Pour une Biographie intellectuelle de Colin Maclaurin (1698-1746) : ou l'obstination mathématicienne d'un newtonien

Olivier Bruneau

▶ **To cite this version:**

Olivier Bruneau. Pour une Biographie intellectuelle de Colin Maclaurin (1698-1746) : ou l'obstination mathématicienne d'un newtonien. Histoire. Université de Nantes, 2005. Français. NNT : . tel-00011874

HAL Id: tel-00011874

https://theses.hal.science/tel-00011874

Submitted on 9 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

POUR UNE BIOGRAPHIE INTELLECTUELLE DE COLIN MACLAURIN (1698-1746) : ou l'obstination mathématicienne d'un newtonien

Tome I

THÈSE DE DOCTORAT
EN ÉPISTÉMOLOGIE, HISTOIRE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES
École doctorale : Connaissance, langage, culture

Présentée et soutenue publiquement par

Olivier BRUNEAU
Le 25 octobre 2005, devant le jury ci-dessous

Président :	M Christian GILAIN, Professeur, Paris
Rapporteurs :	Mme Judith GRABINER, Professeur, Claremont College, États-Unis
	M Pierre CRÉPEL, Chargé de recherche, Lyon
Examinateurs :	M Christian GILAIN, Professeur, Paris
	M François DE GANDT, Professeur, Lille
	M Pierre LAMANDÉ, Maître de Conférence, Nantes
Directrice de thèse :	Mme Évelyne BARBIN, Professeur, Nantes

À Aymeric,

Éléonore

et Fabienne

Je tiens plus particulièrement à remercier quelques personnes qui m'ont beaucoup aidé pendant cette longue mais passionnante épreuve :

Pierre Lamandé pour m'avoir guidé vers ce sujet et pour son soutien,

Judith Grabiner et Pierre Crépel qui ont accepté d'être rapporteurs de ma thèse,

François De Gandt, Christian Gilain et Pierre Lamandé qui ont accepté de siéger dans le jury,

Évelyne Barbin pour m'avoir dirigé et soutenu patiemment,

Les enseignants-chercheurs du centre François Viète et plus particulièrement Patrice Bailhache et Stéphane Tirard pour les discussions enrichissantes et pour leurs encouragements,

Virginie Champeau pour ses conseils avisés et les « nantillais » échangés,

Les doctorants du centre qui ont dû me supporter, et plus particulièrement Christophe Schmit, Myriam Papin, Sylvène Renoud,

Les personnes que j'ai croisées et qui m'ont aidé à avancer dans cette thèse, Annaïg Cotonnec, Colette Lelay, Irène Passeron, Jeanne Peiffer, Marie Thebaud-Sorger, Guy Boistel, Alexander Broadie, Pierre Carboni, Sébastien Maronne, Marco Panza, M. A. Stewart, Ian Tweddle, ainsi que les personnels de l'IHT, de l'ICAM et du département OGP de l'IUT de Nantes, et bien sûr les bibliothécaires et archivistes des bibliothèques universitaires de Nantes, d'Édimbourg, d'Aberdeen et de Glasgow, et des différentes archives…

Enfin, je tiens à remercier mes amis et ma famille, qui sont à mes côtés, et plus particulièrement Fabienne, Eléonore et Aymeric.

Introduction

Les Lumières Écossaises sont, dans l'ensemble, bien examinées. Il existe de nombreuses analyses en particulier en langue française. Néanmoins, lorsqu'il est question de sciences, les travaux sont plus rares. Depuis la fin des années 1970, il existe quelques ouvrages ou articles sur les sciences en Écosse au 18ème siècle. L'un des derniers, qui nous semble renouveler cette étude, est l'ouvrage édité par Paul Wood et Charles Withers, *Science and Medecine in the Scottish Enlightenment*[1]. Ce dernier est symptomatique du regain d'intérêt que les chercheurs aujourd'hui portent sur les sciences, dont l'argument principal est que l'essor des Lumières Écossaises est dû, en grande partie, au développement des sciences.

Depuis la mort de Colin Maclaurin, en 1746, quelques biographies ou notices biographiques ont été écrites. La première notice biographique a été incluse dans l'édition posthume du *The Account of Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries*[2], en 1748. Elle a été écrite par Patrick Murdoch, un ami de Maclaurin. Dans les dictionnaires biographiques comme *Dictionnary of National Biography*[3] ou encore le *Biographical Dictionary of Eminent Scotsmen*[4] se trouvent aussi des notices dont la plupart reprennent les écrits de Murdoch. Au début du siècle dernier, Charles Tweedie[5] a écrit une série d'articles dans lequel il rend compte à la fois de la vie de Maclaurin et d'une partie de ses œuvres. Comme il est de coutume lors de dates importantes symboliques telles que l'anniversaire de la mort ou de la naissance d'un savant ou un anniversaire de parution

---

[1] Wood (2002).
[2] Maclaurin (1748a), pp. i-xx.
[3] *DNB* (1893), vol. 35, pp. 196-8
[4] Biographical Dictionary of Eminent Scotsmen, vol. 3, pp. 64-9
[5] Tweedie (1915), (1917) et (1919)

d'un ouvrage, Herbert Turnbull[6], pour fêter l'anniversaire de la mort de Maclaurin, écrit en 1951, un essai biographique de Maclaurin dans lequel rien vraiment de nouveau n'apparaît. Dans le *Dictionnary of Scientific Biography*, se trouve une notice relativement conséquente[7]. Néanmoins, il faut attendre 1989 avec la thèse de philosophie non publiée d'Erik Sageng[8] pour avoir un travail universitaire sur la vie de Maclaurin. Mais, si la partie biographie est fiable, complète et nouvelle avec l'utilisation inédite de manuscrits de Maclaurin, l'examen des œuvres de Maclaurin est lacunaire. En effet, l'objet de ce travail était de présenter, en plus de la biographie de Maclaurin, le regard philosophique que ce dernier porte sur les sciences en général et plus particulièrement sur les mathématiques. Ainsi, les fondements du calcul des fluxions dans le *Traité des Fluxions* sont analysés avec beaucoup d'attention. Le développement de la méthode des fluxions dans la Grande-Bretagne du début du 18ème siècle est aussi donné[9]. En revanche, aucun examen ne concerne les ouvrages de géométrie et même d'algèbre de Maclaurin. L'œuvre philosophique de Maclaurin, *The Account of Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries*[10], eut droit à une étude de la part de Robert Hurlbutt[11], en 1965. De plus, *The Account…* est cité dans de nombreux ouvrages traitant du *Scottish Enlightenment*. Auprès des philosophes du 18ème siècle écossais, cet ouvrage semble avoir eu une dimension importante. Bien entendu, Erik Sageng s'est beaucoup appuyé sur cet ouvrage pour donner la philosophie des sciences de Maclaurin. Ainsi, dans la littérature sur Maclaurin, nous ne trouvons pas une étude biographique dans laquelle toutes les œuvres scientifiques de Maclaurin soient prises en compte.

[6] Turnbull (1947) et (1951)
[7] Scott (1973)
[8] Sageng (1989)
[9] Cette étude n'est pas de la valeur de celle de Niccolo Guicciardini dans son ouvrage de 1989.
[10] Maclaurin (1748b).
[11] Hulrbutt (1965), pp. 40-2, 141-5.

Dans les années 1990, Judith Grabiner[12] a ouvert la voie de nouvelles recherches sur la vie de Maclaurin. En effet, elle s'est intéressée à tout le côté de la vie sociale et politique de Maclaurin et elle a permis de connaître encore plus l'implication importante dans le développement de la vie intellectuelle de l'Écosse. Elle s'est aussi penchée sur le statut des mathématiques chez Maclaurin. Son ambition n'est pas de présenter une biographie complète de Maclaurin mais de pointer quelques traits particuliers de Maclaurin qui font de cet homme un objet intéressant d'étude. Concernant les œuvres de Maclaurin, il existe quelques articles d'historiens des sciences depuis le début des années 80 rendant compte des aspects particuliers de la production scientifique de notre écossais. Les études portent pour la plupart sur ce qui est considéré comme son ouvrage majeur et comme une des plus belles œuvres de mathématiques du 18ème siècle, le *Treatise of Fluxions*[13], en particulier sur les fondements qu'il donne à cette méthode[14]. Le *Treatise of Algebra*[15] a eu un traitement de choix (qu'il partage avec le *Treatise of Fluxions*) dans l'ouvrage de Pycior[16]. En revanche, les ouvrages de géométrie de notre auteur n'ont pas reçu une étude suffisante. Si l'on excepte l'article de Tweedie[17], de 1916, il n'existe pas, à notre connaissance, d'articles de fond à la fois sur le *Geometria Organica* et sur le *De Linearum Geometricarum Proprietatibus Generalibus Tractatus*. L'œuvre géométrique de Maclaurin semble aujourd'hui trouver, au moins en France[18], un regain d'intérêt.

Il nous est donc apparu qu'il n'existait pas de biographie intellectuelle du mathématicien Écossais où tous ses ouvrages soient pris en compte. Par exemple, ses

---

[12] Voir en particulier, Grabiner (1996a), Grabiner (1997), Grabiner (1998), Grabiner (2002) et Grabiner (2004).
[13] Maclaurin (1742).
[14] Guicciardini (1984), et (1989), en particulier pp. 47-51 et pp. 69-73. Panza (1984), pp. 195-240. Sageng (1989), pp. 236-352. Jesseph (1992), pp. 231-295.
[15] Maclaurin (1748a).
[16] Pycior (1997), pp. 260-76.
[17] Qui n'est qu'une exposition des résultats contenus dans le *Geometria* auxquels il ajoute pour la plupart des démonstrations propres à lui.
[18] Des études sont en cours sur les courbes chez Maclaurin, par Erwan Penchèvre. Sébastien Maronne s'est penché sur le début du *De Linearum*.

productions géométriques comme le *Geometria Organica* ou le *De linearum* n'ont pas été étudiées avec comme objectif de les situer dans la vie intellectuelle et sociale de notre homme. Or, cette contextualisation permet d'orienter de façons différentes certaines positions tenues par des historiens et elle permet de lire différemment la production ultérieure de Maclaurin. C'est pourquoi nous avons décidé d'entreprendre notre travail.

Nos recherches sur Maclaurin ont été de plusieurs types. Pour écrire une biographie, même intellectuelle, il est vain de se contenter des seuls ouvrages imprimés de notre auteur, c'est pourquoi nous avons organisé plusieurs voyages d'études dans les différents lieux de dépôt des archives concernant Maclaurin. Par conséquent, nous avons sondé les archives de l'université d'Aberdeen, celle de Glasgow et celle d'Édimbourg. De plus, nous sommes allés aux archives nationales d'Écosse dans laquelle nous avons exhumé plusieurs lettres inédites de Maclaurin. Les archives de la mairie d'Édimbourg, ainsi que la Bibliothèque Nationale d'Écosse ont aussi été visitées. Des différentes recherches, en archives mais aussi sur les ouvrages imprimés, il nous est apparu essentiel de ne pas différencier la vie sociale, intellectuelle et politique de notre homme. Les activités sont nombreuses et de différents ordres, mais nous montrerons qu'elles présentent des cohérences que nous préciserons. En revanche, ses positions changent avec les différents moments de la vie et nous nous attacherons à étudier ces évolutions. Un exemple de cette évolution chez Maclaurin peut être sa position envers le calcul leibnizien des infinitésimaux. Jeune, Maclaurin est enthousiaste envers la méthode émise par Leibniz et ses défenseurs. Mais, en vieillissant, il change d'avis et devient un fervent adversaire de ces *fictions utiles*[19].

Partant de cette double préoccupation, à la fois étudier les cohérences et analyser

---

[19] « Amongst other reasons there is one that in my writing in younger years I have not perhaps come up that accuracy which I may seem to require here. When I was very young I was an admirer too of infinites ; and it was Fontenelle's piece that gave me a disgust of them at least confirmed it, together with reading some of the Antients more carefully than I had done in my younger years » in Mills (1982), p. 251.

les évolutions, nous montrons que l'intérêt de Maclaurin pour les mathématiques change avec l'âge. Pour cela, nous avons pris les années d'écriture des ouvrages et non les années d'édition, car une partie de sa production a été publiée après sa mort. Notre travail montre que ces différents stades d'intérêt des parties des mathématiques correspondent à des implications différentes dans la vie sociale et politique de l'Écosse. Notre étude s'organise donc à partir de cette correspondance entre les stades mathématiques et son niveau d'implication dans la vie écossaise quelle qu'elle soit.

La première période est celle de l'étude de la géométrie avec la production de plusieurs articles et d'ouvrages. Cette période couvre la jeunesse de Maclaurin, entre son arrivée à l'université de Glasgow à l'âge de 11 ans, en 1709, jusqu'à son retour de son Tour de France et son arrivée à Édimbourg, en 1725. Pendant cette période, Maclaurin publie le *Geometria Organica*, plusieurs articles de géométrie et reçoit le prix de 1724 de l'Académie Royale des Sciences de Paris.

La deuxième période est consacrée essentiellement à l'algèbre. C'est dans cette période que Maclaurin écrit ce qui sera le futur *Treatise of Algebra*, qu'il publie plusieurs articles d'algèbre et qu'il est confronté à plusieurs polémiques dont l'une concerne un problème d'algèbre. Sa notoriété, qui naît dans la période précédente avec le gain du prix de l'Académie royale des Sciences de Paris[20] et la parution du *Geometria Organica* se développe durant cette période. La demande de l'écriture du *The Account* en est un bon exemple. Cette période se termine avec le mariage de Maclaurin en 1733.

La dernière période est celle d'une synthèse mathématique où les compétences en géométrie et en algèbre se mélangent pour fournir son œuvre magistrale sur la méthode des fluxions. Cette période est aussi la période de l'apogée de Maclaurin, sa renommée est aussi importante en Grande-Bretagne que sur le continent. Ses activités sociales et

---

[20] Maclaurin (1724).

politiques sont très importantes. Il devient un homme incontournable dès qu'il s'agit de sciences et plus particulièrement de mathématiques. Nous donnerons de nombreux exemples. Mais cette période si intense se termine brutalement avec la mort de l'homme relativement jeune, à 48 ans.

