} \quad (5.30)$$

Vu les propriétés (5.29) et (5.30), on conclut que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_t^{-1} \int_0^t Z_s^* S Z_s dA_s = \text{tr}(C^{1/2} S C^{1/2}). \quad (5.31)$$

et on déduit la loi du logarithme à savoir

$$(L.L) \quad \|V_t^{-1} M_t\|^2 = o(A_t) \text{ p.s. } (t \rightarrow \infty).$$

Par ailleurs, S est inversible. On en déduit alors, à l'aide de (5.31) et du fait que

$$\log(\det V_t^2) \sim \text{tr}(S) A_t \quad (t \rightarrow \infty)$$

(voir la relation (5.8)), la validité de la propriété (LFQ). Ce qui achève la preuve.

5.3.3 Preuve du Théorème 5.2.3.

Posant $\theta_t := V_t^{-1}(M_t M_t^* - [M]_t)(V_t^*)^{-1}$, on a le lemme suivant

Lemme 5.3.7.

$$A_t^{-1/2} \int_0^t \text{tr}(\theta_s) dA_s - (\log(\det V_t^2))^{-1/2} \int_0^t (\text{tr}[S])^{-1/2} \text{tr}(\theta_s) d(\log(\det V_s^2)) \rightarrow 0 \text{ p.s. } (t \rightarrow \infty).$$

Preuve. D'après la relation (5.8) on voit que

$$\left[\frac{A_t}{\text{tr}(S) \log(\det V_s^2)} \right]^{-1/2} \rightarrow \text{tr}(S) \quad (t \rightarrow \infty).$$

D'autre part, en utilisant la relation (5.6) et la condition (C3) on obtient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \text{tr}(\theta_s) dA_s}{\int_0^t \text{tr}(\theta_s) d(\log(\det V_s^2))} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_t}{2 \text{tr} \left[V_t^{-1} \frac{dV_t}{dt} \right]} = \frac{1}{\text{tr}(S)}, \quad (5.32)$$

ce qui achève la preuve du Lemme. \square

Ainsi, on se ramène à démontrer que

$$A_t^{-1/2} \int_0^t \text{tr}[\theta_s] dA_s \Rightarrow 2\sqrt{\text{tr}(\tilde{C} R C R)} G$$

où G est une Gaussienne centrée réduite et R désigne la matrice symétrique, positive solution de l'équation de Lyapounov :

$$I = R U + U^* R,$$

U étant la matrice de la condition (C).

Une relation fondamentale.

Posant $Z_t = V_t^{-1}M_t$, alors la formule d'Itô donne :

$$\begin{aligned} Z_t Z_t^* &= \int_0^t V_s^{-1} (dM_{s-}) M_{s-}^* (V_s^*)^{-1} + \int_0^t V_s^{-1} M_{s-} (dM_{s-})^* (V_s^*)^{-1} \\ &\quad - \int_0^t V_s^{-1} (dV_s) V_s^{-1} M_{s-} M_{s-}^* (V_s^*)^{-1} + \int_0^t V_s^{-1} d[M]_s (V_s^*)^{-1} \\ &\quad - \int_0^t V_s^{-1} M_{s-} M_{s-}^* (V_s^*)^{-1} (dV_s)^* (V_s^*)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Plus précisément, on a appliqué la formule d'Itô à la forme quadratique $(\langle u, Z_t \rangle^2)$ avec $u \in \mathbb{R}^d$ et on obtient l'expression précédente par polarisation. En utilisant l'expression (5.24) on obtient la relation fondamentale suivante :

$$\theta_t + \int_0^t V_s^{-1} dV_s \theta_s + \int_0^t \theta_s (dV_s)^* (V_s^*)^{-1} = H_t + H_t^*. \quad (5.34)$$

avec

$$H_t = \int_0^t V_s^{-1} M_{s-} (dM_{s-})^* (V_s^*)^{-1}.$$

Désormais, pour $u \in \mathbb{R}^d$, on pose :

$$H_t^u := \int_0^t V_s^{-1} M_{s-} (dM_{s-})^* (V_s^*)^{-1} u. \quad (5.35)$$

Notre objectif est de démontrer un théorème limite centrale pour la martingale H^u . Pour cela, on va étudier le comportement asymptotique du crochet oblique de cette martingale et montrer qu'elle vérifie la condition de Lindeberg.

