



**HAL**  
open science

# Réduction du bruit et tomographie quantique d'un faisceau laser interagissant avec des atomes froids : théorie et expériences

Thomas Coudreau

► **To cite this version:**

Thomas Coudreau. Réduction du bruit et tomographie quantique d'un faisceau laser interagissant avec des atomes froids: théorie et expériences. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1997. Français. NNT : . tel-00011915

**HAL Id: tel-00011915**

**<https://theses.hal.science/tel-00011915>**

Submitted on 10 Mar 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# LABORATOIRE KASTLER-BROSSEL



Université de Paris VI

Spécialité : Lasers et Matière

Thomas Couderc

Université de Paris VI

Résonance de spin et tomographie quantique  
dans les systèmes à interaction avec des atomes froids:  
théorie et expériences

Soutenu le 14 décembre 2007 devant le jury composé de

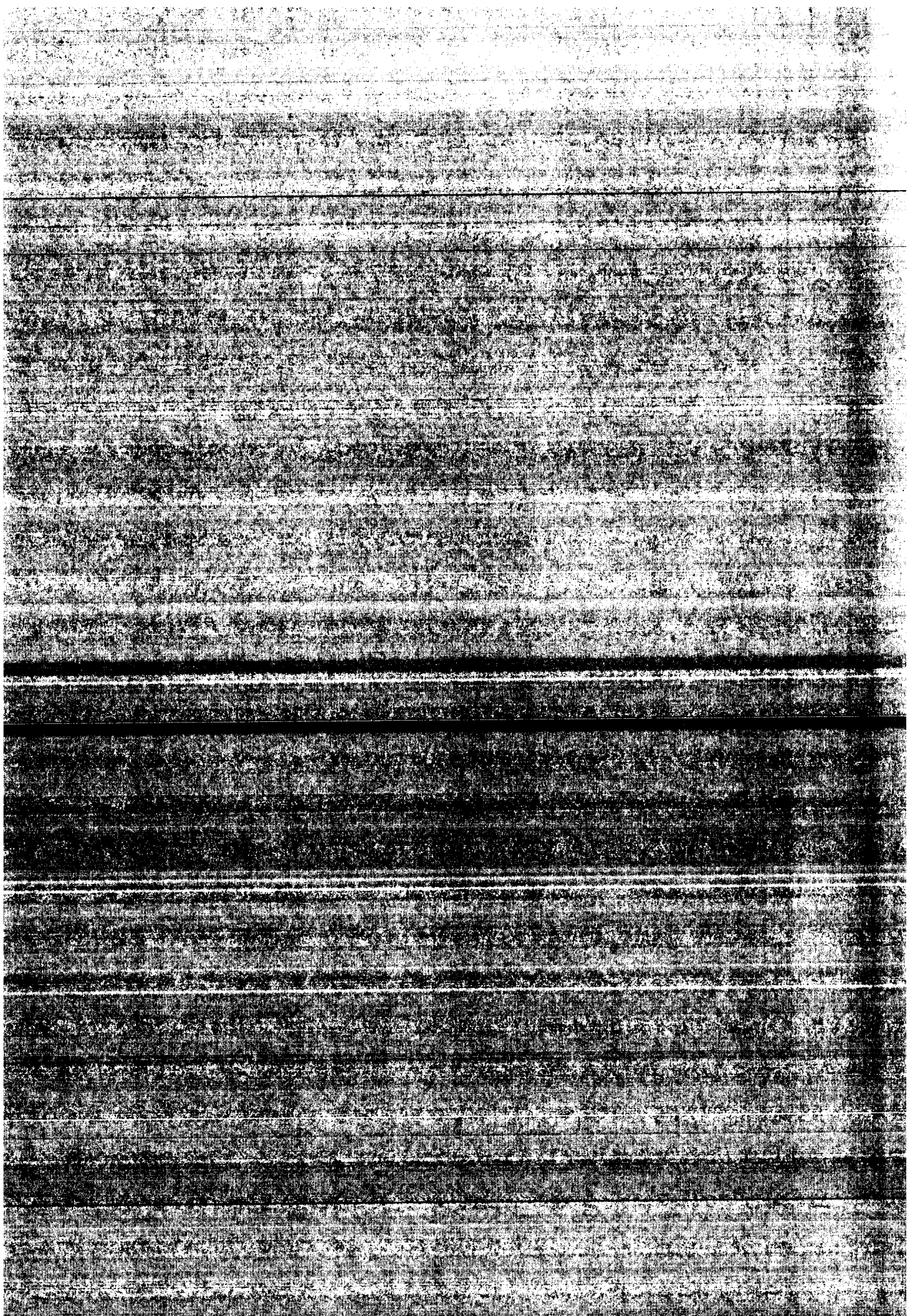
M. G. ABREU

M. J. G. COBINE

M. P. GRANGIER

M. A. HANSON

M. V. KOCANO





**LABORATOIRE  
KASTLER BROSSSEL**



**Thèse de doctorat de l'Université Paris 6**

**Spécialité : Lasers et Matière**

présentée par

**Thomas Coudreau**

Pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet :

**Réduction du bruit et tomographie quantique  
d'un faisceau laser interagissant avec des atomes froids:  
théorie et expériences.**

Soutenue le 17 décembre 1997 devant le jury composé de :

M. C. FABRE	Président
Mme. E. GIACOBINO	Directeur de thèse
M. P. GRANGIER	Rapporteur
M. A. LEVENSON	
M. L. LUGIATO	
M. P. PILLET	Rapporteur

*A mes grands-pères,  
Henri et Jacques*

*Ce travail de thèse a été effectué au Laboratoire Kastler-Brossel de 1994 à 1997. Je remercie sa directrice, Michèle Leduc de m'y avoir accueilli et de m'avoir ainsi fait profiter de conditions de recherche exceptionnelle. Je tiens à remercier Jacques Bauche grâce à qui j'ai pu bénéficier d'une allocation de recherche du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche. Je veux également remercier MM. Gouédard et Ben Kelfat de m'avoir permis d'effectuer des vacances durant cette thèse. Enfin, je suis très reconnaissant à Jacqueline Gouzerh qui m'a permis d'obtenir un poste d'A.T.E.R. à l'Université Paris VII et ainsi de terminer cette thèse dans de bonnes conditions.*

*Elisabeth Giacobino a encadré ce travail. Je la remercie de la confiance qu'elle m'a accordée ainsi que de ses nombreux conseils et encouragements au cours de cette thèse. Je la remercie également de l'attention qu'elle a portée à la correction de ce mémoire.*

*A mon arrivée au Laboratoire, j'ai eu le plaisir de travailler avec Astrid Lambrecht et Aephrain Steinberg. Je remercie Astrid Lambrecht de m'avoir fait profiter de sa grande connaissance de l'expérience. Je suis également reconnaissant à Aephrain Steinberg d'avoir guidé mes premiers pas sur l'expérience et de m'avoir aidé à m'y retrouver sur une table de manip' bien encombrée.*

*J'ai eu la grande chance et le grand plaisir de travailler pendant un an et demi avec Antonio Zelaquett-Khoury en séjour post-doctoral. Je le remercie car ce travail lui doit beaucoup.*

*Paulo Nussenzveig a passé un mois sur l'expérience et a beaucoup contribué à la stabilisation du système. Je tiens à le remercier de son aide précieuse.*

*Gerd Breitenbach de l'Université de Constance a passé une semaine au laboratoire pour nous aider à réaliser les premières mesures de tomographie, il nous a aussi fourni son programme de calcul de la fonction de Wigner et de la matrice densité. Je le remercie pour sa disponibilité autant lors de son séjour que par courrier électronique interposé. Merci également à M. Raymer et A. Faridani de l'Université d'Oregon de nous avoir fourni le programme initial pour le calcul de la fonction de Wigner par transformée de Radon inverse et à A. Zucchetti et W. Vogel de l'Université de Rostock pour le calcul de la matrice densité dans la base de Fock à partir de nos données expérimentales.*

*Laurent Vernac a commencé sa thèse sur cette expérience. J'ai eu beaucoup de plaisir à travailler avec lui et je tiens à le remercier pour ses lectures nombreuses et attentives de ce mémoire.*

*Je voudrais également remercier ici toutes les personnes qui m'ont aidé au cours de cette thèse et qui n'ont jamais hésité à répondre à mes questions même durant les moments les moins opportuns (qui sont toujours les moments où les problèmes se posent) :*

*Antoine Heidmann pour m'avoir aidé à résoudre de nombreux problèmes de physique mais aussi d'informatique et d'électronique qui se sont posés au cours de ce travail. Il a toujours montré une bonne humeur et une disponibilité qui ne se sont jamais démenties.*

*Michel Pinard pour m'avoir expliqué les mystères du pompage optique et pour avoir répondu dans le détail à toutes les questions que j'ai pu lui poser,*

*François Biraben et François Nez qui ont passé de longs moments à m'expliquer par l'exemple le fonctionnement du laser Titane:Saphir et dont la patience et le savoir me furent précieux,*

*Jean-Michel Courty pour m'avoir expliqué les nombreux points de physique atomique qui m'échappaient ainsi que pour les moments qu'il a passé à m'aider à régler le laser Titane:Saphir,*

*Catherine Schwob et Yassine Hadjar pour les nombreuses discussions que nous avons eu et toutes les pièces et appareils qu'ils m'ont prêtés au cours de cette thèse,*

*Francesca Grassia pour ses encouragements constants tout au long de cette thèse,*

*Agnès Maitre pour ses précieux conseils pour mes diverses présentations orales et nos nombreuses discussions,*

*tous les thésards, stagiaires et visiteurs, Cédric Bégon, Nicolas Borghini, Alberto Bramati, Hichem Eleuch, Jean-Pierre Hermier, Valéry Jost, Katsuyuki Kasai, Gaétan Messin et Matthias Vaupel qui font du bureau dans lequel nous travaillons un endroit vivant, convivial et stimulant même quand on n'aime pas le football,*

*Pierre-François Cohadon pour sa relecture du manuscrit,*

*Benoît Grénaud pour sa patience à m'expliquer LaTeX et PostScript,*

*tous ceux que je n'ai pas remercié jusqu'ici et qui font de ce laboratoire un lieu de travail particulièrement agréable.*

*Ce travail a aussi été rendu possible par le personnel des ateliers du laboratoire. Pour cela, mes remerciements vont donc à*

*Francis Tréhin qui ne fut jamais à court d'idée pour résoudre les divers problèmes rencontrés pendant cette thèse,*

*Bernard Rodriguez qui a toujours accepté avec philosophie et bonne humeur mes modifications après coup sur les pièces mécanique qu'il m'avait fabriqué,*

*Alexis Poizat qui a de nombreuses fois accepté avec de traiter des pièces en urgence,*

*Sylvain Pledel pour son efficacité et sa rapidité au magasin de mécanique de Paris VI,*

*Jean-Claude Bernard qui a conçu de nombreux montages électroniques qui ont été réalisés par Philippe Pace et Jean-Pierre Okpiz,*

*Jean-Pierre Plaut pour son aide pour résoudre les nombreux problèmes informatiques,*

*Karine Gautier et Blandine Moutiers pour m'avoir aidé pour les différentes démarches nécessaires au bon déroulement d'une thèse.*

*Je remercie tout particulièrement Claude Fabre pour avoir accepté de présider ce jury mais aussi pour ses explications patientes et répétées des divers problèmes d'optique quantique qui m'ont troublé durant cette thèse. Je tiens également à remercier Philippe Grangier et Pierre Pillet d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse malgré les courts délais que nous leur avons laissé. Je suis également reconnaissant à Ariel Levenson et Luigi Lugiato pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail en acceptant de faire partie du jury.*

*Enfin, je veux remercier mes amis et ma famille pour leurs encouragements au cours de cette thèse. Un immense merci pour terminer à Sylvie sans qui ce travail n'aurait certainement pas vu le jour.*

---

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Introduction au bruit quantique - Réduction du bruit par effet Kerr</b>	<b>9</b>
2.1	Introduction . . . . .	9
2.2	Quantification du champ électromagnétique . . . . .	9
2.2.1	Composantes de quadrature . . . . .	12
2.2.2	Représentation dans l'espace des phases . . . . .	14
2.2.3	Choix d'un ordre . . . . .	15
2.2.4	Statistique du rayonnement . . . . .	16
2.3	Représentation des états du champ . . . . .	22
2.3.1	Introduction . . . . .	22
2.3.2	Représentation $P$ . . . . .	22
2.3.3	Représentation de Wigner . . . . .	23
2.4	Réalisation expérimentale d'états comprimés du rayonnement. . . . .	24
2.4.1	Introduction . . . . .	24
2.4.2	Réduction du bruit dans un milieu $\chi^{(2)}$ . . . . .	25
2.4.3	Réduction du bruit par effet Kerr . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Présentation du montage expérimental</b>	<b>31</b>
3.1	Introduction . . . . .	31
3.2	Les sources lasers . . . . .	31
3.2.1	La diode laser de repompage . . . . .	31
3.2.2	Le laser Titane:Saphir . . . . .	33
3.3	Le piège magnéto-optique . . . . .	37
3.3.1	Principe . . . . .	37
3.3.2	Mise en oeuvre expérimentale . . . . .	38
3.4	La cavité d'interaction . . . . .	40
3.4.1	Montage expérimental . . . . .	40
3.5	La détection homodyne . . . . .	42
3.5.1	Principe de la détection homodyne . . . . .	42
3.5.2	Détection des fluctuations quantiques . . . . .	42
3.5.3	Représentation dans l'espace des phases . . . . .	45
3.5.4	Influence de la dépendance spatiale des modes . . . . .	45
3.6	Améliorations du montage . . . . .	47
3.6.1	Amélioration du montage de la cavité d'interaction . . . . .	47
3.6.2	Amélioration de la détection . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Etude théorique de la réduction de bruit avec des atomes froids.</b>	<b>55</b>
4.1	Introduction . . . . .	55
4.2	Méthode des forces de Langevin . . . . .	56
4.2.1	Evolution d'un système en interaction avec un réservoir . . . . .	56



4.2.2	Méthodes des forces de Langevin en optique quantique . . . . .	57
4.3	Calcul des spectres de bruit . . . . .	59
4.3.1	Présentation du modèle . . . . .	59
4.3.2	Article "A three level approach to squeezing with cold atoms" . . . . .	61
4.4	Prédictions théoriques - conclusions . . . . .	86
4.4.1	Allure de la courbe de transmission de la cavité . . . . .	86
4.4.2	Etude du spectre de la réduction de bruit . . . . .	87
4.4.3	Balayage de la longueur de la cavité . . . . .	87
4.4.4	Etude en fonction de la puissance des faisceaux pièges . . . . .	88
4.4.5	Etude en fonction de la puissance du repompeur . . . . .	88
4.4.6	Etude en fonction de la puissance de la sonde . . . . .	89
4.4.7	Conclusions . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Mesure de la réduction de bruit</b>	<b>93</b>
5.1	Introduction . . . . .	93
5.2	Conditions expérimentales . . . . .	93
5.2.1	Le faisceau sonde . . . . .	93
5.2.2	Le piège magnéto-optique . . . . .	95
5.3	Résultats expérimentaux . . . . .	99
5.3.1	Procédure de mesure . . . . .	99
5.3.2	Courbes de réduction de bruit . . . . .	100
5.4	Comparaison théorie-expérience . . . . .	101
5.4.1	Introduction . . . . .	101
5.4.2	Cas des faisceaux pièges peu intenses . . . . .	103
5.4.3	Cas des faisceaux pièges intenses . . . . .	103
5.5	Conclusions . . . . .	105
<b>6</b>	<b>Tomographie Quantique : Principes et mise en oeuvre expérimentale</b>	<b>107</b>
6.1	Introduction . . . . .	107
6.2	Tomographie médicale . . . . .	108
6.2.1	Introduction . . . . .	108
6.2.2	Tomographie de transmission: principes . . . . .	108
6.2.3	Rétroprojection simple . . . . .	109
6.2.4	Reconstruction bidimensionnelle de Fourier . . . . .	111
6.2.5	Filtrage de Fourier - Transformée de Radon inverse . . . . .	113
6.2.6	Mise en oeuvre expérimentale . . . . .	114
6.3	Tomographie quantique . . . . .	114
6.3.1	Bases de la tomographie quantique . . . . .	114
6.3.2	Filtrage de Fourier . . . . .	116
6.3.3	Calcul par régularisation quadratique . . . . .	116
6.3.4	Reconstruction directe de la matrice densité . . . . .	117
6.4	Résultats expérimentaux . . . . .	121
6.4.1	Procédure de mesure . . . . .	121
6.4.2	Représentation de la fonction de Wigner . . . . .	123

---

6.4.3 Représentation de la matrice densité dans la base de Fock . . . .	126
6.5 Conclusion . . . . .	129
<b>Conclusions</b>	<b>131</b>
<b>Appendice</b>	<b>133</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>139</b>

# 1 Introduction

L'étude des fluctuations quantiques du champ électromagnétique a commencé à se développer de manière spectaculaire à partir des années 1960 mais il fallu attendre la fin des années 1970 pour qu'apparaissent les premières propositions visant à contourner la "limite quantique standard" venant des inégalités d'Heisenberg. En effet, l'inégalité d'Heisenberg n'impose une condition que pour le produit des variances des deux observables conjuguées qui décrivent le champ électromagnétique quantifié. Un état du champ possédant des fluctuations sur une composante au-dessous du bruit quantique standard est dit comprimé. L'intérêt d'utiliser un état comprimé apparaît dans les mesures de très grande précision. Les mesures d'intensité ou de phase sont limitées de manière ultime par le bruit quantique standard du champ. Il est donc intéressant d'obtenir expérimentalement des états dont les fluctuations soient comprimées en amplitude ou en phase. Dans le cas d'une mesure de spectroscopie par absorption, on pourra utiliser avec profit des états comprimés en amplitude pour augmenter la sensibilité. De même, dans le cas de mesures interférométriques comme celles visant à détecter des ondes gravitationnelles, il sera intéressant d'utiliser des états comprimés en phase pour améliorer le rapport signal à bruit de la mesure.

Depuis une dizaine d'années de nombreuses méthodes ont été mises au point pour créer et étudier ces états comprimés. On peut classer ces méthodes en deux types. Le premier type de méthode consiste à appliquer un principe dit de "pompe régulière" dans un laser [Golubev 84]. Selon ce principe, la statistique de la pompe est reproduite sur la statistique de la lumière émise par le laser. Cette méthode a été utilisée de manière très convaincante dans le cas des diodes lasers où des compressions des fluctuations jusqu'à 70% ont été obtenues pour des faisceaux utilisables [Kilper 96]. L'autre type de méthode est basée sur une interaction entre un faisceau laser et un milieu non-linéaire. De nombreuses études théoriques ont été menées pour identifier les milieux favorables à la réduction du bruit. Ces non-linéarités sont typiquement  $\chi^{(2)}$  ou  $\chi^{(3)}$ .

La première expérience a été réalisée en 1985 en utilisant une interaction avec un milieu atomique présentant une non-linéarité  $\chi^{(3)}$  [Slusher 85]. L'effet non linéaire était augmenté par la proximité d'une résonance atomique. On a par la suite cherché à utiliser des non-linéarités paramétriques pour lesquelles les sources de bruit sont faibles (a priori elles ne sont pas liées à la non-linéarité mais à des effets parasites). Ces interactions paramétriques ont été principalement réalisées dans des cristaux présentant une non-linéarité  $\chi^{(2)}$ . Deux phénomènes peuvent alors conduire à une réduction de bruit : la

génération paramétrique ou la génération de second-harmonique. Ces expériences ont conduit à de fortes réductions de bruit pouvant aller jusqu'à 90% [Mertz 91].

Les milieux présentant une non-linéarité de type Kerr ( $\chi^{(3)}$ ) sont eux aussi de bons candidats pour la réduction de bruit. Il est bien connu que ce type de milieu est à l'origine d'un phénomène de bistabilité optique [Gibbs 76]: la courbe de résonance en présence d'un milieu Kerr n'est plus une fonction d'Airy mais peut posséder, pour une valeur donnée de la longueur de la cavité, trois points de fonctionnements dont deux seulement sont stables. De nombreux travaux théoriques ont montré que cet effet purement classique est à même de réduire le bruit pour une composante du champ [Reynaud 89]. Deux types de milieu  $\chi^{(3)}$  ont été utilisés avec succès pour réduire les fluctuations quantiques du rayonnement, les fibres optiques [Shelby 86][Shirasaki 90] et les milieux atomiques. L'expérience étudiée au cours de ce travail utilise un milieu atomique. En première approximation, on peut interpréter la non-linéarité comme une variation de l'indice optique avec la puissance ce qui est équivalent à une non-linéarité de type Kerr. Nous allons voir maintenant les conditions nécessaires à la réduction de bruit dans un milieu atomique.

La non-linéarité dans ces milieux provient de la proximité d'une résonance. Cette résonance est à l'origine d'un excès de bruit à cause de l'absorption et de l'émission spontanée dans le mode pour lequel est prédite la réduction de bruit. Afin d'éviter cet excès de bruit, on s'éloigne de la résonance. L'effet Doppler est alors un obstacle à la compression des fluctuations puisqu'il élargit les résonances. Des expériences ont été réalisées dans une vapeur atomique mais ont donné des résultats très inférieurs à des prédictions théoriques ne prenant pas en compte l'effet Doppler [Maeda 87]. La première solution retenue pour éliminer l'effet Doppler est le jet atomique. Pour un jet bien collimaté, l'effet Doppler est négligeable dans la direction transverse. Des effets de réduction de bruit ont été observés dans ces conditions [Orozco 87][Hope 92]. Cependant, les résultats obtenus étaient toujours inférieurs aux prédictions théoriques. Afin de mieux contrôler les conditions expérimentales, il est intéressant d'utiliser les atomes refroidis et piégés par laser comme milieu non-linéaire. Une expérience a commencé dans ce sens dans notre laboratoire en 1989. Les premières observations de bistabilité ont été faites par L. Hilico au cours de sa thèse [Hilico 92a]. Dans les mesures de bruit effectuées par la suite, l'effet perturbateur des faisceaux pièges s'est révélé très important. En particulier, avec les faisceaux pièges à leur pleine puissance, il est possible d'observer un phénomène d'émission laser [Hilico 92c]. Ce laser a des fluctuations propres qui détruisent la réduction de bruit. Il est donc nécessaire de s'affranchir des faisceaux pièges. La première solution développée par A. Lambrecht a été d'éteindre les faisceaux pièges [Lambrecht 96a]. Quelques millisecondes après la coupure, il reste encore suffisamment d'atomes pour avoir une non-linéarité importante et la mesure de bruit est affranchie de l'effet des faisceaux pièges. La réduction de bruit observée dans ces conditions est de l'ordre de 40%. Cette réduction de bruit n'est que transitoire (quelques millisecondes). Afin d'augmenter le temps pendant lequel elle est observée, on peut mesurer la modification des fluctuations quantiques sur une transition non perturbée par les faisceaux pièges. Ceci a été réalisé dans l'équipe de P. Grangier à

Orsay dans le cadre de mesures quantiques non-destructrices [Roch 97], [Sinatra 98] pour lesquelles deux faisceaux sont nécessaires, un faisceau signal intense et un faisceau mesure faible. Cette solution n'est pas envisageable dans une mesure de réduction de bruit où on ne dispose que d'un faisceau. Dans ce cas, on peut utiliser des faisceaux pièges atténués. Cependant, dans ces conditions, un modèle atomique à deux niveaux n'est plus valable. Jusqu'alors, un modèle théorique d'atomes à deux niveaux était satisfaisant puisque les faisceaux pièges étaient absents lors de la mesure de la réduction de bruit. La validité de cette approche était confirmée par le fait que les prédictions théoriques étaient en bon accord avec les mesures expérimentales. En présence des faisceaux pièges, ce modèle n'est plus valable et doit prendre en compte les autres niveaux intervenant dans le mécanisme de piégeage. Nous avons développé un modèle basé sur un ensemble d'atomes à trois niveaux. Pour cela, nous avons résolu analytiquement les équations d'Heisenberg-Langevin qui régissent l'évolution du système composé du faisceau laser sonde, des faisceaux pièges, de repompage et des atomes supposés immobiles. Nous avons alors pu calculer analytiquement les expressions des fonctions de corrélation pour le champ mesurées expérimentalement. Nous avons comparé les prédictions théoriques aux résultats expérimentaux dans plusieurs régimes de paramètres différents et obtenu un excellent accord. L'expérience sera présentée dans le second chapitre tandis que les calculs théoriques feront l'objet de notre troisième chapitre. Enfin, le quatrième chapitre sera consacré à la comparaison des prédictions théoriques et des résultats expérimentaux.

Indépendamment, nous avons appliqué la méthode dite de tomographie quantique du champ électromagnétique. Les champs électromagnétiques sont souvent représentés par leur matrice densité. Cette matrice densité développée dans une base quelconque peut être mesurée expérimentalement : on mesure par exemple la fonction de Wigner qui est une distribution de quasiprobabilités qu'on peut relier à la matrice densité [Wigner 32]. L'intérêt de ces mesures est de donner accès non seulement à la valeur moyenne et à la variance du champ mais aussi à toute sa statistique. Nous avons ainsi obtenu les premières mesures de la fonction de Wigner d'un état pour lequel les fluctuations prédites théoriquement sont non minimales. Nous avons ainsi pu vérifier que la statistique de ces états obéit à une loi gaussienne. La présentation de la tomographie quantique et les mesures que nous avons faites sont détaillées dans le cinquième chapitre de ce mémoire.

## 2 Introduction au bruit quantique - Réduction du bruit par effet Kerr

### 2.1 Introduction

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce mémoire, il est possible de réduire les fluctuations quantiques du champ électromagnétique au-dessous d'une certaine valeur appelée limite quantique standard. L'existence de fluctuations du champ électromagnétique découle de sa nature quantique, nature qui a été mise en évidence lors de l'étude des propriétés statistiques de la lumière. Nous allons donc rappeler brièvement les méthodes utilisées pour décrire le champ électromagnétique quantifié ainsi que les propriétés statistiques qui s'en déduisent. La première partie sera consacrée à un rappel des propriétés du champ quantifié puis la deuxième partie détaillera les différentes représentations utilisées pour le décrire. Finalement, nous montrerons comment un milieu dont l'indice optique dépend de l'intensité incidente (milieu Kerr) est susceptible de modifier les fluctuations quantiques du rayonnement et nous décrirons dans quels conditions on peut considérer qu'un nuage d'atomes refroidis par laser est un milieu Kerr favorable à la réduction du bruit.

### 2.2 Quantification du champ électromagnétique

La quantification du champ électromagnétique est apparue nécessaire dès le début du siècle : le spectre de rayonnement du corps noir ne peut être interprété qu'en considérant une description quantifiée du champ. Cette quantification implique que l'énergie du champ électromagnétique n'est plus continue comme on le croyait jusqu'alors mais composée de quanta (individuels) d'énergie : les photons. Les propriétés statistiques d'un faisceau lumineux sont étroitement liées à ce concept. Si on considère, par exemple, un faisceau laser dans lequel on néglige toutes les sources de bruits extérieures arrivant sur un détecteur parfait, on peut montrer (voir 2.2.4.2) que les temps d'arrivée des photons sur le détecteur sont répartis selon une statistique particulière : une statistique poissonnienne. Pour étudier ces propriétés statistiques, nous allons d'abord introduire brièvement la méthode de quantification du champ électromagnétique.

Pour quantifier le champ électromagnétique, on utilise une analogie entre les équations classiques qui lient les différentes composantes du champ électromagnétique et les équations quantiques d'évolution d'un oscillateur harmonique. Dans une boîte de dimensions  $L \times L \times L$ , on peut décomposer le champ en modes caractérisés par une fréquence  $\omega_i$ , un vecteur d'onde  $\vec{k}_i$  ( $n_x \frac{2\pi}{L}, n_y \frac{2\pi}{L}, n_z \frac{2\pi}{L}$ ) et une polarisation  $\vec{\epsilon}_i$ . On peut montrer qu'un mode est entièrement caractérisé par un vecteur  $\vec{\alpha}_i(\vec{k}_i, t)$  donné par la relation [Cohen-Tannoudji 87] :

$$\vec{\alpha}_i(\vec{k}_i, t) = -i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\hbar \omega_i}} \left( \vec{\mathcal{E}}_i(\vec{k}_i, t) - c \frac{\vec{k}_i}{k_i} \times \vec{\mathcal{B}}_i(\vec{k}_i, t) \right) \quad (2.1)$$

où  $\vec{\mathcal{E}}_i(\vec{k}_i, t)$  et  $\vec{\mathcal{B}}_i(\vec{k}_i, t)$  désignent les transformées de Fourier spatiales du champ électrique et du champ magnétique. Pour un champ quelconque, l'énergie du champ peut s'écrire en utilisant la décomposition en modes :

$$H = \sum_i \hbar \omega_i \left| \vec{\alpha}_i(\vec{k}_i, t) \right|^2 \quad (2.2)$$

De plus, l'évolution de  $\vec{\alpha}_i(\vec{k}_i, t)$  peut se déduire des équations de Maxwell et on obtient pour un champ se propageant dans le vide :

$$\frac{\partial \vec{\alpha}_i}{\partial t} + i \omega_i \vec{\alpha}_i = 0 \quad (2.3)$$

Les équations 2.2 et 2.3 sont identiques à celles qui gouvernent l'évolution d'un oscillateur harmonique. La quantification d'un oscillateur harmonique étant bien connue, il est possible de quantifier le champ électromagnétique d'une façon similaire. Par analogie, on associe aux grandeurs classiques  $\alpha$  et  $\alpha^*$  les opérateurs bien connus de création et d'annihilation d'un quantum d'énergie dans un mode  $i$ ,  $\hat{a}_i$  et  $\hat{a}_i^\dagger$ . Ces opérateurs sont hermitiques conjugués. L'énergie du champ s'écrira alors :

$$\hat{H} = \sum_k \hbar \omega_k \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \quad (2.4)$$

On a des relations de commutation générales entre les opérateurs création et annihilation :

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{i,j} \quad (2.5a)$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] \quad (2.5b)$$

où  $\delta_{i,j}$  représente le symbole de Kronecker.

En représentation de Schrödinger, les opérateurs champs s'écrivent en fonction des opérateurs création et annihilation :

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}) = i \sum E_{\omega_i} \left( \hat{a}_i e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} - \hat{a}_i^\dagger e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \right) \vec{\epsilon}_i \quad (2.6)$$

avec  $E_{\omega_i} = \sqrt{\frac{\hbar \omega_i}{2\epsilon_0 L^3}}$  et

$$\hat{\vec{B}}(\vec{r}) = i \sum B_{\omega_i} \left( \hat{a}_i e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} - \hat{a}_i^\dagger e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \right) \vec{k}_i \times \vec{\epsilon}_i \quad (2.7)$$

avec  $B_{\omega_i} = \frac{1}{c} E_{\omega_i}$ .  $E_{\omega_i}$  correspond au champ d'un seul photon.

Dans le point de vue de Schrödinger, on utilise des opérateurs qui agissent sur des vecteurs d'états dépendant du temps,  $|\psi_S(t)\rangle$ . En optique quantique, on utilise plus fréquemment le point de vue d'Heisenberg. Cette représentation consiste à appliquer à  $|\psi_S(t)\rangle$  une transformation unitaire,  $U$ , de telle sorte que  $U |\psi_S(t)\rangle$  soit indépendant du temps. On a donc :

$$|\psi_S(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi_S(t_0)\rangle \quad (2.8)$$

Cette relation permet d'introduire le vecteur d'état en représentation d'Heisenberg :

$$|\psi_H\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle \quad (2.9)$$

Afin de conserver les prédictions de la mécanique quantique, il est nécessaire d'appliquer aux opérateurs dépendant du temps une transformation similaire. Dans la représentation d'Heisenberg, un opérateur s'écrit alors :

$$A_H(t) = U^\dagger(t, t_0) A_S(t) U(t, t_0) \quad (2.10)$$

Ces deux points de vue sont strictement équivalents puisqu'on a :



$$\langle A \rangle (t) = \langle \psi_S(t) | A_S | \psi_S(t) \rangle = \langle \psi_H | A_H(t) | \psi_H \rangle \quad (2.11)$$

L'expression des champs électromagnétiques en représentation d'Heisenberg est :

$$\widehat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = i \sum E_{\omega_i} \left( \hat{a}_i(t) e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} - \hat{a}_i^\dagger(t) e^{-i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} + \omega_i t)} \right) \vec{\epsilon}_i \quad (2.12a)$$

$$\widehat{\vec{B}}(\vec{r}, t) = i \sum B_{\omega_i} \left( \hat{a}_i(t) e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} - \hat{a}_i^\dagger(t) e^{-i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} + \omega_i t)} \right) \vec{k}_i \times \vec{\epsilon}_i \quad (2.12b)$$

L'intérêt de la représentation d'Heisenberg est de conduire à des équations d'évolution analogues à celles obtenues dans la théorie classique dans lesquelles on remplace les grandeurs classiques par des opérateurs. On peut aussi calculer des moyennes à deux temps du type  $\langle \psi | F(t) G(t') | \psi \rangle$ . Ces moyennes à deux temps interviennent, par exemple, dans le calcul des corrélations entre les temps d'arrivée des photons. Il est intéressant de noter que dans le cas d'un champ libre,  $\hat{a}_i(t)$  et  $\hat{a}_i^\dagger(t)$  sont indépendants du temps : toute la dépendance temporelle est regroupée dans le terme  $e^{\pm i\omega_i t}$ .

### 2.2.1 Composantes de quadrature

On peut aussi décomposer le champ en composantes de quadrature,  $\hat{E}_{P_i}$  et  $\hat{E}_{Q_i}$  :

$$\widehat{\vec{E}}(\vec{r}) = i \sum (-2E_{\omega_i}) \left( \hat{a}_{P_i} \sin(\vec{k}_i \cdot \vec{r}) + \hat{a}_{Q_i} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r}) \right) \vec{\epsilon}_i \quad (2.13a)$$

$$= i \sum \left( \hat{E}_{P_i} \sin(\vec{k}_i \cdot \vec{r}) + \hat{E}_{Q_i} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r}) \right) \vec{\epsilon}_i \quad (2.13b)$$

avec

$$\hat{a}_{P_i} = \frac{1}{2} \left( \hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger \right) \quad (2.14)$$

et

$$\hat{a}_{Q_i} = \frac{i}{2} \left( \hat{a}_i - \hat{a}_i^\dagger \right) \quad (2.15)$$

On peut déduire de la relation 2.5a une relation de commutation pour les  $\{\hat{a}_{P_i}, \hat{a}_{Q_j}\}$  :

$$[\hat{a}_{P_i}, \hat{a}_{Q_j}] = i\delta_{i,j} \quad (2.16)$$

Le commutateur de  $\hat{E}_{P_i}$  et  $\hat{E}_{Q_j}$  s'écrit alors :

$$\left[ \hat{E}_{P_i}, \hat{E}_{Q_j} \right] = 2i E_{\omega_i}^2 \delta_{ij} \quad (2.17)$$

Le commutateur de  $\hat{a}_{P_i}$  et  $\hat{a}_{Q_i}$  étant un imaginaire pur non nul, les fluctuations de ces grandeurs sont liées par une inégalité de Heisenberg :

$$\Delta \hat{a}_{P_i} \cdot \Delta \hat{a}_{Q_i} \geq \frac{1}{4} \quad (2.18)$$

où  $\Delta \hat{A}$  désigne l'écart quadratique moyen de  $\hat{A}$  :  $\Delta \hat{A} = \left\langle \hat{A}^2 - \langle \hat{A} \rangle^2 \right\rangle$ .

On a aussi :

$$\Delta \hat{E}_{P_i} \cdot \Delta \hat{E}_{Q_j} \geq E_{\omega_i}^2 \quad (2.19)$$

$E_{\omega_i}^2$  apparaît ici comme une limite imposée par la nature quantique du champ. Elle est appelée limite quantique standard. Si on fait plusieurs mesures de  $\hat{E}_{P_i}$ , les résultats obtenus présentent en général une dispersion. Cette dispersion est caractérisée par un écart quadratique moyen,  $\Delta \hat{E}_{P_i}$ , non nul. L'équation 2.19 montre que le produit des dispersions  $\Delta \hat{E}_{P_i}$  et  $\Delta \hat{E}_{Q_i}$  est borné inférieurement par  $E_{\omega_i}^2$ . On ne peut pas mesurer simultanément les deux composantes de quadratures avec une précision infinie. Néanmoins, il n'existe pas de limite fondamentale à la mesure d'une seule de ces grandeurs. Ainsi, il est envisageable d'augmenter la précision sur la mesure d'une des deux composantes du champ, c'est à dire de diminuer ses fluctuations, au prix bien entendu d'une augmentation des fluctuations sur la composante conjuguée. On pourra donc augmenter la précision d'une mesure, la seule limite étant de nature technique. Des états ayant des fluctuations inférieures à la limite quantique standard sur une quadrature sont dits comprimés.

On définit de manière générale un état minimal comme un état vérifiant l'égalité :

$$\Delta \hat{E}_{P_i} \cdot \Delta \hat{E}_{Q_i} = E_{\omega_i}^2$$

Enfin, remarquons qu'un terme de phase dans l'équation 2.13b ne modifie pas les propriétés du champ, la représentation en quadratures n'est donc pas unique. Ainsi, la représentation en quadrature d'un champ monomode peut s'écrire :

$$\hat{E} = \hat{E}_{P,\theta} \cos(\omega t + \theta) + \hat{E}_{Q,\theta} \sin(\omega t + \theta) \quad (2.20)$$

avec  $\hat{E}_{P,\theta} = \hat{E}_P \cos \theta + \hat{E}_Q \sin \theta$  et  $\hat{E}_{Q,\theta} = -\hat{E}_P \sin \theta + \hat{E}_Q \cos \theta$ .

### 2.2.2 Représentation dans l'espace des phases

On utilise couramment une illustration graphique des propriétés du champ : on représente le champ dans l'espace des phases, c'est à dire le plan  $(\hat{E}_P, \hat{E}_Q)$ .

Dans l'espace des phases, le champ électrique classique est représenté par un vecteur tournant à la fréquence  $\omega$ . Si on considère le champ quantifié, toute mesure du champ est entachée d'un bruit. On peut représenter ces fluctuations par une surface centrée à l'extrémité du champ électrique moyen. La projection de cette surface sur une droite faisant avec l'axe  $\hat{E}_P$  un angle  $\theta$  correspond à la variance de la quadrature considérée (voir figure 1).

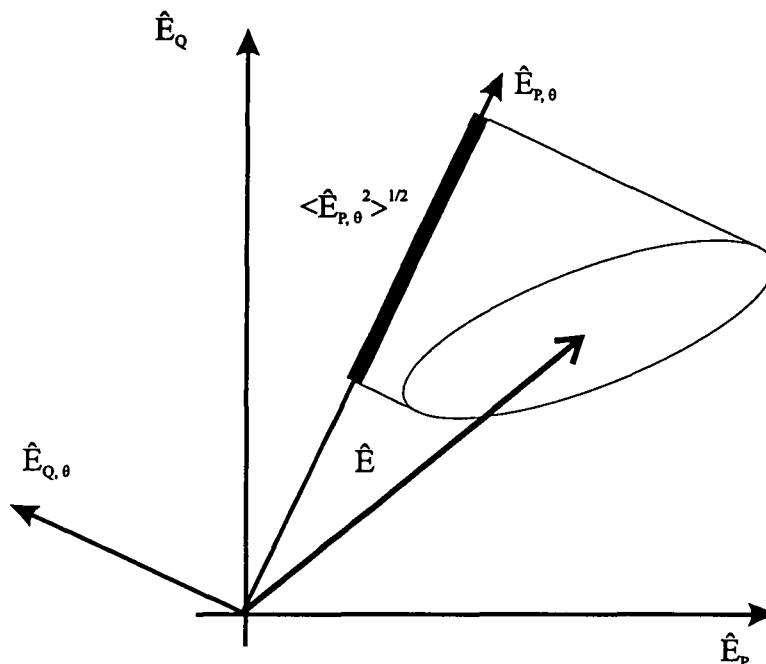


Fig. 1: Représentation dans l'espace des phases de la surface des fluctuations.

Les fluctuations dans l'axe du champ électrique correspondent aux fluctuations d'amplitude alors que les fluctuations perpendiculaires correspondent aux fluctuations de phase.

On peut montrer qu'un état cohérent, c'est à dire un état propre de  $\hat{a}$ , est un état minimal qui ne possède pas de quadrature privilégiée. Sa représentation dans l'espace des phases est donc un cercle correspondant à des fluctuations égales à la limite quantique standard sur toutes les quadratures. Dans le cas des petites fluctuations (c'est à dire de fluctuations faibles devant la valeur moyenne du champ), un état comprimé est représenté par une ellipse comme indiqué sur la figure 2.

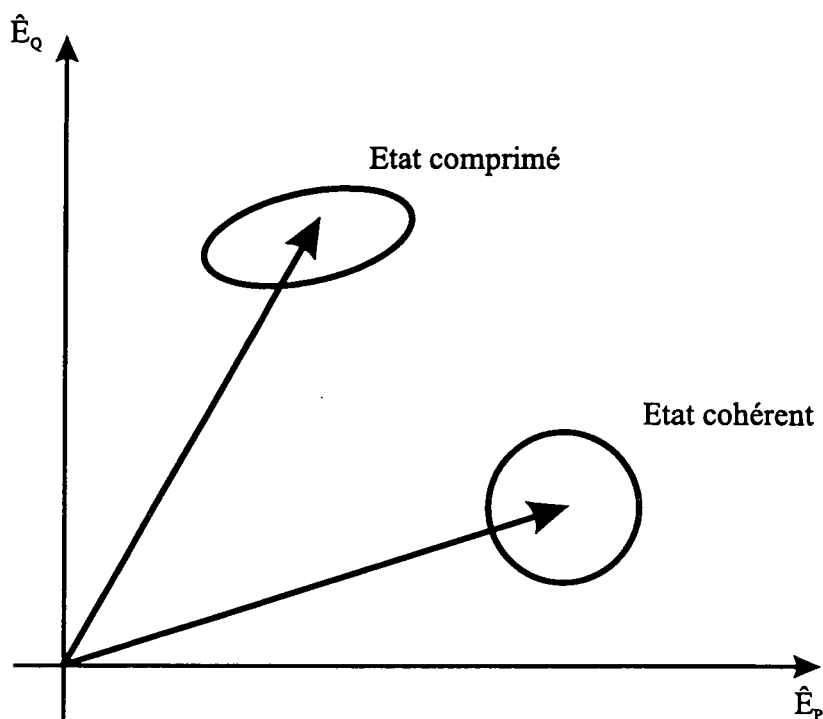


Fig. 2: Représentation dans l'espace des phases d'un état cohérent et d'un état comprimé.

### 2.2.3 Choix d'un ordre

En représentation d'Heisenberg, l'évolution d'un système est donnée par un ensemble d'équations pour les opérateurs dépendants du temps. Afin de résoudre ce système, on cherche souvent à passer à un système d'équations pour des variables complexes qui "correspondent aux opérateurs". Il existe cependant une différence importante entre les variables complexes et les opérateurs. L'algèbre gouvernant les opérateurs est non commutative alors que les variables complexes commutent. Si on considère une fonction  $F(a, a^\dagger)$  qui peut se développer en série, on a :

$$F(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \sum_{p_1} \dots \sum_{p_n} f(p_1, p_2, \dots, p_n) \hat{a}^{\dagger p_1} \hat{a}^{p_2} \hat{a}^{\dagger p_3} \dots \hat{a}^{p_n} \quad (2.21)$$

où  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sont des entiers positifs. Il est toujours possible d'utiliser les relations de commutation entre  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$  pour les réarranger entre eux. Cela va conduire à différentes expressions pour  $F(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$  qui seront toutes égales.

Par exemple, on peut décider de faire passer tous les  $\hat{a}$  à droite des  $\hat{a}^\dagger$ . On a alors :

$$F(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \sum_{r,s} f_{rs}^{(N)} \hat{a}^{\dagger r} \hat{a}^s = F^{(N)}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \quad (2.22)$$

Ce classement des opérateurs avec les  $\hat{a}$  à droite des  $\hat{a}^\dagger$  est dit "ordre normal". L'origine de cette désignation de normal réside dans le fait que c'est l'ordre qui apparaît lors de la photodétection [Glauber 63a]. L'ordre antinormal correspond à arranger  $F$  en classant les  $\hat{a}$  à gauche des  $\hat{a}^\dagger$ . On a alors :

$$F(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \sum_{r,s} f_{rs}^{(A)} \hat{a}^r \hat{a}^{\dagger s} = F^{(A)}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \quad (2.23)$$

On peut introduire un troisième ordre, l'ordre dit symétrique qui fait intervenir toutes les combinaisons des produits d'opérateurs (voir [Mandel 95], p. 541).

De manière générale, on  $f_{rs}^{(A)} \neq f_{rs}^{(N)}$  bien qu'on ait :

$$F(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = F^{(N)}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = F^{(A)}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \quad (2.24)$$

Le classement en ordre normal, anti-normal ou symétrique étant unique, il est possible d'établir une correspondance unique entre les fonctions des opérateurs  $F^{(N)}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$  et  $F^{(A)}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$  d'une part et les fonctions de la variable complexe  $\alpha$ ,  $\bar{F}^{(N)}(\alpha, \alpha^*)$  et  $\bar{F}^{(A)}(\alpha, \alpha^*)$  d'autre part. Cette correspondance est simplement faite en remplaçant dans les expressions ordonnées 2.22 et 2.23  $\hat{a}$  par  $\alpha$  et  $\hat{a}^\dagger$  par  $\alpha^*$ .

Dans nos calculs de la réduction du bruit par des atomes, nous avons choisi l'ordre normal. C'est l'ordre le plus couramment utilisé par de nombreux auteurs pour les calculs d'optique quantique.

## 2.2.4 Statistique du rayonnement

Nous allons étudier les différents types d'états qui apparaissent le plus couramment en optique quantique et voir quelles sont leurs propriétés statistiques.

### 2.2.4.1 Etat de Fock

Comme nous l'avons déjà indiqué, l'hamiltonien du champ électromagnétique se met sous la forme:

$$\hat{H} = \sum \hbar \omega_k \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \quad (2.25)$$

$\hat{H}$  est la somme des  $\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$  qui représentent le nombre de photons dans le mode  $k$  multiplié par l'énergie d'un photon,  $\hbar\omega_k$  et d'une énergie correspondant aux fluctuations du vide.

Les états propres de cet hamiltonien sont appelés états de Fock ou états nombres. On les notera  $|n_k\rangle$ . Ces états forment une base complète et orthogonale de l'espace des états.

Ces états possèdent un nombre de photons parfaitement déterminé et n'ont donc pas de fluctuations d'amplitude. Par contre, l'inégalité de Heisenberg impose des fluctuations de phases infinies. Dans l'espace des phases, les états de Fock sont représentés par un anneau (figure 3).

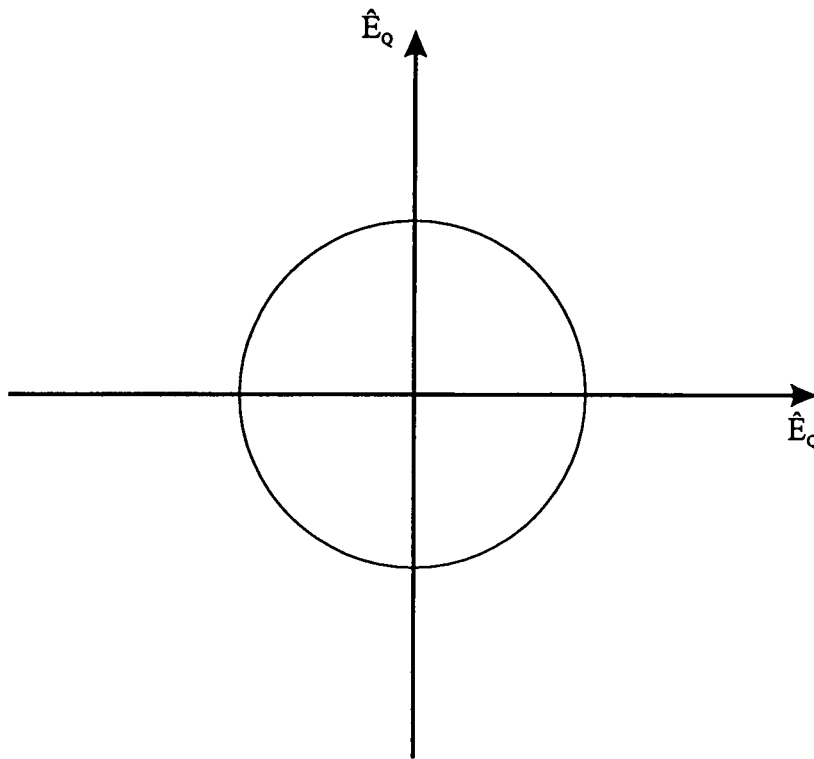


Fig. 3: Représentation de Fresnel d'un état de Fock

Ces états sont difficiles à créer expérimentalement. Si on sait maintenant produire des états contenant un seul photon ou deux photons dans deux modes différents, il est beaucoup plus difficile d'obtenir expérimentalement des états à plusieurs photons. Les états à grands nombres de photons que nous considérerons dans la suite sont généralement des superpositions d'états de Fock.