Son attachement aux mathématiques et la façon de les utiliser dans d'autres domaines des sciences et en métaphysique est une des particularités de Maclaurin. Au fil de son évolution, le rôle prédominant des mathématiques sur les autres sciences et le fait que Maclaurin veuille toujours utiliser les mathématiques pour résoudre des problèmes nous a poussé à choisir le sous-titre de notre travail, c'est-à-dire comme l'indique le Petit Robert, Maclaurin est bien une personne qui « s'attache avec énergie et de manière durable à une manière d'agir, à une idée »[21].

Notre travail peut aussi être compris comme un historique de la lecture de l'œuvre de Newton par Maclaurin. Dans la première période, celle de la jeunesse, Maclaurin considère Newton comme le maître suprême et il intègre l'œuvre du maître en tant que fervent et excellent disciple. La seconde période est celle où Maclaurin prend appui sur les écrits de Newton, comme dans la première période, pour devenir un commentateur éclairé d'une partie des œuvres de Newton. Enfin, la dernière période est la période de la maturité où, même si Newton est omniprésent, si Maclaurin travaille encore comme un défenseur de la pensée newtonienne, nous pouvons déclarer que la pensée de Maclaurin est autonome par rapport à celle de Newton.

Nous avertissons le lecteur que par un souci de clarté et de cohérence, nous avons privilégié les citations dans notre texte en langue française lorsqu'elles étaient correctes. Lorsqu'il était impossible d'avoir accès à une version française, nous avons décidé de mettre la citation en latin ou en anglais sous forme de note de bas de page afin d'appuyer

[21] Définition d'obstiné dans le Nouveau Petit Robert (1993), p. 1703.

nos commentaires et interprétations. Maclaurin est considéré par certains savants français de l'époque comme un savant de grande qualité et dont les œuvres ont une importance pour l'avancée des sciences. L'écho de Maclaurin sur le continent est non négligeable. C'est dans cette optique qu'une partie des ouvrages de Maclaurin est traduite en français. Ainsi, Esprit Pézenas entreprend la traduction du *Traité des Fluxions* qui paraît en 1749. Cette même année, une traduction de *The Account* est écrite par Lavirotte. Une traduction (mauvaise) du *Traité d'Algèbre* paraîtra en 1753. Des ouvrages majeurs de Maclaurin, il n'y a que le *Geometria Organica* qui semble avoir été oublié[22]. Par conséquent, lorsque nous citerons des extraits du *Traité des Fluxions* et du *The Account*, nous prendrons la traduction française, en revanche, nous avons choisi de ne pas utiliser la traduction française du *Traité d'Algèbre* qui est très éloignée, à la fois dans l'esprit et dans le contenu, de l'œuvre originale.

[22] Peut-être parce qu'il est en latin et donc plus facilement lisible, à l'époque, par les savants français.

I. La jeunesse de Maclaurin

A. Le *De Gravitate* : son premier essai.

1. Les études de Maclaurin qui ont abouti à cet écrit.

Colin Maclaurin naît à Kilmodan dans l'Argyllshire en février 1698 dans une famille de pasteurs de l'Église d'Écosse. Son père meurt quelques semaines après sa naissance. Il devient orphelin de mère en 1707 et est alors recueilli par son oncle Daniel pasteur de l'Église d'Écosse dans la paroisse de Kilfinan. Maclaurin rentre à l'université de Glasgow en 1709 à l'âge de 11 ans.

L'université de Glasgow est une des plus vieilles universités écossaises. Elle a été fondée en 1451, et regroupe au début du 18ème siècle quelques 400 étudiants[23]. Contrairement aux universités anglaises, les universités écossaises se sont éloignées de l'étude classique et sont très dynamiques. Notre ambition n'est pas de donner une histoire exhaustive des universités écossaises[24], mais nous pouvons simplement retenir qu'à partir des années 1690 et suite à « *The Act of Union* » de 1707 qui regroupe sous une même

[23] Cant, Ronald G. (1982), Origins in the enlightenment in Scotland : the Universities, in Campbell, Roy, Skinner, Andrew (éd.) (1982), *The Origins and Nature of the Scottish Enlightenment*, Edinburgh, John Donald Publishers, pp. 57.

[24] Pour avoir une vision relativement précise des universités écossaises, cf. Cant, Ronald G. (1982), Origins in the enlightenment in Scotland : the Universities, in Campbell, Roy, Skinner, Andrew (éd.) (1982), *The Origins and Nature of the Scottish Enlightenment*, Edinburgh, John Donald Publishers, p. 42-64; Cant, Ronald G. (1967), The Scottish Universities and Scottish Society in the Eighteenth century, *Studies on Voltaire and the Eighteenth Century*, 58, pp. 1953-1966 ; Emerson, Roger (1977), Scottish universities in the eighteenth century, 1690-1800, *Studies on Voltaire and the Eighteenth Century*, 167, pp. 453-474 ; Shepherd, Christine (1982), Newtonianism in Scottish Universities in seventeenth century, *in* Campbell, Roy, Skinner, Andrew (1982), *The Origins and Nature of the Scottish Enlightenment*, Edinburgh, John Donald Publishers, pp. 65-85 ; Wood, Paul (1994), Science, the Universities and the public sphere in eighteenth-century Scotland, *History of Universities*, 13, pp. 99-135.

couronne et un même parlement l'Angleterre et l'Écosse, ces universités écossaises attirent bon nombre d'étudiants anglais qui veulent avoir un enseignement renouvelé. L'attrait pour ces universités provient d'une profonde réforme initiée par les professeurs de ces institutions et leurs protecteurs. Les programmes d'études sont transformés, de nouvelles chaires sont créées, de nouveaux cours sont introduits. Par exemple, à Glasgow, un cours d'histoire civile et religieuse est créé en 1692 et un cours sur les antiquités romaines en 1707. Mais la réforme globale n'interviendra dans cette université qu'à partir de 1726[25]. Nous pouvons simplement ajouter que, d'après Roger Emerson, à partir de 1710, la pensée scientifique newtonnienne commence à prévaloir dans les collèges. L'essor des sciences empiriques en Écosse sera assuré avec l'emploi de mathématiciens et de savants talentueux dans les universités d'Édimbourg, de St Andrews, de Glasgow et au Marishal College dès 1720[26].

Robert Simson[27] (1687-1768) est un parfait exemple de ces talentueux mathématiciens enseignant à Glasgow avant 1720. Élu à la chaire de mathématiques à l'université de Glasgow en 1711, il devient donc le professeur de mathématiques de Maclaurin. Avant Simson, la chaire a été occupée par Robert Sinclair mais, d'après Sneddon, il n'était pas très assidu et a été démis de ses fonctions en 1710. Ainsi, on peut affirmer que c'est avec Robert Simson que Maclaurin découvrit les mathématiques. Le grand intérêt de Simson pour les mathématiques grecques, sa connaissance de la théorie des fluxions de Newton et de la géométrie cartésienne se retrouvent dans son enseignement. Il enseigne aussi l'algèbre, les logarithmes, l'optique géométrique et la mécanique[28]. En revanche, il est très difficile de savoir dans quelle mesure les

---

[25] Emerson (1977).
[26] « by 1710 a Newtonian scientific outlook had come to prevail in the colleges. The future of empirical science in Scotland was assured by the appointments of talented mathematicians and scientists at Edinburgh, St Andrews, Glasgow and Marishal college prior 1720 » in Emerson (1977), p. 467.
[27] Sneddon (1975).
[28] Sneddon (1975), p. 446.

mathématiques newtoniennes sont incorporées dans le corpus de ses cours, et donc de savoir si c'est lors des cours professés par Simson ou à travers des lectures personnelles et des discussions avec ce dernier que Maclaurin a eu connaissance des écrits de Newton en particulier. Pendant le séjour de Maclaurin à l'université de Glasgow, Simson et Maclaurin vont devenir des amis très proches et ils vont avoir une relation épistolaire très suivie[29]. Comme nous le verrons par la suite, Simson sera souvent un premier correcteur des écrits de Maclaurin.

En juin 1713, Maclaurin défend publiquement une dissertation pour obtenir le grade de *Master of Arts* sous le titre *De Gravitate, aliisque viribus Naturalibus, ...*[30]. Cette dernière est dédicacée à son oncle Daniel qui l'a recueilli à la mort de sa mère, en des termes affectueux : Au révérend Maître Daniel M^c^Laurin, le plus fidèle Pasteur de l'église de Kilfinan, le plus estimé oncle paternel, pour son amour filial véritable et son attention en tant que tuteur toujours honoré, cette dissertation philosophique, le premier fruit de ces études, D. D. C. q. Colin Maclaurin, l'auteur[31].

Dans une lettre[32] adressée à Daniel Maclaurin, Colin Campbell[33] donne un résumé du contenu de la dissertation de Maclaurin. Il insiste tout d'abord sur le fait que, pour lui, cette thèse est une sorte de référence de ce qui est, ou doit être le niveau de l'enseignement dans les universités écossaises, en soulignant que le but de la science est d'ordre religieux[34]. Ensuite, il commente le travail de Maclaurin qui impressionne Campbell

---

[29] Tweddle (1991)
[30] Maclaurin (1713)
[31] « *Viro Reverendo*, Mro DANIELI M^c^LAURIN, Ecclesiae ad Cellam Finani Pastori fidelissimo, *Patruo suo spectatissimo*, Ob affectum curamque plane parentalem, Patris charissimi loco semper honorando, *Dissertationem hancce Philosophicam, studiorum suorum primitas*, In animi grati & perpetuum addicti tesseram, D. D. C. q. Colinus M^c^Laurin, *Auctor*. *in* Maclaurin (1713), non paginé
[32] Lettre de Colin Campbell à Daniel Maclaurin non datée écrite avant le 12 septembre 1714 (date de la réponse), MS 3099.15 Bibliothèque de l'université d'Edimbourg
[33] Colin Campbell (1644-1726), pasteur de l'église d'Ecosse dans l'Argyll, avait une relation épistolaire avec de nombreux savants britanniques. Dans la bibliothèque universitaire d'Edimbourg subsiste encore un fond sd'archives non cataloguées dans lequel se trouve la lettre qui suit.
[34] « I cannot express how much I am rejoyced to find our Youth and Instructors of youth in our nation, apply themselves to the true way of Philosophizing in the Physicks, depending on Mathematicall principles, which

surtout à cause de l'âge précoce de l'écriture. En effet, Campbell est étonné de voir un jeune garçon de 15 ans connaître et manipuler les vrais principes (ceux de Newton) de la physique dans les moindres parties. Il espère aussi que Maclaurin continuera à produire des travaux aussi bons[35]. Campbell indique que cette thèse est inspirée de deux ouvrages de Newton, les *Principia* et l'*Optique*, ainsi que d'un ouvrage de David Gregory, l'*Astronomie Physique et Géométrique*[36].

Lors de ses études, Maclaurin a eu connaissance des ouvrages cités ci-dessus car, comme nous le verrons par la suite, il utilise des résultats contenus dans ces écrits. Il est important de noter qu'il a eu accès pendant cette période à des ouvrages récents. L'*Optique* de Newton est publié à Londres en 1704, le *Astronomia Physica et Geometricae Elementa* de Gregory est publié à Oxford en 1702. Ce dernier est un commentaire des résultats de Newton. Dans le *De Gravitate*, Maclaurin cite aussi les expériences de Huygens, de Torricelli, ainsi que la théorie des tourbillons de Descartes.

Pour résumer nos propos, Maclaurin a reçu lors de son séjour à l'université de Glasgow une solide formation venant à la fois de l'étude des auteurs de l'Antiquité tels Euclide, Pappus ou Archimède, mais aussi des ouvrages d'auteurs du 17ème siècle comme Newton, Descartes ou Gregory. Nous allons voir comment Maclaurin utilise une partie de ces références dans sa réflexion d'ordre théologique.

with a few Metaphysicall axiomes, next to Revelation, afford the greatest certainty to our Understanding » in Lettre de Campbell à Daniel Maclaurin, p. 1

[35] « and particularly that your Nephew (...) in the age of 15, should be so well versed in the true Principles of the Physicks, which yet is but begining to breath amongst us in these remote corners : As it is surprising in itself, so it is wonderfully acceptable to me, praying and hoping this early blossome in short time produce pleasant fruit. » in Lettre de Campbell à Daniel Maclaurin, p. 1

[36] « from the Propositions demonstrated (...) by the famous Sir Isaac Newtone in his Philosof. Naturalis Principia Mathematica, and his Optiks and from him illustrated by our worthy countryman D. Gregory (...) in his Astronomia physica et Geometrica » in Lettre de Campbell à Daniel Maclaurin, p. 1

2. La gravitation universelle de Newton pour expliquer la bienveillance de Dieu.

La lettre de Campbell à Daniel Maclaurin, déjà citée, nous indique comment, dans la thèse de Colin Maclaurin, ce dernier tente de concilier la théorie newtonienne de la gravitation universelle avec sa vision de Dieu. En d'autres termes, il essaie de montrer l'existence d'un être supérieur, protecteur de tous les êtres vivants en utilisant la théorie gravitationnelle. Dans la réponse à la lettre de Campbell précédemment citée, Maclaurin annonce ses différentes ambitions qui ont prévalu dans le *De Gravitate*. Il veut établir l'universalité de la Gravité et la nécessité de référer ceci à une première cause. Cette recherche est le but premier de la philosophie naturelle. L'autre objectif de sa thèse est de donner, par le biais de la gravité, une démonstration mathématique de l'existence de Dieu et de sa providence, et des bienfaits qu'il procure aux habitants de la Terre[37].

À l'étude de cet opuscule, nous joindrons le commentaire d'un texte manuscrit disponible dans le fond Campbell à l'université d'Édimbourg, *De Viribus Mentium Bonipetis*[38], écrit très certainement entre juin 1713, et la lettre de Maclaurin à Campbell du 12 septembre 1714[39]. Dans ce court écrit, il propose de montrer comment l'esprit humain est attiré vers la bonté en faisant une analogie entre ce problème et un problème de mécanique céleste. Pour ce faire, il utilise les mathématiques et, en particulier, la méthode des fluxions. Nous y reviendrons dans le détail plus loin.

