



HAL
open science

**Refroidissement laser sub-recul par résonances
noires:-exp. avec des atomes d'hélium
métastables,-approches Monte-Carlo quantique et vols
de Lévy**

François Bardou

► **To cite this version:**

François Bardou. Refroidissement laser sub-recul par résonances noires:-exp. avec des atomes d'hélium métastables,-approches Monte-Carlo quantique et vols de Lévy. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 1995. Français. NNT: . tel-00011898

HAL Id: tel-00011898

<https://theses.hal.science/tel-00011898>

Submitted on 9 Mar 2006

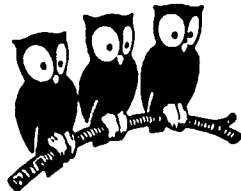
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY
N° D'ORDRE : 3608

UNIVERSITÉ DE PARIS SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE



THÈSE
présentée
pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

par

François BARDOU

Sujet :

Refroidissement laser sub-recul par résonances noires :

- Expériences avec des atomes d'hélium métastables
- Approches Monte-Carlo quantique et vols de Lévy

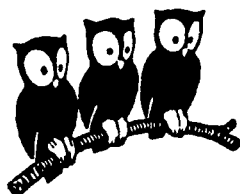
Soutenue le 8 mars 1995 devant la Commission d'examen :

- M. Alain ASPECT
- M. Jean-Philippe BOUCHAUD
- M. Claude COHEN-TANNOUDI, Président
- Mme Nicole OSTROWSKY
- M. William D. PHILLIPS
- M. Pierre PILLET

ORSAY
N° D'ORDRE : 3608

UNIVERSITÉ DE PARIS SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE



THÈSE
présentée
pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

par

François BARDOU

Sujet :

Refroidissement laser sub-recul par résonances noires :

- Expériences avec des atomes d'hélium métastables
- Approches Monte-Carlo quantique et vols de Lévy

Soutenue le 8 mars 1995 devant la Commission d'examen :

- M. Alain ASPECT
- M. Jean-Philippe BOUCHAUD
- M. Claude COHEN-TANNOUDJI, Président
- Mme Nicole OSTROWSKY
- M. William D. PHILLIPS
- M. Pierre PILLET

Remerciements

Cette thèse a été effectuée au Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne, devenu Laboratoire Kastler Brossel. Je remercie ses directeurs successifs, Jacques Dupont-Roc et Michèle Leduc, de m'avoir concrètement soutenu.

Alain Aspect et Claude Cohen-Tannoudji ont été directeurs, et surtout initiateurs et acteurs de ce travail. J'apprécie énormément la confiance qu'ils m'ont accordée dans ce projet risqué et tout le temps qu'ils m'ont consacré. Je suis heureux d'avoir partagé avec eux les quelques nuits cruciales d'apparition des premiers signaux.

Jean-Philippe Bouchaud m'a fait découvrir le monde des vols de Lévy. Le chapitre V ne se serait pas fait sans lui.

D'autres chercheurs ont contribué directement par plusieurs mois à plusieurs années de travail aux résultats présentés ici. Je les remercie très sincèrement.

Olivier Emile et Chris Westbrook ont participé pendant deux ans à toutes les expériences précédant les résonances noires : ralentissement, piégeage, collisions, mise au point des détecteurs ... Travail difficile, mais essentiel pour l'observation du refroidissement sub-recul.

Jean-Michel Courty a contribué, pendant son service militaire, à la réalisation du piège d'hélium, réalisant en particulier la mélasse transverse et divers moyens de détection.

Bruno Saubaméa a activement participé, pendant un stage d'un an, à la phase de mise au point des résonances noires, en travaillant en particulier sur l'effet Hanle mécanique, l'optique des résonances noires et le système de détection par galettes de microcanaux.

John Lawall et Michèle Leduc ont participé aux expériences finales des résonances noires et les ont poursuivies.

Kazuko Shimizu a participé aux expériences pendant sa visite d'un an à l'Ecole Normale Supérieure.

Jacques Vigué, maintenant à l'IRSAMC à Toulouse, a apporté une contribution importante en interprétant les collisions observées. Il a éclairci la situation chaque fois que j'ai fait appel à lui, en particulier sur la diffusion multiple.

Je dois à Philippe Roncin, du LCAM à Orsay, de m'avoir appris les techniques de galettes de microcanaux et de m'avoir généreusement communiqué tous les plans de ses montages.

Ce que j'ai appris de Laurent Nottale, de l'Observatoire de Meudon, m'a été très utile, en particulier sur les notions d'échelles.

Michèle Sanchez a réalisé l'ensemble de la frappe du manuscrit, ce qui m'a fait gagner plusieurs mois de travail.

Krystof Gerz m'a appris le maniement des lasers LNA. Arnaud Landragin, de l'Institut d'Optique, a contribué pendant plusieurs semaines aux expériences d'effet Hanle. Pascal Szriftgiser m'a aidé pour la coupure des champs magnétiques.

Robin Kaiser et Nathalie Vansteenkiste ont réalisé au cours de leur thèse les éléments de base de l'expérience, le jet atomique et les lasers LNA. Leurs conseils m'ont maintes fois aidé.

J'ai bénéficié de nombreuses discussions avec Yvan Castin, ce qui a permis d'affiner bien des points de vue. J'ai apprécié l'enthousiasme de Christophe Salomon qui nous a amené à collaborer sur la réalisation du piège "lin45", et plus récemment sur l'approche vols de Lévy du refroidissement Raman. Merci à Jakob Reichel pour ses contributions multiples à cette approche, ainsi qu'à Maxime Ben Dahan, Ekkehard Peik et Steve Rand.

Le soutien technique du Laboratoire Kastler-Brossel a apporté une contribution essentielle. Plusieurs dizaines de montages électroniques non commerciaux utilisés par l'expérience de résonances noires, ont été conçus et réalisés dans le service d'électronique du LKB animé par André Clouqueur, comprenant Patrick Giron et Lionel Perennes. La mécanique a été réalisée à l'atelier du LKB par Jean-Claude Guillaume, Jean Lagadec et Jean Outrequin. Irène Brodschi et Catherine Emo ont facilité toutes les tâches administratives. J'ai aussi souvent fait appel aux services généraux du Département de Physique de l'ENS, en particulier à Didier Courtiade et Jean-Francois Point pour la plomberie, à Jean-Claude Maréchal, Guy Jouve et Yvan Gladychéff pour la cryogénie. Yvonnice Sorin et l'atelier général ont réalisé un montage d'optique complexe.

De nombreux chercheurs, qu'il m'est impossible de citer tous ici, m'ont aidé en me faisant bénéficier de leur expérience, en discutant tel point de physique. Je pense en particulier aux membres de l'ENS travaillant sur les atomes froids, Carl Aminoff, Kirstine Berg-Sørensen, Philippe Bouyer, Jean Dalibard, Pierre Desbiolles, Delphine Grison, Gilbert Grynberg, Pierre Lemonde, Brahim Lounis, Alain Michaux, Philippe Verkerk... ou de l'équipe d'optique atomique d'Orsay.

Merci à tous ceux qui m'ont prêté du matériel, en particulier Christophe Salomon, ainsi que Jean-Claude Passerieux du CEN Saclay, André Clairon du LPTF, Roger Bacis de l'université de Lyon. Merci à René Vacher et Rémi Jullien, qui m'ont accueilli quelques mois au Laboratoire de Science des Matériaux Vitreux à Montpellier. Merci à Jean Dalibard qui m'a prêté son appartement durant un été.

Je remercie très sincèrement les organismes qui m'ont financé. La DRET m'a financé pendant 4 ans, par une bourse DRET/CNRS, puis par un contrat "Jeune Chercheur", tout en contribuant au financement des expériences. La Société de Secours des Amis des Sciences (Académie des Sciences) m'a accordé une bourse d'un an.

Je remercie Nicole Ostrowsky, Jean-Philippe Bouchaud, Bill Phillips et Pierre Pillet pour leurs remarques constructives et pour avoir accepté de faire partie du jury. Je remercie en particulier les rapporteurs, Jean-Philippe Bouchaud, et Bill Phillips, qui a bien voulu lire le manuscrit en français.

Anne Bardou m'a aidé par l'attention qu'elle a portée à ce travail et par d'innombrables discussions, débouchant sur maintes idées nouvelles.

Organisation du mémoire

Introduction générale

I Le refroidissement par résonances noires :
notions de base et motivations du présent travail

Nouvelles expériences

II Réalisation du nouveau dispositif expérimental

III Expériences de refroidissement sub-recul

Nouvelles approches théoriques

IV Simulation Monte-Carlo quantique et fonction délai

V Approche statistique : vols de Lévy

Conclusion générale

Annexes

Table des matières

Introduction générale	1
------------------------------	----------

Chapitre I

Le refroidissement sub-recul par résonances noires : notions de base et motivations du présent travail

1 Introduction	15
2 Principe du refroidissement par résonances noires sélectives en vitesse	17
2.1 Système atomique et couplages	17
2.1.1 Système en Λ	17
2.1.2 Prise en compte de l'impulsion atomique. Effet de l'émission spontanée	18
2.1.3 Couplages lasers et motionnels. Etats $ \psi_C(p)\rangle$ et $ \psi_{NC}(p)\rangle$	20
2.2 Principe du refroidissement par résonances noires	24
2.2.1 Processus de refroidissement	24
2.2.2 Impulsion caractéristique des atomes refroidis	24
2.2.3 Signature caractéristique du refroidissement par résonances noires	27
2.3 Expérience sur jet de 1988	27
2.3.1 Dispositif expérimental	27
2.3.2 Résultats expérimentaux	28
2.3.3 Difficultés expérimentales	28
3 Le problème des temps longs	29
3.1 Motivation et problèmes théoriques	29
3.2 Résolution numérique des équations de Bloch optiques généralisées : problème des temps longs	30
3.3 Problèmes expérimentaux posés par les temps longs	32
4 Le problème de la généralisation à plusieurs dimensions	33
4.1 Intérêt du refroidissement à plusieurs dimensions	33
4.2 Existence d'états noirs sélectifs en vitesse à plusieurs dimensions	34
4.3 Existence d'un effet de refroidissement sub-recul à plusieurs dimensions	35
4.4 Problèmes expérimentaux posés par le refroidissement à 2 et 3 dimensions	37
5 Conclusion : acquis, problèmes, et nouvelles approches	38

Chapitre II

Réalisation du nouveau dispositif expérimental

1 Introduction	43
2 Eléments de base de l'expérience	45
2.1 L'hélium 4 triplet du point de vue du refroidissement laser	45
2.1.1 Structure atomique de ^4He et transitions utilisées pour le refroidissement laser	45
2.1.2 Particularités de $^4\text{He}^*$ pour le refroidissement laser	49
2.1.3 Examen des raies d'intercombinaison	51
2.2 Lasers LNA à 1,083 μ : rappels	55
2.3 Jet d'hélium métastable : rappels	58
2.3.1 Dispositif	58
2.3.2 Détection du jet	59
2.3.3 Caractéristiques du jet	60
3 Réalisation d'un piège magnéto-optique d'atomes d'hélium métastable	61
3.1 Introduction	61
3.2 Alimentation du piège magnéto-optique : jet collimaté et ralenti par laser	64
3.2.1 Refroidissement transverse du jet atomique par une mélasse optique à 2 dimensions.	64
3.2.1.1 Problème à résoudre et dispositif	64
3.2.1.2 Profil transverse. Comparaison à un modèle simple	66
3.2.1.3 Effet de la mélasse transverse sur la distribution des temps de vol	68
3.2.2 Ralentissement du jet atomique	71
3.2.2.1 Objectif et choix du ralentissement Zeeman	71
3.2.2.2 Dispositif expérimental : champ magnétique et faisceau laser de ralentissement.	74
3.2.2.3 Résultats expérimentaux	77
3.2.2.4 Efficacité du ralentissement	79
3.3 Piège magnéto-optique	81
3.3.1 Introduction	81
3.3.2 Principe du piège magnéto-optique	82
3.3.3 Dispositif de piégeage	85
3.3.4 Mesure des paramètres physiques du piège magnéto-optique	87
3.3.4.1 Vue d'ensemble des systèmes de détection	87
3.3.4.2 Fluorescence des atomes piégés. Caméra CCD	87
3.3.4.3 Flux d'ions issus du piège. Multiplicateur d'électrons	88
3.3.4.4 Distribution en vitesse des atomes piégés. Galette de microcanaux	90
3.3.4.5 Synthèse des différents systèmes de détection	95
3.4 Bilan : caractéristiques principales du piège magnéto-optique	95
4 Problèmes expérimentaux à résoudre pour l'observation du refroidissement par résonances noires	96
4.1 Introduction	96
4.2 Configuration laser. Contraintes optiques à respecter	97

4.3 Contraintes sur le champ magnétique	99
4.3.1 Introduction	99
4.3.2 Estimation théorique des effets du champ magnétique	100
4.3.2.1 Couplages magnétiques	100
4.3.2.2 Champ magnétique transverse : taux de fluorescence induite par champ magnétique ; critère à satisfaire.	103
4.3.2.3 Champ magnétique longitudinal : sans fluctuations ; avec fluctuations.	107
4.3.3 Inventaire des champs magnétiques parasites	111
4.3.4 Dispositif de contrôle des champs magnétiques parasites	113
4.3.4.1 Contrôle des champs ambiants	113
4.3.4.2 Contrôle des champs de ralentissement	116
4.3.4.3 Contrôle des champs de piégeage	118
4.3.5 Bilan sur les contraintes de champ magnétique	119
4.4 Mesure de la distribution en impulsion des atomes refroidis	120
4.4.1 Un détecteur bidimensionnel multicanal : galette de microcanaux	121
4.4.2 Principe de la détection des vitesses	122
4.4.3 Résolution en position et en vitesse	123
4.4.4 Sélection temporelle	125
5 Conclusion	126
5.1 Etapes principales de la nouvelle expérience	126
5.2 Potentiel de la nouvelle conception de l'expérience	127

Chapitre III : Expériences de refroidissement sub-recul

1 Introduction	131
2 Effet Hanle mécanique : étude des champs magnétiques parasites	133
2.1 Introduction	133
2.2 L'effet Hanle mécanique	134
2.3 Effet Hanle mécanique sur le jet atomique	137
2.3.1 Principe des mesures d'amortissement des champs magnétiques	137
2.3.2 Amortissement des champs magnétiques de ralentissement	140
2.3.3 Amortissement des champs magnétiques de piégeage	143
2.3.4 Compensation des champs magnétiques constants	146
2.4 Effet Hanle mécanique avec les atomes issus du piège magnéto-optique	150
2.4.1 Principe expérimental	150
2.4.2 Compensation des champs magnétiques avec une résolution spatiale et temporelle améliorée	153
2.5 Conclusion sur les expériences d'effet Hanle mécanique	156
3 Expériences à une dimension	156
3.1 Introduction : signaux bruts et premiers tests	156
3.2 Influences des champs magnétiques	161
3.2.1 Effet d'un champ magnétique transverse	161

3.2.2 Effet d'un champ magnétique longitudinal constant	163
3.2.3 Effet d'un gradient de champ magnétique	165
3.3 Mesure de température	166
3.3.1 Profil brut	166
3.3.2 Rôle de la fenêtre temporelle d'exposition de la caméra	168
3.3.3 Forme du profil des bandes	170
3.3.4 Déconvolution du profil des bandes	175
3.4 Evolution en fonction du temps d'interaction	178
4 Expériences à deux dimensions	181
4.1 Efficacité du remplissage et forces de friction	181
4.2 Expérience avec des faisceaux à 30 °	184
4.3 Expérience avec des faisceaux à 90 °	188
5 Conclusion	190

Chapitre IV

Simulation Monte-Carlo quantique et fonction délai

1 Introduction	195
2 De l'"étagère à électrons" aux simulations Monte-Carlo quantiques en passant par la fonction délai	198
2.1 "Etagère à électrons", fonction délai et résonances noires	198
2.2 Définition précise de la fonction délai	201
2.3 Description de l'évolution atomique dans le formalisme de la fonction délai. Processus de filtrage.	203
2.4 Algorithme de simulation Monte-Carlo quantique par la fonction délai	206
3 Simulation Monte-Carlo quantique par la fonction délai du refroidissement par résonances noires : mise en œuvre	207
3.1 Méthodes de calcul de la fonction délai	207
3.2 Allure des fonctions délais	209
3.2.1 Forme analytique de la fonction délai dans le cas général	209
3.2.2 Fonction délai d'un atome à deux niveaux	211
3.2.3 Fonctions délais pour les résonances noires sélectives en vitesse	213
3.3 Techniques de tirage des délais aléatoires	219
3.3.1 Présentation du problème	219
3.3.2 Première solution : utilisation de $\pi_0(t)$	220
3.3.3 Cas d'une fonction délai exponentielle ou somme d'exponentielles	221
3.3.4 Méthode du "rejet"	223
3.3.5 Application de la méthode du "rejet" aux résonances noires	226
3.3.6 Efficacité de la méthode du rejet : traitement des échelles	228
3.4 Traitement de l'émission spontanée	233
3.4.1 Etat externe	234
3.4.2 Etat interne	236
3.4.3 Synthèse : évolution des familles $F(p)$	236
3.4.4 Analogie entre l'émission spontanée et un processus de mesure	237

3.5 Vue d'ensemble de l'algorithme de simulation Monte-Carlo	238
4 Résultats des simulations Monte-Carlo	241
4.1 Tests du programme	241
4.2 Evolution d'un seul atome	244
4.3 Evolution d'un ensemble d'atomes. Distribution en impulsion	248
4.4 Aspects numériques	254
4.4.1 Mémoire et discrétisation	254
4.4.2 Temps de calcul	255
4.4.3 Incertitude statistique et quantité d'information	256
5 Conclusion	259
5.1 Résumé de la méthode de simulation Monte-Carlo par la fonction délai	259
5.2 Extension possible et comparaison à une autre méthode	261
5.3 Vers une nouvelle approche physique : du quantique au stochastique	263

Chapitre V

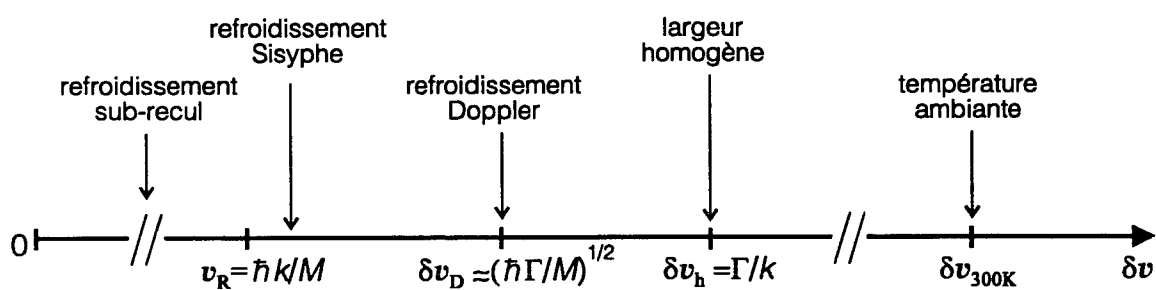
Approche statistique : vols de Lévy

1 Introduction	269
2 Q'est-ce qu'un vol de Lévy ?	275
2.1 Théorème de la limite centrale généralisé aux lois de puissance "larges"	275
2.2 Propriété fondamentale : le poids des évènements rares	277
2.2.1 Enoncé et démonstration	277
2.2.2 Commentaire	279
2.2.3 Exemples de vols de Lévy	279
2.3 Quelques propriétés des lois de Lévy	282
2.3.1 Paramétrisation de la loi élémentaire	282
2.3.2 Formes utiles des lois de Lévy	283
2.3.3 Normalisation des distributions $P(x)$	285
3 Distributions des temps caractéristiques	286
3.1 Modélisation de la diffusion en impulsion	286
3.2 Distribution des temps de piégeage	289
3.2.1 Modèle	289
3.2.2 Cas où τ et p sont liés de manière déterministe	291
3.2.3 Cas où $P(\tau/p)$ est une exponentielle	292
3.2.4 Application aux résonances noires sélectives en vitesse	293
3.3 Distribution des temps de premier retour	296
3.3.1 Modèles	296
3.3.2 Cas d'impulsions confinées : $ p < p_{\max}$	298
3.3.2.1 Situation physique étudiée	298
3.3.2.2 Calcul du temps moyen de premier retour	299
3.3.2.3 Test numérique	303
3.3.2.4 Commentaire : friction et refroidissement sub-recul	305
3.3.3 Cas d'impulsions non confinées avec un taux de fluorescence constant	307

3.3.3.1 Cas 1D	307
3.3.3.2 Cas 2D	308
3.3.3.3 Cas 3D	309
3.3.4 Cas d'impulsions non confinées avec un taux de fluorescence constant	309
3.4 Résumé des propriétés des distributions de piégeage et de premier retour	310
3.5 Absence d'ergodicité	312
4 Evolution de la population piégée	314
4.1 Discussion qualitative	314
4.2 Calcul de la population piégée : mise en forme	315
4.3 Loi d'arrosage temporel	317
4.3.1 Equation générale	317
4.3.2 Lois d'arrosage pour une distribution de Lévy	317
4.3.3 Loi d'arrosage des dates de piégeage	322
4.3.3.1 Cas $\mu = \hat{\mu}$	322
4.3.3.2 Cas $\hat{\mu} < \mu < 1$ et cas $\mu < \hat{\mu} < 1$	323
4.3.3.3 Cas $\hat{\mu} < 1 < \mu$ et cas $\mu < 1 < \hat{\mu}$	326
4.3.3.4 Cas $1 < \hat{\mu} < 2$ et $1 < \mu < 2$ ($\mu \neq \hat{\mu}$)	328
4.3.3.5 Synthèse sur la loi d'arrosage	328
4.4 Population piégée	329
4.4.1 Normalisation	329
4.4.2 Cas $\mu = \hat{\mu}$	330
4.4.3 Cas $\hat{\mu} < \mu < 1$ et cas $\mu < \hat{\mu} < 1$	331
4.4.4 Cas $\hat{\mu} < 1 < \mu$ et cas $\mu < 1 < \hat{\mu}$	334
4.4.5 Cas $1 < \hat{\mu} < 2$ et $1 < \mu < 2$ ($\mu \neq \hat{\mu}$)	335
4.4.6 Synthèse sur la population piégée	336
4.5 Application aux résonances noires	337
4.5.1 Refroidissement à une dimension	337
4.5.2 Refroidissement à deux dimensions	339
4.5.3 Refroidissement à trois dimensions	340
4.6 Tests de l'approche vols de Lévy	340
4.7 Rôle de la dimensionnalité	345
5 Distribution en impulsion et densité dans l'espace des phases	345
5.1 Distribution du module des impulsions	345
5.2 Distribution d'une composante de l'impulsion, largeur de cette distribution	349
5.3 Hauteur du pic en impulsion	351
5.4 Population refroidie et densité dans l'espace des phases	352
5.4.1 Démarche et définitions	352
5.4.2 Calcul de la proportion d'atomes refroidis	352
5.4.3 Densité dans l'espace des phases	353
5.5 Application aux résonances noires	354
6 Limites et potentialités du refroidissement sub-recul	356
6.1 Quelles limites ?	356
6.1.1 Mécanismes de sortie parasite	357
6.1.2 Limites issues des propriétés des marches aléatoires	359
6.2 Processus de sortie parasite	359
6.3 Effets collectifs : traitement auto-cohérent de la diffusion multiple	361

6.3.1 Rôle de la diffusion multiple	361
6.3.2 Ordres de grandeur	362
6.3.3 Evolution de la population piégée	363
6.3.4 Discussion des solutions	364
6.3.5 Comment réduire la diffusion multiple ?	365
6.4 Compromis remplissage-finesse	366
6.5 Limites "ultimes" : refroidissement avec un nombre fini de photons	368
7 Conclusion	370
Conclusion générale	375
Bibliographie	385
Annexe A : Formulaire	395
Annexe B : Le refroidissement laser : notions de base	405
Annexe C : Collisions He* ultrafroid	431
Annexe D : Résonances noires à deux dimensions : taux de sortie $\Gamma_{NC}(\vec{p})$	441

Introduction générale



Introduction générale

L'observation usuelle nous montre la plupart des objets macroscopiques au repos. Allant à l'encontre de cette impression d'immobilité, les premiers atomistes ont imaginé que les objets se composaient de particules microscopiques animées d'une agitation désordonnée et incessante. La mise en évidence de cette agitation, par l'étude du mouvement brownien, a été une étape décisive de la démonstration de l'hypothèse atomiste. Les vitesses typiques δv_{300K} d'agitation des molécules dans les gaz, reliées à la température T et à la masse M des molécules par $k_B T / 2 = M \langle \delta v_{300K}^2 \rangle / 2$, se sont révélées extrêmement grandes, de plusieurs centaines de mètres par seconde. Bien sûr, il existe au sein d'un gaz des molécules de vitesses faibles, mais elles sont très peu nombreuses. A température ambiante, dans un gaz d'hélium, la proportion d'atomes ayant des vitesses inférieures à un centimètre par seconde est de 10^{-15} , ce qui correspond à seulement 10^4 atomes/cm³ à pression ambiante. Ces atomes sont en outre l'objet de collisions fréquentes et ne conservent leurs faibles vitesses que pendant une nanoseconde environ. A l'échelle atomique, l'immobilité est rare et précaire.

Pour la physique atomique, la mise en évidence de l'agitation thermique a d'abord été un succès important. Mais depuis, cette agitation est surtout une gêne considérable pour l'observation des atomes. Pour réduire l'agitation thermique, les méthodes traditionnelles, thermodynamiques, ont permis d'atteindre quelques kelvins au début du siècle, et quelques millikelvins aujourd'hui avec des techniques sophistiquées de cryogénie. A ces températures, les vitesses caractéristiques des atomes restent de l'ordre de la dizaine de mètres par seconde. L'obtention d'atomes immobiles ne va pas de soi.

Le refroidissement laser est une alternative aux méthodes cryogéniques. On sait que la lumière a une action sur l'agitation thermique, puisqu'elle produit en général un réchauffement des corps. Utilisée astucieusement, elle doit pouvoir aussi les refroidir. A première vue, les effets de la lumière sur le mouvement des atomes paraissent négligeables. Ainsi, lorsqu'un atome absorbe ou émet un photon, la vitesse de l'atome est modifiée d'une quantité v_R , appelée "vitesse de recul",

$$v_R = \hbar k / M \quad (\text{i.1})$$

où $\hbar k$ est l'impulsion du photon et M la masse de l'atome. On définit également une impulsion de recul, notée p_R , par $p_R = \hbar k$. Pour un atome d'hélium, par exemple, et pour un photon de longueur d'onde 1 micron, cette vitesse v_R est de l'ordre de $9,2 \text{ cm.s}^{-1}$, très petite devant les centaines de mètres par seconde de l'agitation thermique. Cependant, en 1917, Einstein a montré que les échanges d'impulsion entre atomes et photons sont

4 Introduction générale

nécessaires pour décrire l'équilibre thermodynamique entre une assemblée d'atomes et le rayonnement du corps noir [Ein17]. En 1933, Frisch a directement mis en évidence ces échanges d'impulsion en défléchissant un jet d'atomes de sodium illuminé par une lampe à sodium [Fri33]. Il a alors observé qu'un atome du jet sur trois échangeait un photon et était ainsi dévié de 3×10^{-5} rad.

Bien que l'effet d'un seul photon soit petit, on peut obtenir un effet considérable de la lumière sur le mouvement atomique. Pour cela, il suffit de répéter à un taux élevé les échanges de photons entre atome et rayonnement laser à résonance sur une transition atomique. C'est ainsi que, par refroidissement laser, on abaisse de plusieurs ordres de grandeur les températures des vapeurs atomiques, en quelques millisecondes. Les échelles de vitesses pertinentes sont représentées sur la figure (i.1).

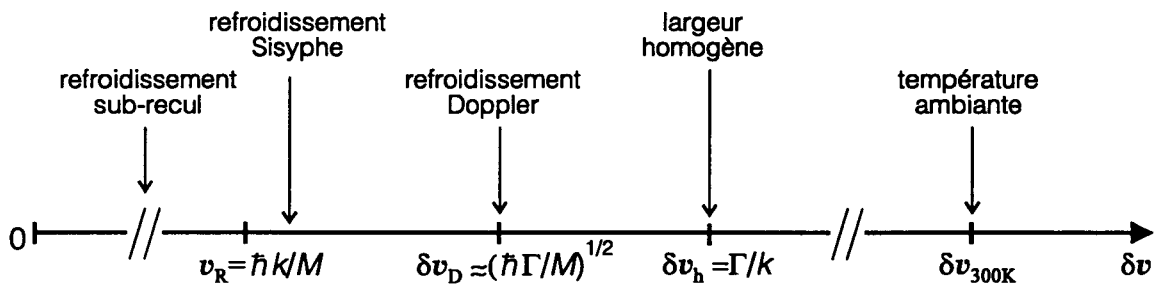


Figure i.1 *Echelles de vitesses pertinentes pour le refroidissement laser.* Pour un atome léger, comme l'hélium métastable ^4He , refroidi sur la transition $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P$ à $1,083 \mu$, on a : $\delta v_{300K} \approx 800 \text{ m.s}^{-1}$, $\delta v_h \approx 1,7 \text{ m.s}^{-1}$, $\delta v_D \approx 40 \text{ cm.s}^{-1}$ et $v_R \approx 9,2 \text{ cm.s}^{-1}$. Pour un atome lourd, comme le césium ^{133}Cs , refroidi sur la transition $F=4 \leftrightarrow F'=5$ à 850 nm , on a : $\delta v_{300K} \approx 140 \text{ m.s}^{-1}$, $\delta v_h \approx 4,5 \text{ m.s}^{-1}$, $\delta v_D \approx 12 \text{ cm.s}^{-1}$ et $v_R \approx 3,5 \text{ mm.s}^{-1}$.

La première échelle de vitesse rencontrée au-dessous de la vitesse thermique δv_{300K} est la vitesse δv_h donnant un effet Doppler égal à la largeur homogène Γ de la transition atomique utilisée :

$$k \cdot \delta v_h \approx \Gamma \quad (\text{i.2})$$

En fait, on peut accéder à une classe de vitesses bien plus étroite que δv_h grâce au refroidissement Doppler. Le refroidissement Doppler, proposé en 1975, permet de *compresser* la distribution en vitesse, sur une largeur δv_D , grâce à une configuration où les lasers exercent une force de friction sur les atomes [HaS75], [WiD75]. Cette force de

-
- [Ein17] A. Einstein, *Zur Quantentheorie der Strahlung*, Physikalische Zeitschrift **18**, p. 121-128 (1917) ; traduction française "Théorie quantique du rayonnement" dans A. Einstein, *Oeuvres choisies, Tome 1 : Quanta*, ed. F. Balibar, p. 134-146 (Seuil-CNRS, Paris, 1989)
- [Fri33] Von R. Frisch, *Experimenteller Nachweis des Einsteinschen Strahlungsrückstoßes*, Z. Phys. **86**, p. 42-48 (1933).
- [HaS75] T.W. Hänsch and A.L. Schawlow, *Cooling of gases by laser radiation*, Opt. Comm. **13**, p. 68-69 (1975).

friction vient du déséquilibre entre les pressions de radiation exercées sur l'atome par deux faisceaux lasers qui, se propageant en sens inverse, donnent lieu à des déplacements Doppler différents. On peut montrer que, pour une fréquence laser bien choisie, inférieure à la valeur de résonance, le refroidissement Doppler permet d'atteindre une dispersion minimale des vitesses δv_D donnée, pour $M\Gamma \gg \hbar k^2$, par [WiI79]

$$M\delta v_D^2 \approx \hbar\Gamma \quad (\text{i.3})$$

Cette limite résulte d'un équilibre entre les effets de friction (refroidissement) et les effets de diffusion en impulsion (chauffage) dus au caractère aléatoire de l'émission spontanée. Les températures correspondantes sont de l'ordre de la centaine de microkelvins.

En 1988, des températures plus basses que celles prévues par le mécanisme de refroidissement Doppler ont été découvertes expérimentalement [LWW88]. Ceci a conduit à la proposition de nouveaux mécanismes de refroidissement laser, dont un des plus efficaces est le refroidissement Sisyphe, qui repose sur un processus de pompage optique modulé spatialement [DaC89]. Il a été montré que le refroidissement Sisyphe permettait d'atteindre des dispersions en vitesse δv_S de l'ordre de la vitesse de recul v_R ,

$$\delta v_S \geq v_R \quad (\text{i.4})$$

Les températures correspondantes sont de l'ordre du microkelvin. L'efficacité du refroidissement Sisyphe vient de ce qu'il crée des frictions importantes dans un régime à basse intensité où le chauffage par diffusion est faible. Les expériences de refroidissement Sisyphe atteignent aujourd'hui des dispersions en vitesse de 2 à 4 v_R [SPD90], [KDR95].

A ces très basses températures, on pourrait craindre qu'en se rapprochant de l'immobilité, la physique ne se fige. En fait, il n'en est rien et la phénoménologie des vapeurs atomiques au microkelvin est foisonnante. Chaque atome, se déplaçant

-
- [WiD75] D. Wineland and H. Dehmelt, *Proposed $10^{14}\Delta v/v$ Laser Fluorescence Spectroscopy on Tl^+ Mono-Ion Oscillator III*, Bull. Am. Phys. Soc. **20**, p. 637 (1975).
- [WiI79] D.J. Wineland and W.M. Itano, *Laser cooling of atoms*, Phys. Rev. A **20**, p. 1521-1540 (1979)
- [LWW88] P.D. Lett, R.N. Watts, C.I. Westbrook, W. Phillips, P.L. Gould, and H.J. Metcalf, *Observation of Atoms Laser Cooled below the Doppler Limit*, Phys. Rev. Lett. **61**, p. 169-172 (1988).
- [DaC89] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, p. 2023-2045 (1989). Voir aussi [UWR89] : P.J. Ungar, D.S. Weiss, E. Riis, and S. Chu, *Optical molasses and multiple level atoms : theory*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, p. 2058-2071 (1989).
- [SPD90] C. Salomon, J. Dalibard, W.D. Phillips, A. Clairon, and S. Guellati, *Laser cooling of atoms below 3 μ K*, Europhys. Lett. **12**, p.683-688 (1990).
- [KDR95] Les températures les plus basses obtenues par refroidissement Sisyphe (1,2 μ K) ont été réalisées dans des "réseaux optiques" : A. Kastberg, W.D. Phillips, S.L. Rolston, R.J.C. Spreeuw, and P.S. Jessen, *Adiabatic Cooling of Cesium to 700 nK in an Optical Lattice*, Phys. Rev. Lett. **74**, p. 1542-1545 (1995).

lentement, est observable pendant des durées de l'ordre de la seconde, sans être perturbé. Par rapport aux temps caractéristiques atomiques, une seconde est un temps considérable, pendant lequel on peut extraire beaucoup d'informations d'un atome. A ces échelles de temps, les atomes deviennent extrêmement sensibles à toute action extérieure, même faible, y compris à l'action de la pesanteur. En outre, la mécanique quantique enrichit la problématique de la recherche d'atomes immobiles puisqu'une particule ne peut être à la fois strictement immobile et localisée. Ainsi, au microkelvin, les atomes se délocalisent à l'échelle du micron – alors que leur rayon reste inchangé ($\approx 0,5 \text{ \AA}$) – et le comportement ondulatoire du mouvement atomique devrait être manifeste.

On voudrait réduire encore l'agitation des atomes. A l'échelle du kelvin, la vitesse de recul v_R d'un seul photon était petite par rapport aux vitesses des atomes. A l'échelle du microkelvin, ce quantum v_R d'effet mécanique des lasers sur les atomes est du même ordre de grandeur que les vitesses atomiques. La vitesse de recul v_R est donc une échelle difficile à franchir pour le refroidissement laser. En effet, l'émission spontanée, qui est indispensable pour assurer la dissipation nécessaire au refroidissement, se traduit par un changement de vitesse atomique de module v_R dans une direction aléatoire, incontrôlable.

On peut montrer avec un raisonnement simple comment apparaît la limite du recul. Considérons un atome dans l'état fondamental, d'impulsion \vec{p}_i . Cet atome interagit avec un certain nombre d'ondes lasers de configuration arbitraire dont les photons ont des impulsions $\hbar\vec{k}_{\text{laser}}$, éventuellement dans des directions différentes. L'interaction entre l'atome et les lasers se traduit par une émission spontanée qui donne à l'atome l'impulsion \vec{p}_f avec

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i + \Delta\hbar\vec{k}_{\text{laser}} - \hbar\vec{k}_{\text{sp}} \quad (\text{i.5})$$

où $\hbar\vec{k}_{\text{sp}}$ est l'impulsion du photon spontané, et où $\Delta\hbar\vec{k}_{\text{laser}}$ est l'impulsion du photon laser absorbé (ou plus généralement le changement d'impulsion dû aux processus d'absorptions et d'émissions stimulées entre deux émissions spontanées). En portant l'équation (i.5) au carré et en moyennant sur les émissions spontanées de plusieurs atomes de même impulsion initiale \vec{p}_i , on obtient

$$\langle \vec{p}_f^2 \rangle = \langle (\vec{p}_i + \Delta\hbar\vec{k}_{\text{laser}})^2 \rangle + \langle (\hbar\vec{k}_{\text{sp}})^2 \rangle + 2\langle (\vec{p}_i + \Delta\hbar\vec{k}_{\text{laser}}) \cdot \hbar\vec{k}_{\text{sp}} \rangle \quad (\text{i.6})$$

Le premier terme du membre de droite est celui sur lequel joue le refroidissement laser "traditionnel" (refroidissement Doppler, refroidissement Sisyphé) : par absorption préférentielle dans une onde laser bien choisie, on obtient $\langle (\vec{p}_i + \Delta\hbar\vec{k}_{\text{laser}})^2 \rangle < \langle (\vec{p}_i)^2 \rangle$, ce qui tend à réduire l'impulsion quadratique moyenne.

Le deuxième terme, $\langle \hbar\vec{k}_{\text{sp}}^2 \rangle = p_R^2$, est le terme de chauffage dû au recul.

Le troisième terme de l'équation est nul en moyenne. En effet, quelle que soit l'impulsion $(\vec{p}_i + \hbar\vec{k})$, l'émission spontanée a lieu avec une probabilité égale dans deux directions opposées.

On a donc finalement

$$\langle \bar{p}_f^2 \rangle = \langle (\bar{p}_i + \Delta \hbar \vec{k}_{\text{laser}})^2 \rangle + p_R^2 \quad (\text{i.7})$$

Aussi efficace que soit le refroidissement (*i.e.* aussi petit que soit $\langle (\bar{p}_i + \Delta \hbar \vec{k}_{\text{laser}})^2 \rangle$), on obtient donc

$$\langle p_f^2 \rangle \geq p_R^2, \text{ soit } T \geq T_R \quad (\text{i.8})$$

où $T_R \equiv Mv_R^2 / k_B$ est la température de recul. La limite du recul semble donc infranchissable [1].

Une méthode inventée en 1988 par le groupe de l'Ecole Normale Supérieure a cependant permis de franchir l'échelle de la vitesse de recul d'un seul photon. Il s'agit du refroidissement par résonances noires sélectives en vitesse [AAK88]. Dans cette méthode, tout comme dans les méthodes de refroidissement laser au-dessus du recul, les atomes échangent des photons avec les faisceaux lasers tant que leur vitesse est importante. Mais, à la différence des méthodes habituelles, lorsque les atomes atteignent une vitesse suffisamment petite, un effet d'interférence destructive entre deux probabilités d'absorption se produit et l'atome se trouve piégé dans un état "noir" qui n'absorbe ni ne réémet de photon. C'est cet effet d'interférence destructive, sensible à la vitesse des atomes, qui est appelé "résonance noire sélective en vitesse". Plusieurs autres mécanismes de refroidissement sub-recul ont été proposés [PHB87], [WaE89], [Mol91] ou expérimentalement démontrés [KaC92].

-
- [1] Le calcul de la température limite en présence d'émission spontanée a été fait ici à 3 dimensions. Si on s'intéresse à une seule dimension d'impulsion p_z , il faut tenir compte du diagramme d'émission spontanée, et la limite obtenue est plus basse. Par exemple, si l'on considère l'émission spontanée comme isotrope, on aboutit à $\langle p_z^2 \rangle \geq p_R^2 / 3$. Si, de manière plus correcte, on considère un diagramme d'émission dipolaire, et des faisceaux lasers orientés selon Oz , on trouve $\langle p_z^2 \rangle \geq p_R^2 \times 2 / 5$. La limite du recul à une dimension est donc plutôt $T_R \times 2/5$ que T_R . Certains mécanismes proposés approchent en théorie de très près cette limite. Ainsi, le refroidissement Doppler sur une raie étroite ($E_R = \hbar^2 k^2 / (2M) \gg \hbar\Gamma$) permet théoriquement d'atteindre $\langle p_z^2 \rangle \approx 0,53 E_R$ (cf. [CWD89] : Y. Castin, H. Wallis, and J. Dalibard, *Limit of Doppler Cooling*, J. Opt. Soc. Am. B 6, p. 2046-2057 (1989)).
- [AAK88] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *Laser Cooling below the One-Photon Recoil Energy by Velocity-Selective Coherent Population Trapping*, Phys. Rev. Lett. 61, p. 826-829 (1988).
- [PHB87] D.E. Pritchard, K. Helmerson, V.S. Bagnato, G.P. Lafyatis, and A.G. Martin, *Optical Pumping in Translation Space*, in *Laser Spectroscopy VIII*, edited by W. Persson and S. Svansberg, Springer-Verlag, Berlin (1987).
- [WaE89] H. Wallis and W. Ertmer, *Broadband laser cooling on narrow transitions*, J. Opt. Soc. Am. B 6, p. 2211-2219 (1989).
- [Mol91] K. Molmer, *Limits of Doppler Cooling in Pulsed Laser Fields*, Phys. Rev. Lett. 66, p. 2301-2304 (1991).
- [KaC92] M. Kasevich and S. Chu, *Laser Cooling below a Photon recoil with Three-Level Atoms*, Phys. Rev. Lett. 69, p. 1741-1744 (1992).

Alors que les atomes rapides continuent à échanger des photons, les atomes lents sont protégés par la résonance noire des effets néfastes de la lumière et conservent donc leur petite vitesse. Ainsi, on accumule les atomes dans une classe étroite de vitesses autour de la vitesse nulle. La limite du recul décrite par l'inégalité (i.8) ne s'applique plus : pour les impulsions \bar{p}_i suffisamment petites, il n'est pas légitime de moyenniser sur les émissions spontanées pour calculer \bar{p}_f puisque, pour ces impulsions, l'émission spontanée est supprimée.

Le refroidissement par résonances noires a été mis en œuvre à une dimension expérimentalement en 1988, sur un jet supersonique d'atomes d'hélium. Les atomes du jet interagissaient avec deux faisceaux lasers sur une zone de quelques centimètres. A la fin de l'interaction, leur vitesse caractéristique était $v_R/1,4$, ce qui démontrait incontestablement l'efficacité de la méthode des résonances noires.

Cependant, le domaine des températures sub-recoil était encore un champ de recherches très ouvert, puisqu'on ne connaissait pas de limite inférieure fondamentale pour les températures. Le refroidissement par résonances noires semblait permettre d'aller très au-dessous de l'énergie de recul. En effet, des arguments théoriques [AAK89] prévoyaient que la température obtenue variait comme l'inverse du temps d'interaction entre les atomes et les lasers. On devait pouvoir gagner plusieurs ordres de grandeur sur les plus basses températures atteintes. Il était donc intéressant de réaliser un dispositif expérimental qui exploite réellement le potentiel du refroidissement par résonances noires.

Par ailleurs, des incertitudes théoriques importantes subsistaient sur l'efficacité du refroidissement lorsque l'on accroîtait le temps d'interaction : allait-on pouvoir refroidir tous les atomes ou une partie seulement ? Le refroidissement se poursuivrait-il indéfiniment ? La méthode avait été efficace à une dimension, le serait-elle encore à deux ou trois dimensions ? Il fallait donc essayer de cerner les potentialités et les limites éventuelles de la méthode.

En résumé, les travaux de 1988 avaient découvert une méthode de refroidissement très puissante, les résonances noires sélectives en vitesse. Cependant, les approches théoriques et expérimentales utilisées avaient atteint leurs propres limites sans atteindre celles de la méthode elle-même. Pour aller au-delà, il fallait de nouveaux angles d'attaque qui sont l'objet de cette thèse. Le problème a été abordé par diverses approches complémentaires.

Au niveau expérimental, nous avons élaboré un nouveau dispositif de refroidissement par résonances noires dans lequel la source d'atomes est constituée, non d'un jet atomique, mais d'un piège d'atomes pré-refroidis par les méthodes traditionnelles du refroidissement laser. Ce premier piège d'atomes d'hélium métastable s'est révélé intéressant par lui-même, sensiblement différent des pièges réalisés pour d'autres atomes. Il fournit des atomes d'hélium à des vitesses inférieures au mètre par

[AAK89] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the one-photon recoil energy by velocity-selective coherent population trapping : theoretical analysis*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, p. 2112-2124 (1989).

seconde. L'intérêt est que ces atomes pré-refroidis peuvent interagir beaucoup plus longtemps avec les faisceaux lasers des résonances noires que les atomes du jet supersonique qui étaient à 1000 mètres par seconde. Avec ce dispositif, on peut espérer gagner deux à trois ordres de grandeur sur les températures atteintes. Les premières expériences ont permis de gagner d'emblée un ordre de grandeur, atteignant $T_R/40$, soit 100 nK pour l'hélium métastable. A deux dimensions, la limite du recul a été franchie pour la première fois, et on atteint $T_R/20$, soit 200 nK.

Au niveau théorique, la question du comportement aux temps longs et des limites du refroidissement par résonances noires semblait difficile à traiter avec les méthodes analytiques ou numériques, pourtant élaborées, de 1988. Notre travail s'est donc développé sur des axes nouveaux.

Un premier pas a été accompli avec la mise en œuvre d'un nouveau type de simulations Monte-Carlo quantique. Ces simulations se sont avérées très efficaces sur le plan numérique, permettant d'avoir accès à des temps d'interaction accrus de plusieurs ordres de grandeur par rapport à la méthode traditionnelle de résolution des équations de Bloch optiques. Un autre attrait de ce calcul Monte-Carlo quantique est de fournir une image physique de l'évolution possible d'un seul atome. Un comportement statistique étonnant est alors apparu : chaque atome, qui au cours du temps occupe de nombreux états d'impulsion, semble passer l'essentiel du temps dans un seul état, celui qui a la plus petite impulsion.

Nous avons rapproché ce comportement inhabituel de certains phénomènes de diffusion anormale. Ceci nous a aiguillés vers une approche statistique complètement nouvelle, qui a permis une deuxième avancée. Développée avec le formalisme des vols de Lévy, cette approche décrit l'évolution des atomes comme une marche au hasard dans le temps. Elle fournit des résultats analytiques sur le comportement aux temps longs, à 1, 2 ou 3 dimensions. Nous cernons mieux le potentiel et les limites du refroidissement par résonances noires : la largeur de la classe de vitesses dans laquelle les atomes sont accumulés tend bien vers zéro quand le temps d'interaction augmente, mais dans certains cas, une fraction seulement des atomes se trouve dans cette classe de vitesses.

Plan du mémoire

Le mémoire comporte cinq chapitres, dont le contenu est décrit brièvement ci-dessous. Un premier chapitre présente la problématique de la thèse. Les chapitres II et III exposent les travaux expérimentaux. Les chapitres IV et V sont consacrés aux approches théoriques. Une conclusion générale rassemble les résultats et indique quelques perspectives.

Le chapitre I expose les motivations de ce travail. On rappelle d'abord le principe des résonances noires sélectives en vitesse et les résultats théoriques et expérimentaux obtenus en 1988. Puis on montre comment les approches employées en 1988 avaient atteint leurs propres limites, à la fois au niveau théorique et expérimental, alors que les

possibilités du refroidissement par résonances noires semblaient permettre d'atteindre des températures beaucoup plus basses. Pour aller plus loin, il faut explorer tout d'abord le régime des longs temps d'interaction atomes-lasers, puisque la température diminue avec le temps d'interaction. Nous posons également le problème de la généralisation à plusieurs dimensions du refroidissement par résonances noires.

Le chapitre II est consacré à la réalisation du nouveau dispositif expérimental de résonances noires sélectives en vitesse. On décrit d'abord les éléments de base de l'expérience, l'hélium métastable, les lasers et le jet atomique. Puis, on présente la réalisation d'un piège magnéto-optique d'atomes d'hélium à partir d'un jet supersonique, qui a conduit à un résultat important, exposé en annexe, l'observation de collisions Penning entre atomes froids avec des sections efficaces géantes. L'objectif ici n'est pas d'étudier exhaustivement le piège, mais de le comprendre suffisamment afin de l'utiliser de manière optimale comme source d'atomes froids dans l'expérience de résonances noires. On décrit ensuite la préparation des expériences de résonances noires, dont les étapes importantes sont l'étude des effets des champs magnétiques parasites et la réalisation d'un détecteur multicanal pour la position des atomes (galettes de microcanaux), adapté aux expériences à 1, 2 ou 3 dimensions. Nous concluons par une vue d'ensemble du nouveau dispositif et de ses possibilités.

Le chapitre III expose les premiers résultats obtenus avec le nouveau dispositif de refroidissement par résonances noires. Il a tout d'abord été nécessaire de mettre en œuvre plusieurs expériences préliminaires, servant à contrôler finement le champ magnétique, à l'aide de l'effet Hanle mécanique. Puis, les premières expériences de refroidissement réalisées à une dimension ont permis d'accroître d'un ordre de grandeur les durées d'interaction par rapport à l'expérience sur jet. On a étudié les différentes contributions au profil observé sur le détecteur, ce qui a permis une mesure précise de température. L'influence des champs magnétiques parasites a également été observée. Enfin, des expériences ont été réalisées à deux dimensions, avec deux configurations lasers différentes. Elles ont montré qu'on atteignait sensiblement les mêmes températures qu'à une dimension, nettement dans le régime sub-recul ; elles ont mis en évidence le rôle important des forces de friction. Ce nouveau montage, qui a permis d'emblée un gain d'un ordre de grandeur sur les températures et l'accès au refroidissement à deux dimensions, devrait permettre une réduction supplémentaire des températures par un ordre de grandeur et l'accès au refroidissement à 3 dimensions.

Le chapitre IV expose la première des deux approches théoriques nouvelles des résonances noires, c'est-à-dire un traitement par simulations Monte-Carlo quantique. Pour étudier l'évolution temporelle du refroidissement par résonances noires, une exploration numérique semble possible. La démarche employée auparavant, fondée sur la résolution de l'équation d'évolution de la matrice densité atomique, avait fourni des résultats intéressants pour des échelles de temps en jeu dans l'expérience sur jet. Mais elle ne permettait pas d'accéder aux temps accrus de deux ordres de grandeur de la nouvelle génération d'expériences, ni à des temps encore plus longs pour tester les limites éventuelles du refroidissement par résonances noires. Les simulations Monte-Carlo sont une alternative à la résolution des équations d'évolution. Mais, dans notre

cas, le caractère quantique des résonances noires est *a priori* difficile à concilier avec les choix aléatoires, nécessairement classiques, qu'implique une simulation Monte-Carlo. Il existe un formalisme bien adapté à ce genre de problèmes, la fonction délai qui décrit la statistique des dates d'émissions des photons spontanés : on peut faire porter les choix aléatoires sur les photons spontanés, alors qu'entre deux émissions spontanées l'évolution est décrite par une équation quantique. A partir de la fonction délai, on peut construire un algorithme de simulation Monte-Carlo qui respecte le caractère quantique de l'interaction atome-lumière. Ces simulations s'accrochent très naturellement d'une des difficultés théoriques du refroidissement par résonances noires, l'existence d'échelles très différentes les unes des autres. Un autre avantage de cette approche est de fournir des images de l'évolution d'un seul atome. Ces images sont à la base de l'approche statistique du chapitre suivant.

Le chapitre V décrit la deuxième approche théorique des résonances noires présentée dans ce mémoire, qui est une théorie statistique analytique basée sur les statistiques de Lévy. La théorie développée en 1988 permettait une compréhension "microscopique" de la physique des résonances noires sélectives en vitesse. Elle expliquait parfaitement l'existence d'états noirs, leur dépendance en vitesse. Cependant, la diffusion en impulsion des atomes n'était décrite que qualitativement. Il manquait une approche globale de la dynamique des résonances noires, et les tentatives dans ce sens n'avaient pas véritablement débouché. La solution présentée ici est inspirée par l'image de la diffusion des atomes que donne la simulation Monte-Carlo quantique : cette diffusion est dominée par un petit nombre d'événements rares. Nous avons relié ce comportement inhabituel à un processus de diffusion anormale appelé « vol de Lévy ». Ce type de processus ne se traite pas avec les outils statistiques habituels, mais requiert la généralisation du théorème de la limite centrale, formulée par Lévy et Khintchine dans les années 1930. La modélisation des résonances noires conduit à s'intéresser aux distributions des temps passés par les atomes dans les états noirs, et hors des états noirs. Cette approche fournit analytiquement des résultats importants comme la proportion d'atomes refroidis, ou l'effet de la dimensionnalité, et elle permet de s'intéresser au comportement de la densité dans l'espace des phases et aux limites "ultimes" du refroidissement par résonances noires. Avec cette approche, on identifie les paramètres pertinents et on révèle le caractère non ergodique du refroidissement par résonances noires. Outre son caractère prédictif, cette approche par les statistiques de Lévy donne une vision globale du refroidissement sub-recul.

Remarques liminaires destinées à faciliter la lecture

Quelques mots de l'organisation du mémoire.

Chaque chapitre comporte une introduction et une conclusion qui permettent de le replacer dans l'ensemble du mémoire. Tous les chapitres sont donc relativement autonomes, pourvu qu'on connaisse la problématique du refroidissement par résonances noires présentée au chapitre I.

Pour ceux qui ne seraient pas familiers avec le refroidissement laser, l'annexe B rappelle les notions de base.

Les notations mathématiques utilisées sont à la fois définies dans le texte lors de leur première utilisation et rappelées dans l'annexe A. De même, les références bibliographiques sont données en bas de page, lors des premières citations, et dans la bibliographie placée à la fin du texte.

Le vocabulaire employé mérite quelques précisions.

Cette thèse a pour sujet le « refroidissement par résonances noires sélectives en vitesse », le « refroidissement par résonances noires », ou simplement les « résonances noires ». Cette méthode de refroidissement laser sub-recul est aussi désignée par l'expression « piégeage cohérent de population sélectif en vitesse » (PCPSV) ou « velocity-selective coherent population trapping » (VSCPT).

Parler de refroidissement incite à introduire des températures. Or, en l'absence d'équilibre thermodynamique, la notion de température est sujette à caution. En revanche, la distribution en vitesse reste un concept bien défini.

Pour éviter les ambiguïtés, nous caractériserons toujours une distribution en vitesse par sa demi-largeur à $1/e^{1/2}$ de la valeur maximale, même quand la distribution n'est pas gaussienne : nous notons δv cette demi-largeur. Dans certains cas, nous utiliserons également la valeur quadratique moyenne σ_v . Indiquons aussi que δv et σ_v font toujours référence à une seule composante du vecteur vitesse et jamais au module du vecteur vitesse.

Enfin, parce qu'elles sont très utilisées, nous introduirons des températures "effectives" T_{eff} définies par

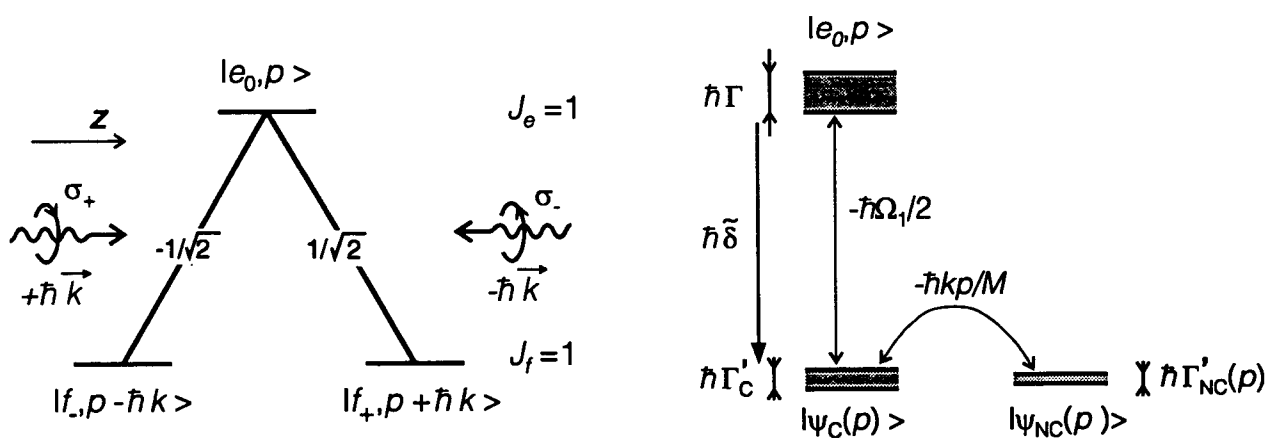
$$\frac{1}{2} k_B T_{\text{eff}} = \frac{1}{2} M(\delta v)^2 \quad (\text{i.9})$$

mais l'indice "eff" sera omis.

Chapitre I

Le refroidissement sub-recul par résonances noires :

notions de base et motivations du présent travail



Plan du chapitre I :
Le refroidissement sub-recul par résonances noires :
notions de base et motivations du présent travail

1 Introduction	15
2 Principe du refroidissement par résonances noires sélectives en vitesse	17
2.1 Système atomique et couplages [AAK88], [AAK89]	17
2.1.1 Système en Λ	17
2.1.2 Prise en compte de l'impulsion atomique. Effet de l'émission spontanée	18
2.1.3 Couplages lasers et motionnels. Etats $ \psi_C(p)\rangle$ et $ \psi_{NC}(p)\rangle$	20
2.2 Principe du refroidissement par résonances noires [AAK89]	24
2.2.1 Processus de refroidissement	24
2.2.2 Impulsion caractéristique des atomes refroidis	24
2.2.3 Signature caractéristique du refroidissement par résonances noires	27
2.3 Expérience sur jet de 1988 [AAK88]	27
2.3.1 Dispositif expérimental	27
2.3.2 Résultats expérimentaux	28
2.3.3 Difficultés expérimentales	28
3 Le problème des temps longs	29
3.1 Motivation et problèmes théoriques	29
3.2 Résolution numérique des équations de Bloch optiques généralisées : problème des temps longs	30
3.3 Problèmes expérimentaux posés par les temps longs	32
4 Le problème de la généralisation à plusieurs dimensions	34
4.1 Intérêt du refroidissement à plusieurs dimensions	34
4.2 Existence d'états noirs sélectifs en vitesse à plusieurs dimensions	34
4.3 Existence d'un effet de refroidissement sub-recul à plusieurs dimensions	36
4.4 Problèmes expérimentaux posés par le refroidissement à 2 et 3 dimensions	37
5 Conclusion : acquis, problèmes, et nouvelles approches	38

1 Introduction

Lorsqu'on veut pousser le refroidissement laser à sa limite, on se heurte aux effets de l'émission spontanée. En effet, l'émission spontanée est indispensable pour assurer la dissipation de l'énergie cinétique des atomes. En contrepartie, par son caractère aléatoire, chaque émission spontanée engendre un changement incontrôlable Δp de l'impulsion atomique de l'ordre de $\hbar k$, l'impulsion d'un photon. L'émission spontanée est donc simultanément cause de dissipation et cause de fluctuation dans le refroidissement laser : c'est cela qui fait de la température de recul T_R , définie par $k_B T_R \equiv \hbar^2 k^2 / M = M v_R^2$, une limite pour la plupart des mécanismes de refroidissement laser.

Pour refroidir au-delà de la limite du recul, il faut d'abord que les atomes émettent des photons spontanés (condition de refroidissement), puis certains atomes doivent cesser de fluorescer à un moment donné (condition de franchissement de la limite du recul). La distribution en impulsion de ces atomes cesse alors d'évoluer. Pour que l'on ait obtenu un effet de refroidissement, il faut que l'impulsion de ces atomes qui ont cessé de fluorescer se trouve dans une zone étroite.

Nous sommes donc amenés à rechercher un processus dans lequel les atomes fluorescent, sauf si leur vitesse est suffisamment petite. Tous les mécanismes de refroidissement sub-recul proposés à ce jour reposent sur ce principe.

Celui qui nous intéresse dans ce mémoire est fondé sur un processus connu en spectroscopie atomique depuis 1976 sous le nom de "résonances noires" ou de "piégeage cohérent de population" [AGM76], [ArO76], [GSW78] : dans les systèmes en Λ , constitués de deux états fondamentaux et d'un état excité, éclairé par deux ondes lasers, on observe que les atomes fluorescent sauf lorsqu'une condition de résonance Raman est satisfaite.

[AGM76] G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi, and G. Orriols, *An Experimental Method for the Observation of R.F. Transitions and Laser Beat Resonances in Oriented Na Vapour*, Nuovo Cimento **36B**, p. 5-20 (1976).

[ArO76] E. Arimondo and G. Orriols, *Nonabsorbing Atomic Coherences by Coherent Two-Photon Transitions in a Three-Level Optical Pumping*, Lett. Nuovo Cimento **17**, p. 333-338 (1976).

[GSW78] H.R. Gray, R.M. Whitley, and C.R. Stroud, Jr., *Coherent trapping of atomic populations*, Optics Letters **3**, p. 218-220 (1978).

L'adaptation des résonances noires au refroidissement laser [AAK88] est née de l'idée que la condition de résonance Raman pouvait se traduire en termes d'impulsion atomique. On réalise alors le profil de fluorescence que nous cherchons : tous les atomes fluorescents, sauf ceux qui ont une impulsion suffisamment petite.

Dans un premier temps (§ I.2), nous rappelons brièvement la physique du refroidissement par résonances noires et les résultats de la première expérience sur jet, en résumant les articles originaux [AAK88] et [AAK89] : la théorie prévoit et l'expérience prouve que le refroidissement par résonances noires peut franchir la limite du recul, à une dimension.

Nous présentons alors les motivations de notre travail, qui est un approfondissement de l'étude du refroidissement par résonances noires. Tout d'abord, des arguments théoriques semi-quantitatifs présentés dans [AAK89] suggéraient que la température atteinte devait varier comme l'inverse du temps d'interaction entre atomes et lasers : la température devrait donc pouvoir diminuer indéfiniment. Or, l'expérience initiale n'a franchi la limite du recul que d'un facteur 2, et les premières approches théoriques quantitatives exactes n'étaient pas utilisables dans la limite des longs temps d'interaction. Le premier problème (§ I.3) est donc d'explorer, à la fois théoriquement et expérimentalement, le régime des longs temps d'interaction, afin d'évaluer les possibilités ultimes des résonances noires sélectives en vitesse.

Ensuite, la première expérience avait effectué un refroidissement sub-recul à une dimension seulement. Le deuxième problème (§ I.4) est donc de généraliser à plusieurs dimensions le refroidissement par résonances noires, tant au niveau théorique, qu'au niveau expérimental.

En résumé, si les premiers travaux ont dégagé la physique de base des résonances noires et montré que ce mécanisme de refroidissement permettait de franchir la limite du recul, ils ont aussi suggéré qu'il existait des régimes encore plus intéressants (temps longs, 2 et 3D) que ceux étudiés. Pour accéder à ces régimes, tant au niveau théorique qu'au niveau expérimental, il nous a fallu développer des approches qualitativement nouvelles que nous esquissons au paragraphe I.5.

[AAK88] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *Laser Cooling below the One-Photon Recoil Energy by Velocity-Selective Coherent Population Trapping*, Phys. Rev. Lett. **61**, p. 826-829 (1988).

[AAK89] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the one-photon recoil energy by velocity-selective coherent population trapping : theoretical analysis*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, p. 2112-2124 (1989).

2 Principe du refroidissement par résonances noires sélectives en vitesse

Nous nous basons dans ce paragraphe sur les articles originaux [AAK88] et [AAK89] ainsi que sur [Kai90] et [Coh91]. Pour une présentation "historique", voir [Ari90].

2.1 Système atomique et couplages [AAK88], [AAK89]

2.1.1 Système en Λ

Le phénomène de résonances noires apparaît sur une transition en Λ que l'on extrait d'une transition $J_f = 1 \leftrightarrow J_e = 1$. Nous considérons un état fondamental f ($J_f = 1$) séparé d'un état excité e ($J_e = 1$) par l'énergie $\hbar\omega_0$. Le niveau fondamental, stable, comporte trois sous-niveaux Zeeman notés f_-, f_0, f_+ . Le niveau excité, de durée de vie Γ^{-1} , comporte les trois sous-niveaux e_-, e_0, e_+ (figure I.1.a).

Les atomes sont éclairés par deux ondes lasers se propageant dans des directions opposées et polarisées circulairement respectivement σ_+ et σ_- [1]. L'onde se propageant vers les z positifs (photons d'impulsion $+\hbar\vec{k}$) est polarisée σ_+ . Inversement, l'onde se propageant vers les z négatifs (photons d'impulsion $-\hbar\vec{k}$) est polarisée σ_- . Les deux ondes ont la même amplitude E_0 , la même fréquence ω_L proche de ω_0 , et elles sont cohérentes en phase.

Montrons que, dans cette configuration, les atomes sont optiquement pompés dans le système en Λ constitué des trois niveaux f_-, e_0, f_+ .

Tout d'abord, par conservation du moment cinétique, l'état f_- n'est couplé qu'à l'état excité e_0 , par l'onde σ_+ . De même, l'état f_+ n'est couplé qu'à l'état excité e_0 , par l'onde σ_- . Enfin, l'état e_0 est couplé uniquement à f_- (par l'onde σ_+) et à f_+ (par l'onde σ_-). Par conséquent, les lasers ne couplent les états f_-, e_0, f_+ qu'entre eux. Par ailleurs, par émission spontanée, l'état e_0 ne peut se désexciter que vers f_- ou f_+ puisque le coefficient de Clebsch-Gordan pour le processus $e_0 \leftrightarrow f_0$ est nul. Par conséquent, si l'atome se trouve dans le système en $\Lambda = \{f_-, e_0, f_+\}$, aucun processus (couplages lasers, émission spontanée) ne l'en fait sortir.

[Kai90] R. Kaiser, *Manipulation par laser d'hélium métastable : effet Hanle mécanique, refroidissement sous le recul d'un photon*, Thèse de l'Université Paris VI (1990).

[Coh91] C. Cohen-Tannoudji, *Cours au Collège de France 1991-1992*, leçon IV.

[Ari90] E. Arimondo, *Velocity-Selective coherent population trapping in one and two dimensions*, Proceedings of the 1991 Varenna Summer School, edited by E. Arimondo, W.D. Phillips, and F. Strumia (North-Holland, Amsterdam, 1992).

[1] Au sens où le moment cinétique des photons associés à l'onde σ_+ le long de l'axe z est opposé au moment cinétique des photons associés à l'onde σ_- . Du point de vue de l'optique, on dirait que les deux ondes sont circulaires gauches.

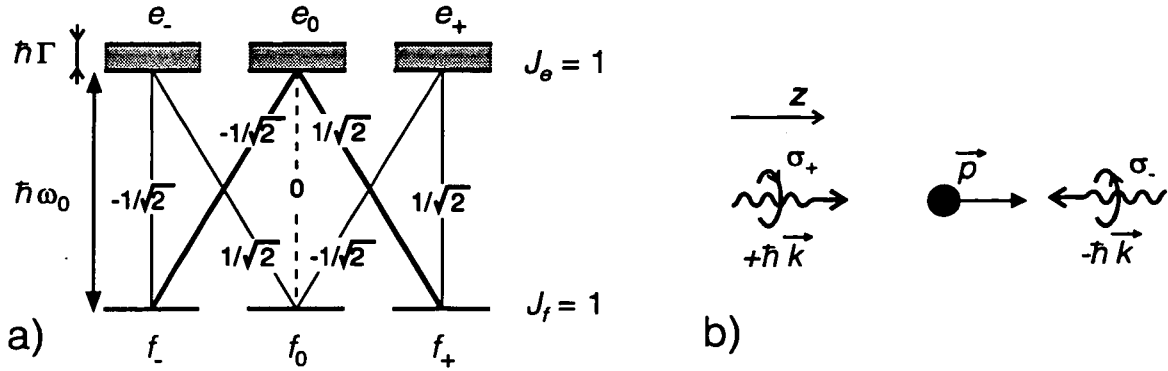


Figure I.1 Configuration des résonances noires sélectives en vitesse.

(a) Transition $J_f=1 \leftrightarrow J_e=1$. Après quelques cycles de fluorescence, les atomes sont pompés optiquement dans le système en Λ , composé des niveaux f_- , e_0 , f_+ et indiqué en trait épais sur la figure. Noter la nullité du coefficient de Clebsch-Gordan pour la transition $f_0 \leftrightarrow e_0$.

(b) Configuration laser σ_+ - σ_- . Les photons de l'onde σ_+ (respectivement σ_-) transportent l'impulsion $+\hbar\vec{k}$ (respectivement $-\hbar\vec{k}$).

Par contre, si l'atome se trouve dans les états e_- (respectivement e_+), par émission spontanée, il se désexcite avec une probabilité $1/2$ vers f_- (respectivement f_+), c'est-à-dire vers le système en Λ . Si l'atome se trouve dans f_0 , en absorbant un photon, il passera dans un des états e_- ou e_+ , ce qui ramène au cas précédent.

Le système en Λ est donc alimenté par émission spontanée, mais aucun processus n'en fait sortir. Par conséquent, après un régime transitoire de quelques cycles de fluorescence, la population atomique est accumulée dans le système en $\Lambda = \{f_-, e_0, f_+\}$, auquel nous nous limitons désormais.

2.1.2 Prise en compte de l'impulsion atomique. Effet de l'émission spontanée

Pour étudier un effet de refroidissement en régime quantique, il est pratique de décrire les degrés de liberté externes en représentation impulsion. On repérera les états atomiques à la fois par leur état interne et par leur état externe : $|e_0, p\rangle$, par exemple, représente l'état d'un atome d'impulsion p dans l'état interne e_0 . Comme on s'intéresse ici à un problème à 1D, p représente la projection sur z de l'impulsion atomique.

Pour déterminer quels sont les états couplés entre eux, on fait intervenir la conservation de l'impulsion. Ainsi, l'état $|e_0, p\rangle$ s'obtient à partir d'un état f_+ par absorption d'un photon σ_- d'impulsion $-\hbar k$: l'onde σ_- couple donc $|e_0, p\rangle$ à $|f_+, p + \hbar k\rangle$, et à cet état seulement. De même, l'état $|e_0, p\rangle$ s'obtient à partir d'un état f_- par absorption d'un photon σ_+ d'impulsion $+\hbar k$: l'onde σ_+ couple donc $|e_0, p\rangle$ à $|f_-, p - \hbar k\rangle$, et à cet état seulement.

Nous sommes donc amenés à introduire la famille d'états $F(p)$, stable sous l'effet du couplage atome-laser (figure I.2):

$$F(p) \equiv \{|f_-, p - \hbar k\rangle, |e_0, p\rangle, |f_+, p + \hbar k\rangle\} \quad (\text{I.1})$$

Les états de base de $F(p)$ sont des états propres de l'hamiltonien atomique, puisque leur énergie interne et leur énergie externe sont bien définies. Par conséquent, la famille $F(p)$ est globalement stable sous l'effet de l'évolution hamiltonienne : en l'absence d'émission spontanée, toute superposition linéaire des états de base de $F(p)$ reste une superposition linéaire de ces mêmes états au cours de son évolution.

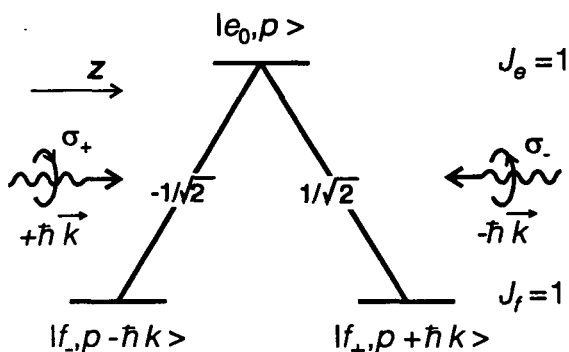


Figure I.2 Famille $F(p)$ des états couplés par le champ laser. Cette famille en Λ est stable en l'absence d'émission spontanée. Les états couplés par le champ laser traduisent la conservation du moment cinétique et de l'impulsion lors de l'absorption et de l'émission stimulée de photons.

En revanche, l'émission spontanée à partir d'un état $|e_0, p\rangle$ se produit dans une direction aléatoire et conduit donc à des états $|f_{\pm}, p'\rangle$, avec $|p' - p| \leq \hbar k$. L'émission spontanée provoque donc un changement de famille (figure I.3) :

$$F(p) \xrightarrow{\text{émission spontanée}} F(p' \pm \hbar k) \text{ avec } |p' - p| \leq \hbar k \quad (I.2)$$

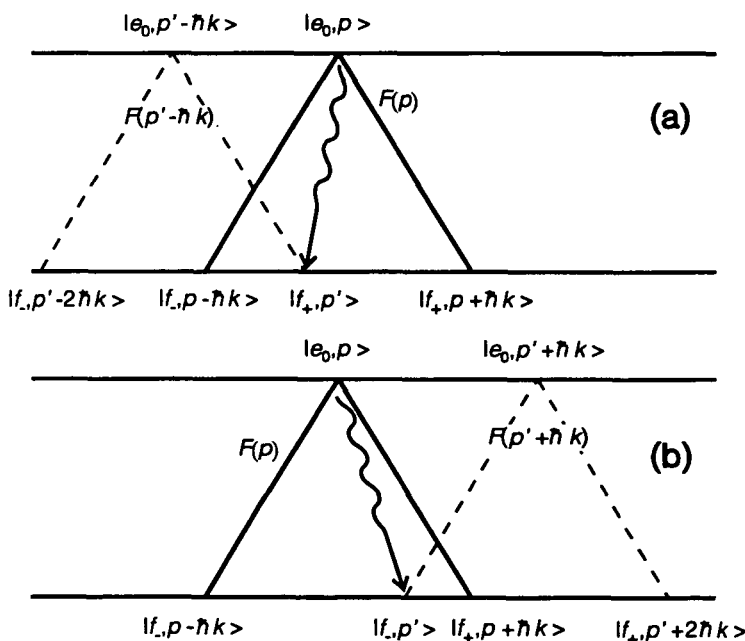


Figure I.3 Transferts entre familles dus à l'émission spontanée. En partant de $|e_0, p\rangle$ qui appartient à $F(p)$, après émission d'un photon spontané, l'atome va soit dans l'état $|f_+, p'\rangle$ (famille $F(p' - \hbar k)$, cas (a)), soit dans l'état $|f_-, p'\rangle$ (famille $F(p' + \hbar k)$, cas (b)). L'impulsion p' est telle que $|p' - p| \leq \hbar k$.

Dans le refroidissement laser habituel, les changements d'impulsion lors des cycles de fluorescence créent des forces de friction, et donc un effet de refroidissement. Dans notre cas, il n'en est rien : dans la configuration de résonances noires présentée ici, il n'y a pas de forces de friction.

Pour le montrer, partons par exemple d'un atome dans l'état $|f_-, p\rangle$. Cet atome ne pourra émettre de photon spontané qu'à partir de $|e_0, p+\hbar k\rangle$. Or l'émission spontanée ayant lieu avec la même probabilité dans deux directions opposées, l'impulsion moyenne $\langle p' \rangle$ après un cycle de fluorescence sera :

$$\langle p' \rangle = p + \hbar k \quad (\text{I.3})$$

A l'issue de ce premier cycle, l'atome retombe avec une probabilité 1/2 dans f_- et dans f_+ . Notons que cet événement aléatoire n'est pas corrélé à la valeur de l'impulsion de recul, ce qui justifie notre raisonnement en deux étapes indépendantes.

Calculons l'effet de l'émission spontanée suivante. Si l'atome est dans $|f_-, p'\rangle$, (respectivement $|f_+, p'\rangle$), ce qui se produit avec une probabilité 1/2, il absorbe un photon σ_+ (respectivement σ_-) qui lui transfère $+\hbar k$ (respectivement $-\hbar k$). En moyenne, le transfert d'impulsion lors de l'absorption est donc nul. Après la deuxième émission spontanée, qui, elle non plus, ne change pas l'impulsion moyenne, l'impulsion moyenne $\langle p'' \rangle$ sera donc

$$\langle p'' \rangle = \langle p' \rangle = p + \hbar k \quad (\text{I.4})$$

On peut itérer ainsi à l'infini : l'impulsion d'un atome initialement dans $|f_{\pm}, p\rangle$ n'est modifiée en moyenne que d'une seule impulsion de recul, $\mp \hbar k$ selon l'état interne initial (indépendamment de p). Si on part d'une distribution d'atomes dont les populations sont équiparties entre les sous-niveaux f_- et f_+ , la pression de radiation moyenne est nulle.

Ceci est à opposer à un comportement du type friction où la pression de radiation amortit l'impulsion moyenne exponentiellement dans le temps. L'absence de forces de friction montre bien que le refroidissement par résonances noires est d'une nature très différente du refroidissement Doppler et du refroidissement Sisyphe (cf. § I.2.2.1 et chapitre IV) [2].

2.1.3 Couplages lasers et motionnels. Etats $|\psi_C(p)\rangle$ et $|\psi_{NC}(p)\rangle$

Le champ électrique $\vec{E}(z, t)$ créé par les lasers est

$$\vec{E}(z, t) = \frac{1}{2} \{ \vec{e}_+ E_+ \exp[i(kz - \omega_L t)] + c.c. \} + \frac{1}{2} \{ \vec{e}_- E_- \exp[i(-kz - \omega_L t)] + c.c. \} \quad (\text{I.5})$$

où \vec{e}_{\pm} sont les vecteurs de polarisation circulaire :

$$\vec{e}_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y) \quad (\text{I.6})$$

[2] Soulignons toutefois que l'absence de friction est due aux symétries très particulières de la configuration étudiée ici. Si on considère d'autres configurations de polarisation ou les résonances noires à plusieurs dimensions (voir § III.4.1), alors des forces de friction viennent en général contribuer au refroidissement par résonances noires. Pour une configuration 1D avec friction, voir [SHP93]: M.S. Shahriar, P.R. Hemmer, M.G. Prentiss, P. Marte, J. Mervis, D.P. Katz, N.P. Bigelow, and T. Cai, *Continuous polarization gradient precooling-assisted coherent population trapping*, Phys. Rev. A **48**, p. R4035-R4038 (1993). Pour une configuration 2D avec friction, voir et [MaA91]: F. Mauri and E. Arimondo, *Coherent Trapping Sub-recoil Cooling in Two Dimensions Aided by a Force*, Europhys. Lett. **16**, p. 717-722 (1991).

Le premier terme de l'équation (I.5) correspond à l'onde σ_+ se propageant vers $z > 0$, alors que le deuxième terme correspond à l'onde σ_- se propageant vers $z < 0$. Noter que l'on a arbitrairement fixé à zéro la phase à l'origine de chaque onde, en choisissant implicitement E_+ et E_- réels.

L'hamiltonien atome-laser V_{AL} s'écrit

$$V_{AL} \equiv -\vec{D} \cdot \vec{E}(z, t) \quad (I.7)$$

où \vec{D} est l'opérateur moment dipolaire électrique. Comme les deux ondes ont même intensité, nous définissons une pulsation de Rabi unique par [3]

$$\Omega_1 \equiv \sqrt{2} \frac{-d_{\pm} \cdot E_{\pm}}{\hbar} \text{ avec } d_{\pm} \equiv \langle e_0 | \vec{e}_{\pm} \cdot \vec{D} | g_{\mp} \rangle \quad (I.8)$$

Ω_1 serait la pulsation de Rabi réellement obtenue si la transition $f_0 - e_+$ avait un coefficient de Clebsch-Gordan de 1.

Il est maintenant commode de se placer dans la base des états de l'atome habillé par N_+ photons lasers σ_+ et N_- photons lasers σ_- . Nous considérons donc la famille des états $|e_0, p, N_+, N_-\rangle$, $|f_-, p - \hbar k, N_+ + 1, N_-\rangle$ et $|f_+, p + \hbar k, N_+, N_- + 1\rangle$. Cependant, pour simplifier les notations, nous continuons à noter les états sans faire apparaître N_+ , ni N_- .

L'hamiltonien effectif du système s'écrit, dans la base $\{|e_0, p\rangle, |f_+, p + \hbar k\rangle, |f_-, p - \hbar k\rangle\}$ [4],

$$H_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2M} - i\hbar\Gamma/2 & \Omega_1/2\sqrt{2} & -\Omega_1/2\sqrt{2} \\ \Omega_1/2\sqrt{2} & \frac{(p + \hbar k)^2}{2M} + \hbar\delta & 0 \\ -\Omega_1/2\sqrt{2} & 0 & \frac{(p - \hbar k)^2}{2M} + \hbar\delta \end{pmatrix} \quad (I.9)$$

en ayant défini le désaccord δ par

$$\delta \equiv \omega_L - \omega_0. \quad (I.10)$$

[3] La grandeur K , utilisée dans les références [AAK88], [AAK89], [Kai90] et [BSL94], est reliée à Ω_1 par $\Omega_1 = K\sqrt{2}$. La notation Ω_1 est utilisée dans [Coh90], [Coh91] et [CBA90] avec la même définition qu'ici.

[4] Rappelons qu'on passe de l'état $|f_-, p - \hbar k\rangle$ à l'état $|e_0, p\rangle$ par absorption d'un photon σ_- , d'impulsion $+\hbar k$. Ainsi, l'impulsion est conservée pour le système (atome + champ laser). Cette conservation n'apparaît pas explicitement dans la notation que nous utilisons, qui n'indique que les états atomiques, et où l'état du champ laser est implicite.

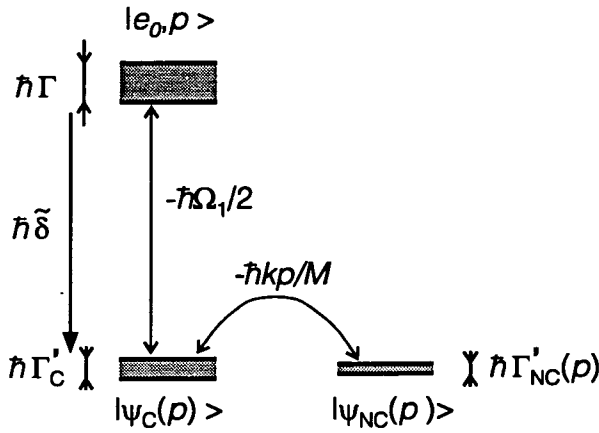


Figure I.4 Couplages entre les états de la famille $F(p)$. Les états $|e_0, p\rangle$, $|\psi_C(p)\rangle$ et $|\psi_{NC}(p)\rangle$ sont considérés comme des états atomiques habillés d'énergies voisines. L'état $|\psi_C(p)\rangle$ acquiert une largeur $\hbar\Gamma_C$ par suite du couplage laser avec l'état $|e_0, p\rangle$, de largeur $\hbar\Gamma$. L'état $|\psi_{NC}(p)\rangle$ acquiert une largeur $\hbar\Gamma_{NC}(p)$ par suite du couplage motionnel avec l'état $|\psi_C(p)\rangle$. La séparation en énergie des états $|\psi_C(p)\rangle$ (ou $|\psi_{NC}(p)\rangle$) et $|e_0, p\rangle$ est $\hbar\tilde{\delta}$ (sur cette figure, on a supposé δ_C et $\delta_{NC}(p)$ négligeables).

La physique des résonances noires sélectives en vitesse apparaît mieux dans une autre base, $\{|e_0, p\rangle, |\psi_C(p)\rangle, |\psi_{NC}(p)\rangle\}$, définie par [5] :

$$|\psi_C(p)\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[-|f_+, p + \hbar k\rangle + |f_-, p - \hbar k\rangle] \quad (\text{I.11.a})$$

$$|\psi_{NC}(p)\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[|f_+, p + \hbar k\rangle + |f_-, p - \hbar k\rangle] \quad (\text{I.11.b})$$

L'intérêt de cette base est que $|\psi_C(p)\rangle$ est alors le seul état de base couplé à l'état excité. En effet, $|\psi_{NC}(p)\rangle$ n'est pas couplé directement à l'état excité par suite de l'interférence destructive entre le couplage avec le laser σ_+ et le couplage avec le laser σ_- :

$$V_{AL}|\psi_C(p)\rangle = \frac{-\Omega_1}{2}|e_0, p\rangle \quad (\text{I.12.a})$$

$$V_{AL}|\psi_{NC}(p)\rangle = 0 \quad (\text{I.12.b})$$

Dans la base $\{|e_0, p\rangle, |\psi_C(p)\rangle, |\psi_{NC}(p)\rangle\}$, l'hamiltonien effectif s'écrit (figure I.4) :

$$H_{\text{eff}} = \left(\frac{p^2}{2M} + \hbar\tilde{\delta} \right) \mathbf{1} + \hbar \begin{pmatrix} -\tilde{\delta} - i\Gamma/2 & -\Omega_1/2 & 0 \\ -\Omega_1/2 & 0 & \frac{-kp}{M} \\ 0 & \frac{-kp}{M} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.13})$$

où on a défini un désaccord $\tilde{\delta}$ corrigé l'énergie de recul par :

$$\hbar\tilde{\delta} \equiv \hbar\delta + \frac{\hbar^2 k^2}{2M} = \hbar\delta + E_R \quad (\text{I.14})$$

[5]

Les conventions sur les signes dans les définitions de $|\psi_C(p)\rangle$, $|\psi_{NC}(p)\rangle$ sont arbitraires. Nos définitions sont identiques à celles de [AAK88], [CBA90] et [BSL94], mais différentes de celles de [AAK89] et [Coh90].

Recherchons les modes propres de désexcitation du système, en se plaçant dans un régime correspondant à deux approximations. D'une part, on suppose que l'intensité laser est faible, ce qui permet de traiter le couplage atome-laser perturbativement,

$$\Omega_1 \ll \sqrt{\tilde{\delta}^2 + \Gamma^2/4} \quad (\text{I.15})$$

D'autre part, s'intéressant au voisinage de $p = 0$, on suppose que l'impulsion atomique est faible suivant la condition

$$|kp/M| < \sqrt{\delta'_c + \Gamma_c'^2/4} \quad (\text{I.16})$$

où δ'_c et Γ_c' sont définis ci-dessous.

Les modes propres de désintégration et les valeurs propres associées sont donc, à l'ordre non nul le plus bas :

$$|\overline{e_0, p}\rangle \approx |e_0, p\rangle \text{ associé à } -\hbar(\tilde{\delta} + i\Gamma/2) \quad (\text{I.17.a})$$

$$|\overline{\psi_c(p)}\rangle \approx |\psi_c(p)\rangle \text{ associé à } \hbar(\delta'_c - i\Gamma_c'/2) \quad (\text{I.17.b})$$

$$|\overline{\psi_{NC}(p)}\rangle \approx |\psi_{NC}(p)\rangle \text{ associé à } \hbar(\delta'_{NC} - i\Gamma'_{NC}/2) \quad (\text{I.17.c})$$

où

$$\delta'_c \equiv \tilde{\delta} \frac{(\Omega_1/2)^2}{(\tilde{\delta}^2 + \Gamma^2/4)} \quad (\text{I.18.a})$$

$$\Gamma_c' \equiv \Gamma \frac{(\Omega_1/2)^2}{(\tilde{\delta}^2 + \Gamma^2/4)} \quad (\text{I.18.b})$$

et

$$\delta'_{NC}(p) \equiv \delta'_c \frac{(kp/M)^2}{\delta_c'^2 + \Gamma_c'^2/4} = \tilde{\delta} \left(\frac{2kp}{M\Omega_1} \right)^2 \quad (\text{I.19.a})$$

$$\Gamma'_{NC}(p) \equiv \Gamma_c' \frac{(kp/M)^2}{\delta_c'^2 + \Gamma_c'^2/4} = \Gamma \left(\frac{2kp}{M\Omega_1} \right)^2 \quad (\text{I.19.b})$$

Les termes δ'_c et $\delta'_{NC}(p)$ s'interprètent comme les déplacements des niveaux $|\psi_c(p)\rangle$ et $|\psi_{NC}(p)\rangle$. Les termes Γ , Γ_c' et $\Gamma'_{NC}(p)$ sont les taux de départ des états $|\overline{e_0, p}\rangle$, $|\overline{\psi_c(p)}\rangle$ et $|\overline{\psi_{NC}(p)}\rangle$, auxquels nous allons nous intéresser maintenant. Les états propres $|\overline{e_0, p}\rangle$, $|\overline{\psi_c(p)}\rangle$ et $|\overline{\psi_{NC}(p)}\rangle$ étant très proches des états non-perturbés, nous omettrons la barre pour simplifier les notations.

2.2 Principe du refroidissement par résonances noires sélectives en vitesse [AAK89]

2.2.1 Processus de refroidissement

Le refroidissement par résonances noires repose sur la faiblesse du taux de départ des états $|\psi_{\text{NC}}(p \approx 0)\rangle$.

Lorsqu'un atome possède une impulsion importante, il fluoresce normalement, ce qui provoque des changements aléatoires d'impulsion. Au bout d'un certain temps, la diffusion en p amène par hasard l'atome à une impulsion p voisine de 0. L'atome se trouve alors dans une superposition linéaire $|\psi_f(p)\rangle$ de $|\psi_C(p)\rangle$ et de $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$:

$$|\psi_f(p)\rangle = a_C|\psi_C(p)\rangle + a_{\text{NC}}|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle \quad (\text{I.20})$$

Comme la durée de vie $(\Gamma'_{\text{NC}}(p))^{-1}$ de $|\psi_{\text{NC}}(p \approx 0)\rangle$ est beaucoup plus grande que celle Γ_C^{-1} de $|\psi_C(p \approx 0)\rangle$, certains atomes sont progressivement "filtrés" dans l'état $|\psi_{\text{NC}}(p \approx 0)\rangle$, dans lequel ils restent un temps très long [6]. On dit que les atomes sont "piégés" dans l'état noir $|\psi_{\text{NC}}(p \approx 0)\rangle$. La longue durée de vie des états $|\psi_{\text{NC}}(p \approx 0)\rangle$ permet l'accumulation de la population atomique dans ces états de faible impulsion (figure I.5), ce qui est un effet de refroidissement.

Notons que, contrairement au refroidissement Doppler ou au refroidissement Sisyphe, le refroidissement par résonances noires ne repose pas sur une force de friction, mais sur un effet d'accumulation au voisinage de $p \approx 0$ où le coefficient de diffusion en impulsion est faible. Cette description du refroidissement par résonances noires en termes de diffusion en impulsion sera précisée de manière plus rigoureuse dans les chapitres IV et V.

2.2.2 Impulsion caractéristique des atomes refroidis

Nous allons déterminer, à partir d'arguments semi-qualitatifs, la relation entre la largeur caractéristique de la distribution obtenue par refroidissement par résonances noires et la durée d'interaction θ avec les lasers.

La population atomique va se répartir entre des atomes "refroidis", piégés dans les états $|\psi_{\text{NC}}(p \approx 0)\rangle$, et un ensemble d'atomes dans d'autres états, d'impulsion éventuellement beaucoup plus élevée. Limitons-nous uniquement aux atomes dans $|\psi_{\text{NC}}(p \approx 0)\rangle$. Quelle est leur impulsion caractéristique ?

Il est clair que si un atome atteint un état $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ de durée de vie $(\Gamma'_{\text{NC}}(p))^{-1}$ plus grande que la durée totale θ de l'interaction avec les lasers, c'est-à-dire si

$$(\Gamma'_{\text{NC}}(p))^{-1} > \theta \quad (\text{I.21})$$

alors, cet atome se trouvera presque certainement encore dans $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ à la fin de la période θ .

[AAK89] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the one-photon recoil energy by velocity-selective coherent population trapping : theoretical analysis*, J. Opt. Soc. Am. B 6, p. 2112-2124 (1989).

[6] Nous reviendrons plus en détail sur ce processus de filtrage au § IV.2.3.

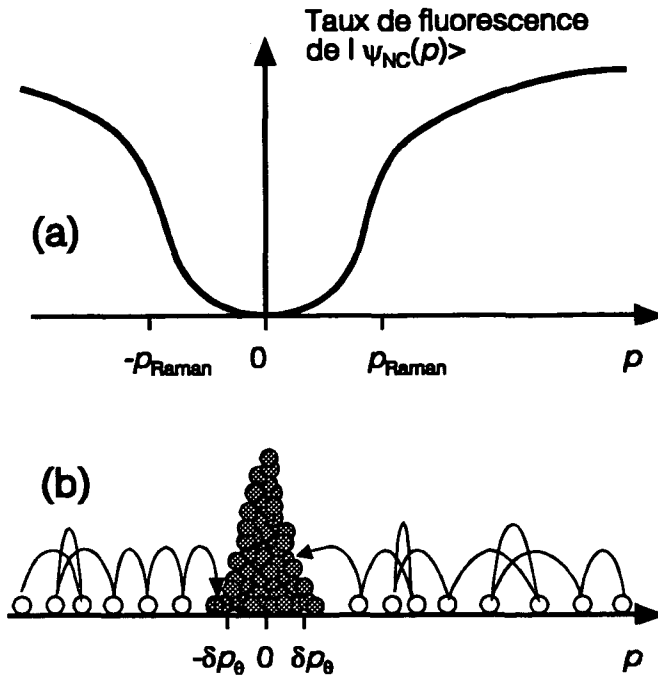


Figure I.5 Principe du refroidissement par résonances noires.

a) Profil de fluorescence de l'état $|\psi_{NC}(p)\rangle$ en fonction de l'impulsion atomique p , au voisinage de $p = 0$. Ce profil présente une résonance noire : le taux de fluorescence passe par 0 en $p = 0$. L'impulsion p_{Raman} est la mi-largeur à mi-hauteur de la résonance noire.

b) Visualisation de la diffusion en impulsion des atomes. Tant que p est "suffisamment grand", les atomes fluorescent normalement et les photons spontanés provoquent une marche aléatoire de l'atome dans l'espace des impulsions. Quand, par hasard, l'atome atteint une impulsion p "suffisamment petite", il cesse de fluorescer et conserve donc son impulsion faible (atomes grisés). Ceci permet l'accumulation des atomes dans une classe d'impulsion étroite, de largeur δp_θ , au voisinage de $p = 0$. Ce schéma n'est qu'une image. Le paragraphe 1.2.2.2 précise les termes " p suffisamment grand" ou "petit" (voir également le chapitre V). Il ne faut surtout pas croire que δp_θ correspond à p_{Raman} .

Inversement, si un atome atteint un état $|\psi_{NC}(p)\rangle$ tel que

$$(\Gamma'_{NC}(p))^{-1} < \theta \tag{I.22}$$

alors, cet atome aura presque certainement quitté l'état $|\psi_{NC}(p)\rangle$ avant la fin de la période θ d'interaction avec les lasers.

Ainsi, on s'attend à ce que les atomes accumulés dans les états $|\psi_{NC}(p \approx 0)\rangle$ à la fin de la durée θ d'interaction aient une impulsion caractéristique δp_θ définie par

$$\boxed{(\Gamma'_{NC}(\delta p_\theta))^{-1} \approx \theta} \tag{I.23}$$

En d'autres termes, δp_θ est l'impulsion telle que le temps de piégeage dans $|\psi_{NC}(\delta p_\theta)\rangle$ est égal à la durée de l'interaction atomes-lasers. Cette relation, que nous dériverons rigoureusement au chapitre V, est une des deux relations les plus importantes de la dynamique du refroidissement par résonances noires (la deuxième relation

importante concerne la proportion d'atomes refroidis et sera obtenue au chapitre V). Traduisons maintenant cette relation en terme d'impulsion caractéristique.

En tenant compte de (I.19.b), on obtient tout d'abord

$$\boxed{\frac{k\delta p_\theta}{M} \approx \frac{\Omega_1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{\theta\Gamma}}} \quad (\text{I.24})$$

Introduisons le "temps de recul" τ_R défini par

$$\hbar/\tau_R \equiv E_R = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \quad (\text{I.25})$$

qui vaut $\tau_R = 3,74 \mu\text{s}$ pour He*. L'équation (I.22) s'exprime alors sous la forme

$$\boxed{\frac{\delta p_\theta}{\hbar k} \approx \frac{1}{4} \times \frac{\Omega_1 \tau_R}{\sqrt{\theta\Gamma}}} \quad (\text{I.26})$$

Le fait intéressant est que cette largeur δp_θ n'est aucunement limitée par l'impulsion de recul $p_R = \hbar k$. En fait, et c'est surprenant, cette largeur semble pouvoir diminuer sans limite lorsqu'on accroît la durée d'interaction θ .

A ce stade, on n'a démontré intuitivement que la *sélection* des atomes dans un pic étroit. Pour avoir un authentique effet de refroidissement, il faut qu'il y ait *accumulation* des atomes dans ce pic étroit. Le raisonnement simple présenté ici ne permet pas de prouver cette accumulation, qui n'a rien d'évident (cf. chapitre V). Cependant, on comprend de manière intuitive que la marche au hasard (cf. § I.2.2.1) entraîne un *recyclage* des atomes qui ne sont pas initialement dans le pic. C'est ce recyclage qui permet l'accumulation dans le pic.

L'équation (I.22) (ou I.26), obtenue ici de façon intuitive, est remarquablement confirmée de manière quantitative par une simulation numérique rigoureuse [AAK89]. Cette simulation repose sur la résolution de l'équation d'évolution de la matrice densité atomique discrétisée en impulsion (équations de Bloch optiques généralisées). Elle reproduit d'une part la dépendance en θ et en Ω_1 de l'équation (I.26). D'autre part, l'équation (I.26) correspond à la demi-largeur à $1/\sqrt{e}$ de la distribution en impulsion, sous-estimée d'un facteur 1,2 environ, ce qui est satisfaisant pour un calcul qualitatif.

Remarque :

On aurait pu croire que la distribution en impulsion obtenue dans le refroidissement par résonances noires a pour largeur caractéristique la largeur p_{Raman} de la résonance noire. La demi-largeur à mi-hauteur de la résonance noire est donnée approximativement par la relation

$$\Gamma_{\text{nc}}(p_{\text{Raman}}) \approx \Gamma_c/4 \quad \text{ou encore} \quad \frac{p_{\text{Raman}}}{\hbar k} \approx \frac{\hbar\Gamma_c}{8E_R} \quad (\text{I.27})$$

puisque le taux de fluorescence maximal est environ $\Gamma_c/2$.

Or, en comparant à l'équation (I.26), on constate qu'on peut avoir $\delta p_\theta \ll p_{\text{Raman}}$. La largeur de la résonance noire n'est donc ni une limite, ni même un paramètre crucial,

pour le refroidissement par résonances noires [7]. L'analyse statistique du chapitre V permettra de préciser les paramètres pertinents du refroidissement par résonances noires, et de justifier l'argument semi-qualitatif donné en 1988.

2.2.3 Signature caractéristique du refroidissement par résonances noires

Nous venons de montrer qu'on prédit une accumulation des atomes dans les états $|\psi_{\text{NC}}(p, |p| \leq \delta p_{\theta})\rangle$. Or, $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ étant une superposition linéaire des impulsions $|p - \hbar k\rangle$ et $|p + \hbar k\rangle$ (cf. équation II.11.b), la distribution en impulsion doit présenter deux pics, centrés en $-\hbar k$ et $+\hbar k$, de largeur caractéristique δp_{θ} . Ces deux pics, séparés de $2 \hbar k$, sont inhabituels dans le refroidissement laser et leur observation sera donc la signature du refroidissement par résonances noires.

Bien que les pics en impulsion se trouvent à proprement parler en $\pm \hbar k$, nous parlerons souvent "d'accumulation en $p = 0$ ", où p désignera l'indice de $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$.

2.3 Expérience sur jet de 1988 [AAK88]

2.3.1 Dispositif expérimental

Le dispositif est représenté sur la figure I.6. L'expérience utilise la transition $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_1$ de l'hélium 4 métastable (He^*) à $1,083 \mu$. Les atomes d'hélium métastable étaient issus d'un jet supersonique de vitesse moyenne 1100 m.s^{-1} . Ils interagissaient sur 40 mm avec deux faisceaux issus d'un même laser LNA, réalisant un refroidissement à une dimension. Le temps d'interaction valait $\theta \approx 36 \mu\text{s} \approx 360 \Gamma^{-1}$ ($\Gamma^{-1} \approx 100 \text{ ns}$). La pulsation de Rabi associée au champ laser valait $\Omega_1 \approx 0,85 \Gamma$.

La distribution en vitesse était obtenue en déplaçant un multiplicateur d'électrons (sensible aux atomes métastables He^*) précédé d'une fente F_2 de $100 \mu\text{m}$, placé à $1,4 \text{ m}$ d'une première fente F_1 de $100 \mu\text{m}$ placée juste après la zone d'interaction. La résolution en vitesse (demi-largeur à mi-hauteur) de ce système est de 4 cm.s^{-1} .

[7] Cette situation présente une analogie avec le refroidissement Doppler dont la limite δp_D n'est pas donnée par la largeur de la résonance à basse intensité (on aurait $k \cdot \delta p_D \approx \Gamma$), mais par $\delta p_D^2 / (2M) \approx \hbar \Gamma$. Retenons ici que *les largeurs des profils de fluorescence ne sont en général pas identiques aux largeurs des distributions en impulsion*. Une telle identification conduit souvent à des résultats qualitativement faux. Cette identification a pourtant été plusieurs fois proposée comme évidente pour estimer les températures atteintes par des mécanismes de refroidissement laser...

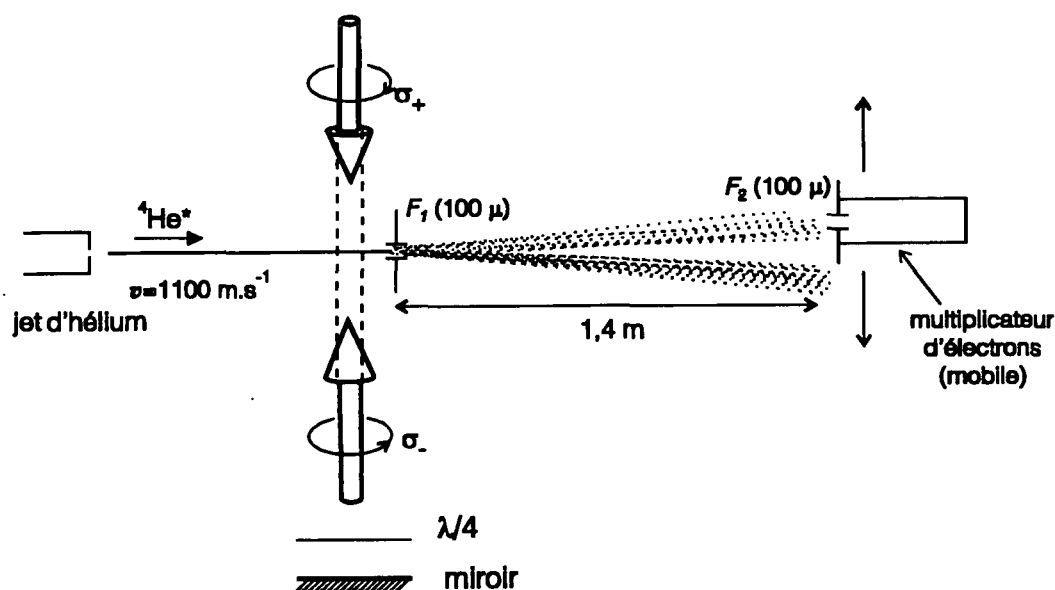


Figure I.6 *Dispositif expérimental de l'expérience sur jet [AAK88].* Les atomes d'hélium métastable sont issus du jet à la vitesse de 1100 m.s^{-1} . Ils interagissent pendant $\theta \approx 36 \mu\text{s}$ avec les faisceaux lasers. Ils traversent ensuite deux fentes F_1 et F_2 avant d'être détectés sur un multiplicateur d'électrons. La position du multiplicateur et de F_2 est balayée pour obtenir la distribution en impulsion des atomes refroidis.

2.3.2 Résultats expérimentaux

La distribution en impulsion mesurée possède deux pics à $+v_R$ et $-v_R$ qui sont la signature de l'accumulation d'atomes dans les états $|\psi_{\text{NC}}(p \approx 0)\rangle$. Ces deux pics ont une demi-largeur δv_{exp} à $1/\sqrt{e}$:

$$\delta v_{\text{exp}} \approx 6 \text{ cm.s}^{-1} \approx 0,65 v_R. \quad (\text{I.28})$$

δv_{exp} est nettement inférieur à v_R , ce qui prouve que l'énergie de recul n'est pas une borne infranchissable. Par ailleurs, la valeur théoriquement attendue avec les paramètres de l'expérience est $\delta v_{\text{th}} \approx 0,35 v_R$, ce qui est en accord raisonnable avec l'expérience. Enfin, les deux pics obtenus s'élèvent de 50 % environ au-dessus de la distribution initiale, ce qui est le signe d'un refroidissement réel, et non d'un simple filtrage.

L'expérience de 1988 a donc démontré incontestablement que le refroidissement par résonances noires permet d'atteindre des distributions d'impulsion sub-recul à une dimension.

2.3.3 Difficultés expérimentales

Deux points, liés au maintien de la cohérence atomes-lasers, se sont révélés être particulièrement délicats.

Le premier point concerne les champs magnétiques parasites qui couplent les états quasi-noirs $|\psi_{\text{NC}}(p \approx 0)\rangle$ à des états pouvant absorber de la lumière (voir en particulier le chapitre II de [Kai90] et § II.4.3 et III.2 dans ce mémoire). Ces champs parasites limitent la durée de vie des états $|\psi_{\text{NC}}(p \approx 0)\rangle$, ce qui nuit au refroidissement.

Le champ magnétique au niveau de la zone d'interaction était compensé chaque jour à 1 mG près. Cependant, il est probable que des dérives incontrôlées du champ ambiant venaient perturber l'expérience. Ces dérives pourraient expliquer la différence entre la température atteinte et la température prédite.

Le deuxième point délicat concerne l'optique [Van89]. En effet, les faisceaux lasers doivent avoir une phase relative bien définie dans toute la zone d'interaction. Cette condition peut paraître facile à assurer avec des faisceaux σ_+ et σ_- issus du même laser, et donc cohérents en phase. En fait, il existe un point critique, la zone où les atomes sortent des faisceaux :

- d'une part, la diffraction par le masque délimitant la fin de la zone d'interaction entraîne une variation rapide de la phase dans la zone d'ombre géométrique des lasers, et cette variation est différente pour le faisceau σ_+ et pour le faisceau σ_- .

- d'autre part, l'autocollimation du faisceau retour doit être particulièrement soignée afin d'avoir une superposition exacte des transitions lumière-ombre. Il faut éviter que les atomes ne se trouvent en présence d'un seul faisceau laser, ce qui entraînerait un pompage optique hors des états $|\psi_{\text{NC}}(p \approx 0)\rangle$, avec émission d'un photon spontané élargissant la distribution des impulsions. Ce phénomène a été observé.

3 Le problème des temps longs

3.1 Motivation et problèmes théoriques

L'équation (I.26), que nous rappelons ci-dessous, prédit que la largeur en impulsion de la population atomique refroidie varie comme l'inverse de la racine carrée du temps d'interaction entre atomes et lasers :

$$\frac{\delta p_\theta}{\hbar k} \approx \frac{1}{4} \times \frac{\Omega_1 \tau_R}{\sqrt{\theta \Gamma}} \quad (\text{I.25) rappel}$$

Ainsi, le refroidissement par résonances noires deviendrait d'autant plus intéressant que le temps d'interaction est plus long. C'est donc ce régime des temps longs que nous voulons étudier.

La première question qui se pose est celle de la validité de l'équation (I.26). Elle décrit une situation inhabituelle sans convergence vers un régime stationnaire. Si, comme le suggèrent les calculs numériques, cette équation est correcte, alors on devrait pouvoir expliquer ce comportement non-stationnaire.

L'équation (I.26) a été obtenue par un raisonnement semi-qualitatif qui se résume ainsi : les atomes présents dans le pic étroit au temps θ sont ceux qui sont protégés de l'émission spontanée pendant toute la durée θ de l'interaction. Il est incontestable qu'il

[Van89] N. Vansteenkiste, *Réalisation d'un laser monomode et asservi sur la transition $2^3S_1-2^3P$ de l'hélium 4 (1083 nm) : utilisation pour quelques expériences de refroidissement radiatif d'atomes d'hélium 4 métastable*, Thèse de l'Université Paris-Sud (1989).

s'agit d'une condition suffisante : les atomes dont l'impulsion est telle qu'ils n'émettent aucun photon spontané pendant θ (*i.e.* $(\Gamma'_{\text{NC}}(p))^{-1} > \theta$) feront partie du pic final.

Mais la réciproque est-elle vraie ? Le pic final ne contient-il *que* les atomes pour lesquels $(\Gamma'_{\text{NC}}(p))^{-1} > \theta$? Cela semble peu probable. En effet, la plupart des atomes vont passer un temps θ_{diff} à diffuser des photons avant d'atteindre $|p| \leq \delta p_{\theta}$. Ils séjourneront donc dans les états $|\psi_{\text{NC}}(p, |p| < \delta p_{\theta})\rangle$ un temps $(\theta - \theta_{\text{diff}})$ nécessairement inférieur à θ . Quel est alors ce temps caractéristique $(\theta - \theta_{\text{diff}})$ passé dans l'état noir qui doit remplacer θ dans les équations (I.21) et (I.22) ?

La dépendance de la largeur de la distribution en impulsion en fonction du temps d'interaction a donc été donnée par un argument intuitif, qui peut servir de point de départ, mais qui doit être précisé. Ce problème est difficile. En effet, l'approche quantique de [AAK89] a permis de comprendre précisément ce qui se passe "localement", pour un p donné, en calculant Γ'_c et $\Gamma'_{\text{NC}}(p)$. Ici, on doit prendre en compte le comportement de la population atomique dans une zone étendue au voisinage de $p = 0$ (et éventuellement même pour tout p).

La deuxième question importante à traiter est celle de la proportion d'atomes refroidis. Lorsqu'on augmente le temps d'interaction, cette proportion tend-elle vers 1, vers 0 ou vers une valeur intermédiaire ? C'est une question essentielle pour laquelle on ne dispose *a priori* d'aucun argument intuitif. C'est une question difficile puisque la proportion d'atomes refroidis dépend à la fois du comportement des atomes au voisinage de $p = 0$ et de l'alimentation de cette zone par la diffusion en impulsion. On a là clairement un problème qui ne dépend pas que du comportement local en p , mais qui intègre des propriétés de la diffusion sur tout l'axe p .

3.2 Résolution numérique des équations de Bloch optiques généralisées : problème des temps longs

Aux débuts du refroidissement laser, il était opportun de calculer l'évolution atomique de manière semi-classique avec une équation de Fokker-Planck obtenue à partir des équations de Bloch optiques. Cependant, une étude plus fine, en particulier du refroidissement Sisyphe donnant des températures proches de T_R , a nécessité le passage à un traitement complètement quantique (voir en particulier [CaS92]). Ici, on s'intéresse au régime sub-recul et donc à des structures plus fines que la taille d'un saut en impulsion ($\approx \hbar k$), ce qui interdit *a fortiori* d'utiliser le formalisme de l'équation de Fokker-Planck.

Pour contourner cette difficulté, on utilise les équations de Bloch optiques généralisées permettant de calculer l'évolution de la matrice densité atomique associée à la description quantique des degrés de liberté externes présentée au § I.2.1.2 (cf. [AAK89]). Ce calcul est numérique, mais fondé sur des équations rigoureuses et sans approximation notable. Il a fourni des résultats importants que nous résumons ici.

[CaS92] Y. Castin, *Les limites du refroidissement laser dans les mélasses optiques à une dimension*, Thèse de l'Université Paris VI (1992).

En ce qui concerne la distribution en impulsion, ce calcul montre l'apparition des deux pics étroits attendus à $+\hbar k$ et $-\hbar k$, qui se superposent à un fond beaucoup plus large d'atomes non refroidis. La mi-largeur à $1/\sqrt{e}$ des pics étroits correspond à l'équation (I.26) à un facteur multiplicatif près de l'ordre de 1,2 (l'équation (I.26) sous-estime la largeur). La dépendance en Ω_1 et en θ prédite par (I.26) a été testée avec succès jusqu'à des temps d'interaction de $1000 \Gamma^{-1}$, pour des valeurs de Ω_1 comprises entre $0,14 \Gamma$ et $1,4 \Gamma$.

Ces résultats sont remarquables et donnent confiance en l'équation (I.26). La plus faible largeur obtenue correspond à $\delta p_\theta \approx 0,09 \hbar k$ ce qui laisse espérer un affinement possible d'au moins un facteur 7 par rapport aux premiers résultats expérimentaux ($\delta p_{\text{exp}} \approx 0,65 \hbar k$).

En ce qui concerne la proportion d'atomes refroidis, le calcul numérique montre qu'elle croît avec θ au moins jusqu'à $1000 \Gamma^{-1}$ (avec $\Omega_1 = 0,3 \times \sqrt{2} \Gamma$). La proportion d'atomes refroidis (pour une définition précise, voir § IV.4.1) est alors [8] de l'ordre de 36 %. La dépendance en θ ne suggère aucune extrapolation évidente.

On pourrait penser étudier le comportement aux temps longs en poursuivant l'intégration numérique des équations de Bloch. Mais, les résonances noires sélectives en vitesse ont des propriétés très particulières qui posent des problèmes numériques sérieux.

En effet, la matrice densité atomique doit être discrétisée en impulsion. Prenons un domaine d'impulsion qui s'étend de $-p_{\text{max}} = -n_{\text{max}} \hbar k$ à $p_{\text{max}} = n_{\text{max}} \hbar k$, avec un pas tous les $\hbar k/n_0$. Le nombre de pas est donc $2n_0 n_{\text{max}}$. On obtient donc une matrice densité dont la taille est de l'ordre de $(2n_0 n_{\text{max}})^2$. Heureusement, en tenant compte du caractère fermé des familles $F(p)$, seuls les termes proches de la diagonale sont non-nuls, et on se restreint à une matrice densité qui contient $18n_0 n_{\text{max}}$ nombres réels (en tenant compte des états internes). Le problème est que cette taille de la matrice densité doit augmenter avec θ pour les raisons suivantes :

- Des structures de plus en plus fines en impulsion apparaissent (équation (I.26)) quand θ augmente. Le pas de discrétisation en impulsion doit être adapté en conséquence. Avec une grille de pas uniforme, on obtient :

$$n_0 \propto 1/\delta p_\theta \propto \theta^{1/2}. \quad (\text{I.29})$$

- Par diffusion, certains atomes atteignent des impulsions de plus en plus grandes. Si, en première approximation (voir une approche plus fine au chapitre V), on prend un modèle de diffusion brownienne, l'impulsion caractéristique croît comme $\theta^{1/2}$ et donc :

$$n_{\text{max}} \propto p_{\text{max}} \propto \theta^{1/2}. \quad (\text{I.30})$$

La taille de la matrice densité (et donc de la mémoire) croît donc comme le temps d'interaction à atteindre, θ .

[8] La valeur citée ici diffère de celle indiquée dans [AAK89] qui s'est révélée fautive d'un facteur 2 environ. Alors que la distribution en impulsion de [AAK89] était exacte, il s'est glissé une erreur dans le processus complexe d'estimation de la proportion refroidie (soustraction d'un fond mal estimé).

Estimons maintenant le temps de calcul. Ces équations sont intégrées pas à pas. Comment varie le nombre N_t de pas temporels avec θ ?

- Pour un pas de temps Δt fixé, N_t croît linéairement avec θ :

$$N_t = \frac{\theta}{\Delta t} \quad (\text{I.31})$$

- Le pas temporel Δt doit être adapté lorsque θ croît. En effet, les impulsions élevées, de l'ordre de p_{\max} font apparaître un couplage kp_{\max}/M qui prend des valeurs importantes. Le pas Δt doit rester plus petit que $(kp_{\max}/M)^{-1}$:

$$\Delta t \propto 1/p_{\max} \propto \theta^{-1/2} \quad (\text{I.32})$$

Finalement, on obtient $N_t \propto \theta^{3/2}$.

Le temps de calcul croît comme le produit de la taille de la matrice à manier par le nombre de pas :

$$\text{temps de calcul} \propto \theta^{5/2}. \quad (\text{I.33})$$

On est donc très vite limité par le temps de calcul : pour explorer des temps d'interaction accrus de deux ordres de grandeur par rapport à [AAK89], le temps de calcul passe de quelques heures (sur un ordinateur personnel équipé d'un processeur 80486) à quelques dizaines d'années... Un traitement numérique plus complexe des équations de Bloch permettrait éventuellement d'abaisser légèrement l'exposant 5/2 de l'équation (I.33), mais vraisemblablement pas suffisamment pour obtenir des temps de calcul raisonnables.

La résolution numérique des équations de Bloch optiques généralisées, bien adaptée aux temps θ courts, se révèle donc impraticable pour l'étude du régime θ grand.

3.3 Problèmes expérimentaux posés par les temps longs

Pour étudier expérimentalement les résonances noires dans le régime des temps longs, il faut tout d'abord assurer une longue durée d'interaction entre atomes et lasers, ce qui exige soit que la zone d'interaction soit plus étendue, soit que les atomes soient plus lents. Estimons les problèmes posés par les deux branches de cette alternative pour une expérience dont la durée d'interaction serait accrue de deux ordres de grandeur par rapport à 1988, par exemple.

Si on étend la zone d'interaction, en gardant le même jet qu'en 1988, les atomes devront interagir avec les lasers sur une longueur de 4 m. Ceci paraît fort difficile, compte tenu des contraintes de cohérence (compensation du champ magnétique, cohérence de phase des faisceaux lasers). En effet, non seulement, la cohérence devra satisfaire des exigences plus strictes pour exploiter les durées d'interaction accrues, puisqu'on veut obtenir des états atomiques mieux définis, mais en outre, cette cohérence devra être assurée sur une zone plus étendue. Or, le maintien de la cohérence pour atteindre $T_R/2$ était déjà très délicat avec une zone d'interaction de 4 cm. Ceci plaide en faveur de la deuxième solution, l'utilisation d'atomes plus lents.

Si on choisit d'utiliser des atomes plus lents, il faut disposer d'atomes d'hélium métastables à 10 m.s^{-1} . Or, un jet ralenti à 10 m.s^{-1} est pratiquement arrêté. Les atomes ralentis peuvent être piégés, ce qui offre plusieurs avantages : le piège permet un refroidissement à des vitesses inférieures au mètre par seconde et une compression spatiale de la distribution atomique. Ces deux propriétés des pièges permettent de réduire appréciablement le volume d'interaction pour les résonances noires. Cependant, certains problèmes liés à la cohérence subsistent. Il faut d'une part améliorer le contrôle des champs magnétiques parasites et de la cohérence de phase des faisceaux lasers pour pouvoir exploiter l'accroissement du temps d'interaction, mais ceci devrait être facilité par la réduction du volume d'interaction. D'autre part, et ceci est un problème plus sérieux, il faut maintenir la cohérence de l'interaction atomes-lasers lorsque les atomes sortent des faisceaux lasers. Dans l'expérience de 1988, la phase de sortie des faisceaux était déjà critique. Elle le sera davantage avec des atomes plus lents qui passeront plus de temps dans la zone dangereuse de sortie des faisceaux.

Enfin, pour exploiter des durées d'interaction accrues, il faut améliorer la résolution en impulsion. La résolution en impulsion du dispositif de mesure était de 0,4 impulsion de recul p_R dans l'expérience sur jet de 1988. L'adaptation du dispositif de mesure à des durées d'interaction θ accrues de deux ordres de grandeur nécessite une résolution de 0,04 recul. Le temps d'acquisition dépend trop des détails expérimentaux pour qu'on puisse le quantifier dans un cas général. Notons toutefois que pour balayer le même intervalle d'impulsion de quelques $\hbar k$, le nombre de positions du détecteur devra être multiplié par 10. Ainsi, le temps d'acquisition d'une distribution en impulsion, qui était de quelques minutes pour l'expérience de 1988, risque de devenir trop long en pratique.

Le déplacement spatial du détecteur pour mesurer les distributions en impulsion n'autorise qu'une détection monocanal. Pour des durées d'interaction accrues, impliquant des distributions en impulsion avec des structures plus fines, il serait très avantageux de passer à une détection multicanal pour acquérir chaque distribution en une seule étape.

En conclusion, le dispositif expérimental de 1988 a permis d'atteindre des températures de l'ordre de $T_R/2$. Mais, pour atteindre les températures inférieures de deux ordres de grandeur à T_R , il ne semble pas possible de continuer à utiliser les atomes du jet supersonique comme source pour le refroidissement sub-recul. Pour atteindre ce régime de température, on est conduit à une nouvelle conception de l'expérience de refroidissement par résonances noires qui utilise des atomes ralentis ou piégés (même dans ce dernier cas, des difficultés liées au maintien de la cohérence de l'interaction atomes-lasers subsistent). En outre, il est souhaitable de passer d'une détection monocanal à une détection multicanal.

4 Le problème de la généralisation à plusieurs dimensions

4.1 Intérêt du refroidissement à plusieurs dimensions

Refroidir une seule composante de l'impulsion atomique, ainsi que cela a été fait en 1988, est intéressant en tant que démonstration d'un refroidissement sub-recoil. On peut envisager quelques applications comme l'interférométrie atomique ou encore l'étude d'effets de statistique quantique en dimension 1 [BaK91]. Cependant, pour la plupart des développements envisageables (manipulation des jets atomiques et optique atomique, spectroscopie, effets de statistique quantique), il est serait préférable de refroidir à deux ou trois dimensions.

L'extension à plusieurs dimensions du refroidissement par résonances noires pose plusieurs problèmes particuliers. Le premier, celui de l'existence d'états noirs sélectifs en vitesse, avait été résolu avant le début du présent travail (§ I.4.2). Le deuxième problème est celui de la dynamique et de l'efficacité du refroidissement par résonances noires (§ I.4.3) : quelle est la température atteinte, quelle est la proportion d'atomes refroidis ? Enfin, le dernier problème était celui de la mise en œuvre expérimentale (§ I.4.4).

4.2 Existence d'états noirs sélectifs en vitesse à plusieurs dimensions

La recherche de schémas sélectifs en vitesse à deux et trois dimensions est déjà présente dans le premier article théorique [AAK89] consacré à ce sujet. Plusieurs schémas furent découverts à deux dimensions ([AAK89], [MaA91], [MaA92]) dans des situations où des familles fermées d'états apparaissaient. Cependant, il semblait que les configurations de champ laser permettant d'obtenir des états noirs sélectifs en vitesse étaient très rares.

Une percée a été accomplie en relâchant la condition d'existence de familles fermées d'états atomiques couplés par le champ laser [OIM90], [OIM92]. Il a alors été

-
- [BaK91] V. Bagnato and D. Kleppner, *Bose-Einstein condensation in low-dimensional traps*, Phys. Rev. A **44**, p. 7439-7441 (1991).
- [AAK89] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the one-photon recoil energy by velocity-selective coherent population trapping : theoretical analysis*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, p. 2112-2124 (1989).
- [MaA91] F. Mauri and E. Arimondo, *Coherent Trapping Sub-recoil Cooling in Two dimensions Aided by a Force*, Europhys. Lett. **16**, p. 717-722 (1991).
- [MaA92] F. Mauri and E. Arimondo, *Two Dimension Selective Coherent Population Trapping Controlled by a Phase Shift*, Appl. Phys. B **54**, p. 420-427 (1992).
- [OIM90] M. Ol'shanii and V.G. Minogin, *Three-dimensional velocity-selective coherent atomic population trapping in resonant light fields*, Proceedings of the international workshop on "Light induced kinetic effects on atoms, ions and molecules", eds. L. Moi, S. Gozzini, C. Gabanini, E. Arimondo, and F. Strumia (Marciana Marina, Italy, 1990) p. 99-110 (Ets Editrice, Pisa, 1991).

démontré que, pour une transition $J_f = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ et pour presque toutes les configurations de champ laser, il existe un état noir sélectif en vitesse. Nous résumons ici les résultats obtenus par [OIM92], tels qu'ils ont été repris dans [LBS94].

On considère un champ laser $\vec{E}_L(\vec{r})$, monochromatique, de fréquence ω_L . Il peut être développé en ondes planes, suivant l'expression :

$$\vec{E}_L(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N E_{oi} \vec{\epsilon}_i \exp(i\vec{k}_i \cdot \vec{r}) \quad (\text{I.34})$$

où $\vec{\epsilon}_i$ et \vec{k}_i sont respectivement le vecteur polarisation et le vecteur d'onde de l'onde plane i .

Ce champ laser agit sur une transition $J_f = 1 \leftrightarrow J_e = 1$. Dans l'état fondamental f , l'atome peut donc être considéré comme une particule de spin 1 et le spineur qui décrit son état est un champ vectoriel $\vec{\psi}(\vec{r})$. Le résultat important de [OIM90] est qu'il existe toujours des superpositions linéaires $\vec{\psi}_{\text{NC}}^p(\vec{r})$ qui ne sont pas couplées à l'état excité, données par :

$$\vec{\psi}_{\text{NC}}^p(\vec{r}) = \vec{E}_L(\vec{r}) \exp(i\vec{p} \cdot \vec{r}/\hbar) \quad (\text{I.35})$$

L'état non-couplé $\vec{\psi}_{\text{NC}}^p(\vec{r})$ est donc une superposition linéaire d'ondes planes de vecteurs d'onde $\vec{k}_i + \vec{p}/\hbar$; c'est l'analogue de $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ dans la théorie à une dimension. De même qu'à une dimension, cet état est couplé à d'autres états fondamentaux (eux-mêmes couplés à l'état excité e) sauf si $\vec{p} = \vec{0}$. On a donc trouvé un état noir stationnaire, $\vec{\psi}_{\text{NC}}^{\vec{p}=0}$: c'est l'état atomique décrit par un champ vectoriel proportionnel au champ laser :

$$\vec{\psi}_{\text{NC}}^{\vec{p}=0}(\vec{r}) = \vec{E}_L(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N E_{oi} \hat{\epsilon}_i \exp(i\vec{k}_i \cdot \vec{r}) \quad (\text{I.36})$$

Enfin, une condition suffisante mais non nécessaire de l'unicité de cet état noir a été démontrée [OIM91]. Elle porte sur la symétrie du champ laser. Notons que plusieurs configurations dans lesquelles l'état noir n'est pas unique ont été trouvées [Ols92].

La démonstration de l'existence d'un état noir sélectif en vitesse à deux et trois dimensions est une première étape indispensable à la généralisation du refroidissement par résonances noires. Cependant, l'existence de cet état noir ne suffit pas à assurer l'apparition d'un effet de refroidissement. Il faut donc maintenant se poser la question du remplissage de cet état noir ou, plus exactement, de l'ensemble des états proches de cet état noir.

[OIM92] M. Ol'shanii and V.G. Minogin, *Three-dimensional velocity-selective coherent population trapping of a (3+3)-level atom*, Opt. Comm. **89**, p. 393-398 (1992).

[LBS94] J. Lawall, F. Bardou, B. Saubaméa, K. Shimizu, M. Leduc, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Two-dimensional Sub-recoil Laser Cooling*, Phys. Rev. Lett. **73**, p. 1915-1918 (1994).

[Ols92] M. Ol'shanii, Thèse : *Coherent Population Trapping Effect in the Processes of the Mechanical Interaction of Atoms with the Electromagnetic Field* (en Russe), Institute of Spectroscopy, Russian Academy of Sciences, Troitzk, Russia (1992) et communication privée.

4.3 Existence d'un effet de refroidissement sub-recoil à plusieurs dimensions

Pour obtenir un effet de refroidissement, il faut peupler significativement les états $\vec{p} \approx \vec{0}$ [9]. Si nous généralisons l'image que nous avons donnée à une dimension, l'atome effectue une marche au hasard dans l'espace des impulsions. Lorsqu'il a par hasard atteint une impulsion suffisamment petite, il la conserve un temps très long du fait de la résonance noire.

Il apparaît immédiatement qu'atteindre $|p| < \delta p$ par une marche au hasard est d'autant plus difficile que le nombre de dimensions croît : en effet, le volume de l'espace des impulsions correspondant à $|p| < \delta p$ représente une fraction d'autant plus petite du volume accessible. On s'attend donc à ce que l'efficacité du refroidissement (proportion d'atomes refroidis) diminue avec le nombre de dimensions. On aimerait évaluer de manière quantitative cette efficacité. De même, on aimerait pouvoir calculer la largeur en impulsion obtenue. Dans la résolution numérique des équations de Bloch optiques généralisées, les problèmes déjà signalés à une dimension (taille des matrices densité atomiques, longs temps d'interaction atomes-lasers) sont ici accrus : il faut maintenant discrétiser plusieurs dimensions d'impulsion.

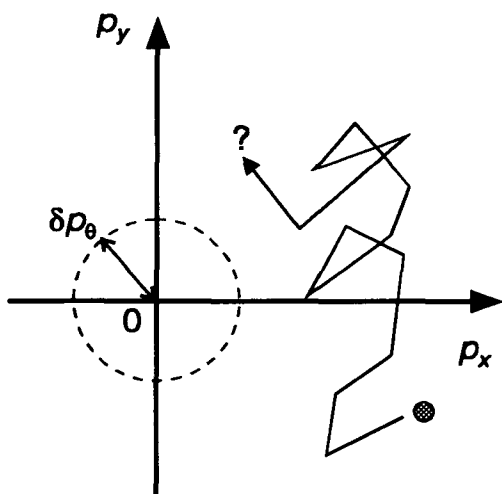


Figure I.7 *Problème du refroidissement sub-recoil à plusieurs dimensions.* La fluorescence de l'atome se traduit par une marche au hasard dans l'espace des impulsions, dont le pas est de l'ordre de $\hbar k$. Quant on accroît le nombre de dimensions, la zone $|p| < \delta p_0$ dans laquelle on veut accumuler les atomes représente un volume relatif de plus en plus faible dans l'espace des impulsions. Peut-on peupler significativement cette zone par une simple marche au hasard ? La réponse à cette question est un des enjeux de notre travail.

Toutefois, des résultats quantitatifs [MaA91] ont pu être obtenus en résolvant numériquement les équations de Bloch optiques généralisées pour une configuration bidimensionnelle particulière. Ce calcul numérique n'a été possible que parce que les familles d'états couplés par les lasers étaient fermées, dans cette configuration très particulière (alors que le cas général décrit par Ol'shanii et Minogin [OIM90] correspond à des familles indifféremment fermées ou ouvertes). La simulation a tout d'abord montré que l'on pouvait obtenir une distribution de mi-largeur $0,3 \hbar k$, avec une durée d'interaction $\theta = 1500 \Gamma^{-1}$. La proportion d'atomes refroidis était de l'ordre de 7 %, ce qui

[9] Rappelons qu'on parle d'accumulation d'atomes en $\vec{p} \approx \vec{0}$, même si l'état $|\psi_{NC}(\vec{p})\rangle$ est en fait une superposition linéaire d'un (petit) nombre d'impulsions $\hbar \vec{k}_j$.

[MaA91] F. Mauri and E. Arimondo, *Coherent Trapping Sub-recoil Cooling in Two dimensions Aided by a Force*, Europhys. Lett. **16**, p. 717-722 (1991).

peut paraître décevant. Mais la densité de probabilité de trouver un atome en $p = 0$ est tout de même accrue d'un facteur 15 par rapport à la distribution initiale (largeur $6 \hbar k$). Ainsi, l'effet de refroidissement est bien présent, même s'il ne concerne qu'une partie des atomes.

Le deuxième résultat important de la simulation de [MaA91] est l'existence pour certains paramètres d'une force de friction, qui se superpose à l'existence de l'état noir sélectif en vitesse. Cette force de friction "pousse" rapidement la population atomique vers une zone de quelques $\hbar k$ autour de $\vec{p} = \vec{0}$. Ainsi, l'alimentation de l'état noir est fortement augmentée.

Pour favoriser l'alimentation des états de faible impulsion, la possibilité de superposer des forces de friction à l'effet de piégeage des résonances noires est très intéressante. A une dimension, l'annulation de toute force moyenne de pression de radiation découlait de symétries très particulières. Ces symétries n'ont *a priori* aucune raison d'exister à 2 et 3 dimensions. Dans le cas général, on peut espérer trouver des conditions où le refroidissement par résonances noires sera aidé par une force de friction, comme dans le cas particulier de [MaA91].

Finalement, les résultats numériques à 2D, bien que portant sur un cas particulier, sont encourageants, mais il manque une étude générale de la dynamique du refroidissement par résonances noires à 2 et 3D, encore plus qu'à 1D. Il faut comprendre quantitativement l'effet de refroidissement.

4.4 Problèmes expérimentaux posés par le refroidissement à 2 et 3 dimensions

Les problèmes expérimentaux posés par l'extension à 2 et 3 dimensions sont semblables à ceux posés par l'étude des temps longs. En effet, on s'attend à ce que les temps caractéristiques de peuplement de l'état noir soient plus longs, ce qui nécessite de disposer de temps d'interaction plus longs. En outre, la quantité d'information à acquérir sera beaucoup plus importante puisqu'on veut obtenir des distributions en impulsion à 2 voire 3 dimensions. Il semble alors totalement inconcevable d'utiliser un détecteur ponctuel (monocanal) qui explore un profil séquentiellement, ainsi que cela était fait lors de l'expérience à une dimension sur jet. Enfin, à 2 et 3D, la phase relative entre les faisceaux lasers peut jouer un rôle crucial [MaA92] [HeH92], et il faut savoir s'il est nécessaire ou non de la contrôler.

[MaA92] F. Mauri and E. Arimondo, *Two Dimension Selective Coherent Population Trapping Controlled by a Phase Shift*, Appl. Phys. B 54, p. 420-427 (1992).

[HeH92] A. Hemmerich and T.W. Hänsch, *Radiation Pressure Vortices in Two Crossed Standing Waves*, Phys. Rev. Lett. 68, p. 1492-1495 (1992).

5 Conclusion : acquis, problèmes, et nouvelles approches

Les travaux de 1988 ont découvert et étudié un mécanisme de refroidissement sub-recul, les résonances noires sélectives en vitesse. Ce processus, qui repose sur l'interférence destructive de deux amplitudes de probabilité et permet de préparer les atomes dans une superposition linéaire de deux états d'impulsion, est intéressant en lui-même. De plus, il permet de refroidir des atomes au-delà de la limite du recul d'un seul photon. Ces résultats très intéressants peuvent être améliorés.

En effet, les premières approches ont suggéré de manière convaincante que la température est susceptible de diminuer comme l'inverse du temps d'interaction θ entre atomes et lasers, sans que l'on sache prédire la proportion d'atomes refroidis. Par ailleurs, l'existence d'états noirs sélectifs en vitesse à deux et trois dimensions a été démontrée théoriquement, sans toutefois que l'on ait de prédictions générales, ni pour la température atteinte, ni pour la proportion d'atomes refroidis. Les résultats d'une simulation numérique, pour un cas particulier de résonances noires à deux dimensions, sont encourageants.

Expérimentalement, une expérience difficile, sur un jet d'atomes d'hélium, a atteint $T_R/2$ à une dimension et révélé le double pic en impulsion qui signe le refroidissement par résonances noires. La simple amélioration de cette expérience semblait impraticable.

Ainsi, au début de notre travail, ni l'expérience, ni la théorie n'avaient déterminé les limites du refroidissement par résonances noires. Les approches expérimentales et théoriques utilisées avaient atteint leurs propres limites. Mais par ailleurs, il existait un espoir d'atteindre, grâce aux résonances noires, des températures beaucoup plus basses que celles obtenues jusqu'ici. Le régime qui restait à étudier, le plus intéressant, était celui des longs temps d'interaction et des situations à 2 et 3 dimensions. C'est à cette étude, théorique et expérimentale, qu'est consacrée la suite de ce mémoire.

Sur le plan théorique, la difficulté vient de la taille des matrices densités impliquées et des échelles de temps. Nous allons voir que des temps d'interaction de 10 ms sont aisément envisageables expérimentalement (voire 10 à 100 fois plus dans des pièges) : ces temps sont très longs à l'échelle atomique, comparés par exemple aux 100 ns de durée de vie de l'état excité de He*. Cette grande taille des matrices densité est liée à la discrétisation en impulsion et à l'apparition de structures de plus en plus fines en impulsion. Si on pouvait manipuler des objets plus simples (de dimension plus faible) que des matrices densités (des lois de probabilité classiques, par exemple, ou des fonctions d'onde), on pourrait espérer avancer vers une solution du problème. Mais il faut conserver un formalisme qui respecte le caractère cohérent du processus (interférence de deux amplitudes d'absorption) tout en prenant en compte les processus dissipatifs (émission spontanée).

Lorsque le présent travail a commencé, seules les équations de Bloch optiques répondaient à ce critère et nous ne travaillions pas activement sur ces problèmes

théoriques. Cependant, nous avons eu l'occasion de participer au développement d'un nouveau type de simulations appelées "Monte-Carlo quantique", adaptées aux processus quantiques dissipatifs comme le refroidissement laser. Ces simulations ont permis un progrès considérable sur le plan de l'efficacité du calcul numérique. Nous les développons au chapitre IV. En outre, elles ont suggéré une nouvelle description physique du processus de résonances noires sélectives en vitesse, qui insiste sur la diffusion des atomes dans l'espace des impulsions.

En remarquant que cette diffusion était très particulière ("vol de Lévy"), nous avons développé un traitement statistique du refroidissement par résonances noires (chapitre V). Cette approche théorique repose sur les techniques d'étude des diffusions anormales. Elle fournit à la fois une image physique du refroidissement par résonances noires, et des moyens techniques pour calculer l'évolution du système. Ainsi, nous l'utilisons, à la fois pour donner une vue d'ensemble des processus statistiques à l'œuvre dans le refroidissement sub-recul et pour étudier les différentes limites du refroidissement par résonances noires.

Sur le plan expérimental, pour étudier le régime des temps longs ou le refroidissement à 2 et 3D, il fallait de nouvelles approches, tant pour l'obtention du refroidissement par résonances noires que pour sa détection. L'obtention de longs temps d'interaction cohérente est problématique avec un jet atomique à cause du volume de la zone d'interaction et des problèmes de sortie des faisceaux lasers. Pour augmenter le temps d'interaction sans augmenter le volume d'interaction, il faut des atomes plus lents. Or, le refroidissement laser habituel, non subrecul, est très bien adapté pour fournir des atomes lents. Il est alors avantageux de piéger les atomes refroidis, pour travailler dans un petit volume.

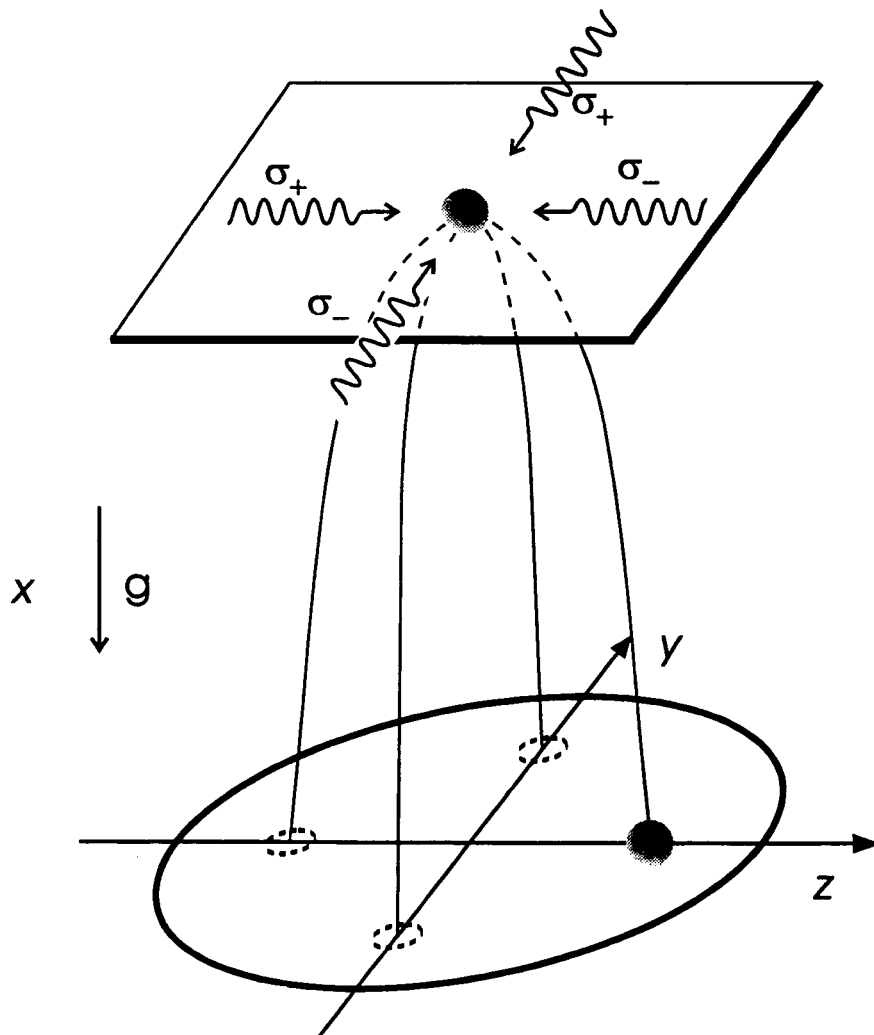
Quant à la détection, pour l'améliorer significativement, il faut d'abord disposer d'un détecteur multicanal, si possible bidimensionnel, pour les expériences à 2 et 3 dimensions. Ceci permet de se débarrasser de la fente F_2 (cf. figure I.6) et de la nécessité de balayer le détecteur. On peut même éliminer la fente F_1 en ayant une source atomique spatialement bien définie.

On arrive ainsi naturellement à un nouveau schéma expérimental, basé sur une source confinée d'atomes froids et utilisant un détecteur multicanal. Le chapitre II est consacré à la réalisation d'un nouveau dispositif expérimental qui s'inspire de ces principes en utilisant un piège d'atomes d'hélium métastables ultra-froids comme source d'atomes et une galette de microcanaux comme détecteur bidimensionnel.

Le nouveau dispositif peut en principe donner accès à des temps d'interaction accrus de deux ordres de grandeur par rapport à l'expérience de 1988, c'est-à-dire à des températures 100 fois plus basses, ainsi qu'au refroidissement à 2 et à 3 dimensions. Nous décrirons au chapitre III les premières expériences effectuées avec ce dispositif, qui ont déjà permis de gagner un ordre de grandeur sur les températures, et de réaliser un refroidissement sub-recul à deux dimensions.

Chapitre II

Réalisation du nouveau dispositif expérimental



Plan du chapitre II : Réalisation du nouveau dispositif expérimental

1 Introduction	43
2 Eléments de base de l'expérience	45
2.1 L'hélium 4 triplet du point de vue du refroidissement laser	45
2.1.1 Structure atomique de ^4He et transitions utilisées pour le refroidissement laser	45
2.1.2 Particularités de $^4\text{He}^*$ pour le refroidissement laser	49
2.1.3 Examen des raies d'intercombinaison	51
2.2 Lasers LNA à 1,083 μ : rappels	55
2.3 Jet d'hélium métastable : rappels	58
2.3.1 Dispositif	58
2.3.2 Détection du jet	59
2.3.3 Caractéristiques du jet	60
3 Réalisation d'un piège magnéto-optique d'atomes d'hélium métastable	61
3.1 Introduction	61
3.2 Alimentation du piège magnéto-optique : jet collimaté et ralenti par laser	64
3.2.1 Refroidissement transverse du jet atomique par une mélasse optique à 2 dimensions.	64
3.2.1.1 Problème à résoudre et dispositif	64
3.2.1.2 Profil transverse. Comparaison à un modèle simple	66
3.2.1.3 Effet de la mélasse transverse sur la distribution des temps de vol	68
3.2.2 Ralentissement du jet atomique	71
3.2.2.1 Objectif et choix du ralentissement Zeeman	71
3.2.2.2 Dispositif expérimental : champ magnétique et faisceau laser de ralentissement.	74
3.2.2.3 Résultats expérimentaux	77
3.2.2.4 Efficacité du ralentissement	79
3.3 Piège magnéto-optique	81
3.3.1 Introduction	81
3.3.2 Principe du piège magnéto-optique	82
3.3.3 Dispositif de piégeage	85
3.3.4 Mesure des paramètres physiques du piège magnéto-optique	87
3.3.4.1 Vue d'ensemble des systèmes de détection	87
3.3.4.2 Fluorescence des atomes piégés. Caméra CCD	87
3.3.4.3 Flux d'ions issus du piège. Multiplicateur d'électrons	88
3.3.4.4 Distribution en vitesse des atomes piégés. Galette de microcanaux	90
3.3.4.5 Synthèse des différents systèmes de détection	95
3.4 Bilan : caractéristiques principales du piège magnéto-optique	95
4 Problèmes expérimentaux à résoudre pour l'observation du refroidissement par résonances noires	96
4.1 Introduction	96
4.2 Configuration laser. Contraintes optiques à respecter	97
4.3 Contraintes sur le champ magnétique	99
4.3.1 Introduction	99
4.3.2 Estimation théorique des effets du champ magnétique	100
4.3.2.1 Couplages magnétiques	100
4.3.2.2 Champ magnétique transverse : taux de fluorescence induite par champ magnétique ; critère à satisfaire.	103
4.3.2.3 Champ magnétique longitudinal : sans fluctuations ; avec fluctuations.	107
4.3.3 Inventaire des champs magnétiques parasites	111
4.3.4 Dispositif de contrôle des champs magnétiques parasites	113
4.3.4.1 Contrôle des champs ambiants	113
4.3.4.2 Contrôle des champs de ralentissement	116
4.3.4.3 Contrôle des champs de piégeage	118
4.3.5 Bilan sur les contraintes de champ magnétique	119
4.4 Mesure de la distribution en impulsion des atomes refroidis	120
4.4.1 Un détecteur bidimensionnel multicanal : la galette de microcanaux	121
4.4.2 Principe de la détection des vitesses	122
4.4.3 Résolution en position et en vitesse	123
4.4.4 Sélection temporelle	125
5 Conclusion	126
5.1 Etapes principales de la nouvelle expérience	126
5.2 Potentiel de la nouvelle conception de l'expérience	127

1 Introduction

Avec les résonances noires sélectives en vitesse, un mécanisme de refroidissement laser a franchi pour la première fois la limite de la température T_R de recul d'un seul photon (cf. chapitre I). En effet, l'expérience réalisée en 1988 par le groupe de l'ENS, sur un jet d'hélium métastable, a permis d'atteindre $T_R/2$, à une dimension.

Or, des arguments théoriques indiquent que la température atteinte par résonances noires peut diminuer indéfiniment et qu'elle varie comme l'inverse du temps d'interaction cohérente θ entre atomes et faisceaux lasers. Par ailleurs, on devrait pouvoir refroidir simultanément les composantes de la vitesse le long de 2 ou même 3 dimensions d'espace. La perspective d'atteindre des températures plus basses, à plus qu'une dimension, est la motivation principale de cette thèse.

L'amélioration des performances du refroidissement par résonances noires passe par l'accroissement du temps θ d'interaction entre atomes et faisceaux.

Comment accroître significativement θ ?

Le temps θ est déterminé par le rapport entre la taille des faisceaux et la vitesse initiale des atomes. Nous avons vu qu'il est pratiquement impossible, dans une expérience sur jet, d'augmenter la taille de la zone d'interaction cohérente, à cause de la difficulté de maintenir la cohérence mutuelle entre les faisceaux lasers et les sous-niveaux Zeeman sur une zone étendue. Accroître le temps d'interaction en gardant un petit volume d'interaction exige d'utiliser une source confinée d'atomes lents. Les techniques standards de refroidissement lasers sont précisément bien adaptées pour réaliser une telle source, sous la forme d'un piège magnéto-optique.

La nouvelle expérience de résonances noires est donc conçue à partir d'atomes pré-refroidis dans un piège magnéto-optique (figure II.1). Dans une première étape, les atomes sont confinés et refroidis par les techniques standards de refroidissement laser. Puis, les faisceaux de piégeage sont éteints et on applique les faisceaux lasers de résonances noires. Enfin, les faisceaux de résonances noires sont éteints à leur tour et on laisse les atomes tomber en chute libre vers le détecteur.

Les vitesses caractéristiques que nous avons obtenues pour le piège d'atomes d'hélium sont inférieures au mètre par seconde. En les comparant aux 1100 m.s^{-1} de l'expérience sur jet, on peut espérer un accroissement du temps d'interaction de 2 à 3 ordres de grandeur. Cela signifie une diminution de température de 2 à 3 ordres de grandeur. En outre, disposant de temps d'interaction suffisamment longs, la mise en oeuvre du refroidissement à 2 ou 3 dimensions devrait se faire en ajoutant simplement des faisceaux lasers supplémentaires.

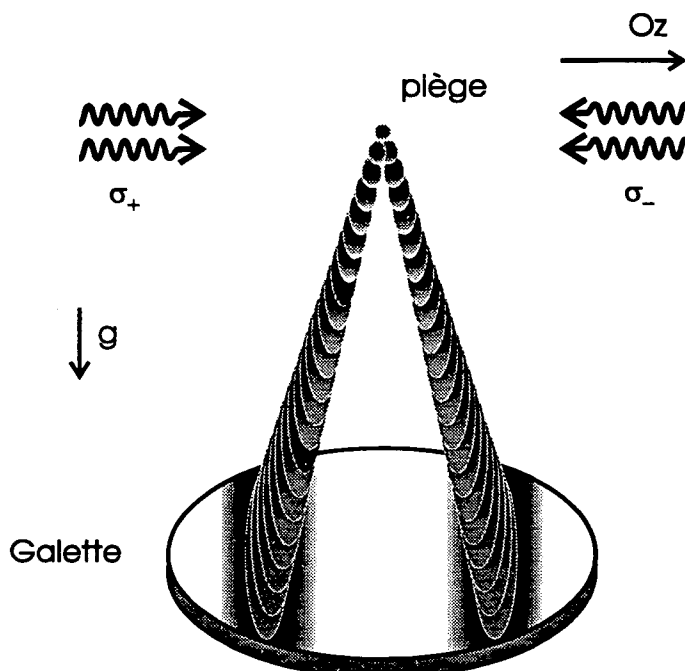


Figure II.1. *Principe de la nouvelle expérience de refroidissement par résonances noires.* Les atomes sont refroidis et confinés dans un piège magnéto-optique. Puis, les faisceaux de piégeage sont éteints et on applique les faisceaux lasers de résonances noires. Enfin, les faisceaux de résonances noires sont éteints à leur tour et on laisse les atomes tomber en chute libre vers le détecteur.

Pour étudier de telles températures, il a fallu repenser le système de détection (cf. chapitre I). Pour mesurer des distributions en vitesse à plus qu'une dimension, ou présentant les structures étroites que nous recherchons, il est indispensable que le détecteur soit multicanal. Nous avons donc monté un système de galettes microcanaux qui possède à la fois la résolution suffisante et un fonctionnement multicanal à 2, voire 3 dimensions.

Le nouveau schéma expérimental présente une difficulté majeure, le contrôle des champs magnétiques. En effet, la phase de piégeage utilise des champs de l'ordre de la centaine de gauss, alors que le champ magnétique doit être annulé à quelques milligauss près pendant la phase de résonances noires, afin de préserver la cohérence des résonances noires. Pour résoudre ce problème, nous avons dû réaliser des expériences auxiliaires de mesure fine du champ, avec l'effet Hanle mécanique.

En revanche, le nouveau schéma supprime les problèmes de cohérence liés à l'optique qui étaient critiques dans l'expérience sur jet.

Ce chapitre II décrit le nouveau dispositif de refroidissement par résonances noires, à partir d'atomes piégés. Les résultats des premières expériences réalisées font l'objet du chapitre III.

Nous commençons par décrire les éléments de base de l'expérience (§ II.2) qui sont le système atomique utilisé (hélium 4 métastable, § II.2.1), les lasers à $1,08 \mu$ (§ II.2.2), et le jet d'hélium métastable (§ II.2.3). Le paragraphe II.2 contient essentiellement des rappels, à l'exception de l'examen des raies d'intercombinaison (§ II.2.1.3), dont certaines n'avaient pas été prises en compte par le passé.

Nous décrivons ensuite la réalisation du piège magnéto-optique (§ II.3), qui a constitué le premier piège d'atomes d'hélium métastable. La réalisation de ce piège est

une expérience en soi, qui nécessite de refroidir transversalement le jet atomique (§ II.3.2.1), de ralentir ce jet (§ II.3.2.2), pour enfin piéger les atomes ralentis (§ II.3.3). Comme ce mémoire est centré sur l'expérience de résonances noires, nous avons délibérément allégé l'exposé des propriétés du piège en ne mentionnant dans le texte principal que les points importants pour l'expérience de résonances noires.

Enfin, nous décrivons la mise au point de l'expérience de résonances noires proprement dites (§ II.4). Nous montrons que les problèmes d'optique sont grandement simplifiés par rapport à l'expérience sur jet (§ II.4.2). Puis, nous traitons du point qui s'est avéré le plus délicat, la compensation des champs magnétiques parasites (§ II.4.3). Enfin, nous décrivons le nouveau dispositif de mesure, constitué de galettes microcanaux (§ II.4.4).

En conclusion (§ II.5), nous décrivons la séquence opératoire détaillée (§ II.5.1) et estimons les possibilités du nouveau schéma expérimental (§ II.5.2).

2 Eléments de base de l'expérience

2.1 L'hélium 4 triplet du point de vue du refroidissement laser

Toutes nos expériences sont réalisées avec l'hélium 4, à partir de l'état triplet métastable 2^3S_1 . Alors qu'aujourd'hui de très nombreuses espèces atomiques ont été refroidies par laser, rappelons les points qui font de l'hélium un système particulier.

2.1.1 Structure atomique de ^4He et transitions utilisées pour le refroidissement laser

- *Un système modèle*

L'hélium est, grâce à la simplicité de son système à 2 électrons, un des atomes les plus étudiés et les mieux connus. Ses propriétés spectroscopiques, collisionnelles (potentiels) peuvent souvent être estimées *ab-initio*, ce qui en fait un système modèle comme le montrent les expériences de mesure de déplacement de Lamb [ZLK89], par exemple. Le refroidissement laser de l'hélium intéresse donc potentiellement plusieurs domaines expérimentaux.

- *Transitions lasers accessibles*

L'hélium ne possède malheureusement pas de transition aisément accessible par laser à partir du niveau fondamental puisque, comme le montre la figure II.2, les

[ZLK89] P. Zhao, J.R. Lawall, A.W. Kam, M.D. Lindsay, and F.M. Pipkin, *Direct Laser Measurement of the Lamb Shift of $2^3S - 2^3P$ Transitions in Helium*, Phys. Rev. Lett. **63**, p. 1593-1596 (1989).

premiers niveaux excités ont une énergie de 20 eV environ [1]. En revanche, à partir des deux premiers niveaux excités, 2^1S_0 et 2^3S_1 , il existe des transitions dans le domaine optique. En outre, ces niveaux sont métastables, de durées de vie respectives 19,5 ms [Dra69] et 8000 s [WoM75].

Comme les techniques de refroidissement laser permettent de piéger les atomes sur des durées allant de la seconde à la minute, il est préférable de travailler avec l'état triplet 2^3S_1 , dont la durée de vie est considérablement plus longue que celle du singulet 2^1S_1 .

En outre, à partir du niveau 2^3S_1 , les transitions optiques vers des niveaux plus excités sont fermées. Une des particularités de l'hélium est en effet que les transitions triplets-singulets, appelées transitions d'intercombinaison, y sont fortement interdites [2] par la règle de sélection $\Delta S = 0$. A partir d'un niveau triplet, on ne peut donc exciter efficacement que des états triplets et, de ces états, on ne peut revenir que sur un état triplet. Ainsi, si on excite les transitions $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_{0,1,2}$ à 1,083 μ (figure II.3), on ne peut revenir après excitation que sur le niveau 2^3S_1 qui est l'état triplet de plus basse énergie. Les transitions optiques $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_{0,1,2}$ sont donc des transitions fermées, ce qui est essentiel pour le refroidissement laser [3].

La durée de vie des états 2^3P étant de 100 ns (97,85 ns selon [CRC86]), on peut échanger rapidement de nombreux photons sur ces transitions pour obtenir du refroidissement par laser. La mise au point de lasers LNA émettant à 1,083 μ , d'abord multimodes ([SLV86], [DSL87]), puis monomodes ([Van89], [VKG89]), a ouvert le

-
- [1] Toutefois, la transition $1^1S_0 \leftrightarrow 2^1P_1$ à 58 nm a été étudiée récemment par spectroscopie laser, par obtention d'harmoniques. Voir [EUV93]: K.S.E Eikema, W. Ubachs, W. Vassen, and W. Hogervorst, *First Laser Excitation of the $^4\text{He } 1^1S-2^1P$ Resonance Line at 58 nm*, Phys. Rev. Lett. **71**, p. 1690-1692 (1993).
- [Dra69] G.W.F. Drake, *The $n^3P_2 - 1^1S_0$ Magnetic Quadrupole Transitions of the Helium Sequence*, Astrophys. J. **158**, p. 1199-1203 (1969) and G.W.F. Drake, *Erratum*, Astrophys. J. **163**, p. 439 (1971).
- [WoM75] J.R. Woodworth and H.W. Moss, *Experimental determination of the single-photon transition rate between the 2^3S_1 and 1^1S_0 states of He I*, Phys. Rev. A **6**, p. 2455 (1975).
- [2] Les transitions d'intercombinaison ne sont toutefois pas totalement interdites. Bien que faibles, elles peuvent jouer des rôles importants que nous discuterons au paragraphe 2.1.3.
- [3] Si on avait voulu exploiter le niveau métastable singulet 2^1S_0 , on n'aurait pas disposé de transitions fermées puisque les niveaux d'énergie plus élevée (2^1P_1 , 2^1D_2 , ...) retombent avec une forte probabilité sur le niveau fondamental 1^1S_0 . Ceci disqualifie l'état 2^1S_0 pour le refroidissement laser.
- [CRC86] *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, ed. R.C. Weast, CRC Press, p. E-341 (1986).
- [SLV86] L.D. Schearer, M. Leduc, D. Vivien, A. Lejus, and J. Thery, *LNA: A New Nd Laser Tunable Around 1.05 and 1.08 μ* , IEEE J. Quantum Electron. **22**, p. 713-717 (1986).
- [DSL87] J.M. Daniels, L.D. Schearer, M. Leduc, and P.J. Nacher, *Polarizing ^3He nuclei with neodymium $\text{La}_{1-x}\text{Nd}_x\text{MgAl}_{11}\text{O}_{19}$ lasers*, J. Opt. Soc. Am. B **4**, p. 1133-1135 (1987).
- [Van89] N. Vansteenkiste, *Réalisation d'un laser monomode et asservi sur la transition $2^3S_1-2^3P$ de l'hélium 4 (1083 nm): utilisation pour quelques expériences de refroidissement radiatif d'atomes d'hélium 4 métastable*, Thèse de l'Université Paris-Sud (1989).

domaine de l'hélium au refroidissement laser [4]. D'autres transitions d'énergies plus élevées (comme $2^3S_1 \leftrightarrow 3^3P$ à 388 nm) seraient également utilisables pour le refroidissement laser.

Dans nos expériences, nous travaillons avec les transitions $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_{0,1,2}$. La durée de vie de 2^3S_1 étant beaucoup plus longue que tous les temps caractéristiques, nous considérons cet état comme notre état fondamental.

• *Une structure atomique suffisamment riche*

La richesse de la structure atomique provient des morphologies différentes ($J \leftrightarrow J - 1$, J ou $J + 1$) des 3 transitions $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_{0,1,2}$ que nous pouvons exciter (voir figure II.3). Ceci est très utile du point de vue du refroidissement laser. Ainsi, pour l'expérience décrite ici, nous utilisons la transition $J \leftrightarrow J + 1$: $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_2$, pour la partie de refroidissement traditionnel (mélasse transverse, ralentissement, piégeage). D'autre part, nous avons besoin d'une transition $J = 1 \leftrightarrow J = 1$, comme $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_1$, pour le refroidissement par résonances noires à 2 et 3 dimensions. Quant à la transition $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_0$, elle a été récemment utilisée pour des expériences de transfert adiabatique de population [LaP94], [LaW93].

• *Une structure atomique simple*

La simplicité de la structure atomique réside surtout dans le fait suivant : les transitions $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_{0,1,2}$, qui n'ont pas de structure hyperfine, suffisamment proches pour être accessibles avec le même laser, sont suffisamment éloignées pour que l'on puisse en général ignorer les perturbations des niveaux que l'on n'excite pas directement. En effet, la largeur des niveaux $2^3P_{0,1,2}$ est de 1,6 MHz, alors que la séparation entre 2^3P_2 et 2^3P_1 est de 2,3 GHz, et celle entre 2^3P_1 et 2^3P_0 est de 29,9 GHz (figure II.2). D'une part, ceci simplifie considérablement la modélisation puisqu'on peut prendre en compte la totalité de la structure atomique pertinente [5]. D'autre part, le fait que l'on puisse travailler sur la transition $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_1$ sans échanger aucun photon sur aucune autre transition est essentiel pour le succès du refroidissement par résonances noires (préservation de la cohérence).

[VKG89] N. Vansteenkiste, R. Kaiser, C. Gerz, L. Hollberg, C. Salomon, and A. Aspect, *A frequency-stabilized LNA laser at 1,083 μ : application to the manipulation of helium 4 atoms*, J. Phys. II (France) 1, p. 1407-1428 (1991).

[4] Les diodes lasers monomodes à 1,083 μ , très récemment développées par Spectra-Diode, bien moins onéreuses que les lasers LNA (pompés par laser Argon), vont vraisemblablement jouer un rôle important dans le futur.

[LaP94] J. Lawall and M. Prentiss, *Demonstration of a Novel Atomic Beamsplitter*, Phys. Rev. Lett. 72, p. 993-996 (1994).

[LaW93] J.R. Lawall, *A Coherent Atomic Beamsplitter Based on Adiabatic Passage*, Thesis, Harvard University (1993).

[5] Voir en particulier les situations décrites dans [Kai90] (effet Hanle mécanique, résonances noires) et dans [Emi93] (effet Sisyphe magnétique). [Kai90] : R. Kaiser, *Manipulation par laser d'hélium métastable : effet Hanle mécanique, refroidissement sous le recul d'un photon*, Thèse de l'Université Paris VI (1990). [Emi93] : O. Emile, *Manipulation d'hélium métastable par laser : effet Sisyphe magnétique*, Thèse de l'Université Paris VI (1993).

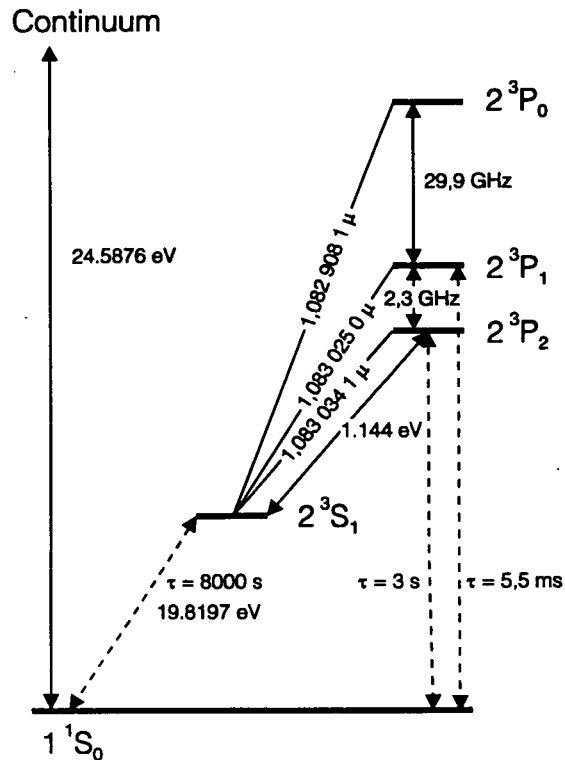


Figure II.3 Transitions $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_{0,1,2}$ utilisables pour le refroidissement radiatif avec un laser à $1,083 \mu$. La durée de vie des états 2^3P est de 100 ns. Noter en pointillé les transitions d'intercombinaison. Les écarts d'énergie ne sont pas à l'échelle. Les caractéristiques de ces transitions sont reprises de manière plus détaillée dans l'annexe A (coefficients de Clebsch-Gordan, facteurs de Landé...).

2.1.2 Particularités de $^4\text{He}^*$ pour le refroidissement laser

• Un atome léger

La légèreté de l'hélium 4 est, sur le plan théorique, une spécificité intéressante pour le refroidissement laser : la vitesse de recul v_R ($9,2 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$) due à l'absorption ou à l'émission d'un seul photon n'est en général pas négligeable devant les vitesses caractéristiques obtenues ($v_D = 23 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1} = 2,5 v_R$) avec le refroidissement Doppler. Pour l'hélium, cette vitesse de recul doit donc être traitée comme un authentique quantum et non comme un infiniment petit [6].

Sur le plan expérimental, l'absorption ou l'émission d'un seul photon par un atome d'hélium est relativement facile à détecter grâce à la valeur élevée de v_R (cf. § 4.4). De même, les vitesses caractéristiques obtenues par refroidissement laser, dont l'échelle est donnée par v_R , sont relativement importantes pour l'hélium. Il en découle certains effets néfastes comme l'étalement transverse du jet atomique (cf. § 3.2.2 et Annexe). Enfin, la légèreté de l'hélium joue un rôle dans les sections efficaces géantes que nous avons observées pour les collisions entre atomes piégés [BEC92].

[6] Comparer, à l'autre extrême, à un atome lourd comme le césium pour lequel $v_R = 3,5 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ et $v_D = 7,3 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1} = 21 v_R$, avec un laser à 852 nm. Dans le cas des atomes lourds, la vitesse de recul peut souvent être prise en compte de manière perturbative (sauf évidemment dans le cas du refroidissement sub-recul).

[BEC92] F. Bardou, O. Emile, J.-M. Courty, C.I. Westbrook, and A. Aspect, *Magneto-Optical Trapping of Metastable Helium : Collisions in the Presence of Resonant Light*, Europhys. Lett. **20**, p. 681-686 (1992).

• *Conséquences de la métastabilité de l'état 2^3S_1*

L'utilisation du niveau métastable 2^3S_1 entraîne deux particularités.

La première particularité est que l'excitation de ce niveau métastable (par bombardement électronique) est très peu efficace (en général, l'efficacité est inférieure à 10^{-5}). Ceci diminue d'autant le flux d'atomes utiles : c'est un inconvénient majeur.

La deuxième particularité vient de l'énergie des niveaux 2^3S_1 et $2^3P_{0,1,2}$. Cette énergie, de l'ordre de 20 eV est importante par rapport aux énergies de liaison des électrons dans les atomes, les molécules ou les solides. Ceci peut être utilisé à notre avantage.

Premièrement, l'hélium métastable peut arracher un électron à une surface métallique (énergie d'extraction de l'ordre de 2 à 4 eV). Avec un multiplicateur d'électrons, on peut donc détecter les atomes d'hélium métastable un par un, avec un rendement quantique proche de 50 % et une résolution spatiale éventuelle inférieure à 100 μm (cf § II.4.3). Pour l'expérience de refroidissement par résonances noires que nous allons décrire, ceci est un atout majeur.

Deuxièmement, l'hélium métastable a une énergie suffisante pour ioniser tout atome (sauf le néon) ou molécule avec lequel il entre en collision (ionisation Penning). On pourra ainsi détecter les produits des collisions éventuelles très facilement puisque ce sont des ions.

• *Effets quantiques collectifs éventuels*

Un des objectifs à long terme du refroidissement laser, souvent mis en avant, est l'observation possible d'effets quantiques collectifs. Pour cela, il faut atteindre un régime où le produit $n\lambda_{dB}^3$ de la densité spatiale n par le cube de la longueur d'onde λ_{dB} de de Broglie soit proche de 1. Des progrès ont été faits dans cette direction, et dans certains pièges à césium, on atteint actuellement $n\lambda_{dB}^3 \approx 6 \times 10^{-4}$ [DLN94]. Mais les collisions inélastiques changeant l'état interne des atomes restent un problème majeur.

L'hélium 4 (2^3S_1), polarisé dans un état de spin bien défini, est un candidat prometteur pour l'obtention de la condensation de Bose-Einstein [SWR94]. Ses propriétés collisionnelles (grande section efficace de diffusion élastique, forte interaction élastique effective répulsive) en font un atome encore plus favorable que l'hydrogène polarisé selon [SWR94].

Nous avons travaillé uniquement avec l'hélium 4 (boson), mais l'hélium 3 (fermion) pourrait être éventuellement refroidi avec un dispositif analogue, ce qui autoriserait une observation différentielle des effets de statistique quantique.

Enfin, dans la perspective de la condensation de Bose-Einstein, le refroidissement par résonances noires de l'hélium qui fait l'objet de cette thèse présente deux intérêts. Il

[DLN94] M. Drewsen, Ph. Laurent, A. Nadir, G. Santarelli, A. Clairon, Y. Castin, D. Grison, and C. Salomon, *Investigation of sub-Doppler cooling effects in a cesium magneto-optical trap*, Appl. Phys. B 59, p. 283-298 (1994).

[SWR94] G.V. Shlyapnikov, J.T.M. Walraven, U.M. Rahmanov, and M.W. Reynolds, *Decay kinetics and Bose-Einstein condensation in a gas of spin-polarized triplet helium*, soumis à Phys. Rev. Lett. (1994).

atteint d'une part des températures très basses, donc de grandes longueurs d'onde de de Broglie, ce qui accroît le produit $n\lambda_{dB}^3$ sans accroître n et limite ainsi les collisions inélastiques. D'autre part, il fournit des atomes dans un état 2^3S_1 dont le spin est localement polarisé, ce qui doit permettre également de limiter les collisions inélastiques.

2.1.3 Examen des raies d'intercombinaison

• Introduction

Les transitions d'intercombinaison, c'est-à-dire les transitions entre états triplets et états singulets, sont fortement interdites du point de vue dipolaire électrique par la règle de sélection $\Delta S = 0$. Cette règle de sélection est rigoureuse dans le cas d'un couplage LS pur, valable pour les atomes de faible Z , ce qui s'applique bien à l'hélium : si les transitions d'intercombinaison se produisent dans l'hélium, ce sera avec un taux très faible. Il peut donc sembler paradoxal de s'intéresser à ces transitions interdites alors que nous voulons travailler sur les transitions $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_{1,2,3}$, parfaitement autorisées comme transitions dipolaires électriques.

Cependant, toute transition qui fait passer un atome d'un état triplet à un état singulet est un processus irréversible (en l'absence d'un mécanisme de repompage efficace pour ramener l'atome dans l'état triplet). Une telle transition fait donc perdre définitivement l'atome du point de vue du refroidissement laser. En outre, les temps mis en jeu dans le refroidissement laser, de l'ordre de la seconde, sont inhabituellement longs pour la physique atomique. Ceci explique la sensibilité à des processus dont les taux sont jugés négligeables habituellement : nous verrons que les transitions d'intercombinaison de l'hélium jouent un rôle essentiel dans les limites du refroidissement laser (cf. chapitre V). Or, ces transitions n'ont pas été complètement prises en compte par les travaux antérieurs dans le contexte du refroidissement laser. Un rappel bibliographique est donc nécessaire. C'est l'objet de ce paragraphe.

Historiquement, les transitions d'intercombinaison de l'hélium ont fait l'objet de nombreuses controverses depuis leur apparition dans la littérature (voir par exemple la discussion des premières mesures de Lyman : [Lym22], [Lym24] cités par [PaG30]). Ce sujet a été passé en revue dans [MaM78]. Cependant, la littérature récente fournit encore des informations incomplètes ou contradictoires [7]. Sur le plan expérimental, la raison

[Lym22] T. Lyman, *The Spectrum of Helium in the Extreme Ultra-Violet*, Nature **110**, p. 278-279 (1922).

[Lym24] T. Lyman, *The Spectrum of Helium in the Extreme Ultra-Violet*, Astrophys. J. **60**, p. 1-14 (1924).

[PaG30] L. Pauling and S. Goudsmit, *Structure of Line Spectra*, p. 102, Mc Graw-Hill (1930).

[MaM78] R. Marrus and P.J. Mohr, *Forbidden transitions in one and two-electron atoms*, Advances in Atomic and Molecular Physics **14**, p. 181-225 (1978).

[7] Dans [Sob79] (I.I. Sobelman, *Atomic Spectra and Radiative Transitions*, p. 39 and p. 237, Springer-Verlag (1979)), par exemple, on lit que les transitions d'intercombinaison ne sont pas observées dans le spectre de l'hélium, ce qui n'est pas exact, comme on va le voir. Noter également que ces raies ne sont pas mentionnées dans les Handbook of Physics and Chemistry.

de ces controverses est l'extrême faiblesse de ces transitions qui rend leur identification et leur étude difficile.

En 1969, des transitions d'intercombinaison $2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$ d'ions héliumoides ont été découvertes dans la couronne solaire [GaJ69a], [GaJ69b] alors qu'on pensait jusque là que ces transitions étaient beaucoup trop faibles pour être observables [BrT40]. Ces transitions ont été étudiées à nouveau et le couplage qui est à leur origine (couplage dipolaire magnétique) a été identifié [Gri69]. Une intense activité théorique et expérimentale a suivi dans les années 1970. Finalement, même la transition $2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$ de l'hélium a pu être observée en laboratoire [MoW73], [WoM75], alors que son taux est bien plus faible que pour les ions héliumoides plus lourds.

• Taux de transition

Examinons maintenant cas par cas les différentes transitions d'intercombinaison qui nous intéressent. Les résultats principaux sont rassemblés dans le tableau II.1 ci-dessous.

Transition $2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$:

Cette transition, à 625,56 Å [WoM75], est essentiellement une transition dipolaire magnétique à un seul photon [Dra71], [FeS71] (voir aussi [LJD77]). Son taux est estimé théoriquement à $A_{th} = 1,27 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, soit une durée de vie $\tau = 7870 \text{ s}$. Ce taux de transition a été mesuré à 30 % près, en accord avec la théorie : $A_{exp} = 1,10 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ([MoW73], [WoM75]).

-
- [GaJ69a] A. Gabriel and C. Jordan, *Long Wavelength Satellites to the He-like Ion Resonance Lines in the Laboratory and in the Sun*, Nature (London) **221**, p. 947-949 (1969).
- [GaJ69b] A. Gabriel and C. Jordan, *Interpretation of solar helium-like intensities*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. **145**, p. 241-248 (1969).
- [BrT40] G. Breit and E. Teller, *Metastability of hydrogen and helium levels*, Astrophys. J. **91**, p. 215-238 (1940).
- [Gri69] H.R. Griem, *Spontaneous single-photon decay of 2^3S_1 in helium-like ions*, Astrophys. J. **156**, p. L103-L105 (1969).
- [MoW73] H.W. Moos and J.R. Woodworth, *Observation of the $2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$ Spontaneous Emission Line from Helium and Measurement of the Transition Rate*, Phys. Rev. Lett. **30**, p. 775-778 (1973).
- [WoM75] J.R. Woodworth and H.W. Moss, *Experimental determination of the single-photon transition rate between the 2^3S_1 and 1^1S_0 states of He I*, Phys. Rev. A **6**, p. 2455 (1975).
- [Dra71] G.W.F. Drake, *Theory of Relativistic Magnetic-Dipole Transitions; Lifetime of the Metastable 2^3S State of Heliumlike Ions*, Phys. Rev. A **3**, p. 908-915 (1971).
- [FeS71] G. Feinberg and J. Sucher, *Calculation of the Decay Rate for $2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0 + \text{One Photon}$ in Helium*, Phys. Rev. Lett. **26**, p. 681-684 (1971).
- [LJD77] C.D. Lin, W.R. Johnson, and A. Dalgarno, *Radiative Decays of the $n = 2$ states of He-like ions*, Phys. Rev. A **15**, p. 154-161 (1977).

Transition $2^3P_2 \rightarrow 1^1S_0$:

Les transitions $2^3P_{0,1,2} \rightarrow 1^1S_0$ ont une longueur d'onde de 591,4 Å [Elt67]. L'état 2^3P_2 est connecté à 1^1S_0 par une transition quadrupolaire magnétique [Gar67] dont le taux est estimé à $A_{th} = 3,27 \times 10^{-1} s^{-1}$ soit une durée de vie de 3,06 s [Dra69] ([Gar67] donnait $A_{th} = 0,22 s^{-1}$;voir aussi [LJD77]).

Transition $2^3P_1 \rightarrow 1^1S_0$:

Cette transition est permise du point de vue dipolaire électrique grâce à un mélange entre états triplets et singulets de même J par l'interaction spin-orbite. *Son taux théorique est $A_{th} = 1,80 \times 10^2 s^{-1}$, soit une durée de vie de 5,56 ms [DrD69] (voir aussi [LJD77]).* Cette transition a été prise en compte dans des problèmes de nébuleuses planétaires [DrR72], sans que cela constitue vraiment un vrai test expérimental [8]. Tang et Happer ont mesuré en 1972 que le rapport de branchement B entre la raie $2^3P_1 \rightarrow 1^1S_0$ et $2^3P_1 \rightarrow 2^3S_1$ était [TaH72] :

$$0,3 \times 10^{-5} \leq B \leq 1,8 \times 10^{-5} \quad (\text{II.1})$$

A partir du taux de transition de $2^3P_1 \rightarrow 2^3S_1$ ($A \approx (100 \text{ ns})^{-1}$), on en déduit le taux de transition A_{exp} de $2^3P_1 \rightarrow 1^1S_0$:

$$3 \times 10 \leq A_{exp} \leq 1,8 \times 10^2 s^{-1} \quad (\text{II.2})$$

Ceci correspond à des temps $(A_{exp})^{-1}$ compris entre 5,5 ms et 33 ms. La valeur expérimentale est compatible avec la valeur théorique. *Ce taux de transition est très important pour la détermination des limites du refroidissement par résonances noires. Notons que le piège d'hélium métastable que nous avons réalisé permettrait de mesurer ce taux.*

-
- [Elt67] R.C. Elton, *Intercombination line oscillator strengths in the helium isoelectronic sequence*, *Astrophys. J.* **148**, p. 573-578 (1967).
- [Gar67] R.H. Garstang, *Magnetic quadrupole line intensities*, *Astrophys. J.* **148**, p. 579-584 (1967).
- [Dra69] G.W.F. Drake, *The $n^3P_2 - n^3P_2$ Magnetic Quadrupole Transitions of the Helium Sequence*, *Astrophys. J.* **158**, p. 1199-1203 (1969) and G.W.F. Drake, *Erratum*, *Astrophys. J.* **163**, p. 439 (1971).
- [DrD69] G.W.F. Drake and A. Dalgarno, *Intercombination oscillator strengths in the helium sequence*, *Astrophys. J.* **157**, p. 459-462 (1969).
- [DrR72] G.W.F. Drake and R.R. Robbins, *The population of helium triplet states in gaseous nebulae*, *Astrophys. J.* **171**, p. 55-61 (1972).
- [8] Des travaux récents ont étudié la possibilité d'obtenir un laser ultraviolet sur cette transition en utilisant des atomes d'hélium ultrafroids. Cependant, les densités requises ($10^{16} \text{ at.cm}^{-3}$ à $10 \mu\text{K}$) sont hors d'atteinte pour l'instant. Voir [GRW94] : K.M. Gheri, H. Ritsch, D.F. Walls, and V.I. Balykin, *How large photon recoil can make cold atoms lase*, manuscrit, 26 août 1994.
- [TaH72] H.Y.S. Tang and W. Happer, *Experimental Determination of the $2^3P_1 \rightarrow 1^1S_0$ Forbidden Decay Rate in Helium*, *Bull. Am. Phys. Soc.* **17**, p. 476 (1972).

Transition $2^3P_0 \rightarrow 1^1S_0$:

Outre qu'elle ne respecte pas la conservation du spin ($\Delta S = 0$), cette transition est en outre une transition $J = 0 \rightarrow J = 0$, donc doublement interdite en couplage Russel-Saunders. Selon Drake [Dra69], en l'absence de spin nucléaire, l'état 2^3P_0 ne peut subir aucune transition à un photon vers l'état fondamental.

Transition $2^3P_{0,1,2} \rightarrow 2^1S_0$:

Elle est mentionnée dans [DrD69] avec un taux $A_{th} = 0,027s^{-1}$, soit une durée de vie de 37 s.

Transition	λ (Å)	Taux A (s^{-1})	Références
$2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$	Th. : 625,56 Exp. : $625,54 \pm 0,05$	Th. : $1,27 \times 10^{-4}$; $1,73 \times 10^{-4}$ Exp. : $1,10 \times 10^{-4} \pm 30 \%$	[Dra71], [FeS71]; [LJD77] [MoW73], [WoM75]
$2^3P_0 \rightarrow 1^1S_0$
$2^3P_1 \rightarrow 1^1S_0$	Th. : 591,4 [Elt67]	Th. : $1,80 \times 10^2$; $2,33 \times 10^2$ Exp. : $30 \leq A \leq 1,8 \times 10^2$	[DrD69],[DrD72];[LJD77] [TaH72]
$2^3P_2 \rightarrow 1^1S_0$...	Th. : 0,22 ; 0,327; 0,393 Exp. : ...	[Gar67] ; [Dra69];[LJD77]
$2^3P \rightarrow 2^1S_0$...	Th. : 0,027 Exp. : ...	[DrD69]

Tableau II.1 Transitions d'intercombinaison de l'hélium 4 à partir des niveaux 2^3S_1 et $2^3P_{0,1,2}$.

• Conséquences pour le refroidissement laser

La relaxation $2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$ est susceptible de jouer un rôle dans toutes nos expériences de refroidissement laser qui utilisent He(2^3S_1), et interviendrait également dans des expériences de piégeage magnétique, sans laser, de He(2^3S_1). Cependant, la longue durée de vie (8000 s) de 2^3S_1 fait que cette transition n'est pas gênante avec les temps de piégeage actuels, de l'ordre d'une seconde. C'est la seule transition d'intercombinaison qui était prise en compte jusqu'à présent.

La transition $2^3P_2 \rightarrow 1^1S_0$, avec un taux de $(3 \text{ s})^{-1}$, peut intervenir dans l'expérience de piégeage de l'hélium. En effet, nous obtenons actuellement des temps de piégeage de l'ordre d'une seconde dans notre piège magnéto-optique (§ I.3.3) où près de 50 % de la population atomique est dans l'état 2^3P_2 (les lasers de piégeage saturent la transition $2^3S_1 \rightarrow 2^3P_2$). La transition $2^3P_2 \rightarrow 1^1S_0$ doit donc être prise en compte comme un facteur de pertes non négligeables pour les atomes piégés (voir l'annexe C sur les collisions).

