



**HAL**  
open science

# Modélisation Causale en vue de la Commande d'un translateur piézoélectrique plan pour une application haptique

François Pigache

► **To cite this version:**

François Pigache. Modélisation Causale en vue de la Commande d'un translateur piézoélectrique plan pour une application haptique. Automatique / Robotique. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2005. Français. NNT: . tel-00011938

**HAL Id: tel-00011938**

**<https://theses.hal.science/tel-00011938>**

Submitted on 13 Mar 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation Causale en vue de la Commande d'un transducteur piézoélectrique plan pour une application haptique

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 25 mars 2005

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille  
(spécialité Génie Electrique)

par

François Pigache

### Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	Pr. Jean-Paul Louis	(ENS de Cachan)
	M. Philippe Kapsa	(LTDS-EC de Lyon)
<i>Examineurs :</i>	Pr. Bertrand Nogarède	
	M. Frédéric Giraud	
	Pr. Christophe Chaillou	
<i>Président :</i>	Pr. Jean-Paul Hautier	
<i>Directeur de thèse :</i>	Pr. Betty Semail	

Mis en page avec la classe thloria.

# Remerciements

Trois années de travail au sein du laboratoire L2EP ont permis d'aboutir de ce mémoire, au cours desquelles de nombreuses personnes ont apporté leurs connaissances et leur soutien. Je tiens à remercier toutes ces personnes qui, de près ou de loin ont permis de concrétiser ce travail.

En premier lieu, je tiens à remercier Betty Semail pour m'avoir fait confiance dès le début de mes travaux. Sa volonté, son soutien et son encadrement régulier ont été des moteurs sans faille. Je remercie Christophe Chaillou du LIFL, pour m'avoir apporté les moyens techniques durant ces trois années, ainsi que Bertrand Nogarède du LEEI de Toulouse, pour m'avoir accueilli à plusieurs reprises au sein de son laboratoire, auprès d'une équipe sympathique et disponible.

J'adresse également mes remerciements à Philippe Kapsa et Jean-Paul Louis qui ont gentiment accepté d'être les rapporteurs de ce mémoire, ainsi que Jean-Paul Hautier d'avoir accepté de participer au jury.

Ce travail n'aurait pu aboutir sans l'intérêt et l'engagement de Frédéric Giraud, à qui j'exprime ma plus profonde gratitude, ainsi qu'à tous les membres du laboratoire, Gery Casiez, François Martinot, Nicolas Leroy, Mélisande Biet, Gérald Le Calvez et Sylvanus, présents au quotidien dans l'élaboration de ce mémoire. Bien plus qu'une équipe de travail, c'est dans une ambiance de franche amitié que j'ai eu plaisir à travailler à leurs côtés.

Je remercie également l'atelier électronique de polytech-lille, Thierry Flamen et Daniel Montignies dont l'accueil et les conseils techniques furent aussi précieux qu'indispensables. Une pensée particulière pour Claude Fustin et Thomas Diene pour leur implication technique dans ce projet, qui ont toujours été à l'écoute de mes besoins en conception mécanique.

J'adresse aussi toute ma sympathie aux différents stagiaires qui ont été amenés à travailler sur ce projet, tout spécialement Mirela Sandu, dont les travaux ont permis la progression de l'étude, tant au point de vue théorique que pratique.

Pour terminer, je remercie mes parents sans qui je n'aurais jamais pu réussir mes études, et Sophie, mon soutien au quotidien, ma clé de voûte.



*A mes parents.*



# Glossaire

$A$ : amortissement de l'élasticité équivalente (retour d'effort actif)	$M_{elec}$ : moments résultants du couplage électromécanique par effet piézoélectrique
$C_0$ : capacité dite bloquée de l'élément piézoactif	$M_{ext}$ : masse convoyée par l'actionneur
$C_b$ : capacité surfacique	$M_i, M_p$ : matrice de masse modale du résonateur mécanique et de l'élément piézoactif
$C_p$ : matrice de capacité modale	$N$ : facteur de conversion électromécanique
$D$ : vecteur de déplacement électrique ( $C.m^{-2}$ )	$N_{elec}$ : efforts résultants du couplage électromécanique par effet piézoélectrique
$E$ : vecteur de champ électrique ( $V.m^{-1}$ )	$Q$ : facteur de qualité
$E_i$ : module d'Young du résonateur mécanique	$R, L, C$ : éléments du schéma électrique équivalent ramené au primaire
$F_0$ : coefficient de frottement visqueux	$R_0$ : résistivité de l'élément piézoactif
$F_n$ : effort de pré-contrainte normale	$R_1, C_1, L_1$ : élément du schéma électrique équivalent au secondaire
$F_{rd}, F_{rd}$ : force de réaction modale selon la voie $d$ et $q$	$R_n$ : effort de réaction normale
$F_{rn}, F_{rt}$ : force de réaction modale normale et tangentielle	$R_t$ : effort de réaction tangentiel
$F_t$ : effort résistant tangentiel	$S, S_{ij}$ : vecteur de déformation et ses éléments
$G_b$ : rigidité flexionnelle	$T_i, T_p$ : vecteur de contrainte du résonateur mécanique et de l'élément piézoactif ( $N.m^{-2}$ )
$G_i, G_p$ : matrice de raideur modale du résonateur mécanique et de l'élément piézoactif	$U$ : vecteur de déplacement dans le solide
$I_m$ : courant motionnel	$V_1, V_2$ : tensions d'alimentation du dispositif
$K$ : matrice de couplage électromécanique	$V_{elec}$ : tension retournée par la céramique de mesure (effet direct)
$K_b$ : coefficient de conversion électromécanique	$V_{gliss}$ : vitesse de glissement relatif pied/bâti
$K_c$ : facteur de la céramique de mesure	$V_i, V_p$ : volume du résonateur mécanique et de l'élément piézoactif
$K_{id}$ : facteur de la vitesse à vide	$V_{nid}$ : vitesse normale idéale
$K_w$ : gain du montage détecteur d'enveloppe	$V_{tid}$ : vitesse tangentielle idéale
$K_x$ : coefficient d'élasticité équivalent (retour d'effort actif)	$V_{tvid}$ : vitesse tangentielle à vide de l'actionneur
$L, l$ : longueur et largeur de l'actionneur plan	$V_t$ : vitesse tangentielle de l'actionneur
$L_m$ : matrice d'opérateur différentiel	$Y_0$ : admittance électrique du schéma élec-
$M_b$ : masse vibrante surfacique	



trique équivalent	$m_p$ : masse fictive d'un pied
$Y_m$ : admittance du domaine mécanique du schéma électrique équivalent	$n$ : nombre de pied
$\Phi_x, \Phi_y$ : déformée normalisée selon les axes $x$ et $y$	$q$ : vecteur de charge électrique
$\alpha$ : facteur d'asymétrie induit par le bimorphe	$u, v, w$ : élément du vecteur de déplacement dans le repère lié au bimorphe
$\beta$ : paramètre de rapport cyclique contact/séparation	$z_0$ : ordonnée du plan neutre de flexion
$\chi_A$ : amplitude normalisée du déplacement tangentiel de l'extrémité du pied	$z_G$ : hauteur prise par le centre de gravité partiel
$\delta\mathcal{W}_{ext}$ : le travail variationnel des efforts extérieurs	$z_a$ : ordonnée du plan supérieur du résonateur
$\eta$ : vecteur d'amplitude modale	$z_i$ : ordonnée du plan commun aux deux matériaux
$\lambda$ : longueur d'onde de l'onde stationnaire	$z_p$ : ordonnée du plan inférieur de l'élément piézoactif
$\mu$ : coefficient de frottement dynamique. interface pied-sol	$\mathcal{L}$ : Lagrangien du système mécanique
$\nu_b$ : coefficient de Poisson réduit du bimorphe	$\mathcal{T}$ : énergie cinétique du bimorphe
$\nu_i$ : coefficient de Poisson du résonateur mécanique	$\mathcal{U}$ : énergie potentielle élastique du bimorphe
$\omega_0$ : pulsation de résonance d'un mode vibratoire	$\mathcal{W}_n$ : travail de l'effort extérieur normal
$\phi_A$ : amplitude normalisée du déplacement vertical du pied	$\mathcal{W}_t$ : travail de l'effort extérieur tangentiel
$\tau_b$ : inertie de rotation surfacique	$\rho_i, \rho_p$ : masse volumique du résonateur mécanique et de l'élément piézoactif
$\theta_C, \theta_D$ : instant de la mise en contact et de séparation	
$c$ : coefficient de raideur de la plaque pour un mode	
$c_i$ : Matrice des coefficients élastiques du résonateur mécanique	
$d_n, d_t$ : coefficients d'amortissement sur l'élasticité normale et tangentielle	
$d_s$ : coefficient de frottement interne de la plaque pour un mode	
$h$ : longueur du pied	
$h_m$ : plan médian de la plaque dans le repère $(0, x, y, z)$	
$h_p, h_a$ : épaisseur de l'élément piézoactif et du résonateur mécanique	
$k_n, k_t$ : élasticité normale et tangentielle d'un pied	
$m$ : masse vibrante de la plaque pour un mode	

# Table des matières

Glossaire	v
Table des figures	xi
Introduction générale	xvii

## Chapitre 1

### Généralités sur les dispositifs haptiques et les actionneurs multi-degrés de liberté

1.1	Introduction . . . . .	1
1.2	Le retour haptique . . . . .	2
1.2.1	Les technologies actuelles et envisageables . . . . .	3
1.2.2	Critères et besoins du domaine haptique . . . . .	6
1.3	Les actionneurs électromagnétiques multi-degrés de liberté . . . . .	7
1.3.1	Moteurs magnétiques sphériques . . . . .	7
1.3.2	Moteurs magnétiques plans . . . . .	9
1.4	Les actionneurs piézo-électriques multi-degrés de liberté . . . . .	10
1.4.1	Le phénomène de piézoélectricité . . . . .	10
1.4.2	Actionneurs à rotor sphérique . . . . .	15
1.4.3	Actionneurs à stator sphérique . . . . .	20
1.4.4	Les actionneurs piézoélectriques plans . . . . .	21
1.4.5	Le translateur plan piézo-électrique : actionneur à interactions de contact . . . . .	23
1.5	Conclusion . . . . .	35

## Chapitre 2

### Modélisation causale électromécanique du translateur

2.1	Introduction . . . . .	38
2.2	Modélisation vibratoire par schéma équivalent . . . . .	38
2.2.1	Identification du schéma équivalent . . . . .	40
2.2.2	Discussion du modèle . . . . .	41
2.3	Modélisation vibratoire par étude analytique . . . . .	43
2.3.1	Théorie de l'élasticité et déformation des milieux continus . . . . .	43
2.3.2	Application du principe de Hamilton . . . . .	52
2.3.3	Développement matriciel du Lagrangien . . . . .	54
2.3.4	Développement pour un mode unique . . . . .	57
2.3.5	Formes propres de l'onde . . . . .	60
2.3.6	Détermination des paramètres du schéma équivalent et fréquences vibratoires . . . . .	63
2.4	Modélisation Causale . . . . .	68
2.4.1	Mise en équations . . . . .	68
2.4.2	Représentation par graphe informationnel causal . . . . .	70
2.5	Identification expérimentale des paramètres vibratoires . . . . .	70
2.5.1	Mesure de la hauteur d'onde . . . . .	71
2.5.2	Non-linéarités du modèle . . . . .	74
2.5.3	Transformation Cissoïdale . . . . .	75
2.5.4	Identification des paramètres . . . . .	76
2.5.5	Validation du modèle . . . . .	79
2.6	Asservissement de phase . . . . .	81
2.6.1	Réalisation du déphaseur . . . . .	82
2.6.2	Mise en œuvre de l'asservissement . . . . .	82
2.7	Conclusion . . . . .	84

<b>Chapitre 3</b>
-------------------

<b>Modèle du comportement mécanique</b>
---

3.1	Introduction . . . . .	87
3.2	Modèle de connaissance . . . . .	89
3.2.1	Introduction au modèle masse-ressort . . . . .	89
3.2.2	Application du modèle masse-ressort au translateur . . . . .	90
3.3	Modèle simplifié instantané . . . . .	99
3.3.1	Description de la liaison pied-plan idéal . . . . .	101
3.3.2	Description des forces à l'interface plan idéal-plan réel . . . . .	101

3.4	Modèle linéaire moyen . . . . .	104
3.4.1	Vitesses idéales normale et tangentielle . . . . .	104
3.4.2	Forces normale et tangentielle moyennes . . . . .	105
3.4.3	Expression du modèle mécanique dans le repère tournant . . . . .	108
3.4.4	Représentation du modèle moyen par GIC . . . . .	110
3.5	Résultats du modèle moyen : comparaisons avec les résultats expérimentaux de [Fer02] . . . . .	110
3.5.1	branche motionnelle normale . . . . .	112
3.5.2	branche motionnelle tangentielle . . . . .	113
3.6	Relevés Expérimentaux sur un actionneur plan . . . . .	117
3.6.1	Relevés expérimentaux du comportement hors-plan . . . . .	117
3.6.2	Résultats expérimentaux du comportement tangent . . . . .	118
3.6.3	Asservissement de l'amplitude d'onde . . . . .	121
3.7	Conclusion . . . . .	125

## Chapitre 4

### Commande de l'actionneur piézoélectrique plan

4.1	Introduction . . . . .	127
4.2	Contrôle de la force de traction . . . . .	128
4.2.1	Asservissement de force . . . . .	129
4.2.2	Simulation d'un retour d'effort élastique . . . . .	131
4.2.3	Contrôle unidirectionnel . . . . .	135
4.3	Commande en frein réglable . . . . .	136
4.3.1	Principe . . . . .	136
4.3.2	Modélisation . . . . .	137
4.3.3	Freinage réglable pour interface haptique . . . . .	141
4.4	Conclusion . . . . .	143

## Conclusion générale 145

## Annexes

### Annexe A Valeurs numériques des matériaux 149

### Annexe B Modèle mécanique et description des phénomènes de contact 151

<b>Annexe C Valeurs numériques du modèle de connaissance</b>	<b>159</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>161</b>

# Table des figures

1.1	Le <i>pantograph</i> , structure mécanique parallèle à 2 ddl actifs . . . . .	4
1.2	Le <i>HapticMaster</i> , structure parallèle à 3 ddl actifs . . . . .	4
1.3	le <i>SPIDAR-G</i> . . . . .	5
1.4	Le <i>PHAMToM-Omni</i> . Structure mécanique série . . . . .	5
1.5	Actionneur magnétique à rotor sphérique [DFGR02] . . . . .	7
1.6	Bobinage dans les encoches du stator . . . . .	7
1.7	Vue interne du stator calotte-sphérique . . . . .	8
1.8	Ensemble stator rotor assemblés[CS99] . . . . .	8
1.9	Concept d'actionneur plan magnétique [FSdS00] . . . . .	9
1.10	Partie mobile en vue de dessus et profil . . . . .	9
1.11	Cristal centro-symétrique [Gir02] . . . . .	11
1.12	Cristal non centro-symétrique . . . . .	11
1.13	mode longitudinal . . . . .	12
1.14	mode transversal . . . . .	12
1.15	mode de cisaillement . . . . .	12
1.16	Mouvement à hysteresis nulle . . . . .	14
1.17	Mouvement à hysteresis non-nulle . . . . .	14
1.18	Onde stationnaire . . . . .	15
1.19	Onde progressive . . . . .	15
1.20	Actionneur sphérique à deux ddl . . . . .	16
1.21	Onde progressive dans un stator annulaire . . . . .	16
1.22	Composition du stator cylindrique . . . . .	16
1.23	Rotations obtenues selon 3 modes d'excitation . . . . .	16
1.24	Modes vibratoires dans une plaque carrée et déplacements du stator [ABW02] . . . . .	17
1.25	Actionneur sphérique basé sur quatre effecteurs élémentaires . . . . .	18
1.26	Onde de surface acoustique . . . . .	19
1.27	Déplacement de la sphère . . . . .	19
1.28	Partie mobile présentant trois points de contact en vue de dessous . . . . .	19
1.29	Actionneur à stator vibrant, 2ddl en rotation . . . . .	20
1.30	Actionneur à rotor vibrant, 2ddl en rotation . . . . .	20
1.31	Structure mécanique du translateur [HK96] . . . . .	21
1.32	Principe d'excitation triphasée . . . . .	21
1.33	Structure mécanique du translateur [MN95] . . . . .	23
1.34	Principe de fonctionnement . . . . .	23

1.35	Vues de dessus et dessous de l'actionneur (photo D. Harribey, LEEI Toulouse) . . . . .	23
1.36	Génération d'une onde stationnaire . . . . .	24
1.37	Alimentation et câblage des électrodes . . . . .	25
1.38	Dispositif d'assemblage . . . . .	25
1.39	Connection électrique des actionneurs . . . . .	25
1.40	Asymétrie de contact nécessaire au mouvement uniforme . . . . .	26
1.41	Incrément de déplacement durant le contact . . . . .	27
1.42	a. Incrément de position par sauts successifs . . . . .	28
1.43	b. Implantation sans déplacement tangent . . . . .	28
1.44	c. Increment de position par pas alternés droite-gauche . . . . .	28
1.45	d. Increment de position par pas alternés avant-arrière . . . . .	28
1.46	Implantation des pieds choisie pour l'étude . . . . .	29
1.47	Trajectoires de l'extrémité du pied pour différentes implantation ( $W = 1, 5\mu m$ ) . . . . .	30
1.48	Trajectoires du pied en position définitive pour deux modes distincts . . . . .	30
1.49	Translateur unidirectionnel à onde stationnaire réversible . . . . .	30
1.50	Commutation de modes . . . . .	32
1.51	Combinaison de modes . . . . .	32
1.52	Structure du micromanipulateur suivant 6 degrés de liberté . . . . .	33
1.53	Moteur verrou tubulaire . . . . .	33
2.1	Schéma électromécanique équivalent autour d'une fréquence de résonance . . . . .	39
2.2	Schéma électromécanique équivalent ramené au primaire pour une phase . . . . .	40
2.3	Diagramme de Nyquist sur les deux voies d'alimentation . . . . .	41
2.4	Identification de l'admittance de la voie 1 . . . . .	41
2.5	Diagramme de Gain et Phase. Modèle et résultat expérimental. . . . .	42
2.6	Schéma électrique équivalent de l'actionneur en charge selon [Gho00] (moteur TWUM) . . . . .	42
2.7	Dimensions et orientation du bimorphe dans le repère . . . . .	44
2.8	compensation des efforts en traction et compression . . . . .	45
2.9	Déformation de la plaque. Hypothèse cinématique de Bernoulli . . . . .	45
2.10	Contraintes de Cauchy par unité de surface . . . . .	47
2.11	Paramètres vibratoires ramenés à un plan . . . . .	59
2.12	Efforts et moments résultants dans un élément de plaque en déformation . . . . .	59
2.13	Valeurs approchées du vecteur d'onde en fonction des modes . . . . .	63
2.14	Formes d'onde normalisées pour différents modes propres . . . . .	64
2.15	Formes d'onde obtenues par éléments finis (Résultats par M. Biet L2EP Lille) . . . . .	65
2.16	GIC du domaine vibratoire . . . . .	70
2.17	Implantation de la céramique capteur . . . . .	72
2.18	Banc expérimental de mesures vibratoires (LEEI Toulouse) . . . . .	73
2.19	Diagramme du gain et de phase mode (0, 6) . . . . .	74
2.20	Variation de l'amplitude vibratoire avec la tension d'alimentation . . . . .	75
2.21	Représentation des grandeurs dans le repère dq à vide . . . . .	76

---

2.22	Relevé courant et tensions à la résonance du mode (0,6) (41,2kHz)	77
2.23	Fonction de transfert à amplitude constante autour de la résonance	78
2.24	Relevé du temps de réponse lors d'un échelon de phase	78
2.25	Fonctions de transfert ( $\frac{W}{V}$ ) expérimentale et obtenue par la modèle analytique	80
2.26	Variation de l'amplitude d'onde (%) en fonction du temps : à fréquence constante, à $V_q$ constant	80
2.27	Commande à fréquence constante [Gir02]	81
2.28	Commande à $V_q$ constant	81
2.29	schéma de principe de l'asservissement de phase	81
2.30	Déphaseur numérique autour d'un PLD ALTERA® MAX	82
2.31	Schéma bloc de l'asservissement de phase	83
2.32	Fonctions de transfert expérimentale et modélisée	83
2.33	Erreur de phase et réponse vibratoire en boucle fermée	84
2.34	Réponse en boucle ouverte à un échelon de fréquence	84
2.35	Mise en œuvre de la carte d' asservissement de phase multi-mode	84
3.1	Décomposition du mouvement du fin d'effecteur	91
3.2	Efforts appliqués sur un seul pied	92
3.3	Schéma mécanique équivalent	92
3.4	Effort de réaction instantané $R_n(t)$	94
3.5	Evolution du taux de séparation en fonction de l'amplitude vibratoire (lignes pleines) et comparaison aux simulations de [Fer02] (pointillés)	94
3.6	Chronogrammes obtenus pour un contact intermittent et différentes charges en traction	96
3.7	Chronogrammes obtenus pour un contact permanent et différentes charges en traction	97
3.8	Caractéristiques force-vitesse sur substrat de verre ( $\mu = 0,08$ ) obtenues par simulation	98
3.9	Caractéristiques force-vitesse sur substrat d'acier ( $\mu = 0,2$ ) obtenues par simulation	98
3.10	Caractéristiques des vitesses à vide ( $\mu = 0,08$ )	99
3.11	Représentation schématique de l'interface mécanique idéale	100
3.12	Représentation de la vitesse tangentielle idéale	101
3.13	Effort de réaction normale sur une période de vibration	102
3.14	Illustration de l'effort tangentiel sur une période de vibration	103
3.15	GIC complet du modèle moyen avec prise en compte de l'intermittence de contact	111
3.16	Fonction approchée pour la détermination de $\beta_0$	112
3.17	Comportement dynamique selon l'axe normal : comparaison de modèles	113
3.18	Taux de séparation obtenu par les modèles moyen et instantané	113
3.19	Vitesses tangentielles à vide pour différentes amplitudes de vibration et différents coefficients de frottement	114
3.20	Caractéristiques Force-Vitesse sur substrat de verre ( $\mu = 0,08$ ) pour différentes configurations ; expérimentales (points), simulations (pleines)	115



3.21	Caractéristiques Force-Vitesse sur verre ( $\mu = 0,08$ ) pour des configurations au contact permanent ; expérimentales (points), simulations (pleines) . . .	115
3.22	Caractéristiques Force-Vitesse sur acier ( $\mu = 0,2$ ) ; expérimentales (points), simulations (pleines) . . . . .	116
3.23	Evolution de la caractéristique Force-vitesse pour différentes amplitudes vibratoires à précharge constante sur verre ( $\mu = 0,08$ ) . . . . .	117
3.24	Relevé expérimental de la réaction normale . . . . .	118
3.25	Banc d'essais mécaniques pour obtenir les caractéristiques force-vitesse . .	119
3.26	Caractéristiques force-vitesse à amplitude constante . . . . .	120
3.27	Caractéristiques force-vitesse à précharge constante . . . . .	120
3.28	Evolution de la vitesse à vide pour différentes précharges . . . . .	121
3.29	Montage détecteur d'enveloppe de $V_{elec}$ . . . . .	122
3.30	Schéma bloc de l'asservissement de $W$ . . . . .	122
3.31	Diagramme de Black de la boucle ouverte . . . . .	123
3.32	réponse indicielle en $W$ et erreur (simulation et relevé expérimentaux) . . .	123
3.33	Réponse transitoire de l'amplitude vibratoire à un échelon de $F_t$ . . . . .	124
3.34	Réponse transitoire de $V_q$ à un échelon de $F_t = 2N$ avec $V = 20V$ . . . . .	124
3.35	Variation expérimentale de $V_q$ en fonction de la masse convoyée pour une amplitude d'onde constante . . . . .	124
4.1	Grappe Informationnel de la structure de commande de la voie $q$ . . . . .	128
4.2	Structure de contrôle de l'asservissement de force . . . . .	130
4.3	Schéma bloc de l'asservissement de force . . . . .	130
4.4	Abaque de Black-Nichols de l'asservissement de force . . . . .	131
4.5	Simulation de la réponse à un échelon de $R_{tref}$ . . . . .	132
4.6	Grappe Causal du retour d'effort élastique . . . . .	133
4.7	Schéma bloc du retour d'effort élastique . . . . .	133
4.8	Influence de l'amortissement sur l'effort $R_t$ . . . . .	134
4.9	Simulation de la réponse de l'effort $R_t(t)$ en retour d'effort élastique . . . .	135
4.10	Simulation de la position de l'actionneur en retour d'effort élastique . . . .	135
4.11	Simulation d'une raideur virtuelle $K_x = 100N.m^{-1}$ . . . . .	135
4.12	Position de l'actionneur en retour d'effort élastique : fonctionnement unidirectionnel . . . . .	136
4.13	Réponse de l'effort $R_t(t)$ en fonction de l'effort extérieur : fonctionnement unidirectionnel . . . . .	136
4.14	Implantation pour fonctionnement en frein . . . . .	137
4.15	Modèle de frottement de Coulomb-Orowan . . . . .	138
4.16	Variation de l'effort tangentiel résistant pour différentes précontraintes normales, à vitesse donnée . . . . .	140
4.17	Variation de l'effort tangentiel résistant pour différentes vitesses de glissement, à pré-contrainte donnée . . . . .	140
4.18	Chronogrammes du frottement dynamique . . . . .	141
4.19	GIC de l'actionneur dédié au fonctionnement en frein . . . . .	142
4.20	Structure de commande de l'actionneur dédié au fonctionnement en frein .	142

---

4.21	Retour d'effort dissipatif obtenu par le contrôle de l'amplitude vibratoire, à vitesse tangentielle constante . . . . .	143
B.1	Modèle de contact selon [YCM98] . . . . .	151
B.2	Modèle de l'interface de frottement . . . . .	152
B.3	Boucle hystérésis pour un effort normal constant . . . . .	152
B.4	Modèle de l'interface de frottement . . . . .	153
B.5	Boucle hystérésis classique pour un effort normal variable . . . . .	153
B.6	Evolution du cycle d'hystérésis selon $\phi$ [YCM98] . . . . .	156



# Introduction générale

A l'heure actuelle où l'ingénierie cherche à remplacer les systèmes mécaniques par des dispositifs totalement électriques (dans l'automobile, l'aéronautique, la médecine...), de nouveaux actionneurs électriques émergent pour répondre à des besoins bien spécifiques. Ces nouveaux actionneurs, issus de la maîtrise des propriétés de certains matériaux viennent compléter le champ d'applications de la motorisation, dans les domaines où les moteurs électro-magnétiques classiques ne peuvent satisfaire des conditions d'encombrement ou de dynamique.

Plus particulièrement, la famille des actionneurs piézoélectriques, dont les premiers dispositifs opérationnels datent de moins de vingt ans, propose aujourd'hui une large variété de structures, principalement dédiées aux applications de faibles ou moyennes puissances. L'émergence de ces actionneurs est due à leurs qualités en terme de discrétion acoustique, d'effort-massique, et à leurs performances à faible vitesse. Ces qualités permettent de se dispenser de réducteur mécanique, facilitant ainsi leur intégration (motorisation discrète, injecteur automobile, aileron d'avion,..)[Sag01][BOS01].

Encore peu d'actionneurs piézoélectriques sont commercialisés massivement [mh][htt], mais la grande flexibilité qu'offre la transmission mécanique par interaction de contact, entraîne de nombreuses recherches destinées à l'amélioration et au développement de nouvelles structures.

Un autre avantage réside dans la capacité de certains actionneurs à assurer plusieurs degrés de liberté motorisés, sans transmission mécanique lourde. Dans le cadre d'interfaces haptiques<sup>1</sup> ou bien encore la motorisation de bras robots, la capacité à intégrer plusieurs degrés de liberté peut soulager et faciliter la conception. A ce titre, le premier chapitre de ce mémoire débute par une présentation non-exhaustive de divers actionneurs et concepts multi-degrés de liberté selon diverses technologies, susceptibles de satisfaire les besoins du domaine haptique.

Le travail présenté ici a pour objectif la caractérisation d'un actionneur piézoélectrique plan, capable de se déplacer selon deux degrés de liberté en translation (et éventuellement une rotation) [Fer02][Gal00], afin de le modéliser et définir ses aptitudes en retour d'effort. Cet actionneur à interaction de contact présente, comme tout actionneur piézoélectrique, des non-linéarités qui rendent délicate la mise en œuvre de commandes robustes et précises. Ainsi, le contrôle de ce type d'actionneur passe soit par l'usage de lois de commande non-linéaires, soit par une description théorique approfondie qui permet d'approcher au-

---

<sup>1</sup>interfaces homme-machine capables de retourner un effort à un utilisateur navigant ou manipulant un objet dans un environnement virtuel

tant que possible son comportement réel.

Une modélisation du translateur est établie et détaillée au cours du deuxième et troisième chapitre : ces deux parties sont consacrées aux deux principales étapes de la conversion d'énergie soit, la transformation électro-mécanique menant au mouvement vibratoire, et la transformation mécano-mécanique qui convertit le mouvement vibratoire en mouvement uniforme. Ces deux conversions énergétiques sont à l'origine de non-linéarités pour le modèle.

La modélisation du domaine vibratoire est établie à partir de l'étude analytique, basée sur l'écriture du Lagrangien. Celle-ci donne lieu à la description du comportement résonnant de la structure et à sa validation expérimentale. Ensuite, le domaine mécanique est interprété sur la base d'un modèle de connaissance établi par [Fer02]. Ce modèle permet de vérifier le comportement dynamique à l'échelle vibratoire et souligne également les importantes non-linéarités rencontrées à l'interface mécanique.

Dans le but d'établir la commande de l'effort de traction, un modèle simplifié est ensuite étudié en considérant l'interface de contact de manière globale afin de ne conserver que les grandeurs mécaniques principales. Des essais expérimentaux sont entrepris pour souligner la pertinence du modèle. Ce modèle est élaboré dans le respect des règles de causalité naturelle intégrale et interprété par le formalisme du GIC [HC99]. Cette mise en forme permettra par lecture inverse, de déduire les structures de commande de l'actionneur.

Le quatrième et dernier chapitre a pour objet la vérification en simulation des possibilités de commande en force. Deux commandes pouvant répondre à la manipulation d'une interface haptique 2D (type souris à retour d'effort) sont étudiées et présentées : une commande en retour d'effort actif ainsi qu'une commande en retour d'effort dissipatif (type embrayage réglable).

# Chapitre 1

## Généralités sur les dispositifs haptiques et les actionneurs multi-degrés de liberté

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>Le retour haptique</b>	<b>2</b>
1.2.1	Les technologies actuelles et envisageables	3
1.2.2	Critères et besoins du domaine haptique	6
<b>1.3</b>	<b>Les actionneurs électromagnétiques multi-degrés de liberté</b>	<b>7</b>
1.3.1	Moteurs magnétiques sphériques	7
1.3.2	Moteurs magnétiques plans	9
<b>1.4</b>	<b>Les actionneurs piézo-électriques multi-degrés de liberté</b>	<b>10</b>
1.4.1	Le phénomène de piézoélectricité	10
1.4.2	Actionneurs à rotor sphérique	15
1.4.3	Actionneurs à stator sphérique	20
1.4.4	Les actionneurs piézoélectriques plans	21
1.4.5	Le translateur plan piézo-électrique : actionneur à interactions de contact	23
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>35</b>

---

## 1.1 Introduction

Avec les récents progrès de l'informatique, l'idée de "réalité virtuelle" éveille l'engouement de nombreux chercheurs, et amène au développement d'interfaces de plus en plus élaborées. La réalité virtuelle consiste précisément à appréhender un monde abstrait de la manière la plus proche possible du réel. Nous connaissons tous aujourd'hui l'immersion visuelle par le biais des écrans 2D. Cependant, les capacités sensorielles du corps humain ne

sont encore exploitées que très partiellement, et c'est vers le sens du toucher que s'oriente aujourd'hui un grand nombre d'études.

Ce chapitre a pour premier objectif l'introduction du retour haptique, afin de présenter succinctement le cadre de cette étude, ainsi que les besoins et solutions techniques envisageables. Ensuite, nous laisserons les structures mécaniques courantes (série et parallèle) pour nous intéresser uniquement aux capacités de nouveaux actionneurs à multi-degrés de liberté, dont il est possible d'attendre l'amélioration et la simplification des interfaces homme-machine. Cette présentation amènera à la mise en évidence des avantages et inconvénients que peuvent présenter les différentes solutions.

Enfin, le chapitre se concentrera sur la description d'un translateur piézoélectrique plan et son principe de fonctionnement, qui fera par la suite l'objet de l'étude de modélisation et de commande décrite dans ce mémoire.

## 1.2 Le retour haptique

Le domaine haptique correspond par définition à l'étude scientifique du sens du toucher et de la sensibilité cutanée chez l'être humain.

Un dispositif haptique est une interface homme-machine, qui s'intercale entre l'utilisateur humain et le domaine virtuel, afin d'enrichir sa perception et son "immersion" dans ce milieu virtuel par la sollicitation de capteurs musculaires et cutanés. Les capteurs sensoriels que regroupe notre sens du toucher, retranscrivent une grande quantité d'informations utiles à la compréhension de l'environnement telles que :

- l'inertie d'un objet
- l'orientation de surface
- la chaleur
- la pression mécanique
- la conductivité électrique
- les frottements
- ou encore les vibrations.

Ces informations se regroupent dans ce que l'on nomme le "retour haptique", qui se distingue en deux catégories de retour sensoriel ; d'une part le *retour d'effort* ou *retour kinesthésique*, relatif aux muscles, articulations et tendons sollicités par des efforts et des déplacements ; d'autre part le *retour tactile* qui concerne les capteurs sous-cutanés et regroupe les informations de surfaces, rugosité, température, etc . En résumé, nos capacités de toucher peuvent être exploitées afin de rendre le monde virtuel palpable.

Les premiers dispositifs haptiques ont vu le jour en 1954 (Laboratoire National Argonne) pour diriger des interventions robotisées minutieuses sur des sites inaccessibles à l'homme tels les espaces nucléaires [GT54]. Mais le spectre des applications s'est aujourd'hui élargi, et les interfaces haptiques sont attendues dans des domaines aussi variés que ;

- la médecine, pour des simulateurs chirurgicaux, la télémédecine ou encore l'assistance au handicap
- l'industrie, pour appréhender par exemple les difficultés d'assemblage de pièces sur une chaîne de montage, ou encore intervenir à distance dans des environnements

hostiles

- le domaine du jeu et des simulateurs pour interagir avec un élément de pilotage (tel un volant)
- l’enseignement, afin d’aboutir par exemple à une image sensorielle de phénomènes nanoscopiques ou astronomiques.

La majorité des interfaces haptiques est destinée à l’usage des mains et des doigts, compte-tenu de notre activité manuelle courante et de l’importante densité de capteurs sensoriels de ces organes [Hay01].

Le retour tactile est une science à part entière qui, aujourd’hui encore, soulève un grand nombre de questions quant à l’interprétation sensorielle du contact. Les techniques adoptées font appel à des dispositifs quasi-statique, thermique, ou bien encore à indentation pour approcher autant que possible l’information sensorielle retournée par un objet réel.

Les interfaces à retour d’effort doivent quant à elles remplir les fonctions suivantes ;

- fournir un effort variable à l’utilisateur, pour simuler une masse, une inertie ou une élasticité.
- aller à l’encontre du mouvement partiel de l’utilisateur, donnant l’image d’un corps déformable.
- ou encore empêcher totalement le déplacement, simulant une liaison avec un objet rigide et inamovible.

Pour réaliser ces fonctions, les interfaces doivent être contrôlées : deux types d’asservissements sont classiquement utilisés [CPCS03] ; le contrôle dit en ”impédance” qui, par une mesure de la position consiste à imposer la force de l’effecteur, ou son dual, le contrôle en ”admittance” qui mesure la force (ou le couple) et impose la position. Chacune de ces commandes présente des avantages respectivement pour la simulation de raideurs faibles (impédance) et de raideurs importantes (admittance), pour des raisons de stabilité [Cas04]. Leur mise en oeuvre demande la mesure (ou la reconstitution) et l’asservissement de la force et/ou de la position, imposées par l’utilisateur.

Notre travail s’intègre exclusivement dans le cadre du *retour d’effort*, et s’oriente donc vers des dispositifs mécaniques capables de fournir des efforts et des déplacements suffisamment importants pour être perceptibles par l’utilisateur.

### 1.2.1 Les technologies actuelles et envisageables

Les interfaces homme-machine se regroupent principalement en deux familles ; les périphériques dits *isométriques* et les périphériques *isotoniques*. Les premiers présentent peu ou pas de déplacement, comme par exemple la Spaceball [chS], si bien que l’interaction avec le monde virtuel se fait selon l’effort exercé par l’utilisateur. Dépourvus de mouvement, ces périphériques ne permettent généralement pas le retour d’effort. Les périphériques *isotoniques* nécessitent quant à eux un mouvement de l’utilisateur pour interagir avec l’environnement virtuel et le déplacement peut être motorisé pour fournir une information kinesthésique. Le HapticMaster [hcH] illustré (fig. 1.2) constitue un exemple de périphérique isotonique à retour d’effort.

Pour ces périphériques, l’interface mécanique manipulée par l’utilisateur doit répondre



à des critères dynamiques en force et en vitesse qui peuvent être obtenus à partir de différentes technologies, au prix de complexités et performances variables, et tout particulièrement lorsqu'il s'agit de dispositifs haptiques multi degrés de liberté.

Les solutions mécaniques les plus répandues parmi les dispositifs haptiques multi-degrés de liberté s'apparentent souvent à celle du *Pantograph* [RH94] pour les interfaces 2D (fig. 1.1), ou bien encore à celle du *HapticMaster* [hcH] pour les structures parallèles 3D (fig. 1.2), motorisées par des moteurs à courant continu ou servo moteurs.

les degrés de liberté multiples sont généralement obtenus par des couplages mécaniques. Face à la difficulté de retranscrire les sensations physiques réelles, tout particulièrement en 3D, il est fréquent d'avoir recours à des dispositifs simplifiés pour finalement ne répondre qu'à une application spécifique, ce qui donne lieu à un nombre important d'architectures mécaniques diverses.



FIG. 1.1 – Le *pantograph*, structure mécanique parallèle à 2 ddl actifs



FIG. 1.2 – Le *HapticMaster*, structure parallèle à 3 ddl actifs

A titre d'exemple, il existe notamment des dispositifs à câbles au bout desquels sont attachés, soit directement les doigts de l'utilisateur, soit l'effecteur principal (fig. 1.3). Les dispositifs "gants" ou exosquelettes sont directement apposés aux articulations de l'utilisateur et peuvent ainsi contraindre chaque mouvement du membre concerné.

Certains périphériques présentent volontairement des degrés de liberté découplés tel le digihaptic [CPCS03], les actions motorisées sont donc indépendantes, contrairement aux architectures mécaniques série et parallèle qui agissent sur un unique effecteur. Dans ce cas, l'action de l'utilisateur ne s'attache plus à la représentation spatiale, mais se détache de l'action réelle effectuée sur le périphérique, ce qui nécessite un temps d'apprentissage. L'interprétation de l'action devient cognitive, si bien que les actions motorisées peuvent être découplées tout en satisfaisant le retour d'informations sensorielles selon chaque degré de liberté.

En bref, l'architecture mécanique et l'application spécifique offrent une variété considérable de solutions techniques.

Les moteurs magnétiques rotatifs (le plus souvent des moteurs à courant continu ou

FIG. 1.3 – le *SPIDAR-G*FIG. 1.4 – Le *PHAMToM-Omni*. Structure mécanique série

plus rarement des moteurs pas à pas) sont largement utilisés dans les dispositifs actuels. Le choix d'une motorisation par moteurs magnétiques 1ddl présente premièrement l'avantage de générer des efforts sans contact, ou encore de fournir un couple sans nécessiter de déplacement. Qui plus est, les asservissements en couple ou en position sont facilement accessibles par les méthodes aujourd'hui répandues de commande électronique sans capteur ou encore l'amélioration des moteurs (type brushless)<sup>2</sup>. La large gamme des moteurs rotatifs à un seul degré de liberté ou servo-moteurs est en mesure de couvrir un grand nombre d'applications.

Cependant, certains inconvénients découlent du couplage de plusieurs actions à un seul degré de liberté actif. Premièrement on peut noter l'encombrement occasionné par les liens mécaniques nécessaires aux différentes actions ; comme par exemple celui occasionné par l'emploi de réducteurs mécaniques. En effet, les interfaces haptiques travaillent généralement à vitesses faibles, voire nulles, alors que les moteurs à courant continu de petites tailles présentent des vitesses nominales de plusieurs milliers de tours/minute pour de faibles couples. Enfin, la complexité de l'architecture est croissante avec le nombre de degrés de liberté, induisant de ce fait de nombreux jeux de fonctionnement entre chaque liaison articulée, qu'il sera difficile de compenser par la commande. Ce dernier inconvénient peut néanmoins être partiellement corrigé par l'usage couplé de câbles ou de courroies comme dans l'architecture série adoptée par le *Phantom* (fig. 1.4) [MS94].

Les solutions hydrauliques ou pneumatiques sont envisageables compte-tenu des efforts importants qu'elles présentent ; on peut citer l'exemple de l'exosquelette Master Arm [hM]. Ces technologies demeurent néanmoins des solutions coûteuses et délicates à mettre en œuvre, réservées aux applications forte puissance et s'excluant de la gamme des dispositifs de bureau.

Les actionneurs piézoélectriques, basés sur la conversion d'une vibration en un mouvement uniforme, constituent une solution attrayante quant au domaine haptique, car ils présentent généralement un effort massique important, des vitesses de rotation faibles

<sup>2</sup>Cette remarque ne tient pas compte des difficultés de stabilité ou de précision liées à l'environnement virtuel

ainsi qu'une force de maintien à l'arrêt [mh]. L'inconvénient majeur de ce type d'actionneur réside dans la nature de sa conversion d'énergie électromécanique directe, entraînant échauffement et usure. La commande d'un tel dispositif présente également des difficultés liées aux importantes non-linéarités de cette conversion [Gir02].

Les alliages à mémoire de forme [GH97], les fluides électro-rhéologiques [MHWF<sup>+</sup>03] ou bien encore magnéto-rhéologiques sont des technologies envisageables qui offrent une bonne possibilité d'intégration et des efforts conséquents, mais aujourd'hui anecdotiques parmi les interfaces haptiques.

### 1.2.2 Critères et besoins du domaine haptique

Les capacités manuelles de l'être humain sont très complexes et variables selon les individus, mais il est possible de donner une échelle de nos facultés à percevoir un stimulus extérieur et ainsi estimer les forces nécessaires à la retranscription d'un environnement virtuel (tab. 1.1).

variation d'angle minimale perceptible	doigt	2, 5°
	poignet	2, 0°
perception de la variation de	raideur d'un objet	22%
	poids	10%
	force de contact	entre 5% et 15%
Force maximale contrôlable <sup>3</sup>		entre 50 et 100N
Force maximale typique des dispositifs		entre 5 et 15N
Résolution d'un contrôle en force		environ 0, 04N

TAB. 1.1 – Données sur la perception manuelle de l'être humain [Bur96] [TSEc94] [SB97]

Une interface à retour d'effort doit répondre à des considérations de type ergonomique (prise en main) mais également de sécurité pour éviter d'accidenter l'utilisateur, et se doit donc d'être limitée aussi bien en vitesse qu'en force, soit par la commande, soit par les capacités intrinsèques des actionneurs.

Le contrôle instinctif de l'être humain (par exemple celui d'une main) peut s'interpréter selon deux boucles d'asservissement ; une première rapide liée aux propriétés mécaniques du membre (quelques dizaine de Hertz), et une seconde liée au système nerveux plus ou moins lente selon la tâche à accomplir. Cette dernière présente un temps de réponse variable selon les individus, mais ne dépasse généralement pas 2Hz pour des signaux aléatoires déstabilisants, 5Hz pour des signaux périodiques ou 10Hz pour des actions réflexes [CPCS03]. Les boucles d'asservissements du périphérique en retour d'effort ne nécessitent donc pas d'être particulièrement rapides, tant et si bien que l'asservissement peut s'effectuer de manière numérique via une carte d'entrée-sortie à une fréquence n'excédant pas

---

<sup>3</sup>Force maximale contrôlable par les muscles des doigts seuls ou avec le bras

1kHz. L'action de l'être humain étant difficilement modélisable, les lois de commande sont le plus souvent établies en la considérant comme une perturbation.

## 1.3 Les actionneurs électromagnétiques multi-degrés de liberté

Dans la mesure où le dispositif haptique doit généralement travailler dans un environnement à plusieurs dimensions, les actionneurs à multi-degrés de liberté peuvent offrir une solution simple et peu encombrante quant à la structure mécanique.

### 1.3.1 Moteurs magnétiques sphériques

Les actionneurs multi ddl sphériques s'appuient sur les principes traditionnels des moteurs électromagnétiques c'est à dire synchrone, à reluctance variable [LK91], ou bien encore à induction [WLE59].

Pour répondre à des besoins de type articulation de bras de robot, motorisation à mouvement omnidirectionnel ou orientation de caméra ou télescope, un moteur sphérique à induction est mis en œuvre par [DFGR02], inspiré du moteur asynchrone classique. Le concept mécanique illustré figure 1.5, s'appuie sur l'action de quatre inducteurs magnétiques, placés en quadrature autour du rotor sphérique, permettant la motorisation selon deux degrés de liberté. Ce rotor est guidé par des paliers sphériques pour maintenir une distance d'entrefer constante avec les inducteurs.

Le couple développé entraîne en déplacement l'élément mobile par un contact direct avec le plan, ou par l'intermédiaire d'un rotor secondaire qui permet de satisfaire à la fois un rapport de réduction et l'augmentation du coefficient de frottement à l'interface rotor-plan.

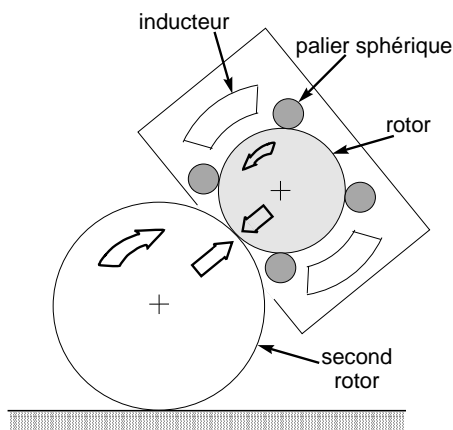


FIG. 1.5 – Actionneur magnétique à rotor sphérique [DFGR02]

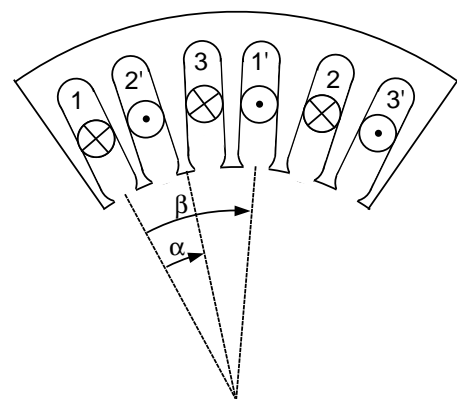


FIG. 1.6 – Bobinage dans les encoches du stator

Chaque inducteur comporte un bobinage triphasé (fig. 1.6), alimenté par un système triphasé équilibré de tension sinusoïdal. Cela crée un champ tournant concentré dans l'entrefer à la surface du rotor massif, siège de courants induits, qui selon la loi de Lenz s'opposent à la cause qui leur a donné naissance. Ils engendrent à leur tour un couple moteur entraînant la rotation de la sphère dans la direction du champ tournant, comme dans un moteur asynchrone classique.

La modélisation approchée par une structure 2D équivalente [DFGR02] a permis d'optimiser les propriétés conductrices du rotor par l'application à sa surface d'un matériau aux propriétés conductrices et thermiques appropriées (cuivre). Une épaisseur optimale de cette couche de surface est à fixer selon que l'on souhaite obtenir un couple maximal le plus élevé possible, ou bien encore des pertes raisonnables.

L'aspect thermique est un des points d'étude indispensable à la modélisation compte tenu des échauffements inévitables de la surface du rotor, qui plus est s'il travaille en statique, afin de définir la conductivité thermique de la couche interne du rotor (pleine ou creuse) ou la dimension des inducteurs. En outre, l'étude a abouti à la réalisation d'un prototype capable de fournir un couple maximal mesuré de  $0.16Nm$  [DFGR02] pour une fréquence de courants rotoriques de  $240Hz$ . Plusieurs variantes de ce moteur asynchrone sphérique ont été réalisées depuis sa première version en 1959 [WLE59], améliorant principalement l'induction au stator et la conductivité à la surface du rotor [VDL] [DFGR02].

La réalisation d'un moteur sphérique pas à pas est entreprise par [CS99]. Les pôles du rotor sont constitués d'aimants permanents, ceux du stator d'électro-aimants (fig. 1.7).

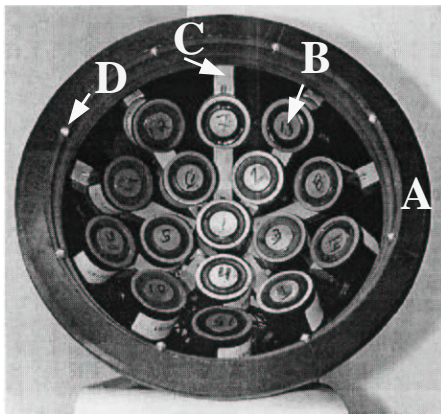


FIG. 1.7 – Vue interne du stator calotte-sphérique

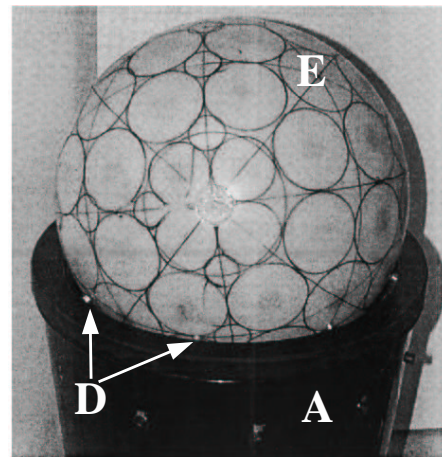


FIG. 1.8 – Ensemble stator rotor assemblés[CS99]

Le stator est constitué d'une calotte sphérique (A) à l'intérieur de laquelle sont disposés les électroaimants (B) sur une armature (C). Le rotor sphérique (E) formé de deux hémisphères demande une attention particulière quant à la disposition des aimants, pour satisfaire d'une part la magnétisation de toute la surface du rotor et respecter l'équipartition des masses pour éviter l'apparition d'un couple interne. Le stator reçoit le rotor en appui sur des roulements (D) (fig. 1.8).

La répartition des aimants à l'intérieur du rotor, le couplage avec les pôles du stator et le mode de commutation (ordonnancement de l'excitation des électroaimants), sont les principaux points d'étude de cet actionneur. Nous noterons brièvement l'existence de cette catégorie d'actionneurs principalement caractérisés par l'aspect discret du positionnement et l'originalité de leur architecture.

### 1.3.2 Moteurs magnétiques plans

Un prototype d'actionneur plan magnétique est entrepris par [FSdS00] [FSdS03]. Le stator est une armature polyphasée dont les enroulements sont bobinés orthogonalement selon les directions  $x$  et  $y$  (fig. 1.9). L'élément mobile est maintenu au dessus de la table magnétique par le biais de liaisons glissières, ne participant pas à la transmission des efforts, mais uniquement au maintien de l'effecteur, ce qui le distingue d'une structure mécanique série. Sous l'élément mobile sont placés deux aimants permanents en anti-parallèle, c'est à dire présentant chacun un pôle différent vers la table magnétique, et alignés par rapport au plan selon la figure (fig. 1.10).

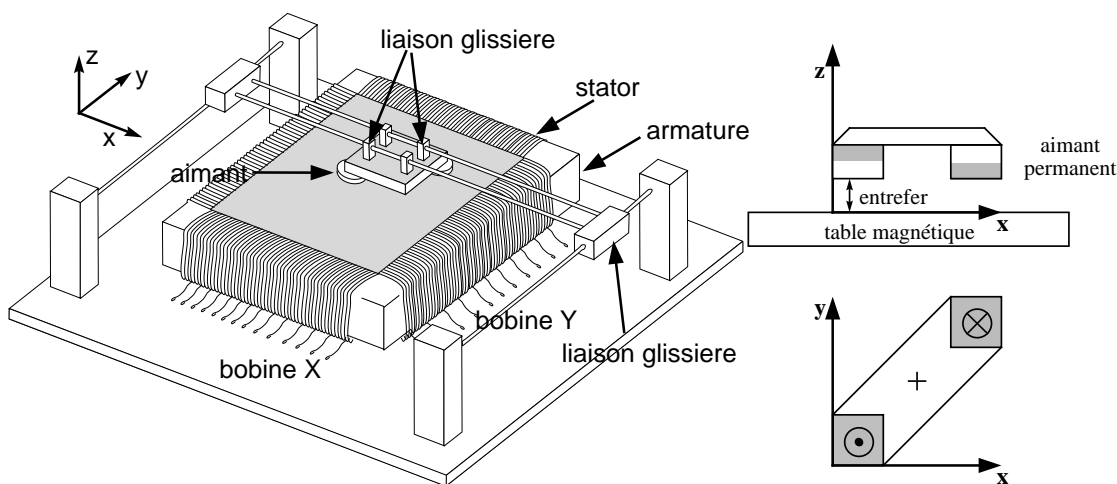


FIG. 1.9 – Concept d'actionneur plan magnétique [FSdS00]

FIG. 1.10 – Partie mobile en vue de dessus et profil

Le déplacement continu de l'effecteur s'obtient par l'alimentation successive des bobinages directement voisins à proximité du point formant le centre de l'élément mobile. L'intensité de la force résultante dépend de l'intensité du courant dans les bobinages et de la densité de flux magnétique imposée par les aimants permanents. La direction dépend des phases alimentées selon  $x$  et  $y$ . La vitesse quant à elle dépend essentiellement de la fréquence d'alimentation entre deux enroulements successifs et de leur espacement. Des essais expérimentaux et leurs comparaisons analytiques montrent des performances en

statique remarquables, propres aux dispositifs électromagnétiques, soit un rapport proportionnel entre l'effort tangent et le courant par phase de  $3,68N/A$ .

Cette relation Effort-Courant quasi-linéaire, l'importance des efforts produits (jusqu'à  $20N$  constaté expérimentalement [FSdS00]) et le déplacement simultané selon  $x$  et  $y$ , en font une solution satisfaisante pour des applications à retour d'effort. Notons néanmoins quelques inconvénients : tout d'abord, l'important rayonnement magnétique induit par toute la longueur des enroulements alimentés, dont finalement une faible partie participe à la production de la force mécanique résultante. Ce rayonnement peut perturber le bon fonctionnement du matériel informatique environnant. De même, la discrétisation du déplacement implique nécessairement une résolution limitée en position. Pour finir, l'encombrement occasionné par la table magnétisante, ou bien encore le besoin de liaisons mécaniques pour le guidage du mobile en font une solution difficilement implantable.

## 1.4 Les actionneurs piézo-électriques multi-degrés de liberté

Cette partie traite brièvement de l'histoire et du principe de la piézoélectricité afin d'introduire les connaissances utiles à la compréhension des structures mécaniques abordées ci-après. Les équations associées seront quant à elles décrites lors de la modélisation de l'actionneur plan (Chapitre 2). La plupart des structures détaillées ci-après sont encore à l'état de concept, mais ouvrent cependant le large spectre des solutions piézoélectriques.

### 1.4.1 Le phénomène de piézoélectricité

Les matériaux dits actifs se caractérisent par leur capacité à fournir une action mécanique sous l'effet d'un couplage, généralement réversible, de type électroélastique (matériau piézoélectrique), magnétoélastique (matériau magnétostrictif) ou bien encore thermoélastique.

La piézoélectricité traduit l'aptitude que présentent certains corps cristallins à se polariser sous l'action d'une contrainte mécanique (effet direct) ou bien à se déformer lorsqu'il leur est appliqué un champ électrique (effet inverse) [Nog96].

La découverte de l'effet piézoélectrique "direct" est attribué à Pierre et Jacques Curie en 1880, sur la base des travaux de l'abbé Just Haüy (1743-1822) en 1817, père de la cristallographie. L'effet inverse fut démontré ensuite par Gabriel Lippmann (1845-1921), qui démontra que sous l'effet d'un champ électrique, un cristal (tel le quartz) vient à se contracter et à se dilater, montrant des propriétés de résonance pour une fréquence donnée. Cet effet inverse est le principe même exploité dans les piézomoteurs. L'effet direct est quant à lui plus généralement exploité dans le cadre de capteurs vibratoires.

Une caractérisation théorique plus complète fut ensuite atteinte grâce aux divers travaux de Wilhelm Gottlieb Hankel, William Thomson, et principalement Woldemar Voigt (1850-1919). Jusqu'alors objet de toutes les attentions en laboratoire, le passage aux applications pratiques fut l'œuvre de Paul Langevin (1872-1946), précurseur du sonar, et

Walter Guyton Cady en 1918 pour la réalisation du premier oscillateur électronique stabilisé par un cristal de quartz.

Le phénomène de la piézoélectricité s'observe dans des cristaux non conducteurs, dont la maille élémentaire ne possède pas de centre de symétrie [Nog96]. Ainsi, si un effort est appliqué à la surface d'un cristal centro-symétrique (fig. 1.11), sa forme s'en trouve modifiée mais le déplacement des barycentres positif et négatif n'induit pas de polarisation. A l'inverse, l'application d'un effort sur un cristal non centro-symétrique entraîne une polarisation électrique  $P$  (fig. 1.12). Ces matériaux sont peu nombreux à l'état naturel (tel le quartz) mais des formes synthétiques sont réalisées à partir du frittage d'oxydes ou de sels de plomb, aboutissant à la réalisation de céramiques PZT, dont les aptitudes en font le matériau de référence dans le domaine des piézomoteurs.

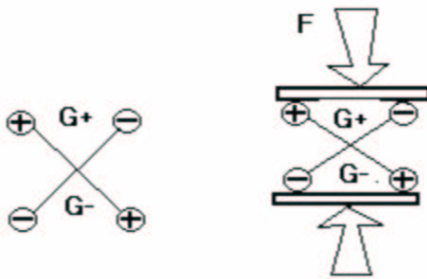


FIG. 1.11 – Cristal centro-symétrique [Gir02]

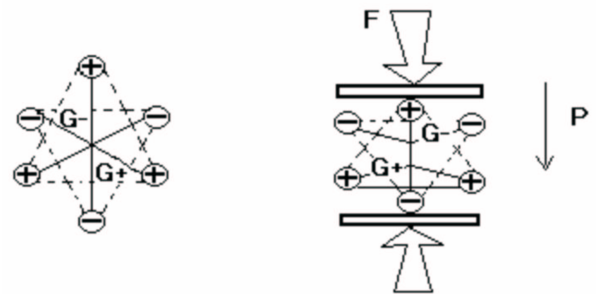


FIG. 1.12 – Cristal non centro-symétrique

En outre, qu'ils soient naturels ou synthétiques, ces matériaux ne présentent pas de polarisation à l'échelle macroscopique, la répartition de charge étant aléatoire. Ainsi pour orienter les charges électriques des cristaux dans une direction privilégiée, une phase de polarisation est indispensable lors de la fabrication, et consiste en l'application d'un champ électrique important (entre 400 et 1000V/mm). La fabrication des matériaux piézoélectriques de type céramique est réalisée à partir de poudres, soumises au frittage (opération à haute température) et sous contraintes axiales pour améliorer la tenue des grains entre eux et réduire la porosité. Des formes telles des barres, des films, des disques, des anneaux, ou autre sont envisageables par ce procédé, offrant ainsi une grande facilité d'intégration.

### Modes de déformation

Les céramiques piézoélectriques se déforment sous l'action d'un champ électrique suivant une ou plusieurs directions préférentielles (effet inverse). Aussi, le couplage électromécanique s'effectue selon trois modes principaux [SK93] :

- *le mode longitudinal* : l'application d'un champ électrique par le biais d'électrodes, placées dans le même axe que la polarisation, entraîne l'allongement du barreau selon  $z$  (fig. 1.13).
- *le mode transversal* : le potentiel appliqué dans le sens inverse de la polarisation entraîne l'allongement selon  $y$  (fig. 1.14).



- le mode de cisaillement : lorsque le potentiel électrique est appliqué perpendiculairement à la polarisation (fig. 1.15).

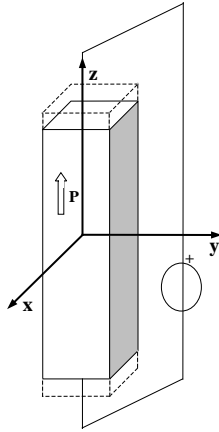


FIG. 1.13 – mode longitudinal

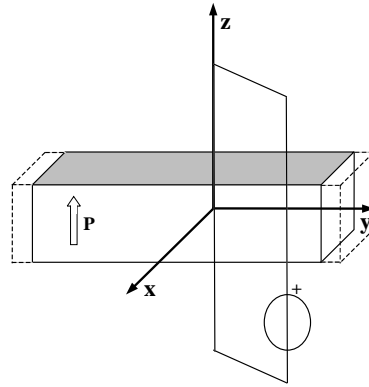


FIG. 1.14 – mode transversal

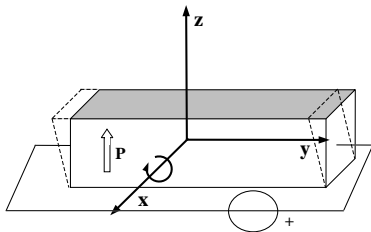


FIG. 1.15 – mode de cisaillement

Notons, que les modes longitudinal et transversal entraînent nécessairement une déformation conjointe du barreau (rapport constant entre l'allongement relatif transversal et l'allongement relatif longitudinal). Cette propriété peut être exploitée ou annihilée par le choix des dimensions de la céramique.

A partir de ces trois modes de déformation et de la forme des céramiques, sont envisageables une multitude de combinaisons de mouvements. Les déformations demeurent néanmoins faibles en régime statique (ex : céramique P189 :  $0.3\mu m$  de variation pour une épaisseur de  $1mm$ ), si bien qu'il est souvent utile de faire appel à une amplification mécanique (généralement un résonateur métallique), dont l'ensemble est excité à proximité d'une fréquence de résonance.

Si les forces engendrées par un élément piézoélectrique sont considérables, les déplacements sont faibles malgré l'application d'un champ électrique pouvant atteindre plusieurs centaines de volts par millimètre. La réalisation de céramiques multicouches (interconnectées et généralement assemblées par collage) permet l'amplification du déplacement (jusqu'à une centaine de microns) en réduisant sensiblement les tensions d'alimentation (environ 100V).

## Structures courantes des piézomoteurs

Le premier brevet concernant les moteurs piézoélectriques fut déposé en 1942 par Williams et Brown [WB48]. Les auteurs proposaient la rotation d'une roue actionnée par les vibrations piézoélectriques d'un barreau. Cependant, sa réalisation n'a pu être entreprise à l'époque en raison des limitations des matériaux piézoélectriques et de l'électronique d'alimentation. C'est à la suite des progrès de l'électronique de puissance et de la science des matériaux que le premier moteur piézoactif fut conçu dans les années 70 par Lavrinenko et Nekrasov, aboutissant à un brevet en 1983 [Vis83].

Les actionneurs piézoélectriques représentent aujourd'hui une diversité considérable de structures et d'applications, tant les possibilités de combinaisons mécaniques sont grandes. Ils se retrouvent dans des secteurs aussi variés que la microrobotique (accessible grâce à la grande précision que permettent les faibles déformations), la médecine, l'automobile ou bien encore l'aéronautique. Néanmoins, les méthodes de conversion mécanique du mouvement vibratoire en mouvement uniforme restent sensiblement les mêmes.

### Moteurs à adhérence

Certains actionneurs communément appelés moteurs à adhérence, s'appuient tout particulièrement sur la capacité de verrouillage mécanique offerte par les matériaux piézoélectriques. Ils sont généralement constitués de plusieurs éléments piézoactifs, qui dans un ordonnancement précis se dilatent et se rétractent, en maintenant constamment un élément en contact avec le bâti (c'est le cas du moteur inchworm développé par [ZZ97]), et la mise en contact a lieu à vitesse nulle. Ce déplacement, obtenu par une succession de phases statiques, permet un maintien en contact permanent et sans glissement, et donc des efforts importants. Par contre, la vitesse globale de l'actionneur est réduite compte-tenu de la présence de phases de débrayage et d'embrayage successives intercalées entre les phases de déplacement.