Maclaurin restitue le débat sur la gravitation dans son contexte. Le phénomène

---

[37] « That which I had most in my view throughout all the discourse was the establishing the universality of the law of gravity & the necessity of referring it to a first cause the first because it is the most pleasant entertaining truth in Natural Philosophy the other because it is of the greatest importance & use seeing it furnishes us with a most clear & mathematical proof of the existence of a god and his providence that he not only made the world but that the rules and governs it concerning himself in the affairs of it being present every where in working that w[h] is best for the inhabitants of it. » in Mills (1982) pp.159-161.

[38] *De Viribus Mentium Bonipetis*, Bibliothèque de l'université d'Édimbourg, Coll-38.

[39] Car dans cette lettre, il fait référence à ce manuscrit.

d'attraction et de gravité a été expliqué par de nombreux savants, en particulier Descartes, Newton... Au début de sa thèse, Maclaurin s'applique à donner les grandes lignes de la théorie de Descartes sur les tourbillons. Puis, il donne trois raisons pour lesquelles il est impossible d'envisager cette théorie comme possible. Celle qui semble avoir plus de poids sous la plume de Maclaurin est celle qui consiste à dire que la tentative d'explication de Descartes est contraire à l'expérience. Plus précisément, des phénomènes observables contredisent la théorie cartésienne. Il explique qu'avec cette théorie, le corps céleste doit être dans un plan parallèle au plan de l'équateur. Donc il ne pourra être attiré vers le centre de la Terre, ce qui, pour Maclaurin, est montré par l'expérience. Ainsi, l'argument cartésien n'a plus de raison d'être[40]. En outre, il ne donne aucune indication sur les expériences qui contredisent la théorie des tourbillons de Descartes. Maclaurin réfute aussi, mais de façon plus rapide et sans entrer dans les détails, d'autres interprétations possibles des phénomènes pouvant être la cause de la gravité, la pression de l'air et le magnétisme terrestre.

Après s'être occupé de ces théories qu'il considère comme fallacieuses, il annonce clairement que la gravité n'est due à aucune impulsion corporelle[41]. Il annonce, de plus, qu'en faisant abstraction de la résistance de l'air, la force de gravité (*vires impressas*) est entièrement proportionnelle à la quantité de matière des corps. À vitesses égales, les moments des mouvements sont comme les quantités de matières, or comme les corps qui sont situés à la même distance du centre de la Terre sont attirés vers ce centre à la même vitesse, alors la force imprimée est comme la quantité de matière. De plus, la forme, la texture, la nature de l'objet n'interviennent pas dans la quantité de matière et donc dans la

[40] « Denique, cum haec materia suos gyros necessario perficiat in circulis Aequatori parallelis, necesse erit omnia gravia in istorum circulorum planis descendere, & proinde in lineis non versus terrae centrum tendentibus, sed ejus axi perpendicularibus; omnino contra experientiam. » in Maclaurin (1713), p. 2

[41] « patet igitur gravitatem a nullo impulsu corporeo provenire posse. » in Maclaurin (1713), p. 3.

force de gravité[42].

Si la gravité ne provient pas d'une impulsion d'un corps, d'où provient-elle ? Pour Maclaurin, l'une des réponses est que l'auteur de la gravité est Dieu, le maître de la Terre et le protecteur des hommes[43].

Tout d'abord, cette force n'étant pas due à une impulsion, ce qui a été signalé précédemment, elle est d'une autre nature. Elle est la volonté d'une cause efficiente (*causa efficax*), intelligente et extérieure à tout corps qui s'exerce uniformément en accord avec une loi générale. Ainsi, elle est la volonté de quelque chose qui n'est pas un corps, douée de raison, et qui s'exerce de façon uniforme et universelle. Grâce à la force de gravitation qui provient de cette loi générale, la Terre ne se désagrège pas. Sous l'effet de la force centrifuge, tout ce qui est sur la Terre ou ce qui forme la Terre elle-même serait éjecté de la Terre. Par conséquent, tout ce qui est sur Terre serait envoyé dans l'univers. Et, à terme, la Terre n'existerait plus. Par l'action de la gravité, les montagnes, les villes, les mers, les hommes et autres animaux sont empêchés d'être dispersés dans l'univers et d'être voués à la destruction. De plus, de la gravité dépend la (sur)vie des hommes et des êtres vivants sur la Terre. Grâce à cette force, l'homme peut à la fois être protégé des effets de la force centrifuge qui le ferait aller dans le ciel et pourvoir à ses besoins nutritifs[44].

Le second argument est, en plus de faire le bien de l'homme, que c'est grâce à la gravité que tout l'univers est en équilibre. L'auteur de la gravité a provoqué le mouvement des planètes et les force à conserver leur mouvement. En effet, toujours à cause de la force

---

[42] « In primis, quandoquidem, ubi velocitates sunt aequales, momenta motus sunt semper ut materiae quantitates; cumque gravia, in eadem a terrae centro distantia, pari velocitate (abstrahendo ab areis resistentia) versus eam tendant ; patet, vires impressas esse directe ut materiae quantitates in ipsis corporibus, nulla figurae, texturae, aut molis habita ratione. » in Maclaurin (1713), p. 3.

[43] « ita ut jure meritissimo gravitatis Auctor agnoscendus sit terrae dominus & hominum conservator » In Maclaurin (1713), p. 4.

[44] « qualis autem sit haec causa intelligens, facile patebit cuivis consideranti, hac ipsa gravitate totam orbis terrae compagem conservari ac firmari ; quae alias impetu centrifugo disrupta cito dilaberetur. Gravitas impedit, quo minus montes, maria, urbes, homines, caeteraque animalia, a tellure excussa, per vasta coelorum spatia longe dissipentur. A gravitate pendet tum hominum, tum reliquorum animantium vita & nutritio. » In Maclaurin (1713), p. 4.

centrifuge, lors de leurs mouvements circulaires autour du Soleil, les planètes s'éloigneraient du Soleil et iraient se perdre dans l'univers. De plus, par cet éloignement, les planètes ne recevraient plus les bienfaits qu'elles ont en étant proches du Soleil. Tout cela est valable pour toutes les planètes pour conférer à l'argument une dimension plus importante et universelle, mais cet argument est donné surtout pour la Terre. En effet, grâce au Soleil, sur la Terre, nous ne sommes pas dans les ténèbres et nous recevons de la chaleur, les végétaux et les animaux sont aussi préservés[45]. Ainsi, s'il n'y avait pas la gravitation pour forcer la Terre à rester à la bonne distance, ni trop loin, ni trop près, du Soleil, l'humanité toute entière serait vouée à la mort. La gravitation universelle participe à cet équilibre de l'univers tout entier qui est, selon Maclaurin, une des manifestations de Dieu.

Ainsi, le seul être capable de faire tout cela, par amour pour les hommes, est Dieu. De plus, étant donné que c'est Dieu qui a créé le Ciel et la Terre, la gravité doit aussi expliquer les mouvements célestes. Ainsi, plus on pourra montrer que la gravité est responsable de phénomènes très divers, plus il sera évident que c'est Dieu qui agit. Dans la thèse, Maclaurin utilise une méthode de démonstration qui est très proche de celle qu'utilise Newton. Comme nous le verrons par la suite, Maclaurin part d'un ensemble d'hypothèses, ou de thèses qu'il considère comme intangibles. Par des arguments d'ordres mathématique, mécanique ou même métaphysique, il arrive à des conséquences qu'il voulait montrer. Ces conséquences sont présentes, non pas pour simplement montrer quelque chose de nouveau, mais pour confirmer les hypothèses utilisées au départ de sa démonstration et pour leur donner plus de poids. Il ne tombe pourtant pas dans un

[45] « atque hinc multum accedit magnificae ideae *thesi* 6*ta* stabilitae Auctoris gravitatis, quem jam constat, non solum totius terrae, sed etiam coeli dominum, omniumque ejus incolarum Conservatorem esse ; qui omnium corporum coelestium compagem conservat ; cujus pollenti dextra Planetae, in perpetuos gyros circa commune centrale corpus acti, prohibentur, quo minus impetu centrifugo per vastum inane abrepti, omni, quod a *Sole* jam accipiunt, beneficio privati, perpetuo rigeant frigore, & densissimis tenebris involvantur, atque alia amittant omnia quae ad vegetantium vel animantium conservationem pertinent. » in Maclaurin (1713), p. 7.

processus circulaire car il ne démontre pas ces hypothèses. Donnons un exemple. Parce qu'elle vient de Dieu, la gravité doit être universelle. Elle est universelle car elle permet d'expliquer en une seule théorie plusieurs phénomènes qui peuvent être considérés comme disparates. Par conséquent, aucun corps ne doit y échapper. Nous venons de voir que tous les corps célestes sont soumis à cette force. Ainsi, il s'évertue à montrer que l'attraction de la Terre sur la Lune est le même phénomène que la gravité des corps terrestres sur la Terre. Pour démontrer que l'attraction que subit la Lune par la Terre est semblable à la gravité que subissent tous les corps pesant à la surface de la Terre, il utilise une justification dans laquelle intervient un argument d'ordre mathématique. Voici les grandes lignes de son raisonnement :

L'expérience du pendule nous indique que les corps sont attirés de $15\frac{1}{12}$ pieds parisiens en une seconde. De plus, comme la distance parcourue est proportionnelle au carré des temps, en une minute, le corps parcourt une distance de $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$ pieds. En étudiant la périodicité et le rayon de l'orbite de la Lune autour de la Terre, Maclaurin déclare qu'en une minute, la Lune décrit un arc dont l'arcsinus est de $15\frac{1}{12}$ pieds. Ainsi, la force accélératrice de la Lune vers la Terre est à la force accélératrice d'un corps terrestre comme $15\frac{1}{12}$ à $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$, en simplifiant ceci donne comme 1 à 60^2. Or, la distance moyenne de la Lune au centre de la Terre est 60 fois la distance de la surface de la Terre en son centre. Ainsi, le rapport 1 à 60^2 est bien l'inverse du carré de la raison ci-dessus. Par conséquent, Maclaurin conclut que les corps terrestres et la Lune sont attirés vers le centre de la Terre par une seule et même force[46]. Il signale aussi que cela conforte l'idée

[46] « Et primo, Lunae vim centripetam (qua eam versus Terrae centrum urgeri ex modo dictis patet) eandem esse cum gravitate nostra terrestri ita evincitur. Gravitas (secundum accuratissime instituta pendulorum

que cette gravitation est d'origine divine, ce qui était l'hypothèse de départ. Ce raisonnement n'est pas l'apanage de Maclaurin mais celui de Newton qui est utilisé dans la proposition 4 du livre 3 des *Principia*[47]. Maclaurin n'apporte rien de nouveau dans cette argumentation. En revanche, nous pouvons simplement dire qu'il a très bien compris en quoi cette proposition était importante dans la procédure de justification de l'universalité de la gravitation. Entre l'observation et la théorie existe souvent un décalage. C'est le cas quand on observe le mouvement de la Lune autour de la Terre. Selon Maclaurin, les quelques irrégularités dans le mouvement de la Lune constatées par les observations (mais pas constatées en si grande quantité) peuvent être déduites d'une conséquence nécessaire a priori de la loi de gravitation considérée comme universelle ; et alors être considérées comme une importante confirmation de l'universalité et la divinité de la gravitation[48]. Dans le scholie général dans les *Principia*, Newton, même s'il considérait que « cet admirable arrangement du Soleil, des planètes & et des comètes, ne peut être que l'ouvrage d'un être tout puissant & intelligent (...) [qui] s'appelle (...) *le seigneur universel* »[49], refuse d'annoncer que la gravité est un acte de cet être tout-puissant et de donner un sens

---

experimenta) corpora terrestria depellit, uno temporis minuto secundo, per pedes Parisienses $15\frac{1}{12}$; & proinde (cum spatia gravibus percursa sint ut quadrata temporum) minuto primo per pedes $60\times60\times15\frac{1}{12}$: quo eodem tempore Luna deprehenditur a tangente, versus Terram deflecti per longitudinem pedum $15\frac{1}{12}$: tantum enim esse arcus eo tempore descripti sinum versum, temporis periodici & orbitae amplitudinis collatio satis ostendit : vis igitur Lunae acceleratrix versus Terrae centrum, est ad vim corporum terrestrium acceleratricem versus idem, ut $15\frac{1}{12}$ ad $60\times60\times15\frac{1}{12}$, sive ut unum ad 60×60. Atque cum Lunae distantia mediocris a Terrae centro sit corporum terrestrium circa ejus superficiem versantium distantiae ab eodem sexagecupla ; patet, corpora terrestria, atque Lunam, ad Terrae centrum urgeri viribus, quae sunt quadratis distantiarum ab eodem reciproce proportionales. Cum porro haec ipsa sit ratio virium Lunae centripetarum, in diversis partibus ejus orbitae, utpote Ellipticae, circa Terram in foco positam descriptae, patet corpora terrestria & Lunam, eadem vi, secundum dicta legem in diversis distantiis variata, ad Terrae centrum urgeri » In Maclaurin, (1713), p. 5.

[47] Newton, (1754), tome 2, pp. 13-4.

[48] « Uno verbo, quaecunque irregularitates in *Lunae* motu observationibus deprehenduntur, (deprehenduntur autem quamplurimae) illae omnes necessaria consequentia a priori deducuntur ex supposita universali quam diximus gravitationis lege ; quae igitur plurimum ab a confirmari existimanda est » in Maclaurin, (1713), p. 8

[49] Newton (1754), tome 2, p. 175.

métaphysique ou théologique à cela « car tout ce qui ne se déduit point des phénomènes est une hypothèse : & les hypothèses, soit métaphysiques, soit physiques, soit mécaniques, soit celles des qualités obscures, ne doivent pas être reçues dans la philosophie expérimentale »[50]. Ce scholie général n'apparaît que dans la deuxième édition et nous ne savons pas à quelle version des *Principia*, Maclaurin avait accès à ce moment-là. Nous savons que la bibliothèque universitaire de Glasgow possède, actuellement, les deux premières éditions de cet ouvrage. La seconde paraît en 1713, année de l'écriture de la thèse de Maclaurin. Si Maclaurin n'avait pas connaissance de la deuxième édition, cela pourrait expliquer ce décalage entre la volonté de Maclaurin de donner une justification divine à la gravitation et la réserve de Newton sur la cause première de la gravitation universelle.