La transition $2^3P_1 \rightarrow 1^1S_0$, avec un taux de $(5 \text{ ms})^{-1}$, peut jouer un rôle encore plus important puisque l'expérience de refroidissement laser sub-recul agit sur $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_1$ et peuple significativement l'état 2^3P_1 . Cette transition va limiter le temps

[Dra69] G.W.F. Drake and A. Dalgarno, *Intercombination oscillator strengths in the helium sequence*, *Astrophys. J.* 157, p. 459-462 (1969).

d'interaction effectif entre les atomes et les lasers (plus exactement, elle va limiter à l'inverse du rapport de branchement entre $2^3P_1 \rightarrow 1^1S_0$ et $2^3P_1 \rightarrow 2^3S_1$ le nombre de photons échangés sur la transition $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_1$). Or c'est ce temps d'interaction qui limite la température atteinte. On voit donc toute l'importance de cette transition interdite, même si son taux est 5×10^4 fois plus faible que celui de $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_1$. Avec un taux de $(5 \text{ ms})^{-1}$, elle peut encore être considérée comme négligeable pour le domaine de température effectivement atteint dans les expériences décrites ici, mais jouera un rôle prépondérant quand on voudra franchir l'ordre de grandeur supplémentaire pour lequel l'expérience a été conçue. Nous reviendrons en détail au chapitre V sur la limite en température imposée par cette transition.

Enfin, la transition $2^3P_0 \rightarrow 1^1S_0$ ne joue *a priori* aucun rôle dans nos expériences où nous n'excitons pas le niveau 2^3P_0 . Quant aux transitions $2^3P \rightarrow 2^1S_0$, elles pourraient jouer un rôle semblable aux transitions $2^3P \rightarrow 1^1S_0$. Mais leur taux est au moins un ordre de grandeur plus faible et elles sont donc négligeables.

Notons que seul le taux de transition de $2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$ a été mesuré expérimentalement avec précision. Les autres taux ont été soit calculés théoriquement, soit mesurés avec une grande incertitude. Il serait intéressant de mesurer ces taux avec précision, vue leur importance (astrophysique, refroidissement laser...). Le piège d'hélium métastable que nous avons réalisé offre des conditions favorables à une telle mesure, en particulier pour $2^3P_1 \rightarrow 1^1S_0$ et pour $2^3P_2 \rightarrow 1^1S_0$, dont les taux de transition sont soit plus grands, soit du même ordre de grandeur que l'inverse de la durée de vie du piège actuellement obtenue.

2.2 Lasers LNA à 1,083 μ : rappels

Les lasers utilisés sont des lasers LNA monomodes, développés par Nathalie Vansteenkiste [Van89], [VKG91] (voir [SLV86] et [DSL87] pour le développement des premiers lasers LNA). Nous disposons de deux lasers du même type. En général, l'un est asservi sur la transition $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_2$ pour le piégeage (refroidissement transverse et ralentissement du jet, piège), alors que l'autre est asservi sur la transition $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_1$ pour les résonances noires. Nous rappelons ici brièvement les caractéristiques de ces lasers, identiques à ceux décrits dans [Van89], sauf en ce qui concerne les étalons Fabry-Pérot. La figure II.4 donne une vue d'ensemble des lasers LNA.

[Van89] N. Vansteenkiste, *Réalisation d'un laser monomode et asservi sur la transition 2^3S_1 - 2^3P de l'hélium 4 (1083 nm) : utilisation pour quelques expériences de refroidissement radiatif d'atomes d'hélium 4 métastable*, Thèse de l'Université Paris-Sud (1989).

[VKG91] N. Vansteenkiste, R. Kaiser, C. Gerz, L. Hollberg, C. Salomon, and A. Aspect, *A frequency-stabilized LNA laser at 1,083 μ : application to the manipulation of helium 4 atoms*, J. Phys. II (France) 1, p. 1407-1428 (1991).

[SLV86] L.D. Schearer, M. Leduc, D. Vivien, A. Lejus, and J. Thery, *LNA : A New Nd Laser Tunable Around 1.05 and 1.08 μ* , IEEE J. Quantum Electron. 22, p. 713-717 (1986).

[DSL87] J.M. Daniels, L.D. Schearer, M. Leduc, and P.J. Nacher, *Polarizing ^3He nuclei with neodymium $\text{La}_{1-x}\text{Nd}_x\text{MgAl}_{11}\text{O}_{19}$ lasers*, J. Opt. Soc. Am. B 4, p. 1133-1135 (1987).

• Milieu amplificateur

Le milieu amplificateur est un monocristal de LNA (de formule $\text{La}_{1-x}\text{Nd}_x\text{AlMg}_{11}\text{O}_{19}$, $x = 0,10$) de 10 mm de long et 5 mm de diamètre. Dans ce cristal, il existe une raie d'émission de la transition ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}$ du néodyme dont la longueur d'onde centrale est $1,0815 \mu$ (largeur à mi-hauteur 8 nm) [SLV86]. Cependant, la raie d'émission la plus intense se trouve à $1,055 \mu$ (on rappelle que le néodyme lase habituellement à $1,063 \mu$ dans les barreaux de YAG). Ce cristal peut être utilisé pour un laser à $1,083 \mu$, à condition toutefois de réaliser une sélection efficace de la fréquence.

• Pompage

Les cristaux de LNA sont pompés par la raie verte à 514 nm (où il existe une bande d'absorption du LNA) d'un laser à argon ionisé (modèle 2030 de Spectra-Physics, de 10 W de puissance nominale). Les cols ("waists") des faisceaux de pompe ont un rayon de 20 à 30 μ au niveau du cristal (rayon du faisceau à $1/e^2$ de l'intensité maximale). Chaque laser est pompé par 3 W environ.

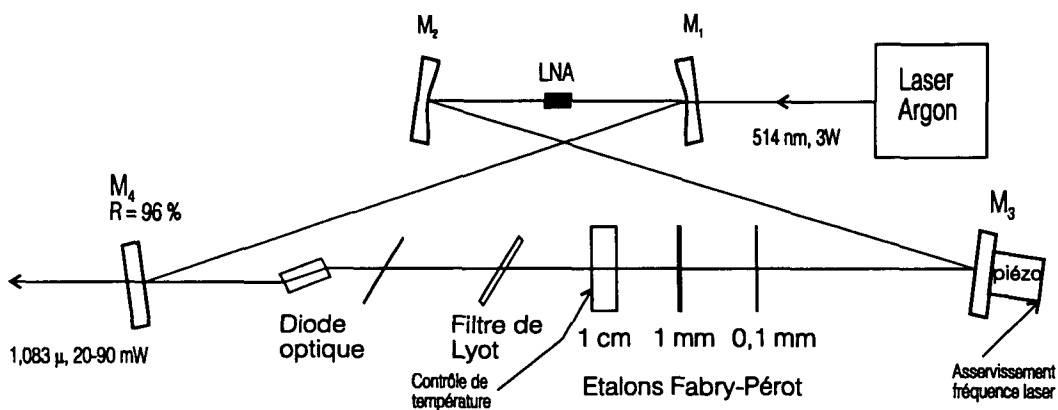


Figure II.4 Schéma des lasers LNA. Le cristal de LNA est placé dans une cavité en anneau. Une diode optique force le laser à fonctionner dans un seul sens. La sélection en fréquence est assurée par un filtre de Lyot et par un ensemble de trois étalons de Fabry-Pérot, dont le plus épais est thermostaté.

• Cavité

La cavité est en anneau, d'une longueur de 1,2 m (intervalle spectral libre 250 MHz). Le coupleur de sortie a une réflectivité de 96 % à $1,08 \mu$. Une diode optique force le laser à fonctionner dans un seul sens. Elle est constituée d'un verre paramagnétique (Hoya FR5) de 10 mm, placée dans un champ de 0,3 T, et d'une lame de quartz compensatrice (pouvoir rotatoire 4°). Ces deux éléments sont utilisés à l'incidence de Brewster.

• Sélection en fréquence

La sélection de la fréquence est assurée d'abord par un filtre de Lyot calculé pour supprimer la raie à $1,05 \mu$ (maximum d'émission du LNA) sans atténuer la raie à $1,08 \mu$ (longueur d'onde recherchée).

Ensuite, nous avons utilisé 3 étalons Fabry-Pérot, constitués de lames de silice non traitées d'épaisseur $0,1 \text{ mm}$, 1 mm et 1 cm (intervalles spectraux libres respectifs : 1500 GHz , 150 GHz , 15 GHz). L'étalon de $0,1 \text{ mm}$ peut à défaut être remplacé par une simple lamelle de microscope, ce qui assure une bonne sélectivité en fréquence mais engendre une baisse de puissance de sortie. L'étalon de 1 cm est thermostaté, ce qui n'est pas nécessaire pour les autres étalons.

Ce système d'étalons s'est révélé plus efficace que le système initial qui comportait une lame de verre de $0,3 \text{ mm}$ (non traitée) et un étalon Fabry-Pérot à air de 3 mm environ (traité, réflectivité 40%), d'épaisseur ajustable par cale piézo-électrique. Avec les nouveaux étalons, le laser est plus facile à régler, $2,5$ fois plus puissant à même puissance de pompage, et plus stable en fréquence (élimination de la mécanique complexe du Fabry-Pérot à air). L'inconvénient de ce système est qu'il ne permet pas de modifier rapidement la fréquence du laser de plusieurs centaines de mégahertz comme le permettait le Fabry-Pérot à air. Cependant, pour nos expériences, nous n'avons pas besoin de ce déplacement rapide.

Enfin, la longueur de la cavité, qui contrôle la fréquence des lasers, est asservie sur la raie d'hélium choisie à l'aide d'une cale piézo-électrique. La référence de fréquence est une cellule d'absorption saturée excitée par radiofréquence à 15 Mhz ($P \approx 0,1 \text{ Torr}$, $L \approx 120 \text{ mm}$). La fréquence du laser est alors modifiable soit par l'application d'un champ magnétique sur la cellule d'absorption saturée (déplacement de la raie de référence par effet Zeeman), soit, comme on le verra, par un ensemble de modulateurs acousto-optiques.

• Caractéristiques obtenues

Ce montage permet d'obtenir 80 mW à $1,083 \mu$ avec 3 W de pompe sur un des lasers LNA, et 20 mW avec 3 W de pompe sur le deuxième laser LNA (l'origine précise de cette différence de puissance entre les deux lasers n'est pas bien identifiée). La largeur de la raie du laser est de l'ordre de 1 MHz , sans soins particuliers (on peut obtenir 130 kHz en optimisant le système [Van89], [VKG91]). Enfin, la stabilité du système [9] est telle que le mode du laser reste d'un jour sur l'autre à moins de 100 MHz de la fréquence désirée, souvent pendant plusieurs semaines sans intervention. Seul l'asservissement de température de l'étalon de 1 cm doit être ajusté chaque jour pour corriger les variations de température ambiante.

[9] Nous avons remarqué un problème lié à la fréquence du laser. A cause d'un décalage non maîtrisé et fluctuant sur le signal d'erreur de l'asservissement des lasers, le désaccord exact des lasers n'est pas connu à mieux que 1 Mhz près. Cependant, ce décalage reste stable à l'échelle de quelques heures. Ainsi, les prises de données s'effectuent avec une fréquence de laser bien définie, mais connue à 1 Mhz près seulement.

2.3 Jet d'hélium métastable : rappels

Le jet cryogénique d'hélium métastable a été décrit en détail par Olivier Emile [Emi93], alors que la version non-cryogénique avait auparavant été développée par Robin Kaiser [Kai90]. Nous ne faisons ici que résumer les références [Kai90] et [Emi93], en insistant sur les paramètres importants pour les expériences qui vont suivre.

2.3.1 Dispositif

L'ensemble du dispositif est représenté sur la figure II.5.

L'hélium est introduit dans un tube à la pression P_{jet} ($P_{\text{jet}} \leq 1$ bar), refroidi à l'hélium liquide et asservi à la température T_{jet} ($T_{\text{jet}} = 5 - 20$ K). Le refroidissement à l'hélium liquide a pour but d'augmenter le flux d'atomes lents que nous pourrions ensuite ralentir (cf. § I.3.2.2), *i.e.* à moins de 400 m.s^{-1} . Rappelons que la vitesse quadratique moyenne, à 300 K et à une dimension, est de 800 m.s^{-1} pour l'hélium pour une distribution de Maxwell-Boltzman et de 1800 m.s^{-1} pour un jet supersonique [Kai90], ce qui montre bien l'intérêt du refroidissement du jet.

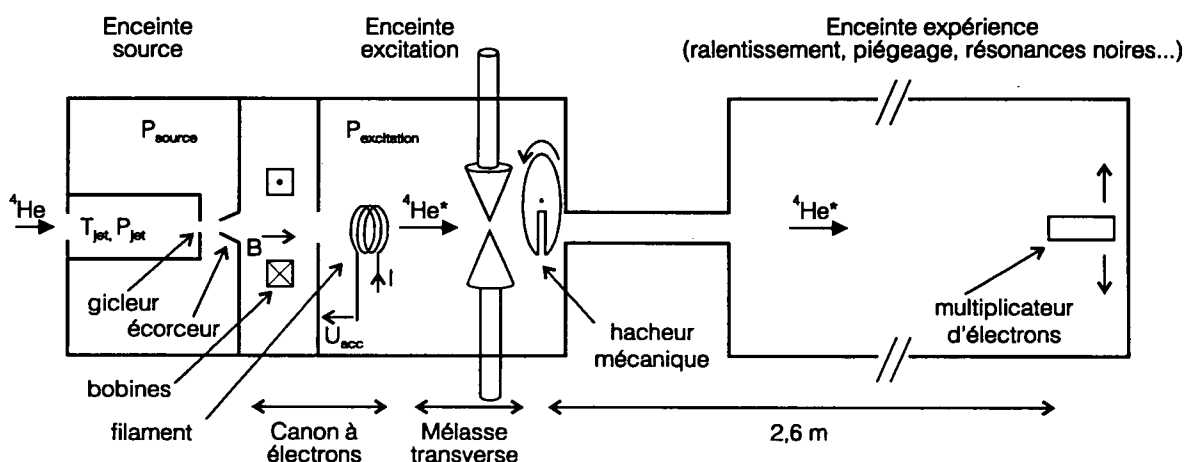


Figure II.5 Jet atomique d'hélium métastable. Les atomes d'hélium dans l'état fondamental sortent par un gicleur de 25μ d'un tube refroidi à l'hélium liquide. Puis ils subissent un bombardement électronique qui transfère une partie des atomes dans un état métastable He^* . Le jet est ensuite refroidi transversalement à deux dimensions par une mélasse optique (§ 3.2.1). Un hacheur mécanique permet d'effectuer des mesures de temps de vol. Enfin, les atomes du jet sont détectés par un multiplicateur d'électrons placé dans l'enceinte d'expériences.

Les atomes s'échappent de cette enceinte vers l'enceinte "source" par un gicleur de diamètre 25μ ($P_{\text{source}} \approx 2 - 6 \times 10^{-4}$ hPa). L'enceinte source est pompée par une pompe à diffusion Alcatel 6250, de débit 3500 l.s^{-1} à 10^{-3} hPa.

[Emi93] O. Emile, *Manipulation d'hélium métastable par laser : effet Sisyphé magnétique*, Thèse de l'Université Paris VI (1993).

[Kai90] R. Kaiser, *Manipulation par laser d'hélium métastable : effet Hanle mécanique, refroidissement sous le recul d'un photon*, Thèse de l'Université Paris VI (1990).

Les atomes passent alors à travers un écorceur de diamètre 600μ ("skimmer") et pénètrent dans l'enceinte d'"excitation", ($P_{\text{excitation}} \approx 10^{-7} - 10^{-6}$ hPa). L'enceinte d'excitation est pompée par une pompe à diffusion Alcatel Crystal 162, de débit 650 l.s^{-1} à 10^{-3} hPa, à laquelle est ajouté un piège à azote liquide.

Dans cette enceinte, on excite vers les niveaux métastables une faible fraction des atomes d'hélium, initialement dans l'état fondamental, par bombardement électronique dans un canon à électrons. Les électrons sont émis par une cathode formée de 3 spires ($\varnothing 3 \text{ mm}$) de filament de tungstène ($\varnothing 0,3 \text{ mm}$) et chauffée par un courant ($I_{\text{fil}} = 8 - 9 \text{ A}$). Ces électrons sont ensuite accélérés par une tension U_{acc} ($U_{\text{acc}} = 30 - 280 \text{ V}$), puis soumis à un champ magnétique B qui les fait spiraler, afin d'augmenter la probabilité de collision avec les atomes du jet ($B = 0,1 - 0,2 \text{ T}$).

Après avoir été refroidi transversalement par une "mélasse optique" à deux dimensions (cf. § I.3.2.1), le jet pénètre dans l'enceinte d'expérience ($P_{\text{exp}} \approx 2 \times 10^{-8} - 2 \times 10^{-7}$ hPa; même dispositif de pompage que l'enceinte excitation).

2.3.2 Détection du jet

Les métastables du jet sont détectés par un multiplicateur d'électrons à 16 dynodes en cuivre-beryllium (modèle XP1600 de RTC). Les atomes d'hélium métastable peuvent arracher un électron primaire de la première dynode (surface $0,5 \times 1 \text{ cm}^2$), puisque l'énergie interne d'un métastable (19,8 eV pour l'état 2^3S_1) est largement supérieure au travail d'extraction W_s d'un électron hors d'un métal ($W_s \approx 2 - 4 \text{ eV}$). Par multiplication (10^7 environ), on obtient une impulsion macroscopique. On détecte ainsi les métastables un par un avec un bon rendement quantique [10]. Moyenné dans le temps, le signal du multiplicateur fournit le flux du jet.

Pour obtenir en plus la distribution en vitesse sur l'axe du jet, nous réalisons un temps de vol. Pour cela, nous hachons mécaniquement le jet à l'aide d'un disque percé d'une fente de quelques millimètres et en rotation à 60 Hz. La durée d'ouverture est de $560 \mu\text{s}$ environ. Connaissant la distance d entre le disque et le multiplicateur d'électrons, on déduit la vitesse atomique v du temps de vol t ($v = d / t$ puisque les atomes sont en vol libre).

La figure II.6 montre un tel temps de vol. Comme on le voit, le jet de métastables n'est pas monocinétique dans nos conditions de travail, alors que le jet dans l'état fondamental est supersonique, donc monocinétique. On reconnaît à $t = 0$, un créneau dont la largeur est la durée d'ouverture de la fente. Ce créneau correspond aux photons UV émis lors des collisions $e^- - \text{He}$ ou aux éventuels atomes neutres rapides (temps de

[10] Pour une surface de Cu-Be propre, le rendement ρ entre le nombre d'électrons primaires éjectés et le nombre de métastables incidents serait de l'ordre de 0,6. Voir [DRS75] : F.B. Dunning, R.D. Rundel, and R.F. Stebbings, *Determination of Secondary Electron Ejection Coefficients for Rare Gas Metastable Atoms*, Rev. Sci. Instrum. **46**, p. 697-701 (1975).

vol quasi-nul). Les pics suivants correspondent à des triplets métastables [11]. Ces différents pics s'interprètent bien grâce aux différents types de collisions ($e^- + \text{He}$ ou $\text{He}^* + \text{He}$) qui sont autant de processus différents d'excitation de l'hélium et à la cinétique de ces collisions (voir [Kai90] et [Emi93]).

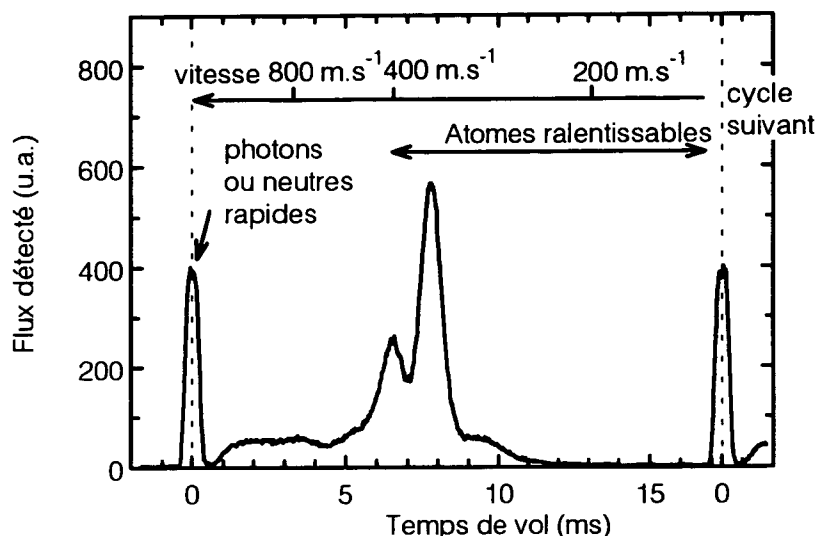


Figure II.6 Temps de vol du jet d'hélium métastable. Le premier pic correspond aux photons UV ou aux neutres rapides (temps de propagation inférieur à 0,5 ms). Sa durée est celle de l'ouverture du hacheur mécanique. Les pics suivants correspondent à des triplets métastables 2^3S_1 , chaque pic étant associé à un processus d'excitation du niveau métastable. Nous pouvons ralentir les atomes de vitesse longitudinale inférieure à 400 m.s^{-1} . Cette figure correspond à un jet refroidi cryogéniquement à $T_{\text{jet}} = 15 \text{ K}$, mais non refroidi transversalement par une mélasse optique (cf § I.3.2.1).

2.3.3 Caractéristiques du jet

Les paramètres du jet sont optimisés empiriquement chaque jour, sauf l'intensité dans le filament qui est maintenue suffisamment basse pour prolonger la durée de vie du filament. Le tableau II.2 donne les caractéristiques du jet dans deux situations typiques.

Dans la première colonne, on trouve les conditions ($T_{\text{jet}} = 19 \text{ K}$) rencontrées pendant plusieurs années pour les expériences de ralentissement, de piégeage et de mise au point des résonances noires.

La deuxième colonne correspond aux conditions utilisées seulement au cours des expériences finales de résonances noires proprement dites. Ce régime, beaucoup plus froid ($T_{\text{jet}} = 6 \text{ K}$), est plus stable en température (l'asservissement en température est en fait en butée à la température minimale) et moins délicat à optimiser.

[11] Nous nous sommes assurés que la proportion de singulets 2^1S_0 dans le jet est négligeable. Pour cela, nous avons utilisé la pression de radiation d'un laser à résonance sur $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_2$ pour défléchir les triplets. Le flux d'atomes non défléchis est alors négligeable, ce qui indique que le jet est composé essentiellement de triplets.

	Expériences préparatoires (20/05/93)	Expériences finales (25/09/93)
$P_{\text{jet}}, T_{\text{jet}}$	< 1 bar, 19 K	< 1 bar, 6 K
P_{source}	5×10^{-4} hPa	2×10^{-4} hPa
$P_{\text{excitation}}$	$< 10^{-7}$ hPa	10^{-6} hPa
$P_{\text{expérience}}$	6×10^{-8} hPa	9×10^{-8} hPa
I_{filament}	9,1 A	8,6 A
U_{acc}	264 V	36 V
B_{bob}	0,22 T	0,10 T
Flux d'hélium métastable détecté à $v < 400 \text{ m.s}^{-1}$ sans mélasse transverse	$4 \times 10^6 \text{ atomes.s}^{-1}$	$5 \times 10^5 \text{ atomes.s}^{-1}$
Flux d'hélium métastable détecté à $v < 400 \text{ m.s}^{-1}$ avec mélasse transverse	$6 \times 10^6 \text{ atomes.s}^{-1}$	$6 \times 10^6 \text{ atomes.s}^{-1}$

Tableau II.2 Caractéristiques du jet d'hélium dans deux situations typiques.

L'intensité du jet (avant dernière ligne du tableau) est *a priori* beaucoup plus faible à 6 K qu'à 19 K. Cependant, nous verrons que nous avons mis en place un refroidissement transverse du jet (§ I.3.2.1) qui accroît l'intensité du jet. Avec ce refroidissement transverse (dernière ligne du tableau), les deux régimes (6 K et 19 K) donnent une intensité approximativement équivalente pour le jet.

Le flux de triplets métastables détectés à moins de 400 m.s^{-1} sur la première dynode du multiplicateur d'électrons est de 4×10^5 à 4×10^6 atomes par seconde. Cela correspond à un flux de 7×10^{10} à $7 \times 10^{11} \text{ at.sr}^{-1}.\text{s}^{-1}$ (surface de détection $\approx 0,5 \text{ cm}^2$, distance source-détecteur $\approx 2,9 \text{ m}$). Cette intensité est faible pour l'expérience prévue, et *a priori* insuffisante pour remplir de manière appréciable un piège magnéto-optique. Nous verrons au paragraphe II.3.2 comment nous avons surmonté cette difficulté.

3 Réalisation d'un piège magnéto-optique d'atomes d'hélium métastable

3.1 Introduction

Nous décrivons dans ce paragraphe la réalisation du piège magnéto-optique d'hélium qui sera ensuite utilisé comme source compacte d'atomes froids pour le refroidissement par résonances noires.

Deux techniques principales existent pour remplir des pièges magnéto-optiques. La plus simple consiste à capturer les atomes les plus lents de la distribution de Maxwell-Boltzmann d'une vapeur à basse pression (pièges en cellule)

[MSR90], [Gri92]. Le dispositif est alors très simple puisque les mêmes faisceaux assurent à la fois la capture des atomes de la vapeur et leur piégeage. Malheureusement, le maintien d'hélium métastable dans une cellule exige la présence d'une décharge qui n'est pas compatible avec les basses pressions nécessaires pour limiter les collisions.

La deuxième technique, que nous avons choisie, consiste à partir d'un jet atomique [RPC87], que l'on doit tout d'abord ralentir. On piège ensuite les atomes ralentis. Cette technique est plus complexe que le piégeage en cellule puisqu'elle nécessite un jet atomique et une étape de ralentissement. Mais, plus flexible, elle est applicable à l'hélium métastable.

Dans notre cas, l'intensité du jet étant faible, il a fallu rajouter une étape supplémentaire pour améliorer le remplissage : nous avons diminué la divergence du jet à l'aide d'une mélasse optique transverse à deux dimensions.

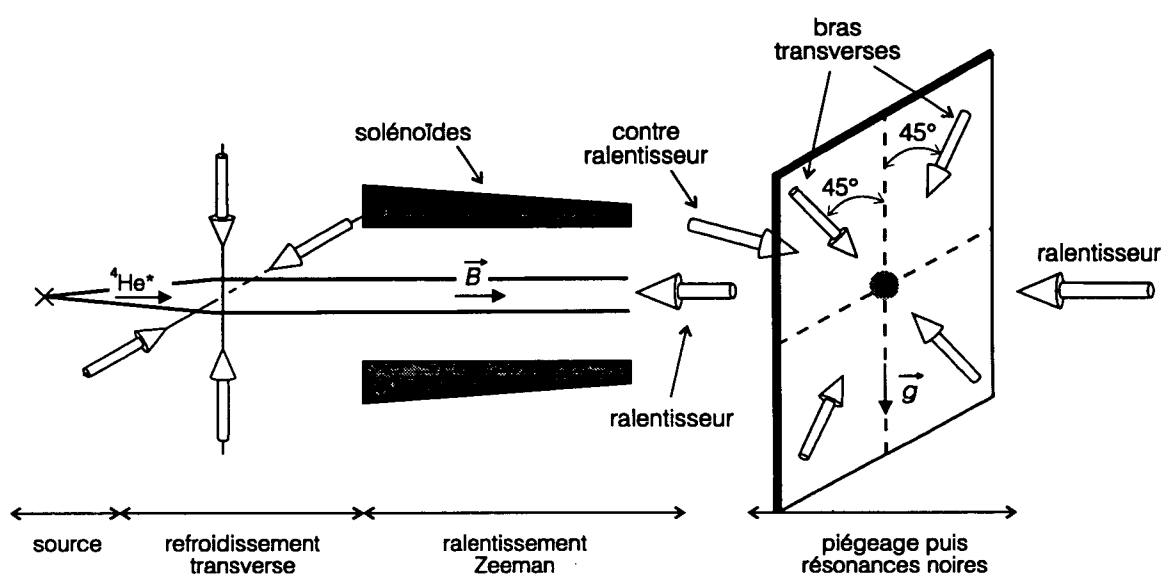


Figure II.7 *Vue d'ensemble du dispositif de piégeage.* Le jet d'hélium métastable est d'abord refroidi transversalement par une mélasse optique à deux dimensions. Les atomes sont ensuite ralentis sur une longueur de 70 cm par un faisceau laser contrepropagant, dans un champ magnétique inhomogène (ralentissement Zeeman). Puis, les atomes sont piégés par 6 faisceaux lasers au centre d'un champ magnétique quadrupolaire (bobines non représentées). Le faisceau laser de ralentissement constitue un des faisceaux de piégeage. Le faisceau "contre-ralentisseur" constitue le deuxième faisceau de piégeage. Pour des raisons d'encombrement, il fait un angle de 3° avec l'axe du jet. Enfin, les 4 "bras transverses" du piège sont dans un plan perpendiculaire au jet atomique. Ces faisceaux font un angle de 45° par rapport à la verticale.

- [MSR90] C. Monroe, W. Swann, H. Robinson, and C. Wieman, *Very Cold Trapped Atoms in a Vapor Cell*, Phys. Rev. Lett. **65**, p. 1571-1574 (1990).
- [Gri92] D. Grison, *Atomes piégés et refroidis par laser à quelques microkelvins : un piège magnéto-optique dans une cellule de césium et quelques applications*, Thèse de l'Université Paris VI (1992).
- [RPC87] E.L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, and D.E. Pritchard, *Trapping of Neutral Sodium Atoms with Radiation Pressure*, Phys. Rev. Lett. **59**, p. 2631-2634 (1987).

Finalement, pour piéger les atomes d'hélium métastable, trois phases différentes de manipulation par laser sont nécessaires :

- refroidissement transverse du jet atomique dans une mélasse optique à deux dimensions ;
- ralentissement (longitudinal) du jet atomique ;
- piégeage proprement dit.

La figure II.7 donne une vue d'ensemble du dispositif de piégeage.

Le paragraphe II.3.2 décrit les deux phases de manipulation du jet atomique : refroidissement transverse (§ II.3.2.1), et ralentissement par un laser se propageant en sens inverse (§ II.3.2.2). Cette deuxième phase utilise la technique du "ralentissement Zeeman" : l'effet Doppler dû au ralentissement des atomes est compensé par l'effet Zeeman variable dans l'espace provoqué par un champ magnétique inhomogène.

Le paragraphe II.3.3 décrit le piégeage des atomes ralentis dans un piège magnéto-optique. L'ensemble de notre dispositif ("ralentissement Zeeman" suivi d'un piège magnéto-optique) est semblable à celui d'une expérience récemment réalisée sur le néon métastable [SST89]. Mais, alors que le principe (§ II.3.3.2) et la réalisation (§ II.3.3.3) du piège sont maintenant classiques, les systèmes de détection mis en oeuvre (§ II.3.3.4) et les caractéristiques observées (§ II.3.3.5) sont moins standard, à cause des particularités de l'hélium métastable.

Enfin, nous faisons le bilan (§ II.3.4) des propriétés du piège en tant que source d'atomes froids pour l'expérience de résonances noires.

Pour ne pas alourdir l'exposé, ce paragraphe présente les principes utilisés et, pour les résultats obtenus, il s'en tient à la phénoménologie.

Remarque :

Les résultats principaux ont été publiés dans [WAB91] et dans [BEC92]. Le ralentissement et le piégeage de l'hélium ont été également réalisés par une équipe japonaise [MoK91], [KuM92].

-
- [SST89] F. Shimizu, K. Shimizu, and H. Takuma, *Laser cooling and trapping of Ne metastable atoms*, Phys. Rev. A **39**, p. 2758-2760 (1989).
- [WAB91] C.I. Westbrook, A. Aspect, F. Bardou, C. Cohen-Tannoudji, J.-M. Courty, O. Emile, C. Gerz, and I. Silvera, *Magneto-optical trap for metastable helium*, Tenth International Conference on Laser Spectroscopy, Font-Romeu 17-21 juin 1991 (M. Ducloy, E. Giacobino and G. Camy eds, World Scientific) p. 48-49 (1992).
- [BEC92] F. Bardou, O. Emile, J.-M. Courty, C.I. Westbrook, and A. Aspect, *Magneto-Optical Trapping of Metastable Helium : Collisions in the Presence of Resonant Light*, Europhys. Lett. **20**, p. 681-686 (1992).
- [MoK91] N. Morita and M. Kumakura, *Laser Cooling of a Helium Atomic Beam*, Jap. J. of Appl. Phys. **30**, p. L1678-L1681 (1991).
- [KuM92] M. Kumakura and N. Morita, *Visible Observation of Metastable Helium Atoms Confined in an Infrared / Visible Double Resonance trap*, Jpn. J. Appl. Phys. **31**, p. L276-L279 (1993).

3.2 Alimentation du piège magnéto-optique : jet collimaté et ralenti par laser

3.2.1 Refroidissement transverse du jet atomique par une mélasse optique à 2 dimensions.

3.2.1.1 Problème à résoudre et dispositif

Nous voulons réaliser un piège d'atomes d'hélium métastables utilisable comme source d'atomes pré-refroidis. La réalisation de cette source comporte de nombreuses étapes (excitation des métastables, ralentissement, piégeage). A chaque étape, le nombre d'atomes disponibles est susceptible de diminuer.

Ainsi, l'excitation du niveau métastable n'a qu'un rendement de l'ordre de 10^{-6} . Ensuite, le jet de métastables a une divergence naturelle. Cette divergence est telle que la majorité des atomes ralentis sortiraient du faisceau de ralentissement ou, une fois ralentis, ne seraient pas dans le volume de capture du piège. Enfin, parmi les atomes piégés, seulement quelques pourcents atteindront le détecteur après l'expérience de résonances noires.

L'ensemble représente des pertes considérables, et de fait, les premiers pièges que nous avons réalisés ne comportaient que quelques milliers d'atomes. Le faible nombre d'atomes pose des problèmes de détection qui n'apparaissent pas à ce niveau dans les expériences habituelles de refroidissement laser. En effet, les pièges à atomes alcalins, alimentés par des jets plus intenses par 5 à 6 ordres de grandeur, contiennent de 100 à 10^4 fois plus d'atomes (voir par exemple [RPC87], [GKC92]).

Nous avons donc cherché à augmenter autant que possible le nombre d'atomes piégés. On pourrait *a priori* optimiser de nombreux facteurs : flux initial d'atomes dans l'état fondamental, efficacité de l'excitation des métastables, divergence naturelle du jet, divergence due au ralentissement, efficacité de la capture du piège. Des expériences réalisées précédemment dans le groupe de l'ENS [AVK90] avaient montré la possibilité de réduire la divergence naturelle du jet à l'aide d'un refroidissement laser des vitesses transverses : nous avons donc choisi cette voie.

Le principe de la mélasse transverse est indiqué sur la figure II.8. Le jet possède une divergence naturelle due à la dispersion des vitesses transverses. Cette divergence est telle que la majorité des atomes sortiraient du faisceau laser au cours du ralentissement, ou, une fois ralentis, seraient à l'extérieur du volume de capture du piège.

[RPC87] E.L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, and D.E. Pritchard, *Trapping of Neutral Sodium Atoms with Radiation Pressure*, Phys. Rev. Lett. **59**, p. 2631-2634 (1987).

[GKC92] K.E. Gibble, S. Kasapi, and S. Chu, *Improved magneto-optic trapping in a vapor cell*, Opt. Lett. **17**, p. 526-528 (1992).

[AVK90] A. Aspect, N. Vansteenkiste, R. Kaiser, H. Haberland, and M. Karrais, *Preparation of a pure intense beam of metastable helium by laser cooling*, Chem. Phys. **145**, p. 307-315 (1990).

Pour réduire la divergence du jet, nous réduisons la dispersion des vitesses transverses [12] en appliquant une mélasse optique à deux dimensions. On effectue ainsi un refroidissement laser transverse du jet atomique, ce qui augmente la brillance du jet, c'est-à-dire le nombre d'atomes par seconde et par stéradian dans l'axe du jet.

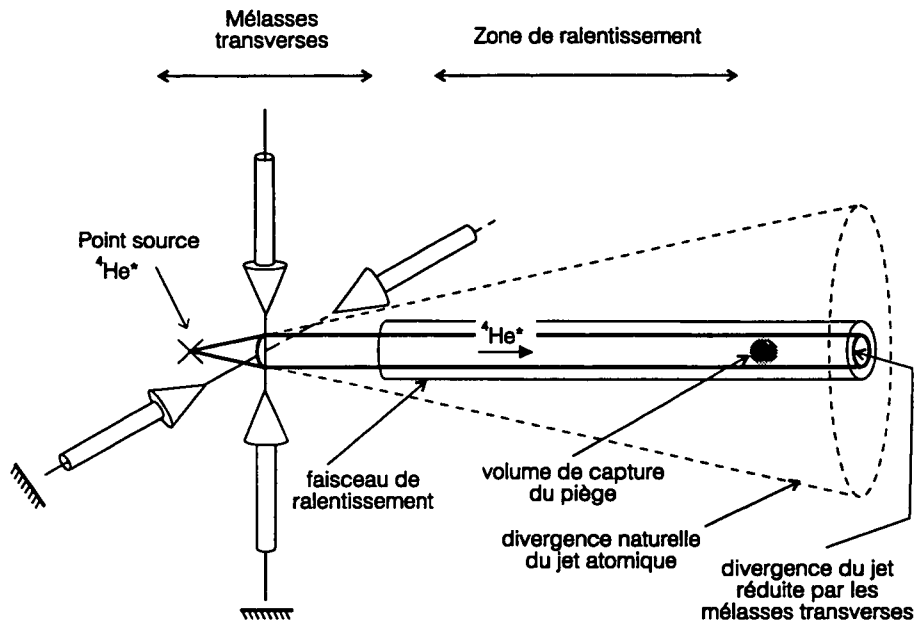


Figure II.8 Principe de la mélasse transverse. La divergence naturelle du jet atomique d'hélium métastable est telle que la majorité des atomes sortiraient du faisceau de ralentissement ou, qu'une fois ralentis, ils ne seraient pas dans le volume de capture du piège. La mélasse optique à deux dimensions refroidit transversalement le jet et réduit ainsi sa divergence. Le nombre d'atomes ralentis est ainsi augmenté. Nous verrons (§ II.3.2.2) que le ralentissement provoque une divergence supplémentaire du jet. *Le dessin n'est pas à l'échelle et les angles sont très exagérés.*

Cette mélasse optique (cf. introduction générale) est réalisée à deux dimensions par deux faisceaux lasers, mutuellement orthogonaux, dans le plan perpendiculaire au jet atomique. Chaque faisceau est rétro-réfléchi sur un miroir pour obtenir sur chaque dimension une situation de mélasse.

Les deux faisceaux lasers de mélasse transverse sont asservis sur la fréquence de la transition $2^3S_1 - 2^3P_2$. Le diamètre des faisceaux est de 10 mm environ, ce qui donne un temps d'interaction $\theta_{\text{mél}} \approx 25 \mu\text{s}$ pour des atomes à $400 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Chaque faisceau a une

[12] Ce montage ne fait que réduire la divergence du jet atomique (compression de la distribution en vitesse transverse), sans le focaliser (compression de la distribution en position transverse). Cela peut aussi se faire. Voir l'"entonnoir à atomes" de [RWM90]: E. Riis, D.S. Weiss, K.A. Moler, and S. Chu, *Atom Funnel for the Production of a Slow, High-Density Atomic Beam*, Phys. Rev. Lett. **64**, p. 1658-1661 (1990) et [NWE90]: J. Nellessen, J. Werner, and W. Ertmer, *Magneto-optical compression of a monoenergetic sodium atomic beam*, Opt. Comm. **78**, p 300-308 (1990). Mais dans notre cas, le diamètre du jet *avant* ralentissement, de l'ordre du millimètre, n'est pas un problème.

intensité de 10 mW.cm^{-2} ($I = 70 I_{\text{sat}}$ [13], soit $\Omega_1 \approx 7 \Gamma$) et un désaccord $\delta = \omega_L - \omega_0 \approx -3\Gamma$ environ.

Il est nécessaire de protéger des champs magnétiques parasites la zone d'interaction atomes-lasers. En effet, la zone de mélasse se trouve à 10 cm du solénoïde associé au canon à électrons, à un endroit où le champ magnétique est initialement de 6 G environ. Ce champ lève la dégénérescence entre les sous-niveaux Zeeman de la transition. Nous pensons que ceci provoque un pompage optique dans des sous-niveaux hors de résonance avec le laser, puisque nous constatons que ce champ parasite nuit au refroidissement. La zone d'interaction est donc blindée par un petit tube en mumétal qui limite le champ parasite à 1 G environ.

Une première estimation de l'effet de la mélasse transverse est donnée par le flux de métastables détecté sur l'axe du jet par le multiplicateur d'électrons déjà décrit (§ II.2.3.2). Nous observons que la mélasse apporte un gain sur l'intensité détectée d'un facteur 1,3 à 12, qui dépend de la température T_{jet} . En effet, nous verrons au paragraphe II.3.2.1.3 que l'effet de la mélasse est plus fort sur les atomes de la vitesse longitudinale faible.

Ce gain est maximal à haute intensité laser ($I \approx 70 I_{\text{sat}}$), avec un désaccord δ de $-\Gamma$ à -3Γ . Si on accroît encore l'intensité, le gain apporté par la mélasse sature, alors qu'il diminue à plus faible intensité. La polarisation des lasers est quelconque (avec des faisceaux polarisés linéairement ou circulairement, aucune amélioration notable n'a été obtenue, ce qui n'est guère étonnant, car le champ magnétique n'est pas homogène).

3.2.1.2 Profil transverse. Comparaison à un modèle simple

Pour analyser plus quantitativement l'effet de la mélasse, on effectue un profil transverse du jet atomique en présence de la mélasse (figure II.9) [14]. Ce profil est obtenu en déplaçant sur un axe horizontal le multiplicateur d'électrons (largeur de la fente d'entrée : 5 mm).

La mi-largeur à $1/\sqrt{e}$ du profil est de 6,5 mm (une déconvolution indique que la contribution de la largeur de la fente d'entrée est inférieure à 0,5 mm). Comme le détecteur se trouve à 2,6 m de la zone de mélasse, la divergence du jet est de $2,5 \times 10^{-3}$ mrad. Enfin, les vitesses longitudinales étant de 400 m.s^{-1} environ dans le jet utilisé pour réaliser ce profil, la mi-largeur à $1/\sqrt{e}$ de la distribution en vitesse transverse (à 1D) est $\delta v_{\perp} \approx 1,0 \text{ m.s}^{-1}$.

On peut comparer ce résultat avec une estimation théorique simple fondée sur un atome à deux niveaux et une addition indépendante des pressions de radiation de chaque

[13] La notation I_{sat} désigne l'"intensité de saturation". Cette intensité I_{sat} correspond à une pulsation de Rabi Ω_1 telle que le paramètre de saturation à résonance $s_0 = 2\Omega_1^2 / \Gamma^2$ vaille 1. Le paramètre de saturation s vaut I / I_{sat} . Pour He^* ($2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_{0,1,2}$), on a $I_{\text{sat}} = 0,16 \text{ mW/cm}^2$, avec la convention prise sur les pulsations de Rabi (cf. § I.2.1.3).

[14] En l'absence de mélasse, le profil est plus large. Cependant, sa largeur, limitée alors par des diaphragmes n'est pas vraiment significative de la distribution transverse du jet. Aussi n'en parlerons nous pas.

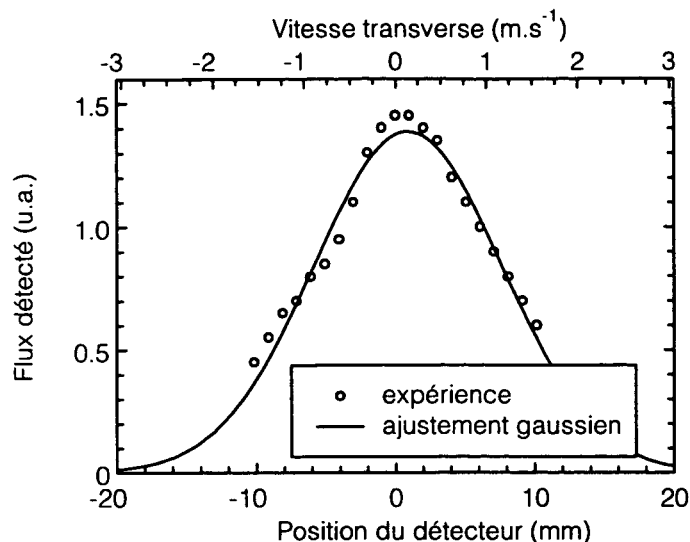


Figure II.9 Profil spatial du jet en présence de mélasse transverse. L'ajustement gaussien donne une demi-largeur à $1/e^{1/2}$ de 6,5 mm, qui correspond à une vitesse transverse de 1,0 m.s⁻¹. Le profil est mesuré en déplaçant transversalement le multiplicateur d'électrons. La fente d'entrée, de demi-largeur totale 2,5 mm, apporte une contribution inférieure à 0,5 mm, et donc négligeable, à la largeur mesurée. Le jet correspondant à ce profil a des vitesses longitudinales de l'ordre de 400 m.s⁻¹.

faisceau (modèle Doppler habituel). Nous nous référons au traitement de [LPR89], qui a l'avantage de prendre en compte les effets de saturation d'une intensité forte ($I > I_{\text{sat}}$) et les effets multidimensionnels, de manière certes non rigoureuse, mais simple.

Dans le modèle de [LPR89], la vitesse quadratique moyenne théorique δv_{th} à 1D est donnée par :

$$\delta v_{\text{th}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar \Gamma}{M}} \sqrt{\frac{1 + 2NI/I_{\text{sat}} + (2\delta/\Gamma)^2}{2|\delta|/\Gamma}} \quad (\text{II.3})$$

où N est le nombre de dimensions refroidies ($N=2$ en l'occurrence). Pour le désaccord expérimental $\delta = -\Gamma$, nous obtenons $\delta v_{\text{th}} \approx 2,4 \text{ m.s}^{-1}$ (pour $\delta = -3\Gamma$, on a $\delta v_{\text{th}} \approx 1,4 \text{ m.s}^{-1}$). Expérimentalement, nous avons $\delta v_{\perp} \approx 1,0 \text{ m.s}^{-1}$.

Le temps τ_f d'amortissement des vitesses par friction est, d'après [LPR89],

$$\tau_f = \frac{\tau_R}{8 I/I_{\text{sat}}} \frac{(1 + 2NI/I_{\text{sat}} + (2\delta/\Gamma)^2)^2}{2|\delta|/\Gamma} \quad (\text{II.4})$$

où τ_R est le "temps de recul" défini par $\hbar \tau_R = E_R$. On déduit $\tau_f = 140 \mu\text{s}$ à $\delta = -\Gamma$ et $\tau_f = 110 \mu\text{s}$ à $\delta = -3\Gamma$. Or, le temps d'interaction pour les atomes à 400 m.s⁻¹ est $\theta_{\text{mél}} = 25 \mu\text{s}$.

Nous n'attendons pas du modèle Doppler de [LPR89] mieux qu'une estimation d'ordre de grandeur. Mais notons que l'effet obtenu expérimentalement est meilleur que celui prédit par le modèle. D'une part, la distribution observée est plus étroite que celle calculée. Mais surtout, le temps τ_f d'amortissement des vitesses prédit par le modèle Doppler est supérieur d'un facteur 5 environ au temps d'interaction expérimental. Il existe donc un mécanisme de refroidissement plus efficace que le simple refroidissement Doppler. Il est probable que d'autres mécanismes de refroidissement non pris en compte par les équations (II.3) et (II.4) contribuent au refroidissement et

[LPR89] P.D. Lett, W.D. Phillips, S.C. Rolston, C.E. Tanner, R.N. Watts, and C.I. Westbrook, *Optical molasses*, J. Opt. Soc. Am. B 6, p. 2084-2107 (1989).

réduisent τ_f . En particulier, le refroidissement par gradient de polarisation [DaC89], éventuellement assisté par champ magnétique [SSV90], [EKG93], [Emi93], peut jouer un rôle.

Pour connaître mieux la dynamique de la mélasse transverse, il faudrait mesurer τ_f , ce que nous n'avons pas fait rigoureusement. Cependant, l'analyse de l'effet de la mélasse sur la distribution des temps de vol des atomes fournit des informations intéressantes à ce sujet.

3.2.1.3 Effet de la mélasse transverse sur la distribution des temps de vol

La figure II.10 permet de dégager qualitativement l'effet de la mélasse sur la distribution des temps de vol (mesurés par le dispositif décrit au § II.2.3.2).

La figure II.10.a montre un jet à $T_{\text{jet}} = 19$ K. L'effet de la mélasse sur l'ensemble de la distribution ne représente qu'un gain de 30 %. On note cependant que l'effet de la mélasse est beaucoup plus spectaculaire sur les atomes les plus lents. Il est donc intéressant d'étudier un jet globalement plus lent comme sur la figure II.10.b.

La figure II.10.b montre un jet à $T_{\text{jet}} = 6$ K, dont la distribution en vitesse correspond donc à des vitesses globalement plus petites. Le gain en intensité sur l'ensemble du temps de vol est alors d'un facteur 12, ce qui confirme ce que nous avons noté sur la figure précédente : l'accroissement d'intensité du jet grâce aux mélasses est plus important pour les atomes les plus lents. De manière plus détaillée, pour le jet à 6 K, le gain est d'un facteur 2 à 1200 m.s^{-1} , d'un facteur 10 à 400 m.s^{-1} et d'un facteur 30 à 250 m.s^{-1} .

On peut comprendre aisément pourquoi la mélasse transverse est plus efficace pour les atomes les plus lents : les atomes lents bénéficient d'un temps d'interaction plus long ce qui permet un amortissement plus efficace de leurs vitesses transverses.

Nous avons fait une analyse détaillée (non présentée ici) de l'effet de la mélasse sur la distribution des temps de vol. Elle exploite le fait que le temps de vol mesuré est proportionnel au temps d'interaction des atomes avec les lasers de mélasse. En outre, l'effet de la mélasse, *i.e.* le rapport de l'intensité du jet avec et sans mélasse, pour une classe de vitesses donnée, est relié à la largeur de la distribution en vitesse transverse obtenue après interaction avec la mélasse. Finalement, après quelques hypothèses simplificatrices, nous montrons que nous pouvons extraire de la distribution des temps de vol la distribution en vitesses transverses en fonction du temps d'interaction.

-
- [DaC89] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models*, J. Opt. Soc. Am. B 6, p. 2023-2045 (1989).
- [SSV90] B. Sheehy, S.Q. Shang, P. van der Straten, S. Hatamian, and H. Metcalf, *Magnetic-Field-Induced Laser Cooling below the Doppler Limit*, Phys. Rev. Lett. 64, p. 858-861 (1990).
- [EKG93] O. Emile, R. Kaiser, C. Gerz, H. Wallis, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Magnetically assisted Sisyphus effect*, J. Phys. II France 3, p. 1709-1733 (1993).
- [Emi93] O. Emile, *Manipulation d'hélium métastable par laser : effet Sisyphus magnétique*, Thèse de l'Université Paris VI (1993).

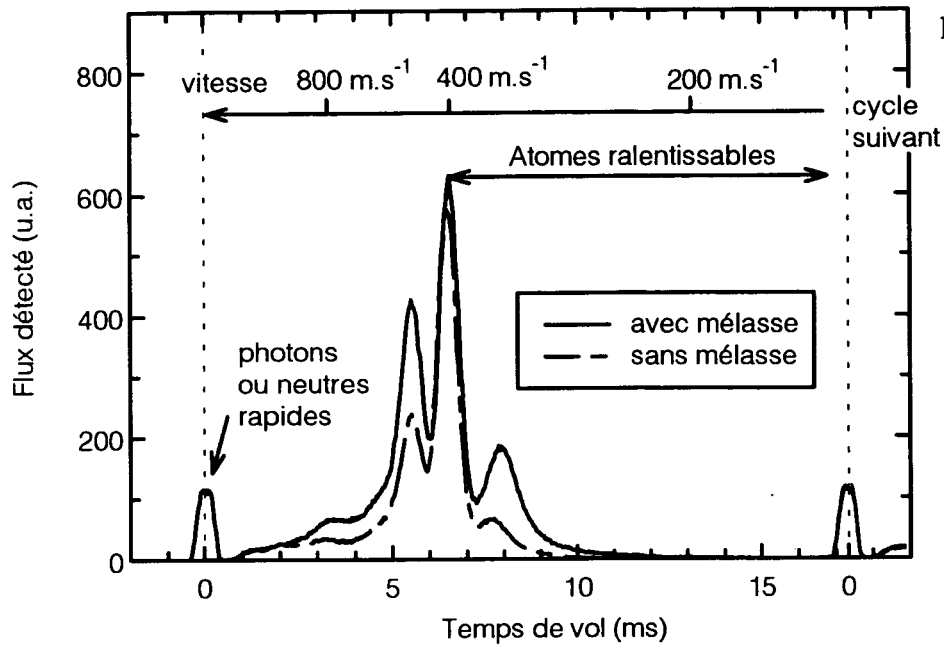


Figure II.10.a

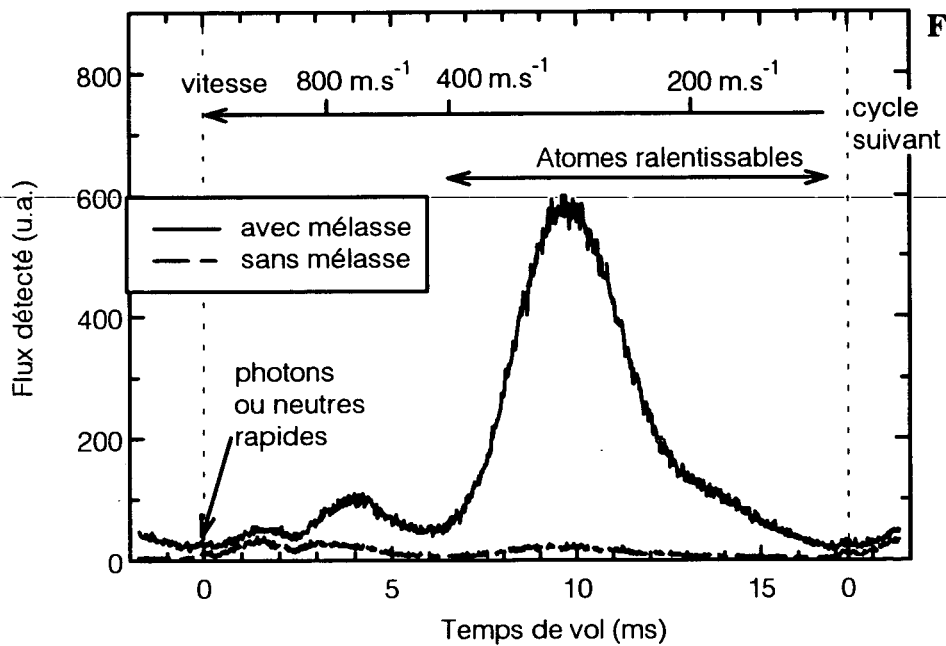


Figure II. 10.b

Figure II.10 Influence de la mélasse transverse sur le temps de vol. Le gain apporté par la mélasse sur l'intensité du jet est d'autant plus important que les atomes sont plus lents.

(a) Jet à $T_{\text{jet}} = 20 \text{ K}$. La mélasse apporte un gain de 30 % sur l'ensemble de la distribution en vitesse. (b) Jet à $T_{\text{jet}} = 6 \text{ K}$. Le gain est d'un facteur 12 sur l'ensemble de la distribution en vitesse. Il est d'un facteur 2 à 1200 m.s^{-1} , 10 à 400 m.s^{-1} , et 30 à 250 m.s^{-1} . Notons dans ce cas que la majorité des atomes peuvent être ralentis.

Cette analyse révèle les faits suivants :

- Les atomes ont initialement une vitesse transverse caractéristique importante ($\delta v_i \geq 5 \text{ m.s}^{-1}$), hors du domaine où la force de pression de radiation est linéaire en vitesse ($F = -Mv / \tau_f$). Il faut environ $10 \mu\text{s}$ à la mélasse pour amener les atomes de δv_i au domaine de linéarité en vitesse.

- Lorsque les atomes ont leur vitesse dans le domaine de linéarité en vitesse de la pression de radiation, on peut définir une constante de friction de τ_f . Le temps de friction τ_f est de l'ordre de 5 à $15 \mu\text{s}$ selon les paramètres des faisceaux lasers (désaccord, intensité).

Ainsi, τ_f est beaucoup plus petit que ne le prédit le modèle Doppler, d'un facteur 10 environ. Ceci confirme que des mécanismes de refroidissement autres que le refroidissement Doppler accroissent la friction. Par ailleurs, le temps d'interaction (actuellement, $\theta_{\text{mél}} \leq 20 \mu\text{s}$) gagnerait à être accru significativement, d'un facteur 2 environ, pour laisser pleinement à la mélasse le temps d'interagir : il faut environ $10 \mu\text{s}$ pour atteindre le domaine où la force est linéaire en vitesse, et la largeur de la distribution en vitesse s'amortit ensuite avec une constante de temps de 5 à $15 \mu\text{s}$. Actuellement, seuls les atomes de vitesse longitudinale inférieure à 300 m.s^{-1} sont refroidis de manière optimale par la mélasse transverse. Pour les atomes plus rapides, la distribution en vitesses transverses n'atteint pas le régime stationnaire qu'autoriserait les paramètres lasers. Mais la situation actuelle résulte d'un compromis prenant en compte la valeur limitée de la puissance totale disponible.

Nous pouvons enfin comparer le gain en intensité sur l'axe du jet que nous avons obtenu avec une mélasse à 2D avec un jet cryogénique ($T_{\text{jet}} = 6 - 20 \text{ K}$) à une expérience à 1D avec un jet thermique [AVK90]. L'extrapolation de l'expérience à 1D en additionnant simplement l'effet des pressions de radiations des mélasses sur chacun des axes laisse espérer qu'un gain de l'ordre de 50 à 100 est possible sur l'intensité du jet. Or, pour les atomes qui bénéficient d'un temps d'interaction suffisant, nous obtenons un gain d'un facteur 30, ce qui n'est pas très éloigné.

En conclusion, la mélasse à deux dimensions réduit la dispersion des vitesses transverses du jet. Selon la température initiale du jet, elles augmentent d'un facteur 1,3 à 12 la brillance sur l'axe du jet, toutes vitesses longitudinales confondues. Elles sont plus efficaces sur les atomes les plus lents longitudinalement, ce qui est d'autant plus intéressant que ces atomes sont plus à même d'être piégés (cf. § II.3.2.2 ; ces atomes sont moins soumis au problème de divergence transverse lors du ralentissement). Nous constaterons plus loin que la mélasse transverse permet d'augmenter d'un facteur 10 à 20 le nombre d'atomes piégés. Ces performances peuvent probablement être encore améliorées, mais elles nous ont suffi pour les expériences réalisées.

[AVK90] A. Aspect, N. Vansteenkiste, R. Kaiser, H. Haberland, and M. Karrais, *Preparation of a pure intense beam of metastable helium by laser cooling*, Chem. Phys. **145**, p. 307-315 (1990).

3.2.2 Ralentissement du jet atomique

3.2.2.1 Objectif et choix du ralentissement Zeeman

Nous cherchons à ralentir les atomes du jet d'hélium, pour pouvoir les capturer dans un piège magnéto-optique. Nous allons passer rapidement en revue les différentes méthodes qui permettent d'arrêter un jet atomique (pression de radiation "simple", faisceau laser à glissement de fréquence, ralentissement dans un champ magnétique inhomogène).

Toutes ces méthodes ont en commun l'utilisation de la force de pression de radiation d'un laser à résonance. Les ordres de grandeur de l'accélération produite et de la longueur de ralentissement sont donc les mêmes quelle que soit la méthode choisie.

La pression de radiation produit une accélération maximale a_{\max} donnée par [15]

$$a_{\max} = v_R \frac{\Gamma}{2} \quad (\text{II.5})$$

où v_R est la vitesse de recul de l'atome considéré et Γ est la largeur de l'état excité de la transition utilisée pour le refroidissement laser. Pour l'hélium métastable, avec un laser résonnant sur la transition $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_2$, on trouve $a_{\max} = 4,6 \times 10^5 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Si cette pression de radiation est appliquée de manière constante, les atomes initialement à la vitesse v_i seront ralentis sur une longueur minimale l_{ral} en un temps minimal t_{ral} donnés par

$$t_{\text{ral}} = \frac{v_i}{a_{\max}} \quad \text{et} \quad l_{\text{ral}} = \frac{1}{2} a_{\max} t_{\text{ral}}^2 = \frac{1}{2} \frac{v_i^2}{a_{\max}} \quad (\text{II.6})$$

Nous nous sommes fixés pour objectif de ralentir les atomes d'hélium de vitesse v_i jusqu'à $v_i = 400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On obtient alors $t_{\text{ral}} = 0,87 \text{ ms}$ et $l_{\text{ral}} = 17 \text{ cm}$, ce qui définit les ordres de grandeur de l'expérience. Pour un paramètre de saturation de 1, ces valeurs sont à multiplier par 2.

En pratique, on se heurte à une difficulté car la pression de radiation ne demeure pas constante au cours du ralentissement. En effet, le fait même de ralentir les atomes nuit à la poursuite du ralentissement : l'effet Doppler fait sortir les atomes de résonance et donc diminue considérablement la pression de radiation. Aussi les premières expériences de ralentissement de jet atomique [ABL82] [LeM81] ne faisaient-elles que ralentir une partie de la distribution en vitesse, sans même l'arrêter complètement.

[15] Ceci correspond à la force de pression de radiation résonnante ("scattering force"), qui ne fait intervenir que des processus spontanés. On peut obtenir des forces plus importantes en mettant en jeu l'émission stimulée.

[ABL82] S.V. Andreev, V.I. Balykin, V.S. Letokhov, and V.G. Minogin, *Radiative slowing down and monochromatization of a beam of sodium atoms in a counterpropagating laser beam*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **82**, p. 1429-1441 (1982) et Sov. Phys. JETP **55**, p. 828-834 (1982).

[LeM81] V.S. Letokhov and V.G. Minogin, *Laser cooling of atoms and its application in frequency standards*, J. de Physique (Colloque C-8, supplément au numéro 12) **42**, p. 347-355 (1981).

Plusieurs stratégies existent pour maintenir une pression de radiation importante pendant la décélération, malgré l'effet Doppler. Nous allons les envisager tour à tour.

• **Faisceau laser de grande intensité**

En saturant la transition, on élargit la plage de vitesse sur laquelle agit la force de pression de radiation. En effet, la force de pression de radiation $\vec{F}(v)$ exercée par une onde plane sur un atome à deux niveaux à la vitesse v s'écrit :

$$\vec{F}(v) = \hbar \vec{k} \frac{\delta}{2} \frac{\Omega_1^2/2}{(\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})^2 + \Omega_1^2/2 + \Gamma^2/4} \quad (\text{II.7})$$

où \vec{k} est le vecteur d'onde des photons lasers, Ω_1 est la pulsation de Rabi et $\delta = \omega_L - \omega_0$ est le désaccord du laser. La mi-largeur à mi-hauteur de la lorentzienne $F(v)$ est

$$v_{1/2} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\Omega_1^2}{2} + \frac{\Gamma^2}{4}} = \frac{v_h}{2} \sqrt{1 + s_0} \quad (\text{II.8})$$

où s_0 est le paramètre de saturation à résonance et défini par :

$$s_0 \equiv \frac{\Omega_1^2/2}{\Gamma^2/4} \quad (\text{II.9})$$

et $v_h = \Gamma/k$ est la vitesse associée à la largeur homogène Γ de la transition :

$$v_h \equiv \Gamma/k \quad (\text{II.10})$$

Pour fixer les idées, nous supposons que le laser est résonnant avec les atomes de vitesse nulle ($\delta = 0$). Alors, pour ralentir les atomes à $v_i = 400 \text{ m.s}^{-1}$, il faut que la pression de radiation $F(v_i)$ soit significative, *i.e.* $v_{1/2} \approx v_i$. Le paramètre de saturation doit donc valoir

$$s_0 = \left(\frac{2v_i}{v_h} \right)^2 \approx 2 \times 10^5 \quad (\text{II.11})$$

Ceci s'obtient en focalisant un faisceau de 100 mW sur un diamètre de 600 μm . Il semble donc théoriquement possible de ralentir le jet à $v_i = 400 \text{ m.s}^{-1}$ par simple saturation de la transition atomique. Cependant, le ralentissement d'un jet atomique depuis une vitesse importante jusqu'à une vitesse nulle, par un laser intense, n'a à notre connaissance jamais été réalisé, ni étudié en détail [16]. En outre, nous ne disposons pas de 100 mW de laser à consacrer au ralentissement. Nous n'avons donc pas choisi cette voie.

• **Faisceau laser à glissement de fréquence ("chirping")**

Une méthode pour maintenir la résonance atome-laser au cours du ralentissement consiste à adapter la fréquence du laser au fur et à mesure que les atomes sont ralentis [EBH85]. Cette méthode est en général légère à mettre en œuvre, mais présente

[16] Il faudrait en particulier répondre aux questions suivantes : quelles serait la température du jet ralenti ? Les atomes s'arrêteraient-ils en un point bien défini ?

[EBH85] W. Ertmer, R. Blatt, J. Hall, and M. Zhu, *Laser Manipulation of Atomic Beam Velocities : Demonstration of Stopped Atoms and Velocity Reversal*, Phys. Rev. Lett. **54**, p. 996-999 (1985).

dans notre cas deux inconvénients :

- le balayage de la fréquence du laser doit se faire sur une plage $\delta\nu = \nu_i / \lambda = 370$ MHz. Un tel changement de fréquence ne s'obtient pas très facilement à partir d'un laser solide, alors que c'est aisé avec une diode laser.

- le balayage en fréquence ne permet de ralentir que des bouffées d'atomes (aspect pulsé du balayage). Ainsi, seulement quelques pourcents des atomes du jet sont ralentis à l'endroit voulu et peuvent être capturés dans un piège [Sal90]. Ceci n'est pas gênant lorsqu'on part de jets intenses (alcalins par exemple). Mais dans notre cas, l'intensité du jet est un paramètre critique, ce qui nous a fait renoncer à cette voie.

• Fréquence atomique déplacée par effet Zeeman

Au lieu d'adapter la fréquence du laser pour maintenir la résonance atome-laser au cours du ralentissement, on peut adapter la fréquence atomique et c'est la méthode que nous avons choisie. Pour cela, un champ magnétique spatialement inhomogène (figure II.11) crée un déplacement Zeeman de la fréquence atomique qui, à toutes les étapes du ralentissement, compense exactement l'effet Doppler [PhM82], [PPM82]. On parle de "ralentissement Zeeman" [17].

Calculons le champ B_{\max} que l'on doit appliquer pour être résonnant avec des atomes de vitesse v_i , en ayant $\delta = \omega_2 - \omega_0 = 0$:

$$B_{\max} = \frac{\hbar k v_i}{|\mu_B|} \quad (\text{II.12})$$

Avec un laser polarisé σ_+ pour agir sur la transition $2^3S_1(m_f=1) \leftrightarrow 2^3P_2(m_e=2)$ de l'hélium, on obtient $B_{\max} = 260$ G, pour $v_i = 400$ m.s⁻¹ (compte tenu des facteurs de Landé $g_f = 2$ pour 2^3S_1 et $g_e = 3/2$ pour 2^3P_2). Un tel champ est facile à créer en laboratoire.

Le ralentissement Zeeman a l'avantage de permettre un ralentissement continu du jet. Tous les atomes du jet de vitesse initiale inférieure à v_i peuvent ainsi être ralentis, ce qui assure une grande efficacité à cette méthode de ralentissement. Comme le nombre d'atomes disponibles est ici un paramètre critique, ce critère d'efficacité du ralentissement a poussé au choix du ralentissement Zeeman.

[Sal90] C. Salomon, communication privée.

[PhM82] W.D. Phillips and H. Metcalf, *Laser Deceleration of an Atomic Beam*, Phys. Rev. Lett. **48**, p. 596-599 (1982).

[PPM82] J.V. Prodan, W.D. Phillips, and H. Metcalf, *Laser Production of a Very Slow Monoenergetic Atomic Beam*, Phys. Rev. Lett. **49**, p. 1149-1153 (1982).

[17] Notons que le "ralentissement Stark", basé sur un principe analogue, avec un champ électrique inhomogène, vient d'être mis en œuvre. Ceci qui peut constituer une alternative intéressante. Voir [GWU94] : R. Gaggi, L. Windholz, G. Umfer, and C. Neureiter, *Laser cooling of a sodium atomic beam using the Stark effect*, Phys. Rev. A **49**, p. 1119-1121 (1994).

En revanche, un grave inconvénient de cette méthode vient des champs magnétiques présents dans l'expérience. En effet, ces champs de plusieurs centaines de gauss sont difficilement compatibles avec l'expérience de résonances noires qui exige l'annulation du champ magnétique au milligauss près. Cependant, nous sommes parvenus tout de même à concilier résonances noires et ralentissement Zeeman (cf.

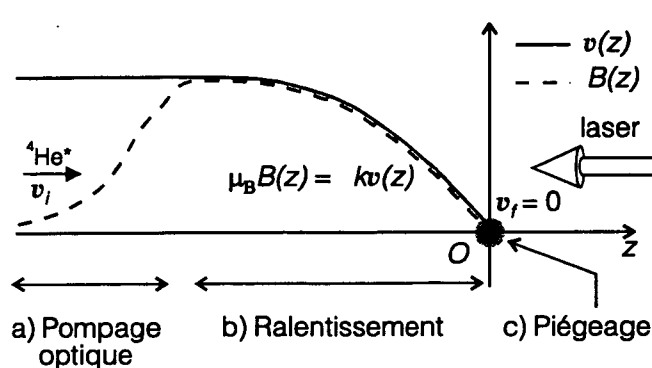


Figure II.11 Principe du ralentissement Zeeman. (a) A l'entrée du solénoïde, les atomes, de vitesse initiale v_i , sont pompés optiquement dans le sous-niveau $m_f = 1$ (2^3S_1). (b) Les atomes sont ensuite ralentis par le faisceau laser. Leur vitesse $v(z)$ s'ajuste au champ magnétique $B(z)$ de telle façon que la résonance atome laser se maintient au cours du ralentissement. (c) Au point O où $B(z) = 0$, les atomes sont arrêtés. C'est dans cette zone que l'on réalise le piégeage.

§ II.4.2).

Rappelons les propriétés importantes du ralentissement Zeeman (voir [PPM85] et, par exemple [BAZ89]) :

- Lorsque les atomes pénètrent dans la zone de champ magnétique, ils sont naturellement pompés optiquement sur le sous-niveau Zeeman adéquat (en l'occurrence $2^3S_1, m_f = 1$). Ainsi, quelle que soit leur polarisation initiale, tous les atomes peuvent être ralentis.

- La vitesse atomique s'ajuste sur la valeur du champ magnétique $B(z)$, pourvu que $B(z)$ varie assez lentement pour ne pas exiger une décélération atomique plus forte que celle que peut exercer la pression de radiation. Ceci se traduit par un refroidissement longitudinal du jet, dont la limite est la limite Doppler dans un référentiel en mouvement.

- L'ajustement de la vitesse $v(z)$ au champ $B(z)$ fait aussi apparaître une corrélation entre la vitesse et la position des atomes. En particulier, les atomes s'arrêtent tous au même endroit, ce qui est un avantage pour le piégeage.

3.2.2.2 Dispositif expérimental : champ magnétique et faisceau laser de ralentissement.

• Champ magnétique

Les atomes sont ralentis, sur une longueur de 70 cm, par un faisceau laser

[PPM85] W.D. Phillips, J.V. Prodan, and H. Metcalf, *Laser cooling and electromagnetic trapping of neutral atoms*, J. Opt. Soc. Am. B **2**, p. 1751-1767 (1985).

[BAZ89] V.S. Bagnato, A. Aspect, and S.C. Zilio, *Study of laser deceleration of an atomic beam by monitoring the fluorescence along the deceleration path*, Opt. Comm. **72**, p. 76-81 (1989).

polarisé σ_+ [18], se propageant en sens inverse des atomes, dans un champ magnétique inhomogène, variant de 370 G à l'entrée des solénoïdes à 0 G au niveau du piège.

Le montage qui crée le champ magnétique (figure II.12) permet de réaliser trois fonctions différentes : ralentissement du jet, piégeage magnéto-optique (cf. § II.3.3), blindage des champs parasites (cf. § II.4.2). Ce montage a évolué au cours des expériences pour parvenir à un compromis réalisant ces trois fonctions, parfois contradictoires, ce qui explique son aspect hybride.

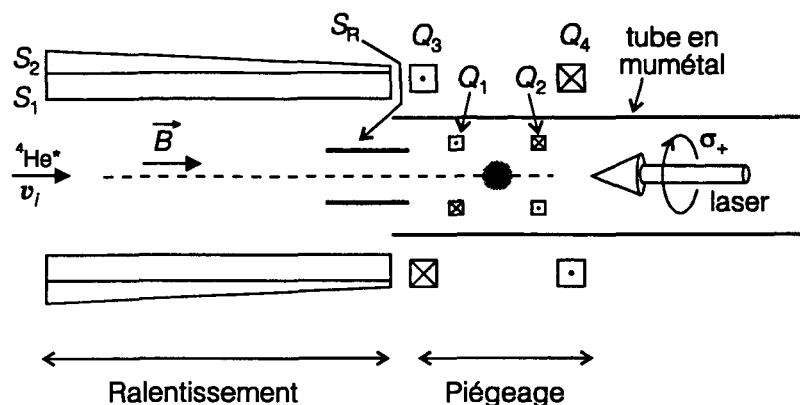


Figure II.12 Schéma des bobines de ralentissement et de piégeage.

Précisons le rôle de chaque élément du montage de la figure II.12 :

- les deux solénoïdes S_1 et S_2 emboîtés de 20 cm de diamètre (solénoïde S_1 : $N_1 \approx 500$ spires, $L_1 \approx 70$ cm ; solénoïde S_2 : $N_2 \approx 1800$ spires, $L_2 \approx 65$ cm, ce solénoïde est conique) servent à créer le champ utile au début du ralentissement.

- le tube en mumétal (épaisseur 2 mm, diamètre 18 cm) sert à blinder l'expérience de résonances noires contre les champs magnétiques parasites fluctuants qui proviennent de l'environnement extérieur (§ II.4.2) ;

- le solénoïde S_R ($\varnothing = 6$ cm, $L = 15$ cm) sert à raccorder le champ de ralentissement à l'extérieur du blindage au champ à l'intérieur du blindage. Le bobinage, placé sous vide, est constitué de 2 enroulements de respectivement 27 et 30 spires de tube de cuivre ($\varnothing_{\text{ext}} = 3$ mm, $\varnothing_{\text{int}} = 1$ mm). Le bobinage est refroidi par circulation d'eau à l'intérieur du tube de cuivre.

- les deux bobines Q_1 et Q_2 en configuration anti-Helmoltz servent d'une part à la phase finale de ralentissement, et d'autre part à créer le champ quadrupolaire de piégeage décrit ci-dessous au § II.3.3.2 (Q_1 et Q_2 : $\varnothing = 8$ cm, écartement de 6,5 cm entre les deux bobines, 5 spires par bobine). De même que pour S_R , l'enroulement est constitué d'un tube de cuivre refroidi par circulation d'eau.

- les deux bobines Q_3 et Q_4 servent à compenser au niveau du piège le champ créé par S_1 et S_2 . Ces bobines, issues d'un montage initial sans blindage magnétique en mumétal, ne sont plus indispensables, mais permettent des optimisations utiles.

[18] La dénomination σ_+ est ici une convention, qui sera justifiée plus bas par la configuration magnétique et laser au niveau du piège.

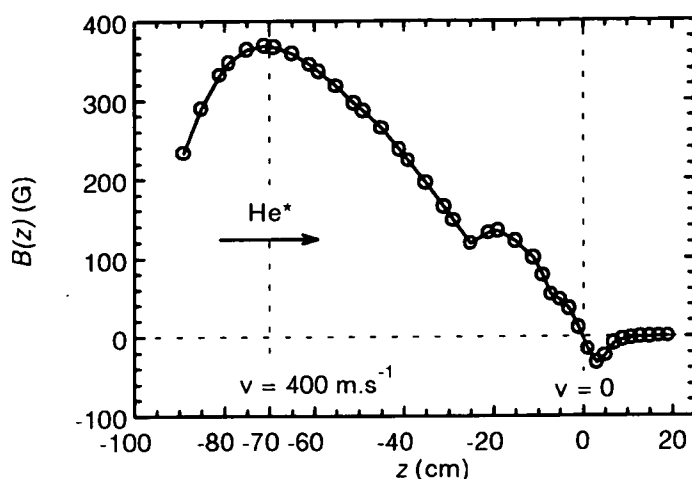


Figure II.13 *Champ magnétique mesuré le long de l'axe du jet atomique.* Les atomes initialement à 400 m.s^{-1} , sont ralentis à partir de $z = -70 \text{ cm}$, jusqu'à être arrêtés en $z = 0$, où ils sont piégés. Le champ maximal vaut 370 G . Le gradient de champ en $z = 0$ vaut 13 G.cm^{-1} . la "bosse" en $z = -20 \text{ cm}$ est une imperfection de raccordement du champ les différentes bobines.

Le champ magnétique créé initialement d'après des considérations théoriques a ensuite été ajusté pour optimiser le nombre d'atomes piégés. Le résultat de cette optimisation empirique est le profil de champ magnétique représenté sur la figure II.13 [19]. Ce champ a une valeur maximale $B_{\text{max}} = 370 \text{ G}$ à $z = -70 \text{ cm}$, et décroît progressivement pour atteindre 0 en $z = 0$. Il permet en principe [20] de ralentir des atomes à $v_i = 570 \text{ m.s}^{-1}$.

La longueur de ralentissement, 70 cm , est 4 fois plus grande que la longueur l_{ral} minimale. Ceci constitue une marge de sécurité destinée à pallier les imperfections du montage qui empêchent d'exercer en tout point la pression de radiation maximale (cf. "bosse" du champ magnétique à $z = -20 \text{ cm}$).

Le champ magnétique qui permettrait de ralentir les atomes sur une longueur minimale varierait comme $\sqrt{|z|}$. Cependant, nous n'avons pas réalisé cette forme optimale au voisinage de $z = 0$, car le champ magnétique de ralentissement doit se raccorder au champ de piégeage qui est linéaire autour de $z = 0$.

[19] Le champ a été mesuré avec une sonde magnétique de 2 cm de long. Afin de ne pas saturer la sonde, les courants dans les bobines étaient 300 fois plus faibles pour la mesure que pour l'expérience elle-même. Les valeurs portées sont donc celles déduites de la mesure après correction du champ ambiant (à courant nul), de l'ordre de $0,25 \text{ G}$, et compte tenu de ce facteur 300. Cette procédure de mesure est valable si les matériaux présents (acier, acier inox, aluminium, mumétal) restent dans leur domaine de linéarité. Bien que ceci ne soit pas évident pour le mumétal (la valeur de saturation, $\approx 2000 \text{ G}$ selon [SPS87], pourrait être atteinte), nous avons fait l'hypothèse de cette linéarité. [SPS87]: T.J. Summer, J.M. Pendlebury, and K.F. Smith, *Conventional Magnetic Shielding*, J. Phys. D **20**, p. 1095-1101 (1987).

[20] Rappelons que le montage avait été conçu pour ralentir des atomes à $v_i = 400 \text{ m.s}^{-1}$. Nous constatons qu'après diverses modifications et optimisations empiriques, le champ magnétique B_{max} correspond à $v_i = 570 \text{ m.s}^{-1}$. Mais nous n'avons aucune preuve expérimentale précise de la vitesse maximale effectivement ralentie. Il se peut que l'optimisation qui conduit à B_{max} joue plus sur la forme du champ que sur la valeur B_{max} .

• *Faisceau laser de ralentissement*

Le faisceau laser ralentisseur est polarisé σ_+ . Son diamètre est d'environ 2 cm au niveau du piège. Sa puissance est de 10 mW, soit environ $I = 20 I_{\text{sat}}$, au niveau du piège. L'intensité du faisceau est à peu près uniforme sur toute sa surface utile.

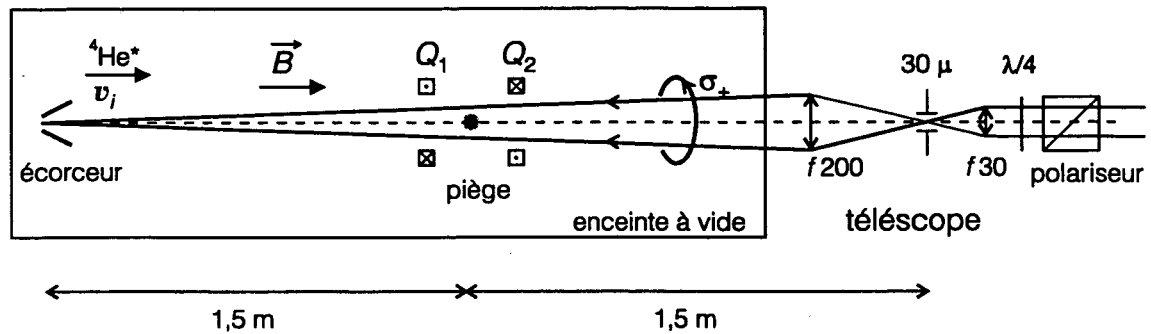


Figure II.14 Optique du faisceau laser de ralentissement.

L'alignement du faisceau nécessite des soins particuliers dus aux bras de leviers importants (il y a 3 mètres entre l'entrée du faisceau sous vide et l'écorceur du jet et on ne dispose d'aucun repère sous vide). La convergence du faisceau est d'abord réglée une fois pour toutes à l'aide d'un télescope ($f30 - f200$) de manière à maximiser l'intensité lumineuse passant par l'écorceur [21] (le vide est cassé dans les enceintes pour effectuer ce réglage). Puis, on aligne le faisceau sur les enceintes et l'écorceur, toujours à vide cassé. Le faisceau aligné est ensuite repéré hors des enceintes à vide par un trou de filtrage de 30 μ de diamètre, placé au foyer du télescope, et par la deuxième lentille du télescope. Ces repères, fixes, servent à réajuster la position du faisceau chaque jour, en agissant sur des miroirs situés en amont du télescope.

3.2.2.3 Résultats expérimentaux

Le flux d'atomes qu'il est possible de ralentir n'est que de l'ordre de 10^6 at.s^{-1} (cf. tableau II.2). En l'absence de piège, les atomes sont d'abord arrêtés puis rebroussement chemin sous l'action du ralentisseur. Dans cette situation, qui permet une étude préliminaire du ralentissement, on s'attend donc à trouver relativement peu d'atomes dans la zone autour de $z = 0$ (certainement beaucoup moins que 10^6 atomes).

Pour étudier le ralentissement, on place un multiplicateur d'électrons (cf. § II.2.3.2) à 10 cm de la zone du piège (voir figure II.15). Ce multiplicateur détecte aussi bien les atomes métastables que des ions éventuels. Une grille de potentiel V_g ajustable

[21] L'intérêt de faire converger le faisceau ralentisseur sur l'écorceur est que les atomes s'écartant de l'axe du jet subissent une pression de radiation qui a tendance à les ramener vers l'axe. Par cet argument qualitatif, on comprend que la focalisation du faisceau ralentisseur tend à diminuer la divergence du jet atomique ralenti. Nous avons observé empiriquement que la focalisation au voisinage de l'écorceur correspondait à un optimum.

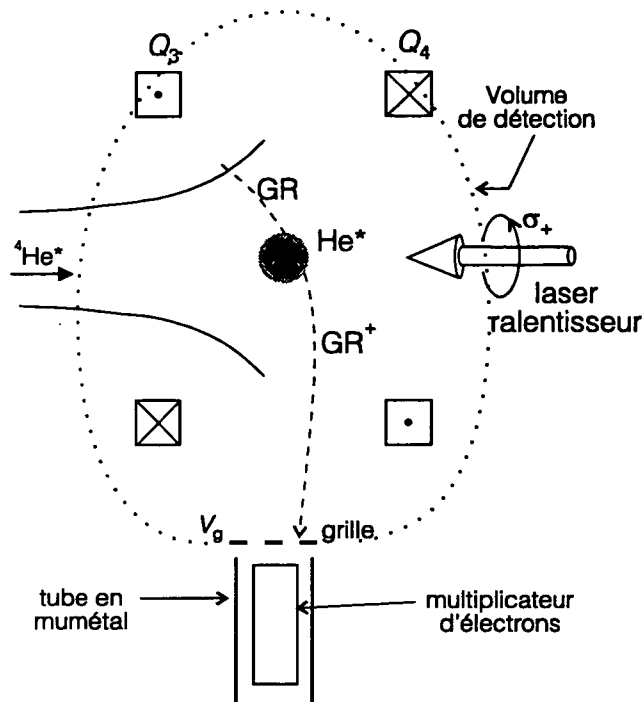


Figure II.15 Détection du jet ralenti ou du piège par un multiplicateur d'électrons. Les atomes d'hélium métastables He^* peuvent ioniser le gaz résiduel. Les ions produits sont attirés par une grille de potentiel V_g et détectés par le multiplicateur d'électrons. Les atomes piégés subissent également des collisions entre atomes piégés qui produisent des ions He^+ détectés de la même manière.

permet de repousser ou d'attirer les ions vers le multiplicateur [22]. Noter le tube en métal autour du multiplicateur d'électrons qui diminue les perturbations dues au champ magnétique, de l'ordre de 100 gauss. Sans ce tube, le gain du multiplicateur diminue d'un facteur 100 quand on applique les champs magnétiques de ralentissement et de piégeage.

Conditions expérimentales	Flux détecté par le multiplicateur
Pas de jet atomique	≈ 0
Jet atomique avec mélasse transverse, non ralenti	$\approx 8 \times 10^3 \text{ ions.s}^{-1}$
Jet atomique sans mélasse transverse, ralenti	$\approx 8 \times 10^3 \text{ ions.s}^{-1}$
Jet atomique avec mélasse transverse, ralenti	$\approx 2,5 \times 10^4 \text{ ions.s}^{-1}$

Tableau II.3 Détection du jet atomique ralenti.

L'expérience montre qu'en présence du faisceau ralentisseur, le multiplicateur d'électrons détecte surtout des ions positifs, qui sont attirés par $V_g = -100 \text{ V}$ (valeur typique). Les résultats expérimentaux types sont donnés par le tableau II.3. En partant d'un jet refroidi transversalement par la mélasse avec $5 \times 10^6 \text{ at.s}^{-1}$ à $v < 400 \text{ m.s}^{-1}$, en présence du faisceau ralentisseur, le multiplicateur d'électrons placé sous les bobines

[22] Remarquons que le champ électrique n'est pas très bien défini autour de $z = 0$, en particulier à cause de l'écrantage par les bobines de piégeage qui sont mises à la masse. Par conséquent, le "volume de détection" sur lequel la grille au potentiel V_g attire les ions n'est pas bien défini.

quadrupolaires détecte $2,5 \times 10^4$ ions. s^{-1} (vide résiduel $P_{\text{exp}} = 2 \times 10^{-7}$ hPa). En l'absence de faisceau ralentisseur ou de mélasse transverse, on ne détecte que 8×10^3 ions. s^{-1} . En l'absence de jet atomique, on ne détecte rien.

Nous interprétons ces observations d'une manière suivante. Les métastables sont susceptibles d'ioniser les atomes ou les molécules du gaz résiduel, notés GR, par collision Penning (pour une étude plus détaillée de ces processus de collisions, on se référera à [BEC92])



Si cette ionisation a lieu dans le volume de détection du multiplicateur d'électrons, qui englobe l'"origine" du piège ($z = 0$), les ions sont attirés vers le multiplicateur et détectés. Ce flux d'ions est donc la signature de la présence de métastables autour de $z = 0$ (figure II.15).

Le ralentissement du jet augmente le nombre d'atomes présents autour de $z = 0$, dans le volume de détection, et donc augmente le signal d'ionisation. Bien que ce signal d'ionisation ne soit pas bien calibré (volume de détection mal défini), il permet d'optimiser efficacement le jet proprement dit, la mélasse transverse et le faisceau ralentisseur. De plus, nous avons pu vérifier *a posteriori* qu'il permet de se placer dans une situation favorable pour observer un piégeage.

Lors de ces optimisations, nous avons fait les observations suivantes. L'intensité du laser ralentisseur n'est pas critique pourvu qu'il soit assez intense. Au-delà de $I = 20 I_{\text{sat}}$, le nombre d'atomes ralentis n'augmente plus. Le désaccord du laser n'est pas critique non plus, si on le fait varier sur une plage de quelques Γ autour de $\delta = 0$ (varier le désaccord ne fait que déplacer légèrement le point où les atomes sont arrêtés, de moins de 1 mm par Γ).

3.2.2.4 Efficacité du ralentissement

Alors qu'en principe le ralentissement Zeeman permet de ralentir tous les atomes en dessous d'une certaine vitesse, l'efficacité du ralentissement est limitée sur notre montage par deux effets importants (cf. figure II.16).

Le premier effet est dû à l'interaction des atomes avec d'autres faisceaux lasers que le faisceau ralentisseur, à la fin du ralentissement. Dans la zone finale de ralentissement, la géométrie est telle que le jet atomique peut interagir non seulement avec le faisceau laser ralentisseur, mais également avec les autres faisceaux du piège et en particulier avec le faisceau "contre-ralentisseur" qui se propage en sens inverse du ralentisseur. A un endroit précis, les atomes se trouvent en résonance avec le contre-ralentisseur, qui peut tout d'abord les pomper optiquement dans un sous-niveau Zeeman m_f à partir duquel ils ne sont plus résonnants avec le faisceau ralentisseur. Ensuite, le faisceau contre-ralentisseur peut même accélérer les atomes. Les atomes peuvent alors dépasser la zone du piège sans s'arrêter, et sont ainsi perdus. Selon nos observations, cet

[BEC92] F. Bardou, O. Emile, J.-M. Courty, C.I. Westbrook, and A. Aspect, *Magneto-Optical Trapping of Metastable Helium : Collisions in the Presence of Resonant Light*, Europhys. Lett. **20**, p. 681-686 (1992).

effet fait perdre un facteur 2 environ sur le nombre d'atomes effectivement ralentis. Ce facteur de perte a été confirmé par des simulations Monte-Carlo du ralentissement du jet atomique et de l'entrée des atomes dans le piège.

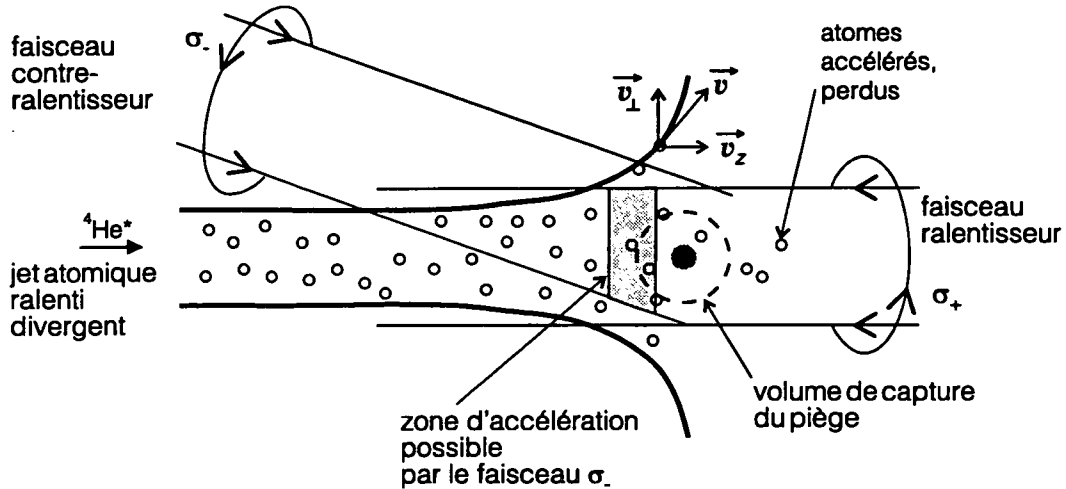


Figure II.16 Facteurs limitant l'efficacité du ralentissement. (a) Avant d'être piégés, les atomes peuvent être accélérés par le faisceau contre-ralentisseur, polarisé σ_- . Ils traversent alors le piège sans s'arrêter et sont perdus. (b) L'étalement transverse du jet atomique à la fin du ralentissement est tel que la majorité des atomes ralentis se trouvent à l'extérieur de la zone de capture du piège et sont donc perdus.

Le deuxième effet est un étalement transverse important du jet atomique au cours du ralentissement. Cet étalement est néfaste pour deux raisons.

Tout d'abord, si le diamètre du jet atomique est tel que certains atomes sortent du faisceau ralentisseur, ces atomes cesseront d'être ralentis et seront perdus. C'est un problème que nous avons résolu en prenant un diamètre suffisamment grand (2 cm) pour le faisceau ralentisseur.

Ensuite, même si tous les atomes sont ralentis, ils ne seront pas forcément capturés dans le piège. En effet, notre piège magnéto-optique ne peut capturer efficacement les atomes que sur un volume de l'ordre de 1 cm^3 . Ce volume de capture est obtenu dans une expérience où on mesure le nombre d'atomes piégés en fonction du diamètre des faisceaux. Il apparaît clairement que seul le centre des faisceaux (1 à 2 mm de diamètre) est indispensable pour piéger les atomes et que la périphérie des faisceaux sert à la capture des atomes ralentis. On observe que le diamètre utile de capture correspond à des faisceaux de 1 cm de diamètre. Les atomes ralentis qui s'écartent trop de l'axe du jet ne sont pas capturés.

Il y a donc tout intérêt à minimiser l'étalement transverse du jet. Cet étalement résulte de la conjonction de 3 processus que nous examinons tour à tour :

- *Divergence initiale du jet* : avant le début du ralentissement, le jet a une ouverture initiale $\alpha_i = v_{\perp i} / v_{z i}$ où $v_{\perp i}$ est la vitesse transverse caractéristique déterminée par l'interaction avec les mélasses transverses et $v_{z i}$ est la vitesse le long de l'axe du jet initialement, *i.e.* avant le début du ralentissement.

•• *Diminution de v_z* : l'ouverture angulaire $\alpha = v_\perp / v_z$ du jet s'accroît au cours du ralentissement. En effet, v_z diminue au cours du ralentissement. Ceci se produit sauf si v_\perp diminue, *i.e.* s'il se produit un refroidissement transverse. Malheureusement, c'est un échauffement transverse qui se produit :

••• *Chauffage transverse* : les photons spontanés émis lors du ralentissement ont des composantes aléatoires dans le plan perpendiculaire à l'axe du jet. Ceci crée un chauffage transverse qui vient accroître v_\perp et qui est un facteur supplémentaire de divergence du jet atomique.

Le seul facteur sur lequel nous pouvons agir, et agissons, aisément est la divergence initiale, grâce à la mélasse transverse : sans ce refroidissement transverse, la divergence initiale serait le facteur prépondérant de divergence du jet, alors que, grâce à la mélasse, elle est réduite à une valeur négligeable. Nos estimations basées sur une simulation Monte-Carlo montrent que la diminution de v_z et que le chauffage transverse créent un étalement transverse important : le diamètre du jet ralenti atteint 2 cm au niveau de la zone de capture du piège, alors qu'il était de 600 μm au niveau de l'écorceur du jet. Or, notre piège magnéto-optique ne peut pas capturer les atomes ralentis sur une zone aussi étendue. Nous trouvons qu'environ un dixième seulement des atomes ralentis sont capturés.

En conclusion, lorsque le jet fournit 6×10^6 atomes. s^{-1} à 400 m.s^{-1} , environ 3×10^5 atomes. s^{-1} sont susceptibles d'être capturés à l'issue du ralentissement.

3.3 Piège magnéto-optique

3.3.1 Introduction

Avec une mélasse optique [LPR89], on peut conserver des atomes pendant une durée de l'ordre d'une seconde dans un volume de l'ordre du cm^3 constitué par l'intersection de 6 faisceaux lasers. Une mélasse ne constitue pourtant pas un véritable piège puisque les atomes, qui ne subissent aucune force de rappel, finissent par diffuser hors de la zone des faisceaux lasers.

Pour piéger les atomes, il faut une force de rappel, c'est-à-dire une force qui dépend de la position des atomes (de même que pour refroidir, la mélasse optique crée une force de friction qui dépend de la vitesse des atomes). Il existe de nombreuses façons de piéger les atomes [23]. Le piège que nous avons choisi de réaliser est le piège

[LPR89] P.D. Lett, W.D. Phillips, S.C. Rolston, C.E. Tanner, R.N. Watts, and C.I. Westbrook, *Optical molasses*, J. Opt. Soc. Am. B 6, p. 2084-2107 (1989).

[23] Voir, par exemple, le piège magnéto-optique de [EBS92] (O. Emile, F. Bardou, C. Salomon, Ph. Laurent, A. Nadir, and A. Clairon, *Observation of a New Magneto-Optical Trap*, Europhys. Lett. 20, p. 687-691 (1992)) à la réalisation duquel nous avons participé. Ce piège repose sur des processus stimulés, contrairement à celui que nous utilisons qui repose sur des processus spontanés.

magnéto-optique, inventé par Jean Dalibard et réalisé en 1987 [RPC87] : ce piège est largement utilisé parce qu'il combine efficacement piégeage et refroidissement, et parce qu'il est stable pour une large gamme de paramètres.

Nous présentons d'abord le principe physique du piège magnéto-optique (§ II.3.3.2), puis le dispositif expérimental (§ II.3.3.3). Ensuite, nous insistons sur les dispositifs de mesure du piège (§ II.3.3.4). Enfin, nous donnons les paramètres principaux du piège (§ II.3.3.5).

3.3.2 Principe du piège magnéto-optique

Le principe du piège magnéto-optique est représenté sur la figure II.17, où on considère, comme exemple simple, une transition $J = 0 \leftrightarrow J = 1$ (figure II.17.a) et une configuration à une dimension. On éclaire les atomes par deux faisceaux lasers se propageant en sens inverse le long de l'axe z (figure II.17.b). Le faisceau venant de $z = -\infty$ est polarisé σ_- , l'autre faisceau étant polarisé σ_+ (les polarisations sont définies par rapport à l'orientation de l'axe z). On applique un champ magnétique parallèlement à l'axe z , linéaire en z (champ quadrupolaire) :

$$B_z(z) = \frac{\partial B_z}{\partial z} \times z \quad (\text{II.14})$$

Si on prend l'axe z comme axe de quantification, les fréquences des transitions $m_f = 0 \leftrightarrow m_e = -1, 0, +1$ sont déplacées par un effet Zeeman qui dépend de la position atomique z comme le montre la figure II.17.c. La transition $m_f = 0 \leftrightarrow m_e = +1$ est par exemple déplacée à la pulsation $\omega_{0+}(z)$:

$$\omega_{0+}(z) = \omega_0 + \mu_B \frac{\partial B_z}{\partial z} z \quad (\text{II.15})$$

où μ_B est le magnéton de Bohr et où on a considéré que le niveau excité avait un facteur de Landé $g_e = 1$.

Enfin, les deux faisceaux lasers sont à la même fréquence ω_L , légèrement inférieure à la fréquence atomique ω_0 en l'absence de champ magnétique. Le désaccord $\delta = \omega_L - \omega_0$ est négatif, de l'ordre de quelques Γ .

Pour décrire la dynamique du piège, examinons la trajectoire d'un atome. L'atome interagit en permanence avec les deux lasers en fonction des désaccords $\delta_{\pm}(z)$ sur les transitions $J = 0 \leftrightarrow J = \pm 1$ (cf. figure II.17.c) :

$$\delta_{\pm}(z) = \omega_L - \omega_{0\pm}(z) \quad (\text{II.16})$$

La pression de radiation du laser σ_+ (respectivement σ_-) est plus importante que celle du laser σ_- (respectivement σ_+) si $z > 0$ (respectivement $z < 0$) et ceci explique le piégeage.

[RPC87] E.L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, and D.E. Pritchard, *Trapping of Neutral Sodium Atoms with Radiation Pressure*, Phys. Rev. Lett. **59**, p. 2631-2634 (1987).

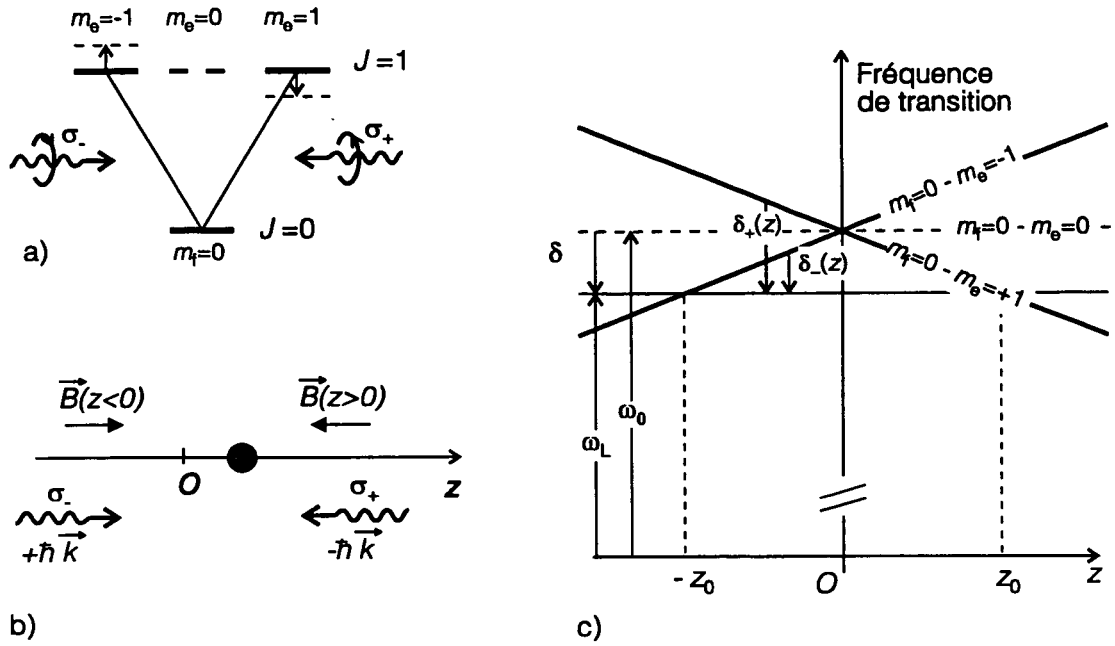


Figure II.17 Principe du piège magnéto-optique, à une dimension. (a) Une transition $J=0 \leftrightarrow J=1$ est éclairée par 2 lasers σ_+ et σ_- . Sous l'effet du champ magnétique, les sous-niveaux $m_e = \pm 1$ se déplacent. (b) Les deux faisceaux lasers σ_+ et σ_- se propagent en sens inverse l'un de l'autre, le long de l'axe z pris comme axe de quantification. Le champ magnétique est parallèle à l'axe z , linéaire en z . Le piège magnéto-optique exerce sur l'atome une force de rappel $F(z) \approx -\kappa z$. (c) Les transitions $m_f=0 \leftrightarrow m_e=1,0,-1$ sont déplacées par effet Zeeman. Les lasers sont à une fréquence ω_L inférieure à la fréquence atomique ω_0 . L'atome est résonnant avec le laser σ_+ (respectivement σ_-) à l'abscisse z_0 (respectivement $-z_0$). Si $z < 0$, alors $\delta_+(z) < \delta_-(z)$: l'atome subit une force de pression de radiation plus forte de la part du laser σ_+ que du laser σ_- , ce qui le ramène vers l'origine (et vice-versa si $z > 0$).

Il existe deux points particuliers, $\pm z_0$, pour lesquels l'atome est en résonance avec le faisceau σ_{\pm} :

$$\omega_{0+}(z_0) = \omega_L \tag{II.17}$$

Si on fait l'hypothèse très simplificatrice que l'atome n'interagit avec les lasers que lorsqu'il se trouve à résonance avec l'un d'eux, on a alors une image "ping-pong" du piégeage des atomes : si l'atome part en vol libre de $z = 0$ vers $z > 0$, il se déplace en vol libre jusqu'à $+z_0$; il est alors résonnant avec le laser σ_+ qui exerce sur lui une pression dirigée vers $z < 0$; l'atome est renvoyé vers $z < 0$ jusqu'à atteindre $-z_0$ où il interagit avec le laser σ_- qui le renvoie vers $z > 0$...

L'atome interagit en réalité en permanence avec les deux lasers et la pression de radiation exercée par les lasers sur l'atome dépend de la position comme l'indique la figure II.18 : la position joue ici le même rôle que la vitesse dans une mélasse Doppler (cf. Introduction générale). La pression de radiation du laser σ_+ (respectivement σ_-) est plus importante que celle du laser σ_- (respectivement σ_+) si $z > 0$ (respectivement $z < 0$). La force de piégeage est maximale en $\pm z_0$. Autour de l'origine, cette force est celle d'un oscillateur harmonique avec une constante de raideur κ définie par :

$$F(z \approx 0) = -\kappa z \tag{II.18}$$

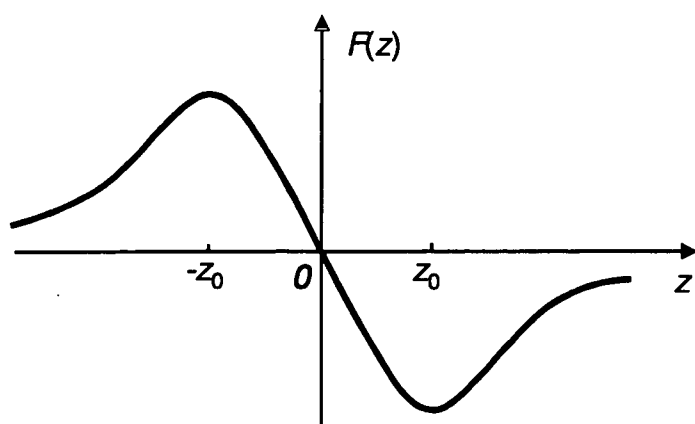


Figure II.18 *Force de rappel dans un piège magnéto-optique.* Le module de la force est maximal aux points $\pm z_0$. La force est harmonique au voisinage de $z = 0$:

$$F(z \approx 0) \approx -\kappa z_0.$$

Jusqu'ici, nous n'avons décrit que le piégeage, c'est-à-dire la dépendance en position des forces de pression de radiation. Mais, et c'est un atout important du piège magnéto-optique, il existe aussi un effet de friction, c'est-à-dire une dépendance en vitesse de la pression de radiation. Ceci modifie profondément la dynamique du piège. Il est en effet évident que le mécanisme de refroidissement Doppler va agir, au moins dans la zone où le champ magnétique est suffisamment petit, ce qui se produit pour $z \approx 0$. Le choix d'un désaccord $\delta < 0$ est précisément destiné à obtenir un effet de refroidissement et non de chauffage. Sous l'effet combiné des forces de rappel et de friction, le mouvement atomique est donc celui d'un oscillateur harmonique amorti.

Enfin, le caractère aléatoire de l'émission spontanée engendre des fluctuations de la pression de radiation qui empêchent le mouvement atomique de s'amortir totalement. Finalement, le mouvement atomique est bien décrit par un modèle d'oscillateur harmonique amorti soumis à des fluctuations (équation de Langevin). Le mouvement est en général suramorti et, dans l'état stationnaire, les atomes ont un mouvement diffusif dans une zone éventuellement beaucoup plus petite que $[-z_0 ; +z_0]$.

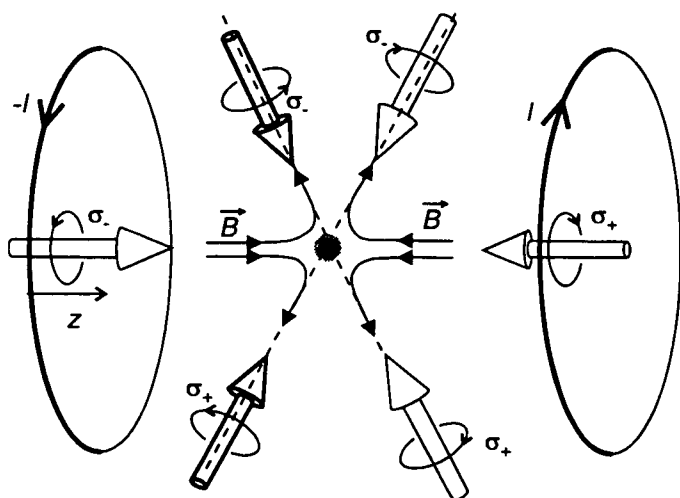


Figure II.19 *Principe du piège magnéto-optique à trois dimensions.*

Les atomes sont piégés au centre d'un champ magnétique quadrupolaire par six faisceaux lasers. Les faisceaux, polarisés circulairement, sont alignés deux à deux le long de trois axes formant un trièdre.

Le principe du piège magnéto-optique, exposé ici à une dimension, se généralise à 3 dimensions (cf. figure II.19). Pour cela, on crée un champ magnétique quadrupolaire à l'aide de 2 bobines en configuration anti-Helmoltz, qui varie linéairement autour de

l'origine, dans toutes les directions. On dispose ensuite 3 paires de faisceaux lasers, polarisés circulairement, sur 3 axes orthogonaux.

Enfin, notons que les mécanismes à gradient de polarisation, comme le refroidissement Sisyphe (cf. Annexe B), peuvent contribuer au confinement et au refroidissement, ce qui accroît l'efficacité des pièges magnéto-optiques [StF91].

3.3.3 Dispositif de piégeage

Les pièges magnéto-optiques peuvent être réalisés sur les transitions $J \leftrightarrow J + 1$, plus générales que les transitions $J = 0 \leftrightarrow J = 1$. Nous avons utilisé la transition $J = 1(2^3S_1) \leftrightarrow J = 2(2^3P_2)$ de l'hélium, comme pour le ralentissement du jet atomique (figure II.20.b). Le schéma devient alors plus complexe puisque l'on excite 3 transitions σ_+ ($m_f = -1, 0, +1 \leftrightarrow m_e = m_f + 1$) et 3 transitions σ_- ($m_f = -1, 0, +1 \leftrightarrow m_e = m_f - 1$). Les fréquences des transitions $\omega_{ij}(z)$ (où $i = m_f$ et $j = m_e$) sont données par :

$$\omega_{ij}(z) = \omega_0 + \mu_B \left(\frac{\partial B}{\partial z} \cdot z \right) (g_e \times i - g_f \times j) \quad (\text{II.19})$$

où $g_e = 3/2$ et $g_f = 2$ sont les facteurs de Landé des états 2^3S_1 et 2^3P_2 . Remarquons que pour les transitions "extrêmes" $m_f = \pm 1 \leftrightarrow m_e = \pm 2$, l'effet Zeeman est le même que celui d'une transition $J = 0 \leftrightarrow J = 1$ avec $g_e = 1$.

On pourrait définir des coordonnées $z_{0,ij}$ pour chaque point où l'atome est à résonance avec les lasers sur une des transitions $\omega_{ij}(z)$. Cependant, il est connu que sur une transition $J \leftrightarrow J + 1$, éclairée par 2 lasers σ_+ et σ_- de même intensité, la plupart des transitions s'effectuent sur les transitions $m_f = \pm J \leftrightarrow m_e = \pm J \pm 1$ (ceci vient du rapport des coefficients de Clebsch-Gordan qui lorsqu'on est sur un niveau $m_f = \pm J$ favorisent l'absorption d'un photon σ_{\pm} et donc ont tendance à retomber ensuite dans le même état $m_f = \pm J$. Voir [Cas92]). Nous définissons donc z_0 par rapport aux transitions $m_f = \pm J \leftrightarrow m_e = \pm J \pm 1$ par :

$$\omega_{J,J+1}(z_0) \equiv \omega_L \quad (\text{II.20})$$

Il n'est pas assuré que l'accumulation de la population atomique sur la transition $m_f = \pm J \leftrightarrow m_e = \pm J \pm 1$, qui justifie la définition (II.18), se produise dans une situation tridimensionnelle, puisque cette accumulation n'a été démontrée qu'à une dimension. Or, à 3 dimensions, la symétrie du problème est très différente. Toutefois, la définition de z_0 par (II.18) garde son intérêt pour donner un ordre de grandeur.

[StF91] A. Steane and C.J. Foot, *Laser Cooling below the Doppler Limit in a Magneto-Optical Trap*, Europhys. Lett. **14**, p. 231-236 (1991).

[Cas92] Y. Castin, *Les limites du refroidissement laser dans les mélasses optiques à une dimension*, Thèse de l'Université Paris VI (1992).

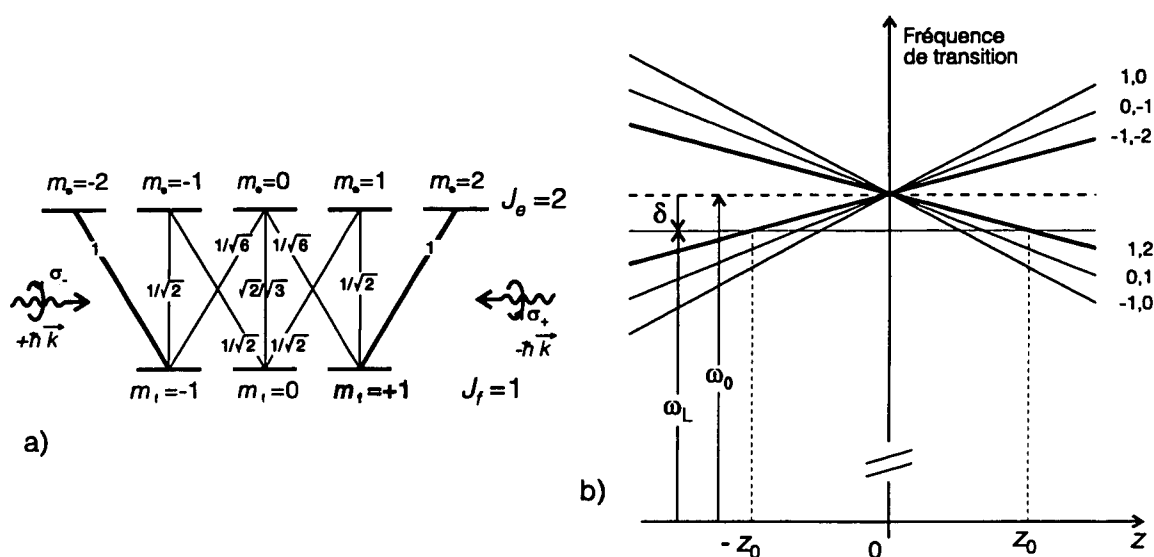


Figure II.20 Piégeage sur la transition $J_f=1 \leftrightarrow J_e=2$. Pour tracer le déplacement des transitions $m_f \leftrightarrow m_e$, on a tenu compte des facteurs de Landé de la transition $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_2$ utilisée pour l'hélium.

Le champ magnétique est créé par les 2 bobines Q_1 et Q_2 déjà décrites au § II.3.2.2.2. Ces deux bobines sont en configuration anti-Helmoltz, c'est-à-dire qu'elles sont parcourues par des courants de même intensité mais de sens différents. Le champ créé par ces bobines se raccorde au champ de ralentissement à l'extérieur des bobines. Au centre des bobines, le champ est de symétrie quadrupolaire. Avec le courant habituel de 52 A, le gradient au centre des bobines, sur l'axe de révolution est de 16 G.cm^{-1} et d'un facteur 2 plus faible, soit 8 G.cm^{-1} sur tout axe perpendiculaire (cf. symétrie quadrupolaire). Ces bobines sont placées sous vide. Chaque bobine est constituée d'un enroulement de 5 spires de diamètre 8 cm, en tube de cuivre ($\varnothing_{\text{intérieur}} = 1 \text{ mm}$). Elles sont refroidies par circulation d'eau à l'intérieur même du tube de cuivre.

Les faisceaux lasers sont constitués de 6 faisceaux disposés deux à deux sur 3 axes perpendiculaires. Chaque faisceau a une polarisation σ_+ si on prend pour référence le champ magnétique du côté du piège où le faisceau est introduit. Sur l'axe du jet, qui est aussi l'axe de révolution des bobines, le faisceau de ralentissement joue le rôle d'un des faisceaux de piège. Il a une intensité $I \approx 20 I_{\text{sat}}$ ($\Omega_1 \approx 3 \Gamma$) et un diamètre de 2 cm au niveau du piège. Le deuxième faisceau sur cet axe, appelé "contre-ralentisseur" est introduit avec un angle de 3° pour des raisons d'encombrement géométrique (mais l'alignement des faisceaux d'un piège n'est pas critique). Il a une intensité $I \approx 10 I_{\text{sat}}$ ($\Omega_1 \approx 2 \Gamma$) et un diamètre de 2 cm. Dans les dimensions perpendiculaires à l'axe du jet, on a disposé 2 faisceaux rétro réfléchis, perpendiculaires entre eux, dont les axes sont à 45° de la verticale. Leur diamètre est de 1 à 1,5 cm et leur intensité typique de $100^\circ I_{\text{sat}}$ ($\Omega_1 \approx 7 \Gamma$) sur un des faisceaux et de $50 I_{\text{sat}}$ ($\Omega_1 \approx 5 \Gamma$) sur l'autre (la différence vient de particularités du montage optique et non de nécessités physiques). Le désaccord utilisé vaut typiquement $\delta \approx -3 \Gamma$.

3.3.4 Mesure des paramètres physiques du piège magnéto-optique

3.3.4.1 Vue d'ensemble des systèmes de détection

Les paramètres qui permettent de caractériser un piège d'atomes froids sont tout d'abord le nombre d'atomes piégés et le temps moyen passé par les atomes dans le piège ("durée de vie du piège"). Ces deux paramètres déterminent l'efficacité du piégeage. Un piège est également caractérisé par des paramètres dynamiques, sa taille et sa forme d'une part (distribution en position), sa température d'autre part (distribution en vitesse).

L'hélium n'avait jamais été piégé auparavant et ses caractéristiques sont assez différentes de celles des atomes piégés jusque là. Rappelons en effet qu'il faut manipuler des atomes métastables, issus d'un jet de faible intensité, que la longueur d'onde de refroidissement est inhabituelle et que les vitesses caractéristiques sont grandes. En conséquence, notre système de détection est profondément différent de ce qui se fait plus couramment. Par exemple, pour les alcalins, le nombre beaucoup plus élevé d'atomes en jeu et les longueurs d'onde de travail plus proches du visible permettent de mesurer l'ensemble des paramètres du piège avec des méthodes optiques légères (caméras CCD standard, faisceaux sondes).

La solution à laquelle nous sommes parvenus est un ensemble de trois détecteurs [24], chacun étant sensible à une particule différente : une caméra CCD refroidie, un multiplicateur d'électrons et une galette de microcanaux. La détection des photons de fluorescence par la caméra CCD refroidie donne accès au nombre d'atomes piégés, et à la forme du piège. La détection, par le multiplicateur d'électrons, des ions formés par collision Penning avec les métastables donne la durée de vie du piège, ainsi qu'une mesure supplémentaire du nombre d'atomes piégés. Ce signal d'ionisation permet aussi d'étudier les processus collisionnels entre atomes piégés et refroidis, et d'avoir accès à la dynamique du piège. Enfin, la détection par la galette de microcanaux des atomes métastables qui s'échappent lorsque l'on a coupé le piège donne des informations très importantes, notamment par des mesures de temps de vol : température des atomes piégés, champs magnétiques résiduels. La galette est de plus un élément clef de l'expérience de refroidissement sub-recul, en donnant accès à la distribution en position des atomes issus du piège, comme on le verra au paragraphe 4.4.

Nous décrivons maintenant les différents détecteurs et relierons les paramètres physiques du piège aux signaux expérimentaux. La physique du piège que nous avons tirée de ces signaux sera présentée au paragraphe suivant (§ II.3.3.5).

3.3.4.2 Fluorescence des atomes piégés. Caméra CCD

Les atomes sont piégés par des faisceaux lasers intenses et proches de résonance. La transition atomique est donc saturée et les atomes fluorescent intensément (environ $\Gamma/2 \approx 5 \times 10^6$ photons spontanés sont émis par seconde et par atome).

Nous utilisons cette fluorescence pour obtenir une image du piège à l'aide d'une caméra CCD (figure II.21). Une lentille de diamètre 42 mm est placée à 17 cm du piège

[24] Notons que le groupe de Tokyo, qui a piégé d'autres métastables que He*, (Ne* ([SST89], [SST92a], [SST92b]), Ar* et Kr* ([KaS90])) a été conduit à la même solution.

(à l'extérieur de l'enceinte à vide) pour collecter les photons de fluorescence. L'angle solide de l'optique de collection ne permet donc de collecter que 0,4 % des photons émis.

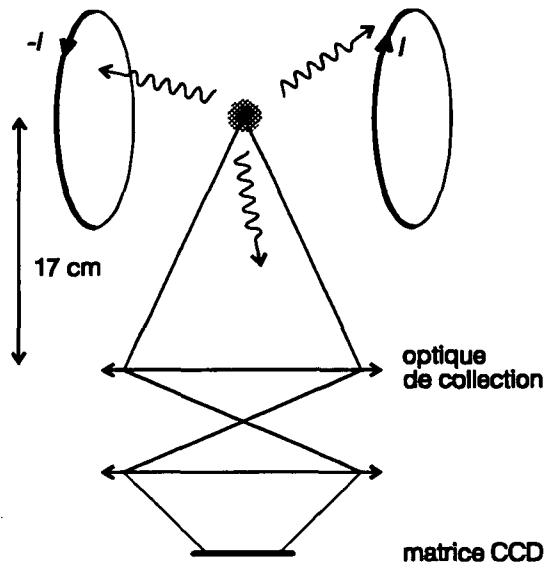


Figure II.21 *Mesure de la fluorescence du piège.* L'optique de collection est constituée d'un doublet achromatique de 42 mm de diamètre, suivi d'un objectif photographique standard.

La caméra CCD (Hamamatsu C3140-51) a la particularité d'être refroidie à -30°C pour limiter le bruit de fond. Elle permet ainsi de mesurer efficacement le taux de lumière parasite en l'absence d'atomes piégés et, par soustraction, d'obtenir une image bien contrastée. En outre, la matrice CCD (au Si) possède un rendement quantique non négligeable à la longueur d'onde de $1,08\ \mu\text{m}$, bien que faible. La matrice CCD comporte 510×492 pixels, chaque pixel ayant une dimension de $17\ \mu\text{m} \times 13\ \mu\text{m}$.

Nous avons soigneusement étalonné cette caméra à $1,083\ \mu\text{m}$ pour pouvoir compter de manière fiable le nombre d'atomes. Nous estimons que la calibration finale possède une incertitude inférieure à 2.

Malgré le faible rendement du CCD, la sensibilité du système est remarquable. L'optique utilisée donne une résolution de $32\ \mu\text{m}$ par pixel sur l'axe horizontal et $23\ \mu\text{m}$ par pixel sur l'axe vertical (cf. asymétrie des pixels du CCD). Des temps d'intégration d'une seconde (le minimum permis par l'électronique de la caméra) sont suffisants pour que l'image d'un piège de 100 atomes seulement, sur une surface de 20×30 pixels environ, se distingue du bruit de fond. Ce dispositif pourrait imaginer un piège de 4 atomes seulement, en une seconde, si on optimisait l'optique pour collecter un photon spontané sur 4.

3.3.4.3 Flux d'ions issus du piège. Multiplicateur d'électrons

Les triplets métastables provoquent des ionisations Penning (cf. § II.3.2.2.3). Les ions issus de ces collisions sont détectables avec un rendement proche de l'unité sur un multiplicateur d'électrons (voir le schéma II.15 ci-dessus). Nous étudions ici très brièvement ce signal d'ionisation, qui fournit des informations sur le piège et les collisions

qui s'y produisent. Des informations supplémentaires sont données dans l'article [BEC92].

Les collisions Penning faisant intervenir les atomes He^* piégés sont de deux types.

D'une part se produisent des collisions entre un atome piégé et un atome ou une molécule du gaz résiduel (GR) :



Ces collisions sont des collisions habituelles, à température ambiante. En effet, seuls les atomes d'hélium sont refroidis, le gaz résiduel étant à 300 K, et donc l'énergie disponible dans le référentiel du centre de masse pour la collision (II.19) a le même ordre de grandeur que si les deux espèces étaient à 300 K.

Ces collisions nous renseignent sur le nombre d'atomes piégés. En effet, le nombre de collisions se produisant par seconde est proportionnel au nombre d'atomes piégés et à la pression des gaz résiduels. Or, les atomes ne peuvent sortir du piège que par collision, car le piégeage magnéto-optique est stable en l'absence de processus collisionnels. Le flux d'ions détecté est donc, en régime stationnaire, directement [25] le nombre d'atomes piégés (ou éjectés) par seconde. Ceci fournit un premier renseignement important : en comparant le flux de métastables initialement dans le jet, susceptibles d'être ralentis et donc piégés, à ce flux d'ions, on déduit l'efficacité globale du ralentissement et de la capture dans le piège. Cette efficacité est de l'ordre de 1/20. Ce facteur est en accord avec les estimations basées sur les simulations Monte-Carlo qui montre le rôle néfaste de la diffusion spatiale transverse du jet ralenti qui empêche de capturer la majorité des atomes ralentis (cf. § II.3.2.2.4).

Comme on peut par ailleurs mesurer la durée de vie du piège (également grâce au signal d'ionisation), on a aussi accès au nombre d'atomes piégés : c'est le produit du flux d'ions détectés par seconde au début de la décroissance par la durée de vie du piège (dans le cas d'une décroissance exponentielle).

Il existe un deuxième type de collisions, les collisions entre métastables piégés, qui nous renseignent de manière très différente sur le piège :



Ces collisions présentent un intérêt particulier en elles-mêmes puisqu'elles se produisent entre deux atomes ultrafroids avec une énergie de 100 μK à 1 mK seulement. Nos mesures ont révélé des taux de collisions inhabituellement élevés [BEC92]. Nous avons

[BEC92] F. Bardou, O. Emile, J.-M. Courty, C.I. Westbrook, and A. Aspect, *Magneto-Optical Trapping of Metastable Helium : Collisions in the Presence of Resonant Light*, Europhys. Lett. **20**, p. 681-686 (1992).

[25] Il faut cependant tenir compte du fait qu'une collision avec le gaz résiduel peut éjecter un atome sans ioniser le gaz résiduel avec une probabilité de 100 %. Ceci introduit un simple facteur correctif (cf. [BEC92]).

[BEC92] F. Bardou, O. Emile, J.-M. Courty, C.I. Westbrook, and A. Aspect, *Magneto-Optical Trapping of Metastable Helium : Collisions in the Presence of Resonant Light*, Europhys. Lett. **20**, p. 681-686 (1992).

montré en particulier que ce taux très élevé est dû à des collisions entre un atome dans l'état 2^3S_1 et un atome dans l'état 2^3P_2 . Ces deux états interagissent par un potentiel en $1/R^3$, beaucoup plus attractif à longue distance que l'interaction en $1/R^6$ entre deux états S .

En outre, ces collisions ne dépendent pas directement du nombre d'atomes piégés, mais plutôt du carré de la densité d'atomes piégés. Ceci permet de séparer, dans le flux d'ions, la contribution des collisions avec le gaz résiduel de la contribution des collisions entre atomes piégés. Nous avons montré aussi qu'on pouvait avoir ainsi accès à la dynamique du piège avec une résolution temporelle de 100 ns, ce qui est à notre connaissance 3 à 4 ordres de grandeur plus rapide qu'aucune autre méthode.

Enfin, précisons que ce signal d'ionisation est un signal intense qui autorise la détection d'un nombre très faible d'atomes piégés (de l'ordre de quelques dizaines en moyennant sur une seconde). En effet, tout atome piégé donne lieu, lorsqu'il est éjecté, à un signal sur le multiplicateur d'électrons, avec un rendement quantique de 0,1 à 0,4 selon le type de collisions. Cette détection se fait quasiment "sur fond noir", le bruit de fond étant négligeable.

3.3.4.4 Distribution en vitesse des atomes piégés. Galette de microcanaux

Pour mesurer la distribution en vitesse des atomes piégés, la méthode bien établie [LWW88] consiste à effectuer un temps de vol [26]. Après chargement, on coupe le piège et les atomes tombent alors en vol libre. La fluorescence (ou l'absorption) d'un faisceau sonde placé quelques centimètres sous le piège, observée en fonction du temps, donne un signal de temps de vol à partir duquel on remonte à la température des atomes piégés.

Pour le piège d'hélium, plusieurs difficultés se présentent. Le nombre d'atomes piégés est faible, et la fluorescence à la longueur d'onde de $1,08 \mu\text{m}$ n'est pas détectée efficacement. En outre, les vitesses caractéristiques étant importantes, la densité du nuage d'atomes piégés puis lâchés va diminuer très rapidement dans le temps. Ainsi, la détection du temps de vol par un signal optique semble impossible dans notre cas.

• Galette de microcanaux

Pour augmenter l'efficacité de la détection, on met à profit la possibilité de détecter les atomes d'hélium métastables un par un avec un bon rendement quantique sur un multiplicateur d'électrons. Cependant, même ceci est difficile : le multiplicateur d'électrons décrit au paragraphe précédent (sa grille d'entrée étant portée à un potentiel positif pour éviter les ions), placé à 10 cm sous le piège, ne capte sur sa surface de

[LWW88] P.D. Lett, R.N. Watts, C.I. Westbrook, W. Phillips, P.L. Gould, and H.J. Metcalf, *Observation of Atoms Laser Cooled below the Doppler Limit*, Phys. Rev. Lett. **61**, p. 169-172 (1988).

[26] Nous avons vu que le signal d'ionisation (§ II.3.3.4.3) donnait aussi accès à la dynamique du piège. Cependant, comme la mise en place d'un temps de vol est nécessaire pour l'expérience de résonance noire, c'est le signal de temps de vol que nous avons utilisé pour mesurer la température, et non le signal d'ionisation.

0,5 cm² qu'un atome sur 2000 [27]. En effet, les atomes s'échappent de manière quasi-isotrope de la zone du piège et c'est l'angle solide sous lequel la surface du détecteur est vue depuis le piège qui définit la proportion d'atomes collectés.

Pour augmenter cette proportion, il faut un détecteur de plus grande surface, placé plus proche du piège. Ainsi, nous avons mis en place une galette de microcanaux de 32 mm de diamètre, placée à 5 cm du piège. Elle permet de collecter 1 atome sur 40, si on fait l'hypothèse que les atomes s'échappent du piège de manière isotrope.

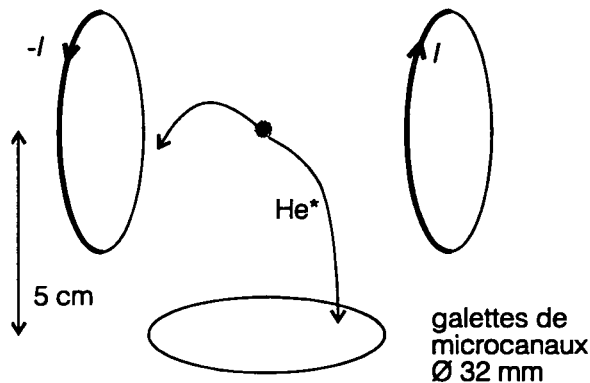


Figure II.22 Détection du piège par galettes de microcanaux. Les galettes de microcanaux offrent l'avantage d'un bon rendement quantique pour la détection des atomes d'hélium métastables. En outre, la surface de détection est importante, ce qui permet de collecter au moins 1 atome issu du piège sur 40.

Une galette de microcanaux est un disque en céramique d'un millimètre d'épaisseur qui résulte de l'assemblage d'un grand nombre de multiplicateurs d'électrons à dynode continue (channeltron) (voir la figure II.35 au § II.4.4.1). Un atome métastable arrache un électron de la surface de la galette. Cet électron est accéléré par une tension dans un canal de 12,5 μ de diamètre, pour les galettes RTC G12-36 que nous avons utilisées. Entrant en collision avec la paroi, il arrache plusieurs électrons qui sont accélérés à leur tour et arrachent plusieurs électrons en rencontrant la paroi, etc...

A la sortie du canal de la première galette, on obtient typiquement 10^3 à 10^4 électrons pour un atome incident. Ces électrons sont répartis sur un certain nombre de canaux d'une deuxième galette, et sont amplifiés selon le même principe. Chaque atome détecté donne ainsi lieu à une bouffée de 10^8 électrons environ, d'une durée de quelques nanosecondes.

A la sortie de la deuxième galette, un amplificateur de charge, suivi d'une série d'amplificateurs, permet de détecter le passage de chaque bouffée d'électrons associée à un seul événement primaire.

De plus, les électrons produits sont envoyés sur un écran de phosphore, faisant fluorescer l'écran au point d'impact, ce qui indique leur position (cf. § II.4.4). Nous avons réalisé nous-mêmes le montage électrique et mécanique des galettes, suivant le modèle de Philippe Roncin (LCAM, Orsay).

[27] Nous avons effectivement détecté les premiers temps de vol ainsi. Mais les temps d'acquisition nécessaires pour avoir un signal exploitable sont très longs (quelques dizaines de minutes) et incitent à chercher une méthode plus efficace.

• *Modèle de temps de vol*

Pour mesurer la température des atomes piégés, nous intégrons sur la surface de la galette le flux d'atomes issus du piège dont on vient de couper les faisceaux lasers et le champ magnétique. La galette est donc utilisée ici comme un simple multiplicateur d'électrons, de grande surface de collection. En effet, pour l'étude de la température du piège, on ne s'intéresse pas à la distribution en position des atomes d'hélium arrivant sur la galette (vs § II.4.4), car les vitesses caractéristiques relativement élevées des atomes dans le piège créent une distribution pratiquement homogène sur la galette.

La forme du signal de temps de vol avec la galette microcanaux est assez différente de celle obtenue sur d'autres expériences avec un faisceau sonde. Pour pouvoir l'interpréter, nous avons dû modéliser le temps de vol correctement. Nous ne présentons ici que les hypothèses et résultats importants :

1) Le piège est considéré comme une source ponctuelle d'atomes (diamètre inférieur au millimètre, à comparer à 32 mm pour la galette) dont la distribution en vitesse est isotrope et maxwellienne.

2) Après coupure du piège, les atomes tombent en vol libre sous la seule action de la gravité.

3) Pour déterminer le flux d'atomes, l'aspect tridimensionnel du mouvement et la taille finie du détecteur doivent absolument être pris en compte. En effet, la galette recueille surtout les atomes dont la vitesse initiale est dirigée vers elle : la majorité des atomes dont la vitesse initiale est dirigée hors du champ de la galette aboutissent à côté de la galette car la gravité ne ramène que peu d'atomes sur la galette. Ainsi, la galette effectue une sélection spatiale des atomes détectés qui affecte profondément le temps de vol.

4) Les vitesses caractéristiques dans le piège d'hélium ($\delta v \approx 0,5$ à 1 ms^{-1}) produisent des temps de vol intermédiaires entre deux régimes limites :

- régime des faibles vitesses où la gravitation produit une accélération significative [28]. Dans ce régime, la largeur du temps de vol est déterminée par la température, alors que la position du pic du temps de vol est fixée par l'accélération gravitationnelle, quasi-indépendamment de la température.

- régime des vitesses élevées où la gravitation est négligeable pendant le temps de vol. Le mouvement des atomes est alors quasi-isotrope et la position aussi bien que la largeur du pic de temps de vol sont significatives de la température des atomes.

• *Problèmes expérimentaux liés à l'observation des temps de vol*

Des exemples de distributions de temps de vol sont donnés sur la figure II.23. L'obtention de temps de vol tels que II.23.b demande des précautions expérimentales. La condition délicate à remplir, mais essentielle, est celle du vol libre des atomes pendant leur temps de chute. Il faut soigner particulièrement la coupure des faisceaux lasers et

[28] Le cas typique des pièges à atomes de césium, dont les vitesses caractéristiques sont de quelques cm.s^{-1} .

celle des champs magnétiques. La précision de nos mesures de distribution en vitesse est légèrement meilleure que v_R , ce qui fixe les conditions à satisfaire :

- Les atomes doivent absorber moins d'un photon pendant les 50 ms environ que dure leur chute du piège au détecteur. La lumière parasite résonnante doit donc être très inférieure à $4 \cdot 10^{-6} I_{\text{sat}}$, soit $6 \cdot 10^{-7} \text{ mW/cm}^2$, alors que l'intensité pendant la phase de piégeage est de $300 I_{\text{sat}}$. L'atténuation doit donc être de 10^8 environ. On réalise cette atténuation en coupant le faisceau avec des modulateurs acousto-optiques en double passage [29] d'une part, et en plaçant le long des faisceaux des diaphragmes pour limiter la pénétration dans l'enceinte de lumière laser ambiante. Notons que les faisceaux lasers de piégeage sont coupés le plus rapidement possible ($\leq 100 \text{ ns}$) par les modulateurs acousto-optiques pour ne pas introduire de régime transitoire qui modifierait la température du piège [LPR89].

- Le champ magnétique doit produire des modifications de la distribution en vitesse très inférieures à v_R . Si on suppose que le gradient de champ magnétique éventuel est constant entre le piège et la galette, le changement Δv_B de vitesse atomique induit par ce gradient de champ ∇B sera :

$$\Delta v_B = \frac{\mu_B}{M} \nabla B \times t_{\text{vol}} \times g_f \quad (\text{II.23})$$

où t_{vol} est le temps de vol typique ($t_{\text{vol}} \approx 50 \text{ ms}$).

La condition $\Delta v_B \ll v_R$ se traduit donc par :

$$\nabla B \ll \frac{v_R}{t_{\text{vol}}} \times \frac{M}{g_f \mu_B} \quad (\text{II.24})$$

soit

$$\nabla B \ll 65 \text{ mG.cm}^{-1} \quad (\text{II.25})$$

Rappelons que le piégeage exige des gradients de champ de 15 G.cm^{-1} et que la zone de piégeage est environnée de champs de plusieurs centaines de gauss. Ces champs doivent donc être supprimés très soigneusement dès que les atomes sont lâchés du piège, avec une technique que nous décrirons au § II.4.3. Une coupure imparfaite des champs magnétiques se traduit soit par plusieurs pics sur le temps de vol (cf. 3 composantes Zeeman de l'état 2^3S_1 , figure II.23.a), soit par un changement de la forme du pic de temps de vol par rapport au modèle, ce qui est plus difficile à détecter. L'analyse fine des temps de vol donne donc un premier diagnostic de la qualité de la coupure des champs magnétiques. Ceci étant un point clef de l'expérience, nous verrons (§ II.4.3) que nous avons mis au point une technique qui permet un contrôle beaucoup plus fin du champ magnétique résiduel.

[29] Des interrupteurs mécaniques ont été essayés, en plus des modulateurs acousto-optiques, pour assurer une coupure parfaite de la lumière. En fait, ils n'ont pas été nécessaires : la coupure par les modulateurs s'est révélée suffisante.

[LPR89] P.D. Lett, W.D. Phillips, S.C. Rolston, C.E. Tanner, R.N. Watts, and C.I. Westbrook, *Optical molasses*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, p. 2084-2107 (1989).

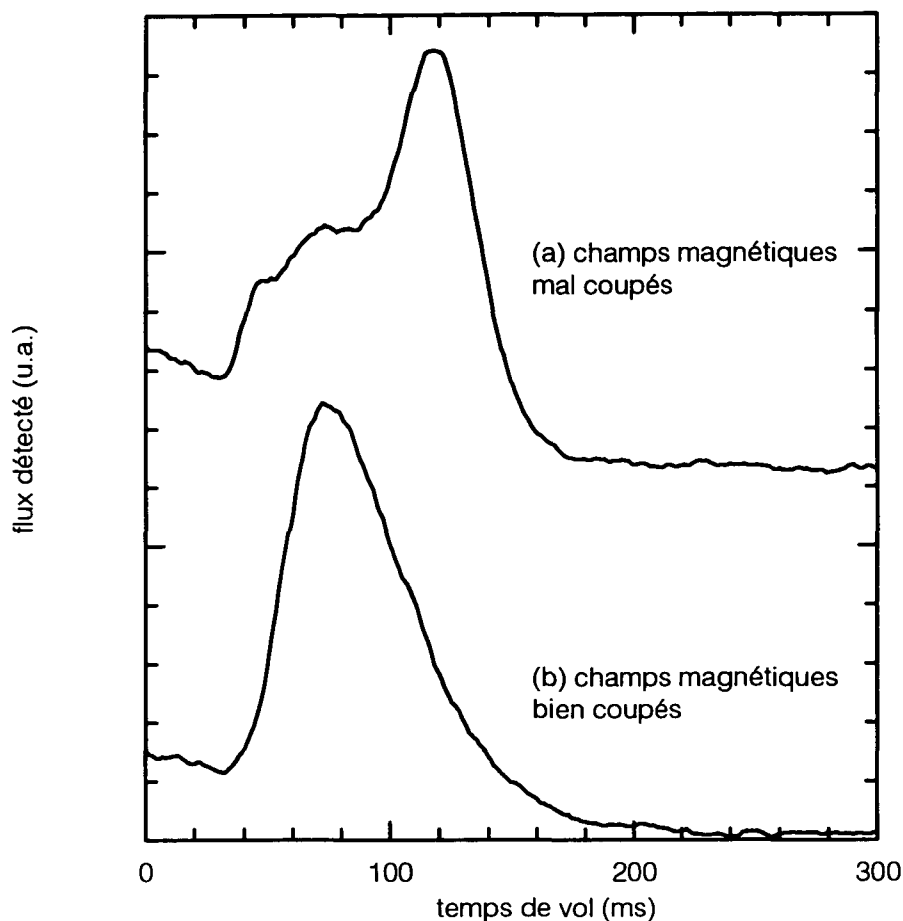


Figure II.23 Temps de vol des atomes issus du piège. Dans les deux cas, on accumule 70 000 atomes dans le piège, et on effectue 30 lâchers de piège.

(a) Le gradient de piégeage est coupé 10 ms après la coupure des lasers. Pendant ces 10 ms, les atomes ne sont pas en vol libre, mais subissent une force magnétique qui dépend de leur niveau Zeeman. On distingue d'ailleurs 3 composantes dans le pic, vraisemblablement associées aux trois sous-niveaux Zeeman de l'état 2^3S_1 . Un tel temps de vol est difficilement exploitable pour mesurer la température du piège, mais est utile pour diagnostiquer, comme ici, un problème de coupure de champs magnétiques.

(b) Le gradient de piégeage est correctement coupé. On observe alors un seul pic. De la position du sommet du pic, comparée à un modèle de temps de vol, on déduit que la vitesse quadratique moyenne des atomes est initialement de $0,3 \text{ m.s}^{-1}$ (valeur la plus basse que nous ayons obtenue). Si la dispersion des vitesses des atomes piégés était nulle, le temps de vol serait un pic infiniment étroit à 100 ms.

3.3.4.5 Synthèse des différents systèmes de détection

Trois détecteurs complémentaires ont été mis au point progressivement pour étudier le piège (tableau II.4).

Le multiplicateur d'électrons a joué le rôle essentiel pour la mise au point du piège : c'est le détecteur le plus sensible pour détecter en continu la présence d'un piège, même faible. En outre, sa capacité à détecter les ions et sa résolution temporelle sont très utiles pour les études de collisions.

La caméra CCD est utilisée pour un comptage précis des atomes piégés et pour avoir accès à la taille et à la forme du piège.

Enfin, la galette de microcanaux est le détecteur le plus important pour l'étude de la température du piège et pour les expériences de résonances noires (compensation des champs magnétiques parasites, mesure des températures sub-recul).

Détecteur	Multiplicateur d'électrons	Caméra CCD	Galette de microcanaux
Particule détectée	ions	photons 1,083 μ	atomes He*
Rendement quantique	$\geq 0,5$?	$\approx 0,5$
Sensibilité avec 1 s d'intégration	<ul style="list-style-type: none"> • ≤ 50 atomes piégés, • 5-10 atomes piégés \rightarrow 1 ion détecté 	100 atomes piégés	≈ 1000 atomes piégés ?
Résolution temporelle utilisée (possible)	100 ns (quelques ns)	1 s (1 s)	1 ms (< 1 ns)
Résolution spatiale	<ul style="list-style-type: none"> • quelques cm^3 autour du détecteur • aire détecteur : $0,5 \text{ cm}^2$ 	32 $\mu \times$ 23 μ sur l'image du piège	$\leq 500 \mu$ pour la position d'impact des atomes
Paramètres physiques mesurés	<ul style="list-style-type: none"> • flux d'ions issus du piège • collisions piège-piège et piège-gaz résiduel • dynamique du piège 	<ul style="list-style-type: none"> • nombre d'atomes piégés • taille et forme du piège 	<ul style="list-style-type: none"> • Distributions en vitesse : <ul style="list-style-type: none"> - température du piège - effets du champ magnétique - températures sub-recul

Tableau II.4 Détection du piège magnéto-optique et des résonances noires sélectives en vitesse. Nous n'avons indiqué que les utilisations principales : il est évident par exemple que la galette de microcanaux peut aussi détecter des ions, et que le multiplicateur d'électrons peut aussi détecter des métastables.

3.4 Bilan : caractéristiques principales du piège magnéto-optique

Nous avons réalisé un piège magnéto-optique d'hélium métastable dans l'état 2^3S_1 . Pour alimenter ce piège, on part d'un jet cryogénique délivrant jusqu'à $4 \cdot 10^6$ atomes d'hélium métastables (2^3S_1) par seconde, à moins de $400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ($7 \cdot 10^{11} \text{ at} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$). Le jet est refroidi transversalement, ralenti et piégé par un laser accordé sur la transition $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_2$. Le jet est refroidi transversalement par une mélasse optique à deux dimensions, puis ralenti longitudinalement par un faisceau laser se propageant en sens

inverse, dans un champ magnétique inhomogène. Les atomes sont piégés par six faisceaux lasers dans un gradient de champ magnétique de l'ordre de 10 G.cm^{-1} . L'intensité typique des faisceaux lasers est de 10 à $100 I_{\text{sat}}$ ($\Omega_1 \approx 2-7 \Gamma$), et le désaccord typique est -3Γ . Le rayon du piège varie entre 250 et 500μ . Les densités maximales atteintes sont de l'ordre de 10^9 at.cm^3 .

Les premiers pièges réalisés contenaient quelques milliers d'atomes. Deux ans plus tard, après optimisation, nous obtenons couramment 10^5 à $2 \cdot 10^5$ atomes piégés.

Les atomes piégés sont à l'origine de collisions Penning, soit avec le gaz résiduel, soit entre atomes ultra-froids. A basse densité, les atomes restent piégés 1,1 s environ, dans un vide résiduel de $4 \cdot 10^{-8} \text{ mbar}$: ce sont les collisions avec le gaz résiduel qui limitent la densité. A haute densité, ce sont les collisions entre atomes ultra-froids qui limitent le nombre d'atomes piégés. Ces collisions ont un taux de réaction géant, de l'ordre de $10^7 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Nous avons montré qu'elles impliquent les atomes dans l'état excité 2^3P_2 .

Les vitesses quadratiques moyennes des atomes piégés varient entre 0,3 et 1 m.s^{-1} , selon les paramètres des faisceaux lasers, la valeur typique étant $0,5 \text{ m.s}^{-1}$. Les températures correspondantes varient entre 40 et $400 \mu\text{K}$.

4 Problèmes expérimentaux à résoudre pour l'observation du refroidissement par résonances noires

4.1 Introduction

Nous avons expliqué au § II.3 comment nous nous sommes dotés d'une source d'atomes suffisamment lents pour pouvoir interagir quelques millisecondes avec le faisceau laser de résonances noires. Pour observer le refroidissement par résonances noires, il faut maîtriser deux éléments supplémentaires : l'interaction atomes-lasers doit effectivement faire apparaître des résonances noires sélectives en vitesse ; la distribution en vitesse à l'issue de cette interaction doit être mesurée avec une précision suffisante. Ce paragraphe II.4 décrit la façon dont nous avons résolu les problèmes posés par ces deux objectifs.

Le refroidissement par résonances noires repose sur la sélectivité en vitesse de la diffusion en impulsion autour de $p = 0$, et en particulier sur l'annulation parfaite en $p = 0$ de cette diffusion. De manière idéale, lorsque l'atome n'interagit qu'avec 2 faisceaux lasers respectivement polarisés σ_+ et σ_- , qui se propagent en sens inverses et cohérents entre eux, excitant une transition fermée $J = 1 \leftrightarrow J = 1$, le taux de fluorescence de l'atome (et donc son coefficient de diffusion en impulsion) s'annule effectivement en $p = 0$, et seulement en $p = 0$. Ceci permet d'accumuler sélectivement les atomes dans les états $|\psi_{\text{NC}}(p=0)\rangle$. Tout couplage qui produit une évolution de l'état atomique interne ou externe pour les états $|\psi_{\text{NC}}(p \neq 0)\rangle$ va *a priori* nuire au processus de refroidissement.

Deux types de couplages parasites ont une influence quantitativement significative pour les expériences que nous avons réalisées. Il s'agit d'abord de la présence de lumière résonnante sur une transition atomique, mais n'ayant pas les propriétés de symétrie requises (polarisation et propagation). Nous analysons ce problème au paragraphe II.4.2 où nous montrons que la nouvelle expérience simplifie considérablement les contraintes sur l'optique : ceci apparaît comme un atout majeur de la nouvelle conception de l'expérience. Le deuxième couplage parasite important vient des champs magnétiques résiduels. Le contrôle de ces champs est un des points les plus délicats de cette expérience. Nous présentons au paragraphe II.4.3 un traitement théorique détaillé de l'effet des champs magnétiques parasites et décrivons les techniques qui permettent de maîtriser les champs magnétiques parasites. En outre, pour mesurer et compenser finement le champ magnétique, des expériences d'effet Hanle mécanique ont dû être réalisées. Elles seront exposées au chapitre suivant (§ III.2).

Les couplages optiques et magnétiques ne sont évidemment pas les seuls qui peuvent nuire au refroidissement par résonances noires. Les traitements que nous présentons ici doivent donc être considérés comme les prototypes de l'étude plus générale de l'effet de couplages parasites sur le refroidissement par résonances noires. Pour des expériences atteignant des températures encore plus basses, ou des densités plus grandes, d'autres effets (collisions atomiques, diffusion multiple, pesanteur, raies d'intercombinaison...) peuvent jouer un rôle essentiel : ils fixent des limites au refroidissement par résonances noires. Nous reviendrons en détail sur ce problème au chapitre V.

La mesure de la distribution en impulsion des atomes refroidis doit être réalisée avec une résolution de $p_R/10$ environ à 1, 2 et 3 D pour atteindre les objectifs fixés au § II.1. Le système que nous avons élaboré repose sur une méthode balistique comme dans l'expérience sur jet : on mesure une distribution en position pour déduire une distribution en impulsion. Pour cela, nous avons utilisé la galette de microcanaux suivie d'un écran de phosphore et d'une caméra CCD déclenchée. Ce détecteur apporte un aspect multicanal à la mesure, indispensable à l'acquisition de toute l'information sur la distribution en impulsion à deux dimensions avec la résolution fixée. Nous décrivons ce détecteur au paragraphe II.4.4.

4.2 Configuration laser. Contraintes optiques à respecter

Nous mentionnons ici les deux points auxquels nous nous sommes intéressés et qui nous ont paru les plus importants : le problème de sortie des faisceaux et le problème de courbure des fronts d'onde. La conclusion essentielle la suivante : la nouvelle conception de l'expérience, tout en permettant d'atteindre des températures beaucoup plus basses, simplifie radicalement les problèmes d'optique, alors que ceux-ci étaient délicats dans l'expérience sur jet.

• *Sortie des faisceaux*

Dans l'expérience sur jet, l'alignement des faisceaux devait être particulièrement soigné pour préserver la cohérence de l'interaction atomes-lasers sur le bord des faisceaux.

Ici, nous disposons d'une source atomique compacte et pulsée. On peut donc, sans réduire significativement la durée d'interaction, appliquer les faisceaux lasers de résonances noires de manière pulsée, *en les éteignant juste avant que les atomes n'atteignent le bord des faisceaux*. Ainsi, les atomes n'ont plus à traverser la zone critique. **Cette simplification est très importante en pratique.**

• *Courbure des fronts d'onde*

Les faisceaux lasers doivent pouvoir être considérés comme des ondes planes, pour que les états noirs définis par l'équation (I.35) soient identiques en tout point de l'espace : sinon, un atome atteignant l'état noir en un point donné va en être éjecté lorsqu'il se déplace.

Pour simplifier les notations, considérons le problème du refroidissement laser selon une seule dimension z , en considérons que l'atome se déplace dans le plan (z,x) . Calculons le taux de départ dû à la courbure des fronts d'onde en $P(z,x)$ pour un atome de vitesse v_x non nulle, mais de vitesse v_z nulle. L'origine O est prise sur le plan du miroir. On suppose que l'onde aller a pour centre de courbure $C(-R,0)$ et pour rayon de courbure $(R+z)$ (noter que $z < 0$). L'onde retour a donc pour centre de courbure le point $C'(R,0)$ et pour rayon de courbure $(R-z)$ (figure II.24).

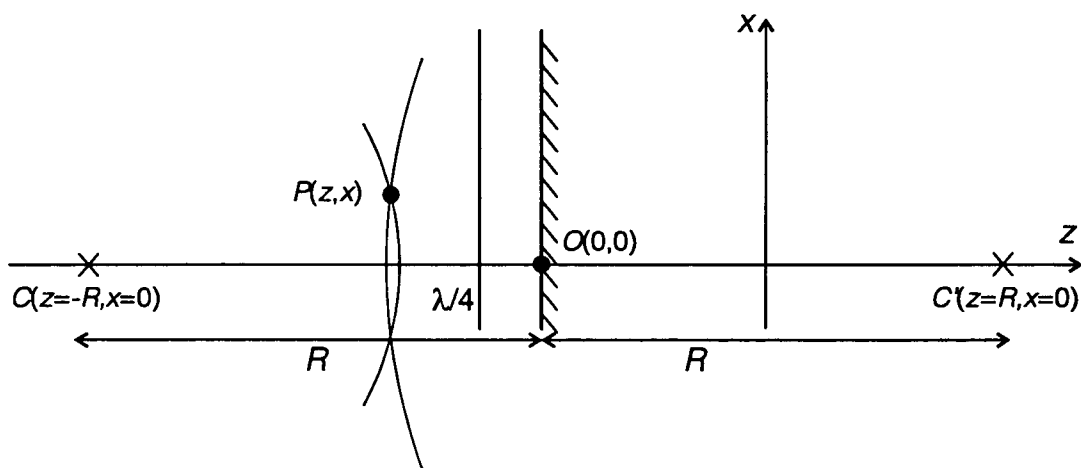


Figure II.24 Influence de la courbure des fronts d'onde sur le refroidissement par résonances noires.

Au point $P(x,z)$, la différence de phase entre les deux faisceaux, notée $\varphi(x)$, s'écrit :

$$\varphi(x) = k(CP - C'P) + \pi \quad (\text{II.26})$$

où k est le vecteur d'onde du laser et où π est le déphasage dû aux deux passages à travers la lame quart d'onde. La quantité $d\varphi/dt$ produit exactement le même couplage qu'un couplage motionnel créé par une vitesse équivalente v_{eq} selon z , définie par

$$d\varphi/dt = 2kv_{cq} \quad (\text{II.27})$$

Le taux de départ $\Gamma'_{\text{courbure}}$ créé par la courbure des fronts d'onde est donc

$$\Gamma'_{\text{courbure}} = \Gamma \left(\frac{d\varphi}{\Omega_1 dt} \right)^2 \quad (\text{II.28})$$

Pour que ce taux de départ ne soit pas gênant, il faut que son effet soit négligeable sur la durée d'interaction θ , ce qui se traduit par

$$\Gamma'_{\text{courbure}} \cdot \theta \ll 1 \quad (\text{II.29})$$

ou encore, si l'on veut atteindre une distribution en vitesse de demi-largeur δv_θ , il faut avoir :

$$d\varphi/dt \ll 2k \cdot \delta v_\theta \quad (\text{II.30})$$

D'après la figure II.24, on a

$$CP = (x^2 + (R+z)^2)^{1/2} \quad (\text{II.31})$$

$$C'P = (x^2 + (R-z)^2)^{1/2} \quad (\text{II.32})$$

Pour x petit devant $(R+z)$ et devant $(R-z)$, un développement limité au premier ordre non nul en x donne :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dx} \frac{dx}{dt} = -2k \cdot v_x \frac{xz}{R^2 - z^2} \quad (\text{II.33})$$

En introduisant cette expression dans (II.30), on obtient la contrainte à satisfaire sur la courbure :

$$R^2 \gg z^2 + xz \frac{v_x}{\delta v_\theta} \quad (\text{II.34})$$

Une application numérique avec $v_x = 10 v_R$, $\delta v_\theta = v_R/100$, $z = 0,2$ m et $x = 1$ mm (distance typique des atomes à l'axe) donne $R \gg 50$ cm. Cette condition est très facile à satisfaire.

4.3 Contraintes sur le champ magnétique

4.3.1 Introduction

Les champs magnétiques parasites créent un couplage entre les états $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ et d'autres superpositions linéaires des sous-niveaux Zeeman de l'état 2^3S_1 . Ces superpositions linéaires sont en général couplées par les lasers à l'état excité et sont donc instables. A cause du couplage magnétique, les états $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ deviennent donc eux-mêmes instables. Comme le taux de fluorescence induite par le couplage magnétique n'est pas *a priori* sélectif en vitesse, et en particulier ne s'annule pas en $p = 0$, le champ magnétique vient nuire au refroidissement par résonances noires sélectives en vitesse.

Nous déterminons tout d'abord théoriquement l'effet d'un champ magnétique parasite sur le refroidissement par résonances noires (§ II.4.3.2). Ce paragraphe est important car l'effet du champ magnétique n'avait pas été calculé correctement

auparavant [30] et car les contraintes trouvées pour les champs magnétiques résiduels orientent la démarche expérimentale. Nous calculons pour différentes configurations de champ magnétique le taux de fluorescence induite par champ magnétique sur l'état $|\psi_{\text{NC}}(p=0)\rangle$. Nous en déduisons alors la contrainte sur le champ résiduel en fonction d'un objectif donné de température [31].

Nous décrivons ensuite les différentes démarches expérimentales développées pour compenser les champs magnétiques parasites. Dans l'expérience sur jet de 1988, il suffisait de se débarrasser des champs ambiants. Dans notre expérience, nous devons passer en quelques millisecondes d'une période de champs forts (quelques centaines de gauss) pour le piégeage, à une période de champs faibles (quelques milligauss) pour le refroidissement par résonances noires. C'est un problème expérimental assez difficile que de contrôler des variations de champ magnétique sur 5 ordres de grandeur en quelques millisecondes. Nous faisons un inventaire des champs magnétiques parasites, et décrivons les systèmes de blindage et de compensation des champs ambiants, ainsi que de modulation des champs de ralentissement et de piégeage. Un point essentiel pour le succès de l'expérience de résonances noires a été la mesure fine du champ magnétique à l'aide d'expériences d'effet Hanle mécanique. Ces expériences, sortes de préliminaires aux expériences de résonances noires, sont reportées au chapitre suivant (§ III.2).

4.3.2 Estimation théorique des effets du champ magnétique

4.3.2.1 Couplages magnétiques

L'apparition du refroidissement sub-recul dans les résonances noires sélectives en vitesse provient de la diminution du taux de fluorescence $T_F(p)$ de l'état $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ au voisinage de $p = 0$. Le refroidissement sera donc particulièrement sensible à l'effet du champ magnétique sur la fluorescence des états $|\psi_{\text{NC}}(p=0)\rangle$. Nous sommes donc confrontés à un problème d'effet Hanle dans le cas particulier d'une transition $J_f = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ éclairée par deux faisceaux lasers qui se propagent en sens inverse,

[30] Nos calculs s'appliquent aussi à d'autres situations physiques dans laquelle des états noirs sont perturbés par des champs magnétiques parasites. Le transfert adiabatique de population est un exemple pour lequel les champs parasites ont un effet semblable à celui que nous traitons. Voir [GGS94] : L.S. Goldner, C. Gerz, R.J.C. Spreeuw, S.L. Rolston, C.I. Westbrook, W.D. Phillips, P. Marte, and P.Zoller, *Momentum Transfer in Laser Cooled Cesium by Adiabatic Passage in a Light Field*, Phys. Rev. Lett. **72**, p. 997-1000 (1994) et références incluses. Voir aussi [PVY93] P. Pillet, C. Valentin, R.-L. Yuan, and J. Yu, *Adiabatic population transfer in a multilevel system*, Phys. Rev. A **48**, p. 845-848 (1993), ainsi que [KGH89] J.R. Kuklinski, U. Gaubatz, F.T. Hioe, and K. Bergman, *Adiabatic population transfer in a three-level system driven by delayed laser pulses*, Phys. rev. A **40**, p. 6741-6744 (1989).

[31] L'influence des taux de fluorescence parasite de $|\psi_{\text{NC}}(p=0)\rangle$ sur la température limite est établie ici de manière intuitive. Nous présenterons au § V.6.2 une démonstration rigoureuse qui confirmera parfaitement les ordres de grandeur que nous dérivons ici intuitivement.

polarisés respectivement σ_+ et σ_- [32].

Nous nous intéressons aux effets de champs magnétiques faibles :

$$\Omega_B \ll \Gamma_C' \text{ et } \Omega_B \ll \Gamma \quad (\text{II.35})$$

où Ω_B est la pulsation de Larmor associée aux champs magnétiques. Nous considérons donc que le champ magnétique ne modifie pas significativement le taux de fluorescence, de l'ordre de Γ_C' , des états normalement couplés à l'état excité. Par contre, la durée de vie des états $|\psi_{NC}(p \approx 0)\rangle$, qui ne sont pas couplés à l'état excité et qui sont peu couplés à l'état $|\psi_C(p)\rangle$, sera très sensible à un couplage magnétique, qui modifiera ainsi le processus de refroidissement. En outre, on sait que le processus de résonances noires ne discrimine pas les états d'impulsion p susceptibles de rester piégés pendant la durée θ de l'expérience ($|p| < \delta p_\theta$, cf. chapitre I). Nous allons donc nous intéresser, pour simplifier, à l'effet du champ magnétique sur la durée de vie du seul état $|\psi_{NC}(p=0)\rangle$.

Quels sont les couplages magnétiques pertinents ? Comme $\Omega_B \ll \Gamma$, nous négligeons les couplages magnétiques dans l'état excité. Introduisons l'hamiltonien H_B d'interaction entre le champ magnétique et l'atome dans son état fondamental, de moment cinétique \vec{J} :

$$H_B \equiv -\gamma \vec{J} \cdot \vec{B} \quad (\text{II.36})$$

où γ est le facteur gyromagnétique de l'électron :

$$\gamma = \frac{gq_e}{2m_e} \quad (\text{II.37})$$

Pour l'hélium dans l'état 2^3S_1 , on a $g = 2$, d'où

$$\gamma = g\mu_B/\hbar = -2 \times 2\pi \times 1,4 \text{ MHz} \cdot \text{G}^{-1} \quad (\text{II.38})$$

Nous introduisons le repère $Oxyz$ où z est parallèle à l'axe des lasers, comme au chapitre I (figure II.25). Nous prenons z comme axe de quantification. Les composantes de l'opérateur moment cinétique ($J = 1$) s'écrivent alors, dans la base $\{|f_+\rangle, |f_0\rangle, |f_-\rangle\}$:

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & J_y &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\ J_z &= \hbar \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

[32]

Nous ne traitons ici explicitement que du cas des résonances noires à une dimension dans la configuration habituelle. A 2 ou 3 dimensions, ou avec d'autres configurations lasers ou atomiques, la validité de nos résultats n'est pas assurée. Toutefois, sauf s'il apparaît des symétries particulières, les ordres de grandeur que nous calculons devraient rester pertinents.

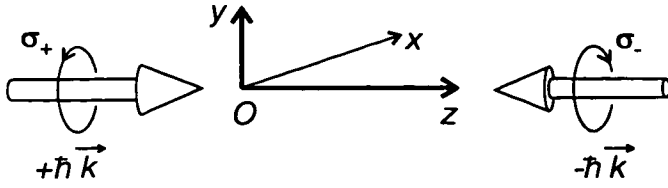


Figure II.25 Repère utilisé pour le calcul de l'effet du champ magnétique

L'hamiltonien H_B est la somme de 3 hamiltoniens correspondant aux couplages magnétiques créés par les composantes B_x, B_y, B_z :

$$H_B = H_{B_x} + H_{B_y} + H_{B_z} \quad (\text{II.40})$$

où

$$H_{B_x} = \frac{\hbar\Omega_{B_x}}{\sqrt{2}} [|f_+\rangle\langle f_0| + |f_-\rangle\langle f_0|] + h.c. \quad (\text{II.41.a})$$

$$H_{B_y} = \frac{i\hbar\Omega_{B_y}}{\sqrt{2}} [-|f_+\rangle\langle f_0| + |f_-\rangle\langle f_0|] + h.c. \quad (\text{II.41.b})$$

$$H_{B_z} = \hbar\Omega_{B_z} [|f_+\rangle\langle f_+| - |f_-\rangle\langle f_-|] \quad (\text{II.41.c})$$

Par convention, nous avons pris pour définition de la pulsation de Larmor $\Omega_{B_i}(i = x, y, z)$:

$$\Omega_{B_i} \equiv -\gamma B_i \quad (\text{II.42})$$

Ayant fait apparaître cette pulsation caractéristique, on pourrait croire qu'il suffit de la comparer au temps θ d'interaction atomes-lasers, en exigeant

$$\Omega_{B_i}\theta \ll \pi \quad (\text{II.43})$$

pour s'assurer que l'effet des champs magnétiques est négligeable. En considérant $\theta = 10$ ms, on obtiendrait que les champs magnétiques doivent être compensés à mieux que $100 \mu\text{G}$. Avec notre montage actuel, compenser les champs à ce niveau serait extrêmement difficile. Heureusement, l'inégalité (II.43) est une *condition suffisante* pour que les effets des champs magnétiques soient négligeables, mais *pas une condition nécessaire*. Nous allons voir que la condition nécessaire est beaucoup moins restrictive, autorisant des champs résiduels de l'ordre du milligauss et dépendant beaucoup moins fortement de θ .

Le couplage dû aux champs transverses B_x et B_y ayant une symétrie très différente de celle du couplage dû au champ longitudinal, nous allons maintenant séparer le traitement des champs transverses (§ II.4.3.2.2) de celui du champ longitudinal (§ II.4.3.2.3).

4.3.2.2 Champ magnétique transverse : taux de fluorescence induite par champ magnétique ; critère à satisfaire.

• Principe du calcul

On veut calculer le taux de départ $\Gamma'_{\text{NC}}(B)$ de l'état $|\psi_{\text{NC}}(p=0)\rangle$ dû au champ magnétique transverse $B = B_{\perp}$. Ce calcul est très semblable au calcul du taux de fluorescence par couplage motionnel : $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ se trouve couplé soit par le champ magnétique, soit par un terme motionnel, à des états fondamentaux, eux-mêmes couplés à des états excités. Ces états fondamentaux sont donc instables, et, par suite, $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ devient instable lui aussi. La démarche suivie ici s'inspire par conséquent du calcul de $\Gamma'_{\text{NC}}(p)$: on calcule d'abord à quels états fondamentaux est couplé $|\psi_{\text{NC}}(p=0)\rangle$; on calcule alors la durée de vie de ces états ; on en déduit enfin la durée de vie de $|\psi_{\text{NC}}(p=0)\rangle$.

Les champs magnétiques transverses couplent $|\psi_{\text{NC}}(p=0)\rangle$ à des états $|f_{0,p'}\rangle$. En tenant compte du fait que le couplage magnétique conserve l'impulsion atomique, on obtient :

$$H_{B_x} |\psi_{\text{NC}}(p=0)\rangle = \frac{\hbar\Omega_{B_x}}{2} [|f_{0,+ \hbar k}\rangle + |f_{0,- \hbar k}\rangle] \quad (\text{II.44.a})$$

$$H_{B_y} |\psi_{\text{NC}}(p=0)\rangle = \frac{i\hbar\Omega_{B_y}}{2} [|f_{0,+ \hbar k}\rangle - |f_{0,- \hbar k}\rangle] \quad (\text{II.44.b})$$

Nous remarquons que H_{B_x} et H_{B_y} ne couplent pas $|\psi_{\text{NC}}(p=0)\rangle$ aux mêmes états : la physique des résonances noires n'est pas invariante par rotation. Cependant, pour ce qui nous intéresse, les superpositions linéaires symétriques (II.44.a) ou antisymétriques (II.44.b) se comportent de la même manière. Nous considérerons donc indifféremment H_{B_x} ou H_{B_y} .

L'état $|\psi_{\text{NC}}(p=0)\rangle$ est couplé aux états $|f_{0,p \pm \hbar k}\rangle$, qui sont eux même couplés aux états excités indiqués sur la figure II.26. On va calculer $\Gamma'_{\text{NC}}(B)$ à l'ordre le plus bas en B et Ω_1 , ce qui permet de négliger tous les couplages autres que ceux indiqués sur la figure II.26. Pour cela, on supposera

$$\Omega_B \ll \Gamma'_0 \quad (\text{II.45.a})$$

$$\Omega_1 \ll \Gamma \quad (\text{II.45.b})$$

où Γ'_0 est la largeur ramenée des états $|f_{0,p \pm \hbar k}\rangle$.

• Taux de départ de l'état $|\psi_{\text{NC}}(p=0)\rangle$ dû au champ magnétique transverse.

Dans le régime perturbatif $\Omega_1 \ll \Gamma$, le taux de départ Γ'_0 des états $|f_{0, \pm \hbar k}\rangle$ est

$$\Gamma'_0 = \Omega_1^2 / \Gamma \quad (\text{II.46})$$

En effet, $\Gamma'_{f_0 \rightarrow e_-} = \Gamma'_{f_0 \rightarrow e_+} = \frac{\Omega_1^2}{2\Gamma}$ et ces 2 taux s'ajoutent.

Le taux de départ $\Gamma'_{\text{NC}}(B)$ de l'état $|\psi_{\text{NC}}(p=0)\rangle$ dû au couplage magnétique est, comme $\Omega_B \ll \Gamma'_0$,

$$\Gamma'_{\text{NC}}(B) = 2 \frac{\Omega_B^2}{\Gamma'_0} = 2 \frac{\Omega_B^2}{\Omega_1^2} \Gamma' \quad (\text{II.47})$$

En effet, les taux de départ de $|\psi_{\text{NC}}(p=0)\rangle$ vers $|f_0, -\hbar k\rangle$ et vers $|f_0, +\hbar k\rangle$ sont égaux à Ω_B^2/Γ'_0 , et ces deux taux s'ajoutent.

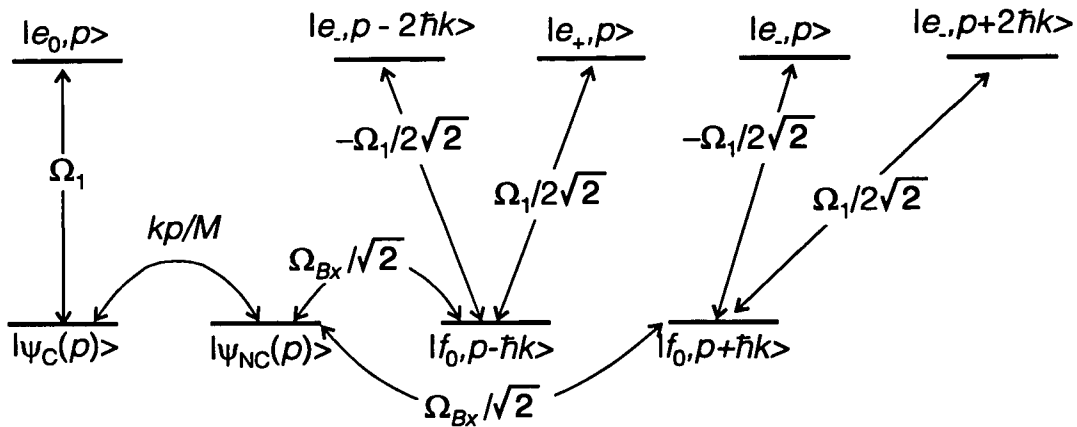


Figure II.26 *Couplages dans le cas d'un champ magnétique transverse faible.* En l'absence de champ magnétique, l'état $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ n'est couplé de manière hamiltonienne qu'aux états $|\psi_C(p)\rangle$ et $|e_0, p\rangle$. Un champ magnétique transverse, B_x par exemple, couple de manière non sélective en vitesse l'état $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ aux états $|f_0, p \pm \hbar k\rangle$ qui sont eux-mêmes couplés à l'état excité.

• *Contrainte à respecter sur le champ magnétique transverse*

La dynamique du refroidissement par résonances noires est déterminée principalement par le profil $T_F(p)$ du taux de fluorescence de l'état $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ en fonction de l'impulsion atomique p , au voisinage de $p=0$. Comment ce profil de fluorescence est-il influencé par la présence d'un champ magnétique transverse ?

Comme on peut ajouter de manière incohérente le taux de fluorescence $\Gamma'_{\text{NC}}(p)$ dû au couplage motionnel avec $|\psi_C(p)\rangle$ et celui $\Gamma'_{\text{NC}}(B)$ dû au couplage magnétique, avec $|f_0, p \pm \hbar k\rangle$, on obtient

$$T_F(p) = \Gamma'_{\text{NC}}(p) + \Gamma'_{\text{NC}}(B) \quad (\text{II.48})$$

La translation (figure II.27.a) que subit le taux de fluorescence de $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ est un changement qualitatif : sans champ magnétique, la fluorescence de $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ s'annule en $p=0$ où il apparaît un temps de piégeage infini ; avec un champ magnétique, la fluorescence ne s'annule nulle part et tous les temps de piégeage sont bornés par le temps caractéristique θ_B où :

$$\theta_B \equiv 1/\Gamma'_{\text{NC}}(B) \quad (\text{II.49})$$

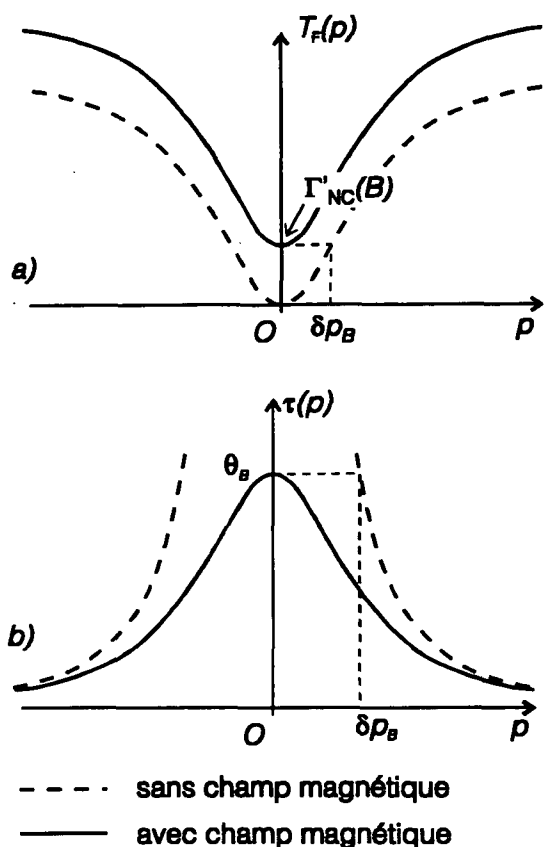


Figure II.27 Influence d'un champ magnétique transverse sur la fluorescence de l'état $|\psi_{NC}(p)\rangle$.

(a) Le champ magnétique ajoute une composante constante au taux de fluorescence $T_F(p)$ qui ne passe donc plus par 0 en $p=0$.

(b) Les temps de piégeage $\tau(p) = T_F^{-1}(p)$ sont maintenant bornés par le temps θ_B , ce qui limite la finesse de la distribution obtenue. Nous avons porté δp_B , la largeur minimale de la distribution obtenue après refroidissement en présence de champ magnétique. La construction graphique de δp_B correspond au calcul effectué dans le texte.

Le changement qualitatif apporté par la présence d'un champ magnétique apparaît peut-être encore mieux sur le temps caractéristique de piégeage qui devient borné (figure II.27.b) que sur le taux de fluorescence.

On peut maintenant obtenir de manière intuitive la limite qu'un champ magnétique transverse impose au refroidissement par résonances noires (nous donnerons une démonstration rigoureuse au § V.6.2). L'obtention d'un pic de largeur δp_θ à l'issue du refroidissement, δp_θ étant relié au temps d'interaction θ par l'équation I.22, résulte de l'apparition de temps de piégeage de l'ordre du temps d'interaction total θ (cf. chapitre I). En présence d'un champ magnétique transverse, deux régimes apparaissent naturellement :

- tant que $\theta < \theta_B$, le refroidissement s'effectue normalement. Les atomes s'accumulent dans les états d'impulsion p , avec $|p| < \delta p_\theta$, qui sont presque parfaitement stables à cette échelle de temps.

- quand $\theta \geq \theta_B$, le refroidissement est profondément modifié. En effet, même les états d'impulsion p avec $|p| < \delta p_\theta$ sont instables à cette échelle de temps. Les atomes ne continuent donc plus à s'accumuler dans l'intervalle de largeur δp_θ autour de $p=0$ ou du moins s'y accumulent beaucoup moins vite (nous verrons au chapitre V que la largeur du pic cesse de diminuer au-delà de θ_B). On peut ainsi prévoir que le temps utile de refroidissement est θ_B .

Finalement, pour mettre en œuvre le refroidissement par résonances noires avec un temps d'interaction θ sans que la distribution en impulsion finale soit perturbée par le champ magnétique, le critère à satisfaire sur le champ magnétique est :

$$\boxed{\theta_B \ll \theta} \quad (\text{II.50})$$

En introduisant dans cette inégalité l'expression de θ_B (équations II.49, II.47, et II.42), on obtient :

$$B \ll \frac{\Omega_1}{\gamma\sqrt{2}\sqrt{\theta\Gamma}} \quad (\text{II.51})$$

Si l'objectif que l'on se fixe pour le refroidissement est une certaine impulsion caractéristique, alors l'équation (II.50) se traduit par

$$\boxed{B \ll \frac{2\sqrt{2}}{g} \frac{E_R}{|\mu_B|} \frac{\delta p_\theta}{P_R}} \quad (\text{II.52})$$

où p_R et E_R sont respectivement l'impulsion de recul et l'énergie de recul. Le membre de droite de cette inégalité est, à un facteur numérique près, le produit d'un champ magnétique $E_R/|\mu_B|$ caractéristique par le rapport de l'impulsion δp_θ sur l'impulsion d'un photon.

Concluons ce paragraphe par trois commentaires importants.

- ◆ Les inégalités II.50 à II.52 sont équivalentes à

$$\boxed{\Omega_B/\sqrt{2} \ll k\delta p_\theta/M} \quad (\text{II.53})$$

En d'autres termes, lorsqu'on n'est pas gêné par le champ magnétique, la durée de vie des états $|\psi_{\text{NC}}(p \approx \pm \delta p_\theta)\rangle$ est déterminée plutôt par le couplage motionnel vers $|\psi_{\text{C}}(p)\rangle$ que par le couplage magnétique vers $|f_0, p \pm \hbar k\rangle$. En effet, $|\psi_{\text{C}}(p)\rangle$ et $|f_0, p \pm \hbar k\rangle$ ont des durées de vie identiques. $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ est ainsi couplé à 3 états instables différents par les termes kp/M , $\Omega_{Bx}/2^{1/2}$ et $\Omega_{bx}/2^{1/2}$ (cf. figure II.26). L'inégalité (II.53) traduit le fait que le premier couplage l'emporte sur les deux suivants.

- ◆ L'inégalité II.51 est très différente de la condition suffisante sur le champ magnétique (II.43). L'inégalité (II.43), établie en raisonnant simplement sur la pulsation de Larmor, exige que le champ résiduel varie en $1/\theta$. L'inégalité II.51, établie plus justement en raisonnant sur le taux de départ de $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ dû au champ magnétique, exige que le champ résiduel varie en $1/\sqrt{\theta}$, ce qui est très différent. La différence vient du fait que, pour un couplage Ω_B faible ($\Omega_B \ll \Gamma'_C$), le taux de départ de $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ est quadratique (et non linéaire) en Ω_B . Le raisonnement correct qui conduit à (II.51) compare deux termes de départ, $\Gamma'_{\text{NC}}(\delta p_\theta)$ et $\Gamma'_{\text{NC}}(B)$, et exige que le taux de départ soit dominé par le couplage motionnel. Le critère (II.43) exprimait que le couplage magnétique appliqué pendant le temps θ devait avoir un effet faible dans l'absolu, sans comparer cet effet aux quantités pertinentes. Ce critère était donc une condition suffisante mais non nécessaire.

♦ L'application numérique de l'inégalité (II.52) est déterminante pour les expériences. Pour l'hélium métastable $\text{He}(2^3S_1)$, on trouve

$$B \ll 43 \text{ mG} \times \frac{\delta p_\theta}{p_R} \quad (\text{II.54})$$

Pour un temps d'interaction de 10 ms, on peut espérer $\delta p_\theta = p_R/10$, ce qui exige un champ inférieur à 4 mG. Quantitativement, les exigences sur le champ magnétique, bien que sévères, le sont heureusement beaucoup moins que ne le laissait craindre le raisonnement simple de l'inégalité (II.43) ($B \ll 100 \mu\text{G}$ pour $\theta = 10$ ms).

4.3.2.3 Champ magnétique longitudinal : sans fluctuations ; avec fluctuations.

Nous discutons ici de l'effet d'un champ magnétique longitudinal dans une configuration de résonances noires à une dimension (dans les cas à deux et trois dimensions, la notion de champ longitudinal n'est pas pertinente).

• Discussion physique : effet Zeeman et effet Doppler

Un champ magnétique longitudinal lève la dégénérescence entre différents sous-niveaux Zeeman mais, contrairement à un champ transverse, n'introduit pas de couplages supplémentaires entre sous-niveaux Zeeman. $|e_0, p\rangle$, $|f_-, p-\hbar k\rangle$, $|f_+, p+\hbar k\rangle$ restent donc les seuls états à prendre en compte.

La levée de dégénérescence des énergies magnétiques de f_- et de f_+ modifie le refroidissement. En effet, l'état $|\Psi_{\text{NC}}(p=0)\rangle$, superposition linéaire de 2 états d'énergies différentes

$$|\Psi_{\text{NC}}(p=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|f_+, +\hbar k\rangle + |f_-, -\hbar k\rangle], \quad (\text{II.55})$$

ne peut plus être un état stationnaire.

Remarquons que le déplacement en énergie de la transition $f_- \leftrightarrow e_0$ par un champ magnétique longitudinal a le même module, mais le signe opposé du déplacement de la transition $f_+ \leftrightarrow e_0$. Or, il se trouve que le déplacement Doppler des fréquences des lasers σ_+ et σ_- possède exactement la même symétrie que le déplacement des transitions $f_\pm \leftrightarrow e_0$ par le champ magnétique. En effet, comme les lasers se propagent en sens inverse, si l'atome a une certaine vitesse v le long de l'axe des lasers, dans le référentiel de l'atome, la fréquence du laser σ_+ est décalée de kv , et celle du laser σ_- est décalée de $-kv$.