### Moteurs à friction

Une autre catégorie d'actionneurs se base sur les phénomènes de friction, autrement dit la transmission de l'effort est obtenue par la mise en contact directe de l'élément mobile avec la partie vibrante (vitesse non nulle), contrairement au moteur précédent. La transmission de mouvement repose le plus généralement sur deux types de déplacements vibratoires élémentaires.

- *mouvement cyclique à hystérésis nulle.*

Un point appartenant à la partie vibrante se déplace jusqu'à entrer en contact avec l'élément mobile, et provoquer son déplacement. La trajectoire empruntée par le point de surface est similaire entre ses deux positions extrêmes dans l'espace (fig. 1.16). Pour cette raison, une dissymétrie des conditions de contact sera nécessaire pour que l'effort transmis lors de la phase extensive ne soit pas annulé lors de la phase rétractive, ce qui aurait pour effet un déplacement moyen nul [Nog96]. Cette dissymétrie peut être obtenue par les propriétés géométriques de la surface en mouvement, ou encore par une différence de vitesse entre la phase d'extension et de rétraction, jouant sur l'effet inertiel.

- *mouvement cyclique à hystérésis non nulle.*

Ici la trajectoire empruntée par un point de surface n'est pas identique lors de la ré-

traction et de l'extension, produisant ainsi un débrayage physique des deux éléments (fig. 1.17). La participation de l'effort de friction est nécessairement dissymétrique. L'allure de l'hystérésis peut être variable selon que l'on favorise le contact ou le débrayage, donnant lieu à de nombreuses combinaisons de mouvements. Généralement, les structures mécaniques travaillent en quasi-résonance, principalement pour maximiser l'amplitude des déplacements. Le moteur Shinsei [mh] par exemple fonctionne sur la génération de deux ondes stationnaires en quadrature, si bien que la superposition de deux mouvements sinusoïdaux amène à une trajectoire elliptique.

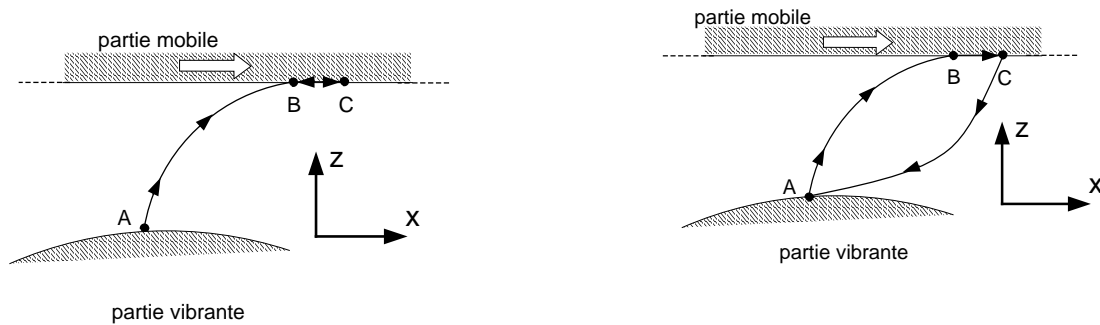


FIG. 1.16 – Mouvement à hysteresis nulle

FIG. 1.17 – Mouvement à hysteresis non nulle

Le mouvement cyclique à hystérésis nulle est habituellement obtenu lors de la mise en vibration d'un résonateur mécanique, produisant une onde dite stationnaire. Une onde stationnaire est caractérisée par une position constante des nœuds de l'onde de surface (fig. 1.18). L'obtention d'un déplacement moyen non nul tient au fait que le contact est intermittent, et dissymétrise ainsi la participation de l'effort de friction entre les phases d'extension et de rétraction. Ce mode de conversion mécanique est exploité aussi bien pour des moteurs linéaires [SWXZ98] que rotatif [VKV04] mais relativement peu répandu.

Le mouvement cyclique elliptique s'obtient toujours soit par la combinaison de modes couplés de différentes céramiques [Bud03], soit par la combinaison de deux ondes stationnaires (le long d'un élément annulaire [mh]), ou encore par la propagation d'une onde acoustique [KTH96][HSDT98]. La figure (fig. 1.19) illustre la trajectoire elliptique décrite par un point de surface soumis à une onde progressive.

Tout mode vibratoire confondu, la mise en mouvement d'une partie mobile ne peut être obtenue qu'à la condition d'un effort de friction suffisant pour l'entraîner. Cet effort de friction est lui-même directement lié par la loi de Coulomb à la force qui maintient en contact les deux éléments. Ainsi, les moteurs à interaction de contact piézoélectriques nécessitent obligatoirement d'être pré-contraints dans la direction  $z$  (axe normal), le plus généralement au moyen d'un élément élastique ou d'une contrainte par serrage.

La détermination du comportement cinématique de l'élément mobile demeure une étude complexe, compte-tenu des nombreux phénomènes tribologiques qui entrent en jeu lors d'une mise en contact dynamique; les déformations locales, l'adhésion et le glissement partiels, l'intermittence de contact, etc. sont des éléments difficiles à modéliser. Néanmoins, par des considérations idéales, en admettant le contact ponctuel parfait entre les deux éléments et une transmission sans glissement, il est possible d'apprécier la vitesse maximale théorique de l'élément mobile, comme étant la vitesse du point matériel de la

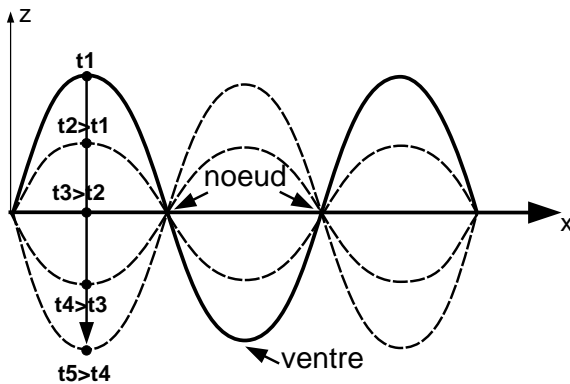


FIG. 1.18 – Onde stationnaire

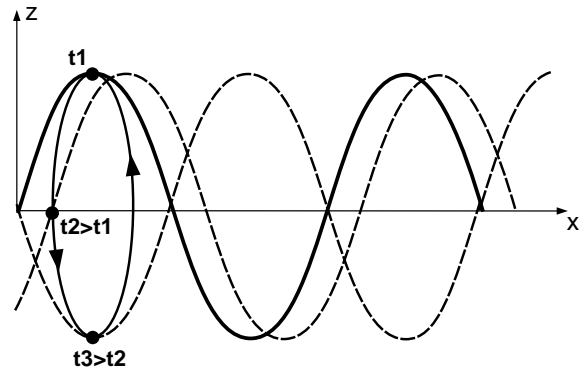


FIG. 1.19 – Onde progressive

surface vibrante durant le contact. Les pertes par friction produites à l'interface de contact participent fortement à la dégradation du rendement global observés pour la plupart des actionneurs piézoélectriques.

Ces principes de transmission mécaniques sont les fondements des actionneurs multi-degrés de liberté détaillés dans le paragraphe suivant. Ces actionneurs ne se distinguent pas par le nombre ou le type de degrés de liberté que confèrent chacun d'entre eux, mais plus particulièrement par leur géométrie et le principe vibratoire à la source du déplacement.

## 1.4.2 Actionneurs à rotor sphérique

Le choix évident pour obtenir plusieurs degrés de liberté motorisés s'oriente naturellement vers une solution sphérique compte-tenu des possibilités offertes par des liaisons de type sphère-plan ou sphère-sphère. De plus, un rotor sphérique offre des conditions de contact identiques quelque soit sa position.

L'actionneur à rotor sphérique élaboré par [TSZ<sup>+</sup>95] s'inspire du moteur sphérique à induction de [WLE59]. Sur le rotor maintenu par un joint sphérique, sont positionnés deux stators annulaires placés à 90° l'un de l'autre (fig. 1.20). Ils sont maintenus en contact par un effort de pré-contrainte via un mécanisme de liaison, conservant ainsi le contact même durant la vibration. Qui plus est, le stator est ajusté à la circonférence du rotor pour offrir un maximum de surface en contact.

La génération d'une onde progressive à la surface d'un seul stator annulaire (fig. 1.21), entraîne par frottement la rotation de la sphère autour de son axe de révolution. L'effort résistant occasionné par le second stator non alimenté est important et freine la sphère. C'est pourquoi une onde stationnaire y est générée, ne produisant pas de déplacement, mais permettant de réduire les pertes liées au frottement. L'excitation simultanée des deux stators par une onde progressive est possible et combine ainsi les deux degrés de liberté.

Une autre version de l'actionneur permet de fournir des couples plus conséquents (à

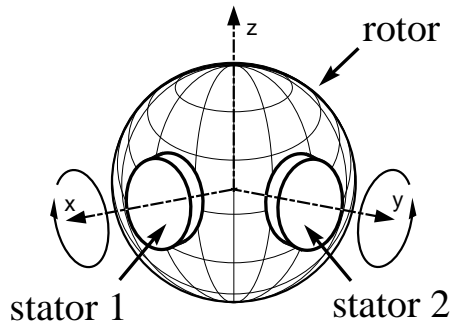


FIG. 1.20 – Actionneur sphérique à deux ddl

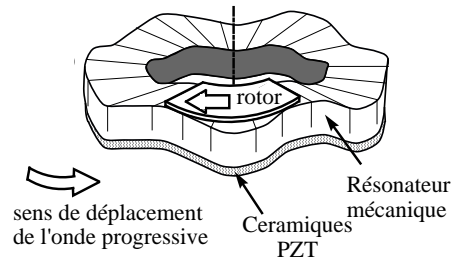


FIG. 1.21 – Onde progressive dans un stator annulaire

vitesse équivalente) lorsque 2 stators élémentaires sont ajoutés symétriquement aux deux autres par rapport au plan sagittal de la sphère [TSZ<sup>+</sup>95]. La vitesse de rotation théorique maximale attendue est de  $200tr/min$  avec une sphère de diamètre  $45mm$ , ce qui laisse entrevoir, si la sphère évolue sur un plan, une vitesse linéaire pouvant atteindre  $0,45m/s$ . Cependant, celle-ci n'est pas réaliste compte-tenu des pertes occasionnées par les liaisons mécaniques du contact stator-rotor et sphère-plan. Les essais expérimentaux ont montré une vitesse de rotation maximale de  $30tr/min$  et un couple maximal de  $0,7mNm$ .

Les moteurs multi ddl sphériques proposés par [AINU98] ou encore [FNU04] offrent certains avantages, par rapport à celui précédemment abordé. Tout d'abord, ils ne présentent plus qu'un seul stator réduisant significativement l'encombrement autour de la sphère, ce qui, dans le cas où l'on souhaite placer un effecteur sur le rotor, autorise des débattements plus importants (fig. 1.22 et 1.23). Qui plus est, le mouvement vibratoire est obtenu par la combinaison de trois modes de déformation faisant appel à un assemblage mécanique des plus simple.

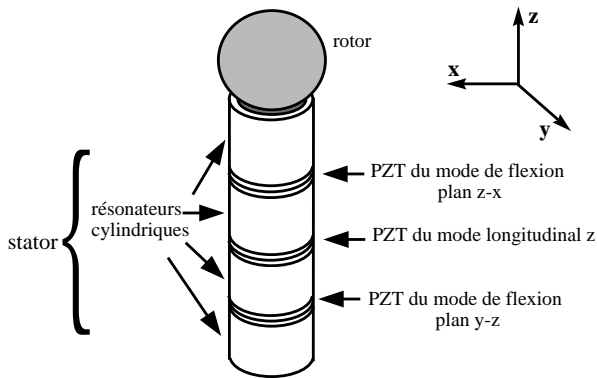


FIG. 1.22 – Composition du stator cylindrique

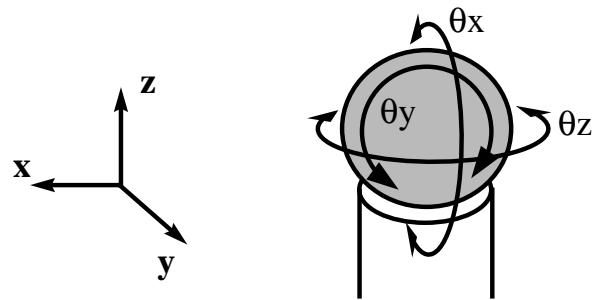


FIG. 1.23 – Rotations obtenues selon 3 modes d'excitation

Ce moteur se compose d'un ensemble de céramiques PZT annulaires, maintenues en contact par des blocs cylindriques en aluminium et un assemblage mécanique vis écrou. Ces céramiques sont distinctement reliées à des électrodes. Le stator est dimensionné

afin d'accorder les modes vibratoires. Les fréquences de résonance de ces modes sont pratiquement égales entre elles.

Deux modes de flexion selon les plans  $zx$  et  $yz$  sont obtenus distinctement par l'excitation de l'élément supérieur ou inférieur du stator. Si l'un de ces modes est couplé au déplacement longitudinal, un mouvement elliptique est généré dans le plan correspondant, et provoque ainsi la rotation de la sphère. Si les 3 modes sont activés simultanément, une onde progressive est créée sur la circonférence du stator, et amène ainsi la rotation selon l'axe  $z$  [AINU98]. Ainsi, ses propriétés amagnétiques, son fort couple massique, son maintien en position à l'arrêt et sa simplicité de fabrication, font de cet actionneur une solution performante dans des systèmes articulés tel un bras robot [THM01].

Comme pour tout actionneur à interaction de contact, son fonctionnement demande une pré-contrainte selon  $z$ , afin de satisfaire la transmission mécanique par frottement entre stator et rotor. Pour une pré-contrainte optimale (8N), les premiers résultats obtenus par [TM01] pour un moteur d'un diamètre rotor de 10mm, donnent des vitesses de rotation maximales de  $250tr/min$  et un couple maximal de  $7mNm$ . Ces performances sont acquises au prix d'un rendement médiocre (env. 2%), dépendant principalement de l'interface de contact, et de la pré-contrainte. L'auteur prévoit cependant une optimisation du coefficient de frottement à l'interface stator-rotor, et donc des résultats en force plus conséquents.

La génération du mouvement elliptique à la périphérie du stator tubulaire peut s'obtenir de diverses manières; soit directement par la déformation du stator comme précédemment, soit encore selon [ABW02] par la déformation du support sur lequel repose ce stator tubulaire (fig. 1.24).

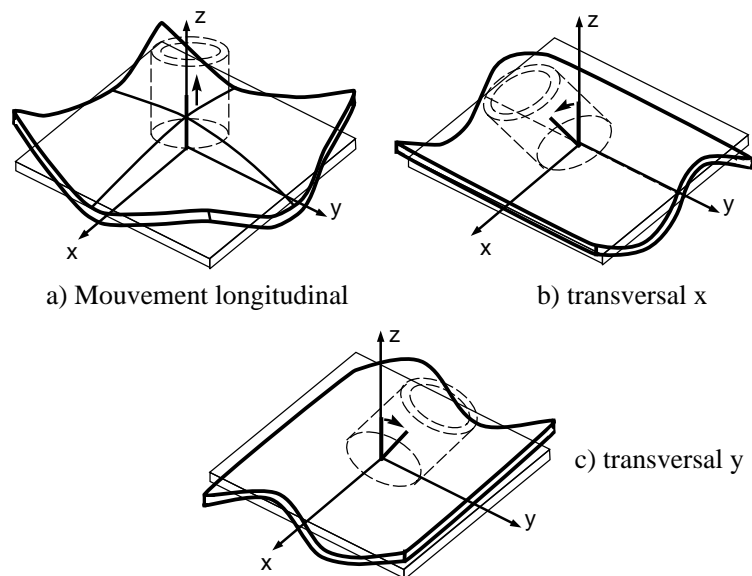


FIG. 1.24 – Modes vibratoires dans une plaque carrée et déplacements du stator [ABW02]

Ce dispositif a été élaboré dans le cadre des micro-actionneurs (3mm de diamètre et

3mm de hauteur pour le stator tubulaire, plaque vibrante carrée de 400mm<sup>2</sup>), mais le principe de fonctionnement peut être étendu aux dimensions centimétriques. La mise en vibration de la plaque support est satisfaite par une unique céramique massive annulaire déposée sur la face inférieure, avec une répartition particulière des électrodes pour permettre le couplage des modes élémentaires de déformation à une fréquence d'excitation autour de 15kHz. Ainsi, le couplage des modes a et b (fig. 1.24) convenablement déphasés, induit un mouvement elliptique dans le plan  $xz$ , les modes a et c un mouvement selon le plan  $yz$ , et enfin la combinaison de b et c une rotation autour de l'axe  $z$ . Trois degrés de liberté en rotation réversibles sont ainsi possibles.

La rotation d'un rotor sphérique peut également être obtenue par l'action combinée de quatre vibrateurs élémentaires selon [OTM04] ou encore [TOM04]. Sur ces éléments vibratoires est générée une onde stationnaire selon une direction précise, qui entraîne un déplacement rectiligne des quatre effecteurs (fig. 1.25). Les mouvements combinés permettent d'obtenir des rotations selon trois axes orthogonaux. Un dimensionnement de ces effecteurs élémentaires est effectué pour obtenir trois fréquences distinctes, chacune correspondante à l'un des degrés de liberté. Cet actionneur multi degrés de liberté est particulièrement simple par sa conception, et a montré des performances en couple maximal pouvant atteindre 15mNm, et une vitesse de 70 tr/min (rotor sphérique de 40mm de diamètre). La disposition de chaque effecteur selon l'onde de flexion fait l'objet d'une attention particulière afin d'obtenir des performances mécaniques identiques selon chaque degré de liberté. Actuellement, l'actionneur réalisé par [OTM04] présente des rotations non-réversibles.

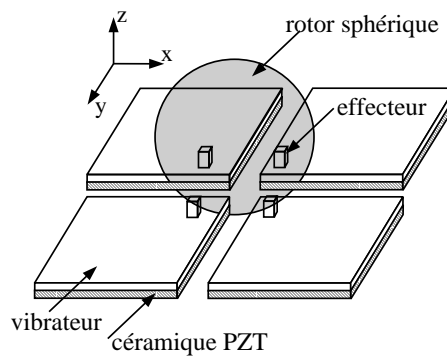


FIG. 1.25 – Actionneur sphérique basé sur quatre effecteurs élémentaires

Les trois structures à rotor sphérique présentées ci-dessus ont l'avantage de présenter un débattement illimité. En outre, si le moteur sphérique est monté sur un mobile, celui-ci pourra se mouvoir selon deux degrés de liberté en translation et une rotation. Cependant, le bâti devra présenter des propriétés surfaciques de planéité et de rugosité précises pour satisfaire au mieux la conversion mécanique.

Une autre solution consiste à produire l'onde vibratoire directement à la surface du bâti sur lequel évolue la sphère motrice [BC00] [HSDT98] [KTH96]. Ces actionneurs mis en œuvre ont une zone de travail de quelques dizaines de millimètres. La génération d'une

onde acoustique par le biais de 2 paires de transducteurs piézoélectriques permet la mise en rotation et en translation de la boule (fig. 1.26).

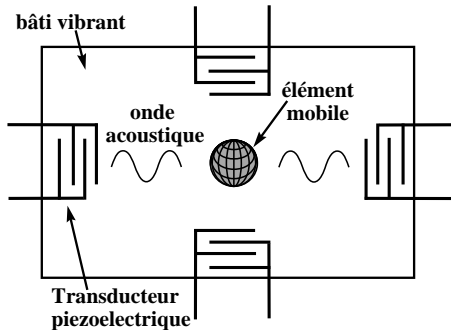


FIG. 1.26 – Onde de surface acoustique

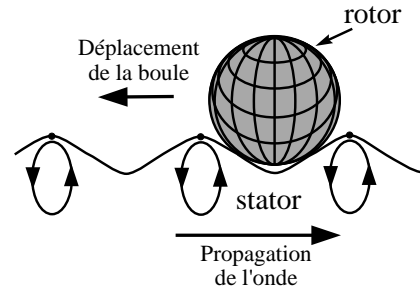


FIG. 1.27 – Déplacement de la sphère

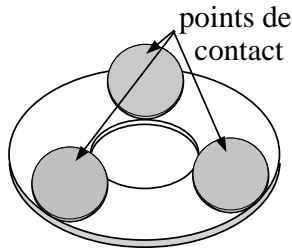


FIG. 1.28 – Partie mobile présentant trois points de contact en vue de dessus

Le sens de déplacement est contrôlé par l'activation individuelle des transducteurs. La sphère est déplacée par l'onde acoustique via la force de friction, satisfaite par une pré-contrainte mécanique ou magnétique suffisante appliquée sur l'élément mobile. La fréquence, la tension appliquée et la phase de l'onde progressive sont les grandeurs permettant le contrôle de distance, de direction et de vitesse de la sphère. Ce concept simple à mettre en oeuvre présente d'après [BC00] des performances respectables telles que :

- un couplage aisé des degrés de liberté
- une grande précision en position grâce à la fréquence d'excitation (env.  $10MHz$ )
- une vitesse de déplacement linéaire importante ( $20cm/s$ )
- temps de réponse en vitesse faible ( $10ms$ )

Ses performances en position surpassent de loin celles obtenues par des dispositifs à onde progressive classiques (USM) dont la fréquence d'excitation ne dépasse pas  $60kHz$ . La difficulté principale réside néanmoins dans l'application de l'effort de pré-contrainte qui doit être constant quelque soit la position de l'élément mobile, et relativement faible pour ne pas atténuer de manière critique l'amplitude de l'onde acoustique. Cette pression de contact reportée entre la sphère et le stator ainsi que le coefficient de frottement déterminent les performances en vitesse et en force du dispositif.

Il est possible d'autoriser la rotation de la sphère sur elle-même durant la translation. Ou alors, l'élément mobile peut également ne présenter que des translations si celui-ci présente plusieurs points d'appui sur le bâti grâce à des extrémités sphériques [HSDT98] (fig. 1.28). La miniaturisation de cet actionneur s'avère particulièrement aisée et intéres-



sante pour des systèmes de type micro-convoi, car il est capable d'atteindre une vitesse maximale de 0,15m/s, mais surtout un pas de déplacement minimal de quelques nanomètres [SK04] (sphère de 1mm de diamètre, longueur d'onde de 192 $\mu$ m ou 400 $\mu$ m selon les ondes de Rayleigh ou de Lamb). Une version à un seul degré de liberté en translation est facilement accessible, en remplaçant la sphère par un cylindre et en ne conservant qu'une paire de transducteurs.

### 1.4.3 Actionneurs à stator sphérique

Pour certaines applications nécessitant deux degrés de liberté en rotation, il est possible de jouer sur la forme du bâti. On retrouve ainsi une première structure théorique, toujours basée sur la propagation d'une onde acoustique, mais cette fois-ci véhiculée à la surface d'un bâti sphérique (fig. 1.29) [BC00]. Dans le cas présent, les transducteurs sont encore positionnés à 90° sur le stator et permettent à nouveau de générer deux déplacements en rotation orthogonaux, autour de la liaison pivot. Qui plus est, cette structure sphérique a pour avantage l'application d'une pré-contrainte constante facilitée par le bras et la liaison pivot, et sa possibilité de réglage par l'allongement du bras (système vis-écrou).

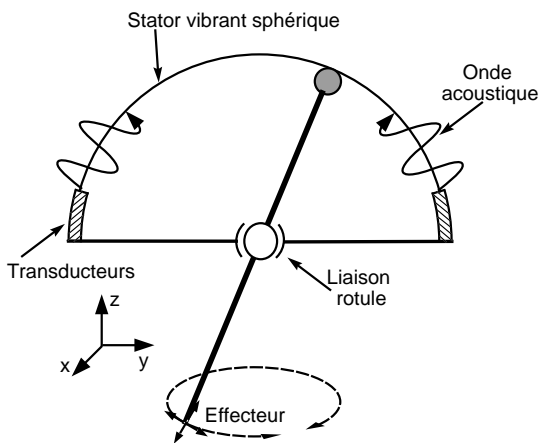


FIG. 1.29 – Actionneur à stator vibrant, 2ddl en rotation

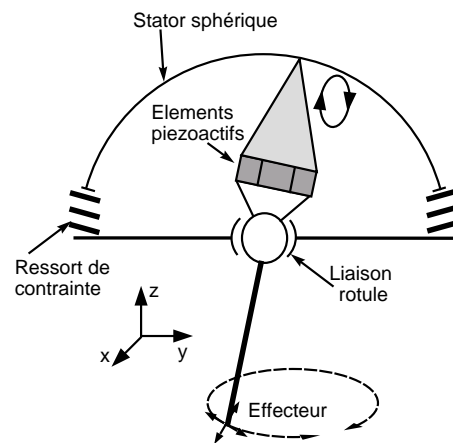


FIG. 1.30 – Actionneur à rotor vibrant, 2ddl en rotation

Une seconde approche du stator sphérique est entreprise par [HDLT97]. Cette fois-ci le mouvement vibratoire n'est pas généré à la surface du stator, mais à l'extrémité du bras effecteur (fig. 1.30). L'élément piézoélectrique est monté entre le cône servant de résonateur mécanique et la liaison rotule. Cette partie active se compose de quatre empilements de céramiques discoïdes, placés à 90° les uns des autres. Chaque céramique est électrodée selon quatre secteurs, qui par une excitation alternée de deux secteurs en opposition, produit deux modes vibratoires (longitudinal et de flexion) donnant à l'extrémité du cône un mouvement elliptique dans le plan ( $xz$  ou  $yz$ ). Le cône a été

préalablement dimensionné pour permettre un fonctionnement à l'une des fréquences de résonance du système et augmenter ainsi significativement l'amplitude des déplacements. La pré-contrainte normale appliquée au résonateur est obtenue par le biais de ressorts à la périphérie du stator.

Cette deuxième solution semble a priori moins performante que la précédente tant sur le plan des vitesses que du couple. Tout d'abord, la faible fréquence d'excitation laisse entrevoir une vitesse théorique maximale de l'extrémité du résonateur n'excédant pas 0,02m/s, alors que la version à stator vibrant [BC00] (qui présente théoriquement les mêmes performances que sa version plane) donne une vitesse effective équivalente. Qui plus est, la nécessité d'une succession de périodes de contact et de séparation pour induire un déplacement, conduit à une diminution de l'effort tangent moyen transmis au mobile, par rapport à la version acoustique qui conserve un contact permanent.

#### 1.4.4 Les actionneurs piézoélectriques plans

Les actionneurs plans piézoélectriques ont principalement été étudiés pour répondre à des applications de positionnement micrométrique.

##### Actionneur plan à onde progressive

Une première famille d'actionneurs plans s'appuie sur la génération d'une onde progressive. Ainsi, dans la structure proposée par [HK96], c'est la superposition de trois ondes stationnaires qui génère l'onde progressive. Une plaque uniforme piézoélectrique sur laquelle sont disposées 36 électrodes, est collée sur un résonateur mécanique (40mm) (fig. 1.31).

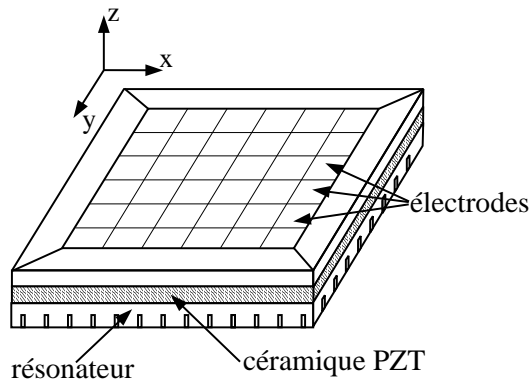


FIG. 1.31 – Structure mécanique du translateur [HK96]

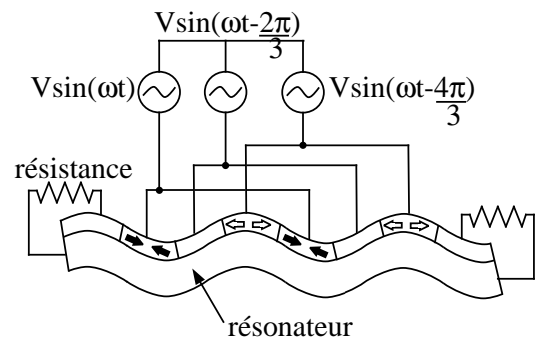


FIG. 1.32 – Principe d'excitation triphasée

Ces électrodes sont reliées à trois sources de tension sinusoïdale déphasées de  $2\pi/3$  les unes par rapport aux autres, à une fréquence de  $41kHz$ ; les tensions permettent la génération de l'onde progressive comme l'illustre la figure (fig. 1.32). Les électrodes disposées aux frontières de la structure ne sont pas alimentées, mais reliées à des résistances pour absorber l'énergie mécanique. La modification de l'interconnexion des électrodes permet également d'obtenir une onde progressive selon  $x$  ou  $y$  ou encore selon les deux

diagonales. Ainsi, en plaçant ce dispositif sur une surface plane, en contact direct avec le résonateur mécanique, l'actionneur entre en mouvement linéaire. Cette structure mécanique à la mise en œuvre aisée requiert néanmoins une alimentation complexe du fait des trois phases d'alimentation, et de la nécessité de commuter les différentes sources.

A titre anecdotique, nous pouvons noter l'existence de dispositifs approchant la propagation d'onde de manière discrète [DRABB02] : ce dispositif consiste en une matrice carrée d'éléments piézoactifs ( $12 \times 12$ ). Chaque céramique actionne un picot et par une excitation successive de chacune, on crée une onde de propagation qui s'apparente à une onde progressive discrète. L'actionneur réalisé fonctionne autour d'une fréquence d'excitation n'excédant pas quelques centaines de Hertz, si bien que son utilisation s'oriente particulièrement vers des applications au positionnement submicronique à de faibles vitesses ( $< 1\text{mm/s}$ ) pour un effort maximal inférieur à  $0,5\text{N}$ .

### Actionneur plan à onde stationnaire

Une seconde famille comprend des dispositifs basés sur l'excitation d'une onde stationnaire. Cette solution n'est guère répandue compte-tenu de la faible composante de déplacement dans la direction tangente au plan résonnant. Néanmoins, par l'observation d'une asymétrie de contact, il est possible d'engendrer un déplacement de l'élément mobile malgré la trajectoire sans hystérésis des points de contact. Deux solutions sont envisageables : la première s'appuie sur l'intermittence de contact occasionnée par le mouvement hors-plan du résonateur [Fer96]. Nous y reviendrons ultérieurement. La seconde, qui ne demande pas un débrayage de l'élément mobile, s'appuie sur l'asymétrie de contact occasionnée par des discontinuités géométriques à la surface du résonateur (de type encoches). Cette deuxième solution est celle choisie par [MN95] (fig. 1.33). La partie vibrante se compose d'un transducteur piézoélectrique, constitué d'une matrice de céramiques élémentaires polarisées dans la direction hors-plan et d'un résonateur mécanique sur lequel sont réparties des encoches. Les céramiques sont interconnectées de manière à pouvoir générer une onde stationnaire orientée selon  $x$  ou  $y$  par le choix des tensions d'alimentation et de la disposition des électrodes. Aussi, les fréquences propres des deux modes vibratoires orthogonaux satisfont un parfait découplage ( $\omega_x \neq \omega_y$ ) pour éviter des déplacements combinés selon les deux directions.

La partie mobile quant à elle se compose d'un élément rigide sous lequel est déposée une épaisseur de matériau polymère, mis en contact avec le résonateur, satisfaisant une légère pénétration des encoches et un coefficient de frottement important, condition indispensable à l'apparition d'un effort tangent. L'élément mobile est donc entraîné par frottement à partir des déplacements tangentiels observés par les particules de la surface active du résonateur en contact (fig. 1.34). L'indexage des encoches par rapport à la longueur de l'onde de flexion, l'amplitude vibratoire, l'accommodation entre les deux surfaces, et l'effort de pré-contrainte normal, sont autant de paramètres susceptibles d'affecter les performances tangentielles du translateur. Les premières vérifications par modèle ont néanmoins mis en évidence, pour des configurations optimisées, les capacités de ce dispositif aussi bien en terme de position (incrément inférieur à  $2\mu\text{m}$ ) qu'en vitesse de déplacement ( $90\text{mm/s}$  pour une fréquence propre de  $40\text{kHz}$ ) [MN95].

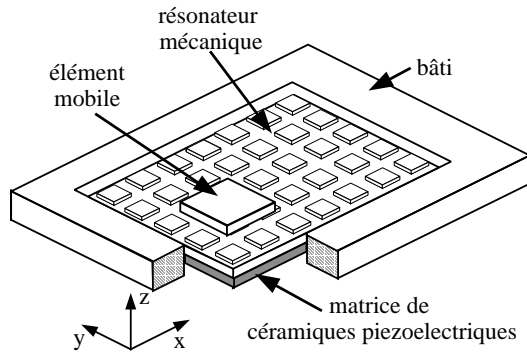


FIG. 1.33 – Structure mécanique du translateur [MN95]

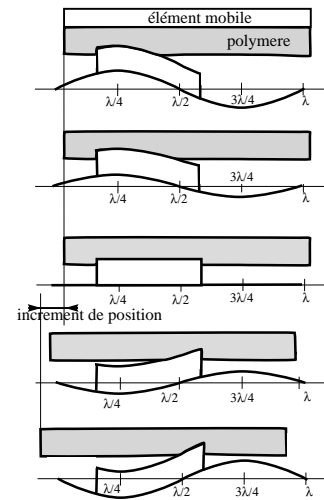


FIG. 1.34 – Principe de fonctionnement

### 1.4.5 Le translateur plan piézo-électrique : actionneur à interactions de contact

#### Description Générale

L'actionneur principalement étudié dans ce mémoire fonctionne sur la génération d'une onde stationnaire, voire d'une combinaison d'ondes stationnaires. Celui-ci se présente sous la forme d'une plaque bimorphe composée d'un résonateur mécanique, ici un alliage de cuivre-beryllium, sur lequel est disposée une matrice de céramiques PZT (fig.1.35). Ces céramiques sont munies d'électrodes par lesquelles sont imposées les tensions d'excitation. Les céramiques présentent une électrode commune via le résonateur cuivré, lui-même relié à la masse.

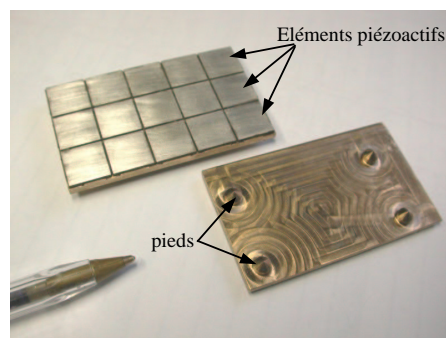


FIG. 1.35 – Vues de dessus et dessous de l'actionneur (photo D. Harribey, LEEI Toulouse)

L'orientation alternée de la polarisation des céramiques permet de créer des zones distinctes de contraction et de dilatation, produisant la déformation en surface du résonateur (fig. 1.36 a, b, c). Une alimentation sinusoïdale produit l'onde de flexion dynamique

illustrée (1.36 d). Force est de constater que le nombre de céramiques et le sens de polarisation favorisent un mode vibratoire particulier dans le sens où le passage entre une zone de contraction et de dilatation ou inversement, forme un nœud de l'onde de flexion. Néanmoins, nous verrons par la suite que des modes de vibrations supérieurs peuvent être obtenus en usant des propriétés résonantes de la structure bimorphe.

La forme d'onde est également tributaire des conditions aux limites de la structure dont les extrémités peuvent être en appui, encastées ou libres. Dans notre cas, les conditions aux limites sont libres car la plaque repose sur des pieds. Dans une poutre (ou plaque) aux dimensions infiniment grande ou bien supérieures à la section des céramiques, la forme d'onde s'approche, d'après Rayleigh, d'une forme sinusoïdale [GR93].

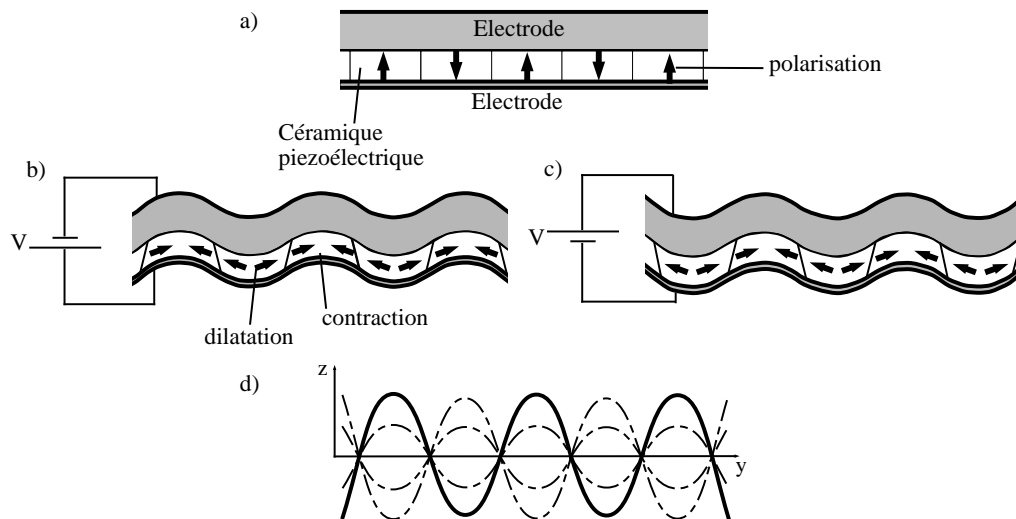


FIG. 1.36 – Génération d'une onde stationnaire

La génération de l'onde selon une unique direction dans une poutre ou une plaque ne nécessite qu'une seule source de tension sinusoïdale, excitant chaque céramique. Par contre, si l'on souhaite générer une onde orientée distinctement selon la longueur ou la largeur, un ordonnancement particulier de la polarisation et une alimentation biphasée (fig.1.37) sont nécessaires.

Par cet agencement des céramiques, l'application de deux tensions identiques  $V_1 = V_2 = V\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t)$  entraîne une onde de flexion selon  $x$ , et celle de deux tensions opposées  $V_1 = -V_2$  entraîne le mode selon  $y$ .

### Réalisation de l'actionneur

La réalisation de l'actionneur est relativement simple, dès lors que les dimensions de la plaque sont préalablement déterminées (méthode par éléments finis). Le matériau utilisé pour le résonateur mécanique est un alliage composé de cuivre et de beryllium, tout particulièrement choisi pour ses propriétés élastiques ainsi que son excellente conductivité. Les céramiques PZT (P1 89), préalablement polarisées, sont maintenues sur le résonateur par collage.

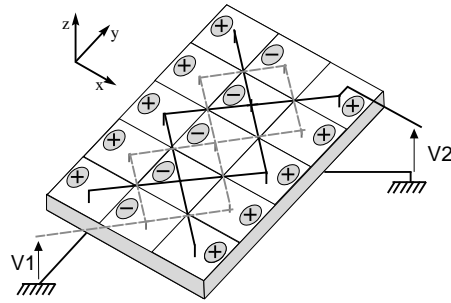


FIG. 1.37 – Alimentation et câblage des électrodes

Cet assemblage est satisfait par une colle epoxy, réalisé en étuve sous l'application d'une pression mécanique équivalente à  $2kg/cm^2$ , de façon à satisfaire la conduction électrique entre les deux éléments (diminution de l'épaisseur de colle) et la rigidité mécanique de la liaison<sup>3</sup>. Cette pression est exercée au moyen d'un outil d'assemblage (fig. 1.38), et ajustée grâce à l'écrasement de rondelles élastiques. Les céramiques sont disposées sur un film adhésif pour maintenir leur position durant le collage, puis finalement connectées entre elles sur deux fils d'alimentation (fig. 1.39).

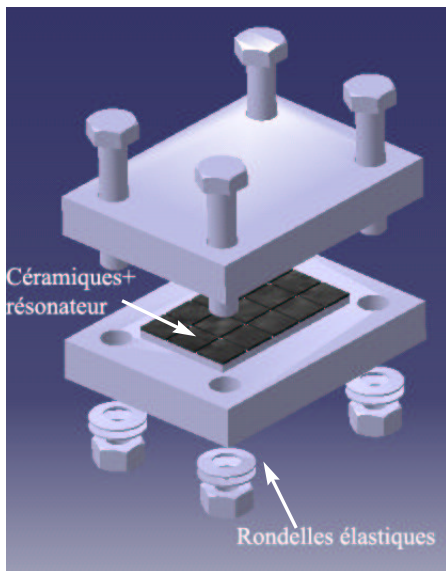


FIG. 1.38 – Dispositif d'assemblage

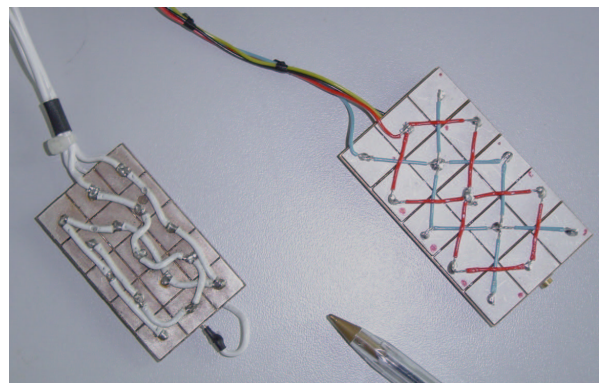


FIG. 1.39 – Connection électrique des actionneurs

### Principe de fonctionnement

Le fonctionnement de l'actionneur réside dans une double conversion d'énergie. La première dite "conversion électromécanique" transforme l'énergie électrique en mouvement

<sup>3</sup>Des colles epoxides conductrices spécialement dédiées aux applications piézoélectriques sont également disponibles dans le commerce

vibratoire comme décrit plus avant. La seconde est une conversion purement mécanique puisqu'à partir du mouvement vibratoire est généré un mouvement uniforme de l'actionneur sur le plan. Rappelons que le mouvement vibratoire est périodique et de fait, le déplacement moyen d'un point de surface est nul. Pour obtenir un mouvement uniforme de l'actionneur, le contact doit présenter une asymétrie ; considérons un pied placé sous l'actionneur, positionné en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  de manière à obtenir un déplacement de son extrémité selon l'axe normal et tangent (fig. 1.40). Nous détaillerons dans le paragraphe suivant l'importance de l'implantation du pied sur les performances mécaniques.

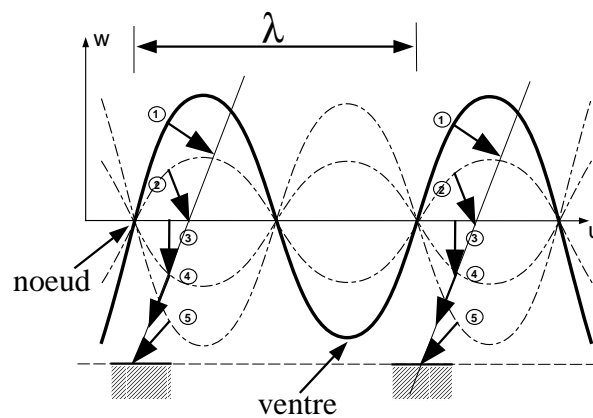


FIG. 1.40 – Asymétrie de contact nécessaire au mouvement uniforme

Deux phénomènes principaux permettent ici la progression de l'actionneur sur le plan. Lors de la phase aller du pied (de 1 vers 5), celui-ci vient en compression sur le sol tout en se déplaçant tangentiellement. L'effort fourni par le pied sur le sol pendant cette demi-période est supérieur à l'effort de freinage produit durant la rétraction du pied (de 5 vers 1). Ceci engendre ainsi l'asymétrie de l'effort et provoque le déplacement de l'actionneur vers la droite. Ce phénomène est accentué par l'apparition de phases de décollement : compte-tenu de la fréquence vibratoire de la plaque (plusieurs dizaines de kilohertz), et de son inertie, la distance qui sépare le sol du plan moyen de la plaque est quasi-constante. Si bien que sur une période de vibration, apparaissent des phases pendant lesquelles les pieds ne sont plus en contact avec le sol (fig. 1.41).

Il s'agit évidemment d'une interprétation simplifiée des phénomènes de contact, puisque ne sont représentés ni le recul de l'actionneur lors de la rétraction du pied, ni les élasticités. Qui plus est, les phénomènes de contact sont fortement dépendant de l'amplitude d'onde, mais également de l'effort de pré-contrainte appliqué selon l'axe normal. Les phénomènes de contact seront plus largement détaillés dans le chapitre 3 "Modèle du comportement mécanique".

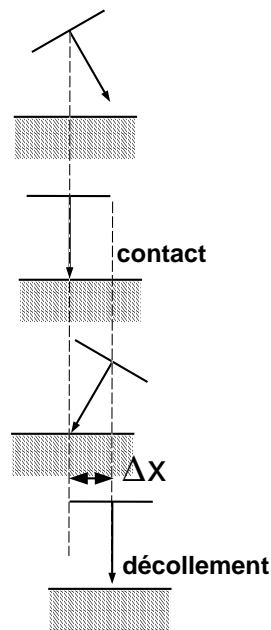


FIG. 1.41 – Incrément de déplacement durant le contact

### Implantation des pieds

Voyons brièvement les possibilités de placements mécaniques des pieds les uns par rapport aux autres. Selon l'application pour laquelle est destiné le translateur, certaines implantations sont préférables, de façon à privilégier par exemple, la vitesse de déplacement, la précision en positionnement, ou encore la force de traction. Les figures 1.42..1.45 illustrent quelques configurations de transmissions mécaniques, les possibilités étant nombreuses grâce à la combinaison des modes vibratoires<sup>4</sup> et de l'implantation des pieds.

a) Les pieds disposés à  $\lambda/8$  et  $7\lambda/8$  ont un comportement identique et simultané (fig. 1.41). L'actionneur avance par une succession de contacts et de décollements. Les performances en vitesse sont ici élevées, puisque les pieds décollent et donc limitent l'effort de freinage lors de la phase de rétractation [Fer02]. Cependant, la présence de phases de décollement a pour effet de réduire les possibilités en traction.

b) L'implantation des pieds aux ventres de l'onde (à  $\lambda/4$  et  $3\lambda/4$  fig. 1.41) n'offre dans ce cas aucun déplacement tangentiel, et donc aucune force de traction. Le débattement vertical des pieds étant maximal pour cette implantation, les phases de contact peuvent prendre une part importante sur la période de vibration, ce qui permet de contrôler le coefficient de frottement moyen entre l'actionneur et le plan support. Cette possibilité s'apparente à un freinage actif, et peut présenter des perspectives intéressantes dans le cadre des interfaces haptiques.

Les deux derniers cas sont caractérisés par un contact permanent alterné sur deux pieds :

c) Par la combinaison de deux modes orthogonaux en longueur et en largeur et l'im-

<sup>4</sup>les modes vibratoires sont décrits par le nombre de demi-onde de flexion selon l'orientation  $x$  et  $y$  de la manière suivante :  $(n_x, n_y)$ .



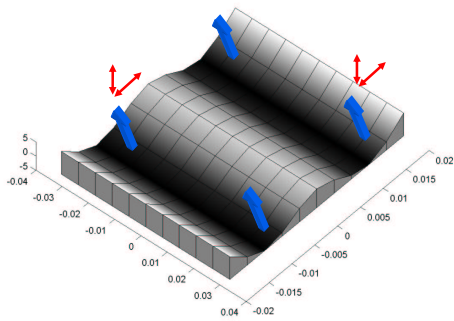


FIG. 1.42 – a. Incrément de position par sauts successifs

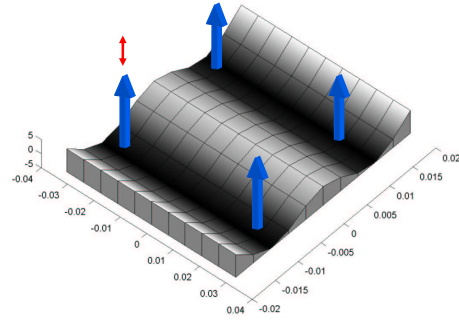


FIG. 1.43 – b. Implantation sans déplacement tangent

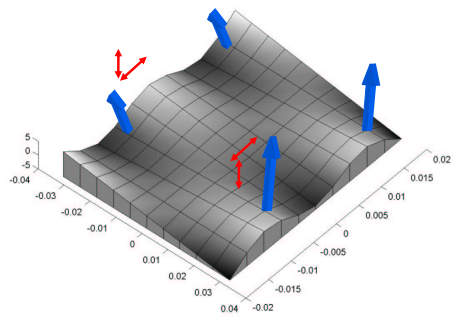


FIG. 1.44 – c. Increment de position par pas alternés droite-gauche

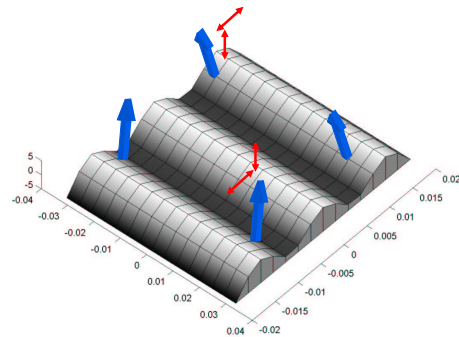


FIG. 1.45 – d. Increment de position par pas alternés avant-arrière

plantation des pieds, l'actionneur avance par une succession de pas droite-gauche. Cette combinaison offre un contact permanent alterné sur deux pieds et une bonne précision en position.

d) A partir d'un mode vibratoire unidirectionnel et une implantation des pieds à  $\lambda/8$  et  $-\lambda/8$ , l'actionneur avance par une succession de pas alternés avant-arrière. Cela offre un contact permanent avec le sol, une progression idéale de deux pas par période vibratoire, ainsi qu'une bonne précision en position. Cette dernière méthode est exploitée dans un dispositif linéaire sensiblement différent développé par [SWXZ98].

Une implantation des pieds au nœud de l'onde n'apporte aucun intérêt, bien que le débattement tangentiel du pied soit maximal pour cette configuration. En effet, l'effort normal de réaction sur le sol reste constant sur tout la période vibratoire, si bien qu'il n'apparaît pas d'asymétrie entre les phases aller et retour du pied, induisant donc un déplacement moyen nul.

L'actionneur étudié dans ce mémoire s'appuie sur la configuration a), déjà introduite figure (fig. 1.40), satisfaisant la condition optimale de positionnement au huitième de l'onde, et ce pour les deux modes orthogonaux découplés. Ce choix se fait aux dépens des modes de déplacement dans les directions inverses, qui verront leur performances

réduites. L'implantation physique est illustrée (fig. 1.46) qui montre bien l'asymétrie par rapport aux dimensions géométriques de la plaque, ce qui peut également rendre délicate l'équirépartition de l'effort de pré-contrainte sur chacun des pieds.

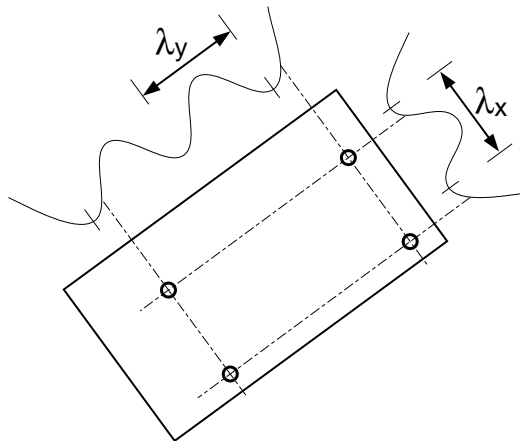


FIG. 1.46 – Implantation des pieds choisie pour l'étude

La figure (fig. 1.47) résume les trajectoires rectilignes de l'extrémité d'un pied pour différentes configurations d'implantation par rapport à l'onde, et ce, pour une onde de flexion unidirectionnelle (6,0). Les essais expérimentaux [LJF00][Fer02] ont démontré que pour un compromis entre déplacement vertical et déplacement tangent, correspondant à un placement des pieds à  $\lambda/8$ , ont été obtenues les performances en vitesse optimales. Qui plus est, pour satisfaire les meilleures performances en traction, il est nécessaire d'annuler au mieux l'effort de freinage durant la rétraction du pied, si bien que la condition la plus favorable serait la disparition du contact durant ce laps de temps. Cette condition sera approchée par la maîtrise du temps de séparation entre les deux éléments.

Un choix judicieux de l'implantation des pieds est donc indispensable pour obtenir des performances mécaniques optimales. Ce choix est d'autant plus décisif dès lors que l'on opte pour un fonctionnement à plusieurs degrés de libertés, nécessitant par exemple des déplacements de l'actionneur dans deux directions et quatre sens. Effectivement, pour obtenir deux déplacements de sens opposés sur le plan, il est possible d'envisager deux modes vibratoires différents (ex : mode (4,0) et mode(8,0)) pour que l'embase du pied se présente sur un flanc différent de l'onde. Ainsi, le placement au huitième de l'onde pour un mode  $(n_{X+}, 0)$  n'offre pas les mêmes performances pour un mode supérieur  $(n_{X-}, 0)$  comme le montre la figure (fig. 1.48). L'utilisation de ces deux modes distincts donnera un déplacement réversible, mais avec des performances dégradées dans le cas du mode (8,0), puisque le décollement est faible et l'asymétrie de contact diminuée. Une solution pour pallier cette dégradation des performances en mode réversible est cependant possible selon [HCTC98], par le décalage géométrique des nœuds de l'onde. Ainsi, une alimentation alternée deux à deux des céramiques permet un décalage d'une demi-longueur de céramique pour générer soit un mode (5,0) soit un mode (4,0) (fig. 1.49). Ainsi, le pied se situe toujours à égale distance du ventre de l'onde mais sur le flanc opposé, ce qui donne pour une amplitude d'onde identique, une trajectoire exactement inverse de l'extrémité

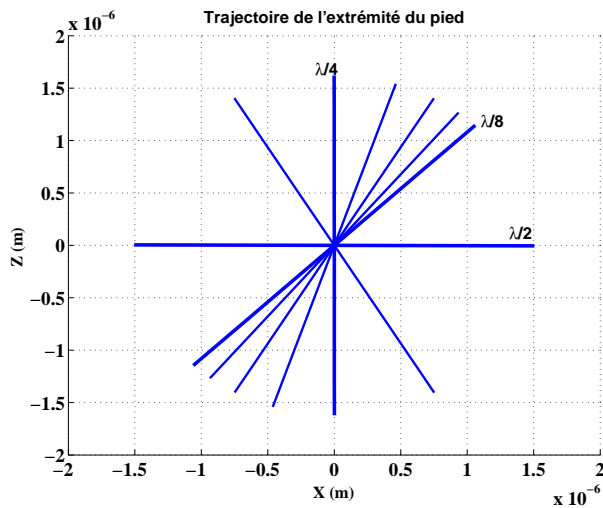


FIG. 1.47 – Trajectoire de l'extrémité du pied pour différentes implantation ( $W = 1,5\mu m$ )

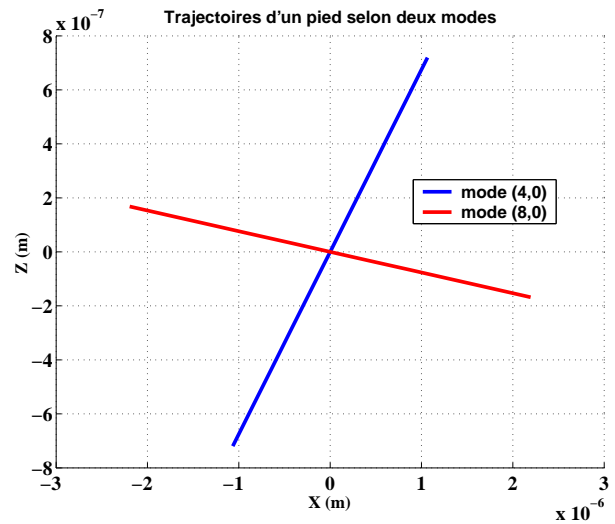


FIG. 1.48 – Trajectoires du pied en position définitive pour deux modes distincts

du pied pour les deux modes.

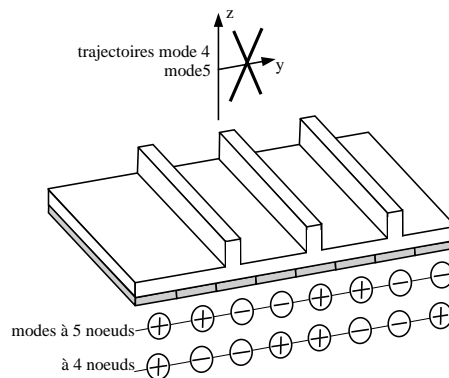


FIG. 1.49 – Translateur unidirectionnel à onde stationnaire réversible

Nous pouvons admettre que pour assurer les meilleurs appuis de l'actionneur sur le sol, et donc la meilleure répartition de la charge, il serait judicieux de ne placer que trois pieds (appui isostatique). Cependant, ce choix risque de produire une rotation de l'actionneur lors des modes de déplacement orthogonaux.

Les études expérimentales et théoriques menées par [Fer02] ont souligné des performances mécaniques intéressantes ;

- une vitesse linéaire pouvant atteindre  $20cm/s$
- aptitude au convoyage de plusieurs kilogrammes
- une résolution en position minimale de  $0,2\mu m$
- une alimentation biphasée à faible niveau de tension (inférieur à  $30V$  efficace) et fréquences comprises entre  $40kHz$  et  $90kHz$  selon le mode.

Notons en revanche des performances en traction actuellement peu satisfaisantes (inférieurs à 4N), compte-tenu du faible coefficient de frottement présent à l'interface mécanique. Ce coefficient est d'autant plus faible que le substrat sur lequel évolue le mobile doit présenter un durété surfacique importante et une rugosité n'excédant pas l'amplitude du déplacement normal des pieds. Ces inconvénients peuvent être néanmoins minimisés par l'optimisation de l'interface mécanique, et par la relation qui unit l'effort de précontrainte normal à l'effort maximal de traction ( $F_t = \mu F_n$ ). L'intermittence de contact est une propriété qu'il est possible de mettre à profit, pour par exemple maîtriser le coefficient de frottement moyen à l'interface de contact, laissant entrevoir un contrôle en frein actif. Les performances de l'actionneur seront plus largement détaillées dans le chapitre de modélisation.

### Les modes de déplacements

Actuellement, deux modes de déplacement distincts ont été étudiés et validés expérimentalement. Le premier expérimenté au LMARC de Besançon [Fer02] opte pour un découplage entre les modes de flexion orthogonaux ; ainsi l'actionneur se déplace théoriquement selon deux degrés de liberté en translation d'où sa qualification de "translateur plan". Chaque mode est donc unidirectionnel. Les déplacements sur le plan s'obtiennent par "commutation des modes vibratoires" (fig. 1.50). La tolérance mécanique lors de la conception, notamment celle des pieds, devra être particulièrement étroite, car le moindre défaut introduit une mauvaise répartition des efforts sur chaque pied, qui peut entraîner une légère rotation. L'alimentation biphasée devra être en mesure de supporter la commutation entre les différents modes.

La deuxième approche dite à "combinaison de modes" développée au LEEI de Toulouse [Gal00] combine deux flexions orthogonales pour obtenir une rotation de l'actionneur sur le plan (fig.1.51). Lorsque l'actionneur est excité exactement à la fréquence propre où se produisent ces deux modes de flexion (4,1), la disposition des pieds entraîne le même déplacement qu'un mode (4,0), soit une translation. Par contre, le contrôle en fréquence autour du point résonnant induit une légère asymétrie entre la participation de chaque pied, et provoque ainsi le pivotement de l'actionneur. Cette seconde solution offre l'avantage de n'avoir recours qu'à une seule source de tension pour obtenir une translation et une rotation. Qui plus est, un défaut de construction mineur, induisant une asymétrie entre les pieds et donc une légère rotation, pourra être corrigée dans la mesure du possible par la commande en fréquence. Cependant, un premier inconvénient à cette solution est le temps et l'angle nécessaires à l'actionneur pour effectuer un demi-tour, inappropriés à l'application haptique. Néanmoins, un mode vibratoire parfaitement découplé de tout autre mode orthogonal, pourra être dédié au fonctionnement réversible. Un second inconvénient plus problématique est également prévisible compte-tenu de la variation des propriétés résonnantes, notamment avec la température. En effet, l'étude devra se prémunir de l'éventuel décalage fréquentiel entre les deux modes couplés, qui risque de générer des trajectoires variables et incertaines.

Ainsi les tableaux (Tab. 1.2 et 1.3) résument les modes vibratoires fonctionnels de deux

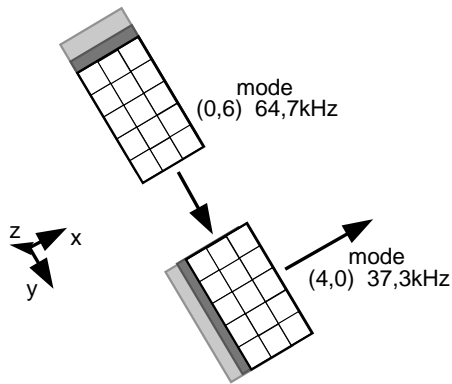


FIG. 1.50 – Commutation de modes

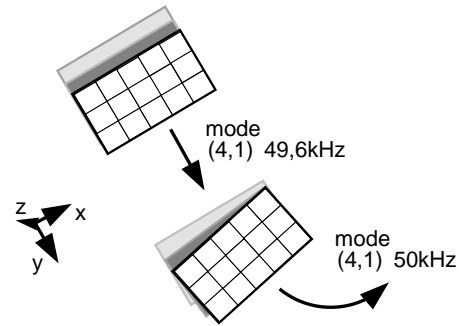


FIG. 1.51 – Combinaison de modes

actionneurs conçus , l'un pour fonctionner en combinaison de mode [Gal00], et l'autre en commutation de mode [Fer96]. Les fréquences d'excitation sont tout particulièrement choisies supérieures à la bande audible.

Modes obtenus	(4, 1)	(6, 0)	(0, 6)	(0, 8)
Déplacements	$X^+$ et $\theta_z$	$X^-$	$Y^+$	$Y^-$
Fréquences d'excitation	autour de $49,6kHz$	$98,3kHz$	$69,3kHz$	$90kHz$

TAB. 1.2 – Caractéristiques des modes dominants pour l'actionneur type LEEI [Gal00]

Modes obtenus	(4, 0)	(6, 0)	(0, 6)	(0, 8)
Déplacements	$X^+$	$X^-$	$Y^+$	$Y^-$
Fréquences d'excitation	$44,56kHz$	$110kHz$	$38,79kHz$	$72,134kHz$

TAB. 1.3 – Caractéristiques des modes dominants pour l'actionneur type LMARC [Fer96]

Pour ces deux actionneurs, les pieds ont été placés au huitième de l'onde des premiers modes exploités soit respectivement selon  $x$  et  $y$  les modes (4, 0) (ou (4, 1)) et (0, 6). Les déplacements sont donc favorisés pour ces deux modes, aux dépends des autres.

## Quelques applications autour du translateur plan

### Suivi de trajectoire

Suite à la validation du principe de fonctionnement du translateur piézoélectrique plan, des lois de commande ont été élaborées pour améliorer sensiblement les trajectoires suivies par le mobile [ARC<sup>+</sup>98]. En effet, les premières vérifications expérimentales ont montré qu'il était quasiment impossible de faire suivre une trajectoire parfaitement rectiligne dans le plan avec une commande en boucle ouverte, en raison principalement de la mauvaise

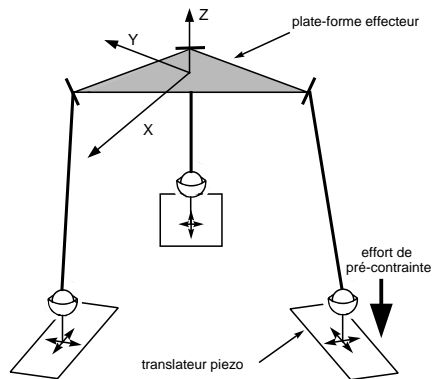


FIG. 1.52 – Structure du micromanipulateur suivant 6 degrés de liberté

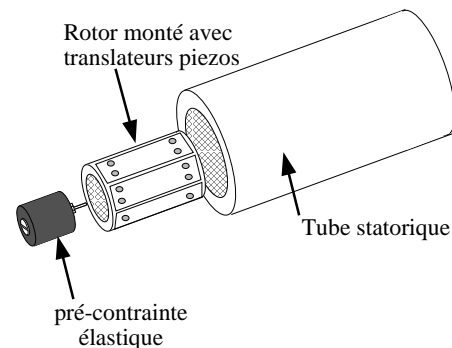


FIG. 1.53 – Moteur verrou tubulaire

répartition de l'effort sur l'ensemble des pieds, et des imperfections du plan sur lequel évolue l'actionneur. La solution introduite par [ARC<sup>+</sup>98] consiste à modifier en temps réel la raideur de l'un des pieds par le biais d'une pince encerclant ce dernier et contrôlée par un fil d'alliage à mémoire de forme. La vitesse de l'actionneur est contrôlée par un asservissement de la fréquence des tensions d'alimentation, et les écarts de trajectoire sont compensées par la modification de la raideur du pied.