Dans une grande partie de sa thèse, Maclaurin s'occupe d'établir que la justification de nombreux phénomènes est d'ordre physique. Même si l'origine de l'attraction est divine, par cette dernière, divers phénomènes peuvent être aisément justifiés sans pour autant faire intervenir exclusivement Dieu. Par exemple, grâce à l'attraction d'un corps sur un autre, la surface légèrement concave d'un liquide dans un tube ou dans une vasque s'explique. Cela est dû à l'attraction mutuelle des particules du fluide plongé dans le récipient et celles du récipient. Dans une vasque, le fait que les particules du fluide soient plus attirées par les parois de la vasque que par les particules du fluide elles-mêmes donne la forme que l'on peut observer à la surface du liquide[51]. Il annonce qu'à l'instar de toutes les planètes du système solaire, la Terre a une forme sphérique aplatie aux pôles. La rotation autour de l'axe de la planète imprime une force centrifuge qui est compensée par la gravitation universelle. Lors de cette compensation, la planète se déforme. Cet argument

---

[50] Newton (1754), tome 2, p. 179.

[51] « Ex hac etiam materiae minimarum particularum mutua attractione, quam plurima fluidorum phaenomena, alias insolubilia, facile enodari possunt. (...) Hinc etiam sit, quod aquae, aliorumque fluidorum guttulae, cum gravitatis vi cadere deberent, a vitro, ligno, aliisque plerisque corporibus, suspendantur» in Maclaurin (1713), p. 10.

est aussi présent dans les *Principia* de Newton, livre 3, proposition 18 : « les axes des planètes sont plus petits que les rayons de leurs équateurs »[52]. Mais la plus grande partie de la thèse concerne le mouvement des planètes autour du Soleil, de la Lune autour de la Terre comme exemple du mouvement des satellites. Contrairement à Newton qui, dans les *Principia,* utilise des outils mathématiques dans les démonstrations, Maclaurin énonce des principes et des arguments d'ordre physique mais en n'entrant pas dans les détails mathématiques. Tout son argumentaire est d'ordre qualitatif en signalant à divers endroits que les résultats qu'il cite ont déjà été démontrés « mathématiquement ».

Outre les résultats que l'on vient de citer, l'ensemble des arguments dans le *De Gravitate* fait écho aux résultats de Newton que l'on peut trouver dans les *Principia* ou dans d'autres ouvrages de cet auteur. En effet, les propositions sur les lois de Kepler, en particulier le corollaire 6 de la proposition 4 du livre 1 des *Principia*, la proposition 24 de ce même ouvrage sur le flux et reflux des marées, inspirent le discours de Maclaurin sans être explicitement citées. Il cite la loi des sinus qui se trouve aussi dans les *Principia* dans le livre 1 (c'est la proposition 48). D'après Maclaurin, l'élasticité, le fait de flotter, la fermentation, la cristallisation, les précipitations, la solidification des fluides, l'électricité sont tous dus à l'attraction mutuelle mais il ne s'étend pas sur les raisons avec lesquelles on peut les expliquer. Tout ceci est aussi présent dans l'*Optique*[53] de Newton dans la partie *Queries*, dans les questions 21, 28 30 et surtout 31 dans lesquelles on trouve une explication des divers phénomènes cités ci-dessus.

À la question 31 de l'*Optique*, Newton fait une remarque sur la façon d'aborder la philosophie morale en utilisant les sciences et plus particulièrement les mathématiques et les méthodes de l'analyse et de la synthèse. Maclaurin suit ce conseil et, dans son *De Viribus Mentium Bonipetis*, resté à l'état de manuscrit, il s'évertue à donner une

[52] Newton (1754), vol. 2, p. 34.
[53] Newton (1704).

explication physique à l'attirance vers le bien que peut éprouver notre esprit. Ainsi à Colin Campbell, il indique son ambition d'utiliser les mathématiques dans le cadre de la philosophie morale et il demande à Campbell son avis sur ce manuscrit[54].

Dès le début de ce manuscrit de 17 pages, Maclaurin pose que les forces qui poussent notre esprit au bien sont proportionnelles à la quantité de bonté dans ce même bien[55]. Il définit aussi la force accélératrice de la bonté (*vis Bonipeta acceleratrix*). La bonté totale est la somme des bontés instantanées prises en fonction de la durée : si la droite AB représente la durée de la bonté, sur cette droite, on forme l'ordonnée représentant l'intensité instantanée de la bonté, qui est égale en A à AD et à la fin, c'est-à-dire en B, à BC, alors la bonté totale sera égale à l'aire ADCB[56]. (cf. Fig.1)

Fig. 1.[57]

De plus, il considère l'intensité I comme égale à $\frac{\dot{B}}{\dot{t}}$ où B est la bonté et t le temps, les points sur les lettres représentent la fluxion de cette lettre ou de la quantité exprimée par cette lettre. Ainsi I est bien la bonté instantanée. Par conséquent, pour connaître la bonté

[54] « But since I have mentioned the use of mathematics I shall beg your pardon for troubling you with some thoughts I have relating to their use in morality. I have sent them to you under the title of De Viribus Mentium Bonipetis » in Mills (1982), p. 161.
[55] « vires quibus mentes nostrae in diversa bona feruntur, sunt (caeteris paribus) ut Quantitates Bonitatis (?) in istis bonis » in Maclaurin, *De viribus*, p.1
[56] « Repraesentet igr (?) linea recta AB boni durationem, ad cujus singula puncta P erigantur normales PM, qua sint ut boni intersiones (i,e, Bonitates Instantanea) ad finem temporis AP, & si AD sit intensio qua bonum incepit, & BC qua desinit existere, tune bony Totale durationis AB erit ut area ADCB. » In Maclaurin, *De viribus.*, p.1
[57] Cette représentation de la bonté peut faire penser à la représentation géométrique des qualités par Oresme dans son *Tractatus de Configurationibus qualitum et motum*. Voir Barbin (1997), ch. 5, p. 15.

totale (B), il faut trouver la fluente[58] du produit $I\dot{t}$. Par la méthode des minima et des maxima, il déclare trouver l'intensité maximale et minimale. Il imagine différentes équations pour l'intensité et donc pour la bonté totale, B. Par exemple, il considère l'intensité comme une branche d'hyperbole, comme une constante ou encore comme une puissance nième du temps. Pour différentes raisons mathématiques, métaphysiques ou liées à l'expérience, il réfute certaines des propositions imaginées pour l'intensité. Ainsi, l'intensité ne peut être une branche d'hyperbole car cela est contraire à ce que l'on peut observer et au bon sens. En effet, si elle était comme une branche d'hyperbole, c'est-à-dire proportionnelle à $\frac{1}{t}$, elle donnerait une bonté infinie à l'origine et demanderait un temps infini pour s'arrêter complètement[59]. En revanche, si nous considérons l'intensité constante, en utilisant la méthode des fluentes, la bonté totale serait alors égale au produit de cette intensité par la durée totale pendant laquelle la bonté opère. Ainsi, si la durée est infinie, la bonté totale est, elle aussi, infinie. C'est par cela que les hommes dont les misères terrestres sont grandes et nombreuses peuvent atteindre la félicité éternelle[60]. De ce fait, Maclaurin considère que la bonté sur Terre ou dans la vie éternelle est de même nature.

Dans cet écrit, nous pouvons remarquer que Maclaurin connaît et maîtrise les outils mathématiques les plus récents et qu'il est capable de transférer la théorie gravitationnelle vers un sujet qui, de prime abord, est complètement étranger. D'après lui, la philosophie morale, pour reprendre le terme de Newton, est analogue à la mécanique céleste, et donc

---

[58] Comme Maclaurin se situe dans un cadre newtonien, il nous apparaît légitime de n'utiliser que les termes propres à ce corpus.

[59] Maclaurin, *De viribus*, pp. 5-8

[60] «Bonorum igitur virorum de miseriis hujus vitae querelas deberit perimere consideratio incrementi quod exinde intensioni faelecitatis futura aternae accedit, quo (forte) fit ut eorum faelicitas tota simul sumptas major sit quam si ab initio eorum existenciae exordium sumpsisset & nunquam cecidisset homo. Intensionem autem augeri ex eo satis patere videtur quod major sit Gratitudo & quod quamplurimae virtutes exerceantur quibus vix ullus esset locus si omnes homines Innocentes sine ullis malis aut unfortuniis viam agerent.» In Maclaurin, *De viribus*, pp. 4-5

on peut reprendre à la fois les mêmes lois mais aussi les mêmes outils. Nous pouvons ajouter qu'à peu près à la même époque, un ami de Maclaurin rencontré pendant ses études à l'université de Glasgow, Francis Hutcheson, publie deux traités regroupés sous le titre, *Recherche sur l'origine de nos idées de la beauté et de la vertu*[61]. L'un d'eux traite en partie de la manière de calculer la moralité de nos actions. Dans le chapitre « Comment nous calculons la moralité des actions selon le sens que nous en avons », Hutcheson s'évertue à produire à l'aide de quelques axiomes une relation mathématique dans laquelle il est possible de « calculer la moralité de n'importe quelle action avec toutes ses circonstances, que nous jugions de nos actions ou de celles d'autrui »[62]. Le premier point important chez Hutcheson, c'est « la quantité de bien public [d'un agent] qu'il produit, est en raison composée de sa bienveillance et de ses capacités »[63] Si nous notons comme Anne-Dominique Balmès dans sa traduction[64], Rb la résultante en bien, B la bienveillance, C les capacités, A l'amour-propre, Rm la résultante en mal, H la haine et M la moralité, alors le premier axiome se traduit par $M = B \times C$. De plus, « l'intérêt produit par une personne est en raison composée de son amour-propre et de ses capacités ; ou $I = A \times C$. »[65] Il ajoute que « mais, comme les conséquences naturelles de nos actions sont variables, les unes bonnes pour nous et mauvaises pour le public, d'autres mauvaises pour nous et bonnes pour le public, (…) la seule bienveillance n'est pas toujours la source entière des bonnes actions, ni la seule méchanceté celle des mauvaises. (…) Et dans la plupart des actions, on doit regarder l'amour-propre comme une autre puissance, qui tantôt

[61] Hutcheson (1725).
[62] Hutcheson (1725), p. 183.
[63] Hutcheson (1725), p. 183.
[64] Anne-Dominique Balmès, pour sa traduction, a choisi la quatrième édition de l'ouvrage de Hutcheson. Dans cette dernière, les notations mathématiques qui étaient présentes dans les trois premières éditions, ont disparues. Néanmoins, elle a inséré dans les notes les formules mathématiques qui étaient initialement dans les trois premières éditions.
[65] Hutcheson (1725), p. 184.

conspire avec la bienveillance et lui prête assistance (…), tantôt s'y oppose. »[66] S'ensuit une traduction mathématique : « Dans le premier cas, $Rb = B \times C + A \times C$; et par conséquent, $BC = Rb - AC = Rb - I$, et $B = \frac{Rb - I}{C}$. Dans le deuxième cas, $Rb = BC - AC$ et par conséquent, $BC = Rb + AC = Rb + I$, et $B = \frac{Rb + I}{C}$ »[67]. Plus loin, il donne une formule du même type pour calculer ce qu'il appelle le mal moral en introduisant la haine et l'amour-propre comme intervenant dans la résultante au mal[68]. Même si les outils mathématiques utilisés ne sont pas les mêmes, Maclaurin utilise le calcul fluxionnel, Hutcheson les proportions, il nous a semblé intéressant de signaler l'apparente analogie entre ces deux auteurs. Comme le suggère Judith Grabiner[69], Maclaurin aurait pu être inspiré par la lecture de l'ouvrage de John Craige, *Theologiae Christianae Principia Mathematica*[70]. Dans cet ouvrage, l'auteur propose d'utiliser les mathématiques et ses méthodes dans le cas de la théologie. Son argument principal est qu'il est possible d'utiliser les mathématiques en philosophie naturelle et cela donne des résultats importants, alors pourquoi ne pas faire la même chose en théologie[71]. Partant de ce principe, il utilise la géométrie pour, par exemple calculer le plaisir en considérant différents cas, le cas où l'intensité de ce plaisir est constant, le cas où l'intensité de ce plaisir croît uniformément, puis le cas où elle augmente dans des proportions exponentielles, et enfin le cas où le plaisir est infini. Il applique la méthode des quadratures.

---

[66] Hutcheson (1725), p. 184.
[67] Hutcheson (1725), pp. 184-5.
[68] Hutcheson (1725), pp. 186-7
[69] Grabiner (2002), pp. 163-4, n. 15.
[70] Craig(e) (1699).
[71] « But I have given serious thought to the outstanding advances in natural sciences that ancient and modern mathematicians have deduced and demonstrated from geometry. These advances have made me hope that the same methods might be of some use in theological matters. It seems absurd not to be able to extend the usefulness of mathematics, "the divine science", beyond the narrow boundaries of this life. » in Nash (1991), p. 53. Dans cet ouvrage, se trouve, en annexe une traduction anglaise du texte original (en latin).

Par ces deux écrits, nous pouvons déclarer que, dès son plus jeune âge, Maclaurin est un jeune homme dont la foi est omniprésente. Il ne faut pas oublier qu'à l'époque de ces deux écrits, il avait commencé des études de théologie à l'université de Glasgow. Et que cette même foi l'amène à utiliser ses connaissances mathématiques pour donner à Dieu une signification sur laquelle nous nous sommes attardés. Comme nous le verrons par la suite, dans d'autres écrits, Maclaurin n'aura plus ce désir de percevoir la théologie comme une application des mathématiques. De plus, ses connaissances techniques nous montrent déjà de la grande maturité mathématique de Maclaurin. Nous allons maintenant voir que, dans un contexte uniquement géométrique complètement dégagé de toute contingence métaphysique ou théologique, Maclaurin a une connaissance profonde d'autres écrits de Newton, qu'il réussit à dépasser en proposant une extension digne d'intérêt.