#### 2.2.4.2 Etats cohérents

Les états cohérents sont les états propres de l'opérateur  $\hat{a}$ . Ils peuvent être obtenus en appliquant l'opérateur déplacement,  $D(\alpha)$  au vide,  $|0\rangle$ :

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle \quad (2.26)$$

où  $D(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a})$  et  $\alpha$  est un nombre complexe quelconque.

On montre facilement que le développement d'un état cohérent dans la base des états de Fock est de la forme :

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.27)$$

La distribution de photons d'un état cohérent présente une statistique de Poisson :

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!} \quad (2.28)$$

Cette statistique est celle d'événements indépendants (comme l'arrivée des photons sur un détecteur). Supposons que la probabilité de détecter un photon pendant un intervalle  $\Delta t$  ne dépende que de la longueur de cet intervalle (selon une loi linéaire) :

$$\mathcal{P}(n \rightarrow n+1, \Delta t) = \kappa \Delta t \quad (2.29)$$

où  $\kappa$  est une constante. On a alors :

$$\mathcal{P}(n, t + \Delta t) = P(n, t)(1 - \kappa \Delta t) + P(n-1, t) \kappa \Delta t \quad (2.30)$$

A la limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , on a :

$$\frac{\partial \mathcal{P}(n, t)}{\partial t} = \kappa (P(n-1, t) - P(n, t)) \quad (2.31)$$

On introduit alors la fonction génératrice :

$$G(s, t) = \sum_n s^n P(n, t) \quad (2.32)$$

En dérivant  $G(s, t)$  par rapport au temps et en utilisant la relation 2.31, on a :

$$\frac{\partial G(s, t)}{\partial t} = \kappa(s-1)G(s, t) \quad (2.33)$$

d'où :

$$G(s, t) = \exp[\kappa(s-1)t]G(s, 0) \quad (2.34)$$

Si on suppose qu'aucun photon n'est arrivé à  $t = 0$ , on a  $P(0, 0) = 1$  et  $P(n, 0) = 0 \forall n \geq 1$ , d'où  $G(s, 0) = 1$ . On en tire

$$P(n, t) = \frac{(\kappa t)^n \exp[-\kappa t]}{n!} \quad (2.35)$$

Ceci montre que la statistique correspondante est une statistique poissonienne. Par ailleurs, on a :

$$\sum_n nP(n, t) = \kappa t \quad (2.36)$$

$\kappa t$  correspond donc au nombre moyen de photons détectés durant le temps  $t$  noté  $\bar{N}$ . On peut donc écrire de manière générale :

$$P(n, t) = \frac{(\bar{N})^n \exp[-\bar{N}]}{n!} \quad (2.37)$$

Les états cohérents sont particulièrement utiles car ils correspondent dans une bonne approximation au rayonnement émis par un laser très stable fonctionnant très au-dessus du seuil.

#### 2.2.4.3 États comprimés

Nous ne parlerons ici que des états minimaux c'est à dire ceux pour lesquels le produit des dispersions est égal à la valeur minimale :

$$\Delta \hat{E}_P \cdot \Delta \hat{E}_Q = E_\omega^2 \quad (2.38)$$

Les états comprimés sont générés à partir d'un opérateur unitaire de compression agissant sur un état cohérent:



$$\hat{S}(\varepsilon) = \exp \left[ \frac{1}{2} (\varepsilon^* \hat{a}^2 - \varepsilon \hat{a}^{\dagger 2}) \right] \quad (2.39)$$

où  $\varepsilon = r e^{2i\phi}$ .

Si on considère le cas où  $\phi = 0$ , on obtient :

$$\Delta \hat{E}_p^2 = E_\omega^2 e^{-2r} \quad (2.40a)$$

$$\Delta \hat{E}_Q^2 = E_\omega^2 e^{+2r} \quad (2.40b)$$

où les variances sont évaluées dans l'état  $|\varepsilon\rangle = \hat{S}(\varepsilon)|0\rangle$ . L'état obtenu par l'opérateur de compression est un état minimal. La surface d'incertitude a une dimension minimale dans la direction de  $\hat{E}_p$  (dans le cas où  $r$  est positif) et maximale dans la direction orthogonale.

Dans le cas où  $\phi \neq 0$ , on passe dans la base des quadratures  $(\hat{E}_{P,\theta}, \hat{E}_{Q,\theta})$  définies par  $\hat{E}_{P,\theta} + i\hat{E}_{Q,\theta} = (\hat{E}_P + i\hat{E}_Q) e^{-i\phi}$ . On a alors:

$$\hat{S}^\dagger(\varepsilon) \hat{E}_P \hat{S}(\varepsilon) = \hat{E}_{P,\theta} e^{-r} \quad (2.41a)$$

$$\hat{S}^\dagger(\varepsilon) \hat{E}_Q \hat{S}(\varepsilon) = \hat{E}_{Q,\theta} e^r \quad (2.41b)$$

Les variances sont alors:

$$\Delta \hat{E}_{P,\theta}^2 = E_\omega^2 e^{-2r} \quad (2.42a)$$

$$\Delta \hat{E}_{Q,\theta}^2 = E_\omega^2 e^{2r} \quad (2.42b)$$

L'état produit dans ce cas est un état minimal dont l'axe de compression est maintenant  $\hat{E}_{P,\theta}$  (toujours dans le cas où  $r$  est positif).

#### 2.2.4.4 Etat propre de la base d'amplitude du champ

La base d'amplitude du champ a été introduite par W. Vogel et al [Schubert 78][Vogel 90]. Elle correspond à la base définie par les états propres de l'opérateur champ électrique. Pour un champ monomode, cet opérateur s'écrit:

$$\hat{E}(r) = i (g(r) \hat{a} - g^*(r) \hat{a}^\dagger) \quad (2.43)$$

où  $g(r)$  décrit la structure spatiale du champ :  $g(r) = |g(r)| e^{i\varphi_g}$ .

Les états propres sont donnés par la relation :

$$\hat{E}(r) |E(r)\rangle = E(r) |E(r)\rangle \quad (2.44)$$

Ces états propres sont des états parfaitement comprimés sur une quadrature. En effet, si on pose  $\varphi_g = 0$  (ce qui est toujours possible en changeant les composantes de quadrature), on a :

$$\hat{E}(r) = 2i |g(r)| \hat{E}_Q \quad (2.45)$$

donc  $|E(r)\rangle$  est un état propre de  $\hat{E}_Q$  et on peut écrire :

$$\Delta^2 \hat{E}_Q = 0 \quad (2.46)$$

Si on choisit la base des états de Fock,  $|E(r)\rangle$  s'écrit :

$$\begin{aligned} |E(r)\rangle &= (2 |g(r)|^2 \pi)^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n (n! 2^n)^{-\frac{1}{2}} H_n \left( \frac{E(r)}{\sqrt{2} |g(r)|} \right) \\ &\times \exp \left( -\frac{E^2(r)}{4 |g(r)|^2} \right) \exp(-in\varphi_g) |n\rangle \end{aligned} \quad (2.47)$$

où  $H_n$  est le polynôme d'Hermite d'ordre  $n$ <sup>1</sup>.

En fait,  $\hat{E}$  est l'analogue pour un champ électrique à l'opérateur  $\hat{X}$  pour un oscillateur harmonique. En particulier, l'expression de  $|E(r)\rangle$  en fonction de  $|n\rangle$  (2.47) est identique à celle qui relie  $|x\rangle$ , vecteur propre de  $\hat{X}$  à  $|\varphi_n\rangle$ , vecteur propre de l'opérateur nombre de l'oscillateur harmonique [Cohen-Tannoudji 77] :

$$|x\rangle = \left( \frac{\beta^2}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{+\infty} (n! 2^n)^{-\frac{1}{2}} H_n(\beta x) \exp \left( -\frac{\beta^2 x^2}{2} \right) |\varphi_n\rangle \quad (2.48)$$

où  $\beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ .

<sup>1</sup> Le polynôme d'Hermite de degré  $n$  est défini par

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n (e^{-z^2})}{dz^n}$$

## 2.3 Représentation des états du champ

### 2.3.1 Introduction

Comme nous l'avons mentionné, la représentation dans la base de Fock n'est pas commode à appliquer aux champs que nous considérons puisque ceux-ci sont généralement des mélanges d'états cohérents. Afin d'étudier les mélanges d'états cohérents, on utilise le formalisme de la matrice densité,  $\rho$ . On définit de manière générale la fonction  $\mathcal{W}(\alpha, s)$  :

$$\mathcal{W}(\alpha, s) = \frac{1}{\pi^2} \int \exp(\alpha\eta^* - \alpha^*\eta) C(\eta, s) d^2\eta \quad (2.49)$$

où  $C(\eta, s)$  est la fonction caractéristique :

$$C(\eta, s) = Tr [\rho \exp(\eta\hat{a}^\dagger - \eta^*\hat{a})] \exp\left(\frac{s}{2}|\eta|^2\right) \quad (2.50)$$

Les différentes représentations du champ habituellement utilisées sont des cas particuliers de la fonction  $\mathcal{W}(\alpha, s)$  pour lesquelles on fixe une valeur du paramètre  $s$ . Selon la valeur de  $s$  et pour certains états du champ, la fonction  $\mathcal{W}$  peut ne pas être définie pour tout  $\alpha$ . Ces propriétés sont rappelées sur la figure 4.

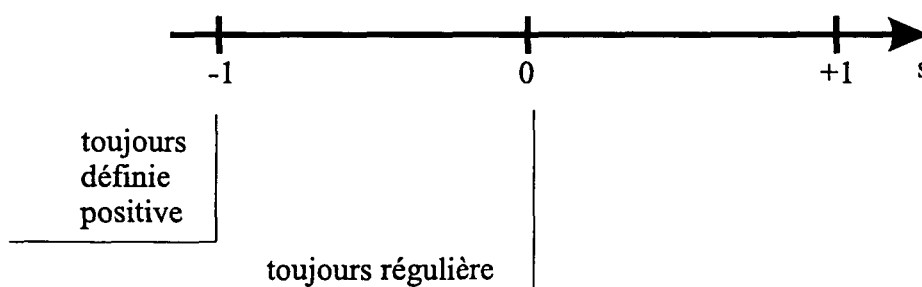


Fig. 4: Propriétés de  $\mathcal{W}(\alpha, s)$  en fonction de  $s$ .

Comme nous le verrons par la suite, la fonction  $\mathcal{W}(\alpha, s)$  est reliée à la distribution de probabilité sur une quadrature,  $P_\theta(\hat{E}_{Q,\theta})$  [Vogel 89]. C'est cette propriété fondamentale qui sera utilisée pour la mesure expérimentale de la matrice densité (voir chapitre 5).

### 2.3.2 Représentation $P$

La représentation  $P$  correspond au cas  $s = +1$ .

On peut par ailleurs montrer que la représentation  $P$  est simplement le développement de la matrice densité sur la base des états cohérents [Glauber 63b][Sudarshan 63].

Cette base étant surcomplète, on peut décomposer la matrice densité uniquement sur les projecteurs diagonaux :

$$\rho = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha \quad (2.51)$$

La représentation  $P$  est commode pour l'évaluation de produit d'opérateurs dans l'ordre normal<sup>2</sup> :

$$\langle \hat{a}^{\dagger n} \hat{a}^m \rangle = \int P(\alpha) \alpha^{*n} \alpha^m d^2\alpha \quad (2.52)$$

On peut ainsi interpréter la fonction de corrélation au second ordre  $g^{(2)}(0)$  en fonction de  $P(\alpha)$  :

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{a}^{\dagger} \hat{a}^{\dagger} \hat{a} \hat{a} \rangle}{\langle \hat{a}^{\dagger} \hat{a} \rangle^2} = 1 + \frac{\int P(\alpha') (|\alpha'|^2 - \langle |\alpha|^2 \rangle)^2 d^2\alpha'}{(\int P(\alpha) |\alpha|^2 d^2\alpha)^2} \quad (2.53)$$

où  $\langle |\alpha|^2 \rangle = \int P(\alpha) |\alpha|^2 d^2\alpha$ .

L'inconvénient de la représentation  $P$  vient du fait que la base des états cohérents est surcomplète : deux états cohérents ne sont pas orthogonaux dans le cas général. La représentation  $P$  peut donc être singulière. Par exemple, on voit immédiatement que la représentation  $P$  d'un état cohérent est une fonction de Dirac. On utilise souvent la représentation de Wigner qui ne possède pas de singularité.

### 2.3.3 Représentation de Wigner

C'est la première des distributions de quasi-probabilités à avoir été introduite en mécanique quantique [Wigner 32]. Elle correspond au cas  $s = 0$ . Cette fonction est toujours définie mais pas toujours positive, c'est pourquoi on parle de distribution de quasi-probabilité. Cependant, dans le cas des états cohérents ou dans celui des états comprimés monomodes, la fonction de Wigner est toujours positive et bornée par une gaussienne [Lütkenhaus 95]. Le théorème d'Hadamard<sup>3</sup> s'applique alors et la fonction de Wigner correspondante est nécessairement une gaussienne. Pour un état cohérent minimal, la fonction de Wigner est une gaussienne de révolution centrée autour de la valeur moyenne du champ. La fonction de Wigner d'un état comprimé minimal est une

<sup>2</sup> Cette propriété est parfois appelée Théorème d'Equivalence Optique [Mandel 95][Davidovich 96].

<sup>3</sup> L'énoncé de ce théorème est le suivant :

Toute fonction  $f(z)$  analytique sur tout le plan complexe (c'est à dire développable en série entière), qui n'a aucun zéro et dont le carré du module est borné par la fonction  $\exp(-|z|^2)$  est nécessairement de la forme  $f(z) = \exp(Az^2 + Bz + C)$  où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des constantes complexes [Saks 71].

gaussienne avec des largeurs à mi-hauteur différentes suivant les directions et toujours centrée autour de la valeur moyenne du champ.

L'intérêt de la fonction de Wigner est de faciliter le calcul des moyennes de produits dans l'ordre symétrique. La fonction de Wigner est reliée simplement à la surface d'incertitude dont nous avons parlé précédemment. Ainsi, on a :

$$\Delta \hat{E}_P = \frac{1}{4} \left\langle (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 - \langle \hat{a} + \hat{a}^\dagger \rangle^2 \right\rangle \quad (2.54a)$$

$$= \frac{1}{4} \int W(\alpha') \left[ (\alpha' + \alpha'^*)^2 - \langle \alpha + \alpha^* \rangle^2 \right] d^2 \alpha' \quad (2.54b)$$

avec  $\langle \alpha + \alpha^* \rangle = \int (\alpha' + \alpha'^*) W(\alpha') d^2 \alpha'$ . Dans le cas d'un état cohérent ou d'un état comprimé minimal, l'équation 2.54b montre que la surface d'incertitude peut être vue comme le contour de la fonction de Wigner à  $1/e$ . Par ailleurs, la fonction de Wigner est reliée de manière simple aux distributions de probabilité des composantes de quadratures [Kühn 94] :

$$P_\theta(\hat{E}_{Q,\theta}) = \int W(\hat{E}_p + i\hat{E}_Q) d\hat{E}_{p,\theta} \quad (2.55)$$

où  $P_\theta(\hat{E}_{Q,\theta})$  désigne la distribution de probabilité de la quadrature  $\hat{E}_{Q,\theta}$  et

## 2.4 Réalisation expérimentale d'états comprimés du rayonnement.

### 2.4.1 Introduction

Depuis plus d'une dizaine d'années, de nombreuses expériences visant à obtenir expérimentalement des états comprimés ont été réalisées. On peut classer ces méthodes en plusieurs familles:

- méthodes basées sur le pompage régulier d'un laser: lorsqu'on pompe un laser de manière régulière, la statistique des photons émis peut être sub-poissonienne [Golubev 84]. En alimentant une diode laser avec un courant régulier, on peut donc obtenir un faisceau comprimé [Machida 88].

- méthodes basées sur une interaction non-linéaire de type  $\chi^{(2)}$ .

- méthodes basées sur une interaction non-linéaire de type  $\chi^{(3)}$ .

Nous mentionnerons brièvement la méthode de réduction de bruit par interaction non-linéaire de type  $\chi^{(2)}$ . Ensuite, nous montrerons comment un milieu  $\chi^{(3)}$  est susceptible de réduire les fluctuations quantiques.

### 2.4.2 Réduction du bruit dans un milieu $\chi^{(2)}$

On considère ici un Oscillateur Paramétrique Optique (OPO), c'est-à-dire un milieu  $\chi^{(2)}$  placé à l'intérieur d'une cavité optique. Une onde incidente de fréquence  $\omega_P$  est susceptible de produire deux ondes de fréquence  $\omega_S$  et  $\omega_I$  au cours d'un processus qui peut être considéré comme instantané. Plusieurs expériences ont utilisé avec succès ce système pour obtenir une réduction de bruit.

La première expérience avec un OPO a été réalisée par Wu *et al.* [Wu 86]. Dans cette expérience, on se place au-dessous du seuil d'oscillation de l'OPO dans une configuration dégénérée c'est à dire pour laquelle les fréquences  $\omega_S$  et  $\omega_I$  sont égales. Le faisceau à la fréquence  $\omega_S$  a une valeur moyenne nulle. Classiquement, l'amplification paramétrique d'un champ est décrite par l'équation :

$$\frac{\partial \alpha_S}{\partial z} = -\chi^{(2)} \alpha_P \alpha_S^* \quad (2.56)$$

où  $\alpha_P$  est le champ pompe (supposé non modifié dans l'interaction paramétrique). La forme de l'équation montre que le champ  $\alpha_S$  peut être amplifié ou atténué suivant sa phase par rapport au champ pompe. Certaines des composantes de quadratures peuvent être amplifiées et d'autres déamplifiées. Il en est de même des composantes des fluctuations quantiques qui sont déformées par le processus. Comme dans tout processus paramétrique, l'aire des fluctuations n'est pas modifiée. Les fluctuations quantiques sont donc comprimées sur une composante de quadrature et augmentées sur la composante orthogonale.

S'il n'y a pas de champ à l'entrée du milieu, la solution classique est nulle. Cependant, il existe des fluctuations, les fluctuations du vide, qui peuvent amorcer le phénomène de génération paramétrique. L'interaction paramétrique produira donc un état où la valeur moyenne du champ est nulle mais où les fluctuations quantiques sont comprimées sur une composante en quadrature et augmentées sur la composante orthogonale. Cet état est appelé vide comprimé. Il faut noter que le nombre moyen de photons est non nul. La meilleure réduction de bruit obtenue avec cette méthode est actuellement de 70% [Wu 88][Breitenbach 95].

La seconde méthode consiste à se placer au-dessus du seuil d'oscillation et dans une situation non-dégénérée. Dans ce cas, les faisceaux générés, le signal et le complémentaire sont fortement corrélés. On explique habituellement cette propriété en disant que les deux champs sont créés au cours de la même désexcitation d'un atome vers son niveau fondamental. En terme de photons, les deux photons sont créés par le même processus et sont donc appariés. On peut mettre en évidence la corrélation en étudiant les fluctuations sur la différence des intensités dans le domaine spectral à l'aide d'un analyseur de spectre. La meilleure réduction de bruit obtenue avec cette méthode est actuellement de plus de 90% [Mertz 91].

La dernière méthode est basée sur des non-linéarités en cascade : les faisceaux signaux et complémentaires produits par la génération paramétrique peuvent se recom-

biner pour produire une onde à la fréquence de la pompe. On a alors une non-linéarité effective pour la pompe et on peut considérer que le milieu se comporte comme un milieu Kerr dont nous verrons qu'il peut réduire le bruit quantique. La meilleure réduction de bruit obtenue avec cette méthode est actuellement proche de 50% [Kasai 97].

### 2.4.3 Réduction du bruit par effet Kerr

Un milieu Kerr est un milieu dont l'indice de réfraction dépend de l'intensité incidente. Le déphasage d'une onde traversant ce milieu dépend donc de son intensité. Nous supposons un tel milieu placé dans une cavité linéaire à une entrée-sortie : un des miroirs sert de miroir de couplage, l'autre étant considéré comme parfaitement réfléchissant (figure 5).

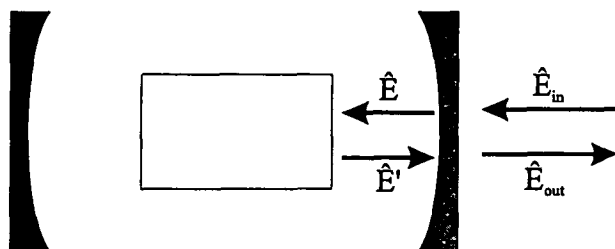


Fig. 5: Schéma de principe du montage expérimental

#### 2.4.3.1 Etude du comportement classique d'une cavité contenant un milieu Kerr

On appelle  $E_{in}$  le champ incident et  $E_{out}$  le champ réfléchi par la cavité.  $E$  et  $E'$  sont les champs intracavités respectivement au niveau du miroir de couplage et au niveau du miroir parfaitement réfléchissant. En utilisant les propriétés des lames diélectriques, on obtient les relations suivantes entre les différents champs :

$$E = r_0 E' + t_0 E_{in} \quad (2.57a)$$

$$E_{out} = t_0 E' - r_0 E_{in} \quad (2.57b)$$

où  $r_0$  et  $t_0$  sont les coefficients de réflexion et de transmission du miroir de couplage.

Dans le cas de l'effet Kerr parfait, c'est à dire sans absorption ni émission spontanée, le déphasage non linéaire du champ sur un passage s'écrit :

$$\Phi_{NL} = \frac{k\chi^{(3)}l}{2} |E|^2 \quad (2.58)$$

où  $k$  est le vecteur d'onde du faisceau et  $l$  la longueur d'interaction. On en déduit l'expression du champ au niveau du miroir parfaitement réfléchissant,  $E'$ , en fonction du champ intracavité au niveau du miroir de couplage,  $E$  :

$$E' = e^{-i\Phi} E \quad (2.59)$$

où  $\Phi$  est le déphasage total subi par le champ sur une longueur de la cavité :  $\Phi = \Phi_0 + \Phi_L + \Phi_{NL}$ , où  $\Phi_0$  est le déphasage linéaire dû à la propagation dans la cavité,  $\Phi_L$  le déphasage linéaire dû à la propagation dans le milieu atomique et  $\Phi_{NL}$  le déphasage non linéaire. L'effet de ce déphasage peut être observé sur la courbe de résonance de la cavité qui représente la valeur de l'intensité intracavité en fonction du déphasage de la cavité (voir figure 6).

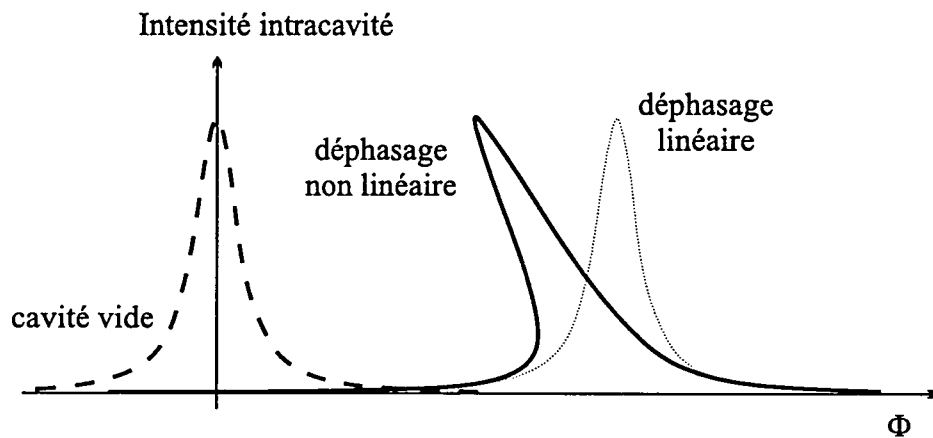


Fig. 6: Effet d'un milieu Kerr sur l'intensité intracavité

Lorsque la cavité est vide, la courbe de résonance est simplement la fonction d'Airy usuelle. En présence du milieu Kerr, le déphasage linéaire déplace la courbe de résonance: la résonance est obtenue pour une longueur différente de la cavité (cet effet linéaire est bien connu : une variation de pression ou de température dans une cavité à l'air libre modifie la fréquence de résonance). Par contre, le déphasage non linéaire déforme l'allure de la courbe de résonance. Si on considère un milieu qui introduit un déphasage non linéaire négatif, le sommet est décalé vers la gauche comme le montre la figure 6 alors que les pieds ne sont pas modifiés. Cette déformation conduit à une bistabilité bien connue depuis longtemps [Gibbs 76]. La courbe de résonance comprend maintenant deux branches stables, la branche basse et la branche haute. Une analyse de stabilité montre que la branche intermédiaire est instable. Si on balaye de façon continue la longueur de la cavité, dans le sens des phases croissantes par exemple, on va se déplacer sur la branche basse de la courbe et au lieu de passer sur la branche intermédiaire, il se produira un saut brutal de l'intensité intracavité: on passera directement sur la branche haute. De même dans le sens contraire du balayage, on va



se déplacer sur la branche haute et on sautera directement sur la branche basse sans passer par la branche intermédiaire (voir figure 7).

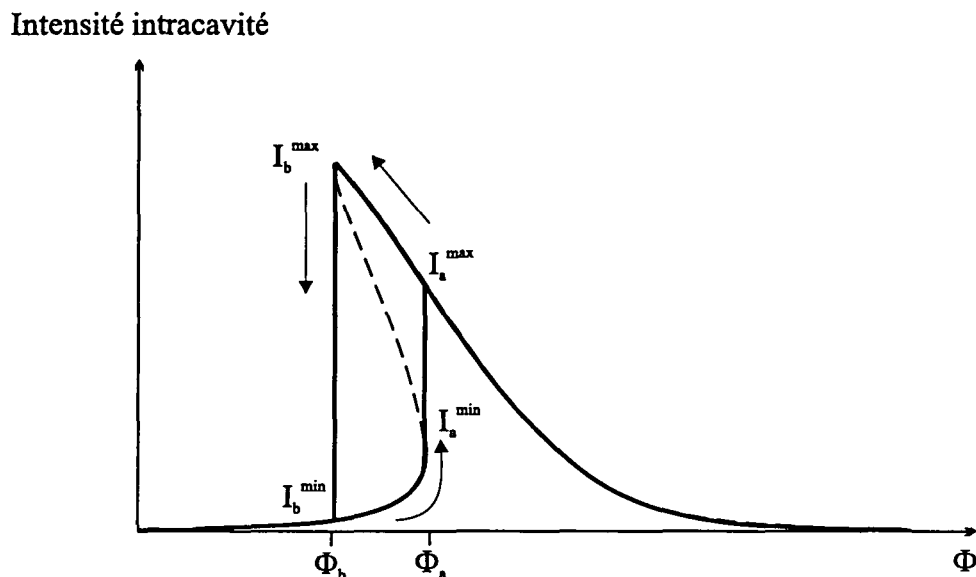


Fig. 7: Saut de la branche basse à la branche haute lors du balayage de la phase de la cavité.

#### 2.4.3.2 Etude de l'effet d'un milieu Kerr sur les fluctuations quantiques

Un milieu Kerr est susceptible de modifier les fluctuations quantiques. Une première façon de l'envisager est de considérer qu'au voisinage de la zone instable, la variance d'une des quadratures diverge à cause de l'existence d'un gain différentiel infini au niveau du point tournant. A cause de l'inégalité de Heisenberg, la variance de la quadrature conjuguée est réduite. La variance de la quadrature dont les fluctuations sont réduites peut, dans des conditions que nous préciserons, passer en dessous du bruit quantique standard.

On peut donner une image plus détaillée de l'origine physique de la réduction de bruit par effet Kerr. Considérons la représentation du champ dans l'espace des phases (figure 8) pour un milieu Kerr en simple passage.

Le champ incident est un état cohérent représenté par un disque. L'effet du milieu Kerr est d'introduire un déphasage dépendant de l'intensité. Cela se traduit par une rotation dépendant de l'intensité : dans l'espace des phases, un déphasage correspond à une rotation. Les points du disque les plus proches de l'origine (c'est à dire ceux correspondant à une intensité plus faible) subissent une rotation différente de celle subie par les points les plus éloignés de l'origine. Ceci déforme la surface des fluctuations. Or, dans un milieu Kerr parfait, l'aire de cette surface est conservée. Dans l'approximation linéaire (le champ moyen est supposé beaucoup plus intense que les fluctuations), la surface déformée est une ellipse qui correspond à un état comprimé.

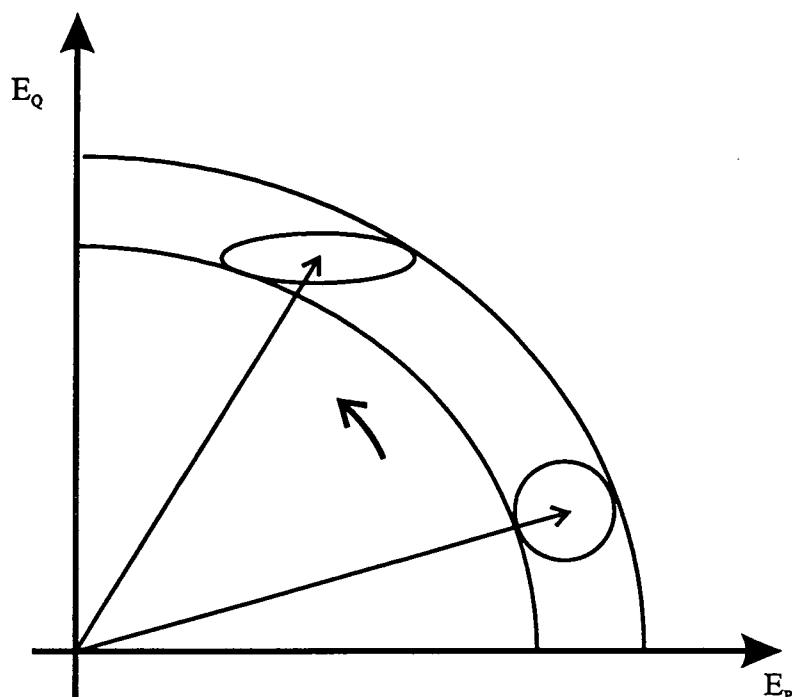


Fig. 8: Représentation dans l'espace des phases de l'effet d'un milieu Kerr sur un état cohérent

Cette étude est valable pour les fluctuations à la même fréquence que le laser. Néanmoins, expérimentalement ce cas n'est pas très intéressant car les sources lasers usuelles présentent un excès de bruit extrêmement important autour de la fréquence centrale à cause de bruits techniques : ainsi le faisceau issu du laser Titane:Saphir que nous utilisons, n'est pas limité par le bruit quantique standard pour des fréquences éloignées de moins de 3  $MHz$  de la fréquence centrale. Il est donc préférable de mesurer les fluctuations à des fréquences plus éloignées de la fréquence centrale.

L'analyse statique que nous venons de faire n'est plus valable pour des fréquences de bruit non nulles. Dans le cas d'un milieu Kerr dans une cavité, on peut montrer [Reynaud 89] que tout se passe comme si l'ellipse tournait sur elle-même tout en revenant à une forme circulaire. Cette diminution de la réduction de bruit peut se comprendre intuitivement : la cavité n'a d'effet que pour les temps longs devant son temps de stockage, c'est à dire pour les fréquences de bruit inférieures à sa bande passante qui est de l'ordre de la dizaine de  $MHz$  dans notre cas.

Les calculs complets de l'effet d'un milieu Kerr idéal sur les fluctuations quantiques se trouvent dans la référence [Reynaud 89]. Nous verrons dans ce mémoire le calcul de la modification des fluctuations quantiques par un milieu Kerr formé d'atomes à trois niveaux.

### 2.4.3.3 Etude de l'effet Kerr avec un milieu réel

Parmi les nombreux milieux Kerr différents qui sont disponibles, on peut distinguer deux grandes classes : les milieux résonants et les milieux non résonants. Dans les milieux résonants, l'effet non linéaire est dû à la proximité d'une résonance du matériau.

Cette augmentation de la non-linéarité par la proximité d'une résonance est absente dans les milieux non résonants et la non-linéarité est faible. On peut augmenter cette non-linéarité en augmentant la distance parcourue dans le milieu. En particulier, de nombreux travaux ont été effectués sur la réduction de bruit dans des fibres optiques [Shelby 86][Bergman 91]. L'inconvénient des fibres optiques provient de l'existence de processus de diffusion Brillouin (GAWBS) : deux méthodes sont utilisées pour éviter cet effet. On peut par exemple placer les fibres à la température de l'hélium liquide; le taux de compression obtenu dans ce cas est de 12.5% sous la limite quantique standard [Shelby 86]. L'autre méthode utilise des impulsions laser; lorsqu'on détecte les fluctuations à basse fréquence (moins de 100  $kHz$ ), l'effet de la diffusion Brillouin est négligeable. Le taux de compression des fluctuations obtenu avec ce montage est de l'ordre de 5  $dB$  [Bergman 91](à comparer à un maximum de 7  $dB$  prévu pour un milieu Kerr parfait utilisé dans ces conditions [Shirasaki 90]).

Par contre, les milieux résonants ou excités à proximité d'une résonance sont plus favorables si on parvient à éliminer l'absorption présente dans ces milieux. Considérons un ensemble d'atomes à deux niveaux dans lequel on peut négliger l'effet Doppler illuminé par un faisceau laser proche de la résonance. Quand l'intensité de l'onde incidente devient importante, il apparaît une saturation de la transition : l'absorption diminue lorsque l'intensité augmente. Cette saturation varie comme  $1/\Delta^2$  (où  $\Delta$  désigne le désaccord entre le faisceau laser et la transition atomique) et la dispersion non linéaire diminue comme  $1/\Delta^3$ . Pour un désaccord suffisamment important, l'absorption est négligeable mais la non-linéarité est suffisante pour modifier les fluctuations de manière significative. L'interaction entre le laser et les atomes dépend de l'intensité de l'onde lumineuse ce qui correspond bien à un milieu Kerr. Afin d'éliminer l'effet Doppler, la première solution développée a été d'utiliser un jet atomique [Orozco 87][Hope 92]. Dans la direction transverse au jet, l'effet Doppler est très faible. La réduction de bruit obtenue dans ces expériences est de l'ordre de 20%. Cependant dans ces deux expériences, l'accord entre les prédictions théoriques et les résultats expérimentaux n'est pas satisfaisant. La cause de ce désaccord se situe probablement dans la variation du nombre d'atomes en interaction avec la sonde. Il est possible de calculer l'influence de cette variation sur la réduction du bruit [Lambrecht 96b]. Un nuage d'atomes refroidis par laser permet d'éviter complètement cet effet car les fréquences typiques de la fluctuation atomique sont beaucoup plus basses [Lambrecht 95].

Nous avons donc choisi d'utiliser des atomes de césium refroidis au voisinage de la transition  $6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F = 5$ . Dans une première approximation, on peut considérer ce nuage d'atomes comme un ensemble d'atomes à deux niveaux. Il est donc susceptible de se comporter comme un milieu Kerr et ainsi de réduire les fluctuations d'un faisceau laser au-dessous du bruit quantique standard. Nous reviendrons dans le chapitre 3 sur la validité de ce modèle.

## 3 Présentation du montage expérimental

### 3.1 Introduction

Nous allons décrire dans cette partie les différents éléments du montage expérimental. En particulier, nous détaillerons les conditions à remplir pour obtenir une mesure correcte de la réduction du bruit.

Le montage que nous avons utilisé a été développé au cours des thèses de Laurent Hilico et d'Astrid Lambrecht. Certaines modifications ont dû être apportées au système de refroidissement et de piégeage des atomes et à la stabilité du montage.

Ce montage se décompose en trois grands sous-systèmes : les sources lasers, le piège magnéto-optique et la détection et le traitement du signal.

### 3.2 Les sources lasers

Deux lasers sont utilisés dans cette expérience : un laser Titane:Saphir qui produit les faisceaux de piégeage et de mesure de la réduction de bruit et une diode laser qui sert de faisceau de repompage dans le piège magnéto-optique. Nous détaillerons brièvement la diode laser puis nous étudierons plus en détail le laser à Titane:Saphir.

Nous verrons plus en détail les caractéristiques du piège magnéto-optique mais rappelons dès à présent que dans un piège magnéto-optique, les atomes sont refroidis et piégés par des forces de type pression de radiation. On utilise pour cela un laser Titane:Saphir, proche de la résonance  $6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F = 5$  du césium.

Comme le niveau  $6P_{3/2}F = 4$  est peu éloigné du niveau  $6P_{3/2}F = 5$ , certains atomes peuvent être excités vers le niveau  $6P_{3/2}F = 4$  et de là se désexciter vers le niveau  $6S_{1/2}F = 3$  où ils n'interagissent plus avec le laser. Afin d'éviter ce phénomène de pompage optique hyperfin, on superpose au laser Titane:Saphir un faisceau résonant avec la transition  $6S_{1/2}F = 3 \rightarrow 6P_{3/2}F = 4$  ce qui permet de ramener les atomes dans le cycle de refroidissement. Ce faisceau est produit par une diode laser.

#### 3.2.1 La diode laser de repompage

La diode laser dont le schéma est donné par la figure 9 est une diode DBR (SDL-5712-H1) délivrant une puissance maximale de 100 *mW*. Le faisceau sortant de la

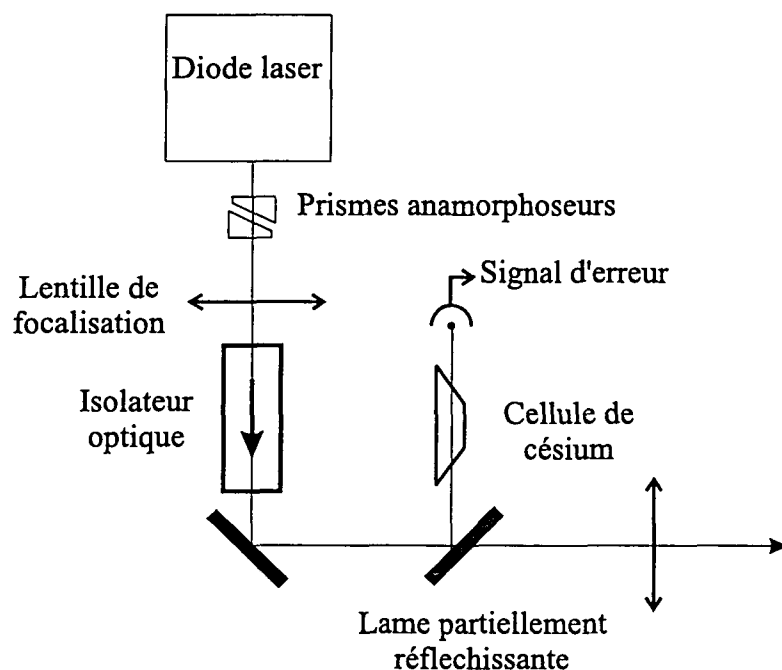


Fig. 9: Schéma de la diode de repompage

diode laser passe par une paire de prismes anamorphoseurs destinée à le rendre approximativement circulaire. Il passe ensuite par une lentille qui focalise le faisceau dans un isolateur optique. Cet isolateur évite les réflexions parasites qui pourraient revenir dans la diode et perturber son fonctionnement. On prélève une partie du faisceau à l'aide d'une lame partiellement réfléchissante pour faire un asservissement de la fréquence en envoyant ce faisceau dans une cellule de césium : lorsque le faisceau s'approche de la résonance, l'absorption augmente et le signal détecté sur la photodiode située derrière la cellule diminue. On utilise ce dernier comme signal d'erreur pour réagir sur la fréquence de la diode laser par l'intermédiaire du courant d'alimentation.

La fréquence du faisceau émis par la diode laser dépend à la fois de sa température et du courant d'alimentation. Pour trouver la résonance, on se place à une température donnée et on modifie le courant. La température est maintenue constante grâce à un asservissement : elle est mesurée à l'aide d'une thermistance (c'est à dire un élément dont la résistance dépend de la température) et on peut la modifier grâce à un module à effet Peltier. Le faisceau est envoyé sur un lambdamètre pour trouver la bonne fréquence. Ensuite, on se place sur la résonance en minimisant le signal de la photodiode. Ce signal présente en fait deux résonances correspondant aux deux niveaux de la structure hyperfine du niveau fondamental, l'écart entre les deux niveaux étant de  $9,2 \text{ GHz}$  : lorsqu'on balaye le courant, on distingue deux minima séparés d'environ  $8 \text{ mA}$ . Connaissant la variation de la fréquence de la diode en fonction du courant (environ  $1 \text{ GHz}$  par  $\text{mA}$ ), on peut associer ces deux pics aux résonances  $6S_{1/2}F = 3 \rightarrow 6P_{3/2}F' = 3, 4, 5$  et  $6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F' = 4, 5$  (les raies sont élargies par effet Doppler et les résonances correspondant à des transitions vers les niveaux supérieurs de la transition se recou-

vrent). En se plaçant sur la résonance la plus basse en courant, on obtient la bonne fréquence pour le faisceau de repompage.

Il faut noter que le fonctionnement du piège est très sensible aux variations de fréquence de cette diode et donc à tous les paramètres qui peuvent l'affecter. Par exemple, dans un premier temps, l'alimentation de la diode était placée à proximité de l'oscilloscope digital utilisé dans nos mesures. Or, l'écran de cet oscilloscope rayonne une fréquence parasite proche de  $50\text{ kHz}$  qui correspond à sa fréquence de rafraîchissement. Ce rayonnement était capté par l'alimentation et le courant de la diode laser était alors modulé à cette fréquence. Cela introduisait une modulation de l'intensité et de la fréquence de la diode laser. Cette modulation n'étant pas très importante (de l'ordre de quelques %), l'effet sur l'intensité était faible et donc non significatif. Par contre, l'effet sur la fréquence était suffisant pour être observable sur la sonde interagissant avec les atomes piégés : on retrouvait sur la courbe de bistabilité une modulation à la fréquence de rafraîchissement de l'oscilloscope digital. Afin d'éviter ce phénomène préjudiciable à la mesure de réduction de bruit, nous avons dû éloigner l'oscilloscope de l'alimentation.

Nous allons maintenant décrire la seconde source laser, le laser Titane:Saphir.

### 3.2.2 Le laser Titane:Saphir

#### 3.2.2.1 Introduction

Le laser que nous utilisons est construit sur le principe développé au laboratoire par François Biraben.

Ce laser est nécessaire pour produire le faisceau dont on va étudier le bruit quantique après interaction avec les atomes. En effet, afin de réduire les fluctuations au-dessous de la limite quantique standard, il est important de disposer d'un faisceau qui soit initialement limité par cette valeur à la fois en intensité et en phase. Les autres sources lasers couramment utilisées pour le césium, les diodes laser, ne conviennent pas à cause d'un bruit de phase trop important.

Par ailleurs, ce laser délivre en fonctionnement normal une puissance de l'ordre de  $1\text{ W}$ , ce qui est très supérieur aux puissances nécessaires pour obtenir une non-linéarité dans le milieu atomique. C'est pourquoi nous utilisons aussi ce laser pour produire les faisceaux pièges (ce qui permet de se passer de diodes laser supplémentaires).

#### 3.2.2.2 La cavité laser

Le laser Titane:Saphir est pompé par un laser à Argon ionisé (Coherent Innova 310) qui délivre une puissance de  $10\text{ W}$  en fonctionnement multiraies. Le faisceau produit par ce laser est alors envoyé sur le cristal de Titane:Saphir par l'intermédiaire de miroirs montés en baïonnette réglables avec des montures Micro-Contrôle. En cas de baisse de puissance du Titane:Saphir due à un déplacement du laser Argon, il suffit de réaligner le laser de pompe à l'aide de la baïonnette, ce qui évite de rerégler tous les éléments en aval du laser Titane:Saphir. De plus, deux éléments optiques focalisent le faisceau

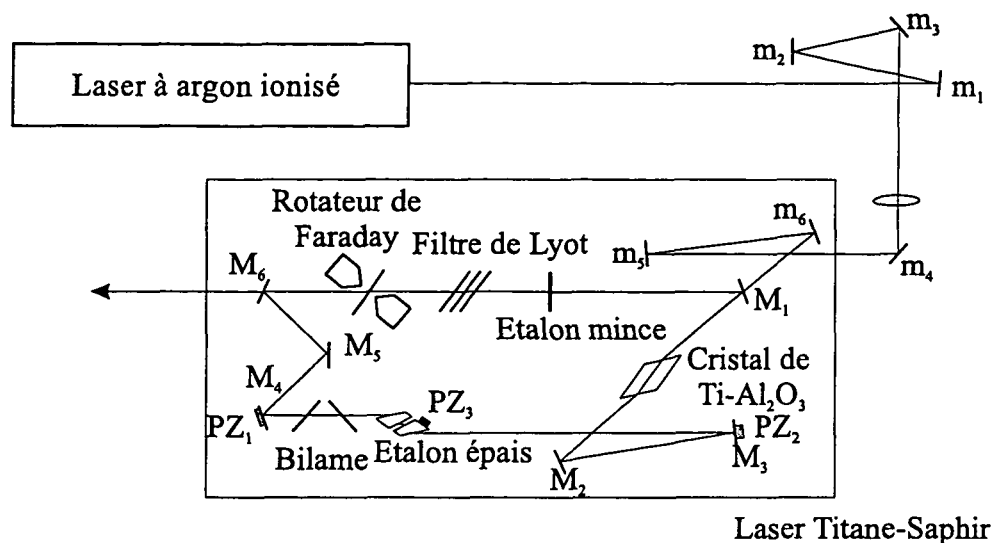


Fig. 10: Schéma du laser Titane:Saphir pompé par un laser à Argon ionisé

de pompe dans le cristal de Titane:Saphir : une lentille et le miroir dichroïque  $M_1$  à travers lequel le faisceau pompe entre dans la cavité. L'ensemble permet d'adapter la taille du mode de la pompe au mode de la cavité afin d'obtenir un pompage optimal.

Différents éléments sont disposés dans la cavité afin de garantir un fonctionnement monomode longitudinal. La sélection en fréquence se fait à l'aide d'éléments possédant des largeurs spectrales différentes :

- un filtre de Lyot placé à l'incidence de Brewster qui fournit un réglage grossier de la longueur d'onde lorsqu'on le tourne dans son plan. Il a un intervalle spectral libre d'environ  $10^3 \text{ GHz}$ .

- une lame de verre qui joue le rôle d'un étalon mince d'intervalle spectral libre de  $150 \text{ GHz}$ .

- un étalon épais composé d'une lame d'air entre deux prismes de verre qui possède un intervalle spectral libre d'environ  $20 \text{ GHz}$ .

- la cavité laser a une longueur d'environ  $1.6 \text{ m}$  ce qui correspond à un intervalle entre ordres de  $170 \text{ MHz}$ .

De plus afin de garantir un fonctionnement stable, une diode optique est disposée à l'intérieur de la cavité en anneau afin d'éliminer un des sens de propagation de la lumière. Le premier élément de cette diode est un rotateur de Faraday, qui fait tourner la polarisation toujours dans le même sens quel que soit le sens de propagation de la lumière : c'est une lame de verre ayant une forte constante de Verdet située à l'entrefer d'un aimant. La rotation de la polarisation introduite par cet élément est compensée (dans le sens de propagation privilégié) ou augmentée (dans le sens opposé) par un système de trois miroirs non coplanaires ( $M_4$ ,  $M_5$ ,  $M_6$ ) : pour un des sens de propagation, la polarisation reste verticale sur un tour alors que pour le sens de propagation opposé, le champ possède une composante horizontale. Plusieurs interfaces à l'incidence de Brewster (filtre de Lyot, cristal de Titane:Saphir) introduisent des

pertes pour la polarisation horizontale : cela revient à introduire des pertes pour un des sens de propagation et donc à favoriser la propagation de la lumière dans un seul sens, celui pour lequel le système de trois miroirs non coplanaires compense l'effet du rotateur.

Enfin, pour balayer finement la fréquence de la cavité, on dispose d'un bilame : cet élément est composé de deux lames de verre symétriques par rapport à un plan perpendiculaire à la cavité et faisant un angle proche de l'angle de Brewster pour le faisceau laser. En faisant tourner de manière symétrique par rapport à un axe vertical ces deux lames, on modifie la longueur parcourue dans le verre, donc on modifie la longueur optique de cet élément, c'est à dire la longueur optique de la cavité sans déplacer le faisceau. On peut ainsi balayer continûment la fréquence de la cavité sur une largeur de  $12\text{ GHz}$ . Pour éviter les sauts de modes du Fabry-Pérot épais, on l'asservit en intensité. Pour cela, on module sa longueur à l'aide d'une cale piézo-électrique à la fréquence  $f$  ( $f \simeq 1\text{ kHz}$ ). On détecte sur une photodiode l'intensité du laser Titane:Saphir qui va se trouver modulée à la fréquence  $f$ . On envoie ce signal sur une détection synchrone qui fournit un signal proportionnel à la dérivée du pic de transmission du Fabry-Pérot épais. Ce signal peut alors être utilisé comme signal d'erreur et est renvoyé sur la cale de commande du Fabry-Pérot épais. Afin d'éliminer la modulation en intensité sur le laser Titane:Saphir, la modulation sera aussi envoyée sur la cale du miroir  $M_3$  lorsqu'on asservira le laser par la méthode Hänsch et Couillaud.