Il est donc possible de se placer dans un référentiel en mouvement uniforme, à la vitesse \vec{v}_B par rapport au référentiel du laboratoire où, l'effet Doppler $k \cdot v_B$ compensant exactement l'effet Zeeman Ω_B (cf. équation II.58 ci-dessous), on se ramène au problème du refroidissement sans champ magnétique. L'effet d'un champ magnétique longitudinal est donc un simple décalage en impulsion du spectre de fluorescence $T_p(p)$: le refroidissement va se faire, non autour de $p=0$, mais autour de l'impulsion Mv_B . Ceci n'est toutefois valable que si le champ magnétique est constant pendant la durée de l'expérience. Précisons également que ce raisonnement ne s'applique que pour les résonances noires à une dimension. A deux ou trois dimensions, les trois composantes du

champ magnétique doivent être nulles pour permettre le refroidissement par résonances noires.

• **Calcul de l'effet d'un champ magnétique longitudinal**

On peut étayer le raisonnement intuitif qui précède par un calcul simple. L'hamiltonien effectif du système en présence d'un champ magnétique longitudinal B_z s'obtient en rajoutant à l'expression I.13 le déplacement Zeeman des niveaux $|f_+, p+\hbar k\rangle$ et $|f_-, p-\hbar k\rangle$:

$$H_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2M} - i\hbar\Gamma/2 & \frac{\hbar\Omega_1}{2\sqrt{2}} & \frac{-\hbar\Omega_1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\hbar\Omega_1}{2\sqrt{2}} & \frac{(p+\hbar k)^2}{2M} + \hbar\delta + \hbar\Omega_{Bz} & 0 \\ \frac{-\hbar\Omega_1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{(p-\hbar k)^2}{2M} + \hbar\delta - \hbar\Omega_{Bz} \end{pmatrix} \quad (\text{II.56})$$

dans la base $(|e_0, p\rangle, |f_+, p+\hbar k\rangle, |f_-, p-\hbar k\rangle)$.

En passant dans la base $(|e_0, p\rangle, |\Psi_C(p)\rangle, |\Psi_{NC}(p)\rangle)$, on obtient :

$$H_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2M} - i\hbar\Gamma/2 & \frac{-\hbar\Omega_1}{2} & 0 \\ \frac{-\hbar\Omega_1}{2} & \frac{p^2}{2M} + \frac{\hbar^2 k^2}{2M} + \hbar\delta & \frac{-\hbar kp}{M} - \hbar\Omega_{Bz} \\ 0 & \frac{-\hbar kp}{M} - \hbar\Omega_{Bz} & \frac{p^2}{2M} + \frac{\hbar^2 k^2}{2M} + \hbar\delta \end{pmatrix} \quad (\text{II.57})$$

Changeons maintenant de référentiel et plaçons-nous dans le référentiel R' en mouvement à la vitesse \vec{v}_B par rapport au référentiel R du laboratoire, \vec{v}_B étant définie par :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{R'/R} \equiv \frac{-\Omega_{Bz} \cdot \vec{u}_z}{k} \quad (\text{II.58})$$

Notons les impulsions \vec{p}' dans le repère R' :

$$\vec{p}' \equiv \vec{p} - M\vec{v}_B \quad (\text{II.59})$$

L'hamiltonien effectif s'écrit dans la base $\{|e_0, p' + v_B\rangle, |\Psi_C(p' + v_B)\rangle, |\Psi_{NC}(p' + v_B)\rangle\}$

$$H_{\text{eff}} = \left[\frac{(p' + Mv_B)^2}{2M} + \hbar\tilde{\delta} \right] 1 - \hbar \begin{pmatrix} i\Gamma/2 & \Omega_1/2 & 0 \\ \Omega_1/2 & 0 & kp'/M \\ 0 & kp'/M & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.60})$$

La partie non unitaire de H_{eff} est donc formellement identique (remplacer p par p') à l'hamiltonien effectif sans champ magnétique.

• **Effet d'un champ magnétique longitudinal constant**

L'effet d'un champ magnétique B_z constant est donc de décaler d'une vitesse \vec{v}_B par rapport au laboratoire le référentiel dans lequel on effectue le refroidissement

(cf. figure II.28). Le refroidissement (température atteinte, nombre d'atomes piégés) n'est pas *a priori* affecté (sauf si \bar{v}_B est plus grand que la largeur de la distribution en vitesse longitudinale) et un tel champ n'est pas une gêne.

Au contraire, on pourra utiliser ce champ pour communiquer aisément aux atomes une vitesse différente de zéro (et tester ainsi notre approche du problème ; cf. § III.3.2.2).

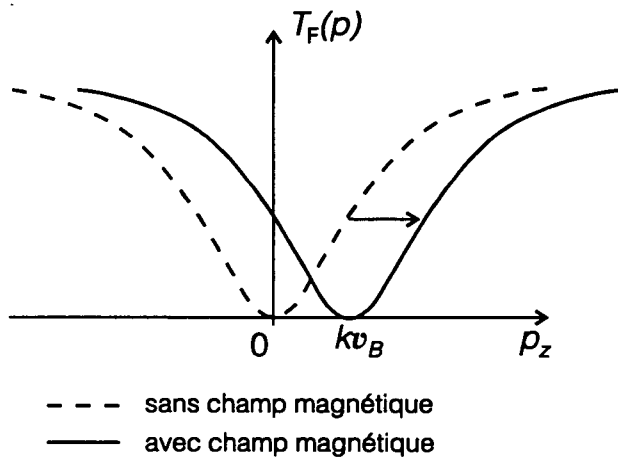


Figure II.28 *Effet d'un champ magnétique longitudinal constant.* Le refroidissement par résonances noires a lieu dans un référentiel en mouvement uniforme à la vitesse v_B .

• Effet d'un champ magnétique longitudinal variable

Un champ magnétique longitudinal, variable dans le temps est plus problématique qu'un champ constant. Deux situations sont à distinguer selon que ce champ varie plus ou moins rapidement (figure II.29). En effet, dans le déroulement de l'expérience, une "bouffée" d'atomes, différente à chaque fois, interagit pendant la durée $\theta \approx 100 \mu\text{s} - 10 \text{ms}$ avec le laser de refroidissement par résonances noires, puis on mesure la distribution en impulsion des atomes. On répète ces opérations chaque seconde, pendant quelques minutes pour intégrer le signal.

Si le champ magnétique longitudinal varie à l'échelle de la seconde, mais pas à l'échelle de θ (figure II.29.b), le refroidissement s'effectue normalement pour chaque bouffée, mais dans un référentiel différent à chaque fois.

A moins de pouvoir repérer sur chaque bouffée refroidie le référentiel de refroidissement, le signal moyenné va être brouillé et il est évident que si Ω_B est la valeur typique des fluctuations du champ, on aura un élargissement δp_B du pic de distribution en vitesse donné par l'équation

$$\frac{k \cdot \delta p_B}{M} = \Omega_B \quad (\text{II.61})$$

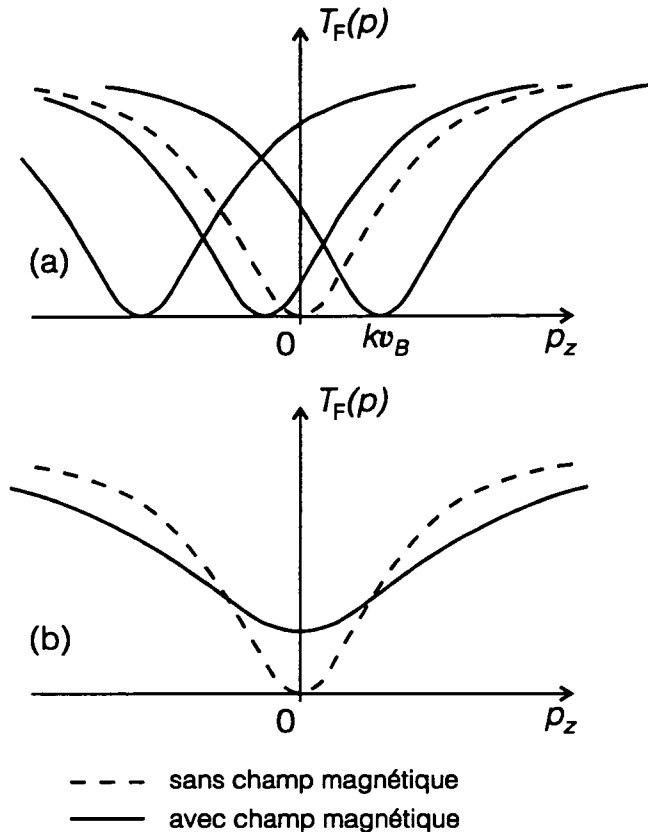


Figure II.29 Effet d'un champ magnétique longitudinal variable.

(a) Si le champ magnétique varie lentement, c'est-à-dire plus lentement que θ , le refroidissement par résonances noires s'effectue pour chaque bouffée d'atomes dans un référentiel différent. Même si chaque bouffée est bien refroidie, le signal moyenné sera brouillé.

(b) Si le champ varie plus rapidement que θ , alors même le refroidissement d'une seule bouffée est perturbée : le taux de fluorescence, moyenné sur θ ne passe plus par 0. Ce taux de fluorescence est la moyenne de courbes telles que celles présentées en (a).

Pour un objectif de refroidissement δp_θ fixé, nous obtenons donc quantitativement la même contrainte (à un facteur $\sqrt{2}$ près) pour un champ magnétique longitudinal fluctuant lentement que pour un champ transverse. Cependant, il convient de noter que le processus physique engendré par un champ transverse (constant) est très différent de celui engendré par un champ longitudinal fluctuant lentement : dans le premier cas, les états $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ se couplent à des états dissipatifs de manière non sélective en vitesse, alors que dans le deuxième cas, le refroidissement s'effectue normalement, mais autour d'une vitesse qui fluctue.

Si le champ magnétique varie rapidement, à l'échelle de θ , alors même une seule bouffée d'atomes n'est pas refroidie normalement. Sur la durée θ , le profil de fluorescence effectif est la moyenne dans le temps des profils de fluorescence instantanée $T_F(p, B_z(t))$, fonctions du champ magnétique $B_z(t)$ (figure II.29.b). Prenons un modèle où $B_z(t)$ est un champ aléatoire, uniformément distribué entre $-B_M$ et $+B_M$, sur la durée θ . Par un calcul sans difficulté du taux de fluorescence moyenné $\langle \Gamma'_{\text{NC}}(p, B_z(t)) \rangle_t$, avec $p \approx 0$, on obtient que $\langle \Gamma'_{\text{NC}}(p, B_z(t)) \rangle_t$ est la somme du taux sans champ magnétique $\Gamma'_{\text{NC}}(p)$ et d'un terme supplémentaire dépendant du champ magnétique :

$$\langle \Gamma'_{\text{NC}}(p, B_z(t)) \rangle_t = \Gamma'_{\text{NC}}(p) + \frac{4}{3} \frac{\Omega_B^2}{\Omega_1^2} \Gamma \quad (\text{II.62})$$

On se retrouve donc dans une situation analogue à celle du champ magnétique transverse : tout se passe comme si l'état $|\psi_{NC}(p)\rangle$ était couplé à des états dissipatifs, de manière non sélective en vitesse, ce couplage se traduisant par un taux de fluorescence $\Gamma'_{NC}(B)$:

$$\Gamma'_{NC}(B) = \frac{4}{3} \frac{\Omega_B^2}{\Omega_1^2} \Gamma \quad (\text{II.63})$$

On retrouve l'équation (II.47) à un facteur 2/3 près. Pour un objectif de refroidissement donné δp_θ , la contrainte à respecter pour un champ magnétique longitudinal fluctuant rapidement sera donc la même inégalité II.52 (à un facteur $\sqrt{2/3}$ près) que pour un champ transverse constant. Soulignons toutefois que, comme pour un champ longitudinal, fluctuant lentement, la physique sous-jacente n'est pas la même pour un champ longitudinal fluctuant rapidement et pour un champ transverse.

4.3.3 Inventaire des champs magnétiques parasites

L'interaction atomes-lasers pour le refroidissement par résonances noires va avoir lieu au voisinage du piège, dans une zone de 1 mm^3 , pour des temps courts d'interaction, à 1 cm^3 pour les temps les plus longs. Dans cette zone d'interaction, trois types de champs magnétiques peuvent venir perturber l'expérience (cf. figure II.30) : champs ambiants, champs de ralentissement et champ de piégeage. A chaque type de champ correspond une technique de compensation (cf. § II.4.3.4).

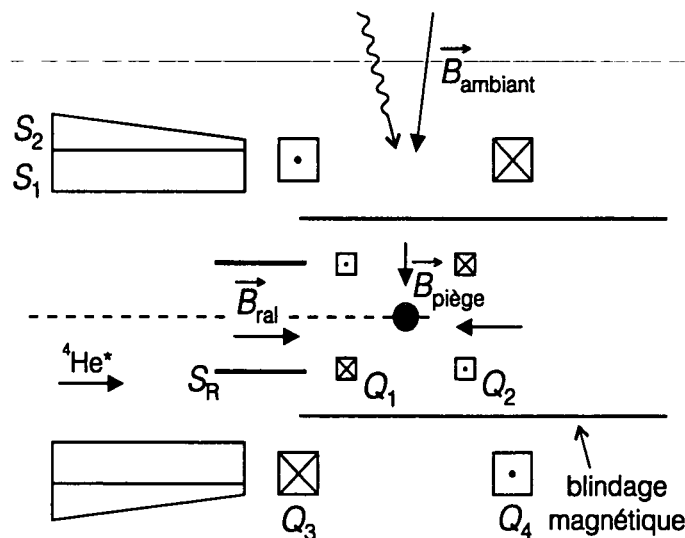


Figure II.30 Source de champs magnétiques parasites au niveau de la zone d'expérience. Les champs magnétiques parasites se décomposent en : champs ambiants, champs de ralentissement et champs de piégeage. Le champ ambiant comporte une composante alternative importante, de 10 à 20 mG. Les mesures indiquées dans le texte ont été effectuées en l'absence de blindage magnétique en mumétal. Nous verrons que le blindage atténue fortement les champs parasites (§ II.4.3.1), mais ajoute également des champs parasites (§ III.2).

• Champs ambiants

Les champs ambiants sont mesurés par une sonde magnétique 3 axes, de 1 kHz de bande passante (Bartington MAG03). Les champs ambiants ont des composantes continues, des composantes fluctuant lentement et des composantes alternatives. Les composantes continues sont créées essentiellement par le champ terrestre, et valent de 100 à 300 mG selon les axes considérés. La composante la plus importante est verticale et vaut 320 mG environ.

Les composantes fluctuant lentement peuvent avoir de très nombreuses causes. A l'extérieur du blindage magnétique, on observe des fluctuations d'amplitude maximale 10 à 20 mG, et d'amplitude typique 2 à 4 mG, sur quelques heures. Par exemple, l'alimentation du laser argon, qui se trouve à 1,5 m de la zone d'expériences, crée un champ de 10 à 20 mG lorsqu'elle est mise sous tension. Les bobines utilisées ailleurs dans le laboratoire peuvent également créer des perturbations. Ainsi, le champ créé par une bobine de 5 T de 20 cm de diamètre, placée à 10 m, est en théorie de 50 mG. Un test effectué avec une bobine de 1,5 T, placée deux étages au-dessus de la zone d'expérience, n'a donné qu'un effet de 2 mG, mais cette bobine était extérieurement blindée par un ferromagnétique. L'échec de certaines de nos expériences semble corrélé au fonctionnement d'une bobine de 5,5 T, non blindée, placée un étage au-dessus de notre dispositif (mais nous n'avons pas de mesure directe du champ créé par ces bobines) [33].

Les composantes alternatives sont de l'ordre de 20 mG, surtout à 50 Hz, mais avec une puissance non négligeable à des harmoniques de 50 Hz. Elles sont créées par les alimentations électriques du voisinage. Les sources les plus bruyantes sont l'alimentation 50 A des bobines de piégeage (20 mG) et le transformateur de l'alimentation du laser (5 mG). Ces deux appareils sont placés à environ 2 m de la zone d'expériences. Les alimentations électriques de l'appareillage standard (ordinateur, modulateur électro-optique, oscilloscope...) contribuent au niveau de 1 mG chacune. Si on éteint tout l'appareillage de notre dispositif, le champ magnétique alternatif n'est plus que de 0,2 mG. Nous avons dû nous accommoder de ce bruit alternatif d'environ 20 mG.

• *Champs de ralentissement*

Les champs magnétiques utilisés pour le ralentissement du jet atomique sont de plusieurs centaines de gauss (cf. II.3.2.2.2). Le champ maximal vaut 370 G, à 70 cm de la zone du piège. Au niveau du piège, ce champ de ralentissement, créé par les solénoïdes S_1 , S_2 et S_R , n'est que de 2 G environ (créé surtout par S_R). Ce champ est compensé à l'aide de Q_4 pendant la phase de piégeage. Or, on veut atteindre un champ de l'ordre du milligauss pendant la phase de résonances noires. On va donc couper les champs de ralentissement (ainsi que Q_4), car la compensation par Q_4 du champ de ralentissement se fait avec une précision d'une fraction de gauss, suffisante pour le piégeage magnéto-optique, mais insuffisante pour l'expérience de résonances noires.

• *Champs de piégeage*

Le champ de piégeage créé par les bobines Q_1 et Q_2 correspond à un gradient de 16 G.cm^{-1} sur l'axe du jet atomique et de 8 G.cm^{-1} sur tout axe orthogonal. La valeur maximale de ce champ quadrupolaire est de 40 G sur l'axe du jet atomique, à une distance de 4 à 5 cm du piège.

[33] Des champs de 10 mG, créés par une bobine de 20 T placée à une dizaine de mètres, ont été mesurés à l'intérieur d'un blindage en mumétal d'un facteur 20 d'efficacité, à quelques mètres de notre zone d'interaction (Jacob Reichel, communication privée). Ceci confirme le rôle des perturbations créées par les bobines des pièces voisines.

4.3.4 Dispositif de contrôle des champs magnétiques parasites

Selon la nature des champs parasites, des méthodes différentes sont employées. On compense la composante constante des champs ambiants à l'aide de bobines de compensation, alors qu'on agit contre les composantes alternatives ou fluctuantes à l'aide de blindages magnétiques (cf. § II.4.3.4.1). Quant aux champs créés par le ralentissement et par le piégeage, nous tentons de les supprimer lors de la phase de refroidissement par résonances noires en modulant le courant dans les bobines correspondantes (§ II.4.3.4.1 et II.4.3.4.2)

Ce paragraphe décrit les dispositifs techniques utilisés pour contrôler les champs magnétiques. Pour parvenir à la compensation requise, le point clef est ensuite de pouvoir mesurer finement les champs parasites (§ III.2).

4.3.4.1 Contrôle des champs ambiants

Les champs ambiants constants sont composés activement à l'aide de paires de bobines de 30 à 50 cm de diamètre, placées à environ 30 cm de la zone d'interaction. Le courant est fourni par des alimentations stabilisées en courant à 10^{-6} près. Les valeurs des courants de compensation sont déterminées par une expérience de recherche du zéro du champ magnétique à l'aide de l'effet Hanle mécanique (cf. § III.2).

Les champs magnétiques non constants sont de l'ordre de 20 mG alors que nous avons pour objectif d'annuler le champ au mG près. Nous ne disposons pas d'une sonde qui permettrait une mesure *in situ* en temps réel, et donc une compensation active, des champs magnétiques fluctuants. Nous avons donc choisi de réduire les champs fluctuants de manière passive à l'aide d'un blindage en mumétal.

Des tests effectués à l'aide d'un blindage d'essai, de 1 mm d'épaisseur montrent une atténuation d'un facteur 60-70 pour le champ longitudinal au centre du tube en mumétal, à fréquence nulle. Pour les champs perpendiculaires à l'axe du tube, on obtient une atténuation d'un facteur 250. En outre, pour des fréquences supérieures à 10 Hz, l'efficacité du blindage augmente (figure II.31). Ceci s'interprète comme un effet de peau, qui se produit à des fréquences inhabituellement basses en raison de la valeur élevée de μ . En effet, la fréquence ν_c de coupure liée à l'effet de peau est donnée par [SPS87] :

$$\nu_c = \frac{\rho}{e^2 \pi \mu \mu_0} \quad (\text{II.64})$$

où ρ est la résistivité du matériau, e son épaisseur. Typiquement, on a $\rho \approx 6 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$ et $\mu = 3 \cdot 10^4$ pour du mumétal non démagnétisé. Ceci donnerait $\nu_c \approx 5 \text{ Hz}$, ce qui est inférieur d'un ordre de grandeur à la valeur mesurée (nous ne savons pas si cela est dû à une valeur inférieure de μ ou aux ouvertures du tube de blindage). En résumé, ce test de blindage laisse espérer un blindage d'un facteur 60-70 sur le champ longitudinal à fréquence nulle, d'un facteur 300 sur le champ longitudinal à 50 Hz et d'un facteur 250 sur le champ transverse à fréquence nulle. Avec un champ initialement de 20 mG, ces

[SPS87] T.J. Summer, J.M. Pendlebury, and K.F. Smith, *Conventional Magnetic Shielding*, J. Phys. D 20, p. 1095-1101 (1987).

facteurs de blindage sont en principe suffisants pour atteindre une annulation au milligauss près.

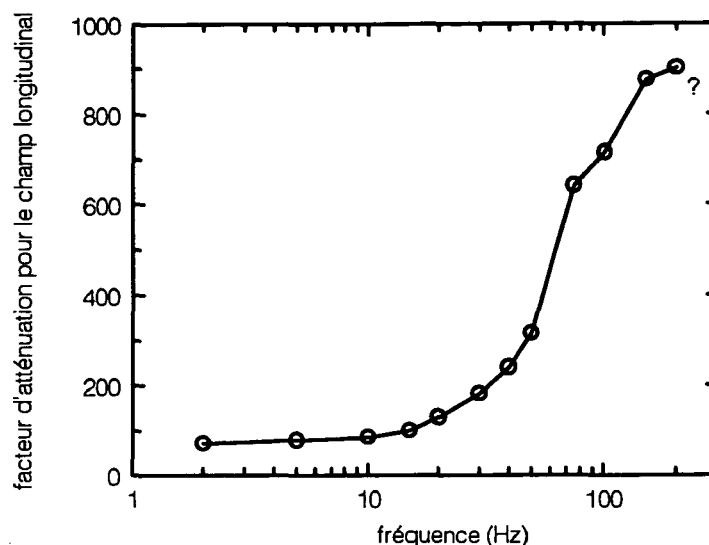


Figure II.31 *Blindage magnétique longitudinal d'un tube en mumétal d'essai.* Le tube de mumétal a un diamètre de 10 cm, une longueur de 43 cm et une épaisseur de 1 mm. Les mesures sont faites sans démagnétiser le mumétal. La sonde est placée à 18 cm d'une des extrémités du tube. L'efficacité du blindage croît avec la fréquence, ce que nous interprétons comme un effet de peau. La mesure a été effectuée avec des champs typiques de 0,9 G en l'absence de mumétal. Les deux derniers points sont à la limite de la sensibilité expérimentale. Le blindage est environ 4 fois plus efficace pour des champs à 50 Hz que pour des champs constants.

Cependant, les contraintes expérimentales ont conduit à monter un blindage qui est moins efficace que le blindage d'essai. En effet, pour avoir accès à la zone du piège (et pour des raisons de coût), il est préférable de réduire le diamètre du blindage et de le placer sous vide. Le blindage, de 19 cm de diamètre, se trouve donc à l'intérieur des solénoïdes de ralentissement S_1 et S_2 . Donc, pour que le champ de ralentissement du jet atomique puisse pénétrer jusqu'au piège, le blindage doit être largement ouvert de ce côté, ce qui réduit son efficacité [34]. En outre, dans la zone d'interaction, il faut laisser le passage aux 6 faisceaux de piégeage, aux faisceaux de résonances noires, à la galette microcanaux, aux bobines de piégeage et au champ de visée de la caméra CCD du piège.

Finalement, le blindage utilisé est un tube en mumétal de 19 cm de diamètre, de 63 cm de longueur et de 2 mm d'épaisseur (relativement épais pour accroître l'effet de peau). La zone d'interaction se trouve à 23 cm d'une des extrémités. Près de la zone d'interaction, des ouvertures sont percées dans le tube, les deux ouvertures les plus importantes ayant un diamètre de 9 cm.

[34] Cependant, la perturbation du blindage sur le champ de ralentissement est telle que, pour raccorder le champ de ralentissement à l'intérieur et à l'extérieur du blindage, nous avons dû construire le solénoïde S_R .

Les résultats des tests du blindage utilisés sont indiqués sur la figure II.32. A fréquence nulle, le blindage longitudinal est d'un facteur 17 environ et le blindage transverse d'un facteur 60 environ. La dépendance en fréquence est beaucoup moins favorable que pour le blindage d'essai. En effet, l'efficacité du blindage croît de 10 à 20 % quand on passe de 0 à 10 Hz, puis diminue d'un facteur 2 quand on passe de 10 à 500 Hz. Pourtant, l'effet de peau devrait être plus important puisque le blindage de l'expérience à une épaisseur double (2 mm) de celle du blindage d'essai. Il semble que ce soient les ouvertures dans le mumétal qui dégradent sa réponse fréquentielle. En effet, en plaçant la sonde dans le blindage, mais plus loin des ouvertures, on retrouve partiellement la réponse fréquentielle du blindage d'essai [35].

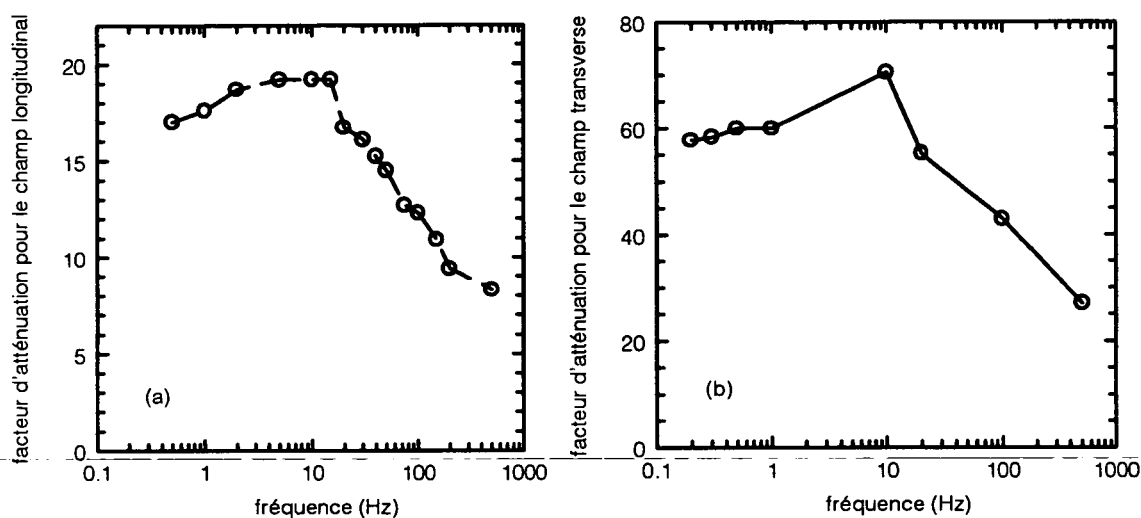


Figure II.32 *Blindage magnétique par le tube en mumétal utilisé sur l'expérience.*

Le tube a un diamètre de 19 cm, une longueur de 63 cm et une épaisseur de 2 mm. La sonde se trouve dans la zone d'interaction, soit à 23 cm d'une des extrémités du blindage.

(a) *Blindage longitudinal* : l'efficacité du blindage augmente très légèrement (10 %) jusqu'à 10 Hz puis diminue d'un facteur 2 de 10 Hz à 100 Hz.

(b) *Blindage transverse* : le blindage transverse est environ 4 fois plus efficace que le blindage longitudinal. On observe le même comportement en fréquence que pour le blindage longitudinal. La dégradation de l'efficacité du blindage au-delà de 10 Hz (comportement opposé à l'effet de peau observé sur le blindage d'essai, figure II.31) semble être due à la présence des nombreuses ouvertures dans le blindage, au voisinage de la zone d'interaction.

En résumé, le blindage en mumétal atténue le champ magnétique ambiant d'un facteur 10 à 20 sur l'axe du jet atomique d'un facteur 50 à 70 pour le champ perpendiculaire à l'axe du jet, pour des fréquences de 0 à 100 Hz. Les ouvertures pratiquées dans le mumétal réduisent non seulement l'efficacité du blindage à fréquence

[35]

En outre, nous avons observé qu'on améliorerait d'un facteur 2 l'efficacité du blindage en prolongeant les ouvertures par des petits tubes ("canons") en mumétal de 4 à 5 cm de longueur. Mais la dépendance fréquentielle du blindage n'était pas améliorée. Pour des raisons pratiques, ces canons n'ont pas été montés.

nulle, mais détériorent aussi sa réponse à fréquence plus élevée (10-500 Hz). Les champs ambiants non constants sont ainsi réduits à un niveau de 2 mG, ce qui est à la limite des exigences pour l'expérience de résonances noires. Le blindage pourrait probablement être 2 à 10 fois plus efficace, en particulier à 50 Hz, si on pouvait réduire les ouvertures.

4.3.4.2 Contrôle des champs de ralentissement

Les champs magnétiques créés par les bobines de ralentissement au niveau de la zone d'interaction sont de l'ordre de un gauss (cf. § II.4.3.3). Comme il est difficile de maintenir ces champs constants au milligauss près, nous avons choisi de les supprimer pendant la période de résonances noires, plutôt que de les compenser. Ceci est en accord avec l'idée générale d'une expérience pulsée, qui alterne phases de ralentissement et de piégeage et phases de refroidissement par résonances noires.

Ainsi, les bobines de ralentissement (S_1 , S_2 , Q_4 et S_R) sont coupées 100 à 200 ms avant la période de résonances noires. Pendant cette phase de 100 à 200 ms, les atomes sont maintenus dans le piège car les bobines quadrupolaires Q_1 et Q_2 sont toujours traversées par un courant.

La coupure du courant dans les bobines suit deux stratégies selon l'inductance des bobines. Pour les bobines de grande inductance [36], comme S_1 , S_2 et Q_4 (diamètre 20 à 40 cm, plusieurs centaines de spires), la coupure du courant présente une certaine difficulté malgré des intensités relativement faibles ($I_1 = 4$ A, $I_2 = 4,7$ A). Pour les bobines de faible inductance, comme S_R (diamètre 6 cm, 57 spires), la coupure du courant est beaucoup plus aisée malgré des courants plus importants ($I_R = 18$ A). Nous donnons le montage pour S_R au paragraphe suivant (§ II.4.3.4.3).

Nous sommes parvenus empiriquement au montage électrique de la figure II.33. Le circuit électrique de chaque bobine comporte trois éléments :

- alimentation électrique ;
- dispositif de coupure de courant ;
- bobine proprement dite et circuit en parallèle de protection et de dissipation.

Bien que les puissances à dissiper soient relativement importantes (courants de 4 à 5 A, tensions de 50 à 100 V), la difficulté vient surtout des problèmes d'induction : lors de la coupure du courant dans une bobine, un pic de tension apparaît ($V = L di/dt$), d'autant plus important que l'on recherche une coupure rapide. Si on essaie d'effectuer une coupure brutale, la tension monte jusqu'à ce qu'un claquage se produise, ce qui est dangereux pour le matériel.

En outre, le système est complexe car il n'y a pas qu'une seule bobine, mais quatre bobines de grande inductance (S_1 , S_2 , Q_3 , Q_4) fortement couplées entre elles (courants de Foucault) et couplées à l'enceinte en acier inoxydable et au blindage magnétique. Ainsi, l'analyse de chaque circuit séparément ne suffit pas : alors que la coupure du courant dans S_1 et S_2 fonctionnait parfaitement, la simple mise en route de

[36] Nous avons mesuré les inductances suivantes : $L_1 \approx 0,7$ mH pour S_1 , $L_2 \approx 13$ mH pour S_2 , $L_3 \approx 16,3$ mH pour Q_3 .

Q_4 a induit des tensions d'induction assez importantes pour provoquer un claquage entre les deux solénoïdes S_1 et S_2 .

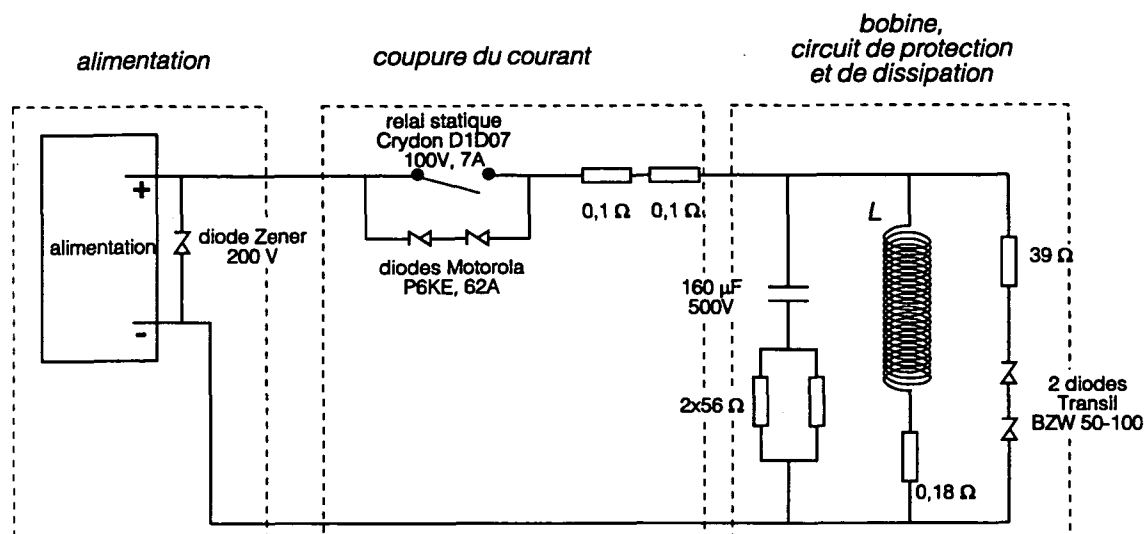


Figure II.33 Montage électronique de coupure du courant des solénoïdes de grande inductance. Le montage se décompose en trois parties : l'alimentation, le dispositif de coupure et la bobine avec son circuit de protection et de dissipation en parallèle. L'élément actif de la coupure du courant est le relais statique. Chaque partie est protégée contre les surtensions (pics d'induction, courants de Foucault) par des diodes Zener ou par des diodes "Transil". Les résistances de $39\ \Omega$ et de $56\ \Omega$ servent à dissiper l'énergie accumulée dans la bobine. La capacité de $160\ \mu\text{F}$ amortit le pic d'induction lors de l'ouverture du relais. Les résistances de $0,1\ \Omega$ et $0,18\ \Omega$ permettent d'effectuer des mesures de courant respectivement dans le circuit principal et dans la bobine. Remarque qu'en régime stationnaire, c'est-à-dire hors des phases transitoires de commutation du courant, aucun courant ne passe dans les circuits en parallèle avec la bobine, grâce aux diodes "Transil" et à la capacité (si un courant continu passait dans les résistances de $39\ \Omega$ et de $56\ \Omega$, ces résistances ne résisteraient pas à l'échauffement).

Pour faire face à cette complexité, il est essentiel d'avoir un moyen de limiter la tension aux bornes de *tous* les éléments du circuit (alimentations, dispositifs de coupures, bobines), *dans les deux sens*. Ceci se fait à l'aide de diodes Zener ou de diodes "Transil" de puissance.

Donnons maintenant les performances du montage de la figure II.33. Tout d'abord, le montage donne satisfaction sur le plan électronique (fiabilité sur plusieurs jours de fonctionnement). Le temps d'amortissement du courant, qui doit être le plus rapide possible, a été minimisé à l'aide des résistances et des capacités des circuits. Le courant mesuré s'amortit approximativement exponentiellement avec une constante de temps de 5 à 10 ms selon le montage.

Cependant, ceci ne signifie pas que le champ magnétique s'amortisse avec la même constante de temps (cf. présence de courants de Foucault dans l'enceinte ou dans le blindage magnétique ou d'autres phénomènes comme on le verra au § III.2).

D'autre part, la mesure du courant dans les bobines n'est fiable que sur les premières constantes de temps, et on ne peut pas l'extrapoler à la date de 100 à 200 ms

qui nous intéresse.

Enfin, on peut se poser la question du comportement du mumétal dans des champs pulsés de plusieurs centaines de gauss. L'utilisation habituelle du mumétal se fait dans un champ magnétique faible (de l'ordre du gauss) et constant. En outre, l'efficacité des blindages en mumétal est couramment améliorée en faisant subir au blindage des cycles d'hystérésis lents, d'amplitude décroissante. Nous faisons exactement l'inverse, en créant des variations brutales de champs magnétiques importants. Nous ne savons pas si les propriétés du mumétal se conservent dans ces conditions. En outre, nous avons observé que l'application de champs de l'ordre de 40 G suffit à créer des champs rémanents de 2 à 4 mG au centre du blindage d'essai. Quels sont les champs résonnants lors des cycles de centaines de gauss que nous faisons subir au mumétal ? Ces champs rémanents sont-ils stables sur une série de cycles ?

Nous avons donc besoin de mesures plus précises du champ magnétique réel dans la zone d'interaction, puisque l'extrapolation à partir des courants mesurés dans les bobines n'est pas fiable.

4.3.4.3 Contrôle des champs de piégeage

Les bobines de piégeage Q_1 et Q_2 créent un gradient de 16 G.cm^{-1} au niveau de la zone d'interaction. Il est donc impératif de couper ce champ avant la phase de résonances noires. Contrairement aux champs de ralentissement qui peuvent être coupés 100 à 200 ms avant la phase de résonances noires, les champs de piégeage doivent être coupés juste avant la phase de résonances noires. En effet, dès que Q_1 et Q_2 sont coupées, le piège ne fonctionne plus et le nuage atomique s'étend.

Estimons le temps de coupure théorique des bobines de piégeage Q_1 et Q_2 . L'inductance calculée de chacune de ces bobines est de $L = 10^{-6} \text{ H}$ environ (Noter que l'inductance des câbles qui amènent le courant aux bobines est du même ordre de grandeur). Imaginons que lors de la coupure, on fasse débiter la bobine dans une résistance de $R = 1 \Omega$ (cette valeur est choisie pour que la tension de crête V_{max} soit raisonnable, ici $V_{\text{max}} = RI = 50 \text{ V}$). Le temps de coupure τ sera alors :

$$\tau = L/R \approx 10^{-6} \text{ s} \quad (\text{II.65})$$

Cela signifie qu'il faudrait attendre quelques microsecondes après la coupure du courant pour que le champ soit tombé à 0. Or, en quelques microsecondes, les atomes ne parcourraient que quelques microns et l'expansion du nuage atomique serait donc négligeable.

Le montage électrique de coupure du courant est donné par la figure II.34. Noter qu'ici, contrairement au montage pour les bobines de ralentissement, il n'y a pas besoin de protection contre les pics d'induction, les inductances impliquées étant faibles. La seule particularité du montage est la présence d'un "leurre" : lorsqu'on coupe le courant dans la bobine, on l'envoie dans une résistance équivalente afin que l'alimentation puisse continuer à débiter le même courant. Ceci évite des perturbations de l'asservissement en courant de l'alimentation qui entraîneraient des constantes de temps de 100 à 300 ms pour stabiliser le courant lors de la remise sous tension des bobines.

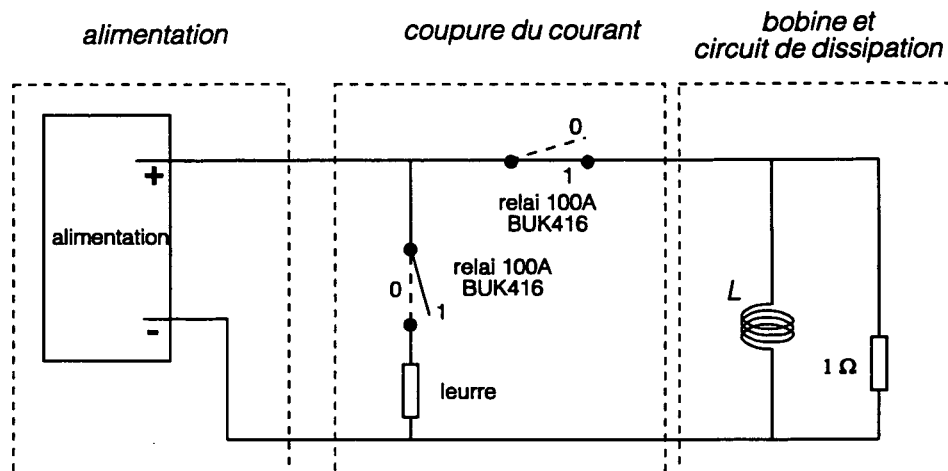


Figure II.34 Montage électronique de coupure du courant des bobines de faible inductance. En position (1), le courant passe dans les bobines et ne passe pas dans le circuit de leurre en parallèle. En position (0), le courant ne passe que dans le circuit de leurre. Le circuit de leurre permet à l'alimentation de continuer à débiter un courant constant, même lors de l'ouverture du circuit de la bobine. La résistance en parallèle de la bobine est constituée d'un simple câble de cuivre. La résistance de $1\ \Omega$ en parallèle de la bobine est parcourue par un courant continu négligeable, puisque sa résistance est environ 250 fois supérieure à celle de la bobine. Ce montage est appliqué aux bobines Q_1 et Q_2 de piégeage ($L \approx 10^{-6}$ H, $R \approx 4 \times 10^{-3}\ \Omega$, valeurs estimées) et à la bobine de raccord S_R ($L \approx 10^{-4}$ H, $R \approx 4 \times 10^{-2}\ \Omega$, valeurs estimées).

Quels sont les résultats obtenus avec ce montage ? Les mesures par des moyens électroniques de la coupure du courant sont difficiles. En effet, les courants étant importants, les résistances placées pour les mesures doivent être faibles. Ainsi, la résistance des bobines est inférieure à notre seuil de sensibilité, soit $0,04\ \Omega$. A ce niveau, les résistances de contact, difficiles à maîtriser, jouent un grand rôle. Ainsi, les mesures électroniques de la coupure des bobines de piégeage ne nous ont donné que des artefacts.

A priori, le temps de coupure du courant est suffisamment court (cf. équation II.65) pour que la phase de résonances noires ne soit pas perturbée. Cependant, il est important de mesurer le temps de coupure du champ magnétique lui-même. Effectivement, nous verrons au chapitre III (§ III.2.3) que ce temps est de deux ordres de grandeur plus long que ce que laissait espérer l'équation (II.65).

4.3.5 Bilan sur les contraintes de champ magnétique

Nous avons calculé le taux de fluorescence $\Gamma'_{NC}(B)$ induit par un champ magnétique, dans le cas où ce champ peut être traité perturbativement ($\Omega_B < \Omega_1$) et où le champ laser peut également être traité perturbativement ($\Omega_1 < \Gamma$). Pour que le champ magnétique ne nuise pas au refroidissement par résonances noires, il faut que ce taux de fluorescence $\Gamma'_{NC}(B)$ provoque l'émission de moins d'un photon par atome pendant la durée d'interaction θ , ce qui se traduit par :

$$\boxed{\Omega_B/\sqrt{2} < k\delta p_\theta/M} \quad (\text{II.53, rappel})$$

ou encore par :

$$\boxed{B < 43 \text{ mG} \times \frac{\delta p_\theta}{p_R}} \quad (\text{II.54, rappel})$$

Toutefois, si le champ magnétique est constant, et parallèle à la direction des lasers, dans le cas à une dimension, le refroidissement par résonances noires se produit en dépit du champ magnétique, mais dans un référentiel en mouvement.

Expérimentalement, un blindage magnétique relativement peu efficace permet d'atténuer d'un facteur 10 au moins les champs ambiants fluctuants ou alternatifs. Les variations typiques, de 2 à 4 mG, sont ramenées à 0,2 – 0,4 mG, ce qui devrait permettre d'atteindre l'objectif $\delta p_\theta \approx p_R/10$. Mais les variations les plus importantes, de 20 mG, ne sont ramenées qu'à 2 mG, ce qui peut limiter le processus de refroidissement lorsque de telles fluctuations de champ se produisent.

Les champs magnétiques créés pour le piégeage et le ralentissement, dont l'ordre de grandeur est la centaine de gauss, sont modulés et éteints pendant la phase de résonance noire. Cependant, le système est complexe (plusieurs bobines couplées entre elles, matériaux magnétiques), et on n'est pas certain que ces champs magnétiques diminuent suffisamment rapidement pour ne pas perturber la phase de résonances noires. La mesure du courant résiduel dans les bobines, quand elle est possible, ne suffit pas à assurer la nullité du champ.

Il est donc essentiel de pouvoir mesurer le champ magnétique dans la zone d'interaction, précisément, et avec une résolution temporelle suffisante. On doit en outre effectuer ces mesures chaque jour pour mesurer d'éventuelles variations de grande amplitude (> 10 mG) du champ ambiant. Ceci amène à essayer d'utiliser les atomes eux-mêmes comme sonde magnétique. La même démarche avait conduit, en 1988, à l'invention de l'effet Hanle mécanique [KVA91]. C'est le même effet que nous allons utiliser pour mesurer le champ magnétique, en l'adaptant aux conditions très différentes de notre expérience (voir § III.2).

4.4 Mesure de la distribution en impulsion des atomes refroidis

Dans ce paragraphe, nous allons décrire en détail comment la galette peut être utilisée comme détecteur bidimensionnel, puis comment faire des mesures de vitesses le long de l'axe étudié. Nous déterminerons ensuite la résolution en vitesse du dispositif et examinerons les problèmes de bruit.

[KVA91] R. Kaiser, N. Vansteenkiste, A. Aspect, E. Arimondo, and C. Cohen-Tannoudji, *Mechanical Hanle Effect*, Z. Phys. D 18, p. 17-24 (1991).

4.4.1 Un détecteur bidimensionnel multicanal : la galette de microcanaux

Nous avons déjà décrit le fonctionnement de la galette microcanaux au paragraphe II.3.3.4.4 où elle était utilisée en tant que simple multiplicateur d'électrons. Elle servait alors à l'étude des temps de vol.

Cependant, on peut aussi savoir avec précision la position d'arrivée de chaque atome. Pour cela, il suffit d'accélérer la bouffée d'électrons issus de la deuxième galette sur un *écran de phosphore*, en l'occurrence RTC P-20 par une tension typique de 3 kV (figure II.35). L'impact de la bouffée d'électrons produit une émission de lumière bien localisée sur une fraction de millimètre, visible à l'œil nu. On a ainsi accès à la position d'arrivée des atomes d'hélium sur la galette.

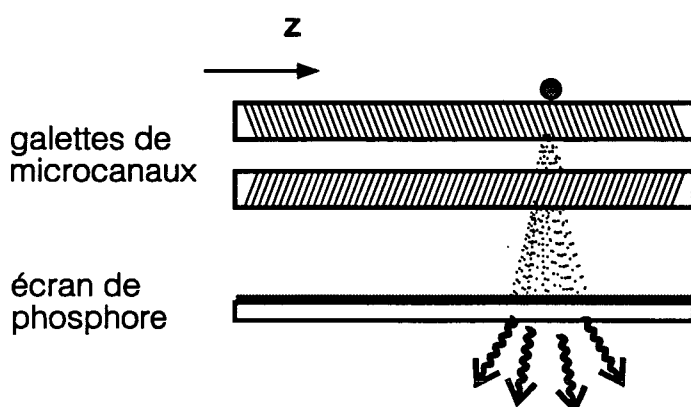


Figure II.35 Visualisation de la position des atomes sur un écran de phosphore. Un atome qui arrive sur les galettes de microcanaux engendre une bouffée de $\approx 10^6$ électrons, qui sont accélérés sur un écran de phosphore. Leur impact sur l'écran crée une gerbe de photons, aisément visible à l'œil nu, qui révèle la position d'arrivée de l'atome.

Notons qu'il existe un deuxième système de détection des positions dans lequel l'écran de phosphore est remplacé par une "anode résistive". La bouffée d'électrons est alors envoyée sur une anode carrée. Quatre amplificateurs de charge placés aux quatre coins du carré détectent chacun une charge différente, d'autant plus grande que la bouffée d'électrons a atteint l'anode plus près de l'amplificateur considéré. La comparaison des quatre charges détectées permet de calculer la position d'arrivée de la bouffée d'électrons. Dans les expériences décrites dans ce mémoire, nous n'avons pas utilisé d'anodes résistives, parce qu'elles sont plus complexes à mettre en oeuvre que les écrans de phosphore. Nous les évoquons cependant car leurs performances, supérieures à celles des écrans de phosphore, déterminent la limite supérieure des capacités des systèmes de galettes microcanaux.

Le système de galettes de microcanaux peut donc être utilisé comme un détecteur bidimensionnel multicanal. Il fournit, sans avoir à faire varier aucun paramètre, la position des atomes arrivant à sa surface. En outre, l'étendue des galettes (diamètre utile 32 mm) permet de collecter les atomes sur une fraction significative de l'angle solide. Cette large surface de collection a été très utile pour les expériences de temps de vol, elle l'est tout autant pour les expériences de résonances noires.

On peut estimer le nombre d'atomes détectés chaque fois qu'on laisse tomber les atomes du piège. Sans refroidissement par résonances noires, 5 % environ des atomes sont collectés, soit 5000 atomes par lâcher du piège. Par ailleurs, les vitesses initiales

des atomes sont telles que la plupart des atomes ont des vitesses dans le plan horizontal trop grandes pour leur permettre d'atteindre la galette. Ainsi, si on rajoute le refroidissement par résonances noires, on s'attend à un nombre d'atomes sensiblement augmenté du fait du refroidissement supplémentaire [37]. Ces quelques milliers d'atomes doivent fournir un signal d'amplitude largement suffisante pour notre expérience.

4.4.2 Principe de la détection des vitesses

Les vitesses sub-recul sont mesurées par une méthode balistique (figure II.36). Pour fixer les notations, nous prenons le cas du refroidissement à une dimension, selon l'axe z .

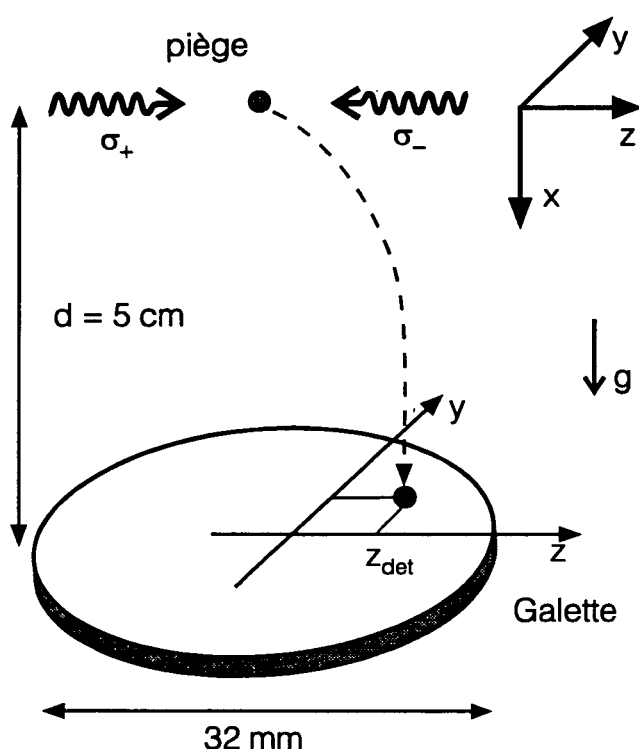


Figure II.36 Principe de la détection des vitesses. Pour prendre un cas précis, nous considérons une expérience de refroidissement à une dimension selon un axe z horizontal parallèle avec les faisceaux lasers. L'axe x est vertical, alors que l'axe y est horizontal et orthogonal à l'axe z des lasers.

Après avoir subi la période de résonances noires, les atomes issus du piège tombent en chute libre vers la galette microcanaux. Certains donnent un impact sur la galette, et avec de nombreux impacts, on construit une distribution en position des atomes au niveau de la galette. L'objectif est de relier cette distribution en position sur la galette à la distribution des vitesses v_z selon z (dans le cas à une dimension où z est la direction refroidie) à la fin de l'interaction avec les faisceaux de résonances noires.

Considérons dans un premier temps que les atomes sont tous issus du même point source, identifié avec le centre du piège. Dès que le faisceau de résonances noires

[37]

Cependant, l'effet du refroidissement sur un axe est partiellement compensé par l'inévitable réchauffement que le faisceau de résonances noires induit sur les autres axes. La combinaison des deux effets se traduit par une légère augmentation du nombre d'atomes détectés (expérimentalement, un facteur 2 à 3 dans les expériences à une dimension).

est coupé, les atomes sont en chute libre. Seule la composante v_z a été refroidie par la période de résonances noires, les composantes v_x et v_y restant du même ordre de grandeur que les vitesses dans le piège ($\delta v = 0,5 \text{ m.s}^{-1}$).

Restreignons-nous aux atomes ayant une vitesse de composante verticale v_x bien définie, par exemple $v_x = \delta v = 0,5 \text{ m.s}^{-1}$, et une vitesse v_y est telle que ces atomes tombent effectivement sur le détecteur. Leur temps de vol τ_{vol} , entre l'instant où les atomes sont lâchés et leur arrivée sur la galette, est alors le même pour tous ces atomes et est donné simplement par l'équation (chute libre)

$$d = v_x \tau_{\text{vol}} + \frac{1}{2} g \tau_{\text{vol}}^2 \quad (\text{II.66})$$

d'où

$$\tau_{\text{vol}} = \frac{-v_x + \sqrt{v_x^2 + gd}}{g} \quad (\text{II.67})$$

La position de l'atome z_{det} sur la galette est alors simplement donnée par

$$z_{\text{det}} = v_z \times \tau_{\text{vol}} \quad (\text{II.68})$$

La distribution des positions z_{det} sur la galette est donc le reflet direct de la distribution des vitesses v_z que nous voulons mesurer.

Evidemment, une relation aussi simple ne s'obtient que lorsqu'on considère des atomes ayant tous le même temps de vol τ_{vol} et tous issus du même point source. En réalité, aucune de ces conditions n'est parfaitement réalisée, et la dispersion des temps de vol et des point sources introduit des convolutions sur lesquelles nous reviendrons plus tard (cf. § II.4.4.4 et III.3.3). Si on admet que l'on peut s'affranchir de ces convolutions, l'équation (II.68) montre que la galette fournit bien l'information recherchée sur la distribution des vitesses selon z .

4.4.3 Résolution en position et en vitesse

La résolution en position σ_{galette} de la détection par galette dépend du signal que donne l'impact d'un seul atome sur la galette. Chaque bouffée d'électrons issue des galettes engendre une émission lumineuse du phosphore, qui se traduit par une petite tache jaune-vert aisément visible à l'oeil nu. Pour une analyse quantitative, le phosphore est filmé par un système de caméra CCD décrit plus loin, et les images obtenus sont numérisées. Le profil de la tache lumineuse créée par l'arrivée d'un seul atome est reproduit sur la figure II.37

Avec les paramètres de numérisation choisis, le maximum du profil d'intensité de la tache engendrée par un seul atome correspond ici à une intensité de 30 (valeurs typiques : entre 25 et 35), alors que la numérisation se fait sur 8 bits (0-255). L'ajustement avec une gaussienne est remarquable pour la plupart des profils. La largeur moyenne σ_{tache} à $1/\sqrt{e}$ des taches est de 3,4 pixels, soit $\sigma_{\text{tache}} = 0,53 \text{ mm}$. Cette valeur correspond aux conditions expérimentales décrites dans tout ce chapitre. Cette largeur fluctue d'au maximum 10 % d'une tache à l'autre. Grâce à cet ajustement gaussien, la position d'impact d'un seul atome peut aisément être déterminée avec une

précision de $100\ \mu$. Ceci donne une idée des propriétés remarquables des galettes microcanaux.

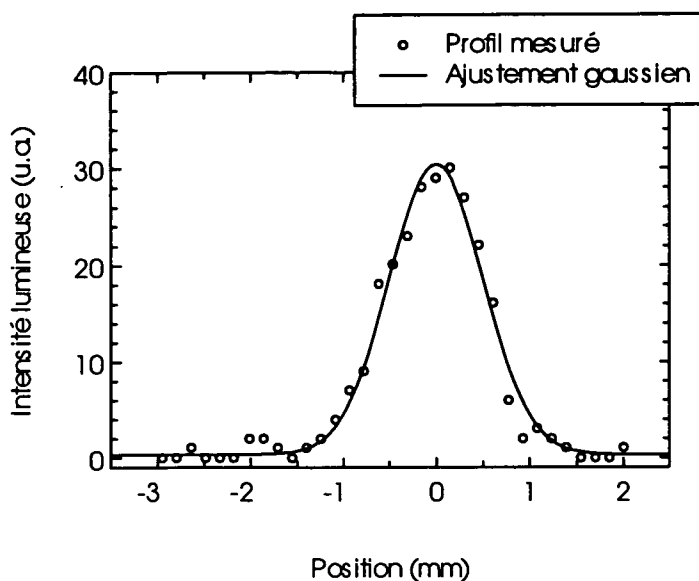


Figure II.37 Profil de l'émission lumineuse du phosphore dû à l'arrivée d'un seul atome sur la galette microcanaux. L'image est enregistrée par une caméra CCD puis numérisée. Noter l'adéquation entre le profil gaussien et le pic observé, ainsi que la faiblesse du bruit de fond. Un pixel correspond à $0,155\ \text{mm}$.

La résolution σ_{galette} effectivement obtenue va dépendre de la façon dont on traite le signal. On peut la relier à une résolution en vitesse σ_v , en tenant compte du temps de chute τ_{vol} typique ($50\ \text{ms}$) des atomes entre le piège et la galette, par la relation :

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{\text{gal}}}{\tau_{\text{vol}}} \quad (\text{II.69})$$

Nous retenons deux critères possibles pour estimer σ_{galette} :

- Aucune déconvolution : $\sigma_{\text{galette}} = \sigma_{\text{tache}} = 530\ \mu$.
On obtient alors : $\sigma_v = 1,1\ \text{cm.s}^{-1} = v_R/9$.
- Ajustement gaussien de chaque tache : $\sigma_{\text{galette}} = 100\ \mu$.
On obtient alors : $\sigma_v = 2\ \text{mm.s}^{-1} = v_R/50$.

Ces caractéristiques sont déjà satisfaisantes et seraient améliorables relativement aisément.

Une première première solution consisterait à augmenter la tension d'accélération entre les deux galettes. Alors, la bouffée d'électrons issus de la première galette reste mieux focalisée sur la deuxième galette et une tache plus petite est donc obtenue sur l'écran de phosphore. En contrepartie, le gain du système est plus faible puisqu'on utilise moins de canaux amplificateurs de la deuxième galette. Dans les expériences décrites ici, nous avons maximisé le gain en minimisant l'accélération intergalettes. Nous étions donc *a priori* loin de la résolution optimale en position.

Une deuxième solution consisterait à remplacer l'écran de phosphore par une anode résistive, dont le principe a été décrit au § II.4.4.1. Avec une anode résistive, on peut atteindre une résolution d'un centième de la taille de l'anode, soit ici environ $30\ \mu$.

Retenons que la résolution en position de la galette donne accès à une résolution en vitesse de $v_R/9$, sans aucune déconvolution, et qu'une résolution de $v_R/50$ est aisément accessible. En fait, $v_R/9$ suffit pour les expériences décrites dans ce mémoire, d'autant que nous verrons que la résolution en vitesse est en fait limitée par d'autres paramètres que la résolution en position de la galette.

4.4.4 Sélection temporelle

On pourrait penser intégrer simplement sur une certaine durée les images des bouffées d'atomes arrivant sur la galette, chaque fois qu'on laisse tomber les atomes piégés puis refroidis par résonances noires. En fait, il est indispensable d'exposer la caméra sur des fenêtres temporelles courtes et bien choisies, pour deux raisons que nous allons donner ici.

Examinons tout d'abord les problèmes de rapport signal sur bruit : lorsqu'on ralentit et piège les atomes, la galette de microcanaux détecte un flux relativement important de métastables. Ces métastables correspondent vraisemblablement soit à des métastables ralentis non piégés, soit à des métastables piégés éjectés du piège par collision élastique. Si on intègre les images pendant tout le chargement du piège, qui dure environ une seconde, alors ce bruit va dominer le signal des atomes lâchés du piège.

Pour résoudre ce problème, il faut utiliser le fait que le signal des atomes refroidis est bien localisé dans le temps : les atomes issus du piège atteignent le détecteur dans une fenêtre temporelle bien définie par rapport à la coupure du piège, dont la durée est de 50 ms environ. Si on intègre pendant ces 50 ms, on réduit le bruit d'un facteur 20 au moins.

En fait, il faut réduire encore davantage la fenêtre temporelle d'exposition de la caméra pour pouvoir mesurer les vitesses avec précision. En effet, comme le montre l'équation (II.68), la méthode balistique ne permet de remonter à la vitesse des atomes que si on connaît leur temps de chute. Ceci a conduit à limiter l'exposition à des fenêtres temporelles de 5 à 20 ms.

Sur le plan technique, pour réaliser une fenêtre temporelle d'exposition bien définie, nous avons utilisé une caméra CCD déclenchée IMC500 (principe "monoshot" de I2S) dont la durée d'exposition peut varier de 1 ms à 1 s. La matrice CCD comporte 500 pixels×582 pixels de dimension $17\mu\text{m}\times 11\mu\text{m}$. Les images CCD sont numérisées en temps réel sur 8 bits par une carte de traitement d'images (Cyclope). Chaque bouffée d'atomes donne naissance à une image digitalisée de 8.10^4 pixels, qui est numériquement additionnée sur 16 bits aux images des bouffées précédentes. On parvient à relayer la sommation en temps réel, c'est-à-dire en moins de 2 secondes, sur un processeur 80486 à 66 Mhz. Ainsi, on traite les images en temps réel, au fur et à mesure que, chaque 2 s, une nouvelle bouffée d'atomes est refroidie et détectée.

5 Conclusion

5.1 Etapes principales de la nouvelle expérience

Les atomes d'hélium dans l'état fondamental sont issus d'un jet supersonique à une température de 5 à 20 K. Ils sont excités dans l'état 2^3S_1 à 19,8 eV par bombardement électronique. On réalise alors une première phase de refroidissement laser : une mélasse optique à deux dimensions, sur la transition $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_2$, réduit la dispersion des vitesses transverses à 1 m.s^{-1} . Puis les atomes dont la vitesse longitudinale est inférieure à 400 m.s^{-1} sont ralentis sur une longueur de 70 cm par un faisceau laser qui se propage sens inverse, dans un champ magnétique spatialement inhomogène. Une partie des atomes ralentis (5 à 10%) est piégée dans un piège magnéto-optique sur la transition $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_2$. Dans ce piège, on peut accumuler jusqu'à 2×10^5 atomes d'hélium pendant des temps de l'ordre d'une seconde dans un volume de 250 à 500 μm de rayon. Les vitesses caractéristiques sont de l'ordre de 0,3 à 1 m.s^{-1} . La densité qui peut valoir jusqu'à $10^9 \text{ atomes.cm}^{-3}$ est limitée par les collisions entre $\text{He}(2^3S_1)$ et $\text{He}(2^3P_2)$ qui fait apparaître des taux de réaction géants ($K_{SP} \approx 10^7 \text{ cm}^{-3}.\text{s}^{-1}$).

Le piège est ensuite coupé et on applique pendant une durée θ les faisceaux lasers de résonance noires au nuage d'atomes prérefroidis. Ces faisceaux sont coupés avant que les atomes ne franchissent leur bord. Les atomes tombent alors en chute libre vers une galette de microcanaux qui les détecte un par un. La galette est suivie d'un écran de phosphore, lui-même filmé par une caméra CCD déclenchée. La distribution en position des atomes sur la galette permet de remonter à la distribution en impulsion des atomes.

Ce nouveau schéma résout complètement les difficultés optiques apparues dans l'expérience de résonances noires sur jet. Cependant, il pose des contraintes nouvelles liées à la présence des champs magnétiques de l'ordre de 100 gauss pour le ralentissement et le piégeage. En effet, nous avons montré que l'expérience de résonances noires exige des champs magnétiques inférieurs au mG.

Pour concilier piégeage et résonances noires, on est amené à pulser les champs magnétiques, d'où la séquence temporelle de la figure II.38 :

- (1) On ralentit et on accumule les atomes dans le piège. Cette phase, pendant laquelle tous les champs magnétiques sont branchés, dure environ une seconde. L'objectif de cette phase est d'accumuler le plus d'atomes possible.

- (2) On coupe les champs magnétiques de ralentissement, mais on maintient ceux de piégeage branchés. Les atomes sont ainsi maintenus piégés pendant 250 ms environ, ce qui laisse le temps aux champs de ralentissement de s'annuler. Pendant cette phase, on ajuste les paramètres lasers pour diminuer la température du piège.

- (3) On coupe les faisceaux et les champs magnétiques de piégeage. Les atomes sont alors soit en vol libre, soit maintenus dans une mélasse optique à 3 dimensions qui permet de limiter l'expansion du nuage atomique.

- (4) On applique les faisceaux laser de résonances noires pendant une durée θ . C'est la phase la plus délicate de l'expérience, celle pendant laquelle on doit préserver la cohérence de l'interaction atomes-laser pour réaliser le refroidissement laser sub-recul.
- (5) Les faisceaux de résonances noires sont coupés et on laisse les atomes tomber en chute libre vers la galette de microcanaux.
- (6) La caméra CCD intègre pendant une durée $(\tau_{v2}-\tau_{v1})$, les images de l'arrivée des atomes sur la galette de microcanaux.
- (7) Ces images sont numérisées et traitées en temps réel.

Un cycle prend environ 2 s. Ces cycles seront répétés environ 50 à 100 fois pour obtenir un rapport signal sur bruit suffisant.

Intensité laser

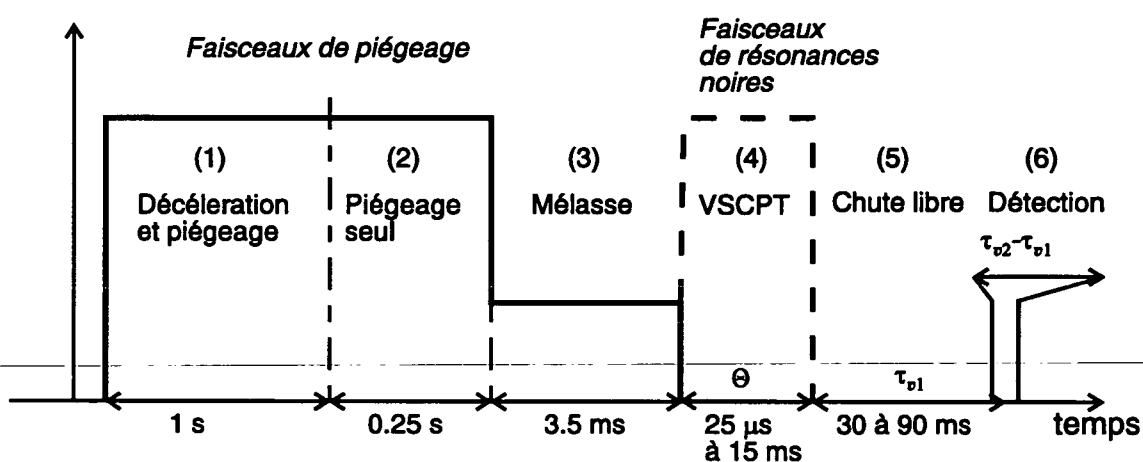


Figure II.38 Séquence temporelle de l'expérience de résonances noires.

5.2 Potentiel de la nouvelle conception de l'expérience

Le paramètre essentiel des résonances noires, celui que l'on cherche à optimiser par cette nouvelle conception de l'expérience, est le temps d'interaction θ , qui détermine la température atteinte. Quels sont les temps d'interaction accessibles à partir des atomes piégés ?

Il est raisonnable d'utiliser des faisceaux laser de résonances noires de 2 cm de diamètre. Considérons que les atomes ont une vitesse initiale de $0,5 \text{ cm.s}^{-1}$ et que l'on ne détecte que les atomes ayant une vitesse initiale dirigée vers le bas. Le temps d'interaction dont on dispose en tenant compte de l'accélération par la pesanteur est de 15 ms environ soit $1,5 \cdot 10^5 \Gamma^{-1}$. Ces temps sont environ 500 fois plus longs que ceux de l'expérience sur jet.

En extrapolant les résultats de l'expérience de 1988, cela signifie que l'on pourrait atteindre une température de $T_R/1000 \cong 4 \text{ nK}$ ou encore une dispersion des vitesses $\delta v_\theta \approx v_R/30 \approx 2,9 \text{ mm.s}^{-1}$.

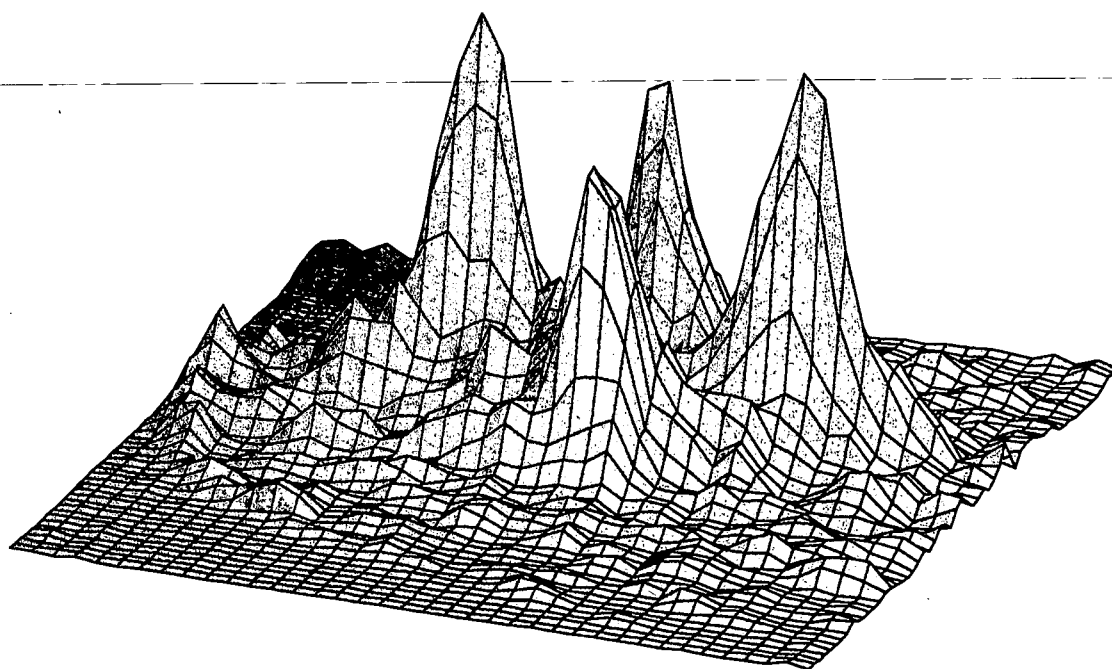
Pour pouvoir atteindre de telles températures, il faut satisfaire des contraintes de cohérence. Celles relatives à l'optique ont été considérablement simplifiées et ne devraient pas poser problème. En ce qui concerne les champs magnétiques résiduels, nous avons quantitativement déterminé les contraintes pour pouvoir atteindre $\delta v_{\theta} \approx v_R/30$, il faut un champ magnétique résiduel petit devant 1,5 mG. Le dispositif actuel est adapté puisque les fluctuations typiques des champs ambiants sont limités à 0,2-0,4 mG, mais risque d'être limité en cas de fortes fluctuations (2 mG). Ceci pourrait être amélioré aisément avec un blindage plus efficace. Il faut aussi pouvoir mesurer les champs magnétiques résiduels pour les compenser, ce qui fera l'objet du début du chapitre III.

Il faut enfin pouvoir mesurer de telles températures. Le système de galettes de microcanaux actuel possède une résolution de $v_R/9$, si on n'effectue aucune déconvolution des taches dues à un seul atome. Cette résolution peut d'ailleurs être facilement améliorée, soit par une modification des tensions accélératrice des galettes, soit par détermination du centre des taches. Un avantage plus décisif de ce système est son aspect multicanal. On détecte la position des atomes arrivant sur l'aire du détecteur, sans effectuer sans aucune sélection spatiale. On dispose également de l'information temporelle sur l'arrivée des atomes grâce aux temps de vols. Ceci permet d'envisager facilement la détection de distribution en impulsion à 1, 2 et 3 dimensions.

En conclusion, le montage réalisé, poussé à ses limites, devrait donner accès à un refroidissement à $1/1000 T_R$, à 1, 2 ou 3 dimensions. Le chapitre suivant décrit les expériences préliminaires qui ont permis de gagner plus d'un ordre de grandeur sur les températures atteintes et d'accéder au refroidissement sub-recul à 2 dimensions.

Chapitre III

Expériences de refroidissement sub-recul



Plan du chapitre III : Expériences de refroidissement sub-recul

1 Introduction	131
2 Effet Hanle mécanique : étude des champs magnétiques parasites	133
2.1 Introduction	133
2.2 L'effet Hanle mécanique	134
2.3 Effet Hanle mécanique sur le jet atomique	137
2.3.1 Principe des mesures d'amortissement des champs magnétiques	137
2.3.2 Amortissement des champs magnétiques de ralentissement	140
2.3.3 Amortissement des champs magnétiques de piégeage	143
2.3.4 Compensation des champs magnétiques constants	146
2.4 Effet Hanle mécanique avec les atomes issus du piège magnéto-optique	150
2.4.1 Principe expérimental	150
2.4.2 Compensation des champs magnétiques avec une résolution spatiale et temporelle améliorée	153
2.5 Conclusion sur les expériences d'effet Hanle mécanique	156
3 Expériences à une dimension	156
3.1 Introduction : signaux bruts et premiers tests	156
3.2 Influences des champs magnétiques	161
3.2.1 Effet d'un champ magnétique transverse	161
3.2.2 Effet d'un champ magnétique longitudinal constant	163
3.2.3 Effet d'un gradient de champ magnétique	165
3.3 Mesure de température	166
3.3.1 Profil brut	166
3.3.2 Rôle de la fenêtre temporelle d'exposition de la caméra	168
3.3.3 Forme du profil des bandes	170
3.3.4 Déconvolution du profil des bandes	175
3.4 Evolution en fonction du temps d'interaction	178
4 Expériences à deux dimensions	181
4.1 Efficacité du remplissage et forces de friction	181
4.2 Expérience avec des faisceaux à 30 °	184
4.3 Expérience avec des faisceaux à 90 °	188
5 Conclusion	190

1 Introduction

Le principe de la nouvelle expérience est de refroidir par résonances noires des atomes confinés et prérefroidis dans un piège magnéto-optique (cf. chapitre II). Le piège magnéto-optique délivre des atomes d'hélium métastables avec des vitesses de l'ordre de $0,5 \text{ m.s}^{-1}$. Il permet d'obtenir des durées θ d'interaction jusqu'à 15 ms, c'est-à-dire accrues de plus de deux ordres de grandeur par rapport à l'expérience sur jet de 1988. Ceci devrait donner accès à des températures inférieures par plus de deux ordres de grandeur à celles atteintes par les expériences précédentes. En outre, une détection multicanal donne accès au refroidissement sub-recul à deux et trois dimensions.

La nouvelle conception de l'expérience à l'avantage d'autoriser un volume d'interaction réduit, grâce au confinement spatial et aux faibles vitesses en jeu dans le piège magnéto-optique. Ceci, ainsi que le caractère pulsé de l'expérience, simplifie considérablement les contraintes sur l'optique.

En revanche, les difficultés liées aux champs magnétiques parasites sont accrues dans cette nouvelle expérience (cf. § II.4.3). Non seulement, les champs ambiants doivent être compensés avec une précision meilleure qu'en 1988, parce qu'on vise des températures plus basses, mais en outre, il faut se débarrasser, pendant la phase de résonances noires, des champs magnétiques nécessaires aux phases de ralentissement et de piégeage.

Nous avons mis en œuvre différentes variantes d'effet Hanle mécanique (§ III.2) pour étudier la modulation des champs magnétiques de ralentissement et de piégeage, et pour compenser les champs magnétiques résiduels. L'effet Hanle mécanique (§ III.2.2), inventé pour l'expérience de 1988, utilise les atomes eux-mêmes comme sondes magnétiques. Les expériences d'effet Hanle sont proches, dans leur principe et dans leur réalisation, des expériences de refroidissement par résonances noires, dont elles constituent une sorte de préliminaire. Nous avons utilisé l'effet Hanle d'abord sur le jet d'hélium (§ III.2.3) pour déterminer les constantes de temps d'amortissement des champs magnétiques modulés, et pour trouver grossièrement le zéro du champ magnétique. Puis, utilisé sur les atomes prérefroidis (§ III.2.4), l'effet Hanle a permis de compenser finement le champ magnétique.

Une fois que les champs magnétiques parasites ont été maîtrisés à l'aide de l'effet Hanle mécanique, nous avons réalisé le refroidissement sub-recul des atomes prérefroidis, à une dimension (§ III.3). Les expériences décrites ici correspondent à des temps d'interaction $\theta \approx 3\,000 \text{ } \Gamma^{-1}$, c'est-à-dire accrus d'un ordre de grandeur par rapport à l'expérience sur jet. Nous observons le double pic en impulsion caractéristique du refroidissement par résonances noires dans le régime sub-recul (§ III.3.1). Nous avons

testé la dépendance du processus de refroidissement en champs magnétiques longitudinaux et transverses (§ III.3.2). La détermination précise de la température atteinte nécessite une étude détaillée de la distribution observée pour déconvoluer les signaux obtenus (§ III.3.3). Nous avons également réalisé une étude préliminaire de la température atteinte en fonction de la durée d'interaction (§ III.3.4). Ce paragraphe démontre que le refroidissement par résonances noires permet d'atteindre $T_R/40$ à une dimension, c'est-à-dire de gagner plus d'un ordre de grandeur par rapport aux expériences précédentes.

Le passage au refroidissement à deux et trois dimensions requiert simplement de rajouter des faisceaux lasers supplémentaires. Au moment de la rédaction de ce manuscrit (décembre 1994), seul le refroidissement à deux dimensions a été mis en œuvre dans ce travail. A 2 et 3 dimensions, il n'est pas *a priori* évident qu'une fraction significative des atomes va s'accumuler dans les états à $p \approx 0$ (cf. § I.4.3). Il importe donc de trouver un régime qui favorise cette accumulation. Nous discutons (§ III.4.1) ce problème du remplissage des états noirs à deux dimensions, en utilisant des arguments qualitatifs qui seront repris plus quantitativement au chapitre V. On s'attend à ce que des forces de friction, du type Sisyphe, jouent un grand rôle. Par conséquent, certains paramètres d'intensité et de désaccord doivent favoriser le refroidissement. Puis, nous montrons les premiers résultats obtenus pour deux configurations différentes de faisceaux lasers. La première configuration (§ III.4.2) utilise deux faisceaux lasers faisant un angle de 30° entre eux. Elle a permis de tester les idées relatives au remplissage des états noirs et d'obtenir un refroidissement bidimensionnel, sub-recul sur les deux dimensions, mais présentant des structures non encore interprétées. La deuxième configuration (§ III.4.3) utilise deux faisceaux lasers perpendiculaires entre eux, et a permis l'obtention d'un refroidissement sub-recul bidimensionnel plus poussé. Dès les premières expériences à deux dimensions, rapportées ici, on a obtenu une température de l'ordre de $T_R/20$.

Remarque :

Les expériences d'effet Hanle (§ III.2) n'ont pas été publiées, mais sont présentées succinctement dans [BSL94]. Les expériences de refroidissement sub-recul à une dimension (§ III.3) sont partiellement publiées dans [BSL94], avec une analyse des données moins élaborée que celle qui est présentée ici. Les expériences à deux dimensions (§ III.4) sont partiellement publiées dans [LBS94]

[BSL94] F. Bardou, B. Saubaméa, J. Lawall, K. Shimizu, O. Emile, C. Westbrook, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Sub-recoil laser cooling with precooled atoms*, C. R. Acad. Sci. Paris **318**, p. 877-885 (1994).

[LBS94] J. Lawall, F. Bardou, B. Saubaméa, K. Shimizu, M. Leduc, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Two-dimensional Sub-recoil Laser Cooling*, Phys. Rev. Lett. **73**, p. 1915-1918 (1994).

2 Effet Hanle mécanique : étude des champs magnétiques parasites

2.1 Introduction

Pour observer le refroidissement par résonances noires, nous devons éliminer les champs magnétiques au niveau du milligauss (cf. § II.4.3). Ceci suppose tout d'abord de supprimer pendant la phase de résonances noires les forts champs magnétiques utilisés pour le ralentissement et le piégeage. Ensuite, nous devons annuler le champ magnétique résiduel, c'est-à-dire appliquer des champs qui compensent exactement le champ résiduel. Ce paragraphe expose la démarche qui a permis de résoudre ces deux problèmes.

Les champs magnétiques de ralentissement et de piégeage sont coupés pendant la phase de résonances noires. Or, le système physique lié à ces champs magnétiques est complexe (plusieurs bobines, blindage en mumétal, enceinte en acier inoxydable...). Par conséquent, on ne peut pas connaître le champ magnétique dans la zone d'interaction à partir des simples mesures du courant dans les bobines. Il faut mesurer les champs eux-mêmes, avec une résolution en champ magnétique, temporelle et spatiale. La sensibilité magnétique doit être le milligauss au moins, pour atteindre le niveau de compensation requis (cf. § II.4.3.2). La résolution temporelle doit être de l'ordre de 100 μ s, la durée d'interaction minimale des nouvelles expériences. Enfin, la résolution spatiale doit être du millimètre, ce qui correspond à la taille du piège, afin de ne pas moyenner d'éventuels gradients de champ magnétique. En outre, la mesure doit s'effectuer *in-situ* et sous vide afin de pouvoir compenser chaque jour les fluctuations lentes du champ magnétique.

Comme il n'existe pas de magnétomètres ayant les caractéristiques requises, nous avons utilisé les atomes refroidis eux-mêmes comme sonde magnétique, grâce à «l'effet Hanle mécanique» [Kai90], [KVA91], inventé par le groupe de l'ENS lors de la réalisation du refroidissement par résonances noires sur jet : l'effet Hanle mécanique exploite une forte variation avec le champ magnétique de la pression de radiation exercée par un laser sur les atomes. La mise en œuvre de l'effet Hanle mécanique est très proche de la mise en œuvre des résonances noires elles-mêmes.

Nous avons utilisé différentes variantes de l'effet Hanle mécanique, à la fois sur le jet d'hélium et sur les atomes piégés. Les expériences sur jet (§ III.2.3) ont permis de trouver les différentes constantes de temps associées à la modulation des champs de ralentissement et de piégeage et d'effectuer une compensation grossière des champs ambiants. Les expériences sur piège (§ III.2.4) sont utilisées pour une compensation fine quotidienne du champ magnétique.

La maîtrise du champ magnétique par l'effet Hanle mécanique a été décisive pour l'obtention du refroidissement par résonances noires.

[Kai90] R. Kaiser, *Manipulation par laser d'hélium métastable : effet Hanle mécanique, refroidissement sous le recul d'un photon*, Thèse de l'Université Paris VI (1990).

[KVA91] R. Kaiser, N. Vansteenkiste, A. Aspect, E. Arimondo, and C. Cohen-Tannoudji, *Mechanical Hanle Effect*, *Z. Phys. D* **18**, p. 17-24 (1991).

2.2 L'effet Hanle mécanique [Kai90], [KVA91]

Nous rappelons ici le principe de l'effet Hanle mécanique et indiquons comment l'utiliser pour compenser un champ magnétique. Ce paragraphe résume les références originales [Kai90] et [KVA91].

• Principe

On considère un atome au repos possédant une transition $J_f = 1 \leftrightarrow J_e = 1$, éclairé par un faisceau laser polarisé σ_+ , à résonance sur cette transition (figure III.1.a). Après quelques cycles de fluorescence, l'atome est pompé optiquement dans le niveau $|f_+\rangle$, qui ne peut pas absorber de lumière. Ainsi, après une phase transitoire de pompage optique, une telle configuration ne donne lieu à aucune fluorescence et donc à aucune pression de radiation sur les atomes.

En revanche, lorsqu'il existe un champ magnétique B_\perp transverse, c'est-à-dire perpendiculaire à la direction de propagation du laser, le comportement obtenu est différent. En effet, le champ B_\perp produit un couplage entre les différents sous-niveaux Zeeman de l'état fondamental. Ce couplage "recycle" vers $|f_0\rangle$ (et vers $|f_-\rangle$) la population accumulée en $|f_+\rangle$, et permet aux atomes de fluorescer à nouveau. On a alors une pression de radiation qui dévie les trajectoires atomiques, ce qui conduit à une méthode de détection mécanique de ce taux de fluorescence.

La variation du taux de fluorescence en fonction du champ magnétique transverse est donnée sur la figure III.1.b. Le taux de fluorescence vaut 0 en $B_\perp = 0$. Il croît quadratiquement avec $|B_\perp|$, puis diminue lorsque le couplage magnétique devient suffisamment important pour déplacer hors de résonance les niveaux atomiques.

• Taux de fluorescence

Calculons le taux de fluorescence en régime stationnaire, dans une situation perturbative en champ laser et en champ magnétique ($\Omega_B < \Omega_1 < \Gamma$). On peut reprendre la démarche du paragraphe II.4.3.2. Si $B_\perp = B_x$ (cf. figure II.23), on tire de l'équation (II.30.a) :

$$H_{B_x} |f_+\rangle = \frac{\hbar \Omega_{B_\perp}}{\sqrt{2}} |f_0\rangle \quad (\text{III.1})$$

où $\Omega_{B_\perp} \equiv -\gamma B_\perp$ d'après (II.31). Le taux de départ Γ'_{B_\perp} de l'état $|f_+\rangle$, en présence de B_\perp est donc :

$$\Gamma'_{B_\perp} = \frac{(\sqrt{2} \Omega_{B_\perp})^2}{\Gamma_0} = 2 \frac{\Omega_{B_\perp}^2}{\Omega_1^2} \Gamma \quad (\text{III.2})$$

[Kai90] R. Kaiser, *Manipulation par laser d'hélium métastable : effet Hanle mécanique, refroidissement sous le recul d'un photon*, Thèse de l'Université Paris VI (1990).

[KVA91] R. Kaiser, N. Vansteenkiste, A. Aspect, E. Arimondo, and C. Cohen-Tannoudji, *Mechanical Hanle Effect*, Z. Phys. D 18, p. 17-24 (1991).

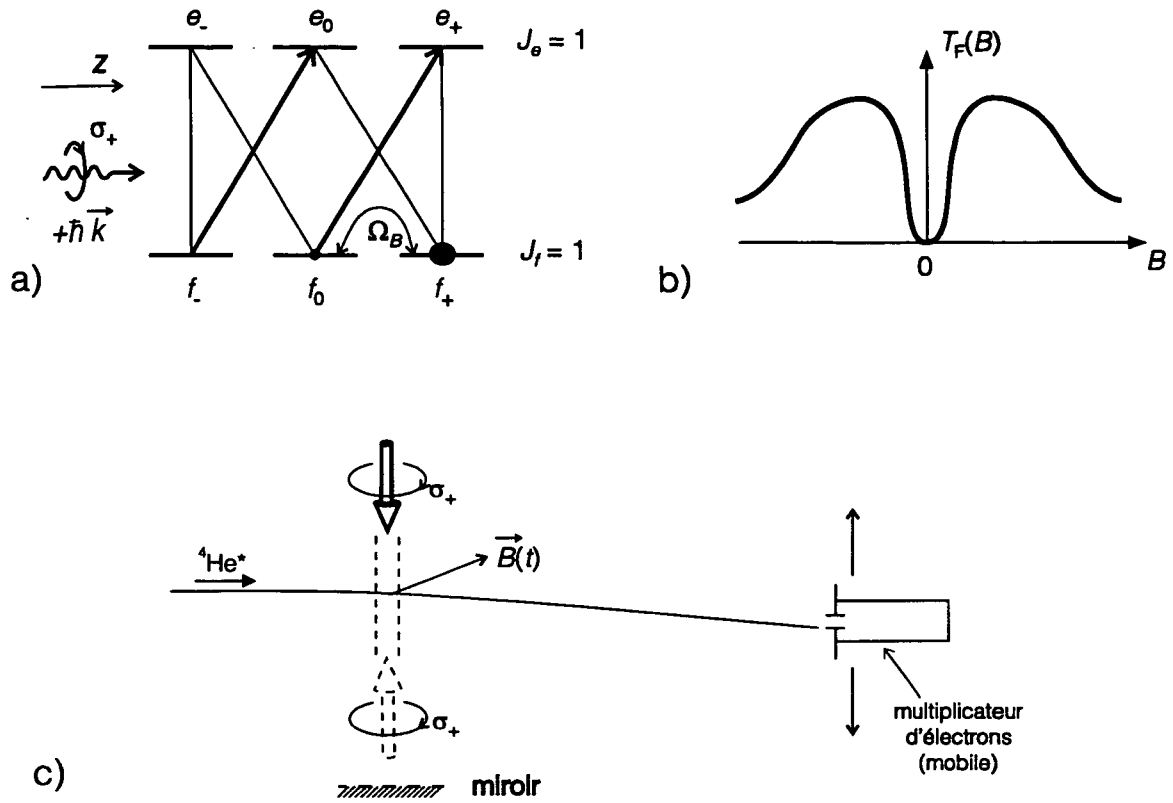


Figure III.1 Principe de l'effet Hanle mécanique.

a) **Transition atomique.** On utilise une transition $J_f = 1 \leftrightarrow J_e = 1$, éclairée par un laser σ_+ . En l'absence de tout champ magnétique, les atomes sont optiquement pompés dans l'état $|f_{+}\rangle$. La fluorescence est nulle en régime stationnaire, puisque $|f_{+}\rangle$ est un état noir. En présence d'un champ magnétique perpendiculaire à l'axe des lasers, il se produit une transition dans l'état fondamental, et la fluorescence n'est pas nulle.

b) **Taux de fluorescence $T_F(B)$ en fonction du champ magnétique transverse B .** Ce taux s'annule en $B = 0$ (pompage optique parfait dans $|f_{+}\rangle$). Puis, le taux de fluorescence croît quadratiquement avec B à cause du couplage magnétique entre $|f_{+}\rangle$ et $|f_0\rangle$. Pour des valeurs importantes de B , le taux de fluorescence diminue car les différents sous-niveaux Zeeman s'écartent les uns des autres et sortent de résonance.

c) **Dispositif expérimental de l'effet Hanle mécanique sur un jet atomique.** Le jet atomique traverse les faisceaux lasers dans la zone où on veut mesurer le champ magnétique. Le multiplicateur d'électrons détecte la déflexion du jet atomique, qui est d'autant plus faible que le champ magnétique est plus petit. Dans certains cas (cf. § II.2.3), le faisceau laser est rétro-réfléchi, de manière à réaliser une "mélasse Hanle".

puisque $\Gamma'_0 = \Omega_1^2 / \Gamma$ (cf. équation (II.35)). Le taux $\Gamma'_{B\perp}$ est non seulement le taux de départ de $|f_+\rangle$, mais aussi le taux de fluorescence total en régime perturbatif.

• **Grandeur mesurée**

Dans l'effet Hanle traditionnel, on mesure directement le taux de fluorescence $\Gamma'_{B\perp}$. Dans l'effet Hanle mécanique, on mesure le changement moyen d'impulsion atomique Δp provoqué par le passage des atomes dans le faisceau laser (figure III.1.c). Le changement d'impulsion Δp contient non seulement un terme lié à $\Gamma'_{B\perp}$, mais aussi un terme lié au pompage optique initial dans l'état $|f_+\rangle$. Si le champ magnétique est nul, seul subsiste le terme de pompage optique, qui vaut $(4/3)\hbar k$ pour une population atomique initialement équirépartie entre $|f_-\rangle$, $|f_0\rangle$ et $|f_+\rangle$ (cf. [Kai90], [KVA91]). Si les temps d'interaction θ_H sont suffisamment longs pour qu'on puisse négliger cette phase de pompage optique ($\Gamma'_{B\perp}\theta_H > 1$), on a alors :

$$\frac{\Delta p}{\hbar k} \approx \Gamma'_{B\perp}\theta_H \quad (\text{III.3})$$

A l'aide de l'équation (III.3), on peut déduire la valeur B_\perp du champ transverse de la mesure de Δp (si on connaît Ω_1 et θ_H).

• **Procédure de compensation du champ magnétique**

Compenser le champ magnétique consiste à trouver la valeur à donner aux champs de compensation pour que la somme des champs parasites et du champ de compensation soit la plus faible possible dans la zone d'interaction. La démarche utilisée consiste à varier le champ de compensation, de manière à minimiser le changement Δp d'impulsion atomique dans une expérience d'effet Hanle mécanique.

Nous n'avons traité ici que du cas d'un champ magnétique comprenant une seule composante, perpendiculaire à l'axe des lasers, alors qu'en réalité, les champs à compenser ont trois composantes. Pour compenser les deux composantes B_x et B_y perpendiculaires à l'axe du laser, on recherche le minimum de Δp en faisant varier B_x , puis B_y , et en itérant éventuellement.

Pour la composante B_z , parallèle à l'axe des lasers, on obtient un effet Hanle mécanique en utilisant une polarisation linéaire du laser et en faisant varier B_z . Cette configuration est analysée dans la thèse de R. Kaiser [Kai90].

En pratique, nous partons de champs de quelques dizaines de milligauss au maximum. En itérant deux fois la procédure de minimisation de l'effet Hanle mécanique sur chacun des trois axes, on parvient à compenser le champ au milligauss près. Lorsqu'on étudie l'effet Hanle mécanique pour la composante B_i , la non-nullité des composantes $B_{j\neq i}$, limite la précision que l'on peut atteindre pour la compensation de B_i .

[Kai90] R. Kaiser, *Manipulation par laser d'hélium métastable : effet Hanle mécanique, refroidissement sous le recul d'un photon*, Thèse de l'Université Paris VI (1990).

Ce point, discuté en détail par Robin Kaiser dans sa thèse [Kai90], ne nous a pas gênés car la situation initiale correspondait à un champ suffisamment faible sur les trois axes.

2.3 Effet Hanle mécanique sur le jet atomique

2.3.1 Principe des mesures d'amortissement des champs magnétiques

On recherche les différentes constantes de temps d'amortissement du champ magnétique lors de la coupure du courant dans les bobines de ralentissement et de piégeage. On sait d'une part que la coupure du courant n'est pas instantanée, et d'autre part que le champ magnétique dans la zone d'interaction peut avoir un comportement différent de celui du courant dans les bobines. Deux échelles de temps sont impliquées (figure III.2) : l'échelle de temps τ_r associée à la coupure des champs de ralentissement, et l'échelle de temps τ_p associée à la coupure des champs de piégeage.

Le temps τ_r détermine la durée θ_r pendant laquelle on attend pour lâcher les atomes piégés que les champs de ralentissement soient suffisamment amortis. Le temps τ_p détermine la durée θ_p pendant laquelle on attend que les champs de piégeage soient suffisamment amortis avant de déclencher la phase de résonances noires. Ces deux périodes d'attente doivent être les plus courtes possible puisque, dans la première, le nombre d'atomes piégés diminue, et que, dans la deuxième, le volume du nuage d'atomes froids augmente. La détermination des périodes d'attente θ_r et θ_p est critique et repose sur la mesure des constantes de temps τ_r et τ_p .

Dans les expériences préliminaires, on utilise les atomes du jet atomique comme sondes magnétiques en suivant le schéma de la figure III.1.c. Le jet atomique est ici préféré au piège car c'est une source continue, ce qui est commode pour suivre l'évolution temporelle du champ magnétique (les atomes piégés seront utilisés au § III.2.4 pour améliorer la résolution spatiale). Au niveau de la zone d'interaction, le jet atomique traverse une onde stationnaire polarisée σ_+ . On mesure la variation du flux $\varphi(t)$ du jet atomique sur l'axe du jet. L'onde stationnaire σ_+ crée une mélasse optique sensible au champ magnétique, et on interprète qualitativement ces effets sur la base de l'effet Hanle mécanique en onde progressive (§ III.2.2). L'onde stationnaire est préférée à l'onde progressive, car on a constaté qu'elle produit des variations plus importantes du flux du jet en fonction du champ magnétique [1].

[1] Si l'on voulait interpréter en détail ces signaux, il faudrait certainement faire appel au formalisme de l'effet Sisyphus magnétique (voir [EKG93] : O. Emile, R. Kaiser, C. Gerz, H. Wallis, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Magnetically assisted Sisyphus effect*, J. Phys. II France 3, p. 1709-1733 (1993)). Ici, nous nous contentons de noter que l'effet de ces mélasses optiques en présence de champ magnétique est minimal pour un champ nul.

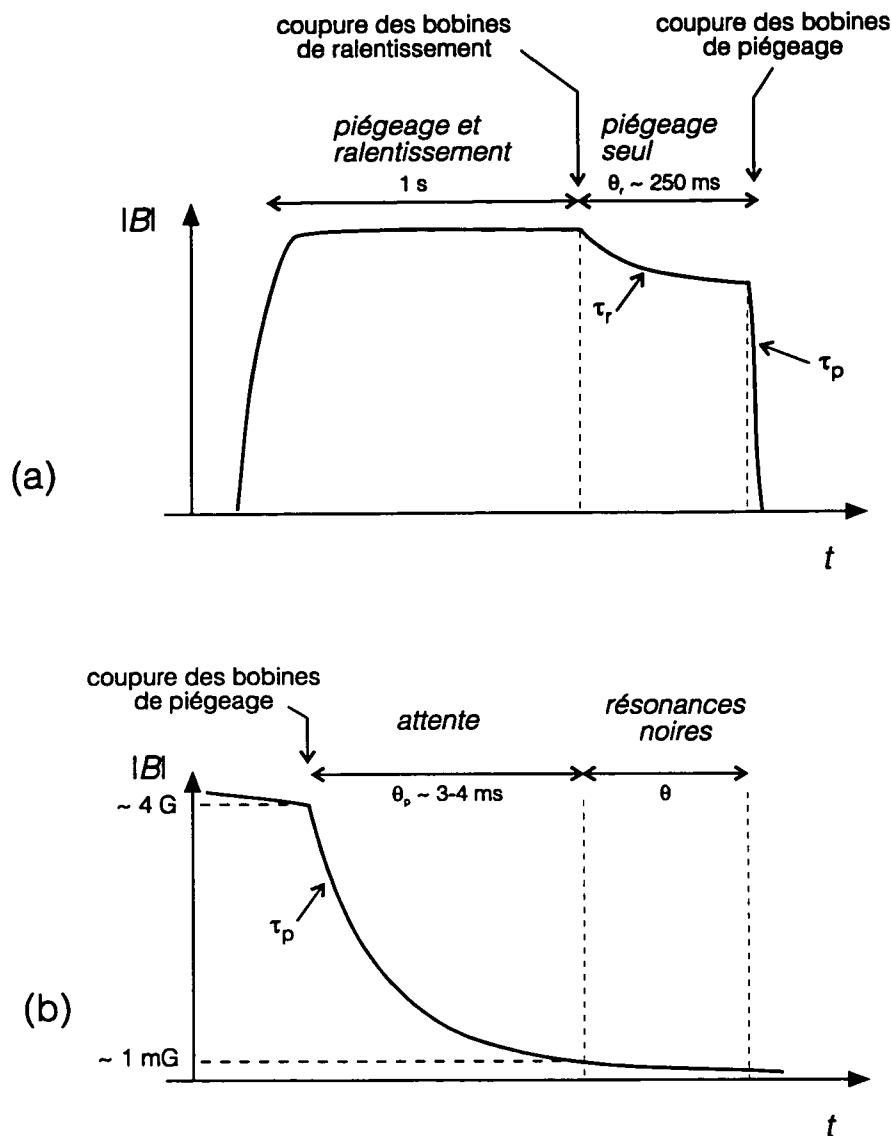


Figure III.2 Schéma de l'évolution temporelle typique du champ magnétique dans la zone d'interaction. (a) Après avoir, pendant 1 s environ, accumulé dans le piège les atomes ralentis, on coupe le courant dans les bobines de ralentissement. Le champ de ralentissement, qui valait 370 G à son maximum spatial, mais seulement quelques gauss dans la zone d'interaction, s'amortit alors avec une constante de temps τ_r . Les atomes sont maintenus piégés pendant 250 ms environ, puis (b) on coupe le courant dans les bobines de piégeage. Le champ de piégeage, qui vaut initialement typiquement 4 G sur un volume d'un cm^3 , s'amortit alors avec la constante de temps τ_p . Lorsqu'il est devenu inférieur à 1 mG, la phase de résonances noires débute. L'effet Hanle mécanique sur le jet atomique donne accès aux constantes de temps τ_r et τ_p , ce qui permet de déterminer les périodes d'attente θ_i et θ_p minimales pour que le champ résiduel pendant la période de résonances noires soit inférieur à la limite fixée.

Le laser est asservi sur la transition $J_f = 1 \leftrightarrow J_e = 1$. L'intensité des faisceaux est de $I \approx 7 \text{ mW.cm}^{-2} \approx 45 I_{\text{sat}}$, soit $\Omega_1 \approx 4,5 \Gamma$ et leur diamètre est de 1 cm. Le désaccord qui maximise empiriquement l'effet du laser sur le flux d'atomes est $\delta = +2 \Gamma$. L'effet du laser est alors d'augmenter le flux d'atomes sur l'axe (refroidissement Sisyphes magnétique). La température jet atomique est $T_{\text{jet}} \approx 15 - 20 \text{ K}$ (cf. § II.3.2.1.3, figure II.10).

Lorsque le champ magnétique varie, le flux atomique sur l'axe varie aussi. Pour interpréter la dépendance temporelle du flux détecté, et la relier au champ magnétique, il faut tenir compte de la dispersion $\Delta\tau_v \approx 2,5 \text{ ms}$ des temps de vol, comme le montre la figure III.3. En effet, la dispersion des temps de vol effectue une convolution temporelle : les atomes qui parviennent sur le détecteur à un instant donné sont passés dans la zone d'interaction à des instants différents. Deux cas limites sont simples à interpréter, et ont été utilisés pour mesurer respectivement τ_r et τ_p .

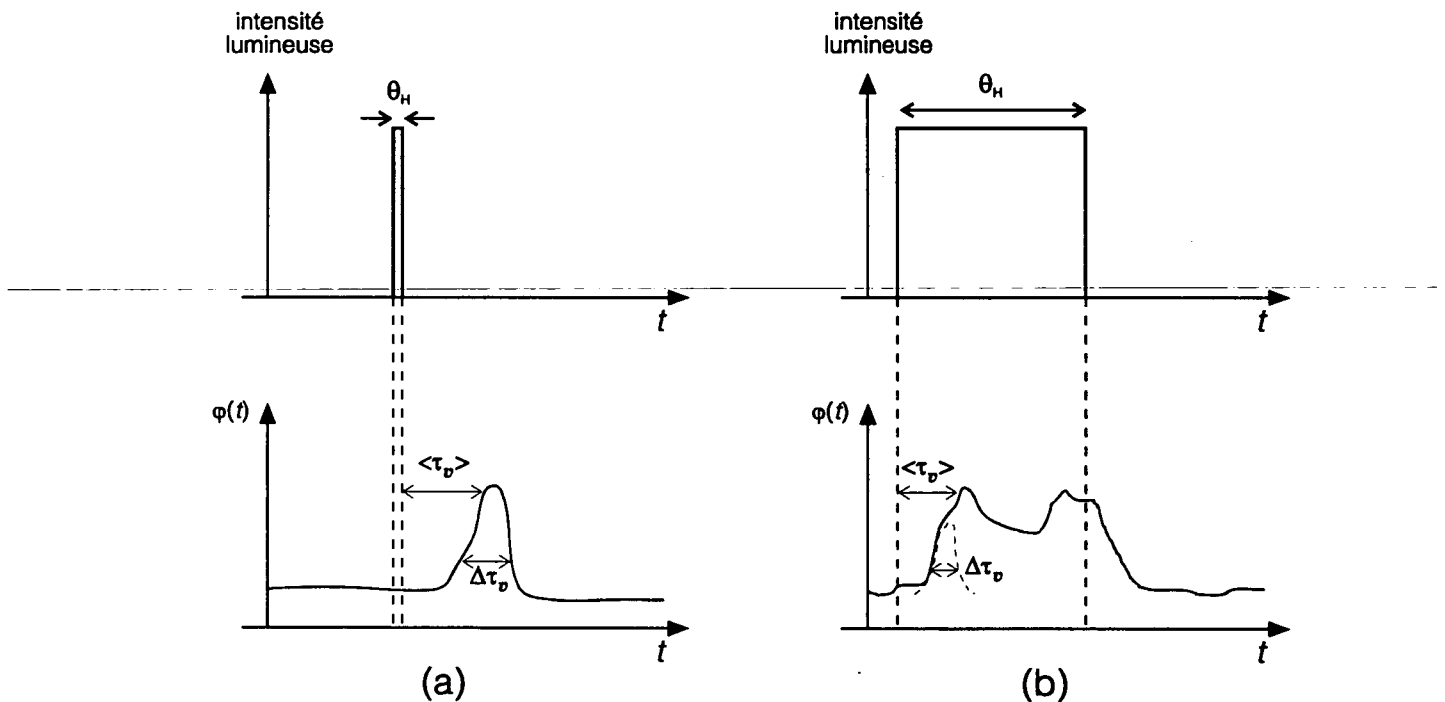


Figure III.3 Analyse de la réponse temporelle $\varphi(t)$ du jet atomique. Le jet atomique est continu. Les faisceaux lasers d'effet Hanle sont appliqués pendant une durée θ_H .

(a) *Impulsion lumineuse courte devant la dispersion des temps de vol* : $\theta_H \ll \Delta\tau_v$. La forme temporelle du pic observé sur le flux $\varphi(t)$ correspond au spectre de temps de vol, et non à l'évolution temporelle du champ magnétique. En revanche, l'aire (ou l'amplitude) de ce pic est reliée au champ magnétique, moyenné sur la durée θ_H d'interaction. La résolution temporelle obtenue est θ_H .

(b) *Impulsion lumineuse longue devant la dispersion des temps de vol* : $\theta_H \gg \Delta\tau_v$. La forme temporelle de $\varphi(t)$ reflète le champ magnétique à la date $(t - \langle\tau_v\rangle)$; elle est convoluée par le spectre de temps de vol, de largeur $\Delta\tau_v$. La résolution temporelle obtenue est $\Delta\tau_v$.

Si on applique les faisceaux d'effet Hanle pendant une durée d'interaction θ_H beaucoup plus petite que $\Delta\tau_v$ (figure III.3.a), un pic de largeur $\Delta\tau_v$ apparaît sur le flux du jet $\varphi(t)$. Ce pic est décalé du temps de vol moyen $\langle\tau_v\rangle$ de l'instant d'application des faisceaux Hanle. Sa forme temporelle reflète le spectre de temps de vol du jet atomique (et non l'évolution temporelle du champ magnétique). L'amplitude du pic est liée au champ magnétique pendant l'interaction atomes-lasers, de durée θ_H bien définie. On accède donc à une résolution temporelle θ_H , meilleure que $\Delta\tau_v$. Pour obtenir l'évolution temporelle du champ magnétique, on modifie l'instant d'application des faisceaux lasers. Cette méthode permet d'étudier les champs variant plus rapidement que $\Delta\tau_v$ et elle est utilisée pour mesurer l'amortissement des champs magnétiques de piégeage (§ III.2.3.3).

Si on applique les faisceaux Hanle sur une durée θ_H beaucoup plus grande que $\Delta\tau_v$, alors l'évolution temporelle $\varphi(t)$ du flux reflète directement l'évolution du champ magnétique à l'instant $t - \langle\tau_v\rangle$ (avec $\langle\tau_v\rangle \approx 5$ ms), convoluée par le spectre de temps de vol de largeur $\Delta\tau_v$ (figure III.3.b). Cette méthode est commode pour étudier les champs variant plus lentement que $\Delta\tau_v$ (il n'y a pas à balayer la période d'application des faisceaux) et elle est utilisée pour l'amortissement des champs de ralentissement (§ III.2.3.2).

Notons enfin que, bien que le champ parasite réel soit tridimensionnel, nous avons raisonné ici comme si le champ avait une seule composante, perpendiculaire aux faisceaux lasers. En effet, les bobines de ralentissement créent un champ orienté principalement sur l'axe du jet, perpendiculaire aux faisceaux lasers.

2.3.2 Amortissement des champs magnétiques de ralentissement

Pour étudier l'amortissement des champs magnétiques de ralentissement, on applique les faisceaux de mélasse Hanle pendant $\theta_H \approx 130$ ms, juste après la coupure du courant dans les bobines. La figure III.4 donne le flux $\varphi(t)$ du jet atomique lorsque seul le solénoïde S_1 est actif, avec son courant habituel (pour la configuration des bobines, voir la figure II.12, § II.3.2.2.2 ; voir également la figure II.30, § II.4.3.3).

On constate que l'effet de la mélasse Hanle est d'accroître le flux détecté (refroidissement du jet). Juste après la coupure du courant, on observe un pic de 10 ms de largeur à mi-hauteur, suivi d'une oscillation amortie. Le flanc de montée du pic, très rapide, s'interprète comme la montée du temps de vol (cf. convolution par le spectre de temps de vol). Le flanc de descente du pic s'interprète comme le déclin du champ magnétique dans la zone d'interaction. La largeur du pic est en bon accord qualitatif avec les mesures de courant dans le solénoïde (cf. § II.4.3.4.2). Le pic est suivi d'une oscillation amortie qui n'apparaissait pas sur les mesures de courant, et qui est déterminante aux temps longs. Ceci montre l'intérêt des mesures directes de champ magnétique même si, comme ici, l'amplitude du champ n'est pas calibrée.

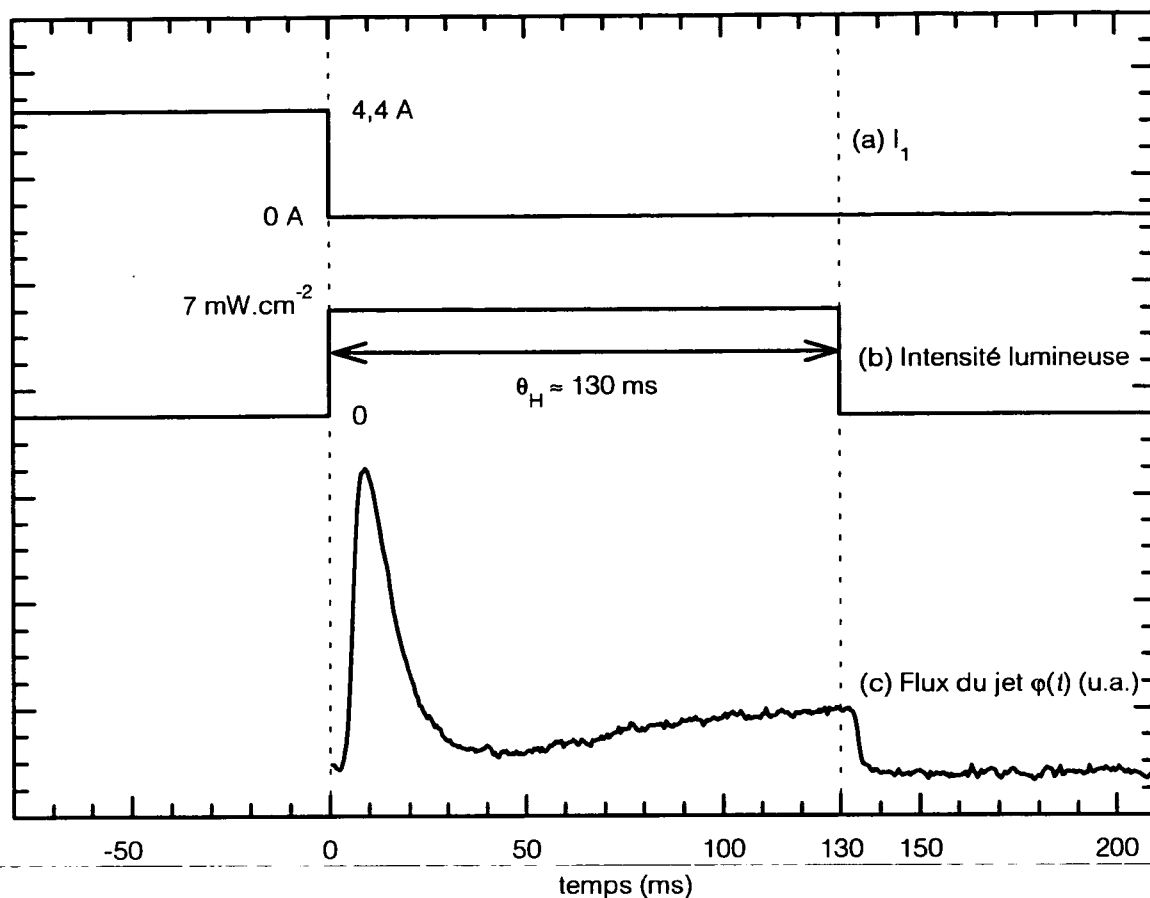


Figure III.4 Effet Hanle mécanique sur le jet atomique avec une seule bobine active.

(a) Seul le solénoïde S_1 est branché, et modulé à partir de son courant habituel. La modulation représentée sur le graphe correspond à la commande du modulateur de courant, et pas nécessairement au courant réel, qui réagit à la commande avec des constantes de temps.

(b) Juste après avoir déclenché la coupure du courant, on applique les faisceaux lasers d'effet Hanle pendant $\theta_H = 130$ ms environ.

(c) Le flux du jet $\varphi(t)$ reflète l'évolution du champ magnétique dans la zone d'interaction à la date $t - \langle \tau_v \rangle \approx t - 5$ ms, convolué par la dispersion des temps de vol $\Delta\tau_v \approx 2,5$ ms. Le zéro de $\varphi(t)$ est arbitraire, ainsi que son unité. Il apparaît un pic de 10,5 ms de largeur à mi-hauteur, suivi d'une oscillation amortie. Le flanc descendant de ce pic s'interprète comme l'amortissement du champ magnétique. Noter que, quel que soit le champ magnétique résiduel, les faisceaux lasers augmentent $\varphi(t)$, c'est-à-dire qu'ils refroidissent le jet atomique. Le temps de vol $\varphi(t)$ est moyenné sur 10 cycles de modulation du solénoïde S_1 .

La figure III.5 montre le signal d'effet Hanle sur jet, lorsque la bobine Q_4 est seule en route, en fonction de l'intensité dans la bobine. Pour des intensités faibles (0,22 ; 0,35 et 0,48 A), on obtient un pic qui s'amortit avec une constante de temps de 22 ms environ. Nous interprétons la décroissance de ce pic comme l'amortissement du champ magnétique. Pour des intensités plus importantes, le signal change qualitativement : le pic se décale vers des temps longs et il est précédé par une phase où la mélasse Hanle n'augmente pas le flux du jet. Le signal peut s'interpréter de la manière suivante : au début de l'interaction, le champ magnétique est suffisamment fort pour que l'analyse perturbative de l'effet Hanle (cf. § III.2.2) ne s'applique plus et que la mélasse Hanle n'agisse plus de la même manière (déplacement trop important des sous-niveaux Zeeman).

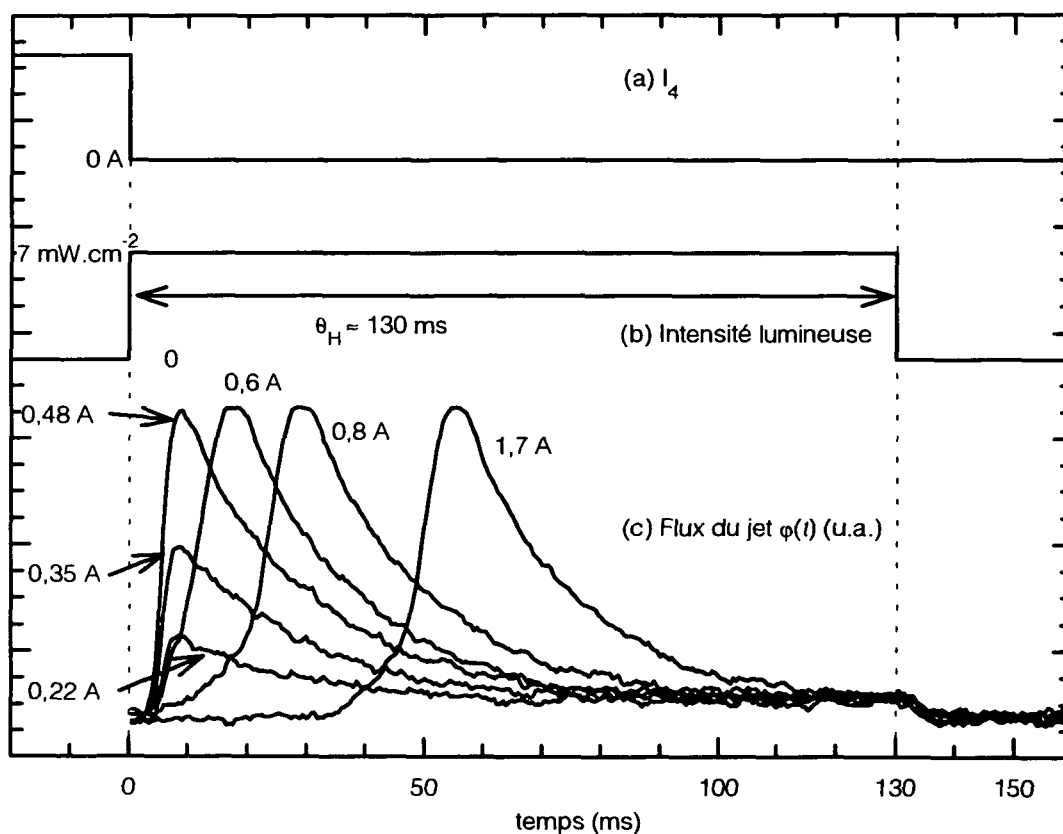


Figure III.5 Effet Hanle mécanique sur le jet atomique avec une seule bobine en route, en fonction du courant dans la bobine. (a) et (b) Modulation du champ magnétique et de l'intensité du faisceau Hanle (cf. figure précédente). Seule la bobine Q_4 est mise en route. (c) Flux du jet $\varphi(t)$ (zéro et unité arbitraires). Pour des courants faibles (0,22 ; 0,35 et 0,48 A), on observe un pic qui s'amortit avec une constante de temps de 22 ms environ, que l'on interprète comme l'amortissement du champ magnétique. Pour des courants forts (0,6 ; 0,8 et 1,7 A), ce pic, dont la hauteur sature, apparaît avec un certain décalage temporel, d'autant plus grand que le courant est fort : le champ magnétique à $t \approx 0$ est suffisamment fort pour lever la dégénérescence entre les sous-niveaux Zeeman et supprimer l'effet de refroidissement de la mélasse optique. Les temps de vol $\varphi(t)$ sont moyennés sur 10 cycles de modulation de la bobine Q_4 .

Enfin, la figure III.6 montre le signal d'effet Hanle sur jet lorsque l'ensemble des champs de ralentissement bobines (S_1 , S_2 , S_R , Q_4) sont modulés. Ce signal, qui résulte de l'effet des différentes bobines, a une forme complexe. Au-delà d'un régime transitoire de 20 ms, on observe un déclin approximativement exponentiel, de constante de temps $\tau \approx 20$ ms. Si on interprète ce déclin comme un déclin du champ magnétique résiduel, et si on suppose que le champ magnétique est de 2 G, à la fin du régime transitoire (ce qui est une hypothèse raisonnable), alors on trouve qu'il faut attendre $\theta_r \approx 170$ ms après la coupure des courants de ralentissement pour que le champ dans la zone d'interaction soit devenu inférieur à un milligauss. Par prudence, nous avons choisi $\theta_r \approx 250$ ms.

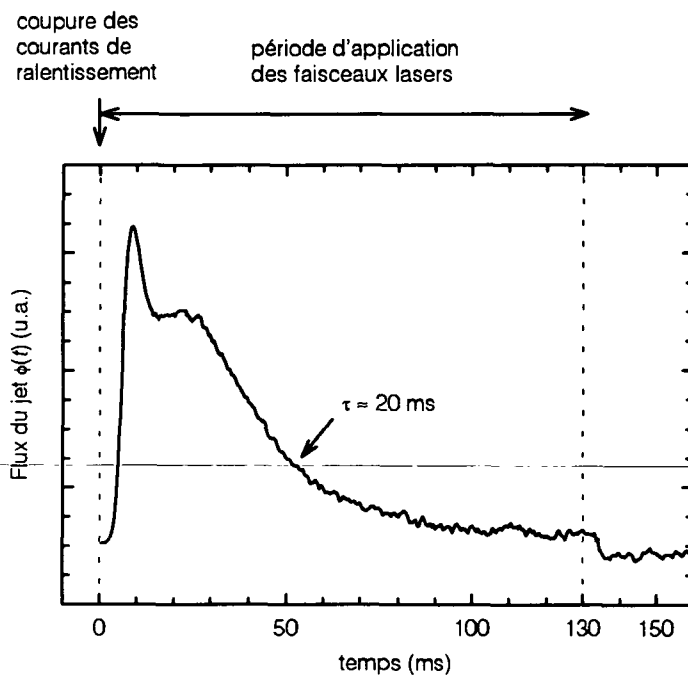


Figure III.6 Effet Hanle mécanique sur le jet atomique lorsque tous les champs de ralentissement sont branchés. Après un régime transitoire de 20 ms environ, le signal d'effet Hanle décroît avec une constante de temps de 20 ms environ

2.3.3 Amortissement des champs magnétiques de piégeage

Pour analyser l'amortissement des champs magnétiques de piégeage, sur une courte échelle de temps, on applique une impulsion lumineuse de durée $\theta_H = 200 \mu\text{s}$, très inférieure à la dispersion $\Delta\tau_v \approx 2,5$ ms des temps de vol (cf. figure III.3.a). Puis on varie le délai τ entre la coupure des bobines et la période d'application de la mélasse Hanle. Pour chaque valeur de τ , on relève l'amplitude $V(\tau)$ du pic de temps de vol, qui dépend du champ magnétique pendant la période d'application des faisceaux. La résolution temporelle d'une telle mesure de champ magnétique est θ_H . Un exemple de temps de vol obtenu est donné sur la figure III.7.

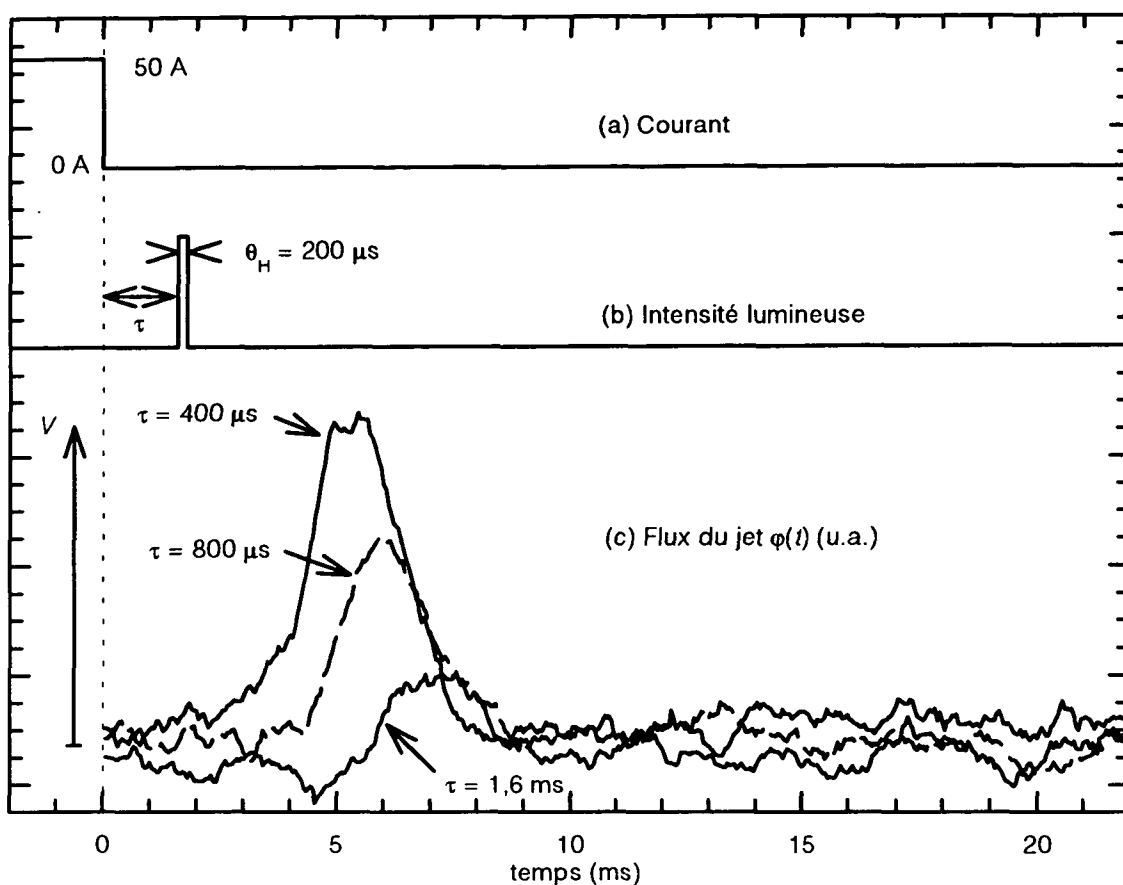


Figure III.7 Effet Hanle mécanique sur le jet atomique : étude de la coupure des bobines du piège. Signaux élémentaires. Pour étudier l'évolution du champ magnétique sur de courtes échelles de temps, on applique les faisceaux d'effet Hanle avec un délai τ par rapport à la coupure du courant dans les bobines, pendant une durée courte θ_H . En mesurant l'amplitude V du temps de vol en fonction du délai τ , on obtient un signal relié à l'évolution du champ magnétique avec une résolution θ_H . Les trois temps de vol à $\tau = 400, 800, 1600 \mu\text{s}$ ont approximativement la même largeur $\Delta\tau$, et sont décalés les uns par rapport aux autres proportionnellement à τ . On voit nettement la diminution de l'amplitude V du temps de vol lorsque τ augmente, ce qui traduit la diminution du champ magnétique après la coupure. Chaque courbe est moyennée sur 200 cycles de modulation du champ de piégeage.

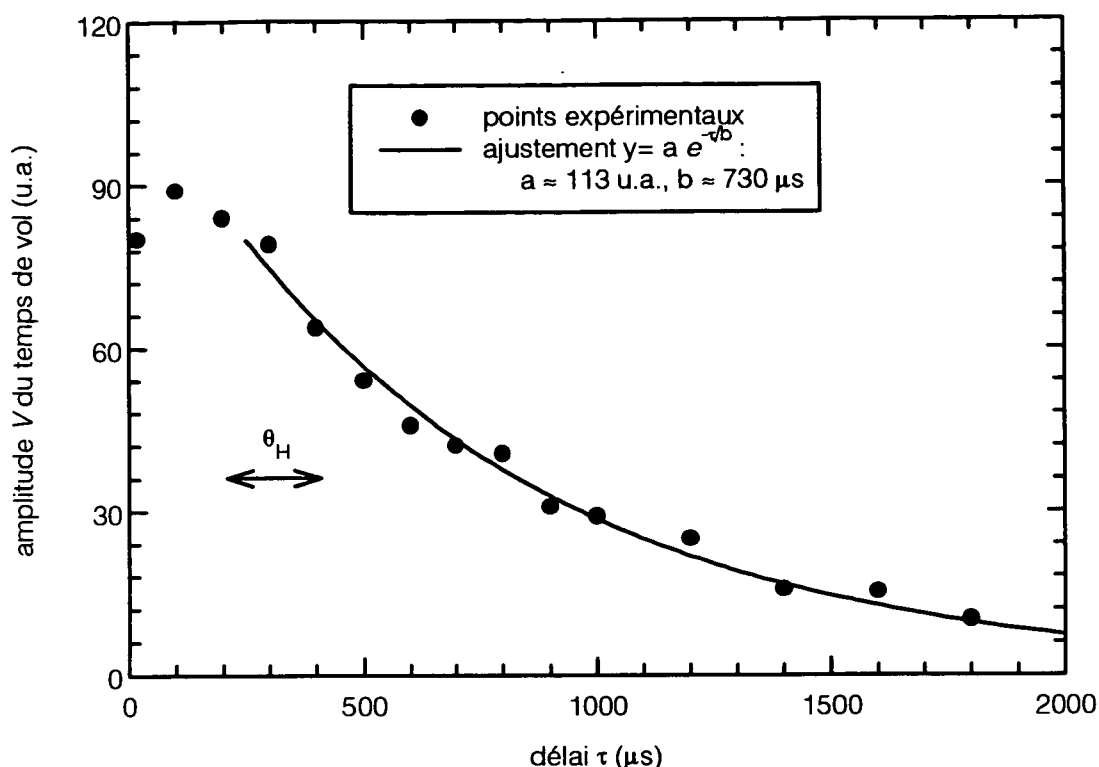


Figure III.8 Effet Hanle mécanique sur le jet atomique : étude de la coupure des courants de piégeage. Evolution temporelle. L'amplitude $V(\tau)$ du temps de vol diminue avec le délai τ entre la coupure du courant et la période θ_H d'application de la mélasse d'effet Hanle, ce que l'on interprète comme la diminution du champ magnétique. En ajustant les points expérimentaux (sauf les trois premiers) à une exponentielle décroissante, on obtient la constante de temps τ_p d'amortissement du champ magnétique : $\tau_p \approx 730 \mu\text{s}$ (on a vérifié que la largeur $\theta_H = 200 \mu\text{s}$ produisait une convolution négligeable sur le signal $V(\tau)$). En calibrant $V(\tau)$ à l'aide d'un champ constant connu, on obtient le champ magnétique résiduel après la coupure du courant de piégeage :

$$B(\tau) \text{ (mG)} \approx 200 \times e^{(-\tau/730)}, \text{ avec } \tau \text{ exprimé en } \mu\text{s} \text{ et } \tau \geq 300 \mu\text{s}.$$

L'amplitude $V(\tau)$ du temps de vol en fonction du délai τ est représentée sur la figure III.8. On observe un amortissement du champ magnétique avec une constante de temps $\tau_p = 730 \mu\text{s}$ environ. On vérifie que la convolution due à la durée finie $\theta_H \approx 200 \mu\text{s}$ de l'application des faisceaux a un effet négligeable sur τ_p : d'une part, la déconvolution de $V(\tau)$ donne la même valeur de τ_p ; d'autre part, une expérience réalisée avec $\theta_H = 500 \mu\text{s}$ donne environ la même valeur pour τ_p ($\approx 700 \mu\text{s}$).

L'expérience d'effet Hanle mécanique a été décisive pour mettre à jour cette constante de temps, qui est supérieure de deux ordres de grandeur à la constante L/R calculée pour le circuit des bobines de piégeage. Bien qu'à la limite de la bande passante (1 kHz) du magnétomètre utilisé (Bartington MAG 03 H), cette constante n'était pas visible sur les mesures magnétométriques : le champ de plusieurs gauss juste avant la coupure du courant dans les bobines "aveugle" complètement la sonde pendant quelques

millisecondes après la coupure du courant. La dynamique des atomes d'hélium utilisés comme sondes magnétiques est bien meilleure que celle d'un magnétomètre : l'état atomique à une date donnée n'est pas perturbé par le champ magnétique quelques centaines de microsecondes auparavant.

L'origine de cette constante de temps $\tau_p \approx 730 \mu\text{s}$ pourrait être la "viscosité magnétique" dans le mumétal, encore appelée "magnetic aftereffect" ("effet magnétique retardé") : lorsque le champ magnétique extérieur est modifié brutalement, la magnétisation d'un matériau ne réagit pas instantanément, mais avec un certain retard, associé à divers processus de relaxation des domaines de Bloch (voir [Von74], [CHC78], [DDC69]). Les constantes de temps peuvent varier de plusieurs ordres de grandeur. Pour un alliage Fe-Ni, on trouve dans la littérature [Von74] une constante de temps de 5 ms qui n'est pas très éloignée de notre mesure (le mumétal est principalement un alliage Fe-Ni). On pourrait tester cette interprétation de la constante de temps observée en changeant la température du mumétal : associée à des processus de relaxation, activés par la température, la "viscosité" magnétique peut varier de plusieurs ordres de grandeur quand la température varie de 100°C .

La mesure du champ magnétique par effet Hanle mécanique a été calibrée en appliquant un champ magnétique connu, soit à l'aide des bobines de piégeage, soit à l'aide des bobines de compensation. Les deux calibrations correspondent à mieux que 30 % près. On trouve finalement que le champ magnétique typique $B(t)$, dans le volume d'interaction de 1 cm de diamètre, vaut, à l'instant τ après la coupure des bobines de piégeage :

$$B(\tau) \approx B_0 e^{-\tau/\tau_p} \quad \text{pour } \tau \geq \tau_0 \quad (\text{III.4})$$

où $B_0 \approx 200 \text{ mG}$, $\tau_p \approx 730 \mu\text{s}$ et $\tau_0 \approx 400 \mu\text{s}$. La constante τ_0 traduit le fait que la dépendance n'est pas exponentielle pendant une durée τ_0 après la coupure du courant. Pour que le champ résiduel soit inférieur au milligauss, il faut donc attendre $\theta_p \approx 3,7 \text{ ms}$ après la coupure du courant de piégeage, avant d'appliquer les faisceaux de résonances noires.

2.3.4 Compensation des champs magnétiques constants

On recherche la valeur du champ magnétique de compensation constant qui minimise l'effet Hanle. Dans cette expérience, on s'intéresse aux champs constants : les champs de ralentissement et de piégeage sont constamment éteints et on moyenne temporellement l'effet du laser, appliqué pendant 100 ms. On porte l'amplitude V de

[Von74] S.V. Vonsovskii, *Magnetism, Volume Two*, Wiley, Chapitre 24 § 10 (1974).

[CHC78] S. Chikazumi and S.H. Charap, *Physics of Magnetism*, Chapitre 15, Krieger Publishing Company (1978).

[DDC69] V.V. Damiano, C. Domenicali, and E.W. Collings, *Chapitre XIV de Magnetism and Metallurgy*, A.E. Berkowitz and E. Kneller eds., Academic Press (1969).

l'effet du laser en fonction des champs magnétiques de compensation. Le faisceau laser a les mêmes caractéristiques qu'aux paragraphes précédents, mais n'est pas rétro-réfléchi.

Dans un premier temps, on explore l'effet du champ de compensation B_z parallèle à l'axe des faisceaux lasers (figure III.9). Le faisceau laser est polarisé linéairement. Sur la figure III.9.a, on balaye le champ magnétique sur une large zone. La courbe $V(B_z)$ présente un minimum très net obtenu pour $B_z = -14 \text{ mG} \pm 3 \text{ mG}$. Sur la figure III.9.b, on a exploré l'effet du champ magnétique avec une échelle plus fine. Le minimum du champ est maintenant obtenu pour $B_z = 9,5 \pm 1 \text{ mG}$. Cette mesure a été réalisée 5 jours après celle de la figure III.9.a, ce qui peut expliquer la différence des valeurs obtenues pour les champs.

Sur la figure III.10, on a balayé les champs perpendiculaires à la direction du laser, le laser étant polarisé circulairement. Le zéro du champ magnétique vertical est déterminé avec une précision de 1 mG environ, le zéro du champ magnétique horizontal, le long de l'axe du jet (direction la moins bien blindée par le mumétal) est déterminé avec une précision de 2 mG environ.

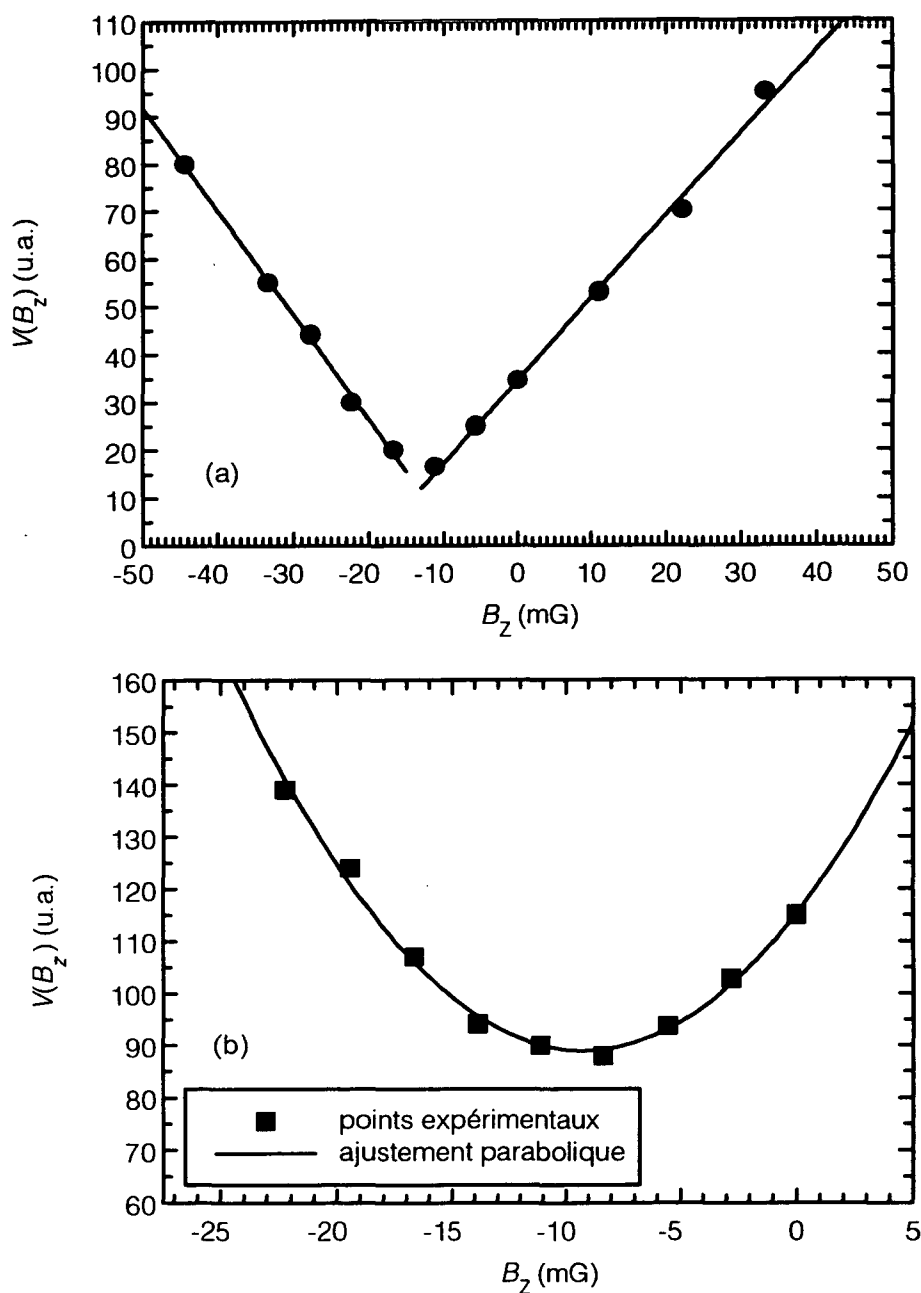


Figure III.9 Effet Hanle mécanique sur le jet atomique : compensation de B_z . Le faisceau laser polarisé linéairement est en onde progressive. On mesure l'amplitude V de la variation du flux du jet créée par la présence du faisceau laser.

(a) Étude à grande échelle en champ magnétique. Remarquer le comportement linéaire de $V(B_z)$. La valeur du champ de compensation obtenue est : $B_z \approx -13 \text{ mG} \pm 3 \text{ mG}$.

(b) Étude détaillée en champ magnétique. Remarquer le comportement quadratique de $V(B_z)$. La valeur du champ de compensation obtenue est : $B_z \approx -9 \text{ mG} \pm 1 \text{ mG}$. Cette courbe a été obtenue 5 jours après la courbe du (a), ce qui peut expliquer le décalage du champ de compensation.

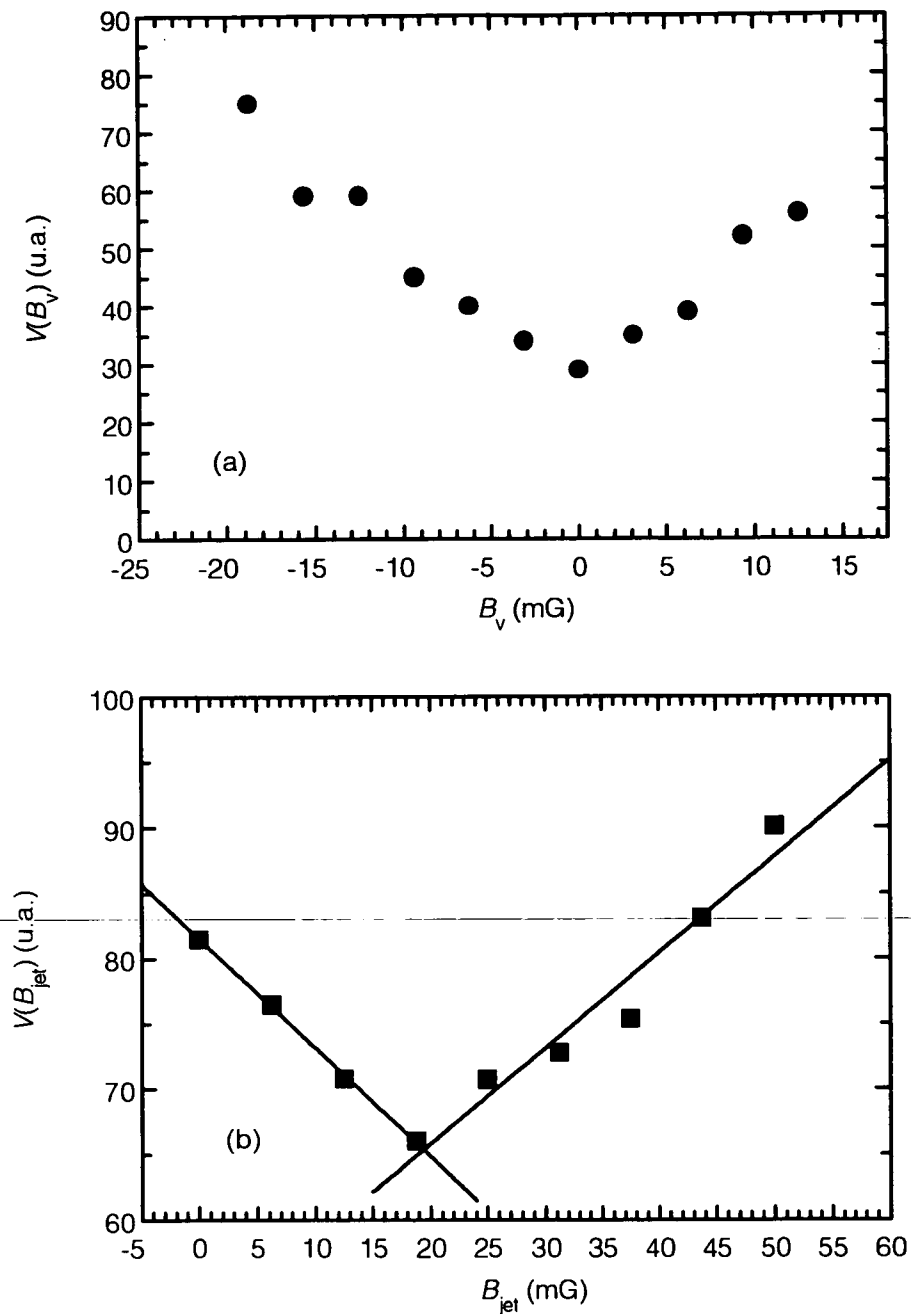


Figure III.10 Effet Hanle mécanique sur le jet atomique : compensation des champs perpendiculaires au faisceau laser. Le faisceau laser polarisé circulairement est en onde progressive. On mesure l'amplitude V de la variation du flux du jet créée par la présence de faisceau laser.

(a) Etude du champ magnétique vertical B_v . La valeur du champ de compensation obtenue est : $B_v \approx 0 \pm 1$ mG.

(b) Etude du champ magnétique le long de l'axe du jet atomique B_{jet} . La valeur du champ de compensation obtenue est : $B_{jet} \approx 19 \pm 1$ mG. Cette composante du champ magnétique est celle qui est la moins bien blindée par le mumétal.

2.4 Effet Hanle mécanique avec les atomes issus du piège magnéto-optique

2.4.1 Principe expérimental

Les expériences d'effet Hanle sur le jet atomique ont permis d'abord de déterminer les constantes d'amortissement des champs dûs aux bobines de ralentissement et de piégeage, ce qui conduit à une séquence temporelle qui garantit une atténuation raisonnable de ces champs au moment de l'application des lasers de résonances noires. Par ailleurs, en l'absence de ces champs, on a réalisé une compensation à quelques milligauss près des champs statiques résiduels (cf. § III.2.3.4). On veut maintenant compenser le champ magnétique plus finement, dans les circonstances réelles de l'expérience de résonances noires, c'est-à-dire tous les champs magnétiques étant modulés. En outre, parce qu'il peut y avoir un gradient spatial de champ magnétique, on veut une sonde la plus locale possible. Pour cela, on utilise l'effet Hanle mécanique avec les atomes du piège.

Les atomes sont ralentis, piégés, puis lâchés, en suivant exactement la même séquence que lors de l'expérience de résonances noires. Mais, au lieu de configurer les faisceaux lasers pour réaliser les résonances noires, le faisceau laser est une onde progressive, polarisée circulairement ou linéairement selon qu'on veut compenser le champ transverse ou le champ longitudinal. Selon la valeur du champ magnétique, la pression de radiation est plus ou moins importante et le nuage atomique est plus ou moins poussé hors de la galette de microcanaux (figure III.11).

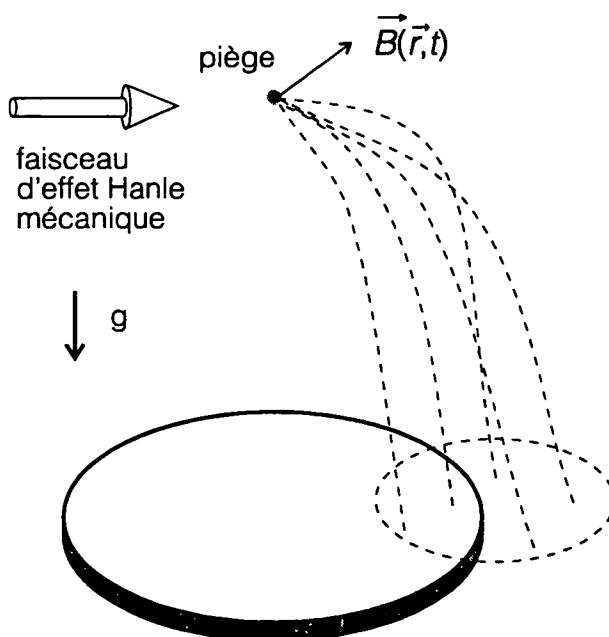


Figure III.11 Principe de l'effet Hanle mécanique sur les atomes issus du piège.

L'expérience suit exactement la même séquence que l'expérience de résonances noires, mais les faisceaux lasers de résonances noires sont remplacés par une onde progressive convenablement polarisée pour réaliser l'effet Hanle mécanique. Dans le régime perturbatif ($\Omega_B \ll \Omega_1$), plus le champ magnétique résiduel est fort, plus la pression de radiation est importante (effet Hanle) et plus le nuage d'atomes issu du piège est poussé hors de la galette de microcanaux.

La compensation du champ magnétique se fait en minimisant la pression de radiation, c'est-à-dire en maximisant le nombre d'atomes recueillis sur la galette. La taille typique du nuage d'atomes au niveau de la galette est exagérément réduite sur la figure (en réalité, elle est de deux fois la taille de la galette environ).

Cette expérience d'effet Hanle avec les atomes piégés est complémentaire de celles réalisées sur le jet atomique. L'élément essentiel est ici d'avoir une mesure magnétique bien définie temporellement, et surtout spatialement : la mesure magnétique est réalisée exactement dans la même fenêtre temporelle que les résonances noires, et dans le même volume d'interaction. Le volume d'interaction est défini par le volume

occupé par les atomes ($\leq 1 \text{ mm}^3$), car la diffusion spatiale est négligeable pour les durées d'interaction explorées (typiquement $300 \mu\text{s}$). Ainsi, la mesure sur les atomes piégés est plus locale que la mesure sur le jet (zone d'interaction définie par les faisceaux de 1 cm de diamètre).

Le signal utilisé pour quantifier la pression de radiation du faisceau d'effet Hanle est le nombre total d'atomes recueillis sur la galette [2] (aire du temps de vol). On pourrait penser mesurer le déplacement spatial du nuage d'atomes arrivant sur la galette. Cependant, le diamètre de la distribution en position vaut typiquement 5 cm au niveau de la galette (avec un piège de vitesse quadratique moyenne $0,5 \text{ m.s}^{-1}$, qui donne un temps de vol typique de 50 ms). Il est donc difficile de détecter précisément le maximum de cette distribution spatiale avec une galette de seulement 3 cm de diamètre.

L'expérience préliminaire représentée sur la figure III.12 permet de vérifier que l'on comprend l'effet du faisceau Hanle. Les paramètres du faisceau Hanle sont ajustés empiriquement pour que le nombre d'atomes détectés soit le plus sensible possible aux variations du champ magnétique : le nuage d'atomes ne doit être ni trop poussé, ni trop peu poussé.

La courbe en pointillé montre le pic de temps de vol en l'absence de faisceau Hanle (ce pic se superpose à un fond variant relativement lentement, probablement dû aux atomes métastables projetés vers la galette par collisions élastiques avec le gaz résiduel). Après un délai $\tau = 300 \mu\text{s}$ après la coupure du piège, on applique le faisceau d'effet Hanle pendant 10 ms, à résonance sur la transition $J_f = 1 \leftrightarrow J_e = 1$. Le faisceau a un diamètre de 1 mm, il est approximativement centré sur le piège et a une intensité de $I = 10^{-3} \text{ mW.cm}^{-2} \approx 6.10^{-3} I_{\text{sat}}$, soit $\Omega_1 \approx 6 \times 10^{-2} \Gamma$. On observe alors le temps de vol en trait continu.

Ce temps de vol possède deux pics dont l'interprétation est la suivante : on remarque que le creux entre les deux pics correspond à un temps de vol de 100 ms, ce qui est exactement le temps de vol piège-galette des atomes de vitesse verticale initiale nulle. Ces atomes sont ceux qui interagissent le plus longtemps avec le faisceau Hanle et sont donc les atomes les plus fortement poussés, d'où le creux observé (d'où les deux pics).

Les deux pics observés, à 64 ms et 120 ms, correspondent respectivement à une vitesse verticale de $0,46 \text{ m.s}^{-1}$ dirigée vers le bas et à une vitesse de $0,18 \text{ m.s}^{-1}$ dirigée vers le haut. Ces deux vitesses définissent l'intervalle sur lequel le faisceau Hanle agit significativement (la dissymétrie entre ces deux vitesses peut être due à un léger décentrage vers le bas du faisceau Hanle par rapport au piège).

Pour corroborer cette interprétation de la forme du temps de vol, on effectue la même expérience avec un faisceau Hanle de 4 mm, ce qui accroît la durée d'interaction. Le creux à 100 ms des atomes de vitesse verticale initiale nulle devient plus prononcé (cf. temps d'interaction accru). En outre, les deux pics s'écartent, ce qui montre qu'on agit avec un intervalle de vitesses plus étendu.

[2] Des calculs précis de ce signal ont été faits. Voir B. Saubaméa, Rapport de Magistère de Chimie de Paris, Septembre 1993.

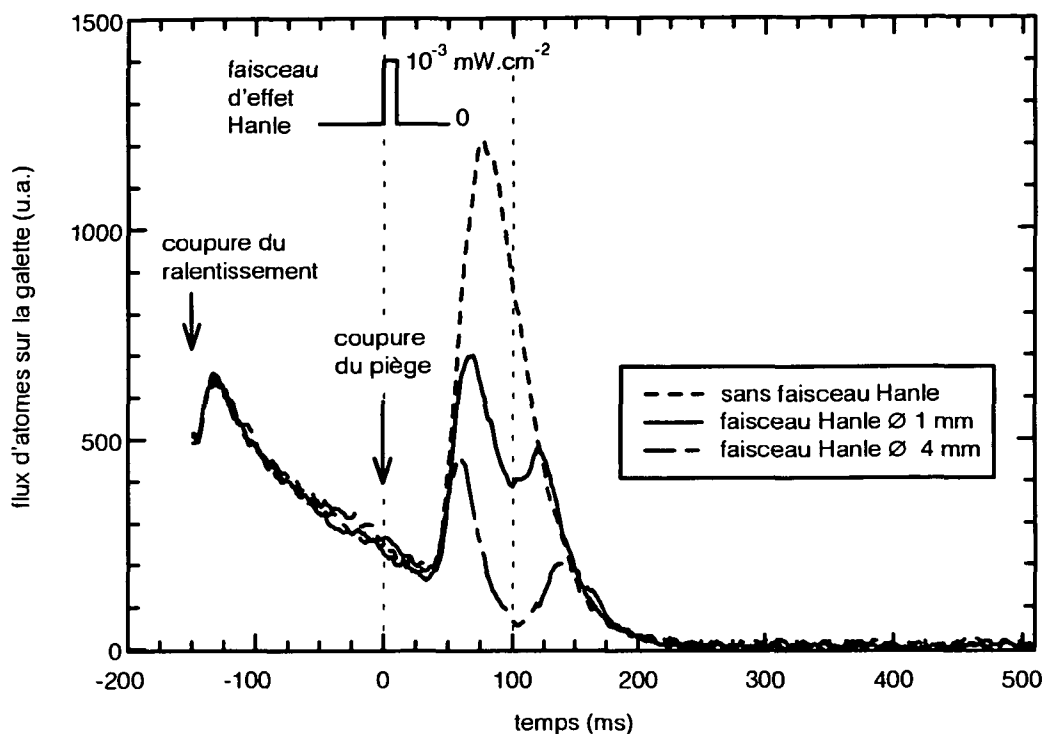


Figure III.12 Temps de vol typiques pour l'effet Hanle mécanique sur les atomes piégés, avec un champ magnétique de 200 mG. On enregistre le flux d'atomes sur la galette de microcanaux. Après la coupure du ralentissement, le fond, constitué d'atomes projetés sur la galette de microcanaux par collisions élastiques avec le gaz résiduel, diminue lentement, pendant 150 ms. Puis, à $t = 0$, on coupe les faisceaux et les champs de piégeage, et on applique éventuellement le faisceau d'effet Hanle mécanique, à résonance, pendant 10 ms.

Sans faisceau Hanle, le pic de temps de vol présente un seul pic, dont le sommet est atteint à $t = 77$ ms. On en déduit la vitesse quadratique moyenne des atomes piégés : $\sigma_p \approx 0,3 \text{ m.s}^{-1}$ (ceci correspond à la plus basse température que nous ayons observée pour les atomes piégés).

En présence du faisceau Hanle, le temps de vol présente deux pics, séparés par un creux à $t \approx 100$ ms. Le creux correspond exactement aux atomes dont la vitesse verticale initiale (à $t \approx 0$) est nulle : ces atomes interagissent plus longtemps que les autres avec le faisceau Hanle et sont donc défléchis davantage.

On vérifie cette interprétation en passant d'un faisceau de 1 mm de diamètre à un faisceau de 4 mm, ce qui accroît le temps d'interaction : davantage d'atomes sont poussés hors de la galette (cf. diminution globale de l'amplitude du temps de vol et creux plus prononcé), sur une plage de vitesses plus grandes (cf. écartement des deux pics).

Avec ces paramètres lasers, le temps de vol est sensible aux variations de la pression de radiation créée par le faisceau Hanle : on calcule qu'avec le faisceau de 1 mm, le nombre moyen de photons spontanés émis par chaque atome lors de son interaction avec le faisceau Hanle est inférieur à 30 photons.

En définitive, cette méthode d'effet Hanle mécanique sur le piège se révèle particulièrement sensible. Partant d'un échantillon d'atomes dont la distribution en vitesse a une largeur inférieure à 1 m.s^{-1} (soit $\delta v \approx 10 v_R$), il suffit d'échanger un dizaine de photons pour perturber radicalement cette distribution et obtenir un signal Hanle très net. Pour des atomes interagissant pendant 1 ms (atomes de vitesse $0,5 \text{ m.s}^{-1}$), il suffit donc d'un taux de départ Γ'_B de l'ordre de 10^4 s^{-1} , ce qui, dans le cas considéré ici ($\Omega_1 \approx 6 \times 10^{-2} \Gamma$) correspond à un champ magnétique supérieur à quelques milligauss.

2.4.2 Compensation des champs magnétiques avec une résolution spatiale et temporelle améliorée

Pour compenser quotidiennement le champ magnétique parasite, on utilise l'effet Hanle sur les atomes issus du piège magnéto-optique, en suivant la procédure expliquée au paragraphe précédent. Comme les expériences sur jet ont permis de déterminer approximativement le zéro du champ magnétique, les champs ne sont balayés que sur un intervalle restreint dans les expériences sur piège. Pour évaluer quantitativement la pression de radiation due à l'effet Hanle, on intègre l'aire du temps de vol entre deux dates choisies empiriquement pour maximiser la sensibilité au champ magnétique. Le faisceau d'effet Hanle est appliqué pendant $\theta_H = 300 \mu\text{s}$, à une date $\theta_p = 3,5 \text{ ms}$ après avoir coupé le piège.

Deux courbes typiques d'effet Hanle sont données sur la figure III.13 pour l'étude du champ magnétique le long de l'axe du jet atomique (axe le moins bien blindé). L'expérience du 07/09/1993 donne un champ de compensation $B_{\text{jet}} = 13 \pm 1 \text{ mG}$. L'expérience du 25/09/1993 donne $B_{\text{jet}} = 9 \pm 0,5 \text{ mG}$. Ainsi, le champ a varié de 4 mG, à l'intérieur du blindage, en 18 jours. Ceci montre la nécessité de compenser le champ magnétique chaque jour. Pour la courbe du 07/09/1993, le faisceau Hanle est une simple onde progressive. Le 25/09/1994, on a utilisé une configuration atypique, avec une mélasse expulsante à deux dimensions, les faisceaux faisant un angle de 30° entre eux, ce qui montre combien l'effet Hanle mécanique est une méthode souple. L'amplitude de la variation de l'aire du temps de vol en fonction du champ magnétique est plus importante le 25/09/1993 que le 07/09/1993, ce qui résulte d'une optimisation empirique différente (intensité du laser, fenêtre d'intégration temporelle, onde progressive 1D / mélasse 2D).

La figure III.14 donne les courbes d'effet Hanle pour le champ magnétique vertical. La valeur du champ de compensation a varié de 4,5 mG entre les deux dates.

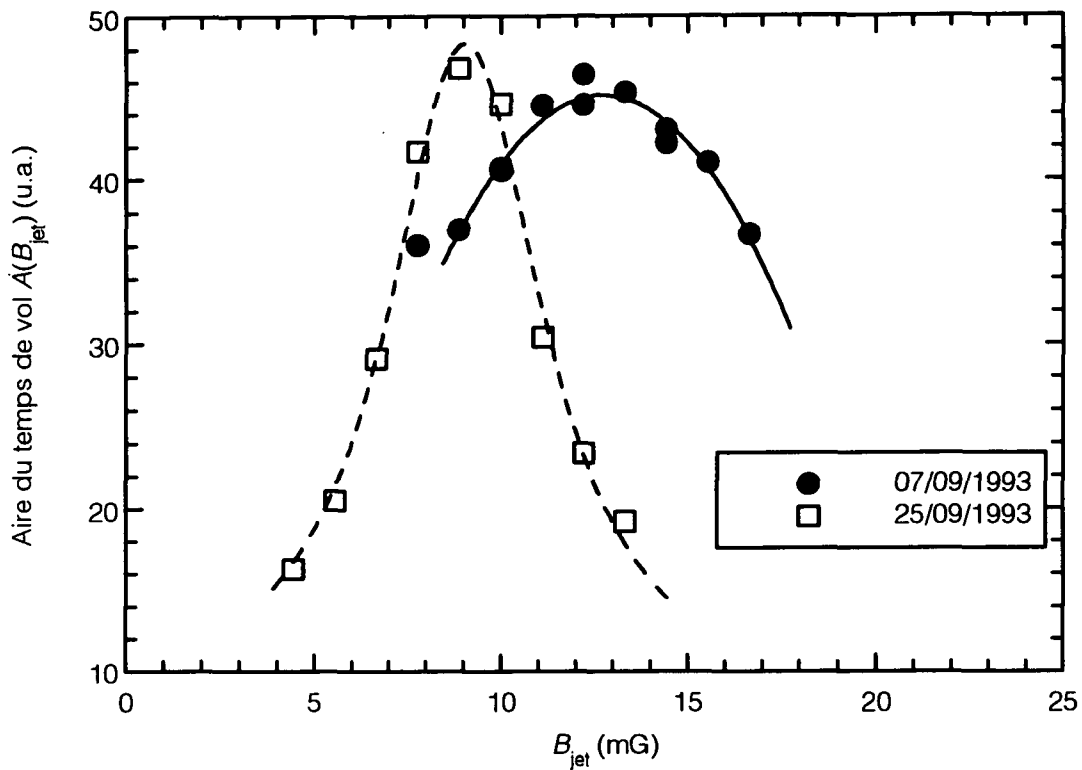


Figure III.13 Effet Hanle mécanique sur les atomes piégés. On mesure l'aire $A(B_{\text{jet}})$ du temps de vol en fonction de B_{jet} , le champ magnétique de compensation le long de l'axe du jet atomique. L'aire maximale correspond au plus petit nombre de photons échangés, c'est-à-dire à la meilleure compensation du champ magnétique.

La courbe du 07/09/1993 correspond à un faisceau d'effet Hanle, à résonance, en onde progressive, d'intensité $I = 8 \times 10^{-2} I_{\text{sat}}$. Chaque point est obtenu en moyennant 30 temps de vol. Le champ de compensation déduit est : $B_{\text{jet}} \approx 13 \pm 1$ mG. La courbe en trait continu est un ajustement par une parabole.

La courbe du 25/09/1993 correspond à des faisceaux d'effet Hanle créant une mélasse expulsante à deux dimensions, dont les deux bras sont à 30° l'un de l'autre (cf. § II.4.2). Les quatre faisceaux sont polarisés linéairement. Sur chaque bras, l'onde aller est polarisée perpendiculairement à l'onde retour. L'intensité de chaque faisceau est $I \approx 3 \times 10^{-2} I_{\text{sat}}$, le désaccord vaut $\delta = -\Gamma/2$. Chaque point est obtenu en moyennant 20 temps de vol. Le champ de compensation déduit est : $B_{\text{jet}} \approx 9 \pm 0,5$ mG. La courbe en trait pointillé est un ajustement par une lorentzienne.

On constate une différence de 4 mG entre les deux courbes, probablement liée à des fluctuations du champ ambiant. Sur la courbe du 25/09/1993, la dépendance en champ magnétique est beaucoup plus accentuée que sur celle du 07/09/1993. Ceci peut être dû à la configuration de mélasse ou à la diminution de l'intensité laser qui affine la dépendance du taux de fluorescence en fonction du champ magnétique.

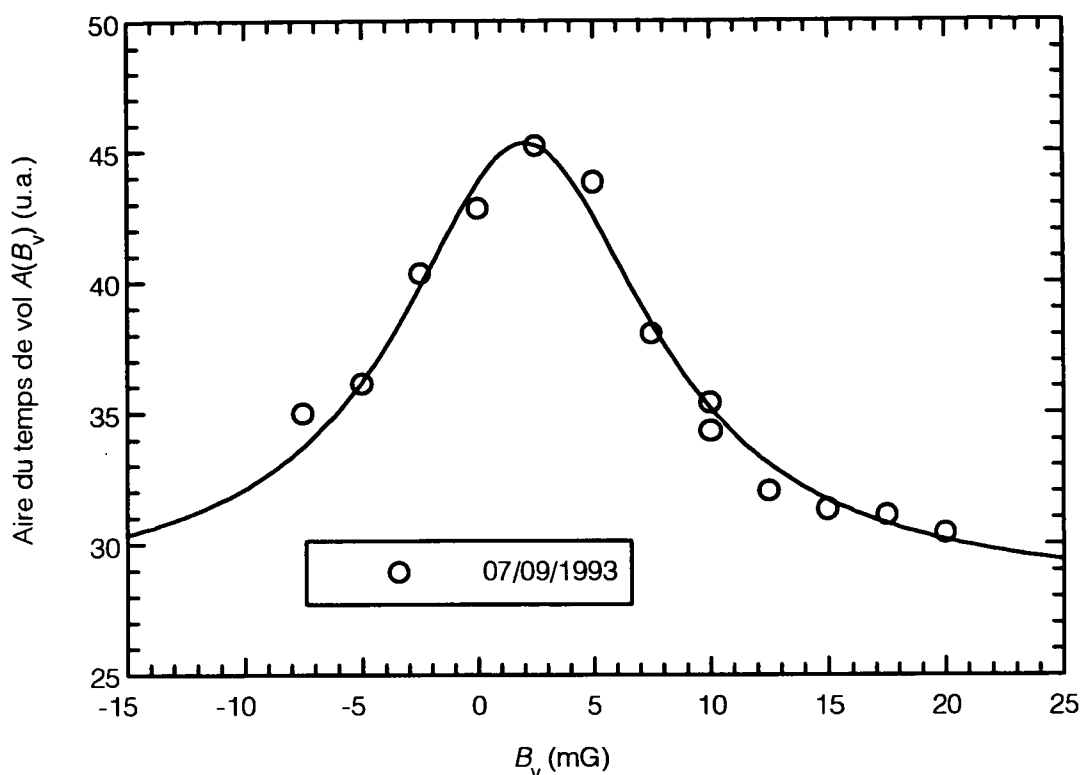


Figure III.14 Effet Hanle mécanique sur les atomes piégés. On mesure l'aire $A(B_v)$ du temps de vol en fonction de B_v , le champ magnétique de compensation vertical.

Le faisceau d'effet Hanle est à résonance, en onde progressive, d'intensité $I = 8 \times 10^{-2} I_{\text{sat}}$. Chaque point est obtenu en moyennant 30 temps de vol. Le champ de compensation déduit est : $B_{\text{jet}} \approx 2 \pm 1$ mG. La courbe en trait continu est un ajustement par une lorentzienne.

Le résultat de ces mesures est une compensation du champ magnétique avec une résolution magnétique de 1 mG, une résolution spatiale de 1 mm et une résolution temporelle $\theta_H = 300 \mu\text{s}$. Cependant, le sens de l'expression "résolution temporelle" doit être nuancé : les mesures de champ magnétique se font dans un intervalle de temps de $\theta_H = 300 \mu\text{s}$, bien défini par rapport aux dates de modulation des bobines. Mais, les mesures sont moyennées dans le temps sur de nombreux cycles de piégeage-lâcher des atomes : il faut 5 à 10 minutes pour mesurer une dizaine d'aire de temps de vol ce qui permet de compenser un axe (chaque aire est moyennée sur 10 à 30 temps de vol, et un temps de vol (cycle piégeage-lâcher des atomes) prend 1,5 à 2 secondes). S'il se produit des variations du champ ambiant avec une échelle de temps de quelques secondes à quelques minutes, ces variations échappent à notre mesure [3]. De fait, certaines expériences d'effet Hanle échouent : l'aire des temps de vol varie alors de manière erratique et non reproductible en fonction des champs de compensation. L'origine de ces échecs pourrait être des champs ambiants fluctuants (cf. remarque 33, § II.4.3.3).

[3] Certaines de ces variations du champ magnétique pourraient être mesurables par une étude de la largeur des courbes d'effet Hanle mécanique.

2.5 Conclusion sur les expériences d'effet Hanle mécanique

L'effet Hanle mécanique nous a donné accès à des informations essentielles sur le champ magnétique. Les expériences sur le jet atomique ont permis de mesurer *in situ* l'amortissement temporel des champs magnétiques de piégeage et de ralentissement, ce qui a permis d'optimiser la séquence temporelle. L'effet Hanle mécanique sur les atomes piégés est utilisé pour une compensation quotidienne du champ magnétique. La précision de la compensation moyenne est de l'ordre de 1 mG, ce qui est suffisant pour atteindre un refroidissement par résonances noires à $\delta p_{\theta} = p_R/10$. Cependant, certaines fluctuations du champ magnétique à court terme sont mal maîtrisées et pourraient perturber le refroidissement par résonances noires.

3 Expériences à une dimension

3.1 Introduction : signaux bruts et premiers tests

Après compensation du champ magnétique par les expériences d'effet Hanle mécanique (cf. § III.2)), on applique les faisceaux lasers de résonances noires et on observe la distribution en position des atomes sur la galette de microcanaux. La structure en deux bandes de la distribution, qui signe le refroidissement par résonances noires, apparaît alors clairement. Ce paragraphe III.3.1 rassemble les premières observations effectuées sur ces signaux de résonances noires. Par la suite, on analysera quantitativement les effets du champ magnétique (§ III.3.2). Puis on étudiera en détail les distributions en position sur la galette de microcanaux pour en déduire la température atteinte (§ III.3.3). Enfin, on étudiera l'évolution en fonction du temps d'interaction (§ III.3.4).

Pour pouvoir observer facilement les deux pics en impulsion à $p = \pm \hbar k$, caractéristiques du refroidissement par résonances noires à une dimension, il n'est pas judicieux d'intégrer la distribution en position sur une gamme trop grande de temps de chute. En effet, la séparation ($z_g - z_d$) entre le pic de "droite" et le pic de "gauche" que l'on va observer sur la galette dépend du temps de vol τ_v :

$$(z_g - z_d) = 2v_R\tau_v \quad (\text{III.5})$$

Si on intègre sur des temps de vol τ_v trop différents, on obtiendra une superposition de pics séparés par des distances différentes, ce qui est difficile à interpréter. On sélectionne donc une fenêtre temporelle de largeur $\Delta\tau_v = \tau_{v1} - \tau_{v2}$, suffisamment étroite, et qui débute à la date τ_{v1} après la coupure du piège (figure III.15).

La figure III.16 est une image obtenue pour un seul lâcher d'atomes piégés. Environ 50-100 atomes ont été détectés. On distingue bien les taches liées à la détection d'atomes individuels. Les positions des atomes ont tendance à se structurer en deux bandes qui sont la signature du refroidissement par résonances noires : les atomes s'accablent dans les états $|\psi_{\text{NC}}(p \approx 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|f_-, p - \hbar k\rangle + |f_+, p + \hbar k\rangle)$. Pour la figure

III.16.a, les faisceaux étaient inclinés de 15° par rapport à la caméra, d'où l'inclinaison des bandes que l'on peut discerner. Sur cette figure et sur celles qui vont suivre, chaque point représente la somme de 6×4 pixels CCD, c'est-à-dire une zone de $620 \mu\text{m} \times 620 \mu\text{m}$ sur la galette de microcanaux (les pixels de la caméra CCD sont asymétriques). La sommation a été faite pour des raisons pratiques et esthétiques liées au graphisme 3D. Elle ne change guère le rapport signal sur bruit, déjà bon sans sommation (cf. § II.4.4.3, un atome individuel donne une tache de $530 \mu\text{m}$ de rayon quadratique moyenne).

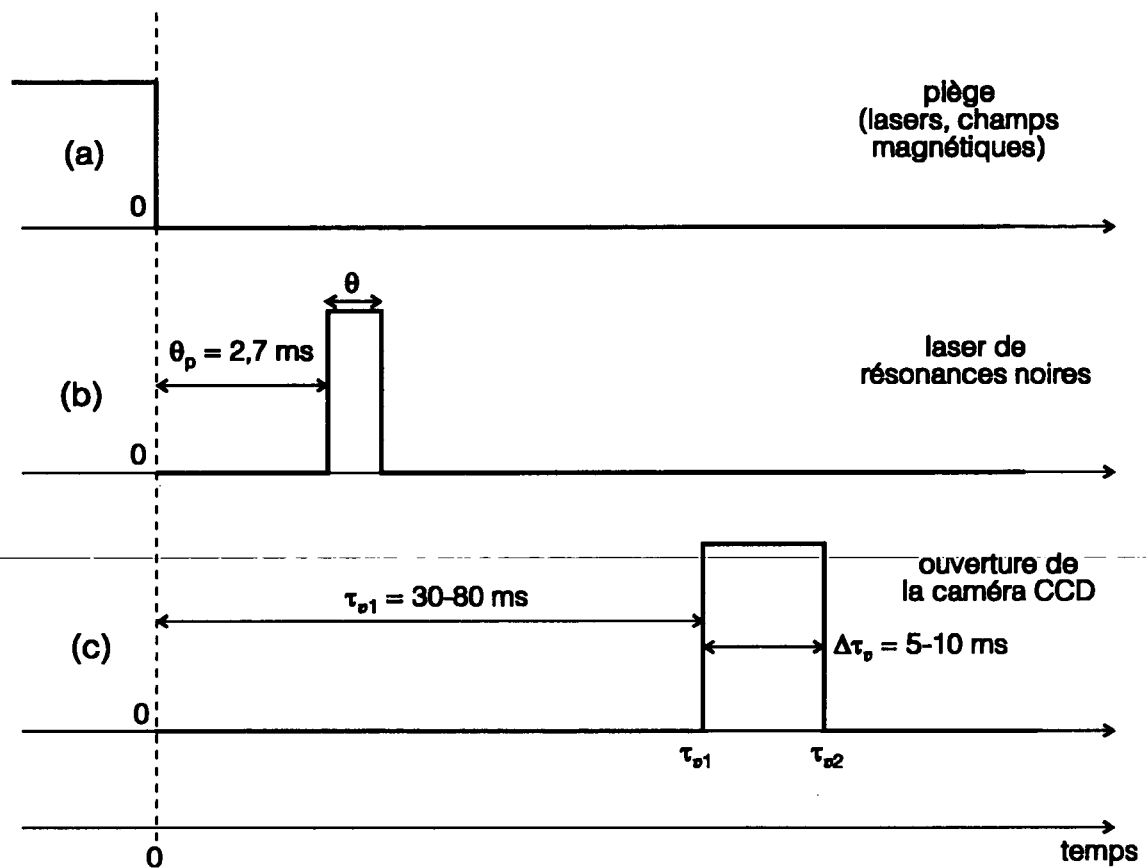


Figure III.15 *Séquence temporelle de la phase de résonances noires.* (a) Après avoir accumulé les atomes dans le piège pendant 1 s environ, et coupé les champs magnétiques de ralentissement depuis 250 ms environ, à la date $t = 0$, on lâche les atomes du piège (extinction des faisceaux de piégeage, coupure du courant dans les bobines de piégeage). On attend ensuite $\theta_p \approx 2,7$ ms pour permettre au champ de piégeage de s'amortir. (b) Puis on applique les faisceaux lasers de résonances noires pendant une durée θ . (c) Enfin, on intègre la distribution en position des atomes arrivant sur la galette, pendant une fenêtre temporelle $[\tau_{p1}; \tau_{p2}]$, décalée de τ_{p1} par rapport à la date du lâcher des atomes. Cette sélection en temps par la caméra CCD déclenchée permet d'éviter la superposition sur la galette de pics séparés par des distances $(z_d - z_p)$ trop différentes.

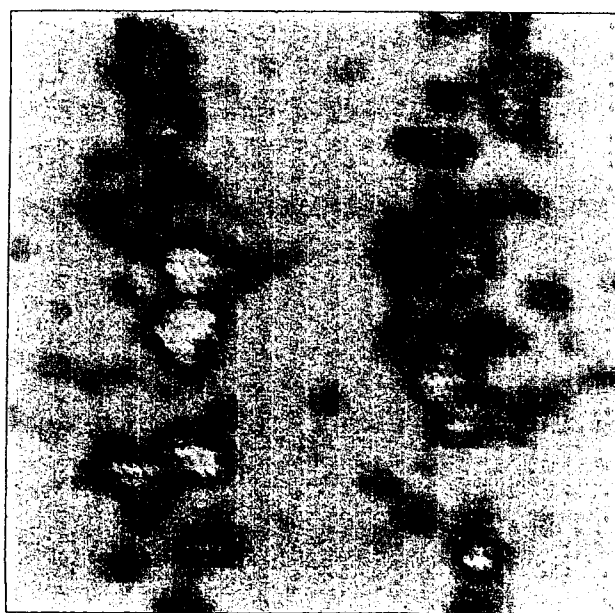
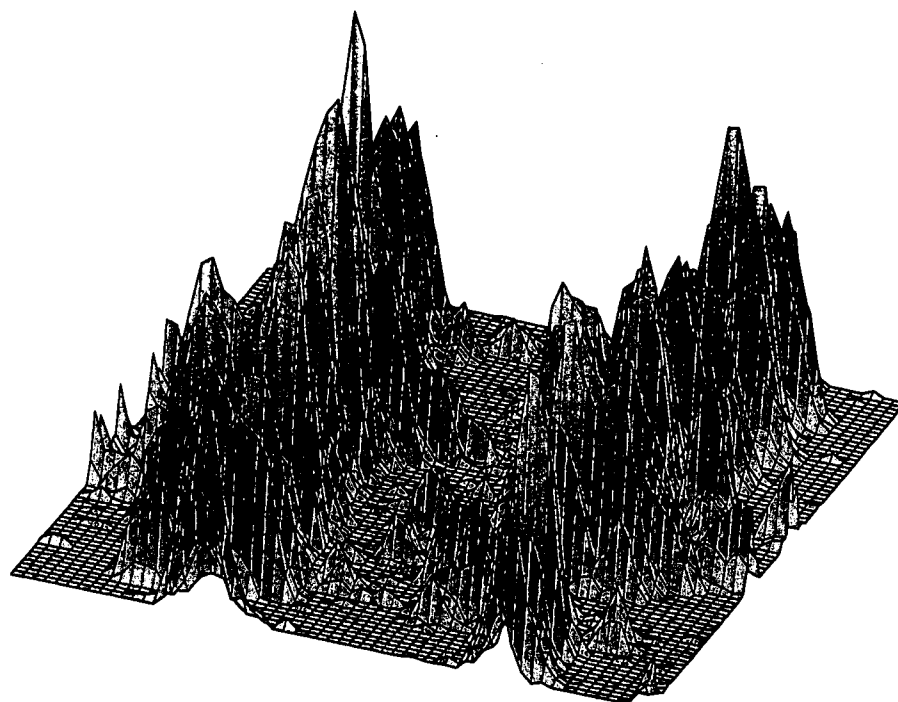


Figure III.16 Image monocoup. On intègre la fluorescence du phosphore pendant $\Delta\tau_p = 10$ ms, à partir de $\tau_{v1} = 53$ ms après avoir lâché les atomes du piège. Les paramètres de cette expérience sont $\theta_p = 3,5$ ms, $\theta = 100$ μ s, $\Omega_1 \approx 3$ Γ , $\delta \approx 0$ Γ . Les faisceaux ont un diamètre de 1 cm et sont polarisés σ_+ - σ_- .

(haut) Représentation 3D. On distingue bien les pics associés à certains atomes individuels. Environ 50-100 atomes sont détectés. Chaque point représenté correspond à la somme 6×4 pixels CCD, soit à une zone de 620×620 μ m² sur la galette de microcanaux. Noter qu'en l'absence de caméra, on peut voir ce signal à l'oeil sur l'écran de phosphore. Dans cette expérience particulière, les faisceaux sont inclinés de 15° par rapport à la caméra.

(bas) Représentation 2D du même type de signal. Paramètres : $\theta = 400$ μ s, $\delta \approx 0$ Γ .

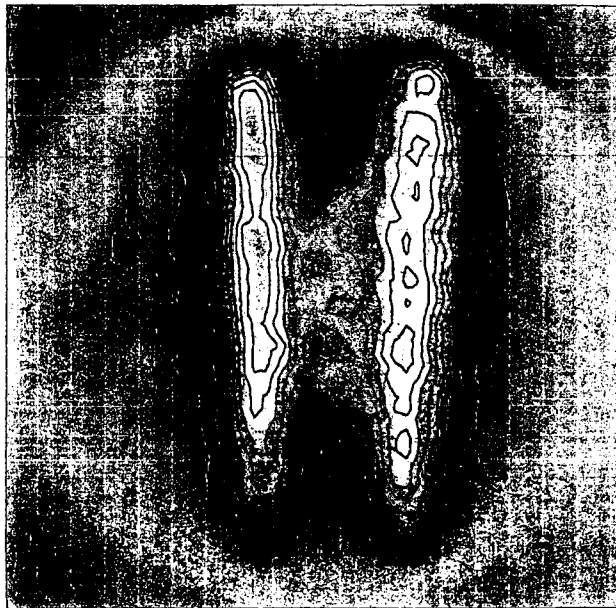
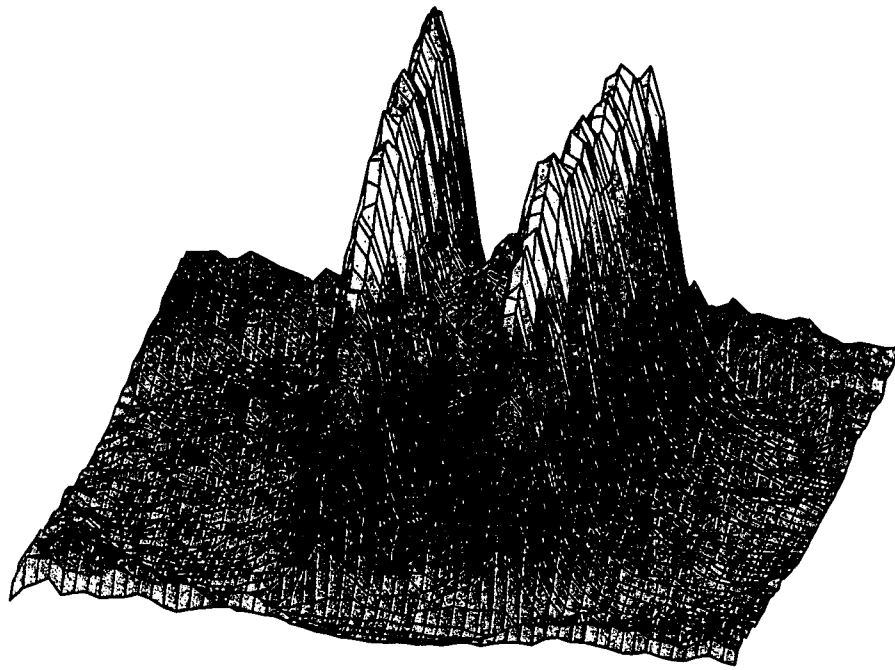


Figure III.17 Image moyennée. On a moyenné 160 images analogues à la figure III.16. Les deux bandes apparaissent très nettement. Les paramètres de cette expérience sont $\theta_p = 3,5$ ms, $\theta = 300$ μ s, $\Omega_1 \approx 3$ Γ , $\delta \approx 0$ Γ . Noter que l'on a appliqué une phase de mélasse optique entre la coupure du piège et l'application des faisceaux de résonances noires, pour réduire l'expansion spatiale du nuage d'atomes froids. La caméra intègre la fluorescence du phosphore entre 48 ms et 58 ms après le lâcher du piège ($\tau_{v1} = 48$ ms, $\Delta\tau_p = 10$ ms). On distingue très bien le bord circulaire de la galette, car la luminescence de l'écran de phosphore est suffisante pour éclairer la couronne métallique qui soutient les galettes.