B. Le *Geometria Organica* : son premier ouvrage majeur.

1. Ses écrits traitant de Géométrie parus dans les *Philosophical Transactions* : des résultats préparatoires au *Geometria Organica*.

Lors du chapitre précédent, nous nous étions intéressés à la production de Maclaurin lors de ses études. Nous allons faire un saut dans la vie de Maclaurin, et nous arrêter en 1718-1720, période pendant laquelle il écrit deux articles qui paraissent dans les *Philosophical Transactions*. C'est aussi la période de l'écriture et de la parution de son premier ouvrage majeur, le *Geometria Organica*. Avant d'entrer dans l'étude de ces deux articles, il convient de signaler que Maclaurin, durant la période entre la fin de ses études et la période qui nous intéresse maintenant, n'a pas eu d'activité scientifique au sein d'une université. Après avoir été diplômé de l'université de Glasgow, il a entamé une année de théologie en vue de devenir pasteur à l'instar de son père, de son oncle et de son frère. Mais, comme il l'indique dans sa correspondance, il renonce à cela, en particulier à cause des dissensions régnant dans cette Église à cette époque. Comme le signale Patrick Murdoch, ami et premier biographe de Maclaurin, ce dernier continue à prendre beaucoup de temps à étudier, avec la même assiduité que pendant son séjour à l'université, les mathématiques et la philosophie et à lire les meilleurs auteurs classiques[72] dans la maison de son oncle. Puis, en 1717, une chaire de mathématiques se libère au Marishal College d'Aberdeen. Maclaurin postule et se trouve en concurrence avec un certain Walter

[72] « the same assiduity as he had done at the university ; continuing his favourite researches in mathematicks and philosophy, and at other times reading the best classic authors ; for which he naturally had an exceeding good taste. » in Maclaurin (1748a), p. ii.

Bowman[73] pour ce poste. Après dix jours d'examen, Maclaurin est nommé professeur de mathématiques[74] et perçoit un salaire annuel de 504 livres écossaises. Les *Records of Marishal College* nous donnent les grandes étapes de ce recrutement. Ainsi, les examinateurs sont Charles Gregory professeur de mathématiques à l'université de St. Andrews et Alexander Burnet, un régent de l'autre collège d'Aberdeen, le King's College. De ce concours, il est ressorti que Bowman était un adepte d'Euclide avec une connaissance meilleure des écrits de ce dernier et que Maclaurin avait une grande maîtrise des mathématiques les plus récentes. Le choix final s'est donc porté sur la personne qui n'était pas la plus pédagogue mais le plus « fort » mathématiquement[75]. C'est donc dans cet environnement privilégié que Maclaurin continue sa recherche en géométrie.

Avant la parution du *Geometria Organica*[76], deux articles paraissent dans les *Philosophical Transactions*, le premier[77] pour les mois de mai et juin 1718, le second[78] pour les mois de janvier et février 1719. Quand ses articles ont été lus en séance publique,

---

[73] Ce dernier se retrouve sur la liste des souscripteurs de An Account of Sir Isaac Newton's philosophical discoveries in four books.

[74] Cette nomination lui a permis d'entrer dans le fameux livre des records comme étant le plus jeune professeur titulaire d'université.

[75] « Sept. 11. 1717.

« Mr. Colin M^c^Laurine, student of Divinity in the College of Glasgow, and Mr. Walter Bowman of Logie, undergo trial for the vacant chair, before Mr. Charles Gregorie, Professor of Mathematics, St. Andrews, and Mr. Alexander Burnet, Regent in King's College. »

[Les examinateurs rapportent que :]

« They doe think that both the saids Mr. Colin McLaurine and Mr. Walter Bowman are capable to teach the Mathematicks anywhere.

In most of the tryals in the inferior pairts of the Mathematicks ther was no great odds. Only in Euclid Mr. Bowman was much readier and distincter. And the last tryall Mr. McLaurine plainly appeared better acquainted with the speculative and higher pairts of the Mathematicks. And they conclude that they both excell in their own way. Mr. Bowman only hath applyed himself to those things that are commonly taught and Mr. McLaurine hath made further advances.

So subsryvit Charles Gregorie, Al. Burnet.

McLaurine is accordingly appointed. » in Anderson (ed.) (1898), *Records of Marishal College*, Aberdeen cité dans Tweddie (1915) pp. 134-5

[76] Maclaurin (1720c).

[77] Maclaurin, Colin (1720a).

[78] Maclaurin, Colin (1720b).

Maclaurin n'était pas encore membre de la *Royal Society of London*. Il le deviendra le 5 novembre 1719 au moment où il déposera directement le manuscrit du *Geometria Organica* dans les mains de Newton qui apposera l'imprimatur sur ce dernier le 12 novembre 1719. Contrairement à ce que certains biographes de Newton écrivent[79], Newton et Maclaurin se sont bien rencontrés. Maclaurin l'annonce lui-même à Colin Campbell dans sa lettre du 6 juillet 1720 qu'il a reçu des marques d'amitiés de quelques savants londoniens et en particulier de Newton qu'il rencontrait souvent[80].

Les deux articles parus dans les *Philosophical Transactions* sont les premières productions originales de Maclaurin. Nous donnerons simplement l'essence des découvertes contenues dans ces deux articles. Étant repris dans le *Geometria Organica*, ces découvertes seront étudiées plus dans le détail lorsque nous étudierons cet ouvrage. Ainsi, dans un premier temps, nous allons nous pencher sur l'article paru en deuxième, celui sur une méthode de construction des courbes algébriques. Puis, dans un deuxième temps, nous nous orienterons vers l'article paru en premier, celui sur la méthode des podaires. Il nous paraît judicieux d'opérer de cette façon car Maclaurin propose cette disposition dans son *Geometria Organica*.

a) Une construction mécanique des courbes algébriques

L'article sur les constructions mécaniques des courbes algébriques fait suite à un livre de Newton publié en appendice de son *Optique*, le *Enumeratio linearum Tertii Ordinis* dans lequel Newton considère que décrire des courbes du second genre ou du

---

[79] Par exemple, dans Hall (1992), Ruppert Hall déclare que les deux hommes ne se sont jamais rencontrés.
[80] « I received the greatest civility from them and particularly from the great Sir Isaac Newton with whom I was very often » in Mills (1982), pp. 162-3.

genre supérieur quand il n'y a pas de double point, est un problème très difficile[81]. Maclaurin annonce qu'il est tombé sur une méthode pour décrire les lignes géométriques de tout ordre et qu'elle sera publiée dans les *Philosophical Transactions*[82]. Il est manifeste qu'il a pris les travaux de Newton comme référence. Il annonce qu'avec sa méthode, il peut construire des courbes de degré quelconque[83]. Il commence par énoncer le lemme 21 du livre I des *Principia* de Newton dans lequel ce dernier construit des coniques à l'aide d'une droite fixe et de deux angles constants. Maclaurin prend une droite AE, et deux points C et S qui ne se trouvent pas sur cette droite (Fig. 2).

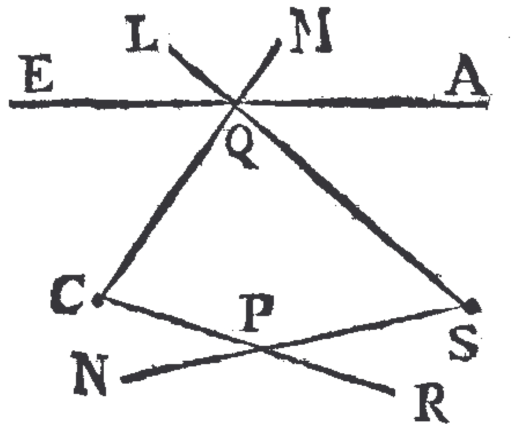


Fig. 2.

Il forme deux angles RCM et NSL constants qui vont pouvoir tourner autour de leur sommet. Il suppose que les branches CM et SL se rencontrent sur la droite AE, en Q. De cela, il annonce que quand Q décrit la droite AE, le point d'intersection des deux autres branches CR et SN décrit une conique. Comme nous le verrons plus bas, Newton, dans ses *Principia*, avait démontré très rapidement ce résultat, en raisonnant sur un rapport de

[81] « Nam curvam aliquam secundi secundi vel superioris generis punctum duplex non habentem commode describere Problema est inter difficiliora numerandum. » in Newton, Isaac (1704), pp. 160-1.
[82] « now I had fallen in a way of describing those and an universal method of describing [sic] Geometrical lines of all orders; of which I send an abstract to Dr Halley which he published also in The Transactions » in Mills (1982), p. 162.
[83] « Atque hinc in spem venia Methodum sequentem, qua Curvae Geometricae cujuscunque Ordinis, licet puncto duplice aut multiplice quovis destitutae, construuntur, non fore Geometris ingratam » In Maclaurin (1720b), p. 939

distances qui permet de conclure que le point décrit bien une conique. Dans l'*Enumeratio*, Newton a redonné ce résultat[84] en le développant un peu. Il annonce également sans démonstration ni résultat que certaines des courbes d'ordres supérieurs peuvent être décrites de la même manière, c'est-à-dire engendrées par le mouvement de leur lieu[85]. Maclaurin ne démontre pas ce résultat, ce qui a déjà été fait par Newton. Ceci lui permet d'énoncer directement les résultats qui ne sont pas dans les écrits de Newton.

En effet, en utilisant toujours deux angles donnés, une droite fixe et en ajoutant une autre droite, il parvient à construire des courbes algébriques du troisième ordre ayant un point double. Ainsi, il prend deux angles MCR et LNS de sommets respectifs C et N (Fig. 3).

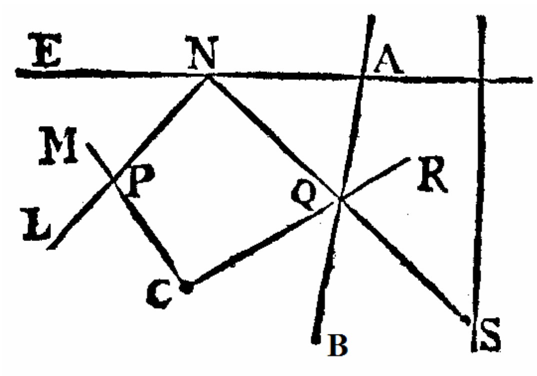


Fig. 3.

C et S sont des points fixes, N se déplace sur la droite donnée AE. Lorsque N se déplace sur AE, il faut que Q, le point d'intersection de CR et NS, soit toujours sur une droite donnée AB. Alors le point d'intersection de MC et NL, P, décrit une courbe algébrique de degré trois ayant C comme point double.

De même, si en utilisant les mêmes hypothèses, à la différence près que c'est le point d'intersection de MC et NL qui doit être sur une droite donnée AB, alors le point

[84] Newton (1704), théorèmes I et II, pp. 158-9.
[85] « Eadem methodo Curvas tertii, quarti & superiorum generum describere licet, non omnes quidem sed quotquot ratione aliqua commoda per motum localem describi possunt » in Newton (1704), p. 160.

d'intersection de NS et CR décrit aussi une courbe algébrique de degré 3 ayant quant à elle un point double en S (Fig. 4).

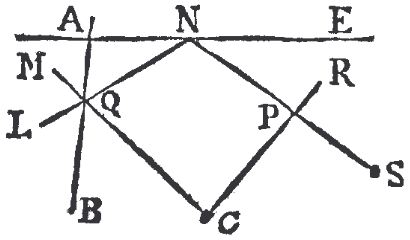


Fig. 4.

Dans la suite de l'article, il donne des exemples de courbes de troisième ordre en prenant des cas particuliers. Citons-en un. Par exemple, si les angles MCR et LNS sont droits, les deux droites données AE et BD sont parallèles à CS et $SD = 2SA$, alors le point d'intersection de CM et NL décrit une courbe de 68ème espèce (Fig. 5)[86] selon la classification des courbes du troisième ordre établie par Newton[87].

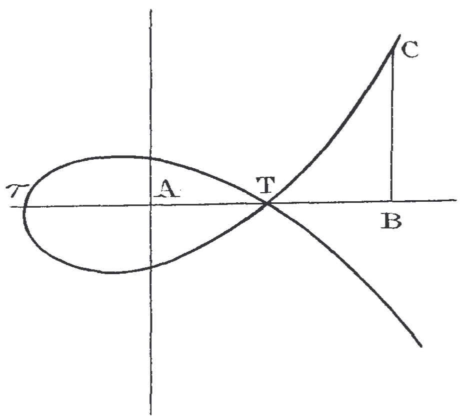


Fig. 5.

Il donne les constructions nécessaires pour trouver d'autres courbes du troisième ordre qui sont, toujours selon la classification de Newton, de 10, 11, 20, 21 et 40ème

[86] Newton (1704), p. 156.
[87] Maclaurin, Colin (1720b), p. 941.

espèces[88]. De la même manière, il donne les indications nécessaires pour pouvoir construire des courbes du 4ème et 5ème ordre avec ou sans point double, avec un point triple ou non.

Puis, il énonce la proposition générale[89] : soient deux suites d'angles constants. La première suite est CNR, NRT, RTQ, …, la seconde est SML, MLK, LKQ, … Les sommets des angles de ces deux suites se déplacent sur des droites fixées. Nous remarquons que, dans une suite d'angles, la deuxième branche d'un angle devient la première branche de la suivante (Fig. 6).

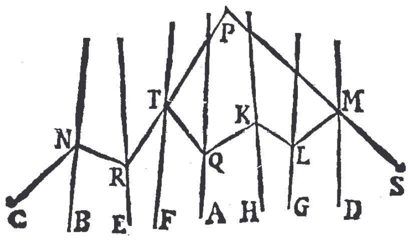


Fig. 6.

Ces deux suites d'angles débutent par des points fixes et sont telles que le point d'intersection des dernières branches de chaque suite, Q, décrit une droite donnée. Le nombre de sommets de la première suite est n et celui de la seconde, m. On choisit la $s^{\text{ième}}$ branche d'un angle de la première suite (dans la figure 5, c'est la branche RT). Alors, P, le point d'intersection de cette branche avec la première branche de la seconde suite, SM, décrit une courbe dont le degré est égal à $sm+s+n+1$.