### 3.2.2.3 Les asservissements

Afin de bien maîtriser l'interaction entre la lumière et les atomes, il est nécessaire d'avoir une fréquence de résonance de la cavité qui soit bien stable. Le laser non asservi possède une largeur de l'ordre de  $1\text{ MHz}$ , ce qui est du même ordre de grandeur que la largeur du niveau excité qui nous intéresse ( $5.2\text{ MHz}$ ). Cette fréquence a tendance à dériver au cours du temps à cause de variations de température et de pression. Il est donc nécessaire de réaliser un asservissement qui permette de réduire ces variations (figure 11).

Pour corriger les variations rapides, on asservit le laser sur une cavité par la méthode de Hänsch et Couillaud [Hänsch 80]. Cette méthode d'asservissement utilise une cavité contenant une lame à l'incidence de Brewster. Elle permet de traduire des variations de fréquence en variations de polarisation qui peuvent être détectées aisément. Avec la première photodiode ( $\text{PhD}_1$ ), on mesure la puissance du mode injecté dans cette cavité et on peut donc optimiser l'alignement du faisceau entrant sur la cavité. On arrive à obtenir une adaptation d'environ  $1/30$  (rapport entre le mode principal et le premier mode transverse). La photodiode  $\text{PhD}_3$  est précédée d'une lame quart d'onde et d'une lame demi-onde ce qui permet d'analyser la polarisation du faisceau réfléchi par la cavité. On peut montrer qu'en fonction de la fréquence du laser, le signal obtenu sur cette photodiode a une allure de courbe de dispersion. En jouant sur la lame quart d'onde située devant  $\text{PhD}_3$ , on obtient une courbe de dispersion symétrique par rapport à sa valeur moyenne. La seconde photodiode ( $\text{PhD}_2$ ) mesure la puissance du faisceau. Si on soustrait le signal obtenu avec cette photodiode au signal obtenu



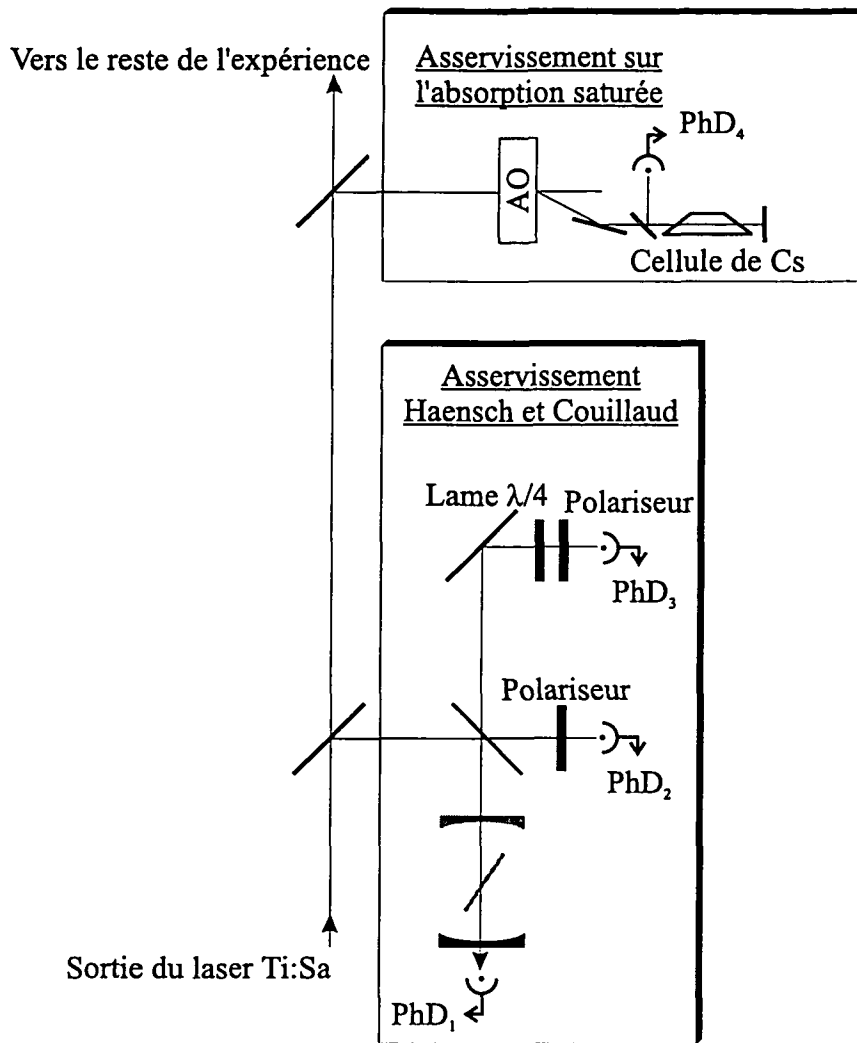


Fig. 11: Schéma des asservissements du laser Titane:Saphir

avec la photodiode  $\text{PhD}_3$ , on obtient un signal qui s'annule au centre de la courbe de dispersion : ce signal fournit un signal d'erreur qu'on peut envoyer sur les cales piézo-électriques du laser pour modifier les fluctuations rapides (petite cale,  $\text{PZ}_2$ ) et les fluctuations plus lentes (grosse cale,  $\text{PZ}_1$ ). Un circuit intégrateur fournit le signal de correction à basse fréquence qui est envoyé sur  $\text{PZ}_2$ , on règle son gain pour faire osciller le signal sans qu'il ne sature. Un circuit dérivateur fournit le signal de correction à haute-fréquence qui est envoyé sur  $\text{PZ}_1$ , on fixe son gain juste au dessous du seuil d'oscillation. Cet asservissement permet d'obtenir une largeur en fréquence du laser Titane:Saphir d'environ  $100 \text{ kHz}$ .

Afin d'éliminer les dérives lentes en fréquence, on asservit la cavité Hänsch et Couillaud sur une résonance de la courbe d'absorption saturée du césium. Pour que la fréquence du faisceau produit par le laser Titane:Saphir soit réglable, le faisceau utilisé pour réaliser l'absorption saturée traverse tout d'abord un modulateur

acousto-optique. En effet, on veut asservir le laser à une fréquence où on ne dispose pas nécessairement d'une raie d'absorption saturée. Le modulateur acousto-optique change la fréquence du laser qui passe dans la cellule d'absorption saturée ce qui revient à créer un pic d'absorption saturée à une fréquence choisie. De plus, à la porteuse du modulateur acousto-optique, on ajoute un signal à  $1\text{ kHz}$  qui permet de faire une détection synchrone du faisceau ayant traversé la cellule de césium. Le signal obtenu lorsqu'on balaye la fréquence du modulateur acousto-optique présente une série de pics de dispersion superposés au fond Doppler. On peut alors aisément asservir la cavité sur un des pics de dispersion. En pratique, on choisit le croisement  $6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F = 3 / 6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F = 5$  qui est décalé de  $225\text{ MHz}$  dans le rouge de la transition  $6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F = 5$ . Le modulateur acousto-optique est alors piloté à une fréquence de  $175\text{ MHz}$  ce qui permet d'obtenir une fréquence pour le laser Titane:Saphir décalée de  $50\text{ MHz}$  ( $= -225 + 175$ ) dans le rouge de la transition  $6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F = 5$ . Cette fréquence est celle que nous souhaitons pour le laser sonde (voir 5.2.1.1).

### 3.3 Le piège magnéto-optique

#### 3.3.1 Principe

Le piège magnéto-optique, développé dans les années 80, est maintenant assez répandu dans les laboratoires de physique atomique. Il permet d'obtenir des densités relativement importantes d'atomes à des températures comprises entre quelques dizaines de  $\mu K$  et quelques  $mK$ . Ce piège combine les effets de deux éléments : les faisceaux lasers de ralentissement et une paire de bobines qui créent un champ magnétique inhomogène qui permettent le piégeage.

Les faisceaux lasers sont composés de trois paires de faisceaux contrapropagatifs selon les trois directions de l'espace. Ces six faisceaux sont polarisés circulairement et ont la même fréquence. Lorsqu'un atome subit un grand nombre de cycles de fluorescence en absorbant des photons d'un faisceau dans une direction donnée et en émettant des photons dans des directions aléatoires par émission spontanée, il subit une force moyenne dans la direction de propagation du faisceau laser : à chaque absorption de photon, son impulsion est modifiée de  $\hbar\vec{k}$  où  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde du faisceau laser alors que l'émission spontanée modifie de façon aléatoire l'impulsion de l'atome ce qui revient à une force moyenne nulle si on considère un grand nombre de cycles de fluorescence. De plus, un atome qui se déplace dans une direction donnée voit sa fréquence modifiée par effet Doppler. Pour un faisceau laser décalé dans le rouge de la transition, l'atome absorbe de manière préférentielle les photons du faisceau qui s'oppose à son mouvement. Ainsi, les trois paires de faisceaux pièges exercent des forces de friction sur les atomes ce qui réduit leur vitesse. En réduisant la vitesse moyenne des atomes, on diminue leur température. Les atomes ainsi refroidis forment une "mélasse optique" [Chu 85].

La paire de bobines est en configuration anti-Helmholtz : le champ magnétique créé au centre du montage est nul et très inhomogène dans la région centrale. Les sous-niveaux Zeeman sont donc déplacés autour du centre du piège. La force de pression de radiation, qui est sensible à l'écart du laser à la résonance atomique dépend maintenant de la distance par rapport au point de champ magnétique nul. Si les polarisations des faisceaux de piégeage sont bien choisies, la pression de radiation acquiert une géométrie qui lui fait de plus jouer le rôle d'une force de rappel [Raab 87]. La relative simplicité expérimentale du piège magnéto-optique explique bien son succès.

D'autres types de piège sont également envisageables : ils permettent en particulier d'avoir des températures plus basses qui ne sont plus limitées par le recul (dans le piège magnéto-optique, la quantité de mouvement la plus basse envisageable correspond à la quantité de mouvement d'un photon). Ces techniques sont souvent plus complexes à mettre en oeuvre et ne sont pas nécessaires dans notre cas où la température nécessaire doit être telle que la largeur Doppler soit inférieure à la largeur naturelle du niveau excité.

### 3.3.2 Mise en oeuvre expérimentale

Ce type de piège est bien adapté à notre expérience. D'une part, les températures obtenues sont suffisamment faibles pour éliminer l'effet Doppler. D'autre part, on peut obtenir un nombre d'atomes assez grand pour avoir une non-linéarité suffisante et observer de la bistabilité optique.

Notre piège magnéto-optique est obtenu dans une cellule dont le vide est très poussé (inférieur à  $10^{-9}$  Torr) et où le césium est introduit par une vanne qui la met en communication avec un réservoir. Nous utilisons deux modulateurs acousto-optiques pour changer la fréquence du laser et l'amener à une fréquence adaptée au piégeage. Nous avons découvert ([Lambrecht 95] p. 65) que les modulateurs acousto-optiques introduisaient du bruit technique. On ne peut donc pas utiliser de modulateur acousto-optique sur le faisceau sonde qui doit être au bruit quantique standard. En conséquence, le laser Titane:Saphir doit émettre un faisceau laser à la fréquence de la sonde (typiquement 50 MHz dans le rouge de la transition  $6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F = 5$ ). Les faisceaux nécessaires au piégeage sont, eux, décalés dans le rouge de la transition d'environ 10 MHz, donc d'environ 40 MHz par rapport à la fréquence du laser.

A mon arrivée au laboratoire, le décalage en fréquence, nécessaire pour amener la fréquence du laser à la fréquence adaptée au piégeage, était effectué en utilisant deux modulateurs acousto-optiques en simple passage : le premier modulateur décalait la fréquence de +105 MHz et le second de -65 MHz. Il y avait plusieurs inconvénients à ce montage : tout d'abord, les modulateurs avaient comme fréquence centrale 80 MHz, ils étaient donc utilisés loin de cette fréquence ce qui nuisait grandement à leur efficacité. De plus, dans un modulateur acousto-optique, l'angle dont est dévié le faisceau diffracté par rapport au faisceau incident dépend de la fréquence de modulation. Ceci est gênant si on souhaite pouvoir modifier la fréquence des faisceaux pièges sans modifier la position du piège. Nous avons donc choisi d'utiliser un modulateur en double-passage.

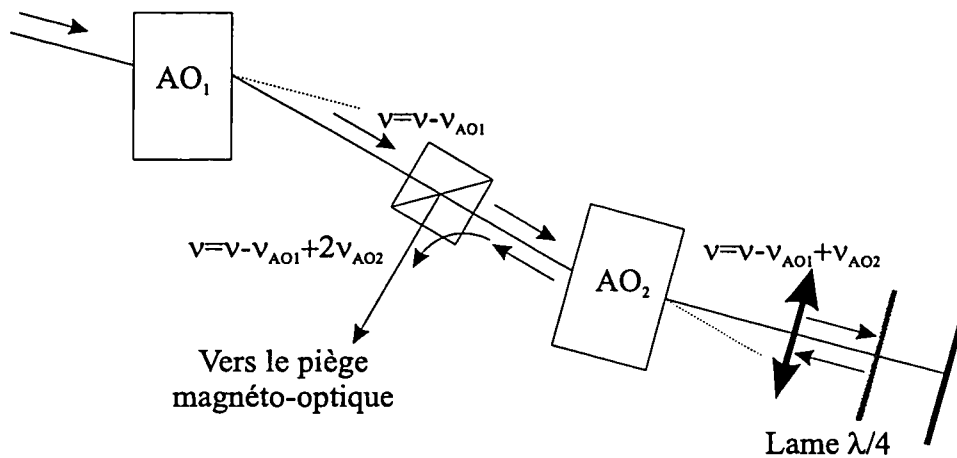


Fig. 12: Montage des modulateurs acousto-optique pour obtenir les faisceaux pièges. Les faisceaux en plein sont ceux qui sont conservés, les faisceaux en tiretés sont bloqués

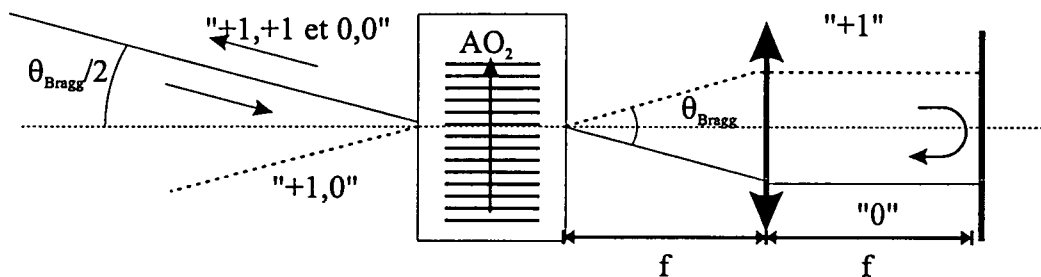


Fig. 13: Montage d'un modulateur en "oeil de chat". Le faisceau plein est l'ordre 0, le faisceau en tireté l'ordre -1.

Nous ne disposons pas de modulateur à  $20\text{ MHz}$  (ces modulateurs sont très difficiles à obtenir commercialement et n'ont pas une bonne efficacité). Nous utilisons donc deux modulateurs en série, l'un d'eux étant monté en double passage. Le montage est représenté sur la figure 12.

Le premier modulateur ( $AO_1$ ) est utilisé dans l'ordre  $-1$  et décale la fréquence de  $-110\text{ MHz}$ . Le second modulateur ( $AO_2$ ) est utilisé dans l'ordre  $+1$  et décale une première fois la fréquence d'environ  $75\text{ MHz}$  puis une seconde fois après réflexion du faisceau par un miroir. Ce second modulateur est monté en "œil de chat" (voir figure 13).

Dans ce type de montage, on place après le modulateur une lentille de focale  $f$  dont le foyer est centré au milieu du modulateur. Les faisceaux incident et diffracté sont renvoyés sur eux-mêmes avec un miroir plan. Le faisceau d'ordre  $+1$  est à nouveau diffracté par le modulateur. Le faisceau  $+1,+1$ , c'est à dire le faisceau diffracté à l'aller et au retour dans l'ordre  $+1$  est superposé au faisceau incident. On vérifie ce point en éteignant le modulateur : le faisceau  $+1,+1$  obtenu lorsque le modulateur fonctionne

doit être superposé au faisceau réfléchi dans le cas où le modulateur est éteint. Une fois ce réglage effectué, on bloque l'ordre 0 entre la lentille et le miroir.

Avec une lame quart d'onde et un cube polariseur, on réalise un circulateur optique. Avant le second modulateur, le faisceau traverse le cube polariseur et est parfaitement transmis : sa polarisation est horizontale. Après la lentille de l'oeil de chat, on dispose une lame quart d'onde : après deux passages dans cette lame, la polarisation est devenue linéaire mais verticale et peut donc être réfléchi par le cube. L'ordre +1,+1 est donc réfléchi par le cube.

Le premier modulateur (A&A) est commandé par un synthétiseur construit au laboratoire qui pilote un amplificateur (A&A AMP.C7). On fait varier la puissance de sortie du synthétiseur mais pas sa fréquence. Au maximum de la puissance on obtient une efficacité de diffraction dans l'ordre -1 d'environ 80%. Le second modulateur (Crystal Technology 3080-122) est commandé par un amplificateur (A&A AMP.B7) piloté par un oscillateur contrôlé par une tension (Voltage Controlled Oscillator, VCO en anglais) construit au laboratoire. Ce VCO est piloté par deux tensions continues dont l'une fixe sa fréquence (que l'on règle) et l'autre sa puissance (qui est laissée fixe). L'efficacité de diffraction pour un simple passage est là aussi de l'ordre de 80%. L'efficacité de l'oeil de chat (mesurée avant et après le cube polariseur) est d'environ 60% compte tenu des pertes aux différentes interfaces. Au total, l'efficacité pour l'ensemble du système de décalage en fréquence est d'environ 40%. Cela permet de disposer d'environ 300  $mW$  pour piéger les atomes c'est à dire environ 10  $mW/cm^2$  pour chaque faisceau.

Avec des faisceaux pièges intenses, on obtient aisément  $10^8$  atomes dans un piège de 0,5  $cm$  de diamètre. Pour évaluer la température des atomes dans le piège, nous utilisons une méthode indirecte, décrite dans la thèse d'Astrid Lambrecht [Lambrecht 95]. En effet, étant donné la configuration de la cellule, il est difficile d'utiliser les techniques habituelles de temps de vol ou de mesure par effet Raman. Cette méthode repose sur l'explosion balistique du nuage et la modification de la non-linéarité qu'elle entraîne. Il est possible de relier le nombre d'atomes à la non linéarité. Un modèle simple de l'explosion balistique du nuage permet de relier l'évolution du nombre d'atomes à la température initiale de celui-ci [Lambrecht 96b]. Une mesure de la non-linéarité permet donc de remonter à la température. On obtient une température du nuage de quelques  $mK$ .

## 3.4 La cavité d'interaction

### 3.4.1 Montage expérimental

La cavité d'interaction est une cavité linéaire avec une configuration semi-confocale d'une longueur de 25  $cm$  et comprenant un miroir de couplage fixe plan et un miroir de haute réflectivité placé sur une cale piézo-électrique (figure 14). Les miroirs sont

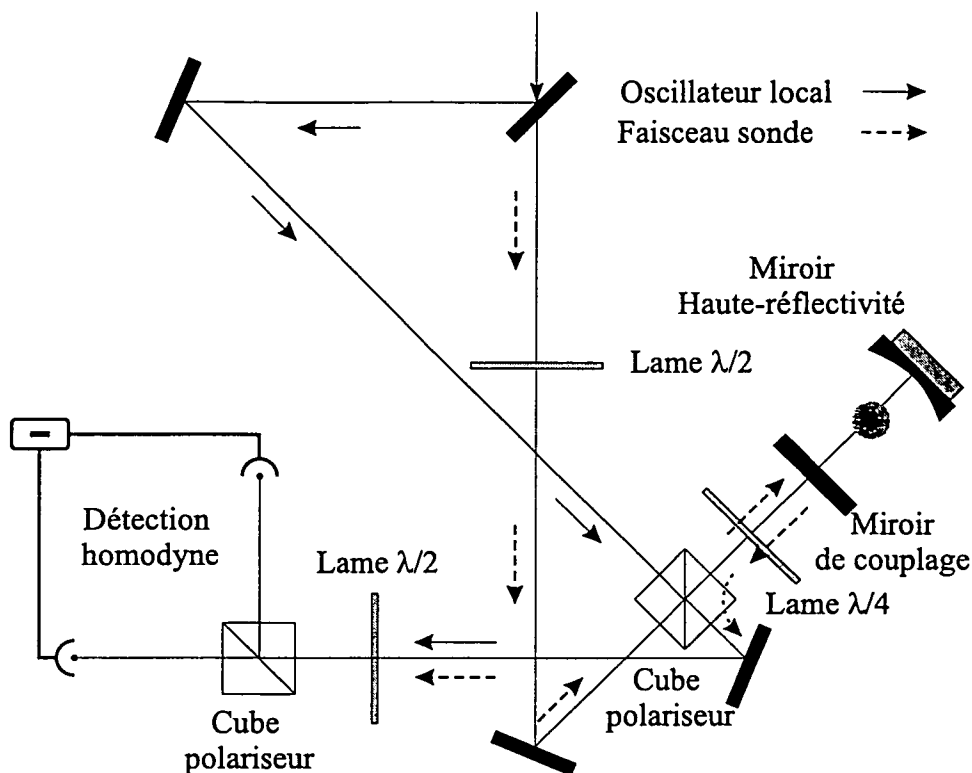


Fig. 14: Schéma de la cavité d'interaction et de la détection homodyne

situés de part et d'autre de la cellule dans laquelle est réalisé le piège magnéto-optique. Cette cavité est située dans un plan horizontal à  $45^\circ$  des faisceaux pièges.

Grâce à des fenêtres prismatiques traitées anti-reflets, on arrive à limiter les pertes intra-cavité à moins de 1%. Il est à noter que ce revêtement ne semble pas s'être altéré avec le temps : les valeurs fournies par le constructeur et celles mesurées au cours du temps sont en très bon accord. Cela est probablement dû au fait que les fenêtres sont situées loin du nuage puisqu'elles sont à environ 5 cm du centre de la cellule. Le miroir de couplage a un coefficient de réflexion de 0,9 (en intensité) et est plan tandis que le miroir du fond de la cavité a une réflectivité de 0,998 (données du fabricant) et un rayon de courbure de 500 mm. Cela nous permet d'obtenir une finesse de la cavité de 60. Le col (*waist*) de la cavité est situé sur le miroir de couplage et a un diamètre de 260  $\mu\text{m}$ .

Afin de réaliser l'accord entre le mode du laser et celui de la cavité, on utilise deux lentilles de focales 300 mm et 400 mm situées respectivement à 55 cm et 100 cm du miroir de couplage. En mesurant le signal transmis derrière la cavité, on peut déterminer l'adaptation de modes, rapport entre le mode principal et tous les modes transverses : elle est d'environ 96%.

On règle la puissance incidente sur la cavité à l'aide d'une lame demi-onde et d'un cube polariseur. La polarisation transmise par le cube est horizontale. Elle est transformée en une polarisation circulaire par la traversée d'une lame quart d'onde.

La polarisation du faisceau réfléchi par la cavité est circulaire puis transformée en une polarisation linéaire verticale par la lame quart d'onde. Le faisceau réfléchi par la cavité est donc réfléchi par le cube polariseur. Il est mélangé au niveau de ce cube avec un autre faisceau plus intense qui est utilisé comme oscillateur local pour la détection homodyne.

### 3.5 La détection homodyne

Le schéma expérimental de la détection homodyne est celui de la figure 14. Le faisceau sonde, sortant de la cavité après avoir interagi avec les atomes, est mélangé avec l'oscillateur local sur le premier cube. A ce niveau, les polarisations des deux faisceaux sont orthogonales, celle du faisceau sonde étant verticale et celle de l'oscillateur local horizontale. Grâce à une lame demi-onde, on fait tourner les deux polarisations de  $45^\circ$  de manière à ce qu'elles fassent un angle de  $45^\circ$  avec les axes du second cube polariseur. Les champs transmis et réfléchis par ce second cube sont des superpositions du champ sonde et de l'oscillateur local et peuvent donc interférer. On détecte ces interférences sur des photodiodes de haute efficacité quantique.

#### 3.5.1 Principe de la détection homodyne

Cette méthode de mesure est basée sur une interférence entre un faisceau signal faible et un faisceau beaucoup plus intense, l'oscillateur local.

Considérons l'interférence entre un petit signal,  $E_S$ , et un signal beaucoup plus intense,  $E_{OL}$ . On néglige dans cette partie la structure spatiale des faisceaux. Le signal d'interférence entre les deux signaux est donné par le module carré de la somme des deux amplitudes. Si on détecte ce signal sur une photodiode, on est sensible à l'intensité du signal correspondant et on obtient un photocourant,  $I$  :

$$I = |E_S + E_{OL} e^{i\theta}|^2 = I_S + I_{OL} + 2E_S E_{OL} \cos(\theta), \quad (3.1)$$

où  $\theta$  est le déphasage entre les deux ondes et  $I_{OL,S} = |E_{OL,S}|^2$ . Si on prend en compte le fait que l'intensité du faisceau signal est beaucoup plus faible que celle de l'oscillateur local, on voit que le photocourant produit comporte un terme proportionnel à l'amplitude du faisceau signal : le signal recherché sera multiplié par l'oscillateur local et donc amplifié.

#### 3.5.2 Détection des fluctuations quantiques

Nous envisageons maintenant le cas où les champs présentent des fluctuations quantiques. Nous supposons que ces fluctuations sont assez faibles devant les champs

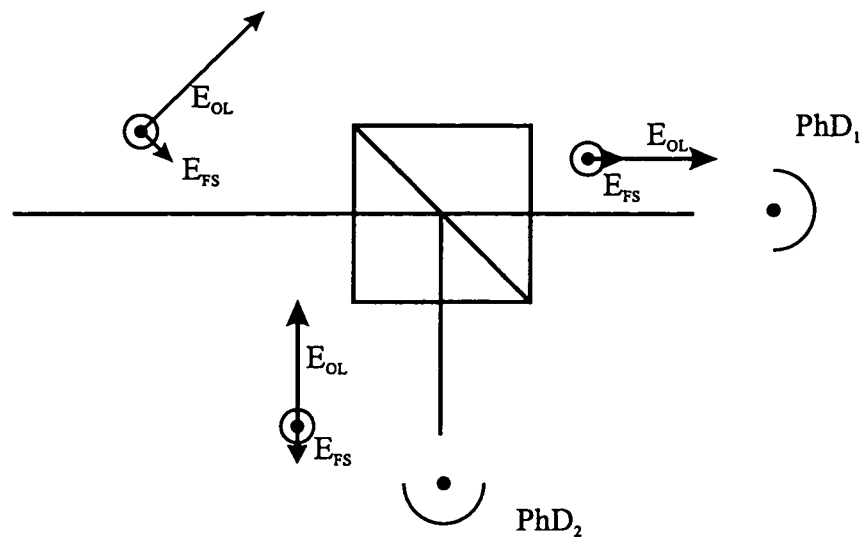


Fig. 15: Schéma de principe de la détection homodyne

moyens pour qu'on puisse linéariser le champ, c'est à dire le décomposer en deux parties, valeur moyenne et fluctuations et traiter ces dernières au premier ordre :

$$\hat{E}_S = \langle \hat{E}_S \rangle + \delta \hat{E}_S \quad (3.2a)$$

$$\hat{E}_{OL} = \langle \hat{E}_{OL} \rangle + \delta \hat{E}_{OL} \quad (3.2b)$$

Par ailleurs, on introduit un déphasage  $\theta$  entre l'oscillateur local et le signal :

$$\hat{E}_{OL} = \langle \hat{E}_{OL} \rangle + \delta \hat{E}_{OL} \quad (3.3a)$$

$$\hat{E}_S = \left( \langle \hat{E}_S \rangle + \delta \hat{E}_S \right) e^{i\theta} \quad (3.3b)$$

Dans les équations 3.3, on considère que toutes les valeurs moyennes sont réelles et que seules les fluctuations quantiques ont une partie imaginaire non nulle.

Afin de détecter les fluctuations quantiques, on mélange ces deux champs comme indiqué dans le paragraphe 3.5.1 et on détecte les interférences sur chacune des voies de sortie du cube (voir figure 15). Sur la photodiode dans l'axe,  $\text{PhD}_1$ , les deux ondes sont en opposition de phase alors qu'elles sont en phase sur la photodiode à  $90^\circ$ ,  $\text{PhD}_2$ . On a donc :



$$2\hat{I}_1 = \left| \hat{E}_S - \hat{E}_{OL} \right|^2 = I_{OL} + I_S - \left( \hat{E}_{OL}(t) \hat{E}_S^*(t) + \hat{E}_{OL}^*(t) \hat{E}_S(t) \right) \quad (3.4a)$$

$$2\hat{I}_2 = \left| \hat{E}_S + \hat{E}_{OL} \right|^2 = I_{OL} + I_S + \left( \hat{E}_{OL}(t) \hat{E}_S^*(t) + \hat{E}_{OL}^*(t) \hat{E}_S(t) \right) \quad (3.4b)$$

Si on introduit les expressions des champs faisant intervenir les fluctuations quantiques, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\hat{I}_1 &= \left| \langle \hat{E}_{OL} \rangle \right|^2 + \left| \langle \hat{E}_S \rangle \right|^2 - 2 \cos \theta \langle \hat{E}_S \rangle \langle \hat{E}_{OL} \rangle \\ &\quad + \left[ \delta \hat{E}_S + \delta \hat{E}_S^* - \left( \delta \hat{E}_{OL} e^{-i\theta} + \delta \hat{E}_{OL}^* e^{+i\theta} \right) \right] \langle \hat{E}_S \rangle \\ &\quad + \left[ \delta \hat{E}_{OL} + \delta \hat{E}_{OL}^* - \left( \delta \hat{E}_S e^{+i\theta} + \delta \hat{E}_S^* e^{-i\theta} \right) \right] \langle \hat{E}_{OL} \rangle \end{aligned} \quad (3.5a)$$

$$\begin{aligned} 2\hat{I}_2 &= \left| \langle \hat{E}_{OL} \rangle \right|^2 + \left| \langle \hat{E}_S \rangle \right|^2 + 2 \cos \theta \langle \hat{E}_S \rangle \langle \hat{E}_{OL} \rangle \\ &\quad + \left[ \delta \hat{E}_S + \delta \hat{E}_S^* + \delta \hat{E}_{OL} e^{-i\theta} + \delta \hat{E}_{OL}^* e^{+i\theta} \right] \langle \hat{E}_S \rangle \\ &\quad + \left[ \delta \hat{E}_{OL} + \delta \hat{E}_{OL}^* + \delta \hat{E}_S e^{+i\theta} + \delta \hat{E}_S^* e^{-i\theta} \right] \langle \hat{E}_{OL} \rangle \end{aligned} \quad (3.5b)$$

Grâce à des filtres électroniques, il est possible de ne conserver que la partie de fréquence non nulle de ces photocourants. On a alors :

$$\begin{aligned} 2\hat{I}_1 &= \left[ \delta \hat{E}_S + \delta \hat{E}_S^* - \left( \delta \hat{E}_{OL} e^{-i\theta} + \delta \hat{E}_{OL}^* e^{+i\theta} \right) \right] \langle \hat{E}_S \rangle \\ &\quad + \left[ \delta \hat{E}_{OL} + \delta \hat{E}_{OL}^* - \left( \delta \hat{E}_S e^{+i\theta} + \delta \hat{E}_S^* e^{-i\theta} \right) \right] \langle \hat{E}_{OL} \rangle \end{aligned} \quad (3.6a)$$

$$\begin{aligned} 2\hat{I}_2 &= \left[ \delta \hat{E}_S + \delta \hat{E}_S^* + \delta \hat{E}_{OL} e^{-i\theta} + \delta \hat{E}_{OL}^* e^{+i\theta} \right] \langle \hat{E}_S \rangle \\ &\quad + \left[ \delta \hat{E}_{OL} + \delta \hat{E}_{OL}^* + \delta \hat{E}_S e^{+i\theta} + \delta \hat{E}_S^* e^{-i\theta} \right] \langle \hat{E}_{OL} \rangle \end{aligned} \quad (3.6b)$$

Comme on a supposé que l'oscillateur local était beaucoup plus intense que le faisceau signal, on peut négliger les termes de la forme  $\delta \hat{E}_{S,OL} \langle \hat{E}_S \rangle$  devant les termes de la forme  $\delta \hat{E}_{S,OL} \langle \hat{E}_{OL} \rangle$ . Les équations 3.7 deviennent alors :

$$2\hat{I}_1 = -\left(\delta\hat{E}_S e^{+i\theta} + \delta\hat{E}_S^* e^{-i\theta}\right) \langle \hat{E}_{OL} \rangle + \left(\delta\hat{E}_{OL} + \delta\hat{E}_{OL}^*\right) \langle \hat{E}_{OL} \rangle \quad (3.7a)$$

$$2\hat{I}_2 = \left(\delta\hat{E}_S e^{+i\theta} + \delta\hat{E}_S^* e^{-i\theta}\right) \langle \hat{E}_{OL} \rangle + \left(\delta\hat{E}_{OL} + \delta\hat{E}_{OL}^*\right) \langle \hat{E}_{OL} \rangle \quad (3.7b)$$

Si on soustrait les signaux obtenus par les deux photodiodes, on obtient :

$$\hat{I} = \left(\delta\hat{E}_S e^{+i\theta} + \delta\hat{E}_S^* e^{-i\theta}\right) \langle \hat{E}_{OL} \rangle \quad (3.8)$$

$\hat{I}$  peut s'interpréter comme le produit des fluctuations sur la quadrature définie par l'angle  $\theta$  par la valeur moyenne de l'oscillateur local. On voit donc qu'il est possible de détecter les fluctuations quantiques sur une quadrature donnée d'un faisceau grâce à la technique de la détection homodyne.

### 3.5.3 Représentation dans l'espace des phases

On peut donner une interprétation géométrique de la détection homodyne dans l'espace des phases. Le calcul du paragraphe précédent montre que la détection est sensible à la projection des fluctuations du champ signal sur la direction de l'oscillateur local. Sur la figure 16, on a représenté l'ellipse qui correspond aux fluctuations d'un champ comprimé,  $\hat{E}_S$  et la direction de l'oscillateur local,  $\hat{E}_{OL}$ . L'interférence du signal avec l'oscillateur local se traduit par une projection sur la direction de celui-ci. En balayant la phase de l'oscillateur local,  $\phi_{OL}$ , on détecte un signal qui est lié à la quadrature déterminée par  $\phi_{OL}$ .

### 3.5.4 Influence de la dépendance spatiale des modes

Nous considérons dans ce paragraphe que les modes ont une dépendance spatiale. Pour simplifier les notations, nous allons étudier l'effet de cette structure spatiale sur des champs classiques. Les conclusions se transposent ensuite aisément aux cas de champs présentant des fluctuations quantiques. L'expression de l'intensité lumineuse au niveau des détecteurs est maintenant :

$$I = \iint_{\text{Détecteur}} \left| \vec{E}_{OL} + \vec{E}_S \right|^2 d\vec{r} \quad (3.9)$$

avec  $\vec{E}_{OL,S} = \vec{A}_{OL,S}(\vec{r}) B_{OL,S}(t)$  où  $\vec{A}_{OL,S}$  décrit la structure spatiale et  $B_{OL,S}$  décrit la structure temporelle. Dans le cas général,  $\vec{A}_{OL,S}$  comme  $B_{OL,S}$  sont susceptibles d'avoir des fluctuations mais nous ne nous intéressons ici qu'aux fluctuations temporelles (ou de fréquence), c'est à dire aux fluctuations de  $B_{OL,S}$  : on considère qu'on détecte

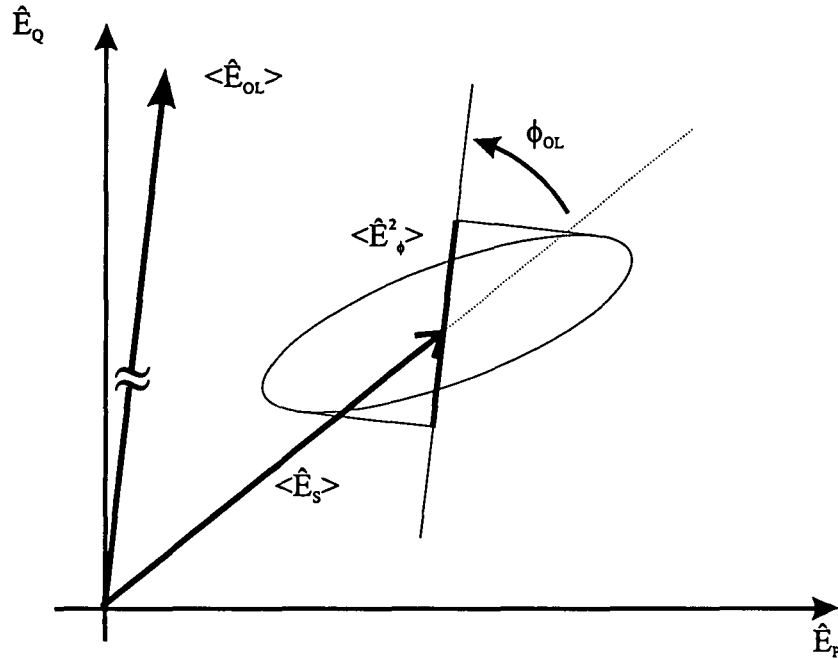


Fig. 16: Représentation de la mesure avec l'analyseur de spectre.

l'intégralité du faisceau. Le signal donné par la photodiode est proportionnel au signal d'interférence entre les deux faisceaux.

On a alors :

$$2I = I_{OL} + I_S + \cos \theta \left[ \left( \iint \vec{A}_{OL}(\vec{r}) \vec{A}_S^*(\vec{r}) dx dy \right) B_{OL}(t) B_S^*(t) + \left( \iint \vec{A}_{OL}^*(\vec{r}) \vec{A}_S(\vec{r}) dx dy \right) B_{OL}^*(t) B_S(t) \right] \quad (3.10)$$

Posons  $\eta = \iint \vec{A}_{OL}(\vec{r}) \vec{A}_S^*(\vec{r}) dx dy$ ,  $\eta$  vaut 0 lorsque les faisceaux ne se recouvrent pas, 1 lorsque le recouvrement est optimal. Puisque  $\vec{A}_{OL}(\vec{r})$  et  $\vec{A}_S(\vec{r})$  sont réels, on a :

$$2I = I_{OL} + I_S + \eta \cos \theta [B_{OL}(t) B_S^*(t) + B_{OL}^*(t) B_S(t)] \quad (3.11)$$

Cette équation est identique à l'équation 3.1 excepté pour le troisième terme qui comprend  $\eta$  en facteur supplémentaire. On voit donc que la conséquence d'un mauvais recouvrement spatial est de diminuer le signal d'interférences. Il est équivalent à des pertes dont on sait qu'elles sont néfastes à la réduction du bruit quantique.

Il est donc très important d'obtenir un bon recouvrement spatial pour optimiser le rendement quantique de la détection.

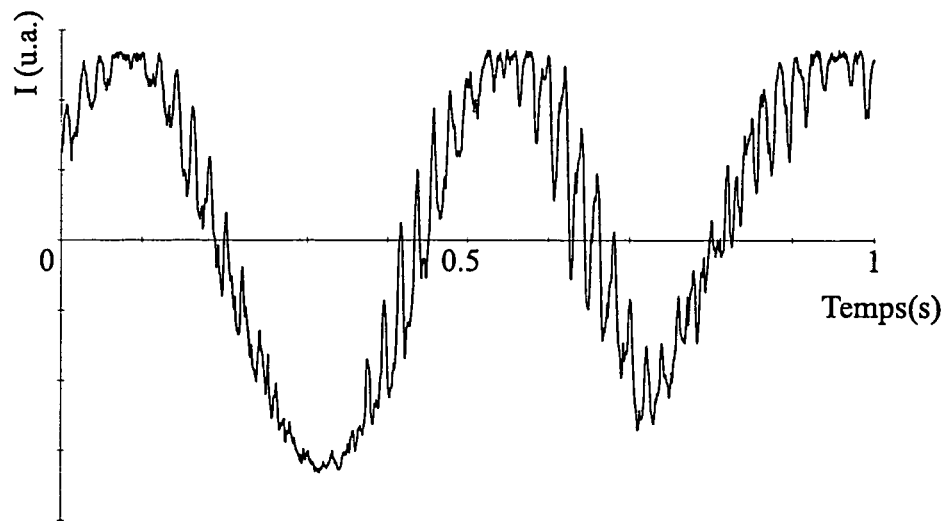


Fig. 17: Interférences entre l'oscillateur local et la sonde mettant en évidence l'importance des vibrations

## 3.6 Améliorations du montage

### 3.6.1 Amélioration du montage de la cavité d'interaction

Afin de mesurer la fonction de Wigner et de vérifier les modèles théoriques, il est indispensable d'obtenir une réduction de bruit stable sur plusieurs secondes. Lorsque je suis arrivé au laboratoire, on coupait les faisceaux pièges pendant la mesure de bruit ce qui ne laissait que quelques *ms* pour l'observation d'une réduction de bruit. La première solution pour augmenter cette durée est de laisser les faisceaux pièges en fonctionnement durant la mesure de bruit. Cependant, si on cherche à balayer très lentement la phase de l'oscillateur local, on observe un brouillage des franges qui correspond à des variations de phase plus rapides que le balayage dû à la céramique piézoélectrique (figure 17). Cet effet perturbe la mesure de la réduction du bruit et de l'éventuelle compression des fluctuations quantiques.

Ce brouillage des franges provient de vibrations qui déplacent les différents miroirs de notre montage interférométrique. La cavité d'interaction est très sensible à ces vibrations. En effet, cette cavité est relativement longue puisque les miroirs sont situés de part et d'autre de la cellule ultra-vide en acier inoxydable dans laquelle est formé le piège magnéto-optique. Le montage mécanique de la cavité est relié à un ensemble qui est soumis à des vibrations mécaniques et acoustiques. Les vibrations qui apparaissent sont à une fréquence de l'ordre de  $40\text{ Hz}$ . Afin de rechercher l'origine de ces vibrations, nous avons commencé par rigidifier le montage des miroirs de renvoi de l'oscillateur local. Ceci n'a pas amélioré de façon significative la stabilité. Nous avons alors remplacé la cavité par un miroir unique en enlevant le miroir arrière et en plaçant un miroir sur une monture Micro Contrôle derrière le cube séparateur de polarisation (au lieu du miroir d'entrée). Dans ce cas, les vibrations étaient nettement réduites. Cela

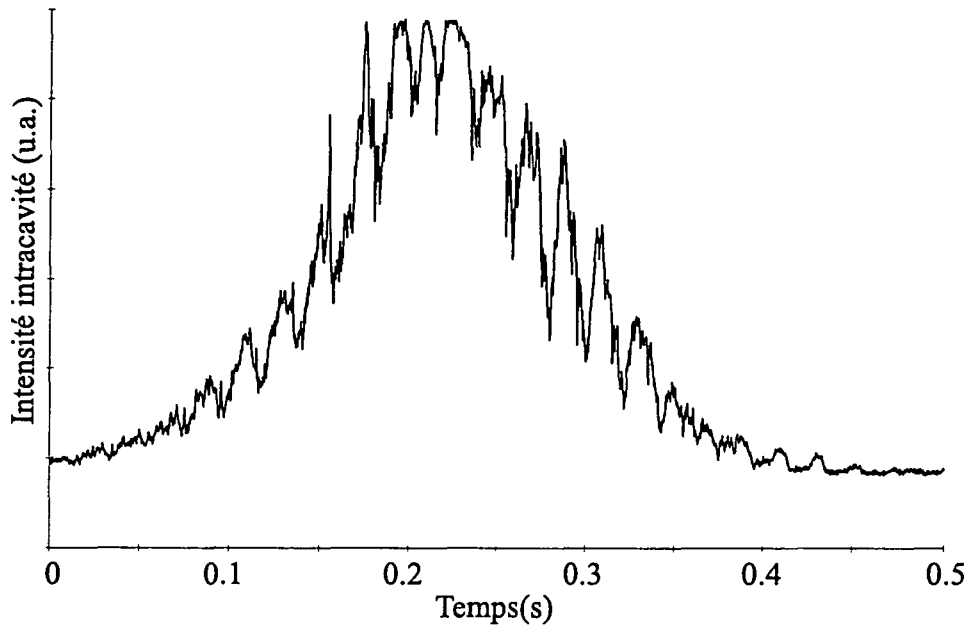


Fig. 18: Intensité intracavité présentant des vibrations.

nous a montré que c'était principalement la cavité qui était en cause. Les vibrations apparaissent lorsqu'on balaye lentement la cavité : elles sont dues à des variations de longueur (figure 18). On peut affirmer que ces vibrations ne sont pas dues à des variations d'indice car si on protège cette partie de l'expérience avec un tissu destiné à éviter les variations de pression rapides (qui pourraient être à l'origine des vibrations), on n'observe pas de modifications sensibles des vibrations parasites.

Comment diminuer ces vibrations? Nous avons tout d'abord remplacé les supports originaux fabriqués au laboratoire par des supports Micro Contrôle et rigidifié la cavité en ajoutant des montants transversaux entre les supports. Cela a nettement amélioré la situation mais n'était pas encore suffisant. La source principale des vibrations sur notre table est le laser à Argon refroidi par une circulation d'eau. Afin d'étudier le comportement des vibrations, nous avons fait passer le faisceau d'une diode laser dans la cavité d'interaction. Cette diode permet d'observer les vibrations avec et sans laser Argon. Il est alors très clair que les vibrations sont principalement dues à celui-ci. La solution préconisée par F. Biraben pour réduire les vibrations se transmettant par la table est de placer le laser Argon sur une dalle de granit elle-même posée sur la table. Nous avons adopté cette solution. Afin d'isoler le laser de la table, nous utilisons un empilement de caoutchouc amortisseur et de plaques de plomb (figure 19).

Cette solution améliore nettement la stabilité du montage. Il reste néanmoins des vibrations à une fréquence proche de 200 Hz. Elles ont pour origine le ventilateur de l'alimentation du laser Argon. En enlevant la grille de ce ventilateur, les vibrations disparaissent presque totalement (figure 20).

Nous pouvons maintenant balayer la phase de l'oscillateur local très lentement : on décrit  $2\pi$  en 1 à 2 secondes (figure 21).

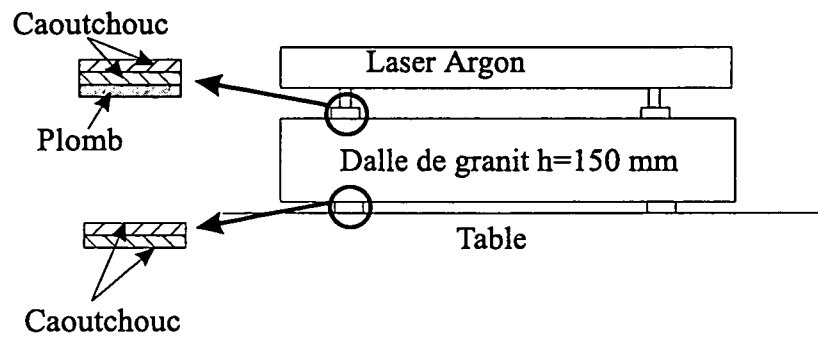


Fig. 19: Schéma de l'isolation du laser Ar\* par rapport à la table

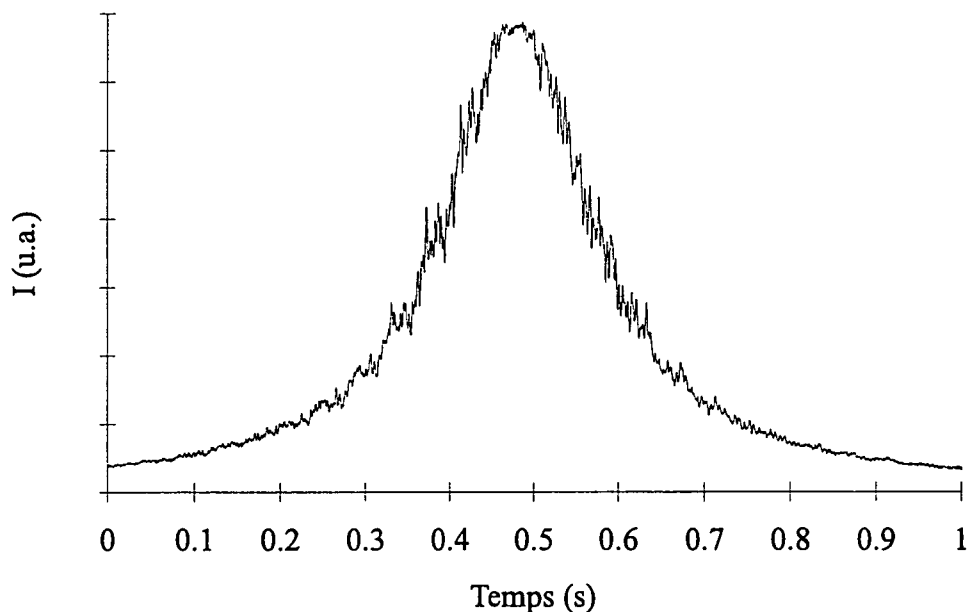


Fig. 20: Balayage de la longueur de la cavité montrant la réduction importante des vibrations.