Cette commande a ensuite été miniaturisée (autour d'un microcontrôleur) selon l'étude de [RAM<sup>+</sup>98] pour obtenir un dispositif mobile parfaitement autonome. Celui-ci est capable de transporter sa source d'alimentation, et d'éviter des obstacles via des capteurs de collision et des algorithmes de décision, laissant à l'actionneur le choix de son mode de déplacement pour le contourner. Une optimisation du suivi de trajectoires et un contrôle de position font ensuite l'objet des travaux de [DRSM01].

### Positionnement

Le translateur plan peut également être utilisé comme élément moteur élémentaire d'une structure plus complexe. La figure (fig. 1.52) montre une structure à 6 degrés de liberté élaborée par [PCM<sup>+</sup>96] qui a pour but de répondre aux besoins submicroniques de l'assemblage de fibres optiques, devant assurer les performances suivantes [Fer96] ;

- Force d'action omnidirectionnelle d'environ 1N
- 6 degrés de mobilité
- Précision inférieure à  $1\mu m$
- Débattement angulaire de  $0.1^\circ$
- Volume de travail d'environ  $1cm^3$ .

Une plateforme delta est actionnée par trois bras eux mêmes reliés, via des liaisons rotules, à trois actionneurs plans. Cette structure offre potentiellement une zone de travail illimitée en XY, un déplacement selon Z d'une longueur optimale équivalente à celle du bras, et des rotations limitées par l'inclinaison maximale de ces derniers. En outre, pour fonctionner convenablement, un effort de pré-contrainte normal doit être appliqué à chaque actionneur plan (la solution magnétique semble la plus appropriée) pour développer suffisamment d'effort de manipulation. Par comparaison aux structures mécaniques

parallèles classiquement rencontrées qui couplent généralement l'action de moteurs à 1 ddl, on constate une simplification significative des liaisons mécaniques.

### **Moteur verrou**

Le moteur verrou tubulaire est une autre suggestion d'application présentée par [Fer02] illustrée (fig. 1.53). Celui-ci se compose d'un stator tubulaire dans lequel peut évoluer un cylindre muni de plusieurs translateurs élémentaires répartis sur sa surface. Ce montage permet théoriquement la motorisation d'une liaison glissière, soit un degré de liberté en translation et un en rotation, tous deux selon l'axe de révolution du cylindre. Une pré-contrainte est également indispensable pour satisfaire la transmission d'effort mécanique ; celle-ci est obtenue par un élément élastique à l'intérieur même de l'élément mobile (compression d'un élastomère). Une brève étude expérimentale a permis de montrer la faisabilité du dispositif ainsi que la capacité de verrouillage et de déplacement du cylindre intérieur. Elle a également souligné la difficulté du réglage de l'effort de pré-contrainte et son influence particulièrement décisive sur les performances du système (trop faible, le cylindre glisse, trop fort le cylindre est verrouillé).

### **Application potentielle au retour d'effort**

A partir de l'actionneur seul, sans liaison mécanique supplémentaire, et une précontrainte imposée par une masse convoyée ou encore une contrainte magnétique, il est possible d'envisager une interface haptique à deux degrés de libertés telle une souris à retour d'effort. Par un contrôle en force selon les quatre directions de déplacement, un effort peut s'opposer, ou accompagner l'action de l'utilisateur et ainsi augmenter sa perception sensorielle de l'environnement virtuel.

Si l'on se réfère aux données sur la perception manuelle de l'être humain (tab. 1.1), les efforts fournis par l'actionneur actuel [Fer02] sont en deçà de ceux développés par les dispositifs courants. Cependant, ces performances peuvent être améliorées par l'optimisation de l'interface mécanique (coefficient de frottement plus élevé), ou encore l'augmentation de la précharge axiale. Qui plus est, si l'interface haptique est manipulée avec les doigts et non avec la main, les forces maximales nécessaires sont bien inférieures.

Ce type d'interface est qualifié d'interface à retour haptique actif. Une bonne connaissance du fonctionnement du translateur piézoélectrique, sa modélisation et la mise en œuvre de son asservissement en force sont les objectifs de ce mémoire pour répondre à ce type d'application.

Un second mode de fonctionnement est également envisageable : par l'implantation des pieds au ventre de l'onde stationnaire illustrée (fig. 1.41), aucun déplacement tangentiel n'est produit. Cependant, l'excitation du dispositif entraîne une variation instantanée de l'effort normal du pied sur le sol, voire une intermittence de contact ; ainsi, par le contrôle de l'amplitude vibratoire, il est possible d'obtenir un coefficient de frottement équivalent réglable et donc d'ajuster l'effort de frottement qui s'oppose à l'action de l'utilisateur : Ce type de contrôle est qualifié de retour haptique dissipatif. Si le dispositif présente une amplitude vibratoire faible ou nulle, le coefficient de frottement est maximum et oppose un effort maximum à l'utilisateur qui manipule le dispositif. Si l'actionneur est excité et présente une importante intermittence de contact, il oppose moins de résistance à l'action

de l'utilisateur. A titre d'exemple, il existe des dispositifs 2D à retour d'effort dissipatif, basé sur l'excitation d'un électro-aimant et d'un substrat conducteur [SMO04], mais dont l'action est de type tout ou rien.

## 1.5 Conclusion

Ce chapitre a débuté par une rapide présentation des interfaces haptiques et a soulevé les difficultés structurelles rencontrées parmi les périphériques courants. Le besoin de plusieurs degrés de liberté fait souvent appel à des architectures mécaniques complexes et introduisant des jeux de fonctionnement inévitables, péniblement compensés par la loi de commande. A ce titre, les actionneurs multi-degrés de liberté se présentent comme des solutions envisageables pour minimiser les inconvénients structurels. Une description non-exhaustive des récentes recherches sur les actionneurs multi-degrés de liberté a été entreprise. Des solutions électromagnétiques ont tout d'abord été évoquées, en particulier pour des actionneurs 2D ou sphériques. Nous avons ensuite mis l'accent sur les possibilités offertes par les matériaux piézoélectriques pour la réalisation d'actionneurs multi degrés de liberté : l'effort de maintien à l'arrêt, la facilité d'intégration et de fabrication, les propriétés amagnétiques, le domaine inaudible des fréquences de travail, le fort couple-massique sont autant d'avantages pouvant satisfaire les besoins du domaine haptique, ainsi que la possibilité de débattements illimités et la combinaison simple des déplacements.

Parmi ces solutions piézoélectriques, aux formes et principes diverses, est introduit un actionneur à la conception simple, le translateur plan. Une matrice de céramiques PZT, collée à la surface d'un résonateur mécanique, lui même équipé de pieds, suffit à la production d'une onde stationnaire et à l'entraînement de l'ensemble en déplacement, le tout sur une surface illimitée. C'est l'apparition d'une dissymétrie du contact qui permet la conversion du mouvement vibratoire en mouvement uniforme.

Les applications potentielles de cet actionneur sont discutées, en particulier l'application à une interface homme-machine de type "souris". Dans ce cadre, deux solutions sont envisagées : l'une en retour d'effort actif, par l'exploitation de l'effort tangentiel développé par un actionneur dont les pieds sont situés au huitième de l'onde. L'autre solution correspond au freinage actif, par l'exploitation du frottement variable pour une implantation des pieds aux ventre de l'onde.

Nous nous attacherons dans la suite de ce mémoire à modéliser et à décrire analytiquement les transformations d'énergies au sein de cet actionneur afin d'une part, de comprendre les différentes interactions, d'en déduire les variables d'état et finalement établir sa commande.





# Chapitre 2

## Modélisation causale électromécanique du translateur

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>38</b>
<b>2.2</b>	<b>Modélisation vibratoire par schéma équivalent</b>	<b>38</b>
2.2.1	Identification du schéma équivalent	40
2.2.2	Discussion du modèle	41
<b>2.3</b>	<b>Modélisation vibratoire par étude analytique</b>	<b>43</b>
2.3.1	Théorie de l'élasticité et déformation des milieux continus	43
2.3.2	Application du principe de Hamilton	52
2.3.3	Développement matriciel du Lagrangien	54
2.3.4	Développement pour un mode unique	57
2.3.5	Formes propres de l'onde	60
2.3.6	Détermination des paramètres du schéma équivalent et fréquences vibratoires	63
<b>2.4</b>	<b>Modélisation Causale</b>	<b>68</b>
2.4.1	Mise en équations	68
2.4.2	Représentation par graphe informationnel causal	70
<b>2.5</b>	<b>Identification expérimentale des paramètres vibratoires</b>	<b>70</b>
2.5.1	Mesure de la hauteur d'onde	71
2.5.2	Non-linéarités du modèle	74
2.5.3	Transformation Cissoïdale	75
2.5.4	Identification des paramètres	76
2.5.5	Validation du modèle	79
<b>2.6</b>	<b>Asservissement de phase</b>	<b>81</b>
2.6.1	Réalisation du déphaseur	82
2.6.2	Mise en œuvre de l'asservissement	82
<b>2.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>84</b>

---

## 2.1 Introduction

Pour la majorité des systèmes déformables conçus à partir de matériaux mécaniquement couplés, ou incluant des éléments actifs, il existe peu de cas où des solutions exactes des équations mécaniques sont directement accessibles. Ainsi, pour les systèmes qui présentent des formes géométriques complexes, des conditions aux limites ou autres contraintes mécaniques, les techniques d'approximation basées sur l'état énergétique et les principes variationnels sont utilisées. Les méthodes variationnelles telles le principe d'Hamilton et les techniques de superposition de modes selon Rayleigh, appuyées par les hypothèses de Kirchhoff sur les plaques minces élastiques, sont les outils de base nécessaires à la résolution analytique des équations mécaniques du domaine vibratoire. Le calcul variationnel, appliqué à la notion de Lagrangien, à l'origine destiné à l'étude du comportement dynamique de structures mécaniques, a montré une extension aisée aux systèmes actifs, en prenant en compte l'énergie sous sa forme élastique et électrique.

A cette première étape de description énergétique succède celle de la conversion purement mécanique, qui caractérise systématiquement les actionneurs piézoélectriques. En effet, le mouvement vibratoire généré au sein de la matière active est généralement converti en un mouvement macroscopique linéaire ou rotatif par un frottement mécanique direct entre "stator" et "rotor". Dans ce mémoire, cet aspect de la conversion énergétique sera modélisé à partir des équations fondamentales de la dynamique, et d'une interprétation globale des interactions de contact. De cette description complète et causale sera établi un modèle du translateur, présentant une forme similaire à celui des moteurs rotatifs à onde progressive, et ce malgré les importantes différences structurelles et fonctionnelles qui les distinguent.

Le présent chapitre est dédié à l'étude vibratoire d'une plaque mince, sur la base de l'étude analytique entreprise par [GA98][GAN99] et appliquée à l'actionneur plan. La validation et l'identification seront faites sur l'actionneur plan aux dimensions similaires à celui conçu par [Fer02]. Nous exposerons cette approche analytique qui permettra de déterminer et vérifier les déformées et les fréquences propres de l'actionneur. Auparavant, nous rappellerons l'approche par schéma équivalent de Mason, classiquement utilisé pour dimensionner l'alimentation du dispositif, et vérifier son comportement résonnant.

## 2.2 Modélisation vibratoire par schéma équivalent

L'approche par schéma équivalent de Mason est brièvement introduite dans ce mémoire. Elle s'appuie sur l'analogie entre les grandeurs électriques et mécaniques. Cela revient généralement à considérer les interactions électriques et mécaniques comme étant linéaires, et permet ainsi d'identifier l'élément piézoélectrique par un ensemble de composants électriques équivalents [SK93][Gho00]. Cette approche empirique rapide et simple, malgré le comportement complexe du phénomène vibratoire, peut permettre par exemple de dimensionner l'alimentation. Elle servira également à notre étude pour comparer les valeurs numériques obtenues par la suite grâce à l'étude analytique, à celles déduites de l'identification expérimentale. L'un des modèles les plus simples pour décrire le comportement électromécanique d'un transducteur piézoélectrique autour d'une fréquence de

résonance, est présenté (fig. 2.1). Dans la pratique, l'observation de l'admittance autour de cette fréquence de résonance suffit à identifier le comportement motionnel vibratoire et électrique.

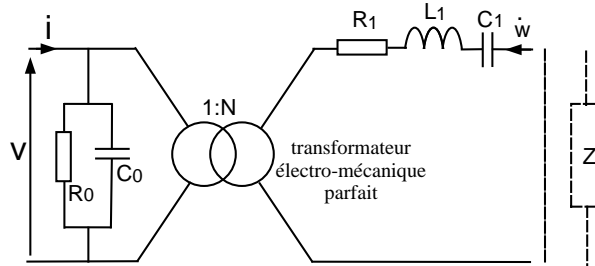


FIG. 2.1 – Schéma électromécanique équivalent autour d'une fréquence de résonance

Des modèles plus élaborés tiennent compte de certaines non-linéarités physiques, par l'addition d'éléments électriques équivalents, dépendants par exemple des grandeurs mécaniques ou encore de la température [AA00].

Les éléments au primaire constituent le modèle du comportement électrique du dispositif piézoactif,  $C_0$  étant la capacité dite bloquée<sup>5</sup> et  $R_0$  représentant les pertes diélectriques. Quant au secondaire, il correspond à la branche motionnelle parcourue par la vitesse vibratoire  $\dot{w}$ , qui présente une résonance induite par le couple  $(L_1, C_1)$ , et des pertes par déformation (frottements internes) symbolisées par  $R_1$ . Lorsque le dispositif est caractérisé sur une large plage fréquentielle, les nombreux modes vibratoires que peut présenter la structure sont modélisés par l'addition de branches motionnelles en parallèle sur le secondaire. Une charge  $Z$  peut être connectée à ce circuit : elle représente le chargement mécanique extérieur à la structure. Cette charge peut permettre par ailleurs d'inclure l'influence d'éléments extérieurs, comme la température, ou encore des frottements internes non-linéaires. Cependant, lorsque le dispositif n'est soumis à aucune contrainte extérieure, le comportement à vide s'obtient en imposant  $Z = 0$  dans le schéma équivalent.

Le modèle revient alors au schéma électrique équivalent ramené au primaire (fig.2.2), en fonction du facteur de conversion électromécanique  $N$ ,

avec la valeur des éléments,

$$R = R_1/N^2 \quad C = C_1.N^2 \quad L = L_1/N^2 \quad (2.1)$$

L' analogie entre les paramètres électriques et mécaniques est donnée (tab. 2.1).

L'intérêt de cette méthode est d'obtenir un schéma électrique équivalent, dont les paramètres peuvent être identifiés à l'aide de la mesure de grandeurs électriques ; c'est l'objet de la partie suivante.

<sup>5</sup>La capacité bloquée correspond au caractère capacitif d'une céramique piézoélectrique encastrée, interdisant toute déformation

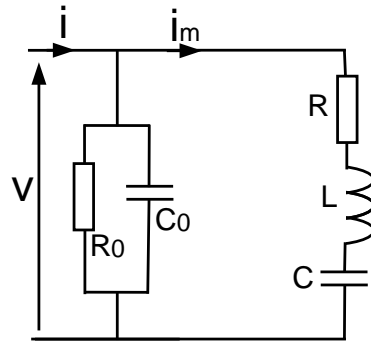


FIG. 2.2 – Schéma électromécanique équivalent ramené au primaire pour une phase

Domaine électrique	unités	Domaine mécanique	unité
Courant $I$	A	Vitesse vibratoire $\dot{w}$	$m.s^{-1}$
Charge électrique $q$	C	Déplacement vibratoire $w$	$m$
Résistance $R$	$\Omega$	Amortissement $Ds$	$N.s.m^{-1}$
Inductance $L$	H	Masse $m$	$kg$
Capacité	F	Elasticité $c$	$N.m^{-1}$

TAB. 2.1 – Analogie entre grandeurs électriques et mécaniques

### 2.2.1 Identification du schéma équivalent

L'essai est réalisé à vide, sans contrainte extérieure appliquée à sa surface : on suppose l'actionneur représenté par le schéma (fig. 2.2). L'admittance globale est définie par la somme de l'admittance électrique et mécanique telle que [Pie95],

$$\begin{aligned}
 Y_{tot} &= Y_0 + Y_m \\
 Y_0 &= \frac{1}{R_0} + jC_0\omega \\
 Y_m &= \frac{R}{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} + j \frac{(\frac{1}{C\omega} - L\omega)}{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Nous nous attachons à identifier les paramètres du schéma équivalent pour le mode vibratoire (0,6) du translateur selon [Fer96]. Les admittances des deux voies d'alimentation sont mesurées à partir d'un analyseur de réseau (SR785) et représentées par le diagramme de Nyquist (fig. 2.3). A partir de ce diagramme, l'identification de l'une des voies d'alimentation est entreprise (fig. 2.4) et amène aux valeurs numériques (tab. 2.2). On peut noter quelques différences sur les deux voies d'alimentation qui peuvent simplement s'expliquer par le fait que chaque voie d'alimentation ne comporte pas un nombre égal d'éléments piézoélectriques. Ces différences portent sur la valeur de la capacité bloquée  $C_0$  et de la résistance  $R_0$  de chaque voie.

Le facteur de qualité est ici supérieur à 100 et nous permet d'apprécier le caractère fortement résonnant de la plaque en vibration. Ainsi, nous pourrions par la suite faire l'approximation selon laquelle la pulsation des tensions d'alimentation pour un mode

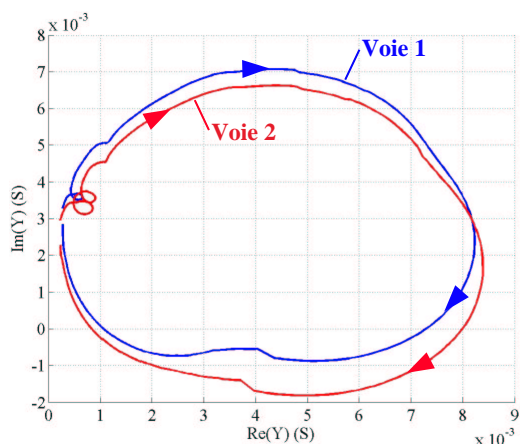


FIG. 2.3 – Diagramme de Nyquist sur les deux voies d'alimentation

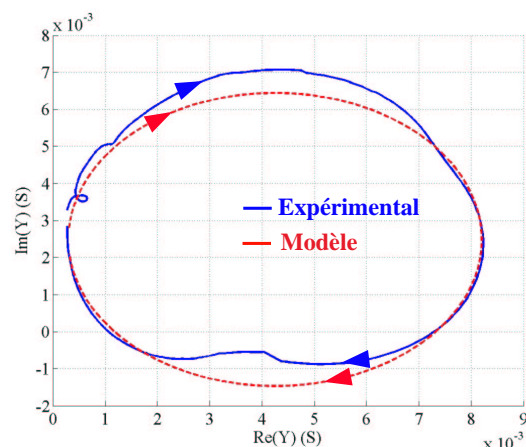


FIG. 2.4 – Identification de l'admittance de la voie 1

paramètres	valeurs numériques du mode (0,6)
$R_0$	$3,6 \text{ k}\Omega$
$C_0$	$10 \text{ nF}$
$R$	$126,2 \Omega$
$C$	$0,28 \text{ nF}$
$L$	$0,0519 \text{ H}$
$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$	$259 \times 10^3 \text{ rd.s}^{-1}$
$Q = \sqrt{L/C}/R$	$106,4$

TAB. 2.2 – Paramètres du schéma équivalent pour un mode

donné, a une valeur constante proche de  $\omega_0$  (la pulsation de résonance) pour dériver les équations du modèle. De plus, l'essai (fig. 2.3) est effectué à basse tension, et à l'instar des moteurs à onde progressive, une variation du coefficient d'amortissement  $R$  est attendue pour une variation de l'amplitude d'onde [Gir02]. Cette variation a été constatée lors des essais d'identification, et sera mise en évidence en fin de chapitre. En complément, la figure (fig. 2.5) compare pour le translateur plan, les diagrammes de Bode de l'admittance expérimentale et obtenue par le schéma électrique équivalent.

## 2.2.2 Discussion du modèle

Le modèle précédent est relatif à un fonctionnement à vide de l'actionneur. Une modélisation complète de l'actionneur par schéma équivalent nécessiterait une étude en charge, selon diverses contraintes normales (charge convoyée) et tangentielles (effort de traction), afin de vérifier leur influence sur les grandeurs du schéma équivalent et ainsi caractériser l'étage de conversion purement mécanique. A cette fin, il est possible, pour satisfaire la suite de l'identification, d'obtenir directement l'admittance électromécanique  $Y_m$ , par l'observation de l'amplitude d'onde via une mesure vibrométrique. L'admittance électro-

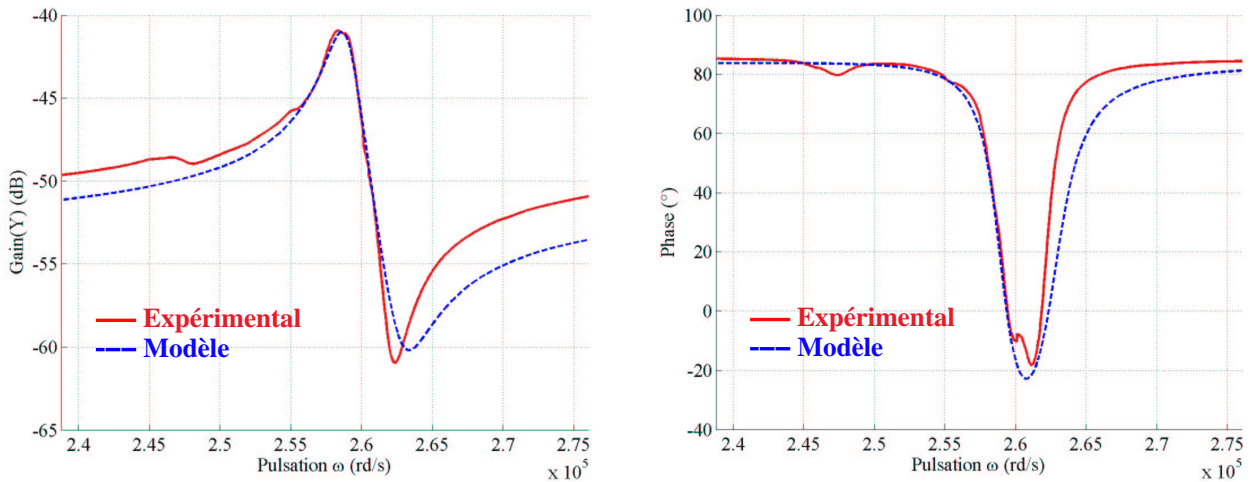


FIG. 2.5 – Diagramme de Gain et Phase. Modèle et résultat expérimental.

mécanique correspond ainsi au rapport entre la vitesse vibratoire  $\dot{w}$  et la tension d'entrée  $V$ . Le schéma équivalent complet en charge selon [Gho00], brièvement présenté (fig.2.6), se traduit par l'addition de deux branches motionnelles, décrivant respectivement l'effet de la pré-contrainte normale et de l'effort tangent. Toutefois, cette approche du domaine

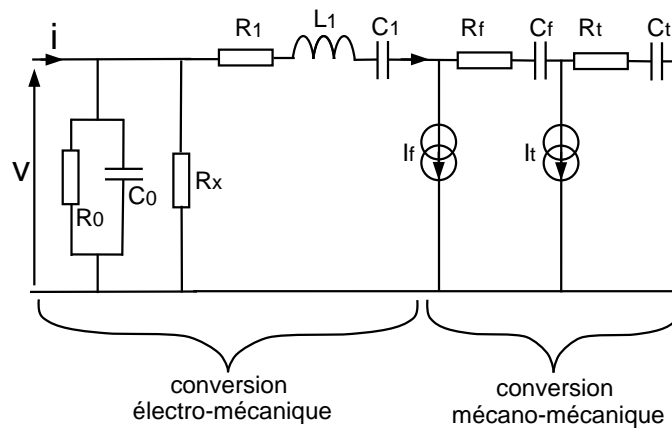


FIG. 2.6 – Schéma électrique équivalent de l'actionneur en charge selon [Gho00] (moteur TWUM)

mécanique est particulièrement délicate à identifier lorsqu'il s'agit de vérifier l'influence distincte des efforts normal et tangentiel. Des considérations non-linéaires sur les paramètres doivent être ajoutées pour améliorer la plage de validité du modèle.

Le principal avantage de cette modélisation par schéma électrique équivalent reste sa simplicité, par rapport à la complexité de l'étude analytique. Elle permet d'interpréter le comportement vibratoire de la plupart des dispositifs piézoactifs. En revanche, cette méthode présente des inconvénients, tout particulièrement l'incapacité à décrire distinctement les phénomènes de contact. Cette part de la conversion électromécanique étant

particulièrement non-linéaire et complexe, qui plus est lorsqu'il s'agit d'une interface au contact intermittent, le moyen d'aboutir à une interprétation plus élaborée du dispositif passe nécessairement par l'étude analytique, accessible par le principe d'Hamilton. De plus, l'étude analytique va permettre de définir les paramètres du domaine vibratoire en fonction des dimensions géométriques et des propriétés mécaniques des matériaux.

Dans le paragraphe suivant, l'étude analytique du translateur sera développée et les résultats obtenus seront comparés à ceux identifiés par schéma équivalent.

## 2.3 Modélisation vibratoire par étude analytique

L'étude porte sur une structure bimorphique, prenant en compte les propriétés passives et actives des matériaux qui la composent. Pour transcrire de manière analytique le comportement vibratoire du bimorphe, nous allons décrire son état énergétique, compte-tenu des aspects mécanique, électrique et du couplage électro-mécanique induit par les propriétés piézoélectriques. L'application du principe de moindre action (Hamiltonien), et l'usage du calcul variationnel offrent l'équation d'équilibre mécanique nécessaire à la résolution du système.

A partir de cette approche énergétique, Rayleigh et Kirchhoff (Rayleigh 1894) ont abordé l'étude analytique des vibrations à travers des membranes, des poutres, des disques ou encore des plaques, aboutissant à la description des équations de mouvement d'un solide élastique [GR93]. De plus, cette méthode s'adapte bien à la description de systèmes déformables électromécaniques.

Mais avant d'aborder la formulation du Lagrangien et le calcul variationnel, il est nécessaire de rappeler les différents vecteurs et tenseurs mécaniques utiles aux calculs.

Pour cela, différentes hypothèses sont élaborées le long de la description des vecteurs, en raison des critères géométriques particuliers liés aux plaques minces et aux propriétés du bimorphe. Ces hypothèses et la démarche analytique sont tirées des travaux de [GA98] sur les structures piézoélectriques et de la théorie des milieux déformables [GR93], que nous appliquerons à l'étude du translateur plan. Cependant, ces propriétés sont communes à de nombreuses formes d'actionneurs piézoélectriques massifs, et reste donc applicables dans de nombreux cas.

### 2.3.1 Théorie de l'élasticité et déformation des milieux continus

La mise en oeuvre des tenseurs mécaniques demande un bref rappel de la théorie de l'élasticité. Lorsqu'un corps solide est sollicité par des forces extérieures, celui-ci voit son volume et sa forme changer et les particules qui le composent sont déplacées d'une distance infiniment petite. Ces faibles déplacements permettent de contenir le comportement élastique selon les hypothèses de *petites déformations* [LL82]. Au sein du matériau prennent naissance des forces internes, dites forces intermoléculaires, supposées avoir une incidence de l'ordre de la distance séparant les molécules. La théorie de l'élasticité amène ainsi les outils mathématiques indispensables à la formulation des vecteurs de déformations et de contraintes subies par le solide.



Revenons à présent à l'étude du translateur plan, composé du résonateur et du matériau piézoactif, qui nécessite sa représentation dans un repère cartésien. Ce repère  $\mathcal{R}(0, x, y, z)$  lié à la plaque est défini de façon à présenter l'axe  $z$  dans la direction hors-plan de la plaque, et de confondre le plan  $0xy$  avec le plan médian de la plaque de cuivre (fig. 2.7).

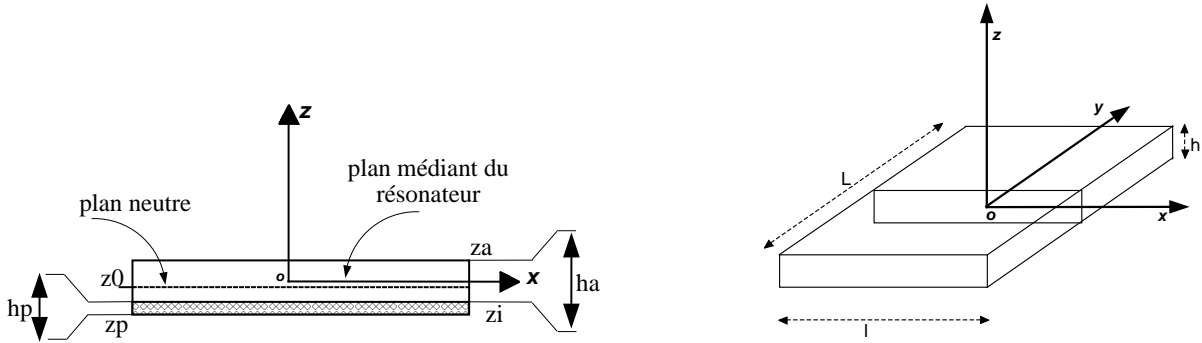


FIG. 2.7 – Dimensions et orientation du bimorphe dans le repère

- Le bimorphe est défini par les grandeurs géométriques et les coordonnées suivantes ;
- $L$  et  $l$  : respectivement la longueur et la largeur de la plaque
  - $h_p$  et  $h_a$  : l'épaisseur de l'élément piézoactif et l'épaisseur du résonateur métallique, formant l'épaisseur totale  $h$
  - $z_a$  : ordonnée du plan supérieur du résonateur
  - $z_p$  : ordonnée du plan inférieur de l'élément piézoactif
  - $z_i$  : ordonnée du plan commun aux deux matériaux
  - $z_0$  : ordonnée du plan neutre de flexion, défini ci-après.

Les hypothèses simplificatrices de Kirchhoff [Cou80][GR93], liées à la forme particulière d'une plaque mince, offrent une simplification avantageuse des tenseurs mécaniques, compte-tenu des propriétés complexes liées aux déformations des milieux continus, et présentent une interprétation macroscopique a priori fiable. Lorsqu'une plaque est mise en flexion selon l'épaisseur, il apparaît un plan neutre pour lequel les contraintes s'annulent selon  $z$  (**hypothèse H0**). Contrairement au cas d'un milieu isotrope, ce plan neutre, noté  $z_0$ , ne se présente pas à équidistance des surfaces, car les propriétés distinctes des deux matériaux assemblés imposent une asymétrie mécanique.

Seconde hypothèse, pour décrire les propriétés élastiques de l'ensemble, la matrice de céramiques sera considérée comme un milieu continu et isotrope (**H1**), ainsi que le résonateur mécanique, assemblés par le biais d'une épaisseur négligeable de colle les rendant parfaitement solidaires.

Une plaque a pour particularité géométrique une de ses dimensions faibles devant les deux autres, soit l'épaisseur. Cette faible dimension attribue sur l'axe  $z$  des déformations en flexion bien supérieures à ses déformations en compression. Ce comportement peut s'apparenter à celui d'une poutre en flexion, et de par la généralisation de cette approche

à une plaque [GR93], admet l'hypothèse d'efforts tranchants négligeables (**H2**). Celle-ci est d'autant plus vraie que la plaque évolue librement sans contrainte et sans appui sur son pourtour (conditions aux limites libre-libre).

La définition d'une poutre en flexion pure admet que les effets des zones en traction et en compression (fig. 2.8), distinctement séparées par le plan neutre, se compensent mutuellement et n'entraînent pas d'allongement globale de la barre (**H3**). De même, le champ de déplacements selon *Bernoulli* considère que les sections orthogonales à ce plan neutre le restent lorsque la plaque est en flexion. Puisqu'il a été défini une flexion pure, et donc que la sommation des contraintes selon l'épaisseur s'annule, celle-ci impose que les déplacements selon le plan  $(0, x, y)$  soient proportionnels à la dérivée du déplacement vertical  $w(x, y, t)$  (fig. 2.9). De même, cela implique que les contraintes transversales doivent s'annuler sur les faces extérieures, ou par extension qu'elles soient nulles en tout  $z$ ,  $\sigma_z = 0$  (**H4**)[GR93].

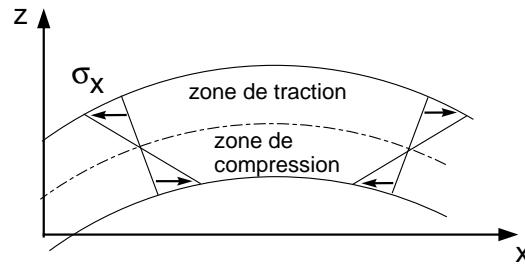


FIG. 2.8 – compensation des efforts en traction et compression

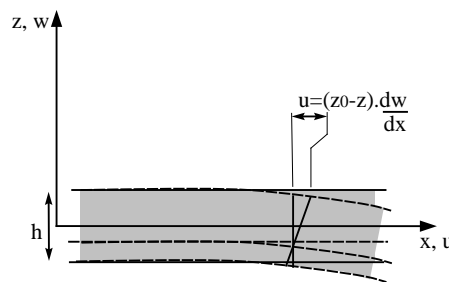


FIG. 2.9 – Déformation de la plaque. Hypothèse cinématique de Bernoulli

### Vecteurs de déplacement et de déformation

Les différentes hypothèses introduites amènent au vecteur de déplacement  $U$ , défini par le déplacement des sections droites selon l'épaisseur [Gal00], perpendiculaires au plan

neutre du bimorphe (fig. 2.9). Nous considérons que la plaque ne présente pas d'extension initiale, et donc que les déformations de la plaque sont uniquement l'œuvre de la flexion autour du plan neutre [GA98]. Un point  $M$  prend la position  $M'$  après déformation tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z_0 - z) \frac{\delta w}{\delta x} \\ (z_0 - z) \frac{\delta w}{\delta y} \\ w(x, y, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z_0 - z)w_{,x} \\ (z_0 - z)w_{,y} \\ w(x, y, t) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

D'autre part, la description du comportement de la plaque en flexion, comparable à celui d'une poutre (**H2**) [Cou79] permet de considérer a priori le déplacement vertical, comme étant le produit de deux modes propres selon les deux dimensions du plan  $x$  et  $y$  et l'amplitude modale de déformation (décomposition modale).

$$w(x, y, t) = w(t) \cdot \Phi_x \cdot \Phi_y \quad (2.4)$$

Le vecteur de déplacement peut d'après la relation (2.4) s'écrire en distinguant le domaine géométrique du domaine temporel et fournir l'expression matricielle :

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \lambda(x, y, z) \eta(t) \quad (2.5)$$

avec  $\lambda$  la matrice  $(3, n)$  dite de déflexion (déviation) et  $\eta$  le vecteur d'amplitude modale de vibration [IM95]. La dimension  $n$  de la matrice de déflexion dépend du nombre de modes propres considérés dans l'étude. La notation adoptée en (2.3) est conservée pour une lecture plus concise des différents vecteurs abordés ci-après.

Ainsi, le vecteur de déplacement amène à la description du vecteur de déformation  $S$ , établi selon la relation de Green [GR93],

$$S = \begin{pmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{xz} \\ S_{yz} \\ S_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{i,j} \cdot u_{l,i}) \quad (2.6)$$

En admettant que de faibles déformations entraînent de petits déplacements, il est possible de considérer négligeable le terme du second ordre de l'équation de Green. De plus, le déplacement des sections droites selon **H3** implique que la déformée en cisaillement

est négligée et donne donc ;

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta y} \right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \right) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Ou encore sous sa forme résolue et réduite aux termes non nuls,

$$S = \begin{pmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z_0 - z)w_{,xx} \\ (z_0 - z)w_{,yy} \\ (z_0 - z)w_{,xy} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Le vecteur de déformation peut à son tour être écrit selon le vecteur d'amplitude modale  $\eta$ , et une matrice opérateur différentiel  $L_m$  tel que,

$$S = L_m \lambda \eta = N_m \eta \quad (2.9)$$

$$L_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^t \quad (2.10)$$

### Tenseur de contrainte du milieu isotrope

Rappelons selon la théorie des petites variations, le tenseur de contraintes d'après Cauchy, illustré par la figure (2.10).

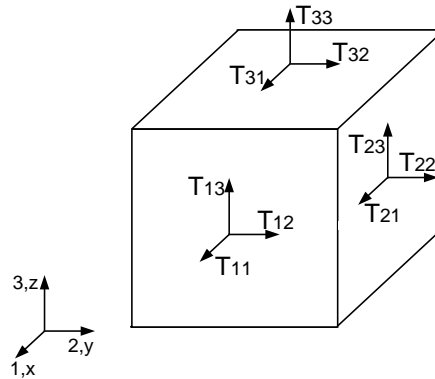


FIG. 2.10 – Contraintes de Cauchy par unité de surface

Le tenseur de contrainte est symétrique pour un solide isotrope.

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & T_6 & T_5 \\ T_6 & T_2 & T_4 \\ T_5 & T_4 & T_3 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

il peut ainsi être réduit au vecteur  $1 \times 6$ . (2.12),

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

La différence physique des deux milieux constituant le bimorphe nécessite d'établir le vecteur de contrainte distinctement pour le résonateur et pour l'élément piézoactif. Une fois de plus, les hypothèses liées à la géométrie **(H2)****(H4)** permettent la simplification du vecteur de contraintes :  $\sigma_z$ ,  $\gamma_{yz}$  et  $\gamma_{zx}$  sont nulles.

Le tenseur de contraintes est établi à partir du vecteur de déformation selon la *loi de Hooke* [Cou79]. Celle-ci, dans le cadre de faibles déformations, simplifie grandement les lois comportementales des milieux en déformation. En effet, les faibles déformations permettent de contenir le comportement mécanique au domaine de plastification. La plastification décrit le fait qu'un matériau revient à son état d'origine après de faibles déformations. Ce matériau est dit à propriétés élastiques linéaires [Cou79]. Aussi les phénomènes moléculaires, l'influence du traitement volumique ou surfacique des matériaux (laminage, brunissage, écrouissage,...) ne sont pas explicitement pris en compte.

Le vecteur de contrainte du milieu isotrope  $T_i$  (résonateur mécanique) est défini par la relation (2.13),

$$T_i = \begin{pmatrix} \sigma_{i_x} \\ \sigma_{i_y} \\ \sigma_{i_z} \\ \gamma_{i_{yz}} \\ \gamma_{i_{zx}} \\ \gamma_{i_{xy}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (S_{xx} + \nu_i S_{yy}) \\ \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\nu_i S_{xx} + S_{yy}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (1 - \nu_i) S_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

ou encore, exprimé à l'aide de la matrice réduite des coefficients élastiques  $c_i$ ,

$$T_i = \frac{E_i}{1 - \nu_i^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu_i & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (z_0 - z)w_{,xx} \\ (z_0 - z)w_{,yy} \\ (z_0 - z)w_{,xy} \end{pmatrix} = c_i N_m \eta \quad (2.14)$$

Avec  $E_i$  le *module d'Young* du milieu isotrope, correspondant au quotient de charge lors d'un essai élastique en traction uniaxiale. De même, le *coefficient de Poisson* du milieu isotrope  $\nu_i$  traduit la variation de dimension dans la direction orthogonale à celle selon laquelle est appliqué un effort.

### Le tenseur de contrainte du milieu piézoélectrique

Ce tenseur est déduit des relations constitutives piézoélectriques [Nog96]. Les grandeurs locales macroscopiques mécaniques et électriques généralement choisies sont :

- $D$ , vecteur de déplacement électrique ( $C.m^{-2}$ )
- $E$ , vecteur de champ électrique ( $V.m^{-1}$ )
- $S$ , vecteur de déformation ( $m$ )
- $T$ , tenseur de contrainte ( $N.m^{-2}$ )

La définition de quatre couples de relations réunis dans le tableau (Tab.2.3) en fonction de variables indépendantes  $(S,D)$ ,  $(T,E)$ ,  $(T,D)$  et  $(S,E)$ , traduit les effets direct et inverse de la conversion énergétique.

Variables	Type	Relations piézoélectriques
$(T,E)$	Intensive	$S = s^E T + d^t E$ $D = dT + \epsilon^T E$
$(S,D)$	Extensive	$T = c^D S - h^t D$ $E = -hS + \beta^S D$
$(T,D)$	Mixte	$S = s^D T + g^t D$ $E = -gT + \beta^T D$
$(S,E)$	Mixte	$T = c^E S - e^t E$ $D = eS + \epsilon^S E$

TAB. 2.3 – Relations constitutives du phénomène piézoélectrique [Nog96]

Les définitions des différents paramètres sont les suivantes :

- $c_{ij}^E$ , élément de la matrice des constantes d'élasticité à champ électrique constant
- $s_{ij}^E$ , souplesse à champ électrique constant
- $s_{ij}^D$ , souplesse à déplacement électrique constant
- $e_{ij}$ , coefficient piézoélectrique
- $d_{ij}$ , constante de charge
- $\epsilon_{ij}^T$ , permittivité à contrainte constante
- $\epsilon_{ij}^S$ , permittivité à déformation constante

Pour établir le tenseur de contrainte du milieu piézoélectrique, il est donc nécessaire de formuler les vecteurs de déplacement et de champ électrique ( $D$  et  $E$ ).

Sans entrer dans le détail du phénomène de la piézoélectricité, il est utile de remarquer que la symétrie de la structure cristalline de ce matériau induit des propriétés symétriques

dans les différents tenseurs. Ainsi, il en résulte la forme des matrices<sup>6</sup> dans le tableau (Tab. 2.4),

Formes symétriques des matrices $s$ , $\epsilon$ , $d$ et $e$					
$s = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{44} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{pmatrix}$	$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ & \epsilon_{11} & 0 \\ & & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$				
$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$e^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$				

TAB. 2.4 – Forme des matrices de constantes piézoélectriques [Nog96]

### Champ électrique et Déplacement électrique dans le milieu piézoactif

Le potentiel électrique est appliqué au dispositif par l'intermédiaire d'une métallisation de la surface des céramiques d'un côté, puis de l'autre par le biais du conducteur électrique que représente le résonateur de cuivre, lui-même relié à la masse. Ainsi, il va de soit que le champ électrique n'est présent que dans les céramiques selon l'épaisseur  $h_p$ . En outre, la permittivité du milieu piézoélectrique (environ 1000 fois supérieure à celle de l'air) permet de formuler l'hypothèse que les lignes de champ électrique ne quittent pas l'élément piézoactif (**H5**).

Qui plus est, l'excitation des céramiques par le biais d'une source de tension au potentiel  $V(t)$ , induit un champ de flexion qui tend à déformer les électrodes; toutefois, d'après la définition de la flexion pure, la distance qui sépare les électrodes ne varie pas. Les électrodes présentent donc une déformation selon les axes  $x$  et  $y$  donnant le vecteur de champ électrique [Gal00],

$$E = \begin{pmatrix} w_{,x} \cdot \frac{V(t)}{h_p} \\ w_{,y} \cdot \frac{V(t)}{h_p} \\ -\frac{V(t)}{h_p} \end{pmatrix} = N_e v \quad (2.15)$$

En considérant à nouveau l'amplitude des déformations faible devant les différentes dimensions géométriques, la déformation des électrodes peut être négligée, ce qui donne le vecteur de champ électrique réduit au terme selon  $z$ ,

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{V(t)}{h_p} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

<sup>6</sup>La notation numérique est adoptée pour les éléments des matrices des constantes afin de correctement les distinguer des composantes des tenseurs

Il est possible à présent d'établir le tenseur de contrainte du milieu piézoélectrique  $T_p$  à partir du couple de variables (S,E),

$$\begin{bmatrix} T_p \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^E & -e^t \\ e & \epsilon^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ E \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

ce qui donne le vecteur sous sa forme réduite à partir de (2.17),

$$T_p = \begin{pmatrix} \sigma_{p_x} \\ \sigma_{p_y} \\ \gamma_{p_{xy}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}^E \cdot S_{xx} + c_{12}^E \cdot S_{yy} + e_{31} \frac{V}{h_p} \\ c_{12}^E \cdot S_{xx} + c_{11}^E \cdot S_{yy} + e_{31} \frac{V}{h_p} \\ c_{66}^E \cdot S_{xy} \end{pmatrix} = c^E N_m \eta - e^t N_e v \quad (2.18)$$

Les constantes d'élasticité en accord avec les propriétés d'une plaque mince sont connues d'après [GA98] par les relations (2.19) :

la matrice  $c^E = (s^E)^{-1}$

avec

$$\begin{aligned} c_{11}^E &= \frac{s_{11}^E}{(s_{11}^E)^2 - (s_{12}^E)^2} \\ c_{12}^E &= \frac{-s_{12}^E}{(s_{11}^E)^2 - (s_{12}^E)^2} \\ c_{66}^E &= \frac{1}{s_{66}^E} \end{aligned} \quad (2.19)$$

ainsi que le coefficient piézoélectrique et la permittivité du matériau,

les matrices  $e = dc^E$

et  $\epsilon^S = \epsilon^T - dc^E d^t$

avec

$$\begin{aligned} e_{31} &= \frac{d_{13}}{s_{11}^E + s_{12}^E} \\ \epsilon_{33}^S &= \epsilon_{33}^T \left( 1 - \frac{2d_{13}^2}{\epsilon_{33}^T (s_{11}^E + s_{12}^E)} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Pour faire l'analogie avec le tenseur du milieu isotrope, le coefficient de Poisson du domaine piézoactif  $\nu_p$  est introduit tel que,

$$\nu_p = \frac{c_{12}^E}{c_{11}^E}$$

et par le développement de (2.18),

$$T_p = \begin{pmatrix} c_{11}^E (z_0 - z) (w_{,xx} + \nu_p w_{,yy}) + e_{31} \frac{V}{h_p} \\ c_{11}^E (z_0 - z) (\nu_p w_{,xx} + w_{,yy}) + e_{31} \frac{V}{h_p} \\ c_{66}^E (z_0 - z) w_{,xy} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$



Dans le cadre d'une utilisation du phénomène piézoélectrique en effet inverse (l'application d'un champ électrique entraîne une déformation), il apparaît judicieux d'utiliser le couple de variables  $S$  et  $E$  afin d'obtenir l'expression du Lagrangien en fonction du potentiel appliqué aux électrodes, puisqu'il est la principale grandeur influente. Finalement, pour appliquer le principe d'Hamilton il est nécessaire de définir le vecteur de déplacement électrique dans l'élément piézoélectrique, toujours défini par le couple (S,E) selon la relation (2.17).

le champ de déplacement est donné par (2.23),

$$D = eS + \epsilon^S E \quad (2.22)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{31}(S_{xx} + S_{yy}) + \epsilon_{33}^S E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{31}(z_0 - z)(w_{,xx} + w_{,yy}) - \epsilon_{33}^S \frac{V(t)}{h_p} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Les différents vecteurs sont à présent définis et vont permettre le développement de l'étude dynamique analytique. Basé sur le principe des travaux virtuels [GR93], le principe d'Hamilton va permettre d'aboutir aux équations du mouvement sous la forme de Lagrange.

### 2.3.2 Application du principe de Hamilton

Le principe de Hamilton traduit le Principe de Moindre Action ; il est devenu un outil fondamental de la théorie des vibrations et de la mécanique analytique en général. Selon ce principe, la trajectoire entre deux points distincts, empruntée par un élément infinitésimal appartenant à un objet, sera celle pour laquelle l'action sera minimale. Cette approche aboutit à l'équation de la déformée du résonateur plan et à la définition des modes propres de résonance.

Le principe de Hamilton se traduit mieux en utilisant le Lagrangien du système. Le Lagrangien se définit comme la différence entre l'énergie cinétique ( $\mathcal{T}$ ), l'énergie potentielle élastique ( $\mathcal{U}$ ) et l'énergie électrique extérieure fournie au système ( $\mathcal{W}_{sources}$ ) [IM95]. La méthode est basée sur la transformation du système mécanique réel en système virtuel dans le même état énergétique. L'état énergétique est ainsi défini par des grandeurs indépendantes nommées *coordonnées généralisées*.

Cette définition est suivie par l'étude variationnelle qui vérifie l'équilibre énergétique du système considéré : en tout instant, le système se trouve dans un état tel que la variation du Lagrangien est nul [Bro].

La définition du Lagrangien amène à (2.24) ;

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} + \mathcal{W}_{sources} \quad (2.24)$$

Les énergies potentielle et cinétique sont établies distinctement selon les milieux du bimorphe, puisqu'ils présentent des propriétés et des dimensions différentes. L'énergie

cinétique du système est donnée en fonction de la densité des deux matériaux et du vecteur déplacement (2.3),

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_{V_i} \rho_i \dot{U}^t \cdot \dot{U} \cdot dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} \rho_p \dot{U}^t \cdot \dot{U} \cdot dV \quad (2.25)$$

- $V_i$  et  $V_p$  les volumes respectivement du milieu isotrope et du milieu piézoactif.
- $\rho_i$  et  $\rho_p$  les masses volumiques de chacun des milieux.

Notons ici que puisque de faibles déformations entraînent de faibles variations de volume, ces derniers seront considérés constants pour le calcul de l'énergie cinétique, et par la suite.

L'énergie potentielle élastique s'écrit quant à elle en fonction des tenseurs de déformations et de contraintes :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{1}{2} \int_{V_i} S^t \cdot T_i \cdot dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} S^t \cdot T_p \cdot dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_i} S^t \cdot T_i \cdot dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} S^t (c^E S - e^t E) \cdot dV \end{aligned} \quad (2.26)$$

L'énergie électrique selon le tableau 2.3 donne,

$$\mathcal{W}_{sources} = \frac{1}{2} \int_{V_p} E^t D \cdot dV = \frac{1}{2} \int_{V_p} E^t (\epsilon^S E + e S) \cdot dV \quad (2.27)$$

Selon la définition du principe de Hamilton d'un système électromécanique, l'approche variationnelle se traduit par l'égalité des variations d'énergies, telle que sur l'intervalle de temps  $t_1$   $t_2$ ,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \cdot dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{W}_{ext} dt = 0 \quad (2.28)$$

avec  $\delta \mathcal{W}_{ext}$  le travail variationnel produit par les efforts extérieurs [Gho00][IM95]. Ce terme variationnel regroupe l'influence des efforts extérieurs normal  $\delta \mathcal{W}_n$ , tangentiel  $\delta \mathcal{W}_t$  et également électrique  $\delta \mathcal{W}_e$  appliqués à la surface  $\mathcal{S}$  délimitant le volume de la plaque. Il est défini par (2.29)

$$\delta \mathcal{W}_{ext} = \delta \mathcal{W}_n + \delta \mathcal{W}_t - \delta \mathcal{W}_e \quad (2.29)$$

Le variationnel du travail électrique se déduit des vecteurs de charge électrique et de tension tel que,

$$\delta \mathcal{W}_e = q^t \delta v$$

avec  $q$  le vecteur de charge électrique, défini par l'intégration de la densité de charge  $\sigma$  sur la surface couverte par l'électrode [Gho00].

$$q = \int \int_{\mathcal{S}} \sigma \cdot d\mathcal{S}$$

Quant aux variationnels des efforts normal et tangentiel, ceux-ci s'expriment selon les forces de réaction modale  $F_{rn}$  et  $F_{rt}$  [IM95][Gir02], appliquées aux coordonnées généralisées. Ces forces de réaction dépendent des efforts appliqués à la surface du stator, ainsi que de leur répartition. Elles seront exprimées à la suite de l'étude de la conversion mécanique. Pour le moment, la variation du travail des efforts extérieurs normal et tangentiel est définie telle que,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W}_n &= \delta\eta^t F_{rn} \\ \delta\mathcal{W}_t &= \delta\eta^t F_{rt}\end{aligned}\tag{2.30}$$

### 2.3.3 Développement matriciel du Lagrangien

Il s'agit maintenant de développer les expressions des énergies obtenues dans le paragraphe précédent en utilisant celles des différents vecteurs et tenseurs. Notons que les énergies cinétique  $\mathcal{T}$ , potentielle  $\mathcal{U}$  et électrique  $\mathcal{W}_{sources}$  sont des éléments linéaires en fonction des coordonnées généralisées, tandis que  $\delta\mathcal{W}_n$ ,  $\delta\mathcal{W}_t$  et  $\delta\mathcal{W}_e$  sont non-linéaires et dépendants de la déformation.

Le développement de l'énergie cinétique  $\mathcal{T}$  définie à partir de (2.25) et (2.5) amène à l'expression des masses vibrantes des deux milieux  $M_p$  et  $M_i$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \frac{1}{2} \int_{V_i} \dot{\eta}^t \lambda^t \rho_i \lambda \dot{\eta}.dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} \dot{\eta}^t \lambda^t \rho_p \lambda \dot{\eta}.dV \\ &= \frac{1}{2} \dot{\eta}^t M_p \dot{\eta} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^t M_i \dot{\eta}\end{aligned}\tag{2.31}$$

avec les matrices de masse modale,

$$\begin{aligned}M_i &= \int_{V_i} \lambda^t \rho_i \lambda.dV \\ M_p &= \int_{V_p} \lambda^t \rho_p \lambda.dV \\ M &= M_i + M_p\end{aligned}\tag{2.32}$$

L'énergie potentielle du milieu isotrope est obtenue en utilisant (2.9) et (2.14) dans (2.26),

$$\mathcal{U}_i = \frac{1}{2} \int_{V_i} \eta^t N_m^t c_i N_m \eta.dV\tag{2.33}$$

De même on obtient l'expression modale de l'énergie potentielle du milieu piézoélectrique en réinjectant (2.21) dans (2.26) :

$$\mathcal{U}_p = \frac{1}{2} \int_{V_p} \eta^t N_m^t c^E N_m \eta - \frac{1}{2} \int_{V_p} \eta^t N_m^t e^t N_e v.dV\tag{2.34}$$

L'énergie potentielle globale du bimorphe est la somme des énergies des deux éléments,

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \mathcal{U}_p + \mathcal{U}_i = \frac{1}{2}\eta^t G_i \eta + \frac{1}{2}\eta^t G_p \eta - \frac{1}{2}\eta^t K v \\ &= \frac{1}{2}\eta^t G \eta - \frac{1}{2}\eta^t K v\end{aligned}\quad (2.35)$$

avec, les matrices de raideur modale

$$\begin{aligned}G_i &= \int_{V_i} N_m^t c_i N_m \cdot dV \\ G_p &= \int_{V_p} N_m^t c^E N_m \cdot dV\end{aligned}\quad (2.36)$$

et la matrice du couplage électromécanique

$$K = \int_{V_p} N_m^t e^t N_e \cdot dV \quad (2.37)$$

Nous pouvons également développer l'équation portant sur l'énergie électrique à partir de (2.15) et (2.9) dans (2.27),

$$\mathcal{W}_{sources} = \frac{1}{2} \int_{V_p} (v^t N_e^t \epsilon^S N_e v + v^t N_e^t e N_m \eta) \cdot dV \quad (2.38)$$

soit encore d'après (2.37) :

$$\mathcal{W}_{sources} = \frac{1}{2} v^t C_p v + \frac{1}{2} v^t K^t \eta \quad (2.39)$$

avec la matrice de capacité modale,

$$C_p = \int_{V_p} N_e^t \epsilon^S N_e \cdot dV \quad (2.40)$$

### Approche variationnelle du Lagrangien

Les énergies mises en jeu à présent définies, il est possible d'écrire le Lagrangien sous la forme matricielle modale à partir de (2.31)(2.35) et (2.38) introduits dans(2.24). Il dépend du vecteur de coordonnées généralisées  $\eta$  et du potentiel électrique  $v$  [Gho00],

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\eta}^t M \dot{\eta} - \frac{1}{2}\eta^t G \eta + \frac{1}{2}\eta^t K v + \frac{1}{2}v^t C_p v + \frac{1}{2}v^t K^t \eta \quad (2.41)$$

Le terme  $\eta^t K v$  étant scalaire, la relation (2.41) peut s'écrire en fonction du potentiel électrique :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\eta}^t M \dot{\eta} - \frac{1}{2}\eta^t G \eta + \eta^t K v + \frac{1}{2}v^t C_p v \quad (2.42)$$

L'étude variationnelle du Lagrangien sur la base de faibles variations, en usant des propriétés de dérivation des matrices, amène à la relation :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \delta\left(\frac{1}{2}\dot{\eta}^t M \dot{\eta}\right) - \delta\left(\frac{1}{2}\eta^t G \eta\right) + \delta(\eta^t K v) + \delta\left(\frac{1}{2}v^t C_p v\right) \\ &= \dot{\eta}^t M \delta\dot{\eta} - \delta\eta^t G \eta + \delta\eta^t K v + \eta^t K \delta v + v^t C_p \delta v\end{aligned}\quad (2.43)$$

Pour résoudre l'intégration de la relation (2.28), une intégration par partie sera nécessaire. La propriété de dérivation temporelle sur le vecteur d'amplitude modale est applicable tel que,

$$\dot{\eta}^t M \delta\dot{\eta} = \delta\dot{\eta}^t M \dot{\eta} = \frac{d}{dt}(\delta\eta^t M \dot{\eta}) - \delta\eta^t M \ddot{\eta}\quad (2.44)$$

Ce qui donne l'expression variationnelle du Lagrangien,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{d}{dt}(\delta\eta^t M \dot{\eta}) - \delta\eta^t(M\ddot{\eta} + G\eta - K v) + (\eta^t K + v^t C_p)\delta v\quad (2.45)$$

D'après la définition du principe de Hamilton (2.28), de l'expression variationnelle (2.45) et du travail des efforts extérieurs (2.29), s'en déduit l'équation d'équilibre définie par les grandeurs indépendantes  $\delta\eta$  et  $\delta v$ ,

$$\int_{t_2}^{t_1} \left[ \frac{d}{dt}(\delta\eta^t M \dot{\eta}) - \delta\eta^t(M\ddot{\eta} + G\eta - K v - F_{rn} - F_{rt}) + (\eta^t K + v^t C_p - q^t)\delta v \right] .dt = 0\quad (2.46)$$

Les deux variables indépendantes  $\delta\eta$  et  $\delta v$ , variant indifféremment, entraînent respectivement la définition du fonctionnement actionneur et capteur du bimorphe à partir de la relation (2.46) :

**Actionneur,**

$$M\ddot{\eta} + G\eta = K v + F_{rn} + F_{rt}\quad (2.47)$$

**Capteur,**

$$K^t \eta = q - C_p v\quad (2.48)$$

La solution dynamique s'articule autour des coordonnées généralisées, soit l'amplitude modale des déformations et la tension d'alimentation.

A ce stade du développement, il faut rappeler que notre étude a débuté en connaissant a priori la base modale des déplacements selon  $z$  telle que  $w(x, y, t) = f(x, y) \cdot \eta(t)$ . Pour résoudre l'équation (2.47), dont les termes dépendent des déformées propres  $f(x, y)$ , il est nécessaire de les identifier. Les problèmes d'élastodynamique gouvernés par un système d'équations aux dérivées partielles trouvent rarement une solution analytique exacte, pouvant satisfaire à la fois les équations différentielles et les conditions cinématiques aux limites de la structure. Dans le cas d'une plaque rectangulaire, seul le cas où celle-ci est simplement appuyé sur son pourtour présente une solution analytique exacte [GR93].

En réponse à cette limite analytique, la méthode de Rayleigh-Ritz consiste à approcher les déformées réelles à partir de fonctions d'essais, déjà introduites en (2.4). Chaque

élément du vecteur de déformation est approché par une série de fonctions, dont le nombre détermine la précision de l'approximation. La solution numérique de Rayleigh-Ritz, pré-disposée pour l'étude par éléments finis, cherche à résoudre la forme discrétisée du principe d'Hamilton. En l'absence de sollicitation extérieure (électrique ou mécanique), la formule matricielle de l'équilibre mécanique (2.47) devient ;

$$G\eta + M\ddot{\eta} = 0 \quad (2.49)$$

Ainsi, à partir de l'hypothèse de vibrations harmoniques, les fréquences de résonance sont obtenues par la solution aux valeurs propres de l'équation suivante :

$$[M^{-1}G] \eta = \omega^2 \eta \quad (2.50)$$

Cependant, si nous cherchons à vérifier les modes vibratoires d'une structure existante, nous pouvons nous abstenir de l'étude discrétisée de Rayleigh, destinée au dimensionnement. Ainsi, nous pouvons appréhender le comportement vibratoire autour d'un unique mode, offrant une description scalaire de l'équation d'équilibre mécanique.

### 2.3.4 Développement pour un mode unique

Compte-tenu des simplifications liées aux plaques minces, et à la considération de flexion pure unidirectionnelle, le développement scalaire du Lagrangien suffit à appréhender le comportement dynamique du bimorphe, et à définir l'équation d'équilibre pour les modes qui nous intéressent. En effet, pour obtenir deux degrés de libertés en translation réversibles, quatre modes vibratoires parfaitement découplés suffisent.

La résolution numérique de l'équation mécanique (2.49) nécessite préalablement le calcul de l'ordonnée du plan neutre  $z_0$ .

#### Détermination du plan neutre

L'hypothèse **H0** définit l'existence du plan neutre pour lequel les contraintes s'annulent et changent de signe, distinguant les zones de traction et de compression [GA98][Gal00]. Ces contraintes se répartissent de part et d'autre du plan neutre selon  $x$  et  $y$ , si bien que la sommation des contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  des deux milieux, selon l'épaisseur, donne une résultante nulle. A partir des vecteurs (2.14) (2.18), l'ordonnée  $z_0$  s'obtient alors en résolvant les égalités (2.51),

$$\begin{aligned} \int_{z_i}^{z_a} \sigma_{i_x} \cdot dz + \int_{z_p}^{z_i} \sigma_{p_x} \cdot dz &= 0 \\ \int_{z_i}^{z_a} \sigma_{i_y} \cdot dz + \int_{z_p}^{z_i} \sigma_{p_y} \cdot dz &= 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Après développement, l'expression du plan neutre est fonction des dimensions et des propriétés mécaniques distinctes du bimorphe.

$$z_0 = -\frac{h_i + h_p}{2} \times \frac{(\nu_i + 1)(\nu_p - 1)C_{11}^E \cdot h_p}{C_{11} \cdot h_p(\nu_i + 1)(\nu_p - 1) - E_i \cdot h_i} \quad (2.52)$$

Il est également possible d'écrire  $z_0$  en fonction de l'épaisseur  $h_m$  entre la surface et le plan médian du bimorphe et d'un coefficient  $\alpha$  décrivant les propriétés mécaniques des deux milieux :

$$\begin{aligned} z_0 &= h_m \times \alpha \\ h_m &= \frac{h_i + h_p}{2} \\ \alpha &= -\frac{(\nu_i + 1)(\nu_p - 1)C_{11}^E \cdot h_p}{C_{11} \cdot h_p(\nu_i + 1)(\nu_p - 1) - E_i \cdot h_i} \end{aligned} \quad (2.53)$$

### Equation mécanique du bimorphe

Reprenons le développement scalaire du Lagrangien à partir de la solution générale (2.24). Puisque les déplacements principaux résident uniquement dans la direction  $z$ , la modélisation de la plaque est réduite à un plan, siège des énergies électrique et élastique [GA98].

L'expression du Lagrangien est donc résolue selon l'épaisseur de la plaque, à partir de la définition des vecteurs (2.5) (2.8) (2.14) et (2.18) tels que,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left( \int_{z_p}^{z_i} (\rho_p \dot{U}^t \dot{U} - S^t T_p) \cdot dz + \int_{z_i}^{z_a} (\rho_i \dot{U}^t \dot{U} - S^t T_i) \cdot dz \right) + W_{sources} \quad (2.54)$$

Le développement du Lagrangien à la suite de la sommation sur l'épaisseur donne son expression selon les termes surfaciques (2.55), les différents coefficients étant définis et formulés (Tab. 2.11).

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} [M_b \dot{w}^2 + T_b (\dot{w}_{,x}^2 + \dot{w}_{,y}^2) \\ &\quad - G_b \left( (w_{,xx}^2 + w_{,yy}^2 + 2w_{,xx}w_{,yy}) - 2(1 - \nu_b)(w_{,xx}w_{,yy}) \right. \\ &\quad \left. + w_{,xy}^2 \left( \frac{(1 - \nu_i G_i + G_p \frac{c_{66}}{C_{11}})}{G_i + G_p} \right) \right) \\ &\quad + 2 \cdot K_b \cdot V(w_{,xx} + w_{,yy}) + C_b \cdot V^2] \cdot d\Sigma + \mathcal{W}_{sources} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Le terme  $M_b \dot{w}^2$  représente l'énergie cinétique de la translation des segments de la plaque selon  $z$ , et le terme  $T_b (\dot{w}_{,x}^2 + \dot{w}_{,y}^2)$  l'énergie cinétique de rotation dans les deux dimensions du plan. Ce second terme est généralement négligé, car il ne devient significatif que lorsque l'énergie de déformation en cisaillement n'est pas négligeable. En raison de l'hypothèse **(H2)**, l'énergie cinétique est réduite au premier terme.