---

88 Maclaurin (1720b), p. 942.

89 « *Propositio Generalis*. Sumantur ad libitum Rectae in eodem plano ubicunque positae, quarum sit numerus (n) ut BN, ER, FT. Sumantur etiam ad libitum rectae ut DM, GL, & HK etc. quarum sit numerus (m). Sint anguli CNR, NRT, RTQ etc. atque anguli SML, MLK, LKQ, etc. invariati, dum puncta angularia N, R, T, M, L, K, percurrant rectas indefinitas BN, ER, FT, DM, GL, HK; Ducatur concursus crurum TQ & KQ per rectam indefinitam AQ; Invenire ordinem curvae quam concursus cruris SM cum aliqua rectarum CN, NR, RT, TQ, etc. *ex. gr.* Cum RT perpetuo tanget.
In Serie rectarum CN, NR, RT, TQ, etc. denotet s numerum rectae RT, cujus concursu cum SM Curva est describenda a CN inclusive qui in hoc casu est ternarius : erit Curva quem exprimit numerus $sm+s+n+1$: unde in casu quem figura designat, cum $s=m=n=3$ erit Curva ordinis 16^{ta} » *In* Maclaurin (1720b), pp. 944-5.

Ainsi, si on prend l'exemple de la figure que Maclaurin donne dans cet article (Fig. 5), le point P décrit une courbe algébrique de degré 16, en effet $s = m = n = 3$. Dans cet article, aucune démonstration n'est présente pour assurer la validité de ce qu'il annonce. Comme nous le verrons plus bas, Maclaurin le fera dans le *Geometria Organica* en développant largement cette théorie. Il conclut cet article en déclarant que cette méthode est une avancée importante dans la construction des courbes algébriques d'ordres supérieurs car cette méthode est universelle[90].

b) La première version de la méthode des podaires

Le second article dans les *Philosophical Transactions* donne ce qu'on appelle aujourd'hui la méthode des podaires qui est une méthode de génération de courbes à partir d'autres. Maclaurin n'utilise jamais le terme de podaire, mais il définit la podaire d'une courbe comme le lieu des perpendiculaires d'un point fixe sur les tangentes à la première courbe. Ce type de courbes a été re-découvertes au 19ème siècle, entre-autres, par Quételet et Terquem (c'est ce dernier qui donna à ce type de courbe le nom de podaire). Nous allons voir comment Maclaurin, dans cet article, aborde la génération de ces courbes et comment il réussit à mesurer l'arc des courbes ainsi décrites.

[90] « In his descriptionibus Rectas solummodo atque Angulos dari postulavimus ; sed facilius saepe simpliciorum Curvarum ope complexiores describuntur : atque Propositiones his non minus Universales huc pertinentes investigavi : Eas vero cum harum demonstrationibus utpote prolixis impraesentiarum omitto ; Easdem postea publici juris facturus, si luce non videantur haec Geometris indigna. » *In* Maclaurin (1720b), p. 945.

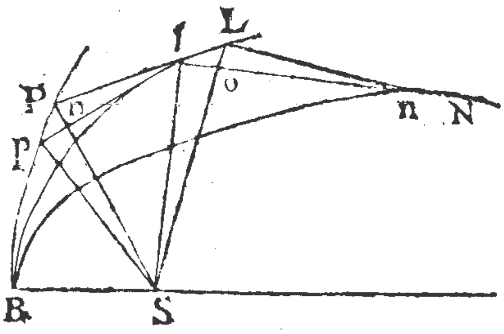


Fig. 7.

Sur une courbe, BL*l* (Fig. 7), il prend deux points très proches (« puncta quamproxima ») qu'il nomme L et *l*. À partir d'un point fixe du plan, S, il trace les segments SL et S*l*. Il construit le point *o* comme le point d'intersection de la perpendiculaire à S*l* issue de *l* et de la droite SL. Sur les tangentes à la courbe en L et *l*, il construit les points P et *p* comme pieds des perpendiculaires issues de S. L'ensemble des points P, *p* forme une courbe qu'il se propose d'étudier.

L'étude de ces courbes se fait en deux temps. Le premier consiste à donner une relation pour les courbes qui admettent des tangentes. C'est cette relation qui fournira les podaires de point fixe S. Le deuxième temps est l'étude de cas particuliers. Il retrouve ainsi des courbes déjà connues, ce qui lui assure la légitimité de sa construction. Il trouve aussi des courbes qui ne sont pas forcément connues. Dans la suite de notre exposé, nous nous intéresserons avec un peu plus de détails aux différentes courbes ainsi générées par cette méthode.

Dans le premier temps, il trouve une relation entre les longueurs entre le point fixe et les points qui sont sur la courbe initiale, SL et S*l*, et les longueurs entre le point fixe et les points sur la nouvelle courbe, SP et S*p*. Pour cela, il utilise deux résultats qui proviennent de la construction même des différents points L et *l*. Le fait qu'ils soient très proches permet de mettre en correspondance des longueurs et les moments de la courbe initiale. Ainsi, L*l* est proportionnel au moment (ou la fluxion) de l'arc de la courbe au point L et L*o* est proportionnel au moment ou à la fluxion du rayon SL[91]. Le deuxième point pour lequel il a besoin de prendre deux points très proches est l'utilisation de triangles élémentaires semblables. Avec ces triangles semblables, il met en relation les longueurs désirées et arriver à l'expression suivante $\frac{\mathrm{SL}}{\mathrm{SP}} = \frac{\mathrm{L}l}{lo}$. Nous pouvons remarquer que, dans cette relation, il y a égalité entre des longueurs et des fluxions. Cette expression caractérise complètement la courbe ainsi engendrée. En effet, avoir SL par cette expression et connaître SP permet de construire la podaire.

La deuxième partie de l'article est l'étude de cas particuliers de courbes. L'expression $\frac{\mathrm{SL}}{\mathrm{SP}} = \frac{\mathrm{L}l}{lo}$ se simplifie dans le cas des courbes pour lesquelles on a la relation $Ll : lo = a^n : r^n$ où a est une constante, n un nombre quelconque (« numeram quemcunque ») et $r = \mathrm{SL}$. La relation devient alors $\mathrm{SP} = \frac{\mathrm{SL}^{n+1}}{a^n}$. Ces courbes sont les spirales sinusoïdales de paramètre *n*.

En effet, si $n = 1$ et si S se trouve sur la courbe, alors la courbe est un cercle et S est sur ce cercle. La podaire de cette courbe est l'épicycloïde à un point de rebroussement, ce qu'on appelle une cardioïde. Maclaurin la nomme « *Epicycloidis* revolutione Circuli super basim sibi aequalem revolventis descripti, ad punctum ubi punctum describens tangit basim, quae D^no^ *Paschal* dicitur *la Limaçon de M. Roberval*, quamque *M. De la Hire* considerat ut *Conchoidem* Basis Circularis ». Il s'intéresse aux spirales sinusoïdales. Ainsi, si la spirale sinusoïdale est de paramètre *n*, alors sa podaire de foyer le centre de la spirale,

[91] « Sit *lo* arcus centro S descriptus perpendicularis in SL ; ex erit L*l* ut momentum Curvae & L*o* momentum Radii SL » *in* Maclaurin (1720a), p. 804.

est aussi une spirale sinusoïdale de paramètre $\frac{n}{n+1}$. Il donne également une façon de rectifier ce type de courbes.

Il cherche aussi à trouver les podaires des sections coniques. Il dresse un tableau des différents cas qui se présentent. Ainsi, il donne la podaire de la parabole avec pour point fixe le foyer de la conique. Cette podaire est une droite tangente au sommet de la parabole (fig. 8).

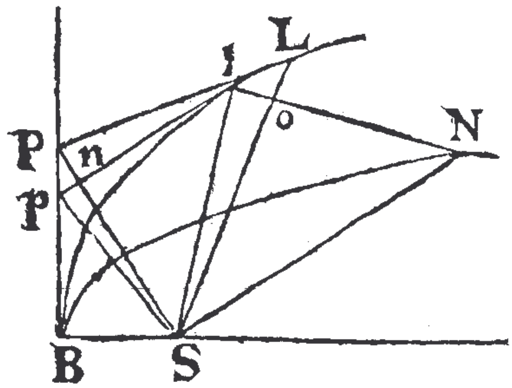


Fig. 8.

Dans cet article, ce qu'il faut retenir est qu'il utilise la théorie des fluxions à deux moments, le premier pour trouver la relation qui caractérise les courbes podaires, puis le second quand il cherche à rectifier ces dites courbes. Nous reviendrons sur les podaires quand nous étudierons son approche dans le *Geometria Organica*.

Ces deux articles, comme nous l'avons déjà dit, sont repris dans le *Geometria Organica*. Nous pouvons nous demander si ces deux articles sont « sortis » de ce dernier pour mettre en avant les résultats contenus dans ces pages ou, si ces deux papiers sont à l'origine de l'ouvrage que Maclaurin publie en 1720. Lors d'un de ses voyages à Londres, celui qu'il a fait au cours du mois de mai 1719, Newton lui conseille d'incorporer le contenu d'un de ces articles, augmenté de démonstrations qui étaient exposées de façon partielle dans cet article. En effet, Maclaurin déclare que : « Sir Isac [sic] encouraged me to publish the Theorems I had discovered concerning the description of Curve Lines with their Demonstration. I did so in a book [Geometria Organica] that amounted to about 15 sheets which I dedicated to Sir Isac [sic] himself. »[92] Donc, nous pouvons affirmer que les articles sont à l'origine de cet ouvrage et que c'est Newton qui est à l'initiative de l'écriture de celui-ci. Il n'est donc pas étonnant que cet ouvrage débute par une longue dédicace à Newton qui éclaire la position de Maclaurin sur le statut des mathématiques, en particulier de la géométrie au sein de la philosophie naturelle.

Nous allons voir dans la section suivante comment, dans le *Geometria Organica*, l'influence mathématique et philosophique de Newton est très présente.

2. Une référence à Newton

a) L'utilité des mathématiques chez Newton et chez Maclaurin

Il est normal de trouver dans une dédicace à Newton une référence importante à ce dernier. Toutefois, il nous semble intéressant de s'arrêter sur cette dédicace et sur l'introduction du *Geometria*. En effet, la lecture de la dédicace et de l'introduction donne un éclairage sur le regard que porte Maclaurin sur Newton. Maclaurin fournit au lecteur ce qui lui semble important dans le domaine du savoir et de la place des mathématiques dans le champ du savoir. De plus, il fait constamment référence à Newton. Il nous semble naturel de comparer ses dires avec ce que peut écrire Newton.

Dans la dédicace, Maclaurin s'étend sur les liens étroits qui existent entre la philosophie en général mais aussi la philosophie naturelle, et la géométrie. La géométrie

[92] In Mills (1982), p. 163.

(ici pris dans le sens de mathématiques) peut être utile à l'étude de la philosophie dans ce souci de la rigueur et de la démonstration. Ainsi, les méthodes démonstratives utilisées en mathématiques peuvent servir à l'étude de la philosophie. Cela est encore plus vrai pour la philosophie naturelle. Ainsi, à l'aide d'un savant mélange d'expérimentations, de théories géométriques (géométrie pure, méthode des fluxions, minima et maxima...), d'hypothèses réduites au minimum, le philosophe peut expliquer de nombreux phénomènes de la nature. Les phénomènes de la nature cités par Maclaurin, tels que les mouvements des planètes, comètes et l'attraction terrestre peuvent être décrits grâce à l'utilisation des différents champs des mathématiques. Les préceptes permettent aussi à la Vérité[93] de triompher des erreurs[94].

Dans la préface, Maclaurin reprend ce qu'il vient d'écrire dans la dédicace mais avec un but différent. Dans la dédicace, Maclaurin discourait sur la vision newtonienne des mathématiques, en revanche dans la préface, il est le maître de son discours. Contrairement à la dédicace dans laquelle il n'était fait mention que de géométrie, dans la préface, il utilise le terme de mathématiques au sens large qu'il sépare en plusieurs catégories. Il fait la distinction entre diverses mathématiques. Par exemple, il fait référence à une géométrie pure (« Geometriae purae ») qui est une aide à la représentation du monde[95] puis, à d'autres endroits de son propos, il fait mention d'une géométrie dont la dimension est plus

[93] Nous le mettons en majuscule car Maclaurin le fait dans son écrit.

[94] « Geometria demum ultra pristinos fines, incredibili Tua Perspicacitate & Ingenii vi, longe lateque exporrecta est ; recondita praesertim Curvarum Theoria mirum in modum aucta ; quantitatum fluentium Algorithmus inventus, & ad ingentia Naturae Opera enucleanda summo Judicio adhibitus ; Philosophia Naturalis in Libertatem asserta, variisque Errorum monstris purgata ; materia subtilis explosa ; eliminata prorsus e Coelis Vorticum & Epicyclorum supellex : Variae & perplexae admodum Lunaris motus inaequalitates calculo & certis Legibus subjectae ; Cometarum orbitae per remotissima Coeli spatia pertinaciter investigatae ; subtilissima Luminis Phaenomena ex intimis Naturae penetralibus Arte mirifica eruta ; Corporum terrestrium Gravitas, & coelestium Motus, cum innumeris aliis Naturae Phaenomenis, ad eandem simplicem Causam reducta ; denique, pulsis Fabulis, vera operum divinorum Majestas, Ordo, Harmonia, Omnium Contemplationi simul & Admirationi commendata. Quae omnia, seu Veritatis aeterni Triumphi, seu Errorum diu grassantium clades, tanquam monumenta Aere & Marmore perenniora, certatim ad nominis Tui perpetuitatem posteris mandandam conspirant. Caeterum de rebus tam praeclaris praestat silere, quam levia dicere. » *In* Maclaurin (1720c), non paginé, fin de la *dedicatio*.