(haut) Représentation 3D.

(bas) Représentation 2D et courbes de niveau.

La figure III.17 est une image moyennée sur 160 coups. Les deux bandes apparaissent alors très clairement.

Plusieurs tests ont été effectués pour contrôler si ces deux bandes sont bien dues au refroidissement par résonances noires :

- Conformément à la théorie [AAK89], les deux bandes apparaissent en polarisation $\sigma_+ - \sigma_-$ et linéaire-linéaire perpendiculaire, mais pas en polarisation $\sigma_+ - \sigma_+$.

- Si seul le faisceau aller est présent, aucune structure nette n'apparaît sur les images. Cependant, l'image n'est pas complètement uniforme : il existe des inhomogénéités de gain sur la galette de microcanaux, que l'on retrouve sur toutes les images.

- Si le faisceau retour traverse un film de plastique, transparent, mais d'aspect irrégulier (ondulations, rayures), les deux bandes disparaissent (le test a été réalisé avec une pochette de disquette informatique). Ceci illustre le rôle de la cohérence entre le faisceau aller et le faisceau retour.

- L'espacement ($z_g - z_d$) entre les deux bandes correspond approximativement à l'équation (III.5), avec toutefois un écart de 10 % qu'il faudra expliquer (les deux bandes sont trop rapprochées, cf. § III.3.2.3).

Un dernier test qualitatif concerne l'alignement de l'optique : on peut désaligner le faisceau de retour de plusieurs degrés sans perturber le refroidissement par résonances noires. La seule contrainte est que le faisceau aller et le faisceau retour se recouvrent sur la zone d'interaction. Cette absence de contrainte sur l'alignement optique est un progrès décisif par rapport à l'expérience sur jet où l'alignement était critique [Van89] (cf. § III.4.2) : les atomes ne traversent plus le bord des faisceaux où le maintien de la cohérence était difficile à obtenir, puisque les faisceaux sont éteints avant que les atomes n'atteignent leur bord.

On vérifie que si les faisceaux sont appliqués pendant une durée beaucoup plus longue ($\theta = 2,7$ ms) telle que certains atomes sortent des faisceaux avant leur extinction, la structure en bandes disparaît totalement [4].

-
- [AAK89] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the one-photon recoil energy by velocity-selective coherent population trapping : theoretical analysis*, J. Opt. Soc. Am. B 6, p. 2112-2124 (1989).
- [Van89] N. Vansteenkiste, *Réalisation d'un laser monomode et asservi sur la transition $2^3S_1-2^3P$ de l'hélium 4 (1083 nm) : utilisation pour quelques expériences de refroidissement radiatif d'atomes d'hélium 4 métastable*, Thèse de l'Université Paris-Sud (1989).
- [4] Ceci est compatible avec la destruction de la cohérence à la sortie des faisceaux, mais ne constitue pas une preuve : il aurait fallu tester la présence des deux bandes avec $\theta = 2,7$ ms et des faisceaux suffisamment grands pour éviter le problème de sortie.

Notons que la hauteur des bandes est multipliée par un facteur supérieur ou égal à 5 par rapport à la distribution en l'absence de résonances noires. Ceci est le signe d'un réel effet de refroidissement et non d'une simple sélection en vitesse.

On passe maintenant à des études plus quantitatives des images obtenues, en commençant par analyser les effets du champ magnétique (§ III.3.2), puis en étudiant les distributions en position obtenues (§ III.3.3).

3.2 Influences des champs magnétiques

Dans ce paragraphe, on étudie plusieurs effets liés au champ magnétique, importants à la fois pour vérifier quel niveau de compensation est nécessaire (cf. § II.4.3) et pour comprendre en détail la distribution observée sur la galette de microcanaux.

3.2.1 Effet d'un champ magnétique transverse

Tout d'abord, on cherche à vérifier expérimentalement les ordres de grandeur calculés pour le champ résiduel permis en fonction de la largeur en impulsion δp_θ que l'on veut atteindre (cf. § II.4.3.2.2).

Pour cela, on applique un champ magnétique perpendiculaire B_\perp aux faisceaux lasers, de valeur connue, et on observe l'évolution des profils des images obtenues (figure III.18). La dégradation des profils est très nette quand on passe de $B_\perp = 5$ mG à $B_\perp = 10$ mG [5] : la demi-largeur à $1/e^{1/2}$ passe de $\delta p \approx 0,4 \hbar k$ à $\delta p \approx 0,8 \hbar k$ et la hauteur des pics diminue d'un facteur 2 environ (si on soustrait le fond).

Ceci est en bon accord avec les contraintes calculées théoriquement au § II.4.3.2.2, qui exigeaient

$$B_\perp \ll 40 \text{ mG} \times \frac{\delta p_\theta}{P_R} \quad (\text{III.6})$$

pour pouvoir atteindre δp_θ , puisqu'on constate expérimentalement que si $B_\perp = 10$ mG, le refroidissement est à peine sub-recul ($\delta p \approx 0,8 \hbar k$).

[5] On ne dispose malheureusement pas d'image à $B_\perp = 0$, dans des conditions identiques par ailleurs.

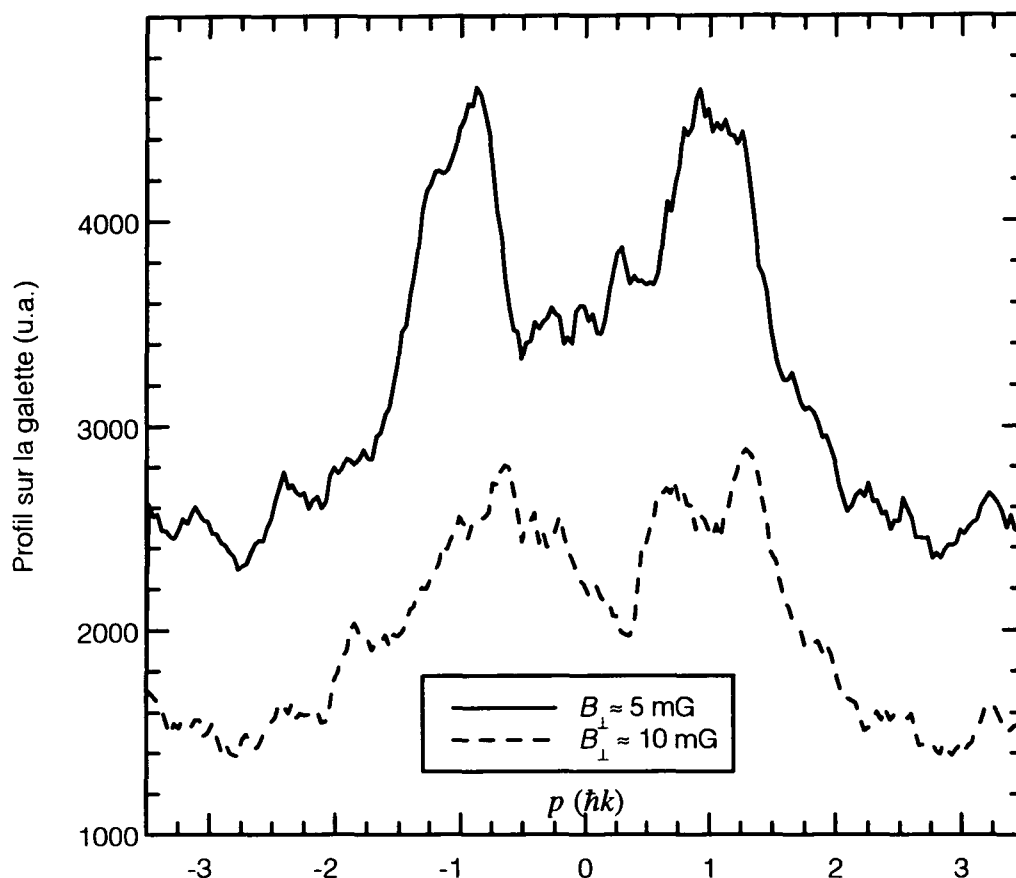


Figure III.18 Effet d'un champ magnétique transverse B_{\perp} . Les profils sont obtenus en intégrant 65 lignes sur les images CCD de la galette. Les positions mesurées ont été converties en unité $\hbar k$ (cf. § II.3.2.3). On constate d'une part un élargissement des pics et une diminution de leur hauteur lorsque le champ magnétique augmente : en passant d'un champ résiduel B_{\perp} de 5 mG à 10 mG (aucune donnée n'a été prise dans les mêmes conditions à $B_{\perp} = 0$), la demi-largeur δz à $1/e^{1/2}$ passe de $0,4 \hbar k$ à $0,8 \hbar k$ et la hauteur des pics est divisée par 2 environ. On a un bon accord en ordre de grandeur entre l'effet du champ magnétique observé et la théorie qui prédit une diminution de la durée de vie des états $|\psi_{NC}(p \approx 0)\rangle$ en présence d'un champ magnétique transverse. Les paramètres de ces profils sont : $\theta = 300 \mu\text{s}$, $\Omega_1 \approx 0,4 \Gamma$, $\delta \approx 0$, $\tau_p = 3,5 \text{ ms}$, $\tau_{v1} = 50 \text{ ms}$, $\Delta\tau_v = 10 \text{ ms}$, nombre d'images intégrées = 80.

3.2.2 Effet d'un champ magnétique longitudinal constant

Un champ magnétique longitudinal B_z , parallèle à l'axe des lasers, constant, n'empêche pas le refroidissement par résonances noires : le refroidissement s'effectue dans le référentiel en mouvement uniforme à la vitesse v_B telle que l'effet Doppler compense exactement l'effet Zeeman (cf. § II.4.3.2.3) :

$$kv_B = \Omega_B = \frac{gq_e}{2m_e} B \quad (\text{III.7})$$

On vérifie cette analyse en variant le champ magnétique B_z appliqué le long de l'axe des lasers et en observant le comportement des bandes sur la galette (figure III.19.a). Lorsqu'on passe d'un champ B_{0z} inconnu ($|B_{0z}| < 100$ mG) à $B_z = B_{0z} + 12$ mG, puis $B_z = B_{0z} + 24$ mG, on constate tout d'abord que les pics caractéristiques du refroidissement par résonances noires ne se dégradent pas [6]: le refroidissement continue à avoir lieu, ce qui contraste avec l'effet néfaste d'un champ transverse B_\perp (cf. § III.3.2.1). En outre, le déplacement des pics est très net : le pic de gauche se déplace vers la droite, alors que le pic de droite, qui atteint le bord de la galette de microcanaux disparaît. Une analyse plus fine montre que la largeur des pics varie en fonction de B_z , ce que nous interprétons au § III.3.3.2.

Si on repère la position du centre du pic de gauche grâce à un ajustement par une gaussienne du pic, on trouve une dépendance remarquablement linéaire en fonction de B_z (figure III.19.b, cf. équation (III.7)). Expérimentalement, on trouve que le référentiel dans lequel a lieu le refroidissement par résonances noires se déplace à la vitesse v_B avec $(v_B/B_z)_{\text{exp}} = 4,4$ mm.s⁻¹/mG. Théoriquement, on devrait avoir $(v_B/B_z)_{\text{th}} = 3,0$ mm.s⁻¹/mG. Nous attribuons la différence entre le résultat théorique et l'expérience à l'imprécision de l'étalonnage du champ magnétique en fonction du courant de compensation appliqué.

Comme un champ B_{0z} non nul n'empêche pas le refroidissement par résonances noires, il a été décidé de ne pas compenser B_{0z} chaque jour pour les expériences décrites dans ce mémoire (cette décision n'est pas heureuse : mieux vaut contrôler les paramètres contrôlables, ici la position des bandes). Ainsi, le champ B_{0z} typique valait quelques milligauss et était différent chaque jour.

[6] Sur la figure III.19, le pic de gauche ne se dégrade pas quand B_z augmente, mais le pic de droite se dégrade. La dégradation du pic de droite ne signifie rien quant aux résonances noires : elle est due au fait que ce pic se déplace vers le bord de la galette. La galette étant circulaire, le profil contient moins de lignes sur le bord qu'au centre.

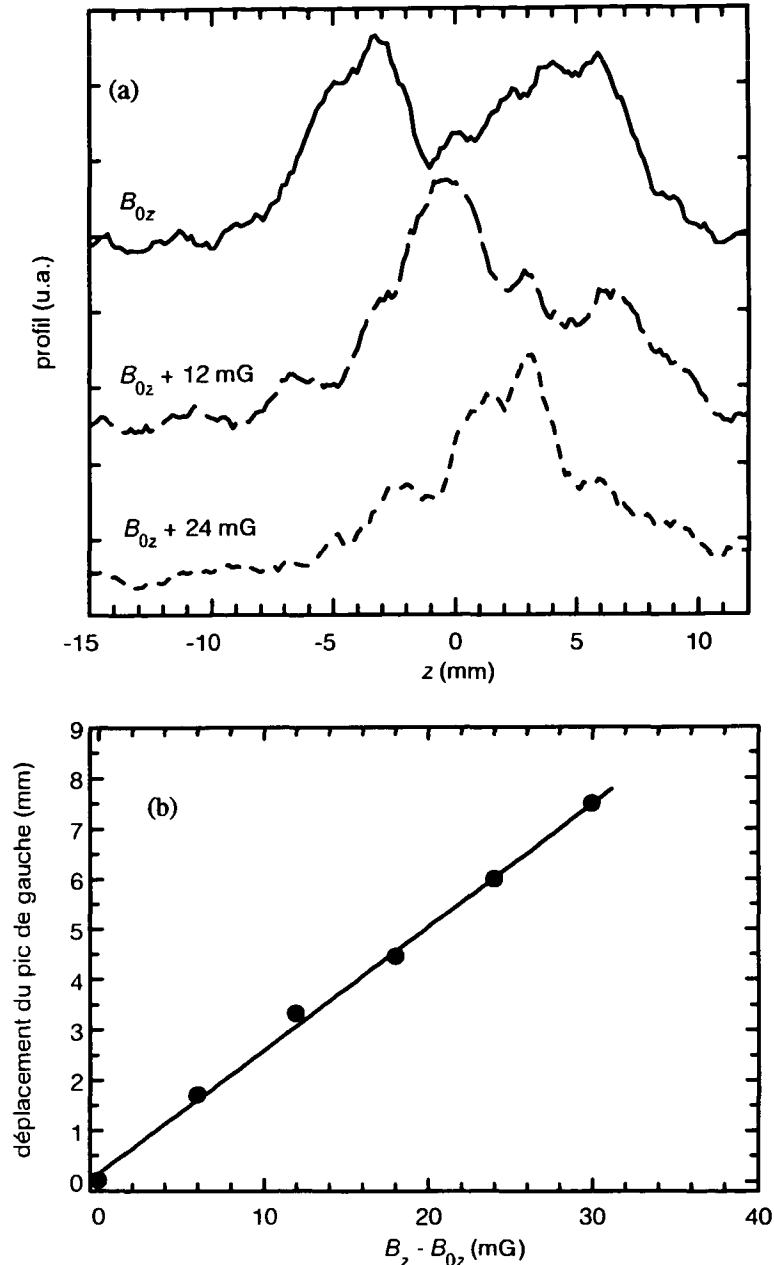


Figure III.19 Influence d'un champ magnétique longitudinal B_z .

On fait varier la composante B_z du champ parallèle à l'axe des lasers, et on trace le profil des bandes obtenues.

(a) *Profils.* Lorsqu'on augmente le champ B_z , le pic de gauche des résonances noires se déplace sans être significativement dégradé, contrairement à ce qui se passait avec le champ magnétique transverse. Le pic de droite disparaît progressivement, car il atteint le bord de la galette de microcanaux (comme la galette est circulaire, certaines lignes intégrées dans le profil sont incomplètes).

(b) *Déplacement du pic de gauche en fonction du champ magnétique appliqué.* La position z_g du pic est déterminée grâce à un ajustement gaussien du profil du pic. Remarquer le comportement linéaire de $z_g(B_z)$, qui correspond à ce que l'on attend : le refroidissement par résonances noires s'effectue dans un référentiel en mouvement uniforme à la vitesse v_B , proportionnelle à B_z .

Les paramètres de cette expérience sont : $\theta = 300 \mu\text{s}$, $\Omega_1 \approx 0,4 \Gamma$, $\delta \approx 0$, $\tau_p = 3,5 \text{ ms}$, $\tau_{p1} = 50 \text{ ms}$, $\Delta\tau_p = 10 \text{ ms}$, nombre d'images intégrées = 80. Le champ B_{0z} est inférieur à 100 mG.

3.2.3 Effet d'un gradient de champ magnétique

Les gradients de champ magnétique sont mal connus à une échelle inférieure au centimètre : les mesures magnétométriques utilisent des sondes de 1,5 cm de long et les mesures par effet Hanle mécanique sur les atomes piégés se font dans un volume certes réduit ($\approx 1 \text{ mm}^3$), mais unique. On pourrait éventuellement mesurer avec une résolution spatiale de 1 mm, le long de l'axe du jet, le champ magnétique résiduel, avec l'effet Hanle mécanique sur le jet atomique (il faudrait utiliser pour cela un faisceau laser suffisamment petit), mais cette mesure n'a pas été faite.

Deux faits expérimentaux indiquent la présence possible d'un gradient de champ magnétique : l'écartement entre les bandes et le non-parallélisme des bandes.

- L'écartement typique ($z_d - z_g$) entre les bandes est inférieur d'environ 10 % à ce que prédit l'équation (III.6) valable en l'absence de gradients de champ magnétique. Un gradient de champ magnétique $\partial B_z / \partial z$, constant spatialement et temporellement, entre la zone d'interaction et la galette produirait une modification Δv de la vitesse de l'état $|f_{+,p} + \hbar k\rangle$ donnée par :

$$m \frac{\Delta v}{\langle \tau_v \rangle} = -g\mu_B \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (\text{III.8})$$

et une variation ($-\Delta v$) pour $|f_{-,p} - \hbar k\rangle$.

L'écart observé, $2\Delta v / (2v_R) \approx 10\%$ correspondrait à un gradient de champ magnétique $|\partial B_z / \partial z| \approx 0,6 \text{ mG} \cdot \text{mm}^{-1}$. Notons que cette valeur est compatible avec le gradient d'environ $1 \text{ mG} \cdot \text{mm}^{-1}$ qui a été mesuré à l'échelle du centimètre par les sondes magnétométriques.

- Ainsi qu'il apparaît sur la figure III.17, les deux bandes ne sont pas parallèles. Leur distance varie de 10 à 15 % entre le haut et le bas de l'image (ci-dessus, pour estimer la distance entre les bandes, on s'est placé arbitrairement en haut des bandes). Ce non-parallélisme des bandes peut s'expliquer par l'existence d'un gradient du gradient de champ magnétique, plus exactement de termes $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)$: $(\partial B_z / \partial z)$ varierait d'environ $1 \text{ mG} \cdot \text{mm}^{-1}$ à l'échelle de la galette.

Remarquons que l'existence de ces gradients de champ pourrait être testée expérimentalement : si on renverse les polarisations des lasers en passant de σ_+ / σ_- à σ_- / σ_+ , les déplacements des bandes observées doivent changer de signe (la bande de gauche, initialement associée à $|f_{-, -\hbar k}\rangle$ sera associée à $|f_{+, -\hbar k}\rangle$ et *vice versa* pour la bande de droite).

Ces gradients de champ magnétique gênent les mesures : ils modifient l'écart entre les bandes. On en tient compte dans l'étude des distributions en position en calibrant la relation position mesurée/impulsion atomique en posant que la distance mesurée entre les sommets des deux pics correspond exactement à $2\hbar k$. Ceci corrige empiriquement l'équation (III.5) qui ne tenait pas compte des gradients de champ

magnétique. De même, pour tenir compte du non-parallélisme des bandes, on intègre les profils en position sur une zone limitée (typiquement 10-20 % de l'image) où ce non-parallélisme a un effet négligeable.

Les gradients de champ magnétique perturbent-ils le processus de refroidissement par résonances noires ? Dans les expériences de ce mémoire, on a utilisé des volumes d'interaction de quelques mm^3 et on a atteint $\delta p_{\theta} \approx p_R/6,3$. Le champ typique dû aux gradients était donc de 1-2 mG, ce qui n'est pas très gênant. Toutefois, l'étude de l'écartement des bandes présentée ici n'est sensible qu'à $(\partial B_z/\partial z)$. On ne peut pas exclure l'existence de composantes $(\partial B_x/\partial x)$ et $(\partial B_y/\partial y)$ différentes du $(\partial B_z/\partial z)$ mesuré. Notons que si on voulait atteindre $\delta p_{\theta} = p_R/10$, avec un volume d'interaction de 1 cm^3 , le champ typique dû aux gradients serait de 3 mG, ce qui perturberait fortement le processus de refroidissement.

3.3 Mesure de température

Ce paragraphe a pour but de relier la distribution en position observée sur la galette de microcanaux à la distribution en vitesse que l'on cherche à mesurer.

3.3.1 Profil brut

Une première indication de la température atteinte est fournie par les profils bruts des images obtenues. La figure III.20 représente un tel profil, tiré de l'image de la figure III.17. Afin de montrer clairement les problèmes qui peuvent apparaître, le profil présenté est un profil typique, et non le meilleur profil obtenu. On remarque que le profil est peu bruité, bien qu'on n'ait intégré qu'une vingtaine de lignes, soit environ un vingtième de l'image, pour éviter les problèmes causés par le non-parallélisme des bandes. Les deux pics ont la même hauteur à 3 % près. On note que le pic de gauche est plus fin que le pic de droite, et légèrement plus haut. Enfin, le flanc gauche du pic de droite présente un "épaulement". Cet épaulement semble venir des inhomogénéités de gain de la galette. D'une expérience à l'autre, ces inhomogénéités évoluent légèrement, ce qui rend difficile leur correction éventuelle. Pour les profils suivants, on a donc choisi une zone d'image où ces inhomogénéités sont négligeables.

Les deux pics ont été ajustés par des gaussiennes. La demi-largeur à $1/\sqrt{e}$, mesurée plutôt sur le flanc "extérieur" des pics (*i.e.* le flanc du pic le moins influencé par la présence de l'autre pic) est de $\delta z_g \approx 1,45 \text{ mm}$ pour le pic de gauche et de $\delta z_d \approx 1,91 \text{ mm}$ pour le pic de droite. La différence entre δz_g et δz_d est significative.

Ces largeurs sont du même ordre de grandeur que la taille du piège et que la tache due à un seul atome. Il va donc falloir déconvoluer les contributions à la forme des pics. Cependant, on peut majorer la dispersion réelle des vitesses atomiques en attribuant toute la largeur du pic à la dispersion en vitesse δv des atomes :

$$\delta v \approx \frac{\delta z}{\langle \tau_v \rangle} \quad (\text{III.9})$$

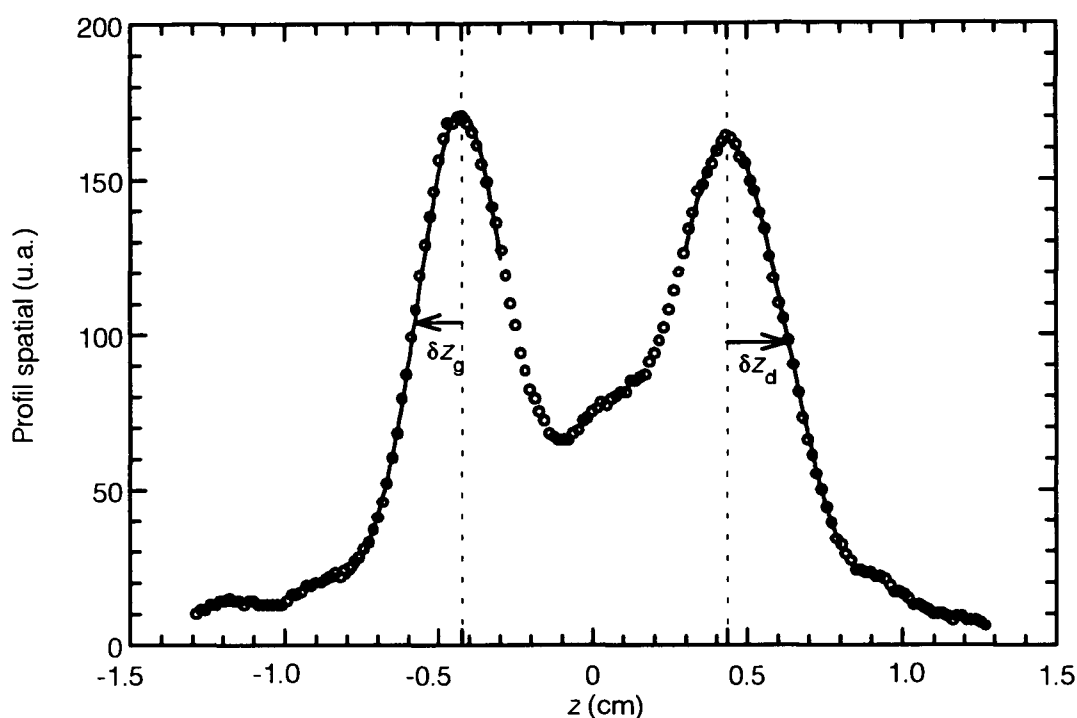


Figure III.20 Profils de densité spatiale sur la galette de microcanaux. L'image utilisée est celle de la figure III.17, pour laquelle $\tau_{o1} = 48$ ms et $\Delta\tau_o = 10$ ms. Le profil est intégré horizontalement sur 20 lignes, c'est-à-dire sur un vingtième de l'image environ. Les cercles sont les points expérimentaux. On a ajusté indépendamment chaque pic avec une fonction qui est la somme d'une gaussienne, représentant le signal, et d'une constante, représentant le bruit de fond. Le pic de gauche a une demi-largeur à $e^{-1/2}$: $\delta z_g \approx 1,45$ mm. Le pic de droite a une demi-largeur à $e^{-1/2}$: $\delta z_d \approx 1,91$ mm. La différence entre δz_g et δz_d est liée à la présence d'un champ magnétique parallèle aux faisceaux lasers qui décale le référentiel dans lequel le refroidissement a lieu. On constate la présence d'une "bosse" vers $z \approx 1-2$ mm, probablement due au gain inhomogène de la galette.

Cette méthode donne $\delta v_g \approx 2,7 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1} \approx v_R/3,5$ pour le pic de gauche et $\delta v_d \approx 3,6 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1} \approx v_R/2,6$ pour le pic de droite.

En conclusion, les profils bruts indiquent des vitesses caractéristiques inférieures à $v_R/2,5$, ce qui est déjà intéressant. Cependant, deux problèmes doivent être examinés en détail : les distributions en *position* des deux bandes n'ont pas la même largeur, alors que les distributions en *vitesse* des deux bandes devraient théoriquement être symétriques. On va s'intéresser à ce problème en examinant le rôle de la fenêtre temporelle d'observation (§ III.3.3.2). Le deuxième problème est la prise en compte des contributions autres que la dispersion en vitesse à la largeur des pics (§ III.3.3.3 et III.3.3.4).

3.3.2 Rôle de la fenêtre temporelle d'exposition de la caméra

La caméra CCD intègre la fluorescence de l'écran de phosphore des galettes entre les dates τ_{v1} et τ_{v2} . Ceci a deux effets. Tout d'abord, la position z du centre de chaque bande va dépendre de la date $\langle \tau_v \rangle$ du centre de la fenêtre d'exposition. En outre, les bandes vont être élargies du fait de la durée finie ($\tau_{v2} - \tau_{v1}$) de l'exposition.

Analysons d'abord les positions z_g et z_d des bandes. S'il existe un champ magnétique B_z longitudinal (cf. III.3.2.2), on s'attend à ce que la bande de gauche corresponde à des atomes de vitesse $v_{zg} = -v_R + v_B \pm \delta v_\theta$, où v_B est la vitesse du référentiel dans lequel se fait le refroidissement et où $\delta v_\theta = \delta p_\theta / M$ est la dispersion des vitesses (de même, on aura $v_{zd} = v_R + v_B \pm \delta v_\theta$). On s'attend donc à ce que les positions des bandes soient données par [7] :

$$z_g = (-v_R + v_B) \langle \tau_v \rangle \quad (\text{III.10.a})$$

$$z_d = (+v_R + v_B) \langle \tau_v \rangle \quad (\text{III.10.b})$$

La figure III.21 montre que la position des pics varie bien linéairement en $\langle \tau_v \rangle$. En outre, l'extrapolation en $\langle \tau_v \rangle = 0$ donne bien $z_g = z_d$. De cette figure, on tire $v_{zg} \approx -4,3 \text{ cm.s}^{-1}$ et $v_{zd} \approx 13,1 \text{ cm.s}^{-1}$. Le référentiel dans lequel a lieu le refroidissement se déplace à la vitesse $v_B \approx +4,9 \text{ cm.s}^{-1}$ par rapport au laboratoire, ce qui correspond à un champ magnétique longitudinal résiduel de 16 mG (cf. § II.4.3.2.3).

Examinons maintenant l'effet de la durée de la fenêtre temporelle sur les largeurs des bandes. Les atomes ayant une vitesse v_z bien définie peuvent arriver à des dates différentes de l'intervalle $[\tau_{v1}, \tau_{v2}]$: leurs positions vont donc se répartir sur l'intervalle $[\tau_{v1}v_z, \tau_{v2}v_z]$. Cette répartition est uniforme si on suppose que la probabilité de détecter un atome à la date τ_v (proportionnelle au signal de temps de vol) dépend peu de τ_v sur l'intervalle $[\tau_{v1}, \tau_{v2}]$. Cette hypothèse est justifiée en pratique, car $(\tau_{v2} - \tau_{v1}) \leq 10 \text{ ms}$ et que les temps de vol typiques varient de moins de 30 % sur une durée de 10 ms.

Mais, nous avons vu que, du fait du champ magnétique longitudinal, les vitesses v_z correspondant aux deux bandes sont différentes. En conséquence, les élargissements des deux bandes sont différents :

$$\delta z_{fg} = (-v_R + v_B)(\tau_{v2} - \tau_{v1}) \quad (\text{III.11.a})$$

$$\delta z_{fd} = (+v_R + v_B)(\tau_{v2} - \tau_{v1}) \quad (\text{III.11.b})$$

[7] On suppose que la probabilité de détecter un atome à la date τ_v dépend peu de τ_v sur la fenêtre $[\tau_{v1}, \tau_{v2}]$.

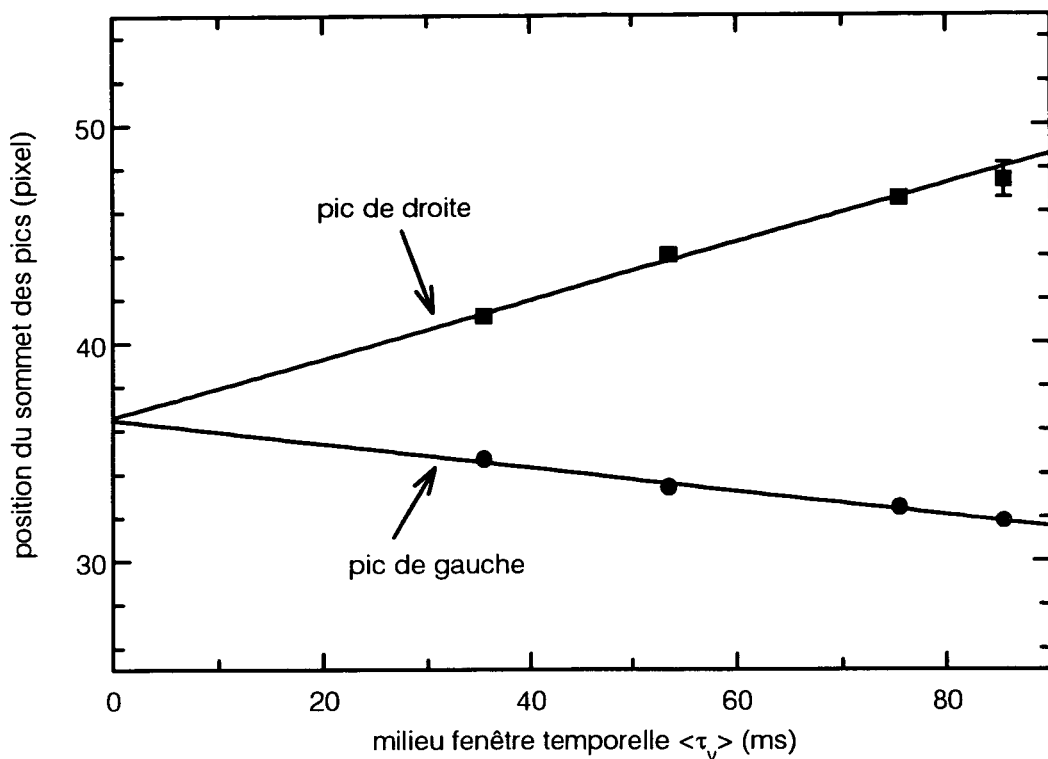


Figure III.21 Position du centre des pics en fonction du temps de vol $\langle \tau_v \rangle$. La position de chacun des pics varie linéairement en fonction du temps de chute moyen $\langle \tau_v \rangle$: elle est simplement égale au produit de la vitesse par le temps de chute (cf. équation III.10). L'interpolation de la position des pics à $\langle \tau_v \rangle = 0$ donne le même résultat pour le pic de gauche et pour le pic de droite (ce qui confirme encore l'équation III.10). Enfin, les deux pics ne se déplacent pas à la même "vitesse" en fonction de $\langle \tau_v \rangle$. Ceci montre que le refroidissement a lieu dans un référentiel en mouvement par rapport au laboratoire, avec une vitesse v_B que cette figure permet de mesurer. On peut relier v_B au champ magnétique le long de l'axe des lasers. Cette vitesse v_B permet en outre de comprendre pourquoi les deux pics ont une largeur légèrement différente.

Pour les valeurs déterminées ci-dessus, on obtient $\delta z_{fg} \approx 0,43$ mm et $\delta z_{fd} \approx 1,3$ mm. Cet effet explique donc très bien la différence de largeur des deux pics [8] : à cause du champ magnétique longitudinal B_z , les vitesses associées aux deux pics sont de modules différents, ce qui entraîne un élargissement différent par la durée finie de l'exploitation de la caméra.

Cette asymétrie des largeurs étant comprise, on va étudier plus précisément la forme des pics, ce qui permettra de remonter à la largeur de la distribution en vitesse.

[8] Quantitativement, si on suppose que l'élargissement δz_f dû à la durée finie de l'exposition qui dépend du pic considéré, et l'élargissement δz_a dû aux autres causes d'élargissement (supposées indépendantes du pic considéré) donnent une largeur totale $(\delta z_t)^2 = (\delta z_f)^2 + (\delta z_a)^2$ (cf. relation de convolution de deux gaussiennes), alors on doit avoir : $(\delta z_t)_g^2 - (\delta z_f)_g^2 = (\delta z_t)_d^2 - (\delta z_f)_d^2$. L'exploitation des profils donne $(\delta z_t)_g^2 - (\delta z_f)_g^2 \approx (1,38)^2$ mm² et $(\delta z_t)_d^2 - (\delta z_f)_d^2 \approx (1,40)^2$ mm², ce qui est en très bon accord.

3.3.3 Forme du profil des bandes

Afin d'étudier le profil des bandes, on intègre l'image sur une zone où les inhomogénéités de gain sont relativement faibles. En outre, on choisit des conditions (durée θ d'interaction, fenêtre $[\tau_{o1}, \tau_{o2}]$ d'exposition) telles que les deux bandes soient bien séparées.

Un tel profil est montré sur la figure III.22 : les pics ont une forme régulière, ils sont bien séparés et les inhomogénéités de gain de la galette n'ont pas d'effet important (comparer cependant le niveau du signal de "fond" qui est différent d'un facteur 2 environ pour $z = -15$ mm et pour $z = +15$ mm). Ces pics ont une forme qui n'est manifestement ni gaussienne, ni lorentzienne, mais qui se rapproche plutôt d'un triangle, ce que nous allons essayer de comprendre.

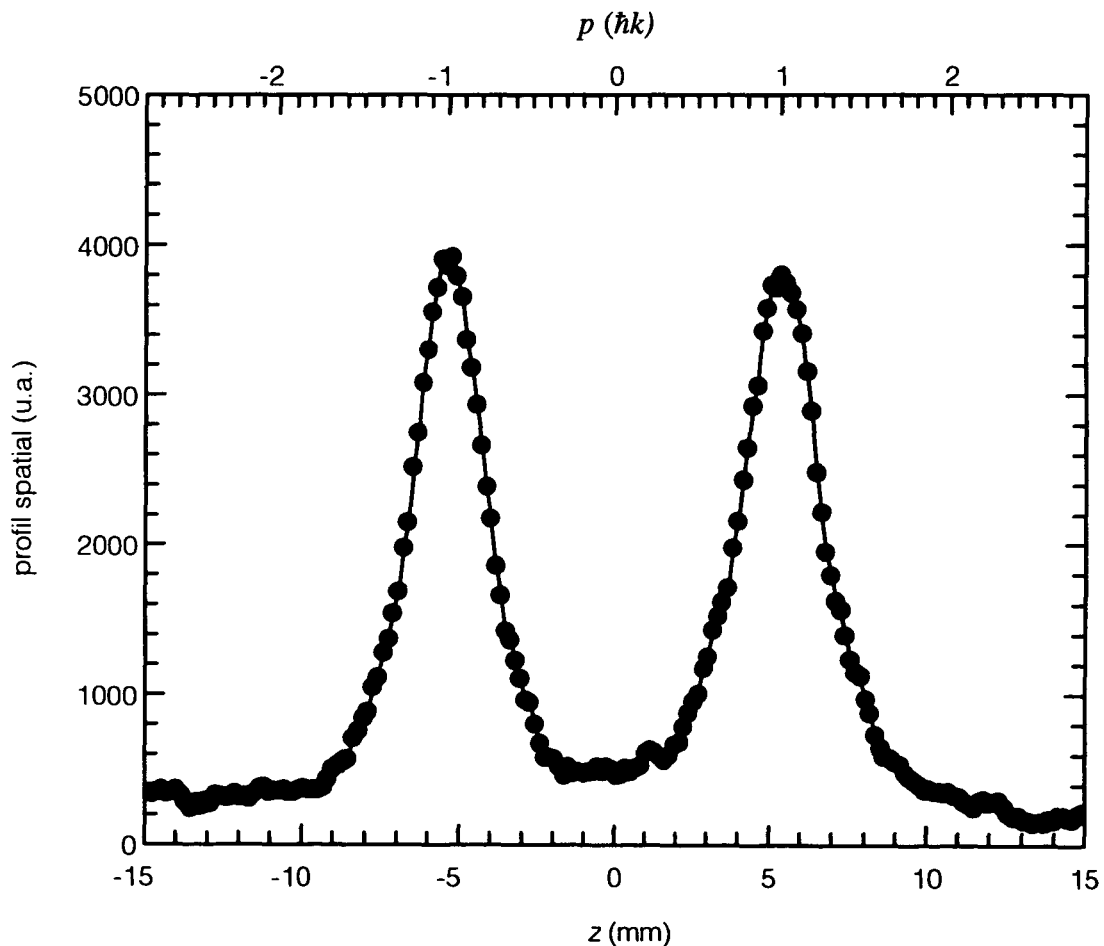


Figure III.22 Analyse d'un profil. Ce profil correspond à l'intégration de 64 lignes CCD (la zone d'intégration représente un rectangle de $30 \times 10 \text{ mm}^2$ sur la galette). On remarque que le fond est faible (aucun fond n'a été soustrait pour obtenir ce profil), mais qu'il n'est pas parfaitement constant (il est deux fois plus important à gauche des pics qu'à droite). Le signal est suffisamment peu bruité pour permettre un ajustement précis de la forme des pics. Il apparaît "à l'oeil" que ces pics ne sont ni gaussiens, ni lorentziens, mais ont un caractère triangulaire. Les paramètres de cette expérience sont : $\theta_p = 3,5 \text{ ms}$, $\theta = 300 \mu\text{s}$, $\Omega_1 < 3,5 \Gamma$, $\delta = 0 \Gamma$, $\tau_{o1} = 53 \text{ ms}$, $\Delta\tau_o = 5 \text{ ms}$.

Quelles sont les différentes contributions à la forme des bandes ?

- La première contribution est la distribution $\pi(v_z)$ des vitesses que l'on cherche à mesurer. Théoriquement, la distribution $\pi(v_z)$ est proche d'une lorentzienne (on montrera au chapitre V que les ailes de $\pi(v_z)$ décroissent en $1/v_z^2$) qui donne une distribution en position lorentzienne de largeur δz_L sur le détecteur : c'est ce paramètre δz_L que l'on cherche à mesurer.

Remarque : convention sur les largeurs des lorentziennes.

On convient de donner pour tous les profils $f(z)$ la demi-largeur δz à $1/e^{1/2}$ de la valeur maximale, par référence aux gaussiennes. Pour la distribution lorentzienne des atomes refroidis par résonances noires, on introduit également la demi-largeur "naturelle" des lorentziennes, notée δz_L , avec :

$$f(z) = \frac{\alpha_L}{1 + (z/\delta z_L)^2} \quad (\text{III.12})$$

La "demi-largeur lorentzienne" δz_L est liée à la demi-largeur à $1/e^{1/2}$ d'une lorentzienne, notée δz_0 , par :

$$\delta z_0 = \sqrt{\sqrt{e} - 1} \delta z_L \approx 0,805 \delta z_L \quad (\text{III.13})$$

Finalement, la demi-largeur δv_0 (à $1/\sqrt{e}$) de la distribution en vitesse est reliée à δz_L par :

$$\delta v_0 = \delta z_0 / \langle \tau_v \rangle = \sqrt{\sqrt{e} - 1} \delta z_L / \langle \tau_v \rangle \quad (\text{III.14})$$

- La deuxième contribution vient de la taille finie des taches lumineuses associées à chaque atome. Ces taches lumineuses ont un profil sensiblement gaussien dont la demi-largeur à $1/e^{1/2}$, δz_{tache} , a été mesurée précisément (cf. § II.4.4.3).

$$\delta z_{\text{tache}} \approx 530 \mu \quad (\text{III.15})$$

- La troisième contribution est la taille finie de la source, constituée des atomes piégés, qui ont éventuellement subi une phase de mélasse optique. La distribution en position des atomes a été mesurée en régime de piégeage à forte intensité : elle est gaussienne, comme on s'y attend théoriquement ; le diamètre du piège varie fortement avec le désaccord des lasers, comme δ^2 (les rayons de piège typiques sont de 300 μ à 1 mm). Mais, dans la phase de refroidissement du piège, l'intensité des faisceaux est trop faible pour qu'on puisse imager le piège et mesurer ainsi sa taille (le diamètre du piège peut augmenter aussi bien que diminuer dans cette phase par rapport à la phase de grande intensité). Cependant, les modèles simples de la dynamique du piège (oscillateur harmonique suramorti soumis à des fluctuations) prédisent que le piège doit rester gaussien. Cette phase de refroidissement est suivie d'une phase de mélasse à trois dimensions, pendant laquelle les atomes diffusent en position. Enfin, les atomes continuent à diffuser pendant la phase de résonances noires. La distribution spatiale du nuage d'atomes à la fin de la phase de refroidissement n'est pas connue expérimentalement. Les atomes n'ayant subi que des processus de diffusion, il est vraisemblable que leur distribution en position, le long de l'axe z des lasers est une gaussienne de largeur δz_P ("P" pour piège) inconnue.

• La quatrième, et dernière, contribution connue à la forme des bandes est la durée finie de la fenêtre d'intégration discutée ci-dessus (cf. § III.3.3.2). Pour une vitesse v_z donnée, la distribution en position résultante est une fonction porte, dont la demi-largeur, qui dépend de v_z vaut typiquement de 0,5 mm à 1,5 mm, pour une fenêtre de durée $\tau_{v1} - \tau_{v2} = 10$ ms. Comme les atomes ont une distribution en vitesse $\pi(v_z)$, on doit sommer des fonctions porte de poids et de largeurs différentes pour obtenir la distribution en position issue de la fenêtre d'exposition.

Le profil des bandes résulte donc de la convolution de quatre contributions, dont une est *a priori* lorentzienne, dont deux sont *a priori* gaussiennes et dont la dernière n'est pas connue précisément. En outre, ces quatre distributions ont des largeurs voisines. Ce problème de déconvolution est complexe à traiter rigoureusement. Pour le simplifier expérimentalement, on a choisi de réduire la fenêtre d'exposition de la caméra à $\tau_{v1} - \tau_{v2} = 5$ ms, et de s'intéresser à la bande de gauche seulement, issue des atomes dont le module de la vitesse est le plus faible. Ainsi, la durée finie de la fenêtre d'exposition correspond à une largeur $\delta z_{fg} \approx 0,14$ mm pour le pic de gauche et 0,18 mm pour le pic de droite : ces largeurs ont donc une contribution négligeable à la largeur totale du profil. Ceci permet d'éliminer la contribution due à la fenêtre d'exposition.

Après cette simplification, on s'attend donc à ce que le profil résulte de la convolution d'une lorentzienne et de deux gaussiennes. La déconvolution peut maintenant être faite simplement et rigoureusement comme le produit de convolution de deux gaussiennes est une gaussienne, le profil total doit être la convolution d'une lorentzienne et d'une gaussienne, c'est-à-dire un profil de Voigt, que nous définissons ci-dessous.

On considère une distribution lorentzienne $\pi_L(z)$, centrée en z_0 , de largeur δz_L , que l'on convolue par une gaussienne $\pi_G(z)$, de largeur δz_G :

$$\pi_L(z) = \frac{\alpha_L}{1 + \left(\frac{z - z_0}{\delta z_L} \right)^2} \quad (\text{III.16.a})$$

$$\pi_G(z) = \alpha_G \exp\left(-\frac{z^2}{2(\delta z_G)^2} \right) \quad (\text{III.16.b})$$

où α_L et α_G sont des coefficients de normalisation. Le produit de convolution $P_V(z)$ de ces deux distributions s'écrit :

$$P_V(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_L(z') \pi_G(z - z') dz' \quad (\text{III.17})$$

ce qui se met sous la forme habituelle d'un profil de Voigt (voir *e.g.* [Mih78] , [Jef68]) :

[Mih78] D. Mihalas, *Stellar Atmospheres, Second Edition*, § 9-2, Freeman (San Francisco, 1978).

[Jef68] J.T. Jefferies, *Spectral Line Formation*, § 4.6, Blaisdell Publishing Company (1968).

$$P_V(z) = H(a, v) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{(v-y)^2 + a^2} \quad (\text{III.18})$$

où v est la position centrée, normalisée par la largeur gaussienne, et où a est liée au rapport de la largeur gaussienne sur la largeur lorentzienne.

$$v = \frac{z - z_0}{\sqrt{2}\delta z_G} \quad (\text{III.19.a})$$

$$a = \delta z_L / (\sqrt{2}\delta z_G) \quad (\text{III.19.b})$$

La demi-largeur lorentzienne δz_L est reliée à δv_0 par l'équation III.14.

Dans les applications spectroscopiques habituelles du profil de Voigt, on a $a < 1$ (largeur naturelle $<$ largeur Doppler), ce qui permet d'approximer analytiquement le profil de Voigt. Dans notre cas, on s'attend à $a \approx 1$ (largeur cinématique \approx largeur de la source), et on a donc utilisé la forme complète de l'équation (III.18).

On constate sur la figure III.23 qu'effectivement, le profil de Voigt s'ajuste bien mieux à la forme "triangulaire" de la distribution observée qu'une lorentzienne ou qu'une gaussienne. Les ailes du pic observé sont plus larges que celles d'une gaussienne pure, et moins larges que celles d'une lorentzienne pure. En revanche, aucun écart systématique n'est constaté par rapport au profil de Voigt. Les ajustements ont été faits avec deux paramètres (largeur, hauteur) pour la lorentzienne et pour la gaussienne, et avec trois paramètres pour le profil de Voigt (largeur de lorentzienne, largeur de gaussienne, hauteur). La ligne de base, dont le choix est important, a été prise légèrement en dessous du signal à grand z . En effet, le signal à grand z correspond non seulement à un bruit de fond du détecteur, mais aussi à des atomes non refroidis, non pris en compte dans la distribution $\pi(v_z)$: il est donc normal que la ligne de base du pic soit légèrement en dessous du signal à grand z . On a vérifié que le choix d'autres lignes de base n'améliorait pas significativement les ajustements lorentziens et gaussiens, mais dégradait l'ajustement par le profil de Voigt.

Le fait que les profils de Voigt décrivent bien les données expérimentales est un résultat relativement important. Tout d'abord, cela va permettre une déconvolution précise des profils (§ III.3.3.4). Ensuite, et c'est tout aussi important, cela confirme que la distribution en vitesse a une forme lorentzienne au voisinage de $p = 0$. Ceci était une prédiction théorique importante qui n'avait pas été testée jusqu'ici (voir le chapitre V, § V.5 ; voir aussi [Kai90], p. 268).

[Kai90] R. Kaiser, *Manipulation par laser d'hélium métastable : effet Hanle mécanique, refroidissement sous le recul d'un photon*, Thèse de l'Université Paris VI (1990).

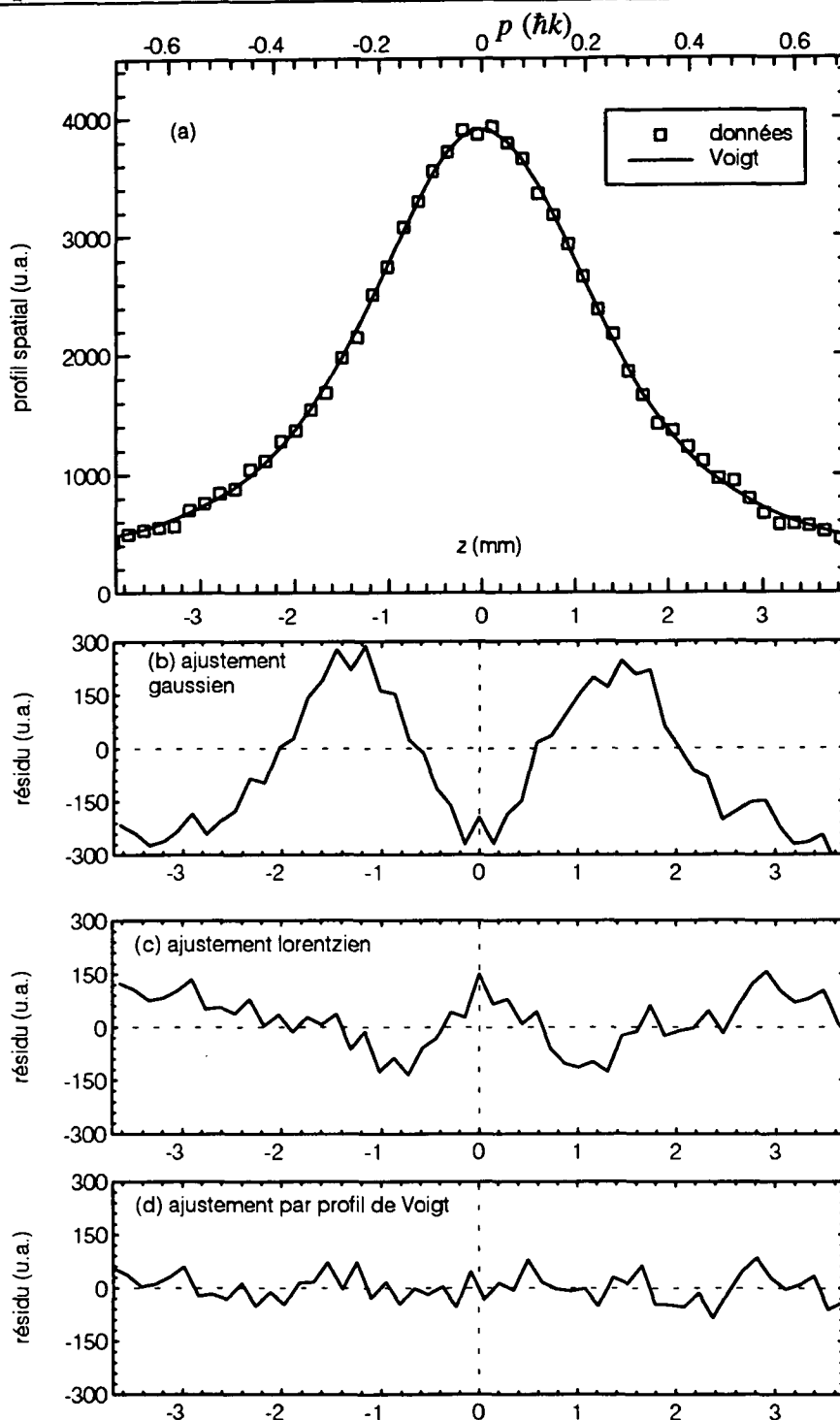


Figure III.23 Ajustement des profils des distributions en position.

(a) Profil du pic de gauche de la figure III.22 par un profil de Voigt. Il n'y a aucune déviation systématique entre le profil expérimental et le profil de Voigt.

(b) Résidus des ajustements pour différentes formes de fonctions d'essai. Les résidus correspondent à la courbe [(ajustement) - (points expérimentaux)]. Les lorentziennes et les gaussiennes donnent des fortes déviations systématiques qui sont de signes opposés : la gaussienne décroît trop vite (résidu négatif à grand $|z|$), alors que la lorentzienne décroît trop lentement (résidu positif à grand $|z|$). La lorentzienne donne un meilleur ajustement que la gaussienne (résidus 2 à 3 fois plus faibles). Avec un profil de Voigt (convolution d'une gaussienne et d'une lorentzienne), les résidus ne montrent aucune déviation systématique.

3.3.4 Déconvolution du profil des bandes

Nous allons déconvoluer les profils obtenus par trois différentes méthodes. Ceci permettra tout d'abord de déterminer précisément la température atteinte. D'autre part, la comparaison des résultats donnés par chaque méthode permettra de s'assurer de la validité de ces méthodes.

• Mesure par déconvolution d'un profil à $\langle \tau_v \rangle$ donné

L'objectif est d'extraire des profils la contribution cinématique δz_L liée à la distribution en vitesse dont nous voulons connaître la largeur. La procédure d'ajustement du profil expérimental à un profil de Voigt (cf. figure III.23) permet d'extraire la largeur δz_L de la lorentzienne sous-jacente. L'ajustement donne $\delta z_L \approx 1,04$ mm, d'où $\delta z_\theta = 0,84$ mm (cf. équation (III.13)) et $\delta v_\theta \approx v_R/6,1 \approx 1,51$ cm.s⁻¹ (car $\langle \tau_v \rangle = 55$ ms et l'espacement entre les deux bandes ($2v_R$) est de 10,64 mm).

On constate que la demi-largeur après déconvolution δz_θ n'est inférieure que de 0,3 mm (≈ 30 %) à la demi-largeur brute du profil, estimée à $1/\sqrt{e}$ sans déconvolution. Ceci signifie que la largeur du profil est principalement [9] due à l'effet cinématique (distribution des vitesses, contribution lorentzienne), et minoritairement à la taille du nuage atomique initial et à la taille des taches lumineuses sur l'écran de phosphore (contributions gaussiennes) : on vérifie d'ailleurs que l'ajustement donne $\delta z_G \approx 0,61$ mm $< \delta z_L$. Notons que dans l'ajustement par le profil de Voigt, l'incertitude sur la position de la ligne de base se traduit par une incertitude de 20 % sur δz_L , d'où une incertitude de 20 % sur la largeur en vitesse δv_θ .

• Mesure par déconvolution des profils correspondant à différents temps de vol

Pour conforter cette analyse, on étudie des profils pris pour différents temps de chute. En maintenant la durée d'exposition ($\tau_{v2} - \tau_{v1}$) constante, et en variant $\langle \tau_v \rangle = (\tau_{v1} + \tau_{v2})/2$, la demi-largeur δz_L due à la dispersion des vitesses doit croître linéairement avec $\langle \tau_v \rangle$ (cf. équation III.14), alors que la largeur gaussienne δz_G due à la taille du piège (et des taches lumineuses) doit rester constante. La figure (III.24) donne l'évolution de δz_L avec $\delta \tau_v$. Les points expérimentaux sont compatibles avec l'équation (III.14) et on obtient $\delta v_\theta \approx v_R/6,3 \approx 1,46$ cm.s⁻¹. Cette valeur est en bon accord avec la mesure effectuée avec le seul profil à $\langle \tau_v \rangle = 55,5$ ms, qui donnait $\delta v_\theta \approx v_R/6,1$. La largeur gaussienne δz_G issue de l'ajustement varie de 40 % quand on passe de $\langle \tau_v \rangle = 55$ ms ($\delta z_G \approx 0,61$ mm) à $\langle \tau_v \rangle = 75,5$ ms ($\delta z_G \approx 0,42$ mm) alors qu'elle devrait rester constante. Mais ces variations n'excèdent pas les fluctuations constatées sur δz_G entre deux profils obtenus à même $\langle \tau_v \rangle$ et sont donc comprises dans le bruit.

[9] Ceci est qualitativement confirmé par les résidus des ajustements (figure III.23). Avec le même nombre de paramètres, on trouve qu'une lorentzienne (figure III.23.c) s'ajuste bien mieux au profil expérimental qu'une gaussienne (figure III.23.b). Le profil expérimental est donc plutôt lorentzien que gaussien, mais la contribution gaussienne n'est pas complètement négligeable, comme le montre la comparaison entre l'ajustement lorentzien (figure III.23.c) et l'ajustement par le profil de Voigt (figure III.23.d).

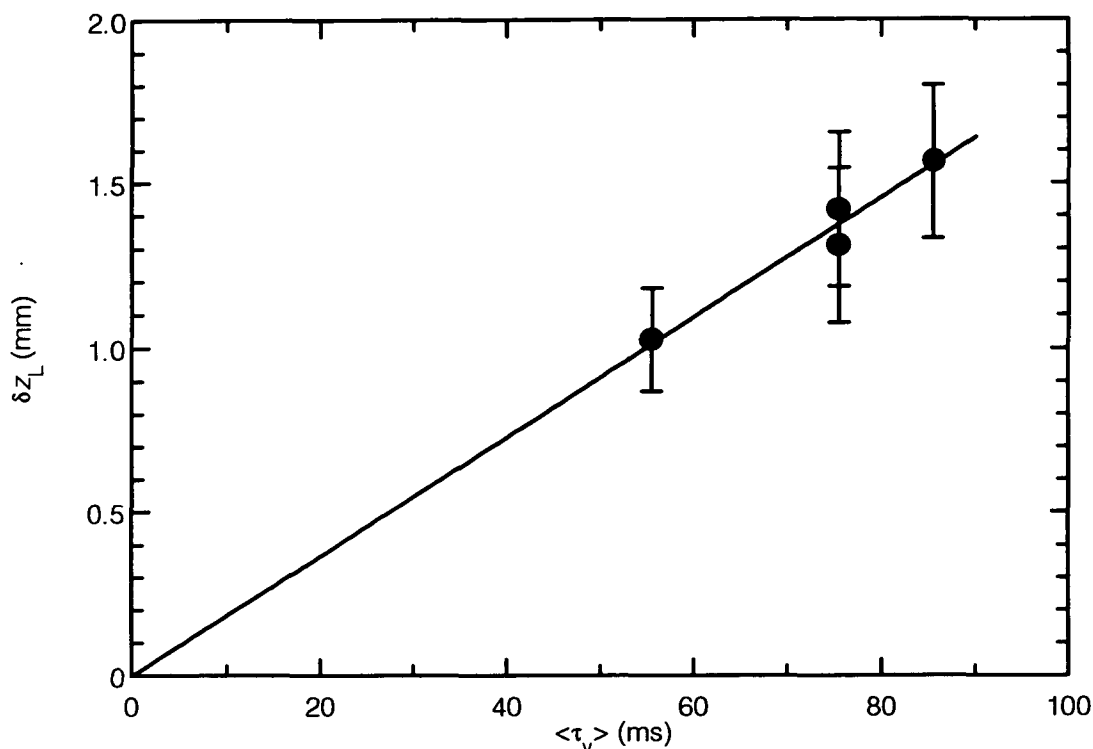


Figure III.24 Contribution lorentzienne δz_L au profil des bandes. L'ajustement des profils pour différentes valeurs de $\langle \tau_v \rangle$ fournit différentes valeurs de δz_L . Si la contribution lorentzienne δz_L est interprétée comme un terme cinématique (dispersion des vitesses), alors δz_L doit être proportionnel à $\langle \tau_v \rangle$. Effectivement, l'ajustement des données par une fonction linéaire $y = ax$ est compatible avec une relation de proportionnalité entre δz_L et $\langle \tau_v \rangle$, ce qui confirme notre interprétation. La pente a permet de trouver $\delta v_\theta \approx 1,46 \text{ cm.s}^{-1} \approx v_R/6,3$ après avoir tenu compte de l'équation (III.14) ($\delta z_\theta \approx 0,805 \delta z_L$).

• Mesure par les demi-largeurs totales des profils

Le processus de déconvolution par le profil de Voigt est relativement complexe et on pourrait douter de sa fiabilité pour les profils à $\langle \tau_v \rangle \geq 70$ ms qui sont bruités et pour lesquels le bruit de fond atteint 25 % du signal. Aussi, on a également appliqué une procédure plus simple de dépouillement des profils : on relève "à la main", sans faire usage d'aucune procédure d'ajustement, la demi-largeur totale "brute" δz_t à $1/e^{1/2}$ du profil. Dans le domaine de paramètres explorés ($a \geq 1$, cf. équation (III.19.b)), nous avons vérifié numériquement pour une fonction de Voigt que δz_t dépend de la demi-largeur δz_L de la lorentzienne sous-jacente comme :

$$(\delta z_t)^2 \approx p(\delta z_L)^2 + q \quad (\text{III.20})$$

Dans notre cas, δz_L est proportionnel à $\langle \tau_v \rangle$ (cf. équation III.14). On doit donc avoir :

$$(\delta z_t)^2 \approx p'(\tau_v)^2 + q \quad (\text{III.21.a})$$

et

$$\delta v_\theta = p'^{1/2} \quad (\text{III.21.b})$$

On a tracé $(\delta z_t)^2$ en fonction de $\langle \tau_v \rangle^2$ sur la figure III.25 : on constate que $(\delta z_t)^2$ est bien une fonction affine de $\langle \tau_v \rangle^2$, comme le prédit l'équation III.21. De la pente de cette courbe, on déduit $\delta v_\theta \approx 1,46 \text{ cm.s}^{-1} \approx v_R/6,3$, soit $T \approx T_R/40$. Cette valeur coïncide avec celle obtenue par ajustement des profils à la fonction de Voigt. On a également représenté les droites correspondant $T = T_R/30$ et $T_R/70$ qui donnent un encadrement de la température possible.

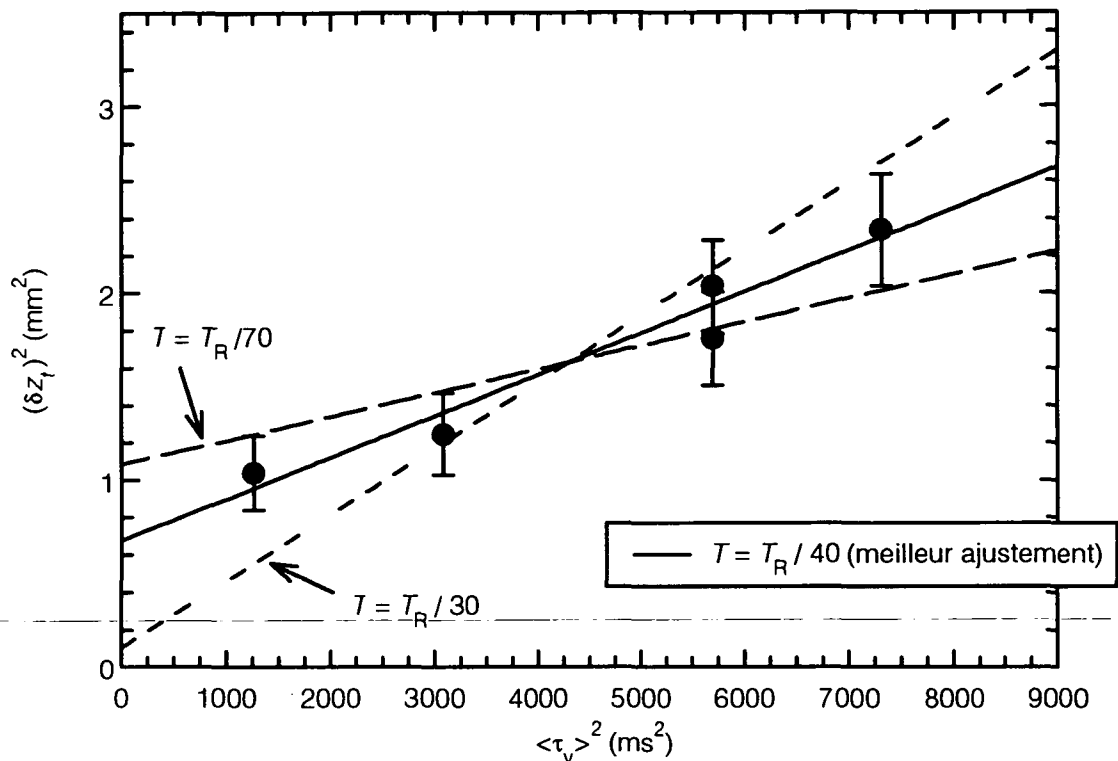


Figure III.25 Demi-largeur δz_t des profils en fonction du temps de chute $\langle \tau_v \rangle$. Les demi-largeurs δz_t sont relevées à $1/e^{1/2}$ du pic de gauche (le moins élargi par la fenêtre d'exposition $[\tau_{v1}, \tau_{v2}]$), sans effectuer de déconvolution du pic : ce sont les demi-largeurs "totales". Selon notre modèle de profils, $(\delta z_t)^2$ doit être une fonction affine ($y = ax + b$) de $\langle \tau_v \rangle^2$. L'ajustement des données par une droite donne $\delta v_\theta \approx v_R/6,3$. On a représenté en pointillé des droites correspondant à des températures différentes, ce qui donne une idée de l'intervalle de température autorisé par l'incertitude des données.

Notons qu'on peut obtenir une majoration de la température atteinte en n'effectuant aucune déconvolution, c'est-à-dire en attribuant la totalité de la largeur du profil à la dispersion des vitesses. En utilisant le profil à $\langle \tau_v \rangle = 75 \text{ ms}$, on obtient $\delta v_\theta < 1,96 \text{ cm.s}^{-1} \approx v_R/4,7$, soit $T < T_R/22$.

• Conclusion des ajustements

En conclusion, nous avons utilisé trois méthodes différentes pour étudier les profils en position observés sur la galette de microcanaux : ajustement par un profil de Voigt pour un temps de chute $\langle \tau_v \rangle$ donné, étude de la largeur lorentzienne δz_L en fonction de $\langle \tau_v \rangle$, et étude de la largeur brute δz_i en fonction de $\langle \tau_v \rangle$. Ces différentes méthodes de déconvolution des profils sont compatibles avec un profil de Voigt, issu de la convolution d'une lorentzienne pour la distribution en vitesse, et d'une gaussienne pour la distribution des positions initiales et des taches dues à un seul atome. Ces méthodes donnent la même valeur [10] pour la dispersion des vitesses

$$\delta v_\theta \approx 1,46 \text{ cm.s}^{-1} \approx v_R/6,3, \text{ soit } T \approx T/40 \approx 100 \text{ nK} \quad (\text{III.22})$$

En tenant compte de l'incertitude des mesures, on obtient

$$v_R/8,4 \leq \delta v_\theta < v_R/5,5, \text{ soit } T_R/70 \leq T < T_R/30 \quad (\text{III.23})$$

Si on n'effectue aucune déconvolution et qu'on attribue la totalité de la largeur des profils à la dispersion des vitesses, on obtient

$$\delta v_\theta > 1,96 \text{ cm.s}^{-1}, \text{ soit } T > T_R/22. \quad (\text{III.24})$$

3.4 Evolution en fonction du temps d'interaction

Les profils obtenus pour différentes durées d'interaction sont représentés sur la figure III.26. L'expérience est conçue pour atteindre des durées d'interaction de 15 ms, mais dans les expériences préliminaires présentées ici, seul le domaine $\theta \leq 300 \mu\text{s} = 3\,000 \Gamma^{-1}$ a été exploré. L'évolution du processus de refroidissement est très nette : les bandes s'affinent et leur hauteur augmente.

La vitesse caractéristique atteinte, $\delta v_{\theta, \text{exp}}$ (figure III.27.a), a été obtenue par une simple mesure de la demi-largeur δz_i des bandes à $e^{-1/2}$, d'où on a déduit $\delta v_{\theta, \text{exp}}$, à partir de l'équation III.21, le paramètre q ayant été mesuré précédemment. On constate que $\delta v_{\theta, \text{exp}}$ diminue de $0,40 \hbar k$ à $0,20 \hbar k$ quand θ passe de $250 \Gamma^{-1}$ à $3\,000 \Gamma^{-1}$. Cependant, cette diminution est plus lente que $\theta^{-1/2}$, c'est-à-dire plus lente que la prédiction théorique. Ceci peut avoir de nombreuses causes, comme l'existence de processus dissipatifs ou, plus simplement, l'incertitude des mesures : au paragraphe III.3.3.4, pour chaque valeur θ , on disposait de profils pris pour des temps de chute $\langle \tau_v \rangle$ différents, ce qui permettait une déconvolution fiable ; ici, on ne dispose que d'un seul profil par valeur de θ , ce qui interdit des vérifications croisées du processus de déconvolution. Noter à ce sujet que le point obtenu à $\theta = 3000 \Gamma^{-1}$ est significativement éloigné de celui discuté au paragraphe III.3.3.4, alors que les paramètres expérimentaux étaient voisins (les figures III.24 et III.25 sont issues de données prises une heure plus tard que les figures III.26 et III.27, heure pendant laquelle certains paramètres, comme l'intensité lumineuse, ont pu dériver).

[10] Ces données sont compatibles avec $\Omega_1 \approx \Gamma$. La puissance du laser ayant fortement varié au cours de la même journée, l'intensité laser n'est pas connue précisément pour les courbes décrites ici : on sait seulement que $\Omega_1 < 3,5\Gamma$.

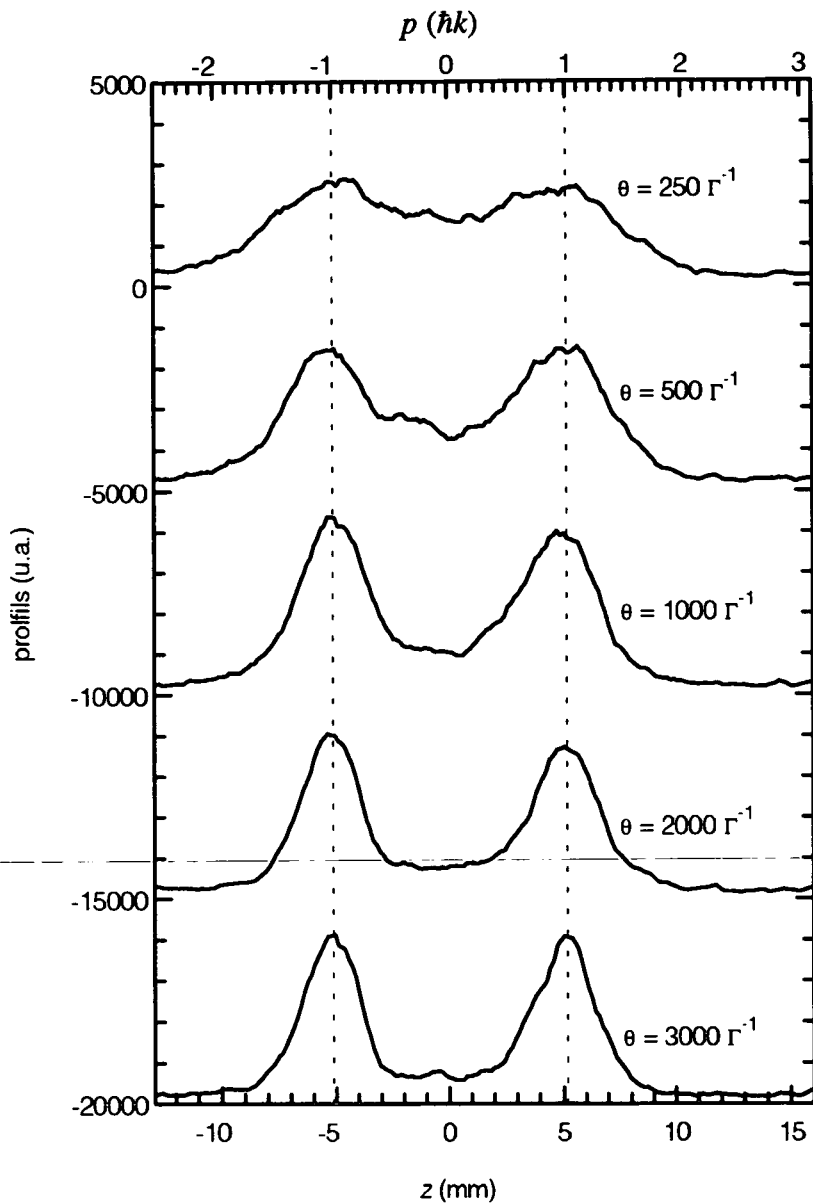


Figure III.26 Evolution en fonction de la durée θ d'interaction. Pour les différents profils, seule la durée d'interaction varie. Les profils sont tracés à la même échelle verticale et horizontale, décalés verticalement de 5000 u.a. les uns par rapport aux autres. Lorsque la durée d'interaction augmente, on observe un affinement très net des pics et un accroissement de leur hauteur. Remarquer la forme très "triangulaire" prise par les pics pour $\theta = 3000 \Gamma^{-1}$. Les paramètres de cette expérience sont : $\theta_p = 3,0$ ms, $\Omega_1 \leq 3,5 \Gamma$, $\delta = 0 \Gamma$, $\tau_{v1} = 53$ ms, $\Delta\tau_v = 5$ ms, 160 images par profil.

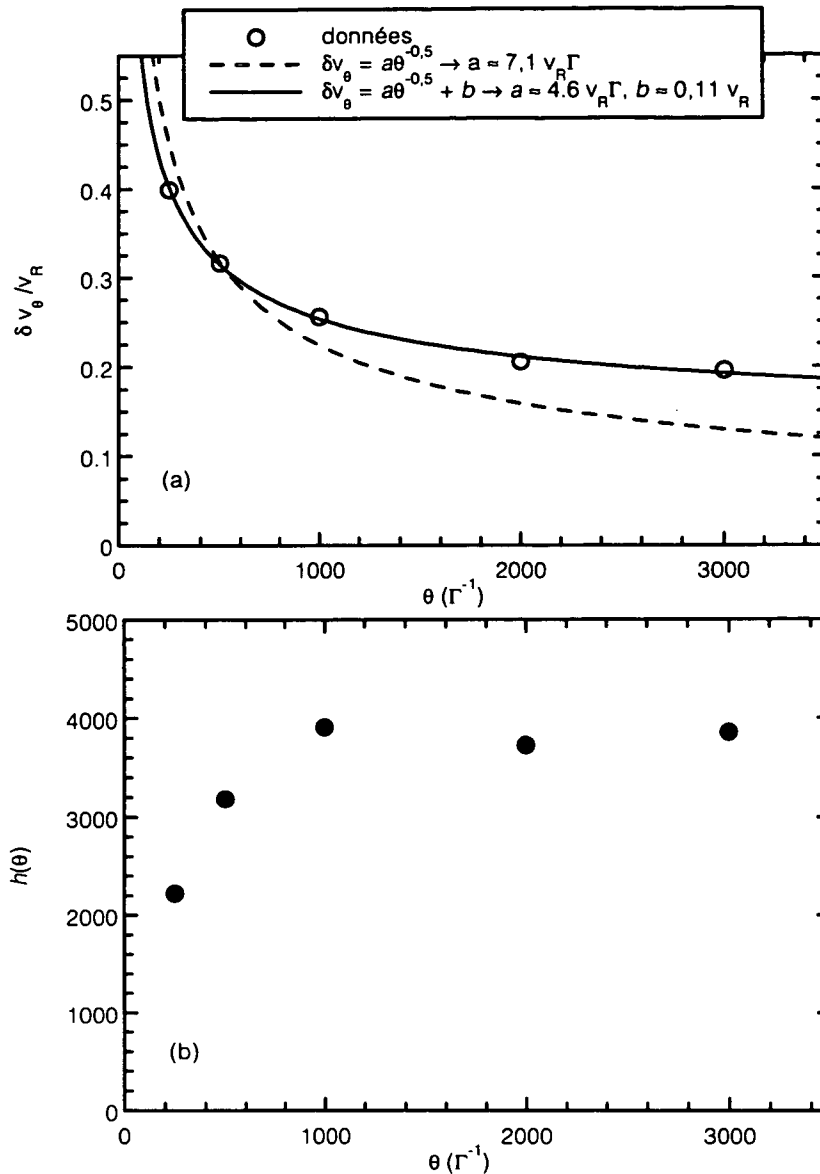


Figure III.27 *Largeur et hauteur des pics en fonction de la durée θ d'interaction.* Ces figures permettent d'analyser quantitativement les profils de la figure précédente (III.26).

(a) *Evolution de la largeur des pics.* La largeur des pics δz_i est convertie en largeur en vitesse δv_θ en se basant sur les résultats de la figure III.25, qui permettent de déconvoluer les différentes contributions. On note une nette diminution (facteur 2) de δv_θ quand θ passe de $250 \Gamma^{-1}$ à $3\,000 \Gamma^{-1}$. Toutefois, les ajustements montrent que cette diminution n'est pas aussi rapide que $\theta^{-1/2}$, qui est la prédiction théorique en l'absence de phénomènes parasites. Les points expérimentaux sont compatibles avec l'existence d'une limite pour δv_θ , que nous testons phénoménologiquement par l'ajustement $\delta v_\theta = a\theta^{-1/2} + b$. Cette limite serait $b \approx 0,11 v_R$ et pourrait être due à des champs magnétiques ou à de la fluorescence parasite.

(b) *Evolution de la hauteur $h(\theta)$ des pics.* La hauteur $h(\theta)$ croît d'un facteur 2 environ quand on passe de $250 \Gamma^{-1}$ à $1\,000 \Gamma^{-1}$, puis cesse d'augmenter pour $\theta \geq 1\,000 \Gamma^{-1}$. En théorie, on a $h(\theta) \propto \theta^{1/2}$, si on ne tient pas compte du fait que la galette ne détecte qu'une proportion finie des atomes. Or, cette proportion d'atomes détectés par la galette dépend de θ . Si on prend en compte cette dépendance, on peut comprendre pourquoi $h(\theta)$ sature quand $\theta \rightarrow \infty$. Une autre explication possible de cette saturation de $h(\theta)$ est l'existence de dissipation parasite (champs magnétiques imparfaitement compensés, fluorescence parasite...).

La hauteur des pics $h(\theta)$ (figure III.27.b) croît nettement de $\theta = 250 \Gamma^{-1}$ à $\theta = 1000 \Gamma^{-1}$, puis reste constante de $\theta = 1000$ à $\theta = 3000 \Gamma^{-1}$. Cette "saturation" de la hauteur des pics ne doit pas être interprétée hâtivement comme un désaccord avec la théorie de [AAK89] (ou du chapitre V de ce mémoire), qui prédit un accroissement en $\theta^{1/2}$ de la densité de probabilité en $p = \pm \hbar k$. En effet, la galette ne reçoit qu'une petite proportion des atomes refroidis, qui diminue avec la dispersion δv_x des vitesses le long de l'axe horizontal x , perpendiculaire à l'axe des lasers : pour $\langle \tau_v \rangle = 55$ ms, les atomes de vitesse $v_x \geq 3v_R$ tombent à côté de la galette. Or, pendant la phase de résonances noires, en même temps qu'on "refroidit" l'axe z des lasers, ce qui a tendance à accroître la hauteur des pics, on "réchauffe" les axes x et y du fait des émissions spontanées.

Estimons rapidement l'effet du chauffage en x et y sur la hauteur $h(\theta)$ des pics. Avant d'appliquer le faisceau laser de résonances noires, on a typiquement $(\delta v_x)_i \approx 5v_R$ ($= \delta v_y = \delta v_z$). Les simulations Monte-Carlo quantiques (cf. chapitre IV) montrent que, pour $\theta = 3000 \Gamma^{-1}$ et sur une large plage de puissance laser ($\Omega_1 \approx 0,5 - 5 \Gamma$), le nombre moyen de photons spontanés émis par atome est de l'ordre de 100 (il varie entre 90 et 130 selon Ω_1). On calcule alors qu'à la fin de l'interaction, on a $(\delta v_x)_f \approx 7,5v_R$: la proportion d'atomes détectés par la galette, si on ne tient pas compte de la distribution des vitesses selon z , est réduite de $((\delta v_x)_f - (\delta v_x)_i) / (\delta v_x)_i \approx 50\%$ à cause du chauffage sur l'axe x . Ceci peut suffire à expliquer la saturation de la hauteur des pics. Nous décrirons à la fin du chapitre V d'autres causes possibles de limitation de la hauteur des pics (§ V.6).

4 Expériences à deux dimensions

4.1 Efficacité du remplissage et forces de friction

En passant de 1 à 2 dimensions, on cherche à accumuler les atomes dans un volume de l'espace des impulsions proportionnellement plus petit, par rapport au volume dans lequel les atomes peuvent diffuser : supposons que les atomes aient une impulsion maximale p_{\max} et qu'on cherche à les accumuler dans un domaine défini par $|p| < \delta p_\theta$. Le volume du domaine recherché représente une proportion π du volume dans lequel les atomes évoluent :

$$\pi = \left(\frac{\delta p_\theta}{p_{\max}} \right)^D \quad (\text{III.25})$$

où D est le nombre de dimensions. Ainsi, en passant de 1 à 2 dimensions, π diminue d'un facteur $p_{\max}/\delta p_\theta$, qui est important puisque $p_{\max} > p_R > \delta p_\theta$. On s'attend donc à une diminution importante de la proportion d'atomes refroidis.

Heureusement, un deuxième élément vient agir en sens inverse. A 1 dimension, dans la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$, il n'existe pas de force de friction, et les atomes peuvent prendre des impulsions p_{\max} arbitrairement grandes. Toutefois, cette absence de friction à une dimension résulte de conditions de symétrie très particulières (cf. § I.2.1.2). Par

conséquent, à 2 dimensions, pour la plupart des configurations lasers, on s'attend à l'existence de forces de friction de type Sisyphe [DaC89], qui peuvent confiner les impulsions atomiques, de manière à réduire p_{\max} , et donc à accroître π . Nous allons discuter de l'optimisation de ces forces de friction de manière qualitative.

En plus d'une friction de type Sisyphe, il existe *a priori* aussi des forces de refroidissement Doppler. Or, sur une transition $J_f = 1 \leftrightarrow J_e = 1$, les forces Sisyphe et les forces Doppler ont un effet opposé [Emi93], [EKG93] : si le désaccord δ est négatif, l'effet Doppler tend à produire un effet de refroidissement, alors que l'effet Sisyphe tend à produire un effet de chauffage (figure III.28.a) ; si $\delta > 0$, l'inverse se produit (figure III.28.b). En raison des plages de capture différentes pour l'effet Doppler et pour l'effet Sisyphe, la force $F(v)$ exercée par les lasers sur les atomes ne produit pas une diminution de $|v|$ pour toutes les vitesses (figure III.28).

On veut maximiser l'accumulation des atomes dans les états $p \approx 0$ et, pour cela, optimiser les forces de friction. L'accumulation des atomes à $p \approx 0$ suppose que $F(v)$ n'est pas expulsante autour de $p = 0$. Or, à $p \approx 0$, $F(v)$ est généralement dominée par les forces de type Sisyphe, dont la plage de capture est plus faible que celle des forces Doppler, mais dont l'amplitude à $p \approx 0$ est plus grande. Pour pouvoir accumuler les atomes à $p \approx 0$, il est donc nécessaire que l'effet Sisyphe produise un refroidissement, c'est-à-dire que $\delta > 0$.

Par ailleurs, avec $\delta > 0$, les forces de type Doppler auront un effet expulsant, que l'on veut réduire au minimum. Pour cela, on cherche à accroître l'intensité et la plage de capture des forces de type Sisyphe, sans accroître l'intensité des forces Doppler. Une telle situation s'obtient à grande intensité ($\Omega_1 > \Gamma$) et à grand désaccord ($\delta > \Omega_1$). On peut alors espérer réaliser un profil de force $F(v)$ ayant l'allure de la figure III.28.c : sur un large domaine d'impulsion, les forces de type Sisyphe dominent et contribuent au confinement des impulsions atomiques ; les forces de type Doppler, expulsantes, ne sont pas totalement éliminées, mais elles agissent pour des impulsions très grandes, si rarement atteintes par les atomes refroidis par effet Sisyphe, que leur effet est négligeable.

En conclusion, on prédit que pour faciliter le remplissage des états noirs à $p \approx 0$, à deux dimensions, il faut se placer à grand désaccord positif et à grande intensité pour favoriser les forces de type Sisyphe (qui refroidissent au voisinage de $p = 0$) et défavoriser les forces de type Doppler, qui en l'occurrence réchauffent pour p grand).

[DaC89] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models*, J. Opt. Soc. Am. B 6, p. 2023-2045 (1989).

[Emi93] O. Emile, *Manipulation d'hélium métastable par laser : effet Sisyphe magnétique*, Thèse de l'Université Paris VI (1993).

[EKG93] O. Emile, R. Kaiser, C. Gerz, H. Wallis, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Magnetically assisted Sisyphus effect*, J. Phys. II France 3, p. 1709-1733 (1993).

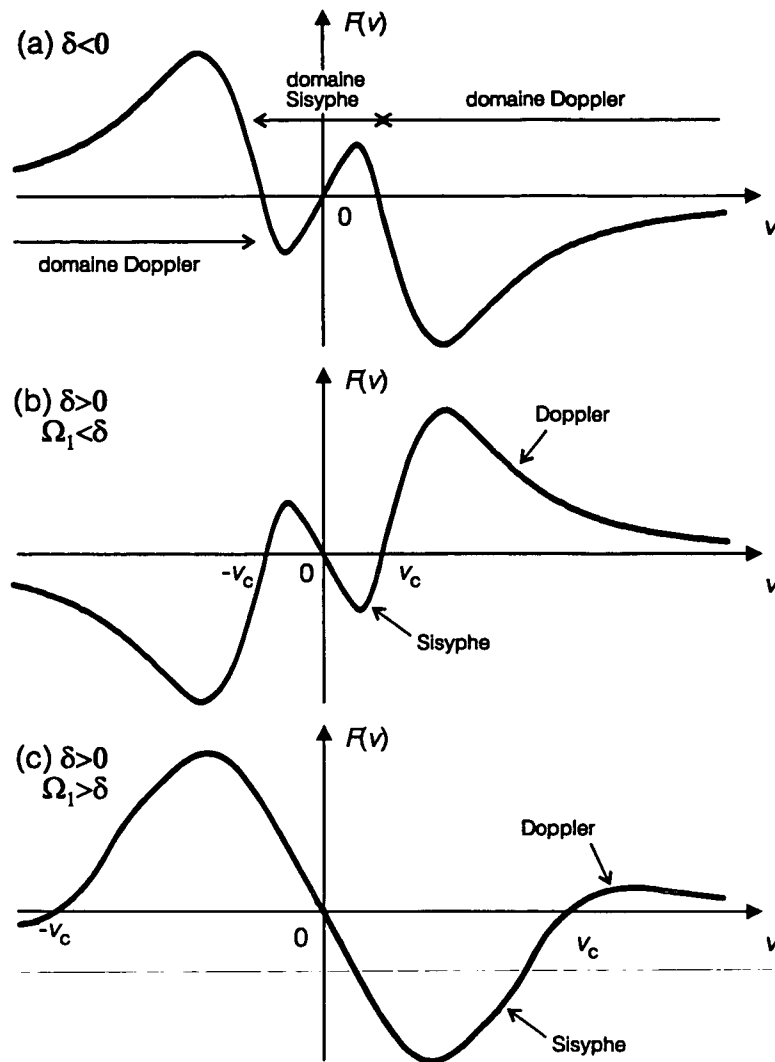


Figure III.28 Forces exercées par les lasers sur les atomes, en fonction de la vitesse atomique v , pour une transition $J_f = 1 \leftrightarrow J_e = 1$. Ces schémas reposent sur des considérations qualitatives.

(a) **Désaccord $\delta < 0$.** Les forces de type Doppler ont tendance à diminuer $|v|$, alors que les forces de type Sisyphes ont tendance à augmenter $|v|$. Comme la plage de capture des forces de type Sisyphes est généralement plus petite que la plage de capture des forces de type Doppler, l'effet Sisyphes domine pour $p \approx 0$. Ceci empêche les atomes d'atteindre les états $|\psi_{\text{NC}}(p \approx 0)\rangle$: cette situation n'est pas favorable au refroidissement par résonances noires.

(b) **Désaccord $\delta > 0$.** Les forces de type Sisyphes ont tendance à diminuer $|v|$, alors que les forces de type Doppler ont tendance à augmenter $|v|$. Autour de $p \approx 0$, on réalise un effet de refroidissement, ce qui est favorable à l'accumulation dans les états $|\psi_{\text{NC}}(p \approx 0)\rangle$, lors du refroidissement par résonances noires. Toutefois, les atomes d'impulsion p telle que $|v| > v_c$, où v_c ("vitesse de capture") est une vitesse critique définie par $F(v_c \neq 0) = 0$, sont soumis à des forces d'expulsion et sont définitivement perdus pour le refroidissement par résonances noires.

(c) **Désaccord $\delta > 0$ et $\Omega_1 > \delta$.** Dans ce régime, on accroît la vitesse de capture v_c et l'intensité des forces de type Sisyphes. Ce faisant, le domaine des forces Doppler ($|v| > v_c$) est repoussé vers des impulsions plus grandes, rarement atteintes par les atomes. Ces paramètres (δ , Ω_1) devraient favoriser le refroidissement par résonances noires puisque la force exercée par les lasers sur les atomes tend presque toujours à diminuer $|v|$.

4.2 Expérience avec des faisceaux à 30°.

Pour des raisons d'encombrement géométrique, la première expérience de résonances noires à deux dimensions a été réalisée avec des faisceaux à 30° l'un de l'autre, et non à 90° comme cela est naturel. Les polarisations étaient linéaires pour les 4 faisceaux (figure III.29.a) : chaque "bras" de faisceaux étant constitué d'un faisceau aller polarisé linéairement selon la perpendiculaire au plan de refroidissement et d'un faisceau retour polarisé linéairement dans le plan de refroidissement. Les faisceaux se trouvent dans un plan horizontal.

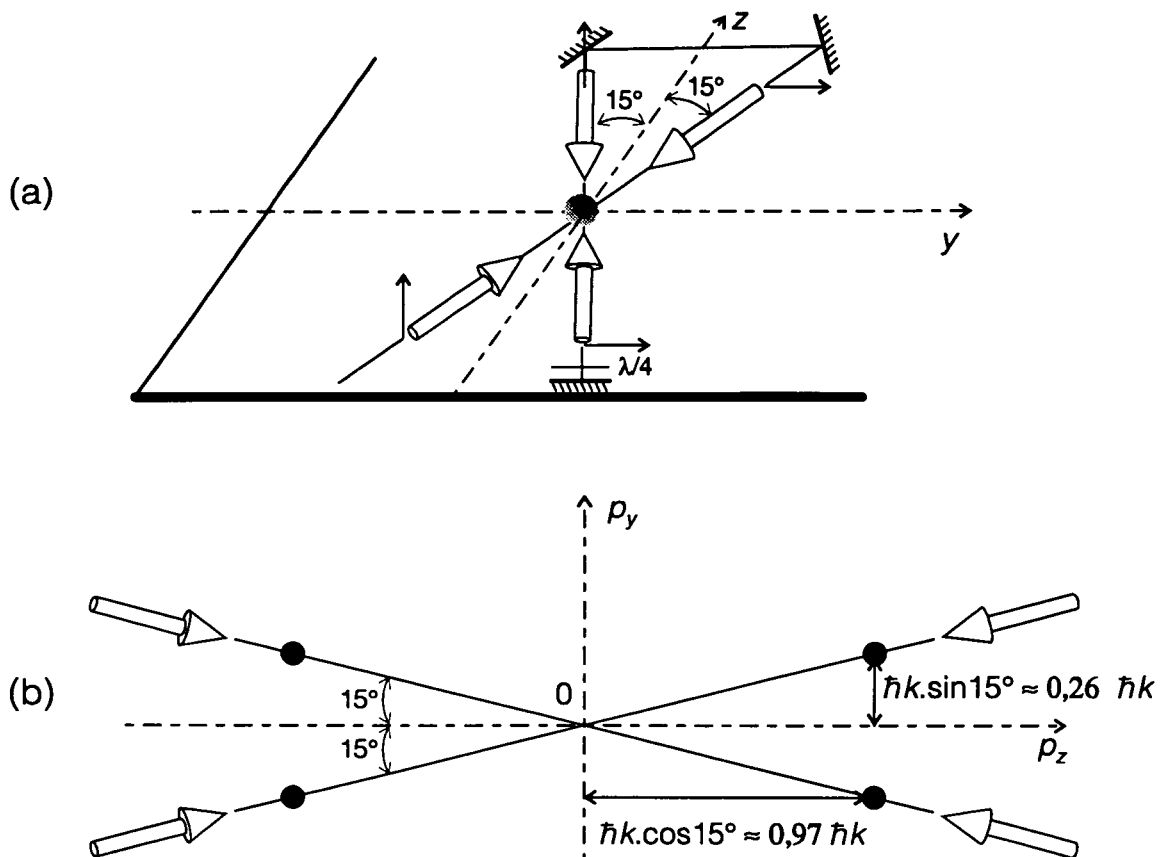


Figure III.29 Schéma de résonances noires à dimensions avec des faisceaux à 30°.

(a) Polarisation des 4 faisceaux. Tous les faisceaux sont polarisés linéairement et leurs polarisations sont perpendiculaires deux à deux. Le plan contenant les faisceaux est horizontal.

(b) Etat noir $|\psi_{NC}(p \approx 0)\rangle$. Cet état est une superposition de 4 états d'impulsion. Remarquer que la distance entre les pics est de $\approx 2\hbar k$ selon p_z alors qu'elle n'est que de $\approx 0,5\hbar k$ selon p_y .

D'après l'argument de [OIM92], on sait que dans cette configuration laser il existe un état noir sélectif en vitesse (cf. § I.4.2). Cet état est une superposition linéaire de 4 impulsions correspondant aux impulsions associées aux photons des 4 ondes lasers (figure III.29.b). On s'attend donc à observer quatre taches sur la galette, si toutefois la température atteinte est suffisamment basse pour résoudre ces taches (la distance entre les taches n'est que de $\approx 0,5\hbar k$ selon l'axe y).

Une distribution atomique typiquement observée sur la galette de microcanaux est représentée sur la figure III.30. On voit apparaître une tache centrale, qui possède une structure constituée essentiellement de deux bandes parallèles à l'axe y . Les 4 pics attendus sortent légèrement du bruit. On constate un nombre d'atomes élevé entre les deux bandes (nous ne savons pas pourquoi). Cette distribution a été réalisée avec une durée d'interaction $\theta = 700 \mu\text{s}$, avec $\Omega_1 \approx 3 \Gamma$, $\delta \approx +2\pm 1 \Gamma$ et en accumulant 80 images. Ces paramètres sont compatibles avec les conditions favorables pour l'accumulation dans les états noirs, dégagées au paragraphe III.4.1.

La comparaison avec une image obtenue dans une configuration à une dimension (figure III.17) montre très clairement que la configuration avec les 4 faisceaux à 30° produit un refroidissement bidimensionnel. Les profils verticaux et horizontaux de l'image (figure III.31) donnent $\delta v_{\theta,z} \leq 2,8 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1} \approx v_R/3,2$ et $\delta v_{\theta,y} \leq 5 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1} \approx v_R/2$. Pour obtenir ces valeurs, on a mesuré la demi-largeur à $1/e^{1/2}$ sur le profil spatial, à l'extérieur des pics et en choisissant le côté du pic le plus étroit, la demi-largeur en position est convertie en impulsion par la relation III.9, sans effectuer aucune déconvolution. Cette configuration fait donc apparaître des structures très nettement sub-recul, même si les valeurs mesurées d'une grande incertitude (facteur 2 ?).

L'angle entre les faisceaux est de seulement 30° , ce qui introduit une forte asymétrie entre z et y . Un calcul du taux de sortie pour cette configuration laser est présenté dans l'annexe D. Ce calcul prédit une anisotropie entre $\delta v_{\theta,z}$ et $\delta v_{\theta,y}$ compatible avec celle mesurée.

Bien que l'on ait atteint un régime nettement sub-recul, ces signaux sont relativement difficiles à interpréter : en plus des pics prévus, on observe des oscillations dont l'origine n'est pas encore bien comprise [11]. Quelle que soit la cause physique de ces structures, leur complexité incite à étudier une situation plus symétrique, avec des faisceaux à 90° .

[OIM92] M. Ol'shanii and V.G. Minogin, *Three-dimensional velocity-selective coherent population trapping of a (3+3)-level atom*, Opt. Comm. **89**, p. 393-398 (1992).

[11] La comparaison de profils obtenus pour différents temps de vol $\langle \tau_p \rangle$ montre que la période spatiale de ces oscillations croît avec $\langle \tau_p \rangle$. Ainsi, ces oscillations pourraient être réellement présentes dans la distribution en vitesse. Leur périodicité correspond approximativement à une impulsion $\hbar k$ le long des axes des lasers. Ces oscillations pourraient être reliées aux états "quasi-noirs" qui apparaissent dans les résonances noires en l'absence de familles fermées. Voir l'étude numérique à une dimension en polarisation linéaire/linéaire à 45° dans [MDT94] : P. Marte, R. Dum, R. Taïeb, P. Zoller, M.S. Shahriar, and M. Prentiss, *Polarization-gradient-assisted subrecoil cooling : Quantum calculations in one dimension*, Phys. Rev. A **49**, p. 4826-4836 (1994).

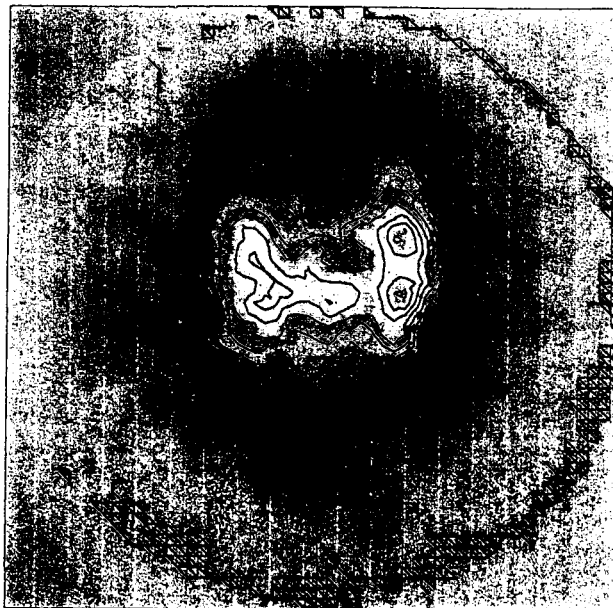
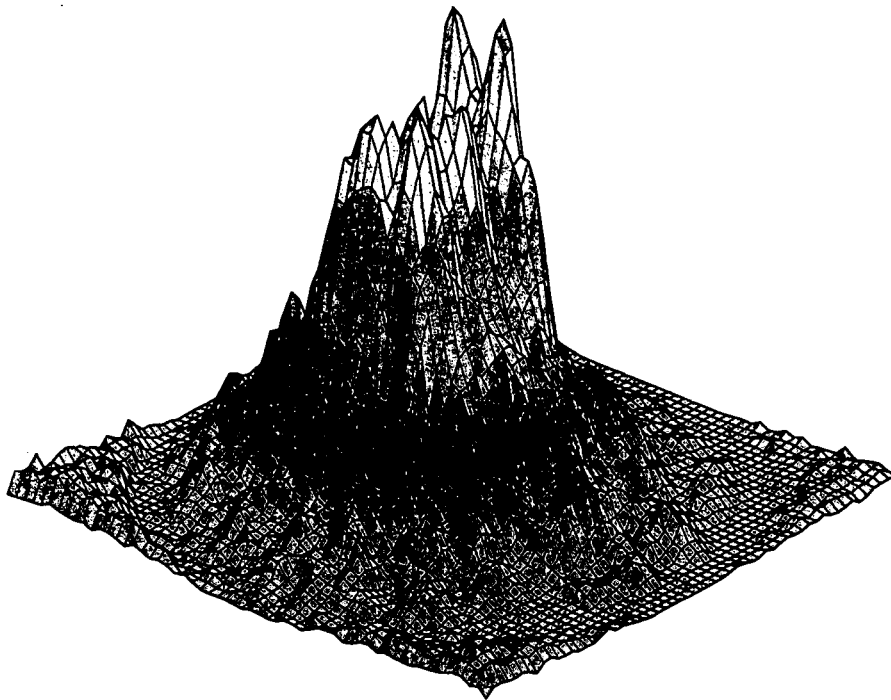


Figure III.30 Résonances noires avec des faisceaux à 30° . La structure de la distribution en position est constituée d'un "amas" dont émergent légèrement les 4 pics attendus. Cette structure est difficile à interpréter. Les profils de la figure suivante montrent que les distributions associées aux pics sont nettement sub-recul sur les deux dimensions. Cependant, on ne peut pas négliger l'existence, en plus des 4 pics, d'une modulation de la distribution en vitesse. Cet effet non prévu peut être intéressant et mérite plus d'attention. Les paramètres de cette expérience sont : $\theta = 700 \mu\text{s}$, $\Omega_1 \approx 3,5 \Gamma$, $\delta \approx +2 \Gamma$, $\tau_p = 3,5 \text{ ms}$, $\tau_{v1} = 46 \text{ ms}$, $\Delta\tau_v = 10 \text{ ms}$, nombre d'images intégrées = 80.

(haut) Représentation 3D.

(bas) Représentation 2D et courbes de niveau.

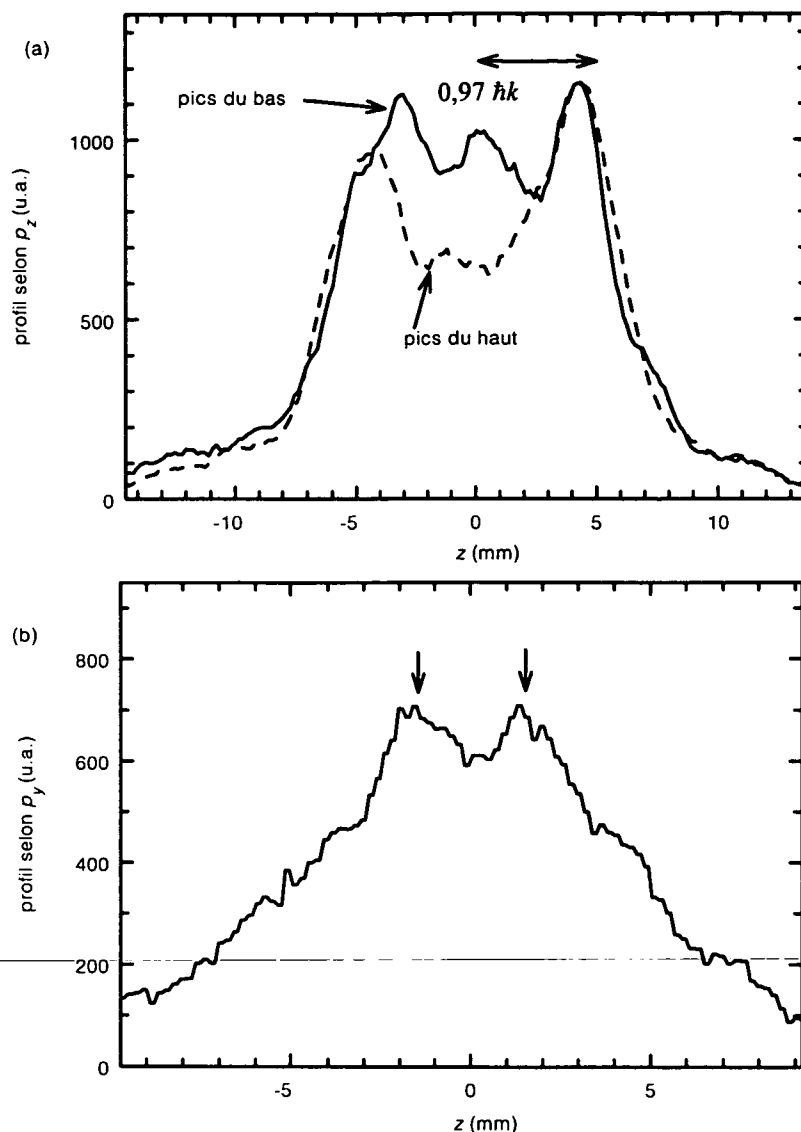


Figure III.31 Profil des résonances noires 2D avec des faisceaux à 30° .

(a) **Profils selon p_z .** Ces profils sont réalisés en intégrant 35 lignes sur une image semblable à la figure III.30, pour laquelle $\langle \tau_v \rangle = 51$ ms. Un profil correspond à une section du haut de l'image, l'autre profil correspond à une section du bas de l'image. On voit apparaître des pics approximativement aux positions attendues, mais également une structure entre les quatre pics attendus. La séparation entre les pics principaux est plus petite (25 %) que la séparation attendue, correspondant à $2 \times 0,97 \hbar k$ (voir la flèche indiquant $0,97 \hbar k$). Les structures les plus fines sont nettement sub-recul : le pic de droite a une demi-largeur correspondant à $\delta v_\theta \approx 2,8 \text{ cm.s}^{-1} \approx v_R/3,2$ (sans effectuer aucune déconvolution).

(b) **Profils selon p_y .** Le profil à $\langle \tau_v \rangle = 51$ ms correspond à une section verticale (22 colonnes) du pic de droite de la figure III.30. Les structures observées sont nettement sub-recul, mais il est difficile de déterminer précisément les largeurs des pics en raison de la complexité des profils (où positionner le fond ?). Sans aucune déconvolution, on obtient $\delta v_\theta \approx 5 \text{ cm.s}^{-1} \approx v_R/2$. Noter que les profils selon p_z et selon p_y comportent de légères oscillations.

4.3 Expérience avec des faisceaux à 90 °

Avec des faisceaux à 90°, les 4 pics apparaissent maintenant sans ambiguïté (figure III.32). Le profil des pics (figure III.33) donne une demi-largeur brute à $1/e^{1/2}$ correspondant à :

$$\delta v_0 \leq 2,0 \text{ cm.s}^{-1} \approx v_R/4,5, \text{ soit } T \leq T_R/20 \approx 200 \text{ nK} \quad (\text{III.26})$$

Pour être moins sensible à l'élargissement dû à la durée finie de la fenêtre d'observation, on a tracé le profil d'un pic sur l'axe z en effectuant une coupe parallèlement à l'axe y . La comparaison avec un profil effectué sans faisceaux de résonances noires montre que les résonances noires ont permis d'accroître d'un facteur 3 la densité de probabilité au niveau des pics. Avec certains paramètres, on obtient un accroissement d'un facteur 10 de l'intensité des pics, mais ceci se fait au détriment de la température [LBS94]

La dépendance en fonction du désaccord des lasers est très nette. La distribution de la figure III.32 a été obtenue avec $\delta \approx +0,5 \Gamma$ ($\Omega \approx 0,8 \Gamma$), ce qui correspond aux conditions favorisant le refroidissement Sisyphe (cf. § III.4.1). Si on choisit $\delta < 0$ (effet de chauffage dû à l'effet Sisyphe et de refroidissement dû à l'effet Doppler), aucune structure n'apparaît, et le nombre d'atomes détectés est plus faible en présence de faisceaux lasers de résonances noires qu'en présence de faisceaux lasers, ce qui est significatif d'un effet de chauffage. Le rôle crucial de l'effet Sisyphe, que nous avons prédit au § III.4.1 est donc confirmé.

[LBS94] J. Lawall, F. Bardou, B. Saubaméa, K. Shimizu, M. Leduc, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Two-dimensional Sub-recoil Laser Cooling*, Phys. Rev. Lett. **73**, p. 1915-1918 (1994).

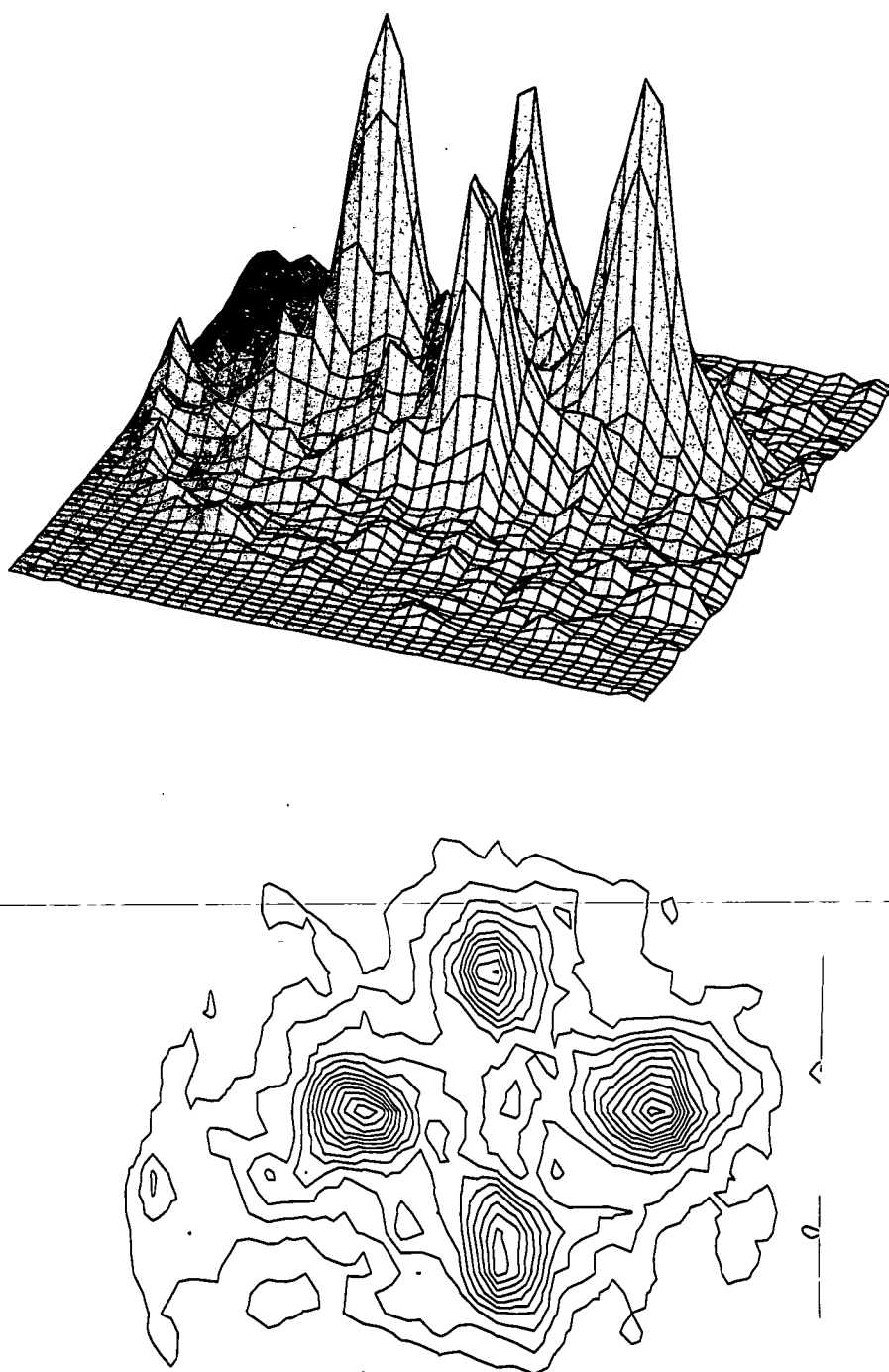


Figure III.32 *Résonances noires avec des faisceaux à 90°*. Les quatre pics apparaissent de manière extrêmement nette. Les paramètres de cette expérience sont : $\theta = 500 \mu\text{s}$, $\Omega_1 \approx 0,8 \Gamma$, $\delta \approx +0,5 \Gamma$, $\tau_p = 3,5 \text{ ms}$, $\tau_{v1} = 45 \text{ ms}$, $\Delta\tau_v = 20 \text{ ms}$.
(haut) Représentation 3D.
(bas) Représentation en courbes de niveau.

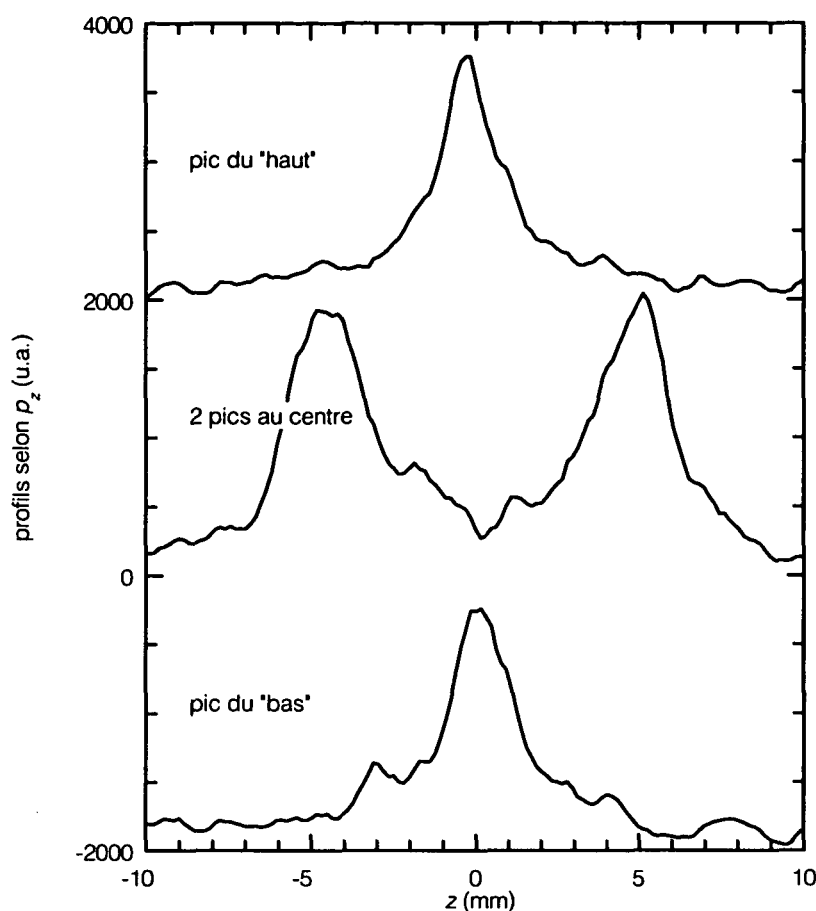


Figure III.33 Profil des résonances noires 2D avec des faisceaux à 90 °. On intègre l'image horizontalement, c'est-à-dire selon p_z , sur des bandes de 21 lignes de largeur, centrées sur le pic du "haut", sur les deux pics au centre et sur le pic du "bas". Les pics ont une structure beaucoup moins complexe qu'avec les faisceaux à 30 ° (à cause du bruit relativement important, on ne cependant pas exclure l'existence de structures en plus des pics principaux). Les deux pics au centre sont plus larges que le pic du haut ou que le pic du bas : pour les pics du centre, l'élargissement dû à la durée finie de la fenêtre d'exposition (relativement longue ici : $\tau_{v1} - \tau_{v2} = 20$ ms) se fait par rapport à la vitesse v_R , alors que pour les autres pics, cet effet ne joue que sur δv_θ ($\delta v_\theta < v_R$). A partir des deux demi-largeurs δz_1 à $1/e^{1/2}$ des pics du haut et du bas, on déduit $\delta v_\theta \leq 2,0 \text{ cm.s}^{-1} \approx v_R/4,5$ (sans aucune déconvolution).

5 Conclusion

Les expériences de résonances noires sélectives en vitesse requièrent une compensation soignée des champs magnétiques parasites. Pour compenser ces champs, nous avons utilisé l'effet Hanle mécanique sur le jet atomique, puis sur les atomes piégés. On parvient à une annulation du champ au milligauss près. Le volume de mesure n'est que de 1 mm^3 environ, ce qui est un avantage en raison de la présence de gradients éventuels. Les mesures se font avec une résolution temporelle de $200 \mu\text{s}$ à

5 ms selon les expériences, ce qui permet de contrôler l'effet de la modulation des champs de ralentissement et de piégeage. Ainsi, malgré la difficulté que constitue l'utilisation de champs magnétiques de l'ordre de 100 G pour accumuler les atomes dans le piège, on peut contrôler le champ au milligauss près pendant la phase de résonances noires.

Les expériences de résonances noires ont d'abord été réalisées à une dimension. Jusqu'ici, les temps d'interaction explorés sont de l'ordre de $300 \mu\text{s} = 3\,000 \Gamma^{-1}$, c'est-à-dire accrus d'un ordre de grandeur par rapport à l'expérience sur jet. Les distributions en position sur la galette révèlent l'apparition de deux bandes caractéristiques du refroidissement par résonances noires. La dépendance en champ magnétique est conforme aux attentes théoriques. Les profils de distribution en position ont été étudiés en détail. Ceci a permis de confirmer nos prédictions théoriques d'une forme lorentzienne des distributions en vitesse (cf. chapitre V). Après déconvolution des profils, on obtient une estimation précise de la température atteinte :

$$\delta v_{\theta} \approx v_R/6,3 \approx 1,46 \text{ cm.s}^{-1} \quad (v_R/8,4 \leq \delta v_{\theta} < v_R/5,5) \quad (\text{III.27})$$

soit
$$T \approx T_R/40 \approx 100 \text{ nK} \quad (T_R/70 \leq T < T_R/30) \quad (\text{III.28})$$

Une première étude de la température atteinte en fonction du temps d'interaction a été faite. Elle a confirmé qualitativement l'évolution prévue, c'est-à-dire une température diminuant quand la durée d'interaction augmente.

Pour passer au refroidissement à deux dimensions, il suffit de rajouter les faisceaux lasers correspondant et de prendre en compte les forces de friction qui apparaissent. Deux configurations lasers ont été testées. On a atteint

$$\delta v_{\theta} \leq v_R/4,5 \approx 2,0 \text{ cm.s}^{-1}, \text{ soit } T \leq T_R/20 \approx 200 \text{ nK}. \quad (\text{III.29})$$

Nous avons en outre prédit et montré expérimentalement le rôle crucial du refroidissement Sisyphe pour l'efficacité des résonances noires en dimension supérieure ou égale à 2.

Les expériences présentées ici doivent être considérées comme préliminaires. Il sera très intéressant d'étudier précisément la température atteinte en fonction de l'intensité et du désaccord des lasers, en particulier à deux dimensions. La mesure de la proportion d'atomes refroidis serait également importante, puisque c'est à la fois un critère pratique pour l'efficacité du processus de refroidissement, et un paramètre intéressant pour les comparaisons avec les approches "vols de Lévy" (cf. chapitre V).

Malgré leur caractère préliminaire, ces résultats constituent pourtant un record dans le domaine du refroidissement laser sub-recul, tant à une dimension qu'à deux dimensions. Pour comparaison, l'équipe de Stanford a obtenu par refroidissement Raman, la deuxième grande méthode de refroidissement sub-recul, $\delta v_{\theta} \approx v_R/4$ à

1D [KaC92] et $\delta v_0 \approx 0,8 v_R$ à 2D [DLK94], avec des atomes de sodium. Ainsi, les premiers résultats présentés ici justifient les efforts faits pour développer cette nouvelle expérience de résonances noires.

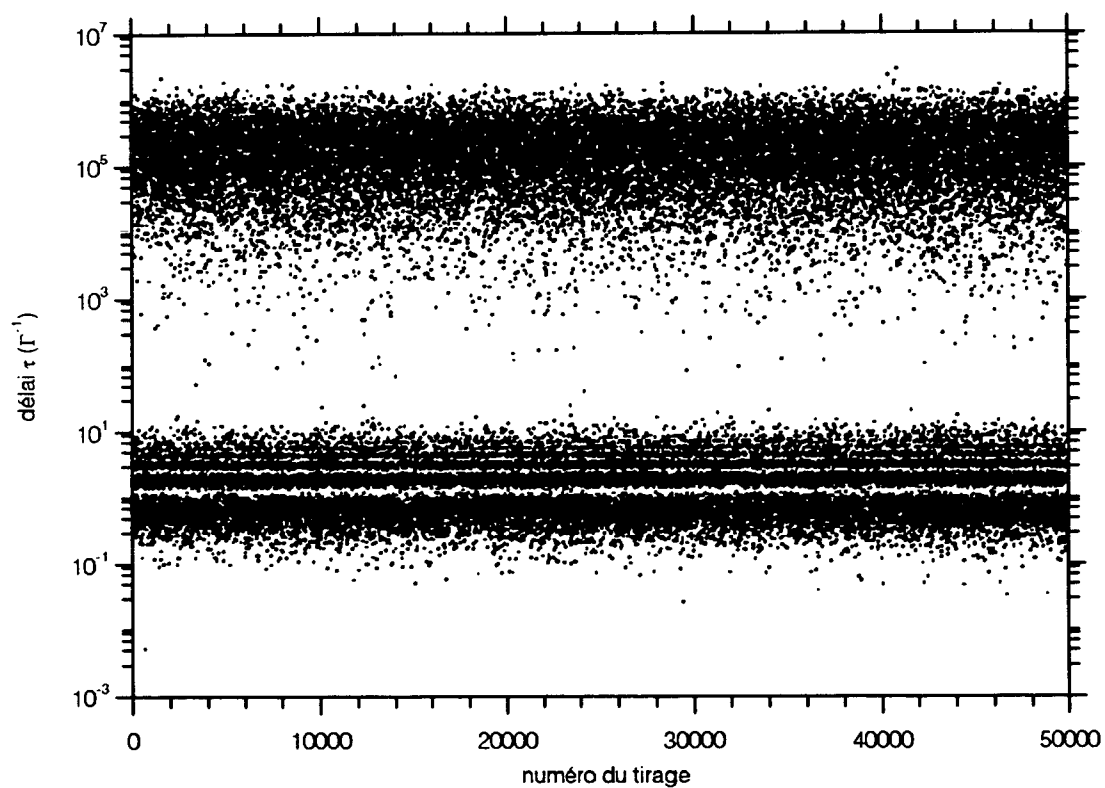
En outre, on peut espérer que l'exploitation plus poussée de cette nouvelle expérience permettra d'obtenir un refroidissement sub-recul à trois dimensions, pour lequel elle a été conçue, et des températures des températures encore significativement réduites puisque le dispositif expérimental autorise des temps d'interaction 50 fois plus longs, correspondant en principe des températures 50 fois plus basses.

[KaC92] M. Kasevich and S. Chu, *Laser Cooling below a Photon Recoil with Three-Level Atoms*, Phys. Rev. Lett. **69**, p. 1741-1744 (1992).

[DLK94] N. Davidson, H.-J. Lee, M. Kasevich, and S. Chu, *Raman Cooling of Atoms in Two and Three Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **72**, p. 3158-3161 (1994).

Chapitre IV

Simulation Monte-Carlo quantique et fonction délai



Plan du chapitre IV : Simulation Monte-Carlo quantique et fonction délai

1 Introduction	195
2 De l'"étagère à électrons" aux simulations Monte-Carlo quantiques en passant par la fonction délai	198
2.1 "Etagère à électrons", fonction délai et résonances noires	198
2.2 Définition précise de la fonction délai	201
2.3 Description de l'évolution atomique dans le formalisme de la fonction délai. Processus de filtrage.	203
2.4 Algorithme de simulation Monte-Carlo quantique par la fonction délai	206
3 Simulation Monte-Carlo quantique par la fonction délai du refroidissement par résonances noires : mise en œuvre	207
3.1 Méthodes de calcul de la fonction délai	207
3.2 Allure des fonctions délais	209
3.2.1 Forme analytique de la fonction délai dans le cas général	209
3.2.2 Fonction délai d'un atome à deux niveaux	211
3.2.3 Fonctions délais pour les résonances noires sélectives en vitesse	213
3.3 Techniques de tirage des délais aléatoires	219
3.3.1 Présentation du problème	219
3.3.2 Première solution : utilisation de $\pi_0(t)$	220
3.3.3 Cas d'une fonction délai exponentielle ou somme d'exponentielles	221
3.3.4 Méthode du "rejet"	223
3.3.5 Application de la méthode du "rejet" aux résonances noires	226
3.3.6 Efficacité de la méthode du rejet : traitement des échelles	228
3.4 Traitement de l'émission spontanée	233
3.4.1 Etat externe	234
3.4.2 Etat interne	236
3.4.3 Synthèse : évolution des familles $F(p)$	236
3.4.4 Analogie entre l'émission spontanée et un processus de mesure	237
3.5 Vue d'ensemble de l'algorithme de simulation Monte-Carlo	238
4 Résultats des simulations Monte-Carlo	241
4.1 Tests du programme	241
4.2 Evolution d'un seul atome	244
4.3 Evolution d'un ensemble d'atomes. Distribution en impulsion	248
4.4 Aspects numériques	254
4.4.1 Mémoire et discrétisation	254
4.4.2 Temps de calcul	255
4.4.3 Incertitude statistique et quantité d'information	256
5 Conclusion	259
5.1 Résumé de la méthode de simulation Monte-Carlo par la fonction délai	259
5.2 Extension possible et comparaison à une autre méthode	261
5.3 Vers une nouvelle approche physique : du quantique au stochastique	263

1 Introduction

Le régime le plus intéressant du refroidissement par résonances noires est celui des longs temps d'interaction entre atomes et lasers. Nous avons vu (§ I.3) que le traitement théorique habituel, c'est-à-dire la résolution des équations de Bloch optiques généralisées, est bien adapté à l'étude des temps d'interaction de quelques $100 \Gamma^{-1}$. Mais la taille des matrices à manipuler et l'accroissement du temps de calcul la rend inopérante pour des temps d'interaction plus longs par deux ordres de grandeur, que nous envisageons expérimentalement.

Nous sommes donc amenés à rechercher une méthode différente pour pouvoir étudier le régime des temps longs. Une des difficultés du problème vient de la présence d'échelles très différentes dans les paramètres en jeu pour le refroidissement par résonances noires :

- échelles d'impulsion : la distribution des impulsions atomiques possède à la fois des structures très étroites (pics d'atomes refroidis) et des structures très larges (fond d'atomes non refroidis). Quand le temps d'interaction croît, le problème s'aggrave puisque les pics s'affinent et le fond s'élargit.

- échelles de temps : les temps caractéristiques sont la durée de vie de l'état excité (Γ^{-1}), le temps d'interaction θ , l'inverse de la pulsation de Rabi Ω_1^{-1} et l'inverse des couplages motionnels $(kp/M)^{-1}$. Les temps d'interaction caractéristiques θ que nous voulons étudier sont typiquement de $10^4 - 10^5 \Gamma^{-1}$, ce qui est très long pour un problème de physique atomique : l'intérêt de temps d'interaction aussi longs que possible est à relier à l'absence de régime stationnaire dans le problème, puisque la température semble pouvoir diminuer indéfiniment (§ I.2.2.2). Le terme Ω_1^{-1} est typiquement de l'ordre de Γ^{-1} et ne pose guère problème. Par contre, le terme $(kp/M)^{-1}$ pose problème : ce terme est beaucoup plus grand que Γ^{-1} (ou même que θ) pour les atomes de faible impulsion (appartenant aux pics d'atomes refroidis), alors qu'il est beaucoup plus petit que Γ^{-1} pour les atomes de grande impulsion (dans le fond d'atomes non refroidis).

Lorsqu'on fait évoluer la matrice densité atomique, l'apparition de ces échelles très différentes oblige à effectuer une discrétisation fine en impulsion et en temps qui rend le calcul inefficace. Pourtant, le refroidissement par résonances noires comporte un petit nombre de paramètres. On devrait donc pouvoir parvenir à une théorie simple, qui ne fasse pas usage d'un objet comprenant autant de variables qu'une matrice densité discrétisée en impulsion.

Une approche couramment pratiquée consiste à calculer l'évolution d'un seul atome par simulation Monte-Carlo "classique" [1]. De telles simulations conduisent à des calculs plus simples que ceux relatifs à la résolution des équations de Bloch optiques, ce qui explique la popularité de la méthode en particulier dans le domaine du refroidissement laser. Toutefois, telles qu'elles étaient pratiquées jusqu'en 1991-1992, ces simulations Monte-Carlo présentaient un défaut majeur (et connu). En effet, un calcul Monte-Carlo repose sur des choix aléatoires entre différentes possibilités. Or, on sait qu'en mécanique quantique, le simple fait de choisir entre plusieurs possibilités (cf. expériences des fentes d'Young) fait en général disparaître les phénomènes d'interférences. Il semble donc difficile d'appliquer un algorithme de type Monte-Carlo à des problèmes d'interaction atomes-lumière, bien connus pour comporter des processus d'interférences (oscillations de Rabi par exemple).

Les résonances noires sélectives en vitesse, en particulier, reposent sur un processus d'interférence, entre deux amplitudes de probabilité. Peut-on tout de même les simuler rigoureusement de manière Monte-Carlo en respectant le caractère quantique du problème ? C'est la question à l'origine de ce chapitre IV.

Au paragraphe IV.2, nous présentons la genèse d'une méthode de simulation Monte-Carlo quantique, adaptée aux problèmes tels que les résonances noires sélectives en vitesse. Le point de départ est une analogie phénoménologique entre les résonances noires sélectives en vitesse et l'"étagère à électrons" de Dehmelt (§ IV.2.1) : dans les deux cas, la fluorescence des atomes est intermittente, tantôt intense, tantôt nulle. Pour traiter ce problème, Claude Cohen-Tannoudji et Jean Dalibard ont créé le concept de "fonction délai" [CoD86] (§ IV.2.2) qui s'appuie sur la description de la fluorescence comme une suite de "sauts quantiques" [2] associés aux émissions spontanées, image particulièrement claire dans le cadre de la cascade radiative de l'atome habillé. Ce faisant, ils ont introduit tous les éléments nécessaires pour construire un algorithme de simulation Monte-Carlo qui respecte le caractère quantique de l'interaction atomes-lasers (§ IV.2.3). Peu de temps après, P. Zoller, M. Marte, et D.F. Walls ont redéfini indépendamment la fonction délai et l'ont utilisée pour faire une simulation Monte-Carlo de l'"étagère à électrons" [ZMW87].

L'analogie phénoménologique entre les résonances noires et "l'étagère à électrons" n'a été qu'un point de départ. En fait, ce nouveau type de simulations Monte-

[1] Une autre approche, analytique, consiste à dériver, à partir des équations de Bloch optiques, une équation de Fokker-Planck plus simple à manier ("traitement semi-classique"). Ici, comme on s'intéresse à des structures plus fines que la taille d'un saut en impulsion ($= \hbar k$), on ne peut pas dériver une équation de Fokker-Planck : c'est pour cela que le traitement quantitatif des résonances noires sélectives en vitesse avait été fait jusqu'ici avec les équations de Bloch Optiques généralisées.

[CoD86] C. Cohen-Tannoudji and J. Dalibard, *Single-Atom Laser Spectroscopy. Looking for Dark Periods in Fluorescence Light*, Europhys. Lett. **1**, p. 441-448 (1986).

[2] Le terme "saut quantique" a été introduit par Cook et Kimble dans [CoK85], à propos de "l'étagère à électrons".

[ZMW87] P. Zoller, M. Marte, and D.F. Walls, *Quantum jumps in atomic systems*, Phys. Rev. A **35**, p. 198-207 (1987).

Carlo s'applique dans le cadre général des problèmes mêlant évolution cohérente et dissipation. Plusieurs approches voisines de celle qui est décrite ici ont été développées. En particulier, Jean Dalibard, Yvan Castin et Klaus Mølmer ont démontré la possibilité de simulations Monte-Carlo de l'évolution de la fonction d'onde d'un système quantique soumis à des processus dissipatifs, méthode maintenant connue sous le nom de MCWF (pour "Monte-Carlo Wave-Function") [DCM92], [MCD93]. L'approche "Monte-Carlo par la fonction délai", que nous utilisons, se révèle strictement équivalente, sur le fond, à l'approche WPMC. Aussi, on n'insistera ici que sur les spécificités de la simulation Monte-Carlo par la fonction délai. Conceptuellement et numériquement, l'utilisation de la fonction délai est un atout décisif dans le cas du refroidissement par résonances noires.

Au paragraphe IV.3, nous décrivons la mise en oeuvre de la méthode utilisée, avec le calcul des fonctions délais (§ IV.3.1 et IV.3.2), le processus de tirage au sort des délais (§ IV.3.3), le traitement de l'émission spontanée (§ IV.3.4) et enfin une vue d'ensemble de l'algorithme de simulation Monte-Carlo (§ IV.3.5). Le paragraphe IV.3.3 joue un rôle central dans ce chapitre. En effet, pour que la simulation Monte-Carlo par la fonction délai soit numériquement efficace, il faut que le tirage des délais soit rapide : c'est grâce aux propriétés de la procédure de tirage des délais que l'on résout le problème des échelles étendues en temps.

Ensuite, nous présentons quelques résultats obtenus (§ IV.4). Tout d'abord, le programme a été soigneusement testé, en particulier grâce à des comparaisons aux équations de Bloch optiques, pour des temps courts d'interaction (§ IV.4.1). Nous montrons ensuite les résultats de la simulation de l'évolution d'un seul atome (§ IV.4.2), puis d'un ensemble d'atomes, avec des temps d'interaction accrus de 4 ordres de grandeur par rapport aux résultats obtenus par équations de Bloch (§ IV.4.3). Puis on discute l'efficacité numérique de cette simulation, qui se révèle très intéressante pour les longs temps d'interaction (§ IV.4.4).

Enfin (§ IV.5), on résume l'approche développée (§ IV.5.1) et on discute des extensions possibles (§ IV.5.2 et § IV.5.3). Efficace numériquement, l'approche Monte-carlo conduit elle-même aux concepts qui permettent de dépasser le stade purement numérique et d'aboutir à une description nouvelle, analytique, du refroidissement par résonances noires (chapitre V).

Remarque :

Le travail présenté ici n'a jamais fait l'objet d'une publication exclusive. L'idée de base a été présentée brièvement pour la première fois dans [Coh90]. Les premiers résultats

[DCM92] Dalibard, Y. Castin, and K. Mølmer, *Wave-Function Approach to Dissipative Processes in Quantum Optics*, Phys. Rev. Lett. **68**, p. 580-583 (1992).

[MCD93] K. Mølmer, J. Dalibard, and Y. Castin, *A Monte Carlo wave-function method in quantum optics*, J. Opt. Soc. Am. B. **10**, p. 524-538 (1993).

[Coh90] C. Cohen-Tannoudji, *Atomic motion in laser light*, in *Fundamental systems in quantum optics*, J. Dalibard, J.-M. Raimond, and J. Zinn-Justin eds, Les Houches session LIII (1990), p. 1-183 (North-Holland, 1992).

ont été donnés dans la référence [CBA90], dans le contexte de la description de la diffusion de photons par un atome. Enfin, la fonction délai a été appliquée au problème du laser sans inversion de population [CZA92a], [CZA92b]. Des simulations Monte-Carlo de ce problème ont été présentées dans [CZA93]

2 De l'"étagère à électrons" aux simulations Monte-Carlo quantiques en passant par la fonction délai

2.1 "Etagère à électrons", fonction délai et refroidissement par résonances noires

Dans ce paragraphe, nous allons rappeler le principe de "l'étagère à électrons" ou des "sauts quantiques" et établir une analogie entre "l'étagère à électrons" et le refroidissement par résonances noires. Cette analogie nous a servi à rapprocher le traitement théorique utilisé pour les sauts quantiques du problème des résonances noires.

"L'étagère à électrons" [3] a été inventée par Dehmelt [Deh75], [Deh82]. Nous reprenons ici la présentation de [CoD86]. On considère un schéma à trois niveaux (figure IV.1.a) : un état fondamental f stable, un état excité e_B de durée de vie très courte τ_B et un état métastable e_R de durée de vie très longue τ_R . La transition $f \leftrightarrow e_B$ (appelée

-
- [CBA90] C. Cohen-Tannoudji, F. Bardou, and A. Aspect, *Review of fundamental processes in laser cooling*, Proceedings of Laser Spectroscopy X (Font-Romeu 1990), edited by M. Ducloy, E. Giacobino, and G. Camy, p. 3-14 (World Scientific, Singapore, 1992).
- [CZA92a] C. Cohen-Tannoudji, B. Zambon, and E. Arimondo, *Propriétés statistiques de la suite de sauts quantiques associée à des processus dissipatifs*, C. R. Acad. Sci. Paris **314**, p. 1139-1145 (1992).
- [CZA92b] C. Cohen-Tannoudji, B. Zambon, and E. Arimondo, *Modèle simple d'amplification sans inversion de population. étude par la méthode des sauts quantiques. Quantum jump approach to a simple model of amplification without inversion*, C. R. Acad. Sci. Paris **314**, p. 1293-1299 (1992).
- [CZA93] C. Cohen-Tannoudji, B. Zambon, and E. Arimondo, *Quantum-jump approach to dissipative processes: application to amplification without inversion*, J. Opt. Soc. B **10**, p. 2107-2120 (1993).
- [3] Le schéma de Dehmelt est souvent appelé, depuis l'article de Cook et Kimble [CoK85], schéma des "sauts quantiques". Nous gardons plutôt l'expression "étagère à électrons". Nous utilisons la dénomination "sauts quantiques" pour désigner une certaine description de l'émission spontanée, qui s'applique à bien d'autres situations que "l'étagère à électrons".
- [Deh75] H.G. Dehmelt, *Proposed $10^{14} \Delta\nu/\nu$ laser fluorescence spectroscopy on Tl^+ mono-ion oscillator II*, Bull. Amer. Phys. Soc. **20**, p. 60 (1975).
- [Deh82] H.G. Dehmelt, *Mono-ion oscillator as potential ultimate laser frequency standard*, IEEE Trans. Instrum. Meas. **2**, p. 83-87 (1982).
- [CoD86] C. Cohen-Tannoudji and J. Dalibard, *Single-Atom Laser Spectroscopy. Looking for Dark Periods in Fluorescence Light*, Europhys. Lett. **1**, p. 441-448 (1986).

"bleue") est donc très intense, alors que la transition $f \leftrightarrow e_R$ (appelée "rouge") est très faible. Deux lasers excitent alternativement ces deux transitions et provoquent l'émission de nombreux photons de fluorescence sur $f \leftrightarrow e_B$ et de très peu sur $f \leftrightarrow e_R$.

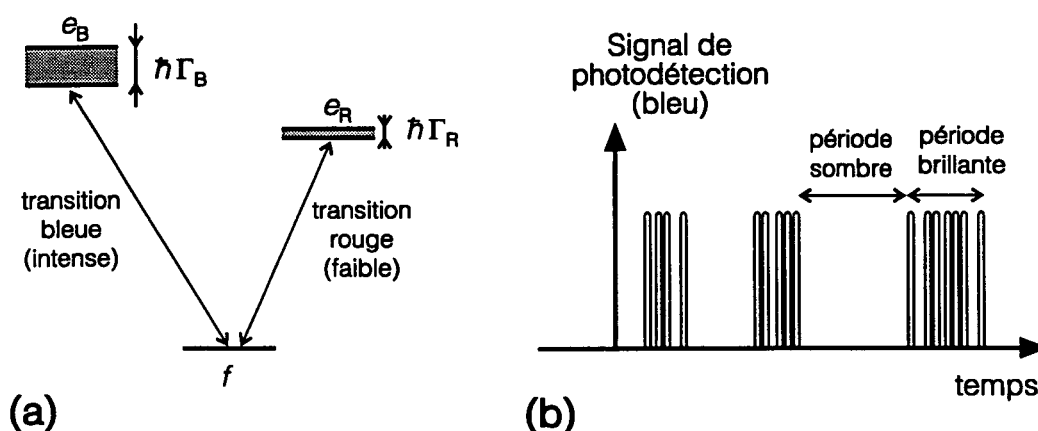


Figure IV.1 Schéma de l'« étagère à électrons » de Dehmelt (d'après [CoD86]).

(a) Atome à trois niveaux avec deux transitions $f \leftrightarrow e_B$ et $f \leftrightarrow e_R$. Le niveau e_B a une durée de vie très courte $\tau_B = \Gamma_B^{-1}$. Le niveau e_R a une durée de vie très longue

$\tau_R = \Gamma_R^{-1}$. On cherche à réaliser la spectroscopie de e_R en observant la fluorescence de e_B .

(b) Signal de photodétection obtenu avec un ion unique. Chaque impulsion représente un photon bleu. Les périodes sombres, pendant lesquelles l'ion ne fluoresce pas, correspondent aux passages de l'atome dans le niveau métastable e_R . Les périodes brillantes correspondent à la fluorescence habituelle sur la transition $f \leftrightarrow e_B$.

L'idée de Dehmelt est qu'avec un ion unique piégé, on peut détecter l'absorption d'un seul photon rouge, grâce à l'absence de détection de photons bleus. En effet, quand un atome absorbe un photon rouge, il reste très longtemps sur e_R (d'où le nom d'« étagère ») et la fluorescence bleue est éteinte : on parle de période "sombre". Quand l'atome retombe sur f , il échange de nombreux photons sur la transition $f \leftrightarrow e_B$ et on parle de période "brillante". Le signal de photodétection des photons bleus est donc une succession de phases sombres et de phases brillantes (figure IV.1.b) [4]. La durée des périodes sombres donne la durée de vie de e_R .

En 1985, Cook et Kimble [CoK85] ont suggéré qu'en appliquant les deux lasers simultanément, on pourrait observer les "sauts quantiques" entre l'état fondamental f et l'état métastable e_R , grâce aux changements soudains de la lumière de fluorescence émise sur la transition forte $f \leftrightarrow e_B$. De nombreuses discussions [5] à propos de la possibilité d'observer ces sauts quantiques ont suivi.

[4] Le signal de photodétection est une série d'impulsions fournies par un détecteur à large bande spectrale.

[CoK85] R.J. Cook and H.J. Kimble, *Possibility of direct observation of quantum jumps*, Phys. Rev. Lett. 54, p. 1023-1026 (1985).

[5] Peu de temps après, les sauts quantiques ont été observés expérimentalement sur des ions piégés.

Pour décrire les variations de la fluorescence dans le schéma de l'étagère à électrons, C. Cohen-Tannoudji et J. Dalibard ont introduit le concept de "fonction délai" [CoD86] [6]. La fonction délai s'applique à la distribution des dates d'émission des photons spontanés émis par un atome *unique* placé dans un champ lumineux. Donnons-en une première définition.

Définition 1 : *La fonction délai $w_2(\tau)$ est la densité de probabilité, sachant qu'un photon spontané a été émis au temps t , que le prochain photon spontané soit émis au temps $t + \tau$.*

La fonction délai est donc la loi de probabilité des *délais* entre deux photons spontanés *consécutifs* (et non entre 2 photons spontanés quelconques). Cette fonction $w_2(\tau)$ contient toute l'information sur la statistique des dates d'émission des photons spontanés.

L'analyse quantitative de [CoD86] montre que la fonction délai pour l'étagère à électrons fait apparaître des délais à deux échelles de temps : des délais courts, associés à l'intervalle entre deux photons lors des périodes brillantes, et des délais longs (queue de la fonction délai), associés à la durée des périodes sombres.

Intéressons-nous maintenant aux résonances noires sélectives en vitesse (figure IV.2.a). Quel serait le signal de photodétection pour la fluorescence d'un seul atome dans les conditions de résonances noires ? Lorsque l'atome a une impulsion suffisamment grande, il fluoresce normalement avec un taux Γ (cf. période brillante). Cette fluorescence induit une diffusion en impulsion. Quand, par hasard, cette diffusion amène l'atome sur un état d'impulsion suffisamment faible, il apparaît des temps de "piégeage" très longs, de l'ordre de $(\Gamma_{\text{NC}}(p))^{-1}$, au cours desquels l'atome ne fluoresce pas (cf. périodes sombres). Mais, à la fin de ce temps de piégeage, l'atome se remet à fluorescer (l'atome n'atteint jamais rigoureusement $p = 0$ qui est une condition de mesure nulle). Comme pour l'étagère à électrons, on obtient une alternance de périodes sombres et de périodes brillantes.

Dans les deux cas (résonances noires et étagère à électrons), l'intermittence de la fluorescence est liée à l'état atomique. Mais, alors que seul l'état interne intervient dans le schéma de l'étagère à électrons, pour les résonances noires sélectives en vitesse, l'état interne ($|\psi_C\rangle$ ou $|\psi_{\text{NC}}\rangle$) et l'état externe (impulsion p) interviennent tous deux dans l'intermittence de la fluorescence. En particulier dans les résonances noires, la durée des périodes sombres $(\Gamma_{\text{NC}}(p))^{-1}$ dépend de l'impulsion p et varie donc aléatoirement au cours de l'évolution atomique. Les causes de l'intermittence de la fluorescence sont différentes dans les deux cas (cf. figures IV.1.a et IV.2.a). Cependant, nous allons voir que l'approche développée dans [CoD86] pour l'étagère à électrons s'applique aussi aux résonances noires : le point essentiel que les deux processus ont en commun est

[6] Cette fonction avait été définie auparavant par [Rey83] pour interpréter des signaux de fluorescence mesurés par une technique Start-Stop. [Rey83] : S. Reynaud, *La fluorescence de résonance : Etude par la méthode de l'atome habillé ; Resonance fluorescence : The dressed atom approach*, Ann. Phys. Fr. **8**, p. 315-370 (1983).

l'émission spontanée. En fait, la présence de l'intermittence de la fluorescence ne joue qu'un rôle annexe et n'aura servi qu'à donner l'idée de rapprocher résonances noires et étagère à électrons.

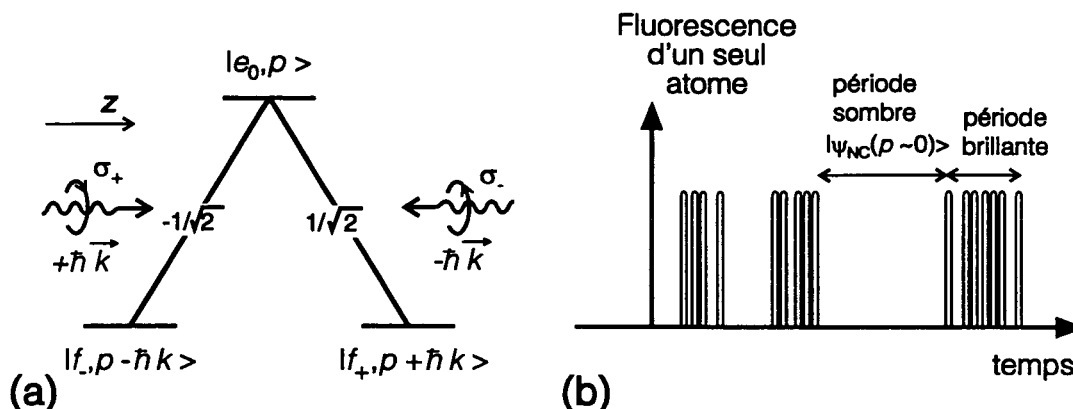


Figure IV.2 Résonances noires en vitesse : fluorescence d'un seul atome.

(a) Configuration atomique et laser (cf. chapitre I).

(b) Signal de photodétection obtenu avec un atome unique. Chaque impulsion représente un photon. Les périodes sombres, où l'atome ne fluoresce pas, sont associées au "piégeage" de l'atome dans les états noirs $|\psi_{NC}(p \approx 0)\rangle$. Les périodes brillantes, pendant lesquelles l'atome fluoresce intensément sont associées aux états d'impulsion p suffisamment grande ou aux états $|\psi_C(p)\rangle$. Comme dans le schéma de l'"étagère à électrons" (cf. figure IV.1), la fluorescence d'un seul atome est intermittente. Dans le cas des résonances noires sélectives en vitesse, la fluorescence ne dépend pas seulement de l'état interne de l'atome, mais aussi de son état d'impulsion.

2.2 Définition précise de la fonction délai [CoD86]

Comment calculer la fonction délai $w_2(\tau)$? On suppose qu'un photon a été émis au temps t et on considère $|\psi(t + \tau)\rangle$, l'état du système (atome + champ) à l'instant $t + \tau$. Cet état peut alors se décomposer en deux parties :

$$\begin{aligned}
 |\psi(t + \tau)\rangle = & \sum_{i \text{ (états atomiques)}} a_i(\tau) |\varphi_i\rangle \times |\text{vide de photon}\rangle \\
 & + \sum_j b_j(\tau) |j : \text{états avec de nouveaux photons de fluorescence}\rangle
 \end{aligned}
 \tag{IV.1}$$

où $|\varphi_i\rangle$ représente les états atomiques dans la base de l'atome habillé par les champs lasers en présence du vide de photon. Les états de la première ligne de l'équation (IV.1) sous-tendent ce que nous appelons la "multiplicité à 0 photon", c'est-à-dire le sous-espace E_0 correspondant aux états du champ sans aucun nouveau photon de fluorescence [7].

[CoD86] C. Cohen-Tannoudji and J. Dalibard, *Single-Atom Laser Spectroscopy. Looking for Dark Periods in Fluorescence Light*, Europhys. Lett. 1, p. 441-448 (1986).

[7] On ne compte pas ici le photon émis à l'instant t , dont on néglige la réaction sur l'atome.

On définit alors $|\varphi_0(t + \tau)\rangle$, la fonction d'onde du système atomique, projetée sur la "multiplicité à 0 photon" E_0 :

$$\boxed{|\varphi_0(t + \tau)\rangle \equiv \sum_i a_i(\tau) |\varphi_i\rangle} \quad (\text{IV.2})$$

Décrivons qualitativement, l'évolution du système après une émission spontanée ($\tau \geq 0$) est la suivante :

- juste après l'émission spontanée ($\tau = 0^+$), le système se trouve à coup sûr dans la multiplicité à 0 photon E_0 ;
- puis, quand τ croît, l'émission spontanée a une certaine probabilité de se produire, ce qui se traduit par le dépeuplement de la multiplicité à 0 photon E_0 ;
- corrélativement, la population hors de la multiplicité à 0 photon E_0 (deuxième terme de l'équation (IV.1)) croît au cours du temps, alimentée par l'émission spontanée.

Plus quantitativement, soit P_0 le projecteur sur la multiplicité à 0 photon E_0 . L'état $|\varphi_0(t + \tau)\rangle$ introduit en (IV.2) n'est autre que $P_0|\psi(t + \tau)\rangle$. Pour calculer l'évolution de $|\varphi_0(t + \tau)\rangle$, il faut donc calculer la restriction P_0UP_0 de l'opérateur d'évolution $U(\tau)$ à l'intérieur de E_0 . L'introduction de la résolvante $G(z) = 1 / (z - H)$ de l'hamiltonien et le calcul de $P_0G(z)P_0$ permettent de montrer [CDG88] que $P_0U(\tau)P_0$ est de la forme $\exp\{-iH_{\text{eff}}\tau / \hbar\}$ où H_{eff} est un hamiltonien effectif, agissant à l'intérieur de E_0 et contenant, en plus des couplages habituels, des termes décrivant les pertes liées à l'émission spontanée. L'évolution de la fonction d'onde $|\varphi_0(t + \tau)\rangle$ est décrite par l'équation de Schrödinger [8] :

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} |\varphi_0(t + \tau)\rangle = H_{\text{eff}} |\varphi_0(t + \tau)\rangle} \quad (\text{IV.3})$$

L'hamiltonien effectif H_{eff} n'est pas hermitique à cause des termes d'émission spontanée, ce qui traduit le fait que l'évolution n'est pas unitaire [9] dans la multiplicité à 0 photon : $P(\tau)$ vaut 1 pour $\tau = 0$, mais tend vers une limite finie quand $\tau \rightarrow \infty$ (cette limite étant nulle en l'absence d'état piège parfait).

Pour utiliser la fonction délai, il est commode d'introduire $\pi_0(\tau)$, la probabilité qu'aucun photon de fluorescence n'ait été émis au temps τ . Cette probabilité $\pi_0(\tau)$ est donc la population de la multiplicité à 0 photon :

$$\boxed{\pi_0(\tau) \equiv \|\varphi_0(t + \tau)\|^2 = \sum_i |a_i(\tau)|^2} \quad (\text{IV.4})$$

[CDG88] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes, Chapitre III*, InterEditions et Editions du CNRS (1988).

[8] Remarquer que la variable temporelle utilisée pour décrire l'évolution entre deux émissions spontanées est le délai τ : par définition, τ est "remis à 0" lors de chaque émission spontanée. Les notations t ou t_i (cf. paragraphe suivant) désignent des dates d'émission spontanée.

[9] La fonction d'onde $|\varphi_0(t+\tau)\rangle$ n'a donc pas une norme constante. On peut toutefois le renormaliser (voir l'équation (IV.9)).

Relions maintenant $w_2(\tau)$ et $\pi_0(\tau)$. D'après la définition 1, la probabilité dp que le prochain photon spontané soit émis entre $t + \tau$ et $t + \tau + d\tau$ s'écrit :

$$dp = w_2(\tau)d\tau \quad (\text{IV.5})$$

Or, dp est également la probabilité que le système quitte la multiplicité à 0 photon entre $t + \tau$ et $t + \tau + d\tau$. Comme la population de la multiplicité à 0 photon est, par définition, $\pi_0(\tau)$, on a

$$dp = \frac{-d\pi_0}{d\tau} d\tau \quad (\text{IV.6})$$

De (IV.5) et (IV.6), on tire finalement

$$\boxed{w_2(\tau) = \frac{-d\pi_0}{d\tau}} \quad (\text{IV.7})$$

A partir de l'équation (IV.7), on peut donner une deuxième définition de la fonction délai :

Définition 2 : *La fonction délai est le taux de départ instantané de la multiplicité à 0 photon.*

Finalement, on peut calculer la fonction délai de la manière suivante

- à partir de H_{eff} , et de l'état initial $|\varphi_0(t)\rangle$, l'équation de Schrödinger (IV.3) donne les coefficients $a_i(\tau)$;
- on en déduit $\pi_0(\tau)$ par l'équation (IV.4) ;
- finalement, on obtient $w_2(\tau)$ par l'équation (IV.7).

Lorsqu'on applique cette démarche au schéma de l'"étagère à électrons", on trouve que $w_2(\tau)$ est une somme d'exponentielles décroissantes (pour une excitation laser suffisamment faible). Sous certaines conditions, $w_2(\tau)$ contient deux constantes de temps : une constante de temps courte reliée au taux de fluorescence de la transition $f \leftrightarrow e_B$ et une constante de temps longue qui fait intervenir la durée de vie de l'état e_R (et d'autres paramètres). Ces deux constantes de temps impliquent l'alternance de périodes sombres et de périodes brillantes dans la fluorescence de l'atome (cf. figure IV.1). On montre enfin que l'étude du rapport des durées des périodes sombres et brillantes permet de détecter la résonance sur la transition faible $f \leftrightarrow e_R$, ce qui était l'objectif initial.

2.3 Description de l'évolution atomique dans le formalisme de la fonction délai. Processus de filtrage.

La nouveauté essentielle des simulations Monte-Carlo quantiques par rapport aux équations de Bloch optiques utilisées habituellement est de séparer explicitement le traitement de l'évolution cohérente du traitement de l'évolution dissipative :

a) l'évolution cohérente entre deux émissions spontanées est décrite par une équation de Schrödinger avec un hamiltonien effectif. Notons que cette évolution "cohérente" prend déjà en compte des termes de dissipation liés à l'émission spontanée (hamiltonien non hermitique). Ceci vient de la projection de l'évolution du système

atome plus champ sur la multiplicité à 0 photon. Le calcul de cette évolution est relativement simple puisqu'il opère sur des fonctions d'onde et non sur des matrices densités comme le faisaient les équations de Bloch.

b) l'évolution dissipative est décrite par des tirages aléatoires d'un processus d'émission spontanée, décrit comme un saut quantique. Les tirages des dates aléatoires d'émission spontanée sont déterminés par une loi de probabilité, la fonction délai. Les tirages de la direction et de la polarisation des photons spontanés sont à déterminer suivant le problème particulier étudié.

Notons que cette séparation entre évolution déterministe et évolution dissipative aléatoire se retrouve partiellement dans les simulations Monte-Carlo habituelles. Ainsi, pour simuler la dynamique d'un gaz, on décrit l'évolution d'une particule entre deux collisions par un vol libre, parfaitement déterministe (cf. évolution hamiltonienne), alors que la collision fait intervenir un élément aléatoire (cf. évolution dissipative, émission spontanée). La différence entre les simulations Monte-Carlo quantiques et les simulations Monte-Carlo classiques réside dans l'utilisation d'une fonction d'onde pour décrire l'évolution du système entre deux sauts quantiques.

Dans le formalisme de la fonction délai, l'évolution atomique d'un seul atome est décrite comme une série d'évolutions hamiltoniennes, séparées par des émissions spontanées (figure IV.3). Soient t_i les dates d'émission spontanée de l'atome et $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ les délais entre deux photons spontanés.

A la date t_i , juste après l'émission spontanée, l'atome se trouve dans la multiplicité à zéro photon E_0 :

$$|\psi(t_i)\rangle = |\varphi_0(t_i)\rangle \times |\text{vide de photon}\rangle \quad (\text{IV.8})$$

L'état $|\varphi_0(t_i)\rangle$ permet de calculer la fonction délai $w_2(\tau)$. La prochaine émission spontanée a lieu à la date $t_{i+1} = t_i + \tau_i$ où les délais τ_i sont des variables aléatoires indépendantes décrites par la loi de probabilité $w_2(\tau)$. Lors de l'émission spontanée, l'état atomique est projeté instantanément [10] ("saut quantique") sur un état fondamental, déterminé de manière aléatoire. Après chaque émission spontanée, on perd toute mémoire de l'état antérieur.

[10] La "durée" du saut quantique n'est pas strictement nulle, mais est de l'ordre du temps de corrélation du réservoir responsable du processus dissipatif. Ici, le saut quantique dure donc environ $\omega_0^{-1} \approx 2 \times 10^{-15}$ s, ce qui est négligeable devant les temps caractéristiques du refroidissement laser ($\Gamma^{-1} \approx 10^{-7}$ s).

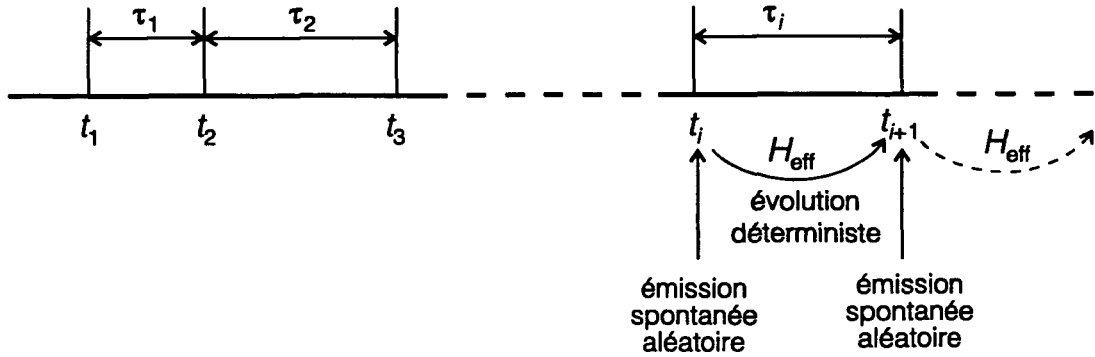


Figure IV.3 Description de l'évolution atomique dans le formalisme de la fonction délai. L'évolution atomique est une suite d'évolutions cohérentes séparées par des processus aléatoires d'émission spontanée. Les émissions spontanées ont lieu aux dates $t_{i+1} = t_i + \tau_i$ où les délais τ_i sont des variables aléatoires indépendantes décrites par la fonction délai. L'émission spontanée est décrite comme un "saut quantique", processus aléatoire et instantané. Après une émission spontanée, toute mémoire de l'état antérieur est perdue. Entre deux émissions spontanées, l'état atomique suit une évolution déterministe fixée par une l'équation de Schrödinger, d'hamiltonien H_{eff} .

Entre deux émissions spontanées, c'est-à-dire entre le saut à t_i et le saut à $t_{i+1} = t_i + \tau_i$, l'état atomique est donné par :

$$\boxed{|\varphi_0(t_i + \tau)\rangle = \frac{1}{N(\tau)} \sum_i a_i(\tau) |\varphi_i\rangle, \quad 0 < \tau < \tau_i} \tag{IV.9}$$

où

$$\boxed{N(\tau) = \sqrt{\sum_j |a_j(\tau)|^2}} \tag{IV.10}$$

est un terme de normalisation. En effet, entre deux émissions spontanées, on possède une *information supplémentaire*, non prise en compte par l'équation de Schrödinger (IV.3) : on sait qu'il n'y a pas eu de photon spontané entre t_i et $t_i + \tau$. L'état du système appartient donc à E_0 , ce qui signifie $|\langle \varphi_0 | \varphi_0(t_i + \tau) \rangle|^2 = 1$, d'où le terme de normalisation (IV.10).

Ce formalisme permet de décrire le **processus de filtrage** dans l'état de durée de vie la plus longue. Soient $|\varphi'_i\rangle$ les modes propres de désintégration du système, de durée de vie $(\Gamma'_i)^{-1}$ (les états $|\varphi'_i\rangle$ sont les états propres de H_{eff}) et soient $a'_i(\tau)$ les composantes de $|\varphi_0(t_i + \tau)\rangle$ sur la base propre $\{|\varphi'_i\rangle\}$. Alors, les composantes $|a'_i(\tau)|^2$ s'amortissent avec le taux Γ'_i . Supposons qu'un des états, l'état l par exemple, est de durée de vie beaucoup plus longue que les autres :

$$(\Gamma'_l)^{-1} \gg (\Gamma'_i)^{-1}, \quad i \neq l \tag{IV.11}$$

Alors, pour un délai suffisamment long, on a :

$$|a'_l(\tau)|^2 \gg |a'_i(\tau)|^2, \quad \text{pour } \tau \gg (\Gamma'_i)^{-1} \text{ et } i \neq l \tag{IV.12}$$

En appliquant l'inégalité (IV.12) à l'équation (IV.9), on obtient

$$|\varphi_0(t_i + \tau)\rangle \approx |\varphi'_i(\tau)\rangle \quad (\text{IV.13})$$

Ainsi, si on n'a pas détecté de photon spontané à une date τ suffisamment grande, l'atome se trouve presque certainement dans l'état $|\varphi'_i(\tau)\rangle$ de durée de vie la plus longue : on dit qu'il a été "filtré" dans cet état.

La notion de filtrage s'applique aux résonances noires sélectives en vitesse. L'atome se trouve après émission spontanée dans un état $|f_{\pm}, p \pm \hbar k\rangle$, superposition linéaire de $|\psi_C(p)\rangle$ et de $|\psi_{NC}(p)\rangle$. Si $p \approx 0$, on a $\Gamma'_{NC}(p) \ll \Gamma'_C$. Ainsi, si après un délai τ , tel que $\tau \gg (\Gamma'_C)^{-1}$, l'atome n'a émis aucun photon spontané, on sait qu'il se trouve dans l'état $|\psi_{NC}(p)\rangle$.

2.4 Algorithme de simulation Monte-Carlo quantique à l'aide de la fonction délai

Du formalisme de la fonction délai décrit au paragraphe précédent, il découle naturellement un algorithme de simulation Monte-Carlo de l'évolution d'un atome :

(1) Se donner une fonction d'onde atomique $|\varphi_0(t_1 = 0)\rangle$. Pour chaque atome, les fonctions $|\varphi_0(t_1 = 0)\rangle$ sont choisies de manière aléatoire de manière à reproduire la distribution initiale.

(2) Calculer la fonction délai $w_2(\tau)$ correspondant à $|\varphi_0(t_i)\rangle$.

(3) Tirer aléatoirement un délai τ_i , selon la loi de probabilité $w_2(\tau_i)$.

La date d'émission du $(i + 1)^{\text{e}}$ photon spontané émis par l'atome est

$$t_{i+1} = t_i + \tau_i \quad (\text{IV.14})$$

(4) Tirer aléatoirement les caractéristiques du photon spontané émis (direction, polarisation) [11]. Corrélativement, déterminer l'état atomique immédiatement après l'émission spontanée, qui est décrite comme un saut quantique instantané. On considère que le photon spontané est émis dans le réservoir, de sorte qu'il n'interagit plus avec l'atome. Tout se passe donc comme si ce photon avait été détruit. Ainsi, à $t = t_{i+1}$, on considère que le système atome plus champ est à nouveau dans la multiplicité à 0 photon E_0 , c'est-à-dire dans un état $|\varphi_0(t_{i+1})\rangle$.

(5) Remplacer i par $i + 1$ et reprendre à l'étape (2).

La simulation de l'évolution d'un seul atome donne une image d'états possibles du système aux temps t_i . Pour obtenir des grandeurs physiques statistiquement significatives, on moyenne les évolutions d'un grand nombre d'atomes, dont les états initiaux reconstituent la distribution initiale (cf. étape (1)).

Notons que dans cet algorithme, nous n'avons pas à calculer les états intermédiaires $|\varphi_0(t)\rangle$ tels que $t_i < t < t_{i+1}$. On peut cependant obtenir ces états

[11] La manière précise de tirer aléatoirement les caractéristiques du photon spontané et l'état atomique qui en résulte dépend du problème considéré. Dans certains cas, il existe plusieurs types de tirages différents qui vont donner des états intermédiaires différents, ainsi que l'ont montré [DCM92] et [MCD93]. Evidemment, ces différents types de tirages donnent une même évolution atomique après moyennage sur un grand nombre d'atomes.

intermédiaires en résolvant l'équation de Schrödinger (IV.3) pour le délai $\tau = t - t_i$, et en appliquant la normalisation (IV.10) (nous le ferons au § IV.4.3).

Enfin, on peut reconstruire la matrice densité atomique en moyennant les différents états purs $|\varphi_0(t)\rangle\langle\varphi_0(t)|$ au temps t obtenus pour des évolutions atomiques différentes [MCD93].

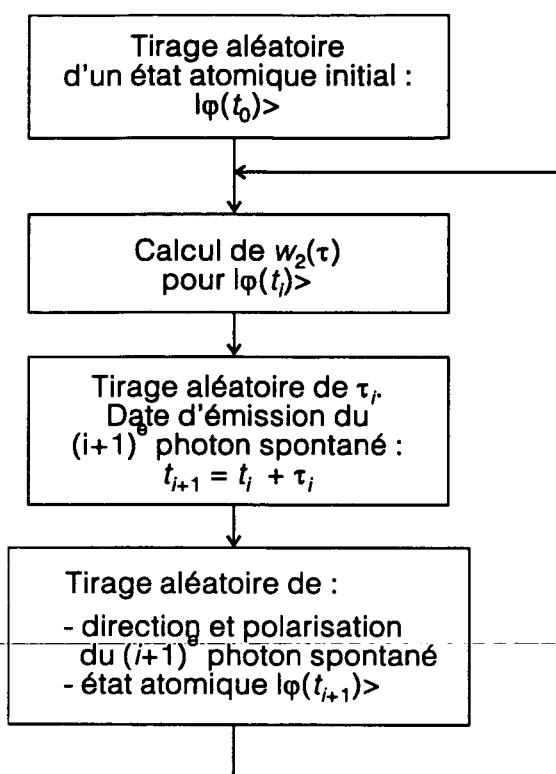


Figure IV.4 *Algorithme simplifié des simulations Monte-Carlo quantique par la fonction délai pour l'évolution d'un seul atome.*

L'état atomique $|\varphi(t_i)\rangle$ détermine la fonction délai $w_2(\tau)$, loi de probabilité à partir de laquelle on détermine un délai τ_i . On tire alors aléatoirement les caractéristiques du photon spontané émis et l'état $|\varphi(t_{i+1})\rangle$. Ceci permet de calculer une nouvelle fonction délai... Pour obtenir des distributions, on fait évoluer un grand nombre d'atomes, dont les états initiaux $|\varphi(t_0=0)\rangle$ reconstituent la distribution initiale.

3 Simulation Monte-Carlo quantique par la fonction délai du refroidissement par résonances noires : mise en œuvre

3.1 Méthodes de calcul de la fonction délai

Nous avons envisagé trois méthodes pour calculer la fonction délai $w_2(\tau)$. Ces trois méthodes, mathématiquement équivalentes, correspondent à des approches légèrement différentes et sont plus ou moins pratiques selon l'utilisation que l'on veut faire de la fonction délai. Pour notre algorithme de simulation Monte-Carlo, où le tirage des délais τ_i a un rôle central, il est essentiel de choisir la bonne méthode de calcul. Nous présentons donc ici ces trois méthodes de calcul de la fonction délai.

[MCD93] K. Mølmer, J. Dalibard, and Y. Castin, *A Monte Carlo wave-function method in quantum optics*, J. Opt. Soc. Am. B. 10, p. 524-538 (1993).

La première méthode consiste à relier la fonction délai $w_2(\tau)$ à une loi de probabilité plus courante, $J(\tau)$, la probabilité de détecter un photon quelconque, *i.e.* pas nécessairement le premier, à l'instant τ , pour un atome initialement dans l'état fondamental. La fonction délai $w_2(\tau)$ a une définition très proche de $J(\tau)$ (cf. définition 1). Or, selon [Rey83] (ou [DRC88]), les transformées de Fourier $\tilde{w}_2(p)$ et $\tilde{J}(p)$ de $w_2(\tau)$ et $J(\tau)$ sont reliées par :

$$\tilde{w}_2(p) = \frac{\tilde{J}(p)}{1 + \tilde{J}(p)} \quad (\text{IV.15})$$

Cette équation permet de calculer $w_2(\tau)$ connaissant $J(\tau)$. Cependant, n'ayant jamais eu à introduire $J(\tau)$, nous n'avons pas utilisé cette méthode pour calculer $w_2(\tau)$.

La deuxième méthode repose sur le lien entre la fonction délai $w_2(\tau)$ et la population $\pi_0(\tau)$ de la multiplicité à 0 photon E_0 (cf. définition 2 et équation (IV.4), § IV.2.2). Des équations (IV.4) et (IV.7), on tire

$$w_2(\tau) = \frac{-d \sum_i |a_i(\tau)|^2}{d\tau} \quad (\text{IV.16})$$

où les coefficients $a_i(\tau)$ sont les composantes de la fonction d'onde atomique projetée sur E_0 (équations (IV.1) et (IV.2)). Ces coefficients se calculent grâce à l'équation de Schrödinger (IV.3).

La troisième méthode consiste à établir un lien entre la fonction délai $w_2(\tau)$ et la population de l'état excité $\pi_e(\tau)$. Pour cela, on utilise un argument physique intuitif qui pourrait être justifié rigoureusement. La fonction délai est le taux de départ de la multiplicité à 0 photon E_0 (cf. définition 1). Or, on ne peut quitter E_0 qu'à partir d'états excités, par émission spontanée. Si on indice par e les différents états excités et si on note Γ_e la largeur radiative de l'état e et $\pi_e(\tau)$ la population de l'état e , on a :

$$w_2(\tau) = \sum_e \Gamma_e \pi_e(\tau) \quad (\text{IV.17})$$

Or, la population des états excités se calcule grâce à l'équation de Schrödinger (IV.7), puisque

$$\pi_e(\tau) = |a_e(\tau)|^2 \quad (\text{IV.18})$$

La troisième méthode se révèle la plus pratique, à la fois pour les calculs analytiques (§ IV.3.2.1) et pour les calculs numériques (§ IV.3.2.2 et IV.3.3).

[Rey83] S. Reynaud, *La fluorescence de résonance : Etude par la méthode de l'atome habillé ; Resonance fluorescence : The dressed atom approach*, Ann. Phys. Fr. **8**, p. 315-370 (1983).

[DRC88] S. Reynaud, J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji, *Photon Statistics and Quantum Jumps : The Picture of the Dressed Atom Radiative Cascade*, IEEE J. of Quantum Electronics **24**, p. 1395-1402 (1988).

3.2 Allure des fonctions délais

Dans ce paragraphe, nous déterminons tout d'abord (§ IV.3.2.1) la forme analytique de la fonction délai dans le cas général (équations (IV.25) et (IV.27)). Comme les fonctions délais ont été peu utilisées jusqu'à présent, nous présentons ce calcul en détail, bien qu'il ne présente pas de difficultés : nous aurons besoin de la forme analytique de la fonction délai pour établir la procédure de tirage aléatoire des délais qui est un point central dans nos simulations (cf. § IV.3.3).

Pour préciser le contenu physique de la fonction délai, il est ensuite commode d'étudier l'exemple d'un atome à deux niveaux pour lequel le calcul donne un résultat analytique simple (§ IV.3.2.2). Certaines propriétés générales de la fonction délai apparaissent sur cet exemple plus clairement que sur la forme analytique générale.

Enfin, nous présentons les fonctions délais pour les résonances noires sélectives en vitesse que nous calculons numériquement (§ IV.3.2.3).

3.2.1 Forme analytique de la fonction délai dans le cas général

Pour calculer la forme analytique de la fonction délai, nous allons utiliser la troisième méthode (cf. § IV.3.1). C'est en effet la méthode la plus simple, pour laquelle il suffit de calculer la population des états excités (cf. équation (IV.17)).

On suppose que la fonction d'onde atomique $|\varphi_0(t_i)\rangle$ après émission d'un photon spontané ($\tau = 0$) est donnée par (cf. équation IV.2).

$$|\varphi_0(t_i + \tau, \tau = 0)\rangle = \sum_i a_i(\tau = 0) |\varphi_i\rangle \quad (\text{IV.19})$$

où $\{|\varphi_i\rangle\}$ est une base de l'espace des états atomiques. On suppose également que l'évolution est déterminée par un hamiltonien atomique H_{eff} indépendant du temps. La solution $|\varphi_0(t_i + \tau)\rangle$ de l'équation de Schrödinger (IV.3) est donc :

$$|\varphi_0(t_i + \tau)\rangle = e^{-iH_{\text{eff}}\tau/\hbar} |\varphi_0(t_i)\rangle \quad (\text{IV.20})$$

On note λ_k les valeurs propres de l'opérateur $(-iH_{\text{eff}}/\hbar)$. Ces valeurs propres sont décomposées en partie réelle x_k et partie imaginaire y_k

$$\lambda_k \equiv x_k + iy_k \quad (\text{IV.21})$$

Soit $P \equiv (p_{ij})$ la matrice de passage constituée des vecteurs propres associés aux λ_k et soit $P^{-1} \equiv (q_{ij})$, la matrice inverse de P . Soit $D \equiv (\delta_{ij}\lambda_j)$ la matrice diagonale contenant les valeurs propres. On a alors :

$$e^{-iH_{\text{eff}}\tau/\hbar} = P e^{D\tau} P^{-1} = \left(\sum_k p_{ik} e^{\lambda_k \tau} q_{kj} \right) \quad (\text{IV.22})$$

En utilisant (IV.19) et (IV.20), on déduit :

$$|\varphi_0(t_i + \tau)\rangle = \sum_i \left\{ \sum_j \left[\sum_k (p_{ik} e^{\lambda_k \tau} q_{kj}) \right] a_j(\tau = 0) \right\} |\varphi_i\rangle \quad (\text{IV.23})$$

L'équation (IV.17) montre que la fonction délai ne dépend que des populations π_e des niveaux excités $|\varphi_e\rangle$ et des durées de vie Γ_e de ces niveaux. A partir de (IV.23), on déduit donc la fonction délai $w_2(\tau)$ [12]:

$$w_2(\tau) = \sum_{\substack{e=\text{états} \\ \text{excités}}} \Gamma_e \pi_e(\tau) = \sum_{\substack{e=\text{états} \\ \text{excités}}} \Gamma_e \left| \sum_j \left[\sum_k (p_{ek} e^{\lambda_k \tau} q_{kj}) \right] a_j(\tau=0) \right|^2 \quad (\text{IV.24})$$

Cette expression peut se récrire de manière plus lisible :

$$w_2(\tau) = \sum_{\substack{e=\text{états} \\ \text{excités}}} \Gamma_e \left| \sum_k A_{ek} e^{\lambda_k \tau} \right|^2 \quad (\text{IV.25})$$

où on a défini A_{ek} par

$$A_{ek} \equiv \sum_j p_{ek} q_{kj} a_j(\tau=0) \quad (\text{IV.26})$$

On obtient finalement, en développant (IV.25) :

$$w_2(\tau) = \sum_{\substack{e=\text{états} \\ \text{excités}}} \Gamma_e \left[\sum_k |A_{ek}|^2 e^{2x_k \tau} + 2 \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} e^{(x_i + x_j) \tau} \text{Re} \left(A_{ei} \bar{A}_{ej} e^{i(y_i - y_j) \tau} \right) \right] \quad (\text{IV.27})$$

La fonction délai a donc une forme très "simple" dans le cas général : c'est une somme de modules au carré de sommes d'exponentielles complexes (équation (IV.25)). Elle apparaît aussi comme une somme d'exponentielles réelles, et d'exponentielles réelles modulées par des termes oscillants (équation (IV.27)). Les exponentielles réelles apparaissant dans (IV.27) sont nécessairement décroissantes. En effet, on doit avoir [13] :

$$w_2(\tau) \rightarrow 0 \text{ si } \tau \rightarrow \infty \quad (\text{IV.28})$$

puisque, plus le délai écoulé depuis l'émission du dernier photon spontané est grand, plus la probabilité est grande que l'atome ait émis un photon spontané (c'est-à-dire qu'il ait quitté E_0) Par conséquent, pour les délais longs, la population des états excités de la multiplicité à 0 photon E_0 et donc la fonction délai, décroissent aussi.

Nous pourrions obtenir analytiquement d'autres propriétés de la fonction délai dans le cas général. Cependant, il est plus commode d'illustrer ces propriétés avec l'exemple d'un atome à deux niveaux pour lequel la fonction délai peut se calculer explicitement de manière analytique.

[12] Noter que $w_2(\tau)$ dépend de l'état atomique $|\varphi_0(t_i)\rangle$ à la date t_i par l'intermédiaire des coefficients $a_j(\tau=0)$ et de l'hamiltonien effectif H_{eff} (cf. valeurs propres λ_k).

[13] S'il n'y a pas d'état piège (*i.e.* non radiatif) parfait.

3.2.2 Fonction délai d'un atome à deux niveaux

Pour illustrer quelques propriétés générales de la fonction délai, on considère l'exemple simple d'un atome à deux niveaux, pour lequel le calcul analytique de la fonction délai est possible.

On considère un niveau fondamental f et un niveau excité e de durée de vie Γ^{-1} . Ces deux niveaux sont couplés par un laser à résonance, avec une pulsation de Rabi Ω_1 . L'hamiltonien effectif de ce système s'écrit [CDG88] :

$$H_{\text{eff}} = \hbar \begin{pmatrix} -i\Gamma/2 & \Omega_1/2 \\ \Omega_1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

Si à $t = 0$, l'atome est dans l'état fondamental, la fonction d'onde atomique projetée sur la multiplicité à 0 photon s'écrit :

$$|\varphi_0(\tau)\rangle = a_f(\tau)|f\rangle + a_e(\tau)|e\rangle \quad (\text{IV.30})$$

L'équation de Schrödinger se résout sans difficulté. Les composantes $a_f(\tau)$ et $a_e(\tau)$ obéissent toutes deux à la même équation différentielle linéaire, du deuxième ordre, à coefficients constants :

$$2\ddot{y} + \Gamma\dot{y} + \frac{\Omega_1^2}{2}y = 0 \quad (\text{IV.31})$$

Deux cas sont à distinguer naturellement selon la valeur du couplage laser.

• Cas d'un couplage faible ($\Omega_1 < \Gamma/2$) :

Les solutions ($-\gamma_1$) et ($-\gamma_2$) de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (IV.31) sont alors réelles :

$$(-\gamma_1) = \frac{-\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 4\Omega_1^2}}{4} \quad (\text{IV.32.a})$$

$$(-\gamma_2) = \frac{-\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 4\Omega_1^2}}{4} \quad (\text{IV.32.b})$$

Les composantes $a_f(\tau)$ et $a_e(\tau)$ de la fonction d'onde atomique s'écrivent, en prenant en compte les conditions initiales ($a_f(0) = 1$ et $a_e(0) = 0$) :

$$a_f(\tau) = \frac{-\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} e^{-\gamma_1\tau} + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} e^{-\gamma_2\tau} \quad (\text{IV.33.a})$$

$$a_e(\tau) = i \frac{\Omega_1}{2} \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} (-e^{-\gamma_1\tau} + e^{-\gamma_2\tau}) \quad (\text{IV.33.b})$$

En utilisant les équations (IV.17) et (IV.18), on obtient la fonction délai suivante, représentée sur la figure (IV.5) :

[CDG88] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, Chapitre III, InterEditions et Editions du CNRS (1988).

$$w_2(\tau) = \Gamma |a_e(\tau)|^2 = \Gamma \left(\frac{\Omega_1}{2(\gamma_1 - \gamma_2)} \right)^2 (-e^{-\gamma_1 \tau} + e^{-\gamma_2 \tau})^2 \quad (\text{IV.34})$$

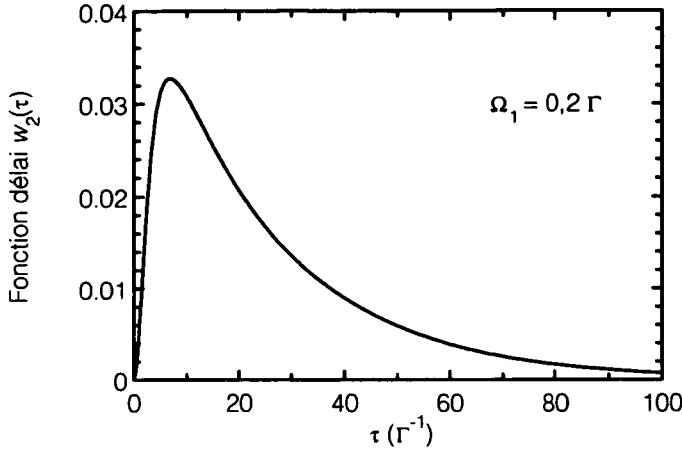


Figure IV.5 Fonction délai $w_2(\tau)$ pour un atome à deux niveaux faiblement couplé ($\Omega_1 < \Gamma/2$). À $\tau = 0$, un photon vient d'être émis. La probabilité d'émettre le prochain photon après un délai τ , initialement nulle (atome dans l'état fondamental), croît puis retombe à 0 (l'atome quitte la multiplicité à 0 photon par émission spontanée). Comme le couplage est faible, aucune oscillation n'apparaît. Paramètre : $\Omega_1 = 0,2 \Gamma$.