Comportement asymptotique de $(\langle H^u \rangle_t)_{t \geq 0}$

Dans la suite, on démontre la proposition suivante

Proposition 5.3.1.

$$\frac{\langle H_t^u \rangle}{A_t} \rightarrow u^* \tilde{C} u C \quad p.s.. \quad (5.36)$$

Preuve. (H_t^u) est une martingale vectorielle de variation quadratique prévisible :

$$\begin{aligned} \langle H^u \rangle_t &= \int_0^t V_s^{-1} M_{s-} [u^* V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} u] (M_{s-})^* (V_s^*)^{-1} \\ &= \int_0^t Z_s [u^* V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} u] Z_s^*. \end{aligned} \quad (5.37)$$

On en déduit alors que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a :

$$\begin{aligned} x^* \langle H^u \rangle_t x &= \int_0^t x^* Z_s [u^* V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} u] Z_s^* x \\ &= \int_0^t \langle x, Z_s \rangle^2 [u^* V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} u]. \end{aligned}$$

On pose alors

$$F_t(u) := \int_0^t \exp(A_s) u^* V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} u ds.$$

Ainsi par la formule d'intégration par partie on déduit que :

$$x^* \langle H^u \rangle_t x = \exp(-A_t) F_t(u) \langle x, Z_t \rangle^2 + \int_0^t \exp(-A_s) F_s(u) \langle x, Z_s \rangle^2 d(A_s) - G_t \quad (5.38)$$

avec

$$G_t := \int_0^t \exp(-A_s) F_s(u) d(\langle x, Z_s \rangle^2).$$

Le résultat suivant est utile pour la suite

Lemme 5.3.8.

$$\exp(-A_t) F_t(u) \rightarrow u^* \tilde{C} u \quad p.s., \quad (5.39)$$

avec $\tilde{C} = UC + CU^*$; U étant la matrice introduite dans (C3).

Preuve. Par la formule d'intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} F_t(u) &= \exp(A_t) u^* V_t^{-1} \langle M \rangle_t (V_t^*)^{-1} u - \int_0^t u^* V_s^{-1} \langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} u d(\exp(A_s)) \\ &\quad + \int_0^t u^* (a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}) V_s^{-1} \langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} u d(\exp(A_s)) \\ &\quad + \int_0^t u^* V_s^{-1} \langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} (a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds})^* u d(\exp(A_s)). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H1) et le lemme de Toeplitz on voit que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\exp(A_t) - 1} \left(\exp(A_t) u^* V_t^{-1} \langle M \rangle_t (V_t^*)^{-1} u \right. \\ \left. - \int_0^t u^* V_s^{-1} \langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} u d(\exp(A_s)) \right) \rightarrow 0 \quad p.s. \end{aligned}$$

et d' autre part, d'après l'hypothèse (H1), le lemme de Toeplitz et la condition (C3) on obtient que :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\exp(A_t) - 1} \left(\int_0^t u^* (a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}) V_s^{-1} \langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} u d(\exp(A_s)) \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t u^* V_s^{-1} \langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} (a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds})^* u d(\exp(A_s)) \right) \rightarrow \tilde{C} = UC + CU^* \quad \text{p.s.} \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

Par conséquent, en combinant le lemme précédent et la propriété (LL) on voit immédiatement que :

$$\exp(-A_t) F_t(u) \langle x, Z_t \rangle^2 = o(A_t) \quad \text{p.s.} \quad (5.40)$$

Par ailleurs, d'après le lemme 5.3.8 et la propriété (LFQ), il vient que :

$$A_t^{-1} \int_0^t \exp(-A_s) F_s(u) \langle x, Z_s \rangle^2 d(A_s) \rightarrow u^* \tilde{C} u x^* C x \quad \text{p.s..} \quad (5.41)$$

Dans la suite on s'intéresse au comportement asymptotique de G . Vu le Lemme 5.3.8, il est clair que

$$G_t = O(\langle x, Z_t \rangle^2) \quad (5.42)$$

donc par la propriété (LL) on a

$$G_t = o(A_t) \quad \text{p.s..} \quad (5.43)$$

Compte tenu de l'expression (5.38) des relations (5.40),(5.41) et (5.43) on conclut que

$$\frac{\langle H_t^u \rangle}{A_t} \rightarrow u^* \tilde{C} u C \quad \text{p.s..} \quad (5.44)$$

Ce qui achève la preuve. □

Vérification de la condition de Lindeberg pour la martingale $(H_t^u)_{t \geq 0}$

Définition 5.3.1. Soient $A = (A_t), B = (B_t)$ deux processus croissants issus de 0. On dit que A est **dominé au sens fort** par B , et on écrit : $A \ll B$, si $(B_t - A_t; t \geq 0)$ est un processus croissant.