[95] « Geometriae Purae auxilio, tum praesentem Mundi fabriam » *In* Maclaurin (1720c), praefatio.

large et avec laquelle peuvent se confronter algèbre, analyse et étude des figures. C'est dans cette dernière que se situe l'étude des lignes courbes.

A la fois dans la dédicace et dans la préface, Maclaurin insiste sur le rôle des mathématiques dans tous les champs du savoir. Il nous semble important de comparer rapidement ce que peut faire Newton et ce que dit Maclaurin ici.

Notre but n'est pas de donner une analyse complète et minutieuse des ouvrages de Newton. D'autres personnes bien plus savantes que nous s'en sont chargées[96]. C'est à partir de quelques lemmes (nous allons en étudier plus bas) et de propositions que la base mathématique des *Principia* va se construire et que Newton va pouvoir échafauder toute sa mécanique. Les lemmes du livre I permettent à Newton de pouvoir traiter le problème de mécanique céleste au sein du champ mathématique qui, par essence, est de nature universelle. Ainsi, Newton considère les mathématiques « au-dessus » des autres sciences. Les mathématiques permettent d'expliquer divers phénomènes qui dépendent d'autres champs du savoir. Ou, pour être plus précis, par les mathématiques et en se basant sur un nombre réduit d'hypothèses, des phénomènes appartenant à d'autres champs du savoir peuvent être compris ou éclairés. Ainsi, l'étude de la mécanique céleste dans les *Principia* n'est qu'un exemple à la fois de la supériorité des mathématiques sur les autres sciences et des rapports qui doivent exister entre théories et observations. De cette manière, il permet de concilier observations, expériences et théories. Les mathématiques sont utiles pour garantir la validité du cheminement intellectuel qui permet d'arriver à une conclusion. Ainsi, si les observations ne sont pas en phase avec les résultats venant d'une démonstration de type mathématique, cela ne vient pas de la démonstration même mais, soit des hypothèses de départ (les axiomes), soit de l'observation elle-même. Nous retrouvons ce type de raisonnement chez Maclaurin. Nous l'avions déjà remarqué dans sa

---

[96] Nous pouvons citer quelques références qui nous ont été utiles : De Gandt (1992), Guicciardini (1998), Guicciardini (1999), Meli (1993), Panza (2003)

thèse. Ainsi la gravitation universelle n'est pas une théorie indépendante des mathématiques mais un exemple de la force et de la supériorité des mathématiques. Dans la préface du *Geometria Organica*, le statut des mathématiques prend une autre forme. Ainsi, le socle de toute forme de savoir, et même sa nature en tant que telle, sont les mathématiques et plus particulièrement la géométrie. Pour qu'une théorie soit « vraie » ou qu'un phénomène soit authentifié, il est impératif de confronter cette théorie ou ce phénomène aux mathématiques.

Mais, chez Maclaurin, les mathématiques doivent se soumettre à une double exigence. La première est quelque peu déconnectée de toute contingence extérieure. Les mathématiques doivent être source de plaisir à l'instar des disciplines humanistes (« humanioribus disciplinis ») ou des beaux-arts. Faire des mathématiques donne à son auteur et à toute personne de bonne volonté de la joie, du plaisir ou du contentement[97]. De plus, les mathématiques sont à la source des autres disciplines humanistes. Ainsi, les mathématiques permettent de mieux percevoir le plaisir procuré par exemple par la littérature ou par la musique. Le fait de dire qu'une musique est belle revient à dire que les mathématiques sont belles car ces dernières sont le substrat de l'harmonie musicale[98]. Les mathématiques doivent avoir un pan utilitariste, c'est-à-dire qu'elles doivent servir à tous les champs du savoir pour que ces derniers se développent et progressent dans la connaissance[99]. La seconde exigence est que les mathématiques doivent servir à elles-mêmes. En effet, pour que les mathématiques soient encore utiles pour les autres sciences,

---

97 « Netque hoc tantum Nomine Geometria studiose excolenda videtur, quod magnas utilitates afferat, & Ornamento sit ; verum etiam quod innata quadam Pulchritudine plurimum alliciat ; imo ei non absimilem, quam ex humanioribus disciplinis percipimus voluptatem, in animis nostris ingeneret. » *In* Maclaurin (1720c), préface, p. 1

98 « quid quaeso tantopere juvat in Musica ? Non soni, sed sonorum harmonia, ex commensurabili Vibrationem aequabilium proportione assurgens ; cum soni ipsi seorsum editi exiguam aut nullam animo pariant delectationem. » *In* Maclaurin (1720c), préface, p. 2.

99 « Cum recondita ac sublimis Philosophia, quam mortalibus his tandem saeculis indulsit benignissimum Numen, Geometriae promotae accepta referenda sit ; atque Incrementa egregia, quae plures aliae Artes ac Disciplinae humano generi apprime utiles nostra aetate ceperunt, ex eodem fonte promanarunt ; novos quoscunque in hac Scientia processus, non esse contemnendos, colendamque in primis eam esse studiosis veritatis indagatoribus, nemo cordatus non fatebitur » *In* Maclaurin (1720c), préface, p.1.

il faut qu'elles soient en constant progrès et en développement. Maclaurin est donc un défenseur de l'étude des mathématiques pour elles-mêmes, sans forcément avoir un but précis, ou une visée à courte vue avec une utilité rapide. De plus, il considère que quels que soient les progrès en mathématiques, ces derniers auront une utilité, méconnue par l'auteur, pour une autre personne à une période inconnue[100]. Il a donc une foi énorme dans le statut privilégié des mathématiques. Maclaurin est par cet aspect un fidèle lecteur et défenseur de la pensée de Newton sur le statut des mathématiques. Il apparaît certain que Maclaurin a puisé son inspiration dans les écrits mathématiques de Newton. Afin de mieux cerner l'influence mathématique de Newton sur Maclaurin, attardons-nous sur les différentes méthodes que Newton utilise dans la description des lignes courbes.

b) Une référence mathématique

Newton a consolidé et développé l'étude et la description de certaines de ces courbes, celles du second ordre et celles du troisième ordre ayant un point double. Par une méthode nouvelle, Newton a réussi à les classer de façon exhaustive, mais n'a pas étudié (ou réussi à étudier) les courbes d'ordres supérieurs ou celles du troisième ordre sans point double. Maclaurin, qui se considère comme un fidèle continuateur de Newton, à partir de la méthode de ce dernier, donne une description et une façon de construire des courbes d'ordres supérieurs. Dans les *Principia*, Newton a besoin d'avoir différentes propriétés des sections coniques afin de pouvoir utiliser ces mêmes coniques dans sa mécanique céleste. Ainsi, il donne une façon de les concevoir et de les engendrer en utilisant une méthode bien précise.

[100] « Nec varia Geometrarum ad Mathesin puram promovendam Conamina quisquam vituperabit (etsi fortassis primo intuitu non innotecat hujusmodi inventorum utilitas) qui meminerit quam multa, quae prima fronte parum proficua visa sunt, dein temporis decursu, aliorum industria, ad usus eximios accommodata sint » *In* Maclaurin (1720c), préface, p. 1

Dans le lemme 21 du livre premier des *Principia*, Newton déclare : « Si aux deux points donnés ou pôles B, C sont fixés les sommets de deux angles donnés MBD, MCD, & que l'on fasse parcourir la droite donnée MN, au concours M des côtés BM & CM de ces angles les deux autres côtés BD & CD des mêmes angles décriront par leur intersection une section conique. »[101] (Fig. 9)

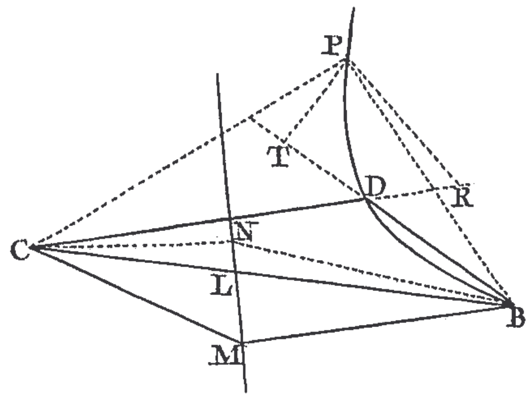


Fig. 9.

Tout d'abord, lorsque le point d'intersection des deux premières branches est en M, le point d'intersection des deux autres branches est en D, puis lorsque le point M se trouve en N (le point M se déplace sur la droite donnée MN), alors le point d'intersection des autres branches sera en P. On a donc $\widehat{MBD} = \widehat{NBP}$. Soit R sur la droite CD et T sur BD tels que $\widehat{BPT} = \widehat{BNM}$ et $\widehat{CPR} = \widehat{CNM}$. Des égalités de départ $\widehat{MBD} = \widehat{NBP}$ et $\widehat{MCD} = \widehat{NCP}$, on arrive à $\widehat{MBD} - \widehat{NBD} = \widehat{NBP} - \widehat{NBD}$ soit $\widehat{MBN} = \widehat{PBD} = \widehat{PBT}$ et $\widehat{MCD} - \widehat{NCD} = \widehat{NCP} - \widehat{NCD}$ soit $\widehat{NCM} = \widehat{TCR}$.

[101] Newton (1759), Tome 1, p. 93.

Comme $\widehat{BPT} = \widehat{BNM}$ et $\widehat{MBN} = \widehat{PBT}$, les triangles MBN et PBT sont semblables, de même les triangles NCM et TCR le sont aussi. D'où $\frac{PT}{NM} = \frac{PB}{NB}$ et $\frac{PR}{NM} = \frac{PC}{NC}$. Donc le rapport $\frac{PT}{PR} = \frac{PB \times NC}{NB \times PC}$ est constant.

Il applique le lemme 20 qui dit que si le rapport ci-dessus est constant alors le point D appartient à une conique[102]. Par conséquent, lorsque M décrit la droite MN, D décrit une conique.

L'énoncé de la réciproque du lemme précédent est « si les droites BD, CD décrivent par leur concours D une section conique qui passe par les points donnés A, B, C, & que les angles DBM, DCM soient pris respectivement égaux aux angles donnés ABC, ACB, la rencontre des côtés BM, CM se fera toujours dans une ligne droite donnée de position ». Ce dernier résultat est très important pour Newton pour échafauder son corpus. En effet, il va pouvoir considérer n'importe quelle conique comme élaborée par ce type de construction. Ainsi, non seulement cette construction forme des coniques mais, toute conique peut être décrite par cette méthode. Cela confirme aussi la généralité de la méthode et donc son utilité dans le dessein newtonien des *Principia*.

3. La structure du Geometria Organica

Avant de rentrer dans le détail, donnons les grandes parties de ce traité. Son but est de donner diverses méthodes pour décrire les courbes géométriques proposées par divers mathématiciens et de fournir une nouvelle méthode « infinitely more General than any

[102] Newton (1759), p. 91.

hitherto published »[103]. Ainsi, Maclaurin donne différentes courbes construites par Fermat et Varignon (spirales), par La Hire (conchoïde), Nicole (épicycloïde), par Roberval, Pascal, De Moivre, et Bernoulli. Mais, le savant le plus cité est Newton. On retrouve de multiples références aux travaux de ce dernier. Descartes n'est pas explicitement cité, mais le procédé analytique cartésien est utilisé relativement souvent. Nous le verrons par la suite.

Dans la première partie de son ouvrage, intitulé « Ubi Methodo Universali Linea omnium Ordinum describuntur sola datorum Angulorum & Rectarum Ope »[104], la première section[105] fournit une démonstration de Maclaurin de la description des sections coniques faites par Newton dans les *Principia* et l'*Arithmetica Universalis*. De cette méthode découlera, dans la section II[106], la description des lignes courbes d'ordre trois ayant un point double commencée par Newton dans son *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis*. Dans la troisième section[107], il s'intéresse aux courbes algébriques du quatrième ordre et celles du troisième ordre sans point double. Ceci dépasse ce qu'a fait Newton dans ses différents écrits. Dans la dernière section[108] de la première partie, il donne la méthode de l'article de 1719 pour construire une courbe algébrique d'ordre quelconque en utilisant des droites fixes et des angles constants. Dans la seconde partie[109], Maclaurin s'attache à donner une méthode permettant, à partir d'une courbe algébrique d'un certain ordre, de construire une courbe algébrique d'ordre supérieur. Il commence cette partie en énonçant la description mécanique (« organica ») des courbes de Newton (section 1)[110], puis, dans la seconde

[103] Maclaurin (1722b), p. 38.
[104] Maclaurin (1720), p.1
[105] « De Descriptione Curvarum primi Generis seu Linearum Ordinis Secundi » *In* Maclaurin (1720c), p. 1.
[106] « De Descriptione Linearum Tertii Ordinis quae punctum duplex habent » *In* Maclaurin (1720c), p. 11.
[107] « De Descriptione Linearum quarti Ordinis, earumque tertii Ordinis quae nullum habent Punctum duplex » *In* Maclaurin (1720c), p. 46.
[108] « Ubi generalia demonstrantur Theoremata de descriptione Linearum Ordini cujuscunque, Rectarum & Angulorum datorum ope. » *In* Maclaurin (1720c), p. 61.
[109] «Ubi Linea omnium Ordinum altiorum describuntur ope Linearum Ordinis cujuscunque inferioris » *In* Maclaurin (1720c), p. 79.
[110] « Ubi demonstratur Organica Curvarum descriptio Neutoniana » *In* Maclaurin (1720c), p. 79.

section[111], il réinvestit la description de courbes algébriques de la section 4 de la première partie en remplaçant certaines des droites par des courbes algébriques. Ceci a pour but de généraliser cette méthode de construction et d'utiliser des courbes algébriques d'ordre inférieur pour créer des courbes algébriques d'ordre supérieur. C'est dans la section 3 que se trouve l'énonciation de la méthode des podaires. Cette partie sera étudiée plus bas. La quatrième section[112] s'occupe d'appliquer l'étude des courbes à la mécanique et en particulier de donner la valeur de la force d'un corps dont le mouvement suit une courbe. Enfin dans la dernière section[113], Maclaurin donne plusieurs méthodes pour décrire des courbes passant par des points donnés et comme corollaire d'une proposition, il énonce le fameux paradoxe de Cramer. Nous reviendrons dans la dernière partie de ce chapitre à l'étude du paradoxe de Cramer donné par Maclaurin.