Sur la figure IV.5, on relève plusieurs caractéristiques importantes. Tout d'abord, la fonction délai est initialement à 0. Ceci traduit le fait que l'atome, juste après l'émission spontanée, est dans l'état fondamental. Il faut donc un certain temps pour l'exciter et lui permettre ainsi d'émettre un photon spontané. Cela se traduit par le phénomène connu de dégroupement des photons de fluorescence ("antibunching").

Le deuxième fait notable est que la fonction délai tend vers 0 aux temps longs. En effet, quand le temps augmente, l'atome quitte la multiplicité à 0 photon, en l'absence d'états pièges parfaits.

Enfin, aux temps longs ($\tau \gg (\gamma_1)^{-1}$), la fonction délai décroît exponentiellement avec le taux $2\gamma_2 \approx \frac{\Gamma}{2} \frac{2\Omega_1^2}{\Gamma^2}$, qui n'est autre que le taux de fluorescence.

• *Cas d'un couplage fort* ($\Omega_1 > \Gamma/2$) :

Les solutions ($-\gamma_1$) et ($-\gamma_2$) de l'équation caractéristique de (IV.31) sont alors :

$$-\gamma_1 = \frac{-\Gamma - i\delta}{4} \quad (\text{IV.35.a})$$

$$-\gamma_2 = \frac{-\Gamma + i\delta}{4} \quad (\text{IV.35.b})$$

où on a posé
$$i\delta \equiv \sqrt{\Gamma^2 - 4\Omega_1^2} \quad (\text{IV.36})$$

Les composantes de la fonction d'onde atomique s'écrivent, en prenant en compte la condition initiale :

$$a_f(\tau) = \left[\cos\left(\frac{\delta\tau}{4}\right) + \frac{\Gamma}{\delta} \sin\left(\frac{\delta\tau}{4}\right) \right] e^{-\Gamma\tau/4} \quad (\text{IV.37.a})$$

$$a_e(\tau) = -2i \frac{\Omega_1}{\delta} \sin\left(\frac{\delta\tau}{4}\right) e^{-\Gamma\tau/4} \quad (\text{IV.37.b})$$

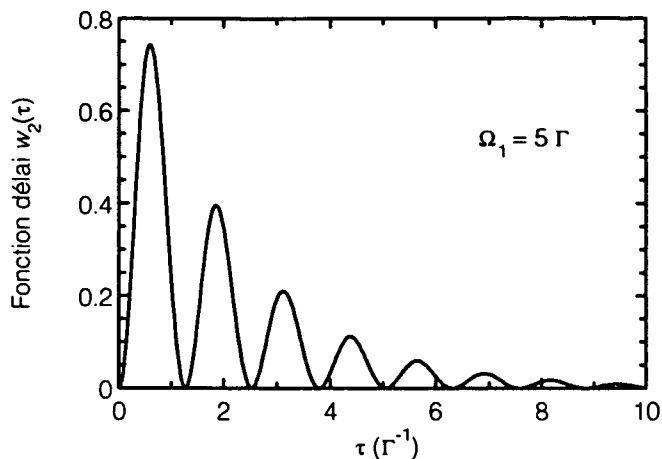


Figure IV.6 *Fonction délai $w_2(\tau)$ pour un atome à deux niveaux fortement couplé ($\Omega_1 > \Gamma/2$). A $\tau = 0$, un photon vient d'être émis. La probabilité d'émettre le prochain photon, initialement nulle (atome dans l'état fondamental), croît puis retombe à 0 (l'atome quitte la multiplicité à 0 photon par émission spontanée). On note l'apparition d'oscillations de Rabi dues au couplage fort. Paramètre : $\Omega_1 = 5 \Gamma$.*

En utilisant (IV.17) et (IV.18), on obtient la fonction délai suivante, représentée sur la figure IV.6 :

$$w_2(\tau) = \Gamma |a_e(\tau)|^2 = \Gamma \left(\frac{2\Omega_1}{\delta} \sin\left(\frac{\delta\tau}{4}\right) \right)^2 e^{-\Gamma\tau/2} \quad (\text{IV.38})$$

Outre que $w_2(\tau=0)$ et $w_2(\tau \rightarrow \infty) = 0$, on note la présence d'oscillations (amorties). Ces oscillations sont les oscillations de Rabi dues au couplage fort ($\Omega_1 > \Gamma/2$) qui provoque une modulation de la population excitée. Le taux d'amortissement des oscillations est $\Gamma/2$.

3.2.3 Fonctions délais pour les résonances noires sélectives en vitesse

On s'intéresse à la configuration des résonances noires sélectives en vitesse introduite au chapitre I, où une transition $J_f = 1 \leftrightarrow J_e = 1$, est excitée par deux lasers, en polarisation $\sigma_+ - \sigma_-$, se propageant en sens inverse. Pour traiter ce problème, on se restreint aux trois niveaux $\{|f_-, p - \hbar k\rangle, |e_0, p\rangle, |f_+, p + \hbar k\rangle\}$ (cf. figure I.2) ou encore $\{|e_0, p\rangle, |\psi_C(p)\rangle, |\psi_{NC}(p)\rangle\}$ (figure I.4). L'hamiltonien effectif de ce système est donné par les équations (I.9) et (I.13) dans les deux bases citées.

On peut écrire la fonction délai $w_2(\tau)$ sous la forme de l'équation (IV.25). Comme le système possède un seul état excité $|e_0, p\rangle$ de durée de vie Γ^{-1} , on a :

$$w_2(\tau) = \Gamma |A_{e1} e^{\lambda_1 \tau} + A_{e2} e^{\lambda_2 \tau} + A_{e3} e^{\lambda_3 \tau}|^2 \quad (\text{IV.39})$$

ce qui s'écrit encore (cf. équation (IV.27))

$$w_2(\tau) = \Gamma \left[\sum_{k=1}^3 |A_{ek}|^2 e^{2x_k \tau} + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 e^{(x_i + x_j) \tau} \text{Re}(A_{ei} \bar{A}_{ej} e^{i(y_i - y_j) \tau}) \right] \quad (\text{IV.40})$$

La fonction délai est donc la somme de trois exponentielles réelles et de trois exponentielles réelles modulées par des termes oscillants. On pourrait expliciter analytiquement la fonction délai puisque l'hamiltonien effectif H_{eff} n'est qu'une matrice 3×3 dont on peut calculer les valeurs propres et les vecteurs propres dans le cas général. Cependant, les formules obtenues sont si lourdes qu'elles sont inutilisables et nous préférons présenter un résultat numérique.

Numériquement, on calcule la fonction délai à l'aide de l'équation (IV.24) pour un atome dans l'état $|f_{-,p} - \hbar k\rangle$ ou, ce qui revient au même, dans l'état $|f_{+,p} + \hbar k\rangle$ (voir § IV.3.4 pour le choix de ces deux états). Les figures IV.7 à IV.10 représentent des fonctions délais sur toute une plage des paramètres pertinents, Ω_1 et p . Pour chaque couple de paramètres, on détermine les valeurs propres et vecteurs propres de H_{eff} . Le désaccord, qui ne joue pas un grand rôle, est toujours pris égal à 0.

La figure IV.7 représente le logarithme des fonctions délais, en fonction du délai τ , pour diverses impulsions dans le cas d'un couplage laser faible ($\Omega_1 = 0,1 \Gamma < \Gamma/2$, cf. équation (I.15)) et à grande échelle de temps. Examinons tout d'abord un cas perturbatif en impulsion (équation I.16), développé au chapitre I pour décrire la résonance noire. Dans ces cas ($p = 0,005 \hbar k$): la fonction délai calculée est essentiellement une somme de deux exponentielles, de constantes de temps $(\Gamma_C)^{-1}$ et $(\Gamma_{\text{NC}}(p))^{-1}$, $(\Gamma_{\text{NC}}(p))^{-1}$ correspondant à un temps très long. Ceci s'interprète aisément en remarquant que (cf. équations (I.11.a et b))

$$|f_{-,p} - \hbar k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\psi_C(p)\rangle + |\psi_{\text{NC}}(p)\rangle] \quad (\text{IV.41})$$

Or, dans ce régime perturbatif, les états $|\psi_C(p)\rangle$ et $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ sont peu contaminés et ont tous deux des durées de vie bien définies $((\Gamma_C)^{-1}$ et $(\Gamma_{\text{NC}}(p))^{-1})$.

Lorsque l'impulsion p croît ($p = 0,05 \hbar k$), la constante $(\Gamma_{\text{NC}}(p))^{-1}$ devient plus courte. L'émission spontanée diminue aux temps longs et augmente aux temps courts. Ceci s'interprète naturellement comme la "sortie" de la résonance noire : quand p devient plus grand que p_{raman} (cf. équation (I.27) et figure I.5), l'interférence destructive à l'origine de la résonance noire cesse de se produire. Les deux constantes de temps deviennent de moins en moins définies jusqu'à ce qu'apparaissent des oscillations (cas $p = 0,1 \hbar k$ et $p = 1 \hbar k$) qui correspondent à la précession de l'état atomique entre $|\psi_C(p)\rangle$ et $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$, due au couplage kp/M . Notons également que l'analyse perturbative qui prédit deux constantes de temps dans la fonction délai, rappelée au chapitre I, cesse d'être valable pour $p \geq 0,05 \hbar k$. Ceci est une impulsion petite, même à l'échelle des expériences actuelles. Ainsi, l'analyse perturbative, si elle est très intéressante pour comprendre la physique des états noirs, a un domaine de validité quantitativement très limité et ne suffit pas pour analyser les expériences, pour lesquelles les conditions (I.15) et (I.16) sont rarement satisfaites.

Quand on accroît encore l'impulsion ($p = 5 ; 10 ; 50 \hbar k$), la fluorescence augmente aux temps longs et diminue aux temps courts. Cette diminution du taux de fluorescence est simplement due à l'effet Doppler ($kp/M > \Gamma/2$).

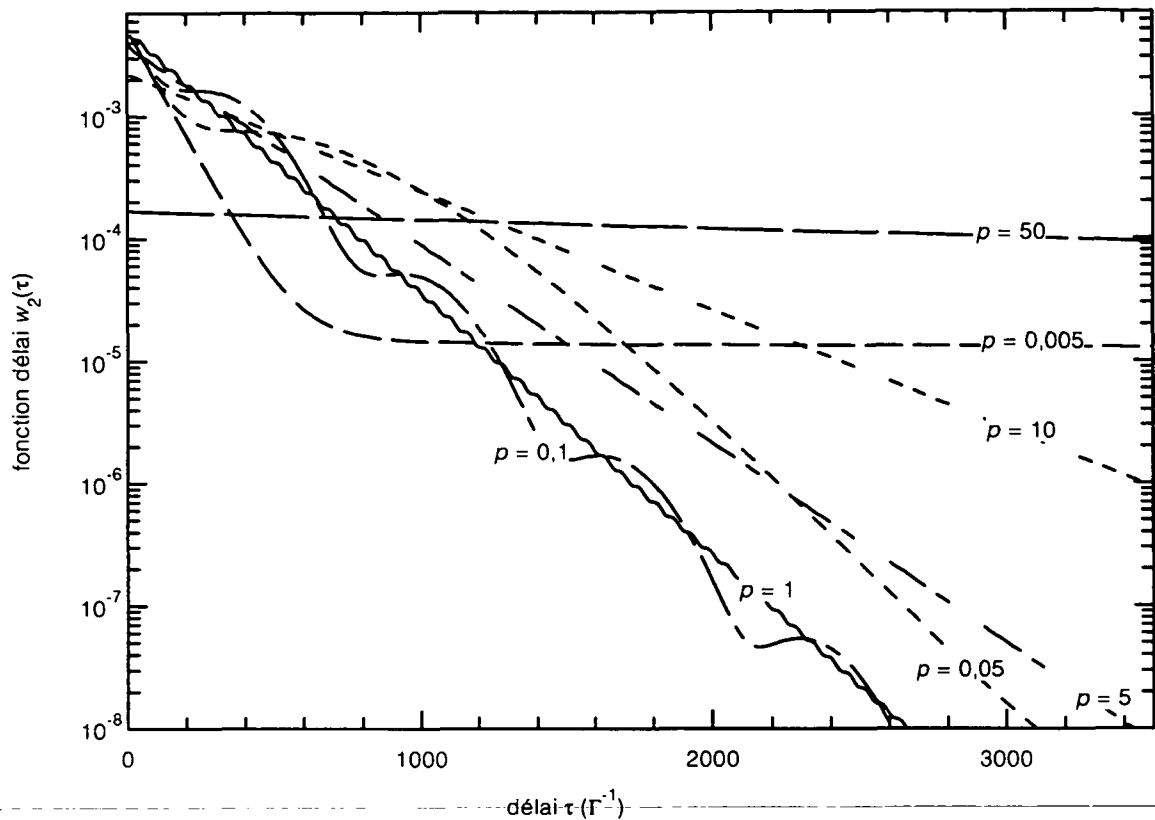


Figure IV.7 Fonctions délais $w_2(\tau)$ de l'état $|\psi_{\pm}, p \pm \hbar k\rangle$, dans un régime perturbatif en intensité laser ($\Omega_1 = 0,1 \Gamma < \Gamma/2$), pour diverses valeurs de l'impulsion p : représentation à grande échelle temporelle.

Les impulsions p sont en unité $\hbar k$. Dans le cas perturbatif en impulsion ($p = 0,005 \hbar k$), la fonction délai est essentiellement une somme de deux exponentielles décroissantes (sauf pour $\tau \approx 0$, cf. figure suivante). Le domaine d'impulsion où le couplage motionnel kp/M peut être traité perturbativement, et où on obtient deux exponentielles est très petit ($p \ll 0,05 \hbar k$). Des délais longs apparaissent dans deux situations différentes : le cas $p < p_{\text{Raman}}$ ($0,005 \hbar k$, par exemple), où la résonance noire vient réduire le taux de fluorescence des états $|\psi_{\text{NC}}(p \approx 0)\rangle$, et le cas $kp/M > \Gamma/2$ (cas $p = 5 ; 10 ; 50 \hbar k$) où l'effet Doppler diminue le taux de fluorescence global. Remarquer les oscillations (cas $p = 0,1 ; 1 \hbar k$) issues de la précession entre $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ et $|\psi_{\text{C}}(p)\rangle$, grâce au couplage motionnel kp/M . Lorsque p est plus grand, ces oscillations restent présentes, mais elles sont si rapides qu'elles n'apparaissent pas sur cette figure (elles apparaissent sur la figure suivante, qui détaille le voisinage de $\tau = 0$, pour $p = 50 \hbar k$.)

La figure IV.8 montre les fonctions délais pour $\Omega_1 = 0,1 \Gamma$ et différentes impulsions, pour des délais courts. On note encore que la fonction délai est nulle pour $\tau = 0$, ce qui traduit le fait que l'atome, initialement dans l'état fondamental, doit d'abord être excité avant de pouvoir émettre un photon spontané. La variation de p au voisinage de $p = 0$ a peu d'effet sur le comportement de la fonction délai aux temps courts, contrairement à ce qui se produit aux temps longs. En revanche, lorsque p devient très grand, on observe une diminution de la fonction délai aux temps courts, due à l'effet Doppler. Il apparaît également des oscillations amorties dues au couplage motionnel entre $|\psi_{NC}(p)\rangle$ et $|\psi_C(p)\rangle$, pour la courbe à $p = 50 \hbar k$.

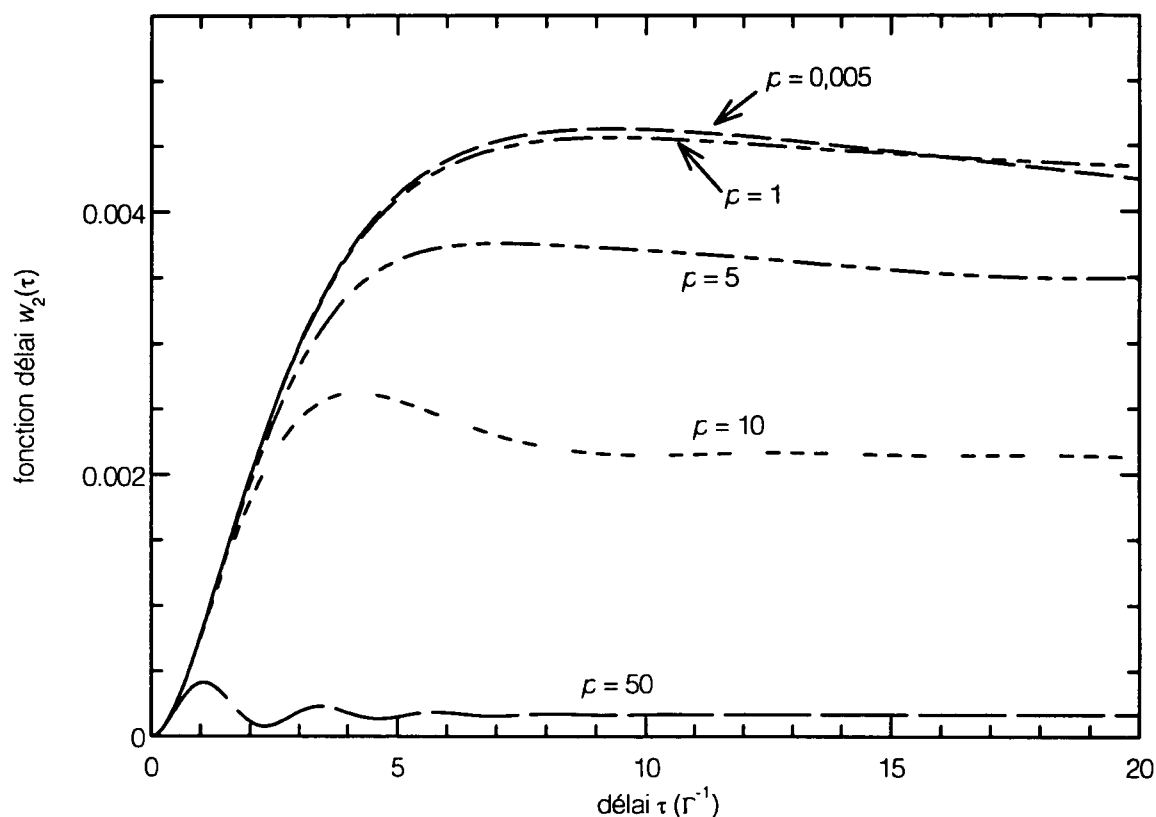


Figure IV.8 Fonctions délais $w_2(\tau)$ de l'état $|f_{\pm}, p \pm \hbar k\rangle$, dans un régime perturbatif en intensité laser ($\Omega_1 = 0,1 \Gamma \ll \Gamma/2$), pour diverses valeurs de l'impulsion p : représentation détaillée en $\tau \approx 0$.

Les impulsions p sont en unité $\hbar k$. Dans tous les cas, la fonction délai vaut 0 en $\tau = 0$, puisqu'il faut un certain temps pour exciter l'atome, avant qu'il puisse émettre un photon spontané. Ceci est à l'origine du dégroupement de photons ("antibunching"). Comme attendu, aucun effet notable n'apparaît aux courtes échelles de temps, quand p devient petit ($p < p_{\text{Raman}}$) de telle sorte que la résonance noire se produit (comparer au comportement aux temps longs qui varie fortement quand $p \rightarrow 0$, figure précédente). En revanche, on remarque une diminution globale de la fonction délai lorsque p croît ($p \geq \hbar k$), ce qui est dû simplement à l'effet Doppler. Lorsque p devient très grand (cas $p = 50 \hbar k$ par exemple), la fonction délai présente des oscillations amorties, dues à la précession entre $|\psi_{NC}(p)\rangle$ et $|\psi_C(p)\rangle$ causées par le couplage motionnel kp/M .

La figure IV.9 représente les fonctions délais pour différentes valeurs de Ω_1 et pour une impulsion donnée $p = 0,1 \hbar k$. Pour $\Omega_1 = 0,1 \Gamma$, on retrouve le régime perturbatif avec 2 constantes de temps décrit à propos de la figure IV.7 : la fonction délai prend des valeurs faibles mais significatives sur de longs intervalles de temps. Quand Ω_1 augmente, la fonction délai prend des valeurs plus importantes pour des délais petits, ce qui traduit l'augmentation du taux de fluorescence. Enfin, pour $\Omega \geq 0,5\Gamma$, des oscillations de Rabi amorties apparaissent. Noter également que la fonction délai croît d'autant plus vite au voisinage de $\tau = 0$ que Ω_1 est grand.

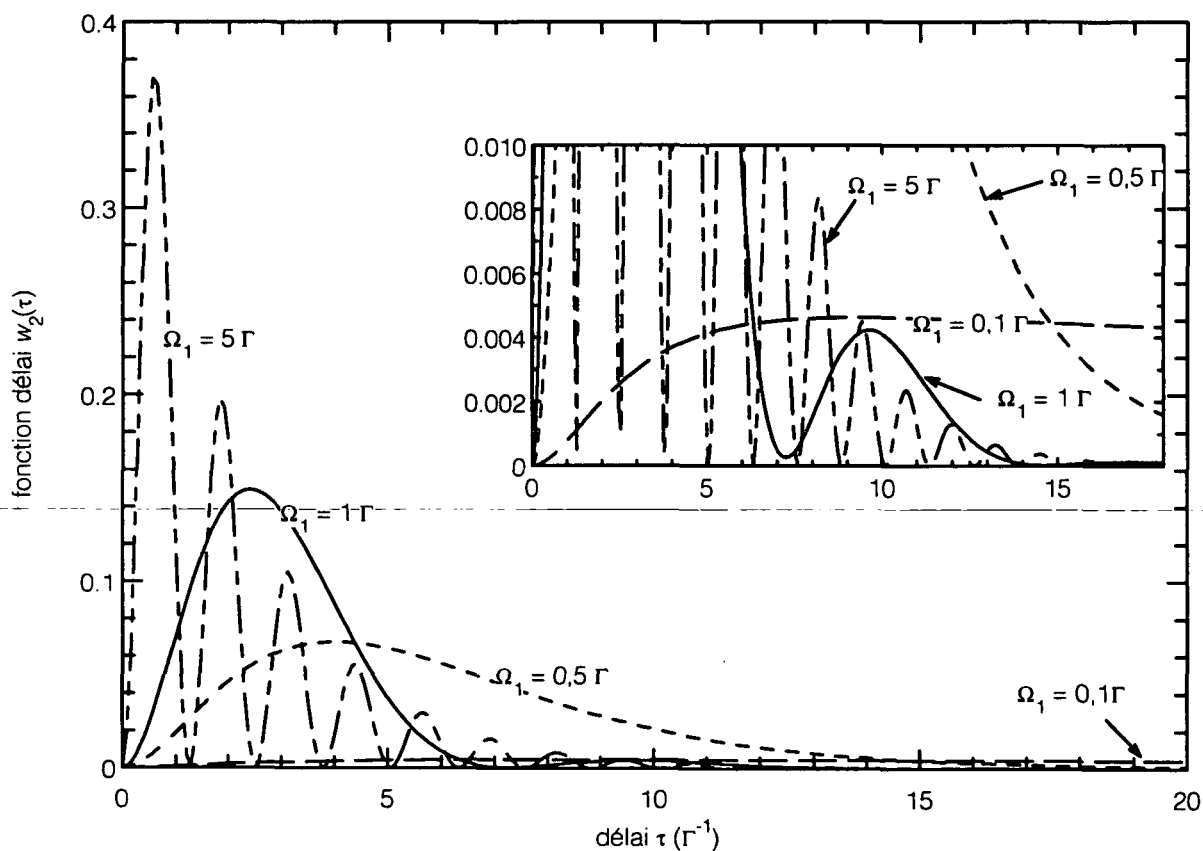


Figure IV.9 Fonctions délais $w_2(\tau)$ de l'état $|f_{\pm}, p \pm \hbar k\rangle$, pour différentes valeurs de la pulsation de Rabi Ω_1 , pour une impulsion $p = 0,1 \hbar k$. Au fur et à mesure que la pulsation de Rabi Ω_1 croît, la fonction délai $w_2(\tau)$ prend des valeurs de plus en plus importantes pour les délais courts, et de moins en moins importantes pour les délais longs : le taux de fluorescence augmente. Quand Ω_1 devient supérieur à $0,5 \Gamma$, on observe l'apparition d'oscillations de Rabi.

Enfin, la figure IV.10 montre une fonction délai pour des valeurs typiques ($\Omega_1 = 2 \Gamma$, $p = 15 \hbar k$), mais où aucun traitement perturbatif n'est possible. On note les oscillations rapides dues à (kp/M) , les oscillations plus lentes dues à Ω_1 , et l'amortissement de ces oscillations. Une telle fonction délai a une forme complexe. Or, pour les simulations Monte-Carlo, nous devons tirer aléatoirement des délais τ suivant cette loi de probabilité $w_2(\tau)$. Le paragraphe suivant décrit la construction d'une procédure simple et rapide de tirages aléatoires qui respecte la fonction délai, même dans les cas complexes.

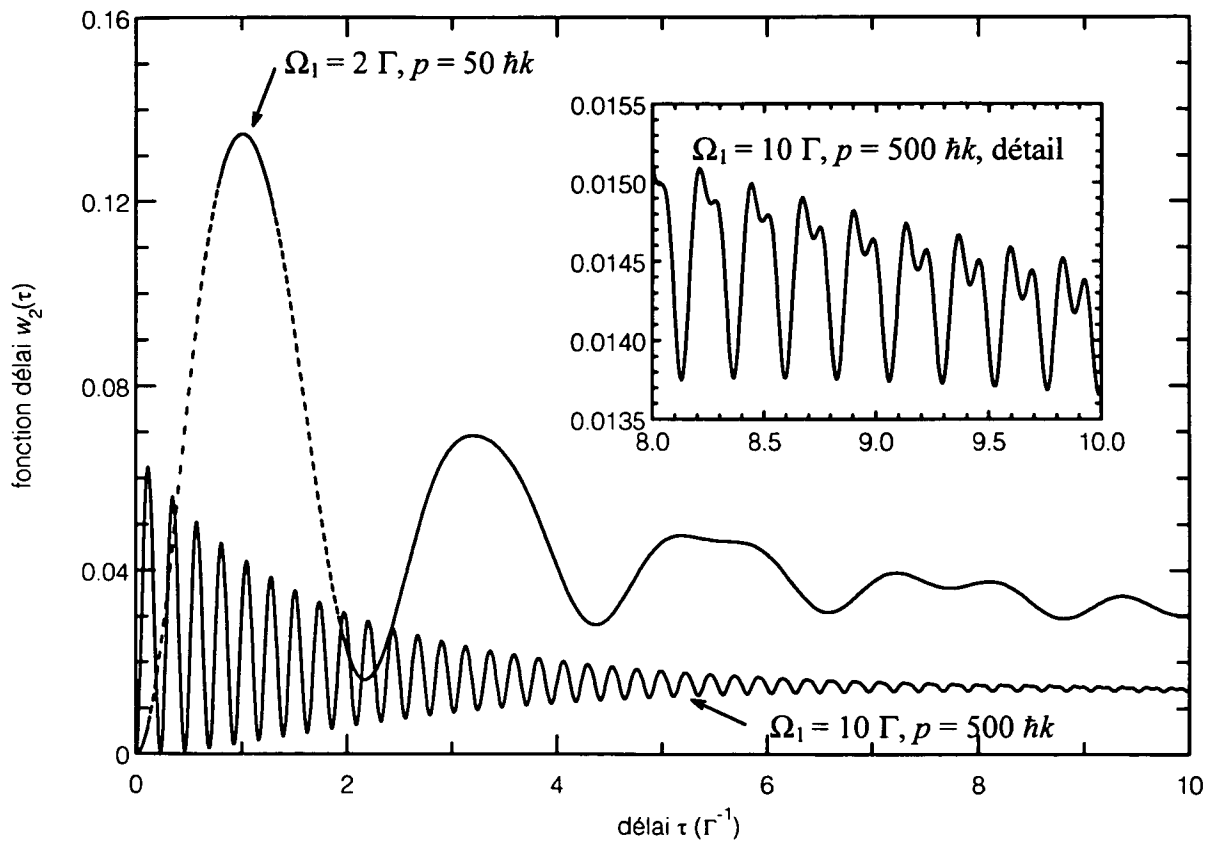


Figure IV.10 Fonctions délais $w_2(\tau)$ de l'état $|f_{\pm}, p \pm \hbar k\rangle$, dans des cas non particuliers. Dans tous les cas, la fonction délai $w_2(\tau)$ s'amortit vers 0 aux temps longs et $w_2(\tau = 0) = 0$. Cependant, la fonction délai peut prendre des formes complexes d'oscillations amorties mêlant différentes fréquences. Le problème qui se pose est celui du tirage aléatoire des délais τ suivant une loi de probabilité de forme complexe comme la fonction délai (cf. § IV.3.3).

3.3 Techniques de tirage des délais aléatoires

3.3.1 Présentation du problème

On veut obtenir une procédure de tirage aléatoire de délais τ qui respecte la loi de probabilité $w_2(\tau)$ qu'est la fonction délai. Ce point technique est crucial pour l'efficacité de la simulation : la façon dont on traite le problème fait que l'on arrive ou non à contourner la difficulté numérique majeure du refroidissement par résonances noires, la présence d'échelles très différentes à la fois en impulsion et en temps. Les méthodes les plus simples (§ IV.3.3.2) ne contournent pas totalement cette difficulté. Mais nous avons adapté une méthode de tirage aléatoire, la "méthode du rejet" [PTV92], à la forme analytique de la fonction délai (§ IV.3.2) et nous pouvons ainsi résoudre le problème des échelles (§ IV.3.3.4).

On trouve dans la littérature (voir le chapitre 7 de [PTV92]) des procédures pour générer des nombres aléatoires u entre 0 et 1, avec une probabilité uniforme :

$$P(u) = 1, \quad u \in [0,1[\quad (\text{IV.42})$$

Or, comme nous l'avons vu au paragraphe IV.3.2, les fonctions délais $w_2(\tau)$ peuvent être complexes et très différentes de la loi uniforme $P(u) = 1$. Cependant, on peut utiliser le générateur aléatoire uniforme pour générer $w_2(\tau)$. Pour cela, il faut trouver une fonction $\tau(u)$ qui associe, à tout nombre $u \in [0,1[$, un nombre $\tau(u) \in [0,+\infty[$, tel que la probabilité que $\tau \in [\tau, \tau + d\tau]$ soit égale à la probabilité que $u \in [u, u + du]$. Ceci se traduit par la simple formule de changement de variable :

$$w_2(\tau)d\tau = P(u)du \quad (\text{IV.43})$$

En intégrant cette relation, on obtient :

$$F(\tau) = \int_0^\tau w_2(\tau')d\tau' = \int_0^u P(u')du' \quad (\text{IV.44})$$

où $F(\tau)$ est une primitive de $w_2(\tau)$. En tenant compte de $P(u) = 1$, on obtient

$$F(\tau) = u \quad (\text{IV.45})$$

Le problème de la génération des délais aléatoires τ se ramène donc au calcul de la primitive $F(\tau)$ de la fonction délai $w_2(\tau)$ puis à l'inversion de cette primitive. L'algorithme de génération des délais aléatoires est alors [14] :

Générateur aléatoire utilisant la "méthode des transformations" (IV.46)

- (1) Tirer aléatoirement un nombre $u \in [0,1]$ selon $P(u) = 1$;
- (2) Prendre $\tau = F^{-1}(u)$.

Cette première approche conduit à deux solutions naturelles du problème, par des méthodes connues (§ IV.3.3.2). Mais, dans le cas numériquement très particulier des

[PTV92] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C, Second Edition*, Cambridge University Press (1992).

[14] Le terme "méthode des transformations" vient de [PTV92], § 7.2.

résonances noires sélectives en vitesse, ces solutions présentent des problèmes de discrétisation, qui rappellent la discrétisation dans la résolution des équations de Bloch optiques. Or, ce sont précisément ces problèmes de discrétisation qu'on voulait contourner par les simulations Monte-Carlo ! Aussi, nous avons préféré un algorithme plus original, qui ramène le problème au tirage aléatoire de points dans un plan (§ IV.3.3.4). Pour cela, on a dû d'abord mettre en place la méthode des transformations (IV.46) dans le cas simple où $w_2(\tau)$ est une somme d'exponentielles réelles (§ IV.3.3.3).

3.3.2 Première solution : utilisation de $\pi_0(t)$

Peut-on appliquer la méthode des transformations (IV.46) aux fonctions délais dans le cas des résonances noires sélectives en vitesse ? En d'autres termes, peut-on trouver la primitive $F(\tau)$ de $w_2(\tau)$ et inverser cette primitive ?

Le calcul de la primitive ne pose pas problème. En effet, l'équation (IV.40) montre que la fonction délai est une somme d'exponentielles réelles qui s'intègrent immédiatement et de termes du type $g(\tau) = e^{-\Gamma\tau}\sin\omega\tau$ dont la primitive est de la forme

$$G(\tau) = \frac{-\Gamma^{-1}}{1 + (\omega / \Gamma)^2} e^{-\Gamma\tau}\sin\omega\tau - \frac{\omega/\Gamma^2}{1 + (\omega / \Gamma)^2} e^{-\Gamma\tau}\cos\omega\tau \quad (\text{IV.47})$$

En fait, on peut se dispenser de ce calcul de primitive grâce à l'argument physique (§ IV.2.2) qui montre que la population $\pi_0(\tau)$ de la multiplicité à 0 photon est elle-même une primitive de $(-w_2(\tau))$. En intégrant l'équation (IV.7), on obtient :

$$F(\tau) = 1 - \pi_0(\tau) \quad (\text{IV.48})$$

Les termes $\pi_0(\tau)$ et $F(\tau)$ se calculent facilement à l'aide de l'équation (IV.4), sans passer par $w_2(\tau)$. En revanche, l'inversion analytique de $F(\tau)$, c'est-à-dire d'une somme d'exponentielles et de termes oscillants amortis de la forme $G(\tau)$, est problématique. Cependant, cette inversion est possible : $w_2(\tau)$ étant positive, sa primitive $F(\tau)$ est monotone (croissante) et donc la fonction $F(\tau)$ est bien inversible.

On peut alors envisager d'inverser $F(\tau)$ numériquement. Deux démarches sont possibles, mais aucune n'est entièrement satisfaisante.

- **Première démarche : tabuler les fonctions $F^{-1}(u)$**

On retombe alors sur le problème des approches "locales" du type équations de Bloch. En effet, à chaque impulsion p correspond une fonction $F(\tau)$. On va donc être contraint de discrétiser l'espace des impulsions, ce qui, dans le cas du refroidissement par résonances noires, exige rapidement un très grand nombre de points, vu l'apparition d'échelles grandes et d'échelles petites (cf. § I.3.2 et IV.1). Le même problème apparaît avec la discrétisation en temps τ (ou en u).

Ainsi, la tabulation des fonctions $F^{-1}(u)$ réintroduit des discrétisations, alors qu'un des principaux atouts du Monte-Carlo par la fonction délai, par rapport aux équations de Bloch ou au Monte-Carlo sur fonctions d'onde, était l'absence de discrétisation dans le principe de la méthode. Notons toutefois que pour la majorité des problèmes, il existe un état stationnaire avec des échelles caractéristiques bien définies,

qui ne tendent pas vers des singularités. La tabulation, une fois pour toutes, des fonctions $F^{-1}(u)$ est alors éventuellement une méthode efficace.

• **Deuxième démarche : pour chaque impulsion atteinte par l'atome, tirer un nombre aléatoire u et résoudre numériquement $F(\tau) = u$ pour trouver le délai τ .**

Cette méthode évite toute discrétisation en p . Cependant, la résolution numérique de $F(\tau) = u$ réintroduit une sorte de discrétisation en temps, et on est à nouveau confronté au problème des échelles de temps différentes. Toutefois, si on résout $F(\tau) = u$, par exemple par dichotomie, en 20 étapes, la dichotomie permet de franchir 6 ordres de grandeur ($2^{20} \approx 10^6$), ce qui est éventuellement suffisant pour la plupart des cas. En outre, dans les équations de Bloch optiques, il apparaissait des fréquences kp/M élevées qu'il était impératif de traiter correctement avec des pas de temps d'intégration petits, sous peine de voir le calcul numérique diverger. Ici, ces termes induisent une modulation petite et rapide de la fonction délai (cf. figure IV.7) que l'on peut négliger. L'échelle de temps la plus courte est donc bornée : c'est Γ^{-1} .

Cette deuxième démarche nous semble donc applicable avec une certaine efficacité, si on accepte certaines approximations dues à la résolution numérique de $F(\tau) = u$. Cependant, nous ne l'avons pas appliquée car nous avons trouvé une procédure à la fois plus rapide et exacte.

3.3.3 Cas d'une fonction délai exponentielle ou somme d'exponentielles

La fonction délai $w_2(\tau)$, dans le cas général (*i.e.* non perturbatif) du refroidissement par résonances noires, n'est pas une fonction simple (cf. figure IV.10) dont on trouverait facilement une primitive $F(\tau)$ que l'on saurait ensuite inverser pour appliquer l'algorithme (IV.46). Cependant, $w_2(\tau)$ "ressemble" à une somme d'exponentielles, aux termes de modulation près, comme le montre l'équation (IV.40). Intéressons-nous donc au problème du tirage aléatoire d'un nombre t selon une loi de probabilité $w(t)$ qui est une *somme d'exponentielles*. Nous verrons au paragraphe suivant comment cela nous aide à traiter le problème de la fonction délai.

• **Si $w(t)$ est une simple exponentielle,**

$$\boxed{w(t) = \Gamma e^{-\Gamma t}, \quad t \in [0, +\infty[} \quad (\text{IV.49})$$

la méthode des transformations s'applique trivialement (voir par exemple [PTV92], § 7.2). En effet, on a :

$$F(t) = \int_0^t w(t') dt' = 1 - e^{-\Gamma t} \quad (\text{IV.50})$$

d'où on tire

$$\boxed{F^{-1}(u) = -\frac{1}{\Gamma} \ln(1-u)} \quad (\text{IV.51})$$

Connaissant analytiquement la fonction $F^{-1}(u)$, il suffit de générer des nombres aléatoires u uniformément distribués sur $[0, 1[$ pour obtenir des nombres $t = F^{-1}(u)$ distribués selon $w(t)$ (algorithme (IV.46)).

• Si $w(t)$ est une somme de N exponentielles, de durées de vies $(\Gamma_i)^{-1}$ et de poids p_i (avec $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^N p_i = 1$) :

$$w(t) = \sum_{i=1}^N p_i \Gamma_i e^{-\Gamma_i t}, \quad t \in [0, +\infty[\quad (\text{IV.52})$$

alors, l'algorithme suivant, justifié ci-dessous, permet de générer des nombres aléatoires t selon $w(t)$:

Générateur aléatoire pour une somme d'exponentielles (IV.53)

- (1) Choisir aléatoirement une des exponentielles en fonction des probabilités p_i ;
- (2) Tirer aléatoirement un nombre u équiparti sur $[0 ; 1]$;
- (3) Prendre $t = -\frac{1}{\Gamma_i} \ln(1-u)$.

Une fois que l'on a choisi une des exponentielles (étape (1)), les étapes (2) et (3) correspondent à la méthode des transformations.

Montrons que la loi de probabilité $P(t)$ générée par le schéma (IV.53) correspond bien à $w(t)$ défini par (IV.52) :

Soit $P(i)$ la probabilité de l'événement "tirage de la i^{e} exponentielle" au cours de l'étape (1). Les tirages des exponentielles sont des événements mutuellement incompatibles (si on tire l'exponentielle i , on ne tire pas une exponentielle $j \neq i$: $P(i \cap j) = 0$). La réunion de ces événements constitue l'ensemble des événements possibles ($\sum_i P(i) = 1$). On a donc un "système complet" événements, pour lequel on peut appliquer le théorème des "probabilités totales"

$$P(t) = \sum_{i=1}^N P(t/i)P(i) \quad (\text{IV.54})$$

où $P(i)$ est la probabilité d'avoir tiré la i^{e} exponentielle :

$$P(i) = p_i \quad (\text{IV.55})$$

et $P(t/i)$ est la probabilité de tirer le nombre t au cours des étapes (2) et (3), sachant que la i^{e} exponentielle a été choisie. Or, comme les étapes (2) et (3) correspondent à l'algorithme (IV.46) appliqué à la loi $w_i(t) = \Gamma_i e^{-\Gamma_i t}$, nous avons :

$$P(t/i) = \Gamma_i e^{-\Gamma_i t} \quad (\text{IV.56})$$

Des trois équations précédentes, il découle

$$P(t) = \sum_{i=1}^N p_i \Gamma_i e^{-\Gamma_i t} = w(t) \quad (\text{IV.57})$$

ce qu'il fallait démontrer.

En conclusion, on sait générer simplement des nombres aléatoires suivant une loi de probabilité qui est une somme d'exponentielles (équation (IV.52)) à l'aide de l'algorithme (IV.53). Il faut maintenant relier ce type de tirages à la fonction délai.

3.3.4 Méthode du "rejet"

La "méthode du rejet" (§ 7.3 de [PTV92] [PTV92]) est une méthode simple, générale, mais pas toujours efficace, de tirage aléatoire suivant une loi de probabilité $w(t)$ quelconque. Dans ce paragraphe, nous allons exposer cette méthode, la démontrer et la mettre en œuvre pour la fonction délai. Nous discuterons alors son efficacité et nous montrerons comment le problème numérique essentiel du refroidissement par résonances noires, l'existence d'échelles très différentes, se résout naturellement, sans aucune approximation.

La méthode du rejet consiste tout d'abord à passer du problème à une dimension de génération de nombres aléatoires t selon une loi compliquée $w(t)$ au problème à deux dimensions de génération de points aléatoires $Q(x,y)$ équipartis dans un plan (figure IV.11). Considérons en effet l'ensemble A_w des points qui se trouvent entre l'axe Ox et $w(x)$ ou, plus précisément :

$$A_w = \{Q(x,y) / x \in [0, +\infty[, y \leq w(x)\} \quad (\text{IV.58})$$

Il est intuitivement évident que si on sait générer un ensemble de points $Q(x_i, y_i)$ répartis de manière uniforme sur la surface A_w , l'ensemble des abscisses x_i aura la loi de probabilité $w(x)$

$$P(x) = w(x) \quad (\text{IV.59})$$

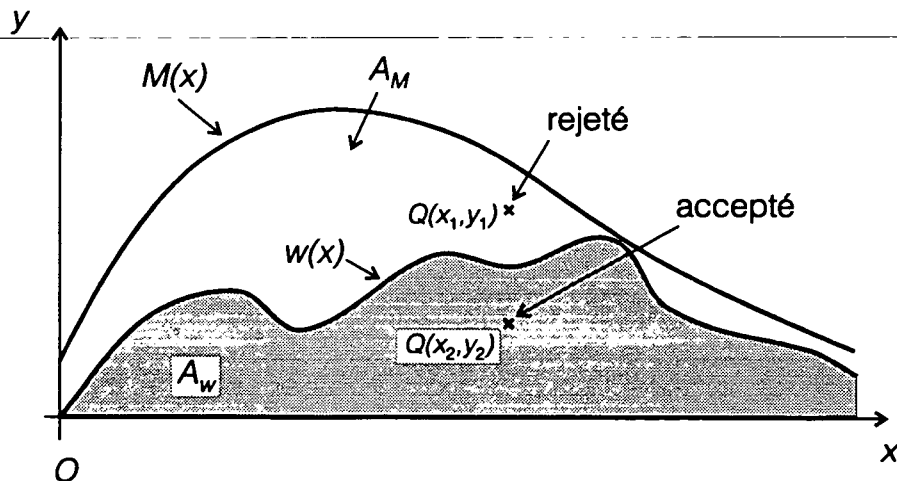


Figure IV.11 *Méthode du rejet*. Pour tirer des nombres x selon la loi de probabilité $w(x)$, on se ramène à un problème dans le plan. On tire aléatoirement des points répartis de manière uniforme dans le plan et on sélectionne les abscisses de ceux qui se trouvent "sous" la fonction $w(x)$, *i.e.* les abscisses des points qui appartiennent à la surface grisée A_w . Pour ne pas tirer trop de points inutiles hors de A_w , on utilise une fonction auxiliaire $M(x)$, qui majore $w(x)$, et telle qu'on sache tirer des points répartis de manière uniforme "sous" $M(x)$, c'est-à-dire sur la surface A_M .

Donc, si on sait générer ces couples (x_i, y_i) aléatoires, en ne conservant que les x_i , on a résolu le problème posé. Comment générer ces points ? On peut penser tirer des points aléatoirement dans tout le plan et sélectionner uniquement ceux qui se trouvent dans A_w :

- tirer un couple $(x, y) \in \mathbf{R}^2$
- si $(x, y) \in A_w$, garder x , sinon rejeter x .

Cette procédure, correcte en principe, serait très inefficace si on tirait des points dans tout le plan, puisque statistiquement très peu de points se trouveraient sur A_w . En revanche, on peut imaginer que l'on sait tirer des points aléatoirement sur une zone du plan, notée A_M , qui inclut A_w et aussi petite que possible pour limiter le nombre de tirages inutiles. La suite du paragraphe consiste à affiner cette procédure en choisissant une aire A_M adéquate.

En général, cette aire sera définie par une fonction $M(x)$ qui majore $w(x)$ (figure IV.11)

$$A_M = \{Q(x, y) / x \in [0, +\infty[, 0 \leq y \leq M(x)\} \quad (\text{IV.60})$$

avec

$$M(x) \geq w(x), \quad \forall x. \quad (\text{IV.61})$$

On applique alors la procédure :

- (1) tirer un point (x, y) uniformément réparti sur A_M ; (IV.62)
- (2) si $(x, y) \in A_w$, garder x , sinon rejeter x .

Le problème est donc maintenant de tirer les points sur A_M (étape (1)). Or, on a la liberté du choix de la fonction $M(x)$ et on peut prendre une fonction à laquelle s'applique la méthode (IV.46) (*i.e.* une fonction $M(x)$ pour laquelle on peut calculer la primitive $F(x)$ et l'inverse $F^{-1}(u)$ de cette primitive). Comme la norme de $M(x)$ n'est pas en général égale à 1 ($A_M \geq A_w = 1$), il faut légèrement modifier la première étape de la procédure (IV.46) pour tenir compte de $A_M \geq 1$. La première étape de (IV.62) est donc la suivante :

Génération de points aléatoirement répartis sur A_M :

- tirer l'abscisse $x \in [0, +\infty[$ du point Q selon $P(x) = M(x)/A_M$:
 - (a) tirer aléatoirement $u \in [0, A_M]$ selon $P(u) = 1/A_M$;
 - (b) prendre $x = F^{-1}(u)$;
- tirer l'ordonnée $y \in [0, M(x)]$ du point Q selon $P(y) = 1/M(x)$:
 - (a) tirer aléatoirement $u' \in [0, 1]$ selon $P(u') = 1$;
 - (b) prendre $y = u' \times M(x)$.

Cette méthode peut paraître inefficace puisqu'il faut générer en moyenne $2 \times A_M$ nombres aléatoires pour n'en conserver qu'un (le facteur 2 vient du fait qu'on doit tirer au minimum 2 nombres, x et y , pour générer 1 valeur x) . En fait, cette procédure est beaucoup plus efficace que les méthodes du paragraphe IV.3.3.2 puisqu'on n'a à calculer ni la primitive de $w(x)$, ni à inverser cette primitive. Aucune tabulation n'est nécessaire, aucune équation n'est à résoudre numériquement. La procédure consiste essentiellement en l'évaluation de trois fonctions connues analytiquement $F^{-1}(u)$, $M(x)$ et $w(x)$, ce qui est

très simple. Cette procédure ne fait en outre aucune approximation et permet de reconstruire *exactement* $w(x)$ dans la limite d'un grand nombre de tirages.

Finalement, la méthode du rejet se résume ainsi :

Méthode du rejet (cf. figure IV.11) : (IV.63)

- (1) choisir une fonction $M(x)$ telle que :
 - $M(x) \geq w(x), \forall x$;
 - $F(x) = \int_0^x M(x') dx'$ soit calculable ;
 - $F^{-1}(u)$ soit calculable ;
 - $A_M = \int_0^\infty M(x) dx$ soit le plus petit possible ;
- (2) tirer un point $Q(x,y)$ sur $A_M = \{Q(x,y) / x \geq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq M(x)\}$ avec une probabilité uniforme :
 - (2.1) tirer l'abscisse $x \in [0, +\infty[$ du point Q selon $P(x) = M(x)/A_M$:
 - (2.1.1) tirer aléatoirement $u \in [0, A_M]$ selon $P(u) = 1/A_M$;
 - (2.1.2) prendre $x = F^{-1}(u)$;
 - (2.2) tirer l'ordonnée $y \in [0, M(x)]$ du point Q selon $P(y) = 1/M(x)$:
 - (2.2.1) tirer aléatoirement $u' \in [0, 1]$ selon $P(u') = 1$;
 - (2.2.2) prendre $y = u' \times M(x)$;
- (3) si $y \leq w(x)$, garder x ("bon" nombre aléatoire) ;
 si $y > w(x)$, rejeter x ("mauvais" nombre aléatoire) et recommencer à (2) ;
- (4) recommencer à (2) pour le nombre aléatoire suivant.

La méthode du rejet n'est pas démontrée dans [PTV92]. Comme cette méthode est au centre de la simulation présentée ici, nous en donnons ci-dessous une brève démonstration. Tout d'abord, nous considérons comme évident que si les points $Q(x,y)$ sont tirés avec une loi de probabilité uniforme sur la surface A_M , alors les abscisses de ces points sont distribuées suivant la loi de probabilité $M(x)/A_M$. De même, nous considérons comme évident que les abscisses des points de A_M qui vérifient $y \leq w(x)$ (*i.e.* les abscisses des points de A_M) sont distribuées suivant la loi $w(x)$. Il reste donc à démontrer (cf. figure IV.12) que la méthode du rejet génère bien des points $Q(x,y)$ uniformément répartis sur A_M (étapes (2.1) et (2.2) de la procédure (IV.63)).

Démonstration :

Calculons la probabilité $dP(Q(x,y))$ qu'un point $Q(x,y)$, tiré aléatoirement selon l'étape (2) de la méthode du rejet se trouve dans $[x', x'+dx] \times [y', y'+dy]$

$$dP(Q(x, y)) = P(Q(x, y) \in [x', x'+dx] \times [y', y'+dy]) \quad (\text{IV.64})$$

Il est évident que

$$dP(Q(x, y)) = P(x \in [x', x'+dx]) \times P(y \in [y', y'+dy]) \quad (\text{IV.65})$$

Or, par définition, $P(x \in [x', x'+dx])$ est le rapport du nombre de cas favorables ($M(x')dx$, grisé sur la figure IV.12), sur le nombre de cas possibles (A_M) :

$$P(x \in [x', x'+dx]) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{M(x')dx}{A_M} \quad (\text{IV.66})$$

Ceci traduit le fait que l'étape (2.1) de (IV.57) réalise le tirage d'un nombre x , selon la loi de probabilité $M(x)/A_M$. De même, pour $P(y \in [y', y'+dy])$, on a (cf. figure IV.12) :

$$P(y \in [y', y'+dy]) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{dy}{M(x')} \quad (\text{IV.67})$$

En appliquant les expressions (IV.66) et (IV.67) dans (IV.65), on obtient

$$dP(Q(x, y)) = \frac{M(x')dx}{A_M} \times \frac{dy}{M(x')} = \frac{dx dy}{A_M} \quad (\text{IV.68})$$

La loi $P(Q(x, y))$, définie par l'étape (2) de la méthode du rejet, est donc bien une loi de probabilité uniforme sur A_M , ce qu'il fallait démontrer.

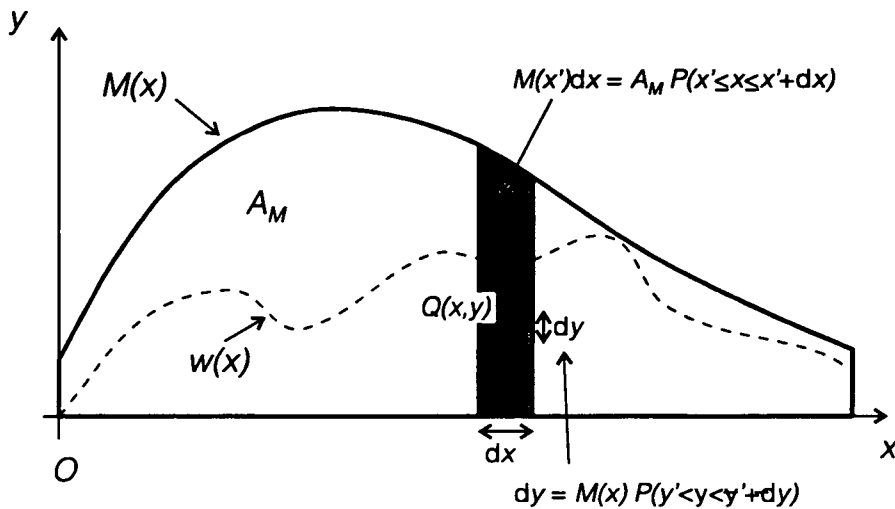


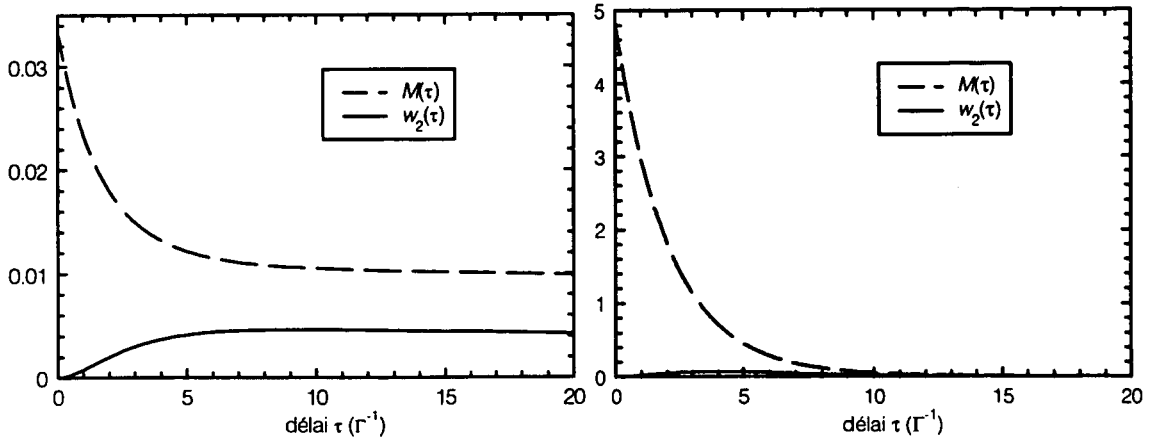
Figure IV.12 *Démonstration de la méthode du rejet.* Le point essentiel est de démontrer que l'étape (2) de la méthode du rejet (IV.63) permet bien de tirer aléatoirement des points $Q(x, y)$ uniformément répartis sur l'aire $A_M = \{Q(x, y) / x \geq 0, 0 \leq y \leq M(x)\}$. La fonction $M(x)/A_M$ s'interprète comme une loi de probabilité. L'aire en gris foncé $M(x')dx$ est $A_M \times$ (probabilité de tirer l'abscisse x à dx près). Le segment dy s'interprète comme $M(x) \times$ (probabilité de tirer le nombre y à dy près).

3.3.5 Application de la méthode du "rejet" aux résonances noires

Pour appliquer la méthode du rejet, il suffit de trouver une fonction $M(\tau)$ qui majore $w_2(\tau)$ et pour laquelle on sache effectuer les tirages aléatoires sur la surface A_M définie au paragraphe précédent.

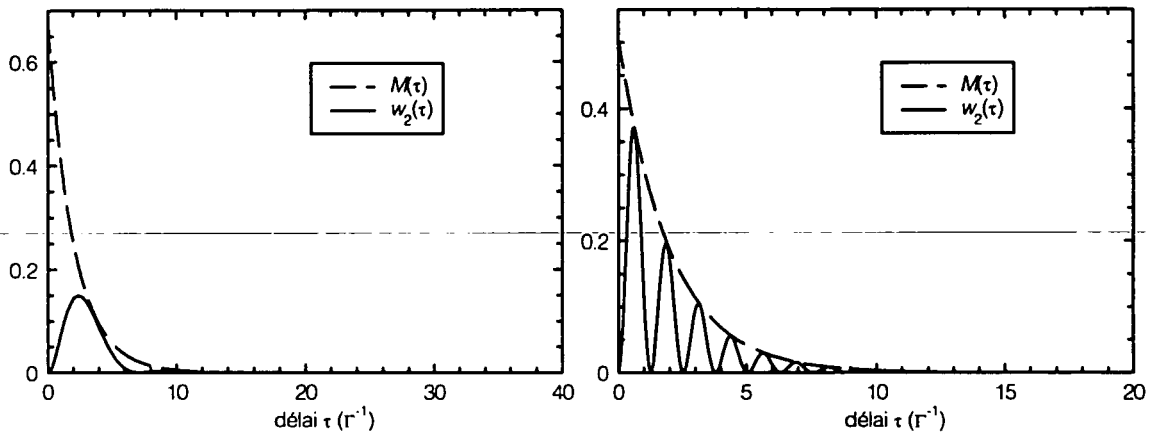
Rappelons donc la forme de la fonction délai :

$$w_2(\tau) = \Gamma \left[\sum_{k=1}^3 |A_{ek}|^2 e^{2x_k \tau} + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 e^{(x_i + x_j) \tau} \operatorname{Re} \left(A_{ei} \bar{A}_{ej} e^{i(y_i - y_j) \tau} \right) \right] \quad (\text{IV.40}) \text{ (rappel)}$$



(a) $p = 0,1 \hbar k, \Omega_1 = 0,1 \Gamma, A_M/A_w \approx 2,2.$

(b) $p = 0,1 \hbar k, \Omega_1 = 0,5 \Gamma, A_M/A_w \approx 10,6.$



(c) $p = 0,1 \hbar k, \Omega_1 = 1 \Gamma, A_M/A_w \approx 1,9.$

(d) $p = 0,1 \hbar k, \Omega_1 = 5 \Gamma, A_M/A_w \approx 1,5.$

Figure IV.13 Exemples de fonctions délais $w_2(\tau)$ et de fonctions majorantes $M(\tau)$. L'aire de la fonction majorante est notée A_M , celle de la fonction délai est $A_w = 1$. Dans de nombreux cas (cf. (c) et (d)), $A_M/A_w \leq 2$, ce qui signifie qu'en tirant en moyenne au plus deux points sur A_M , on génère de manière exacte un délai selon $w_2(\tau)$. Cependant, pour certains couples de valeurs (p, Ω_1), on observe qu'il faut tirer beaucoup plus de points (typiquement quelques dizaines). En pratique, ces cas sont suffisamment rares pour ne pas ralentir significativement les simulations.

On peut récrire le dernier terme sous la forme :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(A_{ei}\bar{A}_{ej}e^{i(y_i-y_j)\tau}\right) &= \operatorname{Re}\left(A_{ei}\bar{A}_{ej}\right)\cos\left((y_i-y_j)\tau\right) \\ &\quad -I_m\left(A_{ei}\bar{A}_{ej}\right)\sin\left((y_i-y_j)\tau\right) \end{aligned} \quad (\text{IV.69})$$

Or, si on définit

$$M(\tau) = \Gamma\left[\sum_{k=1}^3 |A_{ek}|^2 e^{2x_k\tau} + 2\sum_{i,j=1}^3 B_{ij} e^{(x_i+x_j)\tau}\right] \quad (\text{IV.70})$$

en ayant posé [15]

$$B_{ij} = \left|\operatorname{Re}\left(A_{ei}\bar{A}_{ej}\right)\right| + \left|I_m\left(A_{ei}\bar{A}_{ej}\right)\right| \quad (\text{IV.71})$$

alors, $M(\tau)$ est bien une fonction qui majore $w_2(\tau)$. On en voit une illustration sur la figure IV.13.

La fonction $M(\tau)$ est aisément intégrable, mais l'inverse de sa primitive $F(\tau)$ n'est pas calculable aisément. Cependant, $M(\tau)/A_M$ est une somme d'exponentielles et nous avons vu au paragraphe IV.3.3.3 comment réaliser les tirages aléatoires pour de telles lois de probabilité.

Nous sommes donc parvenus à un algorithme de tirage aléatoire des délais qui repose sur la méthode du rejet (IV.63), le calcul de la fonction délai par l'équation (IV.40) et d'une fonction majorante, définie par les équations (IV.70) et (IV.71), qui est une somme d'exponentielles. Estimons maintenant l'efficacité de la méthode.

3.3.6 Efficacité de la méthode du rejet : traitement des échelles différentes

Le premier critère à satisfaire pour la méthode de tirage des délais est l'exactitude. Pour vérifier que les délais générés reproduisent bien la fonction délai $w_2(\tau)$, on s'est placé dans un cas *a priori* délicat, où il apparaît des échelles de temps à la fois grandes et petites, ainsi que des oscillations de la fonction délai. On peut vérifier qu'au bout d'un grand nombre de tirages, l'histogramme des délais tirés reconstitue exactement la fonction délai. Ceci apparaît clairement sur la figure IV.14. Bien qu'il y ait deux échelles de temps séparées de 5 ordres de grandeur dans la fonction délai, il faut seulement tirer en moyenne 1,5 point sur A_M , pour générer 1 délai, sans aucune approximation.

[15] On obtiendrait une majoration plus fine en posant $B_{ij} = \left(\left|\operatorname{Re}\left(A_{ei}\bar{A}_{ej}\right)\right|^2 + \left|I_m\left(A_{ei}\bar{A}_{ej}\right)\right|^2\right)^{1/2}$.

Figure IV.14 Délais tirés par la méthode du rejet. On teste la capacité à tirer des délais selon une loi complexe présentant à la fois des oscillations rapides (de période $1,2 \Gamma^{-1}$) et une constante de temps longue ($2,2 \times 10^5 \Gamma^{-1}$ environ). Les paramètres sont ceux de la figure IV.13.d ($p = 0,1 \hbar k$, $\Omega_1 = 5 \Gamma$) et on a tiré aléatoirement 50 000 délais selon la fonction délai $w_2(\tau)$ correspondante. Malgré la complexité de la fonction délai, il a fallu tirer seulement 1,5 points en moyenne sous la fonction majorante $M(\tau)$ pour obtenir un délai acceptable.

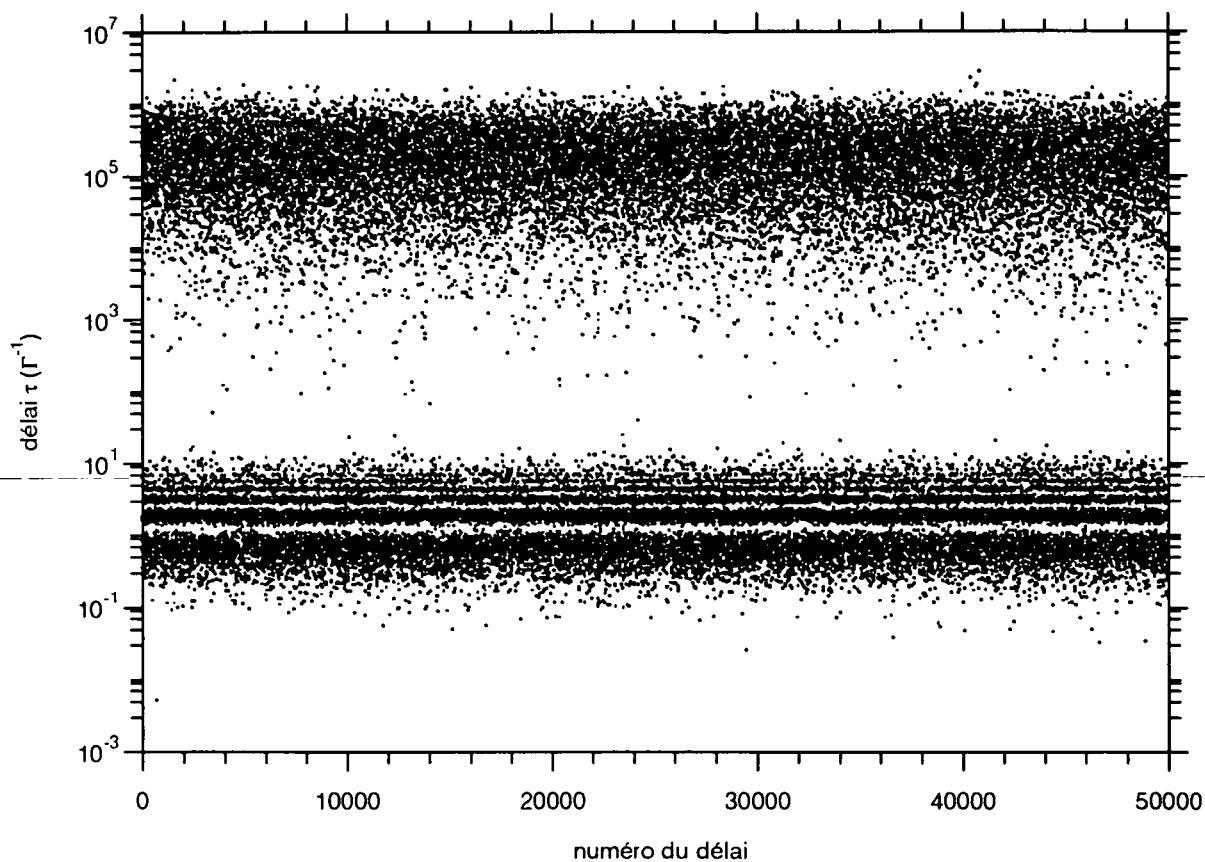


Figure IV.14.a Représentation en échelle semi-logarithmique de l'ensemble des délais tirés. Chaque tirage est représenté par un numéro, en abscisse, et par la valeur du délai tiré, en ordonnée. On voit très bien apparaître deux échelles de temps. L'échelle des temps courts est de l'ordre de Γ^{-1} . En outre, la fonction délai présente des oscillations de Rabi à cette échelle (cf. $\Omega_1 = 5 \Gamma > \Gamma/2$). L'échelle des temps longs est de l'ordre de $2,2 \times 10^5 \Gamma^{-1}$. Elle est liée à la résonance noire (cf. p petit).

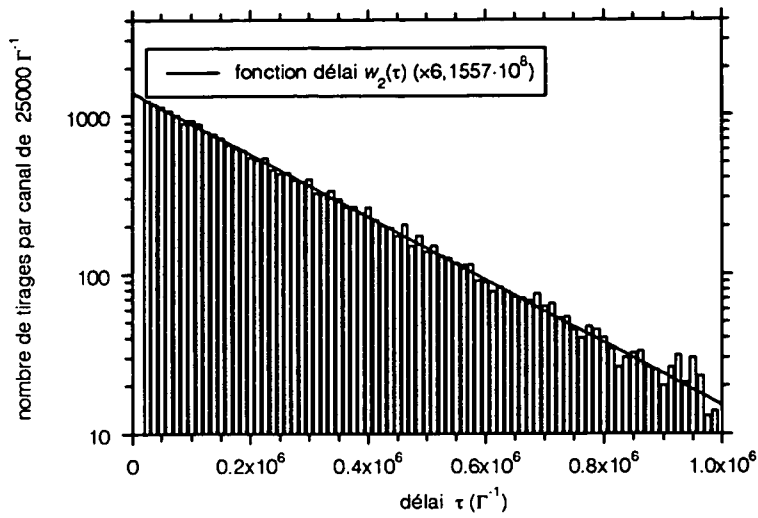


Figure IV.14.b *Histogramme des délais tirés, à grande échelle de temps. Remarquer l'accord avec la fonction délai théorique.*

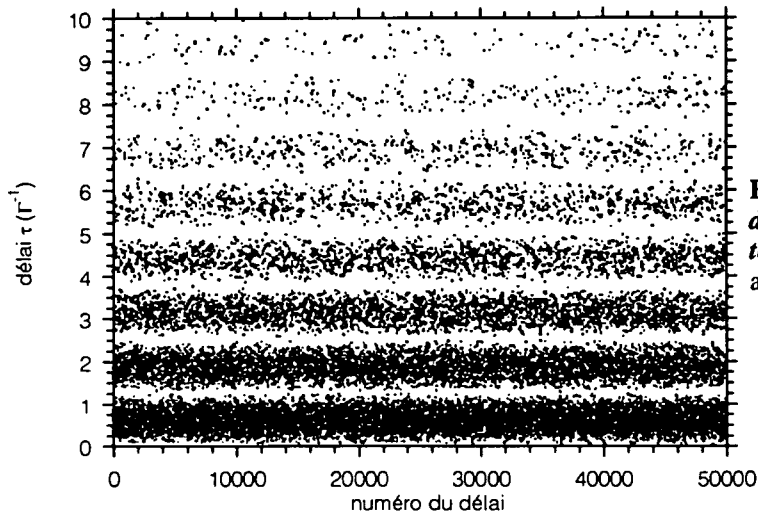
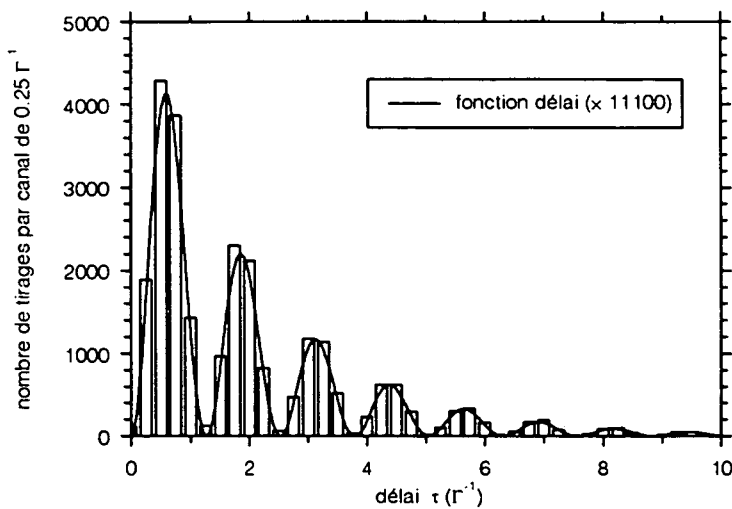


Figure IV.14.c *Représentation des délais tirés à courte échelle de temps. On voit clairement apparaître les oscillations de Rabi.*



On a ensuite cherché à estimer l'efficacité numérique de la méthode dans le cas général. On définit l'efficacité de la méthode de tirage aléatoire comme la quantité de calculs à effectuer pour générer un délai τ selon $w_2(\tau)$. Avec la méthode du rejet, on doit tirer un certain nombre de points $Q(\tau, y)$ aléatoires sur A_M , et, pour chacun de ces points, comparer y à $w_2(\tau)$. Pour obtenir chaque point, il faut appliquer la procédure (IV.53) de tirage pour une somme d'exponentielles, qui est rapide, et calculer une valeur $w_2(\tau)$ de fonction délai. Aucune de ces opérations, qui consistent à évaluer des fonctions élémentaires, n'est coûteuse en temps de calcul. Comme on ne conserve que les points appartenant à A_{w_2} , il faut tirer en moyenne $A_M/A_{w_2} = A_M$ points.

Que vaut A_M ? A_M est assez difficile à évaluer analytiquement : on pourrait l'intégrer formellement en fonction des coefficients A_{ij} , x_i et y_j , mais il serait ensuite difficile de donner une valeur explicite. Nous faisons donc un raisonnement très approché. Comme on le voit sur la figure IV.13.d, où n'apparaît qu'une seule fréquence d'oscillation dans $M(\tau)$, chaque terme d'oscillation amortie est remplacé par une exponentielle qui majore cette oscillation. L'intégrale de l'exponentielle majorante est de l'ordre de ≤ 2 fois l'intégrale de l'oscillation amortie. Mais, dans le cas général, il est compliqué de calculer A_M . Aussi, on a procédé de manière empirique et calculé numériquement le nombre moyen n de tirages effectués sur A_M pour générer un délai τ valable (figure IV.14).

Plusieurs régimes apparaissent.

Pour p petit ($p < 10 \hbar k$), la courbe $n(\Omega_1)$ présente deux "résonances" très piquées, l'une en $2kp/M \approx \Gamma'_C/2$ (soit $\Gamma'_C \approx 4\Gamma'_{NC}(p)$), l'autre pour $\Omega_1 \approx \Gamma/2$. Ces deux résonances se produisent donc lorsque un des couplages devient "critique" (frontière entre un régime oscillant amorti et un régime purement exponentiel ; cf. régime critique d'un oscillateur harmonique amorti). Dans les régimes asymptotiques, on a $n \approx 1$ pour $\Omega_1 \rightarrow 0$ et $n \approx 1,5$ pour $\Omega_1 \rightarrow \infty$. La valeur typique de n hors des "pics" est 1-2 environ.

Pour p grand ($p > 10 \hbar k$), il n'apparaît qu'une seule "résonance" pour $n(\Omega_1)$, en $\Omega_1/2 \approx 2\hbar kp/M$ (résonance plus difficile à interpréter que pour p petit : tous les couplages sont importants) Dans les régimes asymptotiques, on a $n \approx 1$ pour $\Omega_1 \rightarrow 0$ et $n \approx 1,5$ pour $\Omega_1 \rightarrow \infty$, de même que pour p petit. La valeur typique de n hors des "pics" est 1-2 environ.

Finalement, le nombre de tirages n sur A_M pour générer un délai vaut typiquement 1 ou 2, hors de certaines zones bien localisées dans l'espace (p, Ω_1) , où n peut valoir jusqu'à 5, voire jusqu'à 50 (ces "résonances" n'ont pas encore été complètement interprétées). En pratique, ces zones où le tirage numérique est moins efficace ralentissent peu le calcul numérique, aussi on n'a pas cherché à améliorer l'efficacité du tirage. Insistons sur le fait que cette méthode ne comporte *aucune approximation*.

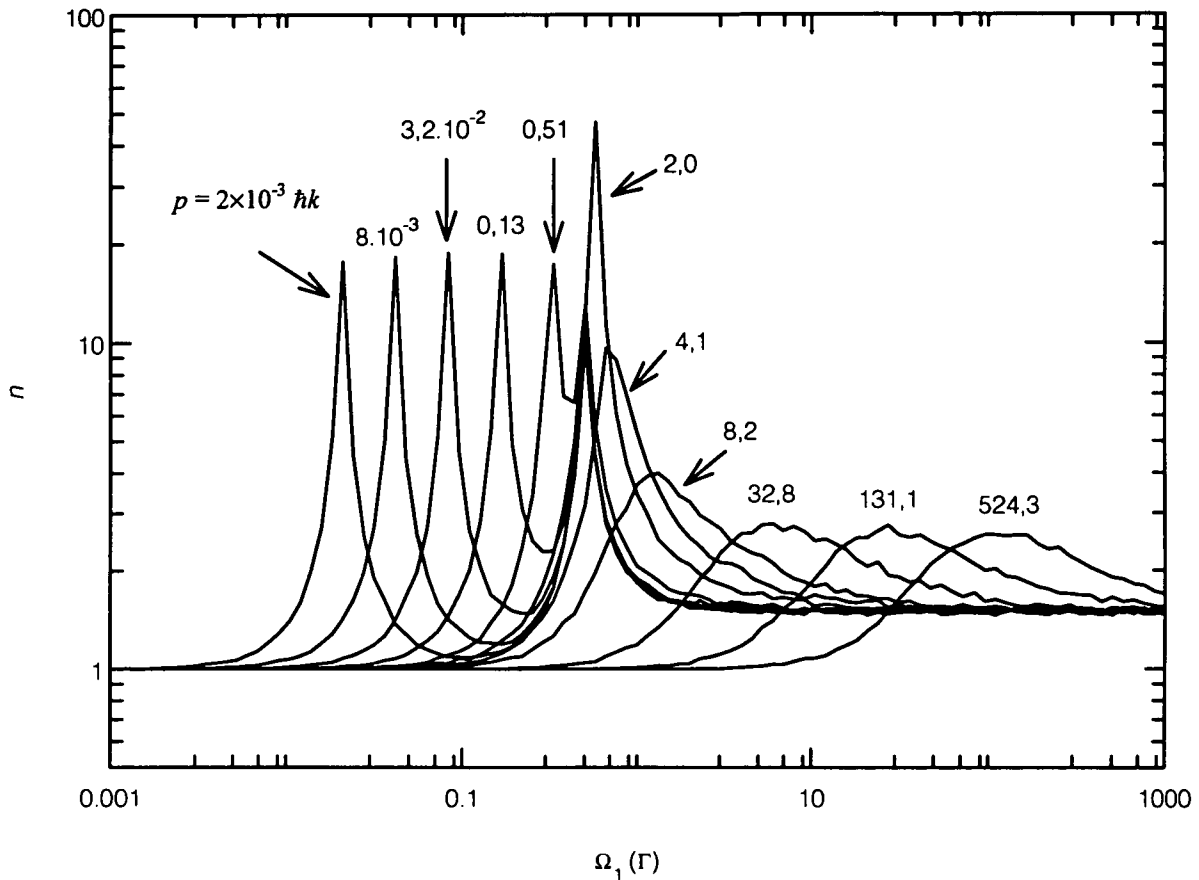


Figure IV.15 Nombre de points n à tirer sur l'aire A_M pour générer un délai.

Pour une impulsion p et un couplage laser Ω_1 donnés ($\delta = 0$), on génère 2000 délais selon la loi $w_2(\tau)$ correspondante. On compte le nombre n moyen de points tirés sur A_M pour générer 1 délai valable. On aurait pu calculer n en intégrant numériquement A_M , puisque $n = A_M / A_{w_2}$. Mais on aurait rencontré éventuellement des problèmes de discrétisation, d'où la procédure utilisée, qui n'est rien d'autre qu'un calcul d'aire par la méthode Monte-Carlo habituelle.

Les courbes $n(\Omega_1)$ à p donné présentent des "pics" pour certaines valeurs particulières. Hors de ces pics, $n(\Omega_1)$ vaut environ 1 pour Ω_1 petit et 1,5 pour Ω_1 grand.

La méthode du rejet résout de manière radicale le problème des échelles étendues dans le refroidissement par résonances noires et il est intéressant de comprendre pourquoi cette méthode de calcul a une telle efficacité. La conjonction de deux facteurs semble déterminante. L'un est lié à la procédure de tirage des délais, l'autre au Monte-Carlo quantique et aux particularités du refroidissement par résonances noires.

Examinons tout d'abord la procédure de tirage.

Etant données une impulsion p et une pulsation de Rabi Ω_1 , l'hamiltonien effectif possède trois valeurs propres, en général complexe, $\lambda_j = x_j + iy_j$ (cf. équation (IV.21), § IV.3.2). Dans la fonction délai (cf. équation (IV.40)), ces valeurs propres se traduisent

par, au plus, 9 fréquences ou taux caractéristiques : trois termes $x_i (i = 1, 2, 3)$, trois termes $(x_i + x_j) (i, j = 1, 2, 3 \text{ et } i \neq j)$ et trois termes $(y_i - y_j) (i, j = 1, 2, 3 \text{ et } i \neq j)$.

Dans la fonction majorante $M(\tau)$, les trois termes $(y_i - y_j)$ ont disparu et $M(\tau)$ ne comporte donc que 6 taux différents. Les tirages aléatoires se font essentiellement à l'aide de $M(\tau)$.

La fonction $M(\tau)$ est une somme de 6 exponentielles, c'est donc une fonction qui comporte 6 échelles. Si ces échelles sont très différentes, les méthodes numériques habituelles (discrétisation ou résolution numérique de l'équation $F(\tau) = u$), (cf. § IV.3.3.2) poseront problème. Notre générateur aléatoire pour une somme d'exponentielles (procédure (IV.53)) est, lui, très efficace : un premier nombre aléatoire sert à choisir une des échelles (une des exponentielles), puis un deuxième nombre tire un délai à cette échelle de temps.

On voit donc d'où vient l'efficacité du traitement des échelles : en calculant d'abord, la *forme analytique* de la fonction délai $w_2(\tau)$, qui est une somme d'exponentielles complexes, on peut ensuite localiser chaque échelle différente (x_i ou $x_i + x_j$) dans une seule exponentielle de la somme $M(\tau)$. Puis, on travaille sur une seule exponentielle, choisie aléatoirement, en fonction de l'échelle qui convient.

Examinons maintenant le deuxième facteur d'efficacité, le rôle de la simulation Monte-Carlo et des particularités du refroidissement par résonances noires en configuration $\sigma_+ - \sigma_-$. On vient de remarquer que si l'Hamiltonien effectif est de dimension 3, la fonction majorante comporte 6 exponentielles. Plus généralement, si l'Hamiltonien effectif est de dimension N , il est facile de montrer que la fonction majorante contiendra $N + N(N-1)/2$ exponentielles. Or, dans les résonances noires sélectives en vitesse, les variations possibles de l'impulsion atomique p engendrent un continuum très étendu de valeurs propres. Mais, comme la simulation Monte-Carlo, dans le cas très particulier du refroidissement par résonances noires, nous autorise à travailler avec des fonctions d'onde parfaitement localisées en impulsion, nous n'avons à considérer qu'un hamiltonien H_{eff} effectif 3×3 .

Si on devait travailler avec des fonctions d'onde imparfaitement localisées en impulsion, alors il faudrait examiner soigneusement l'extension nécessaire pour les fonctions d'onde pour déterminer si la méthode du rejet est efficace.

3.4 Traitement de l'émission spontanée

Nous venons de voir comment déterminer la date d'émission des photons spontanés, à l'aide de la fonction délai. Il reste à déterminer la direction d'émission du photon, ainsi que sa polarisation, puis à déduire l'état atomique après l'émission spontanée. Nous traitons tout d'abord des degrés de liberté externes de l'atome (impulsion atomique ; § IV.3.4.1), puis des degrés internes (§ IV.3.4.2). Ceci permet de simuler l'évolution de l'indice d'impulsion des familles (§ IV.3.4.3). Enfin, nous évoquons l'analogie entre l'émission spontanée et un processus de mesure (§ IV.3.4.4).

3.4.1 Etat externe

En ce qui concerne l'impulsion atomique, il faut non seulement prendre en compte l'émission d'un photon spontané, mais aussi l'absorption d'un photon dans une onde laser. Prenons par exemple un atome dans l'état $|f_{-,p-\hbar k}\rangle$ à la date t_i , juste après une émission spontanée. Si l'atome a émis un photon spontané à la date $t_i + \tau$, il a manifestement absorbé un photon σ_+ entre t_i et $t_i + \tau$, et il est "passé par" l'état $|e_{0,p}\rangle$: de là, l'atome émet un photon spontané avec un recul dont la projection sur l'axe des lasers vaut $u\hbar k$, avec $-1 \leq u \leq 1$ (nous allons discuter ci-dessous de la loi de probabilité de u). Si l'atome avait été initialement dans $|f_{+,p+\hbar k}\rangle$, il aurait absorbé un photon σ_- qui l'aurait mené dans l'état $|e_{0,p}\rangle$, à partir duquel il aurait émis un photon spontané.

En définitive, un atome initialement dans $|f_{\pm,p\pm\hbar k}\rangle$ possède une impulsion atomique p' après émission spontanée donnée par :

$$p \rightarrow p' = p + u\hbar k \quad (\text{IV.72})$$

où u est un nombre aléatoire compris entre -1 et 1 , de loi de probabilité $P(u)$.

La notation p' désigne ici une impulsion atomique réelle et non un indice des familles (par contre, p est un indice des familles). Pour déterminer l'indice des familles qui correspond à p' , il faut aussi déterminer l'état interne, ce que nous ferons ci-dessous (cf. équation IV.81, § 3.4.2 et figure IV.17).

Il faut maintenant définir la loi de probabilité $P(u)$, c'est-à-dire le diagramme d'émission spontanée. Ainsi que cela a été fait dans le traitement des équations de Bloch optiques généralisées de [AAK89], nous prenons un diagramme isotrope d'émission spontanée. Dans ce cas, nous allons montrer que la projection $\hbar k_z$ sur l'axe des lasers de l'impulsion $\hbar \vec{k}$ des photons spontanés émis a une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle $[-\hbar k ; +\hbar k]$. On prend donc $P(u) = 1/2$.

Montrons qu'une émission spontanée selon une distribution isotrope donne une loi de probabilité uniforme pour la projection $\hbar k_i$ de l'impulsion $\hbar \vec{k}$ sur un axe i quelconque. Par commodité, on introduit les coordonnées sphériques habituelles et on s'intéresse à la composante $\hbar k_z$ (cf. figure IV.16). Soit $P(\Omega)d\Omega$ la probabilité qu'un photon spontané soit émis dans l'angle solide $d\Omega$ autour de la direction (θ, φ) . L'isotropie de l'émission s'exprime par

$$P(\Omega) = 1/(4\pi) \quad (\text{IV.73})$$

Or, il est évident sur la figure IV.16 que

$$d\Omega = d\theta \times \sin(\theta)d\varphi \quad (\text{IV.74})$$

[AAK89] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the one-photon recoil energy by velocity-selective coherent population trapping : theoretical analysis*, J. Opt. Soc. Am. B 6, p. 2112-2124 (1989).

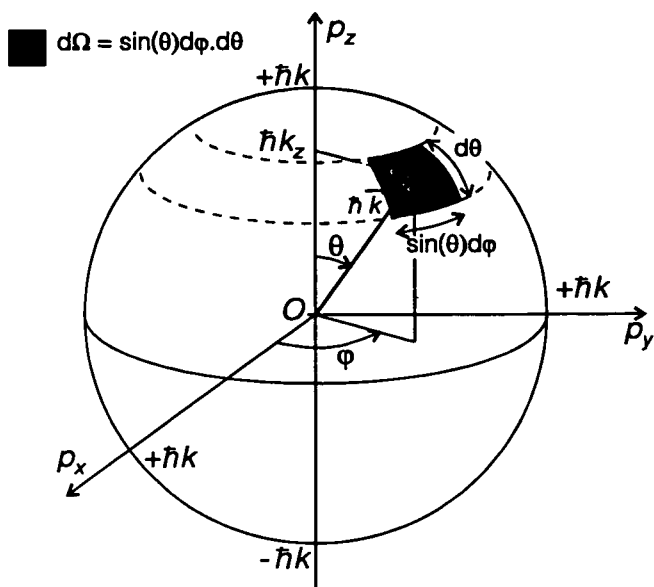


Figure IV.16 Calcul de la loi de probabilité $P(\hbar k_z)$ pour un diagramme isotrope d'émission spontanée. Les angles θ et φ sont les angles habituels des coordonnées sphériques. La projection $\hbar k_z$ de l'impulsion $\hbar \vec{k}$ vaut $\hbar k_z = \hbar k \cos\theta$. On utilise l'angle solide $d\Omega = \sin\theta d\varphi \times d\theta$. L'hypothèse d'isotropie de l'émission spontanée se traduit par $P(\Omega) = 1/(4\pi)$. Un calcul simple permet d'en déduire $P(\hbar k_z) = 1/2$.

Par ailleurs, la projection $\hbar k_z$ ne dépend que de l'angle θ

$$\hbar k_z = \hbar k \cdot \cos(\theta) \tag{IV.75}$$

Par conséquent,

$$P(\hbar k_z) d(\hbar k_z) = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} P(\Omega) d\theta \times \sin\theta d\varphi = \frac{1}{2} \sin\theta d\theta \tag{IV.76}$$

On en déduit

$$P(\hbar k_z) = \frac{1}{2} \sin\theta \left| \frac{d\theta}{d(\hbar k_z)} \right| \tag{IV.77}$$

En utilisant l'équation (IV.75), on obtient

$$\boxed{P(\hbar k_z) = \frac{1}{2\hbar k}} \tag{IV.78}$$

La projection $\hbar k_z$ a donc une loi de probabilité uniforme entre $-\hbar k$ et $+\hbar k$, ce qui justifie la procédure (IV.72).

Remarque

L'émission spontanée n'est en réalité pas isotrope puisqu'on a affaire à une transition dipolaire électrique. La valeur quadratique moyenne du changement d'impulsion atomique donné par (IV.72) pour un rayonnement isotrope vaut

$$\langle (\hbar k_i)^2 \rangle^{1/2} = \frac{\hbar k}{\sqrt{3}}, \quad i = x, y, z \tag{IV.79}$$

Pour le rayonnement d'un dipôle électrique oscillant suivant x , on tire ces valeurs quadratiques moyennes du tenseur de diffusion de l'atome (voir par exemple le chapitre IV de [Coh83])

$$\langle (\hbar k_x)^2 \rangle^{1/2} = \frac{\hbar k}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \langle (\hbar k_{y,z})^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{5}} \hbar k \tag{IV.80}$$

Dans le cas de la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$ que nous utilisons, le champ électrique décrit une hélice lorsqu'on se déplace le long de l'axe z . On doit donc moyenner le rayonnement de dipôles électriques oscillant parallèlement à l'hélice du champ électrique. Pour l'axe z , quel que soit le point considéré, la valeur quadratique moyenne de $\hbar k_z$ ne change pas et vaut $\sqrt{2/5}\hbar k$.

Ainsi, selon que l'on considère un rayonnement isotrope ou un rayonnement dipolaire, la valeur quadratique moyenne des changements d'impulsion atomique dus à l'émission spontanée diffère d'environ 10 % (comparer $\sqrt{1/3} \approx 0,58$ à $\sqrt{2/5} \approx 0,63$). On s'attend donc à ce que le choix d'un de ces deux modèles de rayonnement influence quantitativement les résultats des simulations. Cependant, comme la différence entre les deux modèles est petite, nous avons préféré conserver le modèle approché d'émission isotrope. Ceci permet de comparer les simulations Monte-Carlo à la résolution [16] par équations de Bloch de [AAK89].

3.4.2 Etat interne

Déterminons maintenant l'état interne de l'atome après une émission spontanée. L'état initial que nous avons considéré pour la simulation Monte-Carlo est un état $|f_+\rangle$ ou $|f_-\rangle$, puisque nous nous sommes placés après la phase de pompage optique dans le système en $\Lambda = \{|f_-\rangle, |e_0\rangle, |f_+\rangle\}$ (cf. § I.2.1.1). En partant de $|f_{\pm}\rangle$, l'émission spontanée ne peut avoir lieu que depuis un état $|e_0\rangle$, qui est un état invariant par rotation autour de Oz . Or, l'émission spontanée est un processus invariant par rotation. Ainsi, la matrice densité obtenue après une émission spontanée doit être également invariante par rotation.

L'émission spontanée depuis l'état $|e_0\rangle$ ne peuple que les états $|f_-\rangle$ et $|f_+\rangle$ (la transition $|e_0\rangle \rightarrow |f_0\rangle$ est interdite par la nullité du coefficient de Clebsch-Gordan). Pour être invariante par rotation, la matrice densité atomique ne peut donc être constituée que d'un mélange statistique des états $|f_-\rangle$ et $|f_+\rangle$, en poids égaux. Dans la procédure Monte-Carlo, ce mélange statistique est réalisé en tirant aléatoirement la fonction d'onde atomique après émission spontanée :

Tirage aléatoire de l'état interne : (IV.81)

- tirage de $|f_-\rangle$ avec une probabilité 1/2 ;
- tirage de $|f_+\rangle$ avec une probabilité 1/2.

3.4.3 Synthèse : évolution des familles $F(p)$

On peut maintenant résumer le traitement de l'émission spontanée dans nos simulations Monte-Carlo quantiques à l'aide de la fonction délai (figure IV.17). Connaissant l'état initial $|f_{\pm}, p \pm \hbar k\rangle$ à la date t_i , on tire aléatoirement la date $t_{i+1} = t_i + \tau_i$ d'émission du prochain photon spontané (cf. § IV.3.3). On tire ensuite aléatoirement l'état interne de l'atome juste après l'émission spontanée : c'est soit $|f_+\rangle$, soit $|f_-\rangle$ avec une probabilité égale (ceci revient à choisir la polarisation du photon spontané émis). Enfin, on tire aléatoirement l'impulsion atomique selon la procédure (IV.78) (ceci revient à

[16] Dans les simulations de [AAK89], il avait été vérifié numériquement que le modèle de rayonnement isotrope et le modèle de rayonnement dipolaire conduisait à des résultats quasiment identiques. Avec l'approche "vols de Lévy" du chapitre V, nous pourrions quantifier la petite différence qui existe entre les deux modèles.

choisir la direction du photon spontané émis). On détermine l'indice p' de la nouvelle famille $F(p')$ en fonction de l'état interne. Noter qu'en toute rigueur le tirage aléatoire porte sur l'émission spontanée, et que l'état atomique après émission spontanée est déduit des caractéristiques du photon spontané.

Tirage du photon spontané → état atomique après émission spontanée (IV.82)

- probabilité 1/2 : état $|f_-, p' - \hbar k\rangle$ avec $p' = p + (1 + u)\hbar k$ et $u \in [-1, 1]$;
- probabilité 1/2 : état $|f_+, p' + \hbar k\rangle$ avec $p' = p + (-1 + u)\hbar k$ et $u \in [-1, 1]$.

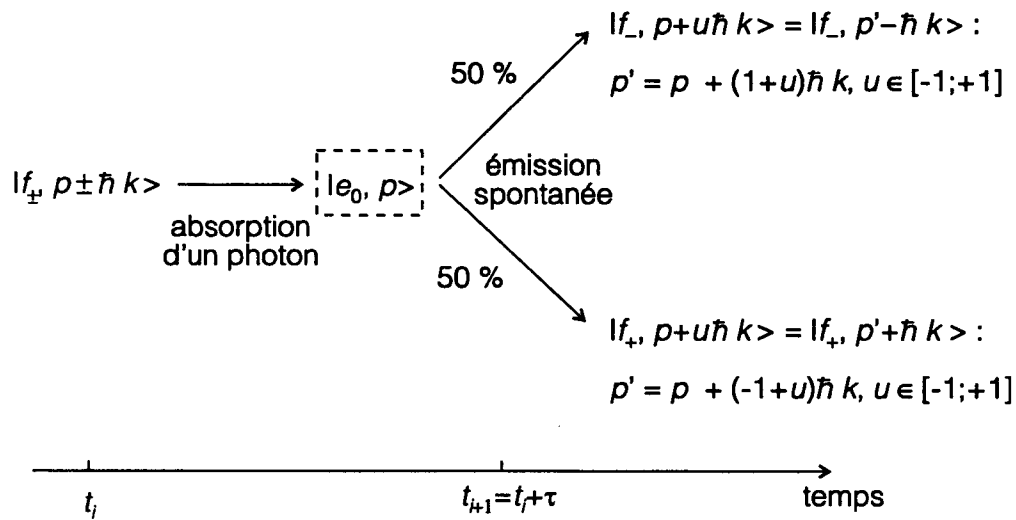


Figure IV.17 *Changement d'impulsion lors de l'émission spontanée.* L'atome est initialement, à la date t_i dans l'état $|f_-, p - \hbar k\rangle$ ou dans l'état $|f_+, p - \hbar k\rangle$. On tire aléatoirement un délai τ (cf. § IV.3.3). Après l'émission spontanée, l'atome se trouve soit dans un état $|f_-, p' - \hbar k\rangle$, soit dans un état $|f_+, p' + \hbar k\rangle$. Le nouvel indice des familles p' est obtenu à partir (IV.82). Le nombre u est tiré aléatoirement entre -1 et 1, selon un loi de probabilité uniforme (modèle d'émission isotrope).

3.4.4 Analogie entre l'émission spontanée et un processus de mesure

Dans le formalisme utilisé, entre deux émissions spontanées, l'atome est dans une famille $F(p)$ donnée, c'est-à-dire dans une superposition linéaire des états de base de la famille $F(p)$. En revanche, juste après une émission spontanée, l'atome se trouve dans un état bien défini, soit $|f_-, p' - \hbar k\rangle$, soit $|f_+, p' + \hbar k\rangle$. Tout se passe donc comme si l'émission spontanée effectuait une mesure de l'état atomique, même si, en réalité, les photons spontanés eux-mêmes ne sont pas détectés.

Une observation intéressante a été faite à ce sujet dans [MCD93] (§ 6). La configuration que nous étudions ($J_f = 1 \leftrightarrow J_e = 1$, lasers $\sigma_+ - \sigma_-$) a été simulée pour un atome au repos en prenant différents axes de quantification pour la polarisation des

[MCD93] K. Mølmer, J. Dalibard, and Y. Castin, *A Monte Carlo wave-function method in quantum optics*, J. Opt. Soc. Am. B. 10, p. 524-538 (1993).

photons [17]. Ceci revient à considérer différentes procédures de tirages de la polarisation des photons spontanés. L'axe de quantification est seulement un intermédiaire de calcul et son choix est libre. Or, selon l'axe de quantification choisi, on obtient une description qualitativement différente de l'évolution des fonctions d'onde atomiques individuelles. Cependant, en moyennant sur un grand nombre de fonctions d'onde, quel que soit l'axe de quantification choisi, on obtient les mêmes valeurs pour les observables.

Ceci montre, qu'à moins de mesurer effectivement les photons spontanés émis (date d'émission, direction, polarisation) selon un processus bien défini, les images de l'évolution atomique fournies par les simulations Monte-Carlo quantiques ne sont que des *images possibles* de l'évolution atomique et ne prétendent pas décrire l'évolution atomique réelle. En l'absence de mesure des photons spontanés, plusieurs images Monte-Carlo qualitativement différentes sont possibles.

3.5 Vue d'ensemble de l'algorithme de simulation Monte-Carlo

Nous indiquons ici comment les éléments décrits au paragraphe IV.3 prennent place dans l'algorithme final. L'algorithme est donné de manière schématique par la figure IV.18 et nous commentons ci-dessous chaque étape.

Paramètres de la simulation

On introduit les paramètres atomiques : largeur Γ de l'état excité, masse M , impulsion de recul $\hbar k$. On précise aussi la pulsation de Rabi Ω_1 des faisceaux laser σ_+ et σ_- , pris d'égale intensité, et le désaccord $\delta = \omega_L - \omega_0$ de ces lasers. On introduit la largeur en impulsion δp_i de la distribution initiale. Enfin, on précise le nombre d'atomes N dont on va simuler l'évolution et le temps d'interaction θ .

Traitement de la n^e réalisation

Une réalisation est la simulation de l'évolution d'un seul atome, sur une durée θ . Dans des versions simplifiées du programme, nous calculions l'évolution de plusieurs réalisations en parallèle pour tirer profit du caractère vectoriel de certains ordinateurs. Cependant, dans la version finale, les tirages aléatoires supposent de nombreux tests "If...then...", qui s'avèrent incompatibles avec la vectorisation de l'algorithme. Les réalisations individuelles sont donc traitées séquentiellement.

Détermination de l'état initial

L'état initial de l'atome est tiré aléatoirement de manière à générer un mélange statistique d'états $|f_-\rangle$ et $|f_+\rangle$. L'impulsion [18] est tirée aléatoirement selon une loi de probabilité gaussienne, centrée en $p = 0$, de valeur quadratique moyenne $(\delta p)_i$.

[17] Nous avons choisi implicitement l'axe z de propagation des lasers pour définir la polarisation des photons spontanés émis par l'atome.

[18] Il s'agit de l'impulsion de l'atome et non de l'indice des familles. Le même type de distributions initiales était utilisé dans le traitement par équations de Bloch optiques de [AAK89].

Calcul de H_{eff} , $\omega_2(\tau)$ et $M(\tau)$

On calcule l'hamiltonien effectif H_{eff} en fonction de l'impulsion atomique, selon l'équation (I.13). Puis on calcule les coefficients A_{ek} intervenant dans la fonction délai $w_2(\tau)$ (cf. équation (IV.26)) et les coefficients B_{ij} intervenant dans la fonction majorante $M(\tau)$ (cf. équation (IV.70)).

Tirage des délais τ

A l'aide de la méthode du rejet (§ IV.3.3.4 à 3.3.6), en utilisant les fonctions $w_2(\tau)$ et $M(\tau)$, on génère un délai τ_i aléatoire selon la loi $w_2(\tau)$. On connaît alors la date $t_{i+1} = t_i + \tau_i$ d'émission du prochain photon spontané.

Tirage du photon spontané → état atomique après émission spontanée

L'état atomique (état interne $|f_- \rangle$ ou $|f_+ \rangle$, impulsion p) est tiré aléatoirement selon la procédure (IV.82) décrite au paragraphe IV.3.4. Ceci revient à tirer aléatoirement la direction d'émission et la polarisation du photon spontané émis. L'état obtenu sert de nouvel état initial.

 $t > \theta$?

Si on n'a pas atteint la durée d'interaction θ , on continue à faire évoluer l'atome, en calculant le nouvel hamiltonien effectif... Si la date d'émission est supérieure à θ , alors il faut calculer l'état atomique au temps θ .

Calcul de l'état atomique et "mesure" de l'impulsion au temps $t = \theta$

On s'intéresse à l'état atomique à la fin de la période d'interaction, c'est-à-dire à la date θ . La date θ se trouve entre deux émissions spontanées, c'est-à-dire à une date où on n'a pas calculé l'état atomique. Pour déterminer l'état atomique $|\varphi_0(t = \theta)\rangle$, on utilise l'équation (IV.3) de l'évolution dans la multiplicité à 0 photon E_0 et la normalisation (IV.9). Puis, on simule une mesure de l'impulsion atomique de la manière suivante. L'état $|\varphi_0(t = \theta)\rangle$ se décompose sous la forme :

$$|\varphi_0(t = \theta)\rangle = a_0(\theta)|e_0, p\rangle + a_-(\theta)|f_-, p - \hbar k\rangle + a_+(\theta)|f_+, p + \hbar k\rangle \quad (\text{IV.83})$$

On tire donc aléatoirement l'impulsion atomique en donnant la probabilité $|a_0(\theta)|^2$ à l'impulsion (p), la probabilité $|a_-(\theta)|^2$ à l'impulsion ($p - \hbar k$) et la probabilité $|a_+(\theta)|^2$ à l'impulsion ($p + \hbar k$). Ceci simule une mesure de la distribution en impulsion juste après la phase d'interaction atomes-lasers [19].

 $n = N$?

La simulation est arrêtée après que l'on a simulé N réalisations, c'est-à-dire les évolutions de N atomes pendant la durée θ .

[19] Dans les expériences, les atomes sont plutôt détectés de plusieurs millisecondes à plusieurs dizaines de millisecondes après l'interaction avec les lasers, ce qui laisse le temps aux atomes dans l'état excité de se désexciter vers les états fondamentaux. Ici, nous ne tenons pas compte de cette propagation des atomes en l'absence de champ lumineux. Cela n'a guère d'importance dans la mesure où on s'intéresse surtout aux états $|\psi_{\text{NC}}(p \approx 0)\rangle$ qui n'ont qu'une composante faible dans l'état excité (cf. § 1.2.1.3, équation (1.17.c)).

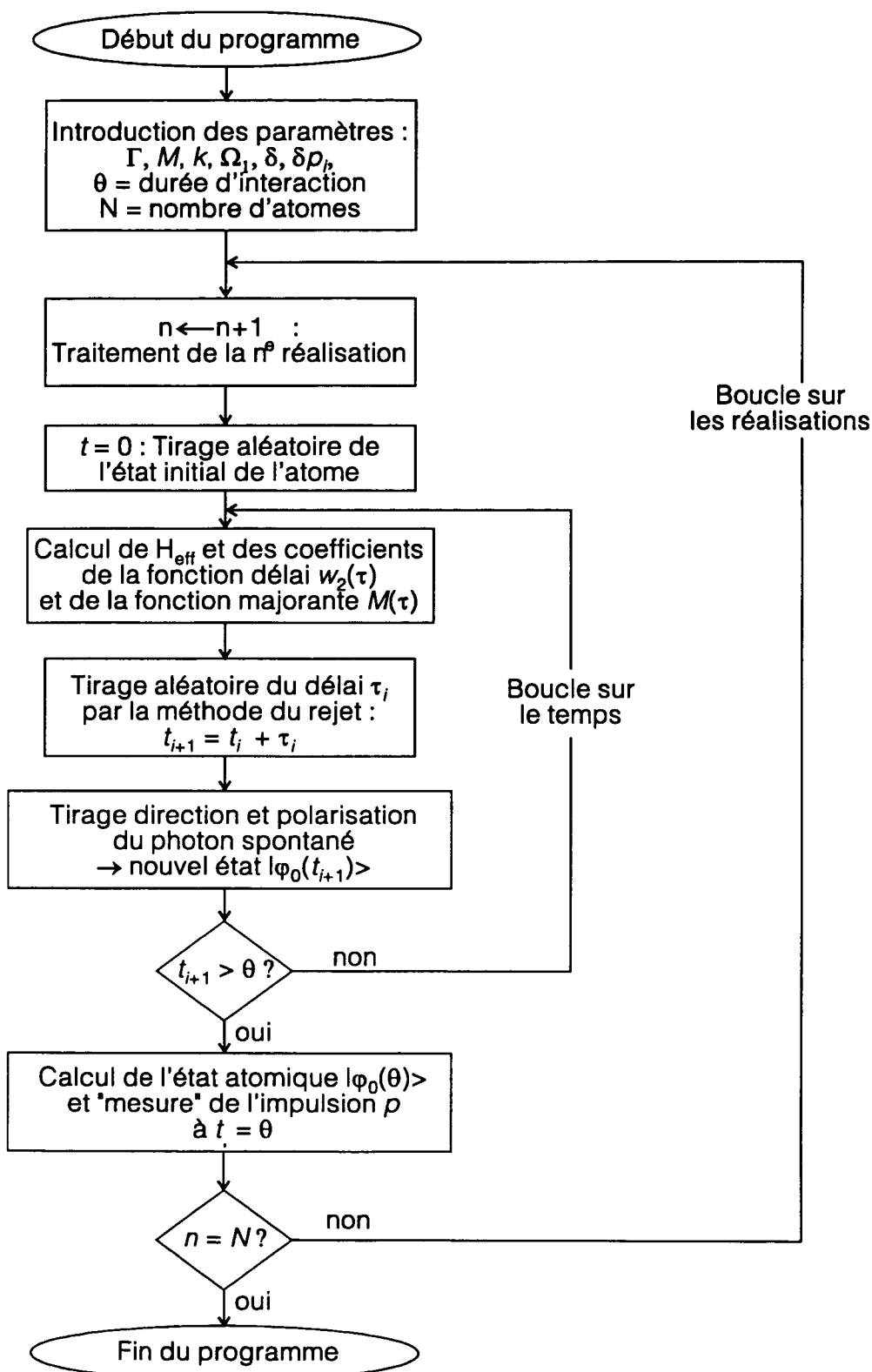


Figure IV.18 *Algorithme des simulations Monte-Carlo par la fonction délai.* Les différentes étapes sont décrites dans le texte.

4 Résultats des simulations Monte-Carlo

4.1 Tests du programme

Avant de l'appliquer à des situations nouvelles, on a testé le programme de simulations Monte-Carlo dans des cas connus. On a vérifié le calcul des fonctions délais, et des fonctions majorantes, vérifié la procédure de tirages et comparé les simulations Monte-Carlo à la résolution des équations de Bloch optiques généralisées et au traitement analytique du chapitre V.

On a calculé la fonction délai dans un cas où le couplage laser et le couplage motionnel peuvent être traités perturbativement (cf. conditions (I.15) et (I.16)). Nous avons choisi $\Omega_1 = 0,1\Gamma$ et $p = 0,01\hbar k$ (désaccord $\delta = 0$). Le traitement perturbatif exposé au chapitre I donne :

$$\Gamma'_C \approx 9,97 \cdot 10^{-3} \Gamma \quad \text{et} \quad \Gamma'_{NC} \approx 1,09 \cdot 10^{-4} \Gamma \quad (\text{IV.84})$$

Numériquement, la fonction délai obtenue est, aux temps longs, essentiellement une somme de deux exponentielles, comme on le voit sur la figure IV.19. Les taux de départ obtenus numériquement, $\Gamma'_{C,num}$ et $\Gamma'_{NC,num}$, liés à ces deux exponentielles sont

$$\Gamma'_{C,num} \approx 9,98 \cdot 10^{-3} \Gamma \quad \text{et} \quad \Gamma'_{NC,num} \approx 1,15 \cdot 10^{-4} \Gamma \quad (\text{IV.85})$$

ce qui est en très bon accord avec le traitement perturbatif.

En ce qui concerne la procédure de tirage des délais aléatoires, sur laquelle repose l'ensemble du programme, nous avons vu sur la figure IV.14 (§ IV.3.3.5) que l'histogramme des délais tirés reconstituait exactement la fonction délai $w_2(\tau)$. Ceci valide donc à la fois la procédure de calcul de la fonction majorante $M(\tau)$ et la procédure de tirage des délais par la méthode du rejet.

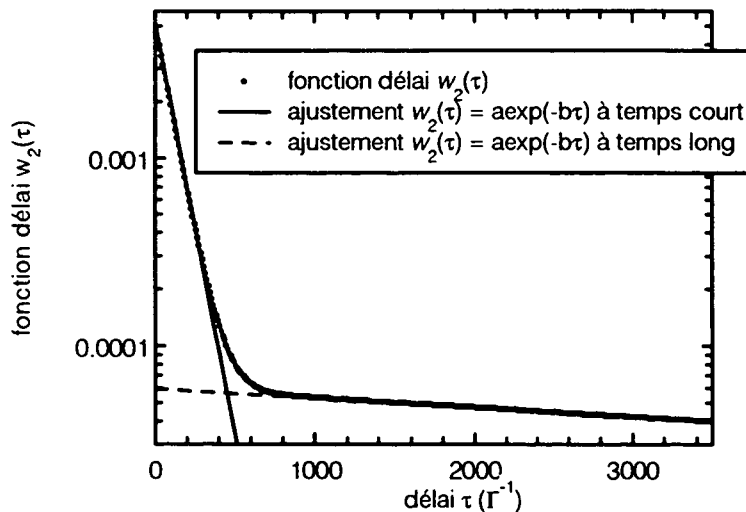


Figure IV.19 *Fonction délai dans un cas perturbatif.* On a choisi $p = 0,001 \hbar k$ et $\Omega_1 = 0,1 \Gamma$. La fonction délai est une somme de deux exponentielles décroissantes, sauf au voisinage immédiat de $\tau = 0$. Les constantes de temps des deux exponentielles sont en accord avec les expressions perturbatives du chapitre I.

Enfin, nous avons cherché à faire des vérifications globales du programme. Pour cela, nous avons tout d'abord repris le programme de résolution numérique des équations de Bloch optiques généralisées de Robin Kaiser. Nous l'avons utilisé avec une distribution initiale gaussienne de valeur quadratique moyenne $\delta p_i = 6 \hbar k$, une pulsation de Rabi $\Omega_1 = 0,5 \Gamma$, et un temps d'interaction total de $1000 \Gamma^{-1}$. La discrétisation en impulsion est de 15 pas par $\hbar k$ et cette distribution s'étend de $-25 \hbar k$ à $+25 \hbar k$. Pour effectuer la comparaison avec la simulation Monte-Carlo, il faut tenir compte du bruit dans cette dernière. Comme on le verra (§ IV.4.4), le bruit lié à l'échantillon fini est d'autant plus grand que l'on s'intéresse à une information locale. Aussi, nous avons effectué la comparaison des programmes sur une information globale, la proportion d'atomes refroidis. Nous définissons la proportion d'atomes refroidis $f(p_{\text{trap}}, \theta)$, comme la proportion d'atomes dont l'impulsion atomique p [19] est $\pm \hbar k$ à p_{trap} près [20], au temps θ :

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \equiv P(|p - \hbar k| \leq p_{\text{trap}} \quad \text{ou} \quad |p + \hbar k| \leq p_{\text{trap}}) \quad (\text{IV.86})$$

Ceci traduit la notion intuitive d'appartenance aux pics en $\pm \hbar k$. Ici, nous avons pris $p_{\text{trap}} = 0,5 \hbar k$. La simulation Monte-Carlo comporte $N = 2500$ atomes.

Les résultats des deux calculs sont donnés sur la figure IV.20. L'accord est excellent. L'écart quadratique moyen sur la proportion d'atomes refroidis est donné par (cf. § IV.4.4) :

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{f(1-f)}{N}} \quad (\text{IV.87})$$

Pour $\theta = 1000 \Gamma^{-1}$, on obtient $\sigma_f \approx 1 \%$. L'intervalle à 68 % de confiance (c'est-à-dire $f \pm \sigma_f$) donné par la simulation Monte-Carlo est donc $f_{\text{MC}} \approx 0,367 \pm 0,01$, en accord avec le résultat [21] des équations de Bloch $f_{\text{Bloch}} \approx 0,366 \pm 0,01$. En outre, l'intervalle de confiance à 95 % (c'est-à-dire $f \pm 2\sigma_f$) des points obtenus par simulation Monte-Carlo contient tous les points obtenus par équations de Bloch optiques sur la figure IV.20, ce qui valide les deux méthodes.

Enfin, soulignons que les méthodes développées au chapitre V permettent dans certains cas (modèle II de [BBE94]), des prédictions analytiques de la proportion d'atomes refroidis. Ces prédictions se trouvent à moins de σ_f du résultat de la simulation Monte-Carlo, avec $\sigma_f \approx 0,8 \%$. Dans un autre cas (modèle III de [BBE94]), on prédit analytiquement la forme de $f(\theta)$, qui fait intervenir un exposant caractéristique égal à

[19] Il s'agit ici de l'impulsion atomique réelle, et non de l'indice des familles.

[20] Cette définition est différente de la définition, plus complexe, qui avait conduit à une erreur dans la figure 11.b de [AAK89].

[21] Ce résultat est entaché d'erreurs dues à la discrétisation en impulsion et en temps. Nos calculs montrent que l'erreur est de l'ordre de 1 %. Ainsi, avec les paramètres utilisés, les deux méthodes, Monte-Carlo et équations de Bloch, comparées ont la même incertitude sur les résultats.

[BBE94] F. Bardou, J.-P. Bouchaud, O. Emile, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Subrecoil Laser Cooling and Lévy Flights*, Phys. Rev. Lett. **72**, p. 203-206 (1994).

0,25. Le calcul Monte-Carlo donne un exposant de 0,29, compatible avec 0,25 compte-tenu des incertitudes numériques.

En conclusion, l'algorithme de simulation Monte-Carlo est bien testé dans les cas connus [22]. Nous allons maintenant l'utiliser pour obtenir des résultats nouveaux.

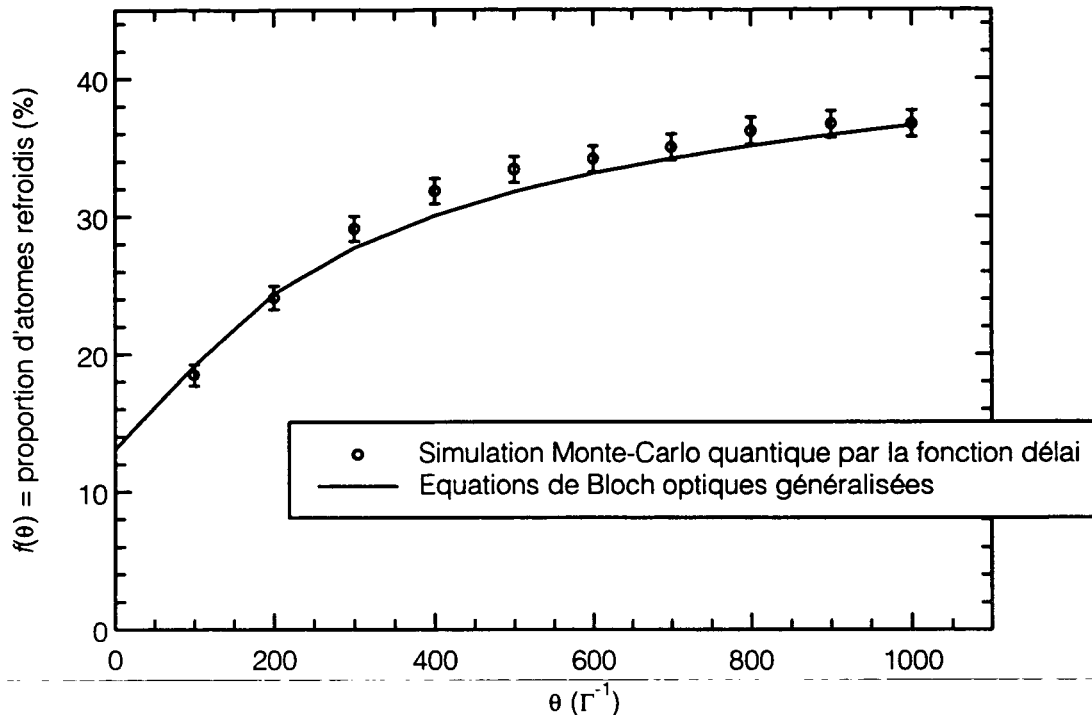


Figure IV.20 Comparaison de la simulation Monte-Carlo quantique et de la résolution des équations de Bloch optiques généralisées : proportion f d'atomes refroidis en fonction du temps d'interaction θ . La proportion $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ d'atomes refroidis est le rapport du nombre d'atomes dont l'impulsion au temps θ est à moins de p_{trap} de $-\hbar k$ ou de $+\hbar k$, sur le nombre d'atomes total. Pour cette figure, on a pris $\Omega_1 = 0,5 \Gamma$, $\delta = 0$, $p_{\text{trap}} = 0,5 \hbar k$, et une distribution gaussienne d'impulsion quadratique moyenne $6 \hbar k$. Les distributions en impulsion seront montrées plus bas (figures IV.23 et suivantes).

La simulation Monte-Carlo a été faite avec 2500 atomes. La simulation suit le même ensemble d'atomes au cours du temps. Ainsi, les points représentés à intervalle de temps régulier ne sont pas indépendants les uns des autres puisqu'ils tous issus d'une seule évolution de l'ensemble des 2500 atomes. L'incertitude sur le résultat Monte-Carlo varie de 0,8 à 1 %, en valeur absolue, selon les points considérés. La barre d'erreur donne l'intervalle à 68 % de confiance (c'est-à-dire $f \pm \sigma_f$).

Le calcul par équations de Bloch optiques généralisées a été réalisé avec une matrice densité s'étendant de $-25 \hbar k$ à $+25 \hbar k$, discrétisée par pas de $\hbar k/15$, avec un pas temporel d'intégration de $0,005 \Gamma^{-1}$. L'erreur possible due à la discrétisation en temps et en impulsion est de l'ordre de 1 %.

L'intervalle à 95 % de confiance (c'est-à-dire $f \pm 2\sigma_f$) des points obtenus par simulation Monte-Carlo contient tous les points obtenus par équations de Bloch optiques, ce qui valide les deux méthodes de calcul.

[22] Soulignons que les différentes méthodes comparées font l'hypothèse d'une émission spontanée isotrope.

4.2 Evolution d'un seul atome

Pour représenter l'évolution d'un seul atome, on porte l'indice p_f d'impulsion des familles occupées par cet atome en fonction du temps. La figure IV.21.a représente une évolution typique sur une carte échelle de temps. Entre deux émissions spontanées, l'indice p_f ne change pas (traits horizontaux) et l'atome est donc une superposition linéaire des états $|e_0, p_f\rangle$, $|f_-, p_f - \hbar k\rangle$ et $|f_+, p_f + \hbar k\rangle$. Lors d'une émission spontanée, considérée comme un saut quantique, l'impulsion change "instantanément" (traits verticaux) d'une quantité qui varie entre $-2\hbar k$ et $+2\hbar k$ (cf. procédure (IV.81), § IV.3.4.3).

La figure IV.21.a fournit une image du refroidissement par résonances noires : l'atome effectue une marche au hasard dans l'espace des impulsions, grâce à la diffusion de photons : quand, par hasard, l'atome atteint une impulsion suffisamment petite, il peut rester piégé un temps très long (puisque $\Gamma'_{NC}(p_f \approx 0) \propto p_f^2$ devient petit). Cette image vient confirmer de manière rigoureuse les idées intuitives initiales sur le principe du refroidissement par résonances noires (cf. § I.2.2.1 et figure I.5).

On remarque qu'il arrive que certaines impulsions p_f , bien que petites, soient associées à des délais courts. Ceci correspond au fait que un atome dans $|f_+, p_f + \hbar k\rangle$ avec $|p_f| < p_{\text{Raman}}$ a une probabilité 1/2 environ d'être dans l'état $|\psi_C(p)\rangle$, et par suite d'émettre un photon spontané avec un délai qui suit une loi exponentielle de constante de temps $(\Gamma'_C)^{-1}$. Or, ce temps $(\Gamma'_C)^{-1}$ est un temps court devant $(\Gamma'_{NC}(p_f))^{-1}$. En outre, même si le délai est tiré selon la loi de constante de temps $(\Gamma'_{NC}(p_f))^{-1}$, des délais courts peuvent statistiquement apparaître puisqu'on a affaire à une loi de probabilité (le délai τ n'est pas lié de manière déterministe à l'impulsion p_f). Ainsi, les impulsions petites ne sont pas associées de manière déterministe à des délais longs.

Si on représente une évolution à plus grande échelle de temps (figure IV.21.b), on voit apparaître deux types de périodes :

- des périodes "brillantes" ($|p_f| > p_{\text{Raman}}$ ou émission selon $(\Gamma'_C)^{-1}$, voir ci-dessous) où l'atome émet de nombreux photons spontanés et, par conséquent, subit de nombreux changements d'impulsion.

- des périodes "sombres" ($|p_f| < p_{\text{Raman}}$) où l'atome ne diffuse aucun photon et conserve le même indice p_f d'impulsion pendant un temps long. Ces périodes correspondent au passage de l'atome dans des états noirs $|\psi_{NC}(p_f \approx 0)\rangle$, associés à une impulsion p_f petite.

On retrouve l'analogie avec le schéma de l'étagère à électrons (§ IV.2.1). Toutefois, une caractéristique nouvelle apparaît : ici, la durée des périodes sombres (atome dans $|\psi_{NC}(p_f \approx 0)\rangle$) dépend de manière critique de l'état d'impulsion de l'atome, qui varie de manière aléatoire au cours du temps. Ainsi, les périodes sombres sont d'autant plus longues que p_f est petit. Au contraire, dans le schéma de l'étagère à électrons, les périodes sombres et brillantes ont des durées caractéristiques bien définies par les paramètres des transitions atomiques et des faisceaux lasers.

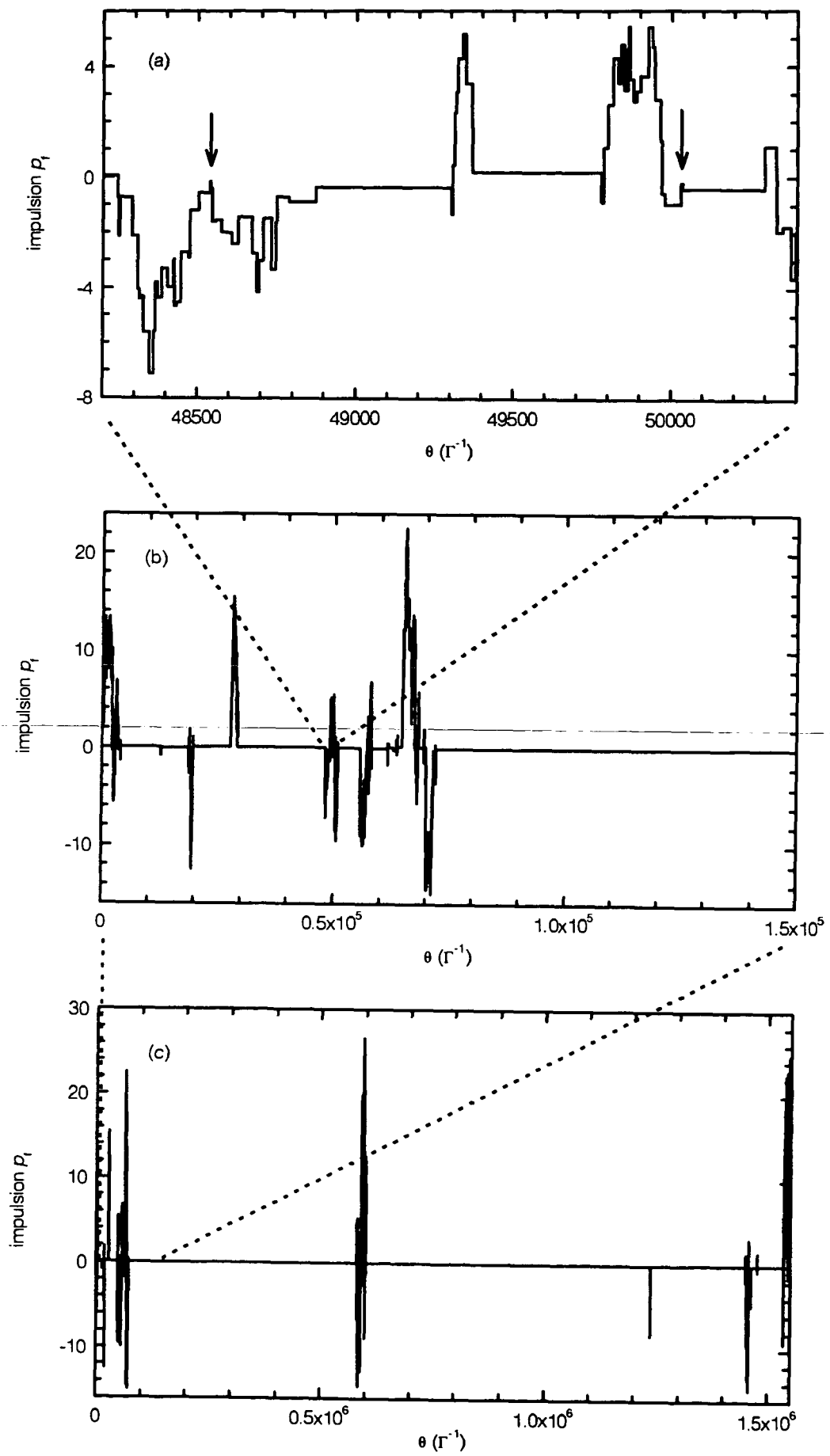


Figure IV.21 Simulation Monte-Carlo de l'évolution d'un seul atome à différentes échelles de temps. On représente pour une réalisation Monte-Carlo donnée l'indice d'impulsion des familles p_f en unité $\hbar k$. Lors de chaque émission spontanée, l'atome change d'impulsion (traits verticaux). Entre deux émissions spontanées, séparées par un délai τ , l'atome reste dans la même famille d'impulsion p_f . Les paramètres de cette réalisation sont : $\Omega_1 = 0,5 \Gamma$, $\delta = 0 \Gamma$, $p_{f,\text{initial}} = 2 \hbar k$.

(a) Evolution à courte échelle de temps. Sur une durée de $2300 \Gamma^{-1}$, l'atome a changé environ 80 fois d'impulsion. Remarquer les délais longs qui apparaissent quand $p_f = 0$, puisque $\Gamma'_{\text{nc}}(p_f \approx 0) \propto p_f^2$: ainsi, les atomes ont tendance à s'accumuler au voisinage de $p_f = 0$. Ce type de simulations illustre bien le principe du refroidissement par résonances noires.

On remarque que, dans certains cas, une impulsion $p_f = 0$ est associée à un délai court (cas signalés par les flèches, par exemple). En effet, quand $p_f = 0$, le délai peut être tiré selon une loi de probabilité dont la constante de temps n'est pas $(\Gamma'_{\text{nc}}(p_f))^{-1}$, mais $(\Gamma'_c)^{-1}$ ou encore Γ^{-1} . Les impulsions faibles ne sont donc pas systématiquement associées à des délais longs.

(b) Evolution sur une échelle de temps intermédiaire. Sur une durée de $1,5 \times 10^5 \Gamma^{-1}$, on constate l'apparition de périodes "brillantes", où l'atome émet de nombreux photons spontanés (et donc change de nombreuses fois d'impulsion), et de périodes sombres où aucun photon spontané n'est émis (piégeage de l'atome dans des états $|\psi_{\text{nc}}(p_f \approx 0)\rangle$). Remarquer qu'il existe des temps de piégeage de l'ordre de 30 % du temps total. Cette figure correspond à l'émission de 900 photons spontanés environ.

(c) Evolution à grande échelle de temps. Cette figure ressemble à la précédente, bien qu'étant sur une échelle de temps 10 fois plus longue : l'évolution atomique présente un aspect fractal. Cette figure correspond à l'émission de 2400 photons spontanés environ.

Enfin, en comparant les figures IV.21.a, b et c, obtenues à des échelles de temps différentes, on découvre un aspect fractal dans l'évolution atomique. Il semble qu'en considérant l'évolution d'un atome à des échelles de temps de plus en plus grandes [23], on retrouve un graphe qui a statistiquement la même allure, où alternent périodes sombres et périodes brillantes. Cet aspect fractal de l'évolution temporelle, qui était complètement caché dans l'approche par équations de Bloch sur la matrice densité, joue en fait un rôle important dans le refroidissement par résonances noires et est à la base de l'approche du chapitre V. On peut relier le caractère fractal au fait que le refroidissement par résonances noires n'a pas de limites [24] : aux échelles de temps arbitrairement longues, il apparaît des temps $(\Gamma'_{\text{NC}}(p_f))^{-1}$ de piégeage arbitrairement longs, associés à des impulsions p_f arbitrairement petites. Les temps de piégeage les plus longs rencontrés semblent augmenter proportionnellement à la durée θ d'interaction, ce qui signifie une diminution sans limite des impulsions caractéristiques.

Sur certaines réalisations Monte-Carlo (figure IV.22.a), on constate que l'atome peut passer beaucoup de temps loin du voisinage de $p_f = 0$ (périodes "brillantes"). Les réalisations de ce type sont à peu près aussi fréquentes que les réalisations où l'atome passe beaucoup de temps au voisinage de $p_f = 0$ (cf. figure IV.21), et il existe également des réalisations mêlant les deux types de comportement (figure IV.22.b). Il y a ainsi une symétrie du comportement des périodes "brillantes" ($|p_f| > p_{\text{Raman}}$) et des périodes "sombres" ($|p_f| < p_{\text{Raman}}$) : ces deux types de périodes ont tendance à être très longues.

En conclusion, la simulation de l'évolution d'un seul atome corrobore les idées intuitives originales du refroidissement par résonances noires : à cause de l'émission spontanée, l'atome effectue une marche dans l'espace des impulsions qui le mène, de manière aléatoire, vers des états $|\psi_{\text{NC}}(p_f = 0)\rangle$ où il cesse de fluorescer pendant des temps longs. Cette simulation révèle des aspects statistiques (fractal ?) qui n'apparaissent pas dans les analyses par les équations de Bloch et qu'il sera intéressant d'interpréter : ce sera le point de départ de notre deuxième approche théorique (chapitre V).

[23] Vers les petites échelles de temps, ceci n'est pas vrai : il existe une borne inférieure aux échelles de temps des délais, c'est la durée de vie Γ^{-1} de l'état excité.

[24] Il n'y a pas de limite à la finesse des pics de la distribution en impulsion. Cependant, on verra qu'il existe des limites plus subtiles, qui se traduisent par un compromis entre la finesse de ces pics et la population atomique qu'ils contiennent (cf. chapitre V)..

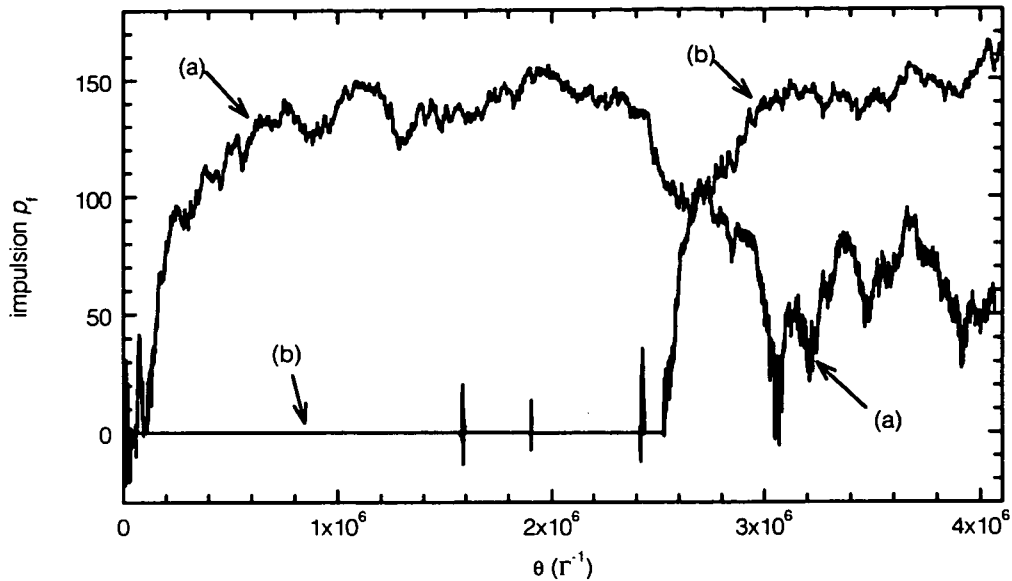


Figure IV.22 Réalisations Monte-Carlo avec de grands temps passés loin de $p_r = 0$. La réalisation (a) correspond à 10^4 émissions spontanées environ, et la réalisation (b) correspond à 3900 émissions spontanées environ. Les conditions sont identiques à celles de la figure précédente (les réalisations ne diffèrent que par la suite de nombres aléatoires utilisés).

4.3 Evolution d'un ensemble d'atomes. Distribution en impulsion

On obtient les distributions en impulsion en faisant évoluer un ensemble [25] d'atomes et en mesurant l'impulsion au temps θ . La figure IV.23.a donne un exemple de données brutes où la distribution en impulsion a été mesurée à $\theta = 100 \Gamma^{-1}$. On obtient l'histogramme de la figure IV.23.b après avoir défini une largeur de canal d'échantillonnage p_{ec} . On a choisi ici $p_{ec} = 0,5 \hbar k$, adapté à la structure considérée, la largeur à $e^{-1/2}$ des pics étant $0,38 \hbar k$ environ. La figure IV.23, avec une durée d'interaction de $100 \Gamma^{-1}$, correspond typiquement à la première génération d'expérience de refroidissement par résonances noires sur jet atomique. Bien que l'on ait simulé l'évolution de 10 000 atomes, le bruit sur la distribution en impulsion est relativement important. En fait, sur cette échelle de temps courts, la résolution des équations de Bloch optique aurait requis moins de temps de calcul que la simulation Monte-Carlo (cf. § IV.4.4).

Grâce à la rapidité des simulations, on peut maintenant s'intéresser aux durées d'interactions typiques de la nouvelle génération d'expériences, de 10^3 à $10^5 \Gamma^{-1}$ environ.

[25] Noter que nous faisons une moyenne d'ensemble de la distribution en impulsion au temps θ . Nous prenons soin de ne pas faire une moyenne temporelle sur un seul atome, puisqu'il semble ne pas y avoir d'état stationnaire dans le refroidissement par résonances noires. Nous reprendrons cette discussion au chapitre V et prouverons qu'effectivement l'hypothèse d'ergodicité n'est pas satisfaite.

La figure IV.24 représente une distribution en impulsion obtenue avec 10 000 atomes à $\theta = 5\,000\ \Gamma^{-1}$, dans les mêmes conditions que la figure IV.23. La séparation de la distribution en une partie confinée autour de $p = \pm\hbar k$ et une partie d'atomes non refroidis étalée en impulsion devient très nette. On note l'affinement des pics à $\pm\hbar k$ dont la mi-largeur à $e^{-1/2}$ n'est maintenant que de $0,070\ \hbar k$ environ. Noter également l'étalement du fond d'atomes non refroidis. Le temps de calcul est d'environ 43 mn. Il serait de 2 à 4 fois plus long si on voulait résoudre les équations de Bloch optiques généralisées dans les mêmes conditions.

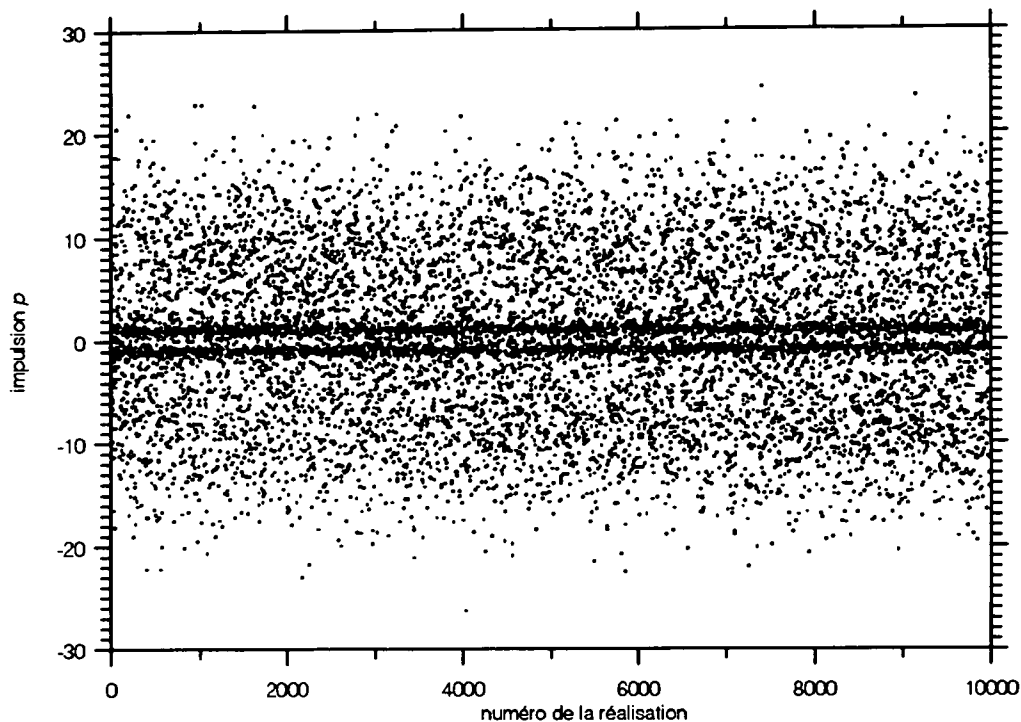
Avec les simulations Monte-Carlo par la fonction délai, on peut même accéder à des ordres de grandeur en temps encore plus grands que ceux considérés pour simuler la nouvelle génération d'expériences. Ceci va permettre d'explorer le régime asymptotique du refroidissement par résonances noires. On peut ainsi répondre numériquement à la question cruciale de l'efficacité du refroidissement par résonances noires. Ainsi, nous avons fait évoluer numériquement 8 000 atomes sur une durée de $10^7\ \Gamma^{-1}$ (figure IV.25, les conditions sont légèrement différentes de celles des figures précédentes : $\Omega_1 = 0,3\Gamma$ et $\delta p_i = \hbar k$).

La proportion d'atomes refroidis est maintenant de 8 %. Elle a donc diminué, alors que jusqu'à $\theta = 5\,000\ \Gamma^{-1}$, dans les mêmes conditions, cette proportion ne faisait que croître ($f(\theta = 5\,000\ \Gamma^{-1}) \approx 25\%$). Nous étudierons ce comportement en détail au chapitre V.

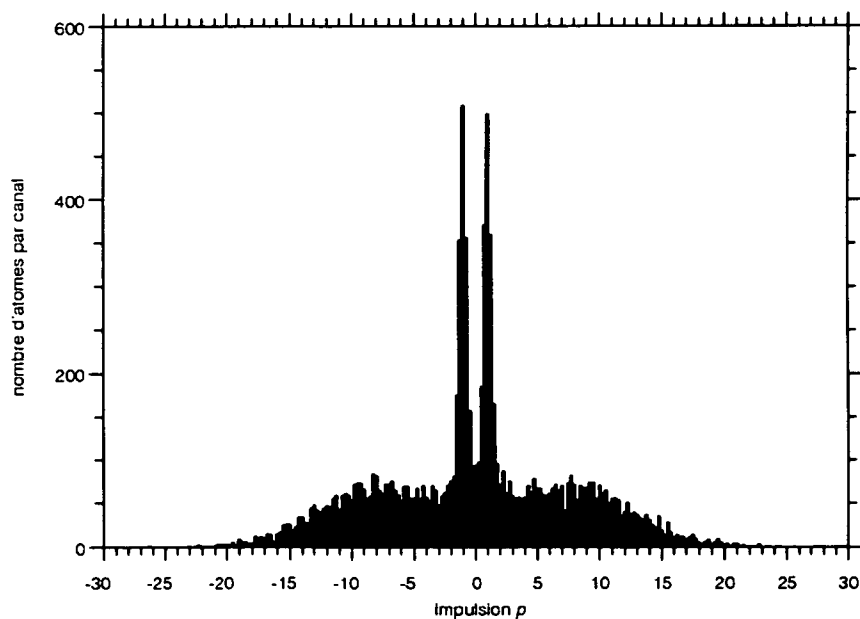
Cependant, les pics à $\pm\hbar k$ sont maintenant très fins. A la date $\theta = 10^7\ \Gamma^{-1}$, la densité de probabilité en $p = -\hbar k$ (ou en $p = +\hbar k$) est d'environ 50 fois la densité de probabilité initiale en hauteur initiale $p = 0$. Malgré le bruit statistique, on peut estimer que leur demi-largeur à $1/e^{1/2}$ est $\delta p \approx 8,5 \times 10^{-4} \hbar k$ à 10 % près. La température correspondante est de 3 picokelvins. La conjecture de 1988 (équation I.25) correspond à $\delta p_\theta \approx 8,9 \times 10^{-4} \hbar k$. La simulation confirme donc remarquablement bien que les largeurs de pic diminuent en $\theta^{-1/2}$, y compris sur de très longues échelles de temps.

Le temps de calcul avec 8 000 atomes est de l'ordre de 55 heures (sur une machine Sun SPARC 10/30; voir § IV.4.4.2 pour une étude des temps de calcul). Ceci peut paraître long. Cependant, pour résoudre les équations de Bloch optiques généralisées avec $\theta = 10^7\ \Gamma^{-1}$, il faudrait entre 650 et 65 000 ans, en supposant qu'il n'y a pas de divergences numériques...

Figure IV.23 Simulation Monte-Carlo de l'évolution de 10 000 atomes sur une durée $\theta = 300 \Gamma^{-1}$. Les paramètres lasers valent $\Omega_1 = 0,5 \Gamma$ et $\delta = 0$. La distribution en impulsion initiale est une gaussienne avec $\delta p_i = 6 \hbar k$. Cette figure correspond typiquement aux expériences de 1988.

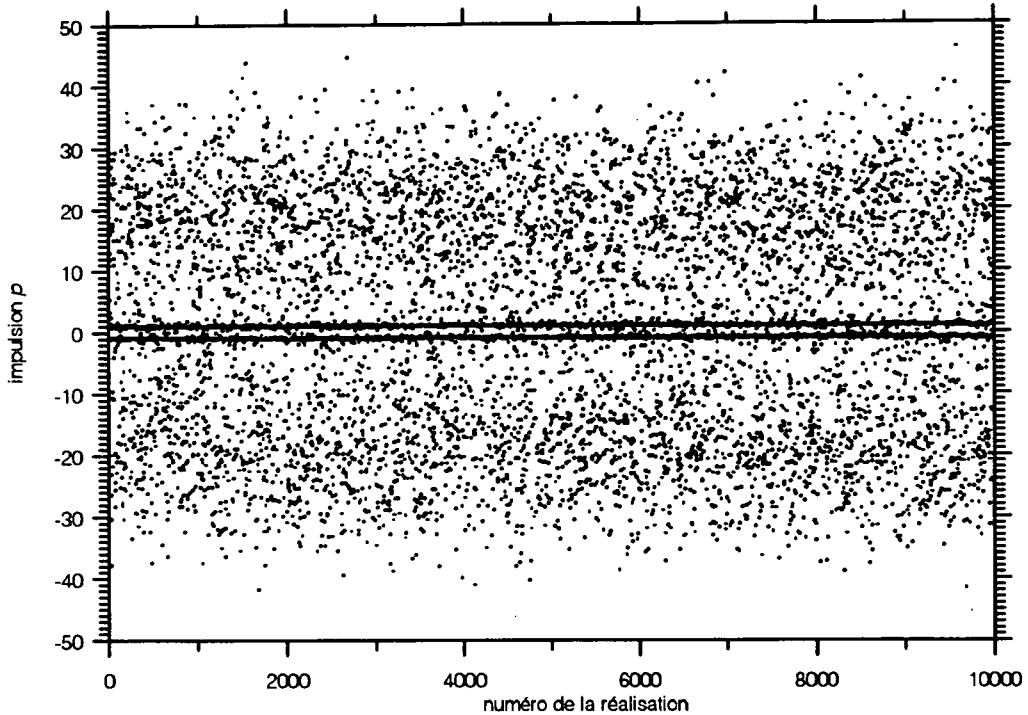


a) *Représentation de l'impulsion de chaque atome.* L'impulsion p est en unité $\hbar k$. On note l'accumulation d'atomes au voisinage de $p = \pm \hbar k$ et l'existence d'un fond diffus d'atomes non refroidis jusqu'à environ $\pm 20 \hbar k$.

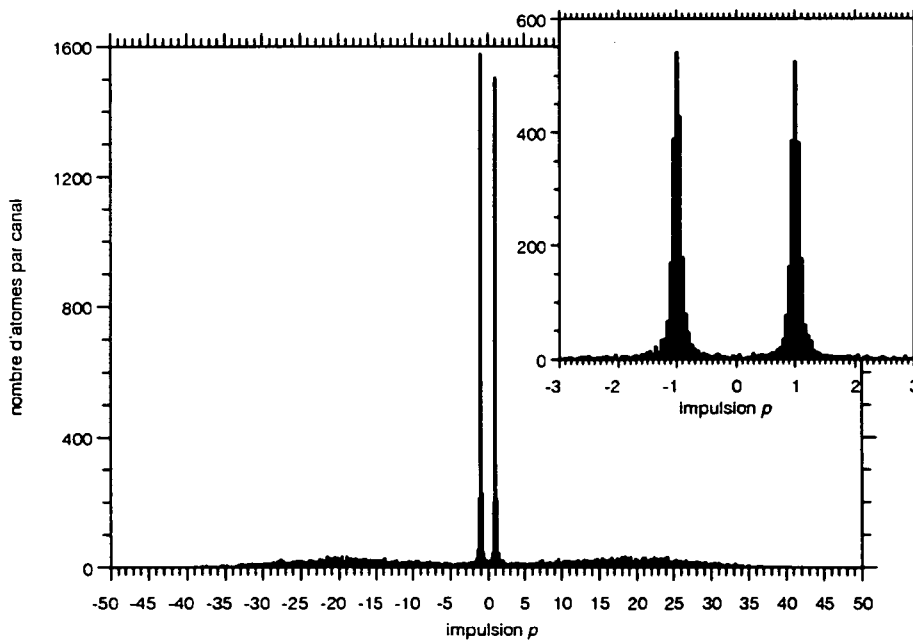


b) *Histogramme correspondant au a).* Chaque canal d'échantillonnage a une dimension $p_{ec} = 0,25 \hbar k$. L'ajustement par une gaussienne de chaque pic donne une largeur à $1/e^{1/2}$ de $\delta p_0 = 0,38 \hbar k$.

Figure IV.24 Simulation Monte-Carlo de l'évolution de 10 000 atomes sur une durée $\theta = 5\,000\ \Gamma^{-1}$. Les paramètres lasers et initiaux sont les mêmes que ceux de la figure précédente. Cette figure correspond typiquement à la nouvelle génération d'expériences.

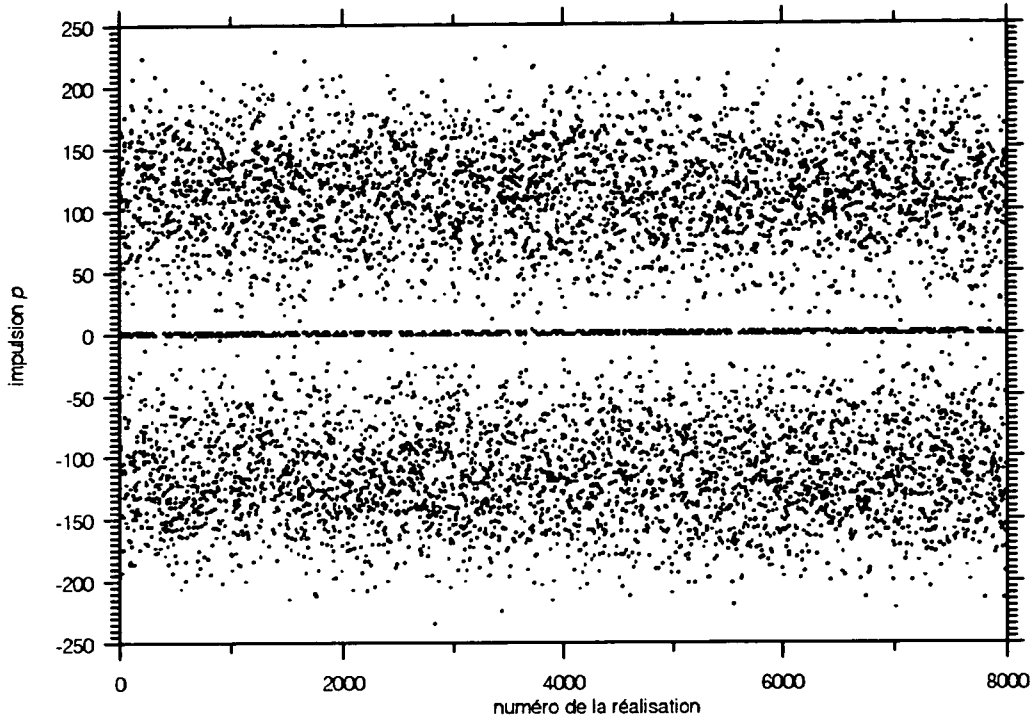


a) *Représentation de l'impulsion de chaque atome.* L'impulsion p est en unité $\hbar k$. On note l'accumulation d'atomes au voisinage de $p = \pm \hbar k$ et l'existence d'un fond diffus d'atomes non refroidis jusqu'à environ $\pm 40 \hbar k$.

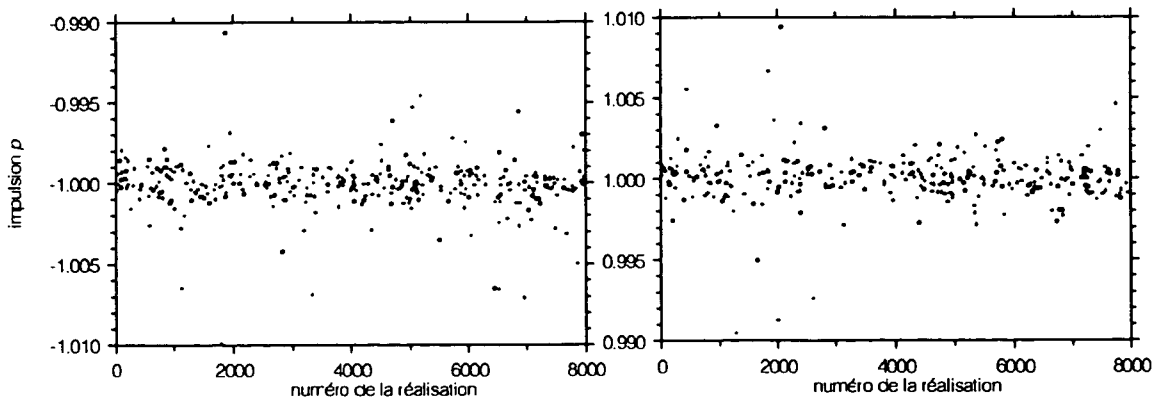


b) *Histogramme correspondant au a).* Chaque canal d'échantillonnage a une dimension $p_{ec} = 0,25 \hbar k$ dans la figure principale et $p_{ec} = 0,05 \hbar k$ dans la figure de détail. L'ajustement gaussien donne une mi-largeur à $1/e^{1/2}$ de $\delta p_0 = 0,070 \hbar k$.

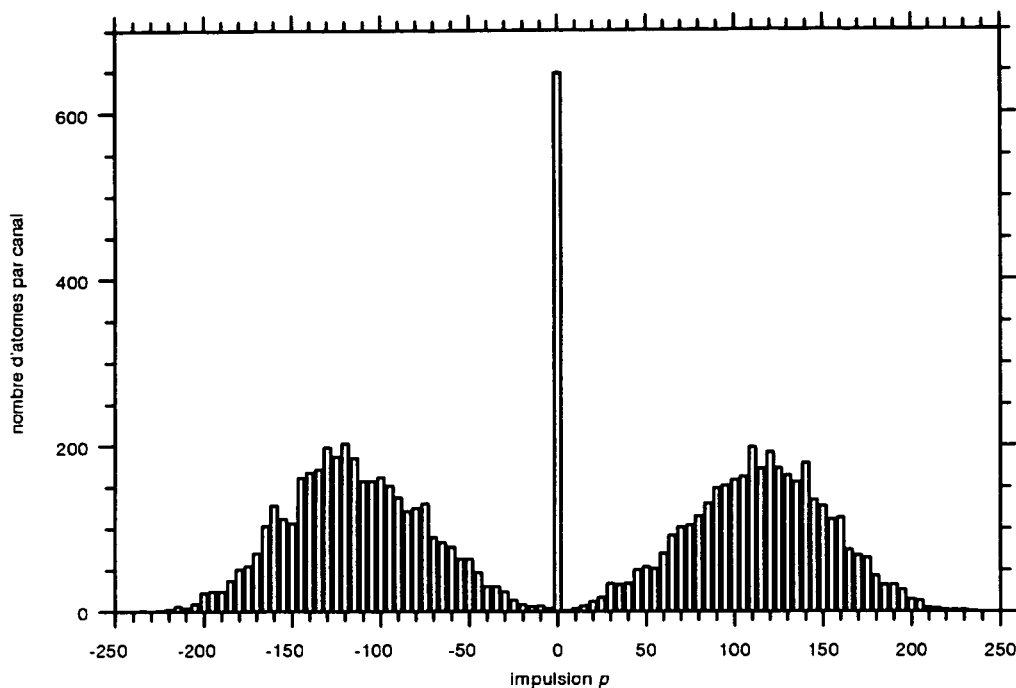
Figure IV.25 Simulation Monte-Carlo de l'évolution de 8 000 atomes sur une durée $\theta = 10^7 \Gamma^{-1}$. Les paramètres lasers valent $\Omega_1 = 0,3 \Gamma$ et $\delta = 0$. La distribution en impulsion initiale est une gaussienne avec $\delta p_i = \hbar k$. Ce type de simulations sur une échelle de temps très longue permet l'étude du régime asymptotique du refroidissement par résonances noires.



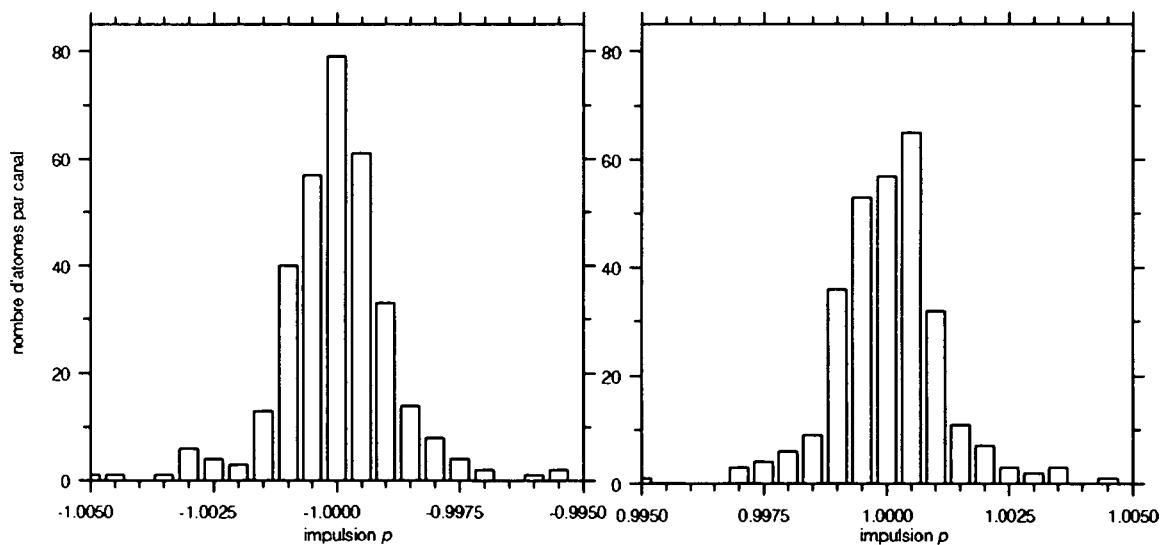
a) *Représentation de l'impulsion de chaque atome.* L'impulsion p est en unité $\hbar k$. On note l'accumulation d'atomes au voisinage de $p = \pm \hbar k$ (à cette échelle, la largeur des pics est environ 1000 fois plus petite que la taille des points représentés...). Le fond diffus d'atomes non refroidis s'étend jusqu'à $\pm 200 \hbar k$ environ. Noter l'existence d'un creux dans la distribution atomique pour $|p| < 50 \hbar k$.



b) *Représentation détaillée des zones $p \approx -\hbar k$ et $p \approx +\hbar k$.* Les atomes se trouvent concentrés dans un intervalle de moins de $\hbar k / 100$.



c) *Histogramme correspondant au a).* Chaque canal d'échantillonnage a une dimension $p_{ec} = 5 \hbar k$. Les atomes non refroidis ont une impulsion type de $120 \hbar k$. Remarquer le creusement de la distribution au voisinage du pic central : ce creusement définit le "bassin d'attraction" de la résonance noire. La hauteur du pic central (qui contient les atomes à $p \approx \pm \hbar k$) est sous-estimée du fait de la grande taille d'un canal d'échantillonnage ($p_{ec} = 5 \hbar k$, alors que $\delta p_0 \approx 8,5 \times 10^{-4} \hbar k$).



d) *Histogrammes correspondant au b).* Chaque canal d'échantillonnage a une dimension $p_{ec} = 5 \times 10^{-4} \hbar k$. Un ajustement gaussien donne une demi-largeur à $1/e^{1/2}$ de $\delta p_0 \approx 8,2 \times 10^{-4} \hbar k$ pour le pic à $p = -\hbar k$ et $\delta p_0 \approx 8,7 \times 10^{-4} \hbar k$ pour le pic à $p = +\hbar k$.

4.4 Aspects numériques

Nous avons déjà discuté de l'efficacité de la méthode du tirage aléatoire des délais (cf. § IV.3.3.6) vis-à-vis de la présence d'échelles très différentes dans le refroidissement par résonances noires. Dans ce paragraphe, nous évoquons l'efficacité numérique de la méthode dans son ensemble. Nous commençons par les problèmes de mémoire et de discrétisation (§ IV.4.4.1), qui disparaissent dans les simulations Monte-Carlo par la fonction délai. Puis, nous montrons que ces simulations conduisent à un algorithme inhabituellement rapide (§ IV.4.4.2). Enfin, nous calculons précisément l'incertitude statistique des simulations Monte-Carlo et discutons l'efficacité de ces simulations en fonction de la quantité d'informations recherchée (§ IV.4.4.3).

4.4.1 Mémoire et discrétisation

Dans la résolution des équations de Bloch optiques, la taille de la mémoire nécessaire pour la matrice densité varie comme la durée θ du temps d'interaction (cf. § I.3.2). Pour $\theta = 1\,000\ \Gamma^{-1}$ seulement (cf. figure IV.20), on doit stocker 7 000 réels. Pour étudier le régime des temps très longs, par exemple $\theta = 10^7\ \Gamma^{-1}$, il faudrait stocker 7×10^7 réels. En outre, la résolution des équations de Bloch exige une discrétisation en temps de plus en plus fine quand θ croît ($dt \propto \theta^{-1/2}$, cf. § 1.3.2). Ces discrétisations de plus en plus fines en impulsion et en temps font croître le nombre d'opérations et donc le temps de calcul comme $\theta^{2.5}$ (voir § I.3.2). Les erreurs d'arrondi vont également croître avec le temps de calcul.

Dans la simulation Monte-Carlo par la fonction délai, il n'y a aucune discrétisation. En effet, chaque atome possède à un instant donné un indice d'impulsion parfaitement défini, limité seulement par le nombre de décimales de l'ordinateur [26]. Lorsqu'un photon spontané est émis, le changement d'impulsion est un nombre aléatoire qui peut prendre toute valeur entre $-\hbar k$ et $+\hbar k$, avec le nombre de décimales autorisé par l'ordinateur. Quant à la méthode de tirage aléatoire des délais, elle s'adapte d'elle-même aux différentes échelles rencontrées. L'échelle de temps pour le programme est le calcul d'un délai τ entre deux émissions spontanées. Le coût en temps de calcul est le même que ce délai soit long ou court. Le programme traite à la fois des échelles grandes et petites, en temps et en impulsion, sans discrétisation.

La méthode Monte-Carlo par la fonction délai, pratiquée sans discrétisation, est donc un calcul exact aux erreurs d'arrondi près, et aux fluctuations statistiques près. Les erreurs d'arrondi sont réduites par le faible nombre d'opérations requises (cf. § IV.4.4.2). La seule source significative d'incertitudes vient donc des fluctuations statistiques liées à la taille de l'échantillon choisi et que l'on peut estimer rigoureusement (cf. § IV.4.4.3).

[26]

Nous avons travaillé en simple précision, c'est-à-dire avec 8 décimales. Ceci nous autoriserait à nous intéresser à des structures de $\hbar k/10^8$, bien plus fines que ce dont nous avons besoin.

4.4.2 Temps de calcul

Le temps de calcul [27] pour $\theta = 1\,000\ \Gamma^{-1}$ (cf. figure IV.20) est identique pour les équations de Bloch optiques et pour les simulations Monte-Carlo avec une incertitude de 1 % sur la proportion d'atomes piégés (incertitude numérique pour les équations de Bloch optiques, incertitude statistique pour les simulations Monte-Carlo avec 2 500 atomes).

Ceci nous fournit un point de comparaison. Nous allons maintenant décrire comment les temps de calcul varient avec la durée θ d'interaction (figure IV.26).

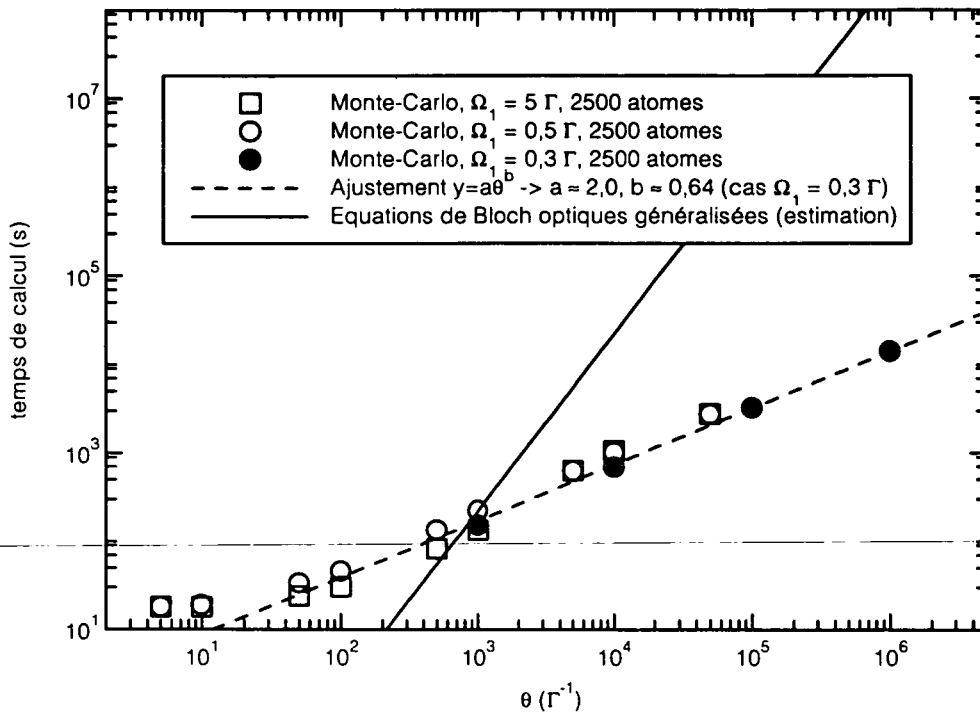


Figure IV.26 Temps de calcul des résonances noires sélectives en vitesse en fonction de la durée d'interaction θ . Les points correspondant aux simulations Monte-Carlo sont les temps de calculs constatés sur une station de travail SUN SPARC 10/30, avec 2 500 atomes. Pour la simulation des équations de Bloch optiques généralisées, seul le temps de calcul à $\theta = 10^3\ \Gamma^{-1}$ correspond à un calcul effectué. La loi portée pour les équations de Bloch correspond à une estimation (voir texte). Ce graphe montre à la fois l'inefficacité de la résolution des équations de Bloch pour des durées d'interaction longues, et l'efficacité remarquable des simulations Monte-Carlo avec la fonction délai : pour les équations de Bloch, le temps de calcul croît comme $\theta^{2,5}$, alors que pour la simulation Monte-Carlo, il ne croît que comme $\theta^{0,6}$.

Le temps de calcul pour résoudre les équations de Bloch optiques, croît comme $\theta^{2,5}$ (cf. § I.4.2), sans tenir compte des erreurs d'arrondi, des divergences numériques, ou des problèmes de taille mémoire qui pourraient apparaître quand θ croît. Il est donc très coûteux d'accéder aux temps très longs (trait continu sur la figure IV.26).

[27] Tous les temps de calcul donnés ici correspondent à une station de travail SUN Sparc 10/30, avec le système d'exploitation SunOs 4.1.3. Cette machine effectue, selon nos tests, $3,5 \times 10^6$ produits de réels simple précision par seconde.

Pour les simulations Monte-Carlo, le temps de calcul est difficile à estimer théoriquement. Aussi, nous avons systématiquement relevé les temps de calcul obtenus dans différentes conditions (triangles, ronds et carrés sur la figure IV.26).

Aux temps très courts ($\theta \leq 10 \Gamma^{-1}$), le temps de calcul ne dépend presque pas de la durée d'intégration, et il est plus long que le temps de calcul par équations de Bloch.

Dans le régime de temps intermédiaires ($10 \leq \theta \leq 10^3 \Gamma^{-1}$), le temps de calcul croît lentement et dépend des conditions initiales. Comme nous l'avons déjà noté à propos du tirage des délais (§ IV.3.3.6), le cas $\Omega_1 = 0,5 \Gamma$ est défavorable. Cependant, la différence entre $\Omega_1 = 0,5 \Gamma$ et $\Omega_1 = 5 \Gamma$ n'excède pas un facteur 2 sur le temps de calcul. Le cas $\Omega_1 = 0,3 \Gamma$ est légèrement plus rapide à calculer que $\Omega_1 = 0,5 \Gamma$ et $\Omega_1 = 5 \Gamma$. Ceci peut être dû à la diminution du taux de fluorescence moyen, et donc à l'allongement des délais moyens tirés.

Enfin, le cas le plus important est le régime des temps longs ($\theta \geq 10^3 \Gamma^{-1}$). Le temps de calcul observé croît alors comme $\theta^{0,64}$. Ce résultat est remarquable car il est rare d'avoir une croissance du temps de calcul plus lente que θ (les cas typiques [28] sont plutôt en θ^c avec $c \approx 2-3$, cf. équations de Bloch optiques). Ainsi, les simulations Monte-Carlo sont très efficaces pour les longues durées d'interaction.

D'où vient cette efficacité ? L'étape de base du programme est le tirage d'un délai. Or, lorsque θ croît, des délais de plus en plus longs apparaissent, associés soit à des atomes d'impulsion très petite (réduction du taux de fluorescence par résonance noire), soit à des atomes d'impulsion très grande (réduction du taux de fluorescence par effet Doppler). L'algorithme tire donc des délais de plus en plus longs quand θ croît, et il progresse donc de plus en plus vite. Ceci explique qualitativement pourquoi le temps de calcul croît moins vite que θ .

De manière plus quantitative, nous verrons au chapitre suivant que le temps θ croît comme $N^{1/2}$, où N est le nombre de passages au voisinage de $p = 0$. On en déduit :

$$\theta \propto N^2 \quad (\text{IV.88})$$

Si on ne prend en compte que le temps de calcul des émissions spontanées lors des N passages de l'atome au voisinage de $p = 0$, le temps de calcul, qui croît comme N , se comportera comme $\theta^{1/2}$. Or, il faut aussi prendre en compte les émissions spontanées hors du voisinage de $p = 0$. On s'attend donc à une croissance du temps de calcul en θ^c , avec $c \geq 1/2$. La valeur observée, $c = 0,64$, confirme ce raisonnement simple.

4.4.3 Incertitude statistique et quantité d'information

Dans ce paragraphe, nous nous posons le problème de l'incertitude statistique sur les résultats d'une simulation Monte-Carlo dans laquelle on fait évoluer N atomes. Dans un premier temps, nous calculons cette incertitude pour une information globale ("intégrale") comme la proportion d'atomes piégés. Puis, nous estimons l'incertitude sur le calcul des distributions en impulsion. Enfin, nous effectuons une comparaison avec la résolution des équations de Bloch optiques généralisées.

[28] D. Delande, communication personnelle.

Tout d'abord, on utilise la simulation Monte-Carlo pour estimer un paramètre global, comme la proportion f d'atomes dans un intervalle donné d'impulsion (cf. proportion d'atomes piégés calculée au § IV.4.1). La proportion f s'estime en comptant le nombre F_N d'atomes dans l'intervalle sélectionné, sachant que l'on a lancé N atomes :

$$f \approx \frac{F_N}{N} \quad (\text{IV.89})$$

Or F_N est une somme de N variables aléatoires indépendantes f_i , qui valent 1 ou 0 selon qu'un atome est ou non dans l'intervalle sélectionné :

$$F_N = \sum_{i=1}^N f_i \quad \text{avec} \quad P(f_i = 1) = f \quad \text{et} \quad P(f_i = 0) = 1 - f \quad (\text{IV.90})$$

La variable aléatoire f_i suit une loi de Bernouilli avec :

$$\langle f_i \rangle = f \quad \text{et} \quad (\langle f_i^2 \rangle - \langle f_i \rangle^2)^{1/2} = f(1-f) \quad (\text{IV.91})$$

La variable F_N suit donc une loi binomiale qui tend vers une loi gaussienne pour N grand :

Pour N grand, (F_N/N) est distribuée selon une gaussienne de centre f et d'écart quadratique moyen σ_{fa} , avec

$$\sigma_{fa} = \sqrt{\frac{f(1-f)}{N}}. \quad (\text{IV.92})$$

La quantité σ_{fa} désigne l'écart quadratique moyen absolu sur f . On peut également définir une incertitude relative σ_{fr} par :

$$\sigma_{fr} \equiv \frac{\sigma_{fa}}{f} = \sqrt{\frac{1-f}{fN}} \quad (\text{IV.93})$$

Pour estimer la distribution en impulsion, on découpe l'espace des impulsions en N_c cases d'histogramme. La proportion d'atomes f_j se trouvant dans la case j sera en moyenne, pour $N_c \gg 1$:

$$f_j \approx \frac{1}{N_c} \quad (\text{IV.94})$$

Comme $f_j \ll 1$, l'incertitude relative sur la population de chaque case sera

$$\sigma_{fr} \approx \frac{1}{\sqrt{f_j N}} \approx \sqrt{\frac{N_c}{N}} \quad (\text{IV.95})$$

Si on fixe σ_{fr} , lorsqu'on accroît le nombre N_c de cases pour obtenir plus d'informations, il faut accroître en proportion le nombre N d'atomes. A σ_{fr} fixé, le temps de calcul croît donc comme N_c (figure IV.27).

Les simulations Monte-Carlo sont donc d'autant plus efficaces qu'on leur demande moins d'information (!). Ainsi, avec des temps de calculs raisonnables, nous obtenons des prédictions relativement précises de la proportion d'atomes refroidis ($N_c = 1$, information "macroscopique") et des prédictions relativement bruitées pour la distribution en impulsion ($N_c \gg 1$, information "locale"). Notons qu'on peut réduire très

significativement le bruit sur les distributions si on dispose d'un modèle de distribution *a priori* à ajuster aux distributions simulées, comme c'est le cas ici (cf. § V.5). Ceci revient d'ailleurs à ramener la distribution à N_c cases à un petit nombre ($\ll N_c$) de paramètres "globaux" d'ajustement.

Effectuons maintenant la comparaison avec la résolution des équations de Bloch optiques généralisées. Dans ce cas, la durée d'interaction θ fixe un nombre minimal N_m de points de discrétisation, en général largement suffisant pour tracer la distribution en impulsion. Le temps de calcul est donc indépendant du nombre de points désirés tant qu'on n'exige pas davantage de points de calcul que le nombre minimal N_m . Ensuite, le temps de calcul croît linéairement avec le nombre de points désirés (figure IV.27).

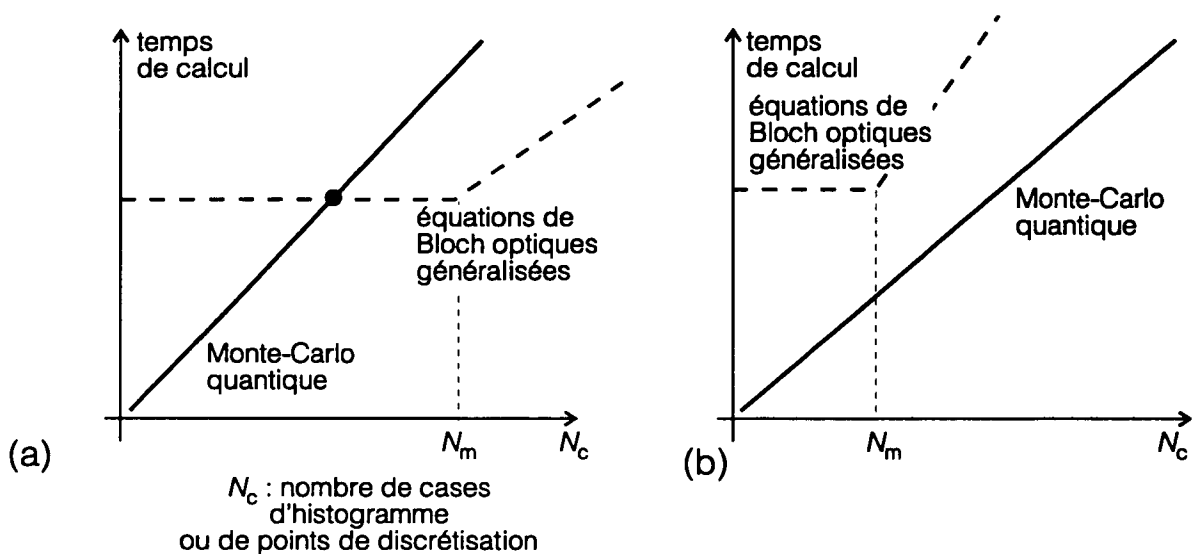


Figure IV.27 Variation du temps de calcul en fonction de la "quantité d'information" requise. On considère un niveau d'incertitude σ_{fa} fixé, de l'ordre de 1 %. Pour les simulations Monte-Carlo (trait plein), le temps de calcul croît linéairement avec le nombre de cases d'histogrammes. Pour les équations de Bloch optiques généralisées (trait pointillé), le temps de calcul ne croît que si on exige un nombre de points de discrétisation supérieur à un nombre minimal dicté par la durée θ d'interaction.

(a) Pour des temps d'interaction relativement courts ($\theta < 3 \times 10^4 \Gamma^{-1}$), la simulation Monte-Carlo quantique n'est plus efficace que les équations de Bloch que si on accepte d'avoir moins de détails sur la distribution en impulsion que ce qu'on aurait avec les équations de Bloch. En pratique, pour $\theta > 10^4 \Gamma^{-1}$, on est obligé d'utiliser la simulation Monte-Carlo (avec N_c relativement petit), pour avoir des temps de calcul inférieurs à la journée.

(b) Dans le régime des longs temps d'interaction ($\theta > 3 \times 10^4 \Gamma^{-1}$), la simulation Monte-Carlo quantique est plus efficace que les équations de Bloch, quel que soit N_c . En pratique, on est obligé d'utiliser la simulation Monte-Carlo, avec N_c relativement petit.

Selon la quantité d'information requise, il existe donc des régimes où la simulation Monte-Carlo est plus efficace que la résolution des équations de Bloch optiques, et *vice versa* (figure IV.27.a). Cependant, on peut calculer -mais nous ne détaillerons pas ce calcul- que dans le régime des temps longs d'interaction, plus précisément pour $\theta > 3.10^4 \Gamma^{-1}$ pour une incertitude σ_{fa} de 1 %, la simulation Monte-

Carlo est toujours plus efficace que la résolution des équations de Bloch, y compris si on exige d'avoir autant de cases d'histogramme Monte-Carlo que de points de discrétisation pour les équations de Bloch (figure IV.27.b). En outre, dès que $\theta > 10^4 \Gamma^{-1}$, malgré le bruit statistique, on préfère les simulations Monte-Carlo aux équations de Bloch car le temps de calcul des équations de Bloch dépasserait une journée.

On peut également se demander comment croît le temps de calcul avec l'écart-type requis. L'équation (IV.95) montre que le nombre N d'atomes à faire évoluer, c'est-à-dire le temps de calcul, croît comme $1/\sigma_{f_m}^2$. Les calculs par équations de Bloch ont ici un comportement plus avantageux, puisque leur convergence est celle de l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre. Si on utilise une méthode Runge-Kutta d'ordre 4, le temps de calcul varie comme la précision requise à la puissance $1/4$.

En conclusion, la simulation Monte-Carlo par la fonction délai est un algorithme rapide pour fournir des prédictions pour des durées θ d'interaction inaccessibles au calcul par équations de Bloch (cf. § IV.4.4.2). Le résultat de ces simulations comporte un bruit que l'on sait calculer (équations (IV.93) et (IV.95)). Par principe, les simulations Monte-Carlo convergent lentement vers le résultat exact (ce qui n'est pas contradictoire avec la rapidité de l'algorithme). On ne peut donc pas espérer rendre ce bruit négligeable dans toutes les situations, mais on peut le réduire en s'intéressant à des variables "globales" bien choisies comme la proportion d'atomes piégés. En pratique, en 4,4 jours de temps de calcul sur station de travail, nous avons calculé, pour $\theta = 10^7 \Gamma^{-1}$, une proportion d'atomes de 8 % avec une incertitude absolue $\sigma_{f_a} \approx 0,2$ %. Ceci est suffisant pour les problématiques actuelles. Les simulations à l'aide de la fonction délai sont à ce jour le seul moyen numérique d'avoir accès à des durées d'interaction aussi longues (il aurait fallu plus de cent ans de temps de calcul avec les équations de Bloch optiques).

5 Conclusion

5.1 Résumé de la méthode de simulation Monte-Carlo par la fonction délai

Les simulations Monte-Carlo quantique par la fonction délai reposent sur le calcul de l'évolution de la fonction d'onde atomique restreinte à la multiplicité à zéro photon. Cette évolution est une succession d'évolutions hamiltoniennes décrites par un hamiltonien effectif, entrecoupées d'émissions spontanées décrites comme des sauts quantiques. Les dates d'émission des photons spontanés sont tirées aléatoirement à l'aide de la fonction délai qui est la loi de probabilité des délais entre deux photons spontanés consécutifs. La direction et la polarisation des photons spontanés sont également tirées aléatoirement.

Cette méthode générale est particulièrement efficace dans le cas des résonances noires sélectives en vitesse à une dimension (figure IV.28). Elle traite le problème de l'apparition d'un continuum étendu d'échelles de temps et d'impulsion.

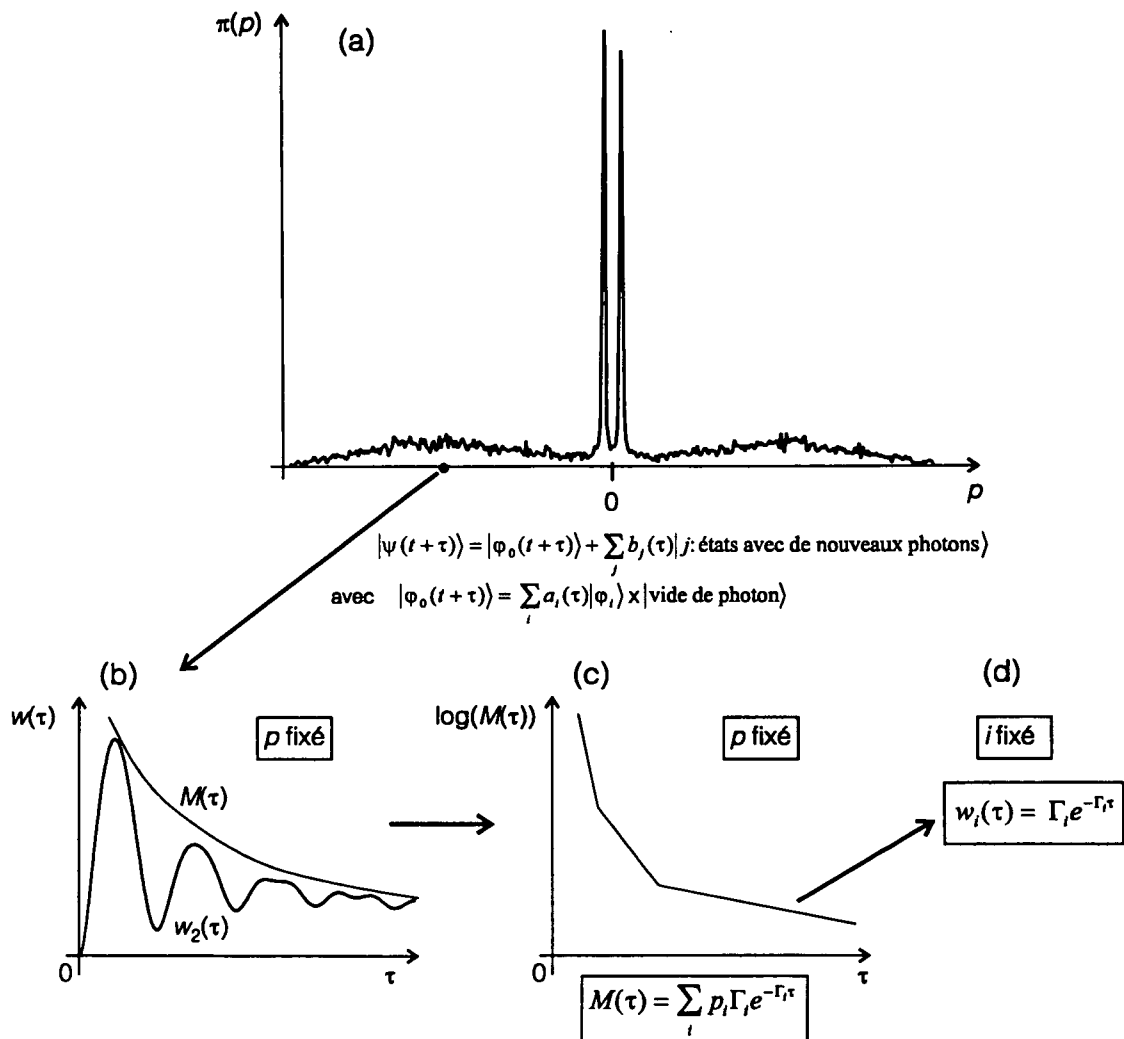


Figure IV.28 Traitement des échelles dans les simulations Monte-Carlo par la fonction délai.