Le montage final est représenté sur la figure 22. On repère la détection homodyne au premier plan et la cellule de piégeage au second plan.

### 3.6.2 Amélioration de la détection

Les mesures du bruit lumineux peuvent être affectées par le bruit électronique si celui-ci n'est pas nettement inférieur au bruit lumineux. Ce bruit est dû aux circuits comprenant la photodiode et ses amplificateurs. On le mesure en l'absence de lumière. Dans le cas de la mesure de la puissance de bruit à l'aide d'un analyseur de spectre, il est possible de tenir compte du bruit électronique dans le calcul de la réduction de bruit. On utilise une relation de la forme

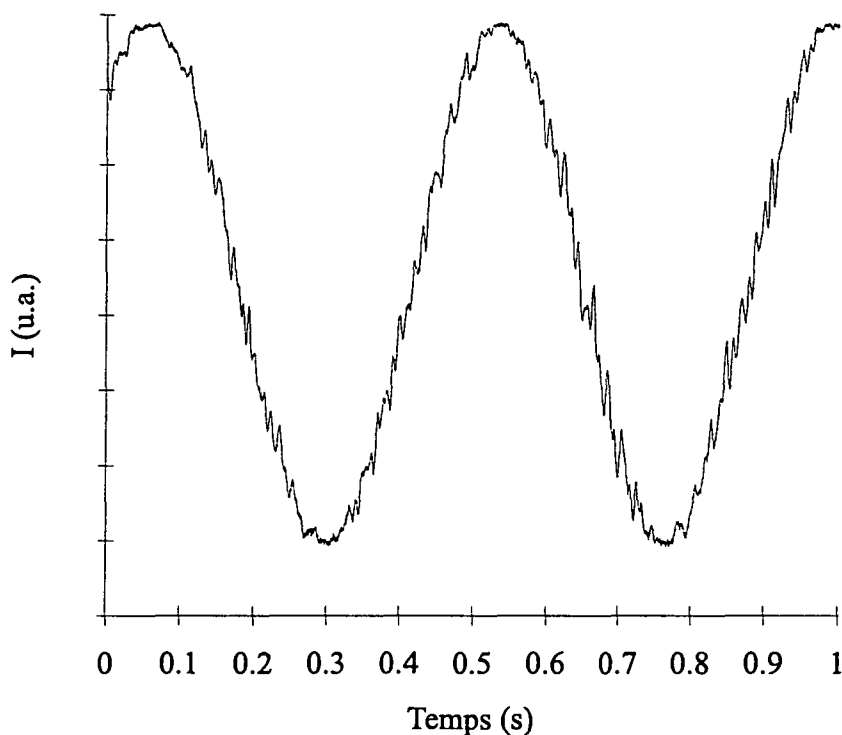


Fig. 21: Interférences entre l'oscillateur local et la sonde avec les vibrations réduites.

$$P(t) = \frac{V_{mes}^2(t) - V_{elec}^2}{V_{shot}^2 - V_{elec}^2} \quad (3.12)$$

pour normaliser le signal par rapport au bruit quantique standard (shot noise). Dans la formule 3.12,  $V_{mes}(t)$  est le signal mesuré qui correspond au bruit du faisceau sonde,  $V_{elec}$  est le bruit électronique mesuré en l'absence des faisceaux oscillateur local et sonde et  $V_{shot}$  est le signal mesuré en absence de faisceau sonde. Cependant, dans les expériences de tomographie quantique, on s'intéresse à la statistique complète et cette normalisation n'est pas possible. En effet, le signal est convolué par le bruit électronique. En théorie, il est relativement aisé de réaliser une déconvolution numériquement. En pratique, il est très complexe de le faire dans des conditions satisfaisantes. La solution généralement adoptée consiste à supposer que toutes les statistiques sont gaussiennes et qu'il suffit de diviser par la variance du bruit électronique pour obtenir le signal original. Cependant pour éviter ces problèmes, nous nous sommes efforcés d'optimiser le schéma de détection pour diminuer le bruit électronique autant que possible. Pour cela, nous avons modifié le schéma utilisé dans les expériences précédentes.

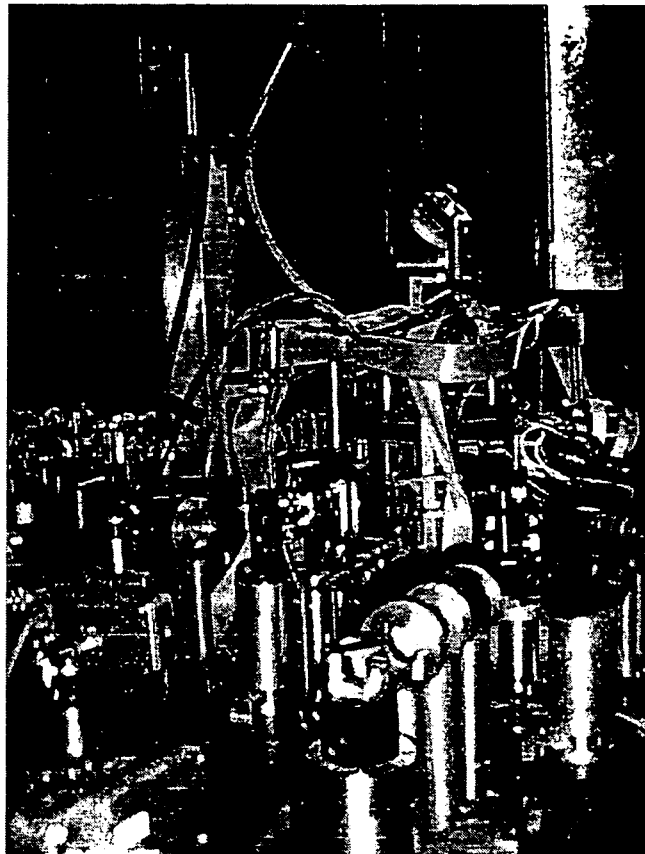


Fig. 22: Photographie du montage de la cavité.

### 3.6.2.1 Mise au point des photodiodes

Les photodiodes EG&G FND 100 que nous utilisons ont une grande efficacité quantique (environ 87 %). Le montage amplificateur a été mis au point au laboratoire par Antoine Heidmann. On sépare en deux voies distinctes les parties basses fréquences (voie "DC", moins de 500  $kHz$ ) et les parties hautes fréquences (voie "AC", au dessus de 2.6  $MHz$ ). L'amplification de la partie haute fréquence du signal se fait à l'aide d'un montage transimpédance et d'un amplificateur large-bande CLC 425. Il est nécessaire de bien équilibrer les voies DC et AC des deux photodiodes.

Nous disposons déjà de deux photodiodes appariées. L'appariement des différentes photodiodes se fait en comparant les photodiodes avec une photodiode de référence. Le montage utilisé est un montage de détection équilibrée similaire à celui de la détection homodyne. On commence avec deux montages électroniques et on fait un équilibrage optique des deux voies de la détection pour une première photodiode en plaçant celle-ci sur les deux montages successivement. On laisse cette photodiode sur un des montages amplificateurs et on mesure le déséquilibre en plaçant successivement les autres photodiodes sur le deuxième montage amplificateur. Cette méthode permet de s'affranchir des fluctuations d'intensité du faisceau. Ensuite, on sélectionne une paire de photodi-



odes qui sont les plus semblables possibles, c'est à dire pour lesquelles le déséquilibre est le plus faible. En pratique, les photodiodes utilisées ont des efficacités qui diffèrent de moins de 1 %.

Ensuite, on monte les deux photodiodes choisies sur deux montages électroniques réalisés au même moment (deux montages réalisés à six mois d'intervalle ont montré des propriétés assez différentes, probablement à cause de disparités entre les composants) et avec des composants aussi semblables que possible (des résistances de précision sont utilisées de préférence). On mesure la puissance d'un même faisceau laser sur la voie DC avec un montage puis avec l'autre, puis on ajuste le potentiomètre qui contrôle le gain de la voie DC d'un des deux montages. On dispose maintenant de deux montages avec des voies DC identiques à environ 1 pour 1000. On utilise un cube séparateur précédé d'une lame demi-onde pour diviser le faisceau en deux parties dont les intensités sont identiques en DC. L'ajustement peut se faire par deux méthodes. On peut utiliser deux voltmètres : l'un sert à détecter la tension en sortie de la voie DC d'un des montages tandis que l'autre mesure l'écart entre les deux photodiodes. En jouant sur la lame demi-onde, on équilibre les intensités sur les photodiodes à environ 0,5 %. On peut aussi utiliser un oscilloscope digital qui calcule la différence des deux voies DC. En comparant cette différence en l'absence ou en présence de lumière, on arrive à un réglage comparable en précision avec celui obtenu avec les deux voltmètres.

Il faut maintenant comparer les deux voies AC en les envoyant sur un amplificateur haute fréquence bas-bruit (Nuclétudes SCD 4 -40-1A) puis sur un analyseur de spectre. On compare les signaux obtenus en "Zéro Span" à 5 MHz (correspondant à la fréquence de mesure habituelle du bruit lumineux) pour chacun des deux montages. En mesurant l'écart entre les valeurs obtenues avec les deux montages, on peut évaluer la modification à introduire sur l'amplification de la partie AC : la partie AC du montage comprend une résistance qui fixe le gain; en rajoutant une résistance en parallèle, on peut modifier le gain et ainsi égaliser les deux voies AC. On obtient un écart inférieur à 0,3 dB (moins de 3 %).

### 3.6.2.2 Réglage du montage de détection homodyne

Comme nous l'avons vu (paragraphe 3.5.4), il est très important d'avoir un bon accord de mode entre l'oscillateur local et la sonde. L'oscillateur local et la sonde sont produits à partir du même faisceau issu du laser Titane:Saphir par séparation à l'aide d'une lame. Pour que leur mode garde la même géométrie, les trajets qu'ils suivent entre le miroir qui les sépare et le cube polariseur qui les recombine doivent avoir la même longueur. Le réglage de la superposition des modes se fait en observant le signal DC d'une des photodiodes tout en balayant la phase de l'oscillateur local à l'aide d'une céramique piézo-électrique. On obtient un battement dont la valeur crête à crête dépend de la superposition entre l'oscillateur local et la sonde. On a :

$$V_{int} = 4\eta\sqrt{V_{OL}V_S} \quad (3.13)$$

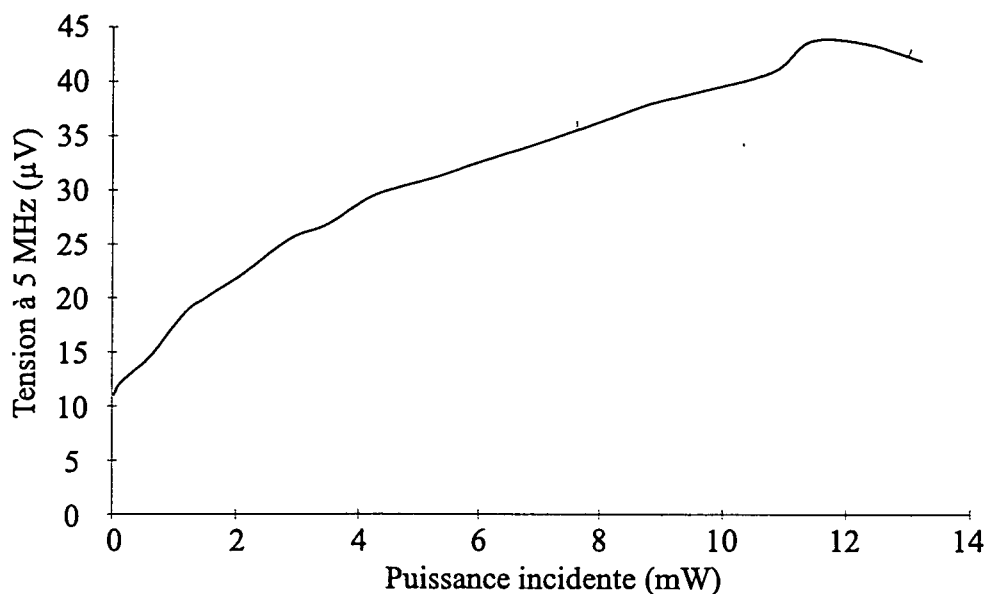


Fig. 23: Variation de la puissance de bruit en fonction de l'intensité incidente.

$V_{int}$  correspond à la valeur crête à crête lue lorsque les deux faisceaux sont présents et interfèrent,  $V_{OL}$  et  $V_S$  sont les tensions continues dues respectivement à l'oscillateur local et à la sonde. Ces trois valeurs sont mesurées sur un oscilloscope numérique (LeCroy 9310) et permettent de calculer  $\eta$ , le recouvrement entre la sonde et l'oscillateur local. On obtient des valeurs supérieures à 98 %.

Il faut apporter un soin particulier au choix de la puissance de l'oscillateur local. En effet, la puissance de l'oscillateur local détermine la puissance du signal AC détecté. Elle doit donc être aussi importante que possible. De plus, pour que le traitement du paragraphe 3.5.1 soit valable, il faut que l'intensité de l'oscillateur local soit nettement supérieure à celle de la sonde. Cependant, il ne faut pas saturer les photodiodes. Pour vérifier cela, on trace le diagramme de la tension AC à une fréquence donnée (5 MHz typiquement) en fonction de la puissance de l'oscillateur local (figure 23) en coupant la sonde. Il est indispensable d'étudier la saturation de la composante AC du photocourant car la saturation de la composante DC a lieu pour des valeurs beaucoup plus importantes de la puissance incidente (plus de 20 mW).

On voit que pour les puissances supérieures à 12 mW, il y a saturation de la composante AC du photocourant il faut donc se placer à des puissances inférieures ou égales à cette limite. On choisira une puissance proche de 24 mW (ce qui donne 12 mW sur chaque photodiode). La puissance du faisceau sonde utilisée dans toutes les mesures est inférieure à 10  $\mu W$  (ce qui est suffisant pour obtenir des effets non-linéaires appréciables sur les atomes). On remplit donc bien les conditions imposées au paragraphe 3.5.2.

Par ailleurs, on fait la différences des signaux AC des deux photodiodes avec un composant électronique (Mini-Circuits ZSCJ-2-1). On l'amplifie à l'aide d'un amplifi-

ateur (Nuclétudes SCD 4-40-1A). Ce signal amplifié constitue ce que nous appellerons le signal de détection homodyne dans le reste du manuscrit.

## 4 Etude théorique de la réduction de bruit avec des atomes froids.

### 4.1 Introduction

Depuis plusieurs années, notre équipe s'intéresse à la réduction de bruit quantique à l'aide d'un milieu atomique. De nombreux résultats théoriques et expérimentaux ont été obtenus.

Dans une première approche, on peut considérer que le milieu atomique est simplement composé d'un nombre fixe d'atomes à deux niveaux. On peut alors calculer analytiquement le spectre de bruit d'un faisceau laser ayant interagi avec ces atomes dans une cavité [Hilico 92b]. Cependant, ces hypothèses ne correspondent pas exactement à la réalité et il convient de prendre en compte d'autres effets. Par exemple, dans le cas de l'expérience où les atomes s'échappent après que le piège a été éteint, on peut se demander quelle est l'influence des fluctuations du nombre d'atomes sur la réduction de bruit. Ce calcul a été traité au cours de la thèse d'A. Lambrecht [Lambrecht 95]. Dans les expériences présentées dans ce mémoire, le piège fonctionne de manière continue et les fluctuations du nombre d'atomes se font sur des échelles de temps trop longues pour influencer la statistique du faisceau aux fréquences d'analyse usuelles (plusieurs  $MHz$ ). Par contre, on ne peut plus considérer les atomes comme étant simplement à deux niveaux : en effet, ceux-ci sont constamment soumis aux faisceaux de piégeage et de refroidissement qui induisent des transitions vers d'autres niveaux. Il est donc nécessaire de prendre en compte ces faisceaux supplémentaires dans une structure atomique à plus de deux niveaux. Pour calculer les spectres de bruit, nous utilisons la méthode des forces de Langevin [Cohen-Tannoudji 88]. Cette méthode est appliquée de manière courante dans les calculs d'optique quantique [Gardiner 91], [Davidovich 96]. Elle a en particulier été appliquée au cas des mesures quantiques non-destructrices dans un milieu atomique à trois niveaux [Sinatra 97] où les résultats obtenus sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux [Sinatra 98].

## 4.2 Méthode des forces de Langevin

Nous présentons dans ce paragraphe la méthode des forces de Langevin. Ces forces permettent de tenir compte des fluctuations aléatoires introduites dans un système donné par le couplage avec un autre système comprenant un grand nombre de degrés de libertés. Nous rappellerons tout d'abord les propriétés générales des forces de Langevin. Nous montrerons ensuite que la méthode des forces de Langevin permet d'étudier l'interaction entre un (ou plusieurs) faisceaux laser et un milieu non-linéaire placé dans une cavité et ainsi de calculer les densités spectrales de bruit du faisceau réfléchi par la cavité en fonction des densités spectrales de bruit du faisceau incident.

### 4.2.1 Evolution d'un système en interaction avec un réservoir

On cherche à étudier un système en interaction avec un grand nombre de petits systèmes. Ce cas est par exemple celui du mouvement brownien. Une grosse particule est plongée dans un fluide homogène de particules légères. La particule lourde subit des collisions aléatoires avec les particules du fluide. Deux méthodes sont possibles pour étudier ce type de système.

La méthode des forces de Langevin modélise l'effet des petites particules par une force aléatoire de moyenne nulle,  $F(t)$ . Ainsi, le mouvement de la particule est donné par une équation de Langevin :

$$\dot{p} = -\gamma p + F(t) \quad (4.1)$$

où le terme  $-\gamma p$  désigne l'amortissement dû aux collisions.  $F$  est une force de valeur moyenne nulle et vérifie l'approximation de Markov :

$$\langle F(t) F(t') \rangle = 2\mathcal{D} g(t - t') \quad (4.2)$$

où  $g(t - t')$  est une fonction de largeur  $\tau_c$  telle que  $\tau_c \ll \gamma^{-1}$ . Le terme  $F$  est dit force de Langevin.

Dans le cas de l'équation de Langevin, on peut montrer que le système évolue vers une situation où  $\langle p \rangle = 0$  et où  $\langle p^2 \rangle = \frac{\mathcal{D}}{\gamma}$ , ce qui explique que  $\mathcal{D}$  soit appelé coefficient de diffusion :  $\mathcal{D}$  caractérise la largeur en impulsion à l'équilibre. Si le fluide est en équilibre thermodynamique, on peut montrer que  $\mathcal{D}$  et  $\gamma$  sont reliés par :

$$\mathcal{D} = M k_B T \gamma \quad (4.3)$$

On voit ainsi le lien entre les fluctuations caractérisées par  $\mathcal{D}$  et la dissipation caractérisée par  $\gamma$ .

### 4.2.2 Méthodes des forces de Langevin en optique quantique

On va montrer ici que la méthode des forces de Langevin peut être appliquée au calcul des fluctuations d'un faisceau interagissant avec un milieu atomique.

Afin de faire les calculs, plusieurs hypothèses sont nécessaires. On suppose tout d'abord que les valeurs moyennes des différentes variables sont grandes. Cela signifie que les fluctuations sont faibles devant les valeurs moyennes. Les calculs peuvent donc être faits au premier ordre et en linéarisant les variables :

$$O = \langle O \rangle + \delta O \quad (4.4)$$

où  $O$  est une variable quelconque du système.

On suppose par ailleurs que les forces de Langevin qui caractérisent les fluctuations du système, ont des fonctions de corrélation étroites (approximation de mémoire courte ou de Markov).

Le système est composé des différents champs électromagnétiques et des atomes tandis que le réservoir est constitué par les modes du champ. On peut montrer que les équations d'évolution du système sont de la forme [Cohen-Tannoudji 88], [Gardiner 91], [Davidovich 96] :

$$\frac{\partial \hat{O}_i}{\partial t} = D_i \left[ \hat{O}_1(t), \dots, \hat{O}_N(t) \right] + \hat{F}_i(t) \quad (4.5)$$

où  $D_i$  tient compte des interactions entre les différents opérateurs du système et contient aussi les termes correspondants à la relaxation. Les forces de Langevin correspondent aux fluctuations introduites par l'interaction avec le réservoir. Elles ont une valeur moyenne nulle :

$$\langle \hat{F}_i(t) \rangle = 0 \quad (4.6)$$

et leurs fonctions de corrélations sont très étroites (ce qui correspond à l'approximation de Markov). Elles sont donc remplacées par des pics de Dirac :

$$\langle \hat{F}_i^+(t) \hat{F}_j(t') \rangle = 2D_{i,j} \delta(t - t') \quad (4.7)$$

Les coefficients de diffusion,  $D_{ij}$ , sont calculés à partir des relations d'Einstein généralisées [Cohen-Tannoudji 88] :

$$2\mathcal{D}_{ij} = -\langle \hat{D}_i \hat{O}_j \rangle - \langle \hat{O}_i \hat{D}_j \rangle + \frac{\partial \langle \hat{O}_i \hat{O}_j \rangle}{\partial t} \quad (4.8)$$

Les équations d'évolution pour les opérateurs ne peuvent pas être résolues telles quelles. Cependant, il est souvent commode de les remplacer par des équations pour des variables complexes (c-nombres). Pour cela, on remplace les opérateurs dans les équations par des nombres complexes. Il est indispensable de choisir un ordre dans les produits d'opérateurs afin d'éviter les ambiguïtés. On utilise alors les relations de commutation pour placer tous les opérateurs dans l'ordre choisi. On peut maintenant remplacer les opérateurs par leurs équivalents complexes.

Pour faire ce passage aux variables complexes, il est nécessaire de modifier les coefficients de diffusion. Pour cela, on revient aux équations d'Einstein généralisées en utilisant uniquement des opérateurs dans l'ordre normal et en remplaçant ceux qui ne sont pas dans cet ordre en utilisant les relations de commutation. Le choix de l'ordre est important pour les variables décrivant le champ. L'ordre habituellement choisi est l'ordre normal qui permet d'éliminer les forces de Langevin associées au champ [Davidovich 96]. En effet, si on considère que le champ entrant est un état cohérent et que le bain thermique pour les photons est à température nulle, c'est à dire qu'il n'y a pas de photons thermiques aux fréquences considérées (ce qui est vrai avec une très bonne approximation pour le visible et le proche infrarouge à  $T=300\text{ K}$ ), on peut montrer que les coefficients de diffusion associés au champ s'annulent. On a maintenant un système d'équations couplées et non-linéaires pour des variables complexes :

$$\frac{\partial O_i}{\partial t} = D_i [O_1(t), \dots, O_N(t)] + F_i(t) \quad (4.9)$$

Ce système peut être linéarisé autour des valeurs stationnaires en écrivant :

$$O_i = \langle O_i \rangle + \delta O_i \quad (4.10)$$

En ne conservant les termes d'ordre inférieur à un, on obtient un système linéaire d'équations couplées. On commence par chercher les solutions stationnaires en l'absence des fluctuations. On prend ensuite la transformée de Fourier des équations 4.9 pour obtenir un système pour les spectres des fluctuations. On peut ensuite résoudre ce système. On trouve le spectre de bruit du champ lumineux en calculant les fonctions d'auto-corrélation et de corrélation croisées du champ :

$$\langle \delta A(\Omega) \delta A(\Omega') \rangle = S_{AA}(\Omega) \delta(\Omega + \Omega') \quad (4.11a)$$

$$\langle \delta A(\Omega) \delta A^*(-\Omega') \rangle = S_{AA^*}(\Omega) \delta(\Omega + \Omega') \quad (4.11b)$$

On peut alors calculer le spectre de bruit dans une quadrature  $\theta$  donnée :

$$S_\theta(\Omega) = e^{-2i\theta} S_{AA}(\Omega) + e^{2i\theta} S_{AA^*}(\Omega) + S_{AA^*}(\Omega) + S_{AA^*}(-\Omega) \quad (4.12)$$

La réduction de bruit optimale intervient pour une quadrature  $\theta_{opt}$  telle que :

$$e^{2i\theta_{opt}} = -\frac{S_{AA}(\Omega)}{|S_{AA}(\Omega)|}, \quad (4.13)$$

ce qui conduit à :

$$S_{opt}(\Omega) = S_{AA^*}(\Omega) + S_{AA^*}(-\Omega) - 2 |S_{AA}(\Omega)|. \quad (4.14)$$

Cette méthode permet donc de calculer l'expression des spectres des fluctuations à l'intérieur de la cavité. On peut relier ces fluctuations à l'intérieur de la cavité aux fluctuations mesurées par la détection homodyne :

$$V_\theta(\Omega) = 1 + 2\kappa S_\theta(\Omega). \quad (4.15)$$

où  $V_\theta(\Omega)$  est le signal mesuré par la détection homodyne et  $\kappa$  correspond à la bande passante de la cavité.

## 4.3 Calcul des spectres de bruit

### 4.3.1 Présentation du modèle

Notre expérience utilise des atomes de césium soumis à un faisceau sonde, six faisceaux pièges et six faisceaux de repompage. Les faisceaux sont proches de la transition  $6S_{1/2} \rightarrow 6P_{3/2}$ . Ces deux niveaux possèdent une structure hyperfine :  $6S_{1/2} F = 3$  et 4 et  $6P_{3/2} F = 2, 3, 4$  et 5. Les faisceaux pièges et la sonde sont proches de la résonance  $6S_{1/2} F = 4 \rightarrow 6P_{3/2} F = 5$ . Le repompeur est résonant avec la transition  $6S_{1/2} F = 3 \rightarrow 6P_{3/2} F = 4$ . On peut donc se ramener à un schéma à 4 niveaux contenant les niveaux  $6S_{1/2} F = 3$  et 4 et  $6P_{3/2} F = 4$  et 5 (voir figure 24)



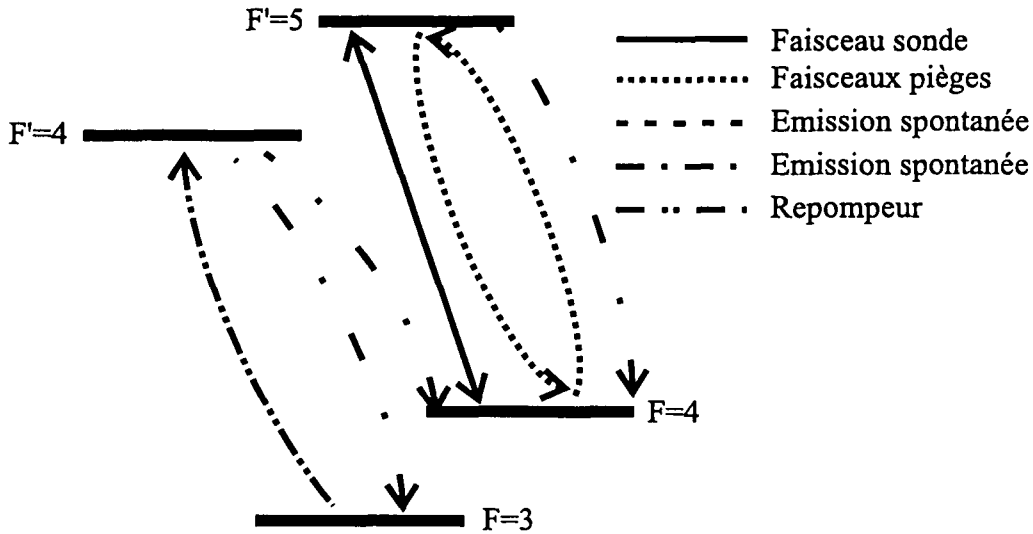


Fig. 24: Schéma atomique à 4 niveaux avec les interactions avec les faisceaux sonde, piège et repompeur.

Si on cherche à faire une étude analytique, il faut prendre en compte tous les niveaux et tous leurs sous-niveaux Zeeman. Cela correspond à 36 niveaux. Par ailleurs, l'évolution des champs est donnée par 26 équations (13 champs et leur complexes conjugués). On a déjà 62 équations sans prendre en compte les cohérences entre les niveaux! Il est difficilement envisageable de calculer complètement les fluctuations quantiques dans ce type de système. Nous ferons donc des approximations pour le simplifier. Le niveau  $6P_{3/2}F = 4$  est peuplé par l'excitation résonante de la diode de repompage et par l'excitation hors résonance de la sonde et des faisceaux pièges. Ces excitations sont faibles comparées aux autres, on peut donc admettre que la population du niveau considéré est négligeable. On se ramène ainsi à un système à trois niveaux : un niveau excité et deux niveaux fondamentaux (voir figure 25).

Dans ce système à trois niveaux, l'effet du repompeur (transition  $6S_{1/2}F = 3 \rightarrow 6P_{3/2}F = 4$  suivi d'émission spontanée vers  $6S_{1/2}F = 4$ ) est modélisé par un transfert incohérent de population entre le niveau (b) et le niveau (c). L'effet parasite des faisceaux pièges, provoquant des transitions  $6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F = 4$  suivies d'émission spontanée vers le niveau  $6S_{1/2}F = 3$ , est modélisé par un transfert incohérent entre le niveau (b) et le niveau (c). Par ailleurs, l'effet des faisceaux pièges sur la transition  $6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F = 5$  est modélisé comme un transfert incohérent de population entre le niveau (a) et le niveau (b) : cette approximation revient à négliger l'effet des faisceaux pièges sur la cohérence. Elle est couramment admise dans les calculs faisant intervenir des atomes dans un piège magnéto-optique [Cohen-Tannoudji 90]. Elle est d'autant plus justifiée que, dans notre cas, l'intensité des faisceaux pièges est très inférieure à celle de la sonde. En effet, la puissance totale des faisceaux pièges est inférieure à  $2 \text{ mW}$  pour des faisceaux de diamètre  $1.5 \text{ cm}$  : cela correspond approximativement à une intensité de  $0.4 \text{ mW/cm}^2$ . Par contre, la sonde a une puissance

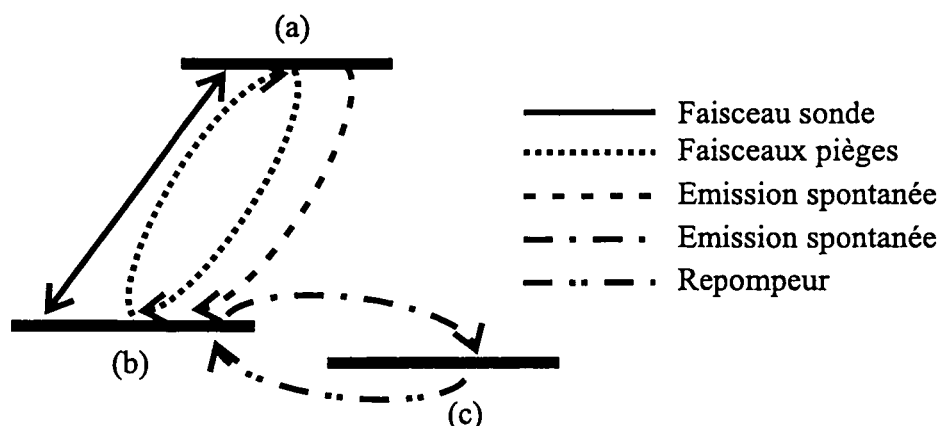


Fig. 25: Schéma des niveaux et des interactions prises en compte dans le modèle.

d'environ  $10 \mu W$  focalisée sur une tâche de  $260 \mu m$  : cela correspond approximativement à une intensité de  $5 mW/cm^2$  soit près de  $300 mW/cm^2$  si on tient compte de l'effet de recyclage dû à la cavité. Par contre, la sonde intervient explicitement dans les équations.. On ne conserve que la cohérence entre le niveau (a) et le niveau (b). On a donc un système qui contient deux équations pour le champ, deux équations pour la cohérence et trois équations pour les populations.

#### 4.3.2 Article "A three level approach to squeezing with cold atoms"

Cet article a été accepté dans Physical Review A. Il détaille le calcul des spectres de bruit en utilisant la méthode des forces de Langevin appliquée au modèle décrit dans le paragraphe précédent.

## Three level approach to squeezing with cold atoms

A. Z. Khoury\*, T. Coudreau, C. Fabre and E. Giacobino

*Laboratoire Kastler Brossel, UPMC, 4 Place Jussieu, Case 74, 75252 Paris Cedex 05, France*

(November 14, 1997)

We report on recent theoretical and experimental developments on the problem of quantum noise reduction in a laser beam interacting with a cloud of cold atoms. We have used a three-level model for the trapped atoms which allows a more realistic treatment of the problem including the effects of the trapping and repumping beams. Moreover, we have observed squeezing under stable conditions and our experimental results are in good agreement with the theoretical model developed.

Pacs numbers: 42.50.-p, 42.55.-f, 32.80.-t

### I. INTRODUCTION

The use of cold atoms as a nonlinear medium for experiments on Quantum Optics has attracted a lot of interest recently. The very low temperatures achieved in a standard magneto-optical trap are specially suitable to the observation of quantum properties of the atom-field interaction. The essential feature associated with the use of cold atoms is related to the fact that the Doppler width of their resonances is smaller than the natural linewidth. The optical nonlinear behavior of a laser beam interacting with a cold atoms cloud inside a Fabry-Perot cavity has been studied, and bistability and instability were observed [1]. In the quantum domain, squeezing of the quadrature fluctuations was demonstrated. An amount of squeezing of 40% was obtained by switching off the trapping beams during the measurement, in order to avoid excess noise [2]. So only transient squeezing was observed during the free fall of the atoms. More recently, steady state squeezing of 50% [3] was observed in a configuration where the interaction of the active atoms with the trapping beams is minimized.

observed in a configuration where the interaction of the active atoms with the trapping beams is minimized.

However, in general, a stable cloud of atoms interacts with several laser beams, including the trapping beams and the repumping beams. For example, as shown in [2], squeezing can be obtained in the presence of attenuated trapping beams. While its magnitude is lower than with freely falling atoms, it has the advantage of being extremely stable. A systematic optimization of this squeezing can only be performed on the basis of a detailed model. It is the aim of this paper to evaluate the noise due to interactions with various laser beams, in order to be able to predict the observable quantum effects.

We have developed a realistic model to account for the effects of the trapping and repumping beams. We have compared the prediction of this model with the experimental noise spectra obtained in various trapping conditions. The agreement between theory and experiment is good and allows us to estimate the specific contributions of the various laser beams.

## II. THREE-LEVEL MODEL

Thanks to recent technological developments many improvements have been achieved in experiments on cavity quantum electrodynamics (cavity QED). Very high finesse ( $\sim 10^5$ ) and small volume optical cavities are now available which allows for the realization of the so-called “strong-coupling regime” of the atom-field interaction. In this regime the atom-field coupling constant  $g$  exceeds the cavity losses and the atomic spontaneous emission. This situation has been explored both experimentally [4] and theoretically [5]. In this case, the atomic external degrees of freedom play an important role in the atom-field interaction. This approach is suitable to the study of the interaction of a single atom with the electromagnetic field [4].

On the other hand, squeezing in a probe laser beam interacting with an ensemble of laser cooled and trapped atoms placed in an optical cavity has been demonstrated both in the

absence and in the presence of the trapping beams [2]. The amount of squeezing obtained is limited by the extra noise added by the trapping mechanism. Since these experiments are performed in the “weak-coupling regime” there are no influences of the atomic external degrees of freedom. However, it is well known that the transitions of atoms between various atomic levels play a central role in the trapping mechanism. In order to develop a realistic model to the problem of squeezing with cold atoms, these effects must be taken into account. A detailed description of the experimental setup will be given in section IV. We have employed *Cs* atoms in a standard magneto-optical trap (MOT). The relevant levels of cesium are shown in Fig.1a. The probe beam as well as the trapping beams are nearly resonant with the  $6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F = 5$  transition.

Although the probe beam is detuned from resonance by about 10 times the natural linewidth of the upper state, whereas the trapping beams are set to 2 or 3 times the linewidth, the effect of the trapping beams on the noise of the probe beam cannot be neglected. Additional fluctuations come from the fact that the atoms are excited by the trapping beams and contribute to the dipole noise and the spontaneous emission noise in the probe laser mode.

A full treatment of the trapping mechanism requires the consideration of the Zeeman sublevels associated with each hyperfine level. This consideration leads to the prediction of optical instabilities observed in a similar experiment [1]. However, our experiments were performed in a different regime where instabilities were not present. Besides, for the level structure shown in Fig.1a, the full consideration of the Zeeman sublevels would require an enormous calculation for the quantum fluctuations. Thus we have developed a simplified treatment. We use a three-level approach to the problem of squeezing with cold atoms as indicated in Fig. 1b. The probe beam is coupled to the  $a \leftrightarrow b$  transition, which is characterized by the energy difference  $E_a - E_b = \hbar\omega_0$ . The effect of the trapping beams is regarded as an incoherent transfer between levels  $a$  and  $b$ . This population transfer is represented by the rate  $R_T$ .  $\Gamma_a$  is the spontaneous decay rate from the excited level  $a$ . This approximation is suitable for low powers of the trapping beams, that is, when saturation

due the trapping beams is negligible.

Moreover, atoms partially pumped to the  $6P_{3/2}F = 4$  level may decay to the  $6S_{1/2}F = 3$  level and escape from the trap. Thus, a repumping laser is employed which is resonant with the  $6S_{1/2}F = 3 \rightarrow 6P_{3/2}F = 4$  transition from which the atoms may decay back to the  $6S_{1/2}F = 4$  level. Since the repumping beam intensity is much lower than the saturation intensity, the population of the  $6P_{3/2}F = 4$  remains small and we may consider the repumping process as an incoherent transfer between the  $6S_{1/2}F = 3$  level and the  $6S_{1/2}F = 4$  level. The population exchange between levels  $b$  and  $c$  will be described by the rates  $\Gamma_b$  and  $R_{rep}$ . As we shall see later this model gives a good prediction for the amount of squeezing obtained in our experiments.

### III. QUANTUM LANGEVIN EQUATIONS

In order to study the quantum fluctuations of the light beam interacting with the atomic system we have used the method of Quantum Langevin Equations [6]. It consists in writing a set of equations of motion for the field and atomic operators, that include Hamiltonian contributions, coming from Heisenberg equation, and also contributions representing dissipations and noise according to the fluctuation-dissipation theorem. In the literature the term Heisenberg-Langevin equations is also frequently used [7]. The quantum Langevin equations are then replaced by a set of equivalent  $c$ -number Langevin equations through the choice of the normal ordering of the atomic and field operators, along the same lines as Refs. [7-9]

Let us consider a system of  $N$  three-level atoms placed in a Fabry-Perot cavity formed by a coupling mirror and a maximum reflection mirror. A probe field  $\alpha_{in}$ , of frequency  $\omega_L$ , is injected in the cavity where it interacts with the atomic system. Since we are dealing with cold atoms Doppler broadening effects can be neglected. In the electric dipole and rotating wave approximation the corresponding Hamiltonian is

$$\begin{aligned}
H = & \hbar\omega_c a^\dagger a + \sum_j (E_a \pi_a^j + E_b \pi_b^j + E_c \pi_c^j) \\
& + \hbar g \sum_j (a^\dagger \sigma_{ab}^j + \sigma_{ab}^{j\dagger} a) \\
& + i\hbar \sqrt{2\kappa/\tau} (\alpha_{in} e^{-i\omega_L t} a^\dagger + \alpha_{in}^* e^{i\omega_L t} a).
\end{aligned} \tag{1}$$

The first two terms in Eq.(1) correspond to the unperturbed Hamiltonian.  $a$  and  $a^\dagger$  are respectively the annihilation and creation operators corresponding to the cavity mode with frequency  $\omega_c$  closest to the probe beam frequency.  $\pi_a^j$ ,  $\pi_b^j$  and  $\pi_c^j$  are the projection operators on the corresponding levels of atom  $j$ . The atomic levels energies are respectively  $E_a$ ,  $E_b$  and  $E_c$ . The third term in the Hamiltonian describes the interaction between the atoms and the cavity mode with coupling constant  $g$ .  $\sigma_{ab}^j \equiv |b\rangle\langle a|^j$  is the polarization operator of atom  $j$  corresponding to the  $a \leftrightarrow b$  coherence. Finally, the fourth term in the Hamiltonian provides the source term in the field equation of motion. The input field  $\alpha_{in}$ , which is assumed to be in a coherent state, is normalized so that  $|\alpha_{in}|^2$  is the number of photons injected in the cavity during the cavity round trip time  $\tau$ .  $\kappa \equiv t_0^2/2\tau$  is the intracavity field decay rate and  $t_0$  is the amplitude transmission coefficient of the coupling mirror.

The Heisenberg-Langevin equations are obtained by adding to the Heisenberg equations of motion the fluctuation-dissipation terms describing the coupling with the field and atomic reservoirs. Taking into account the terms corresponding to the decay processes considered in our model the equations of motion are

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}_a^j &= -\Gamma_a \pi_a^j - R_T(\pi_a^j - \pi_b^j) + ig(\tilde{a}^\dagger \tilde{\sigma}_{ab}^j + \tilde{\sigma}_{ab}^{j\dagger} \tilde{a}) + f_a^j(t) \\
\dot{\pi}_b^j &= -\Gamma_b \pi_b^j + R_T(\pi_a^j - \pi_b^j) + \Gamma_a \pi_a^j + R_{rep} \pi_c^j \\
&\quad - ig(\tilde{a}^\dagger \tilde{\sigma}_{ab}^j + \tilde{\sigma}_{ab}^{j\dagger} \tilde{a}) + f_b^j(t) \\
\dot{\pi}_c^j &= -R_{rep} \pi_c^j + \Gamma_b \pi_b^j + f_c^j(t) \\
\dot{\tilde{\sigma}}_{ab}^j &= -\gamma_{ab}(1 + i\delta) \tilde{\sigma}_{ab}^j + ig(\pi_a^j - \pi_b^j) \tilde{a} + f_{\sigma}^j(t) \\
\dot{\tilde{a}} &= -\kappa(1 + i\phi) \tilde{a} - ig \sum_j \tilde{\sigma}_{ab}^j + \sqrt{2\kappa/\tau} \alpha_{in} + F_\kappa(t),
\end{aligned} \tag{2}$$

where  $\phi \equiv (\omega_c - \omega_L)/\kappa$  and  $\delta \equiv (\omega_0 - \omega_L)/\gamma_{ab}$ . In order to eliminate the fast time dependence we have defined the slowly varying operators  $\tilde{a} \equiv a e^{i\omega_L t}$  and  $\tilde{\sigma}_{ab}^j \equiv \sigma_{ab}^j e^{i\omega_L t}$ . Since the field

equation of motion is decoupled from the  $a \leftrightarrow c$  and  $b \leftrightarrow c$  coherences we have disregarded their evolution.

The noise operators  $F_\kappa(t)$  and  $f_l^j(t)$  ( $l = a, b, c, \sigma, \sigma^\dagger$ ) are characterized by their averages and correlation functions,

$$\begin{aligned} \langle F_\kappa(t) \rangle &= \langle f_l^j(t) \rangle = 0 , \\ \langle F_\kappa(t) F_\kappa(t') \rangle &= 0 , \\ \langle F_\kappa^\dagger(t) F_\kappa(t') \rangle &= 2\kappa n_{th} \delta(t - t') , \\ \langle f_l^j(t) f_m^j(t') \rangle &= 2d_{lm} \delta(t - t') . \end{aligned} \quad (3)$$

The correlation functions of the field noise operators come from the theory of the interaction with a heat bath [9,10] where  $n_{th}$  is the average number of thermal photons. From now on we shall assume that the field reservoir is at zero temperature so that  $n_{th} = 0$ . The atomic diffusion coefficients  $d_{lm}$  are obtained from the generalized Einstein relations [9,10] applied to Eqs.(2). In our case the nonvanishing diffusion coefficients are listed in appendix A.

Let us define the macroscopic atomic operators given by:

$$\begin{aligned} M(t) &= -i \sum_j \sigma_{ab}^j(t) , \\ N_{a(b,c)}(t) &= \sum_j \pi_{a(b,c)}^j(t) , \\ F_l(t) &= \sum_j f_l^j(t) , \quad l = a, b, c, \sigma, \sigma^\dagger . \end{aligned} \quad (4)$$

For simplicity, we will suppose that different atoms are uncorrelated so that the macroscopic diffusion coefficients are obtained by simply summing over all atoms the corresponding microscopic coefficients. In this case, the correlation functions of the macroscopic noise operators are

$$\langle F_l(t) F_m(t') \rangle = 2D_{lm} \delta(t - t') , \quad (5)$$

where  $D_{lm}$  are the macroscopic diffusion coefficients.

A set of equivalent  $c$ -number Langevin equations, which are related to the Langevin equations for the macroscopic operators, are obtained by choosing the normal ordering of the



atomic and field operators, i.e.,  $a^\dagger, M^\dagger, N_a, N_b, N_c, M, a$ . The stochastic  $c$ -number variables corresponding to the operators  $a, M, N_a, N_b, N_c, a^\dagger$  are denoted by  $\mathcal{A}, \mathcal{M}, \mathcal{N}_a, \mathcal{N}_b, \mathcal{N}_c, \mathcal{A}^*$  and their equations of motions are:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{N}}_a &= -\Gamma_a \mathcal{N}_a - R_T(\mathcal{N}_a - \mathcal{N}_b) - g[\mathcal{A}^* \mathcal{M} + \mathcal{M}^* \mathcal{A}] + \mathcal{F}_a, \\
\dot{\mathcal{N}}_b &= -\Gamma_b \mathcal{N}_b + \Gamma_a \mathcal{N}_a + R_T(\mathcal{N}_a - \mathcal{N}_b) + R_{rep} \mathcal{N}_c \\
&\quad + g[\mathcal{A}^* \mathcal{M} + \mathcal{M}^* \mathcal{A}] + \mathcal{F}_b, \\
\dot{\mathcal{N}}_c &= -R_{rep} \mathcal{N}_c + \Gamma_b \mathcal{N}_b + \mathcal{F}_c, \\
\dot{\mathcal{M}} &= -\gamma_{ab}(1 + i\delta)\mathcal{M} + g[\mathcal{N}_a - \mathcal{N}_b]\mathcal{A} + \mathcal{F}_M, \\
\dot{\mathcal{A}} &= -\kappa(1 + i\phi)\mathcal{A} + g\mathcal{M} + \sqrt{2\kappa/\tau}\alpha_{in},
\end{aligned} \tag{6}$$

where

$$\langle \mathcal{F}_l(t) \mathcal{F}_m(t') \rangle = 2\mathcal{D}_{lm} \delta(t - t'). \tag{7}$$

Since all normally ordered correlation functions of the field noise operator vanish we have set  $\mathcal{F}_\kappa(t) = 0$ . The equivalence between the operator and the  $c$ -number Langevin equations is established by the requirement that the equations of motion for the second order moments of the  $c$ -number variables coincide with those of the operator variables. This procedure is described in details in Refs. [7] and [11]. It implies including additional terms in the  $c$ -number diffusion coefficients. These extra terms represent the quantum mechanical contributions coming from the commutation relations used to write the equations of motion for the second order moments in normal order. After this procedure we find the  $c$ -number diffusion coefficients  $\mathcal{D}_{lm}$  appearing in Eq.(7). The list of  $c$ -number diffusion coefficients and a brief explanation about their calculation are given in appendix B.

#### A. Steady state

The steady state solutions for the average values of the field and atomic variables are obtained by taking the averages in Eqs.(6) and setting the left hand side equal to zero.

The average values of the nonlinear terms are approximated so that  $\langle XY \rangle \sim \langle X \rangle \langle Y \rangle$ , which corresponds to neglecting 2<sup>nd</sup> order fluctuation terms in the steady state. This approximation is valid when the fluctuations are negligible when compared to the average values, which is in agreement with our experimental conditions. The solutions of the algebraic equations obtained give

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{a0} - \mathcal{N}_{b0} &= -\frac{N(1 - R_T/\xi)}{1 + \Gamma_b/R_{rep}} \frac{1 + \delta^2}{1 + \delta^2 + I/I_{sat}}, \\ \mathcal{M}_0 &= -\frac{gN\mathcal{A}_0}{\gamma_{ab}} \frac{1 - R_T/\xi}{1 + \Gamma_b/R_{rep}} \frac{1 - i\delta}{1 + \delta^2 + I/I_{sat}}, \end{aligned} \quad (8)$$

where  $I \equiv |\mathcal{A}_0|^2$  is the steady state intracavity intensity,  $I_{sat} \equiv \xi\gamma_{ab}/2g^2$  is the saturation intensity and

$$\xi \equiv R_T + \frac{\Gamma_a(1 + \Gamma_b/R_{rep})}{2 + \Gamma_b/R_{rep}}. \quad (9)$$

The subscript 0 is used to indicate the steady state solution for the corresponding average value, i.e.,  $X_0 \equiv \langle X \rangle_{SS}$ . The above equations allow us to obtain the steady state equation for the field amplitude:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\kappa\tau}} \alpha_{in} &= \mathcal{A}_0 \left[ \left( 1 + \frac{2C(1 - R_T/\xi)}{1 + \delta^2 + I/I_{sat}} \right) + \right. \\ &\quad \left. i \left( \phi - \frac{2C\delta(1 - R_T/\xi)}{1 + \delta^2 + I/I_{sat}} \right) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

where

$$C \equiv \frac{g^2 N}{2\kappa\gamma_{ab}(1 + \Gamma_b/R_{rep})} \quad (11)$$

is the bistability parameter. Taking the square modulus of both sides of Eq.(10) we obtain an algebraic equation for the intracavity steady state intensity. For a given set of parameters this equation may have up to three solutions from which two are stable. This characterizes the well known bistable behaviour also present in the two-level model for the atoms [12].