Le résultat utile suivant est évident :

Lemme 5.3.9. *Si $A \ll B$, leurs compensateurs prévisibles \tilde{A}, \tilde{B} vérifient aussi $\tilde{A} \ll \tilde{B}$.*

Application à la martingale (H_t)

Le saut à l'instant t de la martingale matricielle :

$$H_t = \int_0^t Z_{s-} d(*M_s)^* V_s^{-1}, \quad Z_t = V_t^{-1} M_t,$$

vaut :

$$\Delta H_t = Z_{t-}^* (\Delta M_t)^* V_t^{-1};$$

donc :

$$\begin{aligned} \|\Delta H_t\|^2 &= \text{tr}\{\Delta H_t^* \Delta H_t\} = \|Z_{t-}\|^2 \|V_t^{-1} \Delta M_t\|^2 \\ &= \|Z_{t-}\|^2 V_t^{-1} \Delta[M]_t^* V_t^{-1} = \|Z_{t-}\|^2 \Delta \Lambda_t \end{aligned}$$

où (Λ_t) est le processus croissant :

$$\Lambda_t = \int_0^t V_s^{-1} d[M]_s^* V_s^{-1}.$$

Pour $r > 0, t > 0$, posant :

$$\sigma_t^H(r) = \sum_{s \leq t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta H_s\| > r\}},$$

la condition de Lindeberg au sens de la convergence presque sûre pour la martingale H s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0, \quad A_t^{-1} \sigma_t^H(\epsilon \sqrt{A_t}) \xrightarrow{\text{p.s.}} 0, \quad t \rightarrow +\infty, \quad (5.45)$$

Pour établir ce résultat, on exploite les deux lemmes suivants :

Lemme 5.3.10. *L'hypothèse $(\mathcal{H}2)$ implique que presque sûrement*

$$\sup_{t > 0} \|V_t^{-1} \Delta M_t\| < +\infty.$$

Preuve. En effet, on a :

$$\sum_{s \leq t} \Delta M_s^* (\Delta M_s) \ll [M].$$

ce qui implique que

$$\sum_{s \leq t} \|V_t^{-1} \Delta M_s\|^2 \leq \text{tr}\{V_t^{-1} [M]_t^* V_t^{-1}\};$$

d'où le résultat du lemme, car

$$\|V_t^{-1} \Delta M_t\|^2 \leq \sum_{s \leq t} \|V_t^{-1} \Delta M_s\|^2 \leq \text{tr}\{V_t^{-1} [M]_t^* V_t^{-1}\} = O(1) \text{ p.s. .}$$

□

Lemme 5.3.11. *Étant donné $\alpha \in]0, 1]$, alors :*

$$\sigma_t^H(\alpha^{-3}) \ll \sigma_t^1(\alpha^{-1}) + \sigma_t^2(\alpha^{-1})$$

où pour $t > 0, r > 0$:

$$\sigma_t^1(r) = \sum_{s \leq t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_{s-}\| > r\}} \quad ; \quad \sigma_t^2(r) = \sum_{s \leq t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|V_s^{-1} \Delta M_s\| > r\}}$$

Preuve. L'assertion du lemme découle de la décomposition évidente suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_t^H(\alpha^{-3}) &= \sum_{s \leq t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta H_s\| > \alpha^{-3}, \|Z_{s-}\| > \alpha^{-1}\}} \\ &+ \sum_{s \leq t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta H_s\| > \alpha^{-3}, \|Z_{s-}\| \leq \alpha^{-1}, \|V_s^{-1} \Delta M_s\| \leq \alpha^{-1}\}} \\ &+ \sum_{s \leq t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta H_s\| > \alpha^{-3}, \|Z_{s-}\| \leq \alpha^{-1}, \|V_s^{-1} \Delta M_s\| > \alpha^{-1}\}}. \end{aligned}$$

Il est clair que le premier (resp le troisième) terme du membre de droite de cette égalité est dominé au sens fort par $(\sigma_t^1(\alpha^{-1}))$ (resp. $(\sigma_t^2(\alpha^{-1})) = (\sigma_t^2(\min(\alpha^{-1}, \alpha^{-2}))$). Pour le deuxième terme, on remarque

$$\begin{aligned} \{\|\Delta H_s\| > \alpha^{-3}, \|Z_{s-}\| \leq \alpha^{-1}, \|V_s^{-1} \Delta M_s\| \leq \alpha^{-1}\} \subset \\ \{\|Z_{s-}\| \leq \alpha^{-1}, \|Z_{s-}\| \geq \alpha^{-2}\} = \emptyset \text{ p.s.} \end{aligned}$$

d'après le choix de α . Le lemme est établi. □

Corollaire 5.3.1. *Avec les notations du lemme 3, on a :*

$$\sigma_t^1(r) \ll \int_0^t \|Z_{s-}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_{s-}\| > r\}} d\Lambda_s, \quad \sigma_t^2(r) \ll \int_0^t \|Z_{s-}\|^2 \mathbf{1}_{\{\Delta\Lambda_s > r^2\}} d\Lambda_s.$$