(a) La distribution en impulsion $\pi(p)$ fait apparaître à la fois des structures très fines (pics) et des impulsions très grandes (fond d'atomes non refroidis). Il existe donc des échelles d'impulsion très différentes les unes des autres. En outre, ces échelles d'impulsion impliquent des échelles de temps très différentes les unes des autres, inhérentes au refroidissement par résonances noires. En considérant l'évolution des fonctions d'onde atomiques $|\varphi_0(t+\tau)\rangle$ restreintes à la multiplicité à 0 photon, les simulations Monte-Carlo permettent de se ramener à un problème local en impulsion.

(b) Cependant, même à p fixé, il peut subsister dans la fonction délai $w_2(\tau)$ des échelles de temps très différentes les unes des autres. Pour effectuer le tirage aléatoire des délais, on utilise la méthode du rejet en majorant la fonction délai $w_2(\tau)$ par une fonction $M(\tau)$ bien choisie.

(c) Cette fonction majorante $M(\tau)$ est une somme d'exponentielles décroissantes.

(d) La fonction $M(\tau)$ contient un petit nombre d'échelles de temps bien identifiées que l'on peut isoler et traiter séparément.

La simulation Monte-Carlo apporte une première simplification au problème en considérant pour chaque atome une fonction d'onde locale en impulsion p (à l'opposé des matrices densités étendues en p). Cependant, pour une impulsion p donnée, plusieurs temps caractéristiques d'échelles très différentes peuvent encore être présents dans la fonction délai.

Ce deuxième problème est résolu grâce à une méthode de tirage aléatoire des délais. Cette méthode exploite la forme analytique de la fonction délai pour traiter séparément chaque échelle de temps, sans approximation. Ainsi, l'étape élémentaire de la simulation, le tirage d'un délai, s'effectue avec le même nombre d'opérations, que ce délai soit très court ou très long.

On tire ainsi parti de l'existence de délais de plus en plus longs dans le refroidissement par résonances noires, lorsque l'impulsion des atomes devient plus petite. Le résultat est un algorithme efficace numériquement pour le traitement des longues durées d'interaction. Nous avons pu simuler l'évolution de 8 000 atomes sur des durées accrues de 4 ordres de grandeur par rapport à ce qui avait été obtenu par la résolution des équations de Bloch optiques généralisées. On observe que le temps de calcul croît seulement comme $\theta^{0.6}$ où θ est la durée d'interaction, ce qui est plus lent que le comportement des équations de Bloch ($\theta^{2.5}$) et plus lent même que θ .

En définitive, l'avantage du Monte-Carlo par la fonction délai est de simuler la physique elle-même. Lorsque l'intervalle entre deux événements est très long, il suffit d'un seul pas de calcul pour avancer beaucoup dans le temps physique.

Deux résultats importants ont pu être obtenus, grâce à cette nouvelle simulation. Tout d'abord, les simulations confirment remarquablement bien la conjecture selon laquelle la largeur des pics en impulsion décroît en $1/\theta^{1/2}$. Cette dépendance a maintenant été vérifiée sur des durées d'interaction de $10^7 \Gamma^{-1}$, soit des durées de 1 seconde. Ceci permet d'obtenir des demi-largeurs théoriques inférieures à $10^{-3} \hbar k$, soit des températures inférieures à $T_R/10^6$ (ou $4 \cdot 10^{-12}$ K).

Ensuite, nous avons observé que la proportion d'atomes refroidis diminuait légèrement au temps très longs. L'interprétation de ce résultat ne pourra se faire qu'à l'aide de l'approche "vols de Lévy" (chapitre V), qui prédit notamment la proportion d'atomes refroidis.

5.2 Extension possible et comparaison à une autre méthode

Comparons les simulations Monte-Carlo par la fonction délai aux simulations par "Monte-Carlo sur fonctions d'onde" (ou MCWF pour "Monte-Carlo Wave Function", voir [DCM92] et [MCD93]). Ces deux méthodes traitent l'évolution atomique et l'émission spontanée de manière équivalente : la fonction d'onde atomique

[DCM92] J. Dalibard, Y. Castin, and K. Mølmer, *Wave-Function Approach to Dissipative Processes in Quantum Optics*, Phys. Rev. Lett. **68**, p. 580-583 (1992).

[MCD93] K. Mølmer, J. Dalibard, and Y. Castin, *A Monte Carlo wave-function method in quantum optics*, J. Opt. Soc. Am. B. **10**, p. 524-538 (1993).

suit une évolution hamiltonienne (décrite par un hamiltonien effectif non hermitique) entrecoupée d'émissions spontanées décrites comme des sauts quantiques. La différence essentielle est le processus de tirage des dates d'émission des photons spontanés.

En effet, dans la méthode Monte-Carlo sur fonctions d'onde, on fait évoluer pas à pas la fonction d'onde atomique entre deux émissions spontanées et on calcule [29] la probabilité d'émission spontanée entre t et $t + dt$. Avec la simulation Monte-Carlo sur fonctions d'onde, il faut de nombreuses étapes ($t \rightarrow t + dt$) pour parvenir à émettre un photon spontané. Au contraire, la fonction délai, qui n'est pas une méthode pas-à-pas, permet d'obtenir en une seule étape le tirage d'un photon spontané ($t_i \rightarrow t_{i+1} + \tau_i$).

Comme la simulation Monte-Carlo par la fonction délai, les fonctions d'onde Monte-Carlo ont l'avantage de se ramener à une fonction d'onde, plus locale en p que la matrice densité des équations de Bloch. Cependant, cette méthode MCWF continue à effectuer une discrétisation en temps, très coûteuse lorsque coexistent des échelles de temps très différentes. Elle fournit beaucoup d'information, les états atomiques à chaque pas de temps dt . Mais c'est une information en général inutile : pour traiter l'évolution cohérente, le calcul de l'évolution atomique entre deux émissions spontanées n'est pas indispensable ; il suffit de calculer la fonction délai. Il est donc clair que, dans le cas du refroidissement par résonances noires à une dimension, la simulation par la fonction délai, qui n'effectue aucune discrétisation en temps, est avantageuse.

Cela reste-t-il vrai dans le cas général ? Pour que l'utilisation de la fonction délai soit rentable, il faut que le calcul de la fonction délai soit rapide. Pour cela, il est important que les familles d'états couplés par les lasers soient petites. Sinon, l'hamiltonien effectif sera de grande dimension et la recherche des valeurs propres très coûteuse en temps de calcul. En pratique, le calcul par la fonction délai semble avantageux dans le cas de familles fermées. Dans le cas plus général de familles ouvertes, le calcul de la fonction délai devient plus long, et il est possible que le calcul par fonctions d'onde Monte-Carlo, par exemple, soit moins lent. Mais dans ce cas, on n'aurait pas résolu le problème des différentes échelles de temps. Toutefois, on pourrait éventuellement s'inspirer de ce qui a été fait dans ce mémoire pour développer un traitement multi-échelle adapté à la méthode WFMC.

En conclusion, la fonction délai est bien adaptée au traitement de systèmes ayant un petit nombre de niveaux. Dans ce cas, elle se prête bien à des traitements numériques efficaces (cf. [ZMW87] et [CZA93]) ou, comme on va le voir, à des développements

[29] Ceci revient en fait à calculer la fonction délai à partir de l'équation (IV.7) en calculant numériquement pas à pas $\pi_0(\tau)$.

[ZMW87] P. Zoller, M. Marte, and D.F. Walls, *Quantum jumps in atomic systems*, Phys. Rev. A **35**, p. 198-207 (1987).

[CZA93] C. Cohen-Tannoudji, B. Zambon, and E. Arimondo, *Quantum -jump approach to dissipative processes: application to amplification without inversion*, J. Opt. Soc. B **10**, p. 2107-2120 (1993).

analytiques (cf. [CoD86], [CZA93]). Dans le cas d'un grand nombre de niveaux, d'autres méthodes peuvent toutefois être préférables.

5.3 Vers une nouvelle approche physique : du quantique au stochastique

Outre les aspects numériques, l'apport des simulations Monte-Carlo par la fonction délai est de donner une image nouvelle du refroidissement par résonances noires. L'évolution atomique peut être décrite comme une diffusion dans l'espace des impulsions : les atomes possèdent à chaque instant un indice d'impulsion bien défini et changent aléatoirement d'impulsion lors de chaque émission spontanée. Les seuls concepts nécessaires sont la distribution des délais entre deux émissions spontanées (fonction délai) et le diagramme de rayonnement. Ces deux concepts ne font pas intervenir la mécanique quantique, ce sont des concepts statistiques classiques.

La fonction délai permet donc de passer d'un problème quantique où les cohérences jouent un grand rôle (cf. interférences entre amplitudes de probabilité à l'origine de la résonance noire) à un problème de diffusion classique. *La fonction délai contient l'information relative aux cohérences, mais elle peut être interprétée comme une distribution classique.*

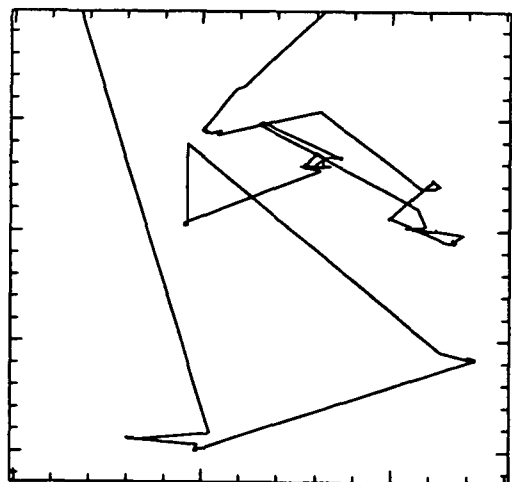
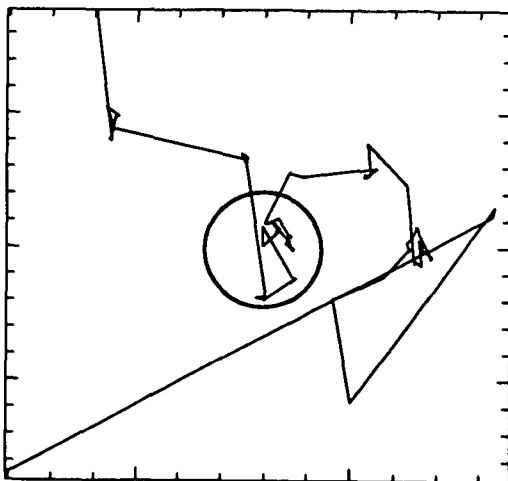
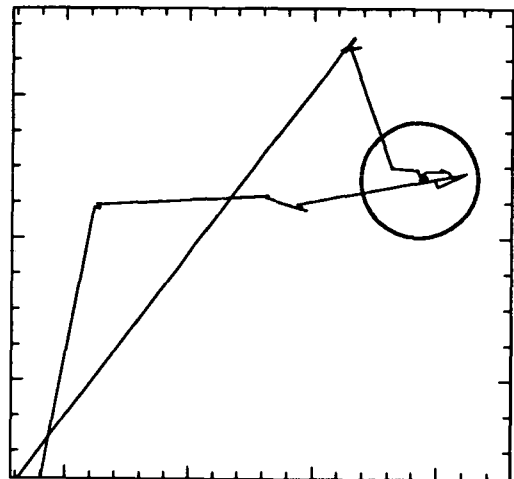
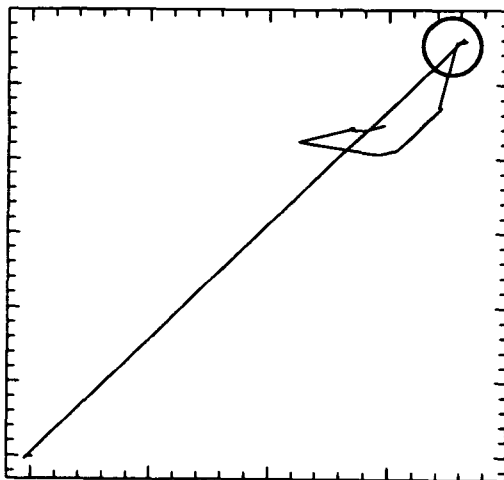
Puisqu'on s'est ramené à un problème de diffusion classique, peut-on maintenant construire une théorie statistique du refroidissement par résonances noires ? A ce sujet, nous avons déjà observé que l'évolution de l'impulsion d'un seul atome présentait un caractère fractal inhabituel : quelle que soit l'échelle de temps θ considérée, il apparaît des délais τ du même ordre de grandeur que θ et ceci est au centre du refroidissement par résonances noires.

Le chapitre suivant est consacré à l'élaboration d'une approche statistique du refroidissement par résonances noires, issue de cette observation. Cette approche est construite presque exclusivement sur la statistique des délais entre deux photons spontanés, étudiée ici avec la fonction délai.

[CoD86] C. Cohen-Tannoudji and J. Dalibard, *Single-Atom Laser Spectroscopy. Looking for Dark Periods in Fluorescence Light*, Europhys. Lett. **1**, p. 441-448 (1986).

Chapitre V

Approche statistique : vols de Lévy



Plan du chapitre V : Approche statistique : vols de Lévy

1 Introduction	269
2 Q'est-ce qu'un vol de Lévy ?	275
2.1 Théorème de la limite centrale généralisé aux lois de puissance "larges"	275
2.2 Propriété fondamentale : le poids des événements rares	277
2.2.1 Enoncé et démonstration	277
2.2.2 Commentaire	279
2.2.3 Exemples de vols de Lévy	279
2.3 Quelques propriétés des lois de Lévy	282
2.3.1 Paramétrisation de la loi élémentaire	282
2.3.2 Formes utiles des lois de Lévy	283
2.3.3 Normalisation des distributions $P(x)$	285
3 Distributions des temps caractéristiques	286
3.1 Modélisation de la diffusion en impulsion	286
3.2 Distribution des temps de piégeage	289
3.2.1 Modèle	289
3.2.2 Cas où τ et p sont liés de manière déterministe	291
3.2.3 Cas où $P(\tau/p)$ est une exponentielle	292
3.2.4 Application aux résonances noires sélectives en vitesse	293
3.3 Distribution des temps de premier retour	296
3.3.1 Modèles	296
3.3.2 Cas d'impulsions confinées : $ p < p_{\max}$	298
3.3.2.1 Situation physique étudiée	298
3.3.2.2 Calcul du temps moyen de premier retour	299
3.3.2.3 Test numérique	303
3.3.2.4 Commentaire : friction et refroidissement sub-recul	305
3.3.3 Cas d'impulsions non confinées avec un taux de fluorescence constant	307
3.3.3.1 Cas 1D	307
3.3.3.2 Cas 2D	308
3.3.3.3 Cas 3D	309
3.3.4 Cas d'impulsions non confinées avec un taux de fluorescence non constant	309
3.4 Résumé des propriétés des distributions de piégeage et de premier retour	310
3.5 Absence d'ergodicité	312
4 Evolution de la population piégée	314
4.1 Discussion qualitative	314
4.2 Calcul de la population piégée : mise en forme	315
4.3 Loi d'arrosage temporel	317
4.3.1 Equation générale	317
4.3.2 Lois d'arrosage pour une distribution de Lévy	317
4.3.3 Loi d'arrosage des dates de piégeage	322
4.3.3.1 Cas $\mu = \hat{\mu}$	322
4.3.3.2 Cas $\hat{\mu} < \mu < 1$ et cas $\mu < \hat{\mu} < 1$	323
4.3.3.3 Cas $\hat{\mu} < 1 < \mu$ et cas $\mu < 1 < \hat{\mu}$	326

4.3.3.4 Cas $1 < \hat{\mu} < 2$ et $1 < \mu < 2$ ($\mu \neq \hat{\mu}$)	328
4.3.3.5 Synthèse sur la loi d'arrosage	328
4.4 Population piégée	329
4.4.1 Normalisation	329
4.4.2 Cas $\mu = \hat{\mu}$	330
4.4.3 Cas $\hat{\mu} < \mu < 1$ et cas $\mu < \hat{\mu} < 1$	331
4.4.4 Cas $\hat{\mu} < 1 < \mu$ et cas $\mu < 1 < \hat{\mu}$	334
4.4.5 Cas $1 < \hat{\mu} < 2$ et $1 < \mu < 2$ ($\mu \neq \hat{\mu}$)	335
4.4.6 Synthèse sur la population piégée	336
4.5 Application aux résonances noires	337
4.5.1 Refroidissement à une dimension	337
4.5.2 Refroidissement à deux dimensions	339
4.5.3 Refroidissement à trois dimensions	340
4.6 Tests de l'approche vols de Lévy	340
4.7 Rôle de la dimensionnalité	345
5 Distribution en impulsion et densité dans l'espace des phases	345
5.1 Distribution du module des impulsions	345
5.2 Distribution d'une composante de l'impulsion, largeur de cette distribution	349
5.3 Hauteur du pic en impulsion	351
5.4 Population refroidie et densité dans l'espace des phases	352
5.4.1 Démarche et définitions	352
5.4.2 Calcul de la proportion d'atomes refroidis	352
5.4.3 Densité dans l'espace des phases	353
5.5 Application aux résonances noires	354
6 Limites et potentialités du refroidissement sub-recul	356
6.1 Quelles limites ?	356
6.1.1 Mécanismes de sortie parasite	357
6.1.2 Limites issues des propriétés des marches aléatoires	359
6.2 Processus de sortie parasite	359
6.3 Effets collectifs : traitement auto-cohérent de la diffusion multiple	361
6.3.1 Rôle de la diffusion multiple	361
6.3.2 Ordres de grandeur	362
6.3.3 Evolution de la population piégée	363
6.3.4 Discussion des solutions	364
6.3.5 Comment réduire la diffusion multiple ?	365
6.4 Compromis remplissage-finesse	366
6.5 Limites "ultimes" : refroidissement avec un nombre fini de photons	368
7 Conclusion	370

1 Introduction

La question de la proportion $f(\theta)$ d'atomes refroidis, dans le régime des longues durées d'interaction, était explicitement posée par les travaux de 1988, et laissée ouverte [AAK89]. Comme ce régime est celui pour lequel on attend les plus basses températures, cette question est particulièrement importante : selon que $f(\theta)$ tend vers 0, vers 1, ou vers une constante intermédiaire à déterminer, l'intérêt pratique du refroidissement par résonances noires peut changer profondément. De manière plus générale, il n'existait pas de description quantitative de la dynamique du refroidissement par résonances noires dans le régime des longues durées d'interaction. On ne connaissait donc pas le rôle précis du nombre de dimensions, ni l'importance des forces de friction, bien qu'on soupçonnât l'importance de ces paramètres.

Le comportement de l'ensemble de la distribution atomique, qui détermine la proportion d'atomes refroidis, est un problème "global" : il est déterminé par l'évolution atomique sur une zone étendue en impulsion, évolution qui est très différente selon que l'impulsion est proche de 0 (résonance noire) ou non. Or, l'approche des équations de Bloch optiques généralisées, utilisée en 1988, est une approche locale dont la puissance diminue au fur et à mesure qu'on s'intéresse à des problèmes plus globaux : les équations de Bloch ont permis de cerner parfaitement le comportement atomique pour une impulsion p donnée (problème local des modes propres de désintégration) et de déterminer semi-quantitativement l'impulsion caractéristique atteinte δp_0 (problème du voisinage de $p = 0$). Mais la distribution atomique dans son ensemble (problème global) n'a pu être déterminée que numériquement et pour des temps courts.

Une voie pour obtenir analytiquement la distribution globale en impulsion est d'utiliser une équation de Fokker-Planck. Mais l'approche par équation de Fokker-Planck consiste à remplacer l'équation aux différences finies de la physique "réelle" par une équation aux dérivées partielles : la taille des sauts en impulsion est considérée comme un infiniment petit. Or, dans le refroidissement par résonances noires, il apparaît des structures en impulsion (pic d'atomes refroidis) dont la taille est inférieure à celle des sauts en impulsion ($\approx \hbar k$). Ceci interdit une approche par équation de Fokker-Planck.

L'approche statistique développée dans ce chapitre est née de l'observation d'une analogie entre les réalisations Monte-Carlo de l'évolution d'un seul atome (cf. chapitre IV) et certains processus de diffusion anormale connus sous le nom de "vols de

[AAK89] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the one-photon recoil energy by velocity-selective coherent population trapping : theoretical analysis*, J. Opt. Soc. Am. B 6, p. 2112-2124 (1989).

Lévy" [BoG90], et caractérisés par l'importance des événements rares. La figure V.1 représente une réalisation Monte-Carlo de l'évolution d'un seul atome : on observe que l'état d'impulsion la plus petite représente à lui seul une fraction significative (70 %) du temps total, alors que l'atome a occupé 4000 états d'impulsion au cours de son interaction avec les lasers. Qu'un seul événement en domine 4 000 autres est extrêmement peu probable avec les lois de probabilité habituellement rencontrées : imaginons la réaction d'un expérimentateur déterminant la taille moyenne d'un échantillon de 4 000 personnes et trouvant que cette moyenne est dominée à 70 % par une seule personne ... Si la grandeur mesurée suit une loi gaussienne, la probabilité qu'un tel échantillon soit obtenu par hasard est de l'ordre de $10^{-2.10^6}$!

Il existe pourtant des systèmes physiques dont le comportement est dominé par des événements rares. Un exemple récemment découvert est celui des micelles géantes [OBL90], [BOL91] [1]. Les micelles sont des macromolécules tubulaires qui diffusent de manière brownienne dans une solution, et qui ont la particularité de se briser et de se recombinaison sans cesse. Un marqueur fluorescent, attaché à une micelle, sera donc porté tantôt par des micelles courtes, tantôt par des micelles longues, au hasard des ruptures et des recombinaisons de sa monture. Lorsque le marqueur est porté par une micelle longue, son libre parcours moyen est faible et le marqueur se déplace peu. Lorsque le marqueur est porté par une micelle courte, et donc beaucoup plus mobile, son libre parcours moyen est grand et le marqueur se déplace beaucoup.

Pour certaines distributions de tailles de micelles, on observe, sur une échelle de temps suffisamment longue, que l'essentiel du déplacement du marqueur est dû à un seul saut, celui effectué sur la plus petite micelle rencontrée. On a ici affaire à un processus de diffusion "anormale", bien décrit par les statistiques de Lévy, c'est-à-dire par des distributions de longueurs de saut qui sont des lois de puissance décroissant lentement. L'évolution temporelle de l'impulsion atomique dans les résonances noires est l'analogue temporel de la diffusion anormale des micelles dans l'espace réel.

[BoG90] J.-P. Bouchaud and A. Georges, *Anomalous diffusion in disordered media : statistical mechanisms, models and physical applications*, Phys. Rep. **195**, p. 127-293 (1990).

[OBL90] A. Ott, J.P. Bouchaud, D. Langevin, and W. Urbach, *Anomalous Diffusion in "Living Polymers" : a Genuine Lévy Flight ?*, Phys. Rev. Lett. **65**, p. 2201-2204 (1990).

[BOL91] J.P. Bouchaud, A. Ott, D. Langevin, and W. Urbach, *Les "vols de Lévy" ou la diffusion non brownienne*, La Recherche **22**, p. 378-380 (1991).

[1] Noter aussi l'introduction de vols de Lévy, en physique atomique, pour décrire la diffusion spectrale de molécules isolées. Voir [ZuK94] et [Orb90] : G. Zumofen and J. Klafter, *Spectral random walk of a single molecule*, Chem. Phys. Lett. **219**, p. 303-309 (1994) ; M. Orrit and J. Bernard, *Single Pentacene Molecules Detected by Fluorescence excitation in a p-Terphenyl Crystal*, Phys. Rev. Lett. **65**, p. 2716-2719 (1990).

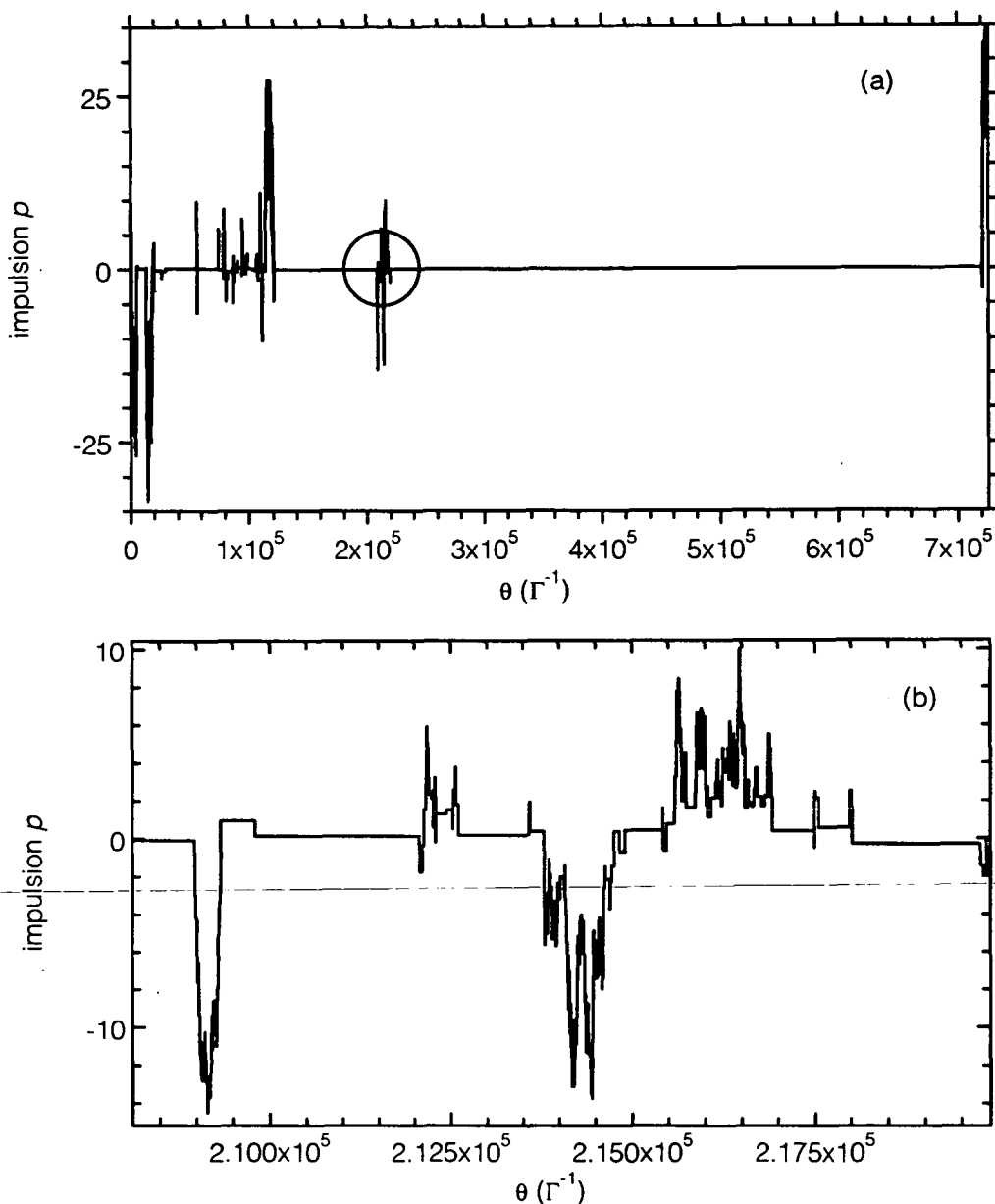


Figure V.1 L'évolution temporelle de l'impulsion d'un seul atome est dominée par des événements rares. Cette figure représente une réalisation Monte-Carlo avec les paramètres suivants : $\Omega_1 = \Gamma$, $\delta = 0$. Les impulsions sont en unité $\hbar k$.

(a) L'événement de piégeage le plus long représente $5 \times 10^5 \Gamma^{-1}$, soit 70 % du temps total, alors que l'atome a changé 4000 fois d'impulsion au cours du temps total considéré. Qu'un seul événement parmi 4000 représente une telle proportion du temps total est en pratique interdit par les distributions statistiques normales : si la distribution des délais τ_d entre deux changements d'impulsion était gaussienne, la probabilité de tirer un tel événement à plusieurs milliers d'écart-type est de l'ordre de $10^{-2.10^6}$! Ces événements rares jouent un rôle crucial dans le refroidissement par résonances noires : ils correspondent aux impulsions les plus petites atteintes.

(b) Détail du (a).

L'objectif de ce chapitre est de donner une description statistique du refroidissement par résonances noires, en termes de statistiques de Lévy. Avant d'entrer dans les détails, montrons simplement le rôle des statistiques de Lévy dans les résonances noires à une dimension. Plus précisément, montrons que la distribution $P(\tau)$ des temps passés par l'atome dans un intervalle $[-p_{\text{trap}}, +p_{\text{trap}}]$ est une loi de puissance décroissant lentement, p_{trap} étant une impulsion petite devant $p_R = \hbar k$, la taille caractéristique d'un changement d'impulsion dû à l'émission spontanée.

La probabilité $P(p)$ pour qu'un atome atteigne une impulsion p dans l'intervalle $[-p_{\text{trap}}, +p_{\text{trap}}]$ dépend peu de l'impulsion initiale (avant émission spontanée) et de l'impulsion finale p (après émission spontanée). La loi $P(p)$ est donc approximativement uniforme [2]

$$P(p) \approx \frac{1}{2p_{\text{trap}}} \quad (\text{V.1})$$

Supposons en outre que l'atome a atteint l'état $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$. Quelle est la durée de vie $\tau(p)$ de cet état ? La durée de vie τ est l'inverse du taux de fluorescence $\Gamma_{\text{NC}}^{-1}(p)$. Si p (vérifiant $|p| < p_{\text{trap}}$) est suffisamment petit pour qu'on puisse appliquer l'équation perturbative (I.19.b) donnant $\Gamma_{\text{NC}}^{-1}(p)$, la durée de vie $\tau(p)$ est alors

$$\tau(p) = \frac{1}{\Gamma} \left(\frac{M\Omega_1}{2kp} \right)^2 \quad (\text{V.2})$$

La probabilité $P(\tau)d\tau$ que l'atome ait atteint un état de durée de vie τ , sachant qu'il a atteint l'intervalle $[-p_{\text{trap}}, +p_{\text{trap}}]$ est donc donnée par :

$$P(\tau)d\tau = P(p)dp \quad (\text{V.3})$$

En calculant $dp / d\tau$ à l'aide de (V.2), on obtient $P(\tau)$:

$$P(\tau) \propto 1 / \tau^{3/2}, \quad \text{pour } \tau \geq \tau(p_{\text{trap}}) \quad (\text{V.4})$$

Une telle loi $P(\tau)$ a la particularité de posséder une "queue" qui décroît lentement quand $\tau \rightarrow +\infty$: ainsi, la probabilité d'obtenir des temps τ très longs n'est pas négligeable [3], d'où les temps très longs observés sur la figure V.1. Cette "queue" de $P(\tau)$ est même tellement importante que la valeur moyenne de τ est infinie :

[2] Dans ce chapitre, $P(x)$ est une notation générique pour les lois de probabilité. C'est la variable entre parenthèses qui spécifie à quelle distribution on a affaire : $P(\tau)$ est la distribution des temps de piégeage, alors que $P(p)$ est la distribution des impulsions atteintes dans l'intervalle $[-p_{\text{trap}}, +p_{\text{trap}}]$, etc.

[3] Ainsi, pour les résonances noires à une dimension, la probabilité P_4 de tirer un temps τ quatre fois plus grand que $\tau(p_{\text{trap}})$ est 0,5 :

$$P_4 = \int_{4\tau(p_{\text{trap}})}^{\infty} P(\tau)d\tau$$

En revanche, si $P(\tau)$ était une gaussienne de valeur quadratique moyenne $\tau(p_{\text{trap}})$, cette probabilité ne serait que $(1 - \text{erf}(4/2^{1/2})) \approx 6 \times 10^{-5}$, soit 8 000 fois plus petite que pour la distribution (V.4).

$$\langle \tau \rangle = \int_{\tau(p_{\text{trap}})}^{\infty} \tau P(\tau) d\tau \rightarrow \infty \tag{V.5}$$

Notons toutefois que l'intégrale de $P(\tau)$ converge, c'est-à-dire que $P(\tau)$ est normalisable. Une telle loi de probabilité n'obéit pas au théorème de la limite centrale habituel. Elle relève du formalisme des lois de Lévy. Nous avons donc montré simplement que les temps de piégeage au voisinage de $p = 0$ relèvent bien des statistiques de Lévy, qui font jouer un grand rôle aux temps très longs [4].

La figure V.2 permet de visualiser l'apparition de temps de piégeage très longs dans le refroidissement par résonances noires : quand un atome atteint l'intervalle $[-p_{\text{trap}}, +p_{\text{trap}}]$, il a une probabilité significative d'atteindre un état de durée de vie $\tau(p)$ très grande, puisque $\tau(p)$ diverge fortement en $p = 0$.

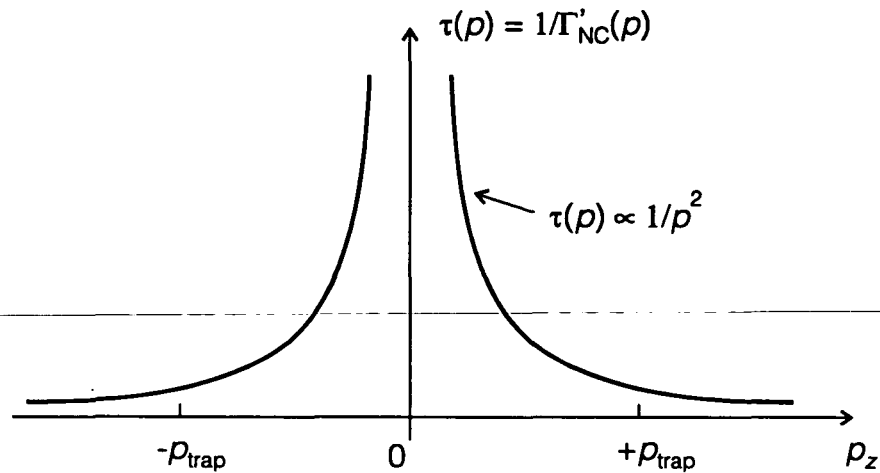


Figure V.2 *Durée de vie $\tau(p)$ des états noirs $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ en fonction de l'impulsion atomique p . Au voisinage de $p = 0$, les temps de piégeage deviennent infinis. Lorsqu'un atome parvient dans l'intervalle $[-p_{\text{trap}}, +p_{\text{trap}}]$, la probabilité d'atteindre des temps de piégeage très longs n'est pas négligeable.*

[4] Le processus de Lévy porte ici sur une variable *temporelle*. Qu'en est-il au niveau *spatial* ? Soit $P(l)$ la distribution des longueurs l des sauts effectués lorsque l'atome passe au voisinage de $p = 0$. On a évidemment $P(l)dl = P(p)dp$. La longueur de saut est donnée simplement par $l = p\tau/M$. Comme par ailleurs $\tau \propto 1/p^2$ (cf. équation (V.2)), on calcule simplement que :

$$P(l) = P(p) \left| \frac{dp}{d\tau} \right| \propto 1/l^2$$

Ainsi, $P(l)$ est également une loi de puissance décroissant lentement ($\langle l \rangle = \infty$). Par conséquent, la diffusion *spatiale* fait également apparaître un vol de Lévy.

Dans ce chapitre, nous commençons par introduire les principaux outils liés aux statistiques de Lévy (§ V.2).

Nous introduisons alors le modèle utilisé pour les résonances noires sélectives en vitesse et calculons les distributions caractéristiques importantes (§ V.3). L'idée centrale de l'approche est de simplifier la problème du refroidissement par résonances noires en incluant toute l'information utile dans seulement deux distributions temporelles : la distribution $P(\tau)$ des durées τ passées dans $[-p_{\text{trap}}, +p_{\text{trap}}]$ et la distribution $\hat{P}(\hat{\tau})$ des durées $\hat{\tau}$ passées hors de $[-p_{\text{trap}}, +p_{\text{trap}}]$.

Nous calculons ensuite la "population piégée", c'est-à-dire la proportion d'atomes se trouvant dans un intervalle $[-p_{\text{trap}}, +p_{\text{trap}}]$ (§ V.4). Cette population piégée est un critère pratique d'efficacité du refroidissement par résonances noires. Le calcul de la population piégée amène à introduire le concept de "loi d'arrosage", qui décrit la distribution des sommes de variables aléatoires contenant un nombre quelconque de termes (§ V.4.3). Nous montrons que l'approche vols de Lévy est validée par des tests numériques précis (§ V.4.6).

Nous calculons les distributions en impulsion (§ V.5), et en particulier leur largeur δp_θ , ainsi que la densité de probabilité à $p = 0$. On peut ensuite estimer la densité dans l'espace des phases, en introduisant la notion de population refroidie, c'est-à-dire la proportion d'atomes se trouvant dans l'intervalle $[-\delta p_\theta, +\delta p_\theta]$.

Enfin, on étudiera les limites du refroidissement sub-recul (§ V.6). Outre les limitations dues à la présence de dissipation, il est intéressant de dégager les contraintes dues aux propriétés des marches aléatoires.

La conclusion (§ V.7) est conçue comme un résumé de l'approche vols de Lévy. Elle donnera une vue d'ensemble au lecteur qui ne tient pas à connaître les détails.

Remarques :

- L'approche vols de Lévy présentée dans ce chapitre n'est pas une théorie complètement achevée. Cependant, les résultats obtenus sont déjà intéressants pour comprendre la dynamique du refroidissement sub-recul, pour laquelle on ne disposait pas jusqu'ici de résultats généraux. En outre, les simulations Monte-Carlo (cf. chapitre IV) ont permis de valider certaines prédictions originales de l'approche vols de Lévy (§ V.4.5) et de démontrer la pertinence de cette approche. C'est pourquoi nous avons choisi de présenter, outre certains résultats bien établis, d'autres résultats qui ne sont pas encore rigoureusement démontrés.
- Les paragraphes V.3 et V.4 comportent des passages techniques, consacrés au calcul des distributions pertinentes. Le lecteur qui ne souhaite pas suivre le détail des calculs peut lire seulement les paragraphes 3.1, 3.4, 3.5 et 4.1, 4.4, 4.5, qui contiennent les idées essentielles. Les équations importantes sont rassemblées dans des tableaux (§ V.3.4, V.4.4) et dans la conclusion (§ V.6).
- Les premiers résultats obtenus avec cette approche sont présentés de manière condensée dans [BBE94]. La plupart des résultats n'ont pas encore été publiés et feront l'objet d'un article détaillé.

[BBE94] F. Bardou, J.-P. Bouchaud, O. Emile, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Subrecoil Laser Cooling and Lévy Flights*, Phys. Rev. Lett. 72, p. 203-206 (1994).

2 Q'est-ce qu'un vol de Lévy ?

On introduit ici les statistiques de Lévy, en rassemblant les propriétés que nous serons amenés à utiliser. Dans un premier temps (§ V.2.1), on définit les sommes de Lévy et on énonce le théorème de la limite centrale généralisé. Puis (§ V.2.2), on décrit la propriété essentielle des vols de Lévy : un petit nombre de termes domine les sommes de variables aléatoires indépendantes. Enfin (§ V.2.3), on énonce quelques propriétés mathématiques utiles des lois de Lévy. Nous n'avons pas cherché ici à être exhaustifs et renvoyons à [BoG90], article de synthèse qui a servi de référence pour ce paragraphe.

2.1 Théorème de la limite centrale généralisé aux lois de puissance "larges"

Soit une loi de probabilité $P(x)$ et soit X_N la somme de N variables aléatoires indépendantes x_i , tirées selon la loi $P(x)$:

$$X_N \equiv \sum_{i=1}^N x_i \tag{V.6}$$

Rappelons tout d'abord le théorème de la limite centrale habituel. D'après ce théorème, si les deux premiers moments $\langle x \rangle$ et $\langle x^2 \rangle$ sont finis, la distribution des X_N tend vers une gaussienne quand $N \rightarrow \infty$:

$$P\left(u_1 \leq \frac{X_N - N\langle x \rangle}{\sigma_x \sqrt{2N}} \leq u_2\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-\xi^2} d\xi \tag{V.7}$$

où

$$\sigma_x = \left(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2\right)^{1/2} \tag{V.8}$$

est l'écart quadratique moyen de la variable x . En changeant simplement de variable, on obtient :

$$P(X_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sqrt{N}\sigma_x}} \exp\left(\frac{-(X_N - N\langle x \rangle)^2}{2N\sigma_x^2}\right) \tag{V.9}$$

Les lois $P(x)$ dont le moment d'ordre 1 ou 2 diverge (mais dont le moment d'ordre 0 converge pour qu'elles soient normalisables) échappent au théorème de la limite centrale habituel. Ces distributions, qui vont nous intéresser, sont appelées des "lois larges", puisqu'elles diminuent trop lentement quand $x \rightarrow \infty$ pour que $\langle x \rangle$ ou $\langle x^2 \rangle$ converge. Le théorème de Lévy et Khintchine permet de généraliser le théorème de la limite centrale aux lois larges $P(x)$ se comportant comme des lois de puissance [5] à grand x . Il s'agit de lois vérifiant :

$$P(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \frac{b}{|x|^{1+\mu}} \tag{V.10}$$

[BoG90] J.-P. Bouchaud and A. Georges, *Anomalous diffusion in disordered media : statistical mechanisms, models and physical applications*, Phys. Rep. **195**, p. 127-293 (1990).

[5] Si $P(x)$ est une loi de puissance, on dira que la somme X_N de l'équation (V.6) est une "somme de Lévy".

où b est une constante positive et où l'exposant caractéristique μ vérifie

$$0 < \mu \leq 2 \tag{V.11}$$

pour assurer la normalisabilité de la distribution $P(x)$ et le fait que $P(x)$ soit une loi large.

Une propriété très utile des sommes X_N est leur comportement en fonction du nombre N de termes (tableau V.1). Les comportements indiqués par le tableau V.1 justifient l'introduction d'une somme renormalisée Z_N définie par

$$Z_N = X_N / N^{1/\mu} \quad \text{si } 0 < \mu < 1 \quad (\langle x \rangle = \infty, \langle x^2 \rangle = \infty) \tag{V.12.a}$$

$$Z_N = \frac{X_N - N\langle x \rangle}{N^{1/\mu}} \quad \text{si } 1 < \mu < 2 \quad (\langle x \rangle < \infty, \langle x^2 \rangle = \infty) \tag{V.12.b}$$

Le théorème de Lévy et Khintchine affirme alors que

$$P(u_1 \leq Z_N \leq u_2) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{u_1}^{u_2} L_{\mu,\beta}(u) du \tag{V.13}$$

où les fonctions $L_{\mu,\beta}(Z)$ sont appelées "lois de Lévy" et dépendent essentiellement de deux paramètres μ et β (pour le sens précis de ces paramètres, voir § V.2.3.1 ; β caractérise l'asymétrie de la distribution $P(x)$). Les lois de Lévy ne sont pas des gaussiennes (si $\mu < 2$). Elles ont en général des transformées de Laplace ou des transformées de Fourier simples (cf. § V.2.3.2).

Exposant caractéristique	Comportement de la somme X_N	Comportement des deux premiers moments
$0 < \mu < 1$	$X_N \sim N^{1/\mu}$	$\langle x \rangle = \infty, \langle x^2 \rangle = \infty$
$\mu = 1$	$X_N \sim N \text{Log} N$	$\langle x \rangle = \infty, \langle x^2 \rangle = \infty$
$1 < \mu < 2$	$X_N \sim N$ $(X_N - \langle X_N \rangle) \sim N^{1/\mu}$	$\langle x \rangle < \infty, \langle x^2 \rangle = \infty$
$\mu = 2$	$X_N \sim N$ $(X_N - \langle X_N \rangle) \sim (N \text{Log} N)^{1/2}$	$\langle x \rangle < \infty, \langle x^2 \rangle = \infty$
$\mu > 2$	$X_N \sim N$ $(X_N - \langle X_N \rangle) \sim \sqrt{N}$	$\langle x \rangle < \infty, \langle x^2 \rangle < \infty$

Tableau V.1 Comportement des sommes de Lévy. La notation " $a_N \sim f(N)$ " signifie " a_N croît comme $f(N)$ ". Pour $\mu \leq 2$, le théorème de la limite centrale généralisé doit être appliqué. Pour $\mu > 2$, le théorème de la limite centrale habituel s'applique.

Il y a une profonde différence entre le théorème de la limite centrale habituel ($\langle x \rangle$ et $\langle x^2 \rangle$ finis) et le théorème de la limite centrale généralisé ($\langle x^2 \rangle = \infty$) :

- dans le théorème de la limite centrale habituel, $P(X_N)$ est déterminé *uniquement par les deux premiers moments*, $\langle x \rangle$ et $\langle x^2 \rangle$, c'est-à-dire par le comportement de $P(x)$ au voisinage de $x = 0$.
- dans le théorème de la limite centrale généralisé ($\mu < 2$), $P(X_N)$ est déterminé *uniquement par le comportement de $P(x)$ pour $x \rightarrow \infty$* .

Le passage $\mu > 2 \rightarrow \mu < 2$ se traduit donc par le passage d'une statistique dictée par les valeurs moyennes à une statistique dictée par les fluctuations.

2.2 Propriété fondamentale : le poids des événements rares

2.2.1 Enoncé et démonstration

Pour illustrer les propriétés des sommes de Lévy, considérons le cas $\mu < 1$ qui est le plus différent des comportements habituels et qui sera souvent utilisé dans ce chapitre V. Nous avons vu que la somme de Lévy X_N croît comme $N^{1/\mu}$, c'est-à-dire plus vite que le nombre de termes (alors qu'habituellement $X_N \sim N$). Cette propriété est essentielle : au fur et à mesure que l'on a davantage de termes dans X_N , on a plus de chance d'avoir des termes très grands qui vont "tirer" la somme vers des grandes valeurs. On peut déduire de ce comportement une propriété essentielle des sommes de Lévy avec $\mu < 1$, concernant le terme le plus grand de la somme X_N , noté $x_{\max}(N)$:

$$\mu < 1 \implies x_{\max}(N) \approx X_N \tag{V.14}$$

Ainsi, le terme le plus grand de la somme est du même ordre de grandeur que la somme elle-même.

Démonstration :

Calculons tout d'abord l'ordre de grandeur de $x_{\max}(N)$. Pour cela, on suppose que $P(x)$ est une loi de Lévy définie sur $[\gamma, +\infty[$ et normalisée :

$$P(x) = \mu \gamma^\mu / x^{1+\mu} \tag{V.15}$$

Découpons l'intervalle $[\gamma, +\infty[$ en N intervalles $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, (avec $i = 1, \dots, N$; $\xi_1 = \gamma$ et $\xi_{N+1} = +\infty$), définissant sous $P(x)$ N domaines A_i , d'aires égales à $1/N$ (figure V.3) :

$$\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} P(x) dx = 1/N \tag{V.16}$$

Pour un tirage typique de N nombres aléatoires x_j , il y a un nombre aléatoire x_j par aire A_i . Le nombre le plus grand de la somme, $x_{\max}(N)$, est donc tiré sur l'intervalle $[\xi_N, +\infty[$, où ξ_N est défini par

$$\int_{\xi_N}^{\infty} P(x) dx = 1/N \tag{V.17}$$

En reportant l'expression (V.15) dans (V.17), on trouve

$$\xi_N = \gamma N^{1/\mu} \tag{V.18}$$

Comme $P(x)$ est une fonction décroissante, la valeur la plus probable [6] de $x_{\max}(N)$ est ξ_N , d'où [7]

$$x_{\max}(N) \approx \xi_N = \gamma N^{1/\mu} \quad (\text{V.19})$$

Estimons maintenant l'ordre de grandeur de la somme X_N . Pour N donné, une somme X_N ne contient pas de termes beaucoup plus grands que $x_{\max}(N)$. On peut donc estimer X_N en calculant la valeur moyenne de la distribution $P(x)$ sur l'intervalle $[\gamma, x_{\max}(N)]$:

$$X_N \approx N \int_{\gamma}^{x_{\max}(N)} x P(x) dx \quad (\text{V.20})$$

On obtient

$$X_N \approx \gamma N^{1/\mu} \quad (\text{V.21})$$

Finalement, en comparant les équations (V.19) et (V.21), on obtient la relation (V.14), c.q.f.d.

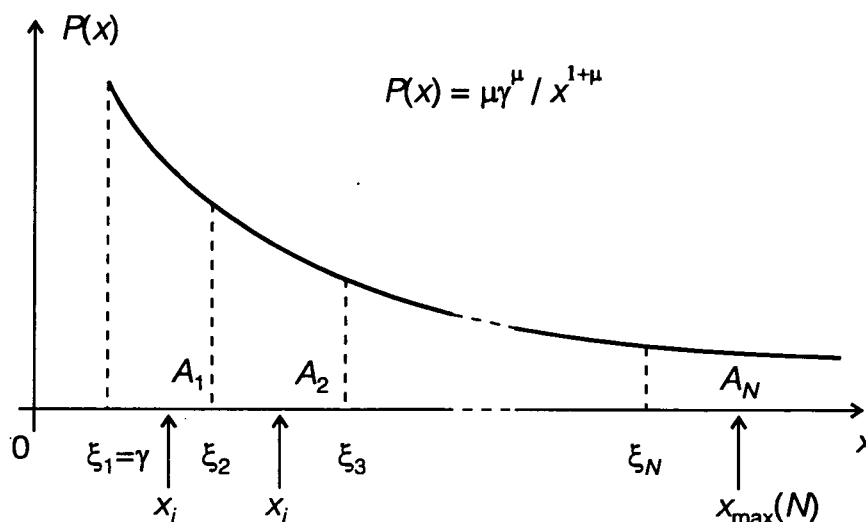


Figure V.3 Le poids des événements rares. On recherche la valeur typique du terme le plus grand, noté $x_{\max}(N)$, d'une somme $X_N \equiv \sum_{i=1}^N x_i$ avec $P(x) = \mu\gamma^\mu / x^{1+\mu}$, $\mu < 1$. On découpe l'aire sous $P(x)$ en N domaines A_i , d'aire $1/N$, ayant pour support les intervalles $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, (avec $i = 1, \dots, N$; $\xi_1 = \gamma$ et $\xi_{N+1} = +\infty$). Pour une somme X_N typique, on trouve un terme x_j par domaine A_i . Le terme le plus grand de la somme, $x_{\max}(N)$, est tiré dans le domaine $[\xi_N, +\infty[$. La valeur la plus probable de $x_{\max}(N)$ est ξ_N . On calcule que ξ_N est du même ordre de grandeur que X_N : quand $\mu < 1$, les sommes de Lévy sont dominées par un petit nombre de termes.

[6] On parlera de valeur "typique". Calculer la valeur moyenne de $x_{\max}(N)$ n'aurait pas d'intérêt puisque $\langle x_{\max}(N) \rangle = \infty$. Le maniement des statistiques de Lévy habitue à distinguer valeurs *typiques* et valeurs *moyennes*. Ce point est important.

2.2.2 Commentaire

Ainsi, si $\mu < 1$, le terme le plus grand d'une somme X_N est du même ordre de grandeur que la somme X_N elle-même, aussi grand que soit le nombre de termes de la somme. La somme possède donc un aspect auto-similaire [8] ("la somme ressemble à un seul terme"). Ce comportement contraste fortement avec le comportement habituel (lois telles que $\langle x \rangle$ est fini) où les termes de la somme valent tous environ $X_N/N \approx \langle x \rangle$: un seul terme représente une proportion d'autant plus petite de X_N que N est grand.

Une conséquence de la relation (V.14) est que les fluctuations de la somme X_N sont du même ordre de grandeur que les fluctuations d'un seul terme, elles-mêmes très grandes ($\langle x^2 \rangle = \infty$). Autrement dit, *on ne diminue pas les fluctuations en accroissant le nombre de termes de la somme*, ce qui est surprenant.

Rappelons en effet que le développement des méthodes statistiques, au début du XIX^{ème} siècle [Por86], a dû en partie son succès au fait que les comportements d'ensemble fluctuent en général beaucoup moins que les comportements individuels : en économie, sociologie..., on a pris conscience que le comportement moyen d'une population était plus ou moins prédictible, alors que celui des agents individuels était aléatoire. Or, les statistiques de Lévy montrent que dans certains cas, les comportements d'ensemble (X_N) fluctuent presque autant que les comportements individuels (x_i), mais que ceci n'empêche pas une approche statistique [9].

2.2.3 Exemples de vols de Lévy

Les figures V.4 et V.5 illustrent les différences qualitatives qui apparaissent entre vols de Lévy de différents exposants μ . Pour cela, on a simulé l'évolution d'une particule fictive effectuant 2 000 sauts dans un plan (une somme de Lévy est un objet monodimensionnel, mais la représentation dans un plan améliore la visibilité des différents sauts). Les longueurs l des sauts sont données par une loi de Lévy normalisée

$$P(l) = \mu \gamma^\mu / l^{1+\mu} \quad (\text{V.22})$$

-
- [7] Plus rigoureusement, la probabilité que le nombre le plus grand tiré en N tirages soit $x_{\max}(N)$ s'écrit $N P(x_{\max}) \left[\int_{\gamma}^{x_{\max}} P(x) dx \right]^{N-1}$. Cette probabilité est maximale pour $x_{\max}(N) \approx \gamma(N\mu/(1+\mu))^{1/\mu}$ (pour $N \gg 1$).
- [8] Il est possible d'associer une fractale de dimension μ à une distribution d'exposant μ (voir [Man82]). Le développement des fractales par Mandelbrot est très intimement lié aux vols de Lévy. Lévy fut d'ailleurs un des professeurs de Mandelbrot. Pour le lien entre fractales et vols de Lévy, voir la référence [Man89] : B. Mandelbrot, *Les objets fractals*, 3^e édition, Flammarion, Paris (1989) (en particulier les chapitres VI et VII).
- [Por86] T.M. Porter, *The rise of statistical thinking, 1820-1900*, Princeton University Press (1986).
- [9] Jean-Philippe Bouchaud parle de "science des événements non reproductibles" à propos des statistiques de Lévy. De fait, les statistiques de Lévy introduisent selon nous une forme d'imprédictibilité fondamentale (non convergence des fluctuations), comme l'ont fait d'une manière différente la mécanique quantique ou le chaos déterministe.

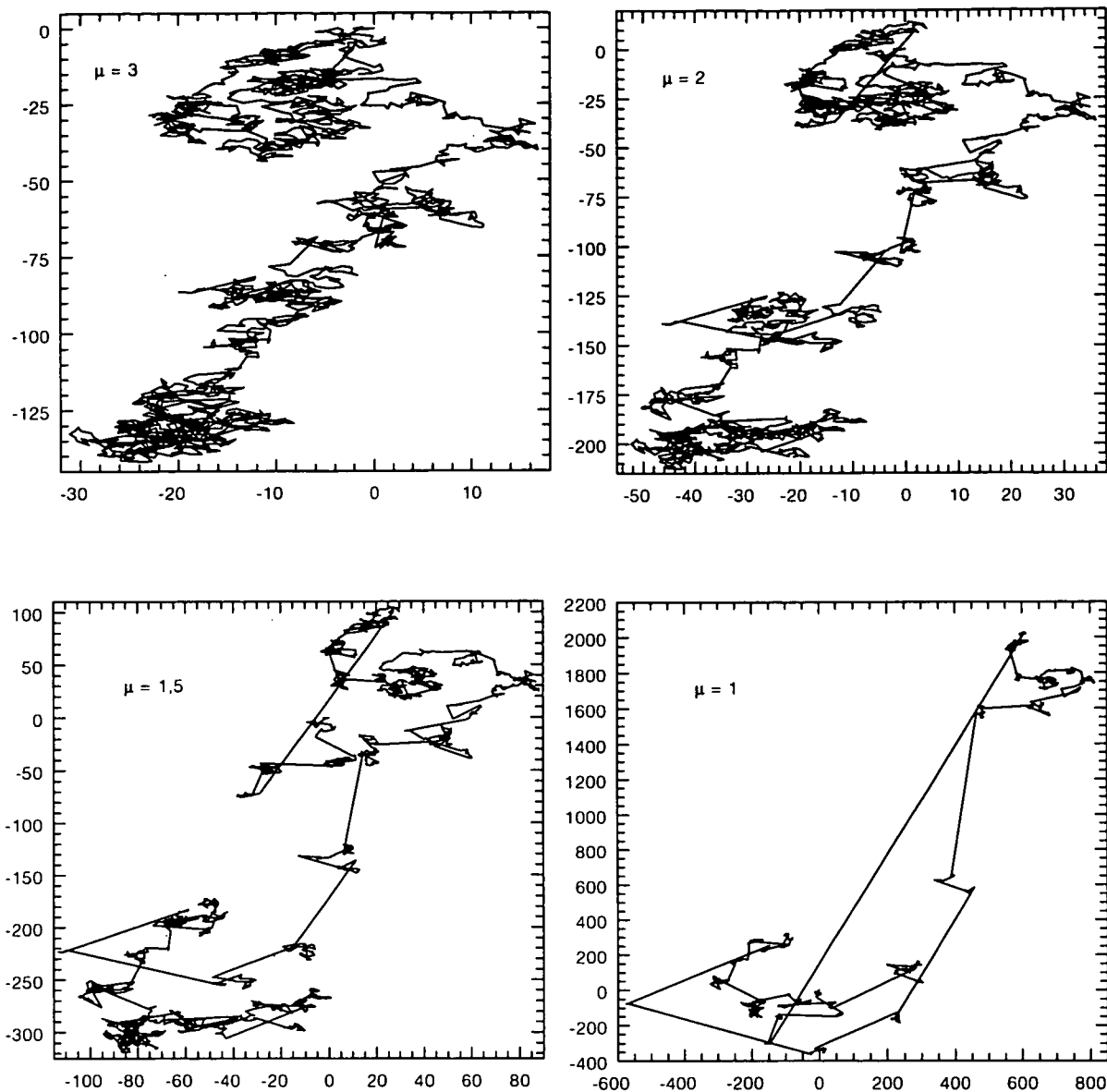


Figure V.4 Exemples de vols de Lévy avec $\mu \leq 1$. Pour illustrer les lois $P(l) = \mu\gamma^\mu / l^{1+\mu}$, on simule le mouvement d'une particule dans un plan. La particule effectue des sauts dont la longueur est distribuée suivant $P(l)$ et dont la direction est aléatoire. La même suite de nombres aléatoires a été utilisée pour les différents μ , d'où les ressemblances entre les figures. Sur chaque figure, 2000 sauts sont effectués. Les coordonnées de la trajectoire sont en unité γ .

Pour $\mu = 3$, on a un mouvement brownien normal ($\langle x \rangle$ et $\langle x^2 \rangle$ sont finis).

Pour $\mu = 2$, $\langle x \rangle$ est fini, mais $\langle x^2 \rangle$ diverge logarithmiquement.

Pour $\mu = 1,5$, $\langle x \rangle$ est fini, mais $\langle x^2 \rangle$ est infini.

Pour $\mu = 1$, $\langle x \rangle$ diverge logarithmiquement, et $\langle x^2 \rangle$ est infini.

Quand μ diminue, on constate l'apparition de sauts de plus en plus longs, qui se mettent à dominer le déplacement total. Remarquer aussi que la longueur moyenne des sauts croît : les échelles sont différentes sur chaque figure. Le déplacement passe d'une échelle typique de 100γ pour $\mu = 3$ (tous les sauts ont une longueur de γ environ) à une échelle typique de 2000γ pour $\mu = 1$ (le saut le plus long a une longueur de 2700γ environ).

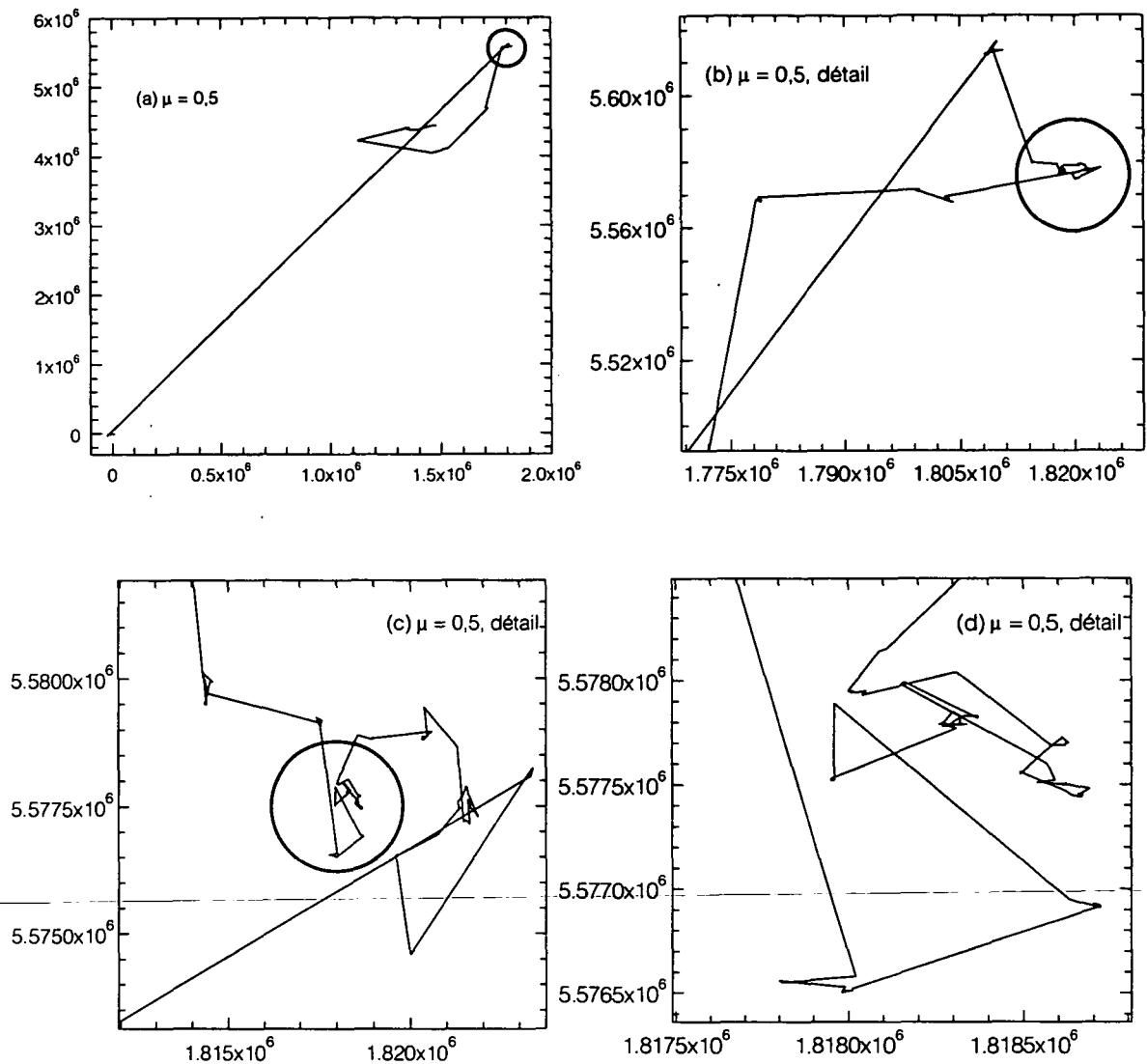


Figure V.5 Vol de Lévy d'exposant caractéristique $\mu = 0,5$. On utilise exactement la même procédure de tirage que sur la figure précédente. En (a), bien qu'il y ait 2000 sauts, on n'en distingue qu'une dizaine : les sauts les plus grands "écrasent" visuellement les autres. Les agrandissements successifs (b,c,d), indiqués par les cercles, montrent l'aspect auto-similaire de ce vol de Lévy. L'ensemble des points où la particule change de direction est une fractale de dimension μ , soit 0,5 ici. C'est donc un objet très ténu, d'où la difficulté à le représenter.

Les résonances noires sélectives en vitesse font apparaître des distributions $P(\tau)$ des temps de piégeage dont l'exposant μ vaut 0,5 à une dimension, 1 à deux dimensions et 3/2 à trois dimensions.

Les longueurs l sont comprises dans l'intervalle $[\gamma, +\infty[$. Pour générer ces longueurs, on utilise la méthode des transformations (cf. § IV.3.3.1). On tire un nombre aléatoire u équiréparti sur $[0 ; 1[$. On prend ensuite la longueur $l(u)$ donnée par

$$l(u) = \gamma / (1-u)^{1/\mu} \quad (\text{V.23})$$

(On peut vérifier que les nombres l ainsi définis sont effectivement distribués selon $P(l)$, c'est-à-dire que $P(l)dl = du$). La direction prise pour effectuer chaque saut est un angle aléatoirement choisi entre 0 et 2π .

Pour chaque valeur de μ , on a pris la même suite de nombres aléatoires u : les figures ne diffèrent que par l'exposant caractéristique μ , ce qui permet de bien voir son effet. Ainsi, par exemple, si le nombre aléatoire u_i , déterminant la longueur du $i^{\text{ème}}$ saut, est proche de 1, alors le $i^{\text{ème}}$ saut sera toujours un saut grand par rapport aux autres sauts (cf. équation (V.23)), quel que soit μ . Mais ce saut sera d'autant plus grand que μ est petit.

Les courbes à $\mu \geq 2$ ressemblent à un mouvement brownien habituel : chaque saut a une longueur caractéristique bien définie. Notons toutefois que la taille moyenne des sauts augmente quand μ diminue (cf. changements d'échelles sur les figures). Quand μ diminue, on voit apparaître quelques sauts de longueur de plus en plus grande. Ces longs sauts se mettent à dominer le déplacement total quand $\mu \leq 1$. Dans le cas $\mu = 0,5$, à grande échelle, un seul saut domine nettement, et on ne distingue qu'une dizaine de sauts : les autres sauts sont trop petits pour être visibles ! Les agrandissements successifs montrent l'aspect fractal de la trajectoire.

En résumé, les sommes de Lévy sont dominées par un petit nombre de termes, et ce nombre est d'autant plus petit que μ est plus petit (distributions plus larges). Le cas $\mu = 0,5$ de la figure V.5, par exemple, peut sembler exceptionnel : quel que soit le nombre de termes de la somme, un seul terme domine nettement tous les autres. En fait, $\mu = 0,5$ est une valeur typique pour le refroidissement par résonances noires à une dimension, et nous rencontrerons des distributions encore plus larges ($\mu = 0,25\dots$).

2.3 Quelques propriétés des lois de Lévy

On rappelle ici quelques propriétés analytiques des lois de Lévy, qui seront utilisées dans les calculs des paragraphes suivants.

2.3.1 Paramétrisation de la loi élémentaire

Les lois $P(x)$ élémentaires peuvent être paramétrisées à l'aide des coefficients μ , b_+ , b_- , β et γ que nous définissons ci-dessous (voir [BoG90]).

L'exposant caractéristique μ et les coefficients b_+ et b_- sont définis par le comportement *asymptotique* de la loi de probabilité $P(x)$:

$$P(x) \approx b_- |x|^{-(1+\mu)} \quad \text{si } x \rightarrow -\infty \quad (\text{V.24.a})$$

[BoG90] J.-P. Bouchaud and A. Georges, *Anomalous diffusion in disordered media : statistical mechanisms, models and physical applications*, Phys. Rep. 195, p. 127-293 (1990).

$$P(x) \approx b_+ |x|^{-(1+\mu)} \quad \text{si } x \rightarrow +\infty \quad (\text{V.24.b})$$

Le coefficient β caractérise l'asymétrie de $P(x)$

$$\beta = \frac{b_+ - b_-}{b_+ + b_-} \quad (\text{V.25})$$

Si $\beta = 0$, $P(x)$ est paire (du moins dans le domaine $|x| \rightarrow +\infty$). Si $\beta = \pm 1$, $P(x)$ est "maximalement" asymétrique. Si $\beta = +1$, le support de $P(x)$ s'écrit $[\gamma, +\infty[$. Si $\beta = -1$, le support de $P(x)$ s'écrit $] -\infty, \gamma]$. Dans les cas que nous aurons à considérer, les variables aléatoires seront des durées, positives par définition. On aura donc $\beta = +1$.

Le facteur γ est associé aux changements d'origine (translations : $x \rightarrow x + \gamma$). Notons qu'on peut souvent prendre $\gamma = 0$, puisque les comportements asymptotiques (V.24) ne sont pas modifiés par une translation sur x .

On introduit aussi un facteur de dilatation, noté B , et défini par :

$$0 < \mu < 1 : \quad B = \frac{\pi(b_+ + b_-)}{2\mu \sin(\pi\mu/2)\Gamma(\mu)} \quad (\text{V.26.a})$$

$$1 < \mu < 2 : \quad B = \frac{\pi(b_+ + b_-)}{2\mu^2 \sin(\pi\mu/2)\Gamma(\mu - 1)} \quad (\text{V.26.b})$$

2.3.2 Formes utiles des lois de Lévy

Pour les cas "maximalement" asymétriques $\beta = \pm 1$ (et $\gamma = 0$), la loi de Lévy $L_\mu(x)$ associée à $P(x)$ est une transformée de Laplace inverse, définie sur $[0 ; +\infty[$ pour $\mu < 1$ ou sur $] -\infty ; +\infty[$ pour $1 < \mu < 2$:

$$L_\mu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{sx - B's^\mu} ds \quad (\text{V.27})$$

où

$$B' = B/\cos(\pi\mu/2) = \frac{\pi(b_+ + b_-)}{\mu \sin(\pi\mu)\Gamma(\mu)} \quad (\text{V.28})$$

Deux développements, dans le cas $\mu < 1$, sont particulièrement utiles :

$$x \rightarrow +\infty : L_\mu(x) \approx B \frac{2\mu\Gamma(\mu)}{\pi x^{1+\mu}} \sin(\pi\mu/2) = \frac{b_+ + b_-}{x^{1+\mu}} \quad (\text{V.29})$$

$$x \rightarrow 0 : xL_\mu(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\mu)\zeta}} \exp\left(-\frac{1-\mu}{\mu\zeta}\right) \quad (\text{V.30})$$

avec

$$\zeta = \left(\frac{x^\mu}{\mu B'}\right)^{\frac{1}{1-\mu}} \quad (\text{V.31})$$

D'après (V.29), $L_\mu(x)$ est donc une loi de puissance de même exposant que $P(x)$, dans la limite $x \rightarrow \infty$. On retrouve ici le fait que la somme X_N est du même ordre de grandeur que le plus grand de ses termes (cf. équation (V.14)). Notons également que $L_\mu(x)$ présente une singularité en $x = 0$.

L'allure des lois de Lévy est donnée par les figures V.6 et V.7. Dans le cas $\mu < 1$, la loi de Lévy $L_\mu(x)$ est une loi large, qui décroît à grand x de la même manière que $P(x)$. Dans le cas $\mu > 1$, la loi de Lévy $L_\mu(x)$ est une loi qui décroît rapidement à grand x , et possède une largeur caractéristique $B^{1/\mu}$.

Dans le cas $\mu = 1/2$ ($\beta = 1$), qui sera utilisé par la suite, la loi de Lévy a une forme simple :

$$\mu = 1/2 : L_{1/2}(x) = \theta(x) \frac{B}{\sqrt{2\pi x^{3/2}}} e^{-B^2/(2x)} = \theta(x) \frac{b_+}{x^{3/2}} e^{-\pi b_+^2/x} \quad (\text{V.32})$$

où $\theta(x)$ est la fonction saut ($\theta(x \leq 0) = 0$, $\theta(x > 0) = 1$).

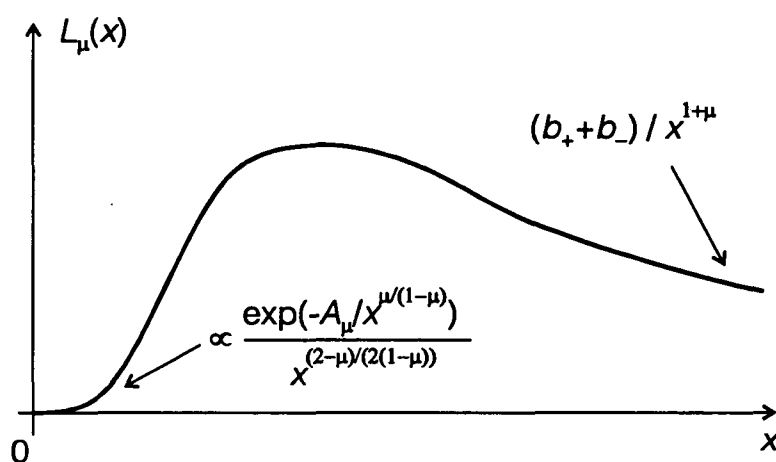


Figure V.6 Allure des lois de Lévy dans le cas $\mu < 1$, $\beta = 1$. La loi de Lévy est strictement nulle en 0 (le coefficient A_μ vaut $(\mu B^\mu)^{1/(1-\mu)} (1-\mu)/\mu$). Elle décroît à grand x comme $1/x^{1+\mu}$, c'est-à-dire comme la loi élémentaire $P(x)$.

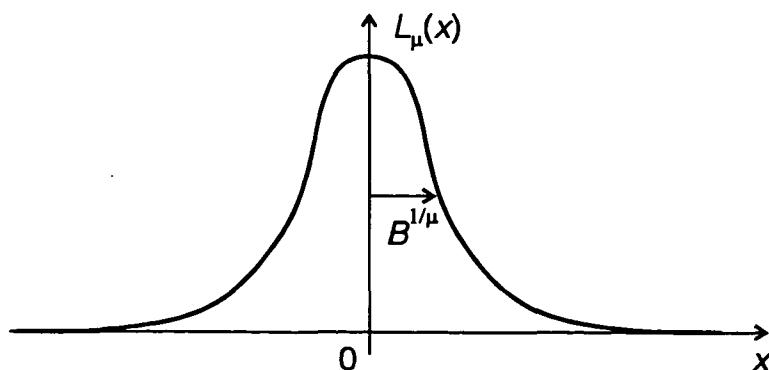


Figure V.7 Allure des lois de Lévy dans le cas $\mu > 1$. La loi de Lévy possède une demi-largeur caractéristique $B^{1/\mu}$ et décroît rapidement vers 0.

2.3.3 Normalisation des distributions $P(x)$

Considérons le cas $0 < \mu < 1$, dans le cas où $P(x)$ a pour support $[\gamma, +\infty[$. Dans le cas le plus simple, $P(x)$ est une loi de puissance (cf. équation (V.10)) sur tout l'intervalle $[\gamma, +\infty[$. La normalisation impose alors $b = \mu\gamma^\mu$, d'où

$$P(x) = \frac{\mu\gamma^\mu}{x^{1+\mu}} \tag{V.33}$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de la limite centrale généralisé, il suffit que $P(x)$ converge vers une loi de puissance (V.10) dans le régime asymptotique $|x| \rightarrow \infty$. Supposons que le régime asymptotique soit atteint sur l'intervalle $[\gamma_a, +\infty[$. La distribution $P(x)$ peut alors être quelconque sur l'intervalle $[\gamma; \gamma_a]$ (figure V.8). Soit $\eta = \int_{\gamma_a}^{\infty} P(x)dx$, on a alors $(1 - \eta) = \int_{\gamma}^{\gamma_a} P(x)dx$ et $b = \eta\mu\gamma_a^\mu$, d'où

$$P(x) = \frac{\eta\mu\gamma_a^\mu}{x^{1+\mu}}, x > \gamma_a \tag{V.34}$$

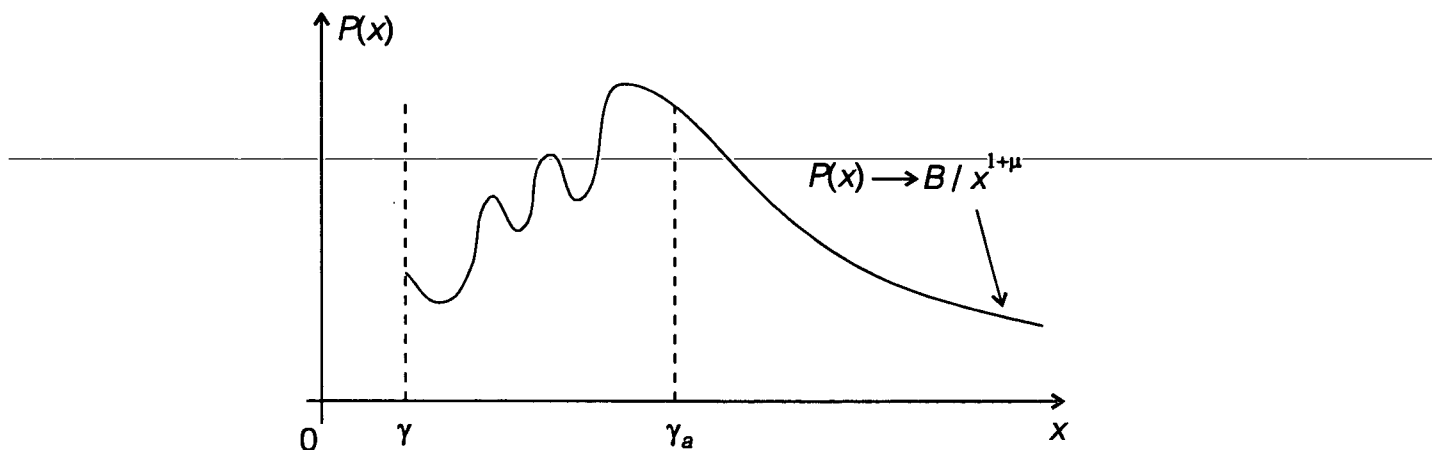


Figure V.8 Normalisation des distributions en lois de puissance. La loi $P(x)$ peut être quelconque sur un intervalle $[\gamma; \gamma_a]$, mais doit être une loi de puissance dans le régime $x \rightarrow \infty$. Le paramètre B ($P(x) \rightarrow B/x^{1+\mu}$) est fixé uniquement par le comportement asymptotique.

3 Distributions des temps caractéristiques

L'approche vols de Lévy repose sur une modélisation du processus de refroidissement. Cette modélisation joue un rôle essentiel dans le traitement du problème. Des approximations sont faites que l'on s'efforcera d'explicitier [10]. Dans ce paragraphe, nous introduisons le modèle utilisé, qui conduit à définir deux variables temporelles τ et $\hat{\tau}$ (§ V.3.1). Puis, nous calculons les lois de probabilité de ces deux variables (§ V.3.2 et V.3.3).

3.1 Modélisation de la diffusion en impulsion

Le premier élément du modèle est le suivant [11]:

L'état atomique à un instant donné est modélisé par une impulsion p bien définie, et non par une fonction d'onde, superposition de plusieurs impulsions.

A une dimension, en configuration de résonances noires $\sigma_+ - \sigma_-$, sur la transition $J_f = 1 \leftrightarrow J_e = 1$, cette description est parfaitement légitime [12], ainsi que l'a montré l'approche Monte-Carlo quantique du chapitre IV. Dans le cas d'autres configurations de résonances noires, en particulier lorsqu'il n'existe pas de familles fermées, la description de l'état atomique par un seul indice d'impulsion doit être considérée comme une hypothèse raisonnable de travail. C'est une question importante, non résolue actuellement, que de savoir si cette description est vraiment réaliste ou non. L'existence des états d'Olshanii (cf. equation (I.35)) associés à un indice d'impulsion bien défini tend à encourager une description locale en impulsion, telle que celle utilisée dans ce chapitre.

Le deuxième élément du modèle prolonge la simplification apportée par le premier. A chaque impulsion p correspond une loi de probabilité $w_2(p, \tau)$ des délais entre deux émissions spontanées [13] (c'est la "fonction délai" introduite au chapitre IV). Il y a donc tout un continuum $w_2(p, \tau)$ de fonctions délais, ce qui rend le problème complexe. On va simplifier radicalement le problème en se ramenant à seulement deux lois de probabilité, $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$, que nous allons définir ci-dessous :

[10] Dans certains cas, on obtiendra des résultats exacts malgré les approximations effectuées. Ceci vient de la propriété essentielle des sommes de Lévy de n'être sensible qu'à la queue des distributions $P(x)$.

[11] Dans ce chapitre, la variable d'impulsion la plus utilisée est le *module* de l'impulsion atomique, noté p . Quand on voudra désigner une composante de l'impulsion atomique, on utilisera la notation p_z .

[12] L'atome est à chaque instant dans une superposition des états $|f_{-, p_z - \hbar k}\rangle$, $|e_0, p_z\rangle$ et $|f_{+, p_z + \hbar k}\rangle$, qui ont chacun une impulsion différente. L'essentiel est que ces trois états soient associés au même indice p_z , l'impulsion des familles.

[13] En termes plus habituels, mais non rigoureux ici, il existe un coefficient de diffusion en impulsion, $D(p)$, qui dépend de l'impulsion. En fait, la fonction délai $w_2(p, \tau)$ contient plus d'information qu'un coefficient de diffusion.

La diffusion en impulsion est décrite par seulement deux lois de probabilité, $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$

On définit une impulsion p_{trap} [14] pour séparer l'espace des impulsions en deux zones complémentaires (figure V.9) :

- $|p| < p_{\text{trap}}$ définit le "piège". Le "temps de piégeage" τ [15] est défini comme l'intervalle de temps séparant l'entrée dans le piège de la sortie du piège. La loi de probabilité de τ est $P(\tau)$.

- $|p| > p_{\text{trap}}$ définit l'"extérieur" du piège. Le temps $\hat{\tau}$ est l'intervalle de temps entre deux événements de piégeage, et il est appelé "temps de sortie" ou "temps de premier retour" dans le piège. La loi de probabilité de $\hat{\tau}$ est $\hat{P}(\hat{\tau})$.

La distribution $P(\tau)$ des temps de piégeage décrit le comportement au voisinage de $p = 0$. Pour les différents processus de refroidissement sub-recul, les efforts théoriques antérieurs ont surtout porté sur cette zone $p \approx 0$ et ont permis de calculer la durée de vie d'un état d'impulsion p [AAK89], [KaC92]. Nous utiliserons ces résultats pour calculer $P(\tau)$ et nous montrerons que $P(\tau)$ apporte un éclairage physique nouveau.

La distribution $\hat{P}(\hat{\tau})$ des temps de premier retour concerne le comportement à l'extérieur du voisinage de $p \approx 0$. Il a déjà été noté que favoriser le retour rapide des atomes dans la zone du piège accroîtrait l'accumulation des atomes dans le piège à $|p| < p_{\text{trap}}$, d'où l'intérêt de forces de friction qui confinent les impulsions [AAK89], [MaA91], [KaC92]. Il a également été prédit que le retour des atomes dans la zone $p \approx 0$ prendrait un temps de plus en plus long quand on augmenterait le nombre de dimensions considérées. Jusqu'à présent, ces observations étaient soit de nature qualitative, soit de nature numérique. L'étude de $\hat{P}(\hat{\tau})$ fournira une analyse quantitative du temps passé à l'extérieur du piège.

[14] L'impulsion p_{trap} sert d'intermédiaire de calcul et peut prendre *a priori* n'importe quelle valeur (même si, pour faire les calculs commodément, p_{trap} doit satisfaire certaines conditions). En particulier, il *ne faut pas* identifier p_{trap} à la demi-largeur p_{Raman} de la résonance noire (cf. I.2.2.1, figure I.5), ni à la demi-largeur δp_0 du pic de la distribution en impulsion.

[15] La notation τ désigne ici une durée de piégeage, alors que τ_d désigne un délai entre deux photons spontanés (les délais étaient notés τ dans le chapitre IV).

[AAK89] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the one-photon recoil energy by velocity-selective coherent population trapping : theoretical analysis*, J. Opt. Soc. Am. B 6, p. 2112-2124 (1989).

[KaC92] M. Kasevich and S. Chu, *Laser Cooling below a Photon recoil with Three-Level Atoms*, Phys. Rev. Lett. 69, p. 1741-1744 (1992).

[MaA91] F. Mauri and E. Arimondo, *Coherent Trapping Sub-recoil Cooling in Two Dimensions Aided by a Force*, Europhys. Lett. 16, p. 717-722 (1991).

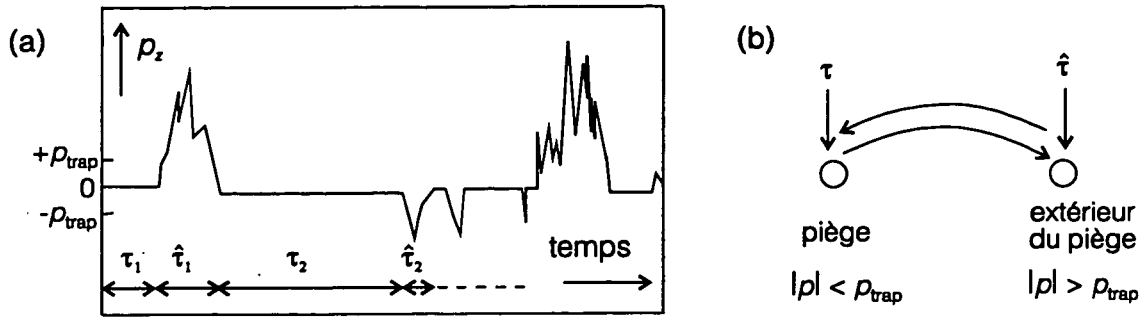


Figure V.9 Modélisation du refroidissement par résonances noires dans l'approche vols de Lévy.

(a) On définit une zone de piégeage par $|\rho| < \rho_{\text{trap}}$. La variable aléatoire τ désigne la durée d'un événement de piégeage. La variable aléatoire $\hat{\tau}$ désigne la durée d'une sortie du piège ("temps de premier retour").

(b) On n'a plus alors que deux zones, le piège et l'extérieur du piège. Le problème initial (une infinité d'impulsions différentes, chaque impulsion étant associée à une fonction délai $w_2(p, \tau)$) est ainsi considérablement simplifié. Chaque zone est décrite par une seule loi de probabilité, $P(\tau)$ ou $\hat{P}(\hat{\tau})$, qui décrit la distribution des temps de séjour dans cette zone. Le mouvement atomique se réduit à sauter d'une zone à l'autre.

Comme le montre la figure V.9, l'introduction de ρ_{trap} a permis de passer à un problème où l'atome n'évolue plus qu'entre deux zones, le piège et l'extérieur du piège, chaque piège étant caractérisé par une loi de probabilité des temps de séjour, $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$. Ce problème à deux zones est beaucoup plus simple que le problème initial où chaque impulsion constituait un site différent. Précisons maintenant les notations utiles à la description de ces deux zones.

Considérons l'évolution d'un atome sur une période de durée θ_N , où l'atome a été piégé N fois. Il est donc sorti du piège soit $(N - 1)$ fois, soit N fois, soit $(N + 1)$ fois (selon son état initial et selon son état final). Comme on va s'intéresser à la limite $N \rightarrow \infty$, on peut considérer dans tous les cas que l'atome est sorti du piège N fois. On peut donc écrire :

$$\theta_N = \sum_{i=1}^N \tau_i + \hat{\tau}_i \tag{V.35}$$

où τ_i désigne la durée du i^{e} événement du piégeage et $\hat{\tau}_i$ désigne la durée de la i^{e} sortie. Soient T_N le temps total passé dans le piège et \hat{T}_N le temps total passé hors du piège :

$$T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i \tag{V.36.a}$$

$$\hat{T}_N = \sum_{i=1}^N \hat{\tau}_i \tag{V.36.b}$$

On a évidemment :

$$\theta_N = T_N + \hat{T}_N \tag{V.37}$$

Les sommes T_N et \hat{T}_N sont des sommes de variables aléatoires indépendantes, auxquelles on va appliquer le théorème de la limite centrale généralisé, après avoir calculé $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$. Avant même d'effectuer ce calcul, on peut donner l'idée générale que ce chapitre va rendre quantitative :

Les lois $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$ déterminent comment les temps T_N et \hat{T}_N croissent avec N . Si le temps T_N passé dans le piège croît plus vite que le temps \hat{T}_N passé hors du piège, les atomes vont passer l'essentiel du temps dans le piège et s'y accumuler. Si, au contraire, \hat{T}_N croît plus vite que T_N , les atomes vont passer l'essentiel du temps hors du piège, qui va se vider. Si T_N et \hat{T}_N croissent de la même manière, les atomes vont partager leur temps entre le piège et l'extérieur, et une proportion f finie ($0 < f < 1$) va occuper le piège.

3.2 Distribution des temps de piégeage

3.2.1 Modèle

Pour simplifier le calcul de $P(\tau)$, on supposera que

$$p_{\text{trap}} \ll \Delta p \tag{V.38}$$

où Δp est la valeur quadratique moyenne des longueurs des sauts en impulsion lors des émissions spontanées. Cette hypothèse a deux conséquences : la première concerne la probabilité, sachant qu'on tombe dans le piège, d'atteindre une impulsion p ; la deuxième concerne le nombre de sauts effectués dans le piège.

- Examinons la première conséquence. La distribution des longueurs de saut varie à l'échelle de Δp , et est donc approximativement constante à l'échelle de p_{trap} . La densité de probabilité $P(p_x, p_y, p_z)$ qu'un atome arrivant dans le piège atteigne l'impulsion (p_x, p_y, p_z) est donc uniforme sur tout le volume du piège : on parle d'"arrosage uniforme" du piège (figure V.10).

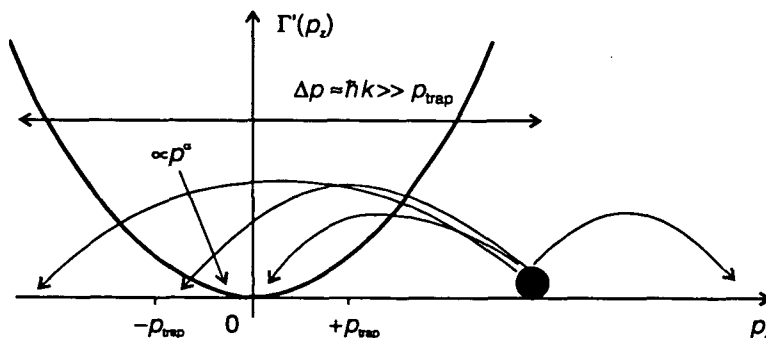


Figure V.10 Voisinage de $p = 0$. La taille typique d'un saut en impulsion est Δp ($\Delta p \approx \hbar k$). La taille du piège est $p_{\text{trap}} \ll \Delta p$. La distribution des longueurs de saut en impulsion varie à l'échelle de Δp et est donc approximativement uniforme sur un intervalle de taille p_{trap} : on parle "d'arrosage uniforme" du piège. Par ailleurs, le taux de fluorescence $\Gamma(p)$ varie en une loi de puissance au voisinage de $p = 0$.

L'hypothèse d'arrosage uniforme permet de calculer simplement la probabilité $P(p)dp$ d'atteindre une impulsion de module p à dp près. Cette probabilité est le rapport de l'élément de volume à D dimensions sur le volume du piège (figure V.11) :

$$1D : \quad P(p)dp = \frac{2dp}{2p_{\text{trap}}} \quad (\text{V.39.a})$$

$$2D : \quad P(p)dp = \frac{2\pi p dp}{\pi p_{\text{trap}}^2} \quad (\text{V.39.b})$$

$$3D : \quad P(p)dp = \frac{4\pi p^2 dp}{\frac{4}{3}\pi p_{\text{trap}}^3} \quad (\text{V.39.c})$$

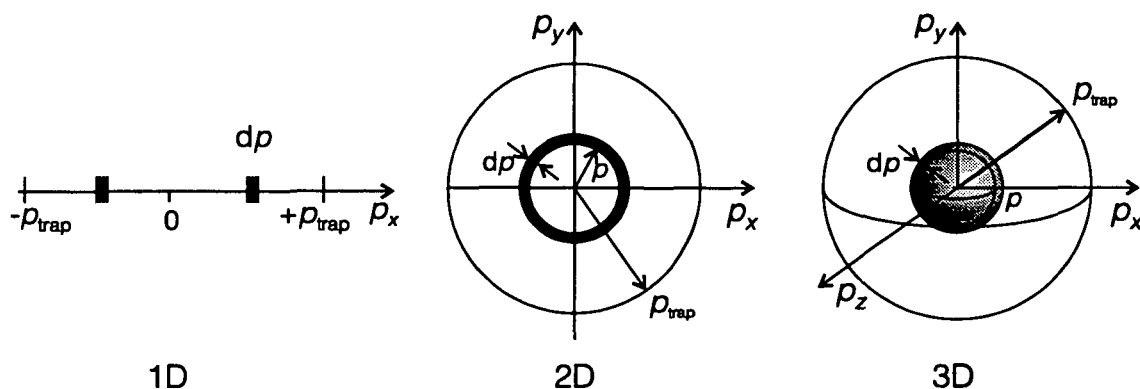


Figure V.11 Calcul de la probabilité $P(p)dp$ d'atteindre une impulsion de module p à dp près.

On en déduit le résultat général, valable à D dimensions :

$$P(p) = \frac{Dp^{D-1}}{p_{\text{trap}}^D} \quad (\text{V.40})$$

• La deuxième conséquence de (V.38) est la suivante : un atome piégé qui émet un photon spontané et qui subit donc un transfert d'impulsion de l'ordre de Δp , se retrouve presque certainement hors du piège après émission spontanée. En effet, la probabilité P_0 qu'un atome du piège se retrouve dans le piège après avoir émis un photon spontané est

$$P_0 \approx (p_{\text{trap}}/\Delta p)^D \ll 1 \quad (\text{V.41})$$

Par conséquent, on peut considérer que l'atome n'occupe qu'un seul état d'impulsion au cours d'un événement de piégeage. On en déduit que la probabilité $P(\tau)$, pour un atome arrivant dans le piège, qu'il reste piégé un temps τ est identique à la probabilité que cet

atome atteint un état p de durée de vie $\tau_d = \tau$ [16]. La probabilité $P(\tau)$ d'être piégé un temps τ est la somme, sur toutes les impulsions p possibles, de la probabilité d'atteindre p et de rester piégé un temps τ :

$$P(\tau) = \int_0^{p_{\text{trap}}} P(p)P(\tau/p)dp \tag{V.42}$$

où $P(\tau/p)$ est la probabilité que le piège soit de durée de vie τ , sachant qu'il est d'impulsion p .

Pour aller plus avant, il faut préciser $P(\tau/p)$. On va distinguer trois cas : τ et p reliés de manière déterministe ; $P(\tau/p)$ est une loi exponentielle ; cas des résonances noires à une dimension.

3.2.2 Cas où τ et p sont liés de manière déterministe

On suppose qu'à chaque impulsion p dans le domaine du piège est associée une durée de vie τ définie par la loi de puissance suivante :

$$\frac{1}{\tau} = \Gamma'(p) = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha, \quad p < p_{\text{trap}} \tag{V.43}$$

Cette dépendance en loi de puissance du taux de fluorescence $\Gamma(p)$ (figure V.10 ci-dessus) joue un rôle essentiel dans l'approche de ce chapitre. Les grandeurs τ_0 et p_0 sont caractéristiques du profil de fluorescence au voisinage de $p = 0$ [17].

Comme τ et p sont liés de manière déterministe par l'équation (V.43), on a :

$$P(\tau/p) = \delta(\tau - (\Gamma'(p))^{-1}) \tag{V.44}$$

En introduisant cette relation dans (V.42), il vient

$$P(\tau) = P(p) \left| \frac{dp}{d\tau} \right| \tag{V.45}$$

Un simple calcul donne alors

$$P(\tau) = \frac{D}{\alpha} \left(\frac{p_0}{p_{\text{trap}}} \right)^D \frac{\tau_0^{D/\alpha}}{\tau^{1+D/\alpha}} \tag{V.46}$$

Ce résultat est très important : la variable τ est distribuée suivant une loi de puissance de la forme (V.10) avec un exposant μ donné par

$$\mu = D / \alpha \tag{V.47}$$

[16] Le temps τ est donc *ici* à la fois un temps de piégeage et un délai τ_d entre deux émissions spontanées, c'est-à-dire la durée de vie d'un état d'impulsion p donnée.

[17] Noter que τ_0 et p_0 ne sont pas deux paramètres indépendants, mais que le seul "vrai" paramètre est $\tau_0 p_0^\alpha$. On a donc une certaine liberté de choix pour ces deux paramètres. On peut, par exemple, fixer $\tau_0 = \tau_{\text{ext}}$ (τ_{ext} est le délai entre deux sauts à l'extérieur du piège, voir § V.3.3.1) puis, connaissant $\Gamma(p)$, déduire p_0 .

Si $\mu > 2$, alors le théorème de la limite centrale habituel s'applique à T_N . En revanche, si $\mu \leq 2$, on doit appliquer le théorème de Lévy-Khintchine.

Noter que dans le cas $\mu > 1$ (i.e. $D > \alpha$), la valeur moyenne $\langle \tau \rangle$ des temps de piégeage est finie et donnée par :

$$\langle \tau \rangle = \int_{\tau_{\text{trap}}}^{\infty} \tau P(\tau) d\tau \quad (\text{V.48})$$

où τ_{trap} est le temps de piégeage sur le bord du piège, à $p = p_{\text{trap}}$:

$$\frac{1}{\tau_{\text{trap}}} \equiv \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p_0}{p_{\text{trap}}} \right)^2 \quad (\text{V.49})$$

Un calcul simple donne :

$$\langle \tau \rangle = \frac{D}{D - \alpha} \tau_{\text{trap}} \quad (\text{V.50})$$

Dans ce cas, $\langle \tau \rangle$ n'est supérieur que d'un facteur fini, $D/(D-\alpha)$, au temps de piégeage τ_{trap} sur les bords du piège.

L'exposant $\mu = D/\alpha$ est porteur d'un sens physique très clair (cf. § V.2.2) : quand μ diminue, la distribution $P(\tau)$ devient de plus en plus large. Elle génère des temps τ de plus en plus longs et un petit nombre de termes domine le temps total T passé dans le piège. Quand $\mu \rightarrow 0$, les atomes ont tendance à passer de plus en plus de temps dans le piège, car $T_N \propto N^{1/\mu}$ croît d'autant plus vite que μ est petit. Ainsi, $\mu \rightarrow 0$ favorise l'accumulation d'atomes dans le piège.

L'exposant $\mu = D/\alpha$ est d'autant plus petit que D est petit ou que α est grand, ce qui se comprend aisément. En effet, les atomes s'accumulent dans le piège si les états de durée de vie très longue ont une grande probabilité d'être atteints. Quand D diminue, cela augmente le poids statistique des états à $p \approx 0$ dans la sphère à D dimensions de rayon p_{trap} . Quand α augmente, cela permet d'augmenter le poids, dans le piège, d'états de longue durée de vie (cf. $\Gamma(p) \propto p^\alpha$, équation (V.43)).

Ce calcul très simple a donc déjà amené plusieurs informations importantes. Remarquons que l'on a aussi trouvé un exposant "universel", $\mu = D/\alpha$: à un préfacteur près, la statistique des temps de piégeage (V.46) ne dépend que de D/α et non pas de D et de α séparément. On pourra, par exemple, comparer le refroidissement d'un nombre de dimensions différentes, pourvu que D/α soit constant.

3.2.3 Cas où $P(\tau/p)$ est une exponentielle

On suppose que $P(\tau/p)$ est une loi exponentielle de constante de temps $(\Gamma(p))^{-1}$:

$$P(\tau/p) = \Gamma(p) e^{-\tau \Gamma(p)} \quad (\text{V.51})$$

C'est le cas par exemple lorsque un état d'impulsion p possède un taux de fluorescence bien défini. Remarquons que $\langle \tau \rangle = (\Gamma(p))^{-1}$: on peut toujours associer un temps de

piégeage à une impulsion, mais de manière statistique seulement. L'équation (V.43) devient :

$$\frac{1}{\langle \tau \rangle} = \Gamma'(p) = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha, \quad p < p_{\text{trap}} \quad (\text{V.52})$$

En reportant (V.52) dans (V.51), puis (V.51) et (V.40) dans (V.42), un calcul de quelques lignes conduit à :

$$P(\tau) = \frac{D}{\alpha} \left(\frac{p_0}{p_{\text{trap}}} \right)^D \times \Gamma \left(\frac{D}{\alpha}, \frac{\tau}{\tau_0} \left(\frac{p_{\text{trap}}}{p_0} \right)^\alpha \right) \times \frac{\tau_0^{D/\alpha}}{\tau^{1+D/\alpha}} \quad (\text{V.53})$$

où $\Gamma(\alpha', x)$ désigne une fonction Γ incomplète, définie par :

$$\Gamma(\alpha', x) = \int_0^x e^{-u} u^{\alpha'-1} du \quad (\text{V.54})$$

La distribution $P(\tau)$ n'est donc plus strictement une loi de puissance comme c'était le cas lorsque τ et p étaient liés de manière déterministe (cf. équation (V.44)). Cependant, quand $\tau \rightarrow \infty$, la fonction Γ incomplète tend vers une fonction $\Gamma(D/\alpha)$ complète et $P(\tau)$ tend donc vers une loi de puissance :

$$\boxed{P(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{D}{\alpha} \left(\frac{p_0}{p_{\text{trap}}} \right)^D \Gamma \left(\frac{D}{\alpha} \right) \frac{\tau_0^{D/\alpha}}{\tau^{1+D/\alpha}}} \quad (\text{V.55})$$

On retrouve donc, de manière asymptotique, exactement le comportement de (V.46), au terme constant $\Gamma(D/\alpha)$ près. Or, pour les sommes de Lévy, seul compte le comportement asymptotique de la loi de probabilité initiale. Que τ soit une fonction certaine de p (équation (V.44)) ou que τ soit relié à p par une loi de probabilité exponentielle (équation (V.51)), on retrouve pour $P(\tau)$ le même comportement en loi de puissance caractérisée par $\mu = D/\alpha$.

3.2.4 Application aux résonances noires sélectives en vitesse

Pour le refroidissement par résonances noires, on commence par discuter du cas $\sigma_+ - \sigma_-$ à une dimension, pour lequel le calcul de $P(\tau)$ peut-être fait exactement. Puis, on aborde le cas d'autres configurations lasers, en dimension quelconque.

Dans le cas des résonances noires à une dimension, en configuration $\sigma_+ - \sigma_-$, les équations (I.19.b) et (I.27) permettent d'écrire, au voisinage de $p = 0$:

$$\Gamma'_{\text{NC}}(p) = \frac{\Gamma'_C}{2} \frac{p^2}{2p_{\text{Raman}}^2} \quad (\text{V.56})$$

dans le régime perturbatif des faibles intensités (cf. inégalité (I.15)). Avec les notations de l'équation (V.52), on a $\tau_0 = 2/\Gamma'_C$ et $p_0 = 2^{1/2} p_{\text{Raman}}$. Ce taux de fluorescence se met donc sous la forme d'une loi de puissance (V.52), avec un exposant $\alpha = 2$. Remarquons

toutefois que la fluorescence d'un état d'indice d'impulsion p ($|f_{-p} - \hbar k\rangle$ ou $|f_{+p} + \hbar k\rangle$) est décrite par une fonction délai $w_2(\tau_d)$ qui est la somme de deux exponentielles [18]

$$w_2(\tau_d) = P(\tau/p) \approx \frac{\Gamma'_C}{2} e^{-\Gamma'_C \tau_d} + \frac{\Gamma'_{NC}}{2} e^{-\Gamma'_{NC} \tau_d} \quad (\text{V.57})$$

et non d'une simple exponentielle comme dans (V.51).

Dans le régime $p \rightarrow 0$, on a $\Gamma'_{NC}(p) \ll \Gamma'_C(p)$. Le régime $\tau \rightarrow \infty$ de $P(\tau)$ sera donc dominé par l'exponentielle de poids $1/2$, associée à $\Gamma'_{NC}(p)$. Or, dans une somme de Lévy T_N (équation (V.36.a)), seul compte le régime $\tau \rightarrow \infty$ de $P(\tau)$, de sorte qu'on peut reprendre le calcul où $P(\tau/p)$ est une simple exponentielle. Pour obtenir $P(\tau)$, on reprend donc l'équation (V.55) avec $D = 1$, $\alpha = 2$, et en tenant compte du fait que seul un délai sur deux est tiré selon le taux $\Gamma'_{NC}(p)$. Tous calculs faits, on a :

$$P(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{p_{\text{Raman}}}{p_{\text{trap}}} \frac{\Gamma'_C^{-1/2}}{\tau^{1+1/2}} \quad (\text{V.58})$$

Soit τ_{ext} le temps caractéristique entre deux sauts à l'extérieur du piège :

$$\boxed{\tau_{\text{ext}} \equiv 2 / \Gamma'_C} \quad (\text{V.59})$$

La distribution $P(\tau)$ devient alors

$$\boxed{P(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{p_{\text{Raman}}}{p_{\text{trap}}} \frac{\Gamma'_C^{-1/2}}{\tau^{1+1/2}}} \quad (\text{V.60})$$

Passons maintenant aux résonances noires en configuration et dimensionnalité quelconques. Il est raisonnable de penser que l'on continuera à avoir [19],[20] :

$$\Gamma'_{NC}(p) \propto p^2 \quad (\text{V.61})$$

En effet, ce terme p^2 est un terme de couplage motionnel, issu de l'effet Doppler, qui semble inévitable dans l'hamiltonien atomique. On considérera donc, pour le refroidissement par résonances noires en général, que l'on a une distribution $P(\tau)$ des temps de piégeage de la forme (V.55), avec $\alpha = 2$. La distribution $P(\tau)$ est donc une loi de puissance (V.10), avec un exposant caractéristique μ donné par

$$\boxed{\mu = D/2} \quad (\text{V.62})$$

Les détails du mécanisme détermineront les préfacteurs de (V.61).

[18] La fonction délai contient également d'autres termes (cf. chapitre IV). Ces termes supplémentaires sont négligeables ici, dans le régime perturbatif en Ω_1 et en p .

[19] Il est vraisemblable que certaines configurations de refroidissement par résonances noires ne sont pas invariantes par rotation, de sorte que $\Gamma'_{NC}(\vec{p})$ dépend de p_x^2 , p_y^2 et p_z^2 et pas seulement de p^2 . Ici, on se limitera à l'équation (V.61).

[20] Voir l'annexe D pour certaines configurations à 2 dimensions.

Le simple fait que $\mu = D/2$ est une information importante sur le processus de refroidissement :

- En dimension 1, on a $\mu = 1/2 < 1$, ce qui signifie que la valeur moyenne des temps de piégeage est infinie. Quand le nombre N d'événements de piégeage croît, T croît comme N^2 , et le temps de piégeage le plus long croît également comme N^2 . Des temps de piégeage de plus en plus longs ont donc tendance à apparaître. On retrouve ici la remarque faite en introduction.

- En dimension 2, on a $\mu = 1$, ce qui est un cas marginal : $\langle \tau \rangle$ diverge mais seulement logarithmiquement.

- En dimension 3, on a $\mu = 3/2$. La valeur moyenne des temps de piégeage est donc finie, mais $\langle \tau^2 \rangle$ reste infinie.

On s'attend donc à des changements qualitatifs dans la dynamique du refroidissement quand on passe de 1 à 2, puis 3 dimensions : l'exposant μ passe du régime $\mu < 1$ ($1D$, $\langle \tau \rangle = \infty$) à $\mu = 1$ ($2D$, $\langle \tau \rangle$ diverge logarithmiquement), puis à $\mu > 1$ ($3D$, $\langle \tau \rangle < \infty$).

A trois dimensions, il est intéressant de calculer explicitement $\langle \tau \rangle$. On suppose que l'équation (V.56) est toujours valable et on ne s'intéressera qu'aux délais tirés selon le taux $\Gamma_{NC}(p)$. On fait l'hypothèse que τ et p sont liés par une loi de probabilité exponentielle. En appliquant l'équation (V.55), comme $\Gamma(3/2) = \pi^{1/2}/2$, on obtient :

$$P(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{p_0}{p_{\text{trap}}} \right)^D \frac{\tau_0^{3/2}}{\tau^{5/2}} \quad (\text{V.63})$$

d'où, en appliquant (V.49) et (V.50), on tire :

$$3D : \langle \tau \rangle = \frac{3}{2} \sqrt{\pi} \left(\frac{p_0}{p_{\text{trap}}} \right)^2 \tau_0 = \frac{3}{2} \sqrt{\pi} \tau_{\text{trap}} \quad (\text{V.64})$$

Remarquons que cette valeur moyenne dépend de p_{trap} . Malgré la présence de l'annulation de $\Gamma(p)$ en $p=0$, c'est-à-dire l'existence de temps de piégeage arbitrairement longs au centre du piège, $\langle \tau \rangle$ n'est supérieur que d'un facteur $3\pi^{1/2}/2 \approx 2,6$ au temps de piégeage τ_{trap} sur les bords du piège : à $3D$, les états de très longue durée de vie ont une faible probabilité d'être atteints.

Pour obtenir une conclusion claire sur l'accumulation d'atomes dans le piège, la distribution des temps de piégeage ne suffit pas. Nous devons maintenant calculer la deuxième distribution qui joue sur la population piégée, c'est-à-dire la distribution $\hat{P}(\hat{\tau})$ des temps de premier retour.

3.3 Distribution $\hat{P}(\hat{\tau})$ des temps de premier retour

3.3.1 Modèles

Les temps $\hat{\tau}$ de sortie ("temps de premier retour") sont des sommes de n délais τ_{dj} (au sens des délais τ_d du chapitre IV) :

$$\hat{\tau} = \sum_{j=1}^n \tau_{dj} \quad (\text{V.65})$$

n et τ_{dj} étant des variables aléatoires.

La méthode pour calculer $\hat{P}(\hat{\tau})$ consiste à calculer d'abord $P_1(n)$, la distribution des nombres n de sauts effectués au cours d'une sortie. *Ceci est un problème purement géométrique, dans lequel le temps n'intervient pas.* Le paramètre physique essentiel qui détermine $P_1(n)$ est le volume en impulsion accessible au cours d'une sortie. Puis, on passe au problème *temporel* du calcul de $\hat{P}(\hat{\tau})$ en prenant en compte un profil de fluorescence $\Gamma(p)$ particulier. Les calculs de $\hat{P}(\hat{\tau})$ sont beaucoup plus complexes que ceux de $P(\tau)$. A une dimension, il est remarquable qu'on puisse calculer $\hat{P}(\hat{\tau})$ de manière asymptotiquement exacte dans la plupart des cas. Dans certains cas plus complexes, on calculera $\hat{P}(\hat{\tau})$ à certains préfacteurs près.

On prendra deux modèles géométriques de base pour représenter le volume dans lequel les atomes diffusent (figure V.12) :

- Premier modèle géométrique : la diffusion des impulsions atomiques est confinée à une sphère de rayon p_{\max} . On parlera de "murs" dans l'espace des impulsions. Ce modèle correspond à une configuration de refroidissement laser dans laquelle il existe des forces de friction (refroidissement Doppler, refroidissement Sisyphe) qui permettent de borner les impulsions maximales atteintes : on considèrera que p_{\max} est environ la valeur quadratique moyenne de l'impulsion obtenue par le mécanisme de refroidissement concerné (en l'absence de résonances noires).

Dans ce modèle (figure V.12.a), on prendra $\Gamma(p)$ constant : en effet, l'impulsion p_{\max} est en général suffisamment petite pour que la diminution de fluorescence due à l'effet Doppler soit négligeable ($kp_{\max}/M < \Gamma$). On appelle τ_{ext} le délai entre deux sauts à l'extérieur du piège [21] :

$$\tau_{\text{ext}} \equiv 1/\Gamma \quad (\text{V.66})$$

[21] Pour les résonances noires sélectives en vitesse, à une dimension, pour $|p| < p_{\text{Raman}}$ et $\Omega_1 \ll \Gamma$, on a

$$\tau_{\text{ext}} = \frac{\tilde{\delta}^2 + \Gamma^2 / 4}{\Omega_1^2 / 2} \Gamma^{-1}$$

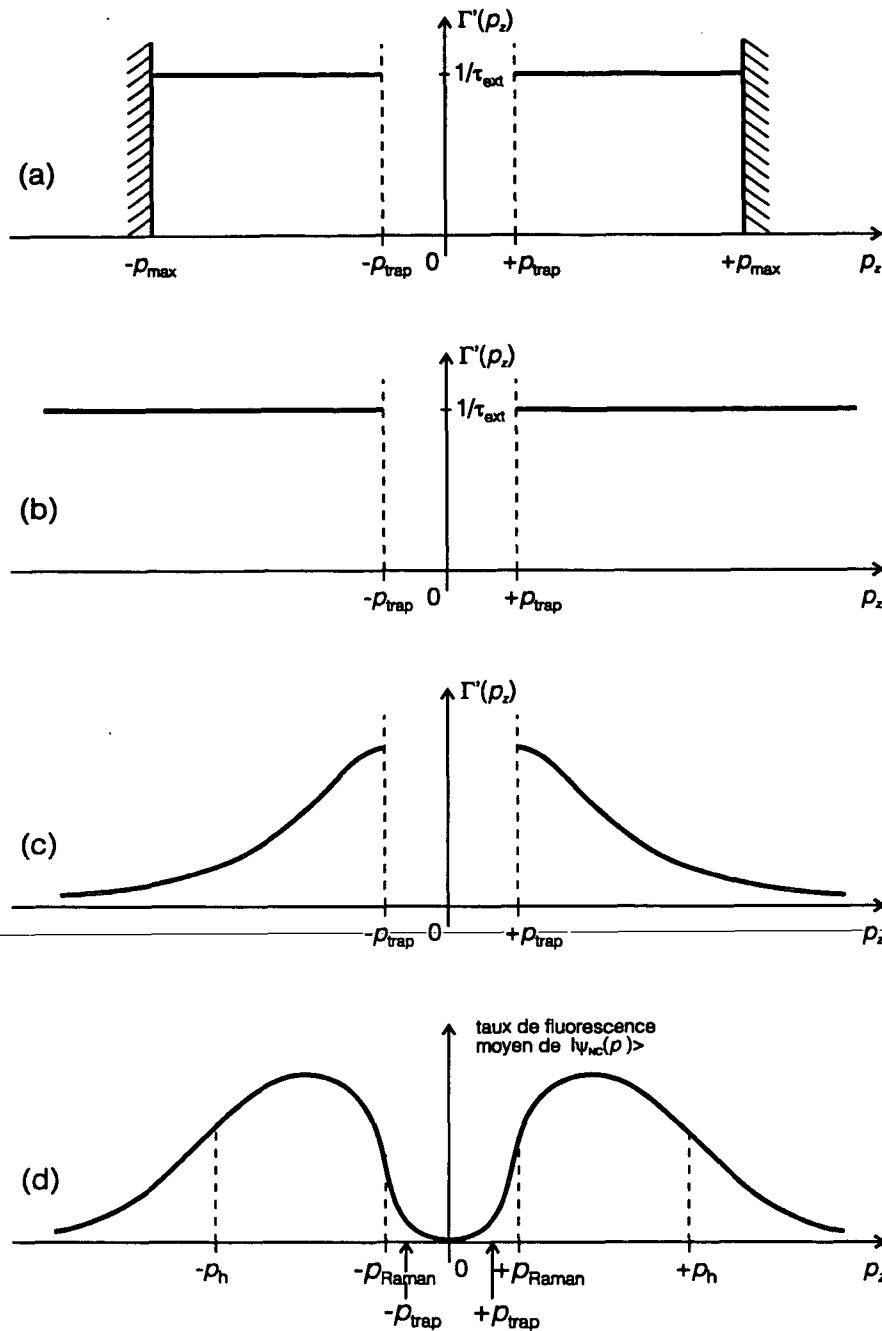


Figure V.12 Modèles de diffusion à l'extérieur du piège.

Nous n'avons représenté que la configuration à une dimension. Les configurations à 2 et 3 dimensions s'en déduisent de manière évidente.

(a) Impulsions confinées : $|p| < p_{\max}$. Modèle adapté au refroidissement sub-recul en présence de friction.

(b) Impulsions non confinées et $\Gamma(p)$ constant. Modèle de refroidissement sub-recul sans force de friction et dans un régime où l'atténuation de la fluorescence par l'effet Doppler à l'extérieur du piège est négligeable.

(c) Impulsions non confinées et $\Gamma(p) \propto 1/p^2$. Modèle de refroidissement sub-recul sans force de friction et prise en compte de l'effet Doppler à grand p .

(d) Résonances noires sélectives en vitesse à une dimension, en configuration $\sigma_+ - \sigma_-$. Le taux de fluorescence présente une résonance noire pour $p \approx 0$. Il diminue en $1/p^2$ à grand p ($|p| > p_h = M\Gamma/k$). Cette configuration est bien représentée par le modèle (c).

• Deuxième modèle géométrique : les impulsions atomiques diffusent dans un espace infini. Ce modèle représente bien la diffusion atomique en l'absence de forces de friction (cas par exemple des résonances noires à une dimension, en configuration $\sigma_+ - \sigma_-$).

On considèrera le cas où $\Gamma(p)$ est pris constant (figure V.12.b, cf. équation (V.66)) et le cas où $\Gamma(p)$ diminue à grand p , à cause de l'effet Doppler (figure V.12.c). Ce dernier cas est physiquement pertinent, puisque l'impulsion atomique, non bornée, peut atteindre des impulsions telles que $kp/M > \Gamma$.

3.3.2 Cas d'impulsions confinées : $|p| < p_{\max}$

3.3.2.1 Situation physique étudiée

On considère une particule qui diffuse en impulsion sous l'effet de l'émission spontanée. Chaque émission spontanée se traduit par un changement d'impulsion $\Delta\vec{p}$

$$\Delta\vec{p} = \hbar\vec{k}_{\text{sp}} \quad (\text{V.67})$$

où $\hbar\vec{k}_{\text{sp}}$ est l'impulsion du photon spontané. On considère que l'émission spontanée a lieu dans une direction aléatoire tirée de manière isotrope à *trois dimensions*.

Si on s'intéresse au refroidissement sub-recul à D dimensions, alors on considère que l'on a des forces de friction qui confinent les D composantes refroidies de l'impulsion dans une sphère de rayon p_{\max} (voir la figure V.13). En d'autres termes, on considère que les $(3-D)$ composantes non refroidies sont libres de prendre des valeurs arbitrairement grandes sous l'effet de l'émission spontanée, qui se produit de manière isotrope à 3 dimensions. C'est effectivement ce qui se produit dans les situations de refroidissement sub-recul habituelles : la friction n'apparaît que pour les D composantes que l'on cherche à refroidir de manière sub-recul.

Ainsi, à 1D, une seule composante de l'impulsion est limitée par la friction

$$|p_x| \leq p_{\text{trap}} \quad (\text{V.68})$$

En revanche, p_y et p_z peuvent prendre des valeurs arbitrairement grandes. Les atomes évoluent entre deux plans parallèles séparés d'une distance $2p_{\text{trap}}$.

A 2D, deux composantes de l'impulsion sont limitées par la friction :

$$\sqrt{p_x^2 + p_y^2} \leq p_{\max} \quad (\text{V.69})$$

En revanche, p_z peut prendre des valeurs arbitrairement grandes. Les atomes évoluent à l'intérieur d'un cylindre de rayon p_{trap} .

A 3D, on a :

$$\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \leq p_{\max}, \quad (\text{V.70})$$

c'est-à-dire que les trois composantes de l'impulsion sont limitées par la friction. Les atomes évoluent dans une sphère de rayon p_{trap} .

De manière compacte, pour le refroidissement à D dimensions en présence de friction, on a :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^D p_i^2} \leq p_{\max} \quad (\text{V.71})$$

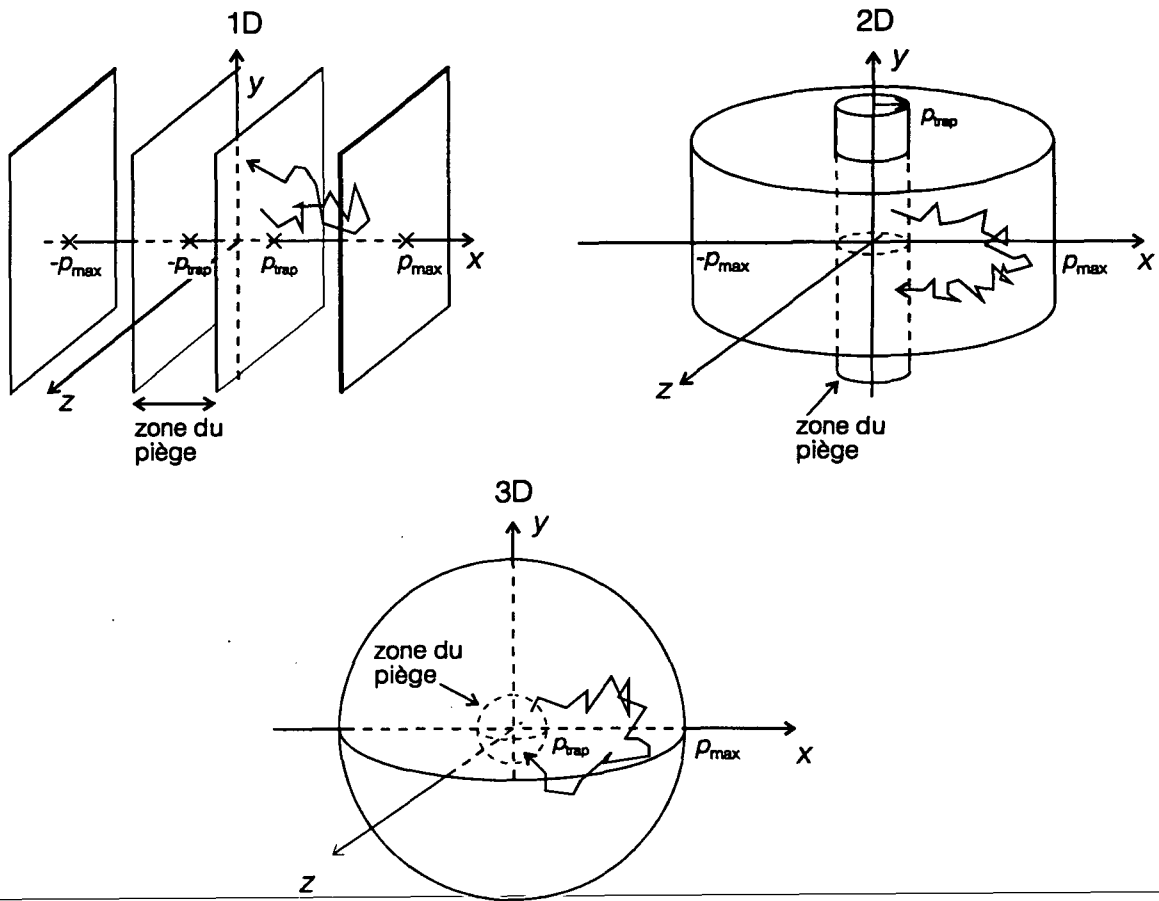


Figure V.13 *Modèle de diffusion dans un volume confiné.* Pour le refroidissement subrecul à D dimensions, on considère que seules les D composantes de l'impulsion que l'on cherche à refroidir bénéficient de forces de friction. En revanche, la diffusion en impulsion sous l'effet de l'émission spontanée considérée comme isotrope est tridimensionnelle. Le volume accessible à l'impulsion atomique ($(\sum_{i=1}^D p_i^2)^{1/2} \leq p_{\max}$) est délimité par 2 plans pour le refroidissement 1D, par un cylindre pour le refroidissement 2D et par une sphère pour le refroidissement 3D. La zone du piège à D dimensions ($(\sum_{i=1}^D p_i^2)^{1/2} \leq p_{\text{trap}}$) a la même forme que la zone accessible. Dans chaque cas, on a représenté une trajectoire typique de premier retour.

3.3.2.2 Calcul du temps moyen de premier retour

On cherche la distribution $\hat{P}(\hat{\tau})$ des temps de premier retour. Rappelons qu'on considère le taux de fluorescence $\Gamma(p)$ constant pour $|p| > p_{\text{trap}}$. On introduit $P_1(n)$, la distribution du nombre de sauts pour les trajectoires de premier retour dans le piège. Puisque $\Gamma(p)$ est constant, on a évidemment

$$\hat{\tau} = n\tau_{\text{ext}} \tag{V.72}$$

d'où

$$\hat{P}(\hat{\tau}) = \frac{1}{\tau_{\text{ext}}} P_1(n) \tag{V.73}$$

Pour obtenir $\hat{P}(\hat{\tau})$, il suffit donc de calculer $P_1(n)$.

En fait, on va s'intéresser uniquement à la valeur moyenne $\langle n \rangle$ du nombre de sauts au cours d'un premier retour. En effet, on s'attend à ce que cette distribution $P_1(n)$ soit une loi étroite : du fait du confinement de la diffusion dans $|p| < p_{\max}$, une particule repasse fréquemment par l'origine ; par conséquent, les temps de premier retour très longs sont très peu probables et $\langle n \rangle$ est finie.

Pour calculer $\langle n \rangle$, on va utiliser la méthode générale suivante : on calcule la probabilité $P_{\text{piège}}(n)$ d'être dans le piège après un nombre n de sauts, puis par un calcul sur les transformées de Laplace, on en déduit une information sur la distribution $P_1(n)$ des premiers retours.

Un atome qui est dans le piège après n sauts est un atome qui est resté dans le piège un certain nombre de sauts, et qui est sorti du piège un certain nombre de fois. Considérons l'événement élémentaire suivant, de durée $n_{\text{élem}}$ sauts :

l'atome, initialement dans le piège, reste dans le piège durant n_{rester} sauts consécutifs, puis retourne dans le piège en $(n_{\text{élem}} - n_{\text{rester}})$ sauts [22].

La probabilité $P_{\text{élem}}(n_{\text{élem}})$ qu'un événement élémentaire soit de longueur $n_{\text{élem}} \geq 1$ s'écrit :

$$P_{\text{élem}}(n_{\text{élem}}) = \sum_{n_{\text{rester}}=0}^{n_{\text{élem}}} P_{\text{rester}}(n_{\text{rester}}) \times P_1(n_{\text{élem}} - n_{\text{rester}}) \quad (\text{V.74})$$

- $P_{\text{rester}}(n_{\text{rester}})$ est la probabilité, pour un atome initialement, dans le piège de rester dans le piège durant n_{rester} sauts *consécutifs* ;
- $P_1(n_1)$ est la probabilité, pour un atome sortant du piège, de retourner dans le piège en n_1 sauts (distribution de *premier* retour).

En toute rigueur, la distribution $P_{\text{élem}}$ est donc le produit de convolution de P_{rester} et de P_1 :

$$P_{\text{élem}}(n) = P_{\text{rester}} \otimes P_1(n) \quad (\text{V.75})$$

Cependant, comme $p_{\text{trap}} \ll \Delta p$, l'atome sort du piège presque certainement dès le premier saut, ce qui se traduit par :

$$P_{\text{rester}}(n) \approx \delta(n) \quad (\text{V.76})$$

La relation (V.75) se simplifie donc en

$$P_{\text{élem}}(n) \approx P_1(n) \quad (\text{V.77})$$

[22] Insistons sur le fait qu'au cours d'un tel événement élémentaire, l'atome ne sort du piège qu'une seule fois, et n'y retourne qu'une seule fois, lors du dernier saut effectué.

Considérons maintenant la probabilité $P_{\text{piège}}(n)$ d'être dans le piège pour un atome ayant fait n sauts : au bout de n sauts, un atome qui se trouve dans le piège a pu subir 0, ou 1, ou 2, ... événements élémentaires. On a donc [23] :

$$P_{\text{piège}}(n) = \delta(n) + P_{\text{élem}}(n) + P_{\text{élem}} \otimes P_{\text{élem}}(n) + \dots \quad (\text{V.78})$$

où \otimes désigne le produit de convolution. En tenant compte de (V.77), on obtient :

$$P_{\text{piège}}(n) = \delta(n) + P_1(n) + P_1(n) \otimes P_1(n) + \dots \quad (\text{V.79})$$

Passons maintenant dans l'espace des transformées de Laplace. De manière générale, on notera $Q_x(E)$ la transformée de Laplace de la loi $P_x(n)$ [24] :

$$Q_x(E) = \int_0^{\infty} e^{-En} P_x(n) dn \quad (\text{V.80})$$

L'équation (V.79) permet d'exprimer $Q_{\text{piège}}(E)$ sous la forme d'une série géométrique :

$$Q_{\text{piège}}(E) = 1 + Q_1(E) + (Q_1(E))^2 + \dots = \frac{1}{1 - Q_1(E)} \quad (\text{V.81})$$

Il reste maintenant à calculer $Q_{\text{piège}}(E)$ et $Q_1(E)$, ce que l'on va faire dans la limite $E \rightarrow 0$.

Calculons d'abord $Q_{\text{piège}}(E)$. Dans le régime des grands nombres de sauts, les atomes ont suffisamment diffusé en impulsion pour être distribués uniformément à l'intérieur de la sphère de rayon p_{max} [25]. La probabilité $P_{\text{piège}}(n)$ de trouver l'atome dans le piège est donc donnée par le rapport entre le volume du piège et le volume accessible :

$$P_{\text{piège}}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{p_{\text{trap}}}{p_{\text{max}}} \right)^D \quad (\text{V.82})$$

La transformée de Laplace $Q_{\text{piège}}(E)$ est donc :

$$Q_{\text{piège}}(E) \xrightarrow{E \rightarrow 0} \frac{1}{E} \left(\frac{p_{\text{trap}}}{p_{\text{max}}} \right)^D \quad (\text{V.83})$$

[23] Expliquons le terme $\delta(n)$ correspondant à la probabilité $P_0(0)$ d'être piégé sans avoir effectué un seul événement élémentaire. Si l'atome a subi 0 événement élémentaire, alors : soit l'atome n'a effectué aucun saut ($n=0$) et on sait avec certitude qu'il est piégé ($P_0(0) = 1$) ; soit l'atome a effectué un ou plusieurs sauts ($n > 0$), mais il n'est pas revenu dans le piège, et on sait donc avec certitude qu'il n'est pas piégé ($P_0(n) = 0$). D'où $P_0(0) = \delta(n)$.

[24] La variable n est à l'origine une variable discrète. On passe ici à une variable continue car d'une part on s'intéresse la limite $n \rightarrow \infty$. D'autre part, on ne s'intéressera qu'à la limite $E \rightarrow 0$.

[25] Rappelons que le temps a été évacué du problème, en considérant les distributions des nombres de sauts indépendamment de l'intervalle de temps entre deux sauts.

Calculons maintenant $Q_1(E)$. Dans la limite $E \rightarrow 0$, $Q_1(E)$ peut s'exprimer en fonction de la moyenne $\langle n \rangle_{P_1}$ au cours d'une sortie. En effet, par définition

$$Q_1(E) = \int_0^{\infty} e^{-En} P_1(n) dn \quad (\text{V.84})$$

Or, $P_1(n)$ est une fonction qui décroît rapidement à grand n [26]. On peut donc considérer que l'intégration (V.84) se fait jusqu'à une valeur finie de n (de l'ordre de quelques $\langle n \rangle_{P_1}$). Dans la limite $E \rightarrow 0$, on peut donc développer e^{-En} au voisinage de 0, d'où :

$$Q_1(E) \xrightarrow{E \rightarrow 0} \int_0^{\infty} P_1(n) dn - E \int_0^{\infty} n P_1(n) dn \quad (\text{V.85})$$

La première intégrale vaut 1 car $P_1(n)$ est normée. La deuxième intégrale correspond à la valeur moyenne $\langle n \rangle$ du nombre de sauts au cours d'un premier retour, qui est la quantité que l'on veut calculer :

$$Q_1(E) \xrightarrow{E \rightarrow 0} 1 - E \langle n \rangle_{P_1} \quad (\text{V.86})$$

Finalement, en introduisant (V.83) et (V.86) dans (V.81) on obtient :

$$\frac{1}{E} \left(\frac{P_{\text{trap}}}{P_{\text{max}}} \right)^D \xrightarrow{E \rightarrow 0} \frac{1}{E \langle n \rangle_{P_1}} \quad (\text{V.87})$$

d'où, par identification :

$$\boxed{\langle n \rangle_{P_1} = \left(\frac{P_{\text{max}}}{P_{\text{trap}}} \right)^D} \quad (\text{V.88})$$

Enfin, comme le taux de fluorescence est constant (cf. équations (V.66) et (V.73)), le temps moyen de premier retour est $\langle \hat{\tau} \rangle = \langle n \rangle \tau_{\text{ext}}$, d'où :

$$\boxed{\langle \hat{\tau} \rangle = \tau_{\text{ext}} \left(\frac{P_{\text{max}}}{P_{\text{trap}}} \right)^D} \quad (\text{V.89})$$

On remarque que ce résultat ne dépend pas de la taille des sauts Δp . En effet, Δp a deux effets qui se compensent exactement : si Δp croît, l'atome revient plus vite au voisinage de l'origine à Δp près mais, lorsqu'il passe au voisinage de l'origine, il "rate" plus souvent le piège $|p| < p_{\text{trap}}$.

[26] Les premiers retours après un très grand nombre de sauts sont très peu probables, du fait du confinement des impulsions.

3.3.2.3 Test numérique

L'équation (V.89) joue un rôle essentiel dans le refroidissement sub-recul. Aussi nous avons cherché à la vérifier par une simulation numérique.

Cette simulation Monte-Carlo réalise une marche aléatoire dans un volume confiné de rayon p_{\max} . Pour chaque réalisation, la particule est initialement en $\vec{p} = \vec{0}$. La particule effectue une marche au hasard à pas constant (pas $\hbar k$ pris comme unité). Chaque saut se fait dans une direction déterminée aléatoirement, de manière isotrope, à trois dimensions. On s'intéresse aux trajectoires de premier retour dans un piège à D dimensions défini par l'équation (V.71). Pour chaque réalisation, on relève la longueur de la trajectoire de premier retour.

On traduit le fait que l'impulsion est confinée de la manière suivante : lorsque la marche au hasard amène la particule à une impulsion \vec{p} , avec $|\vec{p}| > p_{\max}$, on donne à cette particule une impulsion \vec{p}' de module $|\vec{p}'| = 2p_{\max} - |\vec{p}|$. Ainsi, on assure toujours $|\vec{p}| < p_{\max}$.

Les résultats des simulations sont représentés sur la figure V.14. Le domaine de validité du calcul analytique correspond à

$$p_{\text{trap}} \ll \hbar k \text{ et } p_{\max} \gg \hbar k \quad (\text{V.90})$$

Dans ce domaine, l'accord entre la prédiction analytique (V.88) et la simulation est excellent (écarts de quelques pourcents correspondant à l'incertitude statistique). En outre, et c'est plus étonnant, l'accord reste satisfaisant (5 à 20 %) dès lors que $p_{\max} \geq 2 \hbar k$ et $p_{\text{trap}} \leq 0,5 \hbar k$, c'est-à-dire très près des bornes de validité du calcul analytique.

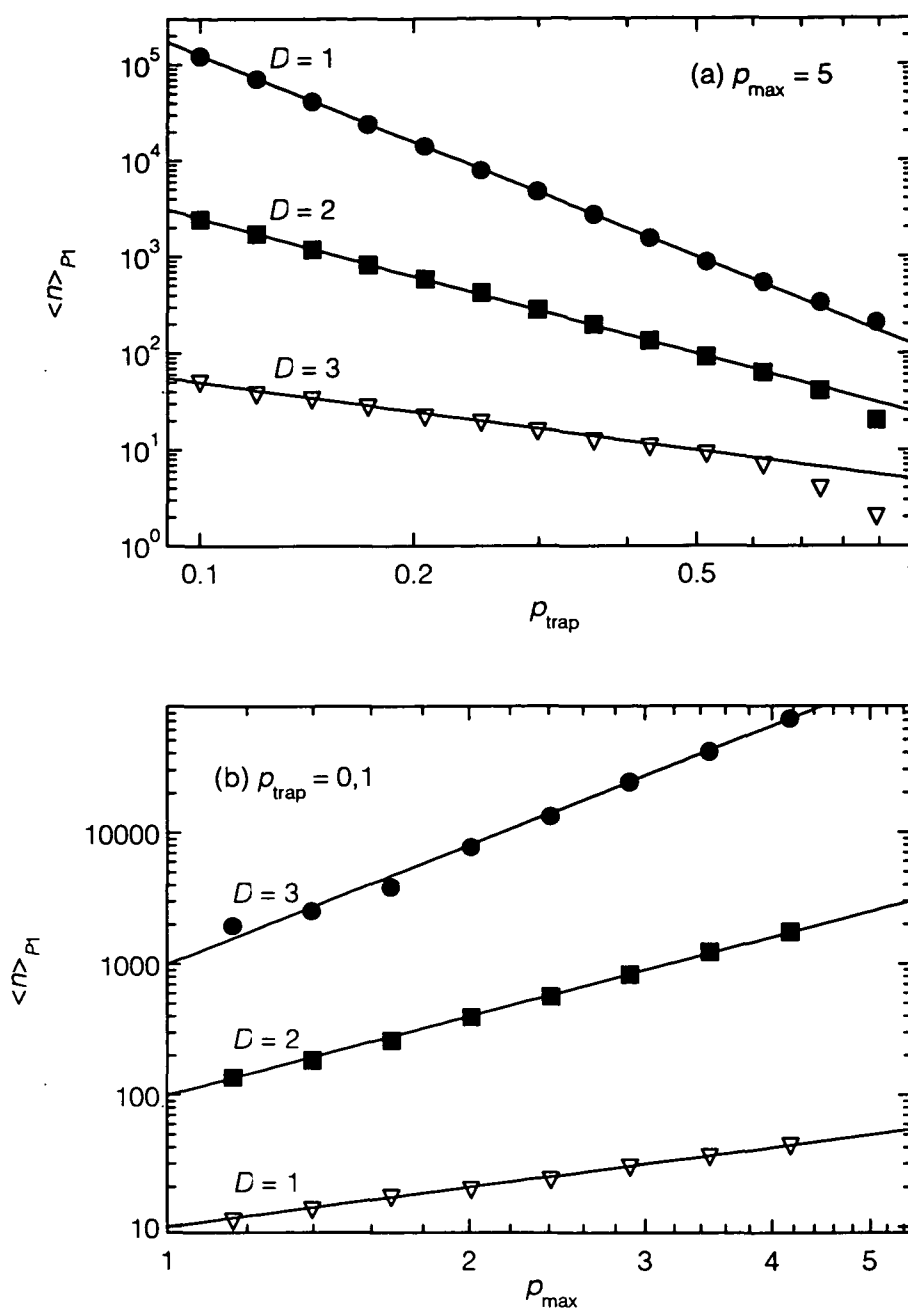


Figure V.14 Simulation Monte-Carlo de la diffusion dans un volume confiné. Temps de premier retour. La particule effectue une marche aléatoire de pas $\hbar k$ dans un volume à D dimensions de rayon p_{max} . Pour chaque paramètre, on réalise 4000 trajectoires premier retour. Pour chaque trajectoire, on relève n_{p_1} , le nombre de sauts de la trajectoire et on porte la valeur moyenne $\langle n_{p_1} \rangle$. Les courbes théoriques correspondant à l'équation (V.88) sont représentées en trait plein. Noter que l'accord entre cette équation et la simulation est excellent pour une large plage de valeurs.

(a) $\langle n_{p_1} \rangle$ en fonction de p_{trap} , avec $p_{\text{max}} = 5 \hbar k$.

(b) $\langle n_{p_1} \rangle$ en fonction de p_{max} , avec $p_{\text{trap}} = 0,1 \hbar k$.

3.3.2.4 Commentaire : friction et refroidissement sub-recul

L'équation (V.89) appelle un commentaire important. En présence de forces de friction, la loi de premier retour $\hat{P}(\hat{\tau})$ est étroite, c'est-à-dire que la valeur moyenne $\langle \hat{\tau} \rangle$ est finie. Cependant, elle dépend de manière rapide de la dimensionnalité, de p_{\max} et de p_{trap} (figure V.15). Ainsi, il faut un temps très long pour atteindre des impulsions petites ($|p| < p_{\text{trap}} < \Delta p$) et ce temps est d'autant plus long que la dimensionnalité croît et que p_{trap} diminue ($\langle \hat{\tau} \rangle \propto 1/(p_{\text{trap}})^D$). La raison en est que l'on compte sur une marche aléatoire pour atteindre un volume petit dans l'espace des impulsions, ce qui prend beaucoup de temps.

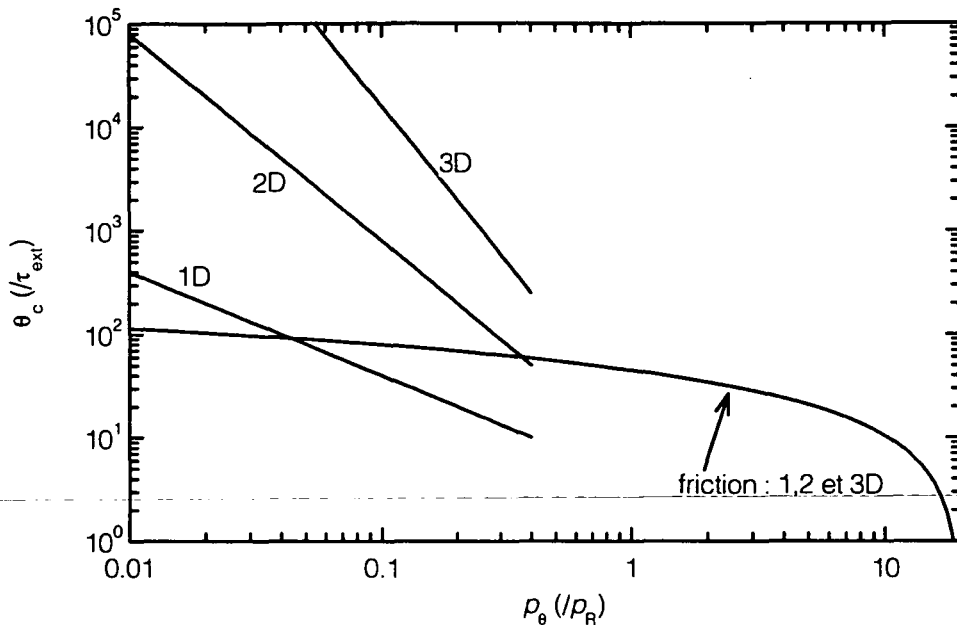


Figure V.15 Dynamique du refroidissement sub-recul avec friction. On représente le temps caractéristique θ_c minimal, requis pour que les atomes atteignent une impulsion caractéristique p_θ donnée.

Dans le régime sub-recul, on prend $p_\theta = p_{\text{trap}}$ et $\theta_c = \langle \hat{\tau} \rangle$, qui sont reliés par l'équation (V.89). Pour l'application numérique, on a pris $\Delta p = \hbar k$ et $p_{\max} = 2 \hbar k$, valeur typique que l'on peut atteindre par refroidissement Sisyphe. Le temps extérieur τ_{ext} est pris égal à $2 \Gamma^{-1}$ (valeur de saturation de la fluorescence en régime stationnaire). Noter la forte dépendance en fonction du nombre de dimensions.

Pour le régime au-dessus du recul, on a représenté un amortissement exponentiel de l'impulsion caractéristique atteinte. La courbe tracée correspond à une impulsion initiale de $20 \hbar k$ et à une constante de temps d'amortissement de $15 \tau_{\text{ext}}$. Un tel comportement s'obtient, par exemple, par refroidissement Doppler, en choisissant pour l'hélium métastable $\delta = -\Gamma$ et $\Omega_1 = \Gamma$. On a prolongé la courbe dans le domaine sub-recul, comme si la friction opérait aussi dans le régime sub-recul. La rapidité du refroidissement ne dépend pratiquement pas de la dimensionnalité.

Cette figure montre la différence qualitative qui existe entre le refroidissement sub-recul, qui repose sur une marche aléatoire, et le refroidissement au-dessus du recul, qui repose sur la friction. Cette différence est quantitativement importante surtout en 2 et 3 dimensions : il faut des temps très longs pour refroidir significativement dans le domaine sub-recul. A une dimension, en revanche, sur un domaine de temps limité et avec les paramètres numériques introduits, la marche aléatoire permet un refroidissement plus rapide que celui correspondant à un mécanisme de friction.

Ceci n'est pas contradictoire avec la présence d'un mécanisme de friction superposé au refroidissement sub-recul : la friction permet de diminuer efficacement les vitesses *au-dessus du recul*, mais pas *au-dessous du recul*. Pour atteindre le régime sub-recul, une marche aléatoire est indispensable. Le rôle de la friction pour le refroidissement sub-recul est d'accélérer le retour de l'atome dans la zone $|p| < p_{\text{trap}}$, c'est-à-dire de rendre plus efficace la marche aléatoire, en diminuant $\langle \hat{\tau} \rangle$.

Au contraire, les mécanismes de refroidissement *au-dessus du recul* reposent sur un phénomène de friction, dont la dynamique est beaucoup plus rapide : l'impulsion p est alors conduite de manière quasi-déterministe vers $p = 0 \pm \delta p$ où δp est l'impulsion quadratique moyenne finale. En présence de friction, il faut environ le même temps pour passer de $p = 50\hbar k$ à $p = 10\hbar k$ que de $p = 10\hbar k$ à $p = 2\hbar k$, et ce quelle que soit la dimensionnalité : les impulsions caractéristiques s'amortissent exponentiellement rapidement.

Pour refroidir *au-dessous du recul*, il est donc important

- de procéder en même temps à un refroidissement *au-dessus du recul* aussi efficace que possible par friction ;
- de réserver la dynamique lente de la marche aléatoire pour l'accès au régime sub-recul. Ceci est d'autant plus vrai que D est grand (figure V.15).

En conclusion, une marche aléatoire est indispensable pour atteindre le régime sub-recul. Si l'on n'a pas de processus de friction alors, les temps de retour $\hat{\tau}$ sont très longs ($\langle \hat{\tau} \rangle = \infty$), comme on va le voir, et le refroidissement n'est pas efficace. Pour que le refroidissement sub-recul lui-même soit efficace (si $D > 1$), il est ainsi important de combiner marche aléatoire et friction *au-dessus du recul*. Le tableau V.2 résume les rôles respectifs de la friction et de la marche aléatoire.

	Refroidissement au-dessus du recul	Refroidissement au-dessous du recul
Effet de la friction	refroidissement	- refroidissement au-dessus du recul - confinement des impulsions : diminution $\langle \hat{\tau} \rangle$
Effet de la marche aléatoire	chauffage	atteindre $ p < p_{\text{trap}} < \hbar k$

Tableau V.2 *Friction et marche aléatoire dans le refroidissement laser au-dessus et au-dessous du recul.*

3.3.3 Cas d'impulsions non confinées avec un taux de fluorescence constant

Les lois de probabilités $P_1(n)$ de premier retour, dans un espace non confiné, sont des résultats classiques sur le mouvement brownien [BoG90]. Nous rappelons ci-dessous ces résultats et, dans le cas 1D, calculons complètement $\hat{P}(\hat{\tau})$. Les résultats sont donnés dans le cas particulier des résonances noires, mais on peut les généraliser sans difficulté.

3.3.3.1 Cas 1D

Calculons $P_1(n)$ dans le régime $n \rightarrow \infty$ par une méthode proche de celle utilisée pour le cas confiné (§ V.3.3.2). Les calculs du § V.3.3.2 jusqu'à l'équation (V.81) restent valables, de telle sorte que l'on a :

$$Q_{\text{piège}}(E) = \frac{1}{1 - Q_1(E)} \quad (\text{V.81, rappel})$$

où $Q_{\text{piège}}(E)$ et $Q_1(E)$ sont les transformées de Laplace de $P_{\text{piège}}(n)$ la probabilité d'être dans le piège après un nombre n de sauts, et de $P_1(n)$, la distribution de premier retour.

D'après la théorie usuelle du mouvement brownien, la distribution $\pi(p, n)$ en impulsion p au bout de n sauts ($n \gg 1$) est donnée par (cf. équation (V.9)) :

$$\pi(p, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}\Delta p} \exp\left(\frac{-p^2}{2n(\Delta p)^2}\right) \quad (\text{V.91})$$

La probabilité d'être dans le piège, c'est-à-dire de satisfaire $|p| \leq p_{\text{trap}}$, qui n'est autre que $P_{\text{piège}}(n)$ s'écrit donc

$$P_{\text{piège}}(n) = \int_{-p_{\text{trap}}}^{+p_{\text{trap}}} \pi(p, n) dp \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}} \frac{2p_{\text{trap}}}{\Delta p} \quad (\text{V.92})$$

puisque l'on a supposé $p_{\text{trap}} \ll \Delta p$ (cf. condition (V.38)). On en déduit directement :

$$Q_{\text{piège}}(E) = \sqrt{2} \frac{p_{\text{trap}}}{\Delta p} \frac{1}{\sqrt{E}} \quad (\text{V.93})$$

Par ailleurs, on sait que $P_1(n)$ s'écrit [BoG90] :

$$P_1(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a / n^{3/2} \quad (\text{V.94})$$

Le calcul de $Q_1(E)$ à partir de (V.94) pose un petit problème puisque $a / n^{3/2}$ n'admet pas de transformée de Laplace. Toutefois, $a / n^{3/2}$ n'est que la forme asymptotique (pour $n \rightarrow \infty$) de $P_1(n)$. On peut donc écrire, en introduisant une constante n_0 positive suffisamment grande,

$$Q_1(E) \approx \int_0^{n_0} e^{-En} P_1(n) dn + \int_{n_0}^{\infty} e^{-En} a / n^{3/2} dn \quad (\text{V.95})$$

On va s'intéresser uniquement à la limite $E \rightarrow 0$: comme $P_1(n)$ est normalisée, la première intégrale converge vers une certaine constante C . Par ailleurs, en posant $u = n - n_0$, on obtient :

[BoG90] J.-P. Bouchaud and A. Georges, *Anomalous diffusion in disordered media : statistical mechanisms, models and physical applications*, Phys. Rep. 195, p. 127-293 (1990).

$$Q_1(E \rightarrow 0) \approx C + ae^{-En_0} \int_0^\infty e^{-Eu} (u+n_0)^{-3/2} du \quad (\text{V.96})$$

Comme $(u+n_0)^{-3/2} = -2 d(u+n_0)^{-1/2} / du$, d'après le théorème donnant la transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction, on a :

$$Q_1(E \rightarrow 0) \approx C - 2ae^{-En_0} \left[E \int_0^\infty e^{-Eu} \frac{1}{(u+n_0)^{1/2}} du - \frac{1}{n_0^{1/2}} \right] \quad (\text{V.97})$$

Après le calcul sans difficulté de la transformée de Laplace de $(u+n_0)^{-1/2}$, on obtient :

$$Q_1(E \rightarrow 0) \approx C + 2a \frac{e^{-En_0}}{n_0^{1/2}} - 2a\sqrt{\pi}\sqrt{E} \quad (\text{V.98})$$

Dans la limite $E \rightarrow 0$, on peut poser $C + 2ae^{-En_0} / n_0^{1/2} \approx C'$, d'où

$$Q_1(E) \approx C' - 2a\sqrt{\pi}\sqrt{E} \quad (\text{V.99})$$

En introduisant (V.93) et (V.99) dans (V.81), on a

$$\sqrt{2} \frac{p_{\text{trap}}}{\Delta p} \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{1}{1 - C' + 2a\sqrt{\pi}\sqrt{E}} \quad (\text{V.100})$$

En identifiant les termes en $E^{1/2}$ dans (V.100), on tire :

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\Delta p}{p_{\text{trap}}} \quad (\text{V.101})$$

d'où on conclut finalement :

$$\boxed{\text{1D} : P_1(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Delta p}{2p_{\text{trap}}} \frac{1}{n^{3/2}}} \quad (\text{V.102})$$

Comme on suppose que chaque saut dure un temps τ_{ext} , on a aussi :

$$\boxed{\text{1D} : \hat{P}(\hat{\tau}) \xrightarrow{\hat{\tau} \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Delta p}{2p_{\text{trap}}} \frac{\sqrt{\tau_{\text{ext}}}}{\hat{\tau}^{3/2}}} \quad (\text{V.103})$$

Les temps de premier retour sont donc donnés par une loi de puissance de la forme (V.10) avec $\hat{\mu} = 1/2$ ($\langle \hat{\tau} \rangle = \infty$, $\langle \hat{\tau}^2 \rangle = \infty$). Le temps moyen de premier retour est infini, mais on peut montrer qu'au bout d'un temps infini, les atomes repassent tous par l'origine (cf. $\hat{P}(\hat{\tau})$ est normalisable), une infinité de fois.

3.3.3.2 Cas 2D

A deux dimensions, on a une loi plus large qu'à une dimension [BoG90] :

$$\hat{P}(\hat{\tau}) \xrightarrow{\hat{\tau} \rightarrow \infty} \frac{\hat{b}_{2D}}{\ln \hat{\tau}} \quad (\text{V.104})$$

où B_{2D} est un coefficient de "normalisation". Cette loi est tellement large (" μ " = 0) qu'elle n'est pas normalisable. On a évidemment $\langle \hat{\tau} \rangle = \infty$ et $\langle \hat{\tau}^2 \rangle = \infty$. Cependant, l'atome revient toujours à son point de départ, au bout d'un temps infini.

3.3.3.3 Cas 3D

A trois dimensions, au bout d'un temps infini, une fraction seulement des atomes revient à l'origine (de l'ordre de 0,34 pour une marche aléatoire sur un réseau cubique [BoG90]). La loi de probabilité $\hat{P}(\hat{\tau})$ n'est donc pas une vraie distribution.

La marche au hasard à deux et trois dimensions sans confinement des impulsions est donc très défavorable au peuplement du piège : les atomes ont tendance à mettre un temps très long à revenir au voisinage de $p = 0$. Les lois $\hat{P}(\hat{\tau})$ sont tellement larges qu'elles ne sont pas normalisables. Même le théorème de la limite centrale généralisé ne s'applique pas. Ceci est à opposer au comportement de $\hat{P}(\hat{\tau})$ quand p est confiné, où on a alors une loi étroite quelle que soit la dimensionnalité. On voit toute l'importance des forces de friction à 2 et 3 dimensions.

3.3.4 Cas d'impulsions non confinées avec un taux de fluorescence non constant

On étudie maintenant le cas où le taux de fluorescence $\Gamma(p)$ n'est pas constant, dans une configuration de résonances noires à 1 D [27]. On néglige la variation de $\Gamma(p)$ pour $p_{\text{trap}} \leq |p| \leq p_{\text{Raman}}$ qui se produit dans une zone très limitée [28]. En revanche, à grand p , le taux de fluorescence diminue à cause de l'effet Doppler, et cette diminution, sensible dès que $kp/M \geq \Gamma$, se produit quant $p \rightarrow \infty$:

$$\Gamma(p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \Gamma \frac{\Omega_1^2/2}{(kp/M)^2} \quad (\text{valable pour } kp/M \gg \Gamma \text{ et } \Omega_1 \ll \Gamma) \quad (\text{V.105})$$

On va ici calculer $\hat{P}(\hat{\tau})$ de manière approchée.

Selon la méthode présentée plus haut (§ V.3.3.1), revenons à un problème spatial de marche au hasard, dans lequel le temps n'intervient pas : le nombre de sauts n effectués au cours d'une sortie du piège a pour distribution $P_1(n)$, donnée par (V.102), d'exposant caractéristique $\mu = 1/2$. Comme $\mu < 1$, le nombre *typique* de sauts, noté n_N , effectués au cours de la seule N^e sortie est de l'ordre du nombre total de sauts effectués au cours des N premières sorties. D'après le tableau (V.1) et l'équation (V.14), on a

$$n_N \approx N^{1/\mu} = N^2 \quad (\text{V.106})$$

L'impulsion typique p_N , occupée par les atomes au cours d'une sortie de n_N sauts est (cf. mouvement brownien habituel, figure V.16)

$$p_N \approx \Delta p \sqrt{n_N} \approx N \Delta p \quad (\text{V.107})$$

[27] L'étude des cas à 2D ou 3D présenterait peu d'intérêt. En effet, l'effet Doppler a pour conséquence d'élargir significativement la loi $\hat{P}(\hat{\tau})$, et donc de défavoriser significativement le refroidissement. Or, à 2D et 3D, $\hat{P}(\hat{\tau})$ est déjà très large sans effet Doppler. Comme on sait (cf. § III.4.1) très bien comment confiner les impulsions par de la friction, et donc limiter l'effet Doppler, l'étude de ces cas très défavorables est superflue.

[28] Dans certains cas particuliers, cette variation peut toutefois jouer un rôle : les sorties peuvent être dominées par le temps passé dans la zone $p_{\text{trap}} \leq |p| \leq p_{\text{Raman}}$.

En utilisant l'équation (V.105), on trouve donc le délai τ_d typique entre deux sauts, au cours de la N^e sortie, dans la limite $N \rightarrow \infty$:

$$\tau_d \approx \frac{1}{\Gamma'(p)} \propto p_N^2 \propto N^2 \quad (\text{V.108})$$

Par conséquent, la durée typique de la N^e sortie, notée $\hat{\tau}_N$ est

$$\hat{\tau}_N = n \times \tau_d \propto N^4 \quad (\text{V.109})$$

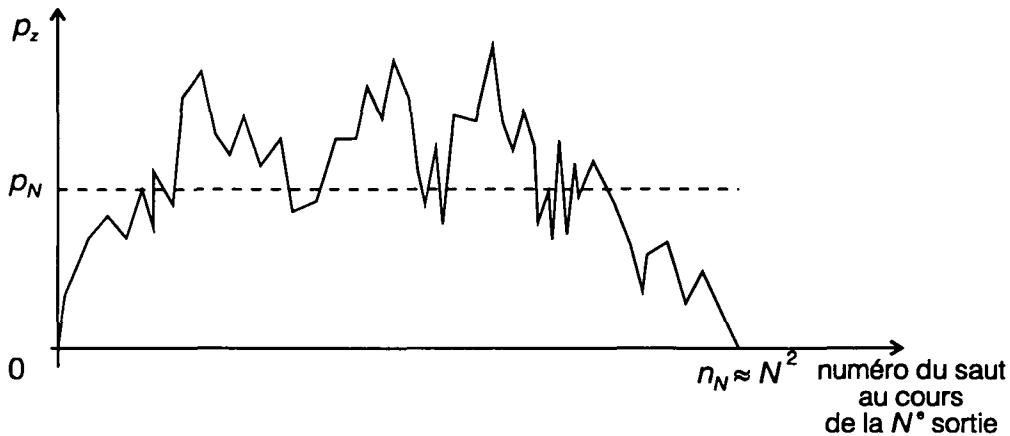


Figure V.16 *Excursion typique lors de la N^e sortie.* On représente schématiquement l'évolution de l'impulsion d'un seul atome. La N^e sortie comporte typiquement $n_N \approx N^2$ sauts en impulsion. L'impulsion typique atteinte au cours de cette sortie est donc $p_N \approx \Delta p \cdot (n_N)^{1/2}$ (cf. mouvement brownien habituel). Ceci permet de calculer la durée typique de la N^e sortie.

Ainsi, le N^e tirage est d'ordre N^4 , ce qui correspond au comportement d'une loi $\hat{P}(\hat{\tau})$ de puissance avec $\hat{\mu} = 1/4$. On en déduit :

$$\hat{P}(\hat{\tau}) \approx \frac{\hat{b}_{\text{Dop}}}{\hat{\tau}^{1+1/4}} \quad (\text{V.110})$$

où \hat{b}_{Dop} est une constante. Dans ce cas, la distribution des temps de premier retour ($\hat{\mu} = 1/4$) est plus large encore que celle des temps de piégeage ($\mu = 1/2$) (rappelons qu'on considère ici $D = 1$).

3.4 Résumé des propriétés des distributions de piégeage et de premier retour

Dans ce paragraphe V.3, on a calculé les comportements asymptotiques ($\tau \rightarrow \infty$, $\hat{\tau} \rightarrow \infty$) des distributions $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$. Les résultats principaux sont rassemblés dans les tableaux V.3 et V.4 ci-dessous.

Dans la plupart des cas, $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$ sont des lois de puissance :

$$P(\tau) \approx \frac{b}{\tau^{1+\mu}} \quad (\text{V.111.a})$$

$$\hat{P}(\hat{\tau}) \approx \frac{\hat{b}}{\tau^{1+\hat{\mu}}} \tag{V.111.b}$$

Les exposants μ et $\hat{\mu}$, associés aux préfacteurs b et \hat{b} sont les paramètres de base de l'approche vols de Lévy. Ils résument le comportement dans le piège ($|p| < p_{\text{trap}}$) et hors du piège ($|p| > p_{\text{trap}}$).

Les lois qui apparaissent sont dans la plupart des cas des lois larges (premier ou deuxième moment infini), qui nécessitent la version généralisée du théorème de la limite centrale.

L'effet de la dimensionnalité dans le refroidissement sub-recul apparaît très clairement. Quand D augmente :

- La distribution $P(\tau)$ des temps de piégeage devient plus étroite. En effet, $\mu = D/\alpha$. Il apparaît moins de longs temps de piégeage.
- En l'absence de murs en impulsion, la distribution $\hat{P}(\hat{\tau})$ des temps de sortie devient plus large quand D croît. En présence de murs en impulsion, $\hat{P}(\hat{\tau})$ est une loi étroite ($\langle \hat{\tau}^2 \rangle$ finie), quelle que soit la dimensionnalité. Cependant, la valeur moyenne $\langle \hat{\tau} \rangle$ croît rapidement, comme $(p_{\text{max}}/p_{\text{trap}})^D$.

Modèle physique	Forme mathématique	$P(\tau)$: distribution des temps de piégeage	μ : exposant
lien déterministe entre τ et p	$\Gamma'(p) = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha$ $P(\tau/p) \delta(\tau - 1/\Gamma'(p))$	$P(\tau) = \frac{D}{\alpha} \left(\frac{p_0}{p_{\text{trap}}} \right)^D \frac{\tau_0^{D/\alpha}}{\tau^{1+D/\alpha}}$	$\mu = D/\alpha$
loi exponentielle liant τ à p	$\Gamma'(p) = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha$ $P(\tau/p) = \Gamma'(p) e^{-\tau \Gamma'(p)}$	$P(\tau \rightarrow \infty) = \frac{D}{\alpha} \left(\frac{p_0}{p_{\text{trap}}} \right)^D \Gamma\left(\frac{D}{\alpha}\right) \frac{\tau_0^{D/\alpha}}{\tau^{1+D/\alpha}}$	$\mu = D/\alpha$
résonances noires 1D $\sigma^+ - \sigma^-$	$\Gamma'(p) = \frac{\Gamma_c}{2} \frac{p^2}{2p_{\text{Raman}}^2} = \Gamma_{\text{NC}}(p)$ $P(\tau/p) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_{\text{NC}}(p)}{2} e^{-\Gamma_{\text{NC}}(p)\tau}$	$P(\tau \rightarrow \infty) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{p_{\text{Raman}}}{p_{\text{trap}}} \frac{\Gamma_c^{-1/2}}{\tau^{1+1/2}}$	$\mu = 1/2$

Tableau V.3 Distribution $P(\tau)$ des temps de piégeage. Si $\Gamma(p \approx 0) \propto p^\alpha$, alors $P(\tau \rightarrow \infty)$ est une loi de puissance. L'exposant μ vaut D/α . Pour les résonances noires en dimension et configuration quelconque, $\alpha = 2$ est une hypothèse raisonnable, parfaitement compatible avec les cas particuliers où α est connu.

Modèle physique	Forme mathématique	$\hat{P}(\hat{\tau})$: distribution des temps de sortie	$\hat{\mu}$: exposant caractéristique
Murs en impulsion, fluorescence constante	$ p \leq p_{\max}$ $\Gamma(p) = 1/\tau_{\text{ext}}$	loi étroite $\langle \hat{\tau} \rangle \approx (p_{\max}/p_{\text{trap}})^D \tau_{\text{ext}}$	$\langle \hat{\tau} \rangle$ et $\langle \hat{\tau}^2 \rangle < \infty$
Pas de murs en impulsion, pas d'effet Doppler			
• 1D	$\Gamma(p) = 1/\tau_{\text{ext}}$	• $\hat{P}(\hat{\tau} \rightarrow \infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Delta p}{2\rho_{\text{trap}}} \frac{\sqrt{\tau_{\text{ext}}}}{\hat{\tau}^{3/2}}$	• $\hat{\mu} = 1/2$ $\langle \hat{\tau} \rangle = \infty, \langle \hat{\tau}^2 \rangle = \infty$
• 2D	$\Gamma(p) = 1/\tau_{\text{ext}}$	• $\hat{P}(\hat{\tau} \rightarrow \infty) = \frac{\hat{b}_{2D}}{\ln \hat{\tau}}$	• $\hat{\mu} = 0$ $\langle \hat{\tau} \rangle = \infty, \langle \hat{\tau}^2 \rangle = \infty$
• 3D	$\Gamma(p) = 1/\tau_{\text{ext}}$	• mal défini	• \hat{P} non normalisable $\langle \hat{\tau} \rangle = \infty, \langle \hat{\tau}^2 \rangle = \infty$
Pas de murs en impulsion, effet Doppler, (résonances noires 1D, $\sigma_+ - \sigma_-$, $\Omega_1 < \Gamma$)	$\Gamma(p \rightarrow \infty) = \Gamma \frac{\Omega_1^2/2}{(kp/M)^2}$	$\hat{P}(\hat{\tau} \rightarrow \infty) = \frac{\hat{b}_{\text{Dop}}}{\hat{\tau}^{5/4}}$	$\hat{\mu} = 1/4$

Tableau V.4 Distribution $\hat{P}(\hat{\tau})$ des temps de premier retour. Dans le cas des murs en impulsion, $\hat{P}(\hat{\tau})$ est toujours une loi étroite, quelle que soit la dimension. En l'absence de murs en impulsion, $\hat{P}(\hat{\tau})$ est toujours une loi large ($\langle \hat{\tau} \rangle = \infty$), d'autant plus large que la dimensionnalité croît.

3.5 Absence d'ergodicité

Dans plusieurs expressions de $P(\tau)$ et de $\hat{P}(\hat{\tau})$, il apparaît un exposant μ ou $\hat{\mu}$ plus petit que 1. Ceci a des conséquences importantes, que nous allons présenter sur le cas des résonances noires à une dimension pour lesquelles $\mu = 1/2$. Dans cette discussion qualitative, considérons uniquement les temps de piégeage (on pose $\hat{T} = 0$, c'est-à-dire que le temps passé hors du piège est négligé). Comme $\mu < 1$, d'après l'équation (V.14), le temps de piégeage le plus long, noté τ_{\max} , représente une fraction finie de θ , aussi long que soit θ :

$$\tau_{\max} \approx \theta \tag{V.112}$$

Par conséquent, pour un tel processus, l'hypothèse d'ergodicité ne peut pas être satisfaite. En effet, l'hypothèse ergodique affirme l'identité des moyennes temporelles effectuées en suivant une seule particule sur un temps suffisamment long, et des moyennes d'ensemble sur un grand nombre de particules à un instant donné. Pour que la moyenne temporelle ait un sens, il faut se placer sur une durée θ beaucoup plus grande que tous les temps caractéristiques du problème.

Or, dans notre problème, il existe un temps caractéristique, la durée τ_{\max} du piégeage le plus long, qui croît proportionnellement à θ (et qui est du même ordre

que θ). Le temps τ_{\max} n'est donc jamais négligeable devant θ , pour aussi long que θ puisse être. Les moyennes temporelles ne peuvent donc être égales aux moyennes d'ensemble : *la durée totale θ est toujours un des paramètres essentiels du problème.* On dit qu'il y a "brisure faible d'ergodicité" [Bou92] : au fur et à mesure que le temps total considéré croît, le système développe des temps caractéristiques de plus en plus longs, du même ordre que le temps total. Un tel comportement a été observé, par exemple, dans le vieillissement des verres de spin [Bou92].

Une image possible de la brisure d'ergodicité est la suivante : dans l'espace des phases accessible à la particule, il apparaît *des temps de piégeage arbitrairement longs, avec un poids non négligeable.* Au fur et à mesure que la particule explore l'espace des phases, sa diffusion est ralentie par les pièges de longue durée de vie, si ralentie que *la particule ne parvient pas à explorer l'espace des phases en un temps fini.* D'un point de vue complémentaire, *au bout d'un temps θ fini, il existe toujours dans l'espace des phases des zones inexplorées* (temps de piégeage $\gg \theta$), de poids non négligeable, significativement différentes des zones que la particule a eu le temps d'explorer.

L'absence d'ergodicité a des conséquences immédiates :

- *Absence de régime stationnaire.* Quand la durée croît, les distributions en impulsion continuent à évoluer significativement et ne convergent pas vers autre chose que des distributions singulières (distributions de Dirac, distributions non normalisables...). Ceci doit être relié à l'absence de limites dans le refroidissement par résonances noires. Noter que l'on peut avoir, pour un processus donné, simultanément existence d'un régime stationnaire pour certaines quantités physiques, et absence de régime stationnaire pour d'autres grandeurs. Ainsi, dans les cas $\mu = \hat{\mu} < 1$, on verra que la population piégée tend vers un régime stationnaire, mais pas la distribution en impulsion.

- Le calcul semi-quantitatif de 1988 [AAK89] (cf. § I.2.2.2, équation (I.23)) pour la largeur en impulsion δp_θ atteinte par résonances noires est justifié. Nous avons remarqué (§ I.3.1) que, paradoxalement, ce calcul ne considère qu'un seul événement de piégeage et suppose que celui-ci avait une durée de l'ordre de θ , le temps total. On négligeait donc les contributions au temps total de tous les autres événements de piégeage et de toutes les sorties du piège, ce qui paraissait étrange. L'approche vols de Lévy montre qu'effectivement, on peut négliger les autres événements de piégeage (cf. équation (V.112)) [29]. Le calcul de 1988 reposait donc sur une intuition correcte des temps pertinents, faisant intervenir implicitement un résultat typique des statistiques de Lévy !

[Bou92] J.P. Bouchaud, *Weak ergodicity breaking and aging in disordered systems*, J. Phys. I France 2, p. 1705-1713 (1992).

[29] Pour ce qui est des temps de sortie, on ne peut pas les négliger. Mais, dans le cas $\hat{\mu} = 1/2$, leur contribution est de l'ordre de celle des temps de piégeage et la relation (V.112) reste vraie. Dans le cas $\hat{\mu} = 1/4$, les temps de sortie se mettent à dominer les temps de piégeage, mais à une échelle de temps si longue que, pour les durées d'interaction relativement courtes envisagées en 1988, on peut toujours considérer l'équation (V.112) comme correcte.

• Dans les simulations Monte-Carlo, les moyennes d'ensemble sont les seules pertinentes pour calculer les distributions atomiques à un instant donné. Ainsi, nous avons fait évoluer N fonctions d'onde sur une durée θ et nous avons tracé les distributions à θ donné. Les moyennes temporelles n'auraient ici aucun sens utilisable.

Plus loin dans ce chapitre (§ V.4.3), on définira une "loi d'arrosage temporel", qui caractérise quantitativement l'absence d'ergodicité. Cette loi d'arrosage montrera que l'absence d'ergodicité se traduit par une absence d'invariance par translation dans le temps pour le processus étudié.

4 Evolution de la population piégée

4.1 Discussion qualitative

Pour estimer l'efficacité du processus de refroidissement, on définit la population piégée $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ comme la proportion d'atomes ayant une impulsion p de module inférieur à p_{trap} [30] :

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \equiv P(|p| < p_{\text{trap}}) \quad (\text{V.113})$$

Cette définition ne prend pas en compte la finesse de la distribution en impulsion $\pi(p, \theta)$ (cf. § V.5), qui peut avoir une demi-largeur δp_θ quelconque par rapport à p_{trap} . Pour tenir compte de δp_θ , on introduira la notion de "population refroidie" (cf. § V.6).

Le calcul des largeurs des distributions $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$ permet de prévoir l'évolution de $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ quand $\theta \rightarrow \infty$. Considérons les cas où $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$ sont des lois de puissance d'exposants μ et $\hat{\mu}$ bien définis (cf. équation (V.111)). D'après (V.14), le temps total passé dans le piège, noté T_N , et le temps total passé hors du piège \hat{T}_N se comportent de la manière suivante :

$$T_N \sim N^{1/\mu} \text{ si } \mu < 1; \quad T_N \sim N \langle \tau \rangle \text{ si } \mu > 1 \quad (\text{V.114.a})$$

$$\hat{T}_N \sim N^{1/\hat{\mu}} \text{ si } \hat{\mu} < 1; \quad \hat{T}_N \sim N \langle \hat{\tau} \rangle \text{ si } \hat{\mu} > 1 \quad (\text{V.114.b})$$

Pour cette discussion qualitative, restreignons-nous aux cas où :

$$\mu, \hat{\mu} < 1 \quad (\text{V.115})$$

• Si $\mu < \hat{\mu}$, c'est-à-dire si la loi des temps de piégeage est plus large que la loi des temps de sortie, on aura, dans la limite $N \rightarrow \infty$:

$$T_N \sim N^{1/\mu} \gg \hat{T}_N \sim N^{1/\hat{\mu}} \quad (\text{V.116})$$

D'où on tire :

$$\theta = T_N + \hat{T}_N \approx T_N \quad (\text{V.117})$$

Ceci signifie que les atomes passent l'essentiel du temps dans le piège, d'où

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} 1 \quad (\text{V.118})$$

[30] Rappelons que p est ici l'indice d'impulsion des familles, et non l'impulsion atomique.

• Inversement, dans le cas $\mu < \hat{\mu}$, on a

$$T_N < \hat{T}_N \tag{V.119}$$

d'où

$$\theta \approx \hat{T}_N \tag{V.120}$$

ce qui signifie que les atomes passent l'essentiel du temps hors du piège, d'où

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} 0 \tag{V.121}$$

Le problème du remplissage du piège est donc un problème de partage du temps total θ entre l'intérieur et l'extérieur du piège : les deux sommes T_N et \hat{T}_N "se disputent" le temps total et c'est la somme correspondant à la distribution la plus large qui l'emporte [31]. En paraphrasant Darwin à propos de la sélection naturelle, on peut résumer la problématique du piégeage par :

"Struggle for time and survival of the broadest distribution".

Dans ce paragraphe V.4, nous allons calculer précisément la population piégée $f(p_{\text{trap}}, \theta)$. Ce calcul est assez "élaboré" et cela s'avère nécessaire. Outre qu'il donne un résultat correct, ce calcul introduit le concept de "distribution de l'arrosage temporel" (§ V.4.3), intéressant par rapport aux vols de Lévy en général.

4.2 Calcul de la population piégée : mise en forme

On pourrait croire que la proportion d'atomes piégés est proportionnelle au temps passé dans le piège. La population f serait alors simplement donnée par :

$$f \approx \frac{T}{T + \hat{T}} = \frac{T}{\theta} \tag{V.122}$$

Cette expression serait très simple à calculer à partir des distributions $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$. Mais, la relation $f \propto T$ est typique d'une situation ergodique (probabilité d'occupation d'un état proportionnelle à la durée de vie de cet état). En l'absence d'ergodicité (cf. § V.3.5), une telle expression doit être remise en cause.

En d'autres termes, T est la somme des durées τ de piégeage entre $t = 0$ et $t = \theta$. La quantité T/θ est donc la population \bar{f} du piège, moyenné temporellement entre $t = 0$ et $t = \theta$. Or, $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ est la population du piège à la date θ . En l'absence d'état stationnaire, \bar{f} et $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ n'ont donc aucune raison d'être identiques, ce que va confirmer le calcul ci-dessous.

On calcule correctement la population piégée en faisant le raisonnement suivant (figure V.17) : un atome piégé à la date θ est un atome qui est tombé dans le piège à une date $(\theta - \tau)$, avec $0 \leq \tau \leq \theta$, et qui y est resté piégé au moins jusqu'à la date θ [32]. Ceci se traduit par

[31] Jean-Philippe Bouchaud parle de "Lévy fight".

[32] C'est-à-dire que la durée du piégeage est supérieure ou égale à τ .

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) = \int_0^\theta d\tau A(\theta - \tau) \psi(\tau) \tag{V.123}$$

où $A(\theta - \tau)d\tau$ est la probabilité d'être tombé dans le piège entre la date $(\theta - \tau)$ et la date $(\theta - \tau + d\tau)$. On appelle $A(t)$ "loi d'arrosage temporel". La loi $\psi(\tau)$ est la probabilité de rester dans le piège une durée supérieure ou égale à τ [33].

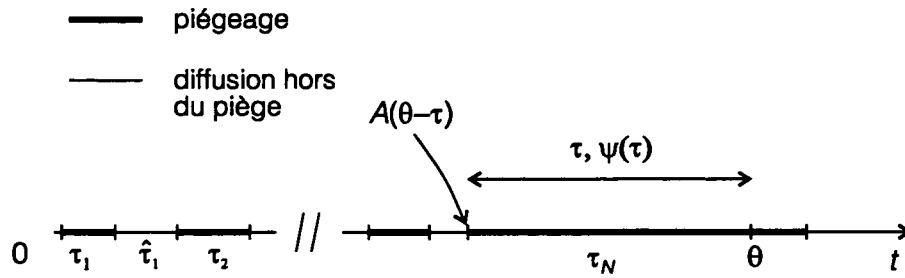


Figure V.17 Calcul de la population piégée. On introduit la date $\theta - \tau$ du début du dernier événement de piégeage. Le calcul de la distribution de la population piégée se ramène au calcul des deux distributions $A(\theta - \tau)$ et $\psi(\tau)$. La distribution $A(\theta - \tau)$ est la probabilité de tomber dans le piège à la date $\theta - \tau$ ("loi d'arrosage"). La distribution $\psi(\tau)$ est la probabilité que le dernier événement de piégeage soit de durée supérieure ou égale à τ .

La probabilité $\psi(\tau)$ qu'un atome tombant dans le piège y reste un temps supérieur ou égal τ est simplement

$$\psi(\tau) = \int_\tau^\infty P(\tau') d\tau' \tag{V.124}$$

Pour tous les modèles considérés (cf. tableau V.1), $P(\tau)$ était asymptotiquement une loi de puissance de la forme (V.111.a), de sorte que l'on a :

$$\psi(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu} \frac{b}{\tau^\mu} \tag{V.125}$$

En particulier, pour les résonances noires à une dimension, on a :

$$\psi(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \sqrt{\pi} \frac{P_{\text{Raman}}}{P_{\text{trap}}} \frac{\Gamma_C^{-1/2}}{\tau^{1/2}} \tag{V.126}$$

[33] $A(t)$ est un taux. $\psi(t)$ est une probabilité ($0 \leq \psi(t) \leq 1$).

4.3 Loi d'arrosage temporel

4.3.1 Equation générale

La loi d'arrosage des événements de piégeage est la densité de probabilité $A(t)$ de tomber dans le piège à la date t , au bout d'un nombre N quelconque de sorties. Elle s'écrit donc [34], [35] :

$$A(t) = \sum_{N=1}^{\infty} \int d\tau_1 \dots d\tau_N d\hat{\tau}_1 \dots d\hat{\tau}_N P(\tau_1) \hat{P}(\hat{\tau}_1) \dots P(\tau_N) \hat{P}(\hat{\tau}_N) \delta\left(\sum_{i=1}^N (\tau_i + \hat{\tau}_i) - t\right) \quad (V.127)$$

Par définition de la somme de Lévy T_N , on a :

$$P(T_N) = \int d\tau_1 \dots d\tau_N P(\tau_1) \dots P(\tau_N) \delta\left(\sum_{i=1}^N \tau_i - T_N\right) \quad (V.128)$$

et une équation semblable s'obtient pour $P(\hat{T}_N)$. On a donc

$$A(t) = \sum_{N=1}^{\infty} \int dT_N d\hat{T}_N P(T_N) P(\hat{T}_N) \delta(T_N + \hat{T}_N - t) \quad (V.129)$$

Par ailleurs, d'après les équations (V.12) et (V.13), on a [36] :

$$P(T_N) = \frac{1}{N^{1/\mu}} L_{\mu}^B\left(\frac{T_N}{N^{1/\mu}}\right) \quad (V.130)$$

et une équation semblable s'obtient pour $P(\hat{T}_N)$. On en déduit :

$$A(t) = \sum_{N=1}^{\infty} \int du \frac{1}{N^{1/\mu}} \frac{1}{N^{1/\hat{\mu}}} L_{\mu}^B\left(\frac{u}{N^{1/\mu}}\right) L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}}\left(\frac{t-u}{N^{1/\hat{\mu}}}\right) \quad (V.131)$$

Les intégrales sous le signe Σ ressemblent à des produits de convolution des lois de Lévy $L_{\mu}^B(u/N^{1/\mu})$ et $L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}}(u/N^{1/\hat{\mu}})$ [37], et on s'attend intuitivement à ce que ces intégrales "ressemblent" elles-mêmes à des lois de Lévy.

Avant de calculer $A(t)$ dans le cas de l'équation (V.131), il est intéressant de traiter le cas simplifié où $A(t)$ est une somme de simples lois de Lévy et non d'un "pseudo-produit de convolution". Ceci sera utile à la fois pour les calculs qui vont suivre et pour la compréhension des vols de Lévy.

4.3.2 Lois d'arrosage pour une distribution de Lévy

Considérons le processus aléatoire suivant : une particule effectue des sauts à des dates τ aléatoires données par une loi $P(\tau)$ du type (V.10) [38]. Le premier saut a lieu à

- [34] Pour simplifier les notations, on omet dans $A(t)$ un coefficient de normalisation.
- [35] On suppose que l'atome est initialement dans le piège.
- [36] Dans ce qui suit, on donne les expressions de L_{μ}^B pour $\mu < 1$. Si $1 < \mu < 2$, il faut remplacer les termes du type $u/N^{1/\mu}$ par des termes $(u - N(\tau))/N^{1/\mu}$ (cf. (V.12)).
- [37] On n'a un vrai produit de convolution que lorsque $\mu = \hat{\mu}$.
- [38] On pourrait considérer des sauts de longueur l dans l'espace réel, ou toute autre variable aléatoire. Le caractère temporel de t n'a ici aucune importance. Ce qu'on décrit ici est une propriété géométrique des "randonnées de Lévy".

la date $t = 0$. On cherche la probabilité $A(t)$ qu'un saut quelconque, c'est-à-dire quel que soit son numéro, ait lieu à la date t . La loi $A(t)$ est donnée par

$$A(t) = \sum_{N=1}^{\infty} \int d\tau_1 \dots d\tau_N P(\tau_1) \dots P(\tau_N) \delta\left(\left(\sum_{i=1}^N \tau_i\right) - t\right) \quad (\text{V.132})$$

soit

$$A(t) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{1/\mu}} L_{\mu}^B(Z_N), \quad \text{avec } Z_N = \frac{t}{N^{1/\mu}} \quad (\text{V.133})$$

La loi $A(t)$ a un sens physique important : elle donne la *distribution statistique sur l'axe des temps des sommes T_N de l'ensemble R* , avec :

$$R = \left\{ T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i, N = 1 \dots \infty \right\}, \quad \text{avec } P(\tau) \sim b/\tau^{1+\mu}, \quad (\text{V.134})$$

d'où le terme de "loi d'arrosage temporel". Dans le vocabulaire des marches aléatoires, R est l'ensemble des points où la particule brownienne subit une collision. L'ensemble R est aussi ce que Mandelbrot [Man89] appelle une "*randomnée brownienne*".