## B. Noise Spectra

By linearizing Eqs.(6) and taking the Fourier Transform we obtain a set of algebraic equations for the spectra of the small fluctuations around the steady state:

$$\begin{aligned}
-i\Omega\delta\tilde{\mathcal{N}}_a(\Omega) &= -\Gamma_a\delta\tilde{\mathcal{N}}_a(\Omega) - R_T [\delta\tilde{\mathcal{N}}_a(\Omega) - \delta\tilde{\mathcal{N}}_b(\Omega)] - \\
&\quad g [\mathcal{A}_0\delta\tilde{\mathcal{M}}^*(-\Omega) + \mathcal{A}_0^*\delta\tilde{\mathcal{M}}(\Omega) + \mathcal{M}_0\delta\tilde{\mathcal{A}}^*(-\Omega) \\
&\quad + \mathcal{M}_0^*\delta\tilde{\mathcal{A}}(\Omega)] + \tilde{\mathcal{F}}_a(\Omega), \\
-i\Omega\delta\tilde{\mathcal{N}}_b(\Omega) &= -\Gamma_b\delta\tilde{\mathcal{N}}_b(\Omega) + \Gamma_a\delta\tilde{\mathcal{N}}_a(\Omega) + g [\mathcal{A}_0\delta\tilde{\mathcal{M}}^*(-\Omega) \\
&\quad + \mathcal{A}_0^*\delta\tilde{\mathcal{M}}(\Omega) + \mathcal{M}_0\delta\tilde{\mathcal{A}}^*(-\Omega) + \mathcal{M}_0^*\delta\tilde{\mathcal{A}}(\Omega)] \\
&\quad + R_T [\delta\tilde{\mathcal{N}}_a(\Omega) - \delta\tilde{\mathcal{N}}_b(\Omega)] + R_{rep}\delta\tilde{\mathcal{N}}_c(\Omega) \\
&\quad + \tilde{\mathcal{F}}_b(\Omega), \\
-i\Omega\delta\tilde{\mathcal{N}}_c(\Omega) &= -R_{rep}\delta\tilde{\mathcal{N}}_c(\Omega) + \Gamma_b\delta\tilde{\mathcal{N}}_b(\Omega) + \tilde{\mathcal{F}}_c(\Omega), \\
-i\Omega\delta\tilde{\mathcal{M}}(\Omega) &= -\gamma_{ab}(1+i\delta)\delta\tilde{\mathcal{M}}(\Omega) + g[\mathcal{N}_{a0} - \mathcal{N}_{b0}]\delta\tilde{\mathcal{A}}(\Omega) \\
&\quad + g[\delta\tilde{\mathcal{N}}_a(\Omega) - \delta\tilde{\mathcal{N}}_b(\Omega)]\mathcal{A}_0 + \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{M}}(\Omega), \\
-i\Omega\delta\tilde{\mathcal{A}}(\Omega) &= -\kappa(1+i\phi)\delta\tilde{\mathcal{A}}(\Omega) + g\delta\tilde{\mathcal{M}}(\Omega),
\end{aligned} \tag{12}$$

where

$$\tilde{X}(\Omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int X(t) e^{-i\Omega t} dt. \tag{13}$$

Since the noise terms describe stationary processes, as one can see from Eq.(7), we have

$$\langle \mathcal{F}_l(\Omega)\mathcal{F}_m(\Omega') \rangle = 2\mathcal{D}_{lm}\delta(\Omega + \Omega'). \tag{14}$$

Besides, the population noise forces are real in the time domain so that  $\mathcal{F}_i(\Omega) = \mathcal{F}_i^*(-\Omega)$  for  $i = a, b, c$ .

The fluctuations spectrum of the field amplitude is obtained by solving the algebraic equations (12). It may be written as:

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\mathcal{A}}(\Omega) &= \frac{g\sum_j A_j(\Omega)\tilde{\mathcal{F}}_j(\Omega)}{u(\Omega)}, \\
\delta\tilde{\mathcal{A}}^*(-\Omega) &= \frac{g\sum_j B_j(\Omega)\tilde{\mathcal{F}}_j(\Omega)}{u^*(-\Omega)}, \\
j &= a, b, c, \mathcal{M}, \mathcal{M}^*,
\end{aligned} \tag{15}$$

where,

$$\begin{aligned}
A_a(\Omega) &\equiv \frac{g\mathcal{A}_0}{i\Omega w(\Omega)} [(\Gamma_a + i\Omega)(R_{rep} - i\Omega) + i\Omega\Gamma_b] , \\
A_b(\Omega) &\equiv \frac{g\mathcal{A}_0}{i\Omega w(\Omega)} (R_{rep} - i\Omega)(\Gamma_a - i\Omega) , \\
A_c(\Omega) &\equiv \frac{g\mathcal{A}_0}{i\Omega w(\Omega)} R_{rep}(\Gamma_a - i\Omega) , \\
A_{\mathcal{M}}(\Omega) &\equiv 1 + \frac{g\mathcal{A}_0^*}{w(\Omega)} \frac{[\Gamma_b + 2(R_{rep} - i\Omega)]}{v^*(-\Omega)} \times \\
&\quad [g^2\mathcal{M}_0 + g\mathcal{A}_0(\kappa(1 - i\phi) - i\Omega)] , \\
A_{\mathcal{M}^*}(\Omega) &\equiv -\frac{g\mathcal{A}_0}{w(\Omega)} \frac{[\Gamma_b + 2(R_{rep} - i\Omega)]}{v^*(-\Omega)} \times \\
&\quad [g^2\mathcal{M}_0 + g\mathcal{A}_0(\kappa(1 - i\phi) - i\Omega)] , \\
u(\Omega) &\equiv v(\Omega)[A_{\mathcal{M}^*}^*(-\Omega) + A_{\mathcal{M}}(\Omega) - 1] , \\
v(\Omega) &\equiv [\gamma_{ab}(1 + i\delta) - i\Omega][\kappa(1 + i\phi) - i\Omega] - \\
&\quad g^2(\mathcal{N}_{a0} - \mathcal{N}_{b0}) , \\
w(\Omega) &\equiv (R_{rep} + \Gamma_b - i\Omega)(R_T + \Gamma_a - i\Omega) + \\
&\quad R_T(R_{rep} - i\Omega) .
\end{aligned} \tag{16}$$

By taking the complex conjugate and making  $\Omega \rightarrow -\Omega$  in the first of Eqs.(15) it is easy to show that  $B_j(\Omega) = A_j^*(-\Omega)$  for  $j = a, b, c$ ,  $B_{\mathcal{M}}(\Omega) = A_{\mathcal{M}^*}^*(-\Omega)$  and  $B_{\mathcal{M}^*}(\Omega) = A_{\mathcal{M}}^*(-\Omega)$ .

From Eqs.(14) and (15) it can be shown that the field fluctuations spectra are delta correlated. The auto- and cross-correlation functions may be written as

$$\begin{aligned}
\langle \delta\tilde{\mathcal{A}}(\Omega)\delta\tilde{\mathcal{A}}(\Omega') \rangle &= S_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(\Omega)\delta(\Omega + \Omega') \\
\langle \delta\tilde{\mathcal{A}}(\Omega)\delta\tilde{\mathcal{A}}^*(-\Omega') \rangle &= S_{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}(\Omega)\delta(\Omega + \Omega') .
\end{aligned} \tag{17}$$

The expressions for the noise power spectra  $S_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(\Omega)$  and  $S_{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}(\Omega)$  are

$$\begin{aligned}
S_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(\Omega) &= 2g^2 \frac{\sum_{i,j} \mathcal{D}_{ij} A_i(\Omega) A_j(-\Omega)}{u(\Omega)u(-\Omega)} , \\
S_{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}(\Omega) &= 2g^2 \frac{\sum_{i,j} \mathcal{D}_{ij} A_i(\Omega) B_j(-\Omega)}{|u(\Omega)|^2} , \\
i, j &= a, b, c, \mathcal{M}, \mathcal{M}^* .
\end{aligned} \tag{18}$$

Eqs.(16) show that  $A_a(\Omega)$ ,  $A_b(\Omega)$  and  $A_c(\Omega)$  diverge when  $\Omega \rightarrow 0$ . However, this divergence is canceled out when one calculates the noise power spectra. This is related to the

fact that the total number of atoms is supposed to be a well known constant variable, so that

$$\mathcal{F}_a(t) + \mathcal{F}_b(t) + \mathcal{F}_c(t) = 0 \quad (19)$$

and

$$\sum_{i,j} \mathcal{D}_{ij} = 0, \quad i, j = a, b, c. \quad (20)$$

Thus, one may substitute one of the population noise forces in Eqs.(15) by the other two ( $\tilde{\mathcal{F}}_c(\Omega) = -\tilde{\mathcal{F}}_a(\Omega) - \tilde{\mathcal{F}}_b(\Omega)$  for example), and redefine the corresponding coefficients ( $A'_a(\Omega) = A_a(\Omega) - A_c(\Omega)$  and  $A'_b(\Omega) = A_b(\Omega) - A_c(\Omega)$ ). A straightforward algebra shows that the coefficients so obtained are well behaved for  $\Omega \rightarrow 0$ .

The fluctuations spectrum in a given quadrature of the electric field is given by

$$\delta X_\theta(\Omega) \equiv \frac{e^{-i\theta} \delta \tilde{\mathcal{A}}(\Omega) + e^{i\theta} \delta \tilde{\mathcal{A}}^*(-\Omega)}{2}. \quad (21)$$

The corresponding noise power spectrum,  $S_\theta(\Omega)$ , is defined according to

$$\langle \delta X_\theta(\Omega) \delta X_\theta(\Omega') \rangle = S_\theta(\Omega) \delta(\Omega + \Omega'). \quad (22)$$

From (17), (21) and (22) we get

$$\begin{aligned} S_\theta(\Omega) &= e^{-2i\theta} S_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(\Omega) + e^{2i\theta} S_{\mathcal{A}\mathcal{A}}^*(\Omega) \\ &\quad + S_{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}(\Omega) + S_{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}(-\Omega). \end{aligned} \quad (23)$$

In the experiments, one may vary the quadrature being measured by sweeping the phase of the local oscillator in the homodyne detection scheme. The optimum squeezing for a given frequency is obtained in a quadrature  $\theta_{opt}$  such that

$$e^{2i\theta_{opt}} = -\frac{S_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(\Omega)}{|S_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(\Omega)|}, \quad (24)$$

which gives

$$S_{opt}(\Omega) = S_{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}(\Omega) + S_{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}(-\Omega) - 2 |S_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(\Omega)|. \quad (25)$$

The fluctuations spectrum of the output field is related to the intracavity field fluctuations spectrum according to the input-output formalism developed by Gardiner and Collet [13]. The noise power spectrum in a given quadrature component of the output field is given by

$$V_\theta(\Omega) = 1 + 2\kappa S_\theta(\Omega). \quad (26)$$

This quantity is related to the output signal coming from the homodyne detection scheme described next.

#### IV. EXPERIMENTAL SETUP AND NOISE MEASUREMENTS

The cold atoms are prepared using a standard magneto-optical trap in which three orthogonal circularly polarized trapping beams are generated by a Ti:Sapphire laser. Their frequency and power are controlled by an acousto-optic modulator working in a double-pass scheme to avoid frequency dependence of the position of the trapping beams. The trapping beams are detuned to the low frequency side of the  $6S_{1/2}F = 4$  to  $6P_{3/2}F = 5$  transition. In order to avoid excess noise due to the trapping beams, their power is kept very low (below  $1mW$  per beam) during the whole measurement. As usual, to prevent atoms from being optically pumped to the  $6S_{1/2}F = 3$  state, we superpose to the trapping beams a diode laser tuned to the  $6S_{1/2}F = 3$  to  $6P_{3/2}F = 4$  transition.

The experimental setup is sketched in Fig. 2. We use a half-symmetric (one plane mirror and one spherical mirror) linear cavity. The radius of curvature of the spherical mirror is  $50cm$  and the cavity length is close to  $25cm$ , so that the beam waist is equal to  $260\mu m$ . In order to allow easy matching of the incident beam, the cavity is built around the cell in the horizontal plane and oriented at  $45^\circ$  with respect to the trapping beams lying in this plane. The losses at the windows of the cell are of the order of 1%. The transmission of the coupling mirror is 10% while the end mirror is highly reflecting. Thus, the cavity is close to the “bad cavity” case, where the cavity linewidth ( $\kappa \sim 5MHz$ ) is of the same order of the atomic linewidth. The finesse of the cavity is 60. We send a circularly polarized probe

beam inside the cavity. We have detuned the frequency of the probe from 50 to 75 MHz on the low frequency side of the  $6S_{1/2}F = 4$  to  $6P_{3/2}F = 5$  transition. The power of the probe beam is of the order of 5 to 15  $\mu W$  and its coupling efficiency to the cavity mode is over 97%. We can measure the power of the probe beam transmitted through the cavity with a photodiode located behind the end mirror.

The field reflected from the cavity is separated by an optical circulator consisting of a quarter wave plate and a polarizing beamsplitter. To make the homodyne detection, the probe beam is mixed with a powerful local oscillator (25mW) using the second input port of the beamsplitter. The phase of the local oscillator can be swept using a mirror mounted on a piezo-electric ceramic. The matching of the probe beam and the local oscillator is over 99%. We use a half-wave plate and a second polarizing beamsplitter to split the two fields which are then detected by highly efficient photodiodes (87%). The total detection efficiency is thus around 85%. Electronic noise is 8dB below the shot noise level so that we can neglect it.

The ac parts of the photodiode signals are subtracted and amplified. The resulting signal is then sent to a spectrum analyzer to record the variance of the field. In Fig. 3 we show the result obtained by a measurement made with zero span at 8MHz, as the phase of the local oscillator was swept. The resolution bandwidth was 100KHz. Quadrature squeezing was obtained under stable conditions.

Figs. 4 and 5 show the comparison between experiment and theory taking into account the detection efficiency. The values used for the parameters involved in our theoretical description correspond to experimental conditions. The theoretical optimum squeezing spectrum  $V_{opt}(\Omega)$  is obtained from Eq.(26) with  $\theta = \theta_{opt}$ , and the theoretical maximum noise level is obtained for  $\theta = \theta_{max} = \theta_{opt} + \pi/2$ . The experimental points are obtained from the minima and the maxima of recordings similar to the one shown in Fig. 3. In order to check the presence of excess noise, we have studied various experimental conditions corresponding to several values of the power of the trapping beams. The measurements corresponding to Fig. 4 were made with trapping beams of very low power ( $\sim 0.2mW$ ) while Fig. 5 shows

the results for higher power ( $\sim 1mW$ ). We see that theoretical predictions are in good agreement with experimental results. As can be seen from Figs. 4 and 5, the consideration of the effects of the trapping and repumping beams is essential for a good fitting between theory and experiments, specially in the low frequency range.

## V. CONCLUSIONS

The consideration of the extra noise added by the trapping mechanism is essential for the evaluation of the performance of quantum optics experiments with cold atoms. The trapping and the repumping beams introduce fluctuations in the atomic level populations which are transmitted to the probe beam interacting with the cold atoms. We have developed a realistic treatment for the problem of squeezing with cold atoms which takes into account the effects of the trapping and repumping beams. As we showed, the fluctuations added by the trap may spoil the squeezing effects caused by the nonlinear response of the cold atoms. Our treatment is in good agreement with the experimental results obtained with various powers of the trapping beams.

The use of a magneto-optical trap allows the realization of stable squeezing but the amount of squeezing attainable is still not large. The optimization of the squeezing requires controlling the noise added by the trap.

## ACKNOWLEDGMENTS

A. Z. K. acknowledges support from the brazilian Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). We would like to thank Astrid Lambrecht and Jean-Michel Courty for helpful discussions.



## APPENDIX: A

In the following we present the list of diffusion coefficients for the microscopic atomic operators, calculated from the generalized Einstein relation [9,10] We will restrict ourselves to the nonvanishing normal-ordered  $(\sigma^\dagger, \pi_a, \pi_b, \pi_c, \sigma)$  coefficients which will be useful to the next calculations.

$$\begin{aligned}
2d_{aa} &= (\Gamma_a + R_T)\langle\pi_a\rangle + R_T\langle\pi_b\rangle \\
2d_{ab} &= -(\Gamma_a + R_T)\langle\pi_a\rangle - R_T\langle\pi_b\rangle \\
2d_{a\sigma} &= -R_T\langle\sigma\rangle \\
2d_{bb} &= (\Gamma_a + R_T)\langle\pi_a\rangle + (\Gamma_b + R_T)\langle\pi_b\rangle + R_{rep}\langle\pi_c\rangle \\
2d_{bc} &= -\Gamma_b\langle\pi_b\rangle - R_{rep}\langle\pi_c\rangle \\
2d_{b\sigma} &= (\Gamma_b + R_T)\langle\sigma\rangle \\
2d_{cc} &= \Gamma_b\langle\pi_b\rangle + R_{rep}\langle\pi_c\rangle \\
2d_{c\sigma} &= \Gamma_b\langle\sigma\rangle \\
2d_{\sigma^\dagger\sigma} &= (2\gamma_{ab} - \Gamma_a - R_T)\langle\pi_a\rangle + R_T\langle\pi_b\rangle \\
2d_{\sigma^\dagger a} &= 2d_{a\sigma}^* \\
2d_{\sigma^\dagger b} &= 2d_{b\sigma}^* \\
2d_{\sigma^\dagger c} &= 2d_{c\sigma}^* .
\end{aligned} \tag{A1}$$

## APPENDIX: B

The diffusion coefficients  $\mathcal{D}_{ij}$  for the  $c$ -number Langevin forces are different, in general, from the corresponding diffusion coefficients  $D_{ij}$  for the operator Langevin forces. The diffusion coefficients  $\mathcal{D}_{ij}$  are obtained from the requirement that the  $c$ -number equations for the second moments should be identical to the corresponding normally order operator

equations. It is easy to see that the diffusion coefficients for the  $c$ -number Langevin force in the field equation  $\mathcal{F}_\kappa$  are the same as for the Langevin noise operator  $F_\kappa$ , so that

$$\mathcal{D}_{\kappa^*\kappa} = 0, \mathcal{D}_{\kappa\kappa} = 0. \quad (\text{B1})$$

However, some of the atomic diffusion coefficients  $\mathcal{D}_{ij}$  are different from the corresponding diffusion coefficients  $D_{ij}$ . As an example, let us calculate the diffusion coefficient  $\mathcal{D}_{aa}$ . From the operator equation

$$\dot{N}_a = -\Gamma_a N_a - R_T(N_a - N_b) - g[a^\dagger M + M^\dagger a] + F_a, \quad (\text{B2})$$

we may obtain the equation of motion for the product  $N_a(t)N_a(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [N_a(t)N_a(t)] &= -2\Gamma_a N_a N_a - R_T N_a (N_a - N_b) \\ &\quad - R_T (N_a - N_b) N_a - g N_a [a^\dagger M + M^\dagger a] \\ &\quad - g [a^\dagger M + M^\dagger a] N_a + N_a F_a + F_a N_a. \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

On the right-hand side of the last equation there are terms which are not in the chosen order  $(a^\dagger, M^\dagger, N_a, N_b, N_c, M, a)$ . The 3<sup>rd</sup> term may be immediately put in the chosen order since  $N_a$  and  $N_b$  commute. However, in the 4<sup>th</sup> and 5<sup>th</sup> terms the commutators  $[N_a, M^\dagger] = M^\dagger$  and  $[M, N_a] = M$  must be used since  $N_a$  is to the left of  $M^\dagger$  in the 4<sup>th</sup> term and  $M$  is to the left of  $N_a$  in the 5<sup>th</sup> term. Therefore, the normally ordered equation of motion for the second moment of  $N_a$  is

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle N_a(t)N_a(t) \rangle &= -2\Gamma_a \langle N_a N_a \rangle - 2R_T \langle N_a (N_a - N_b) \rangle \\ &\quad - 2g \langle a^\dagger N_a M + M^\dagger N_a a \rangle - g \langle a^\dagger M + M^\dagger a \rangle \\ &\quad + 2D_{aa}, \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

where we have made use of the fact that  $\langle N_a(t)F_a(t) \rangle = \langle F_a(t)N_a(t) \rangle = 2D_{aa}$  (see, for instance, [10]). On the other hand using the corresponding  $c$ -number equation for  $\mathcal{N}_a(t)$  (first of Eqs.(6)), we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathcal{N}_a(t) \mathcal{N}_a(t) \rangle &= -2\Gamma_a \langle \mathcal{N}_a \mathcal{N}_a \rangle - 2R_T \langle \mathcal{N}_a (\mathcal{N}_a - \mathcal{N}_b) \rangle \\ &\quad - 2g \langle \mathcal{A}^* \mathcal{N}_a \mathcal{M} + \mathcal{M}^* \mathcal{N}_a \mathcal{A} \rangle + 2\mathcal{D}_{aa} . \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

If we require the left-hand side of Eqs. (B4) and (B5) to be equal we can see that the diffusion coefficient  $\mathcal{D}_{aa}$  is related to the diffusion coefficient  $D_{aa}$  as

$$2\mathcal{D}_{aa} = 2D_{aa} - g \langle \mathcal{A}^* \mathcal{M} + \mathcal{M}^* \mathcal{A} \rangle . \quad (\text{B6})$$

The diffusion coefficient  $D_{aa}$  is obtained from the summation of the corresponding microscopic diffusion coefficient  $d_{aa}$  over all atoms, so that

$$2\mathcal{D}_{aa} = (\Gamma_a + R_T) \langle \mathcal{N}_a \rangle + R_T \langle \mathcal{N}_b \rangle - g \langle \mathcal{A}^* \mathcal{M} + \mathcal{M}^* \mathcal{A} \rangle . \quad (\text{B7})$$

Since we will be interested in fluctuations around the steady state, we may use the steady state conditions to obtain more compact expressions for the  $c$ -number diffusion coefficients.

For example, from the first of Eqs.(6) we have

$$g \langle \mathcal{A}^* \mathcal{M} + \mathcal{M}^* \mathcal{A} \rangle_{SS} = -\Gamma_a \langle \mathcal{N}_a \rangle_{SS} - R_T \langle \mathcal{N}_a - \mathcal{N}_b \rangle_{SS} ,$$

where the subscript  $SS$  indicates the steady state value. Following this procedure one may obtain the whole list of  $c$ -number diffusion coefficients:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_{aa} &= 2(\Gamma_a + R_T) \mathcal{N}_{a0} \\ 2\mathcal{D}_{ab} &= -2(\Gamma_a + R_T) \mathcal{N}_{a0} \\ 2\mathcal{D}_{a\mathcal{M}} &= 2\mathcal{D}_{a\mathcal{M}^*}^* = -R_T \mathcal{M}_0 \\ 2\mathcal{D}_{bb} &= 2(\Gamma_a + R_T) \mathcal{N}_{a0} + 2\Gamma_b \mathcal{N}_{b0} \\ 2\mathcal{D}_{bc} &= -2\Gamma_b \mathcal{N}_{b0} \\ 2\mathcal{D}_{b\mathcal{M}} &= 2\mathcal{D}_{b\mathcal{M}^*}^* = (\Gamma_b + R_T) \mathcal{M}_0 \\ 2\mathcal{D}_{cc} &= 2\Gamma_b \mathcal{N}_{b0} \\ 2\mathcal{D}_{c\mathcal{M}} &= 2\mathcal{D}_{c\mathcal{M}^*}^* = -\Gamma_b \mathcal{M}_0 \\ 2\mathcal{D}_{\mathcal{M}\mathcal{M}} &= 2\mathcal{D}_{\mathcal{M}^*\mathcal{M}^*}^* = 2g \mathcal{M}_0 \mathcal{A}_0 \\ 2\mathcal{D}_{\mathcal{M}\mathcal{M}^*} &= (2\gamma_{ab} - \Gamma_a - R_T) \mathcal{N}_{a0} + R_T \mathcal{N}_{b0} , \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

where  $X_0 \equiv \langle X \rangle_{SS}$  as in section III-A.

---

\* Electronic-mail address: khoury@spectro.jussieu.fr

- [1] A. Lambrecht, E. Giacobino, J. M. Courty, *Opt. Comm.* **115** 199 (1995).
- [2] A. Lambrecht, J. M. Courty, S. Reynaud, E. Giacobino, *Applied Physics B* **60**, 129 (1995).  
A. Lambrecht, T. Coudreau, A. Steinberg, E. Giacobino, *Europhys. Lett.* **36**, 93 (1996).
- [3] J.F. Roch, K. Vigneron, Ph. Grelu, A. Sinatra, J. Ph. Poizat, Ph. Grangier, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 634 (1997).
- [4] H. Mabuchi, Q. A. Turchette, M. S. Chapman, H. J. Kimble, *Opt. Lett.* **21**, 1393 (1996).
- [5] A. C. Doherty, A. S. Parkins, S. M. Tan, D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **56**, 833 (1997).
- [6] M. Lax *Statistical Physics, Phase Transitions and Superconductivity*, edited by M. Chrétien, E. P. Gross, and S. Dreser (Gordon and Breach, New York), Vol. 2, p. 425. (1985).
- [7] L. Davidovich, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 127 (1996).
- [8] C. Benkert, M. O. Scully, J. Bergou, L. Davidovich, M. Hillery, M. Orszag; *Phys. Rev. A* **41**, 2756 (1990).  
C. Benkert, M. O. Scully; *Phys. Rev. A* **42**, 2817 (1990).  
M. Orszag, S.-Y. Zhu, J. Bergou, M. O. Scully; *Phys. Rev. A* **45**, 4872 (1992).
- [9] W.H. Louisell *Quantum Statistical Properties of Radiation*, (Wiley, New York), (1985). For the equivalent  $c$ -number Langevin equations, see page 441.
- [10] M. Sargent III, M.O. Scully, and W.E. Lamb Jr, *Laser Physics* (Addison-Wesley, Reading, MA), (1974).
- [11] M.I. Kolobov, L. Davidovich, E. Giacobino and C. Fabre, *Phys. Rev. A* **47**, 1431 (1993).

[12] F. Castelli, L.A. Lugiato and M. VDACCHINO, *Il Nuovo Cimento* **10**, 183 (1988).

[13] C. W. Gardiner, and M. J. Collett, *Phys. Rev. A* **31**, 3761 (1985).

FIG. 1. (a) Relevant level structure of cesium atoms. (b) Effective three-level model.

FIG. 2. Experimental setup.

FIG. 3. Dimensionless noise level at  $\Omega = 8MHz$  as a function of time as the phase of the local oscillator is swept.  $V_\theta$  is normalized to the shot noise.

FIG. 4. Dimensionless noise spectra for (a) Optimum squeezing  $V_{opt}(\Omega)$  and (b) maximum noise  $V_{max}(\Omega)$ . Solid curve corresponds to theoretical prediction including the effects of the trapping and repumping beams. The parameters used were  $C = 20$ ,  $R_T/\kappa = 0.01$ ,  $R_{rep}/\kappa = 0.05$ , and  $\Gamma_b/\kappa = 0.01$ . Dashed curve corresponds to standard two-level approach with  $C = 20$ . Dots are experimental results. Both,  $V_{opt}(\Omega)$  and  $V_{max}(\Omega)$  are normalized to the shot noise.

FIG. 5. Same as Fig. 4 with the following values of the parameters:  $C = 25$ ,  $R_T/\kappa = 0.08$ ,  $R_{rep}/\kappa = 0.05$ , and  $\Gamma_b/\kappa = 0.05$ . Dashed curve corresponds to standard two-level approach with  $C = 25$ . Both,  $V_{opt}(\Omega)$  and  $V_{max}(\Omega)$  are normalized to the shot noise.

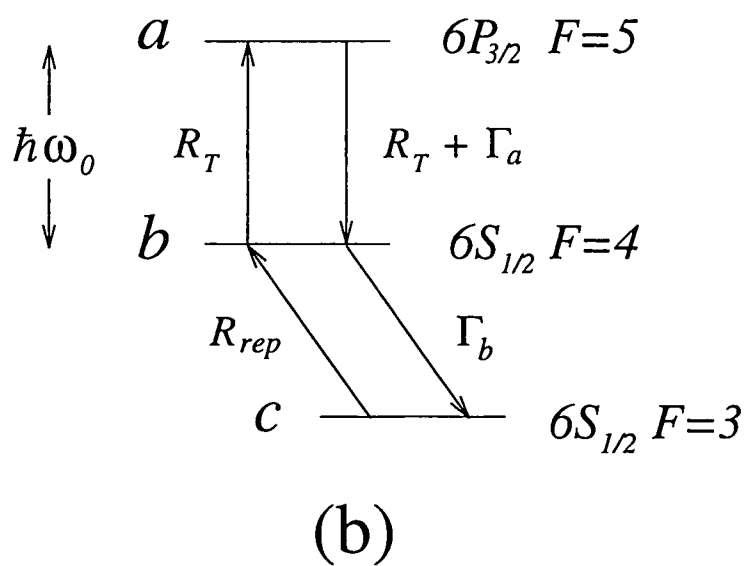
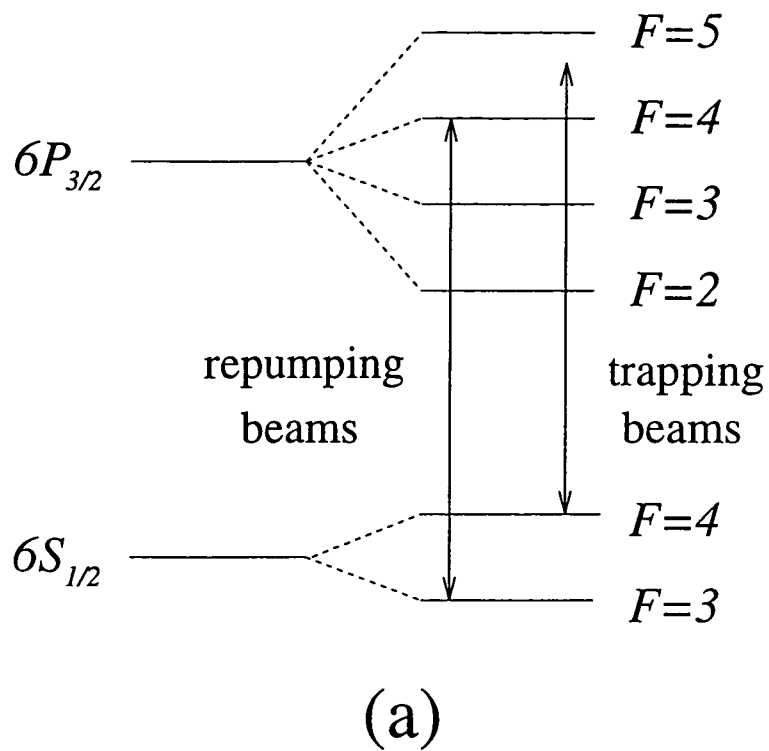


Figure 1

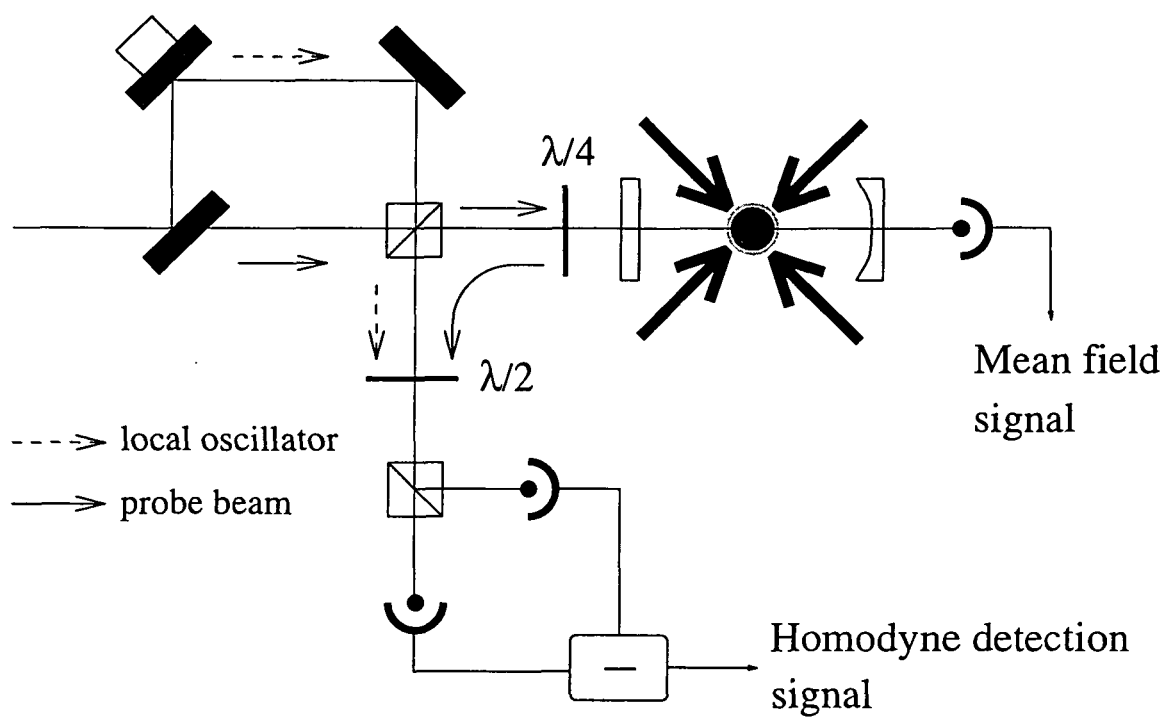


Figure 2

Figure 3

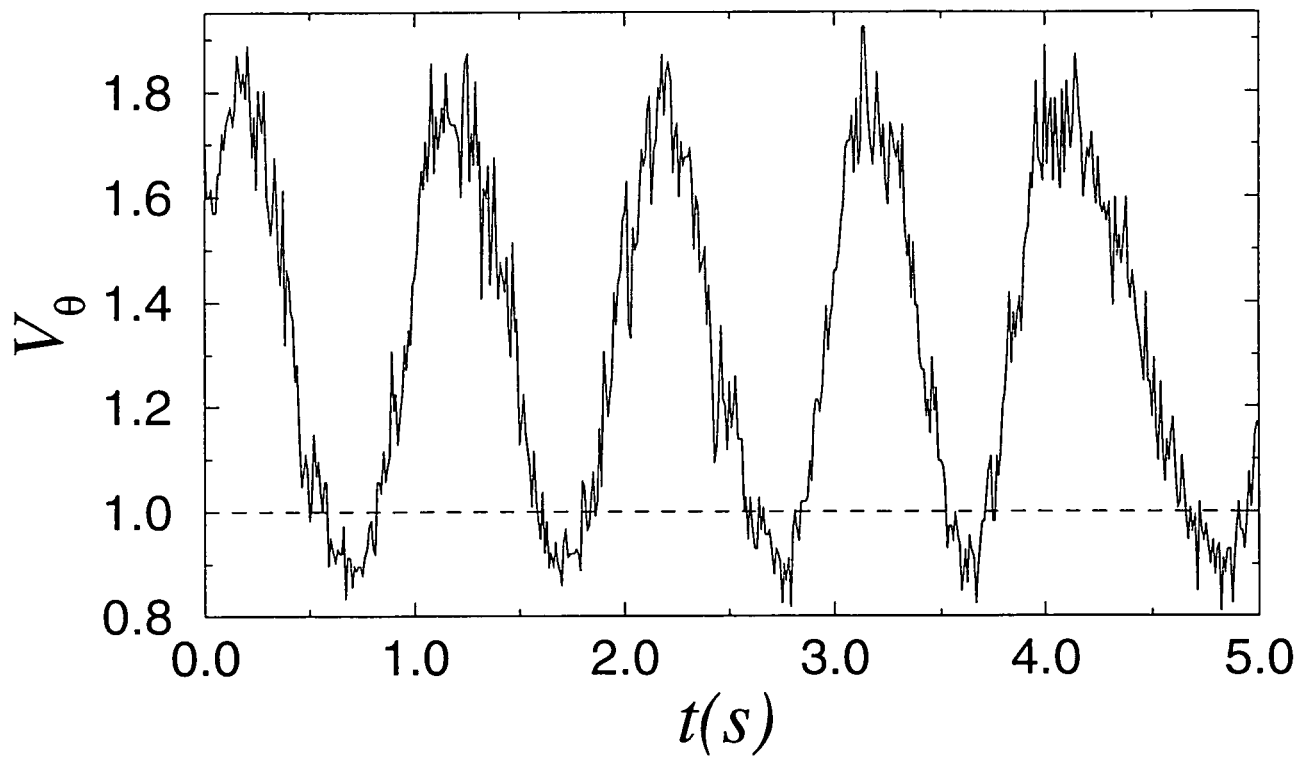




Figure 4

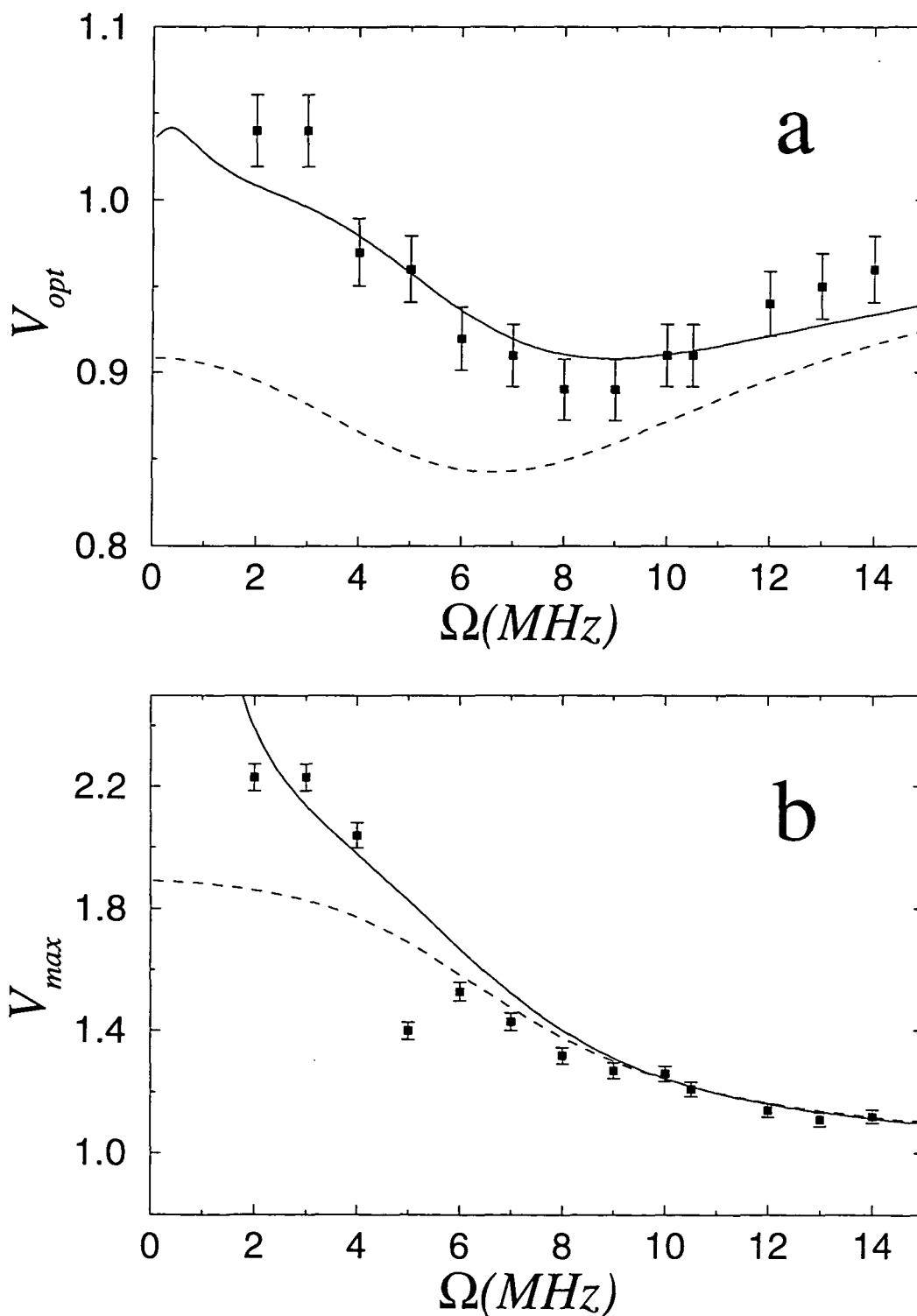
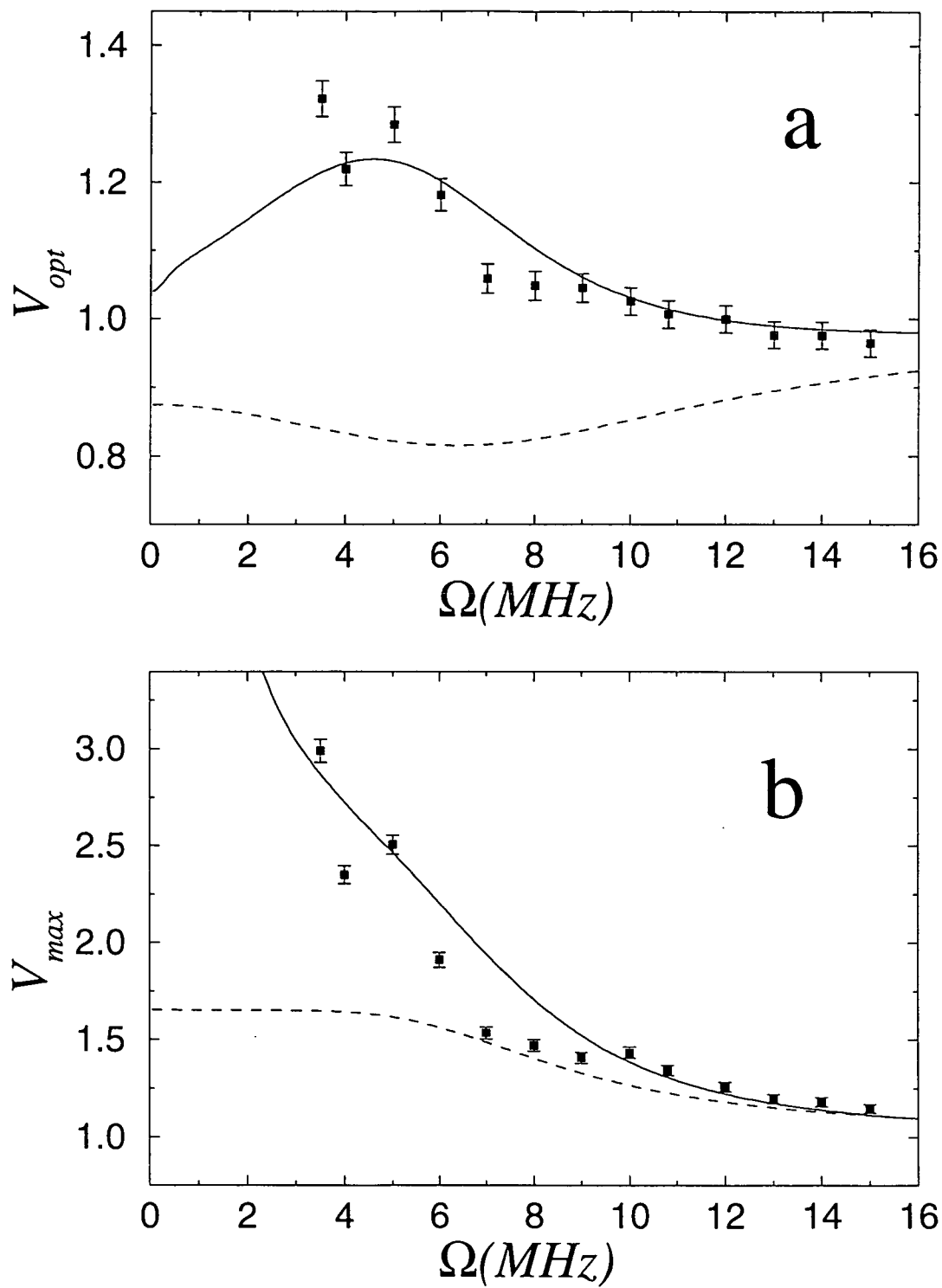


Figure 5



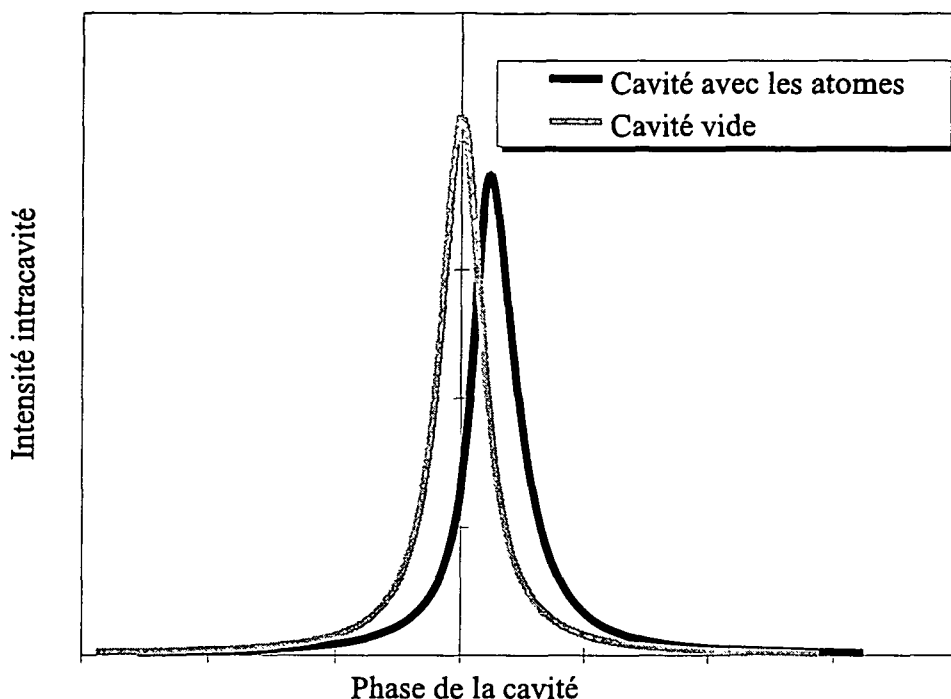


Fig. 26: Courbe de transmission de la cavité sans et avec atomes.

#### 4.4 Prédictions théoriques - conclusions

Comme nous l'avons vu dans l'article présenté au paragraphe précédent, le modèle que nous avons élaboré nous permet de prédire la réduction de bruit due à l'interaction avec les atomes. Une comparaison plus poussée avec les conditions expérimentales sera faite dans le chapitre suivant. Néanmoins, on peut déjà tirer certaines conclusions.

Sauf mention explicite du contraire, les courbes représentées dans ce paragraphe sont calculées avec les paramètres expérimentaux réalistes suivants :  $C = 20$ ,  $R_T/\kappa = .01$ ,  $R_{rep}/\kappa = .05$  et  $\Gamma_b/\kappa = .01$ .

##### 4.4.1 Allure de la courbe de transmission de la cavité

Nous avons représenté sur la figure 26 la courbe de résonance de la cavité obtenue en présence et en l'absence d'atomes. Il faut en particulier noter que cette courbe avec atomes est peu déformée par rapport à la fonction d'Airy de la cavité vide. Le nombre d'atomes n'est pas assez important pour rendre la courbe véritablement bistable. Comme nous le verrons, on peut néanmoins dans ces conditions obtenir une réduction de bruit significative.

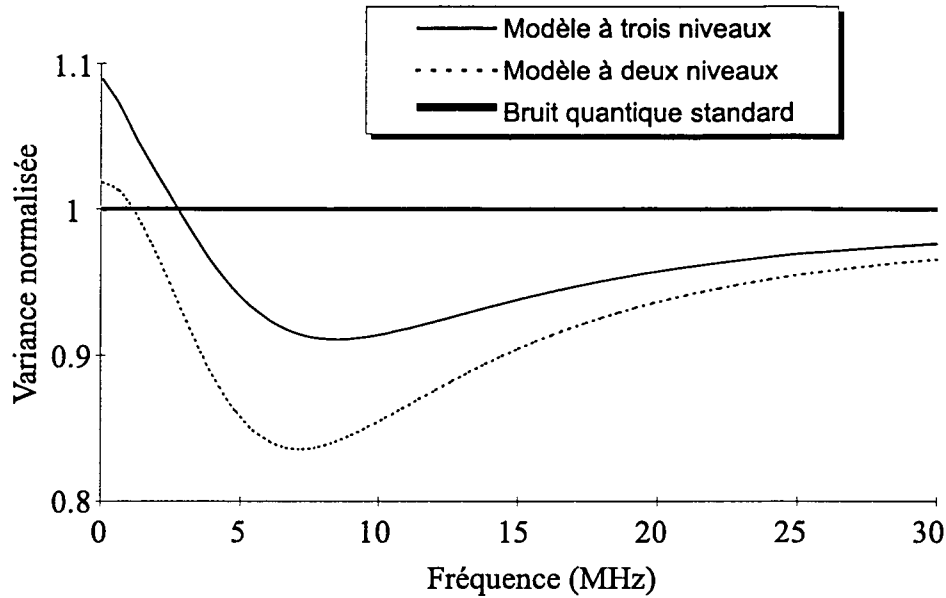


Fig. 27: Comparaison du spectre de la réduction de bruit optimale pour le modèle à trois niveaux et le modèle à deux niveaux

#### 4.4.2 Etude du spectre de la réduction de bruit

Nous avons représenté sur la figure 27 un spectre typique calculé par le modèle atomique à deux et à trois niveaux. Il faut noter qu'une réduction de bruit significative n'est obtenue que pour un domaine de fréquence restreint : lorsque la fréquence augmente à partir de 0, la courbe descend au-dessous du bruit quantique standard, passe par un minimum puis tend à nouveau vers le bruit quantique standard. La largeur du creux est de l'ordre de la largeur de la cavité (10 MHz). Comme nous l'avons déjà mentionné, on retrouve numériquement le fait que la cavité n'a pas d'effet pour les temps inférieurs à son temps de stockage. La courbe correspondant au modèle à trois niveaux montre une détérioration de la réduction de bruit par rapport au modèle à deux niveaux, dû aux transitions incohérentes introduites dans le système.