Le système apparaît à présent comme une plaque infiniment mince, capable de stocker l'énergie élastique produite par la flexion. Les segments orthogonaux au plan neutre défini selon Bernoulli, engendrent les efforts et les moments (extérieurs et résultants) subis par le plan.

$M_b = \rho_p \cdot h_p + \rho_i \cdot h_i$	$M_b$ , la masse surfacique [ $kg/m^2$ ]
$\tau_b = \rho_i h_i \left( \frac{h_i^2}{12} + \alpha^2 h_m^2 \right) + \rho_p h_p \left( \frac{h_p^2}{12} + (1 + \alpha^2) h_m^2 \right)$	$\tau_b$ , l'inertie de rotation surfacique [kg]
$G_b = G_p + G_i$ $G_b = \frac{E}{1-\nu^2} h_i \left( \frac{h_i^2}{12} + \alpha^2 D^2 \right) + C_{11}^E h_p \left( \frac{h_p^2}{12} + (1 + \alpha^2) h_m^2 \right)$	$G_b$ , la rigidité flexionnelle du bimorphe [ $N.m$ ]
$\nu_b = \frac{\nu_i G_i + \nu_p G_p}{G_i + G_p}$	$\nu_b$ , le coefficient de Poisson réduit du bimorphe
$C_b = \frac{\epsilon_{33}^S}{h_p}$	$C_b$ , la capacité [ $C.m^{-2}$ ] surfacique
$K_b = e_{31}(1 + \alpha)h_m$	$K_b$ , le coefficient de conversion électromécanique [ $N/V$ ]

FIG. 2.11 – Paramètres vibratoires ramenés à un plan

### Développement selon les efforts et moments résultants

Il est également possible de définir le Lagrangien à partir de la définition des efforts et des moments résultants (fig. 2.12).

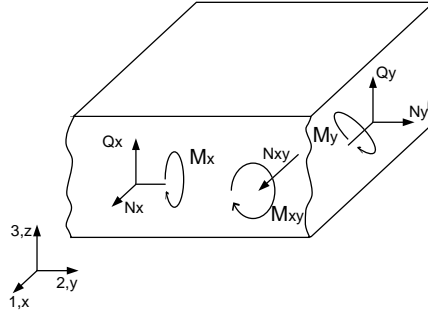


FIG. 2.12 – Efforts et moments résultants dans un élément de plaque en déformation

La considération d'une section de la plaque et son intégration selon l'épaisseur donnent  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$  les efforts résultants dans le plan, et les moments résultants  $M_x$ ,  $M_y$ .

$$\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \\ z \cdot \sigma_x \\ z \cdot \sigma_y \\ z \cdot \gamma_{xy} \end{pmatrix} . dz \quad (2.56)$$

De même, pour une structure multicouche piézoélectriques de  $n$  éléments superposés (ou encore un bimorphe), les efforts et moments résultants se déduisent par la somme des



intégrales selon l'épaisseur de chaque élément, donnant ainsi l'expression :

$$\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} (c^E S - e^t E)_k \\ (c^E S - e^t E)_{k.z} \end{pmatrix} . dz \quad (2.57)$$

Il est également possible d'introduire les efforts et les moments équivalents résultants du couplage électromécanique tels que,

$$\text{Définition : } \begin{bmatrix} \text{Effort} \\ \text{Moment} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} N_{elec} \\ M_{elec} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} e^t E \\ (e^t E).z \end{pmatrix} . dz \quad (2.58)$$

L'application du principe d'Hamilton (2.28) sur l'expression Lagrangienne surfacique (2.55) et l'usage des moments fléchissants donnent l'expression ;

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma} M_b \ddot{w} \delta w + (M_{xx} \delta w_{,xx} + M_{yy} \delta w_{,yy} + M_{xy} \delta w_{,xy} - M_e \delta \Delta w) \\ + (C_b V + K_b \Delta w) \delta V . d\Sigma + \delta W_{sources} = 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

Les moments fléchissants sont attachés au vecteur de déformation et à la rigidité flexionnelle par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} M_{xx} &= G_b (w_{,xx} + \nu_b w_{,yy}) \\ M_{yy} &= G_b (w_{,yy} + \nu_b w_{,xx}) \\ M_{xy} &= G_b (1 - \nu_b) w_{,xy} \\ M_e &= K_b V \end{aligned} \quad (2.60)$$

A la suite d'intégrations par partie décomposées selon la surface  $\Sigma$  et le contour  $\Gamma$ , et résolues sur la surface en fonction de  $w$  la coordonnée généralisée, est déduite l'équation d'équilibre mécanique<sup>7</sup> du plan [GA98] telle que

$$M_b \ddot{w} + G_b \Delta^2 w - \Delta K_b . V - p = 0 \quad (2.61)$$

avec  $p$ , les forces de réaction modales ramenées au plan.

### 2.3.5 Formes propres de l'onde

#### Solutions de l'équation d'équilibre mécanique

Nous cherchons la solution de l'équilibre mécanique, en considérant la participation des grandeurs électriques comme étant dépendante d'un potentiel extérieur, de même que

---

<sup>7</sup>avec  $\Delta$  l'opérateur Laplacien bidimensionnel en coordonnées cartésiennes  $\Delta = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$

les forces de réactions modales extérieures. Dans l'hypothèse d'une vibration harmonique définie par  $w(x, y, t) = w(x, y)e^{(j\omega t)}$  l'équation d'équilibre observée s'écrit alors,

$$\begin{aligned} -\omega^2 M_b w + G_b (w_{,xx}^2 + w_{,yy}^2 + 2w_{,xx}w_{,yy}) &= 0 \\ \text{ou encore,} & \\ -\omega^2 M_b w + G_b \Delta^2 w &= 0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

Cette équation homogène peut également s'écrire selon le vecteur d'onde noté  $\mu$  tel que ;

$$(\Delta + \mu^2)(\Delta - \mu^2)w = 0 \quad \text{avec,} \quad \mu_x^4 = \frac{M_b}{G_b}\omega^2 \quad (2.63)$$

Cette équation (2.63) va permettre, en connaissant les dimensions géométriques et les valeurs du vecteur d'onde, de déterminer les pulsations propres de la plaque.

Le choix des fonctions d'essais doit permettre de satisfaire à la fois la condition de continuité de la déformée (2.3) et les conditions cinématiques aux limites de la structure.

Conformément aux hypothèses avancées §2.3.1, la fonction d'essai s'apparente à la combinaison des modes propres de deux poutres orthogonales (2.64), vérifiant les mêmes conditions aux limites. Ainsi, la déformée  $w(x, y)$  peut s'écrire comme une somme de produits de fonction indépendantes, représentant la déformée pour chaque mode selon la direction  $x$ , ou  $y$ .

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \eta_{kl} \cdot \phi_{x_k}(x) \cdot \phi_{y_l}(y) \quad (2.64)$$

- $\eta_{kl}$  : amplitude modale
- $k, l$  : ordre des modes respectivement selon  $x$  et  $y$
- $n, m$  : le nombre de fonctions d'approximation
- $\phi_{x_k}(x)$ ,  $\phi_{y_l}(y)$  les formes propres des poutres vérifiant les conditions aux limites.

Les formes propres des poutres aux vibrations libres vérifient la relation fondamentale [Cou79][GR93],

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \phi_{x_k}}{dx^4} - \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^4 \phi_{x_k} &= 0 \\ \frac{d^4 \phi_{y_l}}{dy^4} - \left(\frac{\mu_l}{L}\right)^4 \phi_{y_l} &= 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

avec,  $\mu_k$  et  $\mu_l$ , les pulsations propres adimensionnelles des formes propres  $\phi_{x_k}$  et  $\phi_{y_l}$ , formant les termes du vecteur d'onde  $\mu$ .

Considérons les déplacements d'un point  $x_1$  selon  $x$ , indépendamment des modes propres selon  $y$ , et le changement de variables donnant les paramètres sans dimension  $\xi = \frac{x_1}{l}$  et le déplacement modal  $w(x_1) = \psi(\xi)$  avec  $l$  la longueur de la poutre.

La forme générale de l'équation homogène associée selon (2.62) devient ;

$$\mu_x^4 \psi(\xi) - \psi(\xi)^{(4)} = 0 \quad (2.66)$$

Les racines de l'équation (2.66)  $p_{1,2} = \pm\mu$  et  $p_{3,4} = \pm i\mu$  fournissent la solution générale,

$$\psi = \alpha_1 e^{\mu\xi} + \alpha_2 e^{-\mu\xi} + \alpha_3 e^{i\mu\xi} + \alpha_4 e^{-i\mu\xi} \quad (2.67)$$

Pour faciliter les calculs, cette même solution est interprétée à partir des fonctions de *Duncan* [GR93] telles que,

$$\psi = A.s_1(\mu_x\xi) + B.c_1(\mu_x\xi) + C.s_2(\mu_x\xi) + D.c_2(\mu_x\xi) \quad (2.68)$$

avec,

$$\begin{aligned} s_1(\mu_x\xi) &= \sinh(\mu_x\xi) + \sin(\mu_x\xi) \\ s_2(\mu_x\xi) &= \sinh(\mu_x\xi) - \sin(\mu_x\xi) \\ c_1(\mu_x\xi) &= \cosh(\mu_x\xi) + \cos(\mu_x\xi) \\ c_2(\mu_x\xi) &= \cosh(\mu_x\xi) - \cos(\mu_x\xi) \end{aligned} \quad (2.69)$$

et la propriété  $c_2(x) = s_2'(x) = c_1''(x) = s_1'''(x)$ .

### Prise en compte des conditions aux limites

Considérons à présent les conditions aux limites de la plaque en vibration. Dans le cas de la poutre étudiée, les extrémités ne sont retenues par aucune liaison rigide ou pivot, de sorte que l'on nomme nos conditions aux extrémités comme étant libre-libre. De fait, les déplacements aux extrémités  $\xi = 0$  et  $\xi = 1$  sont possibles et les moments en ces points nuls. Ainsi,

$$\begin{aligned} \psi''(0) &= \psi'''(0) = 0 \\ \psi''(1) &= \psi'''(1) = 0 \end{aligned} \quad (2.70)$$

Les conditions (2.70) appliquées à l'équation du déplacement modal (2.68) imposent la valeur des termes  $A$  et  $B$  tels qu'ils répondent à l'égalité (2.71),

$$\begin{pmatrix} s_2(\mu_x) & c_2(\mu_x) \\ c_2(\mu_x) & s_2(\mu_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \quad (2.71)$$

il apparaît clairement que  $\mu_x = 0$  ne peut être solution de l'équation matricielle, puisque cela implique une rigidité  $G_b$  infiniment grande, et donc un mode totalement rigide.

Par le calcul du déterminant,

$$\det \begin{pmatrix} s_2(\mu_x) & c_2(\mu_x) \\ c_2(\mu_x) & s_2(\mu_x) \end{pmatrix} = 0$$

la condition finale sur la valeur du vecteur d'onde (2.72) est obtenue,

$$\cosh(\mu_x) \cdot \cos(\mu_x) = 1 \quad (2.72)$$

Cette expression simple de  $\mu_x$  présente néanmoins une infinité de solutions, et une résolution numérique sera nécessaire. Le tableau (Tab. 2.13) regroupe les solutions des modes propres.

Mode	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_x$	4, 7300	7, 8532	10, 9956	14, 1372	17, 2788	20, 4204	23, 5619	26, 7035	29, 8451

FIG. 2.13 – Valeurs approchées du vecteur d'onde en fonction des modes

Le mode correspond au nombre de demi-ondes de flexion le long de  $x$ . En fixant la valeur  $B = -c_2(\mu_x)$  la valeur de  $A$  s'impose tel que  $A = -s_1(\mu_x)$  d'où il en résulte la forme d'onde [GR93],

$$\psi_x = c_2(\mu_x) \cdot s_1(\mu_x \xi) - s_2(\mu_x) \cdot c_1(\mu_x \xi) \quad (2.73)$$

Revenons au changement de variables effectué en (2.66) tel que  $\xi = \frac{x}{l}$  et  $\phi_x(x) = \psi(\xi)$  pour établir la forme d'onde normalisée, en fonction des dimensions de la poutre dans le repère centré  $x \in [-\frac{l}{2}; \frac{l}{2}]$  défini figure (fig. 2.7) :

$$\begin{aligned} \phi_x = A_x \left[ -\sinh\left(\mu_x\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right)\right) + \cosh(\mu_x) \cdot \sin\left(\mu_x\left(\frac{x}{l} + \frac{1}{2}\right)\right) - \cos(\mu_x) \cdot \sinh\left(\mu_x\left(\frac{x}{l} + \frac{1}{2}\right)\right) \right. \\ \left. + \sin\left(\mu_x\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right)\right) - \sinh(\mu_x) \cdot \cos\left(\mu_x\left(\frac{x}{l} + \frac{1}{2}\right)\right) + \sin(\mu_x) \cdot \cosh\left(\mu_x\left(\frac{x}{l} + \frac{1}{2}\right)\right) \right] \end{aligned} \quad (2.74)$$

avec  $A_x$  le facteur de correction de la déformée rendant l'expression normalisée telle que  $|\phi_x(0)| = 1$ .

$$A_x = -2 \left( \left( \cosh\left(\frac{\mu_x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\mu_x}{2}\right) \right) \cdot \left( -\sin\left(\frac{\mu_x}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{\mu_x}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\mu_x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\mu_x}{2}\right) \right) \right)^{-1}$$

Bien évidemment, cette démarche est identique pour définir les modes propres selon la direction  $y$ .

La figure (2.14) illustre finalement l'allure de la fonction d'essai du plan neutre selon le mode propre.

### 2.3.6 Détermination des paramètres du schéma équivalent et fréquences vibratoires

#### Détermination des fréquences vibratoires

Les équations aux modes propres de la structure (2.47) ont été établies en intégrant les formes d'ondes modales (2.74) au développement de l'étude variationnelle ; puis par la résolution discrète du principe de Hamilton, via la méthode de Rayleigh-Ritz [Gal00][GA98]. Cette méthode numérique est un outil indispensable à l'élaboration de l'actionneur, puisque le choix des dimensions détermine la fréquence des modes propres. Ainsi, selon que l'on choisit d'obtenir des modes couplés dans les deux directions, ou encore découplés pour des orientations de l'onde unidirectionnelles, l'étude numérique est

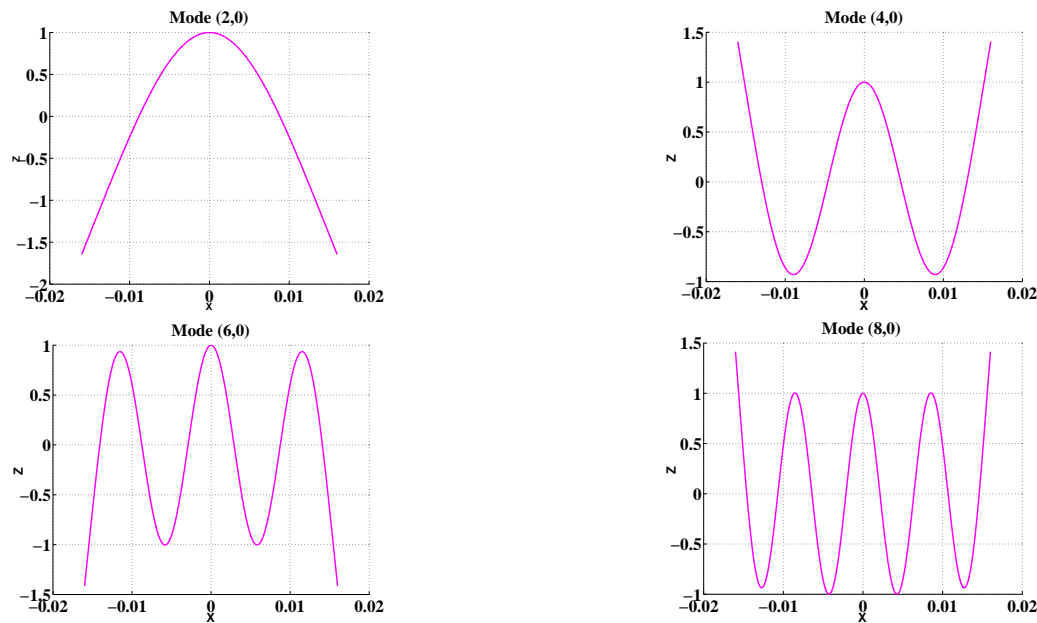


FIG. 2.14 – Formes d’onde normalisées pour différents modes propres

primordiale. Celle-ci ne sera pas développée ici, puisque nous ne cherchons pas à concevoir le bimorphe, mais à caractériser un profil existant. Nous vérifions néanmoins les modes et fréquences propres de l’actionneur à partir d’une méthode de calcul par éléments finis. La figure (2.15) illustre quelques déformées obtenues par l’étude modale menée sous ANSYS®. Celle-ci montre que les dimensions de l’actionneur ont bien été choisies pour satisfaire des modes vibratoires découplés et unidirectionnels, on ne se préoccupera donc pas de la superposition des modes orthogonaux. Ainsi, il est possible de réduire le déplacement, pour une déformée selon  $x$ , à l’expression  $w(x, y, t) = W^{(k)}(t) \cdot \phi_x^{(k)}$ , et finalement résoudre la relation (2.47), simplifiée par le choix d’un fonctionnement unidirectionnel.

La validation de la démarche analytique simplifiée s’appuie également sur la comparaison des fréquences propres de la plaque obtenues par les deux méthodes. Les fréquences propres de chaque mode découplé sont obtenues de manière analytique via la masse modale (2.32) et la raideur modale (2.36) selon l’équation :

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{M}{G}}}$$

Les résultats comparatifs sont exposés dans le tableau (tab. 2.5) qui précise également les dimensions exactes du dispositif. Conjointement, les fréquences propres obtenues expérimentalement par mesure vibrométrique sont présentées dans ce tableau.

Nous pouvons noter une légère différence des fréquences propres théoriques avec les valeurs expérimentales : la différence avec l’étude par éléments finis tient principalement à la modélisation sans la prise en compte du milieu piézoactif, et donc de sa masse et de sa raideur.

De même, pour l’étude analytique, une nouvelle hypothèse est formulée compte-tenu de la forme de l’élément piézoactif. En effet, celui-ci étant formé d’un ensemble de céramiques élémentaires, les contraintes engendrées dans le milieu segmenté lors de la déformation sont

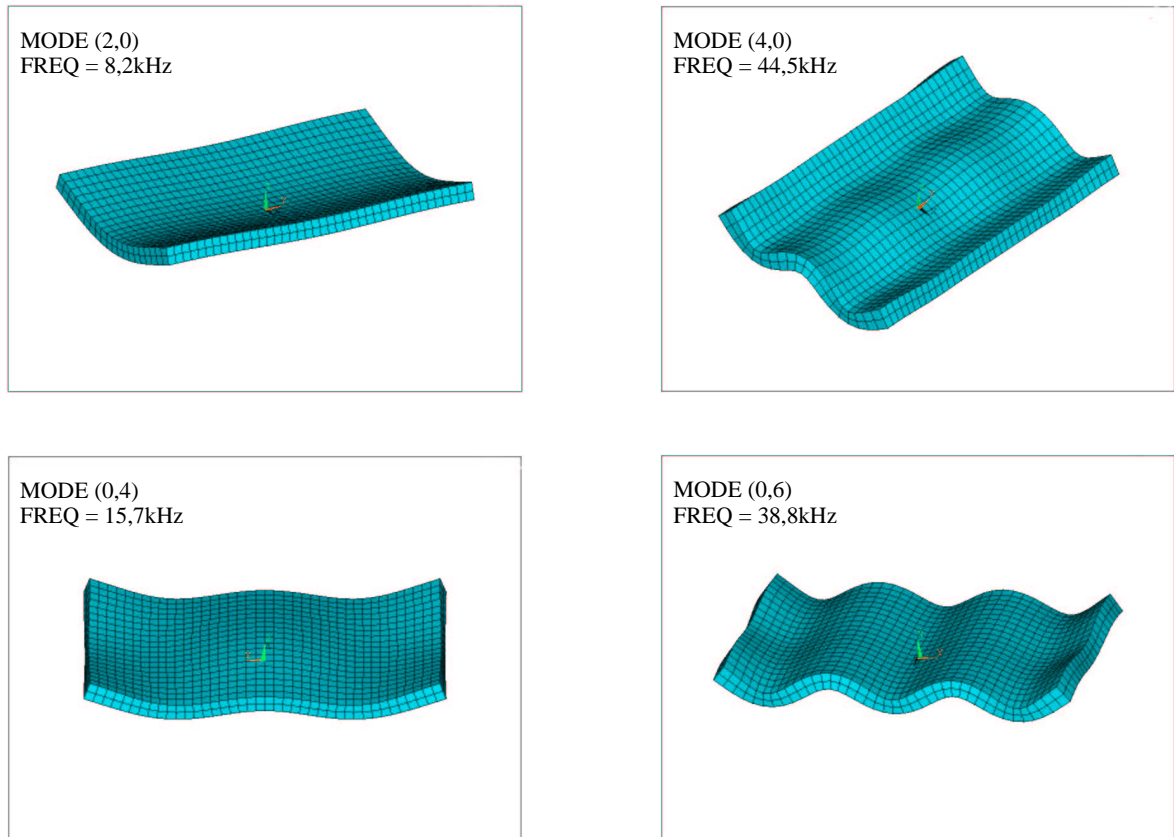


FIG. 2.15 – Formes d’onde obtenues par éléments finis (Résultats par M. Biet L2EP Lille)

réduites. Aussi, les contraintes du milieu piézoélectrique sont négligées tout en considérant sa masse. Il apparaît que cette approximation entraîne une erreur croissante avec le degré du mode vibratoire. Cependant, les modes qui seront exploités pour le déplacement du dispositif permettent de conserver cette hypothèse.

Pour ces modes découplés, les fréquences obtenues par la résolution analytique (tab. 2.5) sont néanmoins cohérentes avec celles fournies par les éléments finis, et avec les valeurs expérimentales.

### Prise en compte de la polarisation alternée

Dans le cas d’une polarisation uniforme sur toute la surface de l’élément piézoactif, la détermination du coefficient de conversion électromécanique  $N$  selon (2.37) est immédiate. Par contre, dans la majorité des actionneurs rotatifs ou linéaires, la polarisation est alternée le long de l’élément actif. C’est le cas de l’actionneur plan qui est réalisé à partir d’une matrice de céramiques présentant une polarisation alternée selon les deux dimensions du plan. Le fonctionnement par commutation de mode, présenté au chapitre §1.4.5, est ainsi facilité par l’alimentation du dispositif par deux voies distinctes (fig. 1.37), en phase ou en opposition, selon le déplacement souhaité. On définit la fonction "polarité" comme étant

	Actionneur selon [Fer96]							
Dimensions $\{x, y, z\}$	$38 \times 64 \times 3mm$							
Propriétés mécaniques $\{x, y, z\}$	$\nu = 0,31$	$\rho = 8250kg.m^{-3}$			$E = 123e^9N/m^2$			
	Fréquences propres en kHz							
Modes propres	(2, 0)	(4, 0)	(6, 0)	(8, 0)	(0, 2)	(0, 4)	(0, 6)	(0, 8)
Résultats numériques ANSYS	8, 2	44, 56	110	204	2, 9	15, 7	38, 79	72, 13
Résultats analytiques	8	43, 4	106, 6	198, 2	2, 82	15, 45	37, 9	70, 4
Résultats expérimentaux	–	50, 27	96, 9	–	–	16, 7	40, 27	79, 2

TAB. 2.5 – Fréquences propres obtenues pour différents modes de vibration

le résultat de la polarisation initiale des céramiques et du signe des tensions. Le placement des polarités est optimisé selon deux modes particuliers en  $x$  et  $y$ , qui présentent un ventre de l’onde au milieu des éléments polarisés, et un nœud aux intersections entre les céramiques. Pour le motif de polarisation de la figure (fig. 1.37), les modes favorisés sont le mode 6 selon la longueur, et le mode 4 selon la largeur.

Ainsi, le tableau (tab. 2.6) présente la fonction ”polarité” et sa décomposition en Série de Fourier pour des déformées selon  $x$  et  $y$ . La polarisation est supposée parfaite, et l’espacement entre chaque élément piézoélectrique est négligé. La décomposition en série de Fourier de la fonction ”polarité” périodique et dépendante des longueurs, montre des harmoniques supérieures au fondamental, ce qui indique théoriquement la possibilité d’exciter des modes supérieurs au motif de base formé par les céramiques, comme le démontreront également les essais expérimentaux.

### Détermination des paramètres du schéma équivalent

Le développement de l’équation d’équilibre mécanique (2.47), la définition des formes propres de l’onde (2.74) et des termes surfaciques (2.11), permettent finalement d’approcher les éléments du schéma électrique équivalent [GA98], selon chaque mode  $k$  tel que :

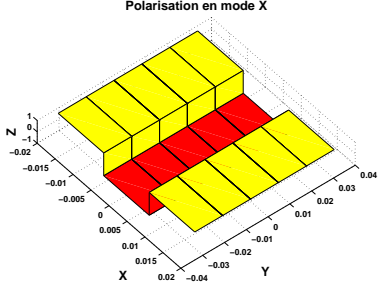
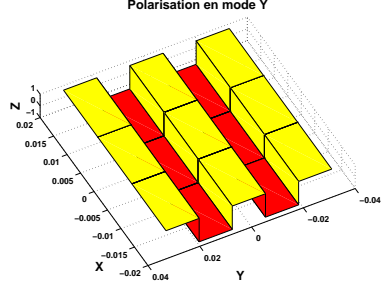
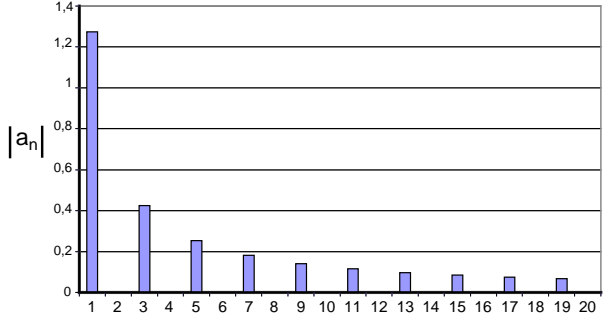
- le facteur de conversion électromécanique (N/V) dans le cas d’une polarisation unidirectionnelle,

$$N^{(k)} = \int_{\Sigma} K_b \Delta(\phi_x^{(k)} \phi_y^{(k)}) . d\Sigma \quad (2.75)$$

avec  $\Sigma$  la surface de l’actionneur.

Comme nous l’avons introduit précédemment, la polarisation est alternée et donne le facteur de conversion approché (2.76), pour le mode vibratoire unidirectionnel (0,6), utilisant le coefficient  $a_1$  du tableau (tab. 2.6) :

$$N^{(6)} = \int_{\Sigma} K_b \Delta(\phi_y^{(6)}) . a_1 \cos\left(\frac{5\pi}{L}y\right) . d\Sigma \quad (2.76)$$

Mode	selon X	selon Y
tensions d'alimentation	$V_1 = V_2 = V. \sin(\omega.t)$	$V_1 = V. \sin(\omega.t)$ $V_2 = V. \sin(\omega.t + \pi)$
polarité résultante		
Fonction de Fourier tels que $F(u) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \cos(\omega.u)$	$a_n = -\frac{2}{n\pi} (2 \sin(\frac{n\pi}{2}) - \sin(n\pi))$ $\omega = \frac{3\pi}{l}$	$a_n = \frac{2}{n\pi} (2 \sin(\frac{n\pi}{2}) - \sin(n\pi))$ $\omega = \frac{5\pi}{L}$
<p style="text-align: center;">Coefficients de Fourier de la fonction signe</p> 		

TAB. 2.6 – fonction ”polarité” selon les modes X et Y

- l'inductance image de la masse vibrante (kg) selon le schéma équivalent (fig. 2.1),

$$L_1^{(k)} = \int_{\Sigma} M_b (\phi_x^{(k)} \phi_y^{(k)})^2 . d\Sigma \quad (2.77)$$

- la capacité image de la raideur mécanique (m/N),

$$C_1^{(k)} = \left( \int_{\Sigma} G_b \mu^A (\phi_x^{(k)} \phi_y^{(k)})^2 . d\Sigma \right)^{-1} \quad (2.78)$$

- et la capacité bloquée, indépendante des modes vibratoires (F),

$$C_0 = \epsilon_{33}^S \frac{\Sigma_1}{h_p} \quad (2.79)$$

avec  $\Sigma_1$ , la surface recouverte par l'électrode d'une voie d'alimentation, et  $h_p$  l'épaisseur de la céramique.



## Résolution numérique et validation

Nous cherchons à présent à vérifier la pertinence de l'étude analytique selon l'identification préliminaire par schéma équivalent (§2.2.1). Cette concordance entre les deux approches a été montrée par [GA98] dans le cadre de moteur rotatif à onde progressive.

Notre validation est faite pour le mode vibratoire (0, 6), qui sera dans la suite de l'étude le mode principalement étudié. Les valeurs expérimentales et théoriques sont réunies et comparées dans le tableau (tab. 2.7). Les paramètres  $N$ ,  $C_1$ ,  $L_1$  et  $C_0$  sont déterminés analytiquement par les relations (2.76) (2.77) (2.78) et (2.79). Les valeurs expérimentales sont obtenues à partir des mesures de  $R$ ,  $L$  et  $C$  selon la procédure décrite en §2.2, et le facteur de conversion  $N$  expérimental (tab. 2.7) est déterminé par mesure vibrométrique.

Actionneur plan à vide			
paramètres	Identification expérimentale par Schéma Equivalent	Approche analytique	Erreur relative(%)
f (kHz)	41,2	37,9	8
$N$ (N/V)	0,806	1,11	37
$R_0$ (k $\Omega$ )	3,6	-	-
$C_0$ (nF)	10	10,2	2
R1 ( $\Omega$ )	82	-	-
C1 (nF)	0,44	0,45	2,6
L1 (H)	0,033	0,0394	17

TAB. 2.7 – Comparaison des valeurs théoriques et expérimentales des paramètres du schéma équivalent et de la fréquence du mode (0,6)

Les résultats analytiques font preuve d'une cohérence acceptable avec l'identification expérimentale, et cela en dépit des nombreuses hypothèses de simplification. Seul le facteur de conversion  $N$  souffre d'une erreur théorique importante : la qualité de la liaison encastrement (collage) réalisée entre les deux éléments est a priori un caractère particulièrement influant sur ce facteur ainsi que sur la rigidité flexionnelle de l'ensemble.

## 2.4 Modélisation Causale

### 2.4.1 Mise en équations

Au terme de l'étude analytique décrite à partir du principe variationnel et de la définition énergétique du système, est finalement obtenu un ensemble d'équations différentielles du second degré, décrivant chacune les modes vibratoires observables. Cependant, les hypothèses formulées le long de l'étude ont éludé l'estimation analytique des pertes dissipatives liées aux frottements internes, ainsi que le facteur de qualité, inhérent à tout système mécanique réel et mis en évidence par le schéma électrique équivalent. Ces phénomènes

seront ultérieurement quantifiés et identifiés à partir d'essais expérimentaux complémentaires.

A partir de l'expression de la conversion électromécanique déduite des équations de Lagrange (2.47) et le calcul des paramètres (2.76..2.78), nous pouvons à présent écrire la relation scalaire d'un mode vibratoire tel que,

$$m.\ddot{w} + c.w = N.v - F_r \quad (2.80)$$

complété par un terme d'amortissement  $d_s$  modélisant les pertes internes tel que,

$$m.\ddot{w} + d_s.\dot{w} + c.w = N.v - F_r \quad (2.81)$$

- $m$  : masse vibrante de la plaque pour un mode
- $c$  : coefficient de raideur pour un mode
- $d_s$  : coefficient de frottement interne pour un mode
- $F_r$  : force de réaction modale

L'équation (2.81) est manipulée pour offrir une forme causale :

$$\begin{aligned} \mathbf{R5} : \dot{w} &= \frac{1}{m} \int (N.v - d_s.\dot{w} - c.w - F_r).dt \\ &= \frac{1}{m} \int (F_{elec} - F_{frot} - F_{elas} - F_r).dt \end{aligned} \quad (2.82)$$

Cette expression met en évidence des efforts représentatifs des différentes énergies mises en jeu (tab. 2.8).

Type d'énergie	Nom de l'effort	relation
Electrique	$F_{elec}$	$\mathbf{R1} : F_{elec} = N.v$
Potentielle élastique	$F_{elas}$	$\mathbf{R3} : F_{elas} = c.w$
Pertes par frottements internes	$F_{frot}$	$\mathbf{R4} : F_{frot} = d_s.\dot{w}$
Cinétique	$F_{cin}$	$F_{cin} = m.\ddot{w}$

TAB. 2.8 – Energies et efforts mis en jeu dans la conversion électro-mécanique

De plus, en accord avec le schéma électrique équivalent (fig. 2.2), il est possible d'introduire la notion de courant motionnel. Par l'intégration du déplacement électrique  $\mathcal{D}$  sur la surface  $\Sigma$  que couvrent les céramiques, est obtenue l'expression de la densité de charge  $Q$ , et donc du courant (2.83), en négligeant les pertes diélectriques représentées par  $R_0$ .

$$I_{tot} = \frac{dQ}{dt} \approx \frac{d(C_0V + Q_{deform})}{dt} = I_0 + I_m \quad (2.83)$$

avec  $Q_{deform}$  la charge induite par les déformations à partir de laquelle est défini le courant motionnel tel que ;

$$\mathbf{R2} : I_m = N.\dot{w} \quad (2.84)$$

Les notations "R $\mathbf{x}$  :" introduites précédemment servent à identifier les relations qui forment les processeurs du Graphe Informationnel Causal du domaine vibratoire (fig. 2.16).

## 2.4.2 Représentation par graphe informationnel causal

La représentation graphique du domaine vibratoire est entreprise à partir du formalisme GIC (Grphe Informationnel Causal). Ce formalisme met en évidence le transfert d'énergie en respectant la causalité naturelle de la chaîne de conversion [HC99]. Les éléments de base de cette représentation graphique reposent sur des blocs ovoïdes appelés "processeurs". Ces processeurs se distinguent selon la relation physique qui lie la grandeur de sortie à la grandeur d'entrée : si la relation est totalement rigide (ex : relation proportionnelle), la flèche du processeur est à double sens. Si la relation est de type intégral (ex : accumulateur d'énergie), la flèche est simple et orientée vers la grandeur de sortie. Les relations (2.84) (2.82) et du tableau (tab. 2.8) donne la représentation graphique du domaine vibratoire de la figure 2.16, décrite selon les relation du tableau (tab. 2.8).

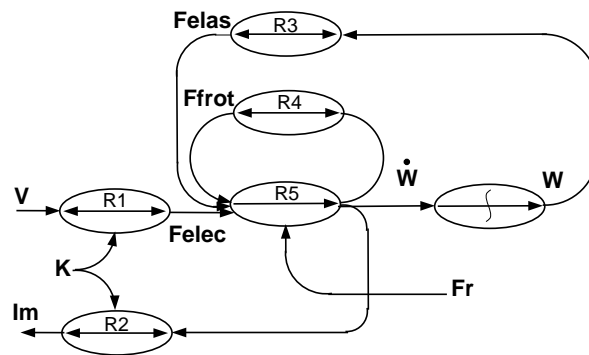


FIG. 2.16 – GIC du domaine vibratoire

Ce graphe constitue la première étape de modélisation causale ; il sera ensuite complété au chapitre 3 par la représentation de la conversion mécano-mécanique.

## 2.5 Identification expérimentale des paramètres vibratoires

Nous avons précédemment vérifié la pertinence de la modélisation analytique du domaine vibratoire, en confrontant les valeurs paramétriques obtenues avec celles identifiées par le schéma équivalent électrique. Nous allons à présent décrire une méthode d'identification déduite de l'équation différentielle du mode propre (2.81). Cette identification permettra d'une part de comparer les résultats issus de l'étude analytique à des mesures expérimentales et d'autre part, complètera le modèle vibratoire utilisé par la suite.

Classiquement, l'identification du comportement vibratoire s'effectue "stator seul", c'est à dire sans effort extérieur normal ou tangent pour perturber la vibration. L'identification est menée pour le mode vibratoire (0,6), la méthode restant identique pour tous les autres modes unidirectionnels. La cartographie entreprise sur l'actionneur par vibrométrie laser, montre des modes vibratoires unidirectionnels prépondérants devant

des phénomènes orthogonaux, et confirme ainsi le bien fondé de l'hypothèse de flexion unidirectionnelle approchée, selon notre étude. Nous commencerons donc par présenter la mesure de l'amplitude vibratoire, puis nous développerons l'asservissement de phase nécessaire à l'identification des différents paramètres.

### 2.5.1 Mesure de la hauteur d'onde

Avant de débiter l'identification proprement dite, il est nécessaire de connaître l'amplitude de la déformée à chaque instant. Rappelons que l'actionneur est réalisé à partir d'une matrice de céramiques élémentaires, et à ce titre, l'une d'entre elles peut être séparée de l'excitation, pour fournir par effet piézoélectrique direct l'image de la déformée [Gal00]. Se pose alors le problème du choix de la céramique pour obtenir cette observation. Dans la mesure où ne sont exploités que les modes vibratoires pairs, et ce en commutation de mode selon les deux directions de la plaque, une seule électrode placée au centre géométrique de la plaque suffit à informer de l'amplitude vibratoire quelque soit le mode. Toutefois, cette solution entraîne des inconvénients : premièrement, pour conserver une tension cohérente en sortie de la céramique de mesure, celle-ci doit présenter des dimensions en accord avec la longueur de l'onde vibratoire, afin de ne présenter qu'une flexion simple sur toute sa surface, quelque soit le mode excité. Ses dimensions doivent donc être inférieures à la demi-longueur d'onde du mode le plus élevé. Or, les céramiques utilisées pour l'excitation ne vérifient pas cette condition (céramiques rectangulaires  $12 \times 12mm$ ). Deuxièmement, supprimer l'excitation de l'une des céramiques revient à réduire le facteur de conversion électro-mécanique, et donc logiquement à diminuer les performances de la conversion. Finalement, le meilleur moyen de conserver l'excitation de la structure sans altérer la déformation est d'ajouter une céramique de mesure sur la face inférieure de la plaque. Ainsi, la structure de base est conservée et l'implantation de l'électrode de mesure simplifiée.

Rappelons notamment que la flexion de la plaque se fait autour du plan neutre  $z_0$ , qui n'est pas le plan médian de la plaque : la déformation sur la surface inférieure est différente de celle du dessus.

La tension retournée par l'électrode de mesure du fait de l'effet piézoélectrique direct est directement proportionnelle à la charge électrique [PLP98] :

$$V_{elec} = -\frac{Q}{C_{0r}} = -\frac{1}{C_{0r}} \int_{\Omega} D \cdot \Omega \quad (2.85)$$

- $Q$ , étant la charge électrique
- $C_{0r}$ , la capacité dite "bloquée" de la céramique de mesure
- $D$ , le vecteur de déplacement électrique
- $\Omega$ , la surface de l'électrode.

Ainsi, à partir de l'équation relative à l'effet piézoélectrique directe énoncée (tab. 2.3) et des vecteurs de déformation réduits et de champ électrique (2.8)(2.16), l'expression (2.85) devient,

$$V_{elec} = -\frac{1}{C_{0r}} \int_{\Omega} [ e_{31} \ e_{32} \ 0 ] \{S\} \cdot d\Omega \quad (2.86)$$

Les propriétés isotropes du milieu piézoactif impliquent  $e_{31} = e_{32}$  et le développement de l'équation devient ;

$$V_{elec} = -\frac{e_{31}}{C_{0r}} \int_{\Omega} (z_0 - z) (w_{,xx} + w_{,yy}) \cdot d\Omega \quad (2.87)$$

Qui plus est, le positionnement de l'électrode au centre de la plaque offre la possibilité de s'affranchir des conditions aux limites et d'approcher les déformations selon  $x$  et  $y$  :

$$w(t) = W(x) \cdot \sin(\omega t) = W \cdot \cos(\mu_x \frac{x}{l}) \cdot \sin(\omega t) \quad w(t) = W(y) \cdot \sin(\omega t) = W \cdot \cos(\mu_y \frac{y}{L}) \cdot \sin(\omega t) \quad (2.88)$$

qui donne pour une céramique rectangulaire,

$$\begin{aligned} V_{elec_x} &= -\frac{e_{31} \cdot \mu_x}{C_{0r} \cdot l} \Delta_y W (z_0 - z_m) \left[ 2 \sin(\mu_x \frac{\Delta_x}{2.l}) \right] \cdot \sin(\omega t) \\ V_{elec_y} &= -\frac{e_{31} \cdot \mu_x}{C_{0r} \cdot l} \Delta_x W (z_0 - z_m) \left[ 2 \sin(\mu_y \frac{\Delta_y}{2.L}) \right] \cdot \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (2.89)$$

En raison des faibles valeurs des paramètres  $e_{31}$  et  $C_r$  et de leur imprécision, la valeur numérique obtenue par (2.89) est peu exploitable. Par contre, il est intéressant de vérifier que la tension  $V_{mes}$  est directement proportionnelle à l'amplitude vibratoire  $W$ .

Pour des raisons pratiques, une céramique circulaire est choisie et placée au centre de la plaque (fig. 2.17), aux dimensions respectant la demi-longueur d'onde du mode le plus élevé. Nous définissons les modes utiles les plus élevés comme étant les modes (0,8) et (6,0), qui imposent le diamètre maximum de la céramique  $\Phi \leq 6mm$ . Une céramique de 5mm de diamètre est choisie.

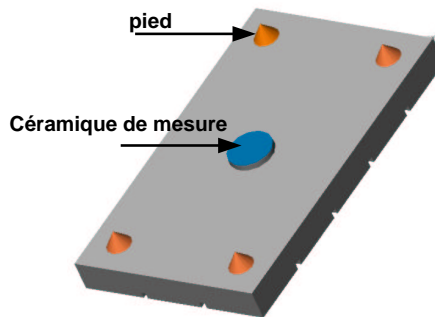


FIG. 2.17 – Implantation de la céramique capteur

Le collage de la céramique satisfait la liaison mécanique et le contact électrique entre le résonateur de cuivre et l'une de ses électrodes.

Pour vérifier le comportement vibratoire de l'actionneur, ses modes propres, ses fréquences de résonance et les amplitudes vibratoires, nous avons utilisé un dispositif expérimental basé sur la vibrométrie laser, développé au LEEI Toulouse (fig. 2.18)[Gal00]. Ce

dispositif est composé premièrement d'un interféromètre Laser (Polytec) de type Mach-Zehnder, couplé à une cellule de Bragg afin de déduire la direction du déplacement vibratoire [Gay98]. Un analyseur de signaux (HP 3562A) fournit les tensions d'alimentation appliquées à l'actionneur via un amplificateur linéaire, et permet une analyse fréquentielle du dispositif. Le tout est ordonné par interface GPIB autour d'un ordinateur et d'un instrument virtuel Labview™.

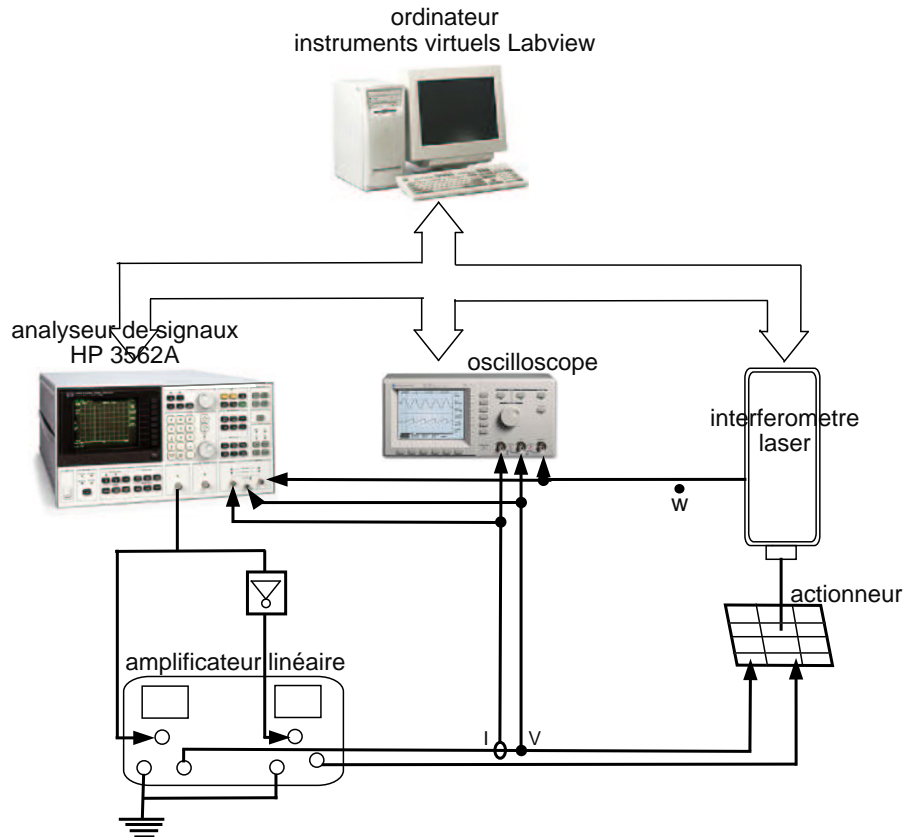


FIG. 2.18 – Banc expérimental de mesures vibratoires (LEEI Toulouse)

Le relevé vibrométrique fournit le diagramme de Bode du rapport  $W/V$ , soit l'amplitude vibratoire par rapport à la tension d'alimentation. Parallèlement le diagramme  $V_{elec}/V$ , soit la tension d'électrode par rapport à l'alimentation est également relevé. Les deux caractéristiques sont rapprochées par un facteur constant  $K_c$  (fig. 2.19).

A la gauche de la résonance est observable un pic indésirable, produisant une discontinuité de la phase. Dans le cadre du contrôle de la hauteur d'onde de l'actionneur, la plage de fonctionnement sera réduite à la droite de la résonance et permettra ainsi un asservissement stable.

A partir du relevé simultané est déduit le facteur de mesure  $K$  tel que,

$$\hat{V}_{elec} = K_c \cdot W \quad K_c = 14886 V \cdot mm^{-1} \approx 14,9 V \cdot \mu m^{-1} \quad (2.90)$$

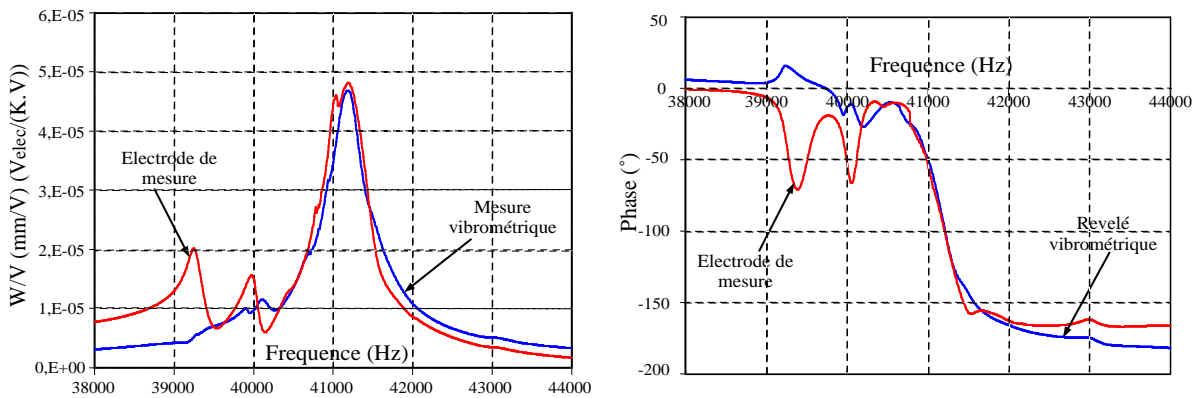


FIG. 2.19 – Diagramme du gain et de phase mode (0, 6)

Assurément, ce facteur est différent selon le mode exploité, puisque directement lié à la longueur d'onde. La mesure du facteur  $K_c$  devra être effectuée pour chaque mode vibratoire utile.

### 2.5.2 Non-linéarités du modèle

Contrairement à l'hypothèse du modèle analytique, la température de la structure entraîne une variation de la réponse fréquentielle autour d'un mode vibratoire. Effectivement, il a été constaté expérimentalement un décalage de la caractéristique fréquentielle vers les basses fréquences, ainsi qu'une légère augmentation du module  $|W/V|$  avec la température. Cette variation peut-être attribuée à l'assouplissement de la structure bimorphique lorsque la température augmente, et donc une diminution du coefficient de raideur  $c$ . L'identification des paramètres vibratoires doit donc se faire à température constante.

Une autre non-linéarité apparaît sur la figure (fig. 2.20), à température constante et pour deux tensions d'alimentation différentes : la proportionnalité entre tension et amplitude d'onde n'est pas vérifiée, même si la fréquence de résonance est identique. D'après l'équation différentielle du second ordre (2.81), cette non-linéarité peut être attribuée à la variation du coefficient d'amortissement  $d_s$  en fonction de l'amplitude d'onde  $W$  [Gir02].

Pour s'affranchir de l'influence de cette non-linéarité, l'identification s'effectue à amplitude d'onde constante comme le préconisent certains auteurs lors de l'étude des moteurs à onde progressive (TWUM) [JM97].

Notons également que ces moteurs à onde progressive présentent généralement une instabilité appelée "pull-out". Le "pull-out" est observé sur la caractéristique fréquentielle, par un front raide à gauche de la résonance [AA00] qui conduit au blocage de l'actionneur. Cette non-linéarité peut être attribuée à la variation de  $c$  en fonction de l'amplitude vibratoire et aux contraintes externes. Dans notre cas, le relevé fréquentiel est symétrique par rapport à la résonance (fig. 2.19). Nous pouvons donc en conclure que le paramètre  $c$  est peu sensible à la hauteur d'onde. Ainsi, à température constante et quelque soit l'amplitude d'onde  $W$ , le coefficient de raideur  $c$  peut être estimé constant.

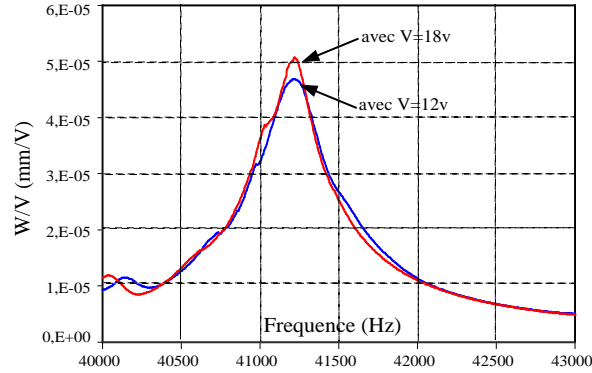


FIG. 2.20 – Variation de l’amplitude vibratoire avec la tension d’alimentation

### 2.5.3 Transformation Cissoïdale

La méthode d’identification mise en œuvre ci-après est basée sur la description de la déformée  $w$  dans un repère tournant à la pulsation vibratoire. Cette méthode s’appuie sur des essais en régime permanent et transitoire, dans les conditions précédemment mentionnées qui permettent de s’affranchir des non-linéarités induites par la variation des paramètres [Gir02].

A l’instar des machines électromagnétiques classiques, la modélisation du moteur piézoélectrique à onde progressive par [Gir02] s’appuie sur la représentation du domaine électro-mécanique dans un repère tournant. Celle-ci aboutit à un modèle décomposé selon l’axe normal et tangentiel. Dans le cadre du moteur à onde progressive, cette démarche est facilitée par l’existence de deux ondes stationnaires en quadrature et l’usage d’une matrice de rotation attachée au point de contact stator/rotor. Dans notre cas, le domaine vibratoire se résume à l’équation (2.81) à une dimension ; la transformée cissoïdale est alors utilisée pour construire une voie en quadrature et ainsi aboutir à un modèle moyen qui sépare les deux branches motionnelles.

L’usage de cette transformation va permettre, dans un premier temps d’exprimer les équations du domaine vibratoire dans le repère tournant. Dans l’hypothèse d’une vibration harmonique définie par  $\underline{w}(t) = W e^{j\omega t}$ , une tension d’alimentation  $\underline{v}(t) = V e^{j(\omega t + \phi)}$ , nous pouvons écrire l’équation différentielle (2.81) selon la définition de la transformée cissoïdale sous une forme complexe :

$$m \cdot \ddot{\underline{w}} + d_s \cdot \dot{\underline{w}} + c \cdot \underline{w} = N \cdot \underline{v} - \underline{F}_r \quad (2.91)$$

Par la considération d’une pulsation vibratoire quasi-constante, compte-tenu du comportement très résonnant du dispositif (eu égard au facteur de qualité  $Q$  estimé lors de l’identification du schéma électrique équivalent §2.2), nous pouvons définir deux égalités, respectivement selon la partie imaginaire (voie  $q$ ) et réelle (voie  $d$ ) :

$$\begin{aligned} \text{voie } q : 2m\omega \dot{W} + ds\omega W &= N \cdot V_q - F_{rq} \\ \text{voie } d : m\ddot{W} + ds\dot{W} + (c - \omega^2 m)W &= N \cdot V_d - F_{rd} \end{aligned} \quad (2.92)$$



avec  $W$  l'amplitude crête de l'onde vibratoire et  $V$  la tension crête.

La représentation graphique (fig. 2.21) illustre les grandeurs introduites par le changement de repère.

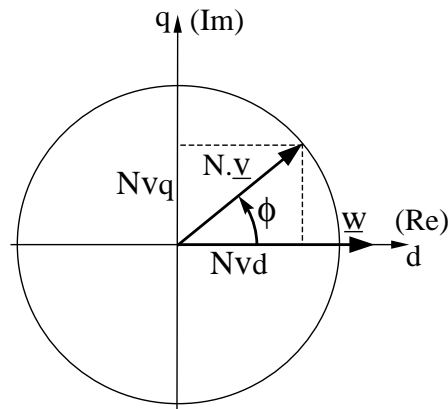


FIG. 2.21 – Représentation des grandeurs dans le repère dq à vide

Selon la première relation (2.92), et pour un fonctionnement à vide, si l'on impose la tension crête d'alimentation  $V$  constante, et que l'on applique un échelon de  $V_q$  (échelon de phase), la réponse du système sera du premier ordre. Cette propriété sera vérifiée et utilisée pour identifier la constante de temps  $2m/d_s$ . De façon générale, l'équation vibratoire dans le repère lié à l'onde met en évidence l'importance du déphasage entre tension d'alimentation et onde vibratoire. Par conséquent, cette grandeur devra être contrôlée pour procéder à l'identification paramétrique.

## 2.5.4 Identification des paramètres

### Facteur de conversion électromécanique $N$

A partir de la tension délivrée par la céramique de mesure, il est possible de visualiser l'amplitude d'onde vibratoire à chaque instant.

Par ailleurs, d'après 2.83, l'observation de la valeur du courant total à la résonance (fig. 2.22), donne logiquement la valeur du courant motionnel  $I_m$  à l'instant où  $dV/dt=0$ .

A partir de l'expression du courant motionnel (2.84) et de la valeur du facteur  $K_c$ , est obtenu le facteur de conversion électromécanique  $N$  :

$$N = \frac{I_m}{\omega W} = \frac{I_m K_c}{\omega V_e} = 0,806 N/V \quad (2.93)$$

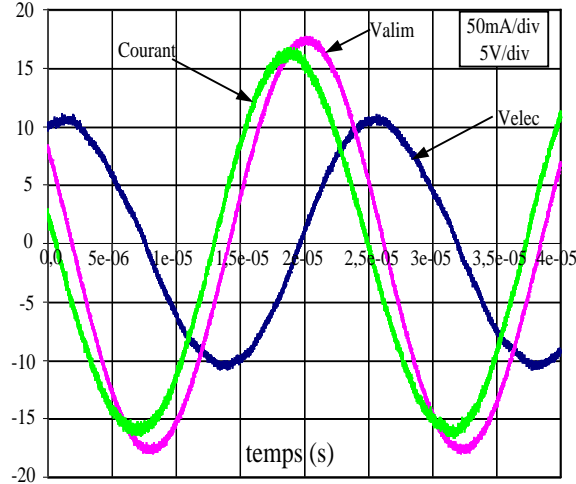


FIG. 2.22 – Relevé courant et tensions à la résonance du mode (0, 6) (41, 2kHz)

### Coefficient d'amortissement $d_s$

D'après les relations déduites de la représentation dans le repère tournant à  $\omega$  considéré constant (2.92), on obtient selon l'axe  $q$  :

$$\begin{aligned} d_s \omega W &= NV \cdot \sin(\phi) \\ &= NV_q \end{aligned} \quad (2.94)$$

Ainsi à partir de l'imposition de la tension  $V_q$ , et à amplitude d'onde constante (c'est à dire à tension crête d'électrode  $\widehat{V}_{elec}$  constante), il est possible de déduire le coefficient de frottement interne  $d_s$  en fonction de  $W$  (fig. 2.23). L'imposition de  $V_q$  se traduit en pratique, pour une tension d'alimentation  $V$  donnée, par celle du déphasage  $\phi$  entre vecteur tension et vecteur amplitude d'onde, comme illustré (fig. 2.21). Pour cette identification, il a donc été nécessaire de contrôler ce déphasage. Ce contrôle est décrit au §2.6.

Les caractéristiques (fig. 2.23) vérifient l'allure sinusoïdale théorique décrite par la relation (2.94). Cependant, un déphasage constant de  $20^\circ$  est observé sur les caractéristiques de phase (fig. 2.19) par rapport à la résonance. De fait, le terme  $d_s$  est obtenu pour différentes amplitudes  $W$  à  $\phi = 110^\circ$  et permet d'apprécier la variation  $d_s = f(W)$  comme illustré (fig. 2.23).

### Coefficient de masse vibrante $m$

La détermination de la masse vibrante nécessite la mise en œuvre d'une réponse transitoire à un échelon de  $V_q$ . D'après la relation du premier ordre (2.92), la réponse à cet échelon donne un temps de réponse  $\tau = 2m/ds$  de l'amplitude d'onde  $W$ . Cette méthode d'identification est acceptable si l'asservissement de phase réalisé est suffisamment rapide pour réduire le comportement dynamique à celui du pôle dominant du système. L'essai

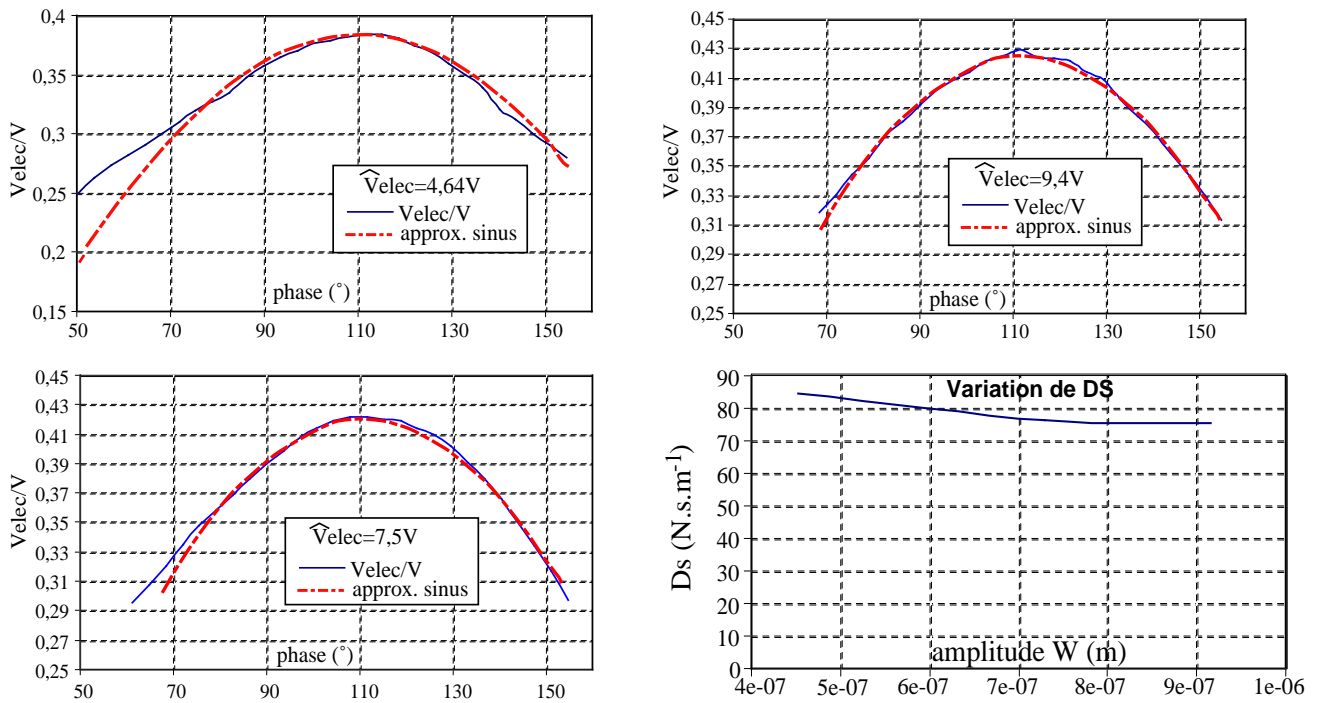


FIG. 2.23 – Fonction de transfert à amplitude constante autour de la résonance

illustré (fig.2.24) montre un temps de réponse identique à la montée et à la descente, preuve de la linéarisation du comportement dynamique par un contrôle en  $Vq$ .

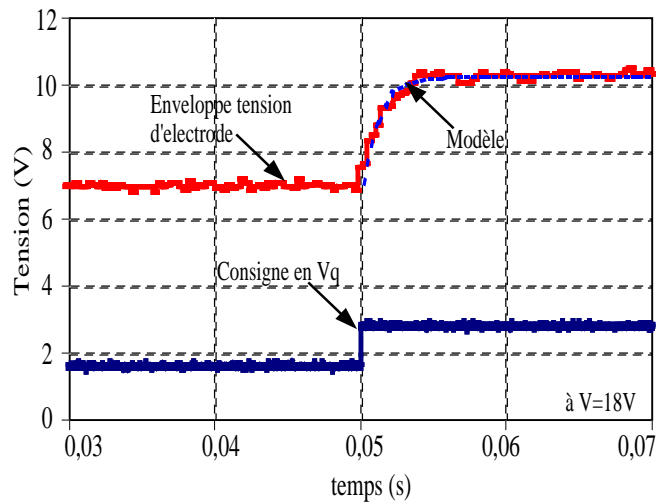


FIG. 2.24 – Relevé du temps de réponse lors d'un échelon de phase

L'identification est faite pour de petits échelons de phase, afin de pouvoir considérer  $d_s$  constant durant l'essai. La procédure est répétée pour différentes amplitudes d'onde et donc différentes valeurs de  $d_s$ . La masse vibrante est calculée d'après (2.92) et les valeurs

de  $d_s$  obtenues (fig. 2.23).

Les valeurs de  $m$  obtenues pour différentes amplitudes d'onde  $W$  sous de faibles échelons de phase (afin de considérer  $d_s$  constant pendant l'essai) montrent un écart de la valeur de  $m$  entre les relevés n'excédant pas 5%. Ainsi la masse vibrante est considérée constante et l'augmentation du temps de réponse  $\tau$  est vérifiée par la diminution de  $d_s$  avec l'accroissement de l'amplitude vibratoire.

$$m = \frac{\tau \cdot d_s}{2} = 0,038kg \quad (2.95)$$

Finalement, le dernier paramètre, soit le coefficient de raideur  $c$ , est obtenu simplement à partir de la fréquence de résonance tel que,

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}} = 41,2 \cdot 10^3 Hz \quad \text{d'où } c = 2560 \cdot 10^6 N/m \quad (2.96)$$

### 2.5.5 Validation du modèle

La mise en œuvre d'un asservissement de  $Vq$  (§2.6) et la méthode d'identification précédemment détaillée ont permis d'identifier les différents paramètres du domaine vibratoire, et de mettre en évidence certaines non-linéarités. Les valeurs obtenues pour le mode (0,6) sont comparées à celles issues de l'approche analytique présentées (tab. 2.7) et reportées dans le tableau suivant (tab. 2.9) :

Actionneur plan à vide			
paramètres	Théorie	Expérimentale	Erreur relative(%)
f (kHz)	37,9	41,2	8
$N$ (N/V)	1,11	0,806	37
$ds$ ( $N/m \cdot s^{-1}$ )	-	$\approx 80$ (fig. 2.23)	-
$c$ ( $10^6 N/m$ )	2222	2560	13
$m$ (kg)	0,0394	0,038	3,6

TAB. 2.9 – Comparaison des valeurs théoriques et expérimentales du mode (0,6)

Les paramètres sont cohérents avec ceux de l'étude analytique, mis à part le facteur de conversion électromécanique, qui en pratique est légèrement inférieur à sa valeur analytique. Cet écart est attribué à la qualité de la liaison encastrement réalisée par le collage des deux matériaux.