Nous allons calculer $A(t)$ dans le cas d'une loi $P(\tau)$ asymétrique, définie sur $[0, +\infty[$ ($\beta = 1$) en distinguant les cas $\mu < 1$ et $\mu > 1$. Comme on s'intéresse à la limite $t \rightarrow \infty$, on remplace la somme discrète par une intégrale :

$$A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_{N=1}^{\infty} \frac{dN}{N^{1/\mu}} L_{\mu}^B\left(\frac{t}{N^{1/\mu}}\right) \quad (\text{V.135})$$

• **Cas $0 < \mu < 1$:**

On change de variable en posant

$$u = t/N^{1/\mu} \quad (\text{V.136})$$

L'équation (V.135) devient [39]

$$A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mu t^{\mu-1} \int_0^t \frac{du}{u^{\mu}} L_{\mu}^B(u) \quad (\text{V.137})$$

L'intégrale représente le moment d'ordre $(-\mu)$ de L_{μ} , donné par l'équation (B.30) de [BoG90] :

$$\langle u^{-\mu} \rangle = \frac{1}{B' \mu \Gamma(\mu)} \quad (\text{V.138})$$

où $B' = B/\cos(\pi\mu/2)$ (cf. équation (V.28)). On en tire $A(t)$:

$$A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{B' \Gamma(\mu)} \frac{1}{t^{1-\mu}} \quad (\text{V.139})$$

[Man89] B. Mandelbrot, *Les objets fractals*, 3^e édition, Flammarion, Paris (1989). Voir en particulier les chapitres VI et VII.

[39] Cette intégrale ne diverge pas en 0, comme on peut le vérifier avec l'expression de $L_{\mu}^B(u \approx 0)$ (équation (V.30) et figure V.6).

[BoG90] J.-P. Bouchaud and A. Georges, *Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications*, Phys. Rep. **195**, p. 127-293 (1990).

Cette équation est une propriété importante des vols de Lévy. Le fait que $A(t)$ diminue quand t croît, signifie qu'il se produit moins d'événements aux temps longs qu'aux temps courts. Par conséquent, il n'y a pas d'invariance par translation dans le temps. On peut aussi dire que le processus a une "histoire" : en mesurant $A(t)$ à un instant donné, on peut déduire à quelle date le processus a commencé. Ceci est une façon de caractériser la brisure faible d'ergodicité.

Remarquons que $A(t)$ décroît très lentement, plus lentement encore que $L_\mu^B(t)$ (puisque $\mu > 0 \Rightarrow (1 - \mu) < (1 + \mu)$). En effet, en passant de $L_\mu^B(t)$ à $A(t)$, on somme les distributions des temps $T_1, T_2, \dots, T_N, \dots$, ce qui donne une distribution $A(t)$ plus large que $L_\mu^B(t)$ (figure V.18). Le fait important est que $A(t)$, bien que très large, n'est pas une loi uniforme (à l'opposé du cas $\mu > 1$ étudié ci-dessous). La loi $A(t)$ n'est pas normalisable.

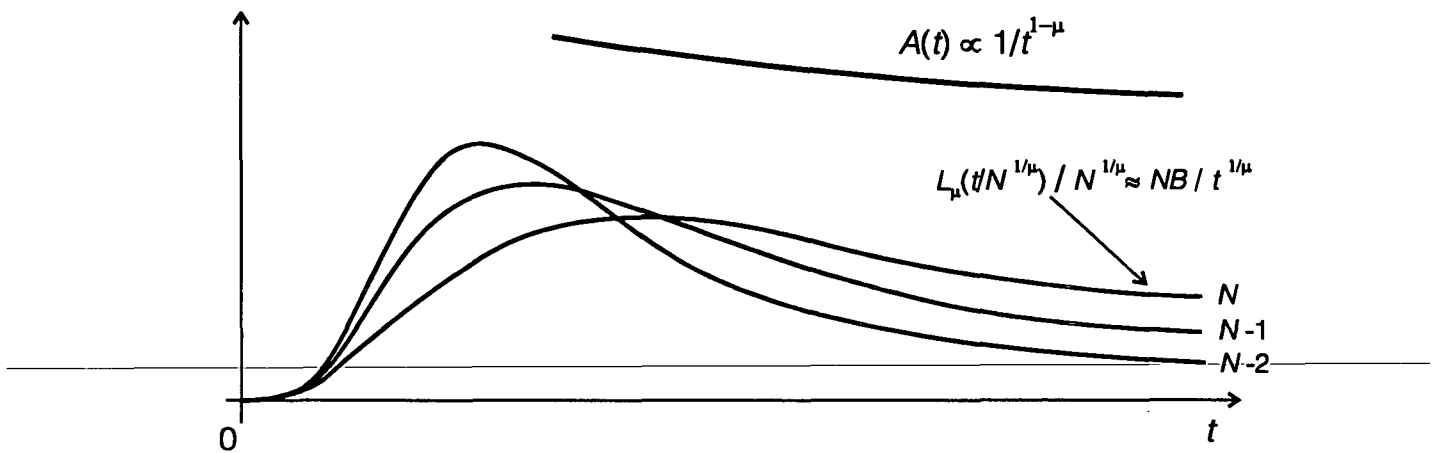


Figure V.18 Construction de la loi d'arrosage $A(t)$ dans les cas $\mu < 1$. La loi $A(t)$ est une somme de lois de Lévy $\frac{1}{N^{1/\mu}} L_\mu^B(t / N^{1/\mu})$ ($N = 1, 2, \dots$). La loi $A(t)$ décroît vers 0 quand $t \rightarrow \infty$. Ainsi, il se produit de moins en moins d'événements aux temps longs : un processus régi par de telles lois de probabilité a une "histoire".

Remarque :

L'équation (V.139) rappelle une situation analogue en algèbre : \mathbf{N} , l'ensemble des entiers naturels, est en bijection avec \mathbf{S} , l'ensemble des carrés des entiers :

$$\mathbf{S} \equiv \{n^2, n \in \mathbf{N}\} \tag{V.140}$$

Au sens de Cantor, ceci signifie que \mathbf{N} et \mathbf{S} ont le même cardinal \aleph_0 . Or, que \mathbf{N} et \mathbf{S} puissent avoir le même nombre d'éléments va contre l'intuition : en effet, dans le domaine $n \rightarrow \infty$, \mathbf{S} recouvre \mathbf{N} de manière infiniment lacunaire.

Avec les vols de Lévy, on a une situation semblable : la propriété

$$A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \tag{V.141}$$

implique que R recouvre l'axe des temps de façon de plus en plus lacunaire dans le domaine $t \rightarrow \infty$.

Les phénomènes habituels correspondent à

$$A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} c, \quad c > 0 \tag{V.142}$$

ou de manière plus générale à

$$\langle A(t) \rangle_{\Delta t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} c, \quad c > 0 \quad (\text{V.143})$$

où $\langle \rangle_{\Delta t}$ désigne une moyenne effectuée sur un intervalle de temps de largeur Δt plus grande que la plus grande échelle de temps du problème.

• Cas $1 < \mu < 2$ [40]

Dans ce cas, la loi $A(t)$ s'écrit :

$$A(t) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{1/\mu}} L_{\mu}^B \left(\frac{t - N\langle \tau \rangle}{N^{1/\mu}} \right) \quad (\text{V.144})$$

expression que l'on transforme en une intégrale :

$$A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \frac{dN}{N^{1/\mu}} L_{\mu}^B \left(\frac{t - N\langle \tau \rangle}{N^{1/\mu}} \right) \quad (\text{V.145})$$

On change de variable en introduisant u par :

$$N = ut^{1/\mu} + t/\langle \tau \rangle \quad (\text{V.146})$$

On a alors

$$A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_{\substack{\langle \tau \rangle - t \\ t^{1/\mu} < \langle \tau \rangle}}^{\infty} du \frac{t^{1/\mu}}{(ut^{1/\mu} + t/\langle \tau \rangle)^{1/\mu}} L_{\mu}^B \left(-ut^{1/\mu} \langle \tau \rangle / (ut^{1/\mu} + t/\langle \tau \rangle)^{1/\mu} \right) \quad (\text{V.147})$$

On peut simplifier considérablement cette intégrale. En effet, les lois de Lévy $L_{\mu}^B(u)$ décroissent très rapidement en dehors de l'intervalle $[-B^{1/\mu}; +B^{1/\mu}]$. Par conséquent, les valeurs de N contribuant significativement à l'intégrale (V.145) vérifient en ordre de grandeur :

$$-B^{1/\mu} \leq \frac{t - N\langle \tau \rangle}{N^{1/\mu}} \leq B^{1/\mu} \quad (\text{V.148})$$

En exprimant $(t - N\langle \tau \rangle)$ en fonction de u grâce à la relation (V.146), on obtient :

$$-B^{1/\mu} \leq \frac{-u\langle \tau \rangle t^{1/\mu}}{N^{1/\mu}} \leq B^{1/\mu} \quad (\text{V.149})$$

d'où

$$|u\langle \tau \rangle t^{1/\mu} \leq B^{1/\mu} N^{1/\mu} \quad (\text{V.150})$$

Or, il est évident que $A(t)$ pour t grand est déterminé par les sommes correspondant à un grand nombre N de sauts, i.e. $N \gg 1$. Comme $\mu < 1$, on a : ou de manière plus générale à

$$N^{1/\mu} \ll N \quad (\text{V.151})$$

Les relations (V.150) et (V.151) impliquent :

$$|u\langle \tau \rangle t^{1/\mu} \ll B^{1/\mu} N \quad (\text{V.152})$$

Comme $t \approx N\langle \tau \rangle$, on en déduit

$$|u| t^{1/\mu} \ll \frac{B^{1/\mu}}{\langle \tau \rangle} \frac{t}{\langle \tau \rangle} \quad (\text{V.153})$$

Par ailleurs, supposons que la loi $P(\tau) = b/\tau^{1+\mu}$ soit définie sur $[\gamma; +\infty[$. On a alors $b = \mu\gamma^{\mu}$ (cf. § V.2.3.3). La valeur moyenne $\langle \tau \rangle$ étant nécessairement supérieure à γ , on a donc

$$\frac{B^{1/\mu}}{\langle \tau \rangle} < \frac{(\mu \gamma^\mu)^{1/\mu}}{\gamma} = \mu^{1/\mu} < 2^{1/2} \tag{V.154}$$

car $\mu < 2$. En introduisant (V.154) dans (V.153), on a finalement

$$|u| t^{1/\mu} \ll \frac{t}{\langle \tau \rangle} \tag{V.155}$$

On remplace donc

$$ut^{1/\mu} + t/\langle \tau \rangle \text{ par } t/\langle \tau \rangle \tag{V.156}$$

dans (V.147), ce qui donne :

$$A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} du < \tau >^{1/\mu} L_\mu^B(-u \langle \tau \rangle^{1+1/\mu}) \tag{V.157}$$

puisque, dans la limite $t \rightarrow \infty$, la borne inférieure de l'intégrale de (V.147) tend vers $-\infty$. En posant $v = u \langle \tau \rangle^{1+1/\mu}$, on obtient

$$A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\langle \tau \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} dv L_\mu^B(v) \tag{V.158}$$

d'où, comme les lois de Lévy sont normalisées,

$$\boxed{A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\langle \tau \rangle}} \tag{V.159}$$

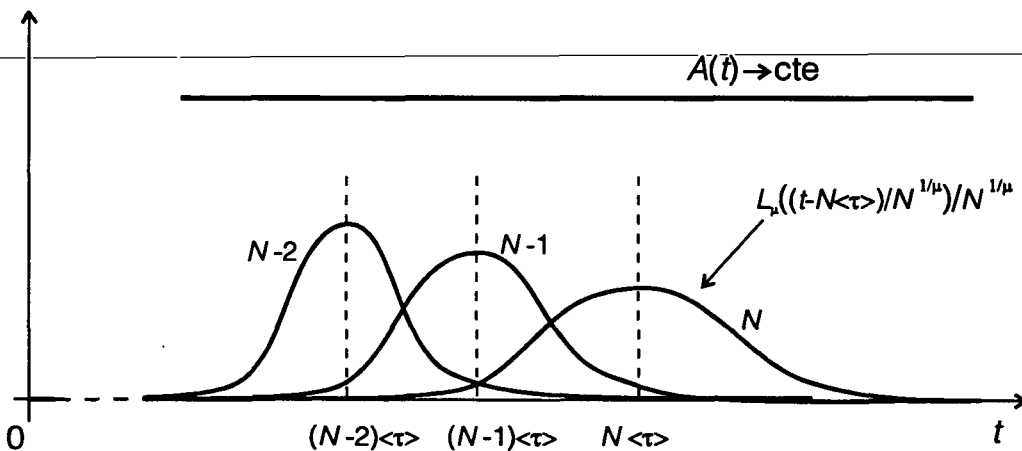


Figure V.19 Construction de la loi d'arrosage $A(t)$ dans les cas $\mu > 1$. La loi $A(t)$ est

une somme de lois de Lévy $\frac{1}{N^{1/\mu}} L_\mu^B\left(\frac{t - N \langle \tau \rangle}{N^{1/\mu}}\right)$ ($N = 1, 2, \dots$). Ces fonctions tombent

rapidement à 0, sur un intervalle de largeur $(BN)^{1/\mu}$. Quand N croît, elles s'élargissent et leur hauteur diminue (normalisation). La somme $A(t)$ de ces fonctions tend vers une constante dans le régime $t \rightarrow \infty$. La distribution des événements est uniforme aux temps longs, ce qui est la situation habituelle : un processus régi par de telles lois de probabilité n'a pas d'"histoire".

Ainsi, dans le régime $\mu > 1$, pour lequel $\langle \tau \rangle < \infty$, mais $\langle \tau^2 \rangle \rightarrow \infty$, la loi d'arrosage est une loi uniforme, indépendante du temps [41] (figure V.19). On retrouve là une situation habituelle : la distribution des positions occupées par une particule brownienne normale, au bout d'un nombre infini de sauts, est uniforme. Etant uniforme, $A(t)$ est indépendant de l'origine de la particule. La loi $A(t)$ n'a pas d'histoire : de la mesure de $A(t)$ à un instant donné, on ne peut pas déduire la date de départ de la marche aléatoire.

4.3.3 Loi d'arrosage des dates de piégeage

Revenons au problème du calcul de la loi d'arrosage $A(t)$ des événements de piégeage. Il existe plus d'une dizaine de types de couples $(\mu, \hat{\mu})$, selon les valeurs de μ ($0 < \mu < 1$, $\mu = 1$, $1 < \mu < 2$, $\mu = 2$, $P(\tau)$ loi étroite quelconque) et selon les valeurs de $\hat{\mu}$ (mêmes distinctions), et selon que μ et $\hat{\mu}$ sont égaux ou non. Nous traitons ci-dessous les cas non marginaux (*i.e.* $\mu, \hat{\mu} \neq 1$ et $\mu, \hat{\mu} \neq 2$).

4.3.3.1 Cas $\mu = \hat{\mu}$

Traisons d'abord le cas $0 < \mu < 1$.

Dans ce cas, $A(t)$ est une somme de produits de convolution de lois de Lévy. En posant $v = u/N^{1/\mu}$, l'équation (V.131) devient

$$A(t) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{1/\mu}} \int dv L_{\mu}^B(v) L_{\mu}^{\hat{B}}\left(\frac{t}{N^{1/\mu}} - v\right) \quad (\text{V.160})$$

Or, le produit de convolution de deux lois de Lévy de même paramètre μ est encore une loi de Lévy de paramètre μ [42]:

$$L_{\mu}^B \otimes L_{\mu}^{\hat{B}} = L_{\mu}^{B+\hat{B}} \quad (\text{V.161})$$

La loi $A(t)$ est donc :

$$A(t) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N^{1/\mu}} L_{\mu}^{B+\hat{B}}\left(\frac{t}{N^{1/\mu}}\right) \quad (\text{V.162})$$

On retrouve le cas de la loi d'arrosage d'une simple loi de Lévy, traité au paragraphe V.4.3.2.

$0 < \mu < 1 : \quad A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(B'+\hat{B}')\Gamma(\mu)} \frac{1}{t^{1-\mu}} \quad (\text{V.163.a})$

Traisons maintenant le cas $1 < \mu < 2$.

Dans ce cas, $A(t)$ s'écrit :

[41] On admettra que ce résultat est *a fortiori* valable dans le cas des lois normales ($\langle x \rangle^2 < \infty$), pourvu toutefois que $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \neq 0$.

[42] Ce résultat s'obtient aisément en prenant la transformée de Laplace du produit de convolution et en utilisant l'équation (V.27) qui exprime les lois de Lévy avec $\beta = \pm 1$ sous la forme d'une transformée de Laplace inverse.

$$A(t) = \sum_{N=1}^{\infty} \int du \frac{1}{N^{1/\mu}} \frac{1}{N^{1/\mu}} L_{\mu}^B \left(\frac{u - N \langle \tau \rangle}{N^{1/\mu}} \right) L_{\mu}^{\hat{B}} \left(\frac{t - u - N \langle \hat{\tau} \rangle}{N^{1/\mu}} \right) \quad (V.164)$$

On pose alors $v = (u - N \langle \tau \rangle) / N^{1/\mu}$, ce qui donne :

$$A(t) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{1/\mu}} \int du L_{\mu}^B(v) L_{\mu}^{\hat{B}} \left(\frac{t - N(\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle) - v}{N^{1/\mu}} \right) \quad (V.165)$$

On reconnaît le produit de convolution de deux lois de Lévy de même exposant qui, comme dans le cas $0 < \mu < 1$, est une loi de Lévy :

$$A(t) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{1/\mu}} L_{\mu}^{B+\hat{B}} \left(\frac{t - N(\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle)}{N^{1/\mu}} \right) \quad (V.166)$$

Cette expression représente la loi d'arrosage d'une loi de Lévy d'exposant μ , de paramètre $B + \hat{B}$, et de valeur moyenne $\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle$. D'après les résultats du paragraphe § V.4.3.2, on a donc

$$1 < \mu < 2 : \quad A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \quad (V.167)$$

4.3.3.2 Cas $\hat{\mu} < \mu < 1$ et cas $\mu < \hat{\mu} < 1$

Plaçons-nous, par exemple, dans le cas où $\hat{\mu} < \mu$, c'est-à-dire dans le cas où la loi des temps de sortie est plus large que celle des temps de retour. On va faire ici un calcul de $A(t)$ dans le régime $t \rightarrow \infty$, en développant $A(t)$ en puissances de t . Reprenons l'équation (V.131), en remarquant que les bornes d'intégration sur u sont telles que u et $t - u$ sont positifs (τ et $\hat{\tau}$ sont des quantités positives) :

$$A(t) = \sum_{N=1}^{\infty} \int_0^t du \frac{1}{N^{1/\mu}} \frac{1}{N^{1/\hat{\mu}}} L_{\mu}^B \left(\frac{u}{N^{1/\mu}} \right) L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}} \left(\frac{t - u}{N^{1/\hat{\mu}}} \right) \quad (V.168)$$

Le régime $t \rightarrow \infty$ de $A(t)$ est dominé par les termes correspondant à un grand nombre N de termes des sommes T_N et \hat{T}_N . Or, pour N grand, comme $\hat{\mu} < \mu$, on a :

$$N^{1/\hat{\mu}} \gg N^{1/\mu} \quad (V.169)$$

Par conséquent, les lois $L_{\mu}^B(u/N^{1/\mu})$ et $L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}}((t-u)/N^{1/\hat{\mu}})$ ont l'allure représentée sur la figure V.20. On voit que le recouvrement de ces deux lois se fait pour $u \ll t$. On peut donc effectuer le développement suivant à u petit :

$$L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}} \left(\frac{t - u}{N^{1/\hat{\mu}}} \right) \approx L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}} \left(\frac{t}{N^{1/\hat{\mu}}} \right) - \frac{u}{N^{1/\hat{\mu}}} \left(\frac{d}{dv} L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}}(v) \right)_{v=t/N^{1/\hat{\mu}}} \quad (V.170)$$

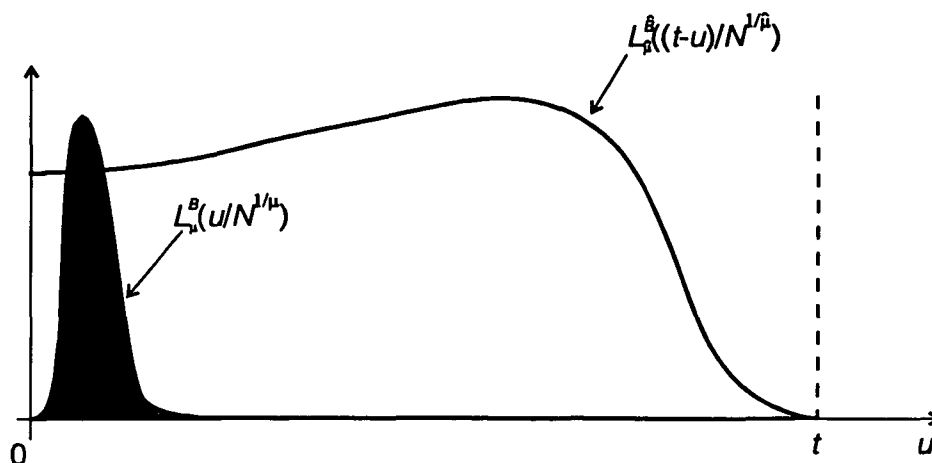


Figure V.20 Calcul de la loi d'arrosage dans le cas $\hat{\mu} \neq \mu$, $\hat{\mu} < \mu$. Les deux fonctions à convoluer ne se recouvrent que pour $u \ll t$.

On en déduit que $A(t)$ s'écrit :

$$A(t) \approx A_0(t) + A_1(t) \quad (\text{V.171})$$

où $A_0(t)$ est le terme principal :

$$A_0(t) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{1/\hat{\mu}}} L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}}\left(\frac{t}{N^{1/\hat{\mu}}}\right) \int_0^t du \frac{1}{N^{1/\mu}} L_{\mu}^B\left(\frac{u}{N^{1/\mu}}\right) \quad (\text{V.172})$$

et où $A_1(t)$ est le terme correctif :

$$A_1(t) = - \sum_{N=1}^{\infty} \frac{J_N}{N^{1/\mu} N^{2/\hat{\mu}}} \left(\frac{d}{dv} L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}}(v) \right)_{v=t/N^{1/\hat{\mu}}} \quad (\text{V.173})$$

avec

$$J_N = \int_{u=0}^{u=t} u L_{\mu}^B\left(\frac{u}{N^{1/\mu}}\right) du \quad (\text{V.174})$$

Calculons tout d'abord $A_0(t)$. L'intégrale dans (V.172) peut se récrire en tenant compte de la relation de normalisation des lois de Lévy, et en posant $v = u / N^{1/\mu}$:

$$I = \int_0^t du \frac{1}{N^{1/\mu}} L_{\mu}^B\left(\frac{u}{N^{1/\mu}}\right) = 1 - \int_t^{\infty} dv L_{\mu}^B(v) \quad (\text{V.175})$$

En tenant compte du développement en $u \rightarrow \infty$ de $L_{\mu}^B(u)$ donné par l'équation (V.29), on obtient

$$I = 1 - \frac{2\Gamma(\mu)}{\pi} \sin(\pi\mu/2) \frac{B}{t^{\mu}} \quad (\text{V.176})$$

On a donc

$$A_0(t) = \left[1 - \frac{2\Gamma(\mu)}{\pi} \sin(\pi\mu/2) \frac{B}{t^{\mu}} \right] \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{1/\hat{\mu}}} L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}}\left(\frac{t}{N^{1/\hat{\mu}}}\right) \quad (\text{V.177})$$

Dans l'équation ci-dessus, la somme correspond à la loi d'arrosage d'une distribution de Lévy d'exposant $\hat{\mu} < 1$. On peut donc lui appliquer le résultat (V.139), pour obtenir :

$$A_0(t) = \frac{1}{\hat{B}^\mu \Gamma(\hat{\mu})} \frac{1}{t^{1-\hat{\mu}}} \left[1 - \frac{2\Gamma(\mu)}{\pi} \sin(\pi\mu/2) \frac{B}{t^\mu} \right] \quad (\text{V.178})$$

Calculons maintenant $A_1(t)$, en commençant par estimer les intégrales J_N . Ces intégrales divergent lorsque $t \rightarrow \infty$, ce qui signifie qu'elles sont dominées par leur comportement à grand u . Pour les estimer, on peut donc prendre le développement asymptotique des lois de Lévy :

$$L_\mu^B(u/N^{1/\mu}) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} b / (u/N^{1/\mu})^{1+\mu} \quad (\text{V.179})$$

On en déduit :

$$J_N \approx b \frac{N^{1+1/\mu}}{1-\mu} t^{1-\mu} \quad (\text{V.180})$$

On obtient donc

$$A_1(t) = -\frac{bt^{1-\mu}}{1-\mu} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{N}{N^{2/\hat{\mu}}} \left(\frac{d}{dv} L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}}(v) \right)_{v=t/N^{1/\hat{\mu}}} \quad (\text{V.181})$$

On remplace la somme discrète par une intégrale :

$$A_1(t) = -\frac{bt^{1-\mu}}{1-\mu} \int_{N=1}^{\infty} dN N^{1-2/\hat{\mu}} \left(\frac{d}{dv} L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}}(v) \right)_{v=t/N^{1/\hat{\mu}}} \quad (\text{V.182})$$

En passant à la variable $v = t/N^{1/\hat{\mu}}$, l'équation (V.182) devient :

$$A_1(t) = t^{2\hat{\mu}-\mu-1} \frac{b\hat{\mu}}{1-\mu} K \quad (\text{V.183})$$

où

$$K = - \int_0^t \frac{dv}{v^{2\hat{\mu}-1}} \frac{d}{dv} L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}}(v) \quad (\text{V.184})$$

En conservant dans (V.183) uniquement le terme d'ordre le plus faible en t , on peut considérer que l'intégration de K est faite de zéro à l'infini :

$$K \approx - \int_0^{\infty} \frac{dv}{v^{2\hat{\mu}-1}} \frac{d}{dv} L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}}(v) \quad (\text{V.185})$$

En intégrant par parties, on trouve :

$$K \approx (1-2\hat{\mu}) \langle v^{-2\hat{\mu}} \rangle \quad (\text{V.186})$$

Or, le moment d'ordre $-v$ d'une loi de Lévy $L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}}(u)$ est donné par (cf. [BoG90], équation B.30)

$$\langle u^{-v} \rangle = \hat{B}^{1-v/\hat{\mu}} \frac{\Gamma(v/\hat{\mu})}{\hat{\mu}\Gamma(v)} \quad (\text{V.187})$$

A l'aide de (V.183), (V.186) et (V.187), on obtient $A_1(t)$:

$$A_1(t) = \frac{1-2\hat{\mu}}{\Gamma(2\hat{\mu})(1-\mu)} \frac{b}{\hat{B}^2} t^{2\hat{\mu}-\mu-1} \quad (\text{V.188})$$

Le développement de $A(t)$ s'écrit donc à partir de (V.178) et (V.188)

$$A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{1-\hat{\mu}}} \left(\hat{E} + \frac{\hat{G}}{t^{\mu}} + \frac{\hat{F}}{t^{\mu-\hat{\mu}}} \right) \quad (\text{V.189})$$

Comme dans le régime $t \rightarrow \infty$, on a $1/t^{\mu} \ll 1/t^{\mu-\hat{\mu}}$, les deux termes dominants de $A(t)$ sont :

$$\hat{\mu} < \mu < 1 : \quad \boxed{A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{1-\hat{\mu}}} \left(\hat{E} + \frac{\hat{F}}{t^{\mu-\hat{\mu}}} \right)} \quad (\text{V.190.a})$$

avec

$$\hat{E} = \frac{1}{\hat{B}' \Gamma(\hat{\mu})} \quad \text{et} \quad \hat{F} = \frac{1-2\hat{\mu}}{\Gamma(2\hat{\mu})(1-\mu)} \frac{b}{\hat{B}'^2} \quad (\text{V.190.b})$$

La lois d'arrosage $A(t)$ est donc dominée par un terme en $1/t^{1-\hat{\mu}}$, où $\hat{\mu}$ est l'exposant de la distribution la plus large. Ce terme aurait pu être obtenu par un raisonnement intuitif : il correspond à la loi d'arrosage d'une simple distribution de Lévy d'exposant $\hat{\mu}$.

Le cas $\mu < \hat{\mu} < 1$ se déduit du précédent en remplaçant μ par $\hat{\mu}$:

$$\mu < \hat{\mu} < 1 : \quad \boxed{A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{1-\mu}} \left(E + \frac{F}{t^{\hat{\mu}-\mu}} \right)} \quad (\text{V.191.a})$$

avec

$$E = \frac{1}{B' \Gamma(\mu)} \quad \text{et} \quad F = \frac{1-2\mu}{\Gamma(2\mu)(1-\hat{\mu})} \frac{\hat{b}}{B'^2} \quad (\text{V.191.b})$$

4.3.3.3 Cas $\hat{\mu} < 1 < \mu$ et cas $\mu < 1 < \hat{\mu}$

Donnons d'abord un raisonnement intuitif, par exemple dans le cas $\hat{\mu} < 1 < \mu$. Comme $\langle \tau \rangle = \infty$ et $\langle \hat{\tau} \rangle < \infty$, on peut penser que la distribution la plus large, c'est-à-dire $\hat{P}(\hat{\tau})$ dicte son comportement à la loi d'arrosage. Par conséquent, $A(t)$ a la même forme qu'une loi d'arrosage pour une simple distribution de Lévy (§ V.4.3.2) :

$$\hat{\mu} < 1 < \mu : \quad \boxed{A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\hat{B}' \Gamma(\hat{\mu})} \frac{1}{t^{1-\hat{\mu}}}} \quad (\text{V.192})$$

Dans le cas $\mu < 1 < \hat{\mu}$, on a par symétrie

$$\mu < 1 < \hat{\mu} : \quad \boxed{A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{B' \Gamma(\mu)} \frac{1}{t^{1-\mu}}} \quad (\text{V.193})$$

Démonstration :

Ces résultats peuvent être montrés rigoureusement. Considérons le cas $\hat{\mu} < 1 < \mu$. La lois d'arrosage s'écrit alors

$$A(t) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{1/\mu+1/\hat{\mu}}} J_N \tag{V.194}$$

avec

$$J_N = \int_0^t du L_{\mu}^B \left(\frac{u - N \langle \tau \rangle}{N^{1/\mu}} \right) L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}} \left(\frac{t - u}{N^{1/\hat{\mu}}} \right) \tag{V.195}$$

Pour calculer le produit de convolution J_N , on estime le recouvrement de $L_B^{\mu} \left(\frac{u - N \langle \tau \rangle}{N^{1/\mu}} \right)$ et

de $L_{\hat{B}}^{\hat{\mu}} \left(\frac{t - u}{N^{1/\hat{\mu}}} \right)$ (cf. figure V.20). La loi $L_{\hat{B}}^{\hat{\mu}} \left(\frac{t - u}{N^{1/\hat{\mu}}} \right)$ est large. En revanche, la loi

$L_B^{\mu} \left(\frac{u - N \langle \tau \rangle}{N^{1/\mu}} \right)$ est étroite, centrée en $N \langle \tau \rangle$. Comme $\hat{\mu} < \mu$, on a $t \approx \hat{T}_N \geq T_N = N \langle \tau \rangle$. Le

recouvrement de $L_B^{\mu} \left(\frac{u - N \langle \tau \rangle}{N^{1/\mu}} \right)$ et de $L_{\hat{B}}^{\hat{\mu}} \left(\frac{t - u}{N^{1/\hat{\mu}}} \right)$ n'est donc significatif que pour $u \ll t$.

On pourrait donc effectuer un développement en u/t (cf. équation (V.170)) mais, si on cherche seulement le terme dominant de $A(t)$, on peut se contenter du premier terme du développement :

$$L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}} \left(\frac{t - u}{N^{1/\hat{\mu}}} \right) \approx L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}} \left(\frac{t}{N^{1/\hat{\mu}}} \right) \tag{V.196}$$

On a alors :

$$J_N \approx L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}} \left(\frac{t}{N^{1/\hat{\mu}}} \right) \int_0^t du L_{\mu}^B \left(\frac{u - N \langle \tau \rangle}{N^{1/\mu}} \right) \tag{V.197}$$

L'intégrale converge et, au premier ordre, on peut considérer la limite $t \rightarrow \infty$:

$$J_N = L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}} \left(\frac{t}{N^{1/\hat{\mu}}} \right) \int_0^{\infty} du L_{\mu}^B \left(\frac{u - N \langle \tau \rangle}{N^{1/\mu}} \right) \tag{V.198}$$

En posant $v = (u - N \langle \tau \rangle) / N^{1/\mu}$, on a :

$$\int_0^{\infty} du L_{\mu}^B \left(\frac{u - N \langle \tau \rangle}{N^{1/\mu}} \right) = N^{1/\mu} \int_{-N \langle \tau \rangle / N^{1/\mu}}^{\infty} dv L_{\mu}^B(v) \tag{V.199}$$

La loi $A(t)$ étant dominée à $t \rightarrow \infty$ par les sommes possédant un grand nombre N de termes, la borne inférieure de l'intégrale (V.199) tend vers $-\infty$. Par conséquent,

$$J_N = N^{1/\mu} L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}} \left(t / N^{1/\hat{\mu}} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dv L_{\mu}^B(v) \tag{V.200}$$

Les lois de Lévy étant normalisées, on a :

$$J_N = N^{1/\mu} L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}} \left(t / N^{1/\hat{\mu}} \right) \tag{V.201}$$

En introduisant cette relation dans (V.194), on obtient :

$$A(t) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{1/\mu+1/\hat{\mu}}} L_{\hat{\mu}}^{\hat{B}} \left(t / N^{1/\hat{\mu}} \right) \tag{V.202}$$

On reconnaît la loi d'arrosage d'une distribution de Lévy d'exposant $\hat{\mu} < 1$ (équation (V.139)), d'où :

$$A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\hat{B}^{\hat{\mu}} \Gamma(\hat{\mu}) t^{1-\hat{\mu}}}, \text{ c.q.f.d.} \tag{V.203}$$

4.3.3.4 Cas $1 < \hat{\mu} < 2$ et $1 < \mu < 2$ ($\mu \neq \hat{\mu}$)

Les variables τ et $\hat{\tau}$ admettant des valeurs moyennes, la variable $s = \tau + \hat{\tau}$ admet aussi une valeur moyenne. Construisons la somme S_N :

$$S_N = \sum_{i=1}^N \tau_i + \hat{\tau}_i \quad (\text{V.204})$$

On a évidemment :

$$A(t) = \sum_{N=1}^{\infty} P(S_N) \approx \int_1^{\infty} dN P(S_N) \quad (\text{V.205})$$

La loi $P(S_N)$ admet également une valeur moyenne. Comme $S_N \approx N\langle\tau + \hat{\tau}\rangle$, on a

$$P(S_N) \approx P(N\langle\tau\rangle) = \frac{1}{\langle\tau\rangle} P(N) \quad (\text{V.206})$$

La variable N étant distribuée de manière uniforme (cf. remarque 39, § V.4.3.2), on a $P(N) = \text{cte}$, d'où finalement

$$\boxed{A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\langle\tau + \hat{\tau}\rangle}} \quad (\text{V.207})$$

4.3.3.5 Synthèse sur la loi d'arrosage

Situation physique		Loi d'arrosage $A(t)$ non normalisée
$\mu = \hat{\mu}$	• $\mu < 1$	• $\frac{1}{(B' + \hat{B}')\Gamma(\mu)} \frac{1}{t^{1-\mu}}$
	• $\mu > 1$	• $\frac{1}{\langle\tau\rangle + \langle\hat{\tau}\rangle}$
$\mu \neq \hat{\mu}$	• $\hat{\mu} < \mu < 1$	• $\frac{1}{t^{1-\hat{\mu}}} \left(\hat{E} + \frac{\hat{F}}{t^{\mu-\hat{\mu}}} \right)$
	• $\mu < \hat{\mu} < 1$	• $\frac{1}{t^{1-\mu}} \left(E + \frac{F}{t^{\hat{\mu}-\mu}} \right)$
	• $\hat{\mu} < 1 < \mu$	• $\frac{1}{\hat{B}'\Gamma(\hat{\mu})} \frac{1}{t^{1-\hat{\mu}}}$
	• $\mu < 1 < \hat{\mu}$	• $\frac{1}{B'\Gamma(\mu)} \frac{1}{t^{1-\mu}}$
	• $1 < \mu < 2$ et $1 < \hat{\mu} < 2$	• $\frac{1}{\langle\tau\rangle + \langle\hat{\tau}\rangle}$

Tableau V.5 Loi d'arrosage $A(t)$. On donne le comportement pour $t \rightarrow \infty$. Les coefficients E, F, \hat{E} et \hat{F} sont donnés dans le texte.

Les résultats concernant la loi d'arrosage sont présentés dans le tableau V.5. On constate que, dès lors que $\mu > 1$ (ou $\hat{\mu} > 1$), on obtient pour $A(t)$ un comportement typique d'une loi $P(\tau)$ (ou $\hat{P}(\hat{\tau})$) non large (i.e. $\langle \tau^2 \rangle < \infty$, ou $\langle \hat{\tau}^2 \rangle < \infty$). Par conséquent, on admettra que les résultats démontrés ici seulement pour $1 < \mu < 2$ (ou $1 < \hat{\mu} < 2$) sont également valables lorsque $P(\tau)$ (ou $\hat{P}(\hat{\tau})$) n'est pas large.

4.4 Population piégée

4.4.1 Normalisation

On peut maintenant calculer la population piégée $f(p_{\text{trap}}, \theta)$, puisqu'on connaît $\psi(\tau)$ et $A(t)$:

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) = \int_0^\theta d\tau A(\theta - \tau) \psi(\tau) \tag{V.123} \text{ rappel}$$

$$\psi(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu} \frac{b}{\tau^\mu} \tag{V.125} \text{ rappel}$$

Pour calculer $f(p_{\text{trap}}, \theta)$, il faudrait que les lois $A(\theta - \tau)$ soient normalisées, ce qui n'est pas le cas. Aussi, pour calculer correctement $f(p_{\text{trap}}, \theta)$, on introduit la population à l'extérieur du piège, notée $\hat{f}(p_{\text{trap}}, \theta)$:

$$\hat{f}(p_{\text{trap}}, \theta) = \int_0^\theta d\hat{\tau} \hat{A}(\theta - \hat{\tau}) \hat{\psi}(\hat{\tau}) \tag{V.208}$$

La loi $\hat{\psi}(\hat{\tau})$ est donnée, lorsque $\hat{P}(\hat{\tau})$ est une loi de type (V.10), par

$$\hat{\psi}(\hat{\tau}) \xrightarrow{\hat{\tau} \rightarrow \infty} \frac{1}{\hat{\mu}} \frac{\hat{b}}{\hat{\tau}^{\hat{\mu}}} \tag{V.209}$$

Par ailleurs, $\hat{A}(t)$ est la probabilité de sortir du piège à la date t , après y être rentré un nombre N quelconque de fois. Dans la limite $t \rightarrow \infty$, on a

$$\hat{A}(t) \rightarrow A(t) \tag{V.210}$$

Drâce à cette relation (V.210), on peut s'affranchir de la normalisation de $A(t)$ en écrivant la population $f_n(p_{\text{trap}}, \theta)$, avec des normalisations correctes

$$f_n(p_{\text{trap}}, \theta) = \frac{f(p_{\text{trap}}, \theta)}{f(p_{\text{trap}}, \theta) + \hat{f}(p_{\text{trap}}, \theta)} \tag{V.211}$$

où $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ et $\hat{f}(p_{\text{trap}}, \theta)$ sont les populations non normalisées données respectivement par (V.123) et (V.208) :

$$f_n(p_{\text{trap}}, \theta) = \frac{\int_0^\theta d\tau A(\theta - \tau) \psi(\tau)}{\int_0^\theta d\tau A(\theta - \tau) \psi(\tau) + \int_0^\theta d\hat{\tau} \hat{A}(\theta - \hat{\tau}) \hat{\psi}(\hat{\tau})} \tag{V.212}$$

Nous allons calculer l'expression (V.212) dans différents cas. Si on ne désire pas suivre les calculs, les résultats sont rassemblés au paragraphe V.4.4.5.

4.4.2 Cas $\mu = \hat{\mu}$

Ce cas, simple à traiter, sera utile pour les résonances noires à une dimension.

• Cas $\mu = \hat{\mu} < 1$:

En reprenant l'expression de $A(t)$ (cf. tableau V.5) et en simplifiant par $1/(\mu(B'+\hat{B}')\Gamma(\mu))$, on obtient :

$$f_n(p_{\text{trap}}, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\theta d\tau \frac{b}{(\theta-\tau)^\mu \tau^\mu}}{\int_0^\theta d\tau \frac{b+\hat{b}}{(\theta-\tau)^\mu \tau^\mu}} \quad (\text{V.213})$$

ce qui donne :

$$\boxed{f_n(p_{\text{trap}}, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} \frac{b}{b+\hat{b}}} \quad (\text{V.214})$$

• Cas $\mu = \hat{\mu} < 1$:

D'après le tableau V.5, après simplification par $A(t)$ qui est ici un terme constant, on a :

$$f_n(p_{\text{trap}}, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\theta \psi(\tau) d\tau}{\int_0^\theta \psi(\tau) d\tau + \int_0^\theta \hat{\psi}(\tau) d\tau} \quad (\text{V.215})$$

Or, $\psi(\tau)$ est la probabilité de rester dans le piège une durée supérieure ou égale à τ . Comme $P(\tau)$ possède une valeur moyenne $\langle \tau \rangle$, $\psi(\tau)$ a l'allure représentée sur la figure (V.21) :

$$\psi(\tau < \langle \tau \rangle) \approx 1 \quad (\text{V.216.a})$$

$$\psi(\tau > \langle \tau \rangle) \approx 0 \quad (\text{V.216.b})$$

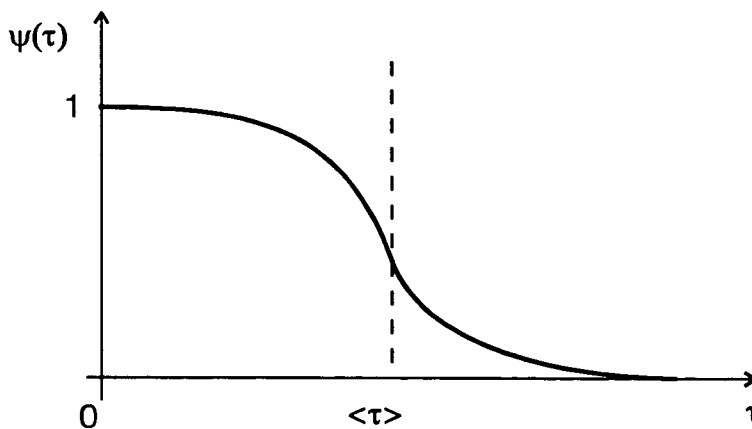


Figure V.21 Allure de $\psi(\tau)$ quand $\mu > 1$.

Par conséquent :

$$\int_0^\theta \psi(\tau) d\tau \approx \int_0^{\langle \tau \rangle} \psi(\tau) d\tau \approx \langle \tau \rangle \quad (\text{V.217})$$

Un résultat analogue est valable pour $\hat{\psi}(\tau)$. On en déduit [43]

$$f_n(p_{\text{trap}}, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} \frac{\langle \tau \rangle}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \tag{V.218}$$

Dans les deux cas examinés où $\mu = \hat{\mu}$, la population piégée atteint donc un régime stationnaire (ce qui ne signifie pas, comme on le verra, que la distribution en impulsion atteigne aussi un régime stationnaire).

4.4.3 Cas $\hat{\mu} < \mu < 1$ et cas $\mu < \hat{\mu} < 1$

Ces cas sont importants pour comprendre, par exemple, les résonances noires à une dimension. Nous allons traiter le cas $\hat{\mu} < \mu < 1$. L'autre cas s'en déduit par symétrie.

D'après le tableau V.5, on a

$$A(t) = \hat{E}t^{\hat{\mu}-1} + \hat{F}t^{2\hat{\mu}-\mu-1} \tag{V.219}$$

d'où

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) = \int_0^\theta d\tau [\hat{E}(\theta - \tau)^{\hat{\mu}-1} + \hat{F}(\theta - \tau)^{2\hat{\mu}-\mu-1}] \frac{b}{\mu\tau^\mu} \tag{V.220.a}$$

$$\hat{f}(p_{\text{trap}}, \theta) = \int_0^\theta d\tau [\hat{E}(\theta - \tau)^{\hat{\mu}-1} + \hat{F}(\theta - \tau)^{2\hat{\mu}-\mu-1}] \frac{\hat{b}}{\hat{\mu}\tau^{\hat{\mu}}} \tag{V.220.b}$$

On reconnaît dans ces intégrales des fonctions Beta [AbS70] :

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad z > 0, w > 0 \tag{V.221}$$

Toutefois, pour avoir le droit d'écrire ces fonctions Beta, tous les arguments des fonctions Gamma doivent être positifs. On a :

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) = \frac{b}{\mu} [\hat{E}\theta^{\hat{\mu}-\mu} B(\hat{\mu}, 1-\mu) + \hat{F}J\theta^{2(\hat{\mu}-\mu)}] \tag{V.222.a}$$

$$\hat{f}(p_{\text{trap}}, \theta) = \frac{\hat{b}}{\hat{\mu}} [\hat{E}B(\hat{\mu}, 1-\hat{\mu}) + \hat{F}\hat{J}\theta^{\hat{\mu}-\mu}] \tag{V.222.b}$$

en ayant posé

$$J = \int_0^1 (1-u)^{2\hat{\mu}-\mu-1} u^{-\mu} du \tag{V.223.a}$$

$$\hat{J} = \int_0^1 (1-u)^{2\hat{\mu}-\mu-1} u^{-\hat{\mu}} du \tag{V.223.b}$$

d'où

$$f_n(p_{\text{trap}}, \theta) = \frac{1}{1 + \frac{\mu\hat{b}}{\hat{\mu}b} \frac{\hat{E}B(\hat{\mu}, 1-\hat{\mu}) + \hat{F}\hat{J}\theta^{\hat{\mu}-\mu}}{\hat{E}B(\hat{\mu}, 1-\mu)\theta^{\hat{\mu}-\mu} + \hat{F}J\theta^{2(\hat{\mu}-\mu)}}} \tag{V.224}$$

[43] Si on avait utilisé les développements en loi de puissance de $\psi(\tau)$ et $\hat{\psi}(\hat{\tau})$, on aurait retrouvé $f \rightarrow b / (b + \hat{b})$, ce qui est compatible avec (V.218).

[AbS70] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions, Ninth Edition*, § 6.2.1, Dover (1970).

On est donc amené à distinguer 3 cas, selon que J ou \hat{J} peuvent s'écrire ou non sous forme de fonctions Beta.

- 1^{er} cas : $2\hat{\mu} > \mu$

Les intégrales J ou \hat{J} sont alors des fonctions Beta :

$$J = B(2\hat{\mu} - \mu, 1 - \mu) \tag{V.225.a}$$

$$\hat{J} = B(2\hat{\mu} - \mu, 1 - \hat{\mu}) \tag{V.225.b}$$

En ne gardant que les termes dominants et sous-dominants dans le régime $\theta \rightarrow \infty$, on obtient pour $f_n(p_{\text{trap}}, \theta)$:

$$f_n(p_{\text{trap}}, \theta) \approx \frac{1}{1 + \hat{G}(\theta) + \frac{\mu\hat{b}}{\hat{\mu}b} \frac{B(\hat{\mu}, 1 - \hat{\mu})}{B(\hat{\mu}, 1 - \mu)} \theta^{\mu - \hat{\mu}}} \tag{V.226.a}$$

en ayant posé :

$$\hat{G}(\theta) = \frac{\mu\hat{b}}{\hat{\mu}b} \frac{\hat{F}B(\hat{\mu}, 1 - \hat{\mu})}{\hat{E}B(\hat{\mu}, 1 - \mu)} \left[\frac{B(2\hat{\mu} - \mu, 1 - \hat{\mu})}{B(\hat{\mu}, 1 - \hat{\mu})} - \frac{B(2\hat{\mu} - \mu, 1 - \mu)}{B(\hat{\mu}, 1 - \mu)} \right] \tag{V.226.b}$$

La population refroidie tend asymptotiquement vers 0, comme $1/\theta^{\mu - \hat{\mu}}$.

- 2^e cas : $2\hat{\mu} = \mu$

Dans ce cas, il apparaît une divergence sur les intégrales :

$$J = \int_0^1 (1-u)^{-1} u^{-\mu} du \tag{V.227.a}$$

$$\hat{J} = \int_0^1 (1-u)^{-1} u^{-\hat{\mu}} du \tag{V.227.b}$$

Cette divergence en $u \rightarrow 1$ est due au terme $(1-u)^{-1}$. Elle correspond au comportement de $A(t \rightarrow 0)$. Elle n'est donc que formelle puisque $A(t)$ n'est pas une loi de puissance en $t = 0$ (comme les lois de Lévy, $A(t)$ tend rapidement vers 0 en $t = 0$; voir figure V.22).

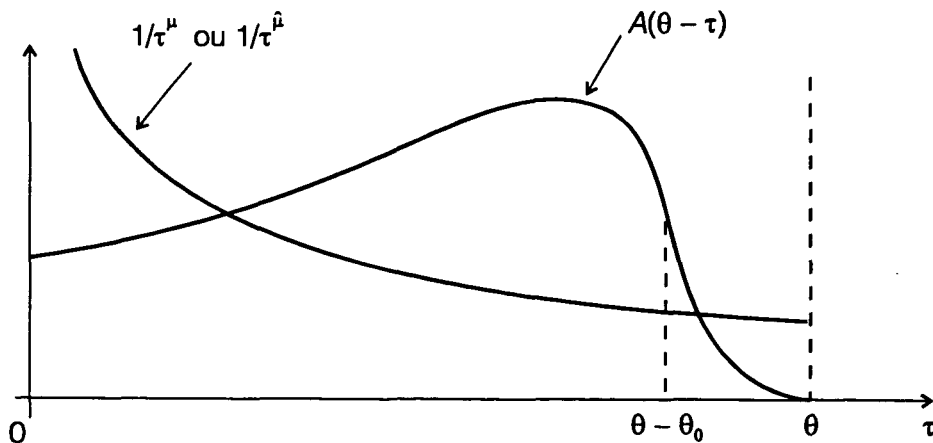


Figure V.22 Calcul des intégrales J et \hat{J} .

On peut donc couper l'intégrale en $(1 - \theta_0/\theta)$, où θ_0 est défini comme la durée minimale typique d'un événement (piégeage + premier retour) :

$$\theta_0 \approx \tau_{\text{trap}} + \tau_{\text{ext}} \tag{V.228}$$

Le terme J devient alors

$$J \approx \int_0^{1-\theta_0/\theta} (1-u)^{-1} u^{-\mu} du \tag{V.229}$$

L'intégrale divergeant quand $\theta_0 \rightarrow \theta$, cela signifie qu'elle est dominée par son comportement en $u \approx 1$. On peut donc poser $u^{-\mu} \approx 1$:

$$J \approx \int_0^{1-\theta_0/\theta} (1-u)^{-1} du \approx \ln(\theta/\theta_0) \tag{V.230}$$

Le même type de raisonnement conduit à

$$\hat{J} \approx \ln(\theta/\theta_0) \tag{V.231}$$

On peut maintenant reporter les termes J et \hat{J} dans $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ et $\hat{f}(p_{\text{trap}}, \theta)$, ce qui donne finalement, en ne conservant que les termes dominants et sous-dominants :

$$f_n(p_{\text{trap}}, \theta) \approx \frac{1}{1 + \hat{G}(\theta) + \frac{\mu \hat{b}}{\hat{\mu} b} \frac{B(\hat{\mu}, 1 - \hat{\mu})}{B(\hat{\mu}, 1 - \mu)} \theta^{\mu - \hat{\mu}}} \tag{V.232.a}$$

avec

$$\hat{G}(\theta) = \frac{\mu \hat{b}}{\hat{\mu} b} \frac{\hat{F}B(\hat{\mu}, 1 - \hat{\mu})}{\hat{E}B(\hat{\mu}, 1 - \mu)} \left[\frac{1}{B(\hat{\mu}, 1 - \hat{\mu})} - \frac{1}{B(\hat{\mu}, 1 - \mu)} \right] \ln(\theta/\theta_0) \tag{V.232.b}$$

Dans l'expression de $f_n(p_{\text{trap}}, \theta)$, on retrouve le comportement en $1/\theta^{\mu - \hat{\mu}}$, plus un terme logarithmique. Ce terme varie si lentement qu'on pourra éventuellement l'assimiler à une constante.

• 3^e cas : $2\hat{\mu} < \mu$

On retrouve le même problème de divergence formelle que dans le cas précédent sur les intégrales J et \hat{J} . Le même raisonnement que dans le cas précédent conduit à :

$$J \approx \frac{(\theta/\theta_0)^{\mu - 2\hat{\mu}}}{2\hat{\mu} - \mu} \tag{V.233.a}$$

$$\hat{J} \approx J \approx \frac{(\theta/\theta_0)^{\mu - 2\hat{\mu}}}{2\hat{\mu} - \mu} \tag{V.233.b}$$

On en déduit :

$$f_n(p_{\text{trap}}, \theta) \approx \frac{1}{1 + \hat{G}(\theta) + \frac{\mu \hat{b}}{\hat{\mu} b} \frac{B(\hat{\mu}, 1 - \hat{\mu})}{B(\hat{\mu}, 1 - \mu)} \theta^{\mu - \hat{\mu}}} \tag{V.234.a}$$

avec

$$\hat{G}(\theta) = \frac{\mu \hat{b}}{\hat{\mu} b} \frac{\hat{F}}{\hat{E}(\mu - 2\hat{\mu})} \frac{B(\hat{\mu}, 1 - \hat{\mu})}{B(\hat{\mu}, 1 - \mu)} \left[\frac{1}{B(\hat{\mu}, 1 - \mu)} - \frac{1}{B(\hat{\mu}, 1 - \hat{\mu})} \right] \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)^{\mu - 2\hat{\mu}} \tag{V.234.b}$$

En résumé, on a

$$\hat{\mu} < \mu < 1 : f_n(p_{\text{trap}}, \theta) \approx \frac{1}{1 + \hat{G}(\theta) + \frac{\mu \hat{b}}{\hat{\mu} b} \frac{B(\hat{\mu}, 1 - \hat{\mu})}{B(\hat{\mu}, 1 - \mu)} \theta^{\mu - \hat{\mu}}} \quad (\text{V.235.a})$$

avec

$$2\hat{\mu} > \mu : \hat{G}(\theta) = \frac{\mu \hat{b}}{\hat{\mu} b} \frac{\hat{F}B(\hat{\mu}, 1 - \hat{\mu})}{\hat{E}B(\hat{\mu}, 1 - \mu)} \left[\frac{B(2\hat{\mu} - \mu, 1 - \hat{\mu})}{B(\hat{\mu}, 1 - \hat{\mu})} - \frac{B(2\hat{\mu} - \mu, 1 - \mu)}{B(\hat{\mu}, 1 - \mu)} \right] \quad (\text{V.235.b})$$

$$2\hat{\mu} = \mu : \hat{G}(\theta) = \frac{\mu \hat{b}}{\hat{\mu} b} \frac{\hat{F}B(\hat{\mu}, 1 - \hat{\mu})}{\hat{E}B(\hat{\mu}, 1 - \mu)} \left[\frac{1}{B(\hat{\mu}, 1 - \hat{\mu})} - \frac{1}{B(\hat{\mu}, 1 - \mu)} \right] \ln(\theta / \theta_0) \quad (\text{V.235.c})$$

$$2\hat{\mu} < \mu : \hat{G}(\theta) = \frac{\mu \hat{b}}{\hat{\mu} b} \frac{\hat{F}}{\hat{E}(\mu - 2\hat{\mu})} \frac{B(\hat{\mu}, 1 - \hat{\mu})}{B(\hat{\mu}, 1 - \mu)} \left[\frac{1}{B(\hat{\mu}, 1 - \mu)} - \frac{1}{B(\hat{\mu}, 1 - \hat{\mu})} \right] \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)^{\mu - 2\hat{\mu}} \quad (\text{V.235.d})$$

Dans le cas , des calculs similaires mènent à

$$\mu < \hat{\mu} < 1 : f_n(p_{\text{trap}}, \theta) \approx 1 - \frac{\mu \hat{b}}{\hat{\mu} b} \frac{B(\mu, 1 - \hat{\mu})}{B(\mu, 1 - \mu)} \frac{1}{\theta^{\hat{\mu} - \mu}} \quad (\text{V.236})$$

4.4.4 Cas $\hat{\mu} < 1 < \mu$ et cas $\mu < 1 < \hat{\mu}$

Cas cas où une seule des deux lois $P(\tau)$ ou $\hat{P}(\hat{\tau})$ admet une valeur moyenne sont importants en pratique

Traisons par exemple le cas $\hat{\mu} < 1 < \mu$. D'après le tableau V.5, on a

$$A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\hat{B}^{\mu} \Gamma(\hat{\mu})} \frac{1}{t^{1 - \hat{\mu}}} \quad (\text{V.237})$$

d'où

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) = \frac{1}{\hat{B}^{\mu} \Gamma(\hat{\mu})} \int_0^{\theta} d\tau (\theta - \tau)^{\hat{\mu} - 1} \psi(\tau) \quad (\text{V.238.a})$$

$$\hat{f}(p_{\text{trap}}, \theta) = \frac{1}{\hat{B}^{\mu} \Gamma(\hat{\mu})} \int_0^{\theta} d\tau (\theta - \tau)^{\hat{\mu} - 1} \hat{\psi}(\tau) \quad (\text{V.238.b})$$

ce qui donne

$$f_n(p_{\text{trap}}, \theta) = \frac{1}{1 + K(\theta) / \hat{K}(\theta)} \quad (\text{V.239})$$

en ayant posé

$$K(\theta) = \frac{b}{\mu} \int_0^{\theta} d\tau (\theta - \tau)^{\hat{\mu} - 1} \tau^{-\mu} \quad (\text{V.240.a})$$

$$\hat{K}(\theta) = \frac{\hat{b}}{\hat{\mu}} \int_0^{\theta} d\tau (\theta - \tau)^{\hat{\mu} - 1} \tau^{-\hat{\mu}} \quad (\text{V.240.b})$$

L'intégrale $\hat{K}(\theta)$ converge (cf. équation (V.221)) :

$$\hat{K}(\theta) = \frac{\hat{b}}{\hat{\mu}} B(\hat{\mu}, 1 - \hat{\mu}) \quad (\text{V.241})$$

L'intégrale $K(\theta)$ diverge formellement en $\tau \rightarrow 0$, à cause du terme $\tau^{-\mu}$. Cette divergence n'est cependant que formelle car $\psi(\tau)$ n'est pas une loi de puissance au voisinage de 0. En réalité, $\psi(\tau) \approx 1$ sur $[0; \langle \tau \rangle]$, puis $\psi(\tau)$ décroît rapidement pour $\tau > \langle \tau \rangle$ (cf. équation (V.216) et figure V.21). On en déduit :

$$K(\theta) = \int_0^{\langle \tau \rangle} d\tau (\theta - \tau)^{\hat{\mu}-1} \tag{V.242}$$

Comme $\hat{\mu} < 1 < \mu$, on a $\langle \tau \rangle \ll \theta$, d'où :

$$K(\theta) = \int_0^{\langle \tau \rangle} d\tau \theta^{\hat{\mu}-1} \approx \langle \tau \rangle \theta^{\hat{\mu}-1} \tag{V.243}$$

On a donc finalement :

$$f_n(p_{\text{trap}}, \theta) \approx \frac{1}{1 + \frac{\hat{b}B(\hat{\mu}, 1 - \hat{\mu})}{\hat{\mu}} \frac{\theta^{1-\hat{\mu}}}{\langle \tau \rangle}} \tag{V.244}$$

Dans le cas $\mu < 1 < \hat{\mu}$, une démarche analogue conduit à :

$$f_n(p_{\text{trap}}, \theta) \approx 1 - \frac{\mu}{bB(\mu, 1 - \mu)} \frac{\langle \hat{\tau} \rangle}{\theta^{1-\mu}} \tag{V.245}$$

4.4.5 Cas $1 < \hat{\mu} < 2$ et $1 < \mu < 2$ ($\mu \neq \hat{\mu}$)

Dans ce cas, le tableau V.5 donne

$$A(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \tag{V.246}$$

d'où

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) = \int_0^\theta d\tau \frac{1}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \psi(\tau) \tag{V.247.a}$$

$$\hat{f}(p_{\text{trap}}, \theta) = \int_0^\theta d\tau \frac{1}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \hat{\psi}(\tau) \tag{V.247.b}$$

On applique encore une fois l'argument donnant la forme (V.221) de $\psi(\tau)$ (ou de $\hat{\psi}(\tau)$ quand $\mu > 1$ (ou $\hat{\mu} > 1$))

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \approx \int_0^{\langle \tau \rangle} d\tau \frac{1}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \psi(\tau) \approx \frac{\langle \tau \rangle}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \tag{V.248.a}$$

$$\hat{f}(p_{\text{trap}}, \theta) \approx \int_0^{\langle \hat{\tau} \rangle} d\tau \frac{1}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \hat{\psi}(\tau) \approx \frac{\langle \hat{\tau} \rangle}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \tag{V.248.b}$$

On en déduit finalement

$$f_n(p_{\text{trap}}, \theta) \approx \frac{\langle \tau \rangle}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \tag{V.249}$$

Quand $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$ admettent des valeurs moyennes, on retrouve donc une situation ergodique pour $f_n(p_{\text{trap}}, \theta)$.

4.4.6 Synthèse sur la population piégée

On a rassemblé les résultats du calcul du comportement asymptotique de $f_n(p_{\text{trap}}, \theta)$ dans le tableau V.6 (pour simplifier les notations, on adopte dorénavant la notation $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ pour $f_n(p_{\text{trap}}, \theta)$). Ce tableau est un des résultats essentiels du chapitre V. Il donne les premiers termes du développement de f en θ . Notons que nous avons obtenu non seulement les lois de puissance de $f(p_{\text{trap}}, \theta)$, mais également les valeurs des préfacteurs : dans la mesure où les approximations effectués s'appliquent, les résultats obtenus ne comportent pas de paramètres ajustables.

Comme pour la loi d'arrosage, on constate que les lois d'exposant μ ou $\hat{\mu}$ compris entre 1 et 2 se comportent comme des lois non larges ($\langle \tau^2 \rangle < \infty$ ou $\langle \hat{\tau}^2 \rangle < \infty$). Aussi, on peut conjecturer que les résultats démontrés ici seulement pour $1 < \mu < 2$ (ou $1 < \hat{\mu} < 2$) sont également valables lorsque $P(\tau)$ (ou $\hat{P}(\hat{\tau})$) n'est pas large.

Situation physique		Population piégée $f(p_{\text{trap}}, \theta)$
$\mu = \hat{\mu}$	• $\mu < 1$	• $\frac{b}{b + \hat{b}}$
	• $\mu > 1$	• $\frac{\langle \tau \rangle}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle}$
$\mu \neq \hat{\mu}$	• $\hat{\mu} < \mu < 1$	• $\frac{1}{1 + \hat{G}(\theta) + \frac{\mu \hat{b} B(\hat{\mu}, 1 - \hat{\mu})}{\hat{\mu} b B(\hat{\mu}, 1 - \mu)} \theta^{\mu - \hat{\mu}}}$
	• $\mu < \hat{\mu} < 1$	• $1 - \frac{\mu \hat{b} B(\mu, 1 - \hat{\mu})}{\hat{\mu} b B(\mu, 1 - \mu)} \frac{1}{\theta^{\hat{\mu} - \mu}}$
	• $\hat{\mu} < 1 < \mu$	• $\frac{1}{1 + \frac{\hat{b} B(\hat{\mu}, 1 - \hat{\mu})}{\hat{\mu}} \theta^{1 - \hat{\mu}} \frac{\langle \tau \rangle}{\langle \hat{\tau} \rangle}}$
	• $\mu < 1 < \hat{\mu}$	• $1 - \frac{\mu}{b B(\mu, 1 - \mu)} \frac{\langle \hat{\tau} \rangle}{\theta^{1 - \mu}}$
	• $1 < \mu < 2$ et $1 < \hat{\mu} < 2$	• $\frac{\langle \tau \rangle}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle}$

Tableau V.6 Population piégée dans le régime $\theta \rightarrow \infty$. L'expression de $\hat{G}(\theta)$, fonction qui varie plus lentement que $\theta^{\mu - \hat{\mu}}$, est donnée dans le texte.

On a représenté le comportement de $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ au premier ordre non nul sur la figure V.23 :

- La population piégée tend vers 1 si $\mu < 1$ et $\mu < \hat{\mu}$, c'est-à-dire si la valeur moyenne des temps de piégeage est infinie et simultanément la loi des temps de sortie est plus étroite que celle des temps de piégeage.
- Inversement, la population piégée tend vers 0 si $\hat{\mu} < 1$ et $\hat{\mu} < \mu$, c'est-à-dire si $\langle \hat{\tau} \rangle \rightarrow \infty$ et simultanément la loi des temps de sortie est plus large que celle des temps de piégeage.
- Dans tous les autres cas, la population piégée tend vers une constante qui est strictement comprise entre 0 et 1.

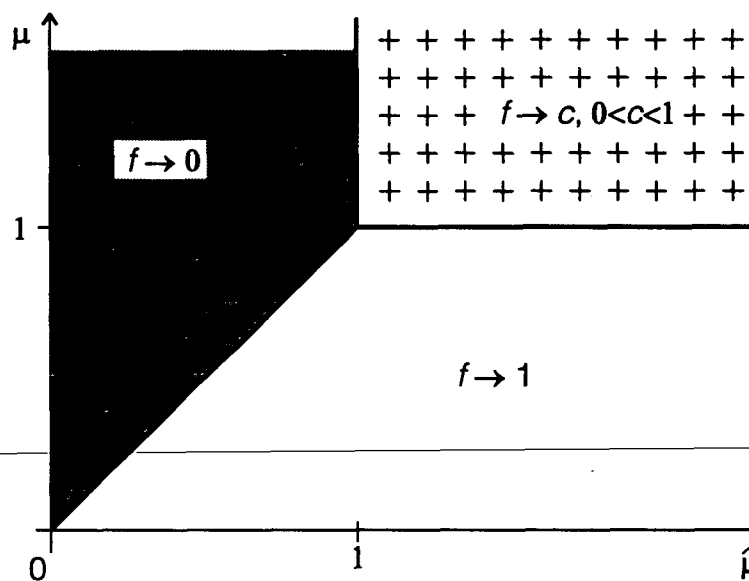


Figure V.23 Comportement asymptotique de $f_n(p_{\text{trap}}, \theta)$: premier ordre non nul.

4.5 Application aux résonances noires

Les résultats précédents sur la population piégée peuvent maintenant être facilement appliqués aux résonances noires sélectives en vitesse. Dans ce cas, on a $\mu = D/2$. Nous allons traiter les différentes valeurs de D et de $\hat{\mu}$

4.5.1 Refroidissement à une dimension

A 1D, on a $\mu = 1/2$. Quant à la loi de premier retour, on peut considérer trois situations physiques différentes (cf. V.3.3) [44].

[44] La population piégée pour les résonances noires à une dimension, en configuration $\sigma_+ - \sigma_-$, a été obtenue aussi par un traitement analytique des équations de Bloch optiques généralisées (voir [AIK92] : V.A. Alekseev and D.D. Krylova, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 55, p. 321 (1992) (JETP Lett. 55, p. 321 (1992)) et Laser Phys. 2, p. 781 (1992)). Toutefois, ces auteurs obtiennent, dans le cas réel, que la population piégée tend vers une constante donnée par notre équation (V.182). Ceci s'avère incorrect lorsqu'on prend en compte l'effet Doppler.

• En tenant compte de l'effet Doppler à grande impulsion, (modèle le plus réaliste pour la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$), lorsque les impulsions ne sont pas confinées, on a $\hat{\mu} = 1/4$. On en déduit :

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \approx \frac{1}{\alpha + \beta\theta^{1/4}} \quad (\text{V.250})$$

où α et β sont des constantes calculables à partir du tableau V.6 (la fonction $\hat{G}(\theta)$ qui ne varie que logarithmiquement, est assimilée à une constante). Le piège se vide donc dans le régime asymptotique, comme $\theta^{-1/4}$. Toutefois, la dépendance en temps est très lente : il faut augmenter θ d'un facteur 10^4 pour augmenter le terme $\beta\theta^{1/4}$ d'un facteur 10. Cette diminution n'est donc pas dramatique pour l'efficacité pratique du refroidissement par résonances noires.

• Si on néglige l'effet Doppler à grande impulsion, on a $\hat{\mu} = \mu = 1/2$, d'où

$$f \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} \frac{b}{b + \hat{b}} \quad (\text{V.251})$$

La population piégée tend vers une constante. Il est remarquable que l'approche vols de Lévy permette dans ce cas de calculer f exactement. En effet, l'équation (V.60) permet de calculer b :

$$b = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{p_{\text{Raman}}}{p_{\text{trap}}} \Gamma_c^{-1/2} \quad (\text{V.252})$$

L'équation (V.102) donne \hat{b}

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Delta p}{2p_{\text{trap}}} \sqrt{\tau_{\text{ext}}} \quad (\text{V.253})$$

On obtient alors

$$f = \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{\pi} \frac{\Delta p}{p_{\text{Raman}}}\right)} \quad (\text{V.254})$$

Cette équation très simple est un des résultats les plus importants du chapitre, et on peut le commenter physiquement.

Tout d'abord, f ne fait intervenir que des grandeurs "géométriques" (Δp et p_{Raman}), alors que tous les calculs ont porté sur des grandeurs temporelles : Δp est la valeur quadratique moyenne des changements d'impulsion, p_{Raman} est la demi-largeur de la résonance noire.

La taille du piège, p_{trap} , n'intervient pas. En particulier, on peut prendre $p_{\text{trap}} \rightarrow 0$, et f tend toujours vers la valeur (V.254). Evidemment, plus p_{trap} est petit, plus il faut attendre longtemps pour que le régime asymptotique soit atteint.

On constate que f augmente avec p_{Raman} , ce qui est logique : quand p_{Raman} croît, la durée de vie des états à $p \approx 0$ augmente. Par ailleurs, f diminue avec Δp : on a intérêt, pour remplir le piège, à effectuer de petits sauts en impulsion, car cela augmente la probabilité $2p_{\text{trap}}/\Delta p$ d'atteindre le piège lorsqu'on passe par le voisinage de $p = 0$.

On peut aussi exprimer l'équation (V.254) en faisant apparaître les grandeurs atomiques :

$$f = \frac{1}{1 + \frac{16 E_R}{\pi\sqrt{3} \Gamma_{\text{ext}}}} \quad \text{avec} \quad \Gamma_{\text{ext}} = \frac{\Gamma_C}{2} = \frac{\Omega_1^2}{2\Gamma} \quad (\text{V.255})$$

• Considérons maintenant le cas où on confine les impulsions (ce n'est pas le cas en configuration $\sigma_+ - \sigma_-$) : la loi $\hat{P}(\hat{\tau})$ des temps de sortie est une loi étroite ($\langle \hat{\tau}^2 \rangle < \infty$). Par conséquent, le calcul effectué pour $\mu < 1 < \hat{\mu} < 2$ s'applique *a fortiori*, puisque les lois étroites correspondent au régime " $\hat{\mu} > 2$ "

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \approx 1 - \frac{\mu}{bB(\mu, 1-\mu)} \frac{\langle \hat{\tau} \rangle}{\theta^{1/2}} \quad (\text{V.256})$$

En présence de murs en impulsion, à une dimension, la population piégée tend vers 1.

Il apparaît des différences qualitatives entre les trois cas examinés à une dimension. Nous verrons ci-dessous (§ V.4.6) si ces différences sont quantitativement importantes pour des situations expérimentales réalistes.

4.5.2 Refroidissement à deux dimensions

A deux dimensions, on a $\mu = 1$, cas marginal où la valeur moyenne des temps de piégeage $\langle \tau \rangle$ diverge, mais seulement logarithmiquement. Les calculs n'ont pas été faits de manière détaillée dans ce cas là, mais les résultats obtenus pour $\mu < 1$ et $\mu > 1$ permettent de conjecturer le comportement de $f(p_{\text{trap}}, \theta)$.

• En l'absence de confinement des impulsions, la loi des temps de sortie est très large (" $\hat{\mu} = 0$ "), de sorte que $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ va tendre rapidement vers 0. A partir du cas $0 < \hat{\mu} < \mu < 1$, on extrapole que $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ va diminuer plus rapidement que $1/\theta$:

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} < \frac{\alpha}{\theta} \quad (\text{V.257})$$

où α est une constante.

• Dans le cas où les impulsions sont confinées, $\hat{P}(\hat{\tau})$ est une loi étroite ($\langle \hat{\tau}^2 \rangle < \infty$). A partir du cas $\mu < 1 < \hat{\mu}$, on extrapole :

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} 1 - \frac{\alpha}{\ln \theta} \quad (\text{V.258})$$

où α est une constante. Tous les atomes s'accablent dans le piège, mais l'accumulation est lente ($\ln \theta$).

4.5.3 Refroidissement à trois dimensions

A 3 dimensions, on a $\mu = 3/2$. La valeur moyenne des temps de piégeage est finie.

• En l'absence de confinement des impulsions, la loi des temps de sortie est très large (cf. § V.3.3.3.2). On se trouve dans une situation où f va diminuer rapidement, plus rapidement que dans le cas $0 < \hat{\mu} < 1 < \mu$:

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} < \frac{\alpha}{\theta} \quad (\text{V.259})$$

où α est une constante.

• En présence de confinement des impulsions, $\hat{P}(\hat{\tau})$ est une loi étroite, et on s'attend, comme pour $1 < \mu < 2$ et $1 < \hat{\mu} < 2$ à :

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} \frac{\langle \tau \rangle}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \quad (\text{V.260})$$

A trois dimensions, même en présence de forces de friction, la population piégée tend vers une constante, inférieure à 1.

On peut expliciter l'expression de la population piégée à trois dimensions. L'équation (V.64) donne $\langle \tau \rangle$. L'équation (V.89) donne $\langle \hat{\tau} \rangle$. On en déduit :

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \approx \frac{1}{1 + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{p_{\text{max}}^3}{p_{\text{trap}} p_0^2}} \quad (\text{V.261})$$

4.6 Tests de l'approche vols de Lévy

Pour tester l'ensemble de l'approche vols de Lévy, nous avons utilisé les simulations Monte-Carlo par la fonction délai, qui donnent accès à des durées d'interaction suffisamment longues pour pouvoir considérer qu'on se trouve dans le régime asymptotique. On considère la configuration $\sigma_+ - \sigma_-$, à une dimension.

Quelle est l'échelle de temps θ_{as} au-delà de laquelle on peut considérer qu'on a atteint le régime asymptotique ? Pour que la distribution des sommes T_N et \hat{T}_N ait convergé vers une loi de Lévy, on considère habituellement qu'il suffit d'avoir $N \geq 5$. Pour calculer θ_{as} , estimons la durée totale des $N = 5$ premiers retours (on néglige la durée totale des $N = 5$ piégeages qui est du même ordre). L'équation (V.21) donne l'ordre de grandeur d'une somme de N termes, pourvu qu'on connaisse γ , l'ordre de grandeur du plus petit terme possible. Ici, le retour le plus petit possible a une durée γ donnée par

$$\gamma \approx 2\tau_{\text{ext}} \frac{\Delta p}{p_{\text{trap}}} \quad (\text{V.262})$$

d'où, d'après (V.21),

$$\theta_{\text{as}} \approx 2\tau_{\text{ext}} \frac{\Delta p}{p_{\text{trap}}} N^{1/\hat{\mu}} \quad (\text{V.263})$$

Si, à cette échelle de temps, les impulsions maximales atteintes au cours des sorties produisent un effet Doppler négligeable, alors $\hat{\mu} = 1/2$. En appliquant l'équation (V.59), on obtient τ_{ext} . Pour les simulations ci-dessous, on a $\delta = 0$ et $\Omega_1 = 0,3 \Gamma$, d'où $\tau_{\text{ext}} \approx 20 \Gamma^{-1}$. Comme on a par ailleurs $\Delta p = (4/3)^{1/2} \hbar k$ et $p_{\text{trap}} = 0,08 \hbar k$, on en déduit θ_{as} :

$$\theta_{\text{as}} \approx 2\tau_{\text{ext}} \frac{\Delta p}{p_{\text{trap}}} 5^{1/\hat{\mu}} \approx 500\tau_{\text{ext}} \approx 10^4 \Gamma^{-1} \quad (\text{V.264})$$

L'échelle de temps θ_{as} à partir de laquelle l'approche vols de Lévy est applicable est donc quasiment inaccessible par résolution numérique des équations de Bloch optiques généralisées. Seules les simulations Monte-Carlo quantiques par la fonction délai permettent donc de tester l'approche vols de Lévy.

Nous avons simulé les trois situations étudiées analytiquement à une dimension.

- Cas d'impulsions confinées : $\mu = 1/2$, $\hat{P}(\hat{\tau})$ loi étroite

Pour simuler le confinement des impulsions dans le domaine $|p| < |p_{\text{max}}|$, on modifie légèrement l'algorithme d'évolution des impulsions : quand un atome atteint par hasard une impulsion $p = p_{\text{max}} + \varepsilon \hbar k > p_{\text{max}}$, on lui attribue l'impulsion $-p_{\text{max}} + \varepsilon \hbar k$ qui est bien de module inférieur à p_{max} (on applique une procédure semblable quand l'atome atteint $p = -p_{\text{max}} - \varepsilon \hbar k < -p_{\text{max}}$). On a choisi $p_{\text{max}} = 3 \hbar k$, ce qui est réaliste pour des mélasses optiques.

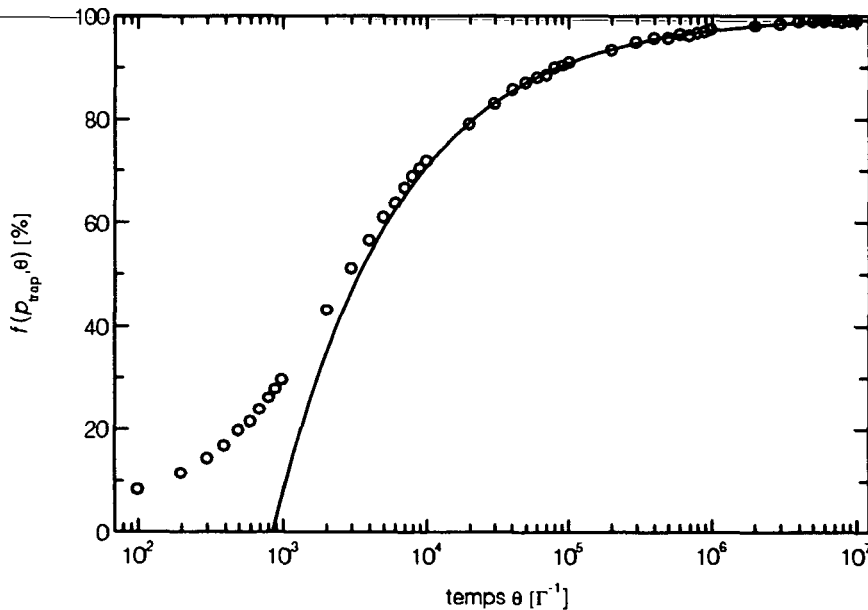


Figure V.24 Evolution de la population piégée dans le cas $|p| \leq p_{\text{max}}$. La population piégée tend vers 1. La courbe en continu correspond à un ajustement pour $\theta > 10^4 \Gamma^{-1}$ à la prédiction théorique $f(\theta) \approx 1 - \alpha / \theta^{1/2}$. Paramètres : $p_{\text{max}} = 3 \hbar k$, $\Omega_1 = 0,3 \Gamma$, $\delta = 0$, 16000 réalisations, $p_{\text{trap}} = 0,08 \hbar k$, distribution initiale = gaussienne d'impulsion quadratique moyenne $2 \hbar k$. Les paramètres atomiques sont ceux de l'hélium métastable.

La figure V.24 montre le résultat de cette simulation. La population piégée tend effectivement vers 1. L'ajustement avec une loi du type (V.256) en $1 - \alpha / \theta^{1/2}$ est tout-à-fait satisfaisant [45].

- Cas d'impulsions non confinées, sans effet Doppler : $\mu = \hat{\mu} = 1/2$

Pour simuler l'absence d'effet Doppler, on considère un atome fictif de très grande largeur naturelle : on prend $\Gamma \approx 10^{10} \text{ s}^{-1}$, soit 1000 fois la valeur réelle pour l'hélium. Ainsi, même au cours de sorties très longues, l'effet Doppler reste négligeable puisque l'impulsion p vérifie toujours

$$p < p_h \quad (\text{V.265})$$

où p_h désigne l'impulsion caractéristique de la largeur homogène de la transition

$$kp_h / M \equiv \Gamma \quad (\text{V.266})$$

Comme on peut le voir sur la figure IV.25, les impulsions maximales atteintes au bout de $10^7 \Gamma^{-1}$ (avec $\Omega_1 = 0,3 \Gamma$) sont toutes inférieures à $250\hbar k$. Or, l'impulsion p_h vaut $p_h \approx 1,9 \cdot 10^4 \hbar k$. La condition (V.264) est donc très bien satisfaite.

On voit sur la figure V.25 que $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ tend vers une constante, ainsi que nous l'avons prévu (équation (V.251)). En outre, la valeur de cette constante est prédite exactement. L'approche vols de Lévy prédit $f(p_{\text{trap}}, \theta \rightarrow \infty) \approx 36,5 \%$. La simulation Monte-Carlo donne $f \approx 36,5 \% \pm 0,8 \%$ (intervalle à 68 % de confiance), ce qui est en parfait accord. On a ici un test précis de l'approche vols de Lévy.

- Cas d'impulsions non confinées, avec effet Doppler : $\mu = \frac{1}{2}, \hat{\mu} = \frac{1}{4}$

Dans ce cas, nous avons pris la simulation Monte-Carlo du chapitre IV, sans aucun aménagement, avec les paramètres de l'hélium métastable. La simulation (figure V.25) montre que $f(\theta)$ croît puis diminue. La prédiction de l'approche vols de Lévy concerne le régime asymptotique :

$$f \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha + \beta(\theta/\Gamma^{-1})^c} \quad (\text{V.267})$$

Selon notre analyse théorique, on devrait avoir $c = \mu - \hat{\mu} = 1/4$. La simulation est parfaitement compatible avec $c = 1/4$, comme le montrent les ajustements. Avec cette simulation, l'incertitude sur c est de 0,05 environ : il est difficile de mesurer des exposants aussi faibles. En effet, même pour la valeur la plus grande de θ , le terme $\beta(\theta/\Gamma^{-1})^c$ ne représente que 6α environ.

On peut expliquer le fait que $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ présente un maximum. En effet, tant que θ est suffisamment petit, les atomes diffusant à l'extérieur du piège ne font pas d'excursions en impulsion suffisamment grandes pour être sensibles à l'effet Doppler : le

[45] Bien que notre approche prédise aussi les valeurs des préfacteurs, nous avons pas testé ici les valeurs des préfacteurs. Nous nous contentons de tester les formes des lois de puissance.

piège se remplit alors comme s'il n'y avait pas d'effet Doppler [46], ce que la comparaison des deux courbes de la figure V.25 montre très clairement. Puis, ils atteignent des impulsions suffisamment grandes pour être sensibles à l'effet Doppler : $\hat{\mu}$ prend alors la valeur 1/4 et le piège se vide selon l'équation (V.267).

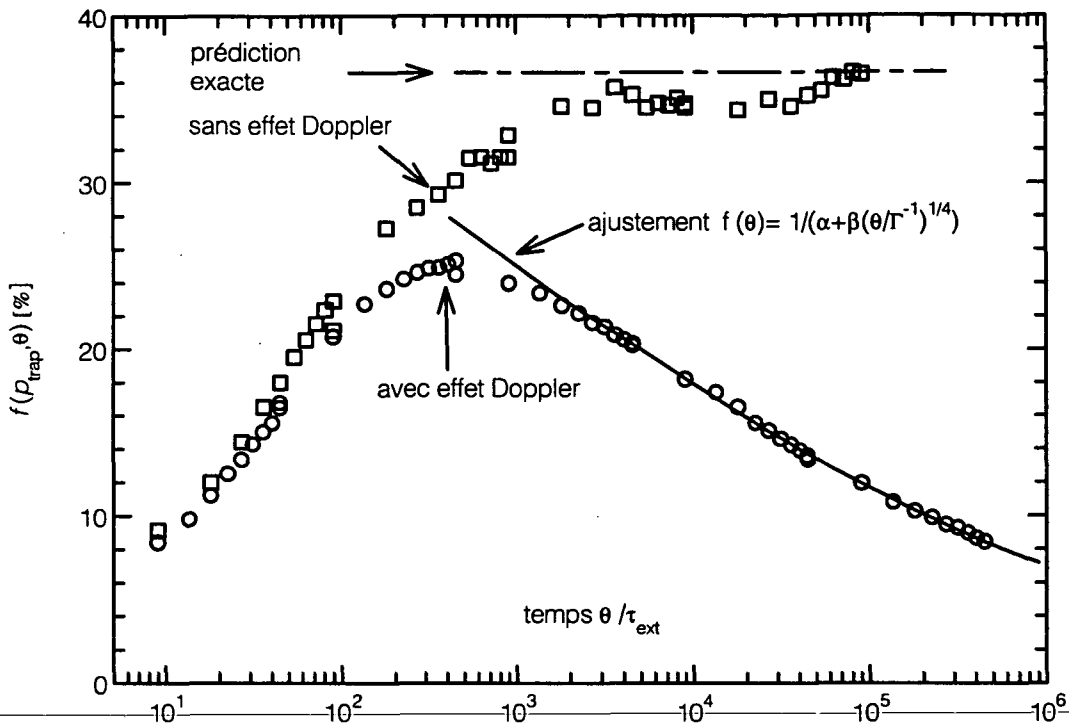


Figure V.25 Test de l'approche vols de Lévy par simulation Monte-Carlo quantiques.

Les paramètres de la simulation sont identiques à ceux de la simulation précédente, sauf lorsqu'on précise le contraire. En particulier, on a $\Omega_1 \approx 0,3 \Gamma$, d'où $\tau_{\text{ext}} \approx 22 \Gamma^{-1}$.

Les carrés correspondent à une simulation Monte-Carlo pour laquelle on a simulé l'absence d'effet Doppler en augmentant artificiellement la largeur naturelle de l'état excité. En l'absence d'effet Doppler, l'approche vols de Lévy permet de prédire la population asymptotiquement piégée sans aucune approximation. Ceci permet un test robuste de la validité de l'approche. Numériquement, on obtient $f(p_{\text{trap}}, \theta \rightarrow \infty) \approx 36,5 \%$, ce qui est exactement la prédiction de l'approche vols de Lévy. Comme on a utilisé 4000 réalisations Monte-Carlo, l'incertitude statistique sur ce résultat est de $\pm 0,8 \%$ (intervalle de confiance à 68 %).

Les cercles correspondent à une simulation Monte-Carlo avec effet Doppler, c'est-à-dire à la situation réelle pour l'hélium métastable. La population $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ commence par croître, tant que les atomes n'ont pas atteint des impulsions où l'effet Doppler joue un rôle. Puis, l'effet Doppler devient sensible, ralentissant la diffusion à l'extérieur du piège : les temps de premier retour augmentent et la population piégée diminue lentement. L'approche vols de Lévy prédit le régime asymptotique où la population décroît. La forme prévue de la décroissance est en très bon accord avec les simulations. L'ajustement donne $\alpha = 1,7 \cdot 10^{-2}$ et $\alpha = 1,8 \cdot 10^{-3}$. On a utilisé 16000 réalisations Monte-Carlo.

[46]

De manière effective, on peut considérer que $\hat{\mu} = 1/2$ à cette échelle de temps.

Faisons une estimation de l'ordre de grandeur du temps θ_{Dop} au bout duquel les atomes atteignent une zone sensible à l'effet Doppler, c'est-à-dire atteignent des impulsions p telles que $|p| \geq p_h$ (cf. équation (V.266)). Les atomes atteignant p_h au cours d'une sortie effectuent un nombre de sauts typique par sortie, noté n , donné par :

$$n \approx \left(\frac{2p_h}{\Delta p} \right)^2 \quad (\text{V.268})$$

(cf. diffusion brownienne habituelle). La première sortie atteignant p_h a donc une durée $\hat{\tau}_{\text{sortie}}$ donnée par

$$\hat{\tau}_{\text{sortie}} \approx n\tau_{\text{ext}} \quad (\text{V.269})$$

Or, comme la distribution des temps de sortie est une loi large, $\hat{\tau}_{\text{sortie}}$ est de l'ordre de θ (dans ce calcul simple, on néglige le temps passé dans le piège, qui est du même ordre que le temps passé à l'extérieur). On en déduit :

$$\theta_{\text{Dop}} \approx \left(\frac{2p_h}{\Delta p} \right)^2 \tau_{\text{ext}} \quad (\text{V.270})$$

L'application numérique pour l'hélium métastable donne $\theta_{\text{Dop}} \approx 10^3 \tau_{\text{ext}}$. On constate que cette estimation correspond bien la date où $f(\theta)$ est maximal.

Remarquons que l'existence d'un maximum pour $f(\theta)$ n'est pas universelle : si la distribution initiale a une largeur plus grande que p_h , l'effet Doppler va jouer dès le début et $f(\theta)$ ne fera que décroître.

En conclusion, ces vérifications numériques confirment l'approche vols de Lévy dans trois situations modèles à une dimension. Ceci donne confiance pour les résultats obtenus à deux et trois dimensions par l'approche vols de Lévy.

La distinction entre les trois modèles est très importante pour la théorie. Soulignons qu'en pratique, à une dimension, elle l'est beaucoup moins : dans le cas testé, pour les durées d'interaction expérimentalement accessibles ($\theta = 10^5 \Gamma^{-1} = 10$ ms), la différence de population entre les 3 situations physiques n'excède pas un facteur 6. Ainsi, la présence de forces de friction n'améliore pas spectaculairement le refroidissement sub-recul à une dimension : la raison en est que $f(\theta)$ évolue lentement, selon des lois de puissance d'exposants faibles. Que le piège se vide ou se remplisse, la valeur atteinte ne s'éloigne guère de l'équation (V.254) (cas $\mu = \hat{\mu}$).

En revanche, on s'attend à ce que la présence des forces de friction soit cruciale à 2 et 3 dimensions : en leur absence, le piège se vide rapidement (plus vite que $1/\theta$) ; en leur présence, on peut espérer un remplissage lent à deux dimensions, et une proportion piégée constante à trois dimensions.

4.7 Rôle de la dimensionnalité

Lorsqu'on accroît le nombre de dimensions à refroidir, le voisinage de $\vec{p} = \vec{0}$ représente une proportion de plus en plus petite du volume des impulsions accessibles à la particule. Dans notre analyse, cette réduction du poids des états de faible impulsion intervient à deux niveaux distincts :

- La loi $P(\tau)$ des temps de piégeage devient de plus en plus étroite quand D augmente. En effet, l'exposant μ est D/α . Dans le piège de rayon p_{trap} , les états de faible impulsion, qui sont aussi ceux de longue durée de vie, voient leurs poids diminuer quand D augmente.

- La loi $\hat{P}(\hat{\tau})$ des temps de premier retour fait apparaître des temps de plus en plus longs quand D augmente. Quand les impulsions sont confinées, $\hat{P}(\hat{\tau})$ est une loi étroite, mais sa valeur moyenne croît comme $(p_{\text{max}} / p_{\text{trap}})^D$. Quand les impulsions ne sont pas confinées, $\hat{P}(\hat{\tau})$ devient de plus en plus large, correspondant à $\hat{\mu} = 1/2$ à 1D, à une loi normalisable à 2D, et à une loi mal définie à 3D (seulement 1 particule sur 3 environ revient).

Ces deux effets, diminution de $\langle \tau \rangle$ et accroissement de $\langle \hat{\tau} \rangle$, tendent à réduire fortement la proportion d'atomes piégés quand la dimensionnalité augmente.

5 Distribution en impulsion et densité dans l'espace des phases

5.1 Distribution du module des impulsions

On va calculer la distribution du *module* de l'impulsion, notée $\pi(p, \theta)$, dans la zone du piège, définie par $|p| < p_{\text{trap}}$. Ce calcul avait déjà été fait par Robin Kaiser à 1D [Kai90]. Ici, nous utilisons une méthode assez différente, qui fait usage du calcul de la population piégée (§ V.4). Nous expliquons brièvement comment le calcul de $\pi(p, \theta)$ pourrait se ramener au calcul de la population piégée $f(p_{\text{trap}}, \theta)$, puis nous développons un calcul encore plus simple de la distribution en impulsion $\pi(p, \theta)$.

Soit $\pi(p, \theta)$ la distribution du *module* de l'impulsion atomique, que l'on ne cherche à estimer que pour $|p| < p_{\text{trap}}$. La normalisation de $\pi(p, \theta)$ s'écrit

$$\int_{p=0}^{p_{\text{trap}}} \pi(p, \theta) dp = f(p_{\text{trap}}, \theta) \tag{V.271}$$

où $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ est la population piégée calculée précédemment (§ V.4).

Un atome qui est dans le piège d'impulsion p , à la date θ , est un atome qui a atteint p à une date $(\theta - \tau)$, et est resté dans ce piège p une durée supérieure ou égale à τ . On en déduit :

[Kai90] R. Kaiser, *Manipulation par laser d'hélium métastable : effet Hanle mécanique, refroidissement sous le recul d'un photon*, Thèse de l'Université Paris VI (1990). Voir § III.A.2.f, p. 266.

$$\pi(p, \theta) = \int_0^\theta \frac{Dp^{D-1}}{p_{\text{trap}}} A(\theta - \tau) \tilde{\Psi}(p, \tau) d\tau \quad (\text{V.272})$$

Cette équation rappelle l'équation (V.123) (§ V.4.2) donnant la population piégée. La quantité $\frac{Dp^{D-1}}{p_{\text{trap}}} A(\theta - \tau)$ est la probabilité de tomber dans un piège d'impulsion p à la date $(\theta - \tau)$ (cf. "arrosage uniforme" de piège : équation (V.40) au § V.3.2). La quantité $\tilde{\Psi}(p, \tau)$ est la probabilité pour un état d'impulsion p d'avoir une durée de vie supérieure ou égale à τ .

On pourrait refaire pour $\pi(p, \theta)$ les calculs faits pour $f(p_{\text{trap}}, \theta)$, mais ce serait fastidieux. En fait, les résultats obtenus V.5.1 pour $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ peuvent être réutilisés ici pour $\pi(p, \theta)$. En effet, dans le cas des résonances noires sélectives en vitesse, on a

$$\tilde{\Psi}(p, \tau) = \int_\tau^\infty w_2(\tau) d\tau \quad (\text{V.273})$$

où $w_2(\tau)$ est la fonction délai introduite au chapitre IV. Dans le régime $\tau \rightarrow \infty$, on a

$$w_2(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_{\text{NC}}'(p)}{2} e^{-\Gamma_{\text{NC}}(p)\tau} \quad (\text{V.274})$$

Par conséquent,

$$\tilde{\Psi}(p, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2} e^{-\Gamma_{\text{NC}}(p)\tau} \quad (\text{V.275})$$

La loi $\tilde{\Psi}(p, \tau)$ est donc une loi étroite ($\langle \tau \rangle, \langle \tau^2 \rangle < \infty$), et on pourrait donc appliquer directement les résultats obtenus au paragraphe 4 pour $f(p_{\text{trap}}, \theta)$, dans le cas $\mu > 1$ [47].

On préfère un raisonnement encore plus simple, qui utilise plus efficacement le calcul de $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ déjà effectué, à l'aide de la relation de normalisation (V.271). On raisonne d'abord sur la probabilité $\pi(\tau, \theta)$ pour un atome de se trouver à la date θ dans un état piège de durée de vie τ . On suppose ici que chaque impulsion est associée de manière déterministe à une durée de vie τ .

Faisons le raisonnement physique suivant : un atome dans un piège de durée de vie τ à la date θ est un atome tombé dans le piège entre $\theta - \tau$ et θ . On a donc

$$\tau \leq \theta : \quad \pi(\tau, \theta) = AP(\tau) \int_{\theta-\tau}^\theta A(t) dt \quad (\text{V.276.a})$$

$$\tau \geq \theta : \quad \pi(\tau, \theta) = AP(\tau) \int_0^\theta A(t) dt \quad (\text{V.276.b})$$

où $P(\tau)$ est la probabilité, pour un atome atteignant le piège, d'atteindre un état de durée de vie τ . Les intégrales représentent la probabilité pour l'atome d'être tombé dans le piège entre $\theta - \tau$ et θ : cette probabilité se calcule à partir de la loi d'arrosage $A(t)$. Notons que tous les pièges de durée de vie supérieure à θ ont été alimentés pendant la même

[47] Pour d'autres mécanismes que les résonances noires, il est raisonnable de supposer également que $\tilde{\Psi}(p, \tau)$ est une loi étroite.

durée θ . La constante A est une constante de normalisation, à ne pas confondre avec la loi d'arrosage $A(t)$.

On peut expliciter l'intégrale dans (V.276). Si $A(t)$ est constant à grand t (cas μ et $\hat{\mu} > 1$), on a alors :

$$\tau \leq \theta : \quad \pi(\tau, \theta) = A\tau P(\tau) \quad (V.277.a)$$

$$\tau \geq \theta : \quad \pi(\tau, \theta) = A\theta P(\tau) \quad (V.277.b)$$

Si $A(t)$ n'est pas constant (cas $\mu < 1$ ou $\hat{\mu} < 1$), alors on obtient les mêmes équations au premier ordre en τ/θ . L'équation (V.277.a) n'est donc valable rigoureusement que pour $\tau \ll \theta$, c'est-à-dire dans les ailes du pic. Cependant, on considérera, pour simplifier les calculs, qu'elle reste valable sur tout le domaine $\tau \leq \theta$.

Calculons $P(\tau)$ à partir de l'hypothèse d'arrosage uniforme des impulsions du piège. Le temps de piégeage τ et l'impulsion p sont reliés par [48]

$$\frac{1}{\tau} = \Gamma'(p) = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha \quad (V.278)$$

On a donc

$$P(\tau)d\tau = P(p)dp \quad (V.279)$$

où $P(p)$ est la loi d'arrosage uniforme en impulsion (cf. équation (V.40)) :

$$P(p) = \frac{Dp^{D-1}}{p_{\text{trap}}^D} \quad (V.280)$$

On déduit des équations (V.277), (V.278) et (V.280) :

$$\tau \leq \theta : \quad \pi(\tau, \theta) = A\tau \frac{Dp^{D-1}}{p_{\text{trap}}^D} \frac{dp}{d\tau} \quad (V.281.a)$$

$$\tau \geq \theta : \quad \pi(\tau, \theta) = A\theta \frac{Dp^{D-1}}{p_{\text{trap}}^D} \frac{dp}{d\tau} \quad (V.281.b)$$

La distribution en impulsion $\pi(p, \theta)$ se déduit de $\pi(\tau, \theta)$ par

$$\pi(p, \theta) = \pi(\tau, \theta) \frac{d\tau}{dp} \quad (V.282)$$

On obtient finalement :

$$p \leq p_\theta : \quad \pi(p, \theta) = \frac{Dp^{D-1}}{p_{\text{trap}}^D} A\theta \quad (V.283.a)$$

$$p \geq p_\theta : \quad \pi(p, \theta) = \frac{Dp^{D-1}}{p_{\text{trap}}^D} \left(\frac{p_0}{p} \right)^\alpha A\tau_0 \quad (V.283.b)$$

où p_θ est une impulsion caractéristique de la date θ :

[48] On suppose ici que τ et p sont liés de manière déterministe. Si ce n'est pas le cas, il apparaît un coefficient $\Gamma(D/\alpha)$ (cf. § V.3.2.3).

$$p_\theta \equiv p_0 \left(\frac{\tau_0}{\theta} \right)^{1/\alpha} \quad (\text{V.284})$$

On vérifie qu'en dimension 1 et pour les résonances noires ($\alpha = 2$), on retrouve le résultat de R. Kaiser [Kai90] ($\pi(p, \theta) \propto 1/p^2$ pour $p > p_\theta$).

Il reste à déterminer le paramètre de normalisation A . D'après la relation de normalisation (V.271), on a :

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \approx A\theta \frac{p_\theta^D}{p_{\text{trap}}^D} + A\tau_0 D \frac{p_0^\alpha}{p_{\text{trap}}^D} \int_{p_\theta}^{p_{\text{trap}}} p^{D-1-\alpha} dp \quad (\text{V.285})$$

Pour calculer l'intégrale, on doit distinguer 3 cas, selon les valeurs respectives de α et de D .

• Si $\alpha > D$ alors, en ne gardant que le terme dominant de l'intégrale ci-dessus, on obtient :

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \approx A\theta \frac{p_\theta^D}{p_{\text{trap}}^D} + A\tau_0 \frac{D}{\alpha - D} \frac{p_0^\alpha}{p_{\text{trap}}^D p_\theta^{\alpha-D}} \quad (\text{V.286})$$

Ces deux termes sont du même ordre. En appliquant (V.284), on a :

$$A \approx \frac{\alpha - D}{D} \frac{p_{\text{trap}}^D}{p_0^D} \frac{f(p_{\text{trap}}, \theta)}{\theta^{1-D/\alpha} \tau_0^{D/\alpha}} \quad (\text{V.287})$$

• Si $\alpha = D$, l'équation (V.285) devient

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \approx A\theta \frac{p_\theta^D}{p_{\text{trap}}^D} + A\tau_0 \frac{D p_0^\alpha}{p_{\text{trap}}^D} \ln(p_{\text{trap}} / p_\theta) \quad (\text{V.288})$$

d'où, en appliquant (V.284), et en ne gardant que le terme dominant :

$$A \approx \frac{p_{\text{trap}}^D}{p_0^D} \frac{f(p_{\text{trap}}, \theta)}{\tau_0 \ln(\theta / \tau_0)} \quad (\text{V.289})$$

• Si $\alpha < D$, l'équation (V.285) devient

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \approx A\theta \frac{p_\theta^D}{p_{\text{trap}}^D} + A\tau_0 \frac{D}{D - \alpha} \frac{p_0^\alpha}{p_{\text{trap}}^\alpha} \quad (\text{V.290})$$

d'où, en appliquant (V.284), et en ne gardant que le terme dominant :

$$A \approx \frac{D - \alpha}{D} \frac{p_{\text{trap}}^\alpha}{p_0^\alpha} \frac{f(p_{\text{trap}}, \theta)}{\theta} \quad (\text{V.291})$$

En résumé, on a :

$$\alpha > D : \quad A \approx \frac{\alpha - D}{\alpha} \frac{p_{\text{trap}}^D}{p_0^D} \frac{f(p_{\text{trap}}, \theta)}{\tau_0^{D/\alpha} \theta^{1-D/\alpha}} \quad (\text{V.292.a})$$

[Kai90] R. Kaiser, *Manipulation par laser d'hélium métastable : effet Hanle mécanique, refroidissement sous le recul d'un photon*, Thèse de l'Université Paris VI (1990). Voir § III.A.2.f, p. 266.

$$\alpha = D : \quad A \approx \frac{p_{\text{trap}}^D f(p_{\text{trap}}, \theta)}{p_0^D \tau_0 \ln(\theta / \tau_0)} \quad (\text{V.292.b})$$

$$\alpha < D : \quad A \approx \frac{D - \alpha}{D} \frac{p_{\text{trap}}^\alpha f(p_{\text{trap}}, \theta)}{p_0^\alpha \tau_0} \quad (\text{V.292.c})$$

5.2 Distribution d'une composante de l'impulsion et largeur de cette distribution

La distribution d'une seule composante de l'impulsion, notée $\pi_x(p_x, \theta)$, est plus "parlante" que la distribution des modules $\pi(p, \theta)$ pour l'analyse des distributions obtenues (en particulier, la distribution $\pi_x(p_x, \theta)$ d'une composante présente toujours un pic en $p_x = 0$, alors qu'à 2D et 3D, $\pi(p, \theta)$ tombe à 0 en $p = 0$).

Pour déduire $\pi_x(p_x, \theta)$ de $\pi(p, \theta)$, il faut faire une hypothèse supplémentaire, celle de l'isotropie de la distribution en impulsion. Nous allons faire ci-dessous le calcul uniquement à 2D, et nous donnerons également les résultats à 1D et à 3D, qui s'obtiennent de la même manière.

Relions tout d'abord la distribution $\pi_{x,y}(p_x, p_y, \theta)$ des deux composantes de l'impulsion à la distribution $\pi(p, \theta)$ des modules. L'hypothèse d'isotropie implique que $\pi_{x,y}(p_x, p_y, \theta)$ est constant sur toute couronne de rayon p , de largeur dp , d'où :

$$\pi(p, \theta) dp = 2\pi p \pi_{x,y}(p_x, \sqrt{p^2 - p_x^2}, \theta) dp \quad (\text{V.293})$$

En posant $p_y = \sqrt{p^2 - p_x^2}$, on obtient

$$\pi_{x,y}(p_x, p_y, \theta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} \pi(\sqrt{p_x^2 + p_y^2}, \theta) \quad (\text{V.294})$$

En faisant ce calcul à 1, 2 et 3D, on obtient

$$1D : \quad \pi_x(p_x, \theta) = \frac{1}{2} \pi(|p_x|, \theta) \quad (\text{V.295.a})$$

$$2D : \quad \pi_{x,y}(p_x, p_y, \theta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} \pi(\sqrt{p_x^2 + p_y^2}, \theta) \quad (\text{V.295.b})$$

$$3D : \pi_{x,y,z}(p_x, p_y, p_z, \theta) = \frac{1}{4\pi(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)} \pi(\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}, \theta) \quad (\text{V.295.c})$$

Etant donnée la forme de $\pi(p, \theta)$ (équation (V.283)), la distribution $\pi_{x,y}(p_x, p_y, \theta)$ n'est pas factorisable. Pour représenter la distribution $\pi_x(p_x, \theta)$ d'une composante de l'impulsion, on a alors le choix entre plusieurs fonctions tirées de $\pi_{x,y}(p_x, p_y, \theta)$. On pourrait intégrer sur la variable p_y , mais cela pose des problèmes d'intégration dans le cas général (seul $\alpha = 2$ permet des calculs complets). Aussi, on préfère définir $\pi_x(p_x, \theta)$ comme une simple "coupe" de $\pi_{x,y}(p_x, p_y, \theta)$ en posant :

$$\pi_x(p_x, \theta) \equiv C_{2D} \pi_{x,y}(p_x, p_y = 0, \theta) \quad (\text{V.296})$$

où la coefficient C_{2D} est un coefficient de normalisation. Ceci conduit à

$$1D : \quad \pi_x(p_x, \theta) = C_{1D} \pi(|p_x|, \theta) = \frac{1}{2} \pi(|p_x|, \theta) \quad (\text{V.297.a})$$

$$2D : \quad \pi_x(p_x, \theta) = \frac{C_{2D}}{2\pi|p_x|} \pi(|p_x|, \theta) \quad (\text{V.297.b})$$

$$3D : \quad \pi_x(p_x, \theta) = \frac{C_{3D}}{4\pi|p_x|^2} \pi(|p_x|, \theta) \quad (\text{V.297.c})$$

d'où, en introduisant l'expression de $\pi(p, \theta)$ donnée par (V.283) :

$$|p_x| \leq p_\theta \quad \boxed{\pi_x(p_x, \theta) = \frac{R_D}{p_{\text{trap}}^D} A \theta} \quad (\text{V.298.a})$$

$$|p_x| \geq p_\theta \quad \boxed{\pi_x(p_x, \theta) = \frac{R_D}{p_{\text{trap}}^D} \frac{\tau_0}{\theta} \left(\frac{p_0}{|p_x|} \right)^\alpha A \theta} \quad (\text{V.298.b})$$

où R_D est un coefficient de normalisation dépendant de la dimensionnalité

$$R_{1D} = C_{1D} \times 1, \quad R_{2D} = \frac{C_{2D}}{2\pi} \times 2, \quad R_{3D} = \frac{C_{3D}}{4\pi} \times 3 \quad (\text{V.299})$$

La distribution $\pi_x(p_x, \theta)$ a l'allure représentée sur la figure V.26. La mi-largeur à $e^{-1/2}$, notée δp_θ , est donnée par

$$\boxed{\delta p_\theta = p_0 \left(\frac{\tau_0}{\theta} \right)^{1/\alpha} e^{1/2\alpha}} \quad (\text{V.300})$$

Pour les résonances noires, on a $\alpha = 2$ et on retrouve la loi de variation démontrée semi-quantitativement en 1988 à une dimension : $\delta p_\theta \propto \theta^{-1/2}$. Ce résultat est aussi en accord avec les simulations numériques réalisées à deux dimensions [MaA92]. Remarquons que l'équation (V.300) donne un résultat vérifié par les simulations numériques (résolution des équations de Bloch optiques) à mieux que 10 % près à une dimension, alors que l'estimation de 1988 (cf. équation (I.26)) s'écartait de plus de 20 % du résultat numérique (le facteur correctif est $e^{1/2\alpha}$).

Notons aussi que la relation (V.300) donne la finesse du pic pour une dimensionnalité quelconque : la finesse du pic δp_θ des atomes refroidis ne dépend pas de la dimensionnalité D . Seul le remplissage du pic en dépend. Notre calcul confirme également que δp_θ peut diminuer indéfiniment. Ces résultats sont importants en pratique et n'étaient pas évidents *a priori*.

[MaA92] F. Mauri and E. Arimondo, *Two Dimension Selective Coherent Population Trapping Controlled by a Phase Shift*, Appl. Phys. B 54, p. 420-427 (1992).

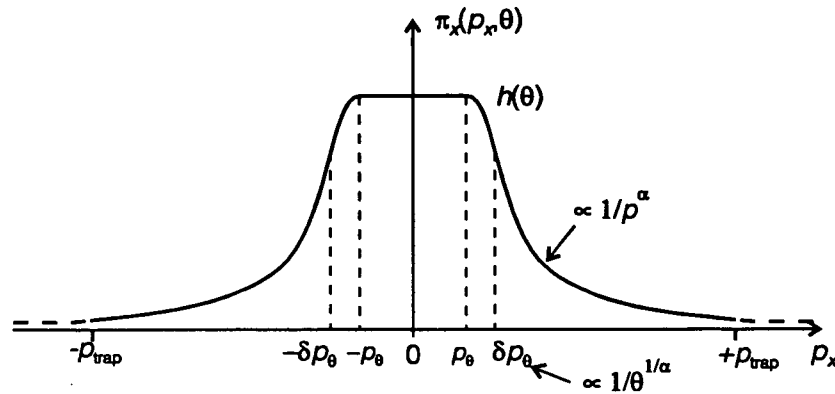


Figure V.26 Allure des distributions en impulsion $\pi_x(p_x, \theta)$ pour $|p| < p_{\text{trap}}$. Quelle que soit la dimensionnalité, la distribution $\pi_x(p_x, \theta)$ se compose d'un pic de demi-largeur δp_θ et d'ailes décroissant comme $1/p^\alpha$. L'existence du plateau est dû au fait qu'une expérience de durée θ ne discrimine pas les impulsions plus petites que p_θ , qui ont une durée de vie supérieure à θ .

Les ailes du pic diminuent en loi de puissance ($\pi_x(p_x, \theta) \propto |p_x|^{-\alpha}$), très différente de la gaussienne correspondant à l'équilibre thermodynamique. On retrouve ici le fait que les atomes refroidis par laser sont hors équilibre thermodynamique. Toutefois, la plupart des modèles de refroidissement au-dessus du recul, comme le refroidissement Doppler, donnaient des distributions gaussiennes (solutions stationnaires d'équations de Fokker-Planck).

5.3 Hauteur du pic en impulsion

On peut également obtenir la hauteur du pic en impulsion, notée $h(\theta)$:

$$h(\theta) = \pi_x(p_x = 0, \theta) = \frac{R_D}{p_{\text{trap}}^D} A\theta \tag{V.301}$$

Explicitons ce résultat dans deux cas importants pour les résonances noires 1D. En appliquant simplement cette équation, on obtient

$$\alpha > D : \quad h(\theta) = \frac{R_D (\alpha - D) \theta^{D/\alpha}}{\alpha p_0^D \tau_0^{D/\alpha}} f(p_{\text{trap}}, \theta) \tag{V.302.a}$$

$$\alpha = D : \quad h(\theta) = \frac{R_D \theta}{p_0^D \tau_0 \ln(\theta / \tau_0)} f(p_{\text{trap}}, \theta) \tag{V.302.b}$$

$$\alpha < D : \quad h(\theta) = \frac{R_D (D - \alpha) \theta}{D p_{\text{trap}}^{D-\alpha} p_0^\alpha \tau_0} f(p_{\text{trap}}, \theta) \tag{V.302.c}$$

5.4 Population refroidie et densité dans l'espace des phases

5.4.1 Démarche et définitions

Le refroidissement par résonances noires permet-il d'accroître la densité n_ϕ dans l'espace des phases ? La réponse n'est pas évidente : d'une part, la distribution en impulsion possède un pic de plus en plus haut à $p = 0$; d'autre part, le nombre d'atomes concernés par ce pic peut devenir de plus en plus faible quand θ augmente.

Définissons tout d'abord, la notion de *population refroidie*, notée $r(\theta)$: $r(\theta)$ est la proportion d'atomes se trouvant dans la partie centrale ($|p| < p_\theta$) du pic en impulsion :

$$r(\theta) \equiv P(|p| < p_\theta) \quad (\text{V.303})$$

où p_θ est donné par l'équation (V.284). Cette définition est non-ambigüe et ne contient pas de paramètre arbitraire tel que p_{trap} (qui intervient dans la population piégée $f(p_{\text{trap}}, \theta)$). Elle néglige toutes les ailes du pic, c'est-à-dire tous les atomes vérifiant $p_\theta < |p| < p_{\text{trap}}$, de sorte que $r(\theta)$ est une *sous-estimation de l'efficacité du refroidissement*. Cependant, cette définition a l'avantage de la simplicité, et on va l'utiliser pour calculer la densité n_ϕ dans l'espace des phases.

Pour prendre en compte le fait que le refroidissement sub-recul ne refroidit pas forcément toute la population atomique ($r(\theta) < 1$), on suppose qu'on peut éliminer par un processus de sélection en vitesse [49] tous les atomes non refroidis, c'est-à-dire ne vérifiant pas $|p| < p_\theta$. La densité n_ϕ dans l'espace des phases s'écrit alors :

$$n_\phi = \frac{Nr(\theta)}{V_x V_p} \quad (\text{V.304})$$

où N est le nombre d'atomes initialement présents, et où V_x et V_p sont les volumes occupés par les atomes, respectivement dans l'espace réel et dans l'espace des impulsions.

5.4.2 Calcul de la proportion d'atomes refroidis

D'après la définition (V.303), la proportion $r(\theta)$ d'atomes refroidis est reliée à la distribution du module des impulsions de l'équation (V.283) par :

$$r(\theta) = \int_0^{p_\theta} \pi(p, \theta) dp \quad (\text{V.305})$$

On en déduit

$$r(\theta) = A\theta \left(\frac{p_\theta}{p_{\text{trap}}} \right)^D \quad (\text{V.306})$$

d'où, à l'aide de l'équation (V.292) :

$$\alpha > D : \quad r(\theta) \approx \frac{\alpha - D}{\alpha} f(p_{\text{trap}}, \theta) \quad (\text{V.307.a})$$

[49]

Un processus de sélection particulièrement efficace s'obtient à l'aide de la technique des pulses Raman développée dans l'équipe de Stanford.

$$\alpha = D : \quad r(\theta) \approx \frac{1}{\ln(\theta / \tau_0)} f(p_{\text{trap}}, \theta) \quad (\text{V.307.b})$$

$$\alpha < D : \quad r(\theta) \approx \frac{(D - \alpha) p_0^{D-\alpha} \tau_0^{D/\alpha-1}}{D p_{\text{trap}}^{D-\alpha} \theta^{D/\alpha-1}} f(p_{\text{trap}}, \theta) \quad (\text{V.307.c})$$

On remarque que p_{trap} est absent des équations (V.307.a) et (V.307.b), comme on s'y attend. En revanche, p_{trap} apparaît dans l'équation (V.307.c). Comme $r(\theta)$ est par définition indépendant de p_{trap} , cela signifie que les termes en p_{trap} de $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ compensent le terme $p_{\text{trap}}^{D-\alpha}$.

5.4.3 Densité dans l'espace des phases

Pour calculer la densité n_ϕ dans l'espace des phases, on doit connaître la proportion $n(\theta)$ d'atomes refroidis, le volume V_p occupé dans l'espace des impulsions et le volume V_x occupé dans l'espace des positions que l'on va calculer.

On peut montrer facilement que la diffusion en position produit un effet négligeable sur V_x . Pour cela, majorons le déplacement Δx typique dû à la diffusion en position, sur une durée θ . Les atomes fluorescent au maximum avec le taux $\Gamma/2$. Le nombre n_θ de photons spontanés émis est donc au maximum :

$$n_\theta = \theta \Gamma/2 \quad (\text{V.308})$$

En présence d'un mécanisme de friction, la vitesse des atomes est bornée et a une valeur typique $v_{\text{max}} \equiv p_{\text{max}}/M$. Le libre parcours l entre deux émissions de photons spontanés est typiquement

$$l \approx v_{\text{max}} / (\Gamma/2) \quad (\text{V.309})$$

Le déplacement Δx typique au bout de n_θ sauts (cf. mouvement brownien habituel) est donc

$$\Delta x \approx \sqrt{n_\theta} l = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\Gamma/2}} v_{\text{max}} \quad (\text{V.310})$$

L'application numérique avec $v_{\text{max}} \equiv 3v_R \approx 30 \text{ cm.s}^{-1}$, $\theta = 10 \text{ ms}$ et $\Gamma = 10^7 \text{ s}^{-1}$ donne $\Delta x \approx 15 \text{ }\mu\text{m}$. Cet étalement dû à la diffusion spatiale est négligeable devant le rayon initial du nuage, de l'ordre de $500 \text{ }\mu\text{m}$.

On peut maintenant calculer le comportement de n_ϕ sachant que N et V_x sont constants :

$$n_\phi \propto r(\theta) / V_p \quad (\text{V.311})$$

Or le volume dans l'espace des phases est donné par

$$V_p = S_D p_\theta^D \quad (\text{V.312})$$

où $S_{1D} = 2$, $S_{2D} = \pi$, $S_{3D} = 4\pi/3$. En appliquant (V.307) et (V.284), on obtient la comportement suivant :

$$\alpha > D : \quad n_\phi(\theta) \approx \theta^{D/\alpha} f(p_{\text{trap}}, \theta) \quad (\text{V.313.a})$$

$$\alpha = D : \quad \boxed{n_\varphi(\theta) \approx \frac{1}{\ln(\theta)} f(p_{\text{trap}}, \theta)} \quad (\text{V.313.b})$$

$$\alpha < D : \quad \boxed{n_\varphi(\theta) \approx \theta f(p_{\text{trap}}, \theta)} \quad (\text{V.313.c})$$

5.5 Application aux résonances noires

Les résultats concernant la population piégée, la population refroidie, la hauteur de la distribution en impulsion et la densité dans l'espace des phases sont rassemblées pour les résonances noires dans le tableau V.7. En ce qui concerne la largeur, on a $\delta p_\theta \propto \theta^{-1/\alpha}$ pour toute dimensionnalité.

Configuration	$f(p_{\text{trap}}, \theta)$	$r(\theta)$	$h(\theta)$	$n_\varphi(\theta)$
1D avec friction	$\rightarrow 1$	$\rightarrow 1/2$	$\propto \theta^{1/2}$	$\propto \theta^{1/2}$
1D sans friction ni effet Doppler	$\rightarrow c, 0 < c < 1$	$\rightarrow c$	$\propto \theta^{1/2}$	$\propto \theta^{1/2}$
1D sans friction, avec effet Doppler	$\propto 1/\theta^{1/4}$	$\rightarrow f(p_{\text{trap}}, \theta)/2$	$\propto \theta^{1/4}$	$\propto \theta^{1/4}$
2D avec friction	$\rightarrow 1$	$\rightarrow 1/\ln(\theta/\tau_0)$	$\propto \theta/\ln(\theta/\tau_0)$	$\propto \theta/\ln(\theta/\tau_0)$
3D avec friction	$\rightarrow c, 0 < c < 1$	$\propto 1/\theta^{1/2}$	$\propto \theta$	$\propto \theta$

Tableau V.7 *Dynamique du refroidissement par résonances noires.* On a indiqué le comportement asymptotique ($\theta \rightarrow \infty$) de la population piégée $f(p_{\text{trap}}, \theta)$, de la population refroidie $r(\theta)$, de la hauteur $h(\theta)$ du pic en impulsion à $p = 0$ et de la densité dans l'espace des phases $n_\varphi(\theta)$.

Ce tableau appelle deux commentaires .

- il confirme le seul résultat connu antérieurement. Dans le cas 1D, lorsque l'effet Doppler est négligeable, on a $h(\theta) \propto \theta^{1/2}$. Ce résultat avait été obtenu numériquement dans [AAK89].

- les résonances noires sont un processus de refroidissement efficace bien que, dans plusieurs configurations, elles ne refroidissent qu'une partie des atomes. Cela n'empêche pas la hauteur du pic à $p = 0$, ni la densité dans l'espace des phases de croître. En termes de densité dans l'espace des phases, c'est à 3D que les résonances noires sont les plus efficaces, avec un croissance linéaire en temps.

[AAK89] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the one-photon recoil energy by velocity-selective coherent population trapping : theoretical analysis*, J. Opt. Soc. Am. B 6, p. 2112-2124 (1989).

Il est intéressant d'expliciter ces résultats pour les résonances noires à 3D, et de faire un application numérique. On considère qu'on a initialement 10^5 atomes avec une densité $n = 10^9$ atomes.cm⁻³, et une impulsion typique $\delta p_i = 3\hbar k$ (piège d'hélium métastable actuel). Le refroidissement par résonances noires dure $\theta = 10^5 \Gamma^{-1} = 10$ ms. On prend une intensité laser correspondant à $\Omega_1 = 0,5 \Gamma$ et on suppose qu'avec un désaccord $\delta = +2 \Gamma$ l'effet Sisyphé confine les impulsions dans une zone de rayon $p_{\max} = 2\hbar k$.

D'après l'équation (V.300), on a

$$\delta p_\theta = p_0 e^{1/4} \left(\frac{\tau_0}{\theta} \right)^{1/2} \quad (\text{V.300}) \text{ (rappel)}$$

En posant $\tau_0 = \tau_{\text{ext}} = 2 / \Gamma'_C$, on a, d'après l'équation (I.18),

$$\tau_0 \Gamma = 8 \frac{(\delta / \Gamma)^2 + 1/4}{(\Omega_1^2 / \Gamma)^2} \quad (\text{V.314})$$

Ceci impose la valeur de p_0 . De (I.19) et (V.43), on déduit

$$\frac{p_0}{\hbar k} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\hbar \Gamma}{E_R} \frac{(\Omega_1 / \Gamma)^2}{((\delta / \Gamma)^2 + 1/4)^{1/2}} \quad (\text{V.315})$$

(Noter que $p_0 = 2^{1/2} p_{\text{Raman}}$). En introduisant les expressions de p_0 et τ_0 dans (V.300), on obtient la demi-largeur en impulsion :

$$\boxed{\frac{\delta p_\theta}{\hbar k} = \frac{e^{1/4}}{4} \frac{\hbar \Gamma}{E_R} \frac{\Omega_1 / \Gamma}{\sqrt{\theta \Gamma}}} \quad (\text{V.316})$$

L'application numérique donne $\delta p_\theta \approx 0,019 \hbar k$. La température correspondante est $T \approx T_R / 2700 \approx 1,5$ nK.

On obtient la population piégée à partir de (V.261) :

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \approx \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \frac{p_{\text{trap}} p_0^2}{p_{\max}^3} \quad (\text{V.317})$$

ce qui donne, en introduisant la valeur de p_0 :

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \approx \frac{3\sqrt{\pi}}{256} \frac{p_{\text{trap}} / \hbar k}{(p_{\max} / \hbar k)^3} \left(\frac{\hbar \Gamma}{E_R} \right)^2 \frac{(\Omega_1 / \Gamma)^4}{(\delta / \Gamma)^2 + 1/4} \quad (\text{V.318})$$

En prenant $p_{\text{trap}} = 0,5 \hbar k$, on a $f(p_{\text{trap}}, \theta) \approx 2,8 \%$.

Le calcul de la population refroidie se fait à partir de (V.307.c) :

$$r(\theta) \approx \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \frac{p_0^3}{p_{\max}^3} \left(\frac{\tau_0}{\theta} \right)^{1/2} \quad (\text{V.319})$$

On remarque que, comme attendu, p_{trap} n'apparaît pas dans l'expression de $r(\theta)$. En introduisant les expressions de τ_0 et de p_0 , on obtient :

$$\boxed{r(\theta) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{1024} \frac{1}{(p_{\max} / \hbar k)^3} \left(\frac{\hbar \Gamma}{E_R} \right)^3 \frac{(\Omega_1 / \Gamma)^5}{(\delta / \Gamma)^2 + 1/4} \frac{1}{\sqrt{\theta \Gamma}}} \quad (\text{V.320})$$

L'application numérique donne $r(\theta) \approx 2,8 \cdot 10^{-4}$. On remarque la très forte dépendance en Ω_1 [50].

Pour calculer la hauteur $h(\theta)$ de la distribution en impulsion, on n'applique pas l'équation (V.302), qui exige de connaître le paramètre R_D que nous n'avons pas calculé. On calcule plutôt l'accroissement de la hauteur, noté $a_h(\theta)$, grâce aux résonances noires. Celui-ci est donné par

$$a_h(\theta) = r(\theta) \left(\frac{\delta p_i}{p_\theta} \right)^3 \quad (\text{V.321})$$

Un calcul sans difficulté conduit à

$$a_h(\theta) = \frac{\sqrt{\pi}}{16} \left(\frac{\delta p_i}{p_{\max}} \right)^3 \frac{(\Omega_1 / \Gamma)^2}{(\delta / \Gamma)^2 + 1/4} \theta \Gamma \quad (\text{V.322})$$

L'application numérique donne un gain $a_h(\theta)$ de l'ordre de 2200.

Le gain dans l'espace des phases est également donné par $a_h(\theta)$, puisque $n_\varphi \propto r(\theta) / (\delta p_\theta)^3$. Les résonances noires peuvent donc apporter un gain d'un facteur 2000 dans l'espace des phases, avec le dispositif expérimental actuel. Ce gain est substantiel, mais il ne suffit pas pour atteindre le régime de condensation de Bose-Einstein donné par $n_\varphi \hbar^3 \geq 1$. En effet, dans le piège d'hélium, on a seulement $n_\varphi \hbar^3 \approx 4,5 \cdot 10^{-8}$. Après refroidissement par résonances noires à 3D, on aurait donc $n_\varphi \hbar^3 \approx 10^{-4}$. Pour atteindre le seuil de condensation, il faut donc soit partir d'un piège beaucoup plus dense, soit refroidir plus longtemps.

6 Limites et potentialités du refroidissement sub-recul

6.1 Quelles limites ?

La question des limites du refroidissement sub-recul, pour importante qu'elle soit, n'a jamais fait, à notre connaissance, l'objet d'un traitement d'ensemble. Un traitement exhaustif est au-delà de la portée de ce paragraphe V.6. Nous donnons ici quelques considérations sur ces limites, en traitant des exemples à l'aide des techniques développées dans ce chapitre. Le terme de "limite" ne doit pas être entendu ici avec un sens négatif : la recherche de limites aide aussi à mieux cerner les potentialités du refroidissement sub-recul.

On peut classer les causes de limitations en deux catégories :

- les limitations résultant de mécanismes de sortie parasite des états noirs (cf. § V.6.1.1). Ces phénomènes limitent la durée de vie des états noirs, et suppriment la

[50] Noter que p_{\max} dépend également de Ω_1 , par le biais du mécanisme physique. Dans le calcul présenté ici, on a donné pour p_{\max} une valeur raisonnable, pour des valeurs typiques de Ω_1 (quelques Γ). Une théorie complète, qui dépasse le cadre de ce calcul devrait inclure la dépendance de p_{\max} en Ω_1 .

"queue de la distribution des temps de piégeage $P(\tau)$, qui était à l'origine des vols de Lévy. Cependant, nous allons voir que les méthodes utilisées pour étudier les vols de Lévy donnent des informations intéressantes.

- les limitations résultant des propriétés des marches au hasard (cf. § V.6.1.2). Ce sont des applications naturelles des techniques de vols de Lévy.

Ces catégories ne sont pas étanches : les limites dues à certains processus parasites, comme les transitions d'intercombinaison de l'hélium, s'étudient bien avec les concepts de marche au hasard.

6.1.1 Mécanismes de sortie parasite

Le rôle néfaste des processus de sortie parasite des états noirs a été identifié dès les premiers travaux sur le refroidissement sub-recul. Les causes de sortie parasite sont multiples :

- a) champ magnétique résiduel entraînant une absorption parasite de photons laser (cf. II.4.4) ;
- b) absorption de photons laser résonnants, diffusés de manière incohérente par le montage ;
- c) absorption de photons multiples diffusés par le nuage d'atomes froids ;
- d) absorption de photons du corps noir ;
- e) collisions avec les atomes du gaz résiduel ;
- f) collisions entre atomes ultra-froids ;
- g) caractère non fermé de la transition atomique utilisée pour le refroidissement laser.

...

Tous ces effets parasites se traduisent par un taux de départ non-nul des états à $p = 0$, ce qui détruit les états noirs. Cependant, on ne peut pas les traiter tous de la même manière.

• Certains processus parasites se caractérisent par le fait que l'état noir est détruit avec un taux ne dépendant pas de l'état du nuage atomique refroidi et par le fait que l'état atomique perturbé est susceptible d'être refroidi à nouveau. C'est le cas des processus (a), (b), (d) et éventuellement (e). Le taux de pertes $\Gamma_{\text{pertes}}(p)$ est la somme du taux de fluorescence habituel et du taux de dissipation parasite, noté Γ_{diss} :

$$\Gamma_{\text{pertes}}(p) = \Gamma(p) + \Gamma_{\text{diss}} \quad (\text{V.323})$$

Dans ce cas, tout se passe comme si le taux de fluorescence ne s'annulait pas en $p = 0$ (figure V.27). *Nous traitons ce cas au paragraphe V.6.2.*

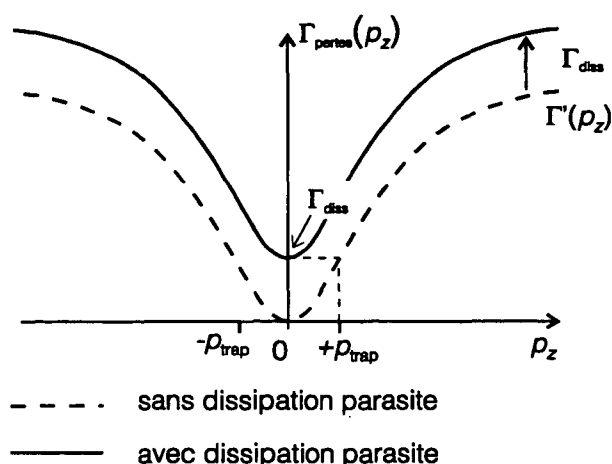


Figure V.27 Refroidissement par résonances noires en présence de processus de sortie parasite. Le processus parasite empêche le taux de départ Γ_{pertes} de s'annuler complètement en $p = 0$. Ceci produit un changement qualitatif dans l'analyse vols de Lévy : la valeur moyenne $\langle \tau \rangle$ des temps de piégeage devient forcément finie ($\langle \tau \rangle \leq 1/\Gamma_{\text{diss}}$).

- Dans un deuxième type de processus parasites, l'état noir est détruit avec un taux dépendant de l'état du nuage atomique, et l'état atomique perturbé est susceptible d'être refroidi à nouveau. Cette situation présente un "bouclage" (récursivité) intéressant : le taux de destruction dépend de l'état du nuage atomique, qui dépend lui-même du taux de destruction... Les processus (c), (f) et éventuellement (e) (collisions élastiques dépendant de l'état interne de l'atome froid) sont dans ce cas. *Nous traitons au paragraphe V.6.3 du cas (c) de la diffusion multiple.*

- Enfin, il existe un troisième type de processus parasites dans lequel l'état noir est détruit et l'atome aboutit dans un état qui ne peut pas être refroidi à nouveau. Ce processus est beaucoup plus néfaste que les deux précédents : les atomes sont ici définitivement perdus. Les collisions (e) ou (f), lorsqu'elles sont inélastiques ont généralement un tel effet.

L'hélium métastable présente un problème particulier (g) : la transition $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_1$ utilisée pour le refroidissement sub-recul n'est pas parfaitement fermée à cause des transitions d'intercombinaison entre états triplets et états singulets. Jusqu'ici les auteurs ont mentionné l'instabilité du niveau 2^3S_1 comme source possible de limitation. Mais la durée de vie de ce niveau est de 8000 s et est supérieure par 6 ordres de grandeur aux durées d'interaction actuellement accessibles. En revanche, le taux de transition $2^3P_1 \rightarrow 1^1S_0$ est de $(5 \text{ ms})^{-1}$ (cf. § II.2.1.3), ce qui donne une échelle de temps tout-à-fait pertinente pour des expériences réalisables.

Ces pertes irréversibles dues aux raies d'intercombinaison limitent en pratique le nombre de photons dont on dispose pour effectuer le refroidissement sub-recul. Ainsi, le rapport des taux de branchement entre la transition $2^3P_1 \rightarrow 1^1S_0$ (intercombinaison) et la transition $2^3P_1 \rightarrow 2^3S_1$ (refroidissement) est de 1 pour $5 \cdot 10^4$. Ceci signifie qu'après avoir

échangé typiquement $5 \cdot 10^4$ photons sur la transition $2^3P_1 \rightarrow 2^3S_1$, l'atome a une probabilité non négligeable d'être irrémédiablement perdu.

Dans la perspective de l'optimisation du refroidissement, l'objectif sera donc d'atteindre la température la plus basse possible en utilisant un nombre fini de photons, ici $5 \cdot 10^4$. En terme de mouvement brownien, la question devient : quel est le plus petit piège que l'on puisse atteindre en un nombre fini de pas ? *C'est l'objet du paragraphe V.6.5.*

6.1.2 Limites issues des propriétés des marches aléatoires

Quelles sont les limites du refroidissement sub-recul en l'absence de processus parasites ? Y en a-t-il ? A ces questions non triviales, nous avons déjà donné des éléments de réponse :

- la largeur δp_θ des pics obtenus peut diminuer indéfiniment quand on accroît la durée d'interaction ;
- la proportion d'atomes piégés f ou refroidis est éventuellement limitée à une valeur inférieure à 1.

Le mot "limite" ne signifie pas ici "valeur limite" (température limite...). Les limites du refroidissement sub-recul sont plutôt des *contraintes* sur les lois qui gouvernent la diminution de température et l'évolution de la population refroidie.

Pour cerner ces contraintes, nous nous posons un problème d'optimisation : quel est le meilleur compromis entre la finesse des pics et la proportion d'atomes piégés. Dans ce chapitre, nous avons insisté sur les lois de puissance des temps caractéristiques du refroidissement sub-recul et des marches au hasard. C'est donc en jouant sur ces lois de puissance que nous allons réaliser l'optimisation.

Dans un premier temps (§ V.6.4), nous considérons l'optimisation du modèle de diffusion pris jusqu'ici ($\Gamma(p \approx 0) \propto p^\alpha$). Puis nous prendrons un modèle encore plus idéalisé (§ V.6.5) pour répondre à la question : quelle température la plus basse peut-on atteindre en un temps fini, ou avec un nombre fini de photons ?

6.2 Processus de sortie parasite

Les cas de refroidissement sub-recul en présence de dissipation parasite se traitent très facilement dans l'approche vols de Lévy [51]. En présence de dissipation parasite, le taux de départ de l'impulsion p est le taux de fluorescence habituel auquel se rajoute le terme dissipatif (cf. équation (V.232))

[51] Le cas des résonances noires à 1D a été traité par [MaM92] : B.G. Matisov and I.E. Mazets, Limit of laser cooling of atoms by velocity selective coherent population trapping, J. Phys. B 26, p. 3795-3802 (1993). Ces auteurs ont repris la méthode de Alekseev et Krylova, en introduisant un terme dissipatif. Le cas traité par [MaM92] apparaît comme un cas particulier du cas général traité ici. Nous sommes en accord avec [MaM92]. Toutefois, ces auteurs appliquent leur traitement à l'effet des raies d'intercombinaison, ce qui ne nous semble pas correct : les transitions d'intercombinaison font perdre les atomes définitivement (cf. § V.6.5) ; le traitement de ces auteurs, et celui de ce paragraphe, supposent au contraire que les atomes dont la phase a été détruite peuvent encore participer au refroidissement.

$$\Gamma_{\text{perte}}(p) = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^\alpha + \Gamma_{\text{diss}} \quad (\text{V.324})$$

On définit un temps de dissipation parasite θ_{diss} par :

$$\theta_{\text{diss}} \equiv 1/\Gamma_{\text{diss}} \quad (\text{V.325})$$

Les temps de piégeage sont donc tous inférieurs à θ_{diss} . Par conséquent, la valeur moyenne $\langle \tau \rangle$ des temps de piégeage est finie. La distribution des temps de piégeage n'est plus une loi large [52]. Cependant les outils mis en place pour traiter les cas de vols de Lévy vont nous être utiles.

Supposons que l'on a de la friction, de telle sorte que la valeur moyenne $\langle \hat{\tau} \rangle$ des temps de premiers retours soit finie aussi. On a alors un premier résultat important : la population piégée tend vers une constante strictement inférieure à 1 :

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} c, \quad 0 < c < 1 \quad (\text{V.326})$$

Passons maintenant à la distribution des atomes piégés. Comme $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont finies, la loi d'arrosage $A(t)$ est constante à t grand. Par conséquent, l'équation (V.277) s'applique de manière exacte. Si on se place à une échelle de temps θ plus grande que θ_{diss} , c'est-à-dire plus grand que tous les temps de piégeage, seule l'équation (V.277.a) est pertinente. On a donc :

$$\pi(\tau, \theta) = AP(\tau) \tau \quad (\text{V.327})$$

Or, le temps de piégeage τ est égal à $1/\Gamma_{\text{pertes}}(p)$ et $P(\tau)$ est donné par l'équation (V.280). Un calcul sans difficulté, semblable à celui fait au paragraphe V.5.1, conduit à la distribution en module d'impulsion

$$\pi(p, \theta) \rightarrow A \frac{p^{D-1}}{p_{\text{trap}}^D} \frac{1}{\Gamma_{\text{diss}} + \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha} \quad (\text{V.328})$$

Le coefficient A peut être obtenu par la relation de normalisation, $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ étant donné par l'équation (V.326)

$$\int_{p=0}^{p_{\text{trap}}} \pi(p, \theta) dp = f(p_{\text{trap}}, \theta) \quad (\text{V.329})$$

L'équation (V.328) permet d'obtenir les distributions d'une composante d'impulsion :

$$\pi_x(p_x, \theta) \rightarrow C \frac{1}{\Gamma_{\text{diss}} + \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{|p_x|}{p_0} \right)^\alpha} \quad (\text{V.330})$$

où C est une constante.

Commentons ce résultat. Le premier point important est que (V.330) donne une distribution *stationnaire* : la disparition des temps infinis fait logiquement réapparaître

[52] Voir l'analyse de tels vols de Lévy "tronqués" dans [MaS94] : R.N. Mantegna and H.E. Stanley, *Stochastic Process with Ultraslow Convergence to a Gaussian: The Truncated Lévy Flight*, Phys. Rev. Lett. 73, p. 2946-2949 (1994).

l'existence d'un régime stationnaire. Ensuite, l'équation (V.330) donne un profil décroissant en $1/p^\alpha$ pour p suffisamment grand, c'est-à-dire *le même profil* qu'en l'absence de dissipation parasite. Enfin, la demi-largeur à $1/\sqrt{e}$ de ce profil stationnaire est :

$$\delta p_\theta = p_0 \left(\frac{\tau_0}{\theta_{\text{diss}}} \right)^{1/\alpha} (\sqrt{e} - 1)^{1/\alpha} \quad (\text{V.331})$$

Cette largeur est identique, au terme -1 près, à celle obtenue, en l'absence de dissipation, au bout d'un temps θ_{diss} .

En conclusion, nous avons obtenu le résultat suivant valable pour le refroidissement sub-recul en présence de forces de friction :

En présence de dissipation parasite avec un taux Γ_{diss} , on obtient une distribution stationnaire, quasiment identique à celle que l'on obtiendrait en l'absence de dissipation parasite, au bout d'un temps $\theta_{\text{diss}} = 1/\Gamma_{\text{diss}}$.

Ce résultat est important en pratique : en présence de dissipation, les durées d'interaction effectives sont limitées à θ_{diss} . Autrement dit, si les conditions expérimentales créent de la dissipation parasite, il ne sert à rien d'avoir des durées d'interaction beaucoup plus grandes que θ_{diss} . Conceptuellement, on retrouve l'importance des états de durées de vie très longues dans le refroidissement sub-recul : si on supprime les durées de vie longues, alors on limite la finesse des distributions atteintes.

6.3 Effets collectifs : traitement auto-cohérent de la diffusion multiple

6.3.1 Rôle de la diffusion multiple

Il est important que les atomes dans les états noirs à $p \approx 0$ ne reçoivent que de la lumière provenant des lasers de résonances noires. Toute absorption de photon parasite fait sortir les atomes des états noirs, ce qui nuit au refroidissement. En particulier, les photons qui ont été diffusés par d'autres atomes du nuage (diffusion multiple) ne sont pas dans le même mode que les photons lasers. S'ils sont réabsorbés par des atomes dans un état noir, cet état noir est détruit.

Les conditions expérimentales décrites dans ce mémoire correspondent à des densités relativement faibles ($\leq 10^9$ at.cm⁻³) où la diffusion multiple est en général considérée comme négligeable [53]. Mais le refroidissement par résonances noires est sensible à un seul photon, sur la durée θ d'interaction qui peut être très longue à l'échelle atomique. Un taux de diffusion multiple très faible peut donc jouer un rôle significatif [54].

[53] Pour une revue du rôle de la diffusion multiple dans le refroidissement laser sub-recul, voir, par exemple [DLN94] : M. Drewsen, Ph. Laurent, A. Nadir, G. Santarelli, A. Clairon, Y. Castin, D. Grison, and C. Salomon, *Investigation of sub-Doppler cooling effects in a cesium magneto-optical trap*, Appl. Phys. B **59**, p. 283-298 (1994).

[54] Nous remercions J. Vigué qui nous a montré que la diffusion multiple pouvait jouer un rôle dans les expériences de refroidissement par résonances noires.

Nous allons d'abord calculer ce taux de diffusion multiple, puis montrer comment le refroidissement par résonances noires est perturbé par la diffusion multiple. Bien que la diffusion multiple soit un processus de dissipation parasite, celui-ci est différent des processus étudiés jusqu'à présent : le taux de diffusion multiple pour un atome donné dépend du fait que les autres atomes sont ou non dans l'état noir. Or, la population de l'état noir va elle-même dépendre de la diffusion multiple ...

6.3.2 Ordres de grandeur

Considérons un atome cible au centre d'un nuage d'atomes. Le nuage est sphérique, de rayon R . On considère que sa densité est uniforme. Un autre atome, à la distance r du centre, émet un photon spontané à résonance sur la transition atomique. La probabilité p_a que ce photon soit absorbé par l'atome cible est

$$p_a = \frac{3\lambda^2}{2\pi} \times \frac{1}{4\pi r^2} \quad (\text{V.332})$$

puisque $3\lambda^2/(2\pi)$ est la section efficace à résonance. Soit Γ' le taux de fluorescence pour les atomes qui ne sont pas dans les états noirs. Soit f la population atomique dans l'état noir. Soit n la densité atomique. Le taux d'excitation, noté γ_{dm} , de l'atome cible par la diffusion multiple s'écrit :

$$\gamma_{dm} = \int_0^R \frac{3\lambda^2}{2\pi} \frac{1}{4\pi r^2} n(1-f)\Gamma' \times 4\pi r^2 dr \quad (\text{V.333})$$

soit

$$\gamma_{dm} = \frac{3\lambda^2}{2\pi} n(1-f)\Gamma' R \quad (\text{V.334})$$

Une application numérique avec $\lambda = 1 \mu\text{m}$, $n = 2.10^8 \text{ at.cm}^{-3}$ (10^5 atomes dans un piège de rayon de $R = 500 \mu\text{m}$), $\Gamma = \Gamma/2 = 5.10^6 \text{ s}^{-1}$ et $f=50\%$ donne

$$\gamma_{dm} = 1,2.10^5 \text{ s}^{-1} \quad (\text{V.335})$$

Ce taux correspond à un photon parasite toutes les $8 \mu\text{s}$. Les expériences ont lieu à une échelle de temps $\theta \geq 300 \mu\text{s}$. La diffusion multiple doit donc être prise en compte.

Remarquons qu'un test de la présence de diffusion multiple peut être fait en variant la taille du nuage atomique sans changer le nombre d'atomes. En effet, pour un nombre N d'atomes fixé, le taux de diffusion multiple s'écrit :

$$\gamma_{dm} = \frac{9\lambda^2}{8\pi^2} N(1-f)\Gamma' \frac{1}{R^2} \quad (\text{V.336})$$

6.3.3 Evolution de la population piégée

Soit τ_{d0} le temps moyen entre deux absorptions par l'atome cible de photons multiplement diffusés, lorsque tous les atomes sont hors de l'état noir ($f=0$) :

$$\tau_{d0} = \frac{1}{\frac{3\lambda^2}{2\pi} n \frac{\Gamma}{2} R} \quad (\text{V.337})$$

Lorsque la population dans l'état noir n'est pas nulle, le temps entre deux absorptions devient :

$$\tau_{dm} = \frac{\tau_{d0}}{1-f} \quad (V.338)$$

puisque seul les atomes hors de l'état noir fluorescent.

On fait l'hypothèse que la distribution $P(\tau)$ des temps de piégeage est une loi large ($\mu < 1$), en l'absence de diffusion. La diffusion multiple effectue une troncature de $P(\tau)$ au temps τ_{dm} .

Pour traiter l'effet de la diffusion multiple sur le remplissage de l'état noir, supposons que la population piégée évolue selon l'équation (cf. tableau V.6)

$$f(\theta) \approx 1 - \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^\beta \quad (V.339)$$

où β est un exposant constant et où θ_0 est l'échelle de temps du remplissage. Un tel comportement suppose que la distribution $P(\tau)$ des temps de piégeage puisse être considérée comme une loi large et donc que

$$\tau_{dm} \gg \theta \quad (V.340)$$

Par ailleurs, la distribution $\hat{P}(\hat{\tau})$ des temps de premier retour doit être plus étroite que $P(\tau)$. Par simplicité, on considérera le cas où $\hat{P}(\hat{\tau})$ admet une valeur moyenne $\langle \hat{\tau} \rangle$.

D'après (V.338) et (V.339), le temps de diffusion multiple s'écrit

$$\tau_{dm} = \tau_{d0} \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^\beta \quad (V.341)$$

Deux situations différentes sont donc à considérer selon la valeur de β .

- Si $\beta > 1$, alors τ_{dm} croît plus vite que θ . Comme initialement, $\tau_{dm} \gg \theta$, cela signifie que la diffusion multiple reste toujours négligeable au cours du refroidissement : le piège se remplit suffisamment vite pour que les atomes non refroidis qui fluorescent ne perturbent pas significativement le refroidissement. Ce cas serait donc favorable au refroidissement. Malheureusement, l'examen du tableau V.6 montre qu'on ne se trouve jamais dans ce cas.

- Si $\beta < 1$, alors τ_{dm} croît moins vite que θ . Par conséquent, τ_{dm} devient plus petit que θ , dans le régime des temps longs et $P(\tau)$ devient tronquée. La diffusion multiple se met alors à jouer un rôle. La distribution $P(\tau)$ n'est plus une loi large, elle admet une valeur moyenne de l'ordre de τ_{dm} . Par conséquent, si on considère τ_{dm} comme constant, la population piégée tend vers une constante, solution de l'équation

$$f_\infty = \frac{\tau_{dm}}{\tau_{dm} + \langle \hat{\tau} \rangle} \quad (V.342)$$

Mais, d'après (V.338), on a $\tau_{dm} = \tau_{d0}/(1-f)$, ce qui, introduit dans l'équation ci-dessus, donne :

$$f_\infty = \frac{\tau_{d0}}{\tau_{d0} + \langle \hat{\tau} \rangle (1-f_\infty)} \quad (V.343)$$

Les deux solutions de cette équation du deuxième degré sont physiquement possibles :

$$f_{\infty} = \frac{\tau_{d0}}{\langle \hat{\tau} \rangle} \quad (\text{V.344.a})$$

$$f_{\infty} = 1 \quad (\text{V.344.b})$$

6.3.4 Discussion des solutions

Comment déterminer quelle est la bonne solution ? Pour cela, on fait une étude de la stabilité de l'équation (V.343) : la population piégée étant soumise à des fluctuations, la solution physique réalisée doit correspondre à une solution stable.

Perturbons d'abord la solution $f_{\infty} = \tau_{d0} / \langle \hat{\tau} \rangle$ d'une quantité δf et injectons cette quantité perturbée dans le membre de droite de l'équation (V.343). On obtient :

$$\frac{\tau_{d0}}{\tau_{d0} + \langle \hat{\tau} \rangle (1 - f_{\infty} - \delta f)} = f_{\infty} + \frac{\tau_{d0}}{\langle \hat{\tau} \rangle} \delta f \quad (\text{V.345})$$

- Si $\tau_{d0} > \langle \hat{\tau} \rangle$, alors $\frac{\tau_{d0}}{\langle \hat{\tau} \rangle} \delta f > \delta f$: la perturbation s'amplifie ; la solution $f_{\infty} = \tau_{d0} / \langle \hat{\tau} \rangle$ est instable ;

- Si $\tau_{d0} < \langle \hat{\tau} \rangle$, alors $\frac{\tau_{d0}}{\langle \hat{\tau} \rangle} \delta f < \delta f$: la solution $f_{\infty} = \tau_{d0} / \langle \hat{\tau} \rangle$ est stable.

On vérifie que pour la solution $f_{\infty} = 1$, on a le résultat opposé :

- Si $\tau_{d0} > \langle \hat{\tau} \rangle$, alors la solution $f_{\infty} = 1$ est stable ;
- Si $\tau_{d0} < \langle \hat{\tau} \rangle$, alors la solution $f_{\infty} = 1$ est instable [55].

En résumé, on a le résultat suivant pour la population piégée à l'infini (rappelons que seul le cas $\beta < 1$ est possible)

$$\beta < 1 \text{ et } \tau_{d0} < \langle \hat{\tau} \rangle : \quad f_{\infty} = \frac{\tau_{d0}}{\langle \hat{\tau} \rangle} \quad (\text{V.346.a})$$

$$\beta < 1 \text{ et } \tau_{d0} > \langle \hat{\tau} \rangle : \quad f_{\infty} = 1 \quad (\text{V.346.b})$$

On retient donc qu'il suffit que la diffusion multiple *initiale* soit assez faible (*i.e.* $\tau_{d0} > \langle \hat{\tau} \rangle$) pour que la diffusion multiple n'entrave pas le refroidissement sub-recul.

Les résonances noires à 1D sont dans le cas $\beta < 1$. Dans ce cas, si on a $\tau_{d0} > \langle \hat{\tau} \rangle$, alors *la diffusion multiple n'empêche pas le refroidissement de la totalité des atomes*. Elle ne limite pas non plus la température atteinte, puisque $\tau_{dm} \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} 0$. En revanche, si $\tau_{d0} < \langle \hat{\tau} \rangle$ alors, la population refroidie tend vers une constante inférieure à

[55] L'instabilité de cette solution $f_{\infty} = 1$ se comprend très intuitivement : tant que f reste strictement égale à 1, tous les atomes sont piégés dans l'état noir et il n'y a donc aucune fluorescence pour les dépiéger ; mais, dès que certains atomes, même en petit nombre, sont dépiégés, alors ils se mettent à fluorescer, ce qui a pour effet d'en dépiéger d'autres, ce qui accentue encore la fluorescence parasite et dépiège d'autres atomes... f se met donc diminuer significativement par rapport à la valeur 1.

1. Par conséquent, τ_{dm} tend aussi vers une constante et on est ramené à la situation du paragraphe V.6.2 du refroidissement en présence de dissipation. En particulier, la largeur du pic est limitée :

$$\delta p_\theta \geq p_0 \left(\frac{\tau_{d0}}{\tau_{dm}} \right)^{1/\alpha} \tag{V.347}$$

Le cas des résonances noires à 3D ne vérifie pas (V.339), puisque la population refroidie diminue en $1/\sqrt{\theta}$. Par conséquent, le taux de diffusion multiple reste constant au premier ordre égal à τ_{d0} . On est donc ramené au paragraphe précédent : le refroidissement sera limité à un temps effectif $\theta_{eff} = \tau_{d0}$.

Le cas des résonances à 2D est dans une situation intermédiaire.

6.3.5 Comment réduire la diffusion multiple ?

D'après le paragraphe précédent, la diffusion multiple peut limiter dans de nombreux cas la température atteinte et la population piégée.

Pour réduire la diffusion multiple, on peut augmenter le désaccord δ des lasers. En effet, pour $\delta \gg \Gamma$, la section efficace de diffusion varie en $1/\delta^2$. Pour que le refroidissement sub-recul reste efficace, il faut maintenir constant le nombre de photons échangés par atome, c'est-à-dire maintenir constant le paramètre de saturation :

$$s = \frac{\Omega_1^2}{\delta^2 + \Gamma^2 / 4} \tag{V.348}$$

L'intensité laser ($\propto \Omega_1^2$) doit donc croître comme δ^2 .

Finalement, on peut réduire à un taux négligeable la diffusion multiple tout en maintenant le nombre de photons échangés par chaque atome. Pour cela, il faut accroître le désaccord δ , et augmenter l'intensité laser comme δ^2 [56].

6.4 Compromis remplissage-finesse

Dans le refroidissement sub-recul deux paramètres peuvent être optimisés. Le premier est le *remplissage*, c'est-à-dire la proportion d'atomes piégés ou refroidis. Le deuxième est la *finesse*, c'est-à-dire la largeur du pic de la distribution en impulsion. L'objectif de ce paragraphe est de définir une stratégie d'optimisation *simultanée* de la finesse et du remplissage.

Pour trouver un optimum, on va jouer sur l'exposant α du profil de fluorescence $\Gamma(p)$:

$$\Gamma(p) = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha \tag{V.43} \text{ (rappel)}$$

[56] Ce raisonnement n'est valable que si on néglige la cohérence du rayonnement diffusé. Pour pour le faire, il suffit en pratique que le rayonnement incident ait un "jitter" de quelques Mhz (Yvan Castin, communication privée). Un tel jitter est compatible avec les longueurs de cohérence optiques nécessaires au refroidissement par résonances noires. La stratégie présentée ici pour réduire la diffusion multiple est donc effectivement applicable.

Pour optimiser le refroidissement, on considérera uniquement des schémas dans lesquels la friction confine la diffusion en impulsion. Ainsi, les temps de premier retour ont une valeur moyenne $\langle \hat{\tau} \rangle$ finie.

Remarque :

Les résonances noires sélectives en vitesse ne donnent pas le choix de α , mais imposent $\alpha = 2$. Cependant, on peut imaginer obtenir d'autres valeurs de α avec d'autres mécanismes de refroidissement. Ainsi le refroidissement Raman permettrait, par l'application d'impulsions lumineuses bien choisies, de réaliser un profil d'excitation $\Gamma(p)$ au voisinage de 0 avec $\alpha \neq 2$: à ce titre, ce paragraphe intéresse le refroidissement Raman, ou le refroidissement sub-recul en général.

Supposons tout d'abord que l'on dispose d'un temps infini. Il est alors clair que l'on peut optimiser à la fois le remplissage et la finesse. Pour optimiser le remplissage, c'est-à-dire pour accumuler tous les atomes dans un pic de taille p_{trap} arbitrairement petit, il suffit que la valeur moyenne des temps de piégeage soit infinie, c'est-à-dire :

$$\mu \leq 1 \quad (\text{V.349})$$

Comme $\mu = D/\alpha$, il suffit que

$$\alpha \geq D \quad (\text{V.350})$$

Dans ce cas, la proportion d'atomes piégés dans un volume $|p| < p_{\text{trap}}$ arbitrairement petit tend asymptotiquement vers 1 (cf. § V.4.4).

Passons maintenant au cas d'une durée d'interaction finie. Nous avons vu qu'à cause de l'absence d'ergodicité (cf. § V.3.5), le fait de disposer d'une durée finie θ doit toujours être pris en compte. Sur une durée finie, on ne peut évidemment pas obtenir un pic infiniment fin contenant tous les atomes : il faut donc faire un compromis entre la finesse et le remplissage. Que peut-on faire de plus efficace ?

A ce stade, le problème n'est pas suffisamment contraint, et il faut fixer une condition supplémentaire. Cette condition pourrait être d'optimiser la densité dans l'espace des phases (cf. § V.3.3), ou de maximiser la densité de probabilité en $p = 0$. Nous avons choisi d'imposer que la population piégée [57], pour un p_{trap} donné, soit de l'ordre de 1 :

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} 1, \quad \text{avec } p_{\text{trap}} \text{ donné} \quad (\text{V.351})$$

On pose donc la question suivante :

Comment obtenir le pic le plus fin possible correspondant à une population piégée asymptotiquement égale à 1 ?

Pour augmenter la population piégée, il faut diminuer μ (cf. § V.4.5), c'est-à-dire augmenter α . Mais la largeur du pic est donnée par :

[57] Il serait plus logique d'imposer que la population *refroidie* soit de l'ordre de 1. Mais les expressions dont nous disposons pour la population refroidie sont à l'heure actuelle moins explicites que celles de la population piégée, et se prêtent donc moins au calcul. Cependant, on va voir que le calcul fait sur la population *piégée* donne en l'occurrence une information assez précise sur la population *refroidie*.

$$\delta p_\theta \approx p_0 e^{1/2\alpha} \left(\frac{\tau_0}{\theta} \right)^{1/\alpha} \quad (\text{V.300}) \text{ (rappel)}$$

Donc, pour θ donné, augmenter α revient à élargir le pic. Il faut donc choisir la valeur de α la plus faible telle que la proportion piégée tende vers 1, pour obtenir le pic le plus étroit possible. Ceci correspond au choix de $\mu = 1$. On a alors :

$\alpha = D$	(V.352.a)
--------------	-----------

$\delta p_\theta \propto p_0 e^{1/2D} \frac{\tau_0^{1/D}}{\theta^{1/D}}$	(V.352.b)
--	-----------

Il est important de remarquer que, dans ce cas, tout comme la population piégée, la population refroidie est également de l'ordre de 1. En effet, l'équation (V.307.b) prédit que la population refroidie est proportionnelle à la population piégée, à un terme en $\ln(\theta)$ près.

Les équations (V.352) définissent des conditions optimales pour le refroidissement laser. Le rôle de la dimensionnalité apparaît de manière remarquable dans l'équation (V.352.b) : si on veut refroidir l'ensemble des atomes, lorsqu'on accroît la dimensionnalité, la température minimale que l'on peut atteindre en un temps fini est moins basse [58]. Ce résultat intuitif trouve ici une expression quantitative très simple.

Les résonances noires ($\alpha = 2$) constituent un optimum à deux dimensions : toute la population est piégée, dans le pic le plus fin possible. En revanche, à une dimension, avec friction, toute la population est piégée, mais le pic obtenu pourrait être plus fin. Et à trois dimensions, la largeur du pic diminue très vite, mais toute la population n'est pas piégée.

6.5 Limites "ultimes" : refroidissement avec un nombre fini de photons

Dans une expérience réelle, la durée d'interaction atomes-lasers est toujours limitée en pratique. Cette limitation peut paraître technique, puisqu'on peut en principe la repousser en utilisant des atomes initialement plus lents ou un volume d'interaction plus grand. Cependant, en présence d'un phénomène non ergodique (cf. § V.3.5), la durée totale du phénomène est un paramètre fondamental, à prendre en compte dans la recherche des limites ultimes.

La question posée ici est donc : quelle est la température minimale que l'on peut obtenir en un temps θ_{\max} donné ? On traite ce problème comme un problème de marche aléatoire. Contrairement au paragraphe précédent où on jouait sur le modèle de diffusion (valeur de α), pour réaliser l'optimisation, on se donne ici un modèle de diffusion

[58] Ce résultat est complémentaire de celui de l'équation (V.300) avec lequel il ne doit pas être confondu. L'équation (V.300) montre que *pour une configuration donnée* (α donné), δp_θ ne dépend pas de la dimensionnalité. L'équation (V.352.b) montre que *pour une configuration adaptée à la dimensionnalité* ($\alpha = D$), δp_θ dépend de D .

"idéal". Ce modèle sort de l'hypothèse $\Gamma(p) \propto p^\alpha$ [59]. Afin d'atteindre une impulsion p_θ aussi petite que possible, il doit avoir les propriétés suivantes (figure V.28) :

- Les impulsions doivent être confinées dans une sphère de rayon p_{\max} , ce rayon étant aussi petit que possible. Ceci permet de favoriser le retour des atomes au voisinage de $p=0$. En pratique, il faut donc disposer d'une force de friction aussi efficace que possible, pour réduire p_{\max} :

$$|p| < p_{\max} \quad (\text{V.353})$$

- Tant que les atomes n'ont pas atteint $|p| < p_\theta$, ils doivent diffuser autant que possible. Pour cela, le taux de fluorescence $\Gamma'(p)$ doit être constant, égal à sa valeur maximale pour $|p| \geq p_\theta$:

$$\Gamma'(p) = \Gamma'_{\max}, |p| \geq p_\theta \quad (\text{V.354})$$

- Enfin, les atomes atteignant $|p| < p_\theta$ ne doivent pas être excités et éjectés du piège :

$$\Gamma'(p) = 0, |p| < p_\theta \quad (\text{V.355})$$

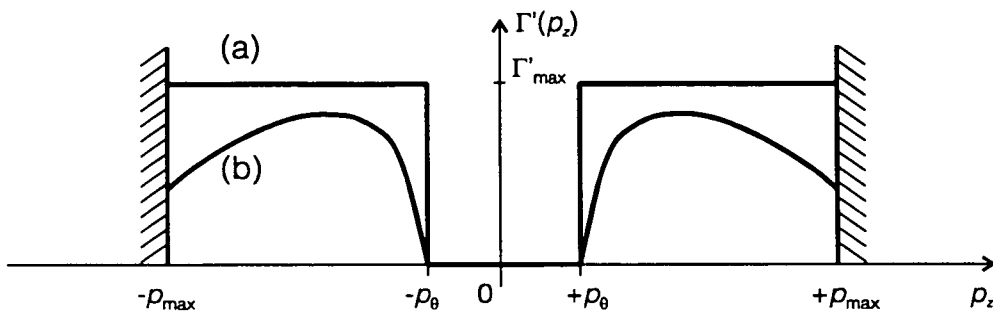


Figure V.28 *Modèle de diffusion optimal.* (a) L'objectif est d'atteindre en un temps fini une impulsion p_θ minimale. Pour cela, il faut que les impulsions atomiques soient confinées ($|p| < p_{\max}$) par un mécanisme de friction aussi efficace que possible. Il faut également que la fluorescence soit aussi importante que possible pour $|p| > p_\theta$. En revanche, la fluorescence doit être minimale pour $|p| < p_\theta$. (b) Si la contrainte n'est pas le temps, mais le nombre de photons, alors le calcul s'applique à des profils plus réalistes : il suffit que $\Gamma(p) > 0$ pour $|p| > p_\theta$ et que $\Gamma(p)$ soit négligeable pour $|p| < p_\theta$.

A la durée θ_{\max} correspond un nombre de photons spontanés maximal émis par l'atome, noté n_{\max} . Ce nombre n_{\max} détermine le nombre de sauts en impulsion réalisables : n_{\max} est le paramètre essentiel de ce paragraphe. Le taux de fluorescence maximal en régime stationnaire, $\Gamma/2$, permet de d'estimer n_{\max} :

$$n_{\max} \approx \Gamma/2 \times \theta_{\max} \quad (\text{V.356})$$

[59]

Nous ne voulons pas discuter ici des façons de réaliser ce modèle de diffusion. Cependant, mentionnons qu'un schéma de résonances noires avec friction le réalise de façon approchée. Nous pensons qu'on peut obtenir de meilleures approximations du modèle "idéal" en ajustant les séries de pulses Raman utilisées dans [KaC92] : M. Kasevich and S. Chu, *Laser Cooling below a Photon Recoil with Three-Level Atoms*, Phys. Rev. Lett. **69**, p. 1741-1744 (1992).

Notons que la limitation du nombre de photons échangés peut provenir, non du temps disponible, mais également de processus parasites. Ainsi, nous avons vu que lorsque la transition utilisée pour le refroidissement n'est pas parfaitement fermée, le nombre de photons échangés est également limité à une valeur n_{\max} (§ V.6.1).

La question devient maintenant : quelle impulsion minimale peut-on atteindre avec n_{\max} photons ? On a calculé au § 3.3.2 que le temps caractéristique de premier retour dans un piège de rayon p_{trap} était :

$$\langle \hat{\tau} \rangle = \tau_{\text{ext}} \left(\frac{p_{\max}}{p_{\text{trap}}} \right)^D \quad (\text{V.89}) \text{ (rappel)}$$

Le nombre de photons échangés pour un premier retour dans p_{trap} est évidemment : $n = \langle \hat{\tau} \rangle / \tau_{\text{ext}}$. On peut considérer que $\langle \hat{\tau} \rangle$ est également de l'ordre de grandeur du temps mis par tout atome initialement dans le volume $|p| < p_{\max}$ pour atteindre le piège $|p| < p_{\text{trap}}$. Par conséquent, l'impulsion minimale $p_{\theta} = p_{\text{trap}}$ que peuvent atteindre les atomes en n_{\max} photons est donnée par :

$$n_{\max} = \left(\frac{p_{\max}}{p_{\theta}} \right)^D \quad (\text{V.357})$$

On obtient donc :

$$p_{\theta} \approx \frac{p_{\max}}{n_{\max}^{1/D}} \quad (\text{V.358})$$

Si le taux de fluorescence est constant, remarquons que l'on retrouve la loi $p_{\theta} \propto \theta^{-1/D}$ obtenue au paragraphe précédent : si on impose de refroidir une proportion importante des atomes, deux raisonnements assez différents, portant sur des modèles différents conduisent à la même loi.

Donnons une application numérique. Avec le dispositif expérimental actuel, on est limité à $\theta_{\max} = 10 \text{ ms} = 10^5 \Gamma^{-1}$, d'où $n_{\max} \approx 5 \cdot 10^4$ photons. La limitation plus fondamentale liée à la raie d'intercombinaison de l'hélium $2^3P_1 \rightarrow 1^1S_0$ donne également $n_{\max} \approx 5 \cdot 10^4$ photons. Une valeur raisonnable pour p_{\max} est $3\hbar k$ (cf. impulsion caractéristique atteinte par refroidissement Sisyphes). On prend $\Delta p = \hbar k$. On obtient :

$$1D : p_{\theta} = 6 \cdot 10^{-5} \hbar k = p_R / 1,7 \cdot 10^4 \quad (\text{V.359})$$

$$2D : p_{\theta} = 1,3 \cdot 10^{-2} \hbar k = p_R / 75 \quad (\text{V.360})$$

$$3D : p_{\theta} = 8 \cdot 10^{-2} \hbar k = p_R / 12 \quad (\text{V.361})$$

On constate qu'à 1 et 2D, le dispositif expérimental présenté dans ce mémoire est très loin d'avoir atteint les limites calculées ici, ce qui laisse la possibilité de progrès expérimentaux considérables. A trois dimensions en revanche, la valeur calculée pour p_{θ} est du même ordre de grandeur que celle attendue avec les dispositifs actuels et des durées d'interaction de 10 ms. Toutefois, les résonances noires ($\alpha = 2$) ne permettraient pas de refroidir l'ensemble des atomes. Pour cela, il faudrait avoir $\alpha \geq 3$ (cf. § V.6.4).

Pour conclure, précisons le sens des limites calculées ici. Les conditions à satisfaire sont les suivantes :

- les atomes doivent échanger n_{\max} photons ;
- leur impulsion doit être confinée dans un volume de rayon p_{\max} ;
- la probabilité d'émission d'un photon spontané pour $|p| < p_0$, intégrée sur la durée d'interaction doit être négligeable.

Si ces conditions sont réalisées, alors une proportion significative des atomes sera refroidie avec une impulsion inférieure ou égale à p_0 . Ces limites donnent des contraintes issues uniquement de considérations sur les marches aléatoires. Il est possible que tel processus physique particulier offre des contraintes supplémentaires. L'équation (V.358) doit donc être comprise comme une estimation "optimiste", que le refroidissement sub-recul pourra difficilement dépasser, mais que l'on doit tenter d'atteindre.

7 Conclusion

Dans l'approche de ce chapitre, on a considéré le refroidissement par résonances noires comme un processus classique de diffusion en impulsion, possédant la particularité de piéger les atomes au voisinage de $p = 0$. On définit une zone de piégeage par

$$|p| < p_{\text{trap}} \quad (\text{V.362})$$

La diffusion est alors décrite comme une alternance d'événements de piégeage de durées τ_i et de sorties du piège de durées $\hat{\tau}_i$. Les lois de probabilité $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$ se mettent dans la plupart des cas sous la forme

$$P(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{b}{\tau^{1+\mu}} \quad (\text{V.363a})$$

$$\hat{P}(\hat{\tau}) \xrightarrow{\hat{\tau} \rightarrow \infty} \frac{\hat{b}}{\hat{\tau}^{1+\hat{\mu}}} \quad (\text{V.363b})$$

Les paramètres μ et $\hat{\mu}$ jouent un rôle central dans l'approche vols de Lévy : ils déterminent le remplissage ou le vidage du piège. Si le taux de fluorescence $\Gamma(p)$ est donné au voisinage de $p = 0$ par :

$$\Gamma(p) = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^\alpha \quad (\text{V.364})$$

alors l'exposant μ est simplement :

$$\mu = D/\alpha \quad (\text{V.365})$$

Quant à l'exposant $\hat{\mu}$, il dépend de la diffusion à l'extérieur du piège. Si les impulsions atomiques sont confinées par des forces de friction, la loi des temps de sorties, $\hat{P}(\hat{\tau})$ est une loi "étroite" (ses deux premiers moments sont finis), ce qui se traduit symboliquement par :

$$"\hat{\mu} > 2" \quad (\text{V.366})$$

Si les impulsions sont libres de diffuser à l'infini, $\hat{P}(\hat{\tau})$ est une loi large :

$$1D : \hat{\mu} = 1/2 ; \quad 2 \text{ et } 3D : "\hat{\mu} < 0" \quad (\text{V.367})$$

" $\hat{\mu} < 0$ " signifiant symboliquement que $\hat{P}(\hat{\tau})$ est une loi plus large que $1/\hat{\tau}$. Si on prend en compte l'effet Doppler, lorsque $p \rightarrow \infty$, on a alors $\hat{\mu} = 1/4$ à une dimension.

L'apparition de distributions de temps caractéristiques dont les valeurs moyennes sont infinies a pour conséquence importante l'absence d'ergodicité : le temps total θ , aussi long soit-il, est un des paramètres temporels du problème, en général le plus crucial.

La durée θ d'interaction entre atomes et lasers est la somme du temps T passé dans le piège et du temps \hat{T} passé hors du piège :

$$\theta = T + \hat{T} = \sum_{i=1}^N \tau_i + \sum_{i=1}^N \hat{\tau}_i \tag{V.368}$$

Selon les valeurs respectives des exposants μ et $\hat{\mu}$, θ sera dominé par T ou par \hat{T} , ce qui déterminera la proportion $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ d'atomes présents dans le piège. On peut calculer les lois de puissance de la population piégée $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ en fonction de b , \hat{b} , μ et $\hat{\mu}$, et dans certains cas, la valeur asymptotique exacte $f(p_{\text{trap}}, \theta \rightarrow \infty)$. Les résultats essentiels sont présentés dans le tableau V.8.

Evolution asymptotique de $f(p_{\text{trap}}, \theta)$	Conditions	Exemple pour les résonances noires
$f(p_{\text{trap}}, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} 0$	$\hat{\mu} < 1$ et $\hat{\mu} < \mu$	1, 2 et 3D, sans friction
$f(p_{\text{trap}}, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} C$ avec $0 < C < 1$	<ul style="list-style-type: none"> • $\mu = \hat{\mu}$ • $\mu > 1$ et $\hat{\mu} > 1$ 	<ul style="list-style-type: none"> • 1D sans effet Doppler, ni friction • 3D avec friction
$f(p_{\text{trap}}, \theta) \rightarrow 1$	$\mu < 1$ et $\hat{\mu} > \mu$	1D et 2D avec friction

Tableau V.8 Proportion d'atomes piégés.

Dans presque tous les cas pertinents pour les résonances noires, la dynamique est lente : $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ dépend de θ en loi de puissance, avec des exposants plus petits que 1.

Le refroidissement à 2 et 3 dimensions en l'absence de friction fait exception : dans ces cas, $f(p_{\text{trap}}, \theta)$ tend rapidement vers 0. Mais nous avons remarqué au chapitre III que les résonances noires à deux et trois dimensions sont presque toujours associées à de la friction.

Les résultats obtenus par l'approche vols de Lévy sont en accord avec les résultats numériques connus à ce jour. Dans le cas le plus précis, la prédiction de l'analyse vols de Lévy est vérifiée à mieux que 1 % près. Il s'agit du refroidissement par résonances noires à une dimension, dans des conditions où l'effet Doppler est négligeable à grand p . On obtient alors une équation remarquablement simple :

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi} \frac{\Delta p}{p_{\text{Raman}}}} \quad (\text{V.369})$$

ou encore

$$f(p_{\text{trap}}, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{16}{\pi\sqrt{3}} \frac{E_R}{\Gamma_{\text{ext}}'}} \quad (\text{V.370})$$

avec $\Gamma_{\text{ext}}' = \Omega_1^2 / 2\Gamma$ ($\Omega_1 < \Gamma$)

Toutefois, la vocation de l'approche vols de Lévy est davantage la compréhension de la dynamique du refroidissement sub-recul et le calcul des lois de puissance, que de fournir des prédictions à 1 % près. Les préfacteurs peuvent être obtenus soit par des calculs analytiques, soit à l'aide de simulations numériques. Notons que l'approche vols de Lévy donne des résultats dans le régime des temps longs et qu'elle est donc complémentaire des approches numériques utilisables uniquement aux temps courts. Le régime des temps longs est toutefois pertinent pour les expériences actuelles.

On a calculé la distribution en impulsion des atomes piégés. On a montré que celle-ci a une largeur à $e^{-1/2}$ donnée par :

$$\delta p_\theta \approx p_0 \left(\frac{\tau_0}{\theta} \right)^{1/\alpha} e^{1/(2\alpha)} \quad (\text{V.371})$$

La distribution est composée d'un plateau de demi-largeur $p_\theta = \delta p_\theta / e^{1/(2\alpha)}$ et d'ailes décroissant comme $1/p^\alpha$. On peut calculer également la proportion $r(\theta)$ d'atomes refroidis (c'est-à-dire les atomes appartenant au plateau au centre du pic) et la densité dans l'espace des phases (tableau V.9). A trois dimensions, la proportion d'atomes refroidis diminue comme $\theta^{-1/2}$, mais la densité dans l'espace des phases croît comme θ , ce qui est intéressant pour les expériences à venir.

Dimension	Proportion refroidie $r(\theta)$	Densité dans l'espace des phases	Conditions physiques
$D = 1$	$\frac{f(\theta \rightarrow \infty)}{2}$	$n_\varphi \propto \sqrt{\theta}$	<ul style="list-style-type: none"> • friction : $f \rightarrow 1$ • sans friction, sans effet Doppler : $f \rightarrow \text{cte} < 1$
$D = 2$	$\frac{f(p_{\text{trap}}, \theta)}{\ln(\theta/\tau_0)} \propto \frac{1}{\ln(\theta/\tau_0)}$	$n_\varphi \propto \frac{\theta}{\ln(\theta)}$	• friction
$D = 3$	$f(p_{\text{trap}}, \theta) \frac{p_0}{3p_{\text{trap}}} \left(\frac{\tau_0}{\theta} \right)^{1/2} \propto \frac{1}{\theta^{1/2}}$	$n_\varphi \propto \theta$	• friction

Tableau V.9 Proportion d'atomes refroidis et densité dans l'espace des phases pour le refroidissement par résonances noires. Les résultats sont donnés pour des situations où, soit f tend vers une constante, soit f varie lentement (logarithmiquement). Dans les cas à une et deux dimensions, on considère la densité dans un espace des phases réduit aux dimensions refroidies.

Enfin, on a pu étudier les limites du refroidissement par sub-recul (§ V.6), d'abord en présence de processus parasites de sortie des états noirs. En l'absence de processus parasites, nous avons déterminé certaines contraintes sur l'efficacité du refroidissement sub-recul : nous avons rendu quantitative l'idée qu'il faut faire un compromis entre la finesse du pic d'atomes refroidis et la proportion d'atomes dans ce pic.

En outre, les contraintes des marches au hasard impliquent que, si on veut refroidir à D dimensions l'ensemble de la population atomique, alors la demi-largeur atteinte ne peut diminuer plus rapidement que $\theta^{1/D}$:

$$\delta p_\theta \geq \frac{1}{\theta^{1/D}} \quad (\text{V.372})$$

En tenant compte du fait qu'on ne peut échanger qu'un nombre fini de photons en un temps fini, nous avons calculé les largeurs minimales que l'on peut obtenir pour une proportion significative des atomes. Les limites obtenues à trois dimensions sont pertinentes pour les expériences réalisables dans un proche avenir.

Conclusion générale

Conclusion générale

La motivation de cette thèse était d'exploiter les possibilités du refroidissement laser sub-recul par résonances noires sélectives en vitesse. Ce mécanisme avait permis de franchir d'un facteur 2 la limite du recul, et il semblait possible de l'utiliser pour atteindre des températures beaucoup plus basses encore. Pour cela, il fallait étudier le régime des longs temps d'interaction, puisque des arguments théoriques prédisaient une diminution de l'impulsion caractéristique δp_θ avec la durée θ d'interaction cohérente entre atomes et lasers.

L'étude du refroidissement par résonances noires avec de longs temps d'interaction a été menée à la fois expérimentalement et théoriquement. Expérimentalement, nous avons construit un piège magnéto-optique d'atomes d'hélium métastables, qui sert de source compacte d'atomes froids (chapitre II). Puis, nous avons réalisé des expériences de refroidissement par résonances noires à une et deux dimensions, à partir des atomes piégés (chapitre III). Sur le plan théorique, nous avons développé une approche Monte-Carlo quantique du refroidissement par résonances noires (chapitre IV), puis une approche statistique basée sur les "vols de Lévy" (chapitre V). Dans cette conclusion, nous rassemblons les résultats décrits dans ce mémoire, et nous indiquons les prolongements possibles.

• *Piégeage magnéto-optique de l'hélium métastable*

Expérimentalement, l'accroissement des durées d'interaction passait par le développement d'une source d'atomes lents, que les méthodes traditionnelles du refroidissement laser peuvent fournir. Nous avons ralenti et arrêté par laser les atomes d'un jet supersonique d'hélium métastable. Ces atomes ont été piégés dans un piège magnéto-optique. Environ 10^5 atomes sont accumulés en une seconde. Leurs vitesses caractéristiques sont comprises entre 0,3 et 1 m.s⁻¹.

Dans ce piège, nous avons observé des taux de collisions Penning entre atomes ultra-froids avec un taux de réaction géant ($\approx 10^7$ cm³.s⁻¹) et montré que ces collisions faisaient intervenir l'état excité. Ces collisions, qui limitent la densité du piège, mériteraient certainement une étude plus approfondie.

Notre piège à hélium métastable est le premier à avoir fonctionné. Nous avons étudié sa dynamique afin de l'optimiser en vue de l'expérience de résonances noires. Ici encore, une étude plus poussée se justifierait. En ce qui nous concerne, nous sommes limités à la production de l'échantillon d'atomes froids dont nous avons besoin.

• *Expériences de refroidissement par résonances noires*

A partir des atomes piégés et refroidis, on a pu réaliser le refroidissement sub-recul par résonances noires, avec des temps d'interaction de 300 μs , c'est-à-dire accrus d'un ordre de grandeur par rapport à la première expérience sur jet. Dans des expériences préliminaires, à une dimension, on a atteint une température $T_R/40$, avec une incertitude d'un facteur 2 ($T_R/30 \leq T \leq T_R/70$), soit $T \approx 100_{-40}^{+30}$ nK ou encore $\delta v_\theta \approx v_R/6,3 \approx 1,46 \text{ cm.s}^{-1}$ ($v_R/8,4 \leq \delta v_\theta \leq v_R/5,5$). Le passage à deux dimensions s'est fait simplement en rajoutant deux faisceaux lasers : en effet, la détection aussi bien que la source d'atomes que nous avons développées sont toutes deux bien adaptées aux expériences à 1, 2 ou 3 dimensions.

Nous avons observé le refroidissement par résonances noires à deux dimensions. Les mesures préliminaires de température donnent une température inférieure à $T_R/20$ (200 nK), soit $\delta v_\theta \leq v_R/4,5 \approx 2,0 \text{ cm.s}^{-1}$. Le rôle crucial des forces de friction pour le remplissage des états noirs est apparu très clairement à deux dimensions puisque l'effet de refroidissement n'est spectaculaire que si les paramètres lasers sont choisis de manière à favoriser le refroidissement Sisyphe.