#### 4.4.3 Balayage de la longueur de la cavité

On peut aussi étudier la réduction et l'excès de bruit à une fréquence donnée en balayant la longueur de la cavité. Une courbe typique obtenue dans ce cas est représentée sur la figure 28. Elle montre en particulier que la réduction de bruit optimale n'est pas obtenue au sommet de la courbe de résonance. Néanmoins, l'optimum de la réduction de bruit est obtenu pour un domaine de phase de la cavité relativement large. Par contre, l'excès de bruit est très prononcé au voisinage du sommet et décroît rapidement en s'éloignant de ce maximum. Si on désire obtenir un champ réfléchi par la cavité aussi comprimé que possible, il est indispensable de bien contrôler la longueur de la cavité. Cela demande donc d'éliminer autant que possible les vibrations mécaniques.

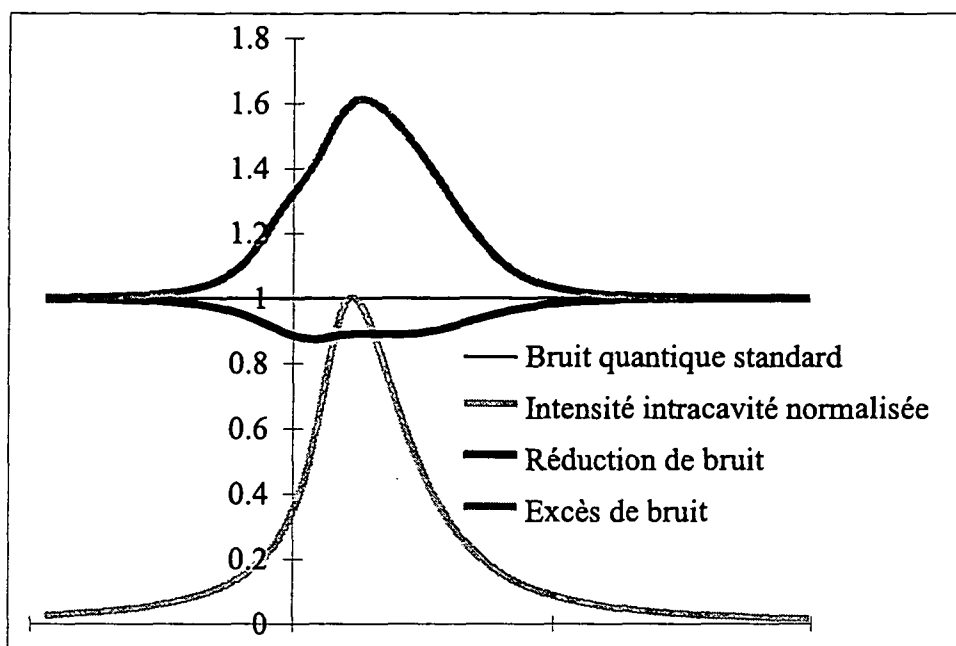


Fig. 28: Réduction de bruit optimale en fonction de la longueur de la cavité à une fréquence d'analyse donnée (5 MHz).

#### 4.4.4 Etude en fonction de la puissance des faisceaux pièges

La puissance des faisceaux pièges joue un rôle critique dans la réduction de bruit attendue. C'est la prise en compte des faisceaux pièges qui a principalement motivé le développement d'un modèle à trois niveaux. La puissance des faisceaux pièges intervient dans trois paramètres du modèle : le taux de pompage sur la transition commune avec la sonde,  $R_T$ , le taux de pompage vers le troisième niveau,  $\Gamma_b$ , et enfin la coopérativité qui est proportionnelle au nombre d'atomes. En se plaçant à coopérativité constante, on calcule les spectres de la réduction du bruit représentés sur la figure 29.

Cette figure montre de façon particulièrement spectaculaire la dégradation de la réduction du bruit lorsqu'on augmente les taux de pompage  $R_P$  et  $\gamma_b$  liés aux faisceaux pièges. Lorsque ceux-ci sont assez intenses, la réduction de bruit disparaît. En revanche, si on diminue les taux de transferts, on se rapproche des prédictions du modèle à deux niveaux.

#### 4.4.5 Etude en fonction de la puissance du repompeur

Le repompeur est le faisceau qui sert à ramener les atomes du niveau (c) où ils n'interagissent plus avec la sonde ou les faisceaux pièges vers le niveau (b). Il est utile de déterminer la puissance de repompeur qu'il est nécessaire d'utiliser pour obtenir une

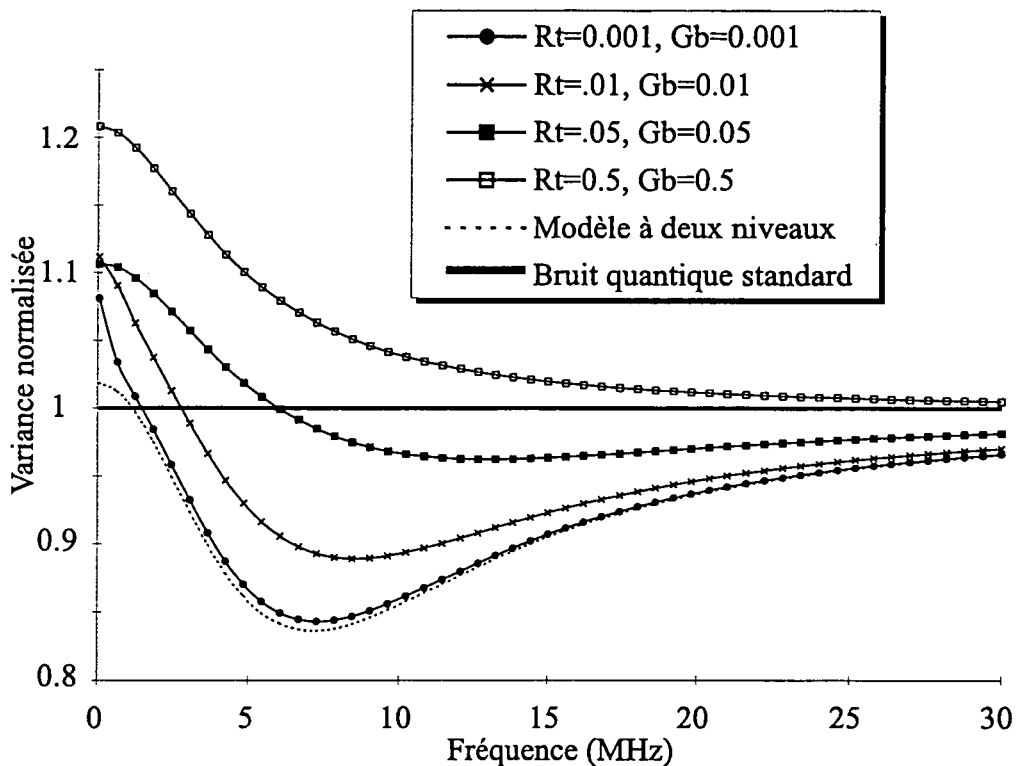


Fig. 29: Spectre de bruit minimal pour différents taux de pompage liés aux faisceaux pièges et pour le modèle à deux niveaux.

réduction du bruit optimale. L'évolution des spectres de bruit minimal pour différentes valeurs du taux de transfert du repompeur est représentée sur la figure 30.

Pour les valeurs faibles de la puissance de repompeur, la réduction de bruit tend à se détériorer ce qui correspond à la diminution du nombre d'atomes interagissant avec la sonde. Par contre, au-delà d'une certaine valeur de la puissance, la réduction de bruit reste constante. En pratique le taux de retour vers le niveau ( $b$ ) dû au repompeur devient supérieur au taux de départ. Au-delà d'un certain seuil, il est inutile d'augmenter la puissance du repompeur. Par contre, l'effet parasite du taux de transfert entre ( $b$ ) et ( $a$ ) dû aux faisceaux pièges n'est pas éliminé : quelle que soit la puissance du repompeur, le taux de compression des fluctuations est inférieur à celui obtenu avec le modèle à deux niveaux qui correspond au cas où on peut négliger l'effet des faisceaux pièges.

#### 4.4.6 Etude en fonction de la puissance de la sonde

On a représenté sur la figure 31 les spectres de bruit minimaux pour différentes intensités incidentes. On voit qu'il existe un optimum pour l'intensité. Pour des intensités trop faibles, la non-linéarité n'est pas suffisante pour produire une réduction du bruit appréciable. Inversement, pour des puissances de sonde trop importantes il n'y a plus de réduction de bruit. Cet effet est aussi présent si on considère un modèle

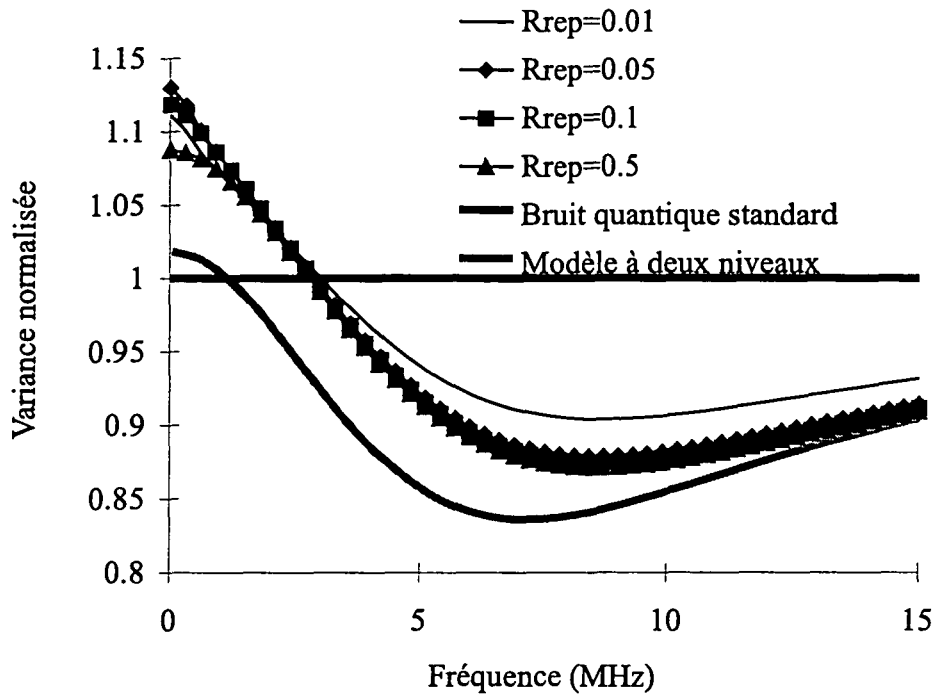


Fig. 30: Spectres de bruit minimal pour différentes valeurs du taux de transfert dû au repompeur.

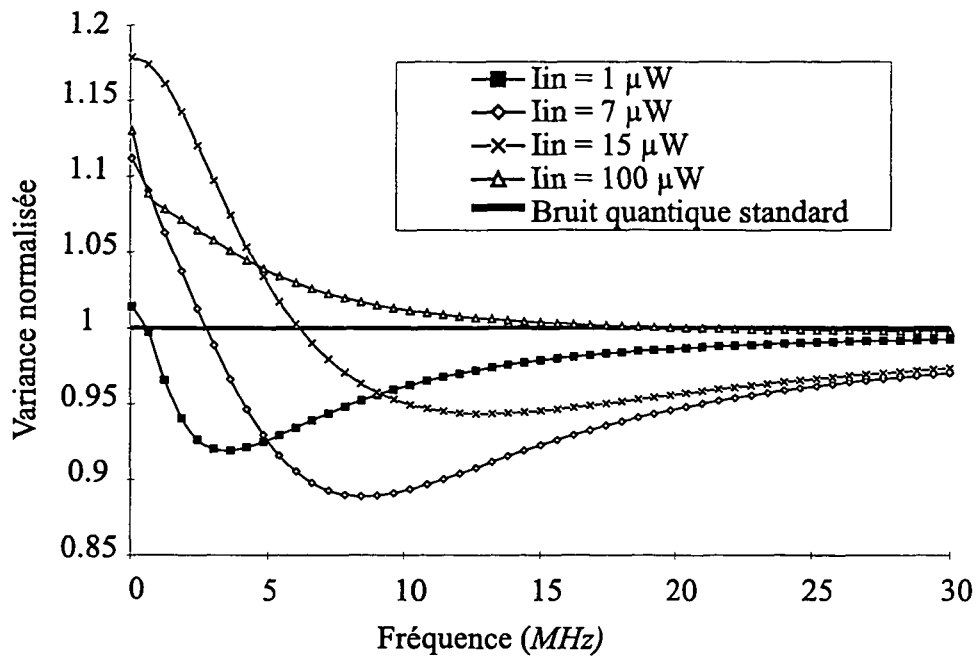


Fig. 31: Spectres de bruit minimal pour différentes valeurs de l'intensité incidente.

à deux niveaux. Il provient vraisemblablement d'un excès de bruit dû à l'émission spontanée : pour une sonde intense, la population du niveau ( $a$ ) devient importante et l'émission spontanée aussi. On peut le vérifier en calculant l'inversion de population entre ( $a$ ) et ( $b$ ) à partir des équations stationnaires de l'article "*A three level approach to squeezing with cold atoms*".

#### 4.4.7 Conclusions

Nous avons développé un modèle de notre expérience afin de prendre en compte l'effet des faisceaux pièges qui fonctionnent durant l'interaction de la sonde avec les atomes. A partir des équations d'Heisenberg-Langevin, nous avons calculé l'expression analytique des spectres de bruit minimal et maximal. Cette étude nous a permis d'obtenir des conditions sur les valeurs des paramètres expérimentaux. Tout d'abord, la puissance des faisceaux pièges doit être fixée à une valeur telle que le nombre d'atomes soit assez important pour obtenir une réduction de bruit appréciable mais suffisamment faible pour ne pas peupler le niveau ( $a$ ) de manière excessive. La puissance optimale obtenue correspond à moins de  $1\text{ mW}$  pour l'ensemble des faisceaux pièges. Ensuite, on a vu que la puissance du repompeur devait être supérieure à une valeur critique mais qu'au delà de cette valeur l'amélioration de la réduction de bruit n'est pas significative. La valeur critique de la puissance du repompeur correspond à  $30\text{ mW}$  pour l'ensemble des trois faisceaux. Enfin, nous avons démontré l'existence d'un optimum pour la puissance du faisceau sonde qui se situe autour de  $7\text{ }\mu\text{W}$ . Nous allons maintenant confronter ces prédictions théoriques aux résultats expérimentaux.



## 5 Mesure de la réduction de bruit

### 5.1 Introduction

Nous allons présenter dans ce chapitre les différentes mesures de bruit que nous avons réalisées. Nous détaillerons dans une première partie les contraintes expérimentales dans lesquelles nous avons travaillé. Ensuite, nous montrerons les résultats obtenus à l'aide d'un analyseur de spectre. Enfin, nous comparerons les résultats obtenus aux prédictions théoriques.

### 5.2 Conditions expérimentales

#### 5.2.1 Le faisceau sonde

##### 5.2.1.1 Choix de la transition

Le choix de la fréquence du faisceau sonde dont on analyse le bruit après interaction avec les atomes froids en cavité est sévèrement limité par certaines contraintes. Nous examinons dans ce paragraphe l'atome de césium excité sur la raie  $D_2$  ( $6S_{1/2} F = 3, 4 \rightarrow 6P_{3/2} F' = 2, 3, 4, 5$ ) par un faisceau sonde polarisé circulairement. Le schéma des niveaux est représenté sur la figure 32.

Avec un faisceau polarisé circulairement, les atomes sont amenés dans le niveau Zeeman de moment magnétique le plus grand. D'une manière générale, les transitions permises sont du type  $J \rightarrow J, J \pm 1$ . Les transitions  $J \rightarrow J - 1$  ou  $J \rightarrow J$  ne sont pas favorables pour la réduction du bruit quantique sur la sonde du fait du pompage optique qui tend à faire passer les atomes dans des niveaux où ils ne pourront plus interagir avec la lumière. Les seules transitions où le pompage optique n'interrompt pas l'interaction des atomes avec la lumière sont donc  $F = 3 \rightarrow F' = 4$  et  $F = 4 \rightarrow F' = 5$ .

La transition utilisée pour le piégeage est  $F = 4 \rightarrow F' = 5$ . On pourrait envisager de placer la fréquence du faisceau sonde au voisinage de la transition  $F = 3 \rightarrow F' = 4$ . Mais il faut pour cela avoir un nombre d'atomes suffisants dans le niveau  $6S_{1/2} F = 3$  ce qui nécessite l'utilisation d'un piège noir [Ketterle 93]. Dans ce type de piège, on fait l'image d'un point noir au centre du piège dans le faisceau de repompage. Ainsi, au centre du piège les atomes sont pompés optiquement vers le niveau  $6S_{1/2} F = 3$ . Cette technique a été utilisée avec succès pour augmenter la non-linéarité dans un nuage

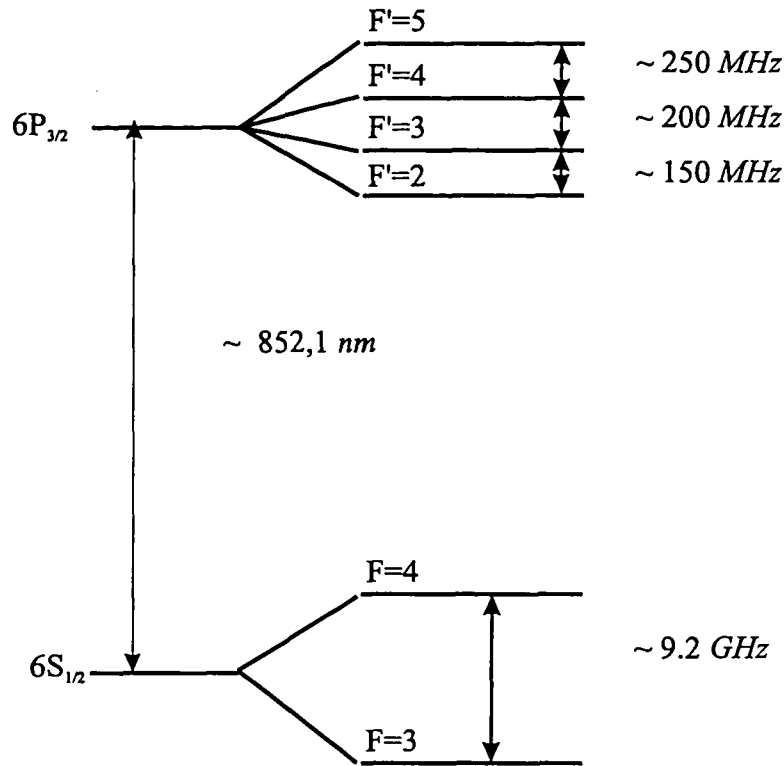


Fig. 32: Schéma des niveaux de l'atome de césium.

d'atomes de rubidium [Grelu 96]. Malheureusement, dans le césium les durées de vie des niveaux sont telles qu'un faisceau additionnel de repompage est nécessaire ce qui complique l'expérience. C'est pourquoi nous avons choisi la même transition pour la sonde que pour le piège à savoir  $6S_{1/2} F = 4 \rightarrow 6P_{3/2} F' = 5$ .

#### 5.2.1.2 Choix de la fréquence

Comme nous l'avons vu, l'intérêt des atomes froids réside dans le fait que l'élargissement Doppler est éliminé. Ainsi, le laser sonde peut être suffisamment proche de résonance sans subir trop d'absorption. Nous avons aussi mentionné précédemment que pour des désaccords suffisamment importants, l'absorption décroît comme l'inverse du désaccord au carré alors que la dispersion non linéaire à l'origine de la réduction de bruit décroît comme l'inverse du désaccord au cube :

$$\phi_{NL} \propto \frac{\delta}{(1 + \delta^2)^2} I \quad (5.1)$$

où  $\delta$  est le désaccord du laser par rapport à la transition atomique normalisé à la largeur du niveau excité et  $I$  l'intensité intracavité. Pour diminuer l'absorption on peut augmenter le désaccord. Pour maintenir la dispersion non linéaire constante, il

suffirait alors d'augmenter la puissance. Cependant, la plage de désaccords réellement utilisables est assez étroite. En effet, si on s'éloigne vers les fréquences élevées, c'est à dire vers le bleu de la transition, on a tendance à chauffer les atomes : l'interaction avec la sonde expulse les atomes hors du piège ce qui n'est pas souhaitable. Il faut donc décaler la fréquence vers le rouge. Ce décalage est cependant limité : si la fréquence du faisceau sonde s'éloigne trop de la résonance, celui-ci interagit avec les niveaux hyperfins voisins,  $6P_{3/2}F' = 4$  puis  $6P_{3/2}F' = 3$ . Pour éviter ces effets parasites, le désaccord retenu dans toutes les mesures présentées ici est d'environ  $50 \text{ MHz}$  dans le rouge de la transition.

### 5.2.1.3 Puissance du faisceau sonde

Il est important de bien choisir la puissance du faisceau sonde. Deux phénomènes influencent ce choix. Si on utilise une puissance trop faible pour sonder les atomes, la non-linéarité n'est pas suffisante pour modifier de façon significative les fluctuations quantiques. Par ailleurs, une puissance trop importante est susceptible de chasser les atomes hors du piège. On vérifie que cela n'est pas le cas en observant le piège à l'aide d'une caméra CCD. Si la puissance de la sonde est très importante, on voit une modification très nette de la luminosité du nuage atomique. Dans nos conditions expérimentales, la luminosité du nuage reste constante et n'est pas modifiée par la présence du faisceau sonde.

## 5.2.2 Le piège magnéto-optique

### 5.2.2.1 Le laser à atomes froids

Nous allons ici décrire à un phénomène qui n'est pas relié directement la réduction de bruit mais qui illustre bien l'importance des faisceaux pièges dans l'expérience. Laurent Hilico avait observé durant sa thèse un phénomène d'émission laser. En effet, le milieu atomique est excité par les faisceaux pièges et est situé dans une cavité optique. Si les faisceaux sont suffisamment intenses, deux phénomènes peuvent être à l'origine d'une émission laser.

Le premier phénomène est basé sur une excitation Raman [Grison 91]. Pour expliquer ce phénomène, nous considérons une transition de type  $J = 1 \rightarrow J = 2$ . Deux ondes dont l'une est intense, la pompe, et l'autre plus faible, la sonde, interagissent avec ces atomes (figure 33). La figure 33 représente les niveaux d'énergie obtenus en prenant comme axe de quantification l'axe de polarisation du faisceau pompe. La pompe crée des déplacements lumineux différents pour chaque sous-niveau Zeeman. Dans le cas d'un désaccord négatif (ce qui est le cas pour les faisceaux pièges), le niveau de plus basse énergie est le niveau  $m = 0$ . De plus, les atomes s'accumulent dans ce niveau à cause du pompage optique.

Dans ces conditions, si la pompe est quasi-résonante avec la transition  $J = 1, m = 0 \rightarrow J = 2, m = 0$  et la sonde résonante avec la transition  $J = 1, m = \pm 1 \rightarrow J = 2, m = 0$ , alors la sonde va être amplifiée. En l'absence de faisceau sonde, l'émission

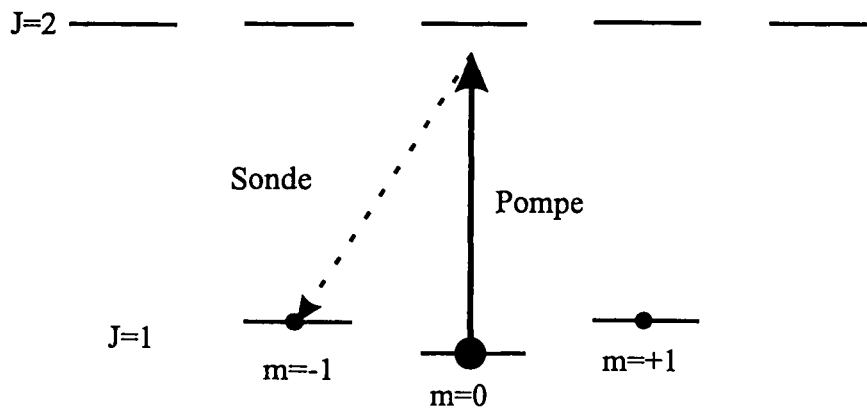


Fig. 33: Schéma des niveaux intervenant pour le laser Raman

spontanée sur la transition  $J = 1, m = \pm 1 \rightarrow J = 2, m = 0$  pourra donner naissance à une émission laser si les pertes dans la cavité sont suffisamment faibles. Cette émission laser de type Raman a lieu à une fréquence proche de la fréquence de la pompe. De plus, la largeur de raie du laser ainsi obtenu est très faible, quelques centaines de  $kHz$  : la largeur est en effet de l'ordre de la largeur des niveaux fondamentaux.

A cause de cette faible largeur de raie (beaucoup plus faible que la bande passante de la cavité qui est de  $10 MHz$ ), l'émission laser ne peut se faire que pour des longueurs de la cavité qui correspondent exactement à la fréquence centrale de la courbe de gain. Ce phénomène porte le nom de tirage de fréquence ("*frequency-pulling*") : la fréquence du laser est la moyenne des fréquences du milieu amplificateur et de la cavité pondérées par leur largeur respective; la fréquence d'émission sera très proche de la fréquence de l'élément le plus étroit, ici le milieu atomique. On met en évidence cette émission laser en balayant la longueur de la cavité.

Le deuxième phénomène est un processus dit hyper-Raman qui fait intervenir quatre photons [Grynberg 93]. Il peut être compris en considérant une assemblée d'atomes à deux niveaux soumis à une onde pompe. Si celle-ci est assez intense, il apparaît des processus à plusieurs photons tel que celui qui fait intervenir l'absorption de deux photons de l'onde intense à la fréquence  $\omega_L$  et les émissions d'un photon spontané à la fréquence de la transition,  $\omega_0$  et d'un photon à la fréquence  $2\omega_L - \omega_0$ . Si on a suffisamment peu de pertes, on peut avoir une émission laser à la fréquence  $2\omega_L - \omega_0$ . Ce type d'émission a une largeur de raie beaucoup plus grande que la précédente, de l'ordre de la largeur de raie du niveau excité,  $5.2 MHz$  dans le cas du césium. Puisque cette largeur de raie est comparable à la bande passante de la cavité, l'oscillation laser se produit pour des longueurs bien définies de la cavité. Par contre, l'effet de tirage de la fréquence par la cavité est beaucoup plus important : l'émission a lieu sur une bande de fréquence beaucoup plus large. Il faut noter cependant qu'il existe des valeurs de la longueur de la cavité pour lesquelles on n'a pas d'émission laser ce qui n'est pas le cas avec un laser standard (pour lequel la largeur en fréquence de la cavité est beaucoup plus faible que le milieu amplificateur).

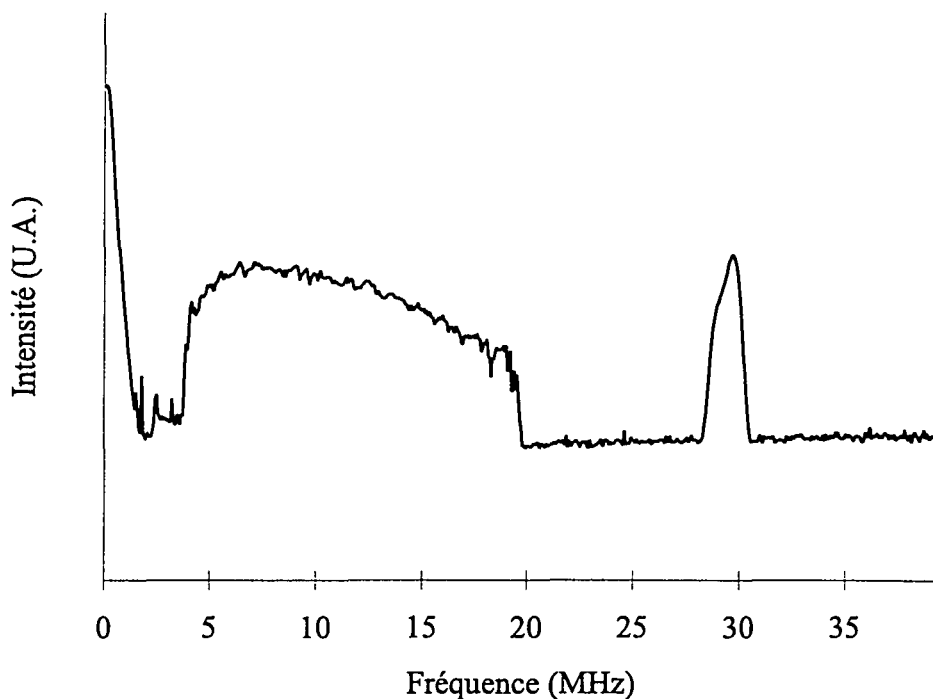


Fig. 34: Spectre du laser à atomes froids. Ce spectre est en fait une superposition de nombreux spectres, correspondant à différentes longueurs de la cavité situées dans un intervalle d'environ une longueur d'onde. Il est obtenu en utilisant l'analyseur de spectre en position "Max-Hold". Pour chaque valeur de la fréquence d'analyse, l'appareil conserve le maximum des valeurs mesurées lors de chaque enregistrement.

Tous ces phénomènes peuvent être mis en évidence au moyen de la détection homodyne utilisée normalement pour la détection de bruit. En effet, si on fait interférer l'oscillateur local optique et l'émission laser produite par les atomes, on réalise une détection hétérodyne puisque les deux lasers n'ont pas la même fréquence. Au niveau du détecteur, on a des interférences aux fréquences somme et différence des deux lasers. La fréquence somme n'est pas détectable mais la fréquence différence est inférieure à une cinquantaine de  $MHz$  et est donc observable avec notre système de détection. Ces interférences peuvent être étudiées à l'aide de l'analyseur de spectre. Le signal obtenu est alors la signature spectrale de l'émission laser. Lorsque la longueur de la cavité change, on observe plusieurs phénomènes : un pic à une position fixe, proche de la fréquence des faisceaux pièges,  $\omega_P$ ; un pic à une fréquence variable en fonction de la longueur (voir figure 34). Avec les données fournies ci-dessus, il est aisé d'interpréter le premier pic comme dû au laser Raman alors que le second est dû à l'interaction à quatre photons.

Ces différents types d'émission sont extrêmement préjudiciables à l'étude de la réduction de bruit en présence des faisceaux pièges. En effet, ils entraînent un fort excès de bruit aux fréquences où on étudie le bruit sur le faisceau sonde. Il est donc très important de les minimiser autant que possible.

Par contre, il faut noter que ces émissions lasers sont très utiles dans le réglage du piège. Il est indispensable que le piège soit correctement centré sur la cavité afin de maximiser la non-linéarité. Pour cela, on mesure la puissance de l'émission laser derrière la cavité à l'aide d'une photodiode et on l'optimise en jouant sur les différents réglages du piège. Nous disposons de trois paires de bobines de champ magnétiques destinées à compenser le champ magnétique terrestre. En ajustant les courants d'alimentation de ces bobines, on peut déplacer le minimum du champ magnétique inhomogène et donc déplacer la position du piège. Nous avons pu mesurer jusqu'à  $50 \mu W$  d'émission laser à la sortie du miroir de couplage.

#### 5.2.2.2 Puissance des faisceaux pièges

Comme nous l'avons déjà remarqué dans le paragraphe précédent et comme nous l'avons démontré dans la partie théorique, la puissance des faisceaux pièges est préjudiciable à la réduction de bruit. Il y a donc un compromis à trouver pour obtenir suffisamment d'atomes tout en ayant un excès de bruit tolérable.

La première solution a été développée par A. Lambrecht et J.M. Courty. Elle consiste à couper les faisceaux pièges et à effectuer la mesure de bruit pendant le temps où les atomes sont encore présents. Cette méthode a fourni de bons résultats mais la réduction de bruit n'est obtenue que de manière transitoire. En effet, la longueur optique de la cavité est balayée par la changement d'indice dû à la fuite des atomes qui dure quelques dizaines de millisecondes. Le voisinage du point tournant de la bistabilité, où la plus grande réduction de bruit est prévue, n'est atteint que pendant quelques *ms*. Un temps aussi court limite sévèrement la bande passante utilisable pour la mesure du bruit. En effet, le signal donné par l'analyseur de spectre est entaché d'un bruit et il est nécessaire de les traiter par un filtre passe-bas (filtre d'affichage ou video-filter). Les contraintes sur le temps de mesure et la bande passante empêchent aussi de balayer la phase de l'oscillateur local assez vite pour trouver la quadrature sur laquelle le bruit est réduit en un seul enregistrement. Il est alors nécessaire de répéter de nombreuses séquences de piégeage-lâcher d'atomes-mesure de bruit pour observer une bonne réduction de bruit. Cette technique est donc délicate à utiliser. De plus, on n'obtient une réduction de bruit que pendant quelques *ms* ce qui est bien inférieur aux temps nécessaires pour faire des mesures plus détaillées de la statistique de bruit de manière à reconstruire la fonction de Wigner (voir chapitre 5).

Une autre voie avait été ouverte dans notre groupe au début de ce travail. Nous avons pu observé de la réduction de bruit en présence de faisceaux pièges atténués. C'est cette seconde méthode que nous avons utilisée pour obtenir les résultats présentés dans ce mémoire. Comme nous l'avons déjà dit, il est nécessaire de trouver pour la puissance des faisceaux pièges un compromis entre les exigences contradictoires du nombre d'atomes suffisant et de faible excès de bruit.

Pour ajuster la puissance des faisceaux pièges, nous utilisons le test fourni par le laser à atomes froids détecté soit dans la lumière transmise derrière la cavité, soit dans la lumière réfléchi. Lorsque les faisceaux pièges sont très intenses, les pics du laser à atomes froids sont plus importants que le pic de transmission de la cavité pour le

faisceau sonde. Lorsqu'on diminue la puissance des faisceaux pièges, les pics dus au laser à atomes froids disparaissent. A la suite de plusieurs séries de mesures, nous avons constaté que la puissance optimale des faisceaux pièges correspondait à la valeur où le laser à atomes froids disparaissait, ce qui nous a fourni un repère commode pour le réglage de l'expérience.

## 5.3 Résultats expérimentaux

### 5.3.1 Procédure de mesure

Pour obtenir une courbe de puissance de bruit du faisceau sonde sur toutes les quadratures, on enregistre le signal de détection homodyne comme indiqué au paragraphe 3.5.2. Ce signal est obtenu en faisant électroniquement la différence entre les parties hautes fréquences des signaux des deux photodiodes de la détection équilibrée. On considère ici la composante à une fréquence donnée du signal de détection homodyne. En l'absence d'interaction avec les atomes, le signal mesuré correspond au bruit quantique standard si le faisceau sonde est un champ cohérent.

Il est possible de s'en assurer en comparant la somme et la différence des signaux de chaque photodiode obtenues sans le faisceau sonde. Si les fluctuations de l'oscillateur local sont limitées par le bruit quantique standard, les signaux somme et différence sont égaux. On voit sur la formule 3.7 que l'on compare alors le bruit de l'oscillateur local au bruit du vide. Comme nous l'avons indiqué au paragraphe 3.6.2.2, l'oscillateur local et la sonde sont obtenus par séparation d'un même faisceau sur une lame. Cette comparaison permet donc de tester aussi le bruit du faisceau sonde. S'il comporte un excès de bruit, les fluctuations de la somme sont supérieures à celles de la différence. C'est ainsi qu'A. Lambrecht a mis en évidence le bruit technique introduit par les modulateurs acousto-optiques. C'est pourquoi le faisceau qui sert de sonde et d'oscillateur local est celui produit directement par le laser Titane:Saphir.

Si le faisceau interagit avec les atomes, on observe une variation du signal sur l'analyseur de spectre lorsqu'on balaye la phase de l'oscillateur local au cours du temps. De plus, il faut une référence pour pouvoir affirmer que le faisceau possède effectivement des fluctuations au-dessous du bruit quantique standard. Pour cela, on enregistre le signal obtenu en remplaçant la sonde par le vide (c'est à dire simplement en bloquant le faisceau). Le bruit obtenu dans ce cas est alors celui du vide, qui est le même que celui d'un état cohérent. Ce bruit correspond aussi au bruit enregistré hors résonance si le faisceau sonde a une intensité bien plus faible que l'oscillateur local. Nous avons vérifié expérimentalement que c'est bien le cas. Le signal de détection homodyne est ensuite envoyé sur l'analyseur de spectre (Textronix 2753P). On utilise celui-ci en mode "Zero-Span" c'est à dire à fréquence fixe (environ 8 MHz, qui est la fréquence où la réduction de bruit doit être maximum). Le signal est enregistré en fonction du temps en même temps que l'on balaye le déphasage de l'oscillateur local, la longueur de la cavité étant fixe. Le signal est ensuite traité sur ordinateur.

Pour normaliser le bruit, nous utilisons un programme LabView développé au cours de ce travail. Cette normalisation se fait en plusieurs étapes. Tout d'abord, on calcule la valeur moyenne du bruit quantique standard obtenu avec le vide. Ensuite, on divise le signal obtenu avec la sonde par cette valeur et on prend le carré de ce rapport. On néglige ici le bruit électronique qui est beaucoup plus faible que le bruit quantique standard (typiquement  $12\text{ dB}$ ) grâce au montage que nous utilisons.

Le choix de la bande passante d'analyse est primordial pour obtenir une mesure du bruit fiable et utilisable. Plus on choisit une bande d'analyse large, plus on moyenne sur une partie importante du spectre de bruit. La bande passante doit rester très inférieure à l'intervalle de fréquence sur lequel le spectre varie de manière appréciable. Dans notre cas, la bande passante maximale qu'on peut utiliser est de l'ordre de  $100\text{ kHz}$ . L'analyseur de spectre effectue de plus un traitement du signal. Il utilise une fréquence d'acquisition exactement suffisante pour échantillonner le signal correctement (soit deux fois la bande passante d'analyse) et moyenne le signal si on utilise un balayage avec un temps supérieur au temps nécessaire. Ainsi, pour une bande passante d'analyse de  $100\text{ kHz}$ , la fréquence d'acquisition est de l'ordre de  $200\text{ kHz}$  alors qu'on fait typiquement l'acquisition de 600 points en  $5\text{ s}$ . Chaque canal est donc obtenu en environ  $1\text{ ms}$  et l'analyseur de spectre peut moyenner près de 200 valeurs pour ce canal. Le bruit sur la mesure est alors réduit d'un facteur  $\sqrt{200}$  si on suppose que sa statistique est gaussienne.

### 5.3.2 Courbes de réduction de bruit

Nous présentons ici une courbe typique obtenue en balayant la phase de l'oscillateur local (figure 35).

Les paramètres expérimentaux sont les suivants : fréquence d'analyse  $8\text{ MHz}$ , puissance de la sonde  $7\text{ }\mu\text{W}$ , puissance de l'oscillateur local  $24\text{ mW}$ , désaccord de la sonde par rapport à la transition atomique  $50\text{ MHz}$ , laser à résonance avec la cavité, bande passante d'analyse  $100\text{ kHz}$ , bande passante d'affichage (video bandwidth)  $3\text{ kHz}$ , coopérativité 20.

On voit que le signal passe très nettement sous la valeur 1 qui correspond au bruit quantique standard : l'interaction avec les atomes froids produit un faisceau comprimé. La réduction de bruit est estimée à 15%. L'excès de bruit est lui de l'ordre de 70%. L'état créé lors de l'interaction entre le champ et les atomes n'est donc pas un état minimal. Cela confirme que le milieu atomique introduit de l'excès de bruit : contrairement à un milieu Kerr parfait qui ne modifie pas l'aire des fluctuations, le milieu atomique augmente cette surface tout en réduisant le bruit sur une des quadratures au-dessous de la limite quantique standard.

Un autre point très important à noter est l'échelle de temps sur laquelle nous faisons la mesure. Elle doit en particulier être comparée à l'échelle de temps obtenue en coupant le piège. On est passé d'une réduction de bruit sur quelques  $\text{ms}$  à une réduction de bruit stable sur plusieurs secondes. Ce gain sur la stabilité du montage permet de faire l'acquisition plus lentement et donc de réduire le bruit sur la mesure.



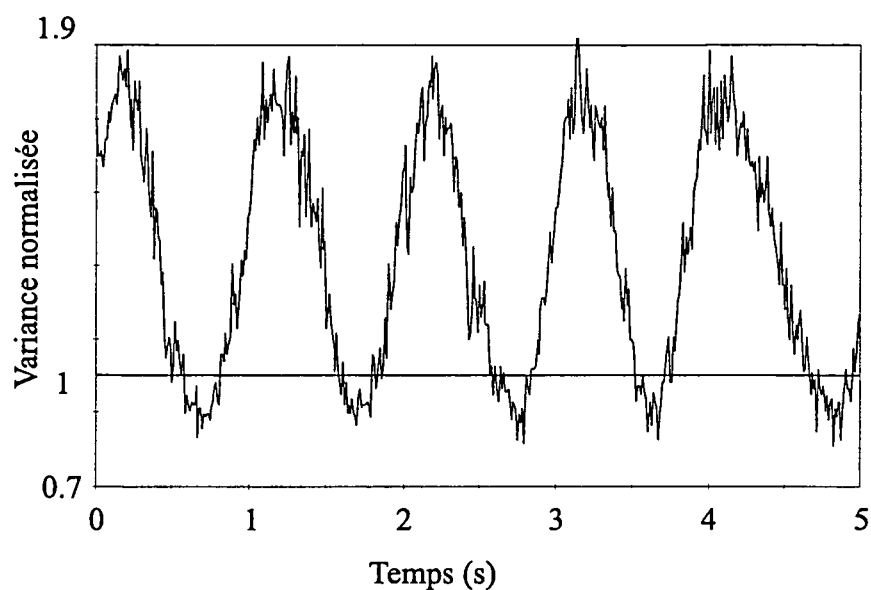


Fig. 35: Variance normalisée en fonction du temps

De plus, ce gain sur la durée de la réduction de bruit est indispensable pour réaliser la mesure de la matrice densité par la méthode dite de tomographie quantique.

## 5.4 Comparaison théorie-expérience

### 5.4.1 Introduction

Afin de comparer les résultats expérimentaux et les prédictions du modèle théorique présenté au chapitre 3, nous enregistrons des courbes de réduction de bruit dans deux régimes différents correspondant à deux puissances différentes des faisceaux pièges. On s'attend en effet à ce que la présence de faisceaux pièges intenses diminue notablement la réduction de bruit. Le premier régime est celui dans lequel on observe la meilleure réduction de bruit, c'est à dire lorsque la puissance des pièges est faible. Pour tester la validité du modèle, on se place ensuite dans un second régime où la puissance des faisceaux pièges est importante. Cela rajoute un excès de bruit important qui peut être pris en compte par notre modèle. Dans les deux types de mesure, pour chaque valeur de la fréquence, on enregistre deux courbes analogues à celle de la figure 35. On note la valeur des bruit minimaux et maximaux : on obtient environ 10 valeurs au total dont on fait la moyenne. La barre d'erreur indiquée sur les spectres correspond à la dispersion observée sur les valeurs expérimentales.

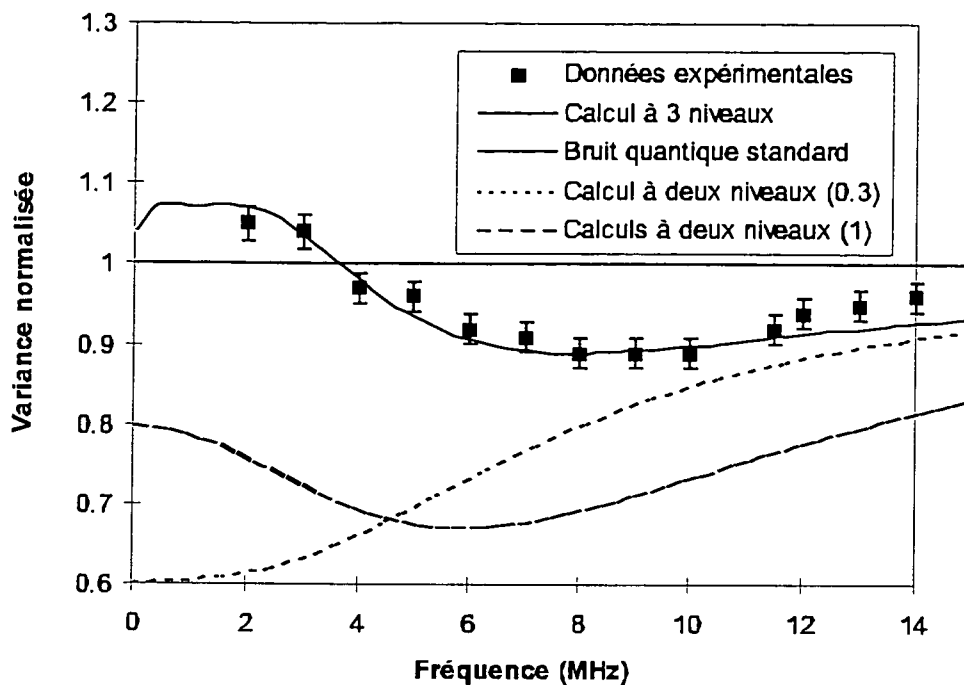


Fig. 36: Spectre de bruit minimal dans le cas des faisceaux pièges peu intenses

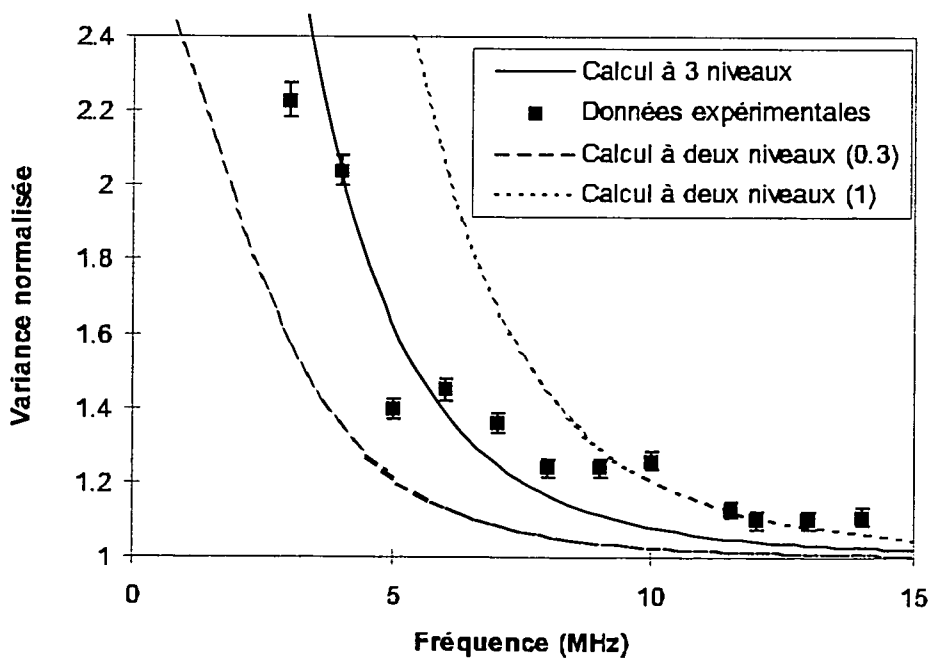


Fig. 37: Spectre de l'excès de bruit dans le cas des faisceaux pièges peu intenses

### 5.4.2 Cas des faisceaux pièges peu intenses

Dans ces conditions, on obtient pour le bruit minimal le spectre de la figure 36. Le spectre de bruit maximal est donné sur la figure 37. Les paramètres utilisés dans le calcul valent :  $C = 20$ ,  $R_T = 0.01$ ,  $R_{rep} = 0.05$ ,  $\gamma_b/\kappa = 0.01$ . Ces valeurs correspondent aux valeurs mesurées expérimentalement pour la puissance de la sonde et des faisceaux pièges. Pour faire le calcul, il faut de plus déterminer le déphasage entre la cavité et le champ sonde. Nous avons mentionné plus haut que nous nous plaçons au voisinage du maximum de transmission pour le faisceau sonde. A l'aide des valeurs stationnaires données par le modèle, on peut remonter à la valeur du déphasage. Cette procédure à l'inconvénient d'ignorer la présence du pompage optique.