Par conséquent, pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}_t^1(r) &\leq \int_0^t \|Z_{s-}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_{s-}\| > r\}} d\widetilde{\Lambda}_s, \\ \widetilde{\sigma}_t^2(r) &\leq \int_0^t \|Z_{s-}\|^2 \mathbf{1}_{\{\Delta\Lambda_s > r^2\}} d\widetilde{\Lambda}_s \leq \mathbf{1}_{\{\sup_{s \leq t} \Delta\Lambda_s > r^2\}} \int_0^t \|Z_{s-}\|^2 d\widetilde{\Lambda}_s, \end{aligned}$$

avec

$$\widetilde{\Lambda}_t = \int_0^t V_s^{-1} d\langle M \rangle_s^* V_s^{-1}.$$

Validité de la condition de Lindeberg

Compte tenu de ce qui précède, pour tous $\alpha \in]0, 1[$, $\epsilon > 0$ et $t > 0$, on a

$$\overline{\lim}_t A_t^{-1} \sigma_t^H(\epsilon \sqrt{A_t}) \leq \overline{\lim}_t A_t^{-1} \sigma_t^H(\alpha^{-3}).$$

Mais

$$\begin{aligned} \sigma_t^H(\alpha^{-3}) &\leq \int_0^t \|Z_{s-}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_{s-}\| > \alpha^{-1}\}} d\widetilde{\Lambda}_s \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{\sup_{s \leq t} \Delta\Lambda_s > \alpha^{-2}\}} \int_0^t \|Z_{s-}\|^2 d\widetilde{\Lambda}_s, \end{aligned}$$

donc par la loi forte quadratique, pour tous $\alpha \in]0, 1[$, $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_t A_t^{-1} \sigma_t^H(\epsilon \sqrt{A_t}) &\leq \int_0^{+\infty} \|x\|^2 \mathbf{1}_{\{\|x\| > \alpha^{-1}\}} d\mu_\infty(x) \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{\sup_{s \geq 0} \Delta\Lambda_s > \alpha^{-2}\}} \int_0^{+\infty} \|x\|^2 d\mu_\infty(x) \text{ p.s.} \end{aligned}$$

ce qui implique que la condition de Lindeberg est vérifiée.

Fin de la preuve du Théorème 5.2.3

Vu les propriétés (5.36) et (5.45), le (TLC) s'applique pour la martingale vectorielle H^u et on a :

$$A_t^{-1/2} H_t \Rightarrow \mathfrak{N}_{d \times d}(0, \tilde{C} \otimes C)$$

où $\tilde{C} = (UC + CU^*)$. De l'égalité (5.34), il vient que pour toute matrice symétrique positive R on a

$$A_t^{-1/2} \operatorname{tr}(R\theta_t) + A_t^{-1/2} \int_0^t \operatorname{tr} \left\{ [RV_s^{-1}dV_s + (V_s^{-1}dV_s)^*R] \theta_{s-} \right\} \\ \Rightarrow 2\sqrt{\operatorname{tr}(\tilde{C}RCR)}G$$

où $\theta_t = V_t^{-1}(M_t M_t^* - [M]_t)(V_t^*)^{-1}$ et G une variable aléatoire Gaussienne centrée réduite. Par conséquent, comme $Z_t = V_t^{-1}M_t$ converge en loi et comme $V_t^{-1}[M]_t(V_t^*)^{-1}$ converge p.s., on en déduit que

$$A_t^{-1/2} \int_0^t \operatorname{tr} \left\{ \left[R(a_s^{-1}V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}) + (a_s^{-1}V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds})^* R \right] \theta_s \right\} dA_s \\ \Rightarrow 2\sqrt{\operatorname{tr}(\tilde{C}RCR)}G$$

Compte tenu de la condition (C3) et de la (L.L) qui garantie que $\theta_t = o(A_t)$ p.s., on obtient que

$$\int_0^t \operatorname{tr} \left\{ \left[R(a_s^{-1}V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} - U) + (a_s^{-1}V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds} - U)^* R \right] \theta_s \right\} dA_s \\ = o\left(\int_0^t A_s^{-1/2} dA_s\right) = o(A_t^{1/2}) \text{ p.s..} \quad (5.46)$$