Finalement, on vérifie la cohérence du modèle (fig. 2.25) par la comparaison des fonctions de transfert obtenues expérimentalement (mesure vibrométrique), par le modèle analytique identifié (2.81) et le schéma électrique équivalent.

### Influence de la température

Nous avons énoncé précédemment l'influence de la température sur le coefficient de raideur  $c$ . La figure 2.26 illustre la variation d'amplitude d'onde relevé par la céramique

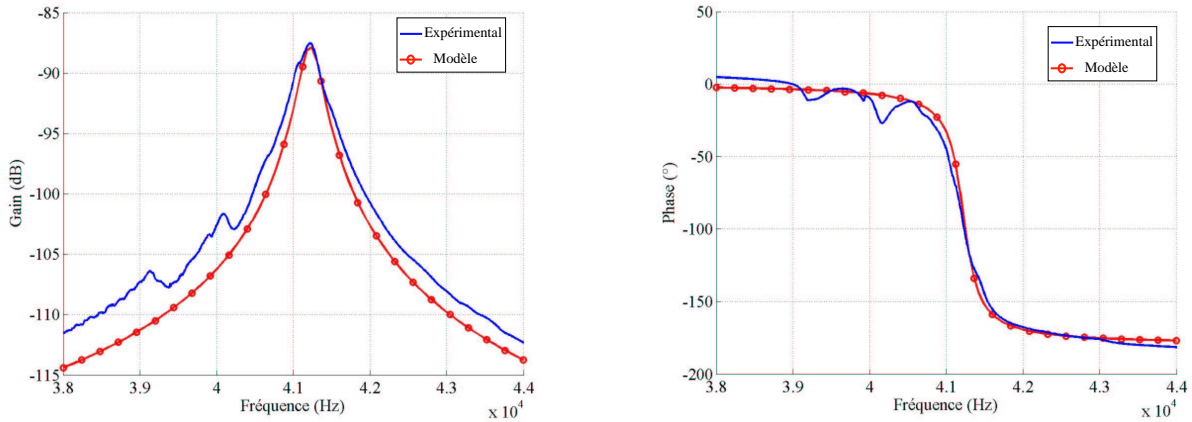


FIG. 2.25 – Fonctions de transfert ( $\frac{W}{V}$ ) expérimentale et obtenue par la modèle analytique

de mesure au cours du temps, liée à l'échauffement de l'actionneur. A fréquence d'ex-

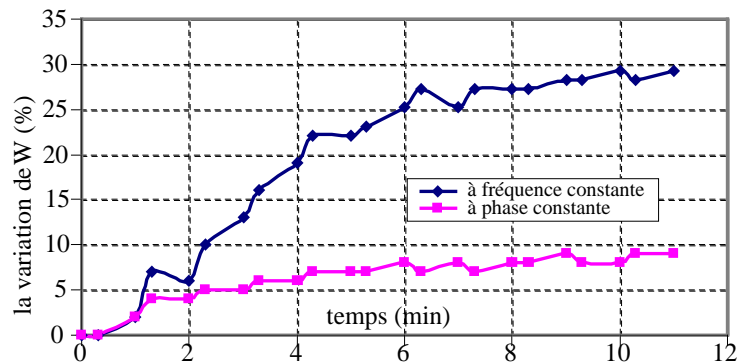


FIG. 2.26 – Variation de l'amplitude d'onde (%) en fonction du temps : à fréquence constante, à  $V_q$  constant

citation constante, on constate une variation de l'amplitude d'onde qui atteint 30% au bout de dix minutes de fonctionnement. Effectivement, l'échauffement provoque la diminution du coefficient de raideur  $c$ , et donc un déplacement de la fréquence de résonance vers les basses fréquences. Si bien qu'à fréquence d'excitation constante, le point de fonctionnement imposé par celle-ci se retrouve décalé sur la caractéristique de résonance (fig. 2.27), et l'amplitude d'onde diminue fortement. Par contre, dans le cas d'un asservissement en  $V_q$ , à tension  $V$  maintenue constante, on impose le déphasage constant  $\phi$ . Ainsi, sous l'effet de l'échauffement, la fréquence de travail s'adapte pour maintenir le déphasage constant (fig. 2.28). Le point de fonctionnement se situe alors toujours au même niveau d'amplitude d'onde [Gho00][Gir02]. On peut noter que le contrôle du déphasage tension-amplitude d'onde permet le suivi de la fréquence de résonance, assurant de façon simple le "frequency tracking".

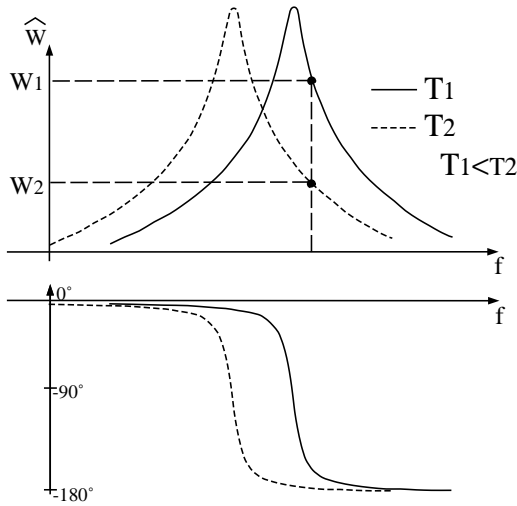


FIG. 2.27 – Commande à fréquence constante [Gir02]

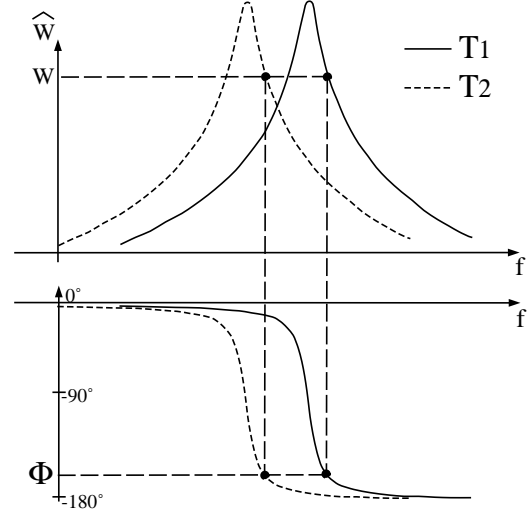


FIG. 2.28 – Commande à  $V_q$  constant

## 2.6 Asservissement de phase

Comme il a été introduit précédemment §2.5.4, l’asservissement en phase du dispositif va permettre l’identification des paramètres  $m$  et  $ds$ . De plus, il permet de s’affranchir des variations en fréquence imposées par l’échauffement du dispositif, et de conserver ainsi une relation quasi-linéaire selon (2.92). Cet asservissement nécessite la mesure du déphasage entre l’une des phases d’alimentation  $V_\alpha$  et l’amplitude vibratoire  $w$ . L’amplitude d’onde vibratoire est observée par l’intermédiaire de la céramique de mesure placée au centre de la plaque (fig. 2.17). Le schéma de principe présenté ci-après (fig. 2.29) illustre la structure de l’asservissement mis en œuvre. Il se compose principalement de quatre VCO (un pour chaque mode vibratoire), d’un déphaseur numérique, d’un amplificateur linéaire, d’un comparateur de phase et d’un correcteur PID.

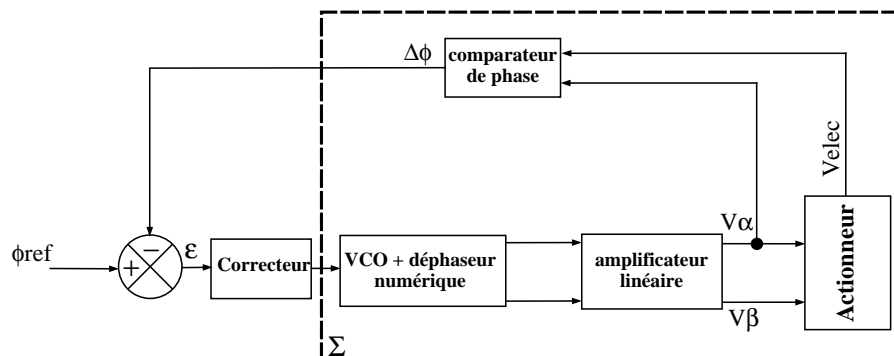


FIG. 2.29 – schéma de principe de l’asservissement de phase

### 2.6.1 Réalisation du déphaseur

Afin d'établir les tensions d'alimentation nécessaires pour le pilotage de chaque mode de déplacement, au nombre de quatre, un déphaseur numérique est réalisé (fig. 2.30) [Gir02]. Celui-ci permet de générer deux signaux sinusoïdaux, en phase ou en opposition selon le mode à exciter, choisi à partir d'une consigne numérique sur deux bits. Les fréquences d'entrées sont fournies par quatre VCO distincts, aux fréquences centrales 64 fois supérieures aux fréquences de résonance des modes vibratoires (mode (0,6) fréquence  $\approx 41kHz$ , fréquence VCO  $\approx 2,6MHz$ ). Les quatre signaux TTL sont envoyés en direction du déphaseur numérique, dont un seul est conservé par le multiplexeur selon le choix du mode. Un premier comparateur permet de produire un signal de remise à zéro, à la même fréquence que la tension souhaitée. Deux cellules (ROM sinus) servent ensuite à reconstituer les signaux sinusoïdaux numériques, (en phase ou en opposition selon le mode) finalement transformés par un convertisseur numérique analogique. Ces deux signaux sont alors amplifiés et reliés aux deux voies d'alimentation de l'actionneur. Cette structure de commande a été réalisée en pratique, et illustrée par la photo (fig.2.35).

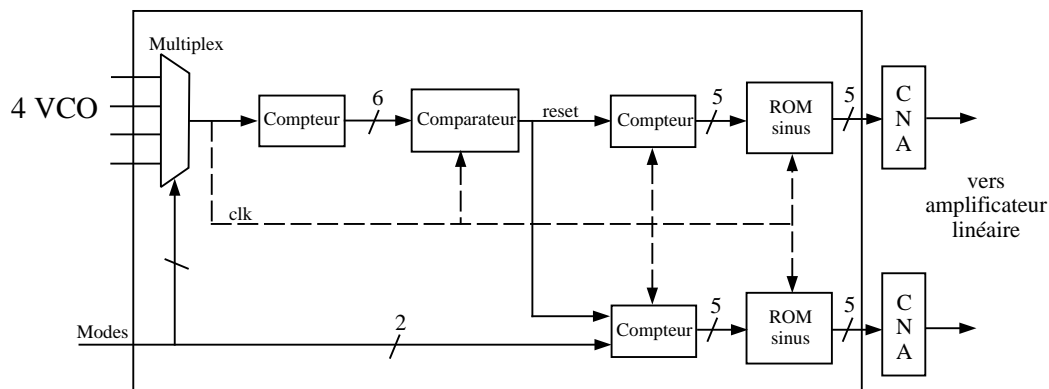


FIG. 2.30 – Déphaseur numérique autour d'un PLD ALTERA® MAX

### 2.6.2 Mise en œuvre de l'asservissement

Nous pouvons présenter la structure de l'asservissement de phase sous la forme d'un schéma bloc (fig. 2.31). Le correcteur PID est déterminé à partir de l'identification de la réponse en boucle ouverte non corrigée (BONC) du système complet, noté  $\Sigma$  sur la figure (fig. 2.29). Le correcteur PID est choisi pour combiner les qualités de précision et de rapidité, afin de rendre négligeable le temps de réponse de la boucle devant le pôle dominant correspondant à la constante de temps  $2m/d_s$  de l'actionneur.

La réponse en boucle ouverte non corrigée est identifiée à celle d'un second ordre (fig. 2.32). Ainsi de manière expérimentale par la méthode de la fréquence pivot, sont définies les constantes de temps du correcteur [RF96].

La mise en œuvre de l'asservissement permet l'obtention de la réponse indicelle expérimentale en hauteur d'onde telle qu'illustrée en figure (fig. 2.24). Parallèlement, pour un

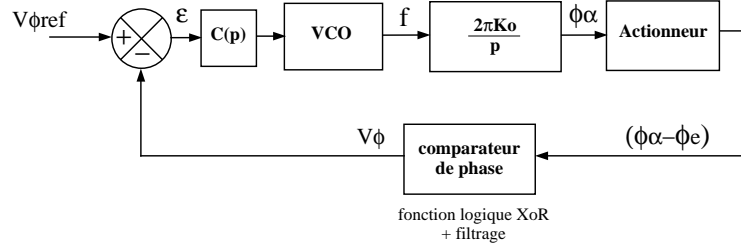


FIG. 2.31 – Schéma bloc de l'asservissement de phase

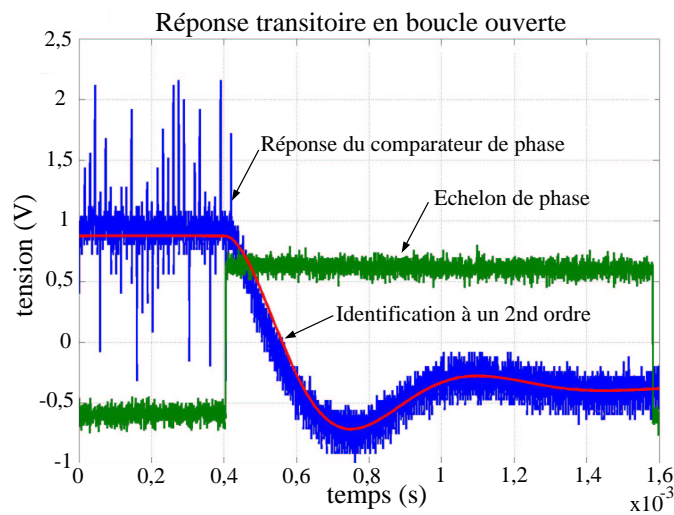


FIG. 2.32 – Fonctions de transfert expérimentale et modélisée

autre échelon, nous avons tracé l'erreur en phase  $\phi$  correspondante (fig. 2.33). On constate que l'asservissement de phase réagit effectivement plus rapidement que le comportement "dominant" de l'actionneur. De plus, on note un comportement de type premier ordre sur l'amplitude d'onde, comme l'énonce la relation (2.92), et un temps de réponse identique en montée et en descente, preuve de la linéarisation induite par la commande, contrairement à ce qui se passerait pour une réponse à un échelon de fréquence. Ce dernier point est illustré par simulation (fig. 2.34).

A amplitude de tension d'alimentation constante, l'asservissement de phase équivaut à un contrôle en  $Vq$  comme défini (2.92), et permet l'identification des paramètres précédemment présenté §2.5.4. Dans l'état actuel de l'étude, un seul correcteur de type analogique est employé, dimensionné pour le mode principalement étudié, soit le mode (0,6). Cet unique correcteur ne répond pas forcément à l'asservissement de chaque mode vibratoire. Aussi, il sera utile de le remplacer par un correcteur numérique, dont les valeurs seront paramétrables en fonction du mode choisi.



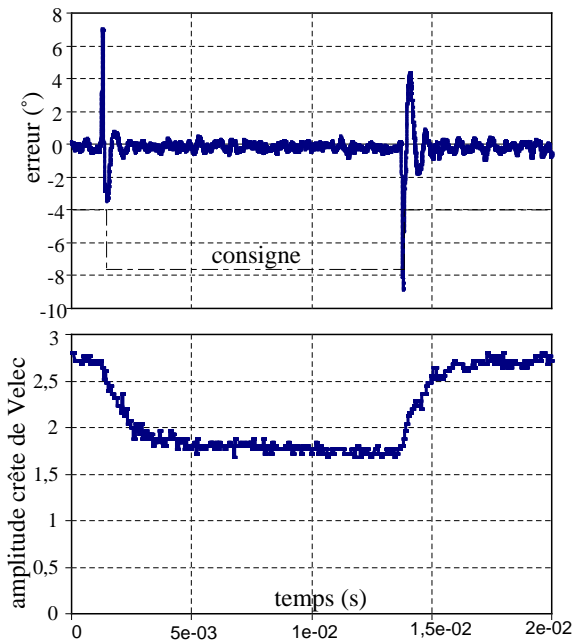


FIG. 2.33 – Erreur de phase et réponse vibratoire en boucle fermée

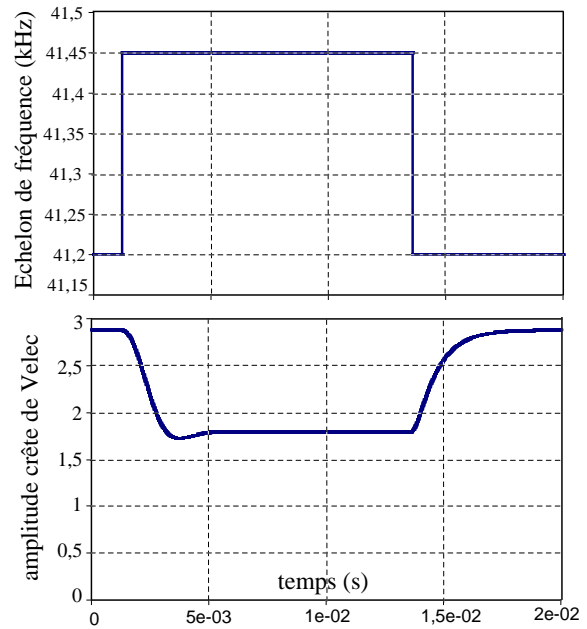


FIG. 2.34 – Réponse en boucle ouverte à un échelon de fréquence

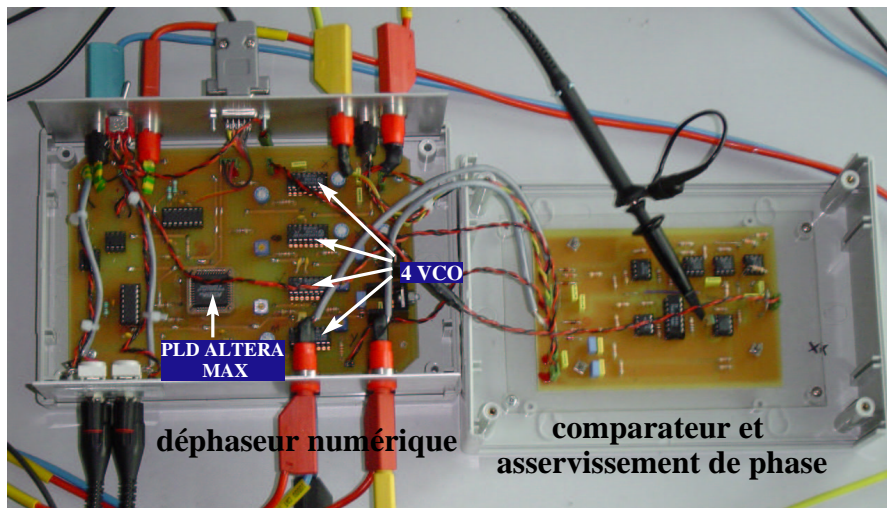


FIG. 2.35 – Mise en œuvre de la carte d'asservissement de phase multi-mode

## 2.7 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons décrit le comportement vibratoire de l'actionneur plan, qui est la conversion électromécanique commune à tous les actionneurs piézoélectriques. L'objectif de notre étude est ici de caractériser un profil existant, préalablement dimensionné pour satisfaire des modes vibratoires découplés et des fréquences d'excitation inaudibles.

La caractérisation du domaine vibratoire a débuté par l'étude du schéma électrique équivalent de Mason, afin de vérifier le comportement résonnant de la structure et d'accéder à une première identification expérimentale simple de l'actionneur. Nous avons ensuite cherché à vérifier par une approche totalement analytique le caractère résonnant, fournissant la définition des paramètres vibratoires en fonction de la géométrie et des propriétés des matériaux. Ainsi, par une approche énergétique (Hamilton) basée sur les forces et coordonnées généralisées, nous avons retrouvé l'équation différentielle qui régit le comportement du dispositif. On souligne également l'incidence des efforts extérieurs sur l'onde, qui seront décrits au chapitre suivant lors de l'étude de la conversion mécanomécanique.

Par ailleurs, grâce à certaines hypothèses simplificatrices, telle que celle d'une forme d'onde unidirectionnelle, nous avons pu déterminer les expressions et les valeurs numériques des différents paramètres et montrer leur cohérence avec les résultats obtenus grâce au schéma équivalent. Cette étude analytique, concentrée sur l'actionneur plan, reste de plus applicable à des structures bimorphes, aux dimensions et géométrie différentes.

Puis, une nouvelle identification des paramètres est entreprise, non plus par l'étude de l'admittance du translateur, mais par une caractérisation directe des phénomènes vibratoires. Pour cela, une mesure de l'amplitude d'onde est entreprise par le biais d'une céramique piézoélectrique utilisée en capteur. Cette mesure permet ensuite de réaliser l'asservissement de phase, nécessaire à l'identification des différents paramètres et de leur non-linéarités. De là, nous vérifions à nouveau la cohérence avec l'étude analytique. Les essais sont effectués à température constante compte-tenu de la variation du coefficient de raideur avec l'échauffement du dispositif, non considérée dans cette étude. Enfin, d'un point de vue de la commande, nous pouvons déjà apprécier le fait que l'asservissement de phase permet de suivre la fréquence de résonance et ainsi d'assurer une commande linéaire de l'amplitude vibratoire.

Le chapitre suivant est consacré à la modélisation et à l'identification de l'étage de conversion mécano-mécanique.



# Chapitre 3

## Modèle du comportement mécanique

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>87</b>
<b>3.2</b>	<b>Modèle de connaissance</b>	<b>89</b>
3.2.1	Introduction au modèle masse-ressort	89
3.2.2	Application du modèle masse-ressort au translateur	90
<b>3.3</b>	<b>Modèle simplifié instantané</b>	<b>99</b>
3.3.1	Description de la liaison pied-plan idéal	101
3.3.2	Description des forces à l'interface plan idéal-plan réel	101
<b>3.4</b>	<b>Modèle linéaire moyen</b>	<b>104</b>
3.4.1	Vitesses idéales normale et tangentielle	104
3.4.2	Forces normale et tangentielle moyennes	105
3.4.3	Expression du modèle mécanique dans le repère tournant	108
3.4.4	Représentation du modèle moyen par GIC	110
<b>3.5</b>	<b>Résultats du modèle moyen : comparaisons avec les résultats expérimentaux de [Fer02]</b>	<b>110</b>
3.5.1	branche motionnelle normale	112
3.5.2	branche motionnelle tangentielle	113
<b>3.6</b>	<b>Relevés Expérimentaux sur un actionneur plan</b>	<b>117</b>
3.6.1	Relevés expérimentaux du comportement hors-plan	117
3.6.2	Résultats expérimentaux du comportement tangent	118
3.6.3	Asservissement de l'amplitude d'onde	121
<b>3.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>125</b>

---

### 3.1 Introduction

Le chapitre précédent a permis d'expliciter le comportement vibratoire de l'actionneur plan. L'adjonction de pieds sous le résonateur, ainsi qu'il est décrit au paragraphe §3 transforme ce mouvement vibratoire en déplacement plan. C'est cette transformation

mécano-mécanique caractérisée par des interactions de contact, que nous allons maintenant décrire. La conversion mécano-mécanique est une étape délicate de l'interprétation du fonctionnement et donc de la modélisation du translateur. De multiples études sur l'interaction de contact ont souligné l'influence d'un grand nombre de paramètres, tels que l'accélération, la vitesse de glissement entre les éléments en contact, la température, l'accommodation des matériaux, l'humidité, la rugosité de surface ou encore l'effort de contrainte qui maintient les deux éléments en contact [Ber01]. Face à cette quantité de variables, selon les besoins auxquels doit répondre le modèle (conception, optimisation, contrôle..), certains phénomènes seront négligés devant les grandeurs principales. Ainsi, des modèles macroscopiques déduits des lois mécaniques telles que la loi de Coulomb ou encore la théorie de Hertz, sauront fournir une interprétation globale du problème, suffisante pour un modèle de comportement.

L'étude ici développée s'appuie sur des modèles basés sur une approche globale et macroscopique de la transmission mécanique. Un nombre conséquent d'études ont porté sur la conversion mécanique entre le stator en vibration et le rotor des moteurs à onde progressive (TWUM) [IM95][NGAG98]. Toutefois, ces études ne peuvent être directement étendues à la transmission mécanique du translateur plan. En effet, les moteurs TWUM présentent généralement un contact permanent entre les deux éléments stator-rotor par un ou plusieurs points de contact. Cette propriété amène généralement à une analyse quasi-statique de la conversion [IM95] [MIFG95].

La difficulté supplémentaire pour les actionneurs à onde stationnaire tient au fait que le contact est intermittent et présente donc une dépendance particulière au temps. La théorie de Hertz est l'une des solutions envisageables pour interpréter ces phénomènes d'intermittence. Elle est par exemple utilisée par [Zha96] pour décrire l'interaction entre deux sphères en rotation. L'effort tangent transmis d'une sphère à l'autre par la biais de la surface en contact  $y$  est décrit selon la loi de Coulomb, décomposée selon des zones en adhésion ou en glissement partiels. Cette solution demeure précise lorsque la surface en contact est faible devant le rayon de courbure des deux corps. Nous retrouvons également cette approche de modélisation analytique appliquée à un micromoteur linéaire piézoélectrique [HSDT98].

La théorie de Hertz est une approche également intéressante dans le cadre des moteurs piézoélectriques rotatifs, qui présentent un contact de type sphère-plan. On retrouve cet outil analytique pour l'étude d'un moteur à rotation de mode [Gar03]. Comme précédemment, les efforts tangents sont déduits de la loi de Coulomb, mais les phénomènes d'adhérence et de glissement partiels sont approchés par la variation du coefficient de frottement dynamique (Modèle de Coulomb-Orowan), en fonction du déplacement relatif entre les surfaces en contact. Ainsi, un faible déplacement entraîne un faible coefficient de frottement  $\mu$  (adhérence partielle), jusqu'à atteindre le seuil de déplacement pour lequel le glissement est total, et le coefficient de frottement constant. Ce seuil peut être rapidement atteint dès lors que l'effort de pré-contrainte appliqué sur les deux éléments est faible et les déplacements relativement importants, si bien que les efforts transmis sur la zone d'adhérence partielle peuvent être négligeables devant la part du glissement. Par conséquent, dans certains cas, une approximation du coefficient de frottement dynamique par une valeur constante est acceptable, quelque soit le déplacement relatif des surfaces.

Cependant, lorsque le contact est proche d'un contact plan-plan, ou même ponctuel,

il devient difficile d'approcher l'une des surfaces par une sphère de rayon de courbure équivalent, afin d'y appliquer la théorie de Hertz. Une interprétation par système masse-ressort pourra alors satisfaire la description non-linéaire du problème.

Au cours de ce chapitre, la modélisation mécanique sera dictée selon plusieurs étapes. L'étude débutera tout d'abord par la présentation d'un modèle basé sur un système masse-ressort employé par [Fer02] pour décrire les phénomènes de contact du translateur plan. Nous nous inspirerons fortement de cette approche, avec cependant le souci de respecter la causalité intégrale naturelle du système physique. Ce modèle servira de modèle de connaissance.

Puis, après avoir décrit le comportement au sein de l'interface mécanique et pris connaissance des nombreuses non-linéarités qui la caractérisent, une description "idéalisée" de l'interface sera introduite, simplifiant ainsi l'interprétation des phénomènes de contact. Nous verrons qu'il est possible d'extraire de ce modèle instantané un comportement moyen, ne conservant que les grandeurs mécaniques globales. Le modèle linéaire sera représenté avec le formalisme des GIC, dans l'optique de l'établissement d'une loi de commande et validé expérimentalement.

## 3.2 Modèle de connaissance

### 3.2.1 Introduction au modèle masse-ressort

Dans le cadre d'une liaison ponctuelle approchée, la description des conditions de contact se fait par la décomposition en périodes d'adhésion, de glissement, de contre-glissement et de séparation, détaillées ci-après. Le mouvement relatif de deux pièces en contact peut être explicité selon deux composantes : la composante tangentielle qui induit des séquences adhérence-glissement [McM97], tandis que la variation de la composante normale peut entraîner un contact intermittent. Cette approche selon [YCM98] réduite à deux dimensions, identifie l'interface de contact à un système masse-ressort détaillé en Annexe B.

L'approche adoptée pour cette modélisation tient compte d'une définition simple des phénomènes de contact ; elle s'appuie sur la loi de Coulomb, usant d'un coefficient de frottement dynamique constant. Aussi, des phénomènes mécaniques propres à la friction de deux éléments, tels que l'accommodation des surfaces, la plastification superficielle, ou le brunissage<sup>8</sup> occasionné par l'action répétée de l'effecteur sur le sol, sont occultés. Cependant, puisque l'interface mécanique de notre dispositif plan nécessite une topologie de surface particulière (un substrat fortement rigide, une rugosité de surface minimale  $R_a \leq 0,6\mu m$ ), et présente un débattement de la fin d'effecteur de plusieurs micromètres d'amplitude, cette approximation demeure a priori acceptable.

Ce modèle aboutit respectivement à la caractérisation de l'intermittence de contact, et à l'évaluation des performances en charge pour un travail en traction, déduites selon un

---

<sup>8</sup>polissage de la surface des métaux essentiellement par frottement

découplage des relations motionnelles hors-plan et tangentiel. La méthode adoptée s'attache à résoudre les différentes équations différentielles mécaniques, et ainsi obtenir les instants pour lesquels est observé un changement des conditions de contact. Cependant, la détermination du critère de transition entre les conditions de contact est obtenue à partir de la dérivée temporelle des efforts mis en jeu. Dans le cas d'une simulation en régime transitoire, cette détermination devient problématique aux abords d'une discontinuité des efforts de réaction, compte-tenu de leur forme non-linéaire. Par ailleurs les relations établies ne respectent pas la causalité naturelle qui lie les vitesses aux efforts produits. Pour cette raison, nous nous attacherons à formuler un modèle valable en régime transitoire, fortement inspiré de celui présenté par [Fer02], conservant la même valeur de paramètres, mais définissant une chaîne cinématique légèrement différente qui permet de conserver la causalité naturelle intégrale des relations.

### 3.2.2 Application du modèle masse-ressort au translateur

Cette étude part de la connaissance de l'amplitude vibratoire de la plaque  $w$  pour aboutir à l'identification de la conversion mécano-mécanique, l'onde étant unidirectionnelle. Cette hypothèse permet de réduire l'approche mécanique à un problème à deux dimensions (fig. 3.2). De même l'implantation des pieds satisfait le critère optimal de performance en vitesse présenté §1.4.5 (p.30), pour un mode vibratoire  $(6, 0)$ . Ce critère implique une position de l'embase du pied à  $u_A = \lambda/8$  par rapport au ventre de l'onde. Cette position est considérée constante selon l'hypothèse de flexion pure. De plus, les pieds étant tous placés de manière identique par rapport au ventre de l'onde, le problème mécanique peut être ramené au comportement d'un unique pied, sur lequel repose une partie de l'effort de pré-contrainte  $F_n/n$ , équiréparti sur les  $n$  pieds (fig. 3.2). Les efforts extérieurs sont rapportés au centre de gravité partiel  $G$ . Cette hypothèse a néanmoins ses limites. En effet, le placement des pieds n'étant pas symétrique par rapport aux dimensions de la plaque (fig. 1.46), la répartition équitable de l'effort normal réalisé par une masse convoyée par exemple, n'est pas évidente. De plus, l'actionneur étant muni de quatre pieds, le problème devient alors hyperstatique ; la mise en contact des quatre pieds ne peut se traduire que par un écrasement différent, impliquant une participation asymétrique. Cela peut être à l'origine d'une légère rotation de l'actionneur. La planéité du bâti peut également mettre en cause cette hypothèse.

Ces remarques étant faites, nous considérerons néanmoins l'hypothèse d'équirépartition compte-tenu de notre approche globale du contact.

Afin de transposer le modèle masse-ressort à notre actionneur, rappelons l'expression du déplacement normal, comme étant le produit de deux formes d'onde relatives à des poutres orthogonales en flexion (2.4),

$$\begin{aligned}
 w_A(u, v, t) &= w(t) \cdot \Phi_{u_A} \cdot \Phi_{v_A} \\
 &\text{réduite pour une onde unidirectionnelle selon } u, \\
 w_A(u, v, t) &= w(t) \cdot \Phi_{u_A} = W(t) \sin(\omega t) \cdot \Phi_{u_A}
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

avec  $W(t)$  l'amplitude de vibration dynamique au centre de l'actionneur,  $\omega$  la pulsation du mode vibratoire. Rappelons que  $\Phi_{u_A}$  est la forme d'onde décrite dans le repère centré (fig. 2.7) au point  $A$ , défini comme étant l'embase du pied sur le plan neutre (fig. 3.2) selon (2.74),

$$\begin{aligned} \Phi_{u_A} = A_u \left( -\sinh\left(\mu_u\left(\frac{1}{2} - \frac{u_A}{L}\right)\right) + \cosh(\mu_u) \cdot \sin\left(\mu_u\left(\frac{u_A}{L} + \frac{1}{2}\right)\right) - \cos(\mu_u) \cdot \sinh\left(\mu_u\left(\frac{u_A}{L} + \frac{1}{2}\right)\right) \right. \\ \left. + \sin\left(\mu_u\left(\frac{1}{2} - \frac{u_A}{L}\right)\right) - \sinh(\mu_u) \cdot \cos\left(\mu_u\left(\frac{u_A}{L} + \frac{1}{2}\right)\right) + \sin(\mu_u) \cdot \cosh\left(\mu_u\left(\frac{u_A}{L} + \frac{1}{2}\right)\right) \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

avec  $L$  la longueur de la plaque,  $\mu_u$  la solution du mode propre de vibration 6 d'après (Tab. 2.13), et  $A_u$  facteur de normalisation de la forme d'onde.

$$A_u = \frac{1}{2(\cosh(\frac{\mu_u}{2}) + \cos(\frac{\mu_u}{2})) \cdot (-\sin(\frac{\mu_u}{2}) \cdot \cosh(\frac{\mu_u}{2}) + \sinh(\frac{\mu_u}{2}) \cdot \cos(\frac{\mu_u}{2}))} \quad (3.3)$$

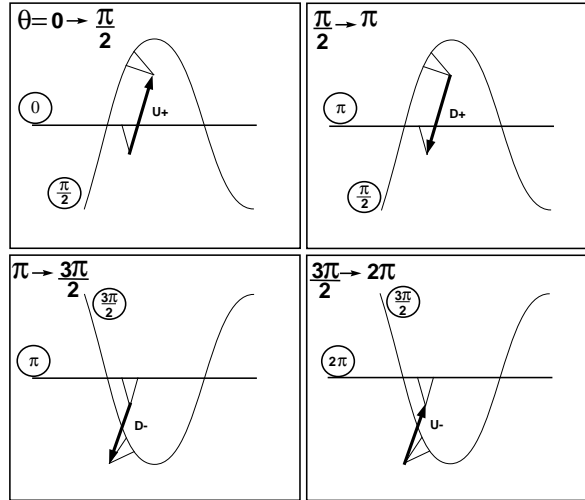


FIG. 3.1 – Décomposition du mouvement du fin d'effecteur

Ainsi peut on établir l'expression des déplacements à l'extrémité  $B$  de l'effecteur non contraint dans le repère  $(u, v, w)$ ,

$$\begin{aligned} w_B(t) &= -h \cdot \cos(\alpha) + \Phi_{u_A} w(t) \\ &\approx -h + \Phi_{u_A} w(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

avec  $h$  la hauteur du pied non contraint,  $\alpha$  l'angle formé par le pied par rapport à la normale du sol (fig. 3.2). Cet angle étant très faible, nous considérerons  $\cos(\alpha) \approx 0$ . Par ailleurs, le déplacement tangentiel observé par  $B$  s'écrit,

$$u_B(t) = w(t) \cdot h \cdot \left. \frac{d\Phi_u}{du} \right|_{u_A} = w(t) \cdot h \cdot \chi_A \quad (3.5)$$



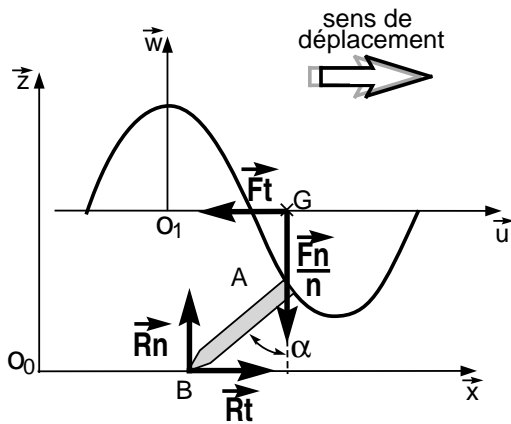


FIG. 3.2 – Efforts appliqués sur un seul pied

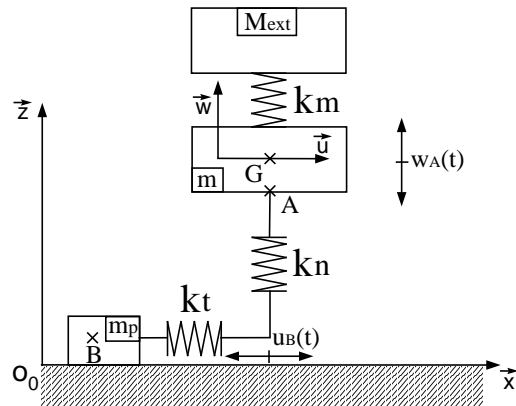


FIG. 3.3 – Schéma mécanique équivalent

La trajectoire de l'extrémité peut s'interpréter en quatre phases résumées (fig. 3.1) selon  $\theta = \omega.t$ .

Nous établissons finalement le schéma mécanique équivalent qui permettra de définir les relations dynamiques du système (fig. 3.3)[Fer02]. L'effort de précontrainte est imposé par la masse notée  $M_{ext}$  appliquée à l'actionneur par le biais d'un élément élastique  $k_m$ . Le coefficient de raideur de cet élément est choisi faible ; il satisfait un découplage fréquentiel suffisant pour réduire l'effort normal fourni par la masse  $M_{ext}$  au plan de l'actionneur à un terme constant  $F_n$ . L'actionneur proprement dit possède une masse  $m$ , et l'on considère une masse  $m_p$  du pied, dont la valeur est très inférieure à celle de l'actionneur. Le pied est décomposé en une élasticité normale  $k_n$  et tangentielle  $k_t$  sans fléchissement et les mouvements de flexion sont reportés sur chacun d'eux. On impose à la structure les déplacements  $w_A(t)$  et  $u_B(t)$  générés par la vibration libre.

### Comportement selon l'axe normal

Pour décrire le comportement de l'actionneur selon l'axe normal, nous allons chercher à obtenir l'équation dynamique décrivant le mouvement de l'embase du pied selon  $z$ . Il est nécessaire de considérer le sol parfaitement rigide pour que le pied soit le seul élément accumulateur d'énergie potentielle élastique. Ainsi, lorsque l'actionneur à l'état passif subit l'effort de pré-contrainte imposé par la masse  $M_{ext}$ , le plan de la plaque se positionne à une distance  $z_G$  par rapport au sol, inférieure à la hauteur initiale du pied  $h$  : le pied est en compression. La mise en vibration de la plaque impose un déplacement normal sinusoïdal de l'embase du pied, induisant une variation instantanée de l'effort de réaction. Si le déplacement est suffisamment important pour que l'ordonnée  $z_A$  soit supérieure à la hauteur naturelle du pied relâché, alors il y a séparation des deux éléments. Les critères de changement d'état, contact-séparation ou séparation-contact sont déduits selon (B.1) et (B.14) par l'annulation de l'effort de réaction  $R_n$ , mais peuvent également être interprétés

selon les déplacements tels que,

$$\begin{aligned} \text{si } (z_G + w_A) \leq h & \text{ le pied est en contact,} \\ \text{si } (z_G + w_A) > h & \text{ le pied est séparé du sol.} \end{aligned} \quad (3.6)$$

De là est décrit l'effort de réaction normale instantané,

$$\begin{aligned} R_n(t) &= k_n(h - z_A) - d_n \cdot \dot{z}_G \quad \text{lors du contact,} \\ R_n(t) &= 0 \quad \text{pendant la séparation} \end{aligned} \quad (3.7)$$

avec  $k_n$  l'élasticité normale du pied, et  $d_n$  le coefficient d'amortissement sur la compression principale du pied induite par la variation de  $z_G$ . Ce terme d'amortissement correspond à l'amortissement naturel du pied, afin de supprimer la pulsation libre qui pourrait subvenir lors d'une variation de la précontrainte et ainsi stabiliser le système élastique. L'amortissement est appliqué sur la dynamique principale du pied  $\dot{z}_G$  et seule subsiste alors la pulsation imposée par la vibration forcée. Le comportement dynamique est finalement fourni par le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'axe normal, négligeant l'incidence de la masse  $m_p$  infiniment petite,

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} \ddot{z}_A &= \frac{m}{n} \ddot{w}_A - \frac{F_n}{n} - \frac{m}{n} g + R_n(t) \\ \text{ou encore,} & \\ \frac{m}{n} \ddot{z}_G &= -\frac{F_n}{n} - \frac{m}{n} g + R_n(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

- $m$ , la masse propre de l'actionneur
- $g$ , la constante de gravité
- $n$ , le nombre de pieds

Nous avons implanté ce comportement non-linéaire de l'axe normal sous Matlab-Simulink <sup>9</sup> à partir des valeurs numériques réunies en Annexe C. Les simulations en régime transitoire et permanent, donnent le chronogramme (fig. 3.4). La notion de *taux de séparation* est ici introduite (part du temps de décollement sur une période vibratoire) par un paramètre  $\beta$ .

D'autres simulations ont été menées en régime permanent, pour analyser l'influence conjointe de l'effort de pré-contrainte et de l'amplitude vibratoire sur ce taux de séparation. Ces simulations ont souligné le comportement attendu, c'est à dire une augmentation du taux de séparation lors de l'accroissement de l'amplitude vibratoire, et sa réduction pour une augmentation de la pré-charge normale. L'évolution en régime permanent du taux de séparation est représentée pour différentes charges (fig. 3.5); pour cet exemple, ces courbes sont comparées aux résultats de simulation obtenus par [Fer02]. On peut noter la similitude des résultats, ce qui est normal puisque les modèles sont identiques, seul le traitement diffère<sup>10</sup>. Cette modélisation simple et séduisante, doit cependant considérer une variation de la constante élastique  $k_n$  en fonction de la pré-contrainte. En effet, l'approximation d'un contact ponctuel idéal ne prend pas en considération l'influence de l'écrasement du pied conique sur le sol. Il est donc nécessaire d'approcher ce phénomène par une variation du coefficient élastique  $k_n = f(F_n)$  [LJF00]. Par ailleurs, les premiers

<sup>9</sup>via la commande et la logique de surveillance fourni par l'outil *Stateflow*

<sup>10</sup>Dans la référence [Fer02] les équations différentielles du modèle sont développées et résolues analytiquement

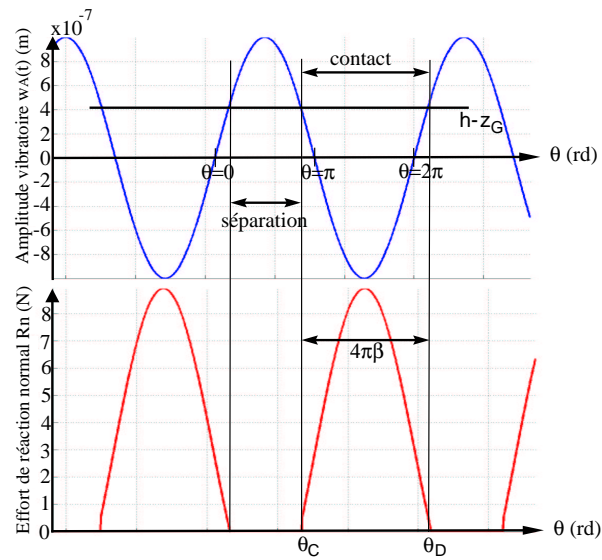


FIG. 3.4 – Effort de réaction instantané  $R_n(t)$

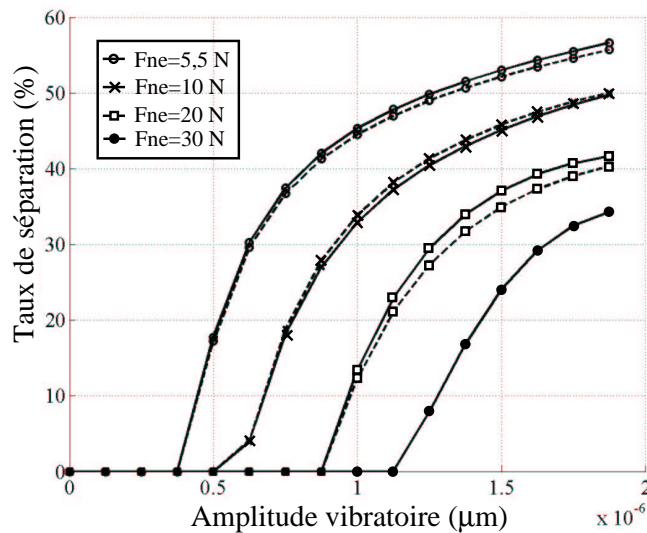


FIG. 3.5 – Evolution du taux de séparation en fonction de l'amplitude vibratoire (lignes pleines) et comparaison aux simulations de [Fer02] (pointillés)

essais expérimentaux entrepris par [Fer02] pour mesurer le taux de séparation, ont permis de vérifier la pertinence du modèle confirmant tout d'abord l'intermittence de contact du pied sur le sol, et également que le phénomène demeure périodique et de même pulsation que l'onde vibratoire en régime permanent.

### Comportement sur l'axe tangent

Selon le modèle de connaissance [Fer02], quatre conditions distinctes de contact peuvent apparaître et influencer les performances tangentielles en vitesse et en traction, comme il est détaillé Annexe B. Ces conditions sont telles que,

- la séparation annule l'effort de réaction  $R_t = 0$
- l'adhérence implique une vitesse de glissement nulle  $V_{gliss}(t) = \dot{x}_B = 0$
- lors du glissement négatif ( $\dot{x}_B < 0$ ),  $R_t(t) = +\mu R_n(t)$  (conformément à [Fer02] cette phase est également appelé "contre-glissement")
- lors du glissement positif ( $\dot{x}_B > 0$ ),  $R_t(t) = -\mu R_n(t)$

- Lorsque le pied est en adhérence sur le sol, l'effort de réaction tangentiel selon (B.2) s'écrit ;

$$\begin{aligned} R_t(t) &= k_t \cdot \text{allongement} \\ \text{soit} \\ R_t(t) &= F_{res}(t) = k_t(x_A - x_B + u_B) - d_t \cdot \dot{x}_B \end{aligned} \quad (3.9)$$

Avec  $F_{res}$  l'effort lié à la compression du ressort tangentiel,  $k_t$  le coefficient d'élasticité tangentiel, et  $d_t$  son coefficient d'amortissement.  $x_A$ ,  $x_B$  sont respectivement les déplacements observés par les points  $A$  et  $B$ , appartenant à l'actionneur, et définis dans le repère lié au sol (fig. 3.2) ;  $u_B$  est le débattement libre de  $B$  introduit par la relation (3.5). La vitesse de glissement est notée  $\dot{x}_B = V_{gliss}$ , et  $\dot{x}_A = V_t$  la vitesse tangentielle de la partie mobile.

- De même, lorsque l'extrémité  $B$  du pied entre en glissement sur le sol, les relations (B.15) et (B.10) donnent,

$$R_t(t) = -\text{sign}(V_{gliss})\mu R_n(t) \quad (3.10)$$

avec  $\mu$  le coefficient de frottement dynamique lié au couple de matériau pied-sol.

Nous savons par le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'axe tangentiel que,

$$\begin{aligned} \frac{(M_{ext} + m)}{n} \cdot \dot{V}_t &= \sum F_{t_{ext}} \\ &= R_t(t) - F_t \end{aligned} \quad (3.11)$$

Notons que cette fois-ci, la masse  $M_{ext}$  convoyée par l'actionneur est prise en compte dans l'équation dynamique tangentielle, en raison de son inertie.

Nous pouvons également définir la vitesse de glissement selon la différence des efforts appliqués au système isolé  $m_p$  tel que,

$$V_{gliss}(t) = \frac{1}{m_p} \int_t (F_{res}(t) - R_t) \cdot dt \quad (3.12)$$

### Comportement global

La simulation complète de ce modèle non-linéaire de connaissance est entreprise, en incluant le comportement tangentiel et normal, dont quelques chronogrammes sont illustrés (fig. 3.6 et 3.7). Les différentes transitions des conditions de contact sont vérifiées selon les relations et inégalités (B.12..B.17). L'ordonnancement des différentes phases de contact peut être très varié selon les conditions de précharge ou d'amplitude vibratoire [YCM98]. Non désireux de présenter toutes les transitions possibles, les figures (fig. 3.6 et 3.7) illustrent deux cas extrêmes.

Sur le premier graphe sont représentées la vitesse de débattement du fin d'effecteur libre  $\dot{u}_B$  et la vitesse de l'actionneur  $\dot{x}_A$ ; ces caractéristiques mettent en évidence les phases d'entraînement ( $\dot{u}_B > \dot{x}_A$ ) et de freinage ( $\dot{u}_B < \dot{x}_A$ ) sur la partie mobile. Sur le second graphe sont représentés les efforts normal  $\mu R_n(t)$  et tangentiel  $R_t(t)$ , l'amplitude vibratoire au point A  $w_A(t)$ , et un signal créneau qui illustre les phases d'adhérence. Ce signal informe de l'adhérence, lorsqu'il est à 1, et indistinctement du glissement ou de la séparation lorsqu'il est nul. La distinction de ces deux dernières conditions de contact se fait au regard de l'effort de réaction normal  $R_n(t)$  qui est nul lors de la séparation.

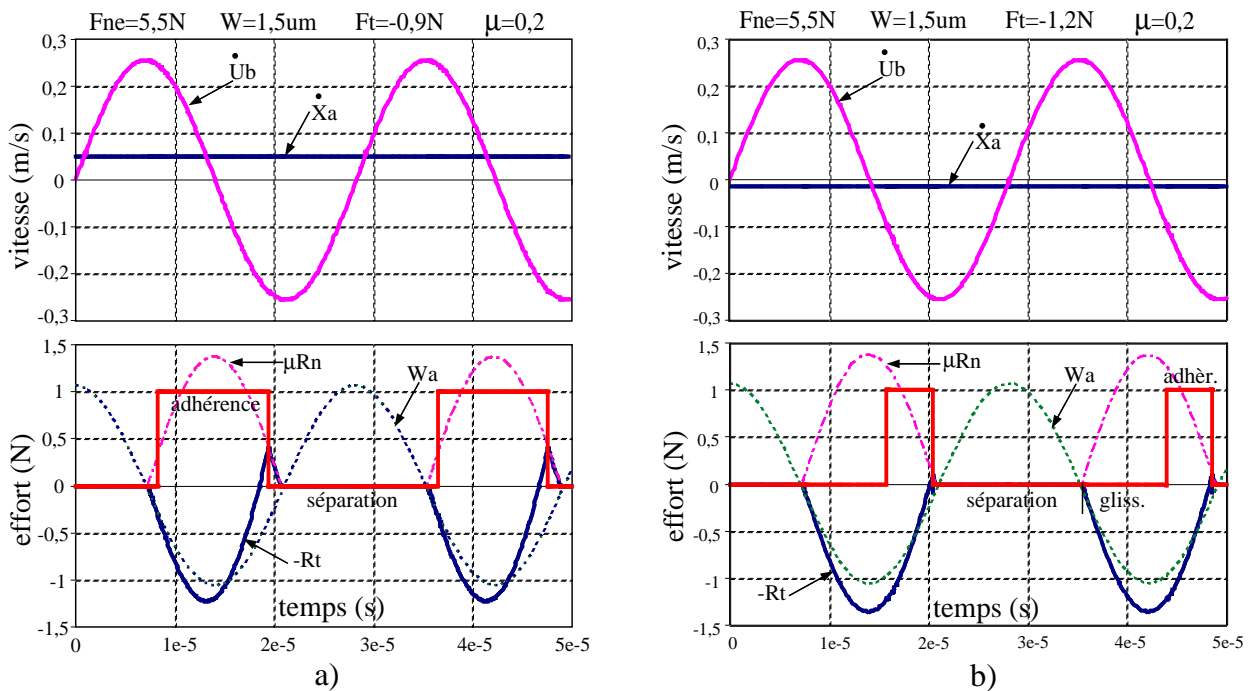


FIG. 3.6 – Chronogrammes obtenus pour un contact intermittent et différentes charges en traction

La configuration de la figure (fig. 3.6 .a) présente une intermittence de contact. Durant la période de contact, la majeure partie de l'effort tangentiel participe à l'entraînement de l'actionneur, et ce sur une phase d'adhérence. On constate néanmoins que cet effort est proche de la caractéristique  $\mu R_n(t)$  en amplitude, donc proche des conditions de glissement. Sur la seconde caractéristique (fig. 3.6 .b) pour une charge en traction plus importante, la part de l'adhérence diminue au profit du glissement qui devient important sur la durée du contact. Qui plus est, on constate que la vitesse  $\dot{x}_A$  est devenue négative, ce

qui signifie que l'effort fourni par l'actionneur ne suffit pas à compenser l'effort extérieur tangent.

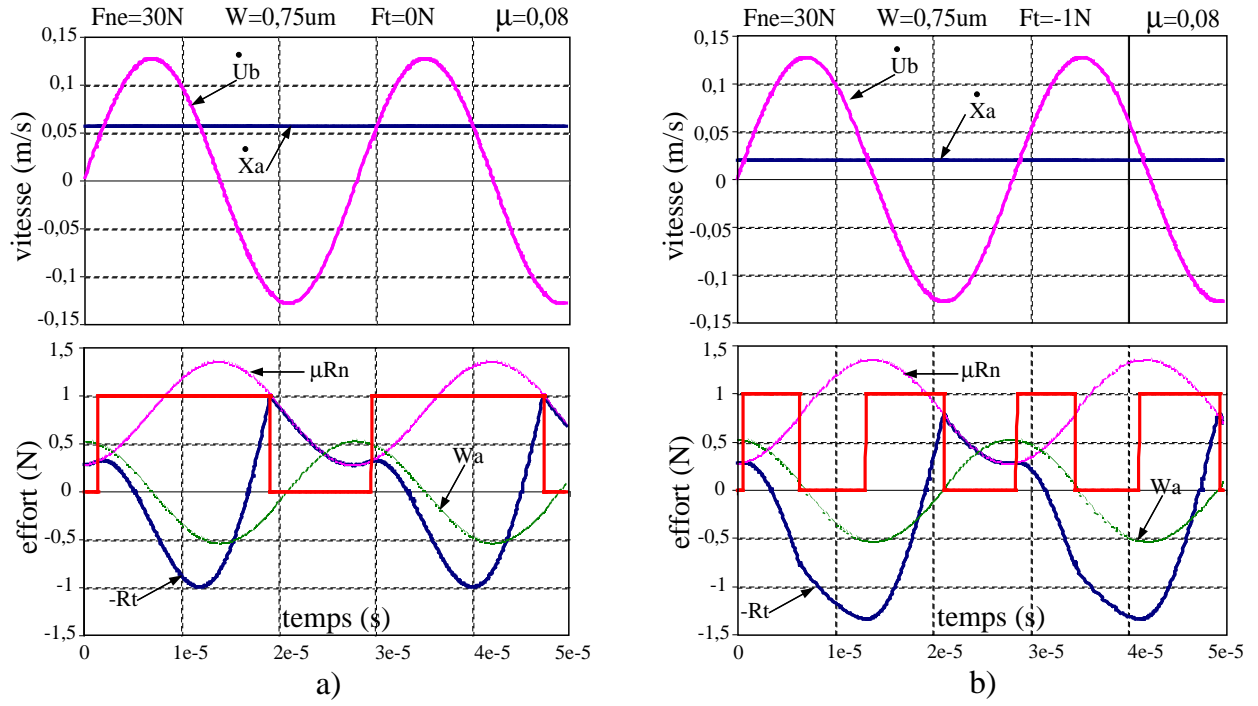


FIG. 3.7 – Chronogrammes obtenus pour un contact permanent et différentes charges en traction

La configuration de la figure (fig. 3.7 .a) offre cette fois-ci un contact permanent. Malgré ce contact permanent, l'actionneur présente une vitesse non nulle et positive. Cela confirme que l'actionneur peut se mouvoir sans pour autant présenter une intermittence de contact : une variation de l'effort de réaction normal suffit à rendre asymétrique la participation de l'effort tangent entre la phase aller et retour du pied (fig. 3.1). La phase d'adhérence couvre principalement la période d'entraînement ( $\dot{u}_B > 0$ ) alors que le glissement apparaît sur la période de freinage ( $\dot{u}_B < 0$ ), étant donnée la diminution de l'effort normal. Enfin, la figure (fig. 3.7 .b), pour un effort de traction de 1N montre deux phases distinctes d'adhérence sur une seule période vibratoire et une augmentation sensible de la part du glissement.

Au regard de ces quelques caractéristiques en régime permanent, on constate des transitions de contact variées en fonction des conditions de précharge et d'amplitude vibratoire. Toutefois, d'après la (fig. 3.6) pour des conditions satisfaisant un contact intermittent, le comportement sur l'axe tangentiel est proche de celui d'un glissement permanent.

### Caractéristiques Force-vitesse

Les caractéristiques force-vitesse sont tracées pour différentes amplitudes vibratoires, précharges normales et pour deux substrats distincts (fig. 3.8 et 3.9).

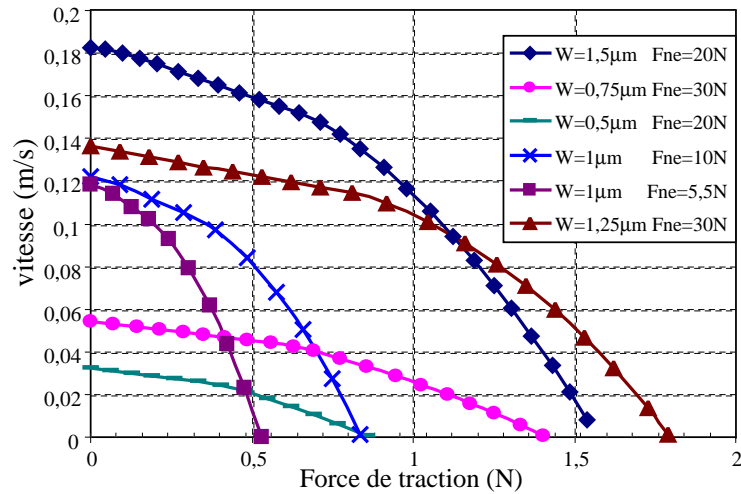


FIG. 3.8 – Caractéristiques force-vitesse sur substrat de verre ( $\mu = 0,08$ ) obtenues par simulation

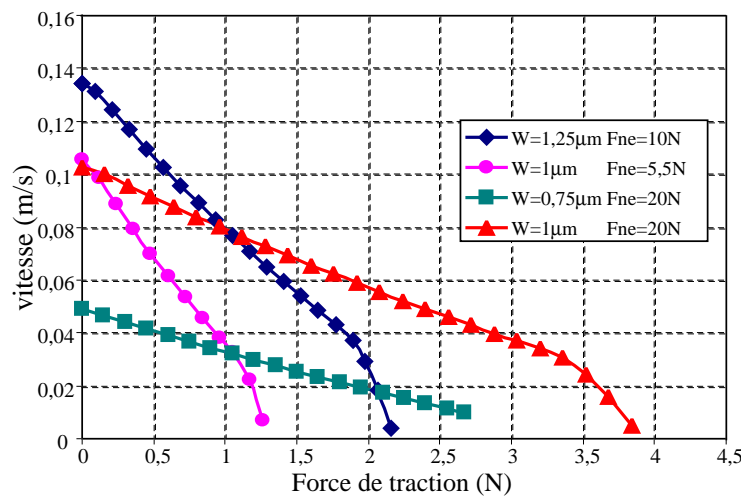


FIG. 3.9 – Caractéristiques force-vitesse sur substrat d'acier ( $\mu = 0,2$ ) obtenues par simulation

Ces résultats sont cohérents avec les résultats du modèle de connaissance et expérimentaux<sup>11</sup> obtenus par [Fer02]. Une augmentation de la vitesse à vide est remarquable dès lors que les conditions de précharge et d'excitation permettent une intermittence de contact. Celle-ci est prévisible par les caractéristiques de taux de séparation (fig. 3.5). On note également l'importance de la précharge et du coefficient de frottement  $\mu$  sur l'effort maximum de traction  $R_t$ , bien plus important lorsque le translateur se déplace sur de l'acier plutôt que sur du verre.

<sup>11</sup>les résultats expérimentaux de [Fer02] sont présentés ultérieurement (fig. 3.20)(fig. 3.21) et (fig. 3.22)

## Vitesse à vide

Nous pouvons également mettre en évidence l'évolution de la vitesse à vide de l'actionneur en fonction de l'amplitude vibratoire et différentes charges convoyées (fig. 3.10). La vitesse à vide évolue de manière quasi-linéaire avec l'amplitude vibratoire. La pente de la caractéristique (fig. 3.10 .b) augmente avec la précharge. De plus, l'amplitude minimale pour laquelle la vitesse devient non nulle augmente d'autant plus que la précharge est importante (fig. 3.10 .a). En d'autres termes, il faut augmenter l'amplitude vibratoire en fonction de la précharge pour induire l'asymétrie de contact suffisante au déplacement.

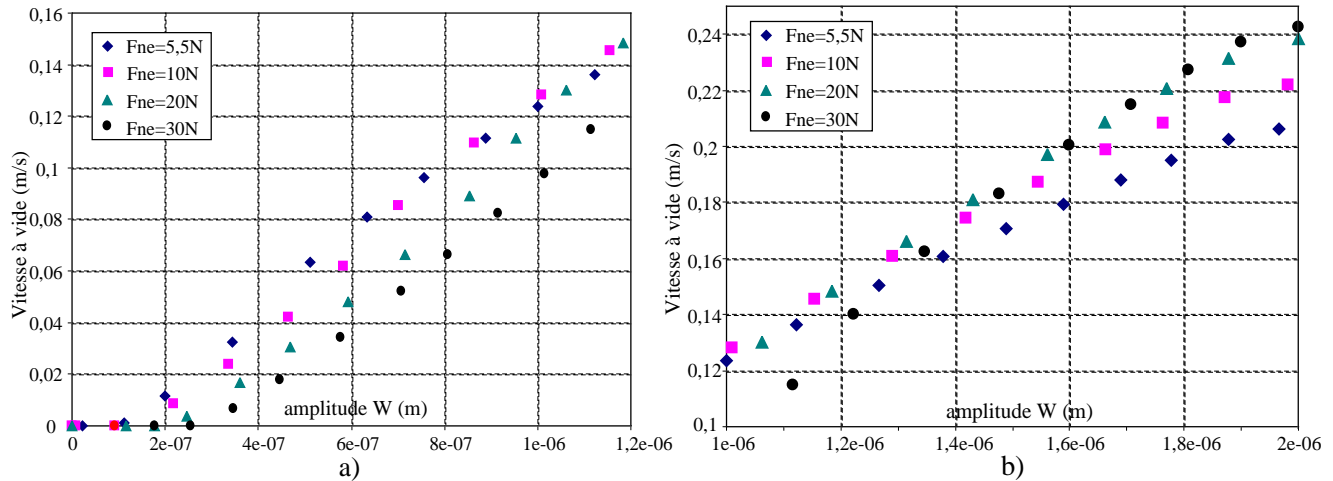


FIG. 3.10 – Caractéristiques des vitesses à vide ( $\mu = 0,08$ )

Ce modèle de connaissance, s'il donne une bonne interprétation du comportement de l'actionneur, présente néanmoins quelques inconvénients ; en effet, les simulations sont réalisées en connaissant a priori l'amplitude vibratoire  $W$  ; l'amplitude est donc une donnée d'entrée du modèle mécanique. Cette hypothèse est justifiée puisque la constante de temps de l'établissement de l'onde, que nous avons déterminée au chapitre précédent, est bien inférieure à celle de  $V_t$ , elle-même dépendante de la masse convoyée et de son inertie. Par contre, le modèle de connaissance ne tient pas compte de l'influence des efforts extérieurs sur l'onde vibratoire. Notons que la relation (2.30) met en évidence cette influence, par l'intermédiaire des forces de réaction modale. De plus, ce modèle nécessite un temps de calcul important, présente des non-linéarités et des discontinuités qui le rendent inapte à la déduction d'une loi de commande.

Par conséquent, pour obtenir un modèle exploitable, nous allons procéder en deux étapes ; tout d'abord nous établirons un modèle instantané simplifié au niveau de l'interface de contact, puis nous en déduirons un modèle moyen linéarisé.