Notre modèle est un modèle à trois niveaux. Il ne peut donc pas prendre en compte le pompage optique qui intervient dans le système réel à cause de la polarisation du faisceau sonde. Or ce pompage optique est responsable d'une non-linéarité qui déforme la courbe de transmission. En conséquence, l'allure du champ intracavité mesurée expérimentalement est différente de la courbe prédite par notre modèle. Il est nécessaire de prendre en compte ce phénomène dans nos calculs. Pour cela, on place le point de fonctionnement sur la courbe de transmission théorique à l'endroit où l'intensité correspond à l'intensité obtenue expérimentalement (intensité normalisée à l'intensité transmise en l'absence d'atomes). La valeur prise correspond à 1/3 du maximum. Cette méthode donne des résultats satisfaisants.

On obtient alors les courbes de bruit minimal et de bruit maximal prédites par ce modèle pour ces paramètres. Nous avons représenté aussi les spectres prédits par un simple modèle à deux niveaux en se plaçant à une intensité correspondant au maximum (1). On voit que le modèle à trois niveaux fournit des prédictions qui sont en très bon accord avec les mesures expérimentales alors que le modèle à deux niveaux sous-évalue l'excès de bruit : ce modèle ne prend pas en compte le bruit introduit par les faisceaux pièges. De plus, la valeur que nous avons prise pour l'intensité de la sonde n'est pas à l'origine de la différence entre les deux modèles. Ceci peut être vérifié en traçant les spectres de bruit maximal et minimal prédites par le modèle à deux niveaux pour une intensité relative de la sonde identique à celle utilisée dans le modèle à trois niveaux. Dans ce cas, le modèle à deux niveaux sous-évalue une fois de plus le bruit introduit par les faisceaux pièges.

### 5.4.3 Cas des faisceaux pièges intenses

Nous traitons maintenant la situation où les faisceaux pièges sont intenses et introduisent de l'excès de bruit. C'est un cas qui s'éloigne encore plus du cas correspondant au modèle à deux niveaux. On obtient le spectre de la figure 38. Le spectre de bruit maximal est représenté sur la figure 39. Les paramètres utilisés dans le calcul valent :  $C = 25$ ,  $R_T/\kappa = 0.08$ ,  $R_{rep}/\kappa = 0.05$ ,  $\gamma_b/\kappa = 0.05$ . Ces valeurs correspondent aux valeurs mesurées expérimentalement pour la puissance de la sonde et des faisceaux pièges. On obtient alors les courbes de bruit minimal et de bruit maximal prédites par

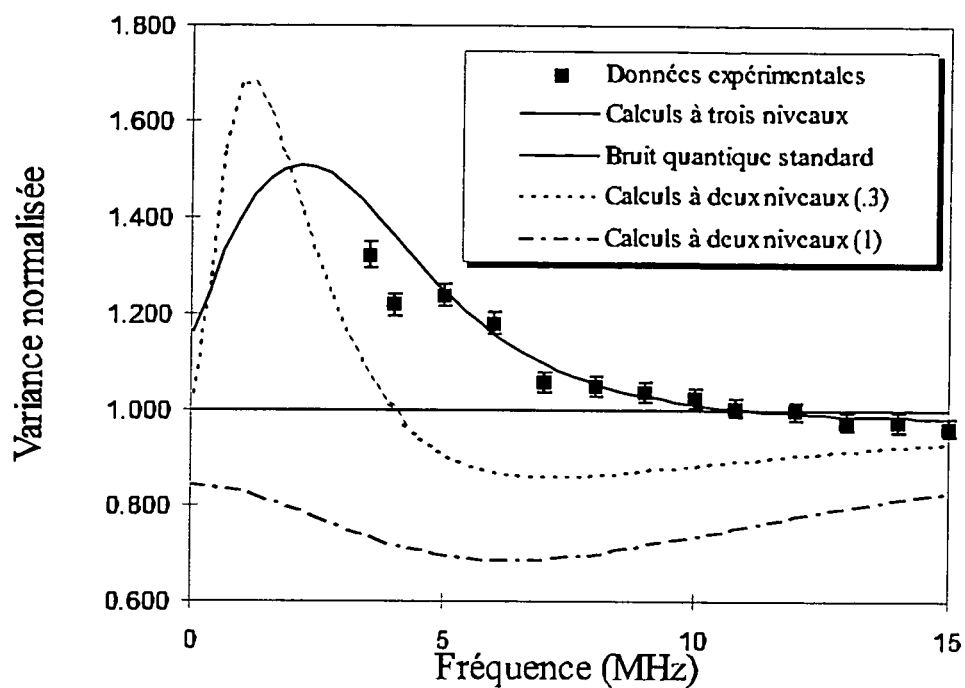


Fig. 38: Spectre de bruit minimal dans le cas des faisceaux pièges intenses

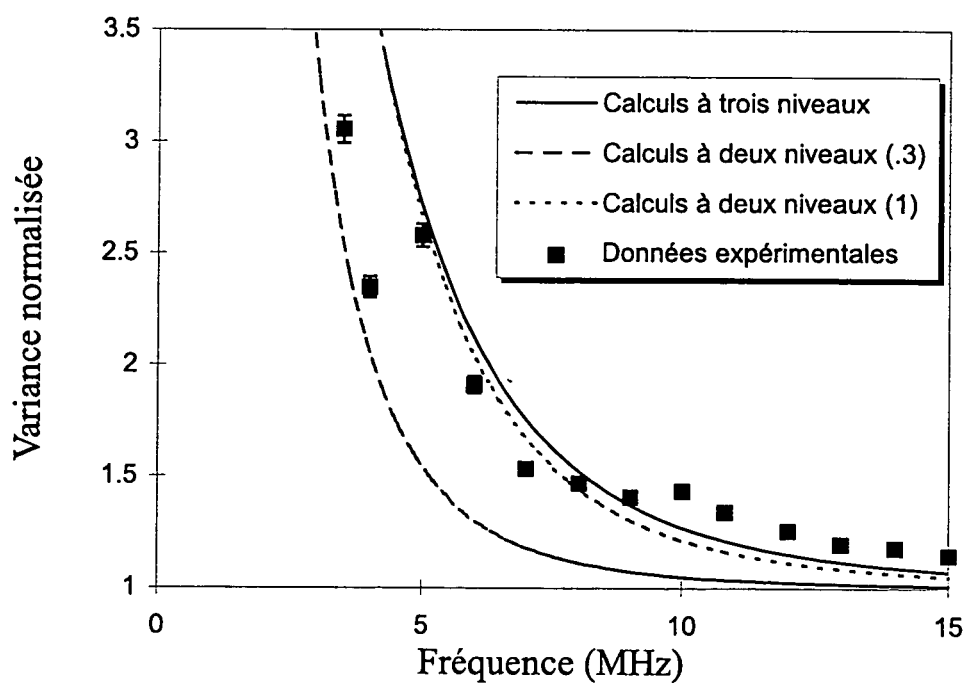


Fig. 39: Spectre de l'excès de bruit dans le cas des faisceaux pièges intenses

ce modèle pour ces paramètres. Nous avons représenté aussi les spectres prédits par un simple modèle à deux niveaux en se plaçant à une intensité correspondant au maximum (1) ou à la même hauteur que lors de la mesure expérimentale (0.3). On voit que le modèle à trois niveaux fournit des prédictions qui sont en bon accord avec les mesures expérimentales alors que le modèle à deux niveaux sous-évalue une fois de bruit.

## 5.5 Conclusions

Afin de valider le modèle théorique à trois niveaux que nous avons développé, nous avons réalisé des mesures complètes des spectres de bruit minimal et maximal dans deux régimes de paramètres sensiblement différents. Par ailleurs, nous avons mesuré les paramètres intervenant dans le modèle afin de n'avoir aucune variable ajustable. Dans un premier régime favorable à la réduction de bruit, l'effet des faisceaux pièges est assez faible pour permettre d'observer une réduction du bruit quantique standard. Le bruit minimal mesuré était alors réduit par rapport au bruit quantique standard de 15%. Si on prend en compte l'effet du pompage optique qui réduit la valeur effective du champ intracavité, le modèle à trois niveaux fourni dans ce cas des prédictions en bon accord avec les valeurs mesurées tant pour la réduction de bruit que pour l'excès de bruit. Dans un second régime, nous avons augmenté sensiblement la puissance des faisceaux pièges. Il n'est alors plus possible d'observer une réduction du bruit significative. Néanmoins, là aussi, les résultats fournis par le modèle sont en excellent accord avec les mesures expérimentales.

Nous discuterons dans la conclusion de ce mémoire les améliorations à apporter au modèle pour prendre en compte les effets de pompage optique.

---

## 6 Tomographie Quantique : Principes et mise en oeuvre expérimentale

### 6.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre la méthode de tomographie quantique et sa mise en oeuvre expérimentale. Le but de la tomographie quantique est d'obtenir expérimentalement la matrice densité du champ électromagnétique dans une base donnée. Ceci donne une information non plus simplement sur la valeur moyenne et la valeur quadratique moyenne du champ mais sur tous les moments d'ordre supérieur. C'est donc un outil précieux pour l'étude de la statistique du rayonnement produit dans l'interaction avec les atomes. On obtient ainsi la représentation de Wigner du champ électromagnétique ou la matrice densité dans la base de Fock ou dans la base d'amplitude du champ. Comme nous le verrons ce problème est similaire à celui de la tomographie médicale qui est une méthode utilisée depuis plusieurs décennies.

La tomographie médicale est une méthode d'imagerie du corps humain. Elle permet d'obtenir la distribution dans un plan de coupe d'une grandeur distribuée dans un volume. Cette grandeur peut être l'absorption dans le cas de la tomographie en transmission ou la répartition de noyaux radioactifs dans le cas de la tomographie d'émission. On peut ainsi déterminer la répartition d'un certain type de cellule ou l'irrigation d'une certaine partie du cerveau. Formellement, on peut obtenir les valeurs d'une fonction  $f(x, y, z)$  dans un plan  $z = z_0$  à partir de projections de cette fonction sur différents plans perpendiculaires à  $Oz$ . Depuis quelques années, de nombreux travaux théoriques puis expérimentaux ont montré que ce formalisme pouvait être transposé à la mesure de la matrice densité du champ électromagnétique

Nous allons commencer ce chapitre par un rappel des principes et des méthodes de la tomographie médicale. Ensuite, nous présenterons les principes de la tomographie quantique en montrant les analogies avec la tomographie médicale. Nous détaillerons ensuite les moyens utilisés pour la réalisation expérimentale que nous avons faite. Enfin, nous donnerons les résultats obtenus avec notre montage et les conclusions que l'on peut en tirer.

## 6.2 Tomographie médicale

### 6.2.1 Introduction

Nous allons rappeler dans ce paragraphe les principales propriétés de la méthode de tomographie médicale. Le but de cette méthode est d'obtenir une cartographie du corps humain vivant. Pour cela, on utilise des images provenant de divers types de mesures, imagerie par rayons X, émission d'ondes  $\gamma$  ... Ces images sont planes et pour reconstruire une image volumique du corps humain des techniques d'interprétation doivent être utilisées.

Deux types de mesure sont susceptibles d'être utilisées en tomographie médicale. La première méthode, dite tomographie de transmission, utilise un émetteur extérieur au corps humain et enregistre le signal ayant traversé le corps (voir figure 40). La seconde méthode utilise des émetteurs placés à l'intérieur du corps humain (éléments radioactifs en particulier). Les deux méthodes conduisent à des équations identiques même si elles mesurent des grandeurs différentes (répartition de l'absorption pour la tomographie de transmission et répartition de la radioactivité injectée pour la tomographie d'émission). Nous exposerons brièvement la méthode de tomographie de transmission puis nous présenterons les diverses techniques de reconstruction utilisées.

### 6.2.2 Tomographie de transmission: principes

On considère que l'objet est éclairé par un émetteur ponctuel et que le signal est recueilli sur un détecteur ponctuel. On suppose que le milieu n'est pas diffusif pour les particules utilisées (photons X dans la plupart des cas). Dans ce cas, le signal vu sur le détecteur est l'absorption sur la droite définie par l'émetteur et le détecteur. En pratique, à  $\theta$  fixé, on translate l'ensemble émetteur-détecteur dans la direction perpendiculaire (ie  $\frac{\pi}{2} - \theta$ ). Les différentes positions du système sont définies par  $\xi$ .

Le signal sur le détecteur est donné par :

$$P_{\theta}(\xi) = \int_{\xi, \theta} F(x, y) dx dy \quad (6.1)$$

l'intégrale est calculée sur la droite qui joint l'émetteur au détecteur;  $F(x, y)$  désigne l'absorption du matériau au point  $(x, y)$  et  $P_{\theta}(\xi)$  est le signal lu sur le détecteur au point  $\xi$  pour l'angle  $\theta$  qui définit l'orientation de l'ensemble émetteur-détecteur par rapport à un axe fixé :

$$\xi = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

Comme nous le montrerons rigoureusement par la suite, il est possible de calculer  $F(x, y)$  en utilisant un ensemble de fonctions  $P_{\theta}(\xi)$  enregistrées pour des valeurs de  $\theta$

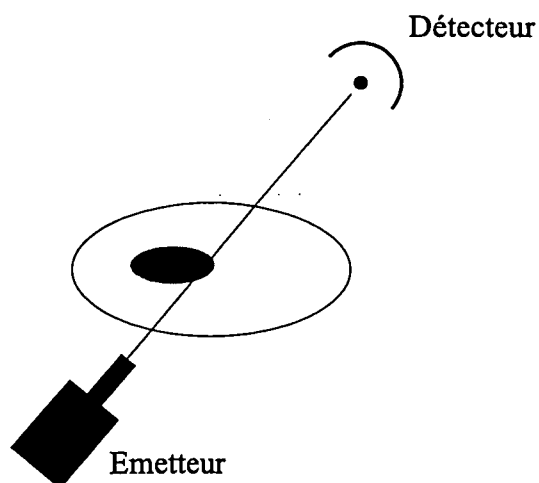


Fig. 40: Schéma de principe de la tomographie d'émission.

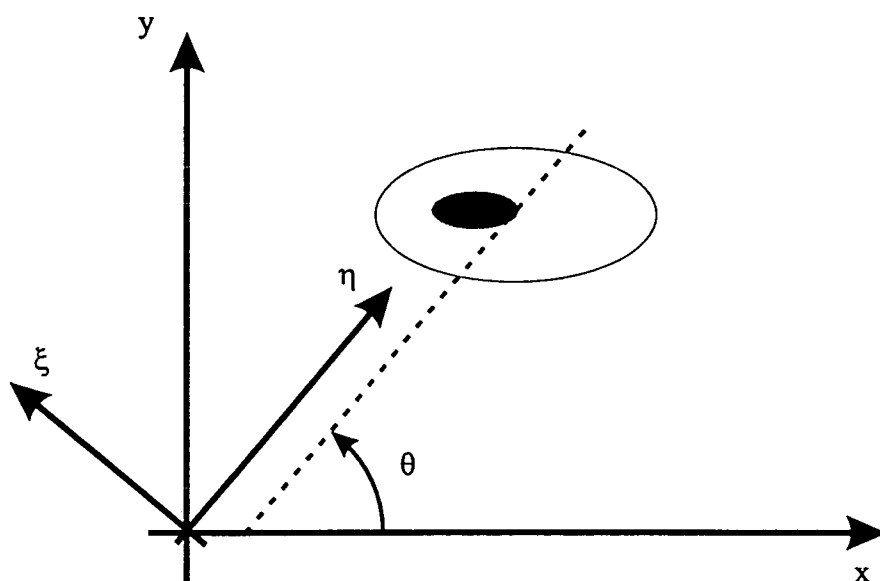


Fig. 41: Calcul du signal obtenu sur le détecteur

différentes. Les étapes de l'enregistrement de ces différentes fonctions sont représentées sur la figure 42.

### 6.2.3 Rétroprojection simple

La méthode la plus intuitive pour reconstruire la fonction  $F$  est de rétroprojeter les valeurs obtenues sur chaque angle (figure 43). Cette opération consiste à affecter à chaque point du plan la somme des valeurs correspondant à chaque projection. La formule de reconstruction est alors :



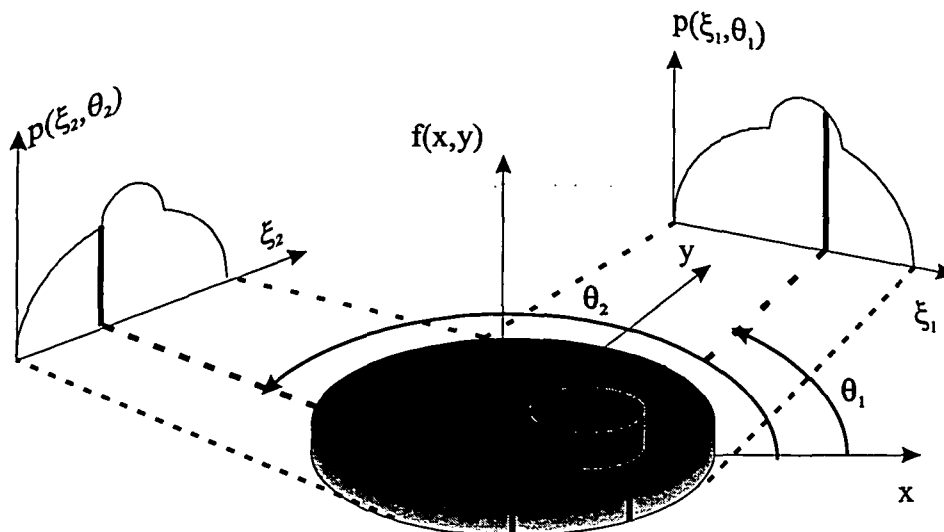


Fig. 42: Enregistrement des projections pour différents angles.

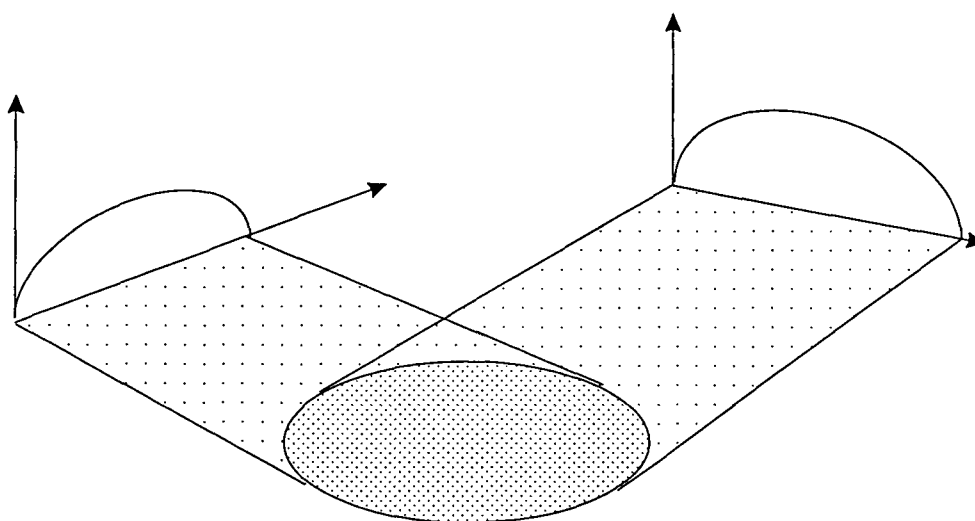


Fig. 43: Rétroprojection simple

$$f(x, y) = \int_0^\pi P_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \quad (6.2)$$

L'inconvénient de cette méthode est de faire apparaître des points parasites : on trouve des points qui n'étaient pas dans l'image initiale. Dans le cas de la figure 43 où le plan de coupe ne contient qu'une petite région de grande densité et où le nombre de projections réalisées est limité, l'image obtenue par rétroprojection contient un artefact

en forme d'étoile, faisant croire à l'existence d'une densité non nulle dans des secteurs où elle l'est pourtant. Si le nombre de projections augmente, il apparaît un véritable bruit de fond sur l'image.

### 6.2.4 Reconstruction bidimensionnelle de Fourier

Une seconde méthode a été proposée pour calculer la distribution  $F$ . Elle est basée sur la relation qui lie  $\tilde{F}(k_x, k_y)$ , la transformée de Fourier bidimensionnelle de  $F$  et les transformées de Fourier unidimensionnelles des projections,  $\tilde{P}_\theta(k)$  :

$$\tilde{P}_\theta(k) = \tilde{F}(k_x, k_y) \quad (6.3)$$

avec

$$k = -k_x \sin \theta + k_y \cos \theta \quad (6.4)$$

Cette relation s'obtient directement à partir de la relation 6.1. En effet, on a :

$$\tilde{P}_\theta(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi P_\theta(\xi) e^{-ik\xi} \quad (6.5)$$

avec

$$\xi = -x \sin \theta + y \cos \theta \quad (6.6)$$

Si on remplace  $P_\theta(\xi)$  par son expression déduite de 6.1, on obtient

$$\tilde{P}_\theta(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy F(x, y) e^{-ik\xi} \quad (6.7)$$

soit

$$\tilde{P}_\theta(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy F(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} \quad (6.8)$$

$$= \tilde{F}(k_x, k_y) \quad (6.9)$$

Les transformées de Fourier des fonctions  $P_\theta(\xi)$  correspondant aux différentes directions de projections sont donc liées à  $\tilde{F}$ . Cependant cette représentation est une représentation en coordonnées cylindriques : pour chaque angle  $\theta$ , on connaît la répartition de  $\tilde{F}$ , c'est à dire  $\tilde{P}_\theta(k)$ . Cependant les algorithmes de Transformée de Fourier Rapide à deux dimensions partent d'une représentation cartésienne d'une fonction pour

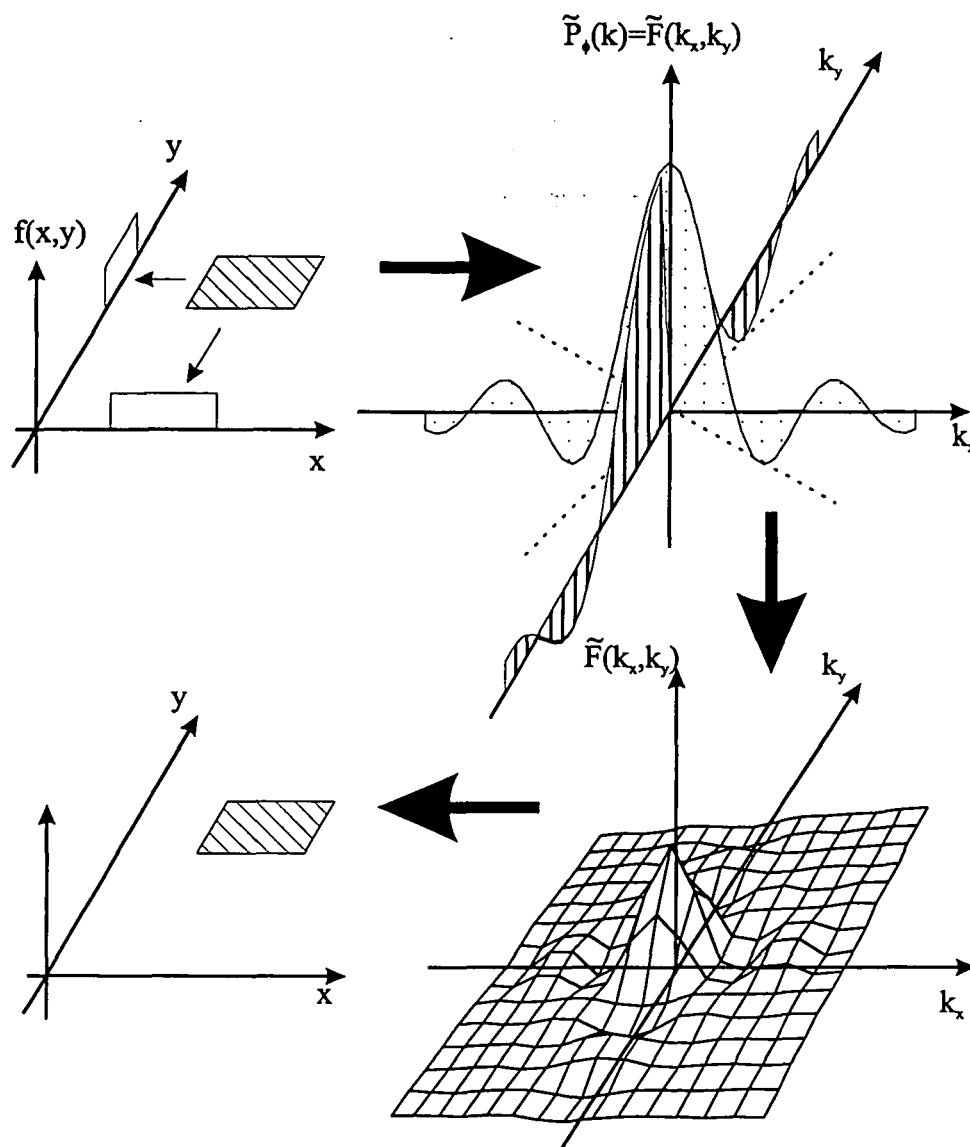


Fig. 44: Etapes de la reconstruction bidimensionnelle de Fourier.

en déduire sa transformée de Fourier (ou sa transformée de Fourier inverse). Ces algorithmes comptent parmi les plus efficaces en traitement numérique du signal. Il est donc indispensable d'effectuer des interpolations pour passer à un maillage rectangulaire. De ce maillage, on peut alors passer à la distribution initiale (figure 44). Or, si les interpolations peuvent être réalisées sans perte d'informations (d'après le théorème de Shannon) elles nécessitent des temps de calculs beaucoup plus longs. La méthode est simple (et exacte) mais malheureusement, elle est très gourmande en temps de calcul. On lui préfère une autre méthode dite de filtrage de Fourier

### 6.2.5 Filtrage de Fourier - Transformée de Radon inverse

Cette méthode est basée sur une relation entre la fonction à reconstruire,  $F$  et la fonction obtenue par rétroprojection directe,  $f$ . Comme le calcul de  $f$  est aisé et que les autres calculs sont des transformées de Fourier, cette méthode est efficace.

Afin d'obtenir le lien entre  $F$  et  $f$  on remplace  $P_\theta(\xi)$  par sa transformée de Fourier dans l'équation 6.2 :

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi dk d\theta \tilde{P}_\theta(k) \exp[2i\pi k(x \cos \theta + y \sin \theta)] \quad (6.10)$$

où  $\tilde{P}_\theta(k)$  est la transformée de Fourier de  $P_\theta(\xi)$ ; de plus, on a :

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \tilde{f}(k_x, k_y) \exp[2i\pi(k_x x + k_y y)] \quad (6.11)$$

où  $\tilde{f}(k_x, k_y)$  est la transformée de Fourier de  $f(x, y)$ ; donc en passant en coordonnées polaires:  $dk_x dk_y = |k| dk d\theta$  et  $k_x x + k_y y = k(x \cos \theta + y \sin \theta)$ , on obtient par unicité de la transformée de Fourier :

$$|k| \tilde{f}(k_x, k_y) = \tilde{P}_\theta(k) \quad (6.12)$$

Par ailleurs, comme on l'a vu (relation 6.3) :

$$\tilde{P}_\theta(k) = \tilde{F}(k_x, k_y) \quad (6.13)$$

où  $\tilde{F}(k_x, k_y)$  est la transformée de Fourier de  $F$ . On en déduit donc la relation :

$$\tilde{F}(k_x, k_y) = |k| \tilde{f}(k_x, k_y) \quad (6.14)$$

On a donc une relation directe entre  $F$  et  $P_\theta$  :

$$F(x, y) = \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} dk_x dk_y \left\{ |k| \left[ \int_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} d\xi \left( \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} P_\theta(\xi) d\theta \right) e^{2i\pi k\xi} \right] e^{-2i\pi(k_x x + k_y y)} \right\} \quad (6.15)$$

avec  $\xi = x \cos \theta + y \sin \theta$  et  $|k| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ .

Cette formule qui relie  $F(x, y)$  à  $P_\theta(\xi)$  est appelée transformée de Radon inverse.

### 6.2.6 Mise en oeuvre expérimentale

Dans la pratique, on ne dispose bien entendu pas des expressions analytiques des fonctions  $P_\theta(\xi)$  mais uniquement des valeurs numériques. Il est donc nécessaire d'utiliser un traitement informatique. On enregistre donc des fonctions  $P_\theta$  pour des angles répartis de manière régulière sur  $[0, \pi]$ . On calcule la rétroprojection inverse de ces fonctions c'est à dire  $f$ . On calcule la transformée de Fourier de cette fonction en utilisant un algorithme de Transformée de Fourier Rapide. On fait le filtrage en multipliant par  $|k|$  puis on utilise un algorithme de Transformée de Fourier Rapide Inverse pour obtenir la valeur expérimentale de  $F$ . Cette méthode est relativement simple à mettre en oeuvre. En effet, la plupart des opérations sont des intégrations donc des sommes et les algorithmes de Transformée de Fourier Rapide sont très efficaces.

## 6.3 Tomographie quantique

Nous allons voir dans cette partie les liens qui existent entre la tomographie de transmission et la tomographie quantique. Nous montrerons en particulier les analogies formelles entre ces deux techniques. Ensuite, nous expliquerons les méthodes utilisées expérimentalement. La première méthode de reconstruction est basée sur la transformée de Radon inverse. Nous détaillerons une deuxième méthode de reconstruction de la fonction de Wigner qui évite le filtrage qui apparaît dans la reconstruction. Enfin, nous parlerons de deux méthodes qui permettent de reconstruire directement la matrice densité sans passer par le calcul de la fonction de Wigner.

### 6.3.1 Bases de la tomographie quantique

Comme nous l'avons déjà mentionné 2.3.3, la distribution de probabilité du champ  $P_\theta(x_\theta)$  pour une quadrature  $x_\theta$  est reliée à la fonction de Wigner par la relation :

$$P_\theta(x_\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x_\theta \cos \theta - p_\theta \sin \theta, x_\theta \sin \theta + p_\theta \cos \theta) dp_\theta \quad (6.16)$$

Il est important de noter que cette relation est une intégrale et pas une projection. De simples projections ne permettraient pas de reconstruire une fonction quelconque alors que l'algorithme de la transformée de Radon est exact pour n'importe quelle fonction sans singularité. Cette relation entre la fonction de Wigner et les fonctions  $P_\theta(x_\theta)$  est représenté sur la figure 45.

Cette relation est très similaire à la relation obtenue en tomographie d'émission :

$$P_\theta(\xi) = \int_{\xi, \theta} F(x, y) dx dy \quad (6.17)$$

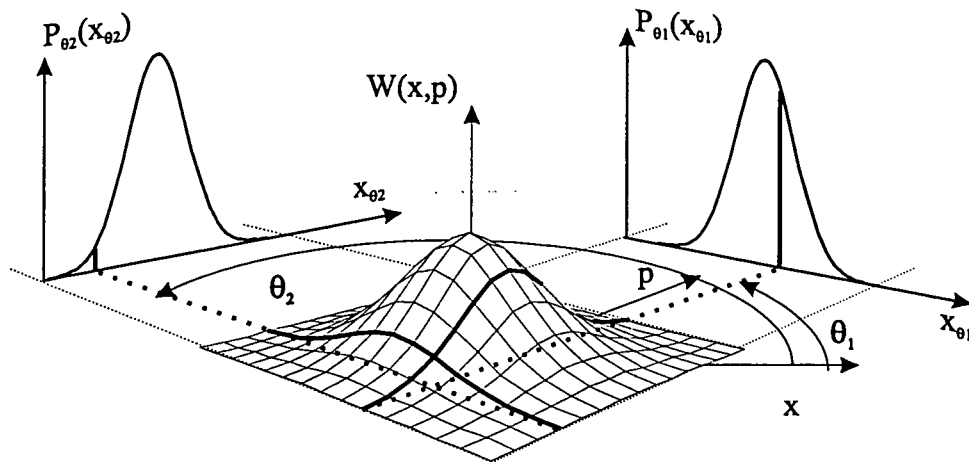


Fig. 45: Relation entre la fonction de Wigner et les distributions de probabilité

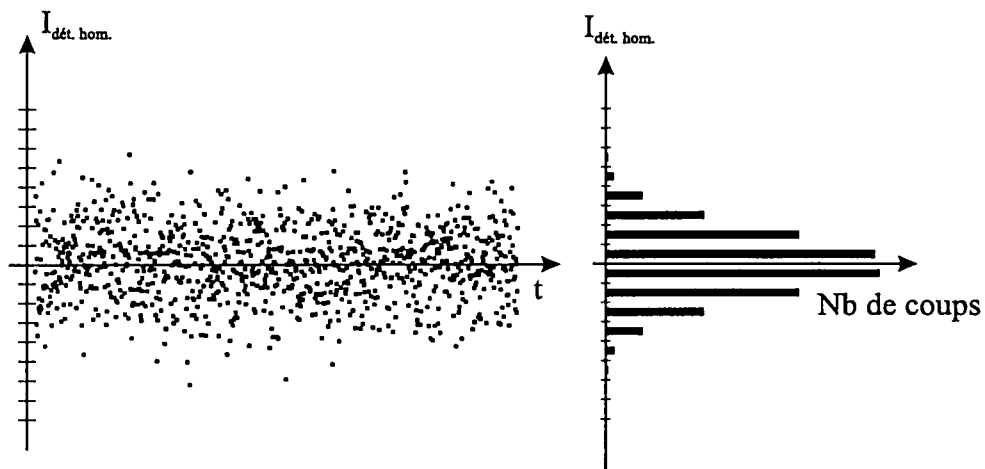


Fig. 46: Calcul de la distribution de probabilité à partir du signal de détection homodyne

où  $x = \xi \cos \theta - \eta \sin \theta$  et  $y = \xi \sin \theta + \eta \cos \theta$ .

Comme nous l'avons démontré, il est possible, connaissant les fonctions  $P_{\theta}(\xi)$ , de remonter à  $F(x, y)$  avec des algorithmes très efficaces. De la même façon, il est possible de remonter à la fonction de Wigner connaissant les distributions de probabilités pour un ensemble de quadratures.

Il faut maintenant obtenir les distributions de probabilités. Pour un signal numérique, la distribution de probabilité est obtenue à partir de son histogramme : on numérise les valeurs de ce signal et on trace le nombre de coups dans un canal donné en fonction de l'intensité centrale de ce canal (figure 46).

On rappelle la formule reliant le signal de détection homodyne aux fluctuations quantiques:

$$\hat{I} = (\delta \hat{E}_S e^{+i\theta} + \delta \hat{E}_S^* e^{-i\theta}) \langle \hat{E}_{OL} \rangle \quad (6.18)$$

Ce signal est proportionnel au bruit quantique du faisceau sonde dans la quadrature déterminée par la phase de l'oscillateur local. Il suffit d'enregistrer le signal de détection homodyne pour obtenir le signal correspondant à la quadrature fixée par la phase de l'oscillateur local et de là les distributions de probabilités pour différentes directions, c'est à dire différents déphasages entre l'oscillateur local et la sonde.

Pour obtenir l'ensemble d'histogrammes nécessaire à la reconstruction de la fonction de Wigner, il faut donc enregistrer plusieurs signaux correspondant à des phases réparties sur un intervalle de longueur  $\pi$ . La procédure expérimentale serait donc de fixer un déphasage entre l'oscillateur local et la sonde, d'enregistrer pendant un temps donné le signal de détection homodyne et d'en extraire l'histogramme correspondant à la distribution de probabilité de la phase considérée. De fait, pour éviter les dérives qui se produisent sur des échelles de temps longues, on enregistre le signal de détection homodyne en balayant la phase de l'oscillateur local. On divise ensuite ce signal en un certain nombre d'intervalles (128 typiquement) sur chacun desquels on peut considérer que la phase est constante. On obtient ainsi 128 histogrammes qui seront utilisés pour la reconstruction de la fonction de Wigner.

### 6.3.2 Filtrage de Fourier

Nous avons vu comment on obtient expérimentalement les histogrammes qui permettent de reconstruire la fonction de Wigner. La première méthode pour reconstruire cette fonction est basée sur le filtrage de Fourier décrit au paragraphe 6.2.5. Cette méthode a été la première utilisée en tomographie quantique. Cependant, comme nous l'avons vu, elle correspond à un filtrage. Ceci peut être gênant si on s'intéresse aux fréquences de variation élevées dans l'espace des phases. Une autre méthode a été développée par Janicke et Wilkens [?].

### 6.3.3 Calcul par régularisation quadratique

On peut écrire la relation entre  $W$  et  $P_\theta$  sous une forme compacte:

$$W(x, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} dk |k| \int_0^\pi d\theta P_\theta(\xi) \exp[2i\pi k(x \cos \theta + p \sin \theta - \xi)] \quad (6.19)$$

La première intégration donne la fonction rétroprojetée, la deuxième réalise la transformée de Fourier et le filtrage, et la troisième la transformée de Fourier inverse.

En posant  $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk |k| \exp(-2i\pi kx)$ , et  $y = x \cos \theta + p \sin \theta$ , il vient:

$$W(x, p) = \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi P_\theta(\xi) g(\xi - y) \quad (6.20)$$

Mais l'intégrale qui définit  $g(x)$  n'est pas convergente. Pour donner un sens à l'expression précédente on introduit la fonction  $\tilde{g}_\varepsilon$  :

$$\tilde{g}_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk |k| \exp(-4\pi^2 \varepsilon k^2 + 2i\pi kx) = \frac{1}{\varepsilon} \left[ 1 - 2u \exp(-u^2) \int_0^u \exp(t^2) dt \right] \quad (6.21)$$

où  $u = x/(2\sqrt{\varepsilon})$

La méthode de calcul consiste tout d'abord à tabuler la fonction  $\tilde{g}_\varepsilon$  en utilisant l'équation 6.21. Les valeurs de  $x$  pour lesquelles il est nécessaire de calculer  $\tilde{g}_\varepsilon$  sont fixées par les valeurs de  $x$  et  $p$  pour lesquelles on désire obtenir la fonction de Wigner ainsi que par les valeurs de  $P_\theta(x')$  obtenues expérimentalement. Un algorithme de transformation de Fourier rapide permet de calculer le produit de convolution dans l'équation 6.20 où  $g$  est remplacée par  $\tilde{g}_\varepsilon$ . La sommation sur  $\theta$  donne la fonction  $W$  de manière approchée. La reconstruction de  $W$  est d'autant plus fidèle que  $\varepsilon$  est petit. Le choix de  $\varepsilon$  résulte donc d'un compromis entre le temps de calcul et la précision.

C'est cette méthode que nous avons utilisé dans notre reconstruction de la fonction de Wigner.

### 6.3.4 Reconstruction directe de la matrice densité

Nous allons décrire dans ce paragraphe deux méthodes développées afin de reconstruire la matrice densité dans la base de Fock et dans la base d'amplitude du champ. L'intérêt de ces méthodes est de ne pas passer par le calcul de la fonction de Wigner mais d'utiliser directement les distributions de probabilité obtenues expérimentalement.

#### 6.3.4.1 Reconstruction directe de la matrice densité dans la base de Fock

Il est possible d'obtenir la matrice densité dans la base de Fock en utilisant une méthode développée par D'Ariano *et al.* [D'Ariano 94] puis améliorée par Leonhardt *et al.* [Leonhardt 95].

La fonction de Wigner peut s'écrire :

$$W(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk |k| \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_0^\pi d\theta P_\theta(\xi) \exp\{2i\pi k [\xi - \text{Re}(\alpha e^{i\theta})]\} \quad (6.22)$$

Cependant, cette intégrale ne converge pas lorsqu'on ne possède qu'une expression numérique de  $P_\theta(\xi)$ . Il est donc nécessaire de faire le calcul par un filtrage ou une régu-



larisation comme nous l'avons déjà dit. Il est possible d'utiliser la fonction  $Q$  d'Husimi qui converge :

$$Q(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk |k| \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_0^\pi d\theta P_\theta(\xi) \exp \{ -2\pi^2 k^2 + ik [\xi - \text{Re}(\alpha e^{i\theta})] \} \quad (6.23)$$

Cette fonction peut être reliée aux éléments de la matrice densité dans la base de Fock par la relation :

$$\rho_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \frac{\partial^n}{\partial (k^*)^n} \frac{\partial^m}{\partial k^m} \left( Q(k) e^{|k|^2} \right) \Big|_{k=0} \quad (6.24)$$

On peut donc faire le calcul analytique de  $\rho_{n,m}$  en fonction des distributions de probabilité. On obtient une expression de la forme :

$$\rho_{n,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^\pi d\theta P_\theta(\xi) f_{m,n}(x, \phi) e^{i(n-m)\phi} \quad (6.25)$$

$f_{m,n}(x, \phi)$  est une fonction analytique. Son expression exacte est donnée dans la référence [D'Ariano 94]. Elle peut être calculée exactement et conservée afin de servir pour le calcul de  $\rho_{n,m}$  en utilisant les données expérimentales.

L'inconvénient de cette méthode est que les fonctions  $f_{m,n}$  mises en jeu oscillent très rapidement pour des nombres de photons importants ce qui demande un pas de numérisation très faible et donc des temps de calcul importants. Nous l'avons cependant utilisé pour reconstruire la matrice densité dans la base de Fock en nous limitant à des nombres de photons inférieurs à 10. Les composantes du champ que nous étudions à une fréquence décalée de 5 MHz par rapport à la fréquence optique du champ moyen sont en effet très proches du vide (la largeur en fréquence du laser Titane:Saphir est de l'ordre de 100 kHz). Les résultats sont présentés dans le paragraphe 6.4.3.

Reconstruction directe de la matrice densité dans la base d'amplitude du champ

La matrice densité dans la base d'amplitude du champ est reliée aux distributions de probabilité par la relation :

$$\langle E_1 + E_2, \varphi | \rho | E_1 - E_2, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-iyE_1} \int_{-\infty}^{+\infty} dE e^{-iy'E} P_\theta(E) \quad (6.26)$$

où :

$$y' = y'(y, E_2) = \sqrt{\frac{E_2^2}{|E|^4} + y^2} \quad (6.27)$$

et :

$$\theta = \theta(y, E_2) = \frac{\pi}{2} + \varphi - \arg\left(-\frac{E_2}{|E|^2} + iy\right) \quad (6.28)$$

les  $|E, \varphi\rangle$  sont les vecteurs propres de l'opérateur  $\hat{E} = E\hat{a} + E^*\hat{a}^\dagger$  où  $E = |E|e^{i\varphi}$  et :

$$P_\theta(E) = \langle E, \theta | \rho | E, \theta \rangle \quad (6.29)$$

est la distribution de probabilité pour l'amplitude du champ à la phase  $\varphi'$ . Nous allons montrer qu'il est possible d'utiliser cette expression pour obtenir une expression de  $\langle E_1 + E_2, \varphi | \rho | E_1 - E_2, \varphi \rangle$  en fonction des distributions de probabilités sous la forme :

$$\langle E_1 + E_2, \varphi | \rho | E_1 - E_2, \varphi \rangle \approx \sum_{m,n} K_{mn}(E_1, E_2, \varphi) p(E_{m+1}, \varphi_{n+1}) \quad (6.30)$$

où les  $K_{mn}(E_1, E_2, \varphi)$  sont des fonctions simples et peu oscillantes qui peuvent être tabulées une fois pour toutes et  $p(E_{m+1}, \varphi_{n+1})$  est la distribution de probabilité évaluée aux points  $\{(E_m, \varphi_n)\}$  de la grille de digitalisation du signal de détection homodyne.

**Décomposition en splines** Une spline est une fonction simple à partir de laquelle on peut interpoler n'importe quelle fonction connue numériquement. La spline la plus simple est une spline linéaire : c'est une fonction triangle. On suppose qu'on connaît la fonction  $f$  aux points  $x_n$  séparés d'un intervalle  $\Delta x$  : on connaît l'ensemble  $\{(x_n, y_n)\}$ . Pour interpoler la fonction  $f$ , on choisit un ensemble de triangles de largeur  $\Delta x$  qui valent  $y_n$  en  $x = x_n$  et 0 pour  $|x - x_n| \geq \Delta x$ . Ceci est représenté sur la figure 47.

Cette méthode a été introduite pour modéliser des fonctions sous une forme numérique simple. On peut montrer que toute fonction absolument intégrable,  $f$ , peut être modélisée par une spline linéaire à support compact [de Boors 78].

Si on choisit un maillage avec des noeuds équidistants, on peut écrire :

$$f_s(x) = \sum_n f(x_n) N_{\Delta x, n}(x) \quad (6.31)$$

où  $\Delta x$  désigne le pas d'échantillonnage,  $x_n = n\Delta x$  et  $N_{\Delta x, n}(x) = N\left(\frac{x}{\Delta x} - n\right)$  avec

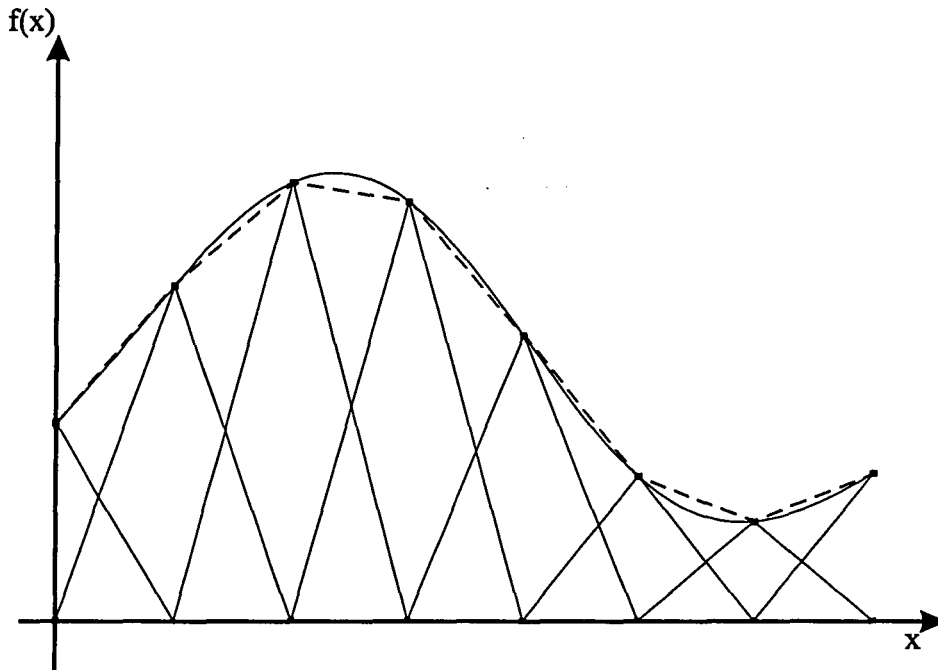


Fig. 47: Approximation d'une fonction en splines linéaires.

$$N(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (6.32)$$

L'intérêt des fonctions triangles est de bien se prêter aux calculs analytiques en particulier, leur transformée de Fourier peut être calculée exactement :

$$\tilde{N}_{\Delta x, n}(k) = \Delta x \exp(ik(n+1)\Delta x) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{1}{2}k\Delta x\right) \quad (6.33)$$

avec  $\operatorname{sinc}(x) = \sin x/x$ .

**Calcul de la matrice densité** Il est possible de décomposer  $P_\theta(E)$  en splines sur  $E$  et  $\theta$  : On obtient alors une expression approchée pour les éléments de la matrice densité :

$$\langle E_1 + E_2, \varphi | \rho | E_1 - E_2, \varphi \rangle \approx \sum_{m,n} K_{mn}(E_1, E_2, \varphi) P_{\varphi_{n+1}}(E_{m+1}) \quad (6.34)$$

avec

$$K_{mn}(E_1, E_2, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ixE_1} \tilde{N}_{\Delta E, m}(y'(x, E_2)) N_{\Delta y, n}(x) \quad (6.35)$$

Afin de calculer l'intégrale de l'équation 6.35, on effectue une fois de plus une décomposition en splines :

$$\tilde{N}_{\Delta E, m}(y'(x, E_2)) N_{\Delta y, n}(x) \approx \sum_k \tilde{N}_{\Delta E, m}(y'(x_{k+1}, E_2)) N_{\Delta y, n}(x_{k+1}) N_{\Delta x, k}(x) \quad (6.36)$$

On a alors :

$$K_{mn}(E_1, E_2, \varphi) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_k \tilde{N}_{\Delta E, m}(y'(x_{k+1}, E_2)) N_{\Delta y, n}(x_{k+1}) N_{\Delta x, k}(-E_1) \quad (6.37)$$

L'intérêt de ces fonctions  $K_{mn}$  est qu'elle est peut être tabulées très facilement. De plus, elles n'ont pas de problèmes de convergence [Zuccheti 96].