Ainsi, pour R solution de l'équation de Lyapounov $I = RU + U^*R$ il vient que :

$$A_t^{-1/2} \int_0^t \operatorname{tr} \{ \theta_s \} dA_s \Rightarrow 2\sqrt{\operatorname{tr}(\tilde{C}RCR)}G \quad (5.47)$$

On conclut la preuve de la première partie du théorème par le Lemme 5.3.7. La deuxième partie du théorème est immédiate en remarquant que l'hypothèse ajoutée est équivalente à :

$$A_t^\rho \left| \operatorname{tr} \{ V_t^{-1}([M]_t)(V_t^*)^{-1} - C \} \right| = O(1) \text{ p.s., } \rho > 1/2. \quad \square$$

5.3.4 Preuve du Théorème 5.2.4

D'après la relation (5.34) et pour toute matrice symétrique, solution de l'équation de Lyapounov $RU + U^*R = I$, on a :

$$\operatorname{tr}(R\theta_t) + \int_0^t \operatorname{tr} \left\{ \left[R(a_s^{-1}V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}) + (a_s^{-1}V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds})^* R \right] \theta_s \right\} dA_s = 2 \operatorname{tr}\{RH_t\}. \quad (5.48)$$

Comme,

$$\mathbb{E}[\sup_t M_t(\Delta M_t)^*] < \infty \text{ implique que } \mathbb{E}[\sup_t \Delta \operatorname{tr}\{RH_t\}] < \infty,$$

on en déduit par le Théorème 3 de Lépingle (1978) et par la relation (5.36) que la martingale scalaire $(\operatorname{tr}\{RH_t\})_{t \geq 0}$ vérifie une loi du logarithme itéré donnée par :

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tr}\{RH_t\}}{h(A_t)} \leq \sqrt{\operatorname{tr}(\tilde{C}RCR)} \text{ p.s.}, \quad (5.49)$$

où $h(u) = \sqrt{2u \log \log u}$ pour $u \geq e$. Compte tenu de la relation (5.46) et du fait que $\theta_t = o(A_t)$ on obtient que :

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h(A_t)} \int_0^t \operatorname{tr}\{V_s^{-1}(M_s M_s^* - [M]_s)(V_s^*)^{-1}\} dA_s \leq \sqrt{\operatorname{tr}(\tilde{C}RCR)} \text{ p.s..}$$

La fin de la preuve est similaire à celle de la preuve précédente.. \square

5.3.5 Preuve des Théorèmes 5.2.5.

Comme la normalisation scalaire est un cas particulier de la normalisation matricielle, alors de l'égalité (5.34) et de la condition (5.3) on voit que

$$A_t^{-1/2} \theta_t + 2A_t^{-1/2} \int_0^t \theta_{s-} v_s^{-1} dv_s \Rightarrow 2\sqrt{2\eta} CG$$

où $\theta_t = v_t^{-2}(M_t M_t^* - [M]_t)$ et G une variable aléatoire Gaussienne centrée réduite. Par conséquent, comme $Z_t = v_t^{-1} M_t$ converge en loi et comme $v_t^{-2}[M]_t$ converge p.s., on en déduit que

$$A_t^{-1/2} \int_0^t \theta_{s-} a_s^{-1} v_s^{-1} v'_s dA_s \Rightarrow \sqrt{2\eta} CG$$

Compte tenu de la condition (5.3) et de la (L.L) qui garantie que $\theta_t = o(A_t)$ p.s., on obtient

$$\int_0^t (a_s^{-1} v_s^{-1} v'_s - \eta) dA_s = o\left(\int_0^t A_s^{-1/2} dA_s\right) = o(A_t^{1/2}) \text{ p.s..} \quad (5.50)$$

Ainsi, on en déduit que

$$A_t^{-1/2} \int_0^t \theta_s dA_s \Rightarrow (\sqrt{2\eta} C) G \quad (5.51)$$

On conclut la preuve de la première partie du théorème par le Lemme 5.3.7 qui reste valable pour une normalisation V_t scalaire. La deuxième partie du Théorème 5.2.5 est immédiate en remarquant que l'hypothèse ajoutée est équivalente à :

$$A_t^\rho \left| \{v_t^{-2}([M]_t) - C\} \right| = O(1) \quad \text{p.s., } \rho > 1/2.$$