## 3.3 Modèle simplifié instantané

Maintenant que le comportement mécanique a été explicité et les non-linéarités soulignées par le modèle de connaissance, notre étude s'éloigne de la description non-linéaire



du contact pour en adopter une interprétation simplifiée, focalisé sur les phénomènes principaux. Cela implique un domaine de validité du modèle plus restreint compte-tenu des hypothèses simplificatrices qui seront formulées. L'étude est présentée distinctement selon l'axe normal et tangentiel, comme il a été fait pour le modèle de connaissance.

La démarche de modélisation est la suivante : nous décomposons la conversion globale en deux étapes ; la première consiste en une conversion mécano-mécanique "idéale", pour laquelle des hypothèses simplificatrices sont considérées. La seconde étape tiendra compte des conditions de contact mises à jour dans le paragraphe précédent, de manière globale, afin de ne pas alourdir le modèle. Nous limiterons la description de la conversion à un seul pied, en supposant identiques les contacts sur les autres.

Cette démarche est largement inspirée de celle appliquée dans l'étude de l'actionneur à onde progressive [Gir02]. Cependant, une difficulté supplémentaire réside ici dans le fait que les mouvements vibratoires et de translation se développent sur le même support (constitué de l'actionneur et de la masse convoyée). Aussi, pour simplifier l'explication de la conversion mécano-mécanique "idéale", considérons-nous l'actionneur retourné, fixé au bâti, entraînant en translation un plan "idéale", lui-même en contact avec le plan réel (figure 3.11). A noter qu'il s'agit d'un concept purement théorique, le plan neutre étant lié au bâti de façon à annihiler son mouvement de translation sans pour autant changer les conditions d'établissement de l'onde stationnaire.

Ce plan idéal subit les déplacements imposés par le pied, via le point de contact noté  $B$ . L'introduction du plan idéal permet de séparer les difficultés : ainsi nous considérons que la liaison pied-plan idéal est strictement rigide et que les différents comportements élastiques sont reportés à l'interface plan idéal-plan réel. En outre, pour décrire cette transmission au point de contact  $B$ , le plan idéal est considéré sans masse, et ne présente donc aucune inertie. Néanmoins, l'effort de pré-charge noté  $\vec{F}_n$  maintient la liaison mécanique entre le pied et le plan idéal. Enfin, nous considérons que le point  $B$  est en contact permanent avec le plan idéal.

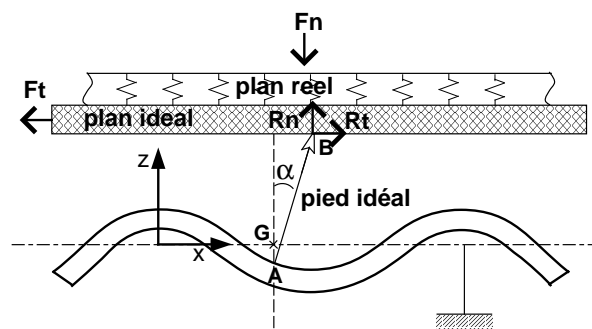


FIG. 3.11 – Représentation schématique de l'interface mécanique idéale

$R_n$  et  $R_t$  sont les efforts de liaison entre le plan idéal et le plan réel, qui se retrouvent, par principe et puisque la masse du plan idéal est nulle, en  $B$ .

### 3.3.1 Description de la liaison pied-plan idéal

Les déplacements des points  $A$  et  $B$  obéissent aux relations (3.1)(3.4) et (3.5). L'expression des déplacements et les hypothèses du dispositif idéal, formulées précédemment, permettent à présent de décrire les vitesses instantanées idéales. Comme le contact idéal est permanent et le pied rigide, la vitesse normale du plan idéal ( $V_{nid}$ ) est celle du point  $B$ , elle-même identique à celle du point  $A$ .

$$\mathbf{R7} : V_{nid} = \dot{w}_B = \dot{w}_A = \Phi_A \cdot \dot{w} \quad (3.13)$$

Quant au comportement idéal selon l'axe tangential, nous le définissons de la façon suivante : selon [Nog96], pour obtenir un déplacement continu à partir d'une vibration d'origine piézoélectrique, l'interface mécanique doit offrir une asymétrie de contact ou une trajectoire de type hystérésis (elliptique). Dans le cas d'une onde stationnaire, seule une asymétrie du contact est possible. Partons de l'asymétrie idéale qui décrit le principe de fonctionnement optimal du translateur. Lors de la phase aller du pied, celui-ci est en adhérence parfaite avec le plan idéal et l'entraîne en déplacement. Lors de la phase retour, le pied est en glissement pur, la force transmise durant cette demi-période de vibration est nulle. Ainsi nous pouvons définir la vitesse tangentielle du plan idéal en fonction de  $\dot{u}_B = \frac{du_B}{dt}$  (fig. 3.12) et d'un terme non-linéaire  $\psi$ ,

$$\mathbf{R8} : V_{tid} = \psi \dot{u}_B = \psi \cdot h \cdot \chi_A \dot{w} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \psi &= 1 & \text{si } \dot{u}_B > 0 \\ \psi &= 0 & \text{si } \dot{u}_B \leq 0 \end{aligned}$$

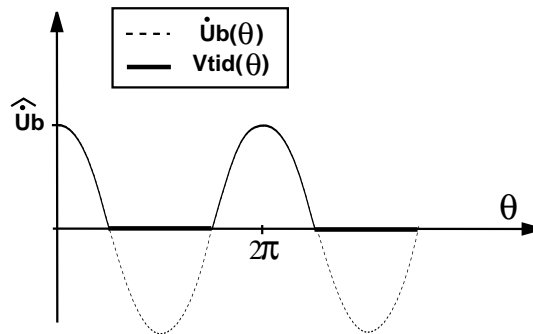


FIG. 3.12 – Représentation de la vitesse tangentielle idéale

### 3.3.2 Description des forces à l'interface plan idéal-plan réel

#### axe normal

La liaison plan idéal-plan réel doit quant à elle prendre en considération autant que faire se peut les conditions réelles du contact. En particulier, dans la réalité, à l'encontre

de ce qui a été supposé pour l'établissement du modèle "idéal", le plan neutre de l'actionneur ne suit pas la coordonnée normale du pied : à cause de son inertie, l'altitude de l'actionneur est quasiment constante sur une période d'oscillation (fig. 3.4). La condition (3.7) et l'équation dynamique (3.8), toujours considérées dans le modèle simplifié, fournissent l'allure de l'effort de réaction normale (fig. 3.13)<sup>3</sup> sur une période quelconque d'oscillation, avec  $\theta = \omega t$ .

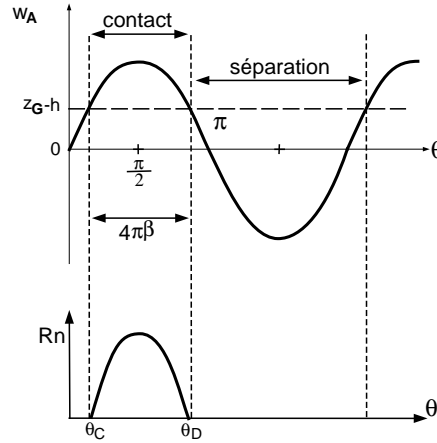


FIG. 3.13 – Effort de réaction normale sur une période de vibration

La phase de contact est centrée sur le point où  $w_A$  est maximum, c'est à dire pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , puisque l'angle formé par le pied par rapport au plan est négligé.

Nous pouvons ainsi définir  $\theta_C$  et  $\theta_D$ , respectivement le début et la fin de la période de contact.

$$\theta_C = \frac{\pi}{2} - 2\pi\beta \quad \theta_D = \frac{\pi}{2} + 2\pi\beta \quad (3.15)$$

avec comme condition sur  $\beta$  les bornes  $]0; \frac{1}{2}]$ . La limite non comprise correspond à un système en décollement permanent, la seconde borne à un contact permanent. La force normale  $R_n$  prend alors deux expressions, conformément à (3.7) :

$$\begin{aligned} &\text{si } \theta \in [\theta_C; \theta_D], \\ &R_n = kn.(h + w_A(\theta) - z_G) - d_n.\dot{z}_G \\ &\text{sinon } R_n = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

ou encore s'écrit sous la forme,

$$R_n = \epsilon_n . [k_n(h + w_A(\theta) - z_G) - d_n\dot{z}_G] \quad (3.17)$$

avec,  $\epsilon_n = 1$  si  $\theta \in [\theta_C, \theta_D]$   
et  $\epsilon_n = 0$  ailleurs.

<sup>3</sup>note : les caractéristiques de cette figure sont inversées par rapport à la (fig. 3.4) du fait du retournement de l'actionneur

Dans cette expression (3.17), on retrouve le coefficient d'élasticité du pied  $k_n$ , ainsi que le coefficient d'amortissement  $d_n$  précédemment introduits en (3.7).

### axe tangentiel

En ce qui concerne le comportement selon l'axe tangentiel, trois phases aux conditions de contact différentes se distinguent sur une période d'oscillation, soulignées par le modèle de connaissance. Comme sur la voie normale, les phases de décollement entraînent la disparition du lien mécanique. De plus le modèle de connaissance montre que lors des phases de contact apparaissent distinctement des phases d'adhérence, des phases de glissement et de contre-glissement [LJF00]. Cela dit, pour modéliser la relation plan idéal-plan réel au niveau tangentiel et définir  $R_t$ , guidés par les chronogrammes obtenus (fig. 3.6 et 3.7), nous supposons un effort de frottement entre les deux plans tant qu'il y a contact, et conformément à l'hypothèse du paragraphe §3.3.1, un effort nul durant la rétraction du pied. Les phases de glissement sont décrites par la loi de Coulomb. La figure (fig. 3.14) illustre l'effort de réaction tangentiel sur une période d'oscillation.

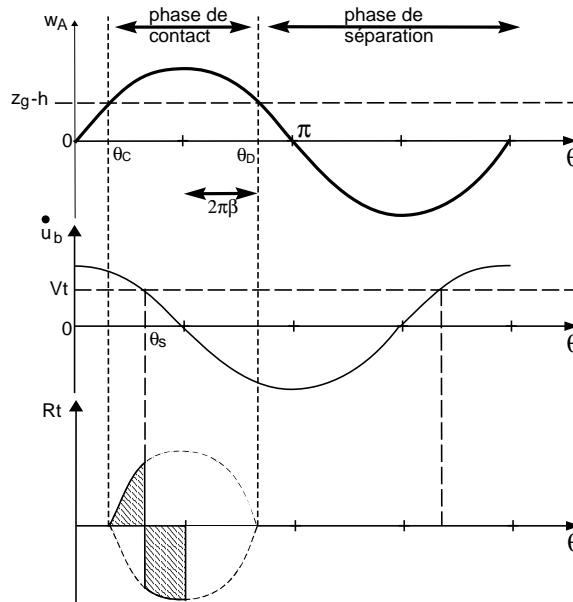


FIG. 3.14 – Illustration de l'effort tangentiel sur une période de vibration

Ainsi, nous pouvons décrire l'effort tangentiel en fonction du coefficient de frottement  $\mu$  du couple de matériau pied/substrat.

$$\text{Si } \theta \in [\theta_C; \frac{\pi}{2}]$$

$$R_t(\theta) = \mu \cdot \text{sign}(\dot{u}_B - V_t) \cdot R_n(\theta) \quad (3.18)$$

$$\text{sinon } R_t = 0.$$

Ce qui peut aussi s'écrire

$$R_t(\theta) = \epsilon_t \mu \text{sign}(\dot{u}_B - V_t) R_n(\theta) \quad (3.19)$$

avec,  $\epsilon_t = 1$  si  $\theta \in [\theta_C; \frac{\pi}{2}]$   
 et  $\epsilon_t = 0$  ailleurs.

On introduit  $\theta_S \in [\theta_C; \theta_D]$ , l'instant pour lequel la vitesse de glissement change de signe durant la phase de contact. Sur une période d'oscillation en considérant l'amplitude  $W$  constante,  $\theta_S$  est obtenu par l'égalité entre la vitesse tangentielle  $V_t$  et la vitesse libre du pied  $\dot{u}_B$  et donne l'équation :

$$\cos(\theta_S) = \frac{V_t}{W \cdot \omega \cdot \chi_A \cdot h} \quad (3.20)$$

Pour terminer la description du modèle simplifié, les équations fondamentales de la dynamique, appliquées au plan réel sont équivalentes à celles présentées lors du modèle de connaissance (3.8)(3.11).

## 3.4 Modèle linéaire moyen

Les relations instantanées établies précédemment font apparaître des non-linéarités d'une part, et d'autre part, la co-existence de phénomènes "vibratoires" haute fréquence, et mécaniques beaucoup plus lents. Soucieux de contrôler ultérieurement les grandeurs mécaniques de l'actionneur, nous allons donc établir un modèle linéarisé moyen, fidèle à leur évolution. Pour cela, nous considérerons les valeurs moyennes glissantes des grandeurs mécaniques [SNLV91]. Par ailleurs, nous adopterons l'hypothèse d'une pulsation vibratoire  $\omega$  quasi-constante (**H1**) pour les raisons énoncées §2.5.4.

### 3.4.1 Vitesses idéales normale et tangentielle

La valeur moyenne glissante de la vitesse normale idéale  $\langle V_{nid} \rangle^{12}$  peut s'écrire sur une période vibratoire, selon l'expression :

$$\langle V_{nid} \rangle (t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t V_{nid}(u) \cdot du \quad (3.21)$$

Compte-tenu de (3.1), il vient

$$\begin{aligned} \langle V_{nid} \rangle (t) &= \frac{\Phi_A}{T} [w]_{t-T}^t \\ \langle V_{nid} \rangle (t) &= \Phi_A \left[ \frac{W(t) - W(t-T)}{T} \right] \cdot \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

soit encore,

$$\langle V_{nid} \rangle (t) = \Phi_A \langle \dot{W} \rangle \sin(\omega t) \quad (3.23)$$

On note que l'amplitude de la valeur moyenne de cette vitesse normale est proportionnelle à la dérivée temporelle de l'amplitude vibratoire :

---

<sup>12</sup>La notation  $\langle X \rangle$  est prise pour définir la valeur moyenne sur une période de vibration de pulsation  $\omega$ , ce terme restant dépendant du temps pour des variations dynamiques plus lentes

$$\langle V_{nid} \rangle (t) = \langle V_{nid} \rangle_c \sin(\omega t)$$

$$\text{avec } \langle V_{nid} \rangle_c = \Phi_A \langle \dot{W} \rangle$$

Pour la vitesse tangentielle idéale, sa valeur moyenne glissante  $\langle V_{tid} \rangle$  s'obtient de façon similaire :

$$\langle V_{tid} \rangle (t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t V_{tid}(u) . du \quad (3.24)$$

A partir de l'hypothèse de faibles variations de l'amplitude  $W(t)$  sur une période de vibration (**H2**). Nous pouvons considérer l'intégration (3.24), équivalente à une intégration bornée sur une période. Ceci donne donc la moyenne glissante quelque soit  $t$  ;

$$\langle V_{tid} \rangle (t) \approx \frac{2.h.\chi_A}{T} \langle W \rangle = \frac{h}{\pi} \chi_A \omega \langle W \rangle \quad (3.25)$$

La valeur moyenne de la vitesse tangentielle est donc proportionnelle au produit pulsation-amplitude vibratoire.

### 3.4.2 Forces normale et tangentielle moyennes

Les forces tangentielle et normale mises à jour au paragraphe §3.3.2 laissent apparaître elles aussi des non-linéarités. Suivant la même approche que celle du paragraphe précédent, nous allons définir les valeurs moyennes glissantes de ces forces, en cherchant à y faire apparaître les grandeurs  $\langle V_{nid} \rangle$  et  $\langle V_{tid} \rangle$ .

#### Branche motionnelle normale

Afin de résoudre le comportement mécanique moyen sur la voie normale, et en accord avec le modèle de connaissance, les phases de décollement et de contact sont considérées périodiques et de même fréquence que l'onde de vibration (**H3**).

La valeur moyenne glissante de la force normale  $\langle R_n \rangle$  sur une période vibratoire s'écrit :

$$\langle R_n \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t R_n(u) . du \quad (3.26)$$

Là encore, compte-tenu du caractère non linéaire de la fonction  $R_n$  (figure 3.4), il est nécessaire de décomposer l'intégration selon l'instant  $t$ . Toutefois, comme dans le calcul de  $\langle V_{tid} \rangle$ , nous considérons valable l'intégration bornée pour toute valeur de  $t$ , du fait de la faible variation de  $W$  sur une période.

$$\langle R_n \rangle (t) = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{4}-\beta_n T}^{\frac{T}{4}+\beta_n T} [k_n(h - z_G(u) + w_A(u)) - d_n \cdot \dot{z}_G] . du \quad (3.27)$$

$\beta_n$  est le paramètre qui caractérise le temps du contact pour la période d'oscillation  $n$  quelconque. Sur chaque intervalle d'intégration, on considère que l'amplitude vibratoire  $W$  est constante, ainsi que l'ordonnée du centre de gravité partiel. En conséquence,

$$\langle R_n \rangle (t) \approx k_n(h - \langle z_G \rangle) + k_n \frac{\langle W \rangle \Phi_A}{\pi} \sin(2\pi \langle \beta \rangle) \quad (3.28)$$

Considérons maintenant un fonctionnement autour d'une valeur donnée de  $\beta$ ,  $\beta_0$ , définie pour une amplitude d'onde  $W_0$  en régime permanent :

$$W(t) = W_0 + \delta W, \quad \langle R_n \rangle (t) = R_{n0} + \delta R_n \quad \text{et} \quad \beta(t) = \beta_0 + \delta \beta \quad (3.29)$$

Après calculs est obtenu :

$$\delta R_n = -2\beta_0 k_n \delta z_G + k_n \frac{\Phi_A \delta W}{\pi} \sin(2\pi \beta_0) \quad (3.30)$$

Le calcul de  $\beta_0$  au point de fonctionnement sera détaillé lors de la présentation des résultats du modèle moyen §3.5.1.

A l'instar de la démarche développée dans [Gir02], et guidés par le comportement élastique des pieds de l'actionneur, nous pouvons assimiler le comportement selon l'axe normal à un élément accumulateur d'énergie élastique sous la forme ;

$$Rn = K_n \int (V_{nid} - V_n).dt \quad (3.31)$$

En faisant intervenir les dérivées temporelles des variables dans (3.30), nous pouvons approcher la forme de la relation (3.31) :

$$\langle R_n \rangle (t) \approx 2.\beta_0 k_n \int_0^t \left( \frac{\Phi_A \sin(2\pi \beta_0)}{2\pi \beta_0} \langle \dot{W} \rangle (u) - \dot{z}_G(u) \right).du \quad (3.32)$$

soit encore,

$$\mathbf{R17} : \langle R_n \rangle (t) \approx 2.\beta_0 k_n \int_0^t \left( \frac{\Phi_A \sin(2\pi \beta_0)}{2\pi \beta_0} \langle \dot{W} \rangle (u) - V_n(u) \right).du \quad (3.33)$$

Cette expression peut être effectivement rapprochée de l'équation (3.31) ; cependant nous ne retrouvons pas explicitement  $\langle V_{nid} \rangle$  donnée en (3.23). Ceci peut s'expliquer par le fait que le contact soit intermittent. En effet, la variation rapide de  $\langle V_{nid} \rangle$ , due au terme en  $\sin(\omega t)$  est filtrée par l'inertie du processus réel. Nous noterons  $\langle V_{nvide} \rangle$  cette vitesse.

$$\mathbf{R16} : \langle V_{nvide} \rangle = \frac{\Phi_A \sin(2\pi \beta_0)}{2\pi \beta_0} \langle \dot{W} \rangle = \frac{\sin(2\pi \beta_0)}{2\pi \beta_0} \langle V_{nid} \rangle_c \quad (3.34)$$

Par ailleurs, l'équation de la dynamique sur la voie normale s'écrit, selon l'expression (3.8) en prenant en compte l'amortissement élastique du pied,

$$\mathbf{R18} : \frac{m}{n} \dot{V}_n + D_n V_n = \langle R_n \rangle - \frac{F_n}{n} - \frac{m}{n} g \quad (3.35)$$

avec  $D_n = 2\beta_0.d_n$ , pour tenir compte du rapport de l'intervalle de contact ( $4\pi\beta_0$ ), sur une période angulaire.

### Branche motionnelle tangentielle

Pour établir le comportement moyen sur la branche tangentielle, de nouvelles hypothèses sont énoncées en accord avec les observations du modèle de connaissance ;

- **H4** : la vitesse tangentielle de l'actionneur  $V_t$  est constante sur une période d'oscillation
- **H5** : la loi de coulomb est formulée à partir d'un coefficient de frottement dynamique  $\mu$  constant comme introduit §3.1 (p.88) en raison de la topologie du substrat et de l'amplitude des déplacements.

En suivant une démarche similaire à celle adoptée au paragraphe précédent, il s'agit maintenant de calculer la valeur moyenne de la force tangentielle  $R_t$ .

$$\langle R_t \rangle (t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t R_t(u).du \quad (3.36)$$

En adoptant les mêmes notations, et selon l'expression de  $R_t$  (3.18), il vient

$$\langle R_t \rangle (t) = \frac{1}{T} \left[ \int_{\frac{T}{4} - \beta_n T}^{T_{sn}} \mu.R_n(u).du - \int_{T_{sn}}^{\frac{T}{2}} \mu.R_n(u).du \right] \quad (3.37)$$

avec  $\omega T_{sn} = \theta_{sn}$ , défini figure (fig. 3.14), l'instant auquel la vitesse relative du pied est égale à la vitesse de l'actionneur à une période  $n$ . Comme précédemment, nous nous plaçons autour d'un point de fonctionnement caractérisé par  $W_0, \beta_0$ . Dans ces conditions, le calcul de  $\langle R_t \rangle$  aboutit après développement :

$$\langle R_t \rangle = \frac{\mu k_n}{2\pi} (h - \langle z_G \rangle) (2\theta_s - \pi + 2\pi\beta_0) + \frac{\mu k_n \Phi_A \langle W \rangle}{2\pi} (\sin(2\pi\beta_0) - 2\cos(\theta_s)) \quad (3.38)$$

En utilisant la définition de  $\beta$  sur une période de vibration :

$$z_G - h = W \Phi_A \sin(\theta_C) = W \Phi_A \cos(2\pi\beta) \quad (3.39)$$

l'expression de  $R_t$  devient

$$\langle R_t \rangle = \frac{\mu k_n \Phi_A \langle W \rangle}{2\pi} [(\pi - 2\theta_s - 2\pi\beta_0) \cos(2\pi\beta_0) + \sin(2\pi\beta_0) - 2\cos(\theta_s)] \quad (3.40)$$

Par l'usage du développement limité du terme  $\cos(\theta_s)$ , et l'expression de la vitesse tangentielle (3.20), nous vérifions l'évolution linéaire pour  $V_t$  positif de la caractéristique  $R_t = f(V_t, \langle W \rangle)$ .

Autour d'un point de fonctionnement caractérisé par une hauteur d'onde  $W_0$ , la force tangentielle moyenne avec la prise en compte de l'intermittence de contact peut finalement s'écrire :

$$\mathbf{R20} : \langle R_t \rangle = F_0(K_{id} \langle V_{tid} \rangle - V_t) = F_0(V_{tvide} - V_t) \quad (3.41)$$

avec

$$K_{id} = \pi \cos \left( \cos(2\pi\beta_0) + (\cos(2\pi\beta_0))^2 + 2 - \sin(2\pi\beta_0) + (2\pi\beta_0 - \pi) \cos(2\pi\beta_0) \right)^{1/2} \quad (3.42)$$



$$F_0 = -\frac{(2\pi\beta_0 \cos(2\pi\beta_0) - \sin(2\pi\beta_0)) \phi_A \mu kn}{K_{id} \chi_A h \omega} \quad (3.43)$$

et  $V_{vide}$ , la vitesse pour laquelle  $\langle R_t \rangle$  est nulle.

$$\mathbf{R19} : \langle V_{vide} \rangle = K_{id} \frac{h\chi_A}{\pi} \omega \langle W \rangle \quad (3.44)$$

Une fois encore, la relation (3.41) est comparable à celle utilisée dans le cadre du moteur à onde progressive par [Gir02]. Celle-ci décrit un frottement visqueux à partir de la vitesse à vide, de la vitesse réelle sur l'axe tangentiel, et d'un coefficient de frottement équivalent. On constate donc qu'à partir d'une relation représentative d'un frottement sec (3.18) à l'échelle vibratoire, on aboutit finalement à une relation apparentée à un frottement visqueux au niveau global. Nous constatons également par les relations (3.43) et (3.42), l'influence de la branche motionnelle normale sur les caractéristiques tangentielles en traction, par l'intermédiaire du terme  $\beta_0$ . Ce terme porte aussi bien sur la valeur de la vitesse à vide que sur le coefficient de frottement visqueux  $F_0$ .

A présent, l'équation de la dynamique sur la voie tangentielle moyenne s'écrit selon (3.11),

$$\mathbf{R21} : \left(\frac{m + M_{ext}}{n}\right) \dot{V}_t = \langle R_t \rangle - \frac{F_t}{n} \quad (3.45)$$

### 3.4.3 Expression du modèle mécanique dans le repère tournant

Nous avons introduit au cours de l'interprétation du comportement vibratoire §2.5.3, l'usage de la transformée cissoïdale pour mettre en évidence les avantages de l'asservissement de phase et ainsi développer une méthode d'identification. A l'instar des travaux de [Gir02], cette transformation va également permettre de décrire le comportement mécanique selon deux branches motionnelles distinctes, soient la branche normale et la branche tangentielle.

#### Définition d'un nouveau repère

Comme il a été démontré lors de l'étude du comportement moyen, les vitesses idéales moyennes normale (3.23) et tangentielle (3.25) sont respectivement dépendantes des termes  $\langle \dot{W} \rangle$  et  $\omega \langle W \rangle$ .

Or, par définition, la dérivée du déplacement vibratoire (3.1) à pulsation constante, donne l'expression de la vitesse de vibration (3.46).

$$\dot{w}(t) = \dot{W} \sin(\omega t) + \omega W \cos(\omega t) \quad (3.46)$$

Constatons que les termes influants sont nos vitesses, respectivement portées par le sinus et le cosinus. La définition de la transformée cissoïdale [Rou99] nous autorise à définir la variable complexe  $\underline{w}$  déjà introduite au §2.5.3,

$$\underline{w} = W(t).e^{j\omega t}$$

à laquelle on associe un vecteur tension  $\underline{v}$  tel que,

$$\underline{v} = V.e^{j\omega t}.e^{j\phi} \quad (3.47)$$

avec  $\phi$ , le déphasage entre la tension et l'onde vibratoire. La dérivée temporelle de l'onde stationnaire complexe s'écrit alors

$$\underline{\dot{w}} = (\dot{W} + j\omega W) e^{j\omega t}$$

La multiplication de la variable complexe  $\underline{\dot{w}}$  par  $e^{-j\omega t}$ , fournit un nouveau vecteur d'espace ( $d$  et  $q$ ).

$$\mathbf{R14} : \underline{\dot{w}}e^{-j\omega t} = \dot{W} + j\omega W \quad (3.48)$$

Cette transformation nous permet de relier les vitesses tangentielle et normale à la voie  $q$  et  $d$  respectivement appelés axe imaginaire et axe réel au §2.5.3.

### Force de réaction modale moyenne

Lors de la mise en œuvre du modèle de connaissance, l'influence des efforts extérieurs sur l'amplitude d'onde vibratoire a été négligée; nous allons à présent la prendre en compte. Nous pouvons écrire la puissance  $p$ ,

$$p = \mathcal{R}_e[-\underline{f}_{reac}.\underline{\dot{w}}^*] \quad (3.49)$$

Cette expression est également valable dans le repère  $(d, q)$  :  $p = \mathcal{R}_e[-\underline{f}_{reac}_{dq}.\underline{\dot{w}}_{dq}^*]$ .

Par ailleurs, la puissance des efforts moyens, appliqués au point B dont les vitesses moyennes peuvent être assimilées à  $V_{tvide}$  et  $V_{nvide}$  s'écrit également ;

$$p = \begin{pmatrix} -\langle R_n \rangle \\ 0 \\ -\langle R_t \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{nvide} \\ 0 \\ V_{tvide} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

d'où,

$$p = -\langle R_t \rangle \frac{K_{id}h\chi_A}{\pi}\omega W - \langle R_n \rangle \frac{\sin(2\pi\beta_0)\Phi_A}{2\pi\beta_0}\dot{W} \quad (3.51)$$

Compte-tenu de l'écriture (3.50) de  $p$ , nous pouvons identifier :

$$\mathbf{R22} : F_{rd} = \langle R_n \rangle \frac{\sin(2\pi\beta_0)\Phi_A}{2\pi\beta_0} \quad (3.52)$$

$$F_{rq} = \langle R_t \rangle \frac{K_{id}h\chi_A}{\pi}$$

Quant à  $\underline{f}_{reac}$ , elle peut s'obtenir par ;

$$\underline{f}_{reac} = e^{j\omega t} \underline{f}_{reac(d,q)} \quad (3.53)$$

Notons cependant, que cette transformation permet uniquement de visualiser le problème mécanique selon chaque branche motionnelle, mais ne souligne pas un réel découplage mécanique. En effet, contrairement à l'actionneur à onde progressive et sa modélisation selon le repère  $dq$  [Gir02], où les deux branches motionnelles trouvent un attachement physique avec les deux tensions d'alimentation en quadrature, par le biais de la matrice de rotation du point de contact stator-rotor, nous avons utilisé dans notre cas de la création d'une voie en quadrature imaginaire. Cela a permis d'extraire dans notre nouveau repère les vitesses idéales normale et tangentielle, et également de mettre en évidence l'asservissement de phase. Ceci étant, nous ne pouvons donc pas prétendre asservir distinctement les deux branches motionnelles, puisque celles-ci sont dépendantes des mêmes grandeurs physiques soient  $V$ , l'amplitude de la tension d'alimentation et  $\phi$  le déphasage entre tension et amplitude vibratoire.

Les grandeurs de contrôle de chaque branche motionnelle sont couplées par la relation :

$$V = \sqrt{V_d^2 + V_q^2} \quad (3.54)$$

La tension d'alimentation  $V$  est maintenue constante, si bien que le contrôle en  $V_q$  est obtenu en imposant la phase  $\phi$  telle qu'il a été présenté lors de l'identification §2.6. Ainsi, la force de réaction modale  $F_{rd}$  entraîne inévitablement la variation de  $V_d$  et donc de  $V_q$ . Ce couplage sera mis en évidence lors des essais expérimentaux mécaniques.

### 3.4.4 Représentation du modèle moyen par GIC

L'équation du domaine vibratoire, l'étude du comportement moyen de l'interface mécanique, l'identification des phénomènes liés à l'intermittence de contact et la mise en oeuvre du modèle vectoriel, permettent finalement de représenter le modèle linéarisé complet sous la forme de GIC (Graphe Informationnel Causal).

A partir des relations de la conversion électro-mécanique (2.82) et de l'interface mécanique idéalisée (3.33...3.52), rappelées (tab. 3.1), est établi le modèle complet (figure 3.15). Cette représentation énergétique et causale du système met en exergue les principales conversions d'énergies. On souligne également la représentation distincte selon deux branches motionnelles suivant l'axe normal et tangentiel, et ce malgré le lien qui unit le comportement tangent au comportement hors-plan. Ce couplage est représenté par le paramètre  $\beta_0$  déduit du point de fonctionnement caractérisé par  $W_0$ .

Effectivement, l'importante influence de la non-linéarité sur les caractéristiques Force-Vitesse, nous oblige à considérer le modèle valable autour d'un point de fonctionnement.

## 3.5 Résultats du modèle moyen : comparaisons avec les résultats expérimentaux de [Fer02]

Le modèle défini précédemment a fait l'objet de simulations en régime transitoire, et en régime permanent, afin de comparer ses résultats à ceux issus du modèle de connaissance et aux résultats expérimentaux obtenus par [Fer02]; rappelons que celui-ci décrit plus précisément les phénomènes tribologiques. En effet, la prise en compte des phases de

3.5. Résultats du modèle moyen : comparaisons avec les résultats expérimentaux de [Fer02]

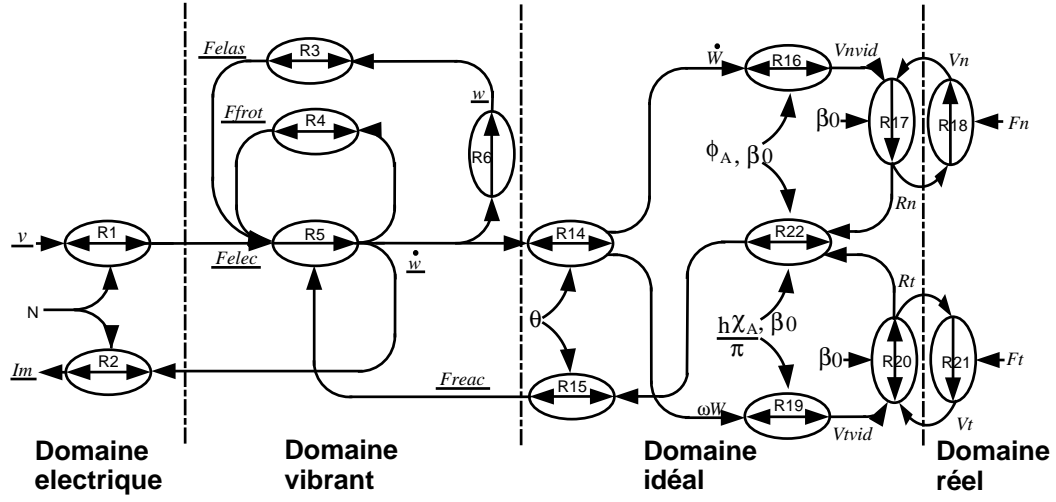


FIG. 3.15 – GIC complet du modèle moyen avec prise en compte de l’intermittence de contact

Processeurs	Relations
<b>R1</b>	$\underline{F}_{elec} = N \cdot \underline{v}$
<b>R2</b>	$\underline{I}_m = N \cdot \underline{\dot{w}}$
<b>R3</b>	$\underline{F}_{elas} = c \cdot \underline{w}$
<b>R4</b>	$\underline{F}_{frot} = d_s \cdot \underline{\dot{w}}$
<b>R5</b>	$\underline{\dot{w}} = 1/m \int_0^t (F_{elec} - F_{frot} - F_{elas} - F_{reac}) \cdot dt$
<b>R14</b>	$\underline{\dot{w}} = (\dot{W} + j\omega W) e^{j\omega t}$
<b>R15</b>	$\underline{F}_{reac} = e^{-j\omega t} F_{rdq}$
<b>R16</b>	$V_{nvid} = \frac{\Phi_A \sin(2\pi\beta_0)}{2\pi\beta_0} \langle \dot{W} \rangle$
<b>R17</b>	$\langle R_n \rangle (t) \approx 2 \cdot \beta_0 k_n \int_0^t (V_{nvide} - V_n(t)) \cdot dt$
<b>R18</b>	$\dot{V}_n = n/m \int_0^t (\langle R_n \rangle - \frac{F_n}{n} - \frac{m}{n} g - D_n V_n) \cdot dt$
<b>R19</b>	$V_{tvid} = K_{id} \frac{h\chi_A}{\pi} \omega \langle W \rangle$
<b>R20</b>	$R_t = F_0 (V_{tvide} - V_t)$
<b>R21</b>	$V_t = (\frac{n}{m+M_{ext}}) \int_0^t (\langle R_t \rangle - \frac{F_t}{n}) \cdot dt$
<b>R22</b>	$F_{rd} + F_{rq} = R_n \frac{\sin(2\pi\beta_0)\Phi_A}{2\pi\beta_0} + R_t \frac{K_{id} h\chi_A}{\pi}$

TAB. 3.1 – Relations rigides ou causales du graphe causal

contact, glissement, contre-glissement et séparation à chaque période de vibration donne

une description fidèle, mais non-linéaire et complexe de l'interface.

Pour simuler le modèle moyen, les paramètres utilisés sont ceux de la référence [LJF00], rappelés en annexe C. A noter que [Fer02][LJF00] décrivent les méthodes d'identification des différents paramètres mécaniques (élasticités, coefficient de frottement...).

### 3.5.1 branche motionnelle normale

Le modèle moyen sur l'axe normal, défini à partir de (3.33)(3.35) et (3.56), est comparé au modèle instantané non-linéaire de l'axe normal obtenu par les relations (3.7) et (3.8). Pour conserver un modèle simple, les variations dynamiques de  $\beta$  sont négligées, pour finalement ne considérer qu'une valeur constante  $\beta_0$ , définie pour une entrée  $W_0$  en régime permanent que nous appellerons le point de fonctionnement.

Il faut donc définir l'effort de réaction moyen  $\langle R_{n0} \rangle$  obtenu pour le point de fonctionnement. A cette fin, l'équation du PFD (3.8) est résolue en régime établi, considérant l'effort de pré-contrainte réalisé par la masse convoyée  $M_{ext}$ , ce qui donne ;

$$\langle R_{n0} \rangle = \frac{F_n}{n} = \frac{M_{ext} + m}{n} g \quad (3.55)$$

Il reste à exprimer le terme  $\beta_0$  à partir de la relation (3.30). La définition de l'ordonnée  $z_G$  (3.39), résolue à l'instant  $\theta_C$  donne une nouvelle expression de  $\langle R_{n0} \rangle$ ,

$$\langle R_{n0} \rangle = \frac{k_n W_0 \Phi_A}{\pi} [\sin(2\pi\beta_0) - 2\pi\beta_0 \cos(2\pi\beta_0)] \quad (3.56)$$

Cependant, pour obtenir  $\beta_0$ , la relation (3.56) n'a pas de solution formelle, et il faut donc approcher la fonction  $[\sin(2\pi\beta_0) - 2\pi\beta_0 \cos(2\pi\beta_0)]$  soit, par une fonction exponentielle (fig. 3.16), soit encore par une approximation numérique, plus précise aux alentours des limites de la fonction.

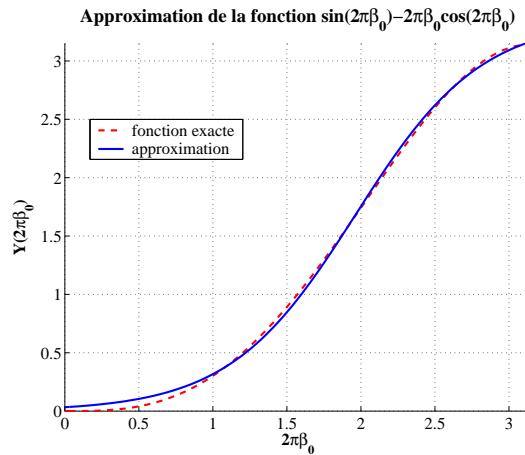


FIG. 3.16 – Fonction approchée pour la détermination de  $\beta_0$

La figure (fig. 3.17) illustre la variation de l'ordonnée  $z_G$  du centre de gravité partiel, obtenue pour une variation de l'amplitude vibratoire  $W$  autour du point de fonctionne-

ment. Une bonne concordance des résultats est remarquée entre le modèle non-linéaire de [Fer02] et le modèle moyen proposé.

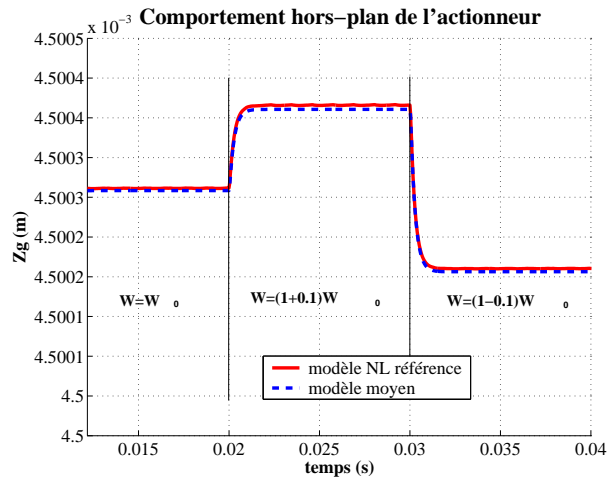


FIG. 3.17 – Comportement dynamique selon l'axe normal : comparaison de modèles

En raison de l'hypothèse de faibles variations autour du point de fonctionnement  $W_0$ , le choix de ce dernier est décisif sur l'erreur finale entre les modèles instantané non-linéaire et moyen. Ainsi, la figure (fig. 3.18) illustre le taux de séparation obtenus par le modèle moyen pour différents points de fonctionnement. Le choix  $W_0 = 1\mu m$  fournit l'erreur la plus faible sur la plage de variation considérée ( $W \in [0; 2\mu m]$ ).

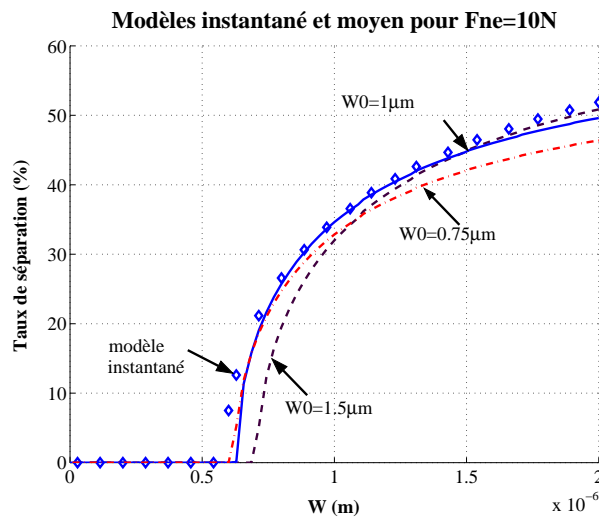


FIG. 3.18 – Taux de séparation obtenu par les modèles moyen et instantané

### 3.5.2 branche motionnelle tangentielle

Les performances dynamiques sont dépendantes du type de substrat sur lequel évolue l'actionneur. Si le choix du matériau a des conséquences faibles sur le comportement hors-

plan (car le substrat est considéré rigide et indéformable), par contre, les performances en traction se verront fortement dépendantes du coefficient de frottement de l'interface. Pour cette raison, la (fig. 3.19) donne le comportement dynamique sur un substrat de verre ( $\mu = 0,08$ ) et d'acier ( $\mu = 0,2$ ). Il apparaît clairement que le choix du couple de

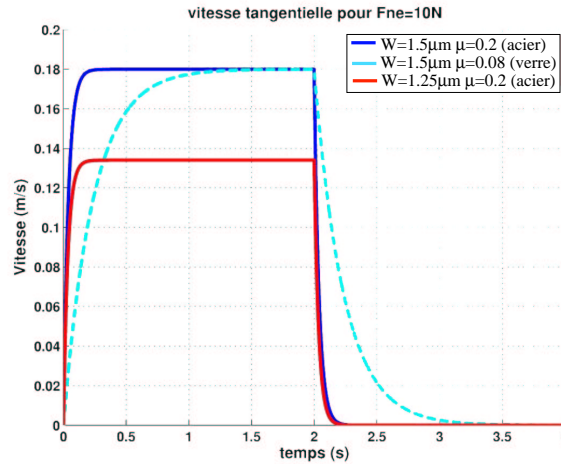


FIG. 3.19 – Vitesses tangentielles à vide pour différentes amplitudes de vibration et différents coefficients de frottement

matériau pied-bâti influe sur le comportement transitoire. Ce coefficient de frottement a également une importante influence sur l'effort maximal que le dispositif peut fournir, et globalement sur la puissance mécanique, mise en évidence par les caractéristiques (fig. 3.8 et 3.9).

Sur la figure 3.20 sont représentées les caractéristiques Force-Vitesse pour différentes configurations d'efforts de pré-contrainte et d'amplitudes vibratoires, et comparées aux résultats expérimentaux [Fer02]. Pour les configurations d'efforts de pré-contrainte les plus faibles (fig. 3.20 .a et .b), il existe une bonne concordance entre les résultats de simulation et la pente moyenne des caractéristiques expérimentales. Effectivement, pour ces faibles pré-contraintes normales la phase de séparation est importante ; cela réduit d'autant la phase de freinage durant la rétraction du pied ( $\dot{u}_B < 0$ ), se rapprochant ainsi de l'hypothèse simplificatrice **H0**. En revanche, pour les configurations de la figure (fig. 3.21 .c et .d), un écart est remarquable entre la vitesse à vide expérimentale et simulée. Cette différence tient à la procédure expérimentale mise en œuvre par [LJF00] : pour obtenir ces caractéristiques, l'acquisition est faite dès la mise sous tension. La courbure à l'origine observée sur ces caractéristiques disparaît d'ailleurs lors des essais expérimentaux sur substrat d'acier figure (fig. 3.22) puisque le régime transitoire est beaucoup plus court dans ce cas.

Lorsque que l'effort de pré-contrainte normal est relativement faible, les phases durant lesquelles les pieds sont en adhérence sont réduites, si bien que le comportement réel s'approche encore de l'hypothèse d'un contact uniquement en glissement. Par contre, notre modèle simplifié rencontre ses limites de validité lorsque l'effort de pré-contrainte est trop important et l'amplitude vibratoire trop faible pour laisser apparaître des phases de

3.5. Résultats du modèle moyen : comparaisons avec les résultats expérimentaux de [Fer02]

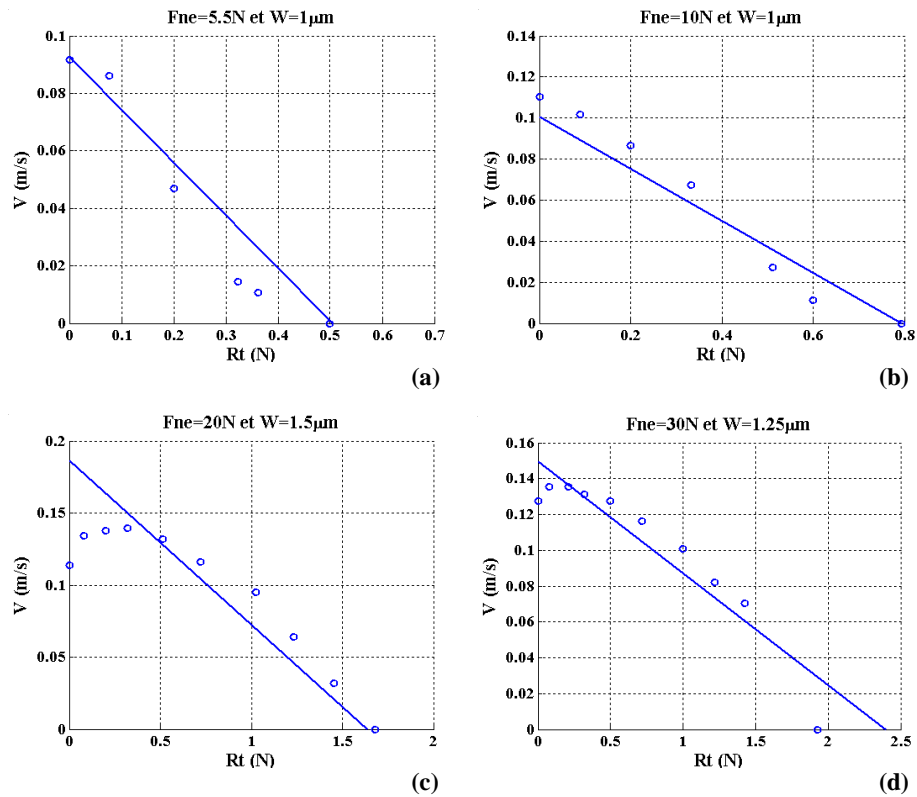


FIG. 3.20 – Caractéristiques Force-Vitesse sur substrat de verre ( $\mu = 0,08$ ) pour différentes configurations ; expérimentales (points), simulations (pleines)

séparation. La figure (fig. 3.21) illustre les caractéristiques obtenues pour des conditions satisfaisant un contact permanent ( $\beta = 1/2$ ) sur toute la durée de la période vibratoire. Un écart important est ici remarquable entre la caractéristique réelle et la simulation.

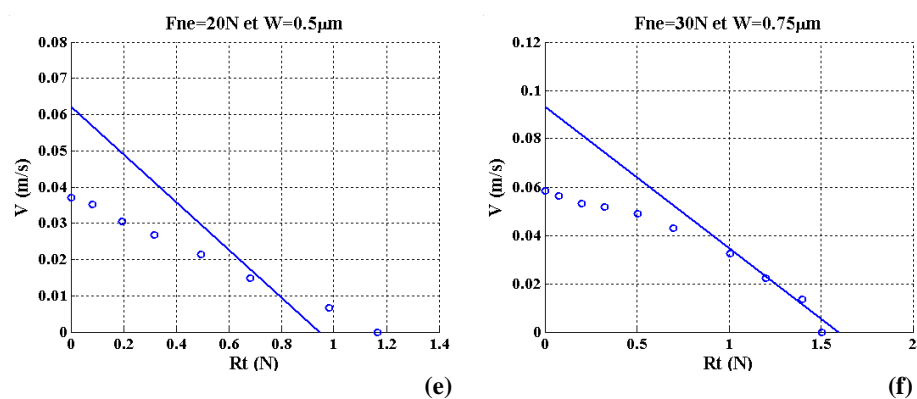


FIG. 3.21 – Caractéristiques Force-Vitesse sur verre ( $\mu = 0,08$ ) pour des configurations au contact permanent ; expérimentales (points), simulations (pleines)

Cette fois, l'absence ou la faible durée des phases de séparation implique que les phases de freinage deviennent non négligeables. Cet effort non pris en compte dans notre approche



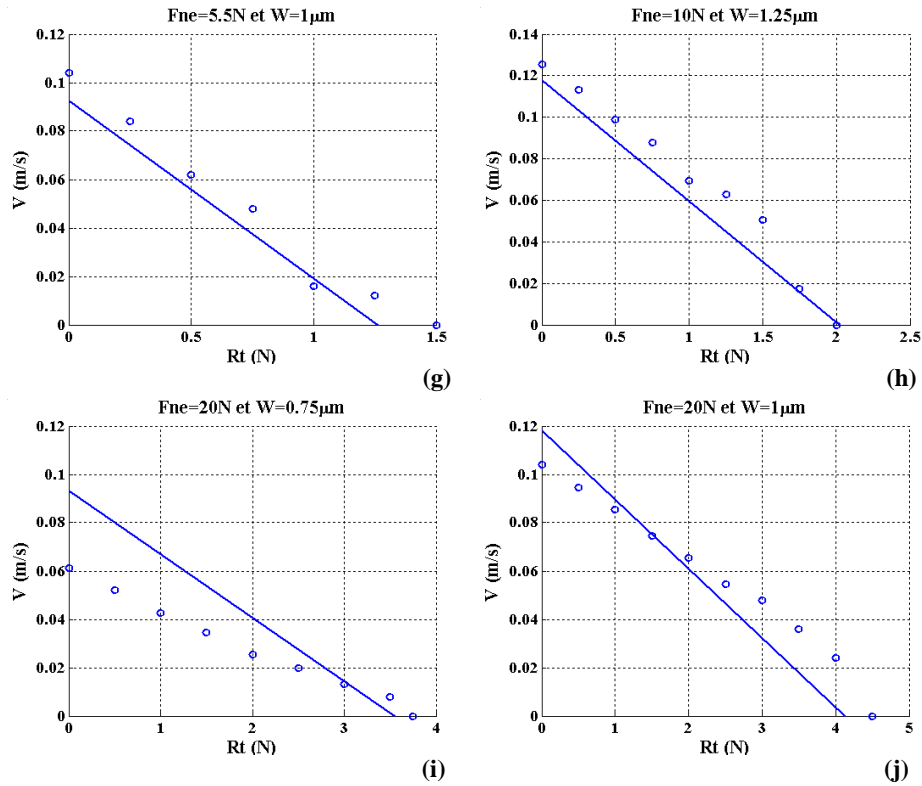


FIG. 3.22 – Caractéristiques Force-Vitesse sur acier ( $\mu = 0, 2$ ); expérimentales (points), simulations (pleines)

amène alors à surestimer la vitesse à vide. Cette erreur diminue avec le chargement tangentiel du dispositif car l'adhérence diminue au profit de phases de glissement.

Les mêmes caractéristiques Force-Vitesse sont tracées pour un substrat en acier ( $\mu = 0, 2$ ) (fig. 3.22). On constate à nouveau une concordance satisfaisante avec les résultats expérimentaux, sauf comme précédemment pour la figure (fig. 3.22.i) au contact permanent. Par la comparaison des figures (fig. 3.20.a) et (fig. 3.22.g), on constate que la vitesse à vide reste inchangée alors que l'effort de traction maximal est bien plus important dans la seconde configuration.

Les caractéristiques précédentes ont montré, pour différentes configurations vibratoires et de précharge, la cohérence avec les différents relevés expérimentaux entrepris par [Fer02] dans les limites du modèle. Nous ajoutons une caractéristique de simulation pour une précharge constante et différentes amplitudes vibratoires (fig. 3.23).

Ces caractéristiques (fig. 3.23) soulignent l'incidence de l'intermittence de contact, aussi bien sur la vitesse à vide que sur le coefficient de frottement global  $F_0$ .

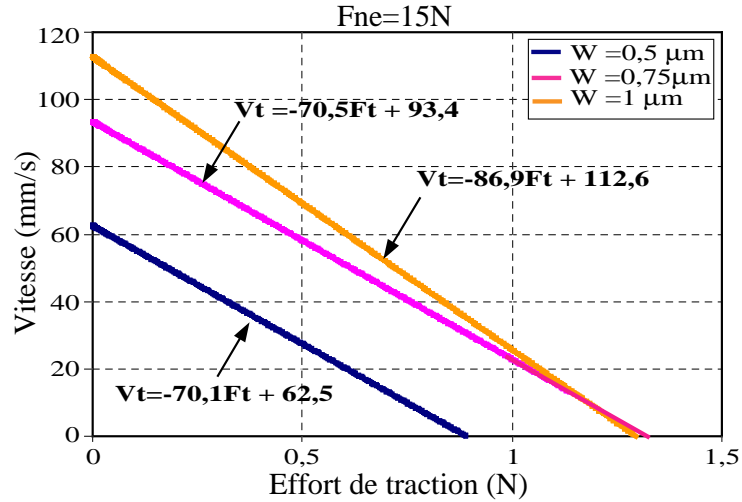


FIG. 3.23 – Evolution de la caractéristique Force-vitesse pour différentes amplitudes vibratoires à précharge constante sur verre ( $\mu = 0,08$ )

## 3.6 Relevés Expérimentaux sur un actionneur plan

Comme il a déjà été mentionné à plusieurs reprises, l'étude de la conversion mécano-mécanique s'appuie sur les travaux expérimentaux et d'identification obtenus et réalisés par [Fer02]. Nous donnons dans ce paragraphe des résultats complémentaires obtenus sur notre propre banc d'essais. Ces relevés n'apporteront pas une identification à proprement parler des paramètres du modèle, mais permettront de vérifier le comportement global et valider l'interprétation faite pour le modèle de connaissance et le modèle moyen.

### 3.6.1 Relevés expérimentaux du comportement hors-plan

Les premiers essais expérimentaux entrepris par [Fer02] démontrent l'intermittence de contact obtenue selon l'amplitude vibratoire et différentes conditions de précharge. Ces essais ont permis d'aboutir aux caractéristiques du taux de séparation (fig. 3.5) par l'identification de l'élasticité normale  $k_n$ . La méthode expérimentale mise en œuvre est basée sur l'application d'une source de tension continue entre le substrat conducteur et un pied de l'actionneur, et par la mesure du courant qui y circule [LJF00]. Ainsi, lorsque le pied est en contact, un courant non nul parcourt le circuit, et si il y a séparation du pied, il y a ouverture du circuit et annulation du courant : il est ainsi possible de mesurer le taux de séparation, mais également de montrer que l'effort de réaction normal  $R_n$  est en opposition avec le mouvement vibratoire. Ce dernier point est ici vérifié par une autre approche expérimentale : il s'agit de mesurer la tension fournie par un transducteur piézoélectrique, placé sous l'un des pieds de l'actionneur, soumis à une précharge de 5N (fig. 3.24). Sur cette figure on retrouve un résultat similaire à celui de [Fer02] : la tension retournée par le transducteur piézoélectrique est cette fois en phase avec la tension de l'électrode de mesure  $V_{elec}$  (image de l'amplitude vibratoire), en raison du sens de la polarisation du transducteur de mesure du contact.

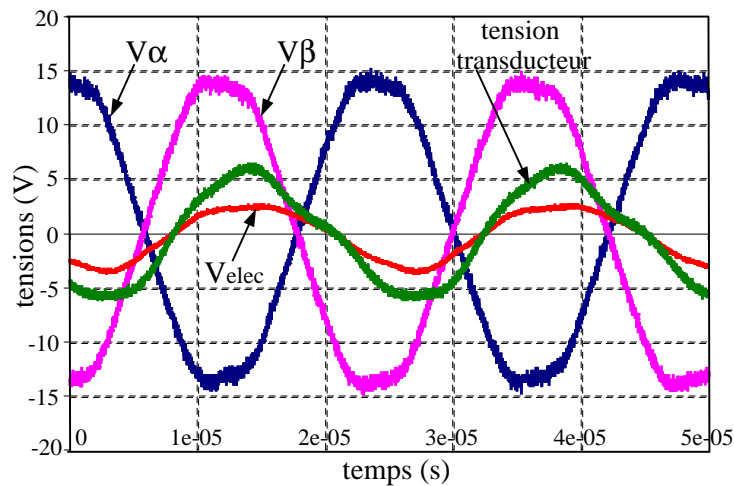


FIG. 3.24 – Relevé expérimental de la réaction normale

Cet essai permet de conforter notre approche du comportement normal selon une élasticité soumise au déplacement vibratoire; Ce résultat a également été obtenu sur un actionneur de dimensions différentes [Gal00]. Par contre, ce comportement n'est pas considéré dans l'approche théorique adoptée par [FF03] dans le cadre de micro-translateur, où l'effort de réaction est présenté en quadrature avec le déplacement vibratoire (en phase avec la vitesse vibratoire normale).

### 3.6.2 Résultats expérimentaux du comportement tangent

Pour relever les caractéristiques force-vitesse de l'actionneur, un banc d'essais mécaniques est mis en œuvre et illustré par le schéma structurel (fig. 3.25). L'actionneur est relié à un câble et placé sur une substrat de verre ou d'acier. Ce câble souple au coefficient de raideur élevé est considéré sans allongement compte tenu des faibles efforts mis en jeu. Il est bobiné sur une poulie ( $\Phi = 10mm$ ) et son extrémité est reliée à un poids faible servant uniquement à le maintenir tendu. Dans l'axe de rotation de la poulie sont disposés un codeur optique (500pt/tour) et un moteur à courant continu asservi en couple pour imposer un effort résistant au déplacement de l'actionneur. Ce moteur compense également l'effort produit par le poids. L'inertie des pièces (poulie et poids) n'est pas compensée par l'asservissement de couple en raison de leur faible valeur. L'amplitude vibratoire  $W$  est maintenue constante par un asservissement détaillé à la suite de ce chapitre.

Pour vérifier les performances en vitesse et en traction de l'actionneur, les relevés expérimentaux sont obtenus en régime permanent pour différentes charges convoyées et sur un substrat de verre. Cette surface présente une topologie et une rigidité de surface satisfaisantes pour permettre le déplacement de l'actionneur, aux dépends d'un coefficient de frottement faible. Le mode caractérisé par ces essais est celui principalement étudié lors de la modélisation mécanique, soit le mode unidirectionnel (0, 6). La figure (fig. 3.26) donne la caractéristique force-vitesse pour une amplitude vibratoire constante et différentes précharges. On constate, conformément au modèle de connaissance et au modèle moyen établi

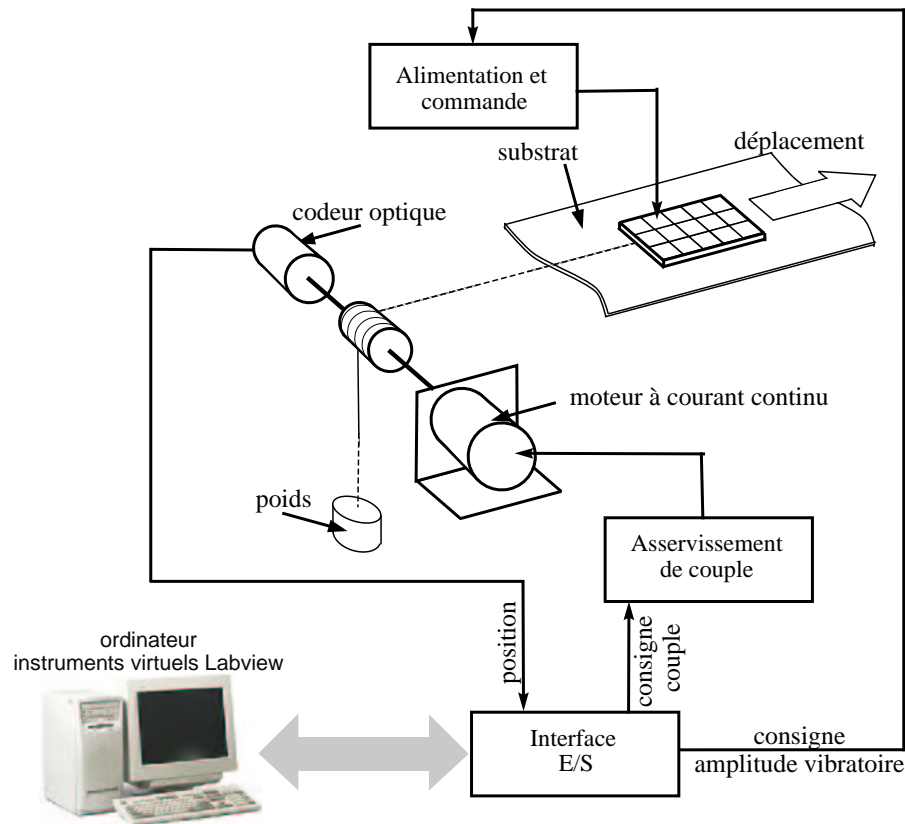


FIG. 3.25 – Banc d'essai mécanique pour obtenir les caractéristiques force-vitesse

précédemment, que l'effort de traction maximum est croissant avec la pré-charge axiale. D'autre part, les caractéristiques sont proches d'une droite, présentant une pente variable  $-1/F_0$ , validant la forme du coupleur mécanique (3.41). D'après cette relation, le coefficient de frottement  $F_0$  est dépendant de l'implantation du pied, de la pulsation vibratoire, de l'élasticité normale  $k_n$ , et de l'intermittence de contact. L'implantation des pieds et la pulsation vibratoire sont considérées constantes, si bien que la variation de  $F_0$  peut-être attribuée à l'évolution de  $k_n$  en fonction de l'effort normal  $F_n$ , et du terme  $\beta$ , comme l'a préalablement signalé le modèle de connaissance.

On vérifie également l'évolution de la caractéristique force-vitesse avec une précontrainte  $F_n$  constante pour différentes amplitudes vibratoires (fig. 3.27).

Une fois encore, les caractéristiques sont quasi-linéaires, et la pente varie moins sensiblement que précédemment. En effet, puisque l'effort de précontrainte est constant, la variation du coefficient de frottement  $F_0$  tient uniquement à l'évolution du terme  $\beta$ . Cette variation a également été mise en évidence par le modèle moyen (fig. 3.23), qui illustre l'évolution de la caractéristique Force-vitesse en fonction de l'amplitude  $W$  à précharge constante.