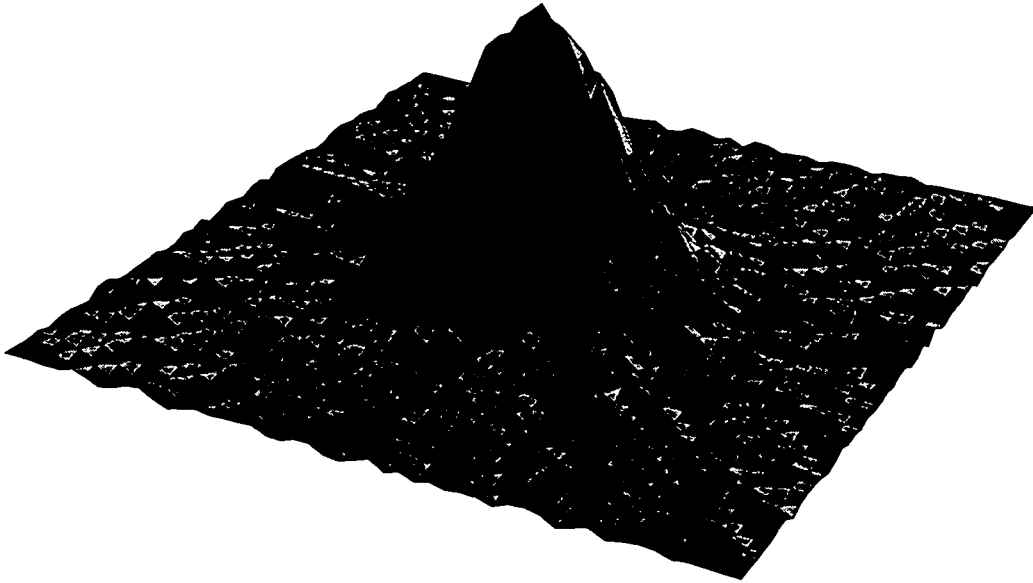
L'équipe de K. Vogel a pu calculer la représentation de la matrice densité dans la base d'amplitude du champ grâce à nos données expérimentales. Les résultats sont indiqués dans le paragraphe 6.4.3.

## 6.4 Résultats expérimentaux

### 6.4.1 Procédure de mesure

Avant de décrire les résultats, nous allons préciser la méthode de mesure. Le signal utilisé est fourni par la détection homodyne. Il est d'abord amplifié à l'aide d'un amplificateur bas-bruit (Nuclétudes 4-40-1 A). Ensuite, on l'envoie sur un mélangeur (Mini-Circuits MC SBL-1) suivi d'un filtre passe-bas second ordre à 100 kHz. Enfin, le signal est amplifié par trois amplificateurs (OP 27) en série. On fait alors l'acquisition de ce signal avec une carte munie d'un convertisseur digital-analogique. Cette carte (National Instruments AT-MIO 16 E-2) permet d'échantillonner un signal à une fréquence de 500 kHz. Elle est pilotée avec un programme que j'ai écrit sous l'interface LabView. Dans les conditions typiques, nous avons enregistré le signal de détection homodyne sur 1 s avec un balayage de la phase de l'oscillateur local de  $2\pi$ . On a ainsi 500.000 points codés sur 11 bits.

Ce signal est alors traité en utilisant le programme fourni par Gerd Breitenbach de l'Université de Constance et modifié pour s'adapter à nos conditions expérimentales. En effet, les procédures de transformée de Radon inverse prennent un temps de calcul important et les programmes LabView ne sont pas conçus pour ce genre de tâche. A



**Fig. 48:** Représentation en trois dimensions de la fonction de Wigner d'un état ayant interagi avec les atomes.

partir du signal de détection homodyne, on calcule les histogrammes sur 128 sous-ensembles d'environ 3900 points. Pour chacun de ces histogrammes, on calcule la variance. On sélectionne un intervalle de largeur  $\pi$  sur le graphe de la variance en fonction de la phase. Sur cet intervalle, on applique la transformée de Radon inverse et on obtient ainsi la fonction de Wigner. On peut aussi calculer la matrice densité dans la base des états de Fock en utilisant la procédure décrite au paragraphe 6.3.4.1. En particulier, on peut obtenir la distribution de probabilité des nombres de photons :

$$P(n) = \rho_{nn} \quad (6.38)$$

La matrice densité dans la base d'amplitude du champ a été obtenue en fournissant nos données expérimentales à l'équipe de W. Vogel à l'Université de Rostock.

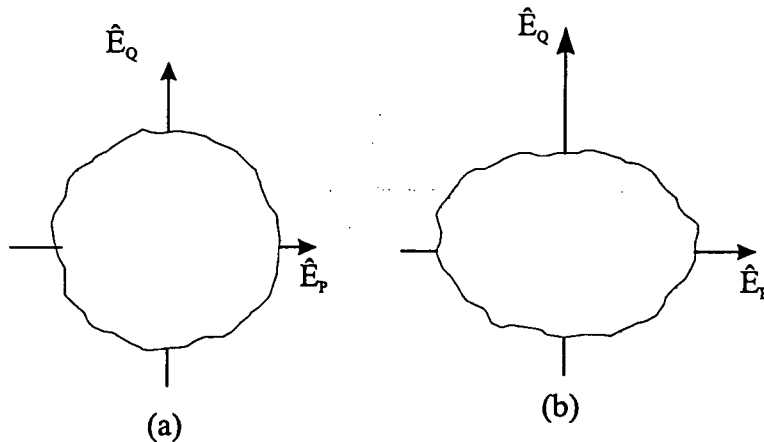


Fig. 49: Section de la fonction de Wigner d'un état cohérent (a) et d'un état comprimé (b) (les directions des axes sont arbitraires)

## 6.4.2 Représentation de la fonction de Wigner

### 6.4.2.1 Résultats expérimentaux

Nous représentons en trois dimensions sur la figure 48 la fonction de Wigner pour un état ayant interagi avec les atomes. Les conditions expérimentales sont les mêmes que lors des mesures de la réduction du bruit avec des faisceaux pièges peu intenses. Il faut noter que l'orientation de la fonction de Wigner ne peut pas être obtenue dans nos conditions expérimentales. En effet, pour cela, il faut comparer la phase à laquelle est obtenue la réduction de bruit à celle du battement entre l'oscillateur local et la sonde. Ceci est théoriquement possible puisqu'on dispose de tous les signaux. Cependant, la carte dont nous disposons n'est pas assez rapide pour échantillonner deux signaux à la fréquence de  $500 \text{ kHz}$ . On peut envisager de faire la reconstruction avec moins de points ou sur un temps plus long. Nous ne l'avons pas fait car la quadrature sur laquelle le bruit est réduit dépend beaucoup de la phase de la cavité et n'apporte pas d'information physique nouvelle.

Afin de comparer avec un état cohérent, nous avons représenté sur la figure 49 la section à  $1/e$  de la fonction de Wigner pour un état cohérent et pour un état comprimé. On voit clairement la dépendance en quadrature. De plus, la largeur de l'état ayant interagi avec les atomes dans la direction verticale est inférieure à celle de l'état cohérent: ceci indique clairement que cet état est comprimé.

### 6.4.2.2 Exploitation des résultats

Toutes les méthodes de calculs des fluctuations quantiques sont basées sur une approximation linéaire. Cette approximation est tout à fait justifiée dans nos conditions expérimentales. En conséquence, la modification du bruit ne porte que sur sa valeur quadratique moyenne. Si le bruit incident est caractérisé par une statistique gaussienne,

le bruit modifié par les atomes et la cavité sera lui aussi caractérisé a priori par une statistique gaussienne. Celle-ci sera moins large que le bruit quantique standard dans le cas des quadratures comprimées et plus large pour les quadratures avec un excès de bruit. Ces propriétés statistiques peuvent être vérifiées sur la fonction de Wigner. Pour confirmer ces conclusions dans le cas de nos mesures, nous étudions dans ce paragraphe d'éventuels écarts de la fonction de Wigner expérimentale à la forme gaussienne.

On suppose que la fonction de Wigner est proche d'une gaussienne et on cherche à caractériser les écarts. Comme toute distribution statistique, celle-ci est caractérisée par sa moyenne, sa valeur quadratique moyenne et par les moments d'ordre supérieur. La moyenne de la distribution est nulle puisqu'il n'y a pas de champ moyen à la fréquence d'analyse. Les moments d'ordre  $p \geq 2$  se calculent d'après la formule :

$$\mu_r \equiv \sum_{p=1}^N p^r x_p^r \quad (6.39)$$

où la distribution est caractérisée par  $N$  valeurs  $\{x_p\}$ . L'écart à la gaussienne se traduit principalement par deux paramètres, le biais  $\alpha_3$  et le kurtosis  $\alpha_4$ , qui sont liés aux moments d'ordre 3 et 4 :

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad (6.40)$$

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \quad (6.41)$$

où  $\sigma$  est l'écart quadratique moyen. Le biais caractérise l'asymétrie par rapport à la gaussienne (figure 50). Le kurtosis caractérise l'aplatissement par rapport à la gaussienne (figure 51). Pour une gaussienne, le biais vaut 0 et le kurtosis 3.

Dans le cas de la fonction de Wigner, on choisit de comparer la verticale et l'horizontale centrale avec une gaussienne. En effet, la fonction de Wigner est obtenue sous la forme d'un tableau  $126 \times 126$ . Afin de comparer une diagonale, il faudrait faire une interpolation avec les points voisins ce qui risque de fausser le calcul.

Les cas de l'horizontale centrale et de la diagonale sont assez semblables, nous allons donc développer le cas de l'horizontale. Nous avons d'abord essayé d'ajuster cette courbe par une gaussienne. Le résultat est indiqué sur la figure 52.

Comme on le voit sur cette figure, le résultat est très satisfaisant : l'écart à la gaussienne est très faible. Cependant, lorsqu'on calcule le biais et le kurtosis, on trouve des valeurs erronées: le biais vaut -0.5 et le kurtosis 9.1. Ces valeurs correspondent à des courbes très éloignées d'une gaussienne. Ces erreurs proviennent des points extrêmes : on voit bien dans la formule 6.39 que les points loin de la moyenne sont très importants puisqu'ils sont à la puissance  $r$  dans le calcul du moment d'ordre  $r$ . Les écarts à la gaussienne sont donc notablement faussés par les erreurs dans les pieds de la fonction de Wigner. Si on élimine l'effet de ces pieds en calculant les moments non plus

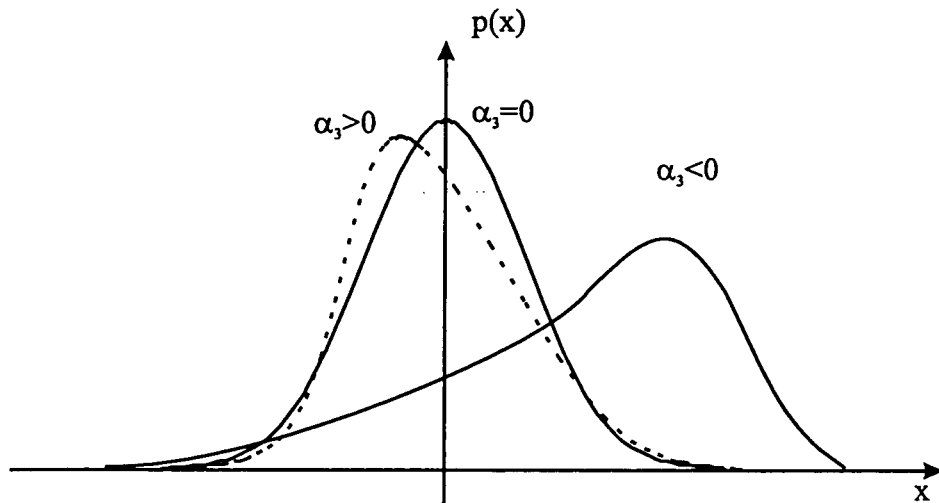


Fig. 50: Représentation d'une gaussienne et de l'écart du à un biais.

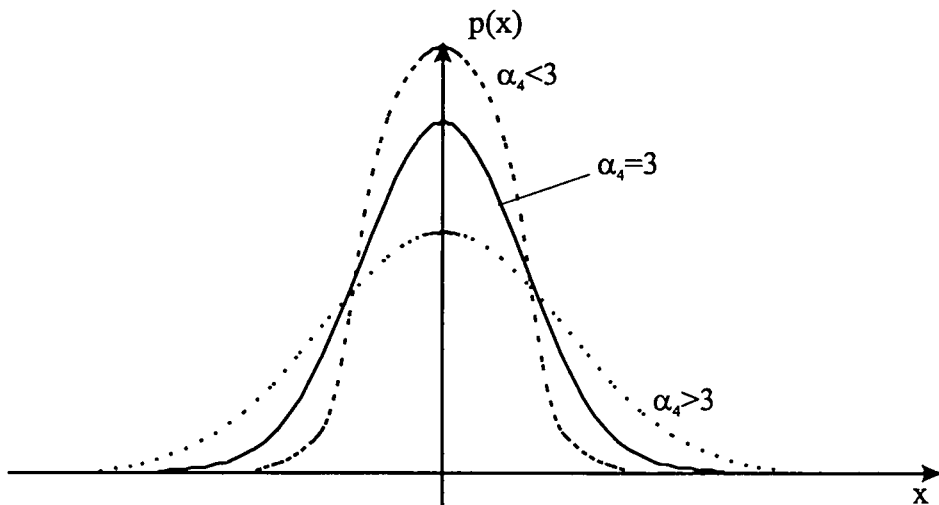


Fig. 51: Représentation d'une gaussienne et de l'écart du au kurtosis.

sur l'ensemble de la distribution, mais simplement sur le centre (entre 30 et 96 sur une distribution répartie de 1 à 126), les valeurs obtenues sont beaucoup plus raisonnables: le biais est de 0.02 et le kurtosis de 2.64 à comparer à -0.0005 pour le biais et 2.65 pour le kurtosis pour une gaussienne (ils ne sont plus égaux à leur valeur pour une gaussienne entière puisqu'on n'a pris en considération que les points centraux). Ce problème concernant les erreurs dans les pieds de la fonction de Wigner peut être corrigée en étudiant directement les distributions de probabilité sur une quadrature, c'est à dire les histogrammes du signal de détection homodyne sur un temps donné. Dans ce cas-là, on évite les problèmes strictement informatiques de reconstruction: la distribution de probabilité est directement mesurée expérimentalement. Les distributions de probabilité



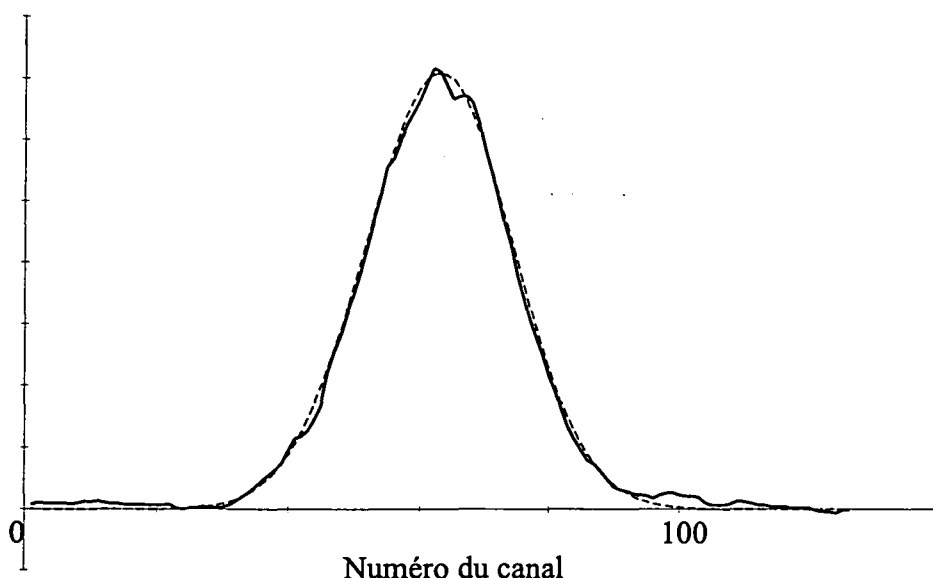


Fig. 52: Fit de la coupe de la fonction de Wigner par une gaussienne.

ité peuvent être ajustées par des gaussiennes de façon très satisfaisante. Les valeurs typiques obtenues pour le biais et le kurtosis sont alors en très bon accord avec les valeurs d'une gaussienne: le biais est de l'ordre de  $0 \pm 0.005$  et le kurtosis de l'ordre de  $3 \pm 0.05$ . On voit bien ici les problèmes de la reconstruction de la fonction de Wigner : les limitations numériques sont importantes dès lors qu'on cherche à observer des effets faibles comme un éventuel écart à la gaussienne.

### 6.4.3 Représentation de la matrice densité dans la base de Fock

On s'intéresse ici aux valeurs obtenues pour la matrice densité dans la base de Fock. On s'attend à une modification de la distribution statistique des nombres de photons.

La distribution en nombre de photons pour un état comprimé caractérisé par sa variance minimale et sa variance maximale peut être calculé analytiquement si on suppose que sa fonction de Wigner  $W_{sq}(x, p)$  s'écrit :

$$W_{sq}(x, p) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\Delta x \Delta p} \exp \left[ -\frac{x^2}{2\Delta x^2} - \frac{p^2}{2\Delta p^2} \right] \quad (6.42)$$

C'est la forme de la fonction de Wigner obtenue dans notre cas comme nous l'avons montré précédemment. Ce calcul est moins général que celui effectué dans le cas de la méthode énoncée au paragraphe 6.3.4.1 il est néanmoins valable dans notre cas et est beaucoup plus simple. Le calcul détaillé est effectué dans l'appendice 2.

On obtient :

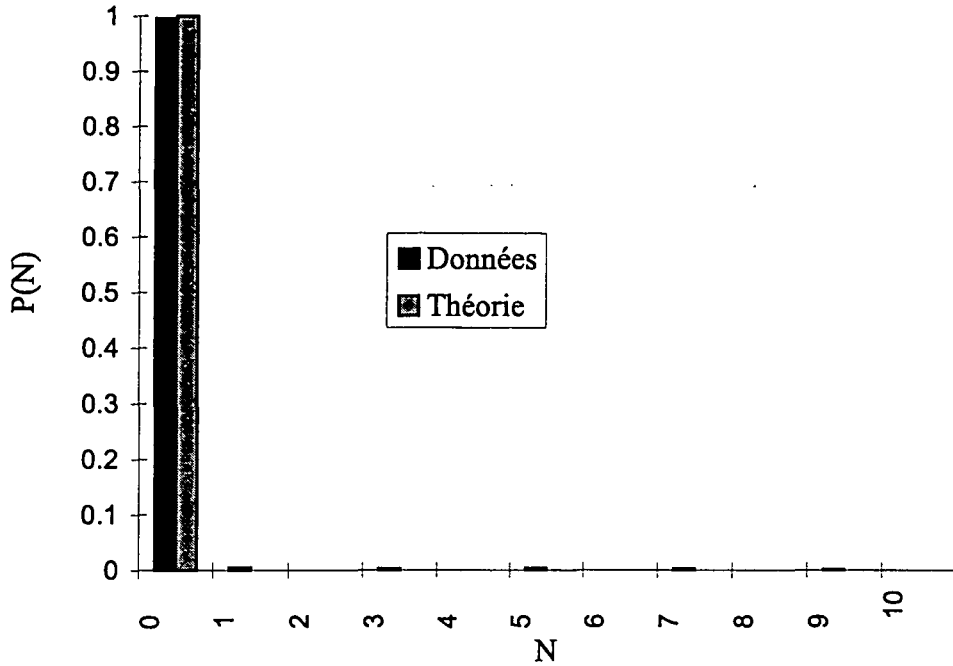


Fig. 53: Comparaison entre la mesure et la théorie pour un état vide.

$$\rho_{nn} = \frac{2}{\sqrt{(1+4\Delta x^2)(1+4\Delta p^2)}} \times \left[ \frac{(1-4\Delta x^2)(1-4\Delta p^2)}{(1+4\Delta x^2)(1+4\Delta p^2)} \right]^{n/2} \times \quad (6.43)$$

$$P_n \left( -\frac{(1-4\Delta x\Delta p)(1+4\Delta x\Delta p)}{\sqrt{2(1-4\Delta x^2)(1-4\Delta p^2)(1+4\Delta x^2)(1+4\Delta p^2)}} \right) \quad (6.44)$$

On peut ainsi calculer la distribution de photons à partir des valeurs mesurées expérimentalement pour les variances minimale et maximale. Cette formule est valable a priori quel que soit l'état considéré pourvu que sa fonction de Wigner soit décrite par l'équation 6.42.

Nous avons d'abord cherché à obtenir la distribution de photons pour l'état vide qui est l'état obtenu quand on enlève la sonde. Cet état est obtenu pour  $\Delta x^2 = \Delta p^2 = 0.25$ . La comparaison entre la mesure et la théorie est représentée sur la figure 53.

On peut aussi obtenir la distribution de photons pour un état comprimé. Maintenant, la mesure à l'analyseur de spectre donne une réduction de bruit de 10% et un excès de bruit de 50% soit  $\Delta x^2 = (0.9)^2 \times 0.25$  et  $\Delta p^2 = (1.5)^2 \times 0.25$ . La comparaison entre la mesure et la théorie est représentée sur la figure 54.

On voit dans les deux cas qu'il y a un excellent accord entre les prédictions théoriques et les résultats expérimentaux. Ceci confirme une fois de plus que l'approximation de la fonction de Wigner par une gaussienne est tout à fait justifiée dans notre cas.

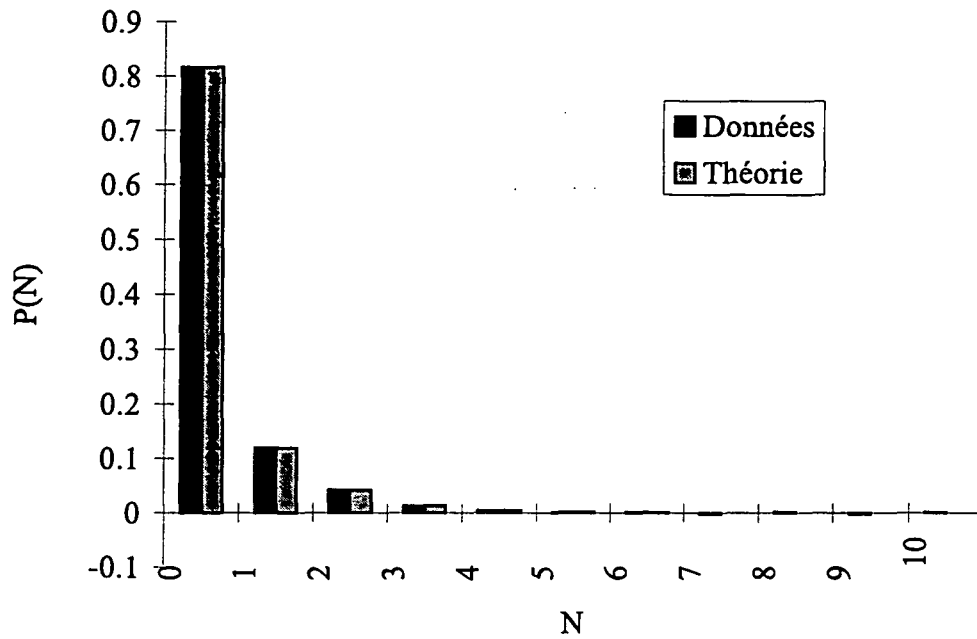


Fig. 54: Comparaison entre la mesure et la théorie pour un état comprimé.

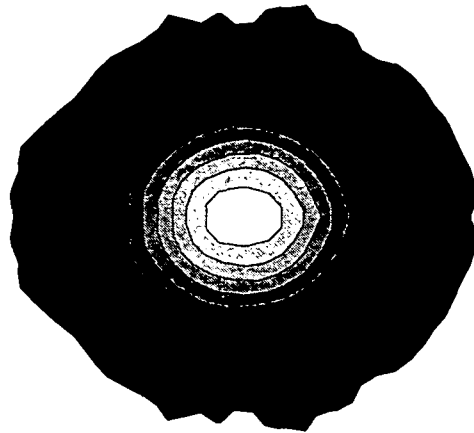


Fig. 55: Contour de la matrice densité dans la base d'amplitude du champ.

Par ailleurs, on remarque que  $P(n)$  décroît lorsque  $n$  augmente. Ceci n'est pas le résultat attendu pour le vide comprimé pour lequel la probabilité d'obtenir un nombre impair de photons est nulle [Walls 95]. La différence provient du fait que l'état considéré n'est pas un état minimal.

## Représentation de la matrice densité dans la base d'amplitude du champ

Nous n'avons malheureusement pas pu obtenir les valeurs numériques de la représentation de la matrice densité dans la base d'amplitude du champ reconstruite par la méthode de l'équipe de K. Vogel. Nous indiquons sur la figure 55 les contours de la matrice densité obtenue pour le même état que celui qui nous a servi à reconstruire la fonction de Wigner par la méthode basée sur la régularisation quadratique.

Les contours ne sont pas circulaires. Malheureusement, nous n'avons pas pu disposer du programme qui a permis d'obtenir cette courbe. En conséquence, nous n'avons pas pu traiter de la même manière un état cohérent ce qui aurait probablement permis de mettre en évidence le caractère non classique du champ.

## 6.5 Conclusion

Nous avons appliqué pour la première fois la méthode de la tomographie à l'étude du champ créé par l'interaction avec un milieu atomique. Nous avons montré que la fonction de Wigner reconstruite par cette méthode est bien représentée par une gaussienne. Ceci était prédit théoriquement mais n'avait jamais été observé expérimentalement. Il faut noter que les méthodes de reconstruction sont des méthodes numériques qui pourraient être encore perfectionnées.

## Conclusions

Nous avons poursuivi l'étude de la réduction de bruit d'un faisceau laser par un nuage d'atomes refroidis par lasers. Ce milieu a démontré sa capacité à réduire les fluctuations quantiques d'un faisceau laser au-dessous du bruit quantique standard. Nous avons en particulier obtenu un fonctionnement stable avec une réduction de bruit sur une durée proche de la seconde. Pour cela, nous avons fonctionné dans un régime où les faisceaux pièges sont présents. Afin de prendre en compte les perturbations introduites par leur présence, nous avons développé un modèle à trois niveaux en utilisant la méthode des forces de Langevin. Ainsi, nous avons obtenu des expressions analytiques pour le bruit minimal et maximal du faisceau ayant interagi avec les atomes. Cela nous a permis de définir les variations de ces spectres en fonction des différents paramètres. En particulier, nous avons montré qu'il existe un optimum pour les puissances des différents faisceaux entrant en jeu. Les faisceaux pièges doivent être suffisamment intenses pour permettre d'avoir un nombre d'atomes donnant une non-linéarité à même de modifier les fluctuations quantiques de manière appréciable. Les faisceaux de repompage doivent avoir une intensité suffisamment importante pour ramener rapidement les atomes vers la transition où ils interagissent avec le faisceau sonde. Enfin, l'intensité de la sonde doit permettre de saturer le milieu sans pour autant amener trop d'atomes dans le niveau excité. Une fois ces conditions expérimentales déterminées, nous avons observé une réduction de bruit de 15% dans des conditions favorables à la réduction de bruit. Afin d'obtenir une réduction du bruit stable, il a fallu améliorer le montage expérimental en déterminant les différentes causes de vibrations de la cavité et en les éliminant. La réduction de bruit est maintenant observée sur des échelles de temps de l'ordre de la seconde. Grâce à la stabilité et à la reproductibilité des conditions expérimentales, nous avons enregistré des courbes de réduction de bruit dans deux régimes de paramètres distincts correspondant à des valeurs faibles et fortes de la puissance des faisceaux pièges. Dans ces deux régimes, l'accord entre les mesures expérimentales et les prévisions théoriques était très correct aussi bien pour la réduction de bruit que pour l'excès de bruit.

Enfin, grâce à la stabilité du montage, nous avons pu enregistrer le signal de détection homodyne directement afin de reconstruire la fonction de Wigner du champ. Nous avons pu mettre en évidence la compression des fluctuations avec un bon accord avec les mesures réalisées avec un analyseur de spectre. Par ailleurs, cette mesure, la première réalisée sur le champ créé lors de l'interaction avec un milieu atomique,

a permis de montrer que le champ conservait une statistique gaussienne. Nous avons aussi obtenu expérimentalement la distribution en nombre de photons qui a montré un très bon accord avec les prédictions théoriques pour une fonction de Wigner d'allure gaussienne.

## Appendice

### Calcul de la distribution de probabilité en nombre de photons

On cherche à calculer la distribution en nombre de photons pour un état comprimé caractérisé par sa variance minimale et sa variance maximale. Pour un état quelconque, la distribution dans la base de Fock est donné par l'expression suivante, à partir de sa fonction de Wigner  $W_{sq}(x, p)$  :

$$\rho_{nn} = \iint dx dp W_n(x, p) W_{sq}(x, p) \quad (6.45)$$

où  $W_n(x, p)$  désigne la fonction de Wigner de l'état  $|n\rangle$  :

$$W_n(x, p) = \frac{2}{\pi} (-1)^n L_n [4(x^2 + p^2)] \exp[-2(x^2 + p^2)] \quad (6.46)$$

où  $L_n$  désigne le polynôme de Laguerre d'ordre  $n$  défini par :

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^{-x} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \quad (6.47)$$

Dans le cas d'un état comprimé avec une fonction de Wigner gaussienne, on a :

$$W_{sq}(x, p) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\Delta x \Delta p} \exp\left[-\frac{x^2}{2\Delta x^2} - \frac{p^2}{2\Delta p^2}\right] \quad (6.48)$$

où  $\Delta x$  et  $\Delta p$  sont les valeurs minimales et maximales du bruit.

On a donc :

$$\rho_{nn} = \frac{(-1)^n}{\pi^2} \frac{1}{\Delta x \Delta p} \iint dx dp L_n [4(x^2 + p^2)] \exp\left[-\left(\frac{1}{2\Delta x^2} + 2\right)x^2 - \left(\frac{1}{2\Delta p^2} + 2\right)p^2\right] \quad (6.49)$$

On a alors :

$$\rho_{nn} = a \iint dx dp (-1)^n L_n [4(x^2 + p^2)] \exp \left[ -\frac{x^2}{b} - \frac{p^2}{c} \right] \quad (6.50)$$

avec :

$$a = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\Delta x \Delta p} \quad (6.51)$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2\Delta x^2} + 2 \quad (6.52)$$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2\Delta p^2} + 2 \quad (6.53)$$

Afin de calculer cette intégrale, on calcule la fonction génératrice :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_{nn} z^n \quad (6.54)$$

en remplaçant  $\rho_{nn}$  par sa valeur obtenue dans l'équation 6.50 :

$$f(z) = a \iint dx dp \exp \left[ -\frac{x^2}{b} - \frac{p^2}{c} \right] \sum_{n=0}^{+\infty} z^n (-1)^n L_n [4(x^2 + p^2)] \quad (6.55)$$

Or on a ([Gradshteyn 79] 8.975.1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n L_n(x) = \frac{1}{1-z} \exp \left( \frac{xz}{z-1} \right) \quad (6.56)$$

D'où :

$$f(z) = a \iint dx dp \exp \left[ -\frac{x^2}{b} - \frac{p^2}{c} \right] \frac{1}{1+z} \exp \left[ \frac{4(x^2 + p^2)z}{z+1} \right] \quad (6.57)$$

$$= \frac{a}{1+z} \iint dx dp \exp \left[ -\frac{x^2}{b'} - \frac{p^2}{c'} \right] \quad (6.58)$$

où :



$$\frac{1}{b'} = \frac{1}{b} - \frac{4z}{1+z} \quad (6.59)$$

$$\frac{1}{c'} = \frac{1}{c} - \frac{4z}{1+z} \quad (6.60)$$

L'intégrale de l'équation 6.58 peut être calculée aisément :

$$f(z) = \frac{a}{1+z} \pi \sqrt{b'c'} \quad (6.61)$$

$$= \frac{\pi a}{\sqrt{\alpha z^2 + \beta z + \gamma}} \quad (6.62)$$

avec :

$$\alpha = 16 - 4 \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{bc} \quad (6.63)$$

$$\beta = \frac{2}{bc} - 4 \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad (6.64)$$

$$\gamma = \frac{1}{bc} \quad (6.65)$$

Si on pose :

$$t = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} z \quad (6.66)$$

$$-2tz' = \frac{\beta}{\gamma} z \quad (6.67)$$

soit :

$$z' = -\frac{1}{2} \frac{\beta}{\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} z \gamma} z \quad (6.68)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha \gamma}} \quad (6.69)$$

on obtient :

$$f(z) = \frac{\pi a}{\sqrt{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{1 - 2tz' + t^2}} \quad (6.70)$$

$f(z)$  peut s'exprimer à partir des polynômes de Legendre ([Gradshteyn 79] 8.921) :

$$f(z) = \frac{\pi a}{\sqrt{\gamma}} \sum_{k=0}^{+\infty} t^k P_k(z') \quad (6.71)$$

où  $P_k$  est le polynôme de Legendre d'ordre  $k$  vérifiant :

$$P_k(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (6.72)$$

Si on remplace  $t$  par son expression dans l'équation 6.71, on obtient :

$$f(z) = \frac{\pi a}{\sqrt{\gamma}} \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{k/2} P_k(z') \quad (6.73)$$

où  $z'$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont indépendants de  $z$ . On a donc :

$$\rho_{nn} = \frac{\pi a}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{n/2} P_n(z') \quad (6.74)$$

D'où en remplaçant  $z'$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  par leurs expressions :

$$\rho_{nn} = \frac{\pi a}{\sqrt{\frac{1}{bc}}} \left[ \frac{16 - 4\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{bc}}{\frac{1}{bc}} \right]^{n/2} P_n \left( \frac{1}{2} \frac{4\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - \frac{2}{bc}}{\sqrt{(16 - 4\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{bc}) \left(\frac{1}{bc}\right)}} \right) \quad (6.75)$$

Si on remplace  $a$ ,  $b$  et  $c$  par leurs expressions, on obtient l'expression de  $\rho_{nn}$  en fonction de  $\Delta x$  et  $\Delta p$  :

$$\rho_{nn} = \frac{2}{\sqrt{(1 + 4\Delta x^2)(1 + 4\Delta p^2)}} \times \left[ \frac{(1 - 4\Delta x^2)(1 - 4\Delta p^2)}{(1 + 4\Delta x^2)(1 + 4\Delta p^2)} \right]^{n/2} \times \quad (6.76)$$

$$P_n \left( -\frac{(1 - 4\Delta x \Delta p)(1 + 4\Delta x \Delta p)}{\sqrt{2(1 - 4\Delta x^2)(1 - 4\Delta p^2)(1 + 4\Delta x^2)(1 + 4\Delta p^2)}} \right) \quad (6.77)$$

Cette expression sera utilisée dans le paragraphe 6.4.3 pour calculer la distribution de photons à partir des valeurs de  $\Delta x^2$  et  $\Delta p^2$  mesurées expérimentalement.

## Bibliographie

- [Bergman 91] *Squeezing with laser pulses*, Bergman K., Haus H.A., Opt. Lett., Vol. 16, No. 9, pp. 663-5, 1991.
- [de Boors 78] *A practical guide to splines*, C. de Boor, Springer, New York, 1978.
- [Breitenbach 95] *Squeezed vacuum from a monolithic optical parametric oscillator*, G. Breitenbach, T. Müller, S.F. Pereira, J.-Ph. Poizat, S. Schiller, J. Mlynek, J. Opt. Soc Am. B, Vol. 12, No.11, pp. 2304-9, 1995.
- [Castelli 88] *Squeezing in optical bistability without adiabatic elimination*, Castelli F., Lugiato L.A., Vadacchino M., Nuov. Cim., Vol. 10D, No. 2, pp. 183-219, 1988.
- [Chu 85] *Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure*, Chu S., Hollberg L., Bjorkholm J.E., Cable A., Ashkin A., Phys. Rev. Lett., Vol. 55, No. 1, pp. 48-51, 1985.
- [Cohen-Tannoudji 77] *Mécanique Quantique I*, Cohen-Tannoudji C., Diu B., Laloë F., Hermann, 1977.
- [Cohen-Tannoudji 87] *Introduction à l'électrodynamique quantique*, Cohen-Tannoudji C., Dupont-Roc J., Grynberg G., InterEditions/ Editions du CNRS, 1987.
- [Cohen-Tannoudji 88] *Processus d'interaction entre photons et atomes*, Cohen-Tannoudji C., Dupont-Roc J., Grynberg G., InterEditions/ Editions du CNRS, 1988.
- [Cohen-Tannoudji 90] *Atomic motion in laser light*, Cohen-Tannoudji C., Les Houches Session LIII, 1991.
- [Courty 90] *Les fluctuations quantiques dans l'interaction d'un système non linéaire avec un réservoir harmonique*, Courty J.-M., Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1990.
- [D'Ariano 94] *Detection of the density matrix through optical homodyne detection without filtered back-projection*, G.M. D'Ariano, C. Macchiavello, M.G.A. Paris, Phys. Rev. A, Vol. 50, No. 5, pp 4298-302, 1994.
- [Davidovich 96] *Sub-Poissonian processes in quantum optics*, Luiz Davidovich, Rev. Mod. Phys., Vol. 68, No. 1, 1996.
- [Fabre 89] *Noise characteristics of a non-degenerate optical parametric oscillator*, Fabre C., Giacobino E., Heidmann A., Reynaud S., J. Phys. France, Vol. 50, pp. 1209-55, 1989.
- [Fabre 90] *Squeezing in detuned degenerate optical parametric oscillators*, Fabre C., Giacobino E., Heidmann A., Lugiato L., Reynaud S.,

- Vadacchino M., Wang Kaige, *Quantum Opt.*, Vol. 2, pp. 159-87, 1990.
- [Fabre 94] *Quantum noise reduction using a cavity with movable mirrors*, Fabre C., Pinard M., Bourzeix S., Heidmann A., Giacobino E., Reynaud S., *Phys. Rev. A*, Vol. 49, p 1337, 1994.
- [Gardiner 85] Gardiner C. W., Collett M. J., *Phys. Rev. A*, Vol. 31, p. 3761, 1985.
- [Gardiner 91] *Quantum noise*, Gardiner C. W., Springer-Verlag, 1991.
- [Gibbs 76] *Differential gain and bistability using a sodium-filled Fabry-Perot interferometer*, Gibbs H.M., McCall S.L., Venkatesan T.N.C., *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 36, p.1135, 1976.
- [Glauber 63a] Glauber R.J, *Phys. Rev.*, Vol. 130, pp. 2529, 1963.
- [Glauber 63b] *Coherent and incoherent states of the radiation field*, Glauber R.J., *Phys. Rev.*, Vol. 131, pp. 2766-88, 1963.
- [Golubev 84] *Photon antibunching in a coherent light source and suppression fo the photorecording noise*, Golubev Yu. M., Sokolov I. V., *Sov. Phys. JETP*, Vol. 60, pp. 234-8, 1984.
- [Grelu 96] *Etude expérimentales de non-linéarités dispersives dans un milieu d'atomes piégés par laser*, Grelu P., Thèse de l'Université de Paris-Sud, 1996.
- [Grison 91] *Raman spectroscopy of cesium atoms in a laser trap*, Grison D., Lounis B., Salomon C., Courtois J.-Y., Grynberg G., *Europhys. Lett.*, Vol. 15, No. 2, pp. 149-54, 1991.
- [Gradshteyn 79] *Table of integrals, series and products*, Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M., Academic Press, 1979.
- [Grynberg 93] *Central resonance of the Mollow absorption spectrum: physical origin of gain without inversion*, Grynberg G., Cohen-Tannoudji C., *Opt. Comm.*, Vol. 96, No. 1, 2, 3, pp. 150-63.
- [Hadjjar 97] Hadjar Y., Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, 1997.
- [Hänsch 80] T. Hänsch et B. Couillaud, *Opt. Comm.*, Vol.35, No.3, pp. 441-4.
- [Hilico 92a] *Réduction du bruit quantique de la lumière par une cavité bistable*, Hilico L., Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, 1992.
- [Hilico 92b] *Linear input-output method for quantum fluctuations in optical bistability with two-level atoms*, Hilico L., Fabre C., Reynaud S., Giacobino E., *Phys. Rev. A*, Vol. 46, No.7, pp. 4397-405, 1992.
- [Hilico 92c] *Operation of a "cold-atom laser" in a magneto-optical trap*, Hilico L., Fabre C., Giacobino E., *Europhys. Lett.*, Vol. 18, No. 8, pp. 685-8, 1992.

- [Hope 92] *Observation of quadrature squeezing in a cavity-atom system*, Hope D.M., Bachor H.-A., Manson P.J., McClelland D.E., Fisk P.T.H., Phys. Rev. A, Vol. 46, No. 3, pp. R1181-4
- [Janicke 95] *Tomography of atom beams*, Janicke U., Wilkens M., J. Mod. Opt., Vol 42, No. 11, pp. 2183-99, 1995.
- [Kasai 97] *Observation of squeezing using cascaded non linearity*, Kasai K., Gao Jiangrui, Fabre C., Europhys. Lett., à paraître, 1997.
- [Kellershohn 90] *Bases théoriques et applications de la tomographie d'émission*, C. Kellershohn.
- [Ketterle 93] *High densities of cold atoms in a dark spontaneous-force optical trap*, Ketterle W., Davis K.B., Joffe M.A., Pritchard D.E., Phys. Rev. Lett., Vol. 70, No. 15, pp. 2253-6, 1993.
- [Kilper 96] *Polarization-dependent noise in photon number squeezed light generated by quantum well lasers*, Kilper D.C., Stell D.G., Craig R., Scifres D.R., Opt. Lett., Vol. 21, No. 16, pp. 1283-5, 1996.
- [Kolobov 93] *Role of pumping statistics and dynamics of atomic polarization in quantum fluctuations of laser sources*, M.I. Kolobov, L. Davidovich, E. Giacobino, C. Fabre, Phys. Rev. A, Vol. 47, No. 2, pp. 1431-45, 1993.
- [Kubo 66] *The fluctuation-dissipation theorem*, Kubo R., Rep. Prog. Phys, Vol. 29, pp. 255-84, 1966.
- [Kühn 94] *Determination of density matrices from field distributions and quasiprobabilities*, Kühn H., Welsh D.-G, Vogel W., J. Mod. Opt., Vol 41, No. 8, pp. 1607-13, 1994.
- [Lambrecht 95] *Atomes froids et fluctuations quantiques*, Lambrecht A., Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, 1995.
- [Lambrecht 96a] *Squeezing with cold atoms*, Lambrecht A., Coudreau T., Steinberg A. M., Giacobino E., Europhysics Letters, Vol. 36, No. 2, pp. 93-8, 1996.
- [Lambrecht 96b] *Atomic number fluctuations in a falling cold atom cloud*, Lambrecht A, Giacobino E., Reynaud S., Quantum Semiclass. Opt., Vol. 8, pp. 457-72, 1996.
- [Landau 58] *Course of theoretical physics : statistical physics*, Landau L., Lifshitz E., Pergamon, 1958.
- [Leonhardt 95] *Tomographic reconstruction of the density matrix via pattern functions*, Leonhardt U., Paul H., D'Ariano G.M., Phys. Rev. A, Vol. 52, No. 6, pp. 4899-907, 1995.
- [Lütkenhaus 95] *Nonclassical effects in phase space*, Lütkenhaus N., Barnett S., Phys. Rev. A, Vol. 51, No. 4, pp. 3340-2.

- [Machida 88] Machida S., Yamamoto Y., Phys. Rev. Lett., Vol. 60, p. 792, 1988.
- [Maeda 87] *Observation of squeezed noise produced by forward four-wave mixing in sodium vapor*, Maeda M.W., Kumar P., Shapiro J.H., Opt. Lett., Vol. 12, No. 3, pp. 161-3, 1987.
- [Mandel 95] *Optical coherence and quantum optics*, Mandel L., Wolf E., Cambridge University Press, 1995.
- [Mertz 91] Mertz J.C., Debuisschert T., Heidmann A., Fabre C., Giacobino E., Camy G., Opt. Lett., Vol. 16, No XXX, p. 1234, 1991.
- [Orozco 87] *Squeezed-state generation in optical bistability*, Orozco L.A., Raizen M.G., Min Xiao, Brecha R.J., Kimble H.J., J. Opt. Soc. Am. B, Vol. 4, No. 10, pp. 1490-500, 1987.
- [Phillips 91] *Laser cooling, optical traps and optical molasses*, Phillips W.D., Les Houches Session LIII, 1991.
- [Raab 87] *Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure*, Raab E.L., Prentiss M., Cable A., Chu S., Pritchard D.E., Phys. Rev. Lett., Vol. 59, No. 23, pp. 2631-4, 1987.
- [Reynaud 89] *Photon noise reduction by passive optical bistable system*, Reynaud S., Fabre C., Giacobino E., Heidmann A., Phys. Rev. A, Vol. 40, No. 3, pp. 1440-6, 1989.
- [Reynaud 90] *Introduction à la réduction du bruit quantique*, Reynaud S., Ann. Phys. Fr., Vol. 15, pp 63-162, 1990.
- [Roch 97] *Optical quantum non-demolition measurements using cold trapped atoms*, Roch J.F., Vigneron K., Grelu P., Sinatra A., Poizat J.-P., Grangier P., Phys. Rev. Lett., Vol. 78, p. 634, 1997.
- [Saks 71] *Analytical functions*, Saks S., Zygmund A., Elsevier, 1971.
- [Schubert 78] Schubert M., Vogel W., Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena, Math.-Naturwissench. Reihe Vol .27, p. 179, 1978.
- [Shelby 86] *Broad-band parametric deamplification of quantum noise in an optical fiber*, Shelby R.M., Levenson M.D., Perlmutter S.H., De Voe R.G., Walls D.F., Phys. Rev. Lett., Vol. 57, pp. 691-4, 1986.
- [Shirasaki 90] *Squeezing of pulses in a nonlinear interferometer*, Shirasaki M., Haus H.A., J. Opt. Soc. Am. B, Vol. 7, No. 1, pp. 30-4, 1990.
- [Sinatra 97] *Quantum non-demolition measurements using cold trapped atoms in an optical cavity*, Sinatra A., Roch J.F., Vigneron K., Grelu P. Poizat J.-P., Grangier P., J. Mod. Opt., Vol. 47, p. 1967, 1997.

- 
- [Sinatra 98] *Quantum non-demolition measurements using cold trapped atoms : comparison between theory and experiments*, Sinatra A., Roch J.F., Vignerone K., Grelu P. Poizat J.-P., Kaige Wang, Grangier P., à paraître dans Phys. Rev. A, 1998.
- [Slusher 85] Slusher R.E., Hollberg L.W., Yurke B., Mertz J.C., and Valley J.F., Phys. Rev. Lett. 55 2409 ,1985.
- [Souto-Ribeiro 97] *Sub-shot-noise high-sensitivity spectroscopy with optical parametric oscillator twin beams*, Souto-Ribeiro P.H., Schwob C., Maître A., Fabre C., Opt. Lett. to be published, dec. 1997.
- [Smithey 93] Smithey D.T., Beck M., Cooper J., Raymer M.G., Phys. Script., Vol. T48, pp 35-44, 1993.
- [Sudarshan 63] *Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams*, Sudarshan E.C.G., Phys. Rev. Lett., Vol. 10, pp. 277-9, 1963.
- [Vogel 89] *Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase*, Vogel K., Risken H., Phys. Rev. A, Vol. 40, No. 5, pp. 2847-9, 1989.
- [Vogel 90] *Field-strength probability distributions and higher-order squeezing*, Vogel W., Phys. Rev. A, Vol 42, No. 9, pp 5754-7, 1990.
- [Walls 95] Quantum Optics, Walls D.F., Milburn G.J., Springer-Verlag, 1995.
- [Wigner 32] Wigner E.P., Phys. Rev., Vol. 40, p.749, 1932.
- [Wu 86] *Generation of squeezed states by parametric down-conversion*, Wu L.A., Kimble H.J., Hall J.L., Wu H., Phys. Rev. Lett., Vol. 57, pp. 2520-3, 1986.
- [Wu 88] Wu L.A., Min Xiao, Kimble H.J., J. Opt. Soc Am. B, Vol. 4, p. 1465, 1988.
- [Yuen 80] Yuen H.P., Shapiro J.H., IEEE Trans. Inf. Theory, Vol. IT 26, 78, 1980.
- [Zuccheti 96] *Direct sampling of density matrices in field-strength bases*, Zuccheti A., Vogel W., Tasche M., Welsh D.-G., Phys. Rev. A, Vol. 54, No. 2, pp. 1678-81, 1996.



**Thomas COUDREAU**

**Réduction du bruit et tomographie quantique d'un faisceau laser interagissant avec des atomes froids : théorie et expérience**

**Résumé**

Nous avons utilisé un nuage d'atomes refroidis par laser comme milieu non linéaire pour réduire les fluctuations quantiques d'un faisceau laser. Le nuage atomique, produit par un piège magnéto-optique en fonctionnement continu, est placé dans une cavité optique. Les fluctuations du faisceau sonde réfléchi par la cavité sont mesurées à l'aide d'une détection homodyne. Une réduction de bruit en quadrature de 15% a été obtenue pendant plusieurs secondes.

Sur le plan théorique, nous avons utilisé la méthode des forces de Langevin pour calculer le spectre des fluctuations avec un modèle atomique à trois niveaux. Ce modèle permet de prendre en compte l'effet parasite des faisceaux pièges et de repompage. Il est en bon accord avec les résultats expérimentaux.

Par ailleurs, nous avons utilisé la méthode de tomographie quantique pour mesurer la fonction de Wigner du champ réfléchi par la cavité. Cette fonction permet de caractériser tous les moments statistiques des fluctuations. Cette mesure est la première mesure de la fonction de Wigner d'un état produit par interaction avec un milieu atomique. Cette méthode a permis de mettre en évidence une statistique gaussienne en bon accord avec les prédictions théoriques.

**Mots-clés**

Atomes froids

Fluctuations quantiques

Bistabilité optique par effet Kerr

Tomographie quantique

Forces de Langevin