□

5.4 Application : Estimation de la variance d'un P.A.I.S. pondéré

Une question intéressante nous a été posé au fur et à mesure que ce travail progressait. En effet, il s'agissait de savoir si on pouvait améliorer la vitesse logarithmique (lente) dans la propriété (TLCPS) ainsi que dans les autres propriétés qui lui sont associées. Dans ce qui suit on donne une réponse à cette question sous forme d'application. On se propose alors d'estimer la variance d'un P.A.I.S. pondéré. On dira que le processus $(\tilde{S}_t)_{t \geq 0}$ est un P.A.I.S. pondéré s'il est de la forme

$$\tilde{S}_t := \int_0^t w_s dS_s$$

où w est un processus à variation fini alors que S est un processus à accroissement indépendants et stationnaires dont la mesure de Lévy des sauts ν vérifie :

$$\nu(dt, dx) = dt F(dx), \quad \text{avec } \int |x|^{2p} F(dx) < \infty \quad \text{pour un } p > 1, \quad (5.52)$$

où F est une mesure positive sur \mathbb{R} . On note :

$$m = \mathbb{E} S_1, \quad \sigma^2 = \mathbb{E} S_1^2 - m^2 \quad \text{et} \quad \tilde{N}_t = \int_0^t w_r d(S_r - mr).$$

Proposition 5.4.1. *Avec les notations précédentes et pour*

$$w_t = \frac{t^{-\alpha/2}}{1-\alpha} \exp \frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}, \quad \alpha \in (0, 1)$$

on a les propriétés

1. (TLCPS)

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t \delta \left\{ e^{-\frac{s^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} \tilde{N}_s \right\} \frac{ds}{s^\alpha} \Rightarrow \mathfrak{N}(0, \sigma^2)$$

2. (LFQ)

$$\tilde{\sigma}_t := \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t e^{-\frac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \tilde{N}_s^2 \frac{ds}{s^\alpha} \rightarrow \sigma^2 \text{ p.s. } (t \rightarrow \infty).$$

Si de plus pour $\rho > 1/2$ on a

$$\exp \left\{ -\frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)} \right\} \sum_{s \leq t} (\Delta \tilde{S}_s)^2 - \int_R x^2 F(dx) = O(t^{\rho(1-\alpha)}) \quad (t \rightarrow \infty)$$

alors on a la propriété

3. (TLCL)

$$t^{\frac{1-\alpha}{2}} (\tilde{\sigma}_t - \sigma^2) \Rightarrow \mathfrak{N}(0, 4(1-\alpha)\sigma^4).$$

La preuve de la proposition est laissée en annexe.

Remarques

1. Les preuves des propriétés données dans le paragraphe 1.2 et celle de la proposition précédente sont similaires.
2. Dans la proposition 5.4.1, de la propriété (LFQ) on voit que $\tilde{\sigma}_t$ est un estimateur fortement consistant de σ^2 . Cependant, vu la propriété (TLCL), l'intervalle de confiance associé à cet estimateur est asymptotiquement meilleur que celui donné par l'estimateur sans pondération à savoir l'estimateur $\hat{\sigma}$ (voir partie 1.2)

5.5 Annexe

5.5.1 Preuve du Lemme 5.3.3

La propriété (5.7) implique que pour tout couple $(\rho_1, \rho_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ avec $\rho_1 \leq \rho_2$, on a :

$$\text{tr} \left(\int_{\rho_1}^{\rho_2} V_s^{-1} d(V_s V_s^*) (V_s^*)^{-1} \right) = \log(\det V_{\rho_2})^2 - \log(\det V_{\rho_1})^2. \quad (5.53)$$

Or, vu que :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tr} \left(\int_{\rho_1}^{\rho_2} V_s^{-1} d(V_s V_s^*) (V_s^*)^{-1} \right) &= \operatorname{tr} \left(\int_{\rho_1}^{\rho_2} (V_s V_s^*)^{-1} d(V_s V_s^*) \right) \\
 &\geq \operatorname{tr} \left((V_{\rho_2} V_{\rho_2}^*)^{-1} \int_{\rho_1}^{\rho_2} d(V_s V_s^*) \right) \\
 &\geq \operatorname{tr} \left((V_{\rho_2} V_{\rho_2}^*)^{-1} (V_{\rho_2} V_{\rho_2}^* - V_{\rho_1} V_{\rho_1}^*) \right) \\
 &\geq \operatorname{tr} \left(I_d - V_{\rho_2}^{-1} V_{\rho_1} V_{\rho_1}^* (V_{\rho_2}^*)^{-1} \right),
 \end{aligned}$$

on en déduit que :

$$\operatorname{tr} \left(\int_{\rho_1}^{\rho_2} V_s^{-1} d(V_s V_s^*) (V_s^*)^{-1} \right) \geq d - \|V_{\rho_2}^{-1} V_{\rho_1}\|^2. \quad (5.54)$$