Nous pouvons ici avancer la possibilité de mesurer indirectement l'intermittence de contact en régime permanent, en fonction de l'amplitude vibratoire, à partir d'une campagne de mesure expérimentale de la pente des caractéristiques force-vitesse, à pré-charge

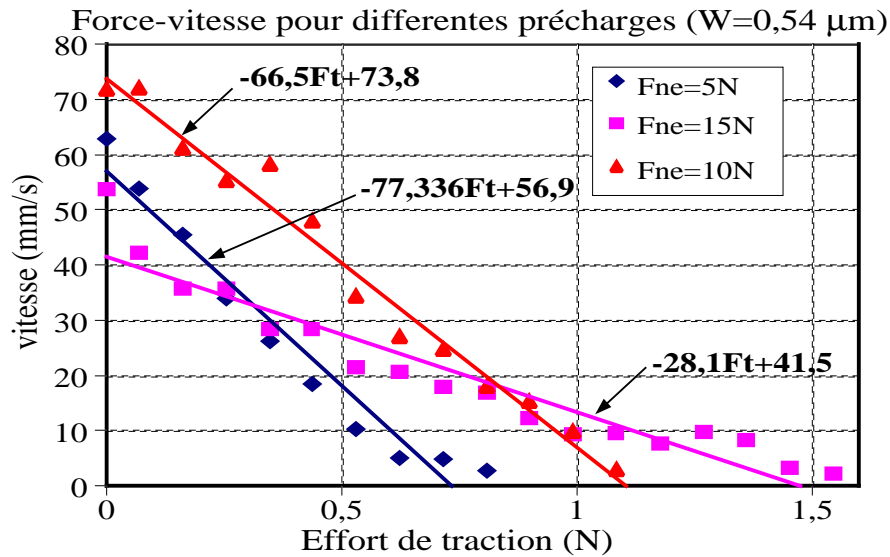


FIG. 3.26 – Caractéristiques force-vitesse à amplitude constante

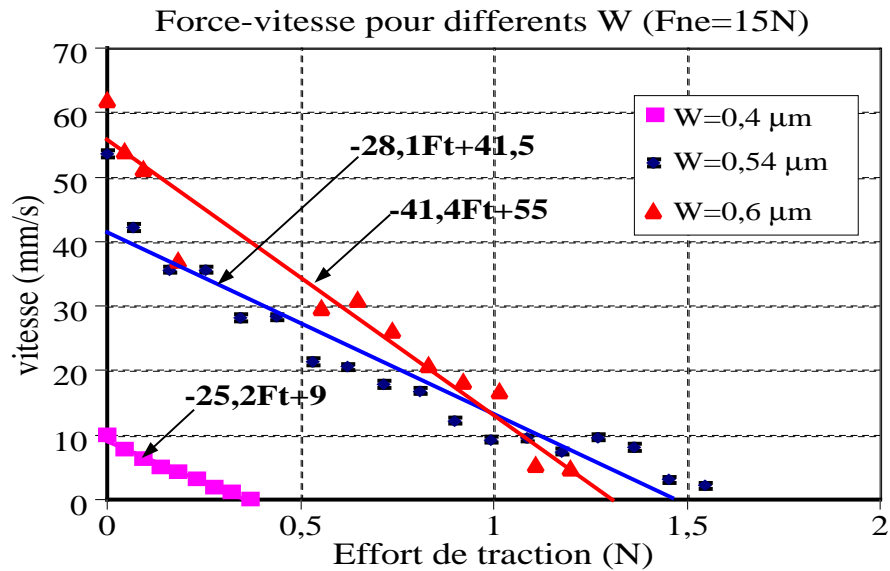


FIG. 3.27 – Caractéristiques force-vitesse à précharge constante

constante.

A titre d'exemple, les deux premières caractéristiques pour les amplitudes vibratoires les plus faibles ( $W = 0,4 \mu\text{m}$  et  $W = 0,54 \mu\text{m}$ ) de la (fig. 3.27) présentent sensiblement la même pente. D'après la relation mécanique tangentielle (3.41) et la définition du coefficient  $F_0$  (3.43), à pré-charge normale constante, seul le terme  $\beta$  vient modifier la pente de la caractéristique force-vitesse. Le terme  $\beta$  est donc à peu près constant pour ces deux courbes, ce qui confirme un contact permanent ( $\beta = 1/2$ ). La dernière caractéristique de la figure (fig. 3.27) pour  $W = 0,6 \mu\text{m}$  montre une pente bien inférieure aux deux précé-

denes, témoignant de la variation de  $\beta$  et donc du taux de séparation. Cette modification de pente a déjà été soulignée en simulation par le modèle moyen sur la figure (fig. 3.23).

Finalement, l'évolution de la vitesse à vide est vérifiée, en fonction de l'amplitude vibratoire sous différentes précharges (fig. 3.28). En accord avec les résultats du modèle de connaissance (fig. 3.10), l'amplitude vibratoire minimale pour laquelle est observée une vitesse non nulle est croissante avec l'effort de précharge.

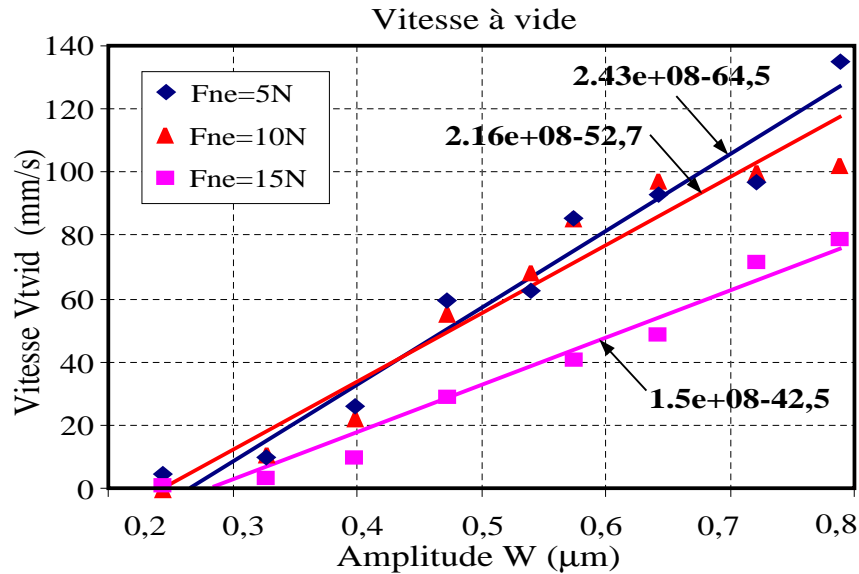


FIG. 3.28 – Evolution de la vitesse à vide pour différentes précharges

Ces relevés expérimentaux ne suffisent pas à identifier tous les paramètres du modèle mécanique. En effet, ils ne permettent pas l'identification de l'élasticité normale et du coefficient de frottement  $\mu$ . C'est pourquoi nous avons opté pour une évaluation de notre modèle grâce aux résultats de [Fer02]. Néanmoins, nos propres relevés permettent de souligner la cohérence de notre approche en montrant :

- des caractéristiques force-vitesse linéaires
- l'influence de la séparation sur la vitesse à vide
- la relation liant l'effort de traction à l'effort de précharge, conformément à la relation de Coulomb.
- la non-linéarité imposée par la variation de  $k_n$  en fonction de  $F_n$ .

### 3.6.3 Asservissement de l'amplitude d'onde

Pour vérifier les caractéristiques en force et en vitesse de l'actionneur précédemment présentées, l'asservissement de l'amplitude crête vibratoire a dû être entreprise de façon à se prémunir de l'influence des efforts extérieurs.

#### Mesure de $W$

L'asservissement de l'amplitude crête de déformation  $W$  nécessite sa mesure ou son es-

timation. Ainsi, à partir de l'électrode de mesure, le montage illustré figure (fig. 3.29) fournit la valeur crête de la tension  $V_{elec}$ .

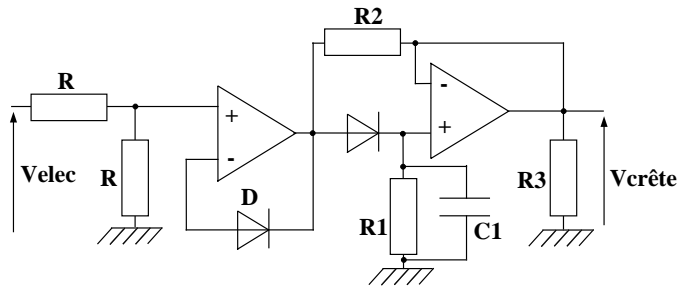


FIG. 3.29 – Montage détecteur d'enveloppe de  $V_{elec}$

Pour les besoins de la modélisation, ce montage est approché par un filtre passe-bas, décrit par une fonction de transfert du premier ordre tel que ;

$$\frac{V_{crête}}{\hat{W}} = \frac{K_c \cdot K_w}{1 + \tau_w p} \quad (3.57)$$

avec  $K_c$  le facteur constant de l'électrode de mesure (2.90),  $K_w$  le gain du montage de détecteur d'enveloppe.  $K_w$  et  $\tau_w$  sont identifiés suite à un essai en échelon de  $W$ .

### Choix et réglage de l'asservissement

A partir du contrôle en phase et de l'interprétation du modèle dans le repère  $dq$ , nous pouvons présenter l'asservissement de l'amplitude vibratoire selon le schéma bloc (fig. 3.30). Notre objectif est d'obtenir une erreur statique nulle et un temps de réponse convenable : un correcteur PI sera choisi.

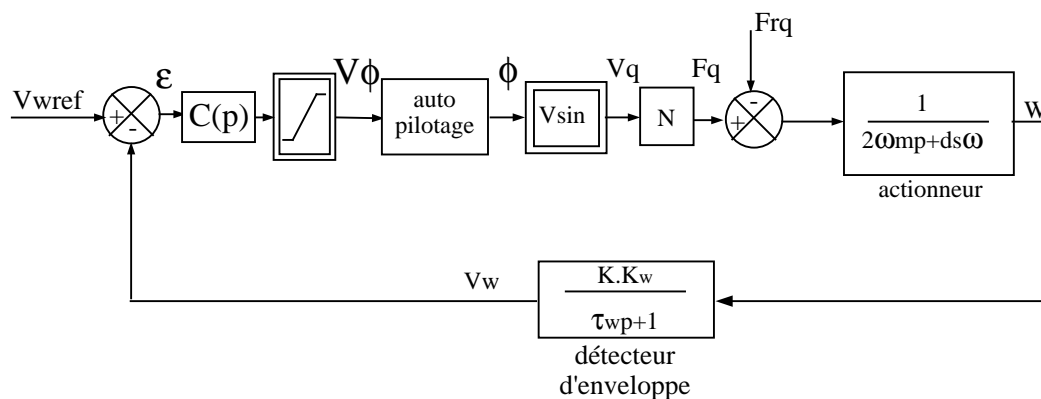


FIG. 3.30 – Schéma bloc de l'asservissement de  $W$

Sur le schéma bloc (fig. 3.30) deux blocs non-linéaires sont remarquables : le premier est une limitation de la valeur  $V_\phi$  afin de maintenir le déphasage  $\phi$  sur la pente à droite de la caractéristique de résonance. En effet, sur la figure (fig. 2.19), on constate des discontinuités sur le diagramme de phase pouvant induire l'instabilité de l'asservissement.

Le second bloc non-linéaire concerne la grandeur de commande  $V_q$  formée par la fonction sinus. Nous souhaitons un correcteur linéaire, si bien que la fonction de transfert est établie par la linéarisation de ce bloc autour d'un point de fonctionnement ( $\phi = \phi_0 + \delta\phi$  et  $\phi_0 = \pi/4$ ). Le réglage du correcteur est effectué pour satisfaire la robustesse sur toute la plage de commande. La marge de phase choisie est illustrée par le diagramme de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte (fig. 3.31). Puisque l'objectif final de l'étude est d'interfacer le dispositif avec un ordinateur, l'asservissement de l'amplitude d'onde est fait de manière numérique, par le biais d'une carte E/S (Servotogo<sup>®</sup>) et géré sous un environnement temps réel QNX<sup>®</sup>. Sur la figure (fig. 3.32) est vérifiée la cohérence des résultats de simulation avec le relevé expérimental de l'erreur et de l'amplitude vibratoire, dont le temps de réponse n'excède pas 1,5ms.

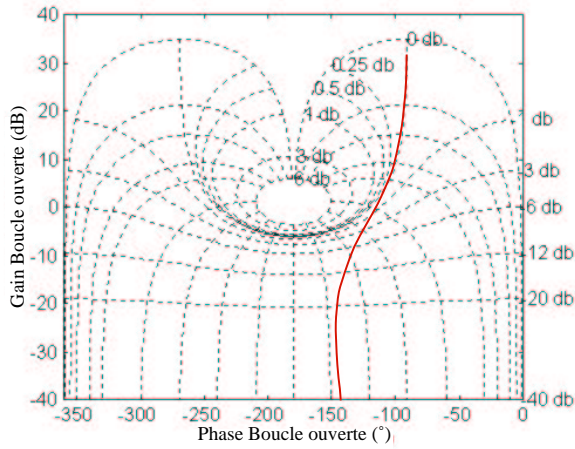


FIG. 3.31 – Diagramme de Black de la boucle ouverte

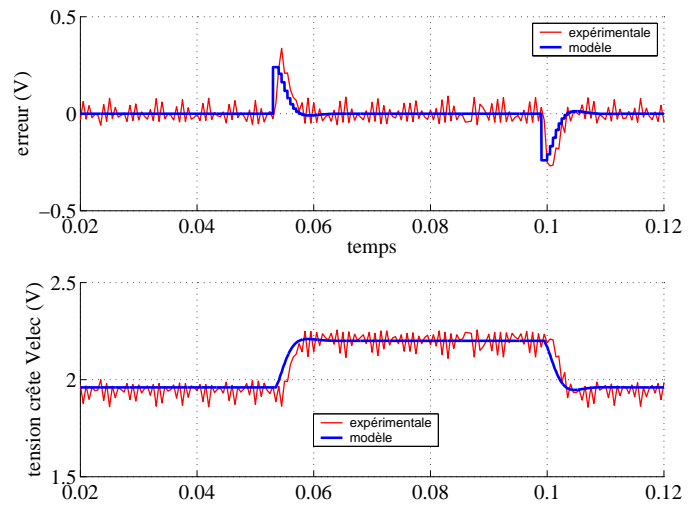


FIG. 3.32 – réponse indicielle en  $W$  et erreur (simulation et relevé expérimentaux)

Par souci de simplicité, les efforts de réaction ne sont pas compensés, mais nous vérifions néanmoins la robustesse de l'asservissement face à un échelon de  $F_{rq}$  (fig. 3.33). Qui plus est, pour un échelon d'effort de traction  $F_t$  de 2N, valeur réaliste au regard des relevés expérimentaux, on constate une faible variation de la valeur de commande  $V_q$  (fig. 3.34). Cela présente un inconvénient certain dans le cadre d'un asservissement en force ultérieur. En effet, la variation de  $V_q$  par l'application d'un effort tangentiel résistant, pourrait permettre de reconstituer la valeur de cet effort de traction. Cela semble particulièrement délicat d'un point de vue pratique avec le translateur, en raison de la faible amplitude de variation de  $V_q$ . Une tentative de relevé expérimental de cette variation a souligné cette difficulté.

Les efforts ne sont pas compensés par la commande, mais nous pouvons néanmoins vérifier leur influence en régime permanent sur la commande en  $V_q$ , conformément aux relations dans le repère tournant (2.92). Nous vérifions ce couplage par l'incidence des forces de réaction modale sur la commande. Nous avons montré précédemment la faible incidence de l'effort de réaction tangentiel sur un asservissement en  $V_q$ , mis en évidence par



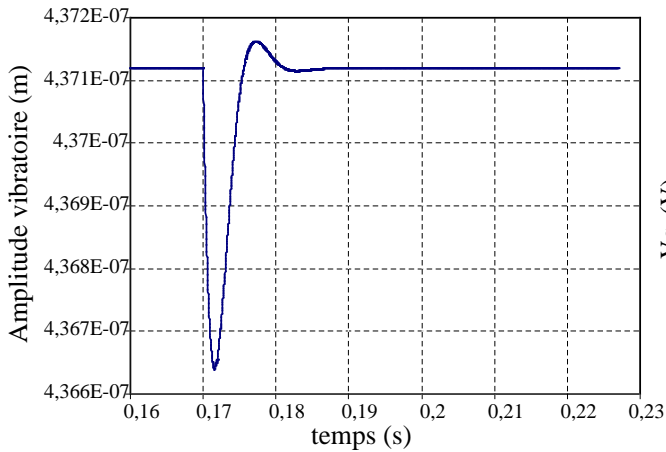


FIG. 3.33 – Réponse transitoire de l'amplitude vibratoire à un échelon de  $F_t$

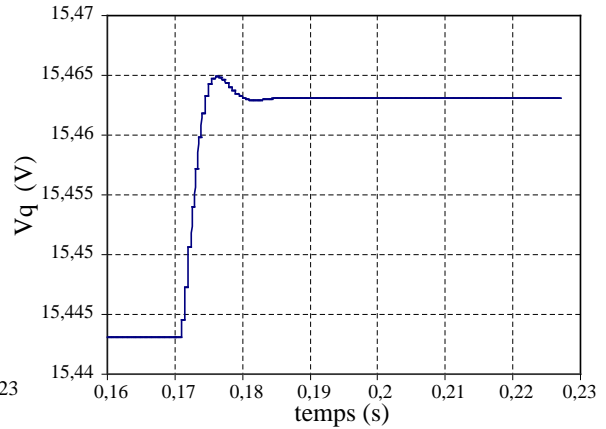


FIG. 3.34 – Réponse transitoire de  $V_q$  à un échelon de  $F_t = 2N$  avec  $V = 20V$

simulation (fig. 3.34). Ce résultat corrobore la démarche adoptée par [Fer02] qui consiste à négliger l'incidence des efforts extérieurs sur l'amplitude d'onde. Par contre, nous avons énoncé le couplage des deux branches motionnelles via la relation qui unit les grandeurs de contrôle  $V_d$  et  $V_q$  par la relation (3.54). Pour un asservissement de l'amplitude vibratoire, et différentes conditions de précharges, la (fig. 3.35) montre l'influence de la précharge sur la grandeur de contrôle  $V_q$ .

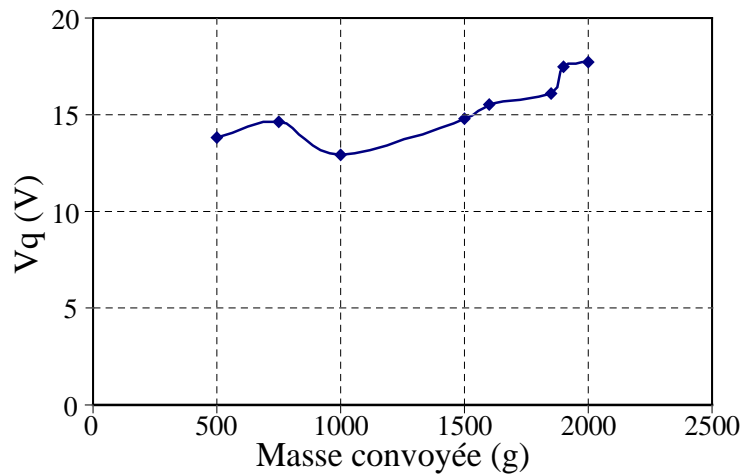


FIG. 3.35 – Variation expérimentale de  $V_q$  en fonction de la masse convoyée pour une amplitude d'onde constante

Cette caractéristique, sans permettre d'en interpréter exactement la forme, souligne néanmoins une tendance à l'accroissement de  $V_q$  avec l'effort de précharge et montre l'attachement des deux branches motionnelles.

---

## 3.7 Conclusion

L'étude abordée dans ce chapitre s'attache à décrire la conversion purement mécanique réalisée à l'interface pied-bâti. Cette partie particulièrement délicate à modéliser, débute tout d'abord par la présentation du modèle de connaissance [Fer02], pour mettre en évidence les différentes conditions de contact, telles que l'apparition d'un contact intermittent ou de phases d'adhérence. Soutenue par les résultats de ce modèle, une interprétation simplifiée du contact est introduite, à partir d'hypothèses réduisant la pertinence du modèle, mais apportant une description plus globale de la conversion mécanique. Le modèle est ensuite linéarisé en ne conservant que le comportement moyen sur une période vibratoire, grâce à une approche quasi-statique justifiée par la faible variation des grandeurs cinématiques lors d'une période vibratoire. Une comparaison du modèle moyen aux résultats expérimentaux de [Fer02] valide le modèle mécanique simplifié. En complément, une étude expérimentale est menée sur notre propre actionneur plan, qui permet de confirmer le comportement général des translateurs à onde stationnaire.

Ce chapitre permet finalement d'établir un modèle sous la forme du Graphe Informationnel Causal, détaillant la chaîne de conversion des grandeurs électriques vers les grandeurs mécaniques. L'allure de ce graphe s'apparente fortement à celui du moteur à onde progressive [Gir02], et souligne ainsi l'analogie possible entre ces deux types d'actionneurs piézoélectriques aux principes sensiblement différents. Ce graphe sera la base de réflexion pour établir la loi de commande nécessaire à l'asservissement des grandeurs mécaniques.



# Chapitre 4

## Commande de l'actionneur piézoélectrique plan

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>127</b>
<b>4.2</b>	<b>Contrôle de la force de traction</b>	<b>128</b>
4.2.1	Asservissement de force	129
4.2.2	Simulation d'un retour d'effort élastique	131
4.2.3	Contrôle unidirectionnel	135
<b>4.3</b>	<b>Commande en frein réglable</b>	<b>136</b>
4.3.1	Principe	136
4.3.2	Modélisation	137
4.3.3	Freinage réglable pour interface haptique	141
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>143</b>

---

## 4.1 Introduction

L'objectif des chapitres précédents a été de modéliser l'actionneur piézoélectrique plan, afin d'interpréter le comportement de cet actionneur à interaction de contact de manière simple. A présent le modèle établi, nous cherchons à élaborer une loi de commande qui puisse répondre aux besoins du domaine haptique. Comme nous l'avons rapidement introduit au paragraphe §1.4.5, deux types de fonctionnement peuvent être destinés aux interfaces haptiques : tout d'abord le contrôle de la force de traction proprement dite, selon chaque degré de liberté de l'actionneur. Cela revient à asservir l'effort  $R_t$  de la branche motionnelle tangentielle du graphe GIC (fig. 3.15). Le second contrôle envisageable serait celui de la branche motionnelle normale, pour une implantation particulière des pieds n'offrant pas de déplacement tangent. De cette façon, nous pouvons espérer obtenir un frein réglable, opposant une force de frottement variable à l'utilisateur, grâce au contrôle de l'intermittence de contact produite par le mouvement vibratoire. Nous allons donc analyser ces deux possibilités de contrôle d'après le GIC du modèle moyen, en simulation.

## 4.2 Contrôle de la force de traction

La description causale et linéaire de l'actionneur par l'intermédiaire du GIC (fig. 3.15), permet par une approche systématique, la déduction du schéma de commande à adopter. Par une simple inversion des processeurs qui décrivent la transformation énergétique, et partant de la grandeur à contrôler, est obtenue la structure de commande [HC99].

Lorsque le processeur rencontré pendant la lecture inverse est rigide (type dissipateur d'énergie), son inversion est directe. Lorsqu'il s'agit d'inverser un processeur causal, cela implique le besoin d'asservir la grandeur et donc de la mesurer ou de la reconstituer. Compte tenu de la modélisation entreprise, le contrôle de l'effort de traction revient à l'inversion de la branche motionnelle tangentielle. L'application systématique des règles d'inversion liées aux GIC et rappelées précédemment amène, d'après la représentation dans le repère tournant, à la structure de commande (fig. 4.1). Cette structure s'apparente à celle obtenue par [GIR] pour l'asservissement du couple d'un moteur à onde progressive.

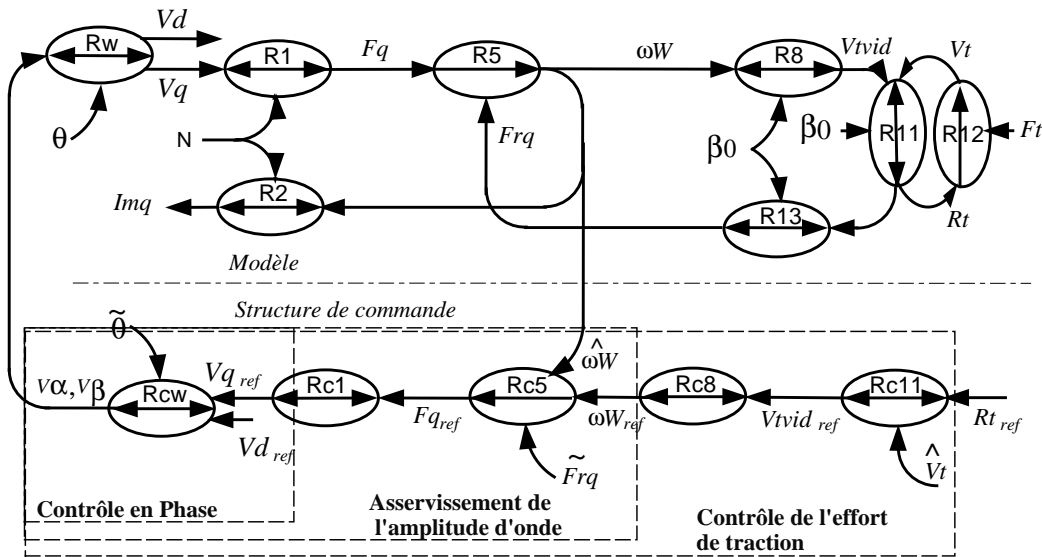


FIG. 4.1 – Graphe Informationnel de la structure de commande de la voie  $q$

L'inversion de la voie  $q$  laisse apparaître trois niveaux de commande. Le premier concerne le contrôle en phase, offrant le passage des grandeurs en  $d$  et  $q$  du repère tournant vers les tensions d'alimentation réelles de l'actionneur. Cette première étape consiste à appliquer la matrice de rotation inverse  $R_{cw}$  qui dépend de  $\theta$  (voir tab. 4.1). Cet angle correspondant à la position du vecteur tournant  $\underline{w}$  associé à l'amplitude de l'onde elle-même : nous appelons cette opération autopilotage par référence aux travaux de [Gir02]. La seconde étape assure le contrôle de l'amplitude crête de l'onde (à  $\omega$  considéré constant) et donc, par la relation **R8** du tableau (tab. 4.1) le contrôle de la vitesse  $V_{tvid}$ . Cette inversion correspond à un asservissement qui nécessite la connaissance de l'amplitude de l'onde. Dans notre cas, l'amplitude de l'onde est obtenue expérimentalement par la céramique de mesure présente sur le translateur (fig. 2.17). Les deux premières étapes du contrôle sont

processeurs	relations	Commande
$R_1 \rightarrow R_{c1}$	$F_q = NV_q$	$V_{qreg} = \frac{1}{N}F_{qreg}$
$R_5 \rightarrow R_{c5}$	$\omega W(2mp + D_s) = F_q - Fr_q$	$F_{qreg} = C_w(p)(\omega W_{ref} - \omega W) + \frac{Fr_q}{N}$
$R_8 \rightarrow R_{c8}$	$Vt_{vid} = K_{id} \frac{h \cdot \chi_A}{\pi} \omega W$	$\omega W_{ref} = \frac{\pi}{h \cdot \chi_A K_{id}} Vt_{vidref}$
$R_{11} \rightarrow R_{c11}$	$\langle Rt \rangle = F_0 \cdot (Vt_{vid} - Vt)$	$Vt_{vidref} = \frac{\langle Rt \rangle_{ref}}{F_0} + \hat{V}t$
$R_w \rightarrow R_{cw}$	$V_{q,d} = \mathcal{R}(\theta)V_{\alpha,\beta}$	$V_{\alpha,\beta} = \mathcal{R}(-\theta)V_{qref,dref}$

TAB. 4.1 – Relations du modèle et blocs de la commande

détaillées dans les chapitres §2.6 et 3.6.3, puisqu'elles sont intervenues dans le processus d'identification de l'actionneur.

Le dernier niveau concerne le contrôle de l'effort de traction  $R_t$ . Compte tenu de la nature de la relation **R11** (voir tab. 4.1), une inversion directe suffit à fournir la valeur de référence  $Vt_{vidref}$ . Toutefois, puisque cette relation présente des non-linéarités sur le terme  $F_0$  et  $Vt_{vid}$  selon le taux de séparation et l'élasticité normale, la mesure et la correction de l'effort  $R_t$  est entreprise, donnant lieu à l'asservissement (inversion indirecte) de  $R_t$  (voir fig. 4.2).

#### 4.2.1 Asservissement de force

Comme nous l'avons décrit au cours du premier chapitre, le fonctionnement réversible de l'actionneur s'obtient par le changement du mode vibratoire. Les paramètres du modèle comme la fréquence de résonance ou le facteur de conversion  $N$ , variant avec le mode considéré, l'asservissement de l'amplitude vibratoire requiert la détermination d'un correcteur adapté spécifiquement pour chaque mode. Par ailleurs, nous avons montré au second chapitre que le coefficient  $N$  dépend de la polarisation des céramiques qui composent le domaine piézo-actif, généralement optimisée pour un mode particulier. La forte diminution de ce coefficient pour un autre mode risque a priori de dégrader les performances de la conversion électro-mécanique, mais également de mettre en défaut l'asservissement de phase décrit dans ce mémoire, un autre type d'asservissement devant alors être envisagé.

Enfin, l'implantation des pieds étant fixes, si celle-ci est choisie pour satisfaire un fonctionnement optimal pour un premier mode ( $\lambda/8$ ), le fonctionnement dans le sens inverse s'en trouve forcément dégradé, même si ce mode est obtenu pour une fréquence de résonance plus élevée, ce qui compense partiellement la dégradation, comme le souligne l'expression de  $F_0$  (3.43).

Nous avons également introduit au cours du premier chapitre, la possibilité d'une implantation identique selon les deux directions, pour une structure mécanique légèrement différente, en usant des propriétés d'un mode pair, et d'un mode impair directement voisin [HCTC98]. Ainsi, pour les deux modes, la trajectoire des pieds est symétrique. Par contre puisque leur fréquence de résonance est différente [HCTC98], les coefficients  $F_0$  et  $Vt_{vid}$  n'ont pas le même module, et la non-linéarité du processeur mécanique subsiste.

En résumé, nous pouvons déjà présumer des difficultés liées à la réalisation d'un asservissement bi-directionnel en force avec le dispositif à onde stationnaire actuel. Le concept mécanique, particulièrement simple donne en effet la capacité de se déplacer selon les quatre directions, mais les performances sont fortement variables en traction selon chaque direction.

En connaissance de cause, et en guise d'étude préliminaire, nous admettrons cependant un fonctionnement parfaitement réversible en force. Ainsi, d'après les résultats antérieurs menés sur l'asservissement, nous pouvons réduire dans un premier temps le contrôle de l'amplitude vibratoire et de phase à une fonction de transfert linéaire du second ordre tel que :

$$H_w(p) = \frac{W(p)}{W_{ref}(p)} = \frac{K_w}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}p + \frac{1}{\omega_n^2}p^2} \quad (4.1)$$

Le choix de corriger l'effort de traction se traduit par la nouvelle structure de contrôle sous forme de GIC (fig. 4.2). Nous pouvons également présenter l'asservissement de force

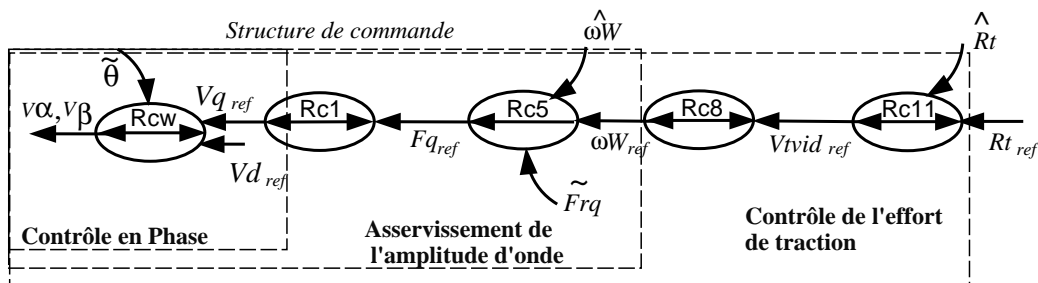


FIG. 4.2 – Structure de contrôle de l'asservissement de force

selon le schéma bloc (fig. 4.3) avec la participation simultanée des n pieds.

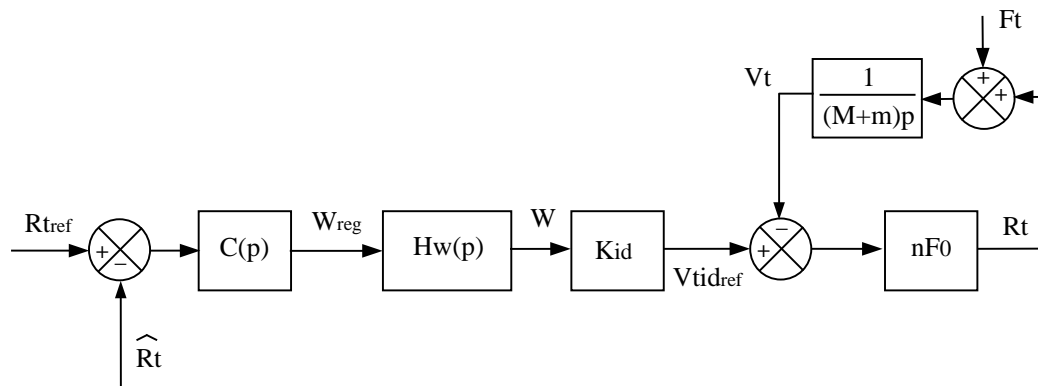


FIG. 4.3 – Schéma bloc de l'asservissement de force

L'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte (4.2), sans la considération de l'action perturbatrice extérieure  $F_t$ , montre une dérivée au numérateur.

$$FTBO(p) = C(p) \cdot H_w(p) K_{id} F_0 \frac{\frac{(M+m)p}{F_0}}{1 + \frac{(M+m)p}{F_0}} \quad (4.2)$$

Pour annuler l'erreur statique, le correcteur se doit de présenter une double intégration.

$$C(p) = \frac{1 + \tau p}{\tau p^2} \quad (4.3)$$

Une contrainte supplémentaire s'ajoute à l'efficacité du correcteur de force, puisque celui-ci ne doit pas entraîner la saturation de l'asservissement de l'amplitude vibratoire. Le réglage du correcteur est effectué pour une pré-charge normale de 500g. Nous maintenons une marge de phase suffisante pour assurer la robustesse du système bouclé face aux variations des paramètres  $F_0$  et  $K_{id}$ , et de l'influence de l'effort extérieur  $F_t$ . L'abaque de Black-Nichols et la réponse instantanée à un échelon de  $R_{tref}$  sont présentés (fig. 4.4) et (fig. 4.5).

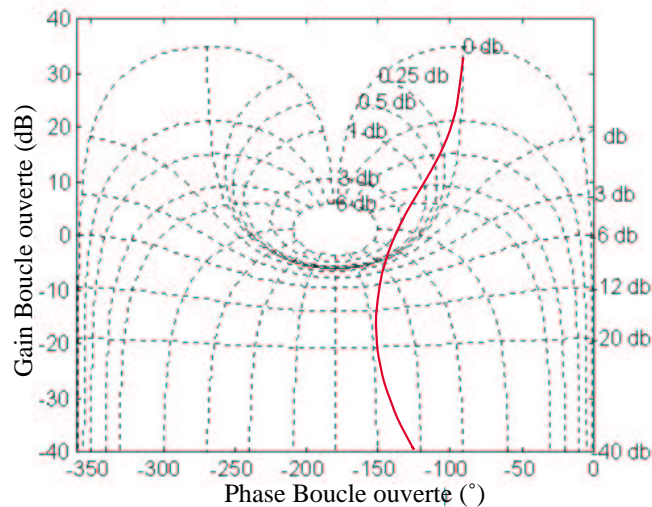


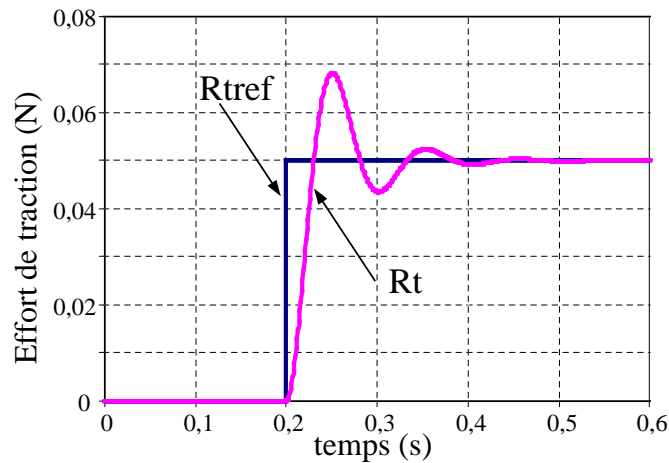
FIG. 4.4 – Abaque de Black-Nichols de l'asservissement de force

Bien sûr, une consigne en force constante n'a pas de sens puisque cela implique d'après la relation (3.45) une accélération constante de l'actionneur, qui mène forcément à la saturation de l'asservissement de l'amplitude vibratoire. Pour rendre compte de l'efficacité de l'asservissement de force et toujours dans le cadre des interfaces haptiques, l'exemple qui illustre parfaitement le retour d'effort actif est la simulation d'une élasticité.

#### 4.2.2 Simulation d'un retour d'effort élastique

Pour les interfaces haptiques aujourd'hui existantes, deux types de contrôle en force se distinguent [Cas04] : lorsque la force retournée par les moteurs du dispositif est imposée à




 FIG. 4.5 – Simulation de la réponse à un échelon de  $R_{tref}$ 

partir de la mesure de la position de l'effecteur et d'une consigne de position de référence, on parle de *contrôle en impédance*. La seconde solution consiste à mesurer la force subie par l'effecteur et d'imposer le déplacement par l'action des moteurs à partir d'une force de référence. Il s'agit dans ce cas du *contrôle en admittance*. Chacune des deux solutions présente ses propres avantages. Le contrôle en impédance, plus simple à mettre en oeuvre, est largement répandu parmi les dispositifs à retour de force actuels [MS94]. Cette solution s'adapte mieux à la simulation de faibles raideurs pour des raisons de stabilité. A l'inverse, le contrôle en admittance correspond mieux à la simulation de raideurs importantes. De plus, il aide à se soustraire des éventuels défauts mécaniques comme les frottements. Compte tenu des non-linéarités à l'interface mécanique de notre actionneur et de notre nécessité de corriger l'effort de traction, notre choix se porte sur le contrôle en admittance.

Pour reproduire une action mécanique du type élasticité, la référence de force doit être dépendante du déplacement de l'actionneur. L'utilisateur provoque le déplacement par l'application d'un effort extérieur  $F_t$ . Pour simuler un comportement de type "ressort", la force générée doit respecter une expression du type :

$$R_{tref} = K_x \cdot x + A\dot{x} \quad (4.4)$$

Un amortissement noté  $A$  est nécessaire pour éviter l'instabilité du système. La structure de réglage présentée (fig. 4.3) est donc reprise, constitué par l'association d'une raideur virtuelle et de l'inertie réelle de l'actionneur plan, la référence de force  $R_{tref}$  étant calculée par la relation (4.4). Ceci donne le GIC (fig. 4.6) et le schéma bloc (fig. 4.7). Une saturation est également ajoutée sur la référence afin de ne pas solliciter l'actionneur au dessus de ses performances maximales.

La connaissance de la vitesse tangentielle de l'actionneur étant nécessaire, nous considérons qu'elle est mesurée de manière indépendante par un système classique en interface homme-machine, soit par exemple une sphère entraînant deux roues codeuses placées en quadrature (type souris 2D) et fixées à l'actionneur.

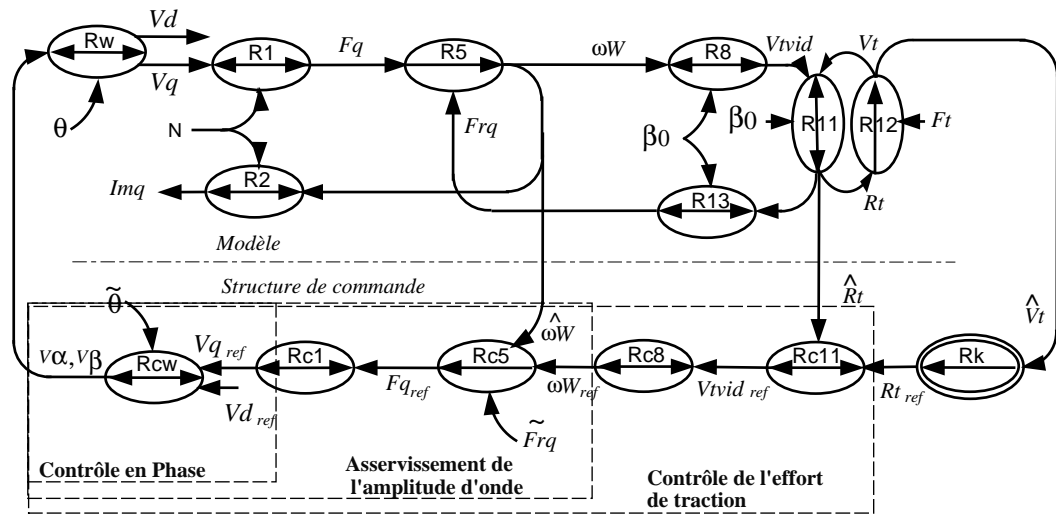


FIG. 4.6 – Graphe Causal du retour d'effort élastique

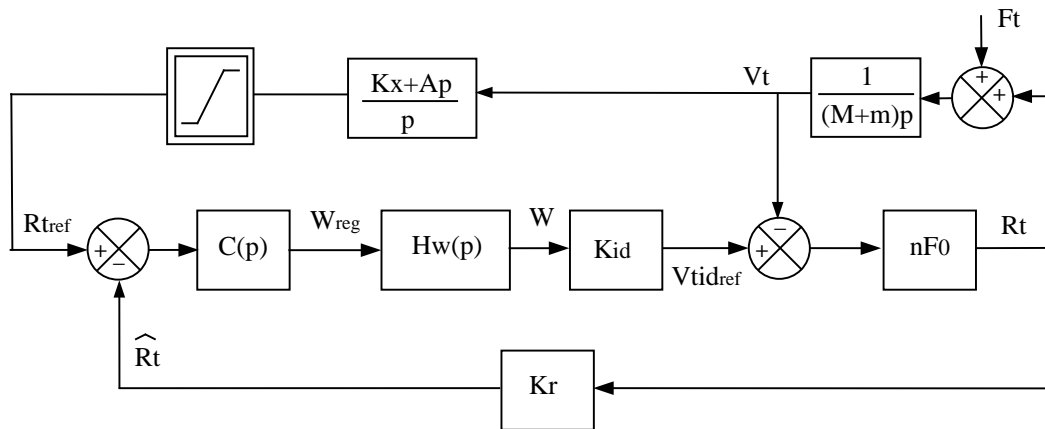


FIG. 4.7 – Schéma bloc du retour d'effort élastique

Le choix du coefficient de raideur a une influence importante sur la stabilité du système, de même que le terme d'amortissement. Ce dernier sera fixé de manière à réduire l'oscillation lorsque l'action extérieure sur l'actionneur disparaît. Pour cela, le coefficient d'amortissement est fixé à partir du facteur de qualité du système : l'équation de mouvement du système doit atteindre son état d'équilibre lorsque celui-ci n'est soumis à aucune action mécanique. L'équation du mouvement est décrite selon l'inertie du dispositif, l'amortissement physique et simulé et la raideur virtuelle. La stabilité du système est décrite par l'égalité ;

$$(M + m)\ddot{x} + (A + F_0)\dot{x} + K_x x = 0 \quad (4.5)$$

La valeur du facteur de qualité est fixé à 1/2 pour obtenir un bon compromis entre

rapidité et amortissement [Cas04].

$$Q = \frac{\sqrt{K_x/(M+m)}}{A+F_0}(M+m) = \frac{1}{2} \quad (4.6)$$

$$A = 2\sqrt{\frac{K_x}{(M+m)}}(M+m) - F_0$$

Ainsi, la valeur du coefficient d'amortissement  $A$  de l'équation (4.4) est dépendante des paramètres du système et de la raideur choisie. Nous vérifions l'influence de ce coefficient sur la réponse en force, pour un effort extérieur  $F_t$  croissant dans le temps, puis constant à la valeur  $1N$  (fig. 4.8). La raideur  $K_x$  choisie pour la simulation est de  $100N.m^{-1}$ .

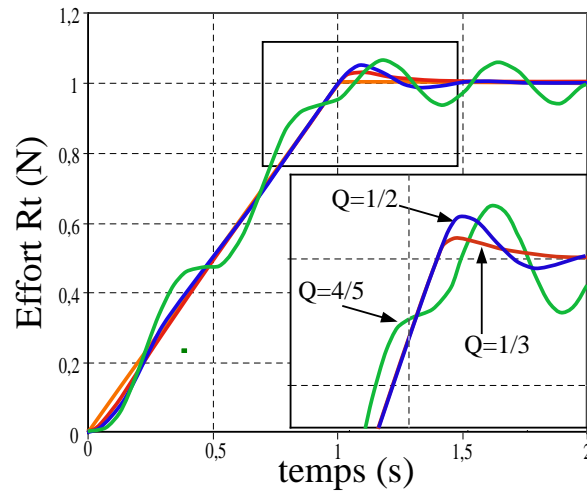


FIG. 4.8 – Influence de l'amortissement sur l'effort  $R_t$

Le choix de  $A$  correspondant à un facteur de qualité de  $1/2$  semble effectivement représenter le meilleur compromis. Les différents paramètres à présent définis, nous vérifions le comportement du système asservi pour un profil arbitraire de la force  $F_t$  appliquée par l'utilisateur.

Nous observons ainsi le comportement attendu : l'effort mécanique  $R_t$  développé par l'actionneur s'oppose à l'effort fourni par l'utilisateur, dans les limites de performances de l'actionneur. La position de l'actionneur demeure constante dès lors que l'effort extérieur est constant, puis reprend sa valeur initiale lorsque l'effort est nul. Le système bouclé se comporte bien comme un ressort de raideur  $K_x$  comme l'illustre la figure (4.11).

Le bon fonctionnement du système est vérifié pour un dispositif présentant un fonctionnement bi-directionnel symétrique, ce qui n'est pas le cas de l'actionneur présentement étudié. Nous nous intéressons par la suite au potentiel d'un fonctionnement unidirectionnel, et donc du contrôle en force selon un unique mode vibratoire.

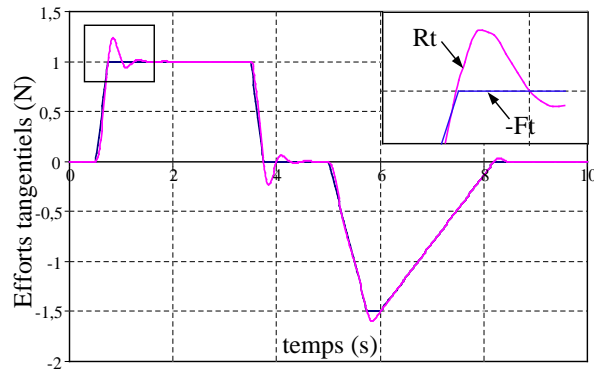


FIG. 4.9 – Simulation de la réponse de l'effort  $R_t(t)$  en retour d'effort élastique

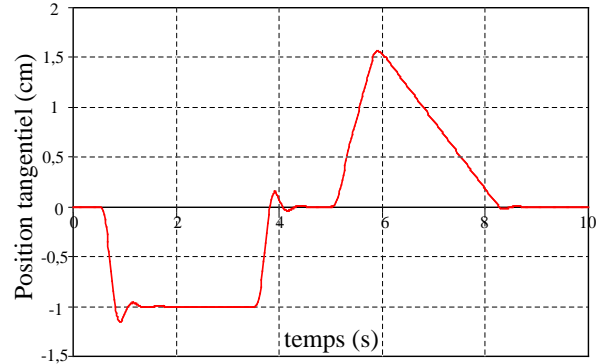


FIG. 4.10 – Simulation de la position de l'actionneur en retour d'effort élastique

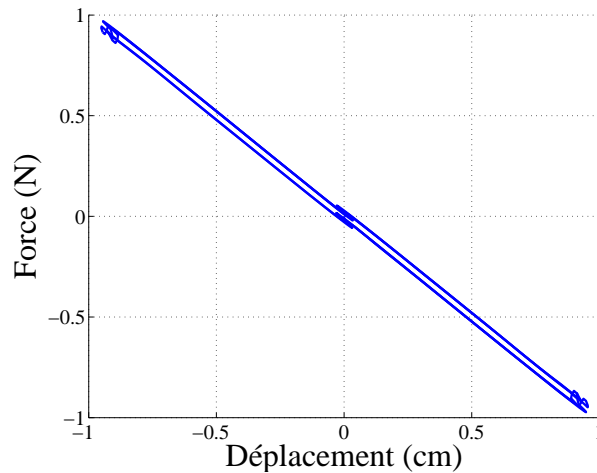


FIG. 4.11 – Simulation d'une raideur virtuelle  $K_x = 100N.m^{-1}$

### 4.2.3 Contrôle unidirectionnel

Le contrôle d'un seul mode vibratoire en retour d'effort élastique signifie la simulation d'une élasticité unidirectionnelle. Cela ne représente pas un comportement physique réaliste, mais va permettre d'introduire les possibilités de contrôle en force de l'actionneur actuel, ainsi que ses limites de fonctionnement.

La limitation induite par le mode unidirectionnel impose de contenir la vitesse  $V_{tvid}$  à une valeur positive ou nulle. Une non-linéarité s'ajoute alors au schéma bloc. Le correcteur précédemment dimensionné demeure valable pour ce fonctionnement, mais une non-linéarité doit y être ajoutée : en effet, l'action du correcteur doit être nulle lorsque l'erreur entre  $R_{t_{ref}}$  et  $R_t$  est négative, afin d'éviter la divergence de la consigne  $W_{ref}$ . Pour ce mode de fonctionnement, l'actionneur est en mesure de répondre en force uniquement pour une sollicitation de l'utilisateur en opposition avec la force motrice. Nous vérifions la réponse en force et la position de l'actionneur (fig. 4.12) et (fig. 4.13) pour une raideur toujours de  $K_x = 100N.m^{-1}$ .

Comme précédemment lors de l'asservissement du système bi-directionnel, l'effort de

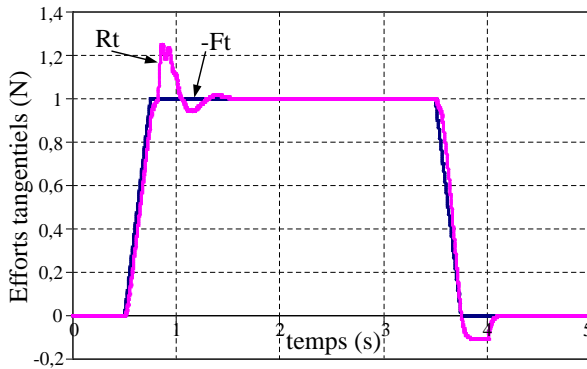


FIG. 4.12 – Position de l'actionneur en retour d'effort élastique : fonctionnement unidirectionnel

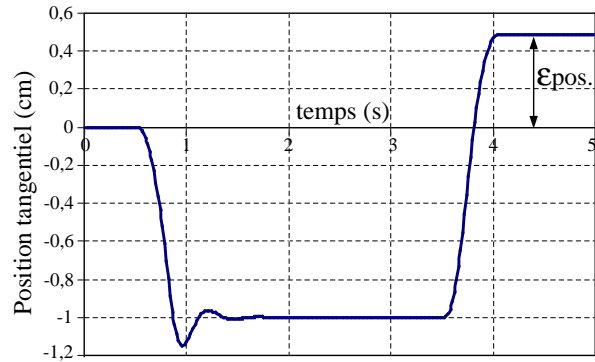


FIG. 4.13 – Réponse de l'effort  $R_t(t)$  en fonction de l'effort extérieur : fonctionnement unidirectionnel

traction  $R_t$  s'oppose à l'effort de l'utilisateur. Par contre, lors du relâchement de cet effort, l'actionneur ne revient pas en position initiale  $x = 0$ , puisque celui-ci n'est pas en mesure de fournir un effort moteur négatif. La réduction de cette erreur de position est possible pour une raideur  $K_x$  beaucoup plus faible. Quoi qu'il en soit, nous avons montré que le dispositif est en mesure d'opposer une force équivalente à celle fournie par l'utilisateur. Dans le cadre de la simulation étudiée, nous sommes encore loin des efforts typiques rencontrés parmi les interfaces haptiques actuelles (tab. 1.1) (entre 5 et 15N). Cependant, un accroissement de l'effort maximal peut être obtenu par l'augmentation de la précharge normale, ou encore l'augmentation du coefficient de frottement à l'interface pied/bâti.

Ces optimisations d'ordre mécanique, ne suppriment pas pour autant les difficultés attachées au fonctionnement bidirectionnel introduites §4.2.1 : l'asservissement de phase et d'amplitude doit être adaptée à chaque mode vibratoire. De même, la variation des paramètres mécaniques pour chaque mode vibratoire demande également l'ajustement de l'asservissement de force, de même que celui du coefficient d'amortissement  $A$ . Cette nécessité d'adapter les différents correcteurs à chaque passage d'un fonctionnement en frein à un fonctionnement moteur est pénalisante du point de vue de la commande de ce dispositif.

## 4.3 Commande en frein réglable

### 4.3.1 Principe

Le principe du fonctionnement en frein réglable consiste à exploiter l'intermittence de contact des pieds pour produire un frottement variable à l'interface pieds/sol. Le réglage de la durée relative du contact permet alors l'ajustement dynamique du coefficient de frottement global. Nous pouvons faire une certaine analogie entre ce fonctionnement et celui d'une dameuse mono-pied des travaux publics manipulée par un ouvrier : ce dernier peut déplacer en translation la dameuse dès lors qu'elle présente un contact intermittent,

et oppose donc un effort résistant nul durant les phases de séparation.

Dans le cadre de ce fonctionnement en frein réglable, il n'est pas nécessaire d'avoir un déplacement tangent de l'actionneur. Au contraire, on attendra d'un tel dispositif qu'il soit inerte en l'absence de sollicitation extérieure. Dans ce cas, les pieds de l'actionneur peuvent être positionnés au ventre de l'onde comme illustré (fig. 4.14). Pour cette implan-

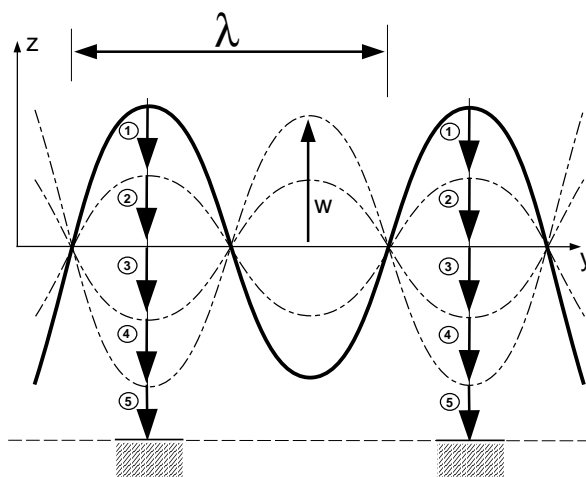


FIG. 4.14 – Implantation pour fonctionnement en frein

tation, le déplacement de l'extrémité des pieds selon l'axe normal est maximum et permet une grande plage de réglage de l'effort de frottement.

Un premier dispositif haptique, basé sur la fonction débrayage de moteurs piézoélectriques rotatifs a été réalisé et validé par [KTM03]. Le retour de force dissipatif présente un certain nombre d'avantages comparé au retour actif, en terme de temps de réponse, de stabilité, ou encore de sécurité : en effet, la fonction de freinage ne fait que répondre à hauteur de l'action imposée par l'utilisateur, et ainsi ne risque pas de blesser ce dernier. Qui plus est, la solution piézoélectrique est également avantageuse par rapport aux embrayages électromagnétiques (frein à poudre) ou encore électro-rhéologiques, principalement pour son faible encombrement, sa simplicité de conception et son temps de réponse.

### 4.3.2 Modélisation

Les pieds de l'actionneur ne présentent maintenant plus de débattement tangentiel, si bien que la vitesse, si elle existe, est imposée par une action tangentielle extérieure.

Nous vérifions dans un premier temps l'incidence de l'implantation particulière des pieds sur le modèle moyen représenté (fig. 3.15). Le débattement tangentiel du pied est nul pour cette configuration d'implantation des pieds ( $\chi_A = 0$ ), si bien que le processeur **R19** du graphe informationnel causal (fig. 3.15) fournit une vitesse  $V_{tvide}$  nulle, de même que **R22** un effort de réaction modale  $F_{rq}$  nul. La disparition de ces processeurs mécaniques est cohérente avec le fait qu'aucune action motrice tangentielle ne subsiste pour

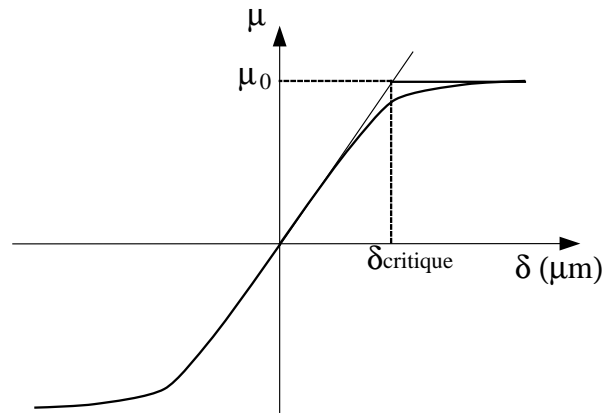


FIG. 4.15 – Modèle de frottement de Coulomb-Orowan

cette implantation.

Qui plus est, le processeur **R20** décrit par la relation (3.41) présente un coefficient de frottement visqueux  $F_0$  infiniment grand d'après la relation (3.43). En résumé, le modèle élaboré précédemment est uniquement valable dans le cas où une action tangentielle motrice existe, et ne convient pas à la description du frein réglable. Un complément d'étude du comportement mécanique est donc nécessaire pour établir le modèle du frein réglable.

Pour de très petits déplacements relatifs entre un pied et le bâti, le point de contact présente des zones d'adhérence et de glissement partielles sous une charge mécanique [FWKV98] : sur une période vibratoire, le déplacement relatif entre les deux éléments en contact n'excède pas quelques micromètres (ex : à vitesse constante  $V_t = 0,05\text{m/s}$  et fréquence  $f = 41,2\text{kHz}$ , le déplacement relatif est de  $1,2\mu\text{m}$ ).

Pour cette raison la variation instantanée du coefficient de frottement est prise en compte. Pour cela, la loi de Coulomb-Orowan décrit le coefficient de frottement pour des phases d'adhérence-glissement partielles en fonction du déplacement relatif subi par le point de contact [Gar03][FWKV98]. L'évolution du coefficient de frottement instantané est approchée par une fonction linéaire croissante, liée à la raideur tangentielle du contact, décrivant le glissement partiel, puis une fonction constante au delà d'une valeur limite de déplacement correspondant au glissement total. La fonction est illustrée (fig.4.15) et montre le seuil critique ( $\delta_{\text{critique}}$ ) à partir duquel le glissement est total. La pente à l'origine se définit d'après [Gar03] par la compliance normalisée du pied.

Dans le cas présent, nous pouvons définir la pente de la caractéristique (fig.4.15) grâce au terme de raideur tangentielle  $k_t$  obtenu par [Fer02] dans le cadre du modèle de connaissance, dont les valeurs numériques sont rappelées en Annexe C.

Ainsi le déplacement critique  $\delta_{\text{critique}}$  délimitant la zone de glissement partiel est obtenu par la relation :

$$\delta_{\text{critique}} = \mu_0 \cdot C \cdot R_n = \frac{\mu_0 \cdot R_n}{k_t} \quad (4.7)$$

avec  $C$  la compliance tangentielle ( $m/N$ ) et  $\mu_0$  le coefficient de frottement maximal à l'interface pied-substrat ( $\mu_0 = 0,08$  sur substrat de verre, et  $\mu_0 = 0,2$  sur acier).

Définissons  $R_t(t)$  l'effort de frottement tangentiel pour un pied qui s'écrit d'après la loi de Coulomb,

$$R_t(t) = \mu(t).R_n(t) \quad (4.8)$$

avec la variation de  $\mu$  selon les instants de contact et séparation définis (3.15).

$$\mu(t) = \frac{\mu_0}{\delta_{critique}}.\delta(t) \quad , \text{ si } t_C < t < t_D \text{ et } \delta(t) \leq \delta_{critique}$$

$$\mu(t) = \mu_0 \quad , \text{ si } t_C < t < t_D \text{ et } \delta(t) > \delta_{critique} \quad (4.9)$$

$$\mu(t) = 0 \quad , \text{ si } t_D < t < t_C + T$$

avec  $t_C$  et  $t_D$  respectivement les instants de mise en contact et de séparation. La valeur moyenne de  $R_t$  sur une période vibratoire s'écrit ;

$$\langle R_t \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T R_t(t).dt \quad (4.10)$$

Nous vérifions par simulation la variation de l'effort résistant sur un substrat de verre ( $\mu_{max} = 0,08$ ). Nous considérons que l'utilisateur impose une vitesse  $V_t(t)$  donnant lieu au déplacement relatif  $\delta(t)$  tel que ;

$$\delta(t) = \int_0^t V_t(t).dt \quad (4.11)$$

Quelques simulations ont été entreprises pour vérifier l'influence de différents paramètres sur l'effort  $\langle R_t \rangle$ . Tout d'abord, une première caractéristique (fig. 4.16) montre l'évolution de l'effort résistant moyen en fonction de l'amplitude vibratoire et pour différentes précharges normales. Une vitesse constante est imposée à l'élément mobile ( $V_t(t) = 0,05m/s$ ). On constate ainsi l'augmentation de l'effort résistant moyen avec l'effort de précontrainte, de même que sa diminution avec l'accroissement de l'amplitude vibratoire  $W$ .

L'effort résistant maximum est obtenu lorsque l'actionneur n'est plus excité. La même propriété est remarquable chez les moteurs à onde progressive [mh] qui délivre leur couple de blocage maximum lorsqu'ils ne sont plus alimentés, c'est à dire avec une amplitude vibratoire nulle.

Finalement, la (fig. 4.17) montre la variation de l'effort  $\langle R_t \rangle$  en fonction de la vitesse imposée à l'élément mobile, avec l'effort de précontrainte constant ( $F_n = 20N$ ). A vitesse nulle, l'effort retourné tend normalement vers zéro puisque cela signifie qu'aucune action extérieure n'est appliquée sur l'actionneur. La figure (fig. 4.17) montre également que si l'amplitude vibratoire  $W$  est supérieure à une valeur limite (ici  $W > 1\mu m$ ), alors  $\langle R_t \rangle$  varie linéairement avec  $V_t$  (à  $F_n$  constant), d'ailleurs sur la plage de vitesse considérée. C'est à dire qu'à amplitude constante supérieure à  $W_{lim}$ , l'utilisateur qui manipule l'actionneur en translation perçoit un frottement fluide, frottement réglable par  $W$ . L'amplitude minimale  $W_{lim}$  correspond à l'apparition de l'intermittence de contact. Pour des amplitudes



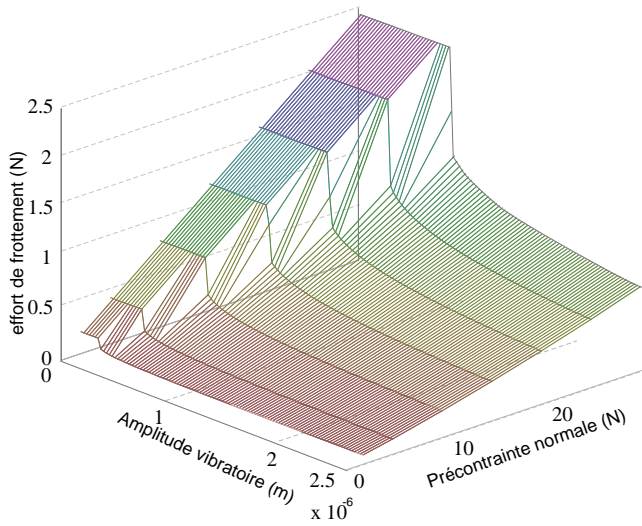


FIG. 4.16 – Variation de l'effort tangentiel résistant pour différentes précontraintes normales, à vitesse donnée

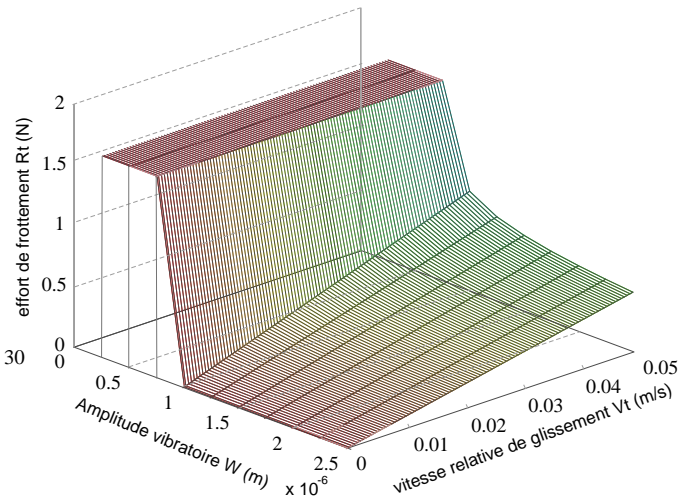


FIG. 4.17 – Variation de l'effort tangentiel résistant pour différentes vitesses de glissement, à pré-contrainte donnée

vibratoires plus faibles, pour lesquelles le contact est permanent,  $\langle R_t \rangle$  devient constant en fonction de la vitesse : l'utilisateur est alors en présence d'un frottement sec, paramétré par  $\langle R_t \rangle = \pm \mu_0 \cdot F_n$ .