Des études plus systématiques du refroidissement par résonances noires seraient le prolongement naturel de ce travail, puisque nous n'avons présenté des mesures précises de température que dans une seule situation expérimentale. Ceci permettrait une comparaison théorie-expérience qui n'a été qu'ébauchée jusqu'ici. En outre, les durées d'interaction accessibles, de l'ordre de $10^5 \Gamma^{-1}$, permettraient de tester les approches "vols de Lévy", ce qui serait particulièrement intéressant à 2 et 3 dimensions. Pour cela, il faudrait développer un protocole expérimental de mesure de la proportion d'atomes refroidis.

Les possibilités du montage expérimental devraient pouvoir être exploitées plus pleinement, en augmentant les durées d'interaction jusqu'à 10 ms, soit $10^5 \Gamma^{-1}$. Ceci pourrait conduire à des températures de l'ordre de $T_R/1000$. Le refroidissement sub-recul à trois dimensions est évidemment un enjeu important, en principe à la portée de ce nouveau montage.

Comment pourrait-on améliorer le montage actuel ?

Le contrôle des champs magnétiques parasites a été un des points les plus délicats de l'expérience, ce point pourrait être traité en priorité. Pour simplifier les expériences ultérieures, on pourrait étudier la possibilité d'éliminer les champs de ralentissement en utilisant, par exemple, la technique de balayage de fréquence ("chirping", voir [EBH85]), le ralentissement en lumière isotrope [KMJ92], ou encore le

[EBH85] W. Ertmer, R. Blatt, J. Hall, and M. Zhu, *Laser Manipulation of Atomic Beam Velocities : Demonstration of Stopped Atoms and Velocity Reversal*, Phys. Rev. Lett. **54**, p. 996-999 (1985).

[KMJ92] W. Ketterle, A. Martin, M.A. Joffe, and D.E. Pritchard, *Slowing and Cooling Atoms in Isotropic Laser Light*, Phys. Rev. Lett. **69**, p. 2483-2486 (1992).

ralentissement Stark [GWU94]. On pourrait également envisager de piéger sans champ magnétique [BLB94]. Cependant, ces changements du protocole expérimental ne s'imposent pas dans l'immédiat puisque, selon nos mesures, le champ magnétique résiduel actuel permettrait d'atteindre les limites en température imposées par les raies d'intercombinaison (il faudrait toutefois éventuellement réduire le gradient de champ résiduel).

Une autre perspective intéressante serait la mise en évidence de la cohérence quantique entre les composantes des états $|\Psi_{\text{NC}}(p \approx 0)\rangle$, à une échelle macroscopique. Dans les expériences actuelles, juste avant leur détection, les atomes sont dans une superposition *a priori* cohérente d'états séparés par une distance de 1 à 2 cm. La vérification expérimentale de cette cohérence à une telle échelle serait importante sur le plan fondamental et ouvrirait la voie à des expériences d'interférométrie avec des atomes préparés par résonances noires. Notons à ce sujet que, si la cohérence est effectivement préservée avec le montage actuel, et si on parvient à faire interférer les différents pics en impulsion, on obtiendra un interféromètre dont l'aire est de plusieurs centimètres carrés, bien supérieure celle des interféromètres atomiques actuels.

Enfin, pour donner une vue d'ensemble de l'expérience, notons que les atomes d'hélium métastables ont été refroidis sur 8 ordres de grandeur en température, leur température passant de 10 K à 100 nK, grâce aux seules techniques de refroidissement laser. Le refroidissement laser est mis en œuvre cinq fois dans l'expérience : mélasses transverses sur jet atomique, "ralentissement Zeeman" du jet, piégeage des atomes, mélasse de confinement, refroidissement sub-recul. On a utilisé tour à tour, et de manière complémentaire, les concepts du refroidissement Doppler, du refroidissement Sisyphus et du refroidissement sub-recul par résonances noires.

• *Simulations Monte-Carlo quantiques par la fonction délai*

Pour étudier théoriquement le régime des longs termes d'interaction, on a mis en œuvre une nouvelle forme de simulation Monte-Carlo, qui respecte le caractère quantique de l'interaction atomes-lasers, grâce au formalisme de la fonction délai. Cette méthode montre particulièrement clairement une des originalités du refroidissement par résonances noires, à la source de problèmes théoriques : la présence d'échelles de temps (et d'impulsion) très différentes les unes des autres. La conjonction de l'aspect Monte-Carlo, qui permet de se ramener au traitement d'une impulsion bien définie, et d'une méthode adaptée de tirages aléatoires, résout ce problème d'échelles. On peut alors simuler les résonances noires sélectives en vitesse pour des durées d'interaction jusqu'à $10^7 \Gamma^{-1}$, c'est-à-dire accrues de quatre ordres de grandeur par rapport à la méthode

[GWU94] R. Gaggl, L. Windholz, G. Umfer, and C. Neureiter, *Laser cooling of a sodium atomic beam using the Stark effect*, Phys. Rev. A **49**, p. 1119-1121 (1994).

[BLB94] P. Bouyer, P. Lemonde, M. Ben Dahan, A. Michaud, C. Salomon, and J. Dalibard, *An Atom Trap Relying On Optical Pumping*, Europhys. Lett. **27**, p. 569-574 (1994).

habituelle (équations de Bloch optiques généralisées). Cette méthode fournit également des images nouvelles de l'évolution d'atomes individuels.

L'approche Monte-Carlo quantique par la fonction délai a jusqu'ici été appliquée, dans le cadre du refroidissement laser, au seul cas des résonances noires sélectives en vitesse à une dimension, en configuration $\sigma_+ - \sigma_-$, c'est-à-dire à une situation où les familles d'états atomiques couplés par les lasers sont fermées. Il serait intéressant de rechercher une généralisation efficace de la méthode au cas plus complexe des familles ouvertes. Ceci permettrait en particulier de simuler le refroidissement par résonances noires à 2 et 3 dimensions dans des configurations lasers quelconques, et en général d'étendre cette méthode à la plupart des situations de refroidissement laser.

• *Approche "vols de Lévy"*

Les réalisations Monte-Carlo pour le refroidissement par résonances noires ont montré que l'évolution d'un seul atome est dominée par des événements rares en nombre : l'atome passe une partie significative de la durée totale d'interaction dans un seul état d'impulsion, qui correspond à l'impulsion la plus petite rencontrée. Ce comportement est typique d'un vol de Lévy et on peut montrer effectivement que la distribution des temps passés autour de $p = 0$ est une loi de Lévy. Les statistiques de Lévy fournissent alors le cadre adéquat pour une description statistique du refroidissement par résonances noires en termes de marche aléatoire dans l'espace des impulsions.

Les calculs quantiques du taux de fluorescence en fonction de l'impulsion permettent de bâtir un modèle classique de diffusion. Une description statistique du refroidissement par résonances noires se dégage alors : l'effet de refroidissement résulte de la compétition entre la distribution $P(\tau)$ des temps de piégeage et la distribution $\hat{P}(\hat{\tau})$ des temps de premier retour dans le piège. Les paramètres essentiels dans cette analyse deviennent μ et $\hat{\mu}$, qui définissent la largeur, c'est-à-dire le poids des temps longs, des distributions de temps de piégeage et de temps de premier retour.

Avec cette approche, on a pu calculer analytiquement les lois de puissance caractérisant les distributions en impulsion dans le régime des longs temps d'interaction, et ce à une, deux ou trois dimensions. On a obtenu pour la première fois des résultats sur la proportion d'atomes refroidis. L'approche "vols de Lévy" a été testée précisément, pour les résonances noires à une dimension, par comparaison aux simulations Monte-Carlo quantiques. Il serait très intéressant de faire de même à deux et trois dimensions, ce qui permettrait de vérifier la pertinence des modèles de diffusion.

Les statistiques de Lévy permettent de comprendre le rôle de la dimensionnalité dans le refroidissement par résonances noires : le temps passé hors du voisinage de $p = 0$ croît avec la dimension, ce qui diminue l'efficacité du refroidissement. Ce problème n'apparaissait pas pour les mécanismes de refroidissement laser au-dessus du recul (Doppler, Sisyphé) qui, reposant sur la friction, sont aussi efficaces à deux et trois dimensions qu'à une dimension. L'effet néfaste de la dimensionnalité est toutefois partiellement compensé par la présence possible dans les mécanismes de

refroidissement par résonances noires à deux et trois dimensions de forces de friction. En se superposant à la résonance noire, ces forces accroissent considérablement la proportion d'atomes refroidis. L'approche "vols de Lévy" fournit aussi des suggestions pour agir au niveau du profil $\Gamma(p)$ d'excitation pour modifier l'efficacité du refroidissement sub-recul. Ce type de démarche peut s'appliquer au refroidissement Raman sub-recul et conduire à son optimisation.

Une question importante est celle du gain éventuel dans l'espace des phases. L'approche "vols de Lévy" indique un gain important, proportionnel à la durée d'interaction θ , pour le refroidissement par résonances noires à 3 dimensions. Il est alors naturel de chercher à accroître encore la densité dans l'espace des phases en combinant refroidissement sub-recul et piégeage des atomes. Plusieurs voies sont possibles comme le refroidissement dans un potentiel externe [DMP94]. On peut aussi essayer un piège magnéto-optique "lin-45-lin" [EBS92], sur la transition $J_f=1 \leftrightarrow J_e=1$: ce piège reposant sur des forces stimulées a été observé sur une transition $J_f=4 \leftrightarrow J_e=5$, mais devrait également opérer sur une transition $J_f=1 \leftrightarrow J_e=1$, compatible avec le refroidissement par résonances noires. Peut-on alors trouver une configuration de champ magnétique qui, d'une part, possède une zone suffisamment vaste où le champ magnétique est suffisamment faible pour autoriser le refroidissement par résonances noires et qui, d'autre part, permette un piégeage efficace ? Il serait également intéressant d'appliquer l'approche "vols de Lévy" pour des résonances noires en piège, où la diffusion se fait dans l'espace des phases, alors qu'on n'a étudié jusqu'ici que la diffusion dans l'espace des impulsions. Notons que des résonances noires (non sélectives en vitesse) ont déjà été observées dans des pièges à ions [SSB89].

Le problème des limites du refroidissement par résonances noires a été clarifié. La présence de dissipation parasite, qui dépend des particularités du système physique, introduit les limitations les plus sévères, en particulier pour l'hélium métastable, avec la raie d'intercombinaison $2^3P_1 \rightarrow 1^1S_0$. En l'absence de dissipation, la finesse du pic à $p=0$ peut diminuer indéfiniment. Mais, en un temps fini, on ne peut pas amener tous les atomes dans un pic d'impulsion arbitrairement fin : c'est ce que l'on a appelé le "compromis remplissage finesse". On a pu calculer, en fonction de la dimensionnalité, la température minimale que l'on pouvait atteindre. Ceci suggère les caractéristiques de mécanismes optimaux de refroidissement sub-recul. Les résonances noires sont optimales à deux dimensions, et ne sont pas très loin de l'optimum à une et trois dimensions.

-
- [DMP94] R. Dum, P. Marte, T. Pellizzari, and P. Zoller, *Laser Cooling to a Single Quantum State in a Trap*, Phys. Rev. Lett. **73**, p. 2829-2832 (1994).
- [EBS92] O. Emile, F. Bardou, C. Salomon, Ph. Laurent, A. Nadir, and A. Clairon, *Observation of a New Magneto-Optical Trap*, Europhys. Lett. **20**, p. 687-691 (1992).
- [SSB89] M. Schubert, I. Siemers, and R. Blatt, *Spatially localized optical pumping in Paul traps*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, p. 2159-2614 (1989).

Il serait enfin intéressant d'étudier les relations entre les propriétés des marches aléatoires et les contraintes issues de la mécanique quantique. Ceci devrait permettre de mieux cerner les potentialités du refroidissement sub-recul.

Examinons tout d'abord l'inégalité position-impulsion de Heisenberg. Imaginons que l'on atteigne $\Delta p = \hbar k/100$, soit $T = T_R / 10^4$. L'étalement Δx des paquets d'onde atomique sera alors de l'ordre de 30 μ . Ceci reste donc parfaitement négligeable devant la taille du faisceau laser ou devant les autres paramètres spatiaux : l'inégalité position-impulsion ne donne aucune contrainte pratique sur le refroidissement sub-recul.

Qu'en est-il de l'inégalité temps-énergie $\Delta E \Delta t \geq \hbar$? Assimilons Δt à la durée d'interaction θ et considérons que la seule énergie atomique est l'énergie cinétique. L'inégalité temps-énergie se traduit par

$$\delta p_\theta \geq \sqrt{2 M \hbar} \times \theta^{-1/2} \quad (\text{c.1})$$

Examinons d'abord le cas du refroidissement au-dessus du recul. Le refroidissement Doppler de l'hélium métastable permet d'atteindre $\delta p_\theta \approx 2,6 \hbar k$ et, avec $\Omega_1 = \Gamma/4$, avec une constante de temps de friction de 15 μs environ, ce qui donne $\Delta E \Delta t \approx 20 \hbar$. Le refroidissement traditionnel permet donc de s'approcher relativement près de la limite de l'inégalité temps-énergie. Dans les mécanismes de friction, les vitesses caractéristiques diminuent exponentiellement rapidement jusqu'à atteindre leur limite. Cet amortissement exponentiel ne peut pas se poursuivre indéfiniment puisqu'il ne respecterait pas l'inégalité (c.1) dans la limite des temps longs.

Les mécanismes de refroidissement sub-recul, permettent d'atteindre des températures beaucoup plus basses que le refroidissement traditionnel. Mais, selon nos modèles, les impulsions atteintes diminuent lentement, en loi de puissance

$$\delta p_\theta \propto \theta^{-c} \quad (\text{c.2})$$

L'exposant c caractérise la vitesse de refroidissement. En conséquence, les temps de refroidissement sont beaucoup plus longs que pour le refroidissement traditionnel, ce qui a des répercussions pratiques importantes. Le ralentissement de la dynamique lorsqu'on passe dans le régime sub-recul semble inévitable, puisqu'on ne doit pas dépasser la limite de l'inégalité temps-énergie (c.1).

Notons que le refroidissement par résonances noires provoque une diminution en $\theta^{-1/2}$, qui semble réaliser un optimum par rapport à l'inégalité (c.1). A une et à deux dimensions, tous les atomes peuvent être refroidis. En revanche, à trois dimensions, la proportion des atomes refroidis diminue avec θ , de sorte que, si on prend en compte tous les atomes, l'inégalité (c.1) est largement respectée.

De manière générale, les processus de marche aléatoire, envisagés classiquement, imposent des contraintes sur l'exposant c de refroidissement. Si on veut refroidir l'ensemble des atomes, pour les modèles de diffusion que nous avons envisagés, on doit avoir :

$$c \leq 1/D \quad (\text{c.3})$$

A trois dimensions, on doit donc avoir $c \leq 1/3$. Il semble donc qu'un processus de refroidissement à trois dimensions, reposant sur une simple marche aléatoire, ne puisse

pas atteindre l'exposant de refroidissement $c = 1/2$ qu'autoriserait l'inégalité temps-énergie.

Selon ce raisonnement, la mécanique quantique autoriserait des mécanismes de refroidissement encore plus efficaces que ceux connus actuellement et, de manière générale, que ceux reposant sur une marche aléatoire en impulsion.

BIBLIOGRAPHIE

- [AAK88] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *Laser Cooling below the One-Photon Recoil Energy by Velocity-Selective Coherent Population Trapping*, Phys. Rev. Lett. **61**, p. 826-829 (1988).
- [AAK89] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the one-photon recoil energy by velocity-selective coherent population trapping : theoretical analysis*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, p. 2112-2124 (1989).
- [ABL82] S.V. Andreev, V.I. Balykin, V.S. Letokhov, and V.G. Minogin, *Radiative slowing down and monochromatization of a beam of sodium atoms in a counterpropagating laser beam*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **82**, p. 1429-1441 (1982) et Sov. Phys. JETP **55**, p. 828-834 (1982).
- [AbS70] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions, Ninth Edition*, Dover (1970).
- [ADH86] A. Aspect, J. Dalibard, A. Heidmann, C. Salomon, and C. Cohen-Tannoudji, *Cooling Atoms with Stimulated Emission*, Phys. Rev. Lett. **57**, p. 215-218 (1986).
- [AGM76] G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi, and G. Orriols, *An Experimental Method for the Observation of R.F. Transitions and Laser Beat Resonances in Oriented Na Vapour*, Nuovo Cimento **36B**, p. 5-20 (1976).
- [ArO76] E. Arimondo and G. Orriols, *Nonabsorbing Atomic Coherences by Coherent Two-Photon Transitions in a Three-Level Optical Pumping*, Lett. Nuovo Cimento **17**, p. 333-338 (1976).
- [Ari90] E. Arimondo, *Velocity-Selective Coherent Population Trapping in one and two dimensions*, Proceedings of the 1991 Varenna Summer School, edited by E. Arimondo, W.D. Phillips, and F. Strumia (North-Holland, Amsterdam, 1992).
- [AVK90] A. Aspect, N. Vansteenkiste, R. Kaiser, H. Haberland, and M. Karrais, *Preparation of a pure intense beam of metastable helium by laser cooling*, Chem. Phys. **145**, p. 307-315 (1990).
- [BaK91] V. Bagnato and D. Kleppner, *Bose-Einstein condensation in low-dimensional traps*, Phys. Rev. A **44**, p. 7439-7441 (1991).
- [BaS75] S. Bashkin and J.O. Stoner, Jr., *Atomic Energy Levels and Grotrian Diagrams*, North Holland, p. 8-9 (1975).
- [BAZ89] V.S. Bagnato, A. Aspect, and S.C. Zilio, *Study of laser deceleration of an atomic beam by monitoring the fluorescence along the deceleration path*, Opt. Comm. **72**, p. 76-81 (1989).
- [BBE94] F. Bardou, J.-P. Bouchaud, O. Emile, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Subrecoil Laser Cooling and Lévy Flights*, Phys. Rev. Lett. **72**, p. 203-206 (1994).
- [BEC92] F. Bardou, O. Emile, J.-M. Courty, C.I. Westbrook, and A. Aspect, *Magneto-Optical Trapping of Metastable Helium : Collisions in the Presence of Resonant Light*, Europhys. Lett. **20**, p. 681-686 (1992).
- [BLB94] P. Bouyer, P. Lemonde, M. Ben Dahan, A. Michaud, C. Salomon, and J. Dalibard, *An Atom Trap Relying On Optical Pumping*, Europhys. Lett. **27**, p. 569-574 (1994).
- [BoG90] J.-P. Bouchaud and A. Georges, *Anomalous diffusion in disordered media : statistical mechanisms, models and physical applications*, Phys. Rep. **195**, p. 127-293 (1990).
- [BOL91] J.P. Bouchaud, A. Ott, D. Langevin, and W. Urbach, *Les "vols de Lévy" ou la diffusion non brownienne*, La Recherche **22**, p. 378-380 (1991).
- [Bou92] J.P. Bouchaud, *Weak ergodicity breaking and aging in disordered systems*, J. Phys. I France **2**, p. 1705-1713 (1992).
- [BrT40] G. Breit and E. Teller, *Metastability of hydrogen and helium levels*, Astrophys. J. **91**, p. 215-238 (1940).
- [BSL94] F. Bardou, B. Saubaméa, J. Lawall, K. Shimizu, O. Emile, C. Westbrook, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Sub-recoil laser cooling with precooled atoms*, C. R. Acad. Sci. Paris **318**, p. 877-885 (1994).

- [Cas92] Y. Castin, *Les limites du refroidissement laser dans les mélasses optiques à une dimension*, Thèse de l'Université Paris VI (1992).
- [CBA90] C. Cohen-Tannoudji, F. Bardou, and A. Aspect, *Review of fundamental processes in laser cooling*, Proceedings of Laser Spectroscopy X (Font-Romeu 1990), edited by M. Ducloy, E. Giacobino, and G. Camy, p. 3-14 (World Scientific, Singapore, 1992).
- [CDG88] Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, InterEditions et Editions du CNRS (1988).
- [ChC78] S. Chikazumi and S.H. Charap, *Physics of Magnetism*, Chapitre 15, Krieger Publishing Company (1978).
- [CoD86] C. Cohen-Tannoudji and J. Dalibard, *Single-Atom Laser Spectroscopy. Looking for Dark Periods in Fluorescence Light*, Europhys. Lett. **1**, p. 441-448 (1986).
- [Coh62] C. Cohen-Tannoudji, Thèse, Paris (1962) ; et Ann. Phys. (France) **7**, p. 423-495 (1962).
- [Coh82] C. Cohen-Tannoudji, *Cours au Collège de France*, 1982-1983.
- [Coh83] C. Cohen-Tannoudji, *Cours au Collège de France 1983-1984*, leçon IV.
- [Coh90] C. Cohen-Tannoudji, *Atomic motion in laser light*, in *Fundamental systems in quantum optics*, J. Dalibard, J.-M. Raimond, and J. Zinn-Justin eds, Les Houches session LIII (1990), p. 1-183 (North-Holland, 1992).
- [Coh91] C. Cohen-Tannoudji, *Cours au Collège de France 1991-1992*, leçon IV.
- [CoK85] R.J. Cook and H.J. Kimble, *Possibility of direct observation of quantum jumps*, Phys. Rev. Lett. **54**, p. 1023-1026 (1985).
- [CRC86] *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, ed. R.C. Weast, CRC Press, p. E-341 (1986).
- [CWD89] Y. Castin, H. Wallis, and J. Dalibard, *Limit of Doppler Cooling*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, p. 2046-2057 (1989).
- [CZA92a] C. Cohen-Tannoudji, B. Zambon, and E. Arimondo, *Propriétés statistiques de la suite de sauts quantiques associée à des processus dissipatifs*, C. R. Acad. Sci. Paris **314**, p. 1139-1145 (1992).
- [CZA92b] C. Cohen-Tannoudji, B. Zambon, and E. Arimondo, *Modèle simple d'amplification sans inversion de population. étude par la méthode des sauts quantiques. Quantum jump approach to a simple model of amplification without inversion*, C. R. Acad. Sci. Paris **314**, p. 1293-1299 (1992).
- [CZA93] C. Cohen-Tannoudji, B. Zambon, and E. Arimondo, *Quantum -jump approach to dissipative processes: application to amplification without inversion*, J. Opt. Soc. B **10**, p. 2107-2120 (1993).
- [DaC89] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, p. 2023-2045 (1989).
- [Dal86] J. Dalibard, *Le rôle des fluctuations dans la dynamique d'un atome couplé au champ électromagnétique*, Thèse d'Etat de l'Université Paris VI (1986).
- [DCM92] J. Dalibard, Y. Castin. and K. Molmer, *Wave-Function Approach to Dissipative Processes in Quantum Optics*, Phys. Rev. Lett. **68**, p. 580-583 (1992).
- [DDC69] V.V. Damiano, C. Domenicali, and E.W. Collings, *Chapitre XIV de Magnetism and Metallurgy*, A.E. Berkowitz and E. Kneller eds., Academic Press (1969).
- [Deh75] H.G. Dehmelt, *Proposed $10^{14} \Delta\nu/\nu$ laser fluorescence spectroscopy on Tl^+ mono-ion oscillator II*, Bull. Amer. Phys. Soc. **20**, p. 60 (1975).
- [Deh82] H.G. Dehmelt, *Mono-ion oscillator as potential ultimate laser frequency standard*, IEEE Trans. Instrum. Meas. **2**, p. 83-87 (1982).
- [DLK94] N. Davidson, H.-J. Lee, M. Kasevich, and S. Chu, *Raman Cooling of Atoms in Two and Three Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **72**, p. 3158-3161 (1994).
- [DLN94] M. Drewsen, Ph. Laurent, A. Nahir, G. Santarelli, A. Clairon, Y. Castin, D. Grison, and C. Salomon, *Investigation of sub-Doppler cooling effects in a cesium magneto-optical trap*, Appl. Phys. B **59**, p. 283-298 (1994).

- [Dra69] G.W.F. Drake, *The $n^3P_2 - n^3P_2$ Magnetic Quadrupole Transitions of the Helium Sequence*, *Astrophys. J.* **158**, p. 1199-1203 (1969) and G.W.F. Drake, *Erratum*, *Astrophys. J.* **163**, p. 439 (1971).
- [Dra71] G.W.F. Drake, *Theory of Relativistic Magnetic-Dipole Transitions ;Lifetime of the Metastable 2^3S State of Heliumlike Ions*, *Phys. Rev. A* **3**, p. 908-915 (1971).
- [DRC84] J. Dalibard, S. Reynaud, and C. Cohen-Tannoudji, *Potentialities of a new $\sigma_+ \sigma_-$ laser configuration for radiative cooling and trapping*, *J. Phys. B : At. Mol. Phys.* **17**, p. 4577-4594 (1984).
- [DrD69] G.W.F. Drake and A. Dalgarno, *Intercombination oscillator strengths in the helium sequence*, *Astrophys. J.* **157**, p. 459-462 (1969).
- [DrR72] G.W.F. Drake and R.R. Robbins, *The population of helium triplet states in gaseous nebulae*, *Astrophys. J.* **171**, p. 55-61 (1972).
- [DMP94] R. Dum, P. Marte, T. Pellizzari, and P. Zoller, *Laser Cooling to a Single Quantum State in a Trap*, *Phys. Rev. Lett.* **73**, p. 2829-2832 (1994).
- [DRS75] F.B. Dunning, R.D. Rundel, and R.F. Stebbings, *Determination of Secondary Electron Ejection Coefficients for Rare Gas Metastable Atoms*, *Rev. Sci. Instrum.* **46**, p. 697-701 (1975).
- [DSL87] J.M. Daniels, L.D. Scheerer, M. Leduc, and P.J. Nacher, *Polarizing ^3He nuclei with neodymium $\text{La}_{1-x}\text{Nd}_x\text{MgAl}_{11}\text{O}_{19}$ lasers*, *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, p. 1133-1135 (1987).
- [DVD69] G.W. F. Drake, G.A. Victor, and A. Dalgarno, *Two-Photon Decay of the Singlet and Triplet Metastable States of Helium-like Ions*, *Phys. Rev.* **180**, p. 25-32 (1969).
- [EBH85] W. Ertmer, R. Blatt, J. Hall, and M. Zhu, *Laser Manipulation of Atomic Beam Velocities : Demonstration of Stopped Atoms and Velocity Reversal*, *Phys. Rev. Lett.* **54**, p. 996-999 (1985).
- [EBS92] O. Emile, F. Bardou, C. Salomon, Ph. Laurent, A. Nadir, and A. Clairon, *Observation of a New Magneto-Optical Trap*, *Europhys. Lett.* **20**, p. 687-691 (1992).
- [Ein17] A. Einstein, *Théorie quantique du rayonnement*, *Physikalische Zeitschrift* **18**, p. 121-128 (1917) ; traduction française dans A. Einstein, *Oeuvres choisies, Tome I : Quanta*, ed. F. Balibar, p. 134-146 (Seuil-CNRS, Paris, 1989).
- [EKG93] O. Emile, R. Kaiser, C. Gerz, H. Wallis, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Magnetically assisted Sisyphus effect*, *J. Phys. II France* **3**, p. 1709-1733 (1993).
- [Elt67] R.C. Elton, *Intercombination line oscillator strengths in the helium isoelectronic sequence*, *Astrophys. J.* **148**, p. 573-578 (1967).
- [Emi93] O. Emile, *Manipulation d'hélium métastable par laser : effet Sisyphus magnétique*, Thèse de l'Université Paris VI (1993).
- [EUV93] K.S.E Eikema, W. Ubachs, W. Vassen, and W. Hogervorst, *First Laser Excitation of the $^4\text{He } S-2^1P$ Resonance Line at 58 nm*, *Phys. Rev. Lett.* **71**, p. 1690-1692 (1993).
- [Fel57] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications, Volume I, Chapter XII*, Third Edition, Wiley (1957).
- [FeS71] G. Feinberg and J. Sucher, *Calculation of the Decay Rate for $2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0 + \text{One Photon in Helium}$* , *Phys. Rev. Lett.* **26**, p. 681-684 (1971).
- [Fri33] Von R. Frisch, *Experimenteller Nachweis des Einsteinschen Strahlungsrückstoßes*, *Z. Phys.* **86**, p. 42-48 (1933).
- [GaJ69a] A. Gabriel and C. Jordan, *Long Wavelength Satellites to the He-like Ion Resonance Lines in the Laboratory and in the Sun*, *Nature (London)* **221**, p. 947-949 (1969).
- [GaJ69b] A. Gabriel and C. Jordan, *Interpretation of solar helium-like intensities*, *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* **145**, p. 241-248 (1969).
- [Gar62] R.H. Garstang, *Hyperfine Structure and Intercombination Line Intensities in the Spectra of Magnesium, Zinc, Cadmium and Mercury*, *J. Opt. Soc. Am.* **52**, p. 845-851 (1962).
- [Gar67] R.H. Garstang, *Magnetic quadrupole line intensities*, *Astrophys. J.* **148**, p. 579-584 (1967).

- [GGS94] L.S. Goldner, C. Gerz, R.J.C. Spreeuw, S.L. Rolston, C.I. Westbrook, W.D. Phillips, P. Marte, and P.Zoller, *Momentum Transfer in Laser Cooled Cesium by Adiabatic Passage in a Light Field*, Phys. Rev. Lett. **72**, p. 997-1000 (1994).
- [GKC92] K.E. Gibble, S. Kasapi, and S. Chu, *Improved magneto-optic trapping in a vapor cell*, Opt. Lett. **17**, p. 526-528 (1992).
- [GOS91] R. Grimm, Y. Ovchinnikov, A. Sidorov, and V. Letokhov, *Dipole force rectification in a monochromatic laser field*, Opt. Comm. **84**, p. 18-22 (1991).
- [GRW94] K.M. Gheri, H. Ritsch, D.F. Walls, and V.I. Balykin, *How large photon recoil can make cold atoms lase*, manuscript, 26 août 1994.
- [Gri69] H.R. Griem, *Spontaneous single-photon decay of 2^3S_1 in helium-like ions*, Astrophys. J. **156**, p. L103-L105 (1969).
- [Gri92] D. Grison, *Atomes piégés et refroidis par laser à quelques microkelvins : un piège magnéto-optique dans une cellule de césium et quelques applications*, Thèse de l'Université Paris VI (1992).
- [GWS78] H.R. Gray, R.M. Whitley, and C.R. Stroud, Jr., *Coherent trapping of atomic populations*, Optics Letters **3**, p. 218-220 (1978).
- [GWU94] R. Gaggl, L. Windholz, G. Umfer, and C. Neureiter, *Laser cooling of a sodium atomic beam using the Stark effect*, Phys. Rev. A **49**, p. 1119-1121 (1994).
- [HaS75] T.W. Hänsch and A.L. Schawlow, *Cooling of gases by lasers radiation*, Opt. Comm. **13**, p. 68-69 (1975).
- [HeH92] A. Hemmerich and T.W. Hänsch, *Radiation Pressure Vortices in Two Crossed Standing Waves*, Phys. Rev. Lett. **68**, p. 1492-1495 (1992).
- [Jef68] J.T. Jefferies, *Spectral Line Formation*, § 4.6, Blaisdell Publishing Company (1968).
- [Kai90] R. Kaiser, *Manipulation par laser d'hélium métastable : effet Hanle mécanique, refroidissement sous le recul d'un photon*, Thèse de l'Université Paris VI (1990).
- [KaS90] H. Katori and F. Shimizu, *Laser Cooling and Trapping of Argon and Krypton Using Diode Lasers*, Jpn. J. Appl. Phys. **29**, p. L2124-L2126 (1990).
- [KaC92] M. Kasevich and S. Chu, *Laser Cooling below a Photon Recoil with Three-Level Atoms*, Phys. Rev. Lett. **69**, p. 1741-1744 (1992).
- [KDR95] A. Kastberg, W.D. Phillips, S.L. Rolston, R.J.C. Spreeuw, and P.S. Jessen, *Adiabatic Cooling of Cesium to 700 nK in an Optical Lattice*, Phys. Rev. Lett. **74**, p. 1542-1545 (1995).
- [KGH89] J.R. Kuklinski, U. Gaubatz, F.T. Hioe, and K. Bergman, *Adiabatic population transfer in a three-level system driven by delayed laser pulses*, Phys. rev. A **40**, p. 6741-6744 (1989).
- [KKM93] E.A. Korsunskii, D.V. Kosachev, B.G. Matisov, and Yu. V. Rozhdestvenskii, *Velocity selection of atoms in a coherent scattering by travelling electromagnetic waves*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **103**, p. 396-416 (1993) and JETP **76**, p. 210-218 (1993).
- [KMJ92] W. Ketterle, A. Martin, M.A. Joffe, and D.E. Pritchard, *Slowing and Cooling Atoms in Isotropic Laser Light*, Phys. Rev. Lett. **69**, p. 2483-2486 (1992).
- [KMR92] E.A. Korsunskii, B.G. Matisov, and Yu. V. Rozhdestvenskii, *Coherent population trapping associated with double radio-optical resonance*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **102**, p. 1096-1108 (1992) and JETP **75**, p. 595-601 (1992).
- [KMR93] D. Kosachiov, B. Matisov, and YU. Rozhdestvensky, *Phase Sensitive Laser Cooling of Double- Λ Atoms*, Europhys. Lett. **22**, p. 11-16 (1993).
- [KuM92] M. Kumakura and N. Morita, *Visible Observation of Metastable Helium Atoms Confined in an Infrared / Visible Double Resonance trap*, Jpn. J. Appl. Phys. **31**, p. L276-L279 (1993).
- [KVA91] R. Kaiser, N. Vansteenkiste, A. Aspect, E. Arimondo, and C. Cohen-Tannoudji, *Mechanical Hanle Effect*, Z. Phys. D **18**, p. 17-24 (1991).
- [LaP94] J. Lawall and M. Prentiss, *Demonstration of a Novel Atomic Beamsplitter*, Phys. Rev. Lett. **72**, p. 993-996 (1994).

- [Law93] J.R. Lawall, *A Coherent Atomic Beamsplitter Based on Adiabatic Passage*, Thesis, Harvard University (1993).
- [LBS94] J. Lawall, F. Bardou, B. Saubaméa, K. Shimizu, M. Leduc, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Two-dimensional Sub-recoil Laser Cooling*, Phys. Rev. Lett. **73**, p. 1915-1918 (1994).
- [LeM81] V.S. Letokhov and V.G. Minogin, *Laser cooling of atoms and its application in frequency standards*, J. de Physique (Colloque C-8, supplément au numéro 12) **42**, p. 347-355 (1981).
- [LJD77] C.D. Lin, W.R. Johnson, and A. Dalgarno, *Radiative Decays of the $n = 2$ states of He-like ions*, Phys. Rev. A **15**, p. 154-161 (1977).
- [Lou93] B. Lounis, *Atomes refroidis par laser : de la mélasse au cristal optique*, Thèse de doctorat, Université Paris XI (1993).
- [LPR89] P.D. Lett, W.D. Phillips, S.C. Rolston, C.E. Tanner, R.N. Watts, and C.I. Westbrook, *Optical molasses*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, p. 2084-2107 (1989).
- [Lym22] T. Lyman, *The Spectrum of Helium in the Extreme Ultra-Violet*, Nature **110**, p. 278-279 (1922).
- [Lym24] T. Lyman, *The Spectrum of Helium in the Extreme Ultra-Violet*, Astrophys. J. **60**, p. 1-14 (1924).
- [LWW88] P.D. Lett, R.N. Watts, C.I. Westbrook, W. Phillips, P.L. Gould, and H.J. Metcalf, *Observation of Atoms Laser Cooled below the Doppler Limit*, Phys. Rev. Lett. **61**, p. 169-172 (1988).
- [MaA91] F. Mauri and E. Arimondo, *Coherent Trapping Sub-recoil Cooling in Two Dimensions Aided by a Force*, Europhys. Lett. **16**, p. 717-722 (1991).
- [MaA92] F. Mauri and E. Arimondo, *Two Dimension Selective Coherent Population Trapping Controlled by a Phase Shift*, Appl. Phys. B **54**, p. 420-427 (1992).
- [MaM78] R. Marrus and P.J. Mohr, *Forbidden transitions in one and two-electron atoms*, Advances in Atomic and Molecular Physics **14**, p. 181-225 (1978).
- [MaM93] B.G. Mátisov and I.E. Mazets, *Limit of laser cooling of atoms by velocity selective coherent population trapping*, J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys. **26**, p. 3795-3802 (1993).
- [Man89] B. Mandelbrot, *Les objets fractals, 3^e édition*, Flammarion, Paris (1989). Voir en particulier les chapitres VI et VII.
- [MaS92] R.N. Mantegna and H.E. Stanley, *Stochastic Process with Ultraslow Convergence to a Gaussian : The Truncated Lévy Flight*, Phys. Rev. Lett. **73**, p. 2946-2949 (1994).
- [MCD93] K. Mølmer, J. Dalibard, and Y. Castin, *A Monte Carlo wave-function method in quantum optics*, J. Opt. Soc. Am. B. **10**, p. 524-538 (1993).
- [MDT94] P. Marte, R. Dum, R. Taïeb, P. Zoller, M.S. Shahriar, and M. Prentiss, *Polarization-gradient-assisted subrecoil cooling : Quantum calculations in one dimension*, Phys. Rev. A **49**, p. 4826-4836 (1994).
- [Mif78] D. Mihalas, *Stellar Atmospheres, Second Edition*, § 9-2, Freeman (San Francisco, 1978).
- [Min80] V.G. Minogin, *Kinetic equation for atoms interacting with laser radiation*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **79**, p. 2044-2056 (1980) and Sov. Phys. JETP **52**, p. 1032-1038 (1980).
- [MiR85] V.G. Minogin and Yu. V. Rozhdestvenskii, *Coherent dragging of atomic populations in problems of resonant light pressure*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **88**, p. 1950-1957 (1985) and Sov. Phys. JETP **61**, p. 1156-1160 (1985).
- [MoK91] N. Morita and M. Kumakura, *Laser Cooling of a Helium Atomic Beam*, Jap. J. of Appl. Phys. **30**, p. L1678-L1681 (1991).
- [Mol91] K. Molmer, *Limits of Doppler Cooling in Pulsed Laser Fields*, Phys. Rev. Lett. **66**, p. 2301-2304 (1991).
- [MoW73] H.W. Moos and J.R. Woodworth, *Observation of the $2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$ Spontaneous Emission Line from Helium and Measurement of the Transition Rate*, Phys. Rev. Lett. **30**, p. 775-778 (1973).

- [MSR90] C. Monroe, W. Swann, H. Robinson, and C. Wieman, *Very Cold Trapped Atoms in a Vapor Cell*, Phys. Rev. Lett. **65**, p. 1571-1574 (1990).
- [Nov95] M.A. Novotny, *Monte-Carlo Algorithms with Absorbing Markov Chains : Fast Local Algorithms for Slow Dynamics*, Phys. Rev. Lett. **74**, p. 1-5 (1995).
- [NWE90] J. Nellesen, J. Werner, and W. Ertmer, *Magneto-optical compression of a monoenergetic sodium atomic beam*, Opt. Comm. **78**, p. 300-308 (1990).
- [OBL90] A. Ott, J.P. Bouchaud, D. Langevin, and W. Urbach, *Anomalous Diffusion in "Living Polymers" : a Genuine Lévy Flight ?*, Phys. Rev. Lett. **65**, p. 2201-2204 (1990).
- [OER94] M. Ol'shanii, T. Esslinger, T. Runge, M. Weidemüller, A. Hemmerich, V. Minogin, and T.W. Hänsch, *Cooling by Coherent Population Trapping in an elliptically polarized standing wave*, soumis à Opt. Comm. (1994).
- [OIM90] M. Ol'shanii and V.G. Minogin, *Three-dimensional velocity-selective coherent atomic population trapping in resonant light fields*, Proceedings of the international workshop on "Light induced kinetic effects on atoms, ions and molecules", eds. L. Moi, S. Gozzini, C. Gabanini, E. Arimondo, and F. Strumia (Marciana Marina, Italy, 1990) p. 99-110 (Ets Editrice, Pisa, 1991).
- [OIM92] M. Ol'shanii and V.G. Minogin, *Three-dimensional velocity-selective coherent population trapping of a (3+3)-level atom*, Opt. Comm. **89**, p. 393-398 (1992).
- [Ols92] M. Ol'shanii, Thèse : *Coherent Population Trapping Effect in the Processes of the Mechanical Interaction of Atoms with the Electromagnetic Field*, Institute of Spectroscopy, Russian Academy of Sciences, Troitzk, Russia (1992).
- [OrB90] M. Orrit and J. Bernard, *Single Pentacene Molecules Detected by Fluorescence excitation in a p-Terphenyl Crystal*, Phys. Rev. Lett. **65**, p. 2716-2719 (1990)
- [PaG30] L. Pauling and S. Goudsmit, *Structure of Line Spectra*, p. 102, Mc Graw-Hill (1930).
- [PHB87] D.E. Pritchard, K. Helmerson, V.S. Bagnato, G.P. Lafyatis, and A.G. Martin, *Optical Pumping in Translation Space*, in *Laser Spectroscopy VIII*, edited by W. Persson and S. Svansberg, Springer-Verlag, Berlin (1987).
- [PhM82] W.D. Phillips and H. Metcalf, *Laser Deceleration of an Atomic Beam*, Phys. Rev. Lett. **48**, p. 596-599 (1982).
- [PiV72] J.L. Piqué, J.L. Vialle, Opt. Comm. **5**, p. 402 (1972).
- [PMA87] F. Papoff, F. Mauri, and E. Arimondo, *Transient velocity-selective coherent population trapping in one dimension*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, p. 321-331 (1992).
- [PMT94] P. Marte, R. Dum, R. Taïeb, P. Zoller, M.S. Shahriar, and M. Prentiss, *Polarization-gradient-assisted subrecoil cooling : Quantum calculations in one dimension*, Phys. Rev. A **49**, p. 4826-4836 (1994).
- [Por86] T.M. Porter, *The rise of statistical thinking, 1820-1900*, Princeton University Press (1986).
- [PPM82] J.V. Prodan, W.D. Phillips, and H. Metcalf, *Laser Production of a Very Slow Monoenergetic Atomic Beam*, Phys. Rev. Lett. **49**, p. 1149-1153 (1982).
- [PPM85] W.D. Phillips, J.V. Prodan, and H. Metcalf, *Laser cooling and electromagnetic trapping of neutral atoms*, J. Opt. Soc. Am. B **2**, p. 1751-1767 (1985).
- [PTV92] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C, Second Edition*, Cambridge University Press (1992).
- [PYV93] P. Pillet, C. Valentin, R.-L. Yuan, and J. Yu, *Adiabatic population transfer in a multilevel system*, Phys. Rev. A **48**, p. 845-848 (1993).
- [Rah95] I. Rahimov, *Random Sums and Branching Stochastic Processes*, Springer Verlag (1995).
- [RaS85] A.A. Radzig and B.M. Smirnov, *Reference data on atoms, molecules and ions*, P.P. Toennies ed., Springer Verlag (1985).
- [RDC88] S. Reynaud, J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji, *Photon Statistics and Quantum Jumps : The Picture of the Dressed Atom Radiative Cascade*, IEEE J. of Quantum Electronics **24**, p. 1395-1402 (1988).

- [Rey83] S. Reynaud, *La fluorescence de résonance : Etude par la méthode de l'atome habillé ; Resonance fluorescence : The dressed atom approach*, Ann. Phys. Fr. **8**, p. 315-370 (1983).
- [RPC87] E.L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, and D.E. Pritchard, *Trapping of Neutral Sodium Atoms with Radiation Pressure*, Phys. Rev. Lett. **59**, p. 2631-2634 (1987).
- [RWM90] E. Riis, D.S. Weiss, K.A. Moler, and S. Chu, *Atom Funnel for the Production of a Slow, High-Density Atomic Beam*, Phys. Rev. Lett. **64**, p. 1658-1661 (1990).
- [SDP90] C. Salomon, J. Dalibard, W.D. Phillips, A. Clairon, and S. Guellati, *Laser cooling of atoms below 3 μ K*, Europhys. Lett. **12**, p. 683-688 (1990).
- [SHP93] M.S. Shahriar, P.R. Hemmer, M.G. Prentiss, P. Marte, J. Mervis, D.P. Katz, N.P. Bigelow, and T. Cai, *Continuous polarization gradient precooling-assisted coherent population trapping*, Phys. Rev. A **48**, p. R4035-R4038 (1993).
- [SLV86] L.D. Scheerer, M. Leduc, D. Vivien, A. Lejus, and J. Thery, *LNA : A New Nd Laser Tunable Around 1.05 and 1.08 μ* , IEEE J. Quantum Electron. **22**, p. 713-717 (1986).
- [Sob79] I.I. Sobelman, *Atomic Spectra and Radiative Transitions*, p. 39 and p. 237, Springer-Verlag (1979).
- [SPS87] T.J. Summer, J.M. Pendlebury, and K.F. Smith, *Conventional Magnetic Shielding*, J. Phys. D **20**, p. 1095-1101 (1987).
- [SSB89] M. Schubert, I. Siemers, and R. Blatt, *Spatially localized optical pumping in Paul traps*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, p. 2159-2614 (1989).
- [SST87] F. Shimizu, K. Shimizu, and H. Takuma, *Laser Cooling of a Neon Atomic Beam in Metastable States*, Jap. J. of Appl. Phys. **26**, p. L1847-L1849 (1987).
- [SST89] F. Shimizu, K. Shimizu, and H. Takuma, *Laser cooling and trapping of Ne metastable atoms*, Phys. Rev. A **39**, p. 2758-2760 (1989).
- [SSV90] B. Sheehy, S.Q. Shang, P. van der Straten, S. Hatamian, and H. Metcalf, *Magnetic-Field-Induced Laser Cooling below the Doppler Limit*, Phys. Rev. Lett. **64**, p. 858-861 (1990).
- [SST89] F. Shimizu, K. Shimizu, and H. Takuma, *Four-beam laser trap of neutral atoms*, Optics Letters **16**, p. 339-341 (1991).
- [SST92a] F. Shimizu, K. Shimizu, and H. Takuma, *Stark Phase Shift and Deflection in the Ultracold Atomic Interferometer*, Jpn. J. Appl. Phys. **31**, p. L436-L438 (1992).
- [SST92a] F. Shimizu, K. Shimizu, and H. Takuma, *Double-slit interference with ultracold metastable neon atoms*, Phys. Rev. A **46**, p. R17-R20 (1992).
- [StF91] A. Steane and C.J. Foot, *Laser Cooling below the Doppler Limit in a Magneto-Optical Trap*, Europhys. Lett. **14**, p. 231-236 (1991).
- [SWR94] G.V. Shlyapnikov, J.T.M. Walraven, U.M. Rahmanov, and M.W. Reynolds, *Decay kinetics and Bose-Einstein condensation in a gas of spin-polarized triplet helium*, soumis à Phys. Rev. Lett. (1994).
- [TaH72] H.Y.S. Tang and W. Happer, *Experimental Determination of the $2^3P_1 \rightarrow 1^1S_0$ Forbidden Decay Rate in Helium*, Bull. Am. Phys. Soc. **17**, p. 476 (1972).
- [UWR89] P.J. Ungar, D.S. Weiss, E. Riis, and S. Chu, *Optical molasses and multiple level atoms : theory*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, p. 2058-2071 (1989).
- [Van89] N. Vansteenkiste, *Réalisation d'un laser monomode et asservi sur la transition $2^3S_1-2^3P$ de l'hélium 4 (1083 nm) : utilisation pour quelques expériences de refroidissement radiatif d'atomes d'hélium 4 métastable*, Thèse de l'Université Paris-Sud (1989).
- [VKG89] N. Vansteenkiste, R. Kaiser, C. Gerz, L. Hollberg, C. Salomon, and A. Aspect, *A frequency-stabilized LNA laser at 1,083 μ : application to the manipulation of helium 4 atoms*, J. Phys. II (France) **1**, p. 1407-1428 (1991).
- [Von74] S.V. Vonsovskii, *Magnetism, Volume Two*, Wiley, Chapitre 24 § 10 (1974).
- [WAB91] C.I. Westbrook, A. Aspect, F. Bardou, C. Cohen-Tannoudji, J.-M. Courty, O. Emile, C. Gerz, and I. Silvera, *Magneto-optical trap for metastable helium*, Tenth International Conference on Laser Spectroscopy, Font-Romeu 17-21 juin 1991 (M. Ducloy, E. Giacobino and G. Camy eds, World Scientific) p. 48-49 (1992).

- [WaE89] H. Wallis and W. Ertmer, *Broadband laser cooling on narrow transitions*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, p. 2211-2219 (1989).
- [WEO94] M. Weidemüller, T. Esslinger, M.A. Ol'shanii, A. Hemmerich, and T.W. Hänsch, *A Novel Scheme for Efficient Cooling below the Photon Recoil Limit*, Europhys. Lett. **27**, p. 109-114 (1994).
- [WFH92] T. Walker, P. Feng, D. Hoffman, and R.S. Williamson, III, *Spin-Polarized Spontaneous-Force Atom Trap*, Phys. Rev. Lett. **69**, p. 2168-2171 (1992).
- [WiD75] D. Wineland and H. Dehmelt, *Proposed $10^{14} \Delta\nu/\nu$ Laser Fluorescence Spectroscopy on Tl^+ Mono-Ion Oscillator III*, Bull. Am. Phys. Soc. **20**, p. 637 (1975).
- [WiI79] D.J. Wineland and W.M. Itano, *Laser cooling of atoms*, Phys. Rev. A **20**, p. 1521-1540 (1979).
- [WoM75] J.R. Woodworth and H.W. Moss, *Experimental determination of the single-photon transition rate between the 2^3S_1 and 1^1S_0 states of He I*, Phys. Rev. A **6**, p. 2455 (1975).
- [ZLK89] P. Zhao, J.R. Lawall, A.W. Kam, M.D. Lindsay, and F.M. Pipkin, *Direct Laser Measurement of the Lamb Shift of $2^3S - 2^3P$ Transitions in Helium*, Phys. Rev. Lett. **63**, p. 1593-1596 (1989).
- [ZMW87] P. Zoller, M. Marte, and D.F. Walls, *Quantum jumps in atomic systems*, Phys. Rev. A **35**, p. 198-207 (1987).
- [ZuK94] G. Zumofen and J. Klafter, *Spectral random walk of a single molecule*, Chem. Phys. Lett. **219**, p. 303-309 (1994).

ANNEXE A

Formulaire

1 Paramètres atomiques et optiques

Notation	Sens physique
M	masse atomique
p	impulsion atomique
v	vitesse atomique
ω_0	fréquence de la transition atomique
$\hbar\Gamma$	largeur du niveau de vie excité

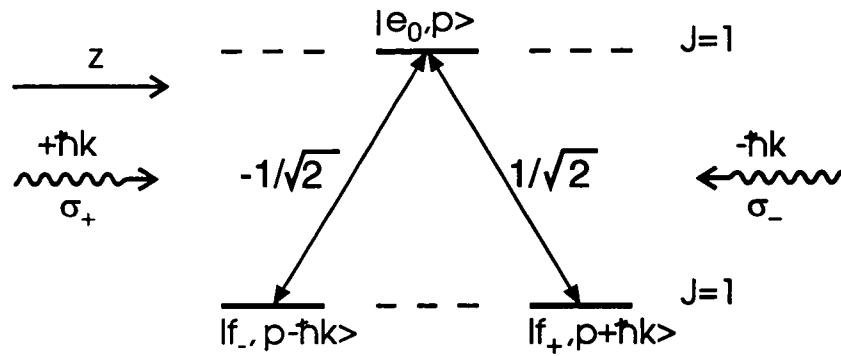
Tableau A.1 Paramètres purement atomiques

Notation	Définition	Sens physique
λ		longueur d'onde du laser
ω_L	$2\pi c/\lambda$	fréquence laser
Ω_1		pulsation de Rabi du faisceau laser
$\hbar k$	\hbar/λ	impulsion d'un photon
p_R	$\hbar k$	impulsion de recul
v_R	$\hbar k / M$	vitesse de recul
E_R	$(\hbar k)^2 / 2M$	énergie de recul
τ_R	\hbar / E_R	temps de recul
δ	$\omega_L - \omega_0$	désaccord
$\tilde{\delta}$	$\delta + E_R/\hbar$	désaccord corrigé du recul
s	$\frac{\Omega_1^2}{\delta^2 + \Gamma^2 / 4}$	paramètre de saturation

Tableau A.2 Paramètres atomiques et lasers

2 Résonances noires 1D

● Transition étudiée



Noter le choix des signes pour les coefficients de Clebsch-Gordan.

● Etats couplés et non couplés

$$|\psi_C(p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|f_-, p - \hbar k\rangle - |f_+, p + \hbar k\rangle]$$

$$|\psi_{NC}(p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|f_-, p - \hbar k\rangle + |f_+, p + \hbar k\rangle]$$

Noter le choix des signes pour $|\psi_C(p)\rangle$.

● Hamiltonien effectif dans la base $\{|e_0, p\rangle, |f_+, p + \hbar k\rangle, |f_-, p - \hbar k\rangle\}$

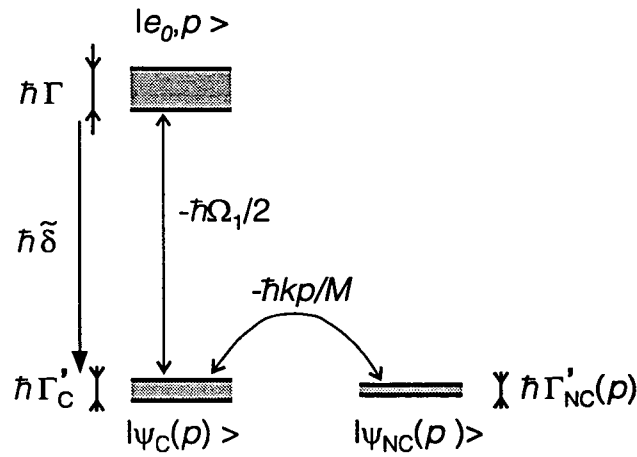
$$H_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2M} - i\hbar\Gamma/2 & \frac{\hbar\Omega_1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\hbar\Omega_1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\hbar\Omega_1}{2\sqrt{2}} & \frac{(p + \hbar k)^2}{2M} + \hbar\delta & 0 \\ -\frac{\hbar\Omega_1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{(p - \hbar k)^2}{2M} + \hbar\delta \end{pmatrix}$$

● Hamiltonien effectif dans la base $\{|e_0, p\rangle, |\psi_C(p)\rangle, |\psi_{NC}(p)\rangle\}$

Dans la base $\{|e_0, p\rangle, |\psi_C(p)\rangle, |\psi_{NC}(p)\rangle\}$

$$H_{\text{eff}} = \left(\frac{p^2}{2M} + \hbar\tilde{\delta} \right) \mathbf{1} + \hbar \begin{pmatrix} -\tilde{\delta} - i\Gamma/2 & -\Omega_1/2 & 0 \\ -\Omega_1/2 & 0 & -kp/M \\ 0 & -kp/M & 0 \end{pmatrix}$$

● Diagonalisation approchée



On obtient les durées de vie et les décalages des états perturbés $|\tilde{\psi}_C(p)\rangle$ et $|\tilde{\psi}_{NC}(p)\rangle$ dans le cas perturbatif ($\Omega_R \ll \sqrt{\tilde{\delta}^2 + \Gamma^2}/4$ et $k|p|/M \ll |\delta'_C|, \Gamma'_C$)

$$\Gamma'_C = \Gamma \frac{(\Omega_1/2)^2}{\tilde{\delta}^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}, \text{ et } \delta'_C = \tilde{\delta} \frac{(\Omega_1/2)^2}{\tilde{\delta}^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

$$\Gamma'_{NC}(p) = \Gamma'_C \frac{(kp/M)^2}{\delta'^2_C + \frac{\Gamma'^2_C}{4}}, \text{ et } \delta'_{NC}(p) = \delta'_C \frac{(kp/M)^2}{\delta'^2_C + \frac{\Gamma'^2_C}{4}}$$

Notons que $\Gamma'_{NC}(p)$ ne dépend pas du désaccord, puisque après simplification,

$$\Gamma'_{NC}(p) = \Gamma \frac{4(kp/M)^2}{\Omega_1^2},$$

Un cas particulier important est celui où $\tilde{\delta} = \delta'_C = \delta'_{NC}(p) = 0$, on a alors

$$\Gamma'_C = \frac{\Omega_1^2}{\Gamma}$$

3 Variables d'impulsion

Notation	Définition	Sens physique
p_R	$\hbar k$	impulsion de recul
p_h	$\hbar k_p / M = \Gamma$	impulsion associée à la largeur homogène de la transition
δp_θ		demi-largeur à $e^{-1/2}$ du pic d'atomes refroidis
p_θ		impulsion caractéristique du pic d'atomes refroidis
p_{Raman}	$\frac{\hbar k_{\text{Raman}}}{M} = \frac{1}{4} \Gamma'_c$	demi-largeur à mi-hauteur de la résonance noire
p_0	$\Gamma'(p) = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha$	impulsion caractéristique de la fluorescence pour $ p < p_{\text{trap}}$
p_{trap}		taille du "piège"

4 Variables temporelles

Notation	Définition	Sens physique
θ		durée de l'interaction atomes-lasers
Γ^{-1}		durée de vie de l'état excité
τ_R	\hbar / E_R	temps de recul
τ ou τ_d		décalage entre deux photons spontanés successifs
τ		temps de piégeage
$\hat{\tau}$		temps de premier retour
τ_{ext}	$\tau_{\text{ext}} = \frac{1}{\Gamma'} = \frac{2}{\Gamma'_c}$	décalage entre deux photons spontanés à l'extérieur du piège
τ_{trap}	$\tau_{\text{trap}} = \tau_0 \left(\frac{p_{\text{trap}}}{p_0} \right)^\alpha$	temps caractéristique pour $ p < p_{\text{trap}}$

5 Formalisme de la fonction délai

Notation	Sens physique
τ	délai arbitraire entre deux photons spontanés
$\pi_0(\tau)$	population de la multiplicité à 0 photon
$\pi_e(\tau)$	population de l'état excité dans la multiplicité à 0 photon
$w_2(\tau) \equiv -d\pi_0/d\tau$	fonction délai
τ_i	délai entre le i^{e} et le $(i+1)^{\text{e}}$ photon, résultat d'un tirage aléatoire donné
t_i	date d'émission du i^{e} photon
$t (t_i \leq t = t_i + \tau \leq t_{i+1})$	date arbitraire
$ \varphi_0(t + \tau)\rangle$	fonction d'onde atomique projetée sur la multiplicité à 0 photon

6 Approche vols de Lévy

Notation	Définition	Sens physique
θ ou θ_N	$T_N + \hat{T}_N$	durée de l'interaction atomes-lasers
τ ou τ_i		temps de piégeage
$\hat{\tau}$ ou $\hat{\tau}_i$		temps de premier retour = temps de sortie
N		nombre de piégeages (ou de sorties) pendant la durée θ
T_N	$\sum_{i=1}^N \tau_i$	somme des temps de piégeage
\hat{T}_N	$\sum_{i=1}^N \hat{\tau}_i$	somme des temps de sortie
$P(\tau), b_+, \mu$	$P(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} b_+ / \tau^{1+\mu}$	distribution des temps de piégeage et paramètres caractéristiques
$\hat{P}(\hat{\tau}), \hat{b}_+, \hat{\mu}$	$\hat{P}(\hat{\tau}) \xrightarrow{\hat{\tau} \rightarrow \infty} \hat{b}_+ / \hat{\tau}^{1+\hat{\mu}}$	distribution des temps de premier retour et paramètres caractéristiques
$A(t)$		loi d'arrosage des temps de piégeage
$L_\mu^B(u)$		loi de Lévy
$\Gamma(p), \tau_0, p_0, \alpha$	$\Gamma(p) = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha$	taux de fluorescence au voisinage de $p = 0$, temps, impulsion et exposant caractéristiques
τ_{ext}		temps typique entre deux sauts à l'extérieur du piège
p_{max}		impulsion maximale typique lors d'une sortie du piège (déterminée par la friction)
p_{trap}		taille du piège
p_θ		impulsion caractéristique du pic d'atomes refroidis
δp_θ	$\delta p_\theta = p_\theta e^{1/2\alpha}$	demi-largeur à $1/e^{1/2}$ du pic d'atomes refroidis
$\pi(p, \theta)$		distribution du module des impulsions
$\pi_x(p_x, \theta)$		distribution d'une composante de l'impulsion
$h(\theta)$	$\pi_x(p_x = 0, \theta)$	hauteur du pic de la distribution en impulsion
$f(p_{\text{trap}}, \theta)$	$\int_0^{p_{\text{trap}}} \pi(p, \theta) dp$	population piégée
$r(\theta)$	$\int_0^{p_\theta} \pi(p, \theta) dp$	population refroidie
n_φ	$\frac{N r(\theta)}{V_x V_p}$	densité dans l'espace des phases
Γ_{diss}	$\Gamma_{\text{pertes}}(p) = \Gamma(p) + \Gamma_{\text{diss}}$	taux de dissipation parasite

Quelques relations utiles :

Conditions de validité des calculs :

$$N \gg 1 \text{ (i.e. } N \geq 4)$$

$$p_{\text{trap}} < \hbar k$$

Exposant du piégeage :

$$\mu = D/\alpha$$

Temps moyen de premier retour (avec friction) :

$$\langle \tau \rangle = \tau_{\text{ext}} (p_{\text{max}} / p_{\text{trap}})^D$$

Pour les résonances noires :

$$\mu = D/2, \alpha = 2$$

$$\tau_0 = \tau_{\text{ext}} = 2 / \Gamma'_c, \text{ d'où } \tau_0 \Gamma = 8 \frac{(\delta / \Gamma)^2 + 1/4}{(\Omega_1^2 / \Gamma)^2}$$

$$\frac{p_0}{\hbar k} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\hbar \Gamma}{E_R} \frac{(\Omega_1 / \Gamma)^2}{((\delta / \Gamma)^2 + 1/4)^{1/2}} \quad (p_0 = 2^{1/2} p_{\text{Raman}})$$

7 Valeurs numériques pour He*

$$k = 2\pi / \lambda = 5,802 \times 10^6 \text{ m}^{-1} \text{ (avec } \lambda = 1,0830 \text{ } \mu\text{m)}$$

$$E = hc/\lambda = 1,834 \times 10^{-19} \text{ J} = 1,145 \text{ eV}$$

$$M(^4\text{He}) = 6,647 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$p_R = \hbar k = 6,118 \times 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_R = p_R / M = 9,205 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$E_R = \frac{p_R^2}{2M} = 2,816 \times 10^{-29} \text{ J} = 1,758 \times 10^{-10} \text{ eV}$$

$$T_R = 2E_R / k_B = 4,079 \text{ } \mu\text{K}$$

$$\tau_R = \hbar / E_R = \underline{3,745 \text{ } \mu\text{s}}$$

$$\Gamma = 1,022 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$$

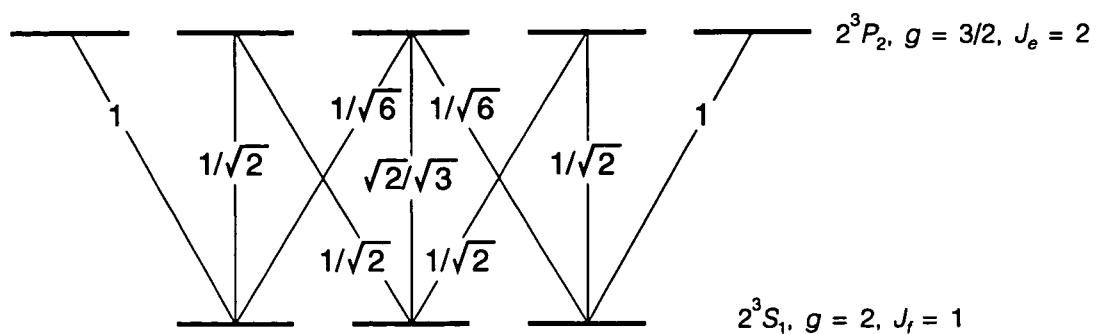
$$\Gamma^{-1} = 97,85 \text{ ns}$$

$$E_R / \hbar \Gamma = 1 / 38,27$$

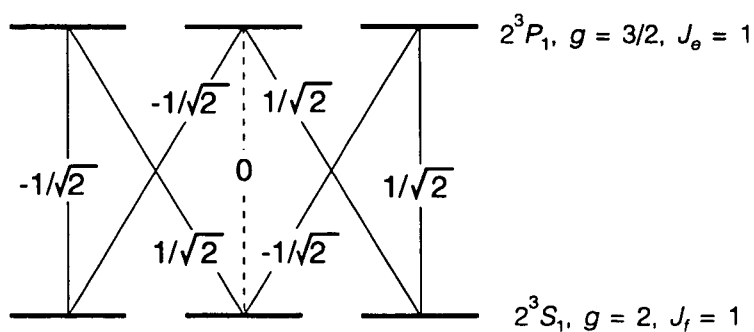
$$v_h = \Gamma / k = 1,762 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

8 Transitions $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_{1,2,3}$

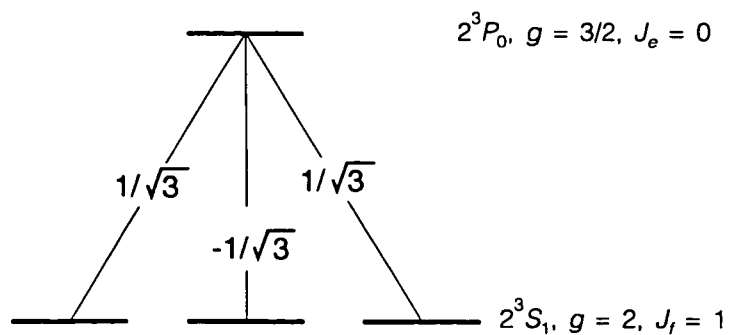
- $\lambda_{1 \leftrightarrow 2} = 1,083\,034\ \mu$ (dans l'air)



- $\lambda_{1 \leftrightarrow 1} = 1,083\,025\ \mu$ (dans l'air)



- $\lambda_{1 \leftrightarrow 0} = 1,082\,909\ \mu$ (dans l'air)



ANNEXE B

Le refroidissement laser :

notions de base

Plan de l'annexe B :

Le refroidissement laser : notions de base

1 Introduction	407
2 Pression de radiation	408
2.1 Modèle d'atomes à 2 niveaux	408
2.2 Cycles de fluorescence et vitesse de recul	408
2.3 Force de pression de radiation	411
2.4 Dépendance en vitesse de la force de pression de radiation	413
2.4.1 Paramètre de saturation et force de pression de radiation	413
2.4.2 Calcul des populations par équations de taux	414
2.4.3 Expression de la force de pression de radiation et vitesse Doppler	416
3 Refroidissement Doppler	418
3.1 Introduction	418
3.2 Effet de refroidissement Doppler	419
3.3 Effet de friction	421
3.4 Température atteinte par refroidissement Doppler	422
3.5 Limite Doppler	423
4 Refroidissement Sisyphe	424
4.1 Introduction	424
4.2 Mécanisme de refroidissement Sisyphe	425
4.3 Température atteinte par refroidissement Sisyphe	427
4.4 Limite Sisyphe	428
5 Conclusion	429

1 Introduction

L'objectif de cette annexe est d'introduire le lecteur qui ne serait pas familier du refroidissement laser aux notions de base du domaine. Ces notions de base portent sur le refroidissement laser *au-dessus* de la température de recul et comprennent :

- la pression de radiation ;
- le refroidissement Doppler ;
- le refroidissement Sisyphes.

On pourrait également rajouter le ralentissement des jets atomiques et le piège magnéto-optique, qui sont expliqués au chapitre II.

Cette thèse porte sur le refroidissement laser *au-dessous* du recul. Cependant, le refroidissement *au-dessus* du recul y joue un rôle important :

- on utilise successivement la pression de radiation, le refroidissement Doppler (et éventuellement le refroidissement Sisyphes) pour ralentir et piéger les atomes du jet d'hélium, c'est-à-dire pour passer de quelques kelvins à quelques microkelvins.

- le refroidissement Sisyphes joue un rôle important dans le refroidissement par résonances noires, surtout à 2D et 3D, en apportant un confinement des impulsions atomiques.

Nous rappelons ici le calcul élémentaire de la pression de radiation exercée sur un atome à deux niveaux par un faisceau laser à résonance (§ B.2). Puis, nous montrons qu'on peut tirer parti de la manière dont la pression de radiation dépend de l'effet Doppler pour refroidir des vapeurs atomiques (§ B.3). Nous décrivons ensuite le mécanisme de refroidissement Sisyphes (§ B.4), qui permet d'atteindre des températures plus basses que le refroidissement Doppler.

Ces mécanismes sont exposés ici de manière simple, en insistant sur les faits physiques, sans prétendre à la rigueur théorique, ni à l'exhaustivité, d'autant qu'il existe des références complètes sur le sujet [Coh82], [CDG88], [Coh90].

-
- [Coh82] C. Cohen-Tannoudji, *Cours au Collège de France*, 1982-1983 et 1983-1984. Notes de cours à la fois sur la théorie et les expériences des débuts du refroidissement laser (avant le refroidissement Sisyphes).
- [CDG88] C. Cohen-Tannoudji, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, InterEditions et Editions du CNRS, 1988. Les paragraphes IV.E et V.C abordent le refroidissement laser.
- [Coh90] C. Cohen-Tannoudji, « Atomic Motion in Laser Light », in *Fundamental systems in Quantum Optics*, J. Dalibard, J.-M. Raimond, J. Zinn-Justin eds, Ecole d'été des Houches, Session LIII, 1990, Elsevier Science Publishers B.V., 1992. Exposé détaillé de la théorie du refroidissement laser.

2 Pression de radiation

2.1 Modèle d'atomes à 2 niveaux

Intéressons-nous aux effets d'un faisceau laser sur le mouvement d'un atome, lorsque ce laser est résonnant avec une transition atomique.

On considère un modèle d'atome à 2 niveaux, un niveau fondamental f stable et un niveau excité e de durée de vie Γ^{-1} . Les niveaux f et e sont séparés par l'énergie $E_{f-e} = \hbar\omega_0$. L'impulsion de l'atome est notée \vec{p} , sa masse M . Nous utiliserons ce modèle simple dans les paragraphes B.2 et B.3.

On envoie sur cet atome un faisceau laser monochromatique et collimaté, dirigé selon l'axe Oz , de vecteur unitaire \vec{u}_z . Le laser émet à la longueur d'onde λ , de telle sorte que sa pulsation $\omega_L = 2\pi c/\lambda$ soit à résonance sur la transition atomique $f \leftrightarrow e$:

$$\omega_0 = \omega_L \quad (\text{B.1})$$

L'impulsion d'un photon laser est notée $\hbar\vec{k}$ avec $\hbar\vec{k} = \frac{h}{\lambda}\vec{u}_z$. L'ensemble de ces notations est repris sur la figure B.1.

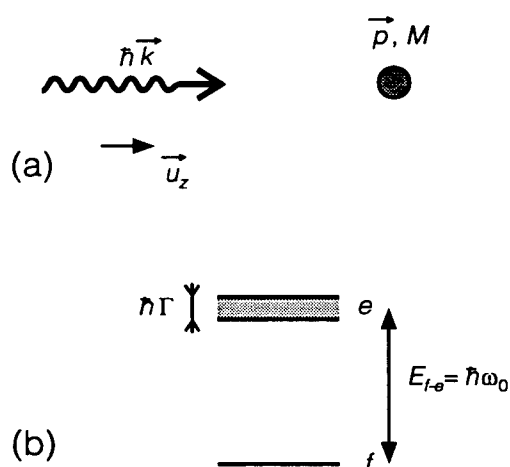


Figure B.1 Atome à 2 niveaux éclairé par un laser.

a) Un atome d'impulsion \vec{p} , de masse M est illuminé par un faisceau laser dont les photons ont une impulsion.

b) L'atome possède un niveau fondamental f , stable, et un niveau excité e , de largeur $\hbar\Gamma$. L'énergie E_{f-e} de la transition vaut $E_{f-e} = \hbar\omega_0$.

2.2 Cycles de fluorescence et vitesse de recul

Pour déterminer l'effet du laser sur le mouvement atomique, nous modélisons l'interaction entre atomes et laser par l'ensemble des trois processus suivants : absorption, émission stimulée, émission spontanée. Considérons tour à tour l'effet de chacun de ces processus sur le mouvement de l'atome.

● Lors de l'absorption d'un photon, l'atome absorbe l'énergie du photon en passant de f à e , mais aussi son impulsion $\hbar\vec{k}$. Ainsi, l'impulsion atomique \vec{p} devient $\vec{p} + \hbar\vec{k}$. L'atome subit un recul que l'on peut caractériser soit par une « impulsion de recul » \vec{p}_R

$$\vec{p}_R \equiv \hbar\vec{k} \tag{B.2}$$

soit par une « vitesse de recul » \vec{v}_R

$$\vec{v}_R \equiv \frac{\hbar\vec{k}}{M} \tag{B.3}$$

soit encore par une « énergie de recul » E_R

$$E_R \equiv \frac{(\hbar k)^2}{2M} \tag{B.4}$$

On introduit aussi une « température de recul » T_R par la relation

$$\frac{1}{2} k_B T_R \equiv E_R \tag{B.5}$$

La vitesse de recul est le quantum d'effet du laser sur l'atome. Pour les transitions optiques couramment utilisées, le tableau B.1 donne la vitesse, l'énergie et la température de recul de quelques atomes. On peut comparer deux énergies en jeu, celle, $\hbar\omega_L$, du photon laser, et celle, E_R , du recul. Pour l'hélium métastable, $\hbar\omega_L = 1,1$ eV alors que $E_R = 1,8 \times 10^{-10}$ eV.

Espèce atomique	Transition	Longueur d'onde λ (nm)	Masse M (u.m.a.)	Vitesse de recul v_R (cm.s ⁻¹)	T_R (μ K)
¹ H	1S-2P (Ly- α)	121,6	1,0078	325,6	1280
⁴ He*	2 ³ S ₁ - 2 ³ P ₁	1 083,0	4,0026	9,205	4,08
²⁰ Ne	1s ₅ (J=2)- 2p ₉ (J'=3)	640	19,9924	3,100	2,31
²³ Na	3 ² S _{1/2} (F=2)- 3 ² P _{3/2} (F'=3)	589,0	22,9898	2,93	2,37
¹³³ Cs	6S _{1/2} (F=4)- 6P _{3/2} (F'=5)	852	133	0,35	0,196

Tableau B.1 Vitesse et température de recul de quelques atomes.

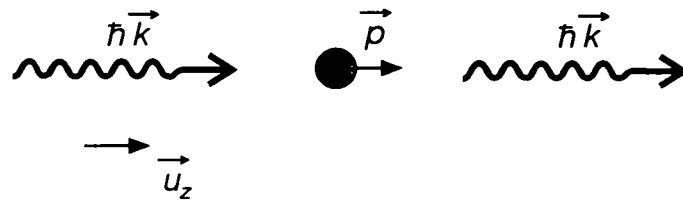
Une fois un photon absorbé par l'atome, deux situations se présentent : soit le photon est réémis de façon stimulée, soit le photon est réémis de façon spontanée.

● Si le photon est réémis de façon stimulée, alors il est réémis dans le même mode que le photon absorbé. L'atome cède donc la même impulsion $\hbar\vec{k}$ que celle qu'il avait absorbée. Sur un cycle absorption-émission stimulée, l'impulsion atomique reste globalement inchangée.

Figure B.2 Cycles de fluorescence.

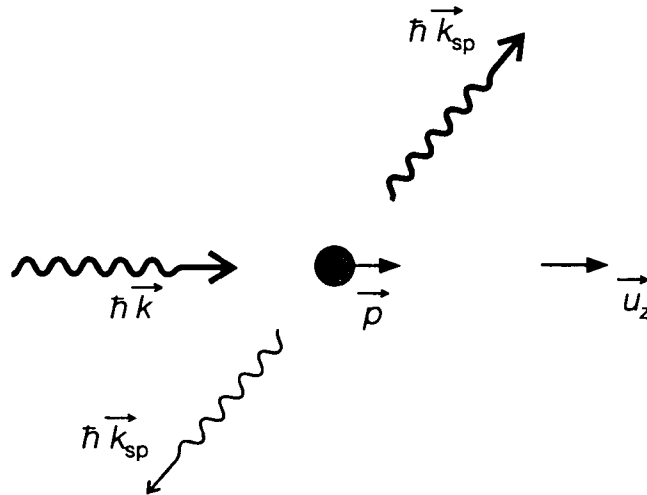
a) Cycle absorption-émission stimulée :

$$\vec{p} \xrightarrow{\text{absorption}} \vec{p} + \hbar \vec{k} \xrightarrow{\text{émission stimulée}} \vec{p} + \hbar \vec{k} - \hbar \vec{k} = \vec{p} \quad (\text{B.6})$$



b) Cycle absorption-émission spontanée : en moyenne

$$\vec{p} \xrightarrow{\text{absorption}} \vec{p} + \hbar \vec{k} \xrightarrow{\text{émission spontanée}} \vec{p} + \hbar \vec{k} + \langle \hbar \vec{k}_{\text{sp}} \rangle = \vec{p} + \hbar \vec{k} \quad (\text{B.7})$$



● Si le photon est réémis de façon spontanée, alors son impulsion $\hbar\vec{k}_{sp}$ aura [1] le même module $\hbar k$ que le photon absorbé, et sa direction sera déterminée en moyenne par le diagramme d'émission de la transition considérée. Or les diagrammes d'émission (dipolaires, quadrupolaires...) sont tels que l'on a une probabilité égale d'avoir une émission spontanée dans deux directions opposées. On a donc, en moyennant sur les photons spontanés de même impulsion initiale \vec{p} ,

$$\langle \hbar\vec{k}_{sp} \rangle = \vec{0} \tag{B.8}$$

Donc, pour un tel cycle de fluorescence (absorption-émission spontanée), l'impulsion atomique est en moyenne modifiée de $\hbar\vec{k}$.

En résumé, un cycle absorption-émission stimulée laisse la vitesse de l'atome inchangée, alors qu'un cycle absorption-émission spontanée produit un recul moyen de l'atome d'une quantité v_R (figure B.2).

L'effet de recul d'un seul photon est faible devant les vitesses v_{th} thermiques habituelles et a été difficile à mettre en évidence expérimentalement. Pour l'hélium métastable, par exemple, la vitesse de recul v_R est de $9,20 \text{ cm.s}^{-1}$, alors que la vitesse quadratique moyenne à 300 K et à une dimension est $v_{th} = 800 \text{ m.s}^{-1}$, soit $9.10^3 v_R$.

Historiquement, Frisch [Fri33] a le premier réalisé une détection mécanique du recul dans une expérience (voir page 412) qui préfigure le refroidissement laser.

Pour rendre l'effet du recul quantitativement intéressant et utilisable, il faut pouvoir répéter les cycles de fluorescence à une cadence suffisante. On obtiendra alors une pression de radiation significative.

2.3 Force de pression de radiation

Comme, en présence d'un seul faisceau laser, le recul $\vec{p}_R \equiv \hbar\vec{k}$ est toujours dirigé dans le même sens, les effets de plusieurs cycles de fluorescence s'additionnent. Si ces cycles sont répétés à un taux élevé, l'action du laser sur l'atome se traduit par une *force moyenne* [2] qui peut être significative malgré la petitesse du recul d'un seul photon. Cette force est appelée "force de pression de radiation" (figure B.3).

Le taux de répétition maximal est obtenu lorsque le laser sature complètement la transition atomique. Pour notre modèle d'atome à 2 niveaux, ce taux vaut $\Gamma/2$. La force \vec{F}_{max} de pression de radiation maximale s'écrit donc

$$\vec{F}_{max} = \vec{p}_R \Gamma/2 = \hbar\vec{k} \Gamma/2 \tag{B.9}$$

[1] Dans le référentiel de l'atome.

[Fri33] von R. Frisch, *Experimenteller Nachweis des Einsteinschen Stralungsrückstoßes*, Z. Phys. **86**, p. 42-48 (1933).

[2] Sur une courte échelle de temps, cette force fluctue puisque les dates et la direction d'émission des photons spontanés sont aléatoires. Ce caractère aléatoire joue un grand rôle dans la détermination des températures atteintes (cf. § B.3.4 et § B.4.4).

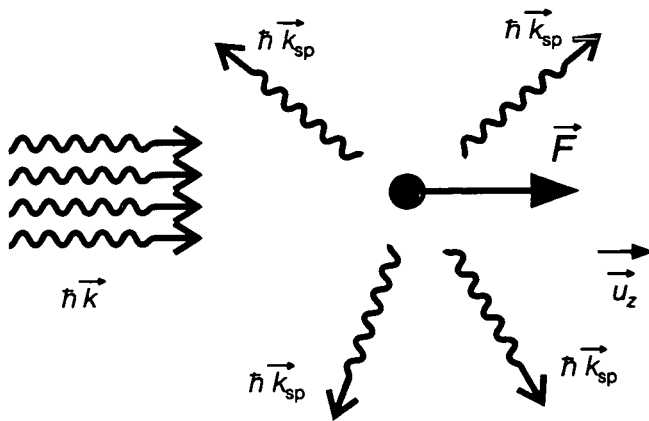


Figure B.3 Force de pression de radiation. L'atome éclairé par un faisceau laser à résonance voit son impulsion modifiée sous l'effet des cycles absorption-émission spontanée. L'action moyenne du laser sur l'atome se traduit par une force \vec{F} de pression de radiation.

L'accélération maximale a_{\max} créée par la pression de radiation est donc :

$$a_{\max} = \frac{F_{\max}}{M} = v_R \Gamma/2 \quad (\text{B.10})$$

Pour l'hélium métastable, on obtient $a_{\max} = 4,6 \times 10^5 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, soit environ 5×10^4 fois l'accélération de la pesanteur. La force de pression de radiation maximale est donc une force considérable. Précisons toutefois à nouveau que nous avons calculé la valeur *maximale*. Cette valeur s'obtient par exemple avec un laser relativement intense accordé à résonance sur la transition atomique.

Une telle force peut-être utilisée par exemple pour la déflexion et le ralentissement des jets atomiques. Calculons les ordres de grandeur mis en jeu par ces deux processus.

Imaginons tout d'abord que l'on veuille ralentir un jet d'atomes d'hélium métastable à une vitesse $v = 400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, avec un faisceau laser à $\lambda = 1,08 \mu$. Le temps t_{ral} de ralentissement et la longueur l_{ral} sur laquelle le jet sera ralenti seront alors donnés par

$$t_{\text{ral}} = \frac{v}{a_{\max}} \quad \text{et} \quad l_{\text{ral}} = \frac{1}{2} a_{\max} t_{\text{ral}}^2 \quad (\text{B.11})$$

soit $t_{\text{ral}} = 0,87 \text{ ms}$ et $l_{\text{ral}} = 17 \text{ cm}$. Pour percevoir intuitivement l'ampleur de la force de pression de radiation, on peut dire que la pression de radiation permet d'arrêter un objet (atome d'hélium) à Mach 1,2 sur une longueur de 17 cm seulement. Point n'est besoin pour cela d'une puissance laser importante : il suffit de saturer la transition atomique, *i.e.* pour l'hélium métastable d'avoir une intensité de quelques fois $0,16 \text{ mW} \cdot \text{cm}^{-2}$ (l'intensité de saturation définie par l'équation (B.16)).

Illustrons maintenant la déflexion d'un jet avec l'expérience de Frisch de 1933, qui a mis en évidence pour la première fois l'impulsion des photons [Fri33]. Frisch utilisait un jet d'atomes de sodium de vitesse $v = 900 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Le jet était illuminé sur 6 cm, ce qui donnait un temps d'interaction $\theta = 67 \mu\text{s}$, alors que la durée de vie de l'état excité de la transition utilisée (589 nm) est $\Gamma^{-1} = 16 \text{ ns}$. Si on avait disposé en 1933 d'un

[Fri33] von R. Frisch, *Experimenteller Nachweis des Einsteinschen Strahlungsrückstoßes*, Z. Phys. **86**, p. 42-48 (1933).

laser pour saturer la raie à 589 nm du sodium, ce montage aurait permis à chaque atome d'émettre environ $\frac{\theta}{2\Gamma^{-1}} = 2100$ photons spontanés. Le jet aurait alors été très largement défléchi, d'un angle $\alpha = \frac{v_R}{v} \times \frac{\theta}{2\Gamma^{-1}} = 0,07 \text{ rad} = 3,9^\circ$, la vitesse de recul du sodium étant $v_R = 2,93 \text{ cm.s}^{-1}$.

Au lieu de cela, Frisch avait une lampe à sodium permettant, en moyenne, pendant la traversée de la zone éclairée, à un atome sur trois seulement d'être excité (une seule fois !) et donc d'émettre un photon spontané. Il a ainsi observé une déflexion de $3 \times 10^{-5} \text{ rad} = 6 \text{ secondes d'arc}$, pour un tiers des atomes. Ceci représentait une déflexion spatiale de 0,01 mm seulement. Frisch était donc à plus de 3 ordres de grandeur des conditions de pression de radiation maximale, car sa source lumineuse (pourtant une lampe à sodium qui émet sur la raie à 589 nm) n'émettait pas suffisamment de rayonnement à résonance sur la transition du sodium. Aujourd'hui, pour le refroidissement radiatif, on utilise des lasers monomodes accordables.

Signalons enfin que plus récemment [PiV72], la force de pression de radiation a été utilisée en physique atomique à des fins spectroscopiques, peu avant les débuts du refroidissement laser.

2.4 Dépendance en vitesse de la force de pression de radiation

2.4.1 Paramètre de saturation et force de pression de radiation

Jusqu'ici, nous avons considéré l'effet d'un laser *saturant* sur une transition atomique. Cependant, il faut aussi s'intéresser à l'effet du laser lorsqu'on n'atteint pas la saturation, soit parce que l'intensité lumineuse est faible, soit parce que la fréquence du laser n'est pas à résonance sur la transition atomique. Pour cela, nous devons reprendre le calcul de la pression de radiation de manière plus précise que précédemment.

Précisons que l'onde qui éclaire l'atome à 2 niveaux est une onde plane. La saturation de la transition atomique s'exprime par le paramètre s de saturation défini par

$$s \equiv \frac{\Omega_1^2 / 2}{\delta^2 + \Gamma^2 / 4} \quad (\text{B.12})$$

où Ω_1 est la pulsation de Rabi associée à l'intensité de l'onde et à la transition considérée. δ est le désaccord entre la pulsation du laser et celle de la transition atomique :

$$\delta \equiv \omega_L - \omega_0 \quad (\text{B.13})$$

Appelons s_0 la saturation du laser à résonance ($\delta = 0$)

$$s_0 \equiv 2 \frac{\Omega_1^2}{\Gamma^2} \quad (\text{B.14})$$

s_0 est reliée à l'intensité I du laser par

$$s = \frac{I}{I_{\text{sat}}} \quad (\text{B.15})$$

[PiV72] J.L. Piqué, J.L. Vialle, Opt. Comm. 5, p. 402 (1972).

où I_{sat} est l'intensité de saturation de la transition définie par

$$I_{\text{sat}} \equiv \frac{2\pi^2 c \hbar \Gamma}{3\lambda^3} \quad (\text{B.16})$$

Calculons la force \vec{F} de pression de radiation moyenne dans le régime stationnaire. On introduit π_f (respectivement π_e) la population de l'état fondamental (respectivement excité). Le taux d'émission spontanée est $\pi_e \Gamma$, d'où

$$\vec{F} = \pi_e \Gamma \hbar \vec{k} \quad (\text{B.17})$$

Sans même connaître la valeur exacte de π_e , comme par définition $\pi_e \leq 1$ (en fait, nous verrons que dans le régime stationnaire, $\pi_e \leq 1/2$), on peut déjà déduire que la force de pression de radiation est bornée. Il reste à calculer la valeur exacte de π_e , ce que nous faisons ci-dessous par les équations de taux.

2.4.2 Calcul des populations par équations de taux

Les équations de taux sont les équations qui décrivent l'évolution des populations des états atomiques. Les équations d'Einstein en sont un exemple [Ein17]. En toute rigueur, ces équations devraient faire intervenir, outre les populations (termes diagonaux de la matrice densité atomique), les cohérences (termes non diagonaux). Cependant, sous certaines hypothèses, on aboutit à une équation d'évolution qui ne fait intervenir que les populations, ce qui est une simplification appréciable (voir le § IV.E de [CDG88]).

Notons Γ' la probabilité de transition par unité de temps de f vers e . C'est le taux d'absorption d'un photon à partir de f , ou encore le taux d'émission stimulée à partir de e . Pour un atome *au repos*, éclairé par un rayonnement à large bande spectrale, et de faible intensité, on peut montrer que

$$\frac{d\pi_f}{d\tau} = +\Gamma\pi_e + \Gamma'(\pi_e - \pi_f) \quad (\text{B.18.a})$$

$$\frac{d\pi_e}{d\tau} = -\Gamma\pi_f + \Gamma'(\pi_f - \pi_e) \quad (\text{B.18.b})$$

Dans l'équation (B.18.a), par exemple, le terme $\Gamma\pi_e$ représente le taux d'alimentation de f par émission spontanée. $\Gamma'\pi_e$ représente le taux d'alimentation de f par émission stimulée d'un photon de e vers f , et $-\Gamma\pi_f$ représente le taux de départ de f par absorption d'un photon.

Nous ne nous intéressons pas ici aux détails de la force de pression de radiation, en particulier pas aux régimes transitoires. Nous nous restreignons donc au régime stationnaire défini par

$$\frac{d\pi_f}{dt} = 0 \quad (\text{B.19.a})$$

[Ein17] A. Einstein, *Théorie quantique du rayonnement*, *Physikalische Zeitschrift* **18**, p. 121-128 (1917); traduction française dans A. Einstein, *Oeuvres choisies, Tome 1 : Quanta*, ed. F. Balibar, p. 134-146 (Seuil-CNRS, Paris, 1989).

[CDG88] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, InterEditions et Editions du CNRS (1988).

$$\frac{d\pi_e}{dt} = 0 \quad (\text{B.19.b})$$

Les équations de taux utilisées ne sont valables que sous certaines conditions (atome au repos, rayonnement à large bande spectrale, de faible intensité). Or, pour le refroidissement laser, on utilise des rayonnements monochromatiques, éventuellement d'intensité élevée. Cependant, il se trouve que le traitement correct du problème pour un atome à deux niveaux, par les équations de Bloch optiques (§ V.C de [CDG88]), donne le même résultat pour π_f et π_e que les équations de taux. Il faut pour cela que l'on se restreigne au régime stationnaire (c'est notre cas), à un atome immobile (ce n'est *pas* notre cas), et que l'on prenne

$$\Gamma' = \Gamma \frac{s}{2} = \frac{\Omega_1^2 / 4}{\delta^2 + \Gamma^2 / 4} \quad (\text{B.20})$$

Γ^{-1} a un sens physique important : à basse intensité, c'est le taux d'émission spontanée, qui est aussi le taux d'absorption.

Que se passe-t-il pour un atome en mouvement ? Si l'atome est éclairé par une onde plane, le traitement du mouvement de l'atome reste simple (voir § C3-2-1 de [Dal86]). En effet, en se plaçant dans le référentiel de l'atome en mouvement, l'onde reste plane, mais sa pulsation se décale par effet Doppler et devient $\omega_L - \vec{k} \cdot \vec{v}$, où \vec{v} est la vitesse de l'atome. En remplaçant δ par $\hat{\delta}$

$$\hat{\delta} = \delta - \vec{k} \cdot \vec{v} \quad (\text{B.21})$$

dans l'expression de s , on prend en compte rigoureusement l'effet de la vitesse. Remarquons alors que le désaccord δ et l'effet Doppler $\vec{k} \cdot \vec{v}$ jouent un rôle exactement identique, et apparaissent sous la forme du seul coefficient $\hat{\delta}$.

Nous pouvons maintenant calculer les populations dans le régime stationnaire. Dans ce régime, les équations (B.18.a) et (B.18.b) sont strictement équivalentes. De (B.18.a), par exemple, en tenant compte de $\pi_e + \pi_f = 1$ (l'atome n'a que 2 niveaux), on obtient

$$\pi_f = \frac{2 + s}{2(1 + s)} \quad (\text{B.22.a})$$

$$\pi_e = \frac{s}{2(1 + s)} \quad (\text{B.22.b})$$

Ces 2 expressions sont très utiles et nous les représentons sur la figure B.4, ainsi que les produits π_f^2 , π_e^2 , et $\pi_f \pi_e$, qui interviennent dans les études de collisions.

[CDG88] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, InterEditions et Editions du CNRS (1988)

[Dal86] J. Dalibard, *Le rôle des fluctuations dans la dynamique d'un atome couplé au champ électromagnétique*, Thèse d'Etat de l'Université Paris VI (1986).

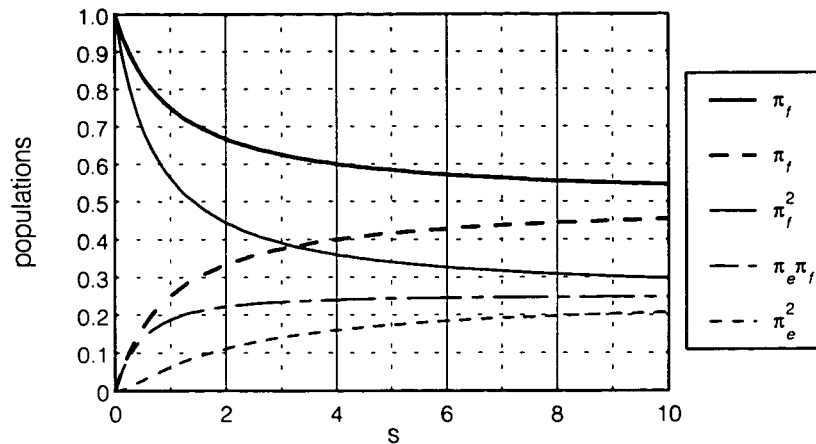


Figure B.4 Populations pour un atome à 2 niveaux

Pour conclure, les équations de taux sont un moyen simple, mais non rigoureux, d'obtenir l'expression de la population excitée π_e d'un atome à 2 niveaux, en mouvement, éclairé par une onde plane monochromatique

$$\pi_e = \frac{s}{2(1+s)} \text{ avec } s = \frac{\Omega_1^2}{\hat{\delta}^2 + \Gamma^2/4} \text{ et } \hat{\delta} = \delta - \vec{k} \cdot \vec{v} \quad (\text{B.23})$$

On pourrait vérifier par un traitement plus sophistiqué que l'expression obtenue pour π_e est exacte.

2.4.3 Expression de la force de pression de radiation et vitesse Doppler

En introduisant l'expression de π_e (équation (B.23)) dans l'équation (B.17), on obtient la force de pression de radiation d'une onde plane sur un atome à 2 niveaux [3]:

$$\vec{F} = \hbar \vec{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} = \hbar \vec{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{\Omega_1^2/2}{\hat{\delta}^2 + \Omega_1^2/2 + \Gamma^2/4} \quad (\text{B.24})$$

Examinons tout d'abord comment la pression de radiation varie avec l'intensité lumineuse. A basse intensité ($\Omega_1^2/2 \ll (\hat{\delta}^2 + \Gamma^2/4)$ ou $s \ll 1$), la force croît linéairement avec l'intensité. A haute intensité, la force tend vers une constante (on retrouve l'équation (B.9))

$$\vec{F}_{\max} = \hbar \vec{k} \frac{\Gamma}{2} \quad (\text{B.25})$$

On parle alors de « saturation de la pression de radiation ». La valeur maximale obtenue pour la force correspond au fait que, dans le régime stationnaire, un atome éclairé par une onde plane ne peut émettre plus de $\Gamma/2$ photons par seconde.

[3] Dans le cas d'une onde plane, cette force est la seule à prendre en compte. Dans le cas où le champ électromagnétique présente des gradients d'intensité (par exemple dans une onde stationnaire), il existe une autre composante de l'effet du champ sur les atomes appelée « force dipolaire » ou « force réactive » (voir [CDG88], déjà cité, § V.C).

La dépendance de la force de pression de radiation en désaccord $\hat{\delta} = \delta - \vec{k} \cdot \vec{v}$ est le profil lorentzien représenté sur la figure B.5. $F(\hat{\delta})$ présente une résonance pour $\hat{\delta} = 0$ et décroît à grand désaccord comme $\hat{\delta}^{-1/2}$.

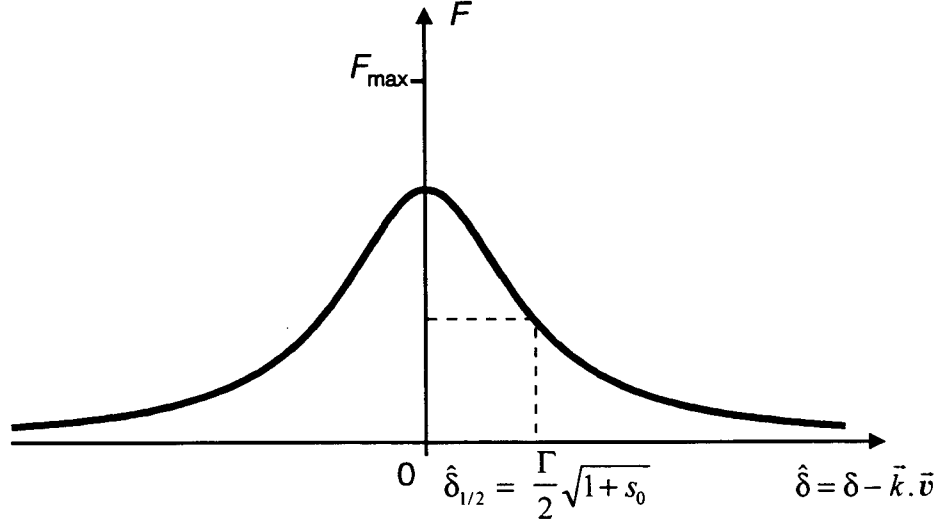


Figure B.5 Pression de radiation exercée par une onde plane sur un atome à 2 niveaux, en fonction du désaccord.

A intensité donnée, $F(\hat{\delta})$ atteint sa valeur maximale, $\hbar k \times \frac{\Gamma}{2} \times \frac{\Omega_1^2 / 2}{\Omega_1^2 / 2 + \Gamma^2 / 4}$, pour un désaccord $\hat{\delta} = 0$. La mi-largeur $\hat{\delta}_{1/2}$ à mi-hauteur de cette lorentzienne est

$$\hat{\delta}_{1/2} = \sqrt{\frac{\Omega^2}{2} + \frac{\Gamma^2}{4}} = \frac{\Gamma}{2} \sqrt{1 + s_0} \quad (\text{B.26})$$

A basse intensité ($s_0 \ll 1$), on retrouve la largeur naturelle de la transition ($\hat{\delta}_{1/2} \approx \Gamma / 2$). A haute intensité, $\hat{\delta}_{1/2}$ croît comme la racine carrée de l'intensité et on parle alors d'«élargissement par saturation». $\hat{\delta}_{1/2}$ croît donc lentement mais indéfiniment avec l'intensité.

A la largeur $\hat{\delta}_{1/2}$ correspond une vitesse caractéristique v_D , définie par $k \cdot v_D \equiv \hat{\delta}_{1/2}$ ou encore

$$v_D \equiv \frac{\Gamma}{2k} \sqrt{1 + s_0} \quad (\text{B.27})$$

La valeur v_D définit la largeur de la classe de vitesse sur laquelle la pression de radiation agit préférentiellement. Nous donnons dans le tableau B.2 les valeurs de v_D à basse intensité ($s_0 \ll 1$), pour les atomes usuels. Pour l'hélium métastable, en particulier, on a $v_D = 0,88 \text{ m.s}^{-1}$.

Espèce atomique	Transition	λ (nm)	Γ (10^7 s^{-1})	v_D ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	T_D (μK)	T_R (μK)
^4He	$2^3\text{S}_1 - 2^3\text{P}_2$	1 083,0	1,02	0,88	27	4,08
^{23}Na	$3^2\text{S}_{1/2}(\text{F}=2) - 3^2\text{P}_{3/2}(\text{F}'=3)$	589,0	6,2	2,90	160	2,4
^{133}Cs	$6\text{S}_{1/2}(\text{F}=4) - 6\text{P}_{3/2}(\text{F}'=5)$	852	3,3	2,25	90	0,20

Tableau B.2 *Vitesse et température Doppler de quelques atomes.* La vitesse Doppler v_D correspond à la plage de capture du refroidissement Doppler (et non à la vitesse caractéristique de la température Doppler T_D). La température T_D est donnée par l'équation (B.43).

Il est intéressant de comparer v_D à la vitesse quadratique moyenne Δv_{th} d'une distribution thermique à une dimension et 300 K :

$$\frac{v_D}{\Delta v_{\text{th}}} = \frac{\Gamma}{2k} \sqrt{\frac{(1+s_0)}{k_B T}} \quad (\text{B.28})$$

Pour l'hélium métastable, $\Delta v_{\text{th}} = 790 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ d'où, $v_D/\Delta v_{\text{th}} = 10^{-3}$, à basse intensité. Pour agir sur toute la distribution thermique, il faut donc $s_0 = 10^6$, ce qu'on obtient en focalisant un faisceau de 100 mW sur 300 μ , paramètres réalisables expérimentalement. Pour des atomes plus lourds, la situation est plus favorable (facteur \sqrt{M}). Ainsi, pour le césium, on a $\Delta v_{\text{th}} = 140 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $v_D/\Delta v_{\text{th}} = 5 \cdot 10^{-3}$. Il suffit donc d'atteindre $s_0 = 4 \cdot 10^4$ pour agir sur toute la distribution thermique.

3 Refroidissement Doppler

3.1 Introduction

La dépendance en vitesse de la pression de radiation, utilisée astucieusement, permet d'agir sélectivement sur les vitesses, de telle sorte qu'on crée un effet de refroidissement appelé « refroidissement Doppler » [HaS75], [WiD75]. Aujourd'hui encore, le refroidissement Doppler sert de paradigme au refroidissement laser, non seulement parce que ce fut le premier des mécanismes de refroidissement radiatif, mais aussi parce que c'est le plus simple. En outre, il intervient dans la plupart des expériences actuelles de refroidissement laser, même les plus sophistiquées. Malgré sa simplicité, le refroidissement Doppler fait appel à de nombreux concepts (friction, diffusion...) encore pertinents pour la physique des autres mécanismes de refroidissement.

[HaS75] T.W. Hänsch and A.L. Schawlow, *Cooling of gases by laser radiation*, Opt. Comm. **13**, p. 68-69 (1975)

[WiD75] D. Wineland and H. Dehmelt, *Proposed $10^{14} \Delta\nu/\nu$ Laser Fluorescence Spectroscopy on Tl^+ Mono-Ion Oscillator III*, Bull. Am. Phys. Soc. **20**, p. 637 (1975).

Nous commençons (§ B.3.2) par montrer comment on peut créer un effet de refroidissement à l'aide de 2 ondes lasers. Puis, nous montrons qu'un effet de friction apparaît (§ B.3.3). Enfin, nous estimons la température obtenue par refroidissement Doppler (§ B.3.4 et B.3.5).

On trouvera un exposé bien plus détaillé que le nôtre dans la partie C de [Dal86] et un exposé clair et concis dans [Van89] (§ IB.C), ainsi que dans [AVK90]

3.2 Effet de refroidissement Doppler

Par l'effet Doppler, la pression de radiation est naturellement sensible à la vitesse. Lorsque le désaccord δ est nul, la force de pression de radiation agit avec la même intensité sur les vitesses v_z et $-v_z$. Il est facile de briser cette symétrie et de faire que la force agisse préférentiellement sur un intervalle de vitesses $[-v_\delta - v_D \sqrt{1+s}; -v_\delta + v_D \sqrt{1+s}]$, où v_δ est une vitesse donnée. Il suffit pour cela de choisir un désaccord $\delta = k \cdot v_\delta$. La pression de l'onde (que l'on appelle désormais l'onde +) sur l'atome, notée $F_+(v_z)$ en valeur algébrique, vaut alors (cf. figure B.5)

$$F_+(v_z) = +\hbar k \times \frac{\Gamma}{2} \times \frac{\Omega_1^2 / 2}{(k \cdot v_z - \delta)^2 + \Omega_1^2 / 2 + \Gamma^2 / 4} \quad (\text{B.29})$$

Rajoutons alors un deuxième faisceau, baptisé onde -, de mêmes intensité, fréquence et désaccord que l'onde +, porté par le même axe, mais de sens opposé (figure B.6).

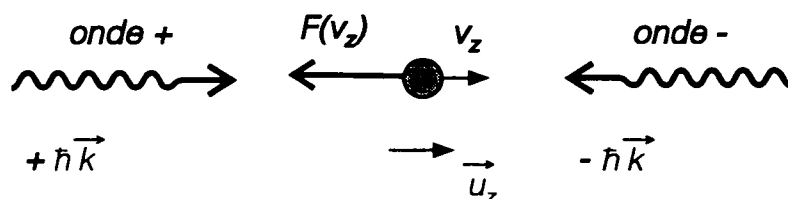


Figure B.6 Mélasse Doppler. Un atome à 2 niveaux est éclairé par 2 ondes laser désaccordées en-dessous de résonance.

Nous faisons l'hypothèse que l'on peut ajouter indépendamment l'action des lasers. Cette hypothèse simplificatrice n'est pas valable en général, puisque plusieurs effets peuvent rendre la situation beaucoup plus complexe (interférences entre deux

-
- [Dal86] J. Dalibard, *Le rôle des fluctuations dans la dynamique d'un atome couplé au champ électromagnétique*, Thèse d'Etat de l'Université Paris VI (1986).
- [Van89] N. Vansteenkiste, *Réalisation d'un laser monomode et asservi sur la transition $2^3S_1-2^3P$ de l'hélium I (1083 nm) : utilisation pour quelques expériences de refroidissement radiatif d'atomes d'hélium 4 métastable*, Thèse de l'Université Paris-Sud (1989).
- [AVK90] A. Aspect, N. Vansteenkiste, R. Kaiser, H. Haberland, and M. Karrais, *Preparation of a pure intense beam of metastable helium by laser cooling*, Chem. Phys. **145**, p. 307-315 (1990).

faisceaux, redistribution de photons entre les deux faisceaux...) [4]. Cependant, elle permet de calculer l'ordre de grandeur du phénomène.

L'onde – engendre alors une force $F_-(v_z)$ qui est la symétrique de $F_+(v_z)$ par rapport à l'origine (noter le changement de signe devant $k \cdot v_z$)

$$F_-(v_z) = -\hbar k \times \frac{\Gamma}{2} \times \frac{\Omega_1^2 / 2}{(k \cdot v_z + \delta)^2 + \Omega_1^2 / 2 + \Gamma^2 / 4} \quad (\text{B.30})$$

La somme des forces $F(v_z) = F_-(v_z) + F_+(v_z)$ a alors l'allure donnée par la figure B.7, dans le cas $\delta < 0$:

● $v_z < 0$

- Grâce à l'effet Doppler, l'atome est plus résonnant avec l'onde – qu'avec l'onde +. Il subit donc une pression de radiation plus forte de la part de l'onde – que de l'onde +. La force totale est positive et tend à ramener la vitesse de l'atome vers $v_z = 0$.

● $v_z > 0$

- Les rôles respectifs des deux ondes sont inversés et l'atome subit alors une pression de radiation plus forte de la part de l'onde +. La force totale est négative et tend à ramener la vitesse de l'atome vers $v_z = 0$.

Ainsi, dans le cas $\delta < 0$ [5], cette force tend à diminuer le module des vitesses atomiques, quel que soit leur signe : elle engendre donc un effet de refroidissement.

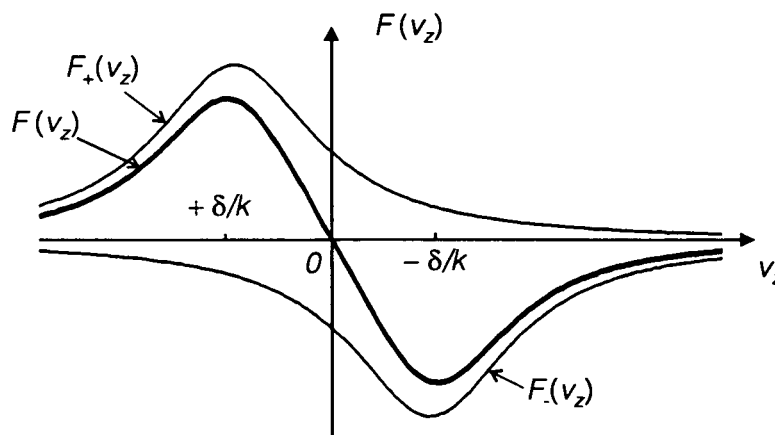


Figure B.7 Force de pression de radiation en situation de mélasse Doppler. Quelle que soit la vitesse, la force ramène les atomes vers $v_z = 0$. La figure est tracée dans le cas particulier $\delta \approx -v_D$.

[4] Cependant, il existe au moins un cas où cette hypothèse est rigoureusement valable (transitions $J = 0 \leftrightarrow J' = 1$, et ondes $\sigma_+ - \sigma_-$). Voir [DSC84] : J. Dalibard, S. Reynaud and C. Cohen-Tannoudji, *Potentialities of a new $\sigma_+ - \sigma_-$ laser configuration for radiative cooling and trapping*, J. Phys. B At. Mol. Phys., 17, p. 4577-4594 (1984).

[5] Avec $\delta > 0$, c'est un effet de chauffage qui est obtenu (faire une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées sur la figure B.7 pour obtenir le nouveau $F(v_z)$).

3.3 Effet de friction

Il est particulièrement intéressant d'étudier le comportement de $F(v_z)$ au voisinage de $v_z = 0$, puisqu'au bout d'un temps suffisamment long, toutes les vitesses se trouvent ramenées à proximité de $v_z = 0$. Le développement limité au premier ordre en $k \cdot v_z / \delta$ de $F(v_z)$ donne

$$F(v_z \approx 0) = \hbar k \times \frac{\Gamma \Omega_1^2 \delta}{(\delta^2 + \Omega_1^2 / 2 + \Gamma^2 / 4)^2} \times k \cdot v_z \quad (\text{B.31})$$

Cette force est une force de friction puisqu'elle est proportionnelle à la vitesse. On la caractérise par un temps d'amortissement des vitesses τ_{friction} défini par

$$F(v_z \approx 0) \equiv -M \frac{v_z}{\tau_{\text{friction}}} \quad (\text{B.32})$$

Grâce à cette friction, les lasers se comportent pour les atomes comme un milieu extrêmement visqueux. De là vient la dénomination de « mélasse optique » ou « mélasse Doppler » pour ces mécanismes de refroidissement laser (une « mélasse » est un sirop très épais, résidu de la fabrication du sucre). Ce comportement de friction intervient de manière essentielle dans de nombreux mécanismes de refroidissement laser (cf. § B.4), à l'exception notable du refroidissement par résonances noires à une dimension (cf. chapitre I). La friction crée un amortissement exponentiel des vitesses avec la constante de temps τ_{friction} donnée par

$$\tau_{\text{friction}} = \frac{(\delta^2 + \Omega_1^2 / 2 + \Gamma^2 / 4)^2}{\Omega_1^2 \delta k v_R} \Gamma^{-1} \quad (\text{B.33})$$

Pour une intensité laser faible donnée ($\Omega_1 \ll \Gamma$), la friction maximale est obtenue pour $\delta = -\Gamma / (2\sqrt{3})$, et donne une constante de temps τ_{min}

$$\tau_{\text{min}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{\Gamma^2}{\Omega_1^2} \tau_R \quad (\text{B.34})$$

où $\tau_R = \hbar / E_R$ est le temps de recul. Avec une intensité laser typique de $\Omega_1 = 0,25 \Gamma$, on obtient pour He* une constante de friction $\tau_{\text{min}} \approx 12 \mu\text{s}$. Les vitesses atomiques sont donc amorties en quelques dizaines de microsecondes, temps accessibles expérimentalement. Cet amortissement rapide des vitesses atomiques est le fait central du refroidissement laser.

Il semblerait que, grâce au refroidissement Doppler, les vitesses atomiques tendent vers 0 exponentiellement vite et sans limite. Mais n'oublions pas que nous n'avons analysé ici que la force moyenne produite par les lasers sur les atomes. Or, l'émission spontanée étant aléatoire, cette force fluctue. Ces fluctuations ont un effet relatif d'autant plus important que les vitesses atomiques deviennent plus petites et il va donc falloir les prendre en compte pour l'analyse du comportement aux petites vitesses. Comme on va le voir, ce sont ces fluctuations qui engendrent les limites du refroidissement laser.

Notons que le refroidissement Doppler a été exposé à une dimension. On peut refroidir aussi toutes les composantes de l'impulsion atomique en disposant 2×3 faisceaux laser sur trois axes perpendiculaires.

3.4 Température atteinte par refroidissement Doppler

Le calcul rigoureux de la température minimale obtenue par refroidissement Doppler est assez complexe. Cependant, le processus physique qui la détermine est clair : la vitesse caractéristique des atomes résulte d'un équilibre entre la friction, qui engendre un refroidissement, et les fluctuations, liées au caractère aléatoire de l'émission spontanée, qui engendrent un réchauffement (diffusion en impulsion).

Nous allons dériver ici de manière intuitive la température T obtenue par refroidissement Doppler, en faisant ressortir les arguments physiques.

Tout d'abord, l'effet de la friction est de produire un amortissement des vitesses, exponentiel dans le temps, avec une constante de temps τ_{friction} . Ainsi, s'il n'y avait que l'effet de friction, on aurait pour l'impulsion quadratique moyenne, p_{rms} , l'équation suivante :

$$\left(\frac{dp_{\text{rms}}}{dt} \right)_{\text{friction}} = \frac{-1}{\tau_{\text{friction}}} p_{\text{rms}} \quad (\text{B.35})$$

On peut donc considérer qu'on passerait par friction d'une impulsion $p_{\text{rms}} = p_0$ à 0 (en fait à p_0/e) en un temps τ_{friction} .

Mais l'émission aléatoire de photons produit par ailleurs une marche aléatoire de l'impulsion atomique avec un pas de l'ordre de $\hbar k$ [6] tous les Γ^{-1} . Par conséquent, s'il n'y avait que l'effet de diffusion, en partant de $p_{\text{rms}} = 0$ à $t = 0$, p_{rms} évoluerait selon l'équation classique du mouvement brownien :

$$(p_{\text{rms}}^2)_{\text{diff}} \approx (\hbar k)^2 \frac{t}{\Gamma^{-1}} \quad (\text{B.36})$$

Par conséquent, pour passer de $p_{\text{rms}} = 0$ à $p_{\text{rms}} = p_0$ par diffusion, il faudrait le temps t_{diff} donné par :

$$t_{\text{diff}} \approx \Gamma^{-1} \left(\frac{p_0}{\hbar k} \right)^2, \quad (\text{B.37})$$

L'état stationnaire est obtenu lorsque, au cours du temps τ_{friction} , la diminution d'impulsion par friction compense exactement l'accroissement d'impulsion par diffusion [7], *i.e.*

$$\tau_{\text{friction}} \approx t_{\text{diff}} \quad (\text{B.38})$$

ce qui donne

[6] Le pas n'est pas strictement $\hbar k$, puisque entre un photon spontané et le suivant, l'atome a aussi subi un autre changement d'impulsion, dû à l'absorption d'un photon laser. Cependant, l'ordre de grandeur du pas en impulsion reste $\hbar k$.

[7] De manière plus rigoureuse et plus élégante (cf. § 5.2.4, dans [Coh91]), de l'équation (B.35), on tire $\left(\frac{dp_{\text{rms}}^2}{dt} \right)_{\text{friction}} = \frac{-2}{\tau_{\text{friction}}} p_{\text{rms}}^2$. De l'équation (B.37), on tire $\left(\frac{dp_{\text{rms}}^2}{dt} \right)_{\text{diff}} \approx \frac{(\hbar k)^2}{\Gamma^{-1}}$. Dans l'état stationnaire, $\left(\frac{dp_{\text{rms}}^2}{dt} \right)_{\text{friction}} + \left(\frac{dp_{\text{rms}}^2}{dt} \right)_{\text{diff}} = 0$, ce qui redonne l'équation (B.38).

$$p_{\text{rms}} \approx \hbar k \sqrt{\frac{\tau_{\text{friction}}}{\Gamma'^{-1}}} \quad (\text{B.39})$$

La température T obtenue par refroidissement Doppler est donc

$$\frac{1}{2} k_B T \approx E_R \frac{\tau_{\text{friction}}}{\Gamma'^{-1}} \quad (\text{B.40})$$

On voit bien sur cette expression que la température résulte d'un compromis entre la friction (taux $1/\tau_{\text{friction}}$) et le chauffage par émission spontanée (taux Γ'). En injectant l'expression de τ_{friction} (équation (B.33)) dans l'équation (B.41), on obtient

$$\frac{1}{2} k_B T \approx \frac{\hbar}{8} \times \frac{\delta^2 + \Gamma^2 / 4}{|\delta|} \quad (\text{B.41})$$

Cette expression ne dépend pas de l'intensité des ondes lasers. Cependant, elle a été obtenue en utilisant une formule perturbative en intensité pour Γ' et n'est donc valable qu'à faible intensité [8].

Ce résultat, issu d'un calcul simple d'ordre de grandeur, doit être comparé à un calcul rigoureux comme celui de [CWD89]. Dans le cas d'une transition $J = 0 \leftrightarrow J = 1$, éclairée par deux ondes lasers contrepropageantes polarisées respectivement σ_+ et σ_- , pour une raie large ($\hbar\Gamma \gg E_R$), le traitement quantique réalisé dans cette référence donne

$$\frac{1}{2} k_B T_D = \frac{7}{40} \hbar \frac{\bar{\delta}^2 + \Gamma^2 / 4}{|\bar{\delta}|} \quad \text{avec } \bar{\delta} = \delta - E_R \approx \delta \quad (\text{B.42})$$

Ce résultat est très proche de notre résultat approché de l'équation (B.41), ce qui justifie *a posteriori* notre démarche.

3.5 Limite Doppler

Pour calculer la température la plus basse obtenue par refroidissement Doppler, il suffit de minimiser l'expression de l'équation (B.42), obtenue à basse intensité [9]. Le seul paramètre libre étant le désaccord $\bar{\delta}$, la température minimale T_D , appelée température Doppler, est obtenue pour $\bar{\delta} = -\Gamma/2$ et vaut

[8] A faible intensité, l'intensité n'influe pas sur la température. Ceci est valable dans le cas d'une transition $J = 0 \leftrightarrow J' = 1$, éclairée par deux ondes contrepropageantes polarisées respectivement σ_+ et σ_- . Dans d'autres cas, par exemple pour un atome à deux niveaux dans une onde stationnaire, une redistribution de photons se fait entre les deux ondes qui crée un terme de chauffage supplémentaire appelé « chauffage dipolaire ». On préfère alors travailler à basse intensité ($\Omega_1 \ll \Gamma$) pour limiter ce terme de chauffage supplémentaire.

[CWD89] Y. Castin, H. Wallis, J. Dalibard, *Limit of Doppler cooling*, J. Opt. Soc. Am, **B6**, p. 2046-2057, 1989

[9] On peut montrer que le régime à haute intensité n'est pas le plus intéressant pour obtenir de basses températures.

$$\boxed{\frac{1}{2} k_B T_D = \frac{7}{40} \hbar \Gamma} \quad (\text{B.43})$$

L'équation (B.43) sera notre définition quantitative de la température Doppler. Elle a été testée par de nombreuses simulations [10]. Les ordres de grandeur de T_D , ainsi que la vitesse v_D correspondante, sont donnés dans le tableau B.2, page 418.

4 Refroidissement Sisyphe

4.1 Introduction

La perspective d'atteindre les températures prédites par le refroidissement Doppler a motivé de nombreuses expériences. Après le succès du ralentissement des jets atomiques par laser [PhM82], [PPM82], [PPM85], les expériences de mélasse laser ont pu être réalisées. Les premières mesures de température semblaient montrer que la limite prédite pour le refroidissement Doppler (cf. § 3.2) était atteinte. Ces mesures utilisaient toutefois une méthode, appelée « lâcher et recapture », dont les résultats sont difficiles à interpréter avec précision : l'incertitude était du même ordre que la valeur mesurée. Ces mesures ne constituaient donc pas un test complètement fiable de la température atteinte par refroidissement Doppler. La mise au point d'une technique expérimentale de « temps de vol », plus précise, a révélé que les températures étaient plus basses que la limite Doppler attendue [LWW88]. Une limite réputée infranchissable était, de fait, franchie dans les expériences. On a alors parlé de « mélasses sub-Doppler ».

Il a donc fallu reconsidérer le modèle théorique. La principale différence entre la théorie du refroidissement Doppler et la réalité de l'expérience résidait dans l'insuffisance du modèle à deux niveaux. Pour le refroidissement Doppler, une transition à deux niveaux suffit, alors que l'expérience sub-Doppler utilisait une transition $J = 2 \leftrightarrow J' = 3$ sur le sodium. Une explication élégante du refroidissement sub-Doppler

-
- [10] Voir par exemple [CWD89] et [LPR89] : P.D. Lett, W.D. Phillips, S.C. Rolston, C.E. Tanner, R.N. Watts, and C.I. Westbrook, *Optical molasses*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, p. 2084-2107 (1989).
- [PhM82] W.D. Phillips and H. Metcalf, *Laser Deceleration of an Atomic Beam*, Phys. Rev. Lett. **48**, p. 596-599 (1982).
- [PPM82] J.V. Prodan, W.D. Phillips, and H. Metcalf, *Laser Production of a Very Slow Monoenergetic Atomic Beam*, Phys. Rev. Lett. **49**, p. 1149-1153 (1982).
- [PPM85] W.D. Phillips, J.V. Prodan, and H. Metcalf, *Laser cooling and electromagnetic trapping of neutral atoms*, J. Opt. Soc. Am. B **2**, p. 1751-1767 (1985).
- [LWW88] P.D. Lett, R.N. Watts, C.I. Westbrook, W. Phillips, P.L. Gould, and H.J. Metcalf, *Observation of Atoms Laser Cooled below the Doppler Limit*, Phys. Rev. Lett. **61**, p. 169-172 (1988).

a été proposée [DaC89], puis vérifiée expérimentalement [LPR89], [SDP90]. Elle met en jeu les gradients de polarisation de la lumière, qui peuvent être soit des gradients d'orientation, soit des gradients d'ellipticité. Dans le premier cas, on parle de refroidissement $\sigma_+ - \sigma_-$. Dans le deuxième cas, on parle de refroidissement Sisyphe, en reprenant l'image créée à propos de la mélasse bleue [Dal86], [ADH86]. C'est le refroidissement Sisyphe que nous allons présenter succinctement ici.

Le refroidissement Sisyphe joue plusieurs rôles dans le cadre de ce mémoire. Alors qu'il n'intervient pas de manière notable dans l'interprétation des expériences de piégeage (chapitre II), et qu'il ne joue aucun rôle dans l'expérience de refroidissement par résonances noires à une dimension, il intervient par contre de manière essentielle pour le refroidissement par résonances noires à deux dimensions.

Outre l'article original [DaC89] et la référence générale [Coh90], le refroidissement Sisyphe est exposé en détail dans [Cas92]. On trouvera un exposé concis du principe ainsi que des développements récents dans [Lou93].

4.2 Mécanisme de refroidissement Sisyphe

On considère une transition $J = 1/2 \leftrightarrow J' = 3/2$, éclairée par deux ondes lasers cohérentes, de même amplitude, de même fréquence, se propageant en sens opposé le long de Oz , et de polarisations linéaires croisées. Cette configuration crée un gradient le long de Oz de la polarisation de la lumière. La polarisation lumineuse passe successivement et continûment d'une polarisation σ_- à une polarisation linéaire selon Oy , puis σ_+ , puis linéaire selon Ox , pour redevenir enfin σ_- . Ce cycle se répète avec une périodicité spatiale de $\lambda/2$.

Les sous-niveaux f_+ et f_- de l'état fondamental subissent des déplacements lumineux [Coh62] déterminés par la polarisation du champ électrique et donc fortement

-
- [DaC89] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, p. 2023-2045 (1989). Voir aussi [UWR89] : P.J. Ungar, D.S. Weiss, E. Riis, and S. Chu, *Optical molasses and multiple level atoms : theory*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, p. 2058-2071 (1989).
 - [LPR89] P.D. Lett, W.D. Phillips, S.C. Rolston, C.E. Tanner, R.N. Watts, and C.I. Westbrook, *Optical molasses*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, p. 2084-2107 (1989).
 - [SDP90] C. Salomon, J. Dalibard, W.D. Phillips, A. Clairon, and S. Guellati, *Laser cooling of atoms below 3 μ K*, Europhys. Lett. **12**, p. 683-688 (1990).
 - [Dal86] J. Dalibard, *Le rôle des fluctuations dans la dynamique d'un atome couplé au champ électromagnétique*, Thèse d'Etat de l'Université Paris VI (1986).
 - [ADH86] A. Aspect, J. Dalibard, A. Heidmann, C. Salomon, and C. Cohen-Tannoudji, *Cooling Atoms with Stimulated Emission*, Phys. Rev. Lett. **57**, p. 215-218 (1986).
 - [Cas92] Y. Castin, *Les limites du refroidissement laser dans les mélasses optiques à une dimension*, Thèse de Doctorat, Université Paris VI (1992).
 - [Lou93] B. Lounis, *Atomes refroidis par laser : de la mélasse au cristal optique*, Thèse de doctorat, Université Paris XI (1993).
 - [Coh62] C. Cohen-Tannoudji, Thèse, Paris (1962) ; et Ann. Phys. (France) **7**, p. 423- 495 (1962).

modulés spatialement. Ces potentiels lumineux $U_+(z)$ et $U_-(z)$ des états f_+ et f_- sont modulés sinusoïdalement, en opposition de phase l'un par rapport à l'autre, avec une période spatiale de $\lambda/2$ (figure B.8).

Un atome en mouvement, qui se trouve dans un des deux états f_+ ou f_- , parcourt un de ces deux potentiels lumineux. Par conservation de l'énergie totale, l'énergie cinétique de l'atome est elle aussi modulée spatialement. L'atome ralentit lorsqu'il monte une colline de potentiel et accélère lorsqu'il la redescend. Ainsi, en moyennant sur le temps, l'énergie cinétique de l'atome est conservée lorsqu'il reste sur un même sous-niveau Zeeman.

L'effet intéressant pour le refroidissement intervient lorsque l'atome change de sous-niveau Zeeman. Avec le schéma atomique considéré, ceci ne peut se faire qu'en impliquant une émission spontanée. Il faut donc considérer les taux de pompage optique $\Gamma'_{- \rightarrow +}$ de f_- vers f_+ et $\Gamma'_{+ \rightarrow -}$ de f_+ vers f_- . Ces taux de pompage optique dépendent de la polarisation locale du champ laser et sont donc modulés spatialement de même que les potentiels lumineux $U_{\pm}(z)$.

Considérons un atome dans l'état f_- . Il est intuitif que $\Gamma'_{- \rightarrow +}$ sera maximal aux points où la polarisation est purement σ_+ et c'est donc en ces points que la transition $f_- \rightarrow f_+$ s'effectuera donc préférentiellement. Or, si on choisit un désaccord $\delta < 0$, en ces points, le potentiel $U_-(z)$ est à son maximum, alors que le potentiel $U_+(z)$ est à son minimum. En émettant un photon spontané, l'atome passe donc d'un potentiel $U_-(z)$ à un potentiel plus faible, $U_+(z)$, alors que son énergie cinétique est en première approximation inchangée. L'énergie totale de l'atome diminue de $U_-(z) - U_+(z)$.

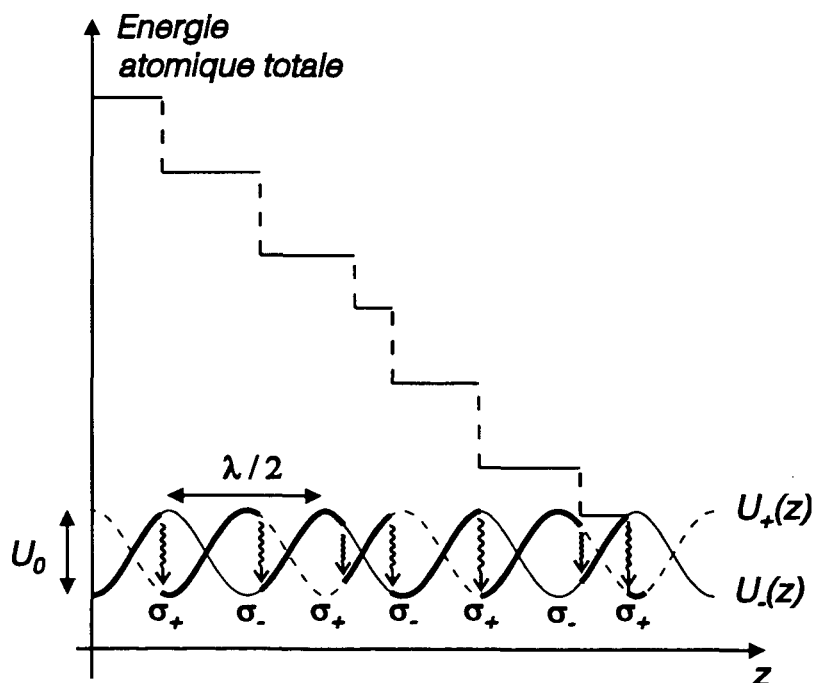


Figure B.8 Principe du refroidissement Sisyphé. Les deux potentiels lumineux $U_-(z)$ et $U_+(z)$ sont modulés spatialement. L'atome passe d'un potentiel à l'autre par émission spontanée. En moyenne, l'atome monte plus de collines de potentiel qu'il n'en descend.

Le même phénomène se produit ensuite à partir de f_+ , l'atome effectuant une transition $f_+ \rightarrow f_-$ lorsqu'il est au sommet du potentiel $U_+(z)$. On répète ces cycles de pompage optique et, à chaque cycle, l'énergie atomique diminue : on obtient un effet de refroidissement. Le terme de refroidissement Sisyphe vient de la mythologie grecque dans laquelle Sisyphe ne cesse de remonter une colline en poussant toujours le même rocher.

Le refroidissement Sisyphe repose sur des principes très différents (atomes à plusieurs sous-niveaux dans l'état fondamental, taux de transition entre niveaux modulés spatialement par les gradients de polarisation) de ceux du refroidissement Doppler (atome à deux niveaux, pressions de radiation modifiées par l'effet Doppler). Pourtant, on peut montrer que le refroidissement Sisyphe crée, comme le refroidissement Doppler, une force qui dépend de la vitesse à la manière de la figure B.7 : la force autour de $v = 0$ dépend linéairement de la vitesse, créant une force de friction ; pour des vitesses importantes, la force retombe à 0.

Cette force possède une plage de capture v_{cS} , en général plus petite que celle du refroidissement Doppler, déterminée à basse intensité par

$$kv_{cS} \approx \Gamma \tag{B.44}$$

A cette force est également associée une constante de temps de friction τ_{friction} qui est donnée à basse intensité par [11]

$$\tau_{\text{friction}} \approx \frac{\Gamma}{\delta} \tau_R \tag{B.45}$$

~~τ_{friction} ne dépend pas de l'intensité, et diminue dans ce modèle lorsqu'on augmente le désaccord. En comparant avec l'équation (B.34), on constate que le refroidissement Sisyphe peut créer une friction plus efficace que le refroidissement Doppler.~~

Comme le refroidissement Doppler, le refroidissement Sisyphe continue à être efficace dans des configurations à trois dimensions.

4.3 Température atteinte par refroidissement Sisyphe

La température obtenue par refroidissement Sisyphe est déterminée, comme pour le refroidissement Doppler par la compétition, créée par l'effet Sisyphe, et la diffusion, créée par l'émission spontanée. L'atout du refroidissement Sisyphe tient à ce qu'il peut engendrer une friction importante à basse intensité (cf. équation (B.45), il suffit d'avoir

[11] Noter que, comme pour le refroidissement Doppler, on obtient, pour la configuration étudiée, un effet de refroidissement uniquement pour $\delta < 0$. Toutefois, dans d'autres configurations, on obtient un refroidissement pour $\delta > 0$. Voir [EKG93] : O. Emile, R. Kaiser, C. Gerz, H. Wallis, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Magnetically assisted Sisyphus effect*, J. Phys. II France 3, p. 1709-1733 (1993). Voir aussi [Emi] : O. Emile, *Manipulation d'hélium métastable par laser : effet Sisyphe magnétique*, Thèse de l'Université Paris VI (1993).

un désaccord suffisamment grand). On peut donc augmenter la friction tout en limitant la diffusion (qui croît avec l'intensité), ce qui permet de réduire la température [12].

Nous pourrions reprendre pour le refroidissement Sisyphe le calcul du régime stationnaire (cf. § B.3.4). Mais il existe une façon plus physique pour déterminer l'ordre de grandeur de la température atteinte que nous donnons ici [Coh90].

Lors de chaque cycle de pompage, l'énergie diminue d'une quantité de l'ordre de U_0 , où U_0 est l'amplitude de modulation des potentiels $U_{\pm}(z)$. Lorsque l'énergie totale a diminué, jusqu'à être plus petite que U_0 , l'atome n'a plus assez d'énergie pour parvenir en haut des potentiels, et donc le mécanisme physique ne peut plus fonctionner. La température T obtenue par effet Sisyphe est donc de l'ordre de

$$k_B T \approx U_0 \quad (\text{B.46})$$

Comme U_0 est un déplacement lumineux, on a également

$$k_B T \approx \hbar \delta s \approx \hbar \delta \frac{\Omega^2 / 2}{\delta^2 + \Gamma^2 / 4} \quad (\text{B.47})$$

En diminuant l'intensité, on peut donc diminuer la température éventuellement bien en-dessous de la limite Doppler (cf. § B.3.5, $k_B T_D / 2 \approx 7 \hbar \Gamma / 40$).

4.4 Limite Sisyphe

La limite du refroidissement Sisyphe ne peut être obtenue de la même manière que la limite Doppler. En effet, en minimisant l'expression de la température de refroidissement Sisyphe (équation (B.47)), on trouve une température nulle (soit avec $\bar{\delta} \rightarrow \infty$, soit avec $\Omega_1 = 0$), qui est manifestement non physique. La raison en est que l'on n'a pris en compte aucun processus de diffusion pour dériver l'équation (B.47). On doit donc changer d'approche.

Prenons donc en compte les fluctuations de l'émission spontanée, d'une manière différente de celle du § B.3.4. A chaque cycle de pompage optique $f_{\pm} \rightarrow f_{\mp}$, l'atome perd une énergie potentielle de l'ordre de U_0 . Mais, le photon spontané émis dans une direction aléatoire lui communique une énergie cinétique de l'ordre de E_R , non comptabilisée jusqu'à présent. Il n'y a refroidissement que si la perte d'énergie est supérieure au gain, *i.e.* $U_0 > E_R$. Or, la température obtenue par refroidissement Sisyphe est de l'ordre de U_0 / k_B (équation (B.46)). La température T_S la plus basse que l'on puisse obtenir par refroidissement Sisyphe est donc

$$k_B T_S \approx E_R \quad (\text{B.48})$$

[12] Pour le refroidissement Doppler, la situation est opposée. D'une part, à intensité laser donnée, la friction ne peut être accrue indéfiniment (cf. équation (B.33)). D'autre part, en diminuant l'intensité (et dans le régime à basse intensité), on diminue à la fois friction et dissipation dans la même proportion, et on n'abaisse donc pas ainsi la température.

[Coh90] C. Cohen-Tannoudji, *Atomic motion in laser light*, in *Fundamental systems in quantum optics*, J. Dalibard, J.-M. Raimond, and J. Zinn-Justin eds, Les Houches session LIII (1990), p. 1-183 (North-Holland, 1992).

Dans le cas usuel des transitions larges ($\hbar\Gamma \gg E_R$), la limite Sisyphé est donc nettement plus basse que la limite Doppler ($k_B T_D \approx \hbar\Gamma$).

5 Conclusion

Les méthodes de refroidissement laser au-dessus du recul permettent une manipulation très efficace des vapeurs atomiques. Les expériences typiques de refroidissement et de piégeage radiatif exploitent successivement les trois techniques que nous avons présentées :

- avec la pression de radiation, on ralentit des jets thermiques sur une distance de l'ordre du mètre.
- le refroidissement Doppler permet alors de "capturer" dans une mélasse les atomes ralentis, mais encore relativement "chauds", et de les amener à la température Doppler T_D ($\sim 100 \mu\text{K}$).
- le refroidissement Sisyphé qui possède une plage de capture plus faible que le refroidissement Doppler peut alors prendre le relais pour amener la température à quelques températures de recul T_R ($\sim \mu\text{K}$).

Nous avons dû utiliser ces différentes méthodes pour refroidir les atomes d'hélium métastable de quelques kelvins à quelques dizaines de microkelvins. A partir de ces températures, il a été possible de mettre en oeuvre de manière efficace le refroidissement sub-recul par résonances noires pour atteindre la centaine de nanokelvins.

ANNEXE C

Collisions He* ultrafroid

Magneto-optical Trapping of Metastable Helium :
Collisions in the Presence of Resonant Light

Europhys. Lett. **20**, p. 681-686 (1992)

EUROPHYSICS LETTERS

15 December 1992

Europhys. Lett., 20 (8), pp. 681-686 (1992)

Magneto-optical Trapping of Metastable Helium: Collisions in the Presence of Resonant Light.

F. BARDOU, O. EMILE, J.-M. COURTY, C. I. WESTBROOK(*) and A. ASPECT(**)

*Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'École Normale Supérieure(***)
et Collège de France - 24, rue Lhomond, 75005 Paris, France*

(received 6 August 1992; accepted in final form 9 October 1992)

PACS. 32.80 - Photon interactions with atoms.

PACS. 34.50 - Inelastic scattering of atoms and molecules.

Abstract. - About 10^4 triplet metastable helium atoms have been trapped in a magneto-optical trap, based on the 2^3S_1 - 2^3P_2 transition at $1.083\ \mu\text{m}$ (volume $0.1\ \text{mm}^3$, temperature $1\ \text{mK}$). The losses of the trap are analysed by monitoring the ion current due to Penning collisions either with background gases, or between trapped atoms. The rate coefficient for these collisions between trapped metastable helium atoms has been found to be unusually large, and the crucial role of the quasi-resonant laser light has been experimentally demonstrated. The rate coefficient of the dominant process ($\text{He}^*(2^3S_1) + \text{He}^*(2^3P_2)$ Penning collisions) has been measured by two different methods, and found to be $K_{sp} = 10^{-7}\ \text{cm}^3\ \text{s}^{-1}$ within an estimated factor of 4. The corresponding cross-section is $6 \cdot 10^6\ \text{\AA}^2$.

Trapping neutral atoms with light has been demonstrated for several different atomic species and is becoming an increasingly useful tool in high-resolution spectroscopy, nonlinear optics, collision physics As usual in atomic physics, it would be interesting to work with the simplest atoms, because they usually provide the most stringent tests of fundamental theories. Atomic hydrogen has been trapped at very low temperatures [1], though not using light. Helium trapping [2] is also of interest. For instance, a cold trapped sample may provide a unique source for improved measurements of the fine-structure constant [3]. Also, since it has both fermion and boson isotopes, helium may prove important in the search for quantum collective effects. Here we report studies on Penning collisions in a magneto-optical trap (MOT) [4] for ^4He metastable helium [5, 6].

A schematic diagram of our apparatus is shown in fig. 1. An atomic beam of $2^3S_1\ \text{He}^*$ is decelerated by a counterpropagating LNA laser beam [7], kept on resonance by Zeeman tuning [8] on the 2^3S_1 - 2^3P_2 resonance line ($\lambda = 1.083\ \mu\text{m}$, $\Gamma/2\pi = 1.6\ \text{MHz}$, $I_{\text{sat}} = 0.16\ \text{mW}/\text{cm}^2$, where I_{sat} corresponds to a Rabi angular frequency of $\Gamma/\sqrt{2}$ at resonance). The maximum

(*) Present address: NIST, PHYS A167, Gaithersburg, MD 20899, USA.

(**) Present address: Institut d'Optique, Université Paris Sud, B.P. 147, 91403 Orsay Cedex, France.

(***) Associé au CNRS et à l'Université Pierre et Marie Curie.

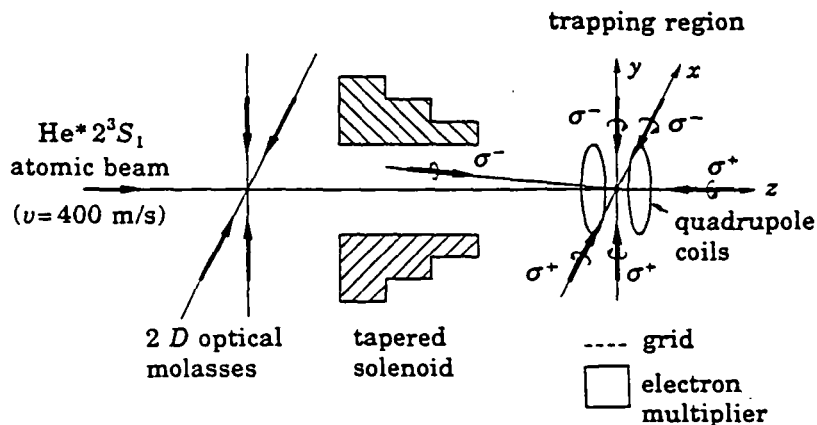


Fig. 1. - Experimental set-up.

field of 300 Gauss imposes a maximum of 400 m/s on the velocity we can decelerate. Therefore our cryogenic supersonic beam [9] is run so as to optimize the intensity below that velocity by choosing a pressure of 0.5 bar, a temperature of 15 K and antiparallel electron bombardment with an energy of 200 eV. The total He* beam intensity is roughly $5 \cdot 10^9 \text{ sr}^{-1} \text{ s}^{-1}$, of which about 20% is in the $2^3 S_1$ state. The intensity of the $2^3 S_1$ beam with velocities below 400 m/s is $10^8 \text{ sr}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

A few centimetres after the electron excitation region there is a 2D optical-molasses region, where we transversely cool the He* beam [10]. The light is produced by an LNA laser beam of diameter 15 mm and of intensity $10I_{\text{sat}}$, tuned about 2 linewidths below resonance. With this molasses we are able to increase the on-axis intensity of the sub 400 m/s He* beam by a factor of 10 to 20 over that given above.

The remainder of our apparatus is similar in design to the neon trap of ref. [11]. The decelerated He* beam is loaded directly into the MOT with the deceleration laser serving as one of the trapping beams. Anti-Helmholtz coils, whose axis coincides with the atomic-beam axis, are placed at the end of the solenoid, and provide a magnetic-field gradient of 20 G/cm along the axis. The deceleration laser beam, focussed on the beam nozzle, has a power of 10 mW, and a diameter at $1/e^2$ of 20 mm in the trap region. It is counterbalanced by a separate beam, with an intensity two times smaller to avoid unwanted optical-pumping effects [12]. The transverse trapping beams are retro-reflected and have intensities of 4 mW/cm^2 , uniform to 30% over a diameter of 15 mm.

Using the above parameters, and a detuning of 3 natural linewidths, we trap typically 10^4 atoms, at a background pressure of $4 \cdot 10^{-8}$ mbar. This number of atoms is measured to within a factor of 2 using a calibrated CCD camera, which also yields a trap size (FWHM) of 0.6 mm. Time-of-flight measurements give a temperature of the trapped atoms about 1 mK. The trap is also monitored using an ion detector (either an electron multiplier or a channeltron) biased to attract positive ions. These ions result from Penning ionization of atoms or molecules, which collide with the trapped metastable atoms.

We observe the trap decay by shutting off the atomic beam and monitoring the ion current, *i.e.* we detect the decay products, in contrast to most previous experiments which monitor fluorescence [13, 14]. At densities below 10^7 cm^{-3} , we observe an exponential decay with a time constant decreasing as the inverse of the background gas pressure ($\alpha^{-1} = 0.9 \text{ s}$ at a pressure of $4 \cdot 10^{-8}$ mbar). But when the trap density is above 10^7 cm^{-3} , we find that the decay is distinctly nonexponential (fig. 2).

To interpret this behaviour, already observed in sodium and cesium MOTs [13, 14], we use

F. BARDOU *et al.*: MAGNETO-OPTICAL TRAPPING OF METASTABLE HELIUM ETC.

683

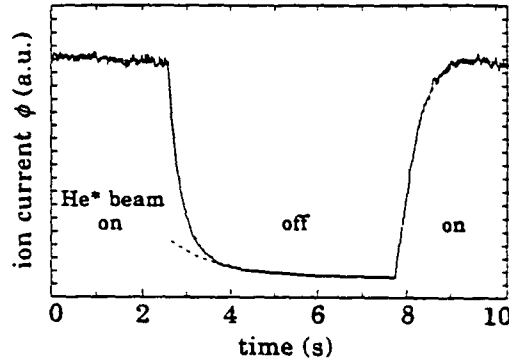


Fig. 2. - Decay of the trap. When the atomic beam is shut off, the ion current decay, monitored by an electron multiplier, reflects the decay of the number of trapped atoms (signal averaged over 50 cycles, initial density at the trap centre $n(0, 0) = 1.2 \cdot 10^8$ at./cm³, background pressure $4 \cdot 10^{-8}$ mbar). The dotted curve is an exponential fit at low density. The nonexponential decay at large signal is due to Penning collisions between trapped atoms. The experimental decay can be exactly fitted, yielding the value of Penning collision reaction constant.

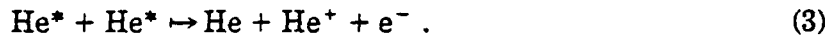
the phenomenological equation for the losses

$$dn/dt = -\alpha n - \beta n^2, \quad (1)$$

where n is the atomic density. The linear term αn represents ejection of trapped atoms by collisions with the background gas. The quadratic term βn^2 represents ejection by collisions between trapped atoms. In contrast to the alkalis, the collisions in our case are most probably Penning collisions:



where X is an atom or a molecule of background gas, and



(Associative ionization, which produces a He_2^+ ion, has a branching ratio of order 5% [15], and is indistinguishable from reaction (3) in our experiment.)

The detected ion current ϕ is the integral over the trap volume:

$$\phi = \int \left(\varepsilon_a \alpha n + \varepsilon_b \beta \frac{n^2}{2} \right) d^3r. \quad (4)$$

The efficiencies ε_a and ε_b account for losses due either to collisions which eject atoms from the trap, but fail to produce ions (such as collisions with residual He in the ground state), or to a non-unit detection efficiency. The factor of 1/2 in the quadratic term arises from the fact that for every 2 atoms ejected, only one ion is produced.

Camera observations show that the atomic-density profile $n(r, t)$ is Gaussian, with a r.m.s. width σ independent of the trap density, up to densities larger than 10^9 cm⁻³. Equation (4) then gives an equation for the density $n(0, t)$ at the centre of the trap, which is identical to eq. (1) with β replaced by $\beta/2\sqrt{2}$. The solution is

$$n(0, t) = \frac{n(0, 0)}{\left(1 + \frac{\beta n(0, 0)}{2\sqrt{2}\alpha} \right) \exp[\alpha t] - \frac{\beta n(0, 0)}{2\sqrt{2}\alpha}}. \quad (5)$$

The corresponding $n(r, t)$ is substituted into eq. (4) to get the ion current

$$\phi = (\sqrt{2\pi}\sigma)^3 \left(\varepsilon_a \alpha n(0, t) + \frac{\varepsilon_b \beta}{4\sqrt{2}} n(0, t)^2 \right) + B, \quad (6)$$

where B is the background count rate. This formula allows us to fit the experimental decay curve of fig. 2 (the fit is exactly superimposed on the experimental curve). We then get the values of the parameters B , α , $\varepsilon_a/\varepsilon_b$ and $\beta n(0, 0)$. As only the product $\beta n(0, 0)$ appears in the fitting constants, we need the camera-measured absolute value of the density $n(0, 0)$ to extract the value of β . We finally find $7 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ for the constant β of eq. (1), with an uncertainty of a factor of 4, including the uncertainty in the absolute calibration of the camera, and fluctuations in the helium beam intensity.

This measured Penning collision rate coefficient is considerably larger than the one calculated and measured for 2^3S_1 He* atoms in usual conditions [15]. For cold collisions, ref. [16] gives an upper bound of $10^{-9} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$. But in the presence of resonant laser light, like in our MOT, a significant fraction of the atoms are in the 2^3P_2 excited state, and the collision processes are quite different. In the case of 2^3S_1 - 2^3S_1 collisions studied in ref. [16] the long-range potential between the atoms decreases as $1/r^6$ and at mK energies the collision is predicted to be entirely *s*-wave. By contrast, the 2^3S_1 - 2^3P_2 system interacts by a $1/r^3$ potential, allowing higher-order partial waves to contribute to the rate constant even at mK energies, and the Penning collision rate constant can be 2 orders of magnitude larger [17], which is closer to our measured value⁽¹⁾.

In order to test the hypothesis that the *S-P* collisions are responsible for the large rate constant, one could vary the intensity of the trapping beams to get the density dependence of β [14]. In our case, changing the laser intensity in steady state would also modify the density, rendering the data interpretation more difficult. We have thus applied a different method: with the trap running in steady state, an acousto-optic modulator shuts off (turn-off time $< 1 \mu\text{s}$) the laser light for a period of $20 \mu\text{s}$. This time is chosen to be long compared to the excited-state lifetime (100 ns), yet short compared to the time for the cloud of atoms to expand significantly ($\approx 200 \mu\text{s}$). Thus during the off phase, the population is entirely ground state with an unchanged He* density, that we denote as $n(r)$. Typical data are shown in fig. 3a). It is evident that the ionization rate is substantially reduced in the absence of light: this is a direct proof of the major role of the light in the large value of the collision rate.

In order to render a quantitative account of this light dependence, we consider a simple model where the collision rate constants depend on the internal atomic states (*S* or *P*). The ion current can then be written as a function of the populations $\pi_{s(p)}$ in the *S(P)* states. These populations vary when the light intensity changes. With light on, the signal is analogous to eq. (6):

$$\phi_{\text{on}} = (\sqrt{2\pi}\sigma)^3 \left(\varepsilon_a (\alpha_s \pi_s + \alpha_p \pi_p) n(0) + \frac{\varepsilon_b}{2\sqrt{2}} (K_{ss} \pi_s^2 + K_{sp} \pi_s \pi_p + K_{pp} \pi_p^2) n^2(0) \right) + B, \quad (7)$$

where $\alpha_{s(p)}$ is the reaction rate for a residual gas atom to eject a He* in the *S(P)* state. The nonlinear term of eq. (1) is now expressed in terms of the average rate coefficients $K_{ss(sp, pp)}$ for Penning ionization in *S-S (S-P, P-P)* collisions. With the laser off, π_s is 1 and π_p is zero, so

⁽¹⁾ Penning ionization between two excited 2^3P_2 atoms is also possible, but its reaction rate is expected to be much smaller, of the order of the rate of Penning ionization for atoms in the 2^3S_1 state (private communication from J. Vigué).

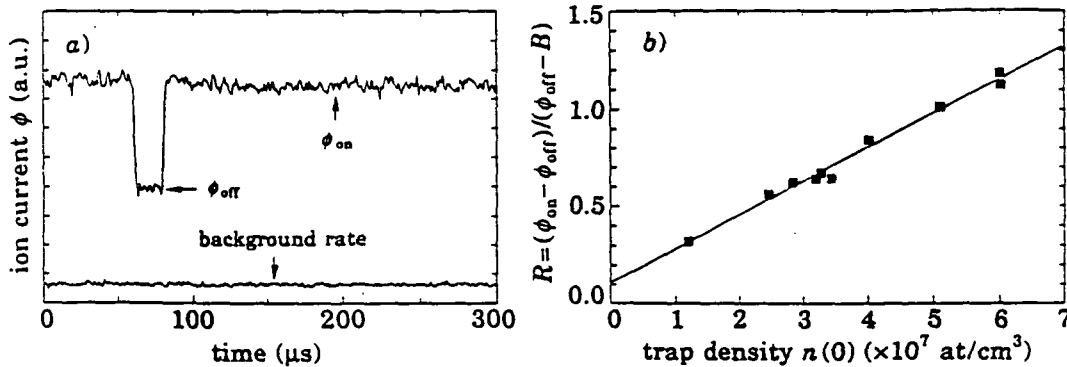


Fig. 3. – Role of the light on the Penning collisions between trapped atoms. *a*) The light is turned off for 20 μm every 1 ms (signal averaged over 10^5 such cycles). The ions are detected by a channeltron placed 2 cm from the trap, between the MOT coils, to have a negligible time of flight (less than 1 μs). When the light is off, the ion current is substantially reduced, and the remaining current is mainly due to Penning collisions with the background gases. These data have been obtained for $n(0) = 4 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-3}$. *b*) Relative ion current reduction when the density is changed. The slope of the straight line fitting the data leads to the rate coefficient for $2^3S_1 - 2^3P_2$ Penning collisions.

that the ion current is

$$\phi_{\text{off}} = (\sqrt{2\pi}\sigma)^3 \left(\varepsilon_a \alpha_s n(0) + \frac{\varepsilon_b}{2\sqrt{2}} K_{ss} n(0)^2 \right) + B. \quad (8)$$

We define $R = (\phi_{\text{on}} - \phi_{\text{off}}) / (\phi_{\text{off}} - B)$ as the relative signal variation when the light is turned off. If K_{ss} and K_{pp} are negligible compared to K_{sp} , the above model predicts that a plot of R , as a function of the atomic density $n(0)$ at the trap centre, should be a straight line with a slope $\varepsilon_b K_{sp} \pi_s \pi_p / (\varepsilon_a \alpha_s 2\sqrt{2})$.

We examined this prediction by acquiring a series of runs like the one shown in fig. 3*a*) at various initial densities of the trap. The density was varied by changing the detuning of the transverse optical molasses acting on the He* beam, *i.e.* the atomic density of the decelerated beam, while keeping all the other parameters constant. The dependence of R on the density, shown in fig. 3*b*), is found to be linear as expected. The nonzero intercept could be due to a difference in the rates α_s and α_p .

This measurement allows us to find an independent estimate of K_{sp} from the slope of this straight line, provided that we know α_s and $\varepsilon_b / \varepsilon_a$. We take for α_s the value of α deduced from the exponential decay of the trap at low density ($\alpha = 2.8 \text{ s}^{-1}$ for this measurement). The ratio $\varepsilon_b / \varepsilon_a$ can be determined in two ways. First, the fits to the decay signal yield $\varepsilon_b / \varepsilon_a = 4 \pm 1$. Second, absolute measurements of ε_a and ε_b are obtained from the absolute detected ionization rates at two different densities of the trap. Using this second method we find the same value for $\varepsilon_b / \varepsilon_a$ within an uncertainty of 50% ($\varepsilon_a = 0.1$; $\varepsilon_b = 0.4$). Using $\pi_s \pi_p = 0.25$ as calculated from the laser intensities and detuning, the resulting value for K_{sp} is $1.4 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$, within an uncertainty of a factor of 4. This independent evaluation is in good agreement with the measurement based on the nonexponential decay ($K_{sp} = \beta / (2\pi_s \pi_p) = 1.4 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$). (The exact agreement between the two values must be considered fortuitous!) For a temperature of 1 mK, the corresponding cross-section (*i.e.* K_{sp} times the average velocity) has the unusually large value of $6 \cdot 10^6 \text{ \AA}^2$.

The collisions in the presence of resonant light described in this paper impose severe limits on the atomic density in a MOT for He*. It should be possible to increase this density by

taking advantage of the dramatic suppression of Penning ionization between parallel spin-polarized atoms [18]. On the other hand, the collision process in the presence of light provides a sensitive probe of the MOT. As shown in this paper, it is possible to turn off and on the quadratic term of eq. (1) almost instantaneously, by switching the laser beam. This gives access to the density of the trapped atoms, with a time resolution of the order of the lifetime of the excited level (0.1 μs). This may be a very useful tool in further studies of the dynamics of the trap.

* * *

The authors acknowledge many fruitful discussions and help from C. COHEN-TANNOUDJI, J. DALIBARD, C. SALOMON and J. VIGUÉ, and the very useful contributions of C. GERZ and I. SILVERA. This programme has been supported by Direction des Recherches et Etudes Techniques.

REFERENCES

- [1] HIJMANS T. W., LUTTEN O. J., SETLJA I. D. and WALRAVEN J. T. M., *J. Opt. Soc. Am. B*, 6 (1989) 2235; DOYLE J. M., SANDBERG J. C., MASUHARA N., YU I. A., KLEPPNER D. and GREYTAK T. J., *J. Opt. Soc. Am. B*, 6 (1989) 2244. See also the proposal by AGOSTA C. C., SILVERA I. F., STOOFF H. T. C. and VERHAAR B. J., *Phys. Rev. Lett.*, 62 (1989) 2361.
- [2] METCALF H., *J. Opt. Soc. Am. B*, 6 (1989) 2206.
- [3] ZHAO P., LAWALL J. R., KAM A. W., LINDSAY M. D., PIPKIN F. M. and LICHTEN W., *Phys. Rev. Lett.*, 63 (1989) 1593.
- [4] RAAB E. L., PRENTISS M., CABLE A., CHU S. and PRITCHARD D. E., *Phys. Rev. Lett.*, 59 (1987) 2631.
- [5] WESTBROOK C., ASPECT A., BARDOU F., COHEN-TANNOUDJI C., COURTY J. M., EMILE O., GERZ C. and SILVERA I., *Proceedings of TENICOLS, Font-Romeu, 1991*, edited by M. DUCLOY, E. GIACOBINO and G. CAMY (World Scientific) 1992. A more detailed description of the trap will be published elsewhere.
- [6] KUMAKURA M. and MORITA N., *Jpn. J. Appl. Phys.*, 31 (1992) L-276.
- [7] VANSTEENKISTE N., KAISER R., GERZ C., HOLLBERG L., SALOMON C. and ASPECT A., *J. Phys. II*, 1 (1991) 1407.
- [8] PHILLIPS W. D. and METCALF H., *Phys. Rev. Lett.*, 48 (1982) 596.
- [9] CONRAD H., ERTEL G., KUPPERS J., CSELLMANN W. and HABERLAND H., *Surf. Sci.*, 121 (1982) 161; KAISER R., Ph. D. Thesis, Ecole Normale Supérieure, Paris (1990).
- [10] ASPECT A., VANSTEENKISTE N., KAISER R., HABERLAND H. and KARRAIS M., *Chem. Phys.*, 145 (1990) 307.
- [11] SHIMIZU F., SHIMIZU K. and TAKUMA H., *Phys. Rev. A*, 39 (1989) 2758.
- [12] SHIMIZU F., SHIMIZU K. and TAKUMA H., *Opt. Lett.*, 16 (1991) 339.
- [13] PRENTISS M., CABLE A., BJORKHOLM J. E., CHU S., RAAB E. L. and PRITCHARD D. E., *Opt. Lett.*, 13 (1988) 452.
- [14] SESKO D., WALKER T., MONROE C., GALLAGHER A. and WIEMAN C., *Phys. Rev. Lett.*, 63 (1989) 961.
- [15] MÜLLER M. W., MERZ A., RUF M. W., HOTOP H., MEYER W. and MOVRE M., *Z. Phys. D, Atoms, Molecules and Clusters*, 21 (1991) 89 and references therein.
- [16] JULIENNE P. S. and MIES F. H., *J. Opt. Soc. Am. B*, 6 (1989) 2257.
- [17] JULIENNE P. S., SMITH A. M. and BURNETT K., *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, 30 (1991) 141; WILLIAMS C. J., JULIENNE P. S. and BAND Y. B., unpublished (1992).
- [18] HILL J. C., HATFIELD L. L., STOCKWELL N. D. and WALTERS G. K., *Phys. Rev. A*, 5 (1972) 189.

Commentaire [1]

Notre étude de collisions a mis en évidence des taux de réactions inhabituellement élevés pour des collisions Penning. Nous commentons ici avec des arguments qualitatifs ce résultat.

La valeur obtenue s'explique en partie par le fait que les collisions se produisent entre un état S et un état P . Elles font donc intervenir un potentiel en $1/r^3$, très attractif à longue distance. Ce point est commun à la plupart des expériences de collisions entre atomes ultrafroids piégés : les lasers de refroidissement et de piégeage peuplent significativement l'état excité de la transition de refroidissement. Pourtant, les taux de réaction observés pour d'autres atomes que l'hélium sont plus faibles par un à deux ordres de grandeur : pour Kr* et Ar*, par exemple, on mesure des taux de réaction de l'ordre de 2 à $3 \times 10^{-9} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ [2].

Pourquoi l'hélium a-t-il un taux de réaction si élevé ? Pour le comprendre, il faut faire appel à une caractéristique particulière des collisions ultra-froides : la durée de la collision peut devenir si grande que, si deux atomes entrent en collision dans l'état S - P , l'atome dans l'état P peut se désexciter vers l'état S *au cours de la collision*, avec une probabilité non négligeable ; la collision devient alors une collision S - S , dont le taux de réaction est beaucoup plus faible. Les estimations théoriques montrent que cette désexcitation en cours de collision se produit effectivement pour les atomes lourds ultrafroids. Mais, pour les atomes d'hélium, trois facteurs contribuent à rendre négligeable la probabilité de désexcitation en cours de collision :

- grandes vitesses relatives : avec les atomes d'hélium, les vitesses caractéristiques sont de l'ordre du mètre par seconde, alors qu'elles sont souvent de l'ordre du centimètre par seconde pour les atomes plus lourds. La durée des collisions entre atomes d'hélium est donc réduite par rapport aux collisions entre atomes plus lourds.
- faible masse : la force procurée par le potentiel attractif produit des accélérations, et donc des vitesses, plus grandes pour l'hélium que pour les atomes plus lourds. Ceci contribue à réduire la durée de la collision.
- grande durée de vie de l'état P : la probabilité de se désexciter en cours de collision est réduite.

En conclusion, pour l'hélium, contrairement aux atomes ultrafroids plus lourds, une collision commencée dans l'état S - P se termine presque toujours dans l'état S - P [3]. Ceci explique qualitativement la valeur élevée du taux de réaction.

[1] Issu de discussions avec J. Vigué.

[2] K. Shimizu et F. Shimizu, communication privée.

[3] La collision ressemble donc plus à une collision "chaude" qu'à une collision ultrafroide...

ANNEXE D

Résonances noires à deux dimensions

Taux de sortie $\Gamma'_{\text{NC}}(\vec{p})$

Plan de l'annexe D :**Résonances noires à deux dimensions :****Taux de sortie $\Gamma'_{\text{NC}}(\vec{p})$**

1 Présentation du problème	443
2 Etat couplé par le rayonnement	444
3 Couplage vers l'état excité	445
4 Taux de sortie des états non-couplés	446

1 Présentation du problème

Dans le chapitre III, on a présenté deux expériences de résonances noires à deux dimensions, dont l'une avec des faisceaux lasers non orthogonaux. Le champ laser s'écrit (figure D.1)

$$\vec{E}_L(\vec{r}) = \vec{e}_{1+} e^{ik_1 \vec{r}} + \vec{e}_{1-} e^{-ik_1 \vec{r}} + \vec{e}_{2+} e^{ik_2 \vec{r}} + \vec{e}_{2-} e^{-ik_2 \vec{r}} \quad (\text{D.1})$$

Nous choisissons le jeu particulier de polarisations utilisé dans l'expérience décrite au chapitre III, § 4.2 (cf. figure III.29). Nous avons donc

$$\vec{e}_{1+} = \vec{e}_{2-} = \vec{e}_x \quad (\text{D.2.a})$$

$$\vec{e}_{1-} = \vec{e}_y \cos \gamma - \vec{e}_z \sin \gamma = \vec{e}_{z1} \times \vec{e}_x \quad (\text{D.2.b})$$

$$\vec{e}_{2+} = \vec{e}_y \cos \gamma + \vec{e}_z \sin \gamma = \vec{e}_{z2} \times \vec{e}_x \quad (\text{D.2.c})$$

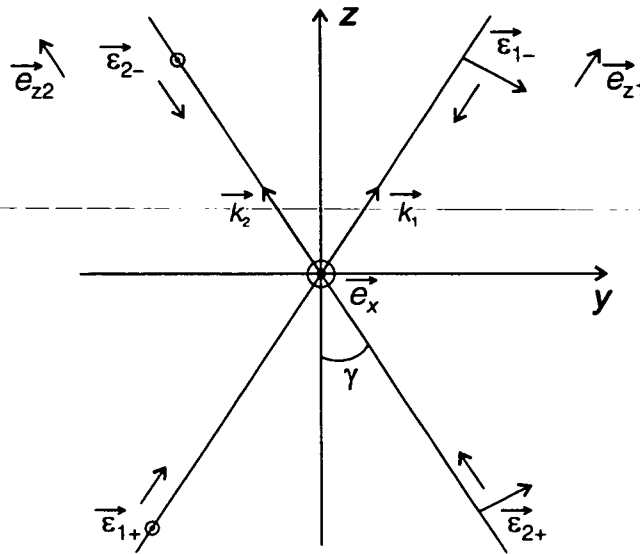


Figure D.1 *Configuration et notations.* La configuration de polarisation choisie est celle de la figure III.29.

Comme nous l'avons indiqué au chapitre I, § 4.2, il existe des états $|\psi_{\text{NC}}(\vec{p})\rangle$, non couplés à l'état excité par les lasers (\vec{p} est ici un vecteur à deux dimensions de (yOz)). Ces états se représentent par le spineur (cf. équation (I.35))

$$|\psi_{\text{NC}}^{\vec{p}}(\vec{r})\rangle = \vec{E}_L(\vec{r}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} \quad (\text{D.3.a})$$

Ils se déduisent par une translation \vec{p} dans l'espace des impulsions de l'état

$$|\psi_{\text{NC}}^{\vec{0}}(\vec{r})\rangle = \vec{E}_L(\vec{r}) \quad (\text{D.3.b})$$

Nous avons indiqué que $|\psi_{\text{NC}}^{\bar{0}}(\vec{r})\rangle$ est un état piégeant car il est un état propre du terme d'énergie cinétique de l'hamiltonien :

$$\frac{\hat{p}^2}{2M}|\psi_{\text{NC}}(\vec{p} = \vec{0})\rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2M}|\psi_{\text{NC}}(\vec{p} = \vec{0})\rangle \quad (\text{D.4.a})$$

puisque $\vec{E}_L(\vec{r})$ est solution de l'équation de propagation

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{D.4.b})$$

En revanche, les états $|\psi_{\text{NC}}(\vec{p})\rangle$ avec $\vec{p} \neq \vec{0}$ ne sont pas des états propres de l'énergie cinétique. Bien qu'ils ne soient pas couplés à l'état excité par les lasers, ce ne sont donc pas des états piégeants.

Nous nous proposons ici de généraliser le raisonnement du chapitre I (§ 2.1), c'est-à-dire de déterminer le taux $\Gamma_{\text{NC}}(\vec{p})$ de sortie des atomes hors de $|\psi_{\text{NC}}(\vec{p})\rangle$. Nous nous placerons en régime perturbatif, et nous décomposerons le problème en deux étapes :

- (i) couplage motionnel couplant $|\psi_{\text{NC}}(\vec{p})\rangle$ à un état $|\psi_{\text{C}}(\vec{p})\rangle$ du niveau fondamental ;
- (ii) couplage par les lasers de $|\psi_{\text{C}}(\vec{p})\rangle$ au niveau excité (instable), ce qui permet de déterminer un taux de sortie $\Gamma_{\text{C}}(\vec{p})$ hors de $|\psi_{\text{C}}(\vec{p})\rangle$.

On peut alors, en combinant les deux étapes déterminer $\Gamma_{\text{NC}}(\vec{p})$. Les résultats obtenus nous permettront de caractériser la sélectivité en vitesse dans le plan (yOz).

2 Etat couplé par le rayonnement

Pour déterminer l'état $|\psi_{\text{C}}(\vec{p})\rangle$ couplé à $|\psi_{\text{NC}}(\vec{p})\rangle$ par le mouvement, faisons agir l'opérateur énergie cinétique sur $|\psi_{\text{NC}}(\vec{p})\rangle$. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{\hat{p}^2}{2M}|\psi_{\text{NC}}^{\vec{p}}(\vec{r})\rangle &= \frac{p^2 + \hbar^2 k^2}{2M}|\psi_{\text{NC}}^{\vec{p}}(\vec{r})\rangle + \frac{\vec{p} \cdot \vec{k}_1}{M} \left\{ \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_{1+} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} - \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_{1-} e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} \right\} \\ &\quad + \frac{\vec{p} \cdot \vec{k}_2}{M} \left\{ \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_{2+} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} - \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_{2-} e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Pour ne pas alourdir les notations, nous avons pris des amplitudes égales à 1/2 pour les quatre ondes laser. L'équation (D.5) fait apparaître naturellement les états couplés :

$$\bar{\psi}_{1\text{C}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon}_{1+} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon}_{1-} e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} \quad (\text{D.6.a})$$

$$\bar{\psi}_{2\text{C}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon}_{2+} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon}_{2-} e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \quad (\text{D.6.b})$$

Pour des raisons de symétrie, nous considérerons également

$$\bar{\psi}_{\text{C}}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_{1\text{C}} + \bar{\psi}_{2\text{C}}) \quad (\text{D.7.a})$$

$$\bar{\Psi}_C^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\Psi}_{1C} - \bar{\Psi}_{2C}) \quad (\text{D.7.b})$$

Nous allons maintenant calculer les taux de sortie à partir des états (D.6) et (D.7).

3 Couplage vers l'état excité

Pour une transition $J_f=1 \leftrightarrow J_e=1$, on montre que l'amplitude de transition d'un état $|f\rangle$ vers un état $|e\rangle$ sous l'effet du champ \bar{E}_L s'écrit commodément, en utilisant les spineurs

$$\langle e|\hat{D}.\bar{E}_L|f\rangle = d\bar{\Psi}_e.(\bar{E}_L \times \bar{\Psi}_f) \quad (\text{D.8})$$

où d est l'élément de matrice de l'opérateur dipolaire électrique entre les états fondamentaux et excités.

Nous calculerons successivement l'action de \bar{E}_L sur les états (D.6) et (D.7), ce qui nous donnera les états excités auxquels les lasers couplent ces états, ainsi que les amplitudes de transition.

L'équation (D.8) fait apparaître des produits vectoriels entre les vecteurs polarisation. Ces produits vectoriels sont tous nuls sauf :

$$\bar{e}_{1+} \times \bar{e}_{1-} = \bar{e}_y \sin \gamma + \bar{e}_z \cos \gamma = \bar{e}_{z1} \quad (\text{D.9.a})$$

$$\bar{e}_{2+} \times \bar{e}_{2-} = \bar{e}_y \sin \gamma - \bar{e}_z \cos \gamma = -\bar{e}_{z2} \quad (\text{D.9.b})$$

$$\bar{e}_{1+} \times \bar{e}_{2+} = \bar{e}_{2-} \times \bar{e}_{2+} = \bar{e}_{z2} \quad (\text{D.9.c})$$

$$\bar{e}_{1-} \times \bar{e}_{2-} = \bar{e}_{1-} \times \bar{e}_{1+} = -\bar{e}_{z1} \quad (\text{D.9.d})$$

$$\bar{e}_{1-} \times \bar{e}_{2+} = \sin 2\gamma \bar{e}_x \quad (\text{D.9.e})$$

On trouve alors

$$\sqrt{2}\bar{E}_L \times \bar{\Psi}_{1C} = -2\bar{e}_{z1} - \bar{e}_{z2}e^{i(\bar{k}_1+\bar{k}_2).\bar{r}} + \bar{e}_x \sin(2\gamma)e^{i(\bar{k}_2-\bar{k}_1).\bar{r}} + \bar{e}_{z1}e^{-i(\bar{k}_1+\bar{k}_2).\bar{r}} \quad (\text{D.10.a})$$

$$\sqrt{2}\bar{E}_L \times \bar{\Psi}_{2C} = 2\bar{e}_{z2} + \bar{e}_{z2}e^{i(\bar{k}_1+\bar{k}_2).\bar{r}} + \bar{e}_x \sin(2\gamma)e^{i(\bar{k}_2-\bar{k}_1).\bar{r}} + \bar{e}_{z1}e^{-i(\bar{k}_1+\bar{k}_2).\bar{r}} \quad (\text{D.10.b})$$

On en déduit

$$2\bar{E}_L \times \bar{\Psi}_C^+ = 2(\bar{e}_{z2} - \bar{e}_{z1}) + 2\sin(2\gamma)\bar{e}_x e^{i(\bar{k}_2-\bar{k}_1).\bar{r}} + 2\bar{e}_{z1}e^{-i(\bar{k}_1+\bar{k}_2).\bar{r}} \quad (\text{D.11.a})$$

$$2\bar{E}_L \times \bar{\Psi}_C^- = -2(\bar{e}_{z1} + \bar{e}_{z2}) - 2\bar{e}_{z2}e^{i(\bar{k}_1+\bar{k}_2).\bar{r}} \quad (\text{D.11.b})$$

Nous constatons que les deux états excités (D.11.a) et (D.11.b) auxquels $|\bar{\Psi}_C^+\rangle$ et $|\bar{\Psi}_C^-\rangle$ sont couplés sont orthogonaux entre eux (des spineurs n'ayant pas la même dépendance exponentielle en \bar{r} sont des états orthogonaux ; $(\bar{e}_{z1} - \bar{e}_{z2}) = 2\bar{e}_y \sin \gamma$ est orthogonal à $(\bar{e}_{z1} + \bar{e}_{z2}) = 2\bar{e}_z \cos \gamma$). On peut donc ajouter indépendamment les taux de sortie (probabilités de transition vers les deux états $|\bar{\Psi}_C^+\rangle$ et $|\bar{\Psi}_C^-\rangle$).

Les carrés des amplitudes de transition vers ces états sont proportionnels à :

$$|\beta^+|^2 = 4\sin^2 \gamma + \sin^2 2\gamma + 1 \quad (\text{D.12.a})$$

$$|\beta^-|^2 = 4 \cos^2 \gamma + 1 \quad (\text{D.12.b})$$

En reprenant le raisonnement perturbatif du chapitre I (§ 2.1.3), nous trouvons donc que les taux de départ depuis les états $|\bar{\psi}_C^+\rangle$ et $|\bar{\psi}_C^-\rangle$ sont de la forme :

$$\Gamma_C^{'+} = \Gamma_C' |\beta^+|^2 \quad (\text{D.13.a})$$

$$\Gamma_C'^{-} = \Gamma_C' |\beta^-|^2 \quad (\text{D.13.b})$$

4 Taux de sortie des états non-couplés

Nous avons vu à l'équation (D.5) que l'état $|\psi_{\text{NC}}(\vec{p})\rangle$ est couplé par le mouvement à $|\psi_C^+(\vec{p})\rangle$ et à $|\psi_C^-(\vec{p})\rangle$, dont nous avons estimé les taux d'excitation $\Gamma_C^{'+}$ et $\Gamma_C'^{-}$. Comme les états finals de ces deux chemins d'excitation sont orthogonaux, on peut ajouter indépendamment les probabilités de sortie à partir de $|\psi_{\text{NC}}(\vec{p})\rangle$, c'est-à-dire les taux de transition.

Les amplitudes de transition de $|\psi_{\text{NC}}(\vec{p})\rangle$ vers $|\psi_C^+(\vec{p})\rangle$ et à $|\psi_C^-(\vec{p})\rangle$ sont obtenues à partir des équations (D.5), (D.6) et (D.7) :

$$\langle \psi_C^+(\vec{p}) | \frac{\hat{p}^2}{2M} | \psi_{\text{NC}}(\vec{p}) \rangle = \frac{kp_z}{M} \cos \gamma \quad (\text{D.14.a})$$

$$\langle \psi_C^-(\vec{p}) | \frac{\hat{p}^2}{2M} | \psi_{\text{NC}}(\vec{p}) \rangle = \frac{kp_y}{M} \sin \gamma \quad (\text{D.14.b})$$

Finalement, en régime perturbatif, on voit que le taux de départ de $|\psi_{\text{NC}}(\vec{p})\rangle$ vaut

$$\Gamma_{\text{NC}}(\vec{p}) = \Gamma_{\text{NC}}^{'+}(\vec{p}) + \Gamma_{\text{NC}}'^{-}(\vec{p}) \quad (\text{D.15})$$

avec

$$\Gamma_{\text{NC}}^{'+}(\vec{p}) = \frac{k^2}{M^2 \Gamma_C'} \frac{\cos^2 \gamma}{1 + \sin^2 2\gamma + 4 \sin^2 \gamma} p_z^2 \quad (\text{D.16.a})$$

$$\Gamma_{\text{NC}}'^{-}(\vec{p}) = \frac{k^2}{M^2 \Gamma_C'} \frac{\sin^2 \gamma}{1 + 4 \cos^2 \gamma} p_y^2 \quad (\text{D.16.b})$$

Remarque :

Si le couplage par les lasers vers le niveau excité est saturant, et non perturbatif, les taux d'excitation Γ_C' sont égaux à $\Gamma/2$, et les équations (D.16) sont remplacées par

$$\Gamma_{\text{NC}}^{'+}(\vec{p}) = \frac{2k^2}{M^2 \Gamma} \cos^2 \gamma p_z^2 \quad (\text{D.17.a})$$

$$\Gamma_{\text{NC}}'^{-}(\vec{p}) = \frac{2k^2}{M^2 \Gamma} \sin^2 \gamma p_y^2 \quad (\text{D.17.b})$$

Nous constatons donc que le taux de désexcitation de $|\psi_{\text{NC}}(\vec{p})\rangle$ est bien une fonction quadratique de \vec{p} , mais il est anisotrope, les directions principales étant les bissectrices Ox et Oy des axes des faisceaux laser. La sélectivité en vitesse est donc anisotrope suivant Oz et Oy .

Pour un temps d'interaction donné, la largeur de la distribution en vitesse des atomes refroidis est inversement proportionnelle à la racine carrée du coefficient de p^2 dans l'expression de $\Gamma'_{\text{NC}}(\vec{p})$. On s'attend donc à trouver une distribution anisotrope suivant Oz et Oy , le rapport d'anisotropie étant

$$\tan \gamma \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{1 + \sin^2 2\gamma + 4 \sin^2 \gamma}{1 + 4 \cos^2 \gamma}} \times \tan \gamma \quad (\text{D.18})$$

Notons que si γ tend vers 0, le refroidissement porte exclusivement sur la composante v_z de la vitesse, ce qui est physiquement satisfaisant.

Dans la situation $\gamma = 15^\circ$ (§ III.4.2), on s'attend donc à une anisotropie de 0,27 à 0,15 suivant que l'on est saturant ou non-saturant. Les résultats obtenus au chapitre III sont compatibles avec ces nombres. On peut en effet interpréter la figure III.31 en admettant que le refroidissement est beaucoup plus efficace suivant l'axe Oz que suivant l'axe Oy (notons de plus que les pics sont *a priori* beaucoup plus séparés suivant Oz que suivant Oy (encore par un facteur $\tan \gamma$)). Si $\gamma = 45^\circ$, on a une anisotropie réduite (facteur 1,15) on même nulle suivant que l'on utilise les formules (D.16) (laser non saturant) ou (D.17) (laser saturant).

Remarque :

Un calcul analogue avec des polarisations σ_+ / σ_- (cf. polarisations utilisées au § III.4.3) montre que dans ce cas l'anisotropie est nulle pour $\gamma = 45^\circ$.

François Bardou

Sub-recoil laser cooling by dark resonances

Experiments with precooled metastable helium atoms

Theoretical approaches : quantum Monte-Carlo and Lévy flights

ABSTRACT

This thesis presents new experimental and theoretical approaches of laser cooling by dark resonances. The recoil energy is the kinetic energy communicated to an atom initially at rest by the absorption or by the emission of a single photon. This important milestone in laser cooling has been overcome for the first time in 1988 by the method of velocity selective dark resonances. This work deals with extensions of this method to the long interaction time regime and to several dimensions.

The new experimental setup is based on the development of a laser trap of ultracold metastable helium atoms. The atoms are released in free fall and their small velocities allow the interaction time to be increased by 2 orders of magnitude. Stray magnetic fields are compensated to one milligauss by mechanical Hanle effect experiments. The first experiments with this new setup reached one fortieth of the recoil energy (100 nanokelvins) in one dimension. The recoil limit has been passed for the first time in two dimensions, reaching one twentieth of the recoil energy, *i.e.* 200 nanokelvins.

Theoretically, a new type of quantum Monte-Carlo simulations much more efficient than the resolution of optical Bloch equations. The long interaction time behaviour has been explored. These simulations suggested another new approach, based on the Lévy statistics recently introduced to study anomalous diffusion. With this approach, we proved a conjecture predicting a decrease of the temperature as the inverse of the interaction time. We also give new analytical results, for example about the proportion of cooled atoms or about the role of dimensionality.

KEY WORDS

Sub-recoil laser cooling

Nanokelvin

Quantum Monte-Carlo

Magneto-optical trap

Dark resonances

Anomalous diffusion

Lévy statistics

Metastable helium

François Bardou

Refroidissement laser sub-recul par résonances noires

Expériences avec des atomes d'hélium métastables prérefroidis

Approches Monte-Carlo quantique et vols de Lévy

RÉSUMÉ

Ce mémoire présente de nouvelles approches expérimentales et théoriques du refroidissement laser sub-recul par résonances noires. L'énergie de recul est l'énergie cinétique communiquée à un atome initialement immobile par l'absorption ou l'émission d'un seul photon. C'est une échelle importante dans le refroidissement d'atomes par laser, franchie pour la première fois en 1988, sur un jet d'hélium métastable, grâce à la méthode des résonances noires sélectives en vitesse. Ce travail porte sur les développements de cette méthode, d'une part dans le régime des temps longs, d'autre part à plusieurs dimensions.

Le nouveau schéma expérimental repose sur la réalisation d'un piège laser d'atomes d'hélium métastables ultrafroids, à partir duquel on lâche en chute libre le nuage d'atomes piégés, dont les vitesses autorisent des temps d'interaction accrus par deux ordres de grandeur. Les champs magnétiques ont été compensés à un milligauss près par des expériences d'effet Hanle mécanique. Les premières expériences effectuées avec le nouveau dispositif ont permis d'atteindre un quarantième de l'énergie de recul (100 nanokelvins) à une dimension. La limite du recul à deux dimensions a pu être franchie pour la première fois (un vingtième de l'énergie du recul, soit 200 nanokelvins).

Sur le plan théorique, on a développé un nouveau type de simulations Monte-Carlo quantiques beaucoup plus efficaces que la résolution des équations de Bloch optiques. On a pu explorer ainsi le régime des temps longs. Ces simulations ont suggéré une approche statistique complètement nouvelle du problème, basée sur les statistiques de Lévy récemment introduites pour étudier la diffusion anormale. Cette approche a permis de confirmer une conjecture prédisant une décroissance de la température atteinte comme l'inverse du temps d'interaction. Elle fournit également des résultats analytiques nouveaux, par exemple sur la proportion d'atomes refroidis ou sur le rôle de la dimensionnalité.

MOTS CLEFS

Refroidissement laser sub-recul

Nanokelvin

Monte-Carlo quantique

Piège magnéto-optique

Résonances noires

Diffusion anormale

Statistiques de Lévy

Hélium métastable