Les deux propriétés (5.53) et (5.54) impliquent donc que :

$$d - \|V_{\rho_2}^{-1} V_{\rho_1}\|^2 \leq \log(\det V_{\rho_2})^2 - \log(\det V_{\rho_1})^2. \quad (5.55)$$

Pour un n_0 fixé considérons maintenant la subdivision suivante : $\rho_0 = \rho < \rho_1 < \dots < \rho_{n_0} = r$, on a alors :

$$\begin{aligned}
 \|V_r^{-1} V_\rho\|^2 &\leq \prod_{j=0}^{n_0-1} \|V_{\rho_{j+1}}^{-1} V_{\rho_j}\|^2 \\
 &= \prod_{j=0}^{n_0-1} \left[d - \left(d - \|V_{\rho_{j+1}}^{-1} V_{\rho_j}\|^2 \right) \right] \\
 &= d^{n_0} \prod_{j=0}^{n_0-1} \left[1 - \left(1 - \frac{\|V_{\rho_{j+1}}^{-1} V_{\rho_j}\|^2}{d} \right) \right] \\
 &\leq d^{n_0} \exp \left\{ - \sum_{j=0}^{n_0-1} \left(1 - \frac{\|V_{\rho_{j+1}}^{-1} V_{\rho_j}\|^2}{d} \right) \right\} \\
 &\leq d^{n_0} \exp \left\{ - \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{n_0-1} [\log(\det V_{\rho_{j+1}})^2 - \log(\det V_{\rho_j})^2] \right\}.
 \end{aligned}$$

D'où l'inégalité :

$$\|V_r^{-1} V_\rho\|^2 \leq d^{n_0} \left(\frac{\det V_\rho}{\det V_r} \right)^{\frac{2}{d}}. \quad \square$$

5.5.2 Preuve de la Proposition 5.4.1

On sait que S est un processus à accroissement indépendants et stationnaires (P.A.I.S.) par conséquent $\tilde{N}_t := \int_0^t w_r d(S_r - mr)$ est une martingale dont la variation quadratique est donnée par $\langle N \rangle_t = \sigma^2 \int_0^t w_r^2 dr$. Pour

$$w_t = \frac{t^{-\alpha/2}}{1-\alpha} \exp \frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}, \quad \alpha \in (0, 1)$$

on voit que

$$e^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \langle N \rangle_t \rightarrow \sigma^2, \quad (t \rightarrow \infty).$$

Ainsi l'hypothèse $(\mathcal{H}1)$ est vérifiée. L'hypothèse $(\mathcal{H}'2)$ est immédiate. En effet

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_0^t e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} |x|^2 \nu^{\tilde{M}}(ds, dx) &= e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \int_0^t \frac{s^{-\alpha/2}}{1-\alpha} e^{\frac{s^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} ds \int_{\mathbb{R}} |x|^2 F(dx) \\ &\rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

La propriété (TLCPS) est prouvée. Afin de démontrer les propriétés (LFQ) et (TLCL) il nous suffit de vérifier l'hypothèse $(\mathcal{H}2)$. □

Bibliographie

- ALDOUS, D. J. et EAGLESON, G. K. (1978). On mixing and stability of limit theorems. *Ann. Probability* **6** 325–331.
- BALLY, V. et TALAY, D. (1996a). The law of the Euler scheme for stochastic differential equations. I. Convergence rate of the distribution function. *Probab. Theory Related Fields* **104** 43–60.
- BALLY, V. et TALAY, D. (1996b). The law of the Euler scheme for stochastic differential equations. II. Convergence rate of the density. *Monte Carlo Methods Appl.* **2** 93–128.
- BOYLE, P., BROADIE, M. et GLASSERMAN, P. (1997). Monte Carlo methods for security pricing. *J. Econom. Dynam. Control* **21** 1267–1321.
- BROADIE, M. et DETEMPLE, J. (1997). Recent advances in numerical methods for pricing derivative securities. In *Numerical methods in finance*. Publ. Newton Inst., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 43–66.
- BROSAMLER, G. A. (1988). An almost everywhere central limit theorem. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **104** 561–574.
- CHAABANE, F. (1996). Version forte du théorème de la limite centrale fonctionnel pour les martingales. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **323** 195–198.
- CHAABANE, F. (2002). Invariance principles with logarithmic averaging for continuous local martingales. *Statist. Probab. Lett.* **59** 209–217.