Il est également possible de vérifier l'influence de la fréquence vibratoire sur l'effort résistant : l'étude de la fonction de débrayage entreprise par [Gar03] sur un actionneur rotatif (moteur à rotation de mode) décrit cette influence : à amplitude vibratoire et vitesse tangentielle constantes, l'accroissement de la fréquence implique un déplacement relatif plus faible sur une période vibratoire : si bien que globalement, l'effort résistant diminue avec l'accroissement de la fréquence. Dans le cadre d'une application en retour d'effort dissipatif, il est utile de présenter une plage de contrôle de l'effort  $\langle R_t \rangle$  la plus large possible, ainsi qu'un effort minimal le plus petit possible pour une sensation de manipulation libre (cette remarque ne tient pas compte de l'inertie propre à l'actionneur). A ce titre, l'actionneur pourra être l'objet d'un dimensionnement différent afin d'accroître la fréquence de vibration pour un mode vibratoire particulier. D'après les relations (2.77) et (2.78), la diminution des dimensions longueur et largeur, en conservant la proportion entre elles augmente la fréquence vibratoire du mode propre : pour une réduction par deux des dimensions, la fréquence théorique est multipliée par quatre.

Nous avons ensuite tracé les allures temporelles respectives du coefficient de frottement  $\mu(t)$  et de l'effort de frottement  $R_t(t)$  : Elles sont représentées (fig. 4.18) à vitesse de glissement  $V_t$  constante sur une période vibratoire.

avec  $t_{critique}$  l'instant à partir duquel l'interface est en glissement complet ( $\mu(t) = \mu_0$ ).

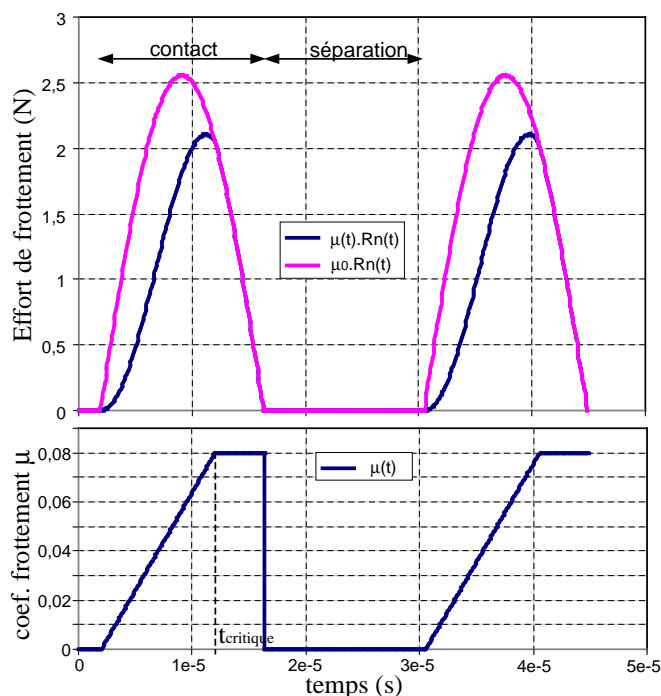


FIG. 4.18 – Chronogrammes du frottement dynamique

### 4.3.3 Freinage réglable pour interface haptique

Afin d'interpréter le comportement en frein sous la forme du modèle causal global tel qu'il a été présenté (fig. 3.15) dans le repère tournant, nous entreprenons le calcul de la valeur moyenne de l'effort résistant. Un nouveau modèle est déduit à partir des relations mécaniques précédemment introduites.

D'après les chronogrammes de la figure (fig.4.18), nous pouvons définir l'effort résistant moyen  $\langle R_t \rangle$  sur une période vibratoire tel que,

$$\langle R_t \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_C}^{t_{critique}} R_n(t) \cdot V_t(t - t_C) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{t_{critique}}^{t_D} \mu_0 R_n(t) \cdot dt \quad (4.12)$$

La résolution de ce calcul mène à une expression non-linéaire liant l'effort de frottement moyen à la vitesse  $V_t$  d'une part, à l'effort normal moyen  $\langle R_n \rangle$  d'autre part et enfin à l'amplitude vibratoire crête  $W$ . Cette relation est formulée sur le GIC par un processeur rigide et non-linéaire **Rf**. Un nouveau graphe causal du système peut être représenté (fig.4.19), ainsi que la structure de commande associée (fig.4.20).

En raison de l'influence de l'effort de précharge  $F_n$  sur l'élasticité normale ou encore sur la valeur du déplacement critique  $\delta_{critique}$ , nous considérons pour l'étude cette contrainte constante, et de ce fait, l'effort de réaction moyen  $\langle R_n \rangle$  également constant. L'inversion du graphe (fig.4.19) amène à la structure de réglage de  $R_t$ , par action sur l'amplitude vibratoire.

En simulation, nous avons vérifié en boucle ouverte l'influence de la consigne de  $W_{ref}$

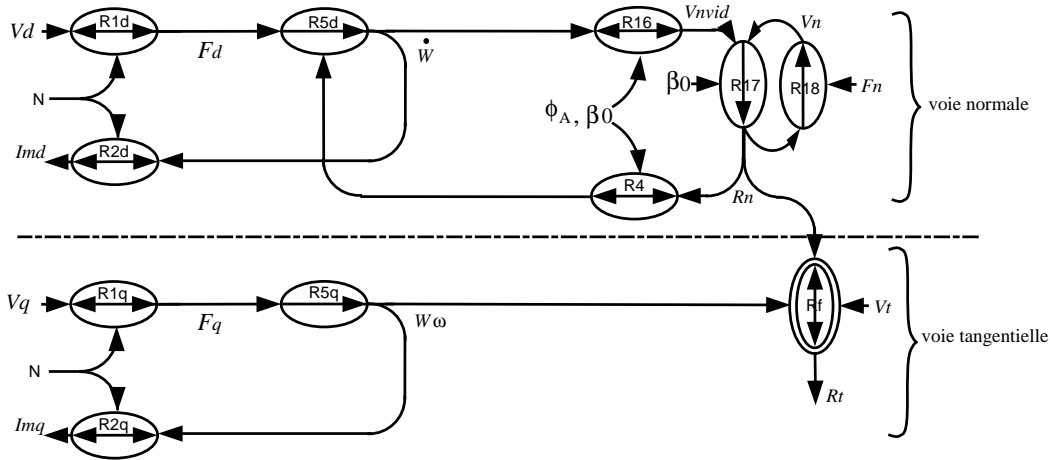


FIG. 4.19 – GIC de l'actionneur dédié au fonctionnement en frein

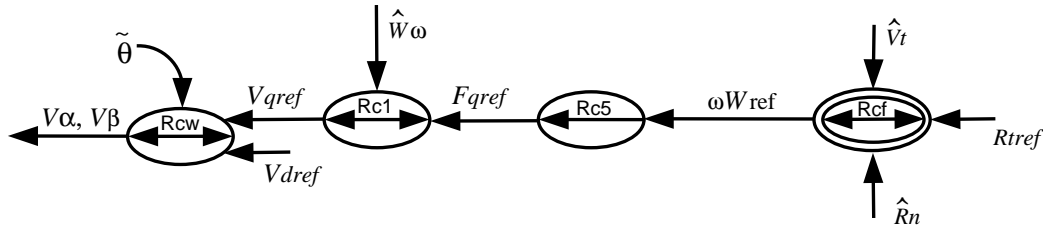


FIG. 4.20 – Structure de commande de l'actionneur dédié au fonctionnement en frein

sur l'effort résistant, à vitesse constante ( $V_t = 0.01m/s$ ). Sur un profil de déplacement 1D, nous imposons une amplitude vibratoire nulle afin d'opposer à l'utilisateur l'effort de frottement maximum sur une certaine distance. La figure (fig.4.21) illustre le résultat de simulation : ces caractéristiques sont obtenues pour une précharge normale de  $10N$ .

L'avantage principal de ce type de retour d'effort dissipatif est d'offrir un contrôle de l'effort résistant en 2D à partir d'un unique mode vibratoire, et donc d'un seul asservissement de l'amplitude vibratoire. Contrairement au contrôle de force actif présenté précédemment, cette solution est beaucoup plus simple pour opérer sur un plan. Le retour d'effort actif abordé au début de ce chapitre n'aborde pas le cas où l'actionneur est déplacé non plus selon une direction motorisée, mais par exemple en diagonale : nous savons qu'il n'est pas possible de générer simultanément un effort selon les directions  $x$  et  $y$ , puisque les modes vibratoires ne sont pas superposables dans la configuration actuelle. Dans le cas du frein actif, le contrôle de l'effort de frottement est totalement indépendant de la direction empruntée par l'actionneur sous l'action de l'utilisateur.

Cependant, ce dispositif ainsi configuré n'offre qu'un nombre limité de simulations kinesthésiques : en effet, il n'est pas possible de reproduire une élasticité ou encore un effet inertiel. De même, d'après la figure (fig. 4.17), la vitesse à laquelle l'utilisateur vient à manipuler l'actionneur influe sur la valeur de l'effort résistant lors de l'excitation. En fonction des besoins de l'interface, il pourra être envisagé de compenser ou non, l'influence

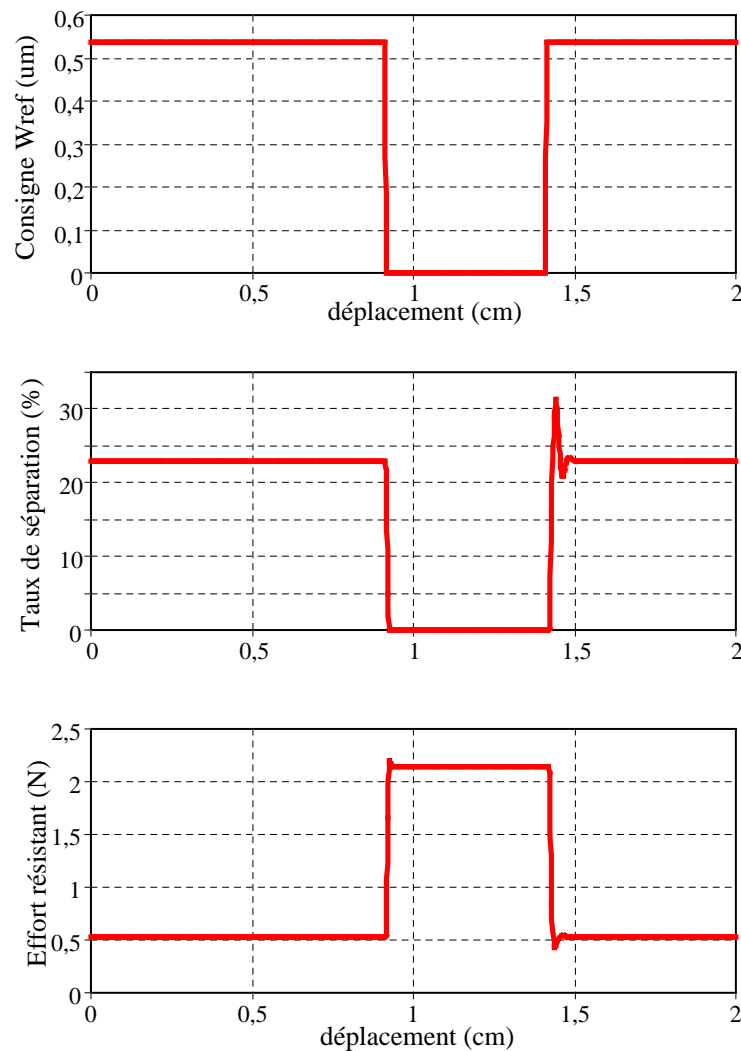


FIG. 4.21 – Retour d’effort dissipatif obtenu par le contrôle de l’amplitude vibratoire, à vitesse tangentielle constante

de la vitesse. Une étude ultérieure pourra se consacrer à compenser cette variation de force liée à la vitesse de manipulation, évidemment dans les limites des capacités vibratoires que permet l’actionneur.

## 4.4 Conclusion

A partir de la modélisation causale, nous avons abordé le principe de commande de l’actionneur piézoélectrique plan. L’inversion du GIC sur la branche motionnelle tangentielle a permis de mettre en évidence la structure de commande nécessaire au contrôle de la force. La représentation dans le repère tournant a souligné la possibilité d’un contrôle en phase, qualifié d’autopilotage. Cela permet de se dégager de la variation inévitable de la fréquence de résonance. L’asservissement de l’amplitude vibratoire et l’autopilotage ont

été détaillés dans les précédents chapitres pour permettre l'identification et la validation du modèle choisi.

Il s'en suit alors l'asservissement de l'effort de traction proprement dit. Sous couvert d'hypothèses sur la symétrie des performances mécaniques selon les deux sens de déplacement, le réglage du correcteur et la validation théorique du contrôle en force sont présentés. Cet asservissement est appliqué dans le cadre de la simulation d'un dispositif élastique. Les résultats sont satisfaisants mais ne tiennent pas compte des changements des paramètres vibratoires et mécaniques rencontrés lors d'un fonctionnement bi-directionnel réel. Pour une approche plus réaliste en pratique, nous abordons l'asservissement simple d'un seul mode vibratoire, comparable à une élasticité unidirectionnelle.

Face aux difficultés de la réalisation d'un retour d'effort actif selon chaque direction motorisée, une nouvelle application est proposée, soit le retour d'effort dissipatif. C'est la propriété d'intermittence de contact qui est mise à profit dans ce nouveau mode de fonctionnement. Son principe et sa validation sont brièvement présentés, laissant entrevoir un potentiel applicatif simple et intéressant.

# Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire traite de la modélisation d'un actionneur piézoélectrique plan à onde stationnaire. Cette modélisation a pour objectif la description du comportement de l'actionneur de manière analytique et globale, afin d'en vérifier les possibilités en commande, en particulier pour répondre aux besoins du domaine haptique.

Le premier chapitre rappelle la définition d'un dispositif haptique, autrement nommé interface homme-machine. Ces interfaces doivent répondre à des critères spécifiques en termes d'encombrement, de force et de motorisation multi-degrés de liberté. A ce titre, une présentation non-exhaustive d'actionneurs multi-degrés de liberté susceptibles de satisfaire les besoins techniques de ces dispositifs est établie. Cette présentation est faite indifféremment des degrés de liberté motorisés que fournissent ces actionneurs puisque la transformation rotation-translation ou inversement, est généralement aisée. Quelques solutions sur la base de l'action magnétique sont présentées, mais c'est la technologie piézoélectrique qui montre la plus large gamme de structures, en raison des nombreuses combinaisons mécaniques qu'offrent la transmission par interaction de contact. Le principe physique du phénomène piézoélectrique est rappelé ainsi que les combinaisons vibratoires classiques à l'origine de la transmission mécanique. La fin du premier chapitre se focalise plus précisément sur le translateur plan et son principe de fonctionnement. A titre indicatif, quelques mises en applications nées d'études précédentes sont introduites, et son utilisation potentielle à l'usage des dispositifs à retour d'effort est discutée.

L'étude du translateur plan s'articule autour des deux principales étapes de la conversion énergétique soient, la conversion électro-mécanique à l'origine de l'onde stationnaire, et la conversion mécano-mécanique qui amène au mouvement uniforme.

Le second chapitre est donc consacré à l'étude du mouvement vibratoire. En guise d'étude préliminaire, nous abordons la conversion électro-mécanique par une approche simple, qui consiste à faire l'analogie du comportement vibratoire avec le schéma électrique équivalent de Mason. Cette première démarche sert principalement à vérifier le caractère résonnant du dispositif, et à obtenir des valeurs numériques qui serviront par la suite à vérifier celles obtenues par l'étude analytique. Cependant, l'identification par schéma équivalent est une méthode expérimentale qui ne permet pas la définition des différents paramètres vibratoires en fonction par exemple des dimensions géométriques, et demeure principalement valable pour caractériser le régime permanent. De plus, les non-linéarités sont difficilement identifiables, particulièrement lorsqu'il s'agit de la conversion

purement mécanique du dispositif.

L'étude analytique est donc entreprise. Celle-ci s'appuie sur l'écriture du Lagrangien qui décrit l'état énergétique du système. Cette méthode, largement répandue pour décrire le comportement des milieux continus déformables, se transpose assez simplement aux systèmes vibratoires actifs. La mise en œuvre du Lagrangien est élaborée à partir des études précédentes sur les dispositifs piézoélectriques de manière générale, pour être finalement appliquée à l'actionneur plan. Les hypothèses de découplage fréquentiel des différents modes vibratoires amènent aux équations différentielles qui caractérisent chaque mode. Cette équation différentielle s'articule autour des variables généralisées du système, soient la tension d'alimentation et l'amplitude modale de déformation.

Par conséquent, les différents paramètres vibratoires sont exprimés en fonction des dimensions géométriques et des propriétés physiques des matériaux qui composent l'actionneur. Les valeurs obtenues de manière analytique sont comparées à l'étude préliminaire par schéma électrique équivalent et démontrent la cohérence des résultats.

Nous cherchons ensuite à élaborer une méthode d'identification des paramètres vibratoires permettant de mettre en évidence les non-linéarités du système. Pour cela, nous faisons appel à un changement de repère, qui permet de poser le problème selon les grandeurs mécaniques dans un repère tournant. Ce changement de repère permet de mettre en évidence l'influence entre l'amplitude vibratoire de déformation et le déphasage tension-onde. De cette transformation, et à partir d'un asservissement de phase mis en œuvre en pratique, sont obtenus les différents paramètres et leur variation.

Le troisième chapitre aborde la conversion purement mécanique du dispositif. Cette conversion est réalisée à partir de pieds judicieusement placés sous l'actionneur. Cette part de la conversion énergétique est particulièrement délicate, en raison des différentes élasticités des effecteurs, et de l'intermittence de contact, qui est en partie à l'origine du mouvement de translation. Comme base de notre étude, nous faisons usage de travaux antérieurs consacrés à la modélisation mécanique de l'actionneur présentement étudié. Les valeurs numériques de ces travaux sont mises à profit et forment notre modèle de connaissance. Ce modèle s'appuie sur une représentation masse-ressort, que nous reformulons afin d'en extraire différentes caractéristiques en simulation.

Notre objectif étant de modéliser le dispositif afin d'en déduire les possibilités de commande, le modèle de connaissance demeure trop complexe et ne peut fournir une interprétation des lois de commande. Nous envisageons la simplification du modèle, en se basant sur les performances idéales de l'actionneur. Les phénomènes de contact sont réduits à des phases de séparation et de glissement, donnant ainsi une interprétation plus globale de l'interaction de contact. Qui plus est, notre intérêt portant sur les grandeurs mécaniques macroscopiques du système, nous élaborons un modèle moyenné sur une période vibratoire. Ce modèle interprété distinctement selon le comportement normal et tangentiel du mouvement est rattaché au modèle vibratoire par le biais de la définition dans le repère tournant. Le modèle a été élaboré en prenant soin de respecter la causalité naturelle de la conversion d'énergie. Ainsi, la chaîne de conversion énergétique est représentée de manière graphique à partir du formalisme du Graphe Informationnel Causal, en prévision de la déduction de la structure de commande.

---

Les résultats du modèle linéaire ainsi obtenus sont comparés aux essais expérimentaux qui ont servi à l'élaboration du modèle de connaissance et montrent une bonne cohérence des résultats, et ce en dépit des importantes simplifications entreprises à l'interface mécanique.

Nous entreprenons ensuite nos propres essais expérimentaux. La réalisation d'un banc de mesure expérimentale en traction, et l'usage de l'asservissement de l'amplitude vibratoire, viennent conforter notre approche simplifiée.

Le quatrième et dernier chapitre est consacré à la commande en force du dispositif. Par une lecture inverse et systématique du graphe causal, s'en déduit la structure de commande. De cette manière, l'inversion de la branche motionnelle tangentielle, à l'origine de la force de traction, sert à l'élaboration de la commande en force. Cette démarche souligne la nécessité d'asservir en premier lieu la phase, puis l'amplitude vibratoire, qui ont d'ailleurs préalablement servi à l'identification des paramètres vibratoires comme aux relevés des caractéristiques mécaniques force-vitesse.

S'en suit alors l'asservissement de force proprement dit. Compte tenu des importantes non-linéarités inhérentes au fonctionnement bidirectionnel de l'actionneur, une commande linéaire et robuste du dispositif est compromise. Nous admettons cependant la parfaite symétrie des performances mécaniques, afin d'entreprendre par simulation la commande en force. Pour cela, nous cherchons à simuler un dispositif élastique : la simulation de raideur est une opération classique parmi les interfaces haptiques, et illustre parfaitement les possibilités d'un dispositif à retour d'effort actif. Une fois le fonctionnement bidirectionnel validé en théorie, nous cherchons à nous rapprocher du fonctionnement réel de l'actionneur, pour nous concentrer sur l'asservissement en force d'un unique mode vibratoire, comparable à une élasticité unidirectionnelle. La validation expérimentale de cet asservissement demeure une perspective de travail futur.

Eu égard aux performances a priori limitées d'un retour d'effort actif avec le dispositif actuel et de la dégradation inévitable des performances mécaniques selon différents sens de déplacement, une seconde solution semble pouvoir répondre à certaines applications du domaine haptique.

Nous ne cherchons plus à produire une action motrice en traction, mais simplement à exploiter le phénomène d'intermittence de contact. L'actionneur ainsi présenté s'intègre parmi les dispositifs à retour d'effort dissipatif : celui-ci permet le réglage du coefficient de frottement global, à la manière d'un système de débrayage mécanique. Un nouveau modèle valable pour ce fonctionnement particulier est étudié, et aboutit à la caractérisation de ce que nous nommons "le frein réglable". Cette nouvelle propriété laisse entrevoir des performances intéressantes pour un dispositif et un contrôle simplifiés. Ce fonctionnement pourra faire l'objet d'une étude plus approfondie de la faisabilité sur la caractérisation et l'optimisation de cet effort de frottement.





# Annexe A

## Valeurs numériques des matériaux

Caractéristiques du résonateur métallique cuivre-beryllium

Masse volumique	$\rho_i$	$kg.m^{-3}$	8250
Module d'Young		$N.m^{-2}$	$123 \times 10^9$
Coefficient de Poisson			0,31

Caractéristiques de la céramique P1 89

Annexe A. Valeurs numériques des matériaux

Masse volumique	$\rho_p$	$kg.m^{-3}$	7650
Constantes élastiques à champ constant	$c_{11}^E$	$10^{10}N.m^{-2}$	15,37
	$c_{12}^E$		8,23
	$c_{13}^E$		8,06
	$c_{33}^E$		13,74
	$c_{44}^E$		4,59
	$c_{66}^E$		3,57
Constantes élastiques à induction constante	$c_{11}^D$	$10^{10}N.m^{-2}$	16,05
	$c_{12}^D$		8,91
	$c_{13}^D$		6,52
	$c_{33}^D$		16,51
	$c_{44}^D$		6,23
	$c_{66}^D$		3,57
Compliances à champ constant	$s_{11}^E$	$10^{-12}m^{-2}.N^{-1}$	10,66
	$s_{12}^E$		-3,34
	$s_{13}^E$		-4,52
	$s_{33}^E$		13,25
	$s_{44}^E$		21,77
	$s_{66}^E$		28,07
Compliances à induction constante	$s_{11}^D$	$10^{-12}m^{-2}.N^{-1}$	9,52
	$s_{12}^D$		-4,48
	$s_{13}^D$		-1,99
	$s_{33}^D$		7,63
	$s_{44}^D$		16,04
	$s_{66}^D$		28,01
Constantes diélectriques relatives	$\epsilon_0$		$8,84e^{-12}$
	$\epsilon_{33}^T/\epsilon_0$		1150
	$\epsilon_{33}^S/\epsilon_0$		668
	$\epsilon_{11}^T/\epsilon_0$		1550
	$\epsilon_{11}^S/\epsilon_0$		1142
Coefficient piézoélectrique	$d_{13}$		$-108e^{-12}$
	$e_{31}$		$d_{13}/(s_{11}^E + s_{12}^E)$
Facteur de Qualité mécanique radial	$Q_m$		$> 1000$
Coefficient de Poisson	$\nu$		0,31

## Annexe B

# Modèle mécanique et description des phénomènes de contact

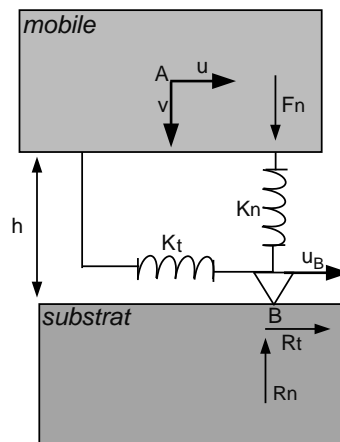


FIG. B.1 – Modèle de contact selon [YCM98]

La raideur de l'élément élastique est décrite selon deux ressorts linéaires orthogonaux,  $k_n$  et  $k_t$  qui donnent respectivement les propriétés en écrasement normal et en cisaillement tangent. Les déplacements noté  $u$  et  $v$ , liés au mobile et représentés en son centre de gravité  $A$ , peuvent induire à l'extrémité  $B$ , un mouvement relatif entre les deux pièces. De même, on assure qu'à l'état initial, l'interface de contact présente une pré-contrainte normale  $F_n$ , et une distance initiale  $h$  séparant les deux éléments. Quant au frottement occasionné par le déplacement  $u_B$  du point de contact relativement au substrat, celui-ci obéit à la loi de Coulomb selon un coefficient de frottement dynamique  $\mu$  constant.

Ainsi dans le cas général, l'effort de réaction normal  $R_n$  et l'effort tangentiel  $R_t$  sont

exprimés par la compression respective des ressorts :

$$R_n = \begin{cases} F_n + k_n \cdot v & \text{si } v \geq -\frac{F_n}{k_n} \quad \text{contact} \\ 0 & \text{si } v \leq -\frac{F_n}{k_n} \quad \text{séparation} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

et en phase d'adhérence,

$$R_t = k_t(u - u_b) \quad (\text{B.2})$$

tant que l'effort  $R_t < \mu R_n$ , et donc que le point B reste immobile sur le substrat.

### Phénomène d'adhérence, de glissement et de séparation

Selon l'effort de réaction normal  $R_n$ , constant ou variable, le comportement tangent du point B sera fortement affecté. Afin de bien comprendre les phénomènes mis en jeu, observons tout d'abord le comportement du dispositif sans déplacement selon la normal ( $\dot{v} = 0$ ). La pré-contrainte implique un contact permanent du point B sur le substrat. Un déplacement sinusoïdal  $u_B$  entraîne alors l'apparition d'un effort tangent selon (B.2) s'il y a adhérence. Si cet effort vient à atteindre la limite d'adhérence imposée par la relation  $\pm\mu R_n$ , le point en contact entre en glissement dans le sens de  $u$ , et l'effort tangent reste égal à l'effort de glissement jusqu'à ce que les deux éléments adhèrent à nouveau.

Les figures B.2 et B.3 illustrent le comportement tangentiel du point de contact lors d'une pré-contrainte normale constante, avec  $\theta = \omega \cdot t$ , l'instant angulaire du déplacement  $u_B$ . Ainsi, l'hystérésis résultant présente deux phases symétriques d'adhésion et de glissement, avec le point de basculement  $\theta^*$  [MGB86] ;

$$\theta^* = \cos^{-1} \left( 1 - 2 \frac{\mu F_n}{k_t \cdot A} \right) \quad (\text{B.3})$$

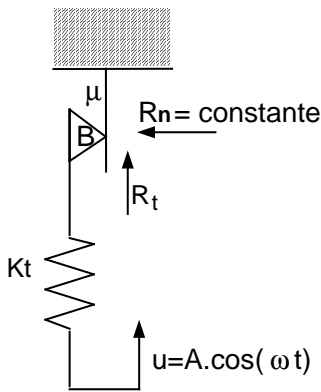


FIG. B.2 – Modèle de l'interface de frottement

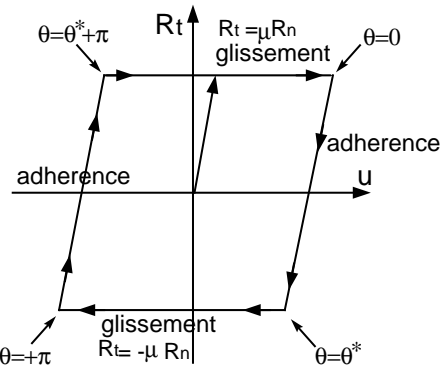


FIG. B.3 – Boucle hystérésis pour un effort normal constant

Cette symétrie induit un déplacement moyen nul de la partie mobile, qu'il y est apparition de phase de glissement ou non. De fait, un déplacement moyen non nul de l'élément

mobile ne peut être attendu qu'à la condition d'un changement des conditions de contact imposées selon  $v$ , l'axe normal.

Dans le cas où l'effort de pré-contrainte varie de manière sinusoïdale (fig.B.4), il devient moins évident de prédire les transitions adhérence-glissement, en raison du déphasage entre les déplacements  $u$  et  $v$ , de l'élasticité normale, ou encore de l'amplitude des déplacements pouvant introduire des phases de séparation.

La figure (fig. B.5)<sup>3</sup> illustre d'après [YCM98] la forme courante du phénomène d'hysteresis rencontrée lors d'un contact permanent. Contrairement au cas précédent, les transitions glissement→adhérence n'apparaissent pas forcément lors du changement de signe de la vitesse  $\dot{u}$ . De plus, selon la pré-charge normale appliquée au mobile et l'amplitude du mouvement, un décollement des deux surfaces apparaît et peut également produire un incrément de déplacement durant cette période.

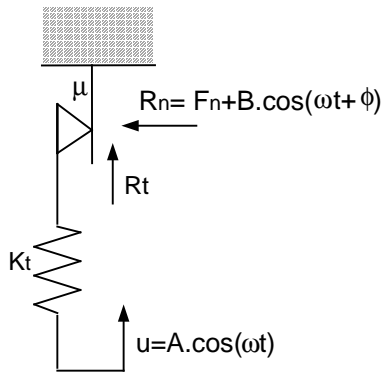


FIG. B.4 – Modèle de l'interface de frottement

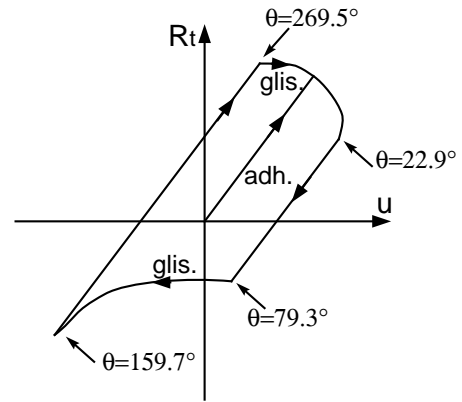


FIG. B.5 – Boucle hystérésis classique pour un effort normal variable

Les déplacements de l'extrémité des pieds du translateur plan de l'étude, s'apparentent à ce second comportement, compte-tenu de l'implantation choisie pour satisfaire un déplacement combiné selon l'axe normal et l'axe tangentiel. C'est la variation instantanée de l'effort de réaction  $R_n$  qui permet la progression de l'élément mobile dans une direction privilégiée. Nous cherchons donc à décrire les critères qui provoquent les changements de contact.

### Critères de changement des conditions de contact

Une description analytique est entreprise pour prévoir les périodes de glissement, d'adhérence et de séparation.

Premièrement, nous pouvons affirmer que lors des périodes d'adhérence, la vitesse relative

<sup>3</sup>Valeurs numériques extraites de [YCM98], pour illustrer l'influence de la pré-charge et du mouvement selon  $v$

entre les deux éléments est nulle. Ainsi lorsqu'il y a adhérence,  $u_B = 0$  et l'effort tangent peut s'écrire,

$$R_t = k_t(u - u_0) + R_{t0} \quad (\text{B.4})$$

avec  $u_0$  et  $R_{t0}$ , les valeurs initiales de  $u$  et  $R_t$  lors du commencement de la phase d'adhérence.

Limites de la phase d'adhérence

La limite de l'adhérence vers un glissement positif est atteinte lorsque  $\dot{u}_B > 0$ , et l'effort tangent prend d'après la loi de Coulomb, la valeur :

$$R_t = \mu F_n + \mu k_n.v \quad (\text{B.5})$$

et permet à partir de (B.2)(B.5) d'exprimer la vitesse de glissement positive,

$$\dot{u}_B = \dot{u} - \mu \frac{k_n}{k_t} \dot{v} \quad (\text{B.6})$$

De même pour la limite au glissement négatif est définie l'égalité,

$$R_t = -(\mu F_n + \mu k_n.v) \quad (\text{B.7})$$

et la vitesse de glissement négative,

$$\dot{u}_B = \dot{u} + \mu \frac{k_n}{k_t} \dot{v} \quad (\text{B.8})$$

Les transitions vers le glissement apparaissent lorsque l'effort tangent atteint le cône de glissement et vérifie donc l'égalité suivante ;

$$\text{glissement positif : } \begin{cases} R_t - \mu R_n = 0 & \text{avec, } \dot{R}_t - \mu \dot{R}_n > 0 \\ k_t.u - \mu k_n.v + (R_{t0} - \mu F_n - k_t.u_0) = 0 & \text{avec, } k_t \dot{u} - \mu k_n \dot{v} > 0 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

De même pour le glissement négatif,

$$\text{glissement négatif : } \begin{cases} R_t + \mu R_n = 0 & \text{avec, } \dot{R}_t + \mu \dot{R}_n < 0 \\ k_t.u + \mu k_n.v + (R_{t0} + \mu F_n - k_t.u_0) = 0 & \text{avec, } k_t \dot{u} + \mu k_n \dot{v} < 0 \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Une autre transition peut interrompre la période d'adhérence lorsque l'effort de pré-contrainte disparaît et engendre donc une séparation des deux éléments. Ainsi d'après (B.1) ceci se produit lorsque :

$$F_n + k_n.v = 0, \quad \dot{v} < 0 \quad (\text{B.11})$$

---

Limites des phases de glissement positif et négatif

Puisque une phase de glissement positif ne peut être directement suivie d'une phase de glissement négatif sans passer par une phase d'adhérence, deux transitions sont possibles. La première étant la transition glissement-adhérence qui peut être interprétée par la disparition de la vitesse de glissement relative  $\dot{u}_B = 0$ , ainsi que l'accélération  $\ddot{u}_B < 0$  (décélération). Ainsi, à partir de la définition de la vitesse de glissement positif (B.6), la transition glissement(+) $\rightarrow$ adhérence vérifie,

$$\dot{u} - \frac{\mu.k_n}{k_t}\dot{v} = 0, \quad \ddot{u} - \frac{\mu.k_n}{k_t}\ddot{v} < 0 \quad (\text{B.12})$$

D'une manière similaire, la transition glissement(-) $\rightarrow$ adhérence vérifie les conditions  $\dot{u}_B = 0$  et  $\ddot{u}_B > 0$ , et donne,

$$\dot{u} + \frac{\mu.k_n}{k_t}\dot{v} = 0, \quad \ddot{u} + \frac{\mu.k_n}{k_t}\ddot{v} > 0 \quad (\text{B.13})$$

La seconde transition correspond à la disparition du contact, qui ne dépend que de la variation de l'effort de réaction  $R_n$ , et correspond donc au critère énoncé (B.1).

Limites de la phase de séparation

La phase de séparation disparaît lors du retour du contact, et se décrit donc par,

$$F_{v0} + k_v.v = 0, \quad \dot{v} > 0 \quad (\text{B.14})$$

$F_{v0}$  la force initiale du ressort lors de la reprise du contact. Cependant cette condition ne suffit pas à décrire l'état qui suit la mise en contact. En effet, la mise en contact peut-être suivie d'une phase d'adhérence, d'une phase de glissement positive ou négative. La phase d'adhérence suivra le remise en contact à la condition,

$$\left[ \begin{array}{l} -\mu\dot{R}_n < \dot{R}_t < \mu\dot{R}_n \\ \text{ou encore,} \quad \text{et } \dot{u}_B = 0 \\ -\mu\frac{k_n}{k_t}\dot{v} < \dot{u} < \mu\frac{k_n}{k_t}\dot{v} \end{array} \right. \quad (\text{B.15})$$

Le glissement positif suivra la remise du contact à la condition :

$$\dot{u} > \mu\frac{k_n}{k_t}\dot{v} \quad (\text{B.16})$$

et le glissement négatif par la condition :

$$\dot{u} < \mu\frac{k_n}{k_t}\dot{v} \quad (\text{B.17})$$



A partir de cette description des changements de contact, et de la définition des efforts selon chaque phase, [YCM98] a entrepris la modélisation de ces phénomènes à partir de déplacements sinusoïdaux tels que ;

$$u = a.\sin(\theta), \quad v = b.\sin(\theta + \phi) \quad (\text{B.18})$$

ou  $\theta = \omega t$ , avec  $\omega$  la pulsation vibratoire observée par le mobile. Ces déplacements peuvent s'apparenter aux déplacements d'un point obtenus à la surface d'une plaque en vibration. Selon le déphasage admis entre les déplacements vibratoire  $u$  et  $v$ , la séquence des phases d'adhérence, de glissement et de séparation s'en trouve fortement modifiée (fig.B.6).

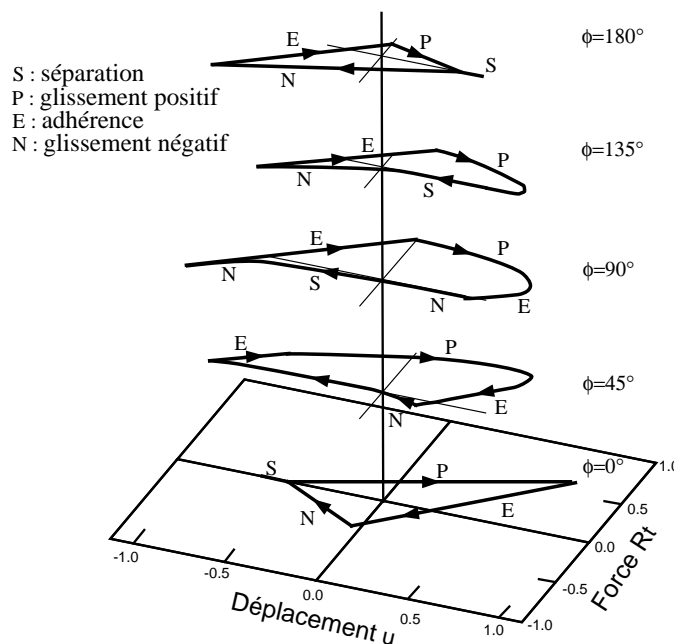


FIG. B.6 – Evolution du cycle d'hystérésis selon  $\phi$  [YCM98]

Si les déplacements  $u$  et  $v$  sont occasionnés par une onde progressive, ils génèrent une trajectoire elliptique des points à sa surface (fig. 1.19) ; le déphasage  $\Phi$  est donc non nul. Alors que dans notre cas, pour une onde stationnaire, la trajectoire d'un point à la surface suit une trajectoire linéaire (§4 fig. 1.47), impliquant  $\Phi = 0$ , qui permet de réduire les critères de changement d'état uniquement selon l'influence de l'effort de pré-contrainte, et de l'amplitude des déplacements.

Par ailleurs, il est aisé de constater l'influence importante des non-linéarités, produites par le changement des conditions de contact. Celles-ci modifient considérablement les caractéristiques des efforts et de la vitesse de glissement. Cela présente un inconvénient majeur dès lors que la dérivée de ces fonctions est exploitée pour satisfaire les conditions de changement d'état lors de la modélisation, problématique à l'approche des discontinuités des fonctions. Qui plus est, la détermination des instants pour lesquels apparaît une

---

modification du contact demande un grand nombre d'itérations, et un temps de calcul important.

### Approximation de l'effort normal et tangentiel

Une autre façon d'exprimer les efforts normal et tangentiel est de les approcher par une décomposition en série de Fourier paramétré [YCM98]. Ainsi, pour des déplacements sinusoidaux comme décrit (B.18), la force tangentielle prend l'expression continue,

$$R_t(\theta) \approx k_t.a.(\lambda_b(\bar{F}_n, \bar{b}, \phi) + \lambda_s(\bar{F}_n, \bar{b}, \phi).\sin(\theta) + \lambda_c(\bar{F}_n, \bar{b}, \phi).\cos(\theta)) \quad (\text{B.19})$$

avec  $\lambda_b$ ,  $\lambda_s$  et  $\lambda_c$  les coefficients de la décomposition en série de Fourier résolus pour le fondamental lié à la pulsation  $\omega$ , et aux paramètres réduits  $\bar{F}_n = \mu.F_n/k_t a$ ,  $\bar{b} = \mu.k_n b/k_t a$ .

De la même manière, l'effort normal résultant soumis au déplacement  $v = b.\sin(\theta)$  peut-être approché en ignorant les harmoniques de rang supérieur à 1,

$$R_n(\theta) \approx k_n.b.(\gamma_b(F_n^*) + \gamma_s(F_n^*).\sin(\theta)) \quad (\text{B.20})$$

avec le terme réduit  $F_n^* = F_{v0}/k_n b$ ,  $\gamma_b$  et  $\gamma_s$  les coefficients de Fourier.

Cette approximation des efforts permet d'entrevoir l'optimisation de la structure, à partir des critères  $\lambda_s$  et  $\lambda_c$ , dépendants des propriétés élastiques normale et tangentielle, et de quantifier la part de l'effort de traction, porté par le terme en sinus  $k_t a \lambda_s$ , et l'effort d'atténuation porté par le cosinus  $k_t a \lambda_c$  de l'expression (B.19).

Ce modèle général de contact est employé par [LJF00] [Fer02] pour décrire la conversion mécanique d'un translateur plan à onde stationnaire. Il a été validé expérimentalement et servira de modèle de connaissance à notre étude.



## Annexe C

# Valeurs numériques du modèle de connaissance

Paramètres	Valeurs numériques				unités
Fréquence vibratoire	35000				Hz
Modes propres	2	4	6	8	
Vecteur d'onde $\nu$	4,73	10,9956	17,2788	23,5619	
Dimensions de l'actionneur	largeur L		longueur Li		
	38		64		mm
Masse de l'actionneur $m$	0,0723				kg
Masse fictive du pied $m_p \ll m$	$m/10^6$				kg
Nombre de pieds	3				
Pré-contrainte normale $F_{ne}$	5,5	10	20	30	N
Elasticité normale $k_n$	7,6	9,7	13,3	14,8	MN/m
Elasticité tangentielle $k_t$	1,61	2	2,61	2,84	MN/m
Amortissement $d_n$	200				N/(m/sec)
Amortissement $d_t$	$2\sqrt{m_p k_t}$				N/(m/sec)
Longueur du pied $h$	0,004				m
Indentation du pied $\Phi_A$	0,707				
Substrat	Verre		Acier		
Coefficient de frottement $\mu$	0,08		0,2		

TAB. C.1 – Valeurs numériques des paramètres d'après [LJF00]

# Bibliographie

- [AA00] V. Perrin R. Briot D. Guyomar A. Albareda, P. Gonnard. Characterization of the mechanical nonlinear behavior of piezoelectric ceramics. *IEEE Trans. on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 47(4) :844–853, 2000.
- [ABW02] M. Aoyagi, S.P Beeby, and N.M White. A novel multi-degree of freedom thick film ultrasonic motor. *IEEE/ASME Transactions on ultrasonics, ferroelectrics and frequency control*, 49(2) :151–158, 2002.
- [AINU98] T. Amano, T. Ishii, K. K. Nakamura, and S. Ueha. An ultrasonic actuator with multi-degree of freedom using bending and longitudinal vibrations of a single stator. In *IEEE Ultrasonics symposium*, pages 667–670, 1998.
- [ARC<sup>+</sup>98] J. Abadie, J.C Ravassard, N. Chaillet, P. Le Moal, and A. Bourjault. Trajectory closed-loop control of a piezoelectric nanotranslator using a gyroscopic sensor and an sma actuator. In *Proc. of IEEE IMACS International Conference of Computational Engineering in Systems Applications, CESA '98, Nabeul-Hammamet, Tunisie.*, avril 1998.
- [BC00] Y. Bar-Cohen. Multiple-dof surface acoustic wave piezoelectric motors. Technical report, NASA Tech, décembre 2000.
- [Ber01] E.J Berger. Friction modeling for dynamic system simulation. *Applied Mechanics reviews*, mai 2001.
- [BOS01] F. Lindner BOSCH. Injection directe dans les moteurs diésel. In *MAGEL-LEC, 2nd symposium on electroactive materials and their applications in electrical*, décembre 2001.
- [Bro] J.P Brossard. Mécanique générale. dynamique générale. forme analytique. *Les techniques de l'ingénieur*, (A1666) :1–16.
- [Bud03] M. Budinger. *Contribution a la conception et la modélisation d'actionneurs piézoélectriques cylindriques à deux degrés de liberté de type rotation et translation*. PhD thesis, INP de Toulouse, LEEI, mai 2003.
- [Bur96] G. Burdea. *Force and Touch Feedback for Virtual Reality*. John Wiley and sons, New York, 1996.
- [Cas04] G. Casiez. *Contribution à l'étude des interfaces haptiques. Le DigiHaptic, un périphérique haptique de bureau à degrés de liberté séparés*. PhD thesis, USTL Lille 1, septembre 2004.
- [chS] 3D connexion : <http://www.3dconnexion.com> Spaceball.

- [Cou79] J. Courbon. Théories de l'élasticité. *Les techniques de l'ingénieur*, AF5(A305), août 1979.
- [Cou80] J. Courbon. *Plaques minces élastiques*. Editions Eyrolles, Paris, 1980.
- [CPCS03] G. Casiez, P. Plénacoste, C. Chaillou, and B. Semail. Elastic Force Feedback with a New Multi-finger haptic device : The DigiHaptic. In *Proceedings of Eurohaptics*, pages 121–134, July 2003.
- [CS99] G.S Chirikjian and D. Stein. Kinematic design and commutation of a spherical stepper motor. *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, 4(4) :342–352, 1999.
- [DFGR02] B. Dehez, V. Froidmont, D. Grenier, and B. Raucant. Design, modeling and prototyping of a two degree-of-freedom spherical actuator : Integrated electromechanical approach. *ICEM'2002 : International Conference on Electrical Machine, 26-28 Aug. 2002, Brugge, Belgium*, 2002.
- [DRABB02] S. Devos, D. Reynaerts, F. Al-Bender, and H. Van Brussel. A piezo-electrical travelling wave x-y stage. In *ACTUATOR 2002, Bremen, Allemagne.*, juin 2002.
- [DRSM01] S. Dembelé, K. Rochdi, P. Sandoz, and P. Le Moal. Development of a microrobot based micropositioning station : The microrobot and its position and orientation measurement method. In *Proc. of SPIE*, volume 4568, pages 318–324, 2001.
- [Fer96] A. Ferreira. *Conception et mise en oeuvre d'un actionneur piézoélectrique plan à onde stationnaire*. PhD thesis, UFR de Franche-Comté, novembre 1996. N°1725.
- [Fer02] J.C Ferniot. *Translateur piézo-électrique à ondes stationnaires : Modélisation théorique et caractérisation expérimentale*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, UFR des Sciences et Techniques, juin 2002. N°913.
- [FF03] A. Ferreira and J-G. Fontaine. Dynamic modeling and control of a conveyance microrobotic system using friction drive. *IEEE/ASME T. on mechatronics*, pages 188–202, juin 2003.
- [FNU04] J. Friend, K. Nakamura, and S. Ueha. A piezoelectric micromotor using in-plane shearing of pzt elements. *IEEE transactions on mechatronics*, 9(3) :467–473, 2004.
- [FSdS00] A-F. Flores Filho, A-A. Susin, and M-A. da Silveira. 3d analysis and simulation of a novel planar actuator. *ICEM 2000, Espoo Finland*, août 2000.
- [FSdS03] A-F. Flores Filho, A-A. Susin, and M-A. da Silveira. An analytical method to predict the static performance of a planar actuator. *IEEE Transactions on magnetics*, 39(5) :3364–3366, septembre 2003.
- [FWKV98] S. Fouvry, J. Wei, P. Kapsa, and L. Vincent. Prise en compte de l'humidité dans la prévision des dommages en fretting. In *Tribologie et corrosion, actes des journées francophones de tribologie-corrosion (JFTC)*, pages 121–136, juin 1998.

- 
- [GA98] C. Giraud-Audine. *Contribution à la modélisation analytique d'actionneurs piézoélectriques en vue de leur conception et dimensionnement*. PhD thesis, LEEI de Toulouse, ENSEEIHT, décembre 1998. N°1501.
- [Gal00] F. Galiano. *Conception, modélisation théorique et caractérisation des moteurs piézoélectriques mono et multi-degrés de liberté : applications à la microrobotique et aux micromachines*. PhD thesis, LEEI de Toulouse, ENSEEIHT, novembre 2000. N°536.
- [GAN99] C. Giraud-Audine and B. Nogarède. Analytical modelling of travelling-wave piezomotor stators using a variational approach. *European physical journal : Applied physics*, (6) :71–79, 1999.
- [Gar03] L. Garbuio. Etude du contrôle de la fonction débrayage des moteurs piézoélectriques à rotation de mode. In *Proc. JCGE'03 Saint-nazaire*, pages 171–176, 2003.
- [Gay98] J.P. Gaynes. Conception, mise en oeuvre et exploitation d'un banc d'analyse électromécanique d'actionneurs à effet piézoélectrique. *Mémoire de diplôme d'ingénieur, CNAM*, 1998.
- [GH97] D. Grant and V. Hayward. Variable structure control of shape memory alloy actuators. *IEEE Systems and Control Magazine*, 17(3) :80–88, 1997.
- [Gho00] N. Ghouty. *Hybrid modeling of a traveling wave piezo electric motor*. PhD thesis, Aalborg University, department of control engineering, mai 2000.
- [Gir02] F. Giraud. *Modélisation Causale et Commande d'un Actionneur piézoélectrique à Onde Progressive*. PhD thesis, L2EP de Lille, USTL, juillet 2002.
- [GR93] M. Géradin and D. Rixen. *Théorie des vibrations*. Masson, Paris, 1993.
- [GT54] R.C. Goertz and W.M. Thompson. Electronically controlled manipulator. *Nucleonics*, pages 46–47, 1954.
- [Hay01] V. Hayward. Survey of haptic interface research at mc gill university. In *Workshop in Interactive Multimodal Telepresence Systems. TUM, Munich, Allemagne.*, pages 91–98, 2001.
- [HC99] J.P. Hautier and J.P. Caron. *Convertisseurs statiques : méthodologie causale de modélisation et de commande*. Editions Technip, Paris, 1999.
- [hcH] Haptic Master : <http://www.fcs-cs.com> HapticMaster.
- [HCTC98] S. He, W. Chen, X. Tao, and Z. Chen. Standing wave bi-directional linearly moving ultrasonic motor. *IEEE/ASME Transactions on ultrasonics, ferroelectrics and frequency control*, 45(5) :1133–1139, 1998.
- [HDLT97] Min Hu, Hejun Du, Shih-Fu Ling, and Jin-Kai Teo. A piezoelectric spherical motor with two degree-of-freedom. *Elsevier. Sensors and actuators A.*, (94) :113–116, 1997.
- [HK96] N. Hoshi and A. Kawamura. Analysis of primary-on-slider type piezoelectric actuator and application to two-degree-of-motion freedom plane actuator. *IEEE transactions on industrial electronics*, 43(1) :192–199, 1996.



- [hM] Master Arm : <http://cyborg.seas.smu.edu> MasterArm.
- [HSDT98] P. Hélin, V. Sadaune, C. Druon, and J-B. Trirsch. A mechanical model for energy transfer in linear ultrasonic micromotors using lamb and rayleigh waves. *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, 3(1), mars 1998.
- [htt] Helliptec <http://www.elliptec.com/comp.htm>.
- [IM95] W. Hagood IV and A-J. McFarland. Modeling of a piezoelectric rotary ultrasonic motor. *IEEE Transactions on ultrasonics, ferroelectrics and frequency control*, 42(2) :210–224, mars 1995.
- [JM97] H. Grostollen J. Maas, T. Schulte. Optimized drive control for inverter-fed ultrasonic motors. In *IAS'97*, pages 690–698, 1997.
- [KTH96] M. Kurosawa, M. Takahashi, and T. Higuchi. Ultrasonic linear motor using surface acoustic waves. *IEEE/ASME Transactions on mechatronics, ferroelectrics, and frequency control*, 43(5) :901–906, septembre 1996.
- [KTM03] T. Koyama, Kenjiro Takemura, and T. Maeno. Development of an ultrasonic clutch for multi-fingered exoskeleton haptic device using passive force feedback for dexterous teleoperation. In *Proceedings of the 2003 IEEE/RSJ, Conference on Intelligent Robots and Systems, Las Vegas*, pages 2229–2234, octobre 2003.
- [LJF00] P. LeMoal, E. Joseph, and J-C. Ferniot. Mechanical energy transductions in standing wave ultrasonic motors : analytical modelling and experimental investigations. *European journal of mechanics A/Solids*, 19(5) :849–871, september 2000.
- [LK91] K. Lee and C. Kwan. Design concept development of a spherical stepper motor for robotic application. *IEEE Trans. on robotics and automation*, 7(1) :175–181, 1991.
- [LL82] L. Landau and E. Lifchitz. *Théorie de l'élasticité, Physique Théorique*, volume vol.7. Editions MIR Moscou, 1982.
- [McM97] A.J. McMillan. A non-linear friction model for self-excited vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, pages 323–335, avril 1997.
- [MGB86] C. H. Menq, J. H. Griffin, and J. Bielak. The influence of a variable normal load on the forced vibration of a frictionally damped structure. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Engineering for gas turbines and power*, 108 :300.305, 1986.
- [mh] USR motors : <http://www.tky.3web.ne.jp/usrmotor/>.
- [MHWF<sup>+</sup>03] J. Melli-Huber, B. Weinberg, A. Fisch, J. Nikitzuk, C. Mavroidis, and C. Wampler. Electro-rheological fluidic actuators for haptic vehicular instrument controls. In *Proceedings. 11th Symposium on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems, 2003. HAPTICS 2003*, pages 262–269, 2003.
- [MIFG95] J. Maas, P. Ide, N. Fröhleke, and H. Grostollen. Simulation model for ultrasonic motors powered by resonant converters. *IAS'95*, (1) :111–120, octobre 1995.

- 
- [MN95] P. Minotti and V. Nocton. Etude théorique d'un microtranslateur piézo-électrique à ondes stationnaires : une introduction aux futurs micromoteurs multi degrés de liberté. *Journal of IFTOM on Mechanics and machine theory*, 31 :91–108, 1995.
- [MS94] T.H Massie and J.K Salisbury. The phantom haptic interface : A device for probing virtual objects. In *In Proc. ASME Winter Annual Meeting Symp. Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems*, volume DSC-55-1, pages 295–300, 1994.
- [NGAG98] B. Nogarede, C. Giraud-Audine, and F. Galiano. Electromechanical modelling and analog torque estimation of a ring-shaped travelling-wave piezoelectric motor. *Electrical Engineering Research Report*, pages 9–18, juin 1998.
- [Nog96] B. Nogarède. Moteurs piézoélectriques. *Les techniques de l'ingénieur*, DFB(D3765), juin 1996.
- [OTM04] K. Otokawa, K. Takemura, and T. Maeno. Development of a multi-degree-of-freedom ultrasonic motor using single mode vibrations. In *ICA 2004*, pages 3231–3234, 2004.
- [PCM<sup>+</sup>96] E. Pernette, R. Clavel, P. Minotti, P. Le Moal, A. Ferreira, W. Elfein, H. Porte, and R. Ferriere. Micromanipulateur pour l'alignement optique. In *6<sup>eme</sup> congrès européen de chronométrie, Bienne, Suisse*, pages 201–204, octobre 1996.
- [Pie95] E. Piecourt. *Caractérisation électromécanique et alimentation électronique des moteurs piézoélectriques*. PhD thesis, INP de Toulouse, ENSEEIHT, juillet 1995. N°1037.
- [PLP98] V. Piéfort, N. Loix, and A. Preumont. Modeling of piezolaminated composite shells for vibration control. *European Conference on spacecraft structures, Braunschweig*, novembre 1998.
- [RAM<sup>+</sup>98] J.C Ravassard, J. Abadie, P. Le Moal, J. Duffaud, J.C Ferniot, P.Minotti and N. Chaillet, and S. Dembelé. Realization and control of autonomous microconveyer with piezoelectric actuators. In *Proc. of IFAC INCOM'98*, volume 2, pages 217–222, juin 1998.
- [RF96] M. Rivoire and J-L. Ferrier. *Asservissement régulation commande analogique*. Eyrolles, Paris, 1996.
- [RH94] C. Ramstein and V. Hayward. The pantograph : a large workspace haptic device for a multimodal computer-human interaction. In *CHI'94 Conference on Human Factors in Computing Systems ACM/SIGCHI*, 1994.
- [Rou99] C. Rouxel. Nombres complexes. *Les techniques de l'ingénieur*, (D31) :6–7, 1999.
- [Sag01] A. Sagansan. La technologie piezo et les besoins aéronautiques. In *MAGEL-LEC, 2nd symposium on electroactive materials and their applications in electrical*, décembre 2001.

- [SB97] M.A. Srinivasan and C. Basdogan. Haptics in virtual environments : Taxonomy, research status, and challenges. *Computer and Graphics*, 31(4) :393–404, 1997.
- [SK93] T. Sashida and T. Kenjo. *An introduction to ultrasonic motors*. Oxford Science Publications, Oxford, 1993.
- [SK04] T. Shigematsu and M.K. Kurosawa. Nanometer resolution 2-d in-plane saw motor. In *ACTUATORS 2004, Bremen, Allemagne.*, pages 140–143, 2004.
- [SMO04] C. Schneider, T. Mustufa, and A.M Okamura. A magnetically-actuated friction feedback mouse. In *Proceedings of EuroHaptics 2004, Munich, Allemagne*, pages 330–337, 2004.
- [SNLV91] S.T Sanders, J.M Noworolski, X.Z Liu, and G.C Verghese. Generalized averaging method for power conversion circuits. *IEEE Trans. on Power Electr.*, 6(2) :251–258, 1991.
- [SWXZ98] H. Siyuan, C. Weishan, T. Xie, and C. Zaili. Standing wave bi-directional linearly moving ultrasonic motor. *IEEE Transactions and ultrasonics*, 45(5), septembre 1998.
- [THM01] K. Takemura, D. Harada, and T. Maeno. Development of a master-slave system for active endoscope using multi-dof ultrasonic motor. In *32nd ISR, International Symposium on robotics*, pages 254–259, 2001.
- [TM01] K. Takemura and T. Maeno. Design and control of an ultrasonic motor capable of generating multi-dof motion. *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, 6(4) :499–506, decembre 2001.
- [TOM04] K. Takemura, Y. Ohno, and T. Maeno. A piezoelectric micromotor using in-plane shearing of pzt elements. *IEEE transactions on mechatronics*, 9(3) :474–480, 2004.
- [TSEc94] H. Tan, M. Srinivasan, B. Eberman, and B. chang. Human factors for the design of force-reflecting haptic interfaces. In *Symposium on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems. Proceedings of the ASME Winter Annual Meeting*, pages 3533–359, novembre 1994.
- [TSZ+95] S. Toyama, S. Sugitani, G. Zhang, Y. Miyatani, and K. Nakamura. Multi degree of freedom spherical ultrasonic motor. In *IEEE Int. Conference on robotics*, pages 2935–2940, 1995.
- [VDL] G. Vachtsevanos, K. Davez, and K-M Lee. Development of a novel intelligent robotic manipulator. *IEEE, Control Systems Magazine*, 7(3) :9–15, juin.
- [Vis83] Vitaly S. ;Lavrinenko Vyacheslav V. ;Boichenko Oleg L. ;Kartashev Igor A. ;Golovyashin Jury V. ;Serov Nikolai F. ;Shinkarenko Vishnevsky, Vladimir S. ;Koval. Piezoelectric motor with two part rotor. *Brevet n°04400641*, 1983.
- [VKV04] O. Vyshnevskyy, S. Kovalev, and W. Vyshnevskiy. New type of piezoelectric standing wave ultrasonic motors with cylindrical actuators. In *ACTUATORS 2004, Bremen*, pages 451–455, 2004.

- 
- [WB48] A.W. Williams and W.J. Brown. *Piezoelectric motor*, 1948. US-Patent, n°2439499.
- [WLE59] F. Williams, E. Laithwaite, and J.F Eastham. Development and design of spherical induction motors. In *IEEE Proc.*, volume 47, pages 471–484, 1959.
- [YCM98] B. D. Yang, M. L. Chu, and C. H. Menq. Stick-slip-separation analysis and non-linear stiffness and damping characterization of friction contacts having variable normal load. *Journal of Sound and vibration*, 210(4) :461–481, mars 1998.
- [Zha96] Oleg Yu. Zharii. An exact solution of a time-dependent frictional contact problem for two elastic spheres. *Int. J. Engineering Sciences*, 34(5) :537–548, 1996.
- [ZZ97] Bi Zhang and Zhenqi Zhu. Developping a linear piezomotor with nanometer precision and high stiffness. *IEEE/ASME Transactions on mechatronics, ferroelectrics, and frequency control*, 2(1) :22–29, 1997.



## Résumé

Pour rendre compte physiquement de la manipulation d'un objet virtuel dans l'espace ou sur un plan, la plupart des dispositifs haptiques actuels font appel à des actionneurs à un seul degré de liberté, dont les actions sont couplées par diverses liaisons mécaniques (type pantographe,..). Cela entraîne plusieurs inconvénients dont les principaux sont l'encombrement ou les imperfections liées aux liaisons mécaniques. Les actionneurs piézoélectriques peuvent fournir une réponse satisfaisante pour ce genre d'applications : l'important effort massique, le travail à faible vitesse, et surtout la capacité à motoriser plusieurs degrés de liberté à partir d'un seul actionneur, en font une technologie avantageuse dans ce domaine d'utilisation.

A ce titre, un translateur piézoélectrique plan est étudié et modélisé. Cet actionneur plan est basé sur la génération d'une onde stationnaire, qui selon le mode vibratoire choisi, engendre un déplacement selon deux directions orthogonales dans le plan. Cet actionneur au principe simple, présente néanmoins des phénomènes difficiles à modéliser.

La modélisation est abordée selon les deux principales étapes de la conversion d'énergie, soient la conversion électromécanique qui mène au mouvement vibratoire, et la conversion purement mécanique qui fournit le mouvement uniforme. Les nombreuses non-linéarités sont soulignées, puis un modèle simplifié est élaboré pour mettre en évidence la structure de commande en force du dispositif. Ce modèle simplifié offre une interprétation globale des phénomènes de contact. Il est ensuite comparé et validé sur les bases d'un modèle non-linéaire de référence et d'essais expérimentaux.

Le modèle est représenté sous forme de graphe informationnel causal, qui aboutit à l'interprétation de la structure de commande. Cette analyse souligne deux solutions pouvant satisfaire certaines applications du domaine haptique : un retour d'effort actif par le contrôle en force, et une solution alternative comparable à un embrayage mécanique, qualifié de retour d'effort dissipatif.

**Mots-clés:** actionneur multi-degrés de liberté, actionneur piézoélectrique à onde stationnaire, interaction de contact, retour d'effort actif ou dissipatif, Graphe Informationnel Causal.

## Abstract

Currently, haptic devices have been proposed to stimulate the human sense of touch in space or on plane environment. So, a broad whole of devices relies on several actuators

with one degree of freedom whose are coupled by various mechanical linkages (pantograph,...). In this case, several drawbacks appear as the bulk or the defects related to the mechanical linkages. The piezoelectric actuators can provide a satisfying solution for this type of applications : the high force/mass ratio, low speed operation, and specially the capacity to obtain several motorized degrees of freedom with one actuator. These advantages show that the piezoelectric seems to be an interesting technology in this domain.

For this reason, a planar piezoelectric actuator is studied. It is a standing wave ultrasonic motor, which moves along two orthogonal directions on a plane, depending on the vibratory mode used. In spite of the simplicity of principle, contact phenomena lead to difficulties in modeling the actuator.

The modeling is developed according to the principal stages of the energy transformation : the electromechanical conversion causes the vibratory movement, and the purely mechanical conversion provides the uniform movement. Many non-linearities are emphasized, then a simplified model is deduced to show the force control of the device. This simplified modeling gives an overall description of contact phenomena. After, the model is compared and validated with a reference non-linear model and experimental results. It is represented from the Causal Ordering Graph, which gives the control structure. The study emphasizes two solutions being able to satisfy the needs of haptic domain : an active force feedback, and an alternative solution comparable to a mechanical clutch called dissipative force feedback.

**Keywords:** multi-degrees of freedom actuator, standing wave ultrasonic motor, contact interaction, active or dissipative force feedback, Causal Ordering Graph.