- CHAÂBANE, F., MAÂOUIA, F. et TOUATI, A. (1998). Généralisation du théorème de la limite centrale presque-sûr pour les martingales vectorielles. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **326** 229–232.
- DUFFIE, D. et GLYNN, P. (1995). Efficient Monte Carlo simulation of security prices. *Ann. Appl. Probab.* **5** 897–905.
- FAURE, O. (1992). *Simulation du mouvement Brownien et des diffusions*. Ph.D. thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- GLASSERMAN, P. (2004). *Monte Carlo methods in financial engineering*, vol. 53 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York.
- GOBET, E. (1998). *Schémas d'Euler pour diffusion tuée. Application aux options barrière*. Ph.D. thesis, Université PARIS 7.
- GUYON, J. (2005). Euler scheme and tempered distributions. *Preprint* .
- JACOD, J. (1997). On continuous conditional Gaussian martingales and stable convergence in law. In *Séminaire de Probabilités, XXXI*, vol. 1655 of *Lecture Notes in Math*. Springer, Berlin, 232–246.
- JACOD, J., KURTZ, T. G., MÉLÉARD, S. et PROTTER, P. (2003). The approximate euler method for levy driven stochastic differential equations. *To appear in the Annales de l'Institut Henri Poincaré, Special issue devoted to the memory of P.A. Meyer* .
- JACOD, J. et PROTTER, P. (1998). Asymptotic error distributions for the Euler method for stochastic differential equations. *Ann. Probab.* **26** 267–307.
- JACOD, J. et SHIRYAEV, A. N. (2003). *Limit theorems for stochastic processes*, vol. 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin.
- KEBAIER, A. (2005). Statistical romberg extrapolation : A new variance reduction method and applications to option pricing. *à paraître Annals of Applied probability* .

- KEMNA, A. G. Z. et VORST, A. C. F. (1990). A pricing method for options based on average asset values. *J. Banking Finan.* **14** 113–129.
- KLOEDEN, P. E. et PLATEN, E. (1995). Numerical methods for stochastic differential equations. In *Nonlinear dynamics and stochastic mechanics*. CRC Math. Model. Ser., CRC, Boca Raton, FL, 437–461.
- KOHATSU-HIGA, A. et PETTERSSON, R. (2002). Variance reduction methods for simulation of densities on Wiener space. *SIAM J. Numer. Anal.* **40** 431–450 (electronic).
- KURTZ, T. G. et PROTTER, P. (1991). Wong-Zakai corrections, random evolutions, and simulation schemes for SDEs. In *Stochastic analysis*. Academic Press, Boston, MA, 331–346.
- KURTZ, T. G. et PROTTER, P. (1999). Weak error estimates for simulation schemes for SDEs.
- KUSUOKA, S. et STROOCK, D. (1984). Applications of the Malliavin calculus. I. In *Stochastic analysis (Katata/Kyoto, 1982)*, vol. 32 of *North-Holland Math. Library*. North-Holland, Amsterdam, 271–306.
- KUSUOKA, S. et STROOCK, D. (1985). Applications of the Malliavin calculus. II. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **32** 1–76.
- LAPEYRE, B., PARDOUX, É. et SENTIS, R. (1998). *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*, vol. 29 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin.
- LÉPINGLE, D. (1978). Sur le comportement asymptotique des martingales locales. In *Séminaire de Probabilités, XII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1976/1977)*, vol. 649 of *Lecture Notes in Math*. Springer, Berlin, 148–161.
- LIFSHITS, M. A. (2002). Almost sure limit theorem for martingales. In *Limit theorems in probability and statistics, Vol. II (Balatonlelle, 1999)*. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 367–390.

- NUALART, D. (1995). *The Malliavin calculus and related topics*. Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag, New York.
- NUALART, D. (1998). Analysis on Wiener space and anticipating stochastic calculus. In *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1995)*, vol. 1690 of *Lecture Notes in Math*. Springer, Berlin, 123–227.
- PROTTER, P. (1990). *Stochastic integration and differential equations*, vol. 21 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin.
- RÉNYI, A. (1963). On stable sequences of events. *Sankhyā Ser. A* **25** 293–302.
- SCHATTE, P. (1988). On strong versions of the central limit theorem. *Math. Nachr.* **137** 249–256.
- TALAY, D. et TUBARO, L. (1990). Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations. *Stochastic Anal. Appl.* **8** 483–509 (1991).
- TEMAM, E. (2001). *Couverture approché d'options exotiques. Pricing des options Asiatiques*. Ph.D. thesis, Université Paris VI.
- TOUATI, A. (1991). Sur la convergence en loi fonctionnelle de suites de semimartingales vers un mélange de mouvements browniens. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* **36** 744–763.
- TOUATI, A. (1993). Deux théorèmes de convergence en loi pour des intégrales stochastiques et application statistique. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* **38** 128–153.