Maclaurin, dans les premières sections de la première partie, poursuit l'étude commencée par Newton. Dans la première proposition, Maclaurin énonce que « Soient deux points fixes du plan, C & S, sommets de deux angles donnés tournant autour de leur sommet, FCO & KSH ; Q, le point d'intersection des branches CF & SK, se déplace sur la droite donnée du plan AE ; il s'ensuit que le point d'intersection des branches CO & SH, P, décrit une courbe de première génération »114 (Fig. 10).

---

[111] « Ubi Curvae investigantur quae ex aliis quibuscunque angulorum datorum motu describi possunt » *In* Maclaurin (1720c), p. 87.
[112] « De viribus quibus Corpora curvas describunt circa data centra » *In* Maclaurin (1720c), p. 120.
[113] « De Descriptione Linearum Geometricarum per data Puncta » *In* Maclaurin (1720c), p. 135.
[114] « Circa duo puncta C & S in Plano quovis data tanquam Polos moveantur Anguli dati FCO & KSH ; ducatur concursus Crurum CF & SK per Rectam AE in eodem Plano Positione datam ; atque reliqua interea Crura CO & SH Concursu suo P describent Curvam primi Generis » *In* Maclaurin, (1720c), p. 1

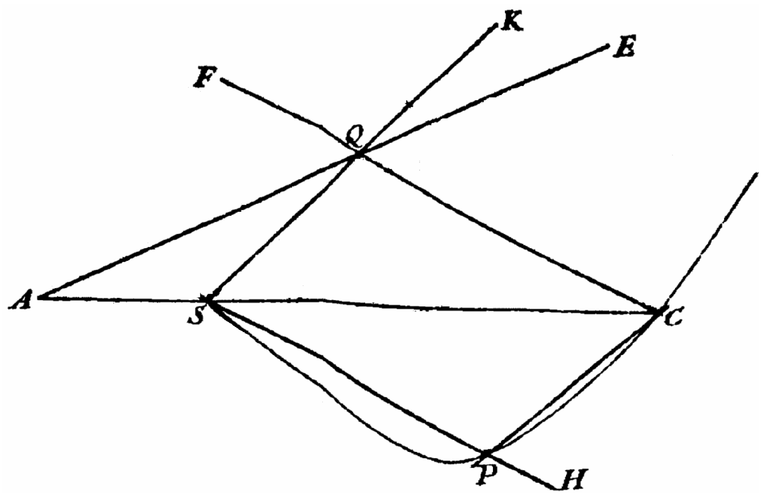


Fig. 10.

La première génération de courbes est l'ensemble des courbes du second ordre ou sections coniques. Du lieu de P va dépendre l'allure générale de la courbe. Pour cela, la démonstration de Maclaurin diffère un peu de celle faite par Newton dans les *Principia*. Il préfère une démonstration plutôt analytique qui prend sa source dans un autre ouvrage de Newton, l'*Arithmetica Universalis*. En effet, Maclaurin considère M le pied de la perpendiculaire à CS issue de P sur la droite CS, et il attribue à PM la lettre y et à CM la lettre x. Ainsi, C est le centre d'un repère orthogonal. N est le pied de la perpendiculaire sur CS issue de Q. Étant donnés D un point de SH et G un point de CO, il construit les points R, U, T et L sur CS tels que $\widehat{CUQ} = \widehat{CRP} = \widehat{FCG}$ et tels que $\widehat{SLQ} = \widehat{STP} = \widehat{KSD}$ (Fig. 11).

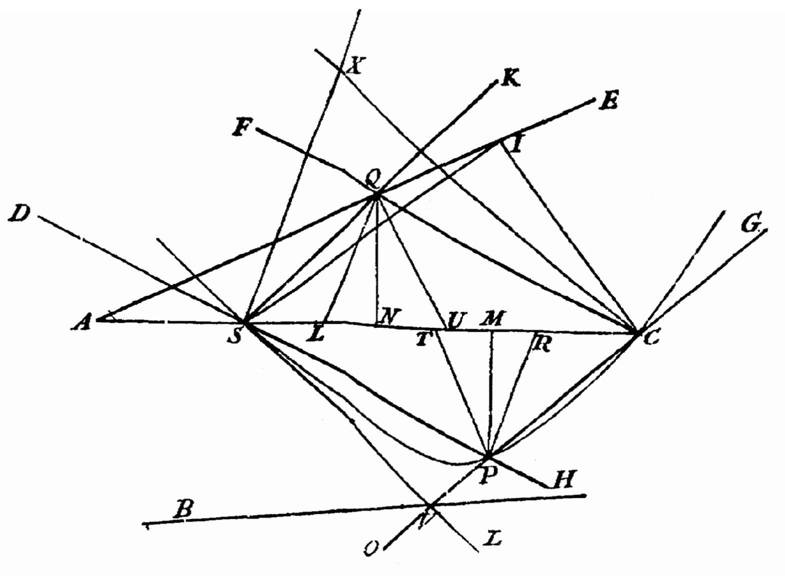


Fig. 11.

Par des relations entre les angles et le théorème sur la somme des angles d'un triangle, il arrive à montrer que les triangles CQU et CPR sont semblables, de même que SLQ et STP. Il donne, ainsi les relations suivantes $CR:PR=QU:CU$ et $ST:PT=QL:SL$.

Il attribue des lettres aux longueurs constantes, c'est-à-dire $CS=a, CA=b$, aux angles constants, ainsi $\tan\left(\widehat{FCO}\right)=\frac{a}{d}, \tan\left(\widehat{KSH}\right)=\frac{e}{a}, \tan\left(\widehat{CAE}\right)=\frac{c}{a}$ et aux variables principales citées plus haut et $QN=z$. Il donne les valeurs des relations suivantes : $\frac{RM}{PM}=\frac{a}{d}, \frac{PR}{PM}=\frac{\sqrt{a^2+d^2}}{d}$ et $\frac{AN}{QN}=\frac{a}{c}$. Donc, en remplaçant par leurs lettres respectives, on a $RM=\frac{ay}{d}$, $CR=x-\frac{ay}{d}=\frac{dx-ay}{d}$, $PR=y\frac{\sqrt{a^2+d^2}}{d}$, $QU=z\frac{\sqrt{a^2+d^2}}{d}$ et $CU=CA-AN-NU=\frac{bdc-a\left(d+c\right)z}{dc}$. Donc, avec la première relation, $CR:PR=QU:CU$, il exprime z en fonction de y et x : $z=\frac{bc\left(dx-ay\right)}{\left(dc-a^2\right)y+a\left(d+c\right)x}$. De la même manière, avec la seconde relation, $ST:PT=QL:SL$, il exprime à nouveau z en fonction des constantes et deux variables, x et y,

$$z=\frac{(a-b)c(ae-ex-ay)}{\left(ec+a^2\right)y+a(e-c)x+a^2(c-e)}.$$

En prenant les deux expressions de z, il arrive à la relation :

$$\begin{gathered}\left((a-b)ce+(ae-bc)d\right)x^2+\left(a^2(d+c-e)+dce\right)xy+\left(a\left(cd-a^2\right)-bc(e+d)\right)y^2\\+\left(abc(d+e)-a^2e(d+c)\right)x-\left(bc\left(a^2-ed\right)+ae\left(dc-a^2\right)\right)y=0\end{gathered}.$$

Il conclut que la courbe est du second ordre car l'équation qui lui est associée est de degré deux[115]. Cette démonstration est clairement analytique et son inspiration est éloignée du lemme 21 des *Principia* (au moins pour la fin de la démonstration) mais proche de la démonstration d'une proposition[116] de l'*Arithmetica Universalis* de Newton. En effet, dans ce livre, Newton donne quelques problèmes de type géométrique qui peuvent être résolus grâce à l'algèbre. L'étude des sections coniques est un exemple des problèmes qui sont résolus dans cet ouvrage. En résumé, la démonstration de Maclaurin est proche de celle de l'*Arithmetica* de Newton. De plus, Maclaurin reconnaît lui-même, après les deux corollaires de la première proposition, que le résultat se trouve dans les *Principia* et l'*Arithmetica Universalis* avec deux démonstrations d'inspiration différente. Dans le premier ouvrage, elle est géométrique, dans le second, algébrique. Dans le *Geometria* de Maclaurin et l'*Arithmetica* de Newton, le but est d'arriver à une expression algébrique du second degré en prenant comme point de départ des triangles semblables. La différence notable est que Newton ne prend pas des projetés orthogonaux pour exprimer la position

---

[115] « Cum vero in hac Aequatione variabiles Quantitates x & y ad duas tantum Dimensiones ascendant, manifestum est curvam describi primi Generis seu Lineam secundi Ordinis ; cujus Intersectiones cum Linea recta possunt esse duae. » in Maclaurin, (1720c), p. 3

[116] Prob. LVII : « Si angulus datus, CAD, circa punctum angulare, A, positione datum, & angulus datus, CBD, circa punctum angulare, B, positione datum, ed lege circumvolvantur, ut crura, AD, BD, ad rectam positione datam, EF, sese semper intercent : invenire lineam illam curvam, quam reliquorum crurum, AC, BC, intersectio, C, describit. » *In* Newton, *Mathematical papers*, vol. 5, pp. 304-305 ou dans *Opera* p. 156 band 1. Signalons que dans les *Mathematical Papers*, le problème est numéroté 53, tandis dans les *opera*, il est le 57[ème].

du point à étudier contrairement à Maclaurin qui, quant à lui, est très attaché à prendre des axes orthogonaux. Une des raisons pour lesquelles Maclaurin s'attache à utiliser des axes orthogonaux est le souci de simplifier les calculs. La démonstration de Maclaurin est nettement plus détaillée et ce dernier prend par la main son lecteur, tandis que celle de Newton est plus concise et il n'est pas précisé que les triangles sont semblables. A la suite de la démonstration, Newton donne les différents cas qui peuvent se produire en fonction des conditions initiales telles que la distance entre les deux sommets des angles constants, la valeur des angles. C'est ce que Maclaurin fait dans la proposition 2 en y ajoutant, aussi, la détermination des asymptotes à ces courbes. Le premier corollaire de la proposition une indique que la section conique construite dans la proposition une passe par les sommets des angles, C et S.

Comme dans le problème LIX de l'*Arithmetica Universalis* de Newton, Maclaurin donne le problème inverse de la proposition 1, c'est-à-dire décrire une conique passant par cinq points[117]. Des cinq points qu'il nomme *A*, *B*, *C*, *S*, et *D*, il prend deux points, *C* et *S*, comme sommets et il considère les deux angles $\widehat{ACS}$ et $\widehat{ASC}$ (Fig. 12). Pour plus de clarté, nous allons remplacer les deux angles constants mobile autour du centre, $\widehat{\mathrm{FCO}}$ et $\widehat{\mathrm{KSH}}$ où lorsque F sera sur la droite CS (comme sur la figure ci-dessous) et K aussi sur cette même droite, alors le point d'intersection des deux autres branches est *A*.

[117] « Prop IV. Lineam Secundi Ordinis ducere per data quaevis quinque puncta ; & Lineam datae speciei per quatuor quaevis puncta describere. » in Maclaurin (1720c), p. 9.

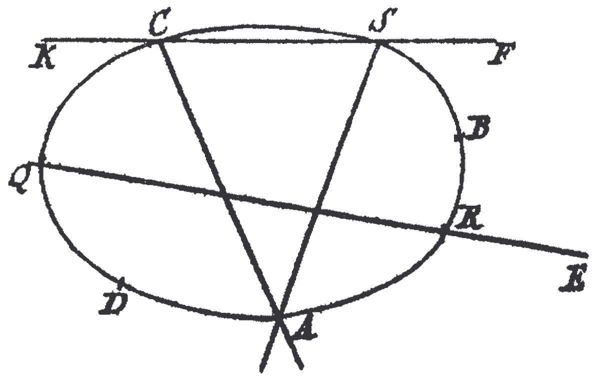


Fig. 12.

Le premier temps de la démonstration est de trouver la droite sur laquelle le point d'intersection des deux premières branches des angles, SK et CF, se déplace. Pour construire cette droite, Maclaurin prend deux cas de figure. Lorsque les deux branches autres que SK et CF (CO et SH), se croisent en B, alors SK et CF se croisent en un point qu'il nomme Q. De même lorsque les deux branches autres que SK et CF se croisent en *D*, alors les branches, SK et CF admettent comme point commun un point nommé *R*. Ainsi la droite recherchée est la droite *QR*. Le deuxième temps de la démonstration revient à faire décrire le point d'intersection des premières branches des deux angles, CF et SK, sur la droite QR. Alors, d'après la première proposition, le point d'intersection des deux autres branches décrit une conique. Or ce dernier point d'intersection passe par B, D, et A (c'est grâce à ce point que tout a commencé), donc B, D et A sont sur une conique. De plus, par le corollaire 1 de la proposition une, les sommets sont aussi sur cette conique. Par conséquent, Maclaurin a bien montré que par cinq points passent une conique.

Il est intéressant de noter que pour la proposition 22 du livre 1 des *Principia*, Newton donne deux démonstrations. Dans la première, Newton adopte une démarche géométrique dans laquelle la cinématique, le mouvement et le déplacement de points sont très importants. Elle diffère largement de celle de Maclaurin. Maclaurin a copié la deuxième démonstration de Newton.

Maclaurin s'intéresse relativement peu aux sections coniques dans cet ouvrage, ces sections coniques ne sont ici que comme la première étape dans son processus de construction des courbes algébriques d'ordres quelconques. Ainsi, très rapidement, il cherche à décrire une construction qui permet de trouver les courbes algébriques du troisième ordre. En effet dans les sections 2 et 3, il donne toutes les courbes algébriques du troisième ordre avec ou sans point double, contrairement à Newton qui s'était arrêté à celles avec point double. Ainsi, par une construction analogue à celle de la première section, c'est-à-dire avec des angles constants et des droites données, il donne ce qu'il avait simplement énoncé dans l'article des *Philosophical Transactions* cité plus haut.

Dans le *Geometria Organica*, il en donne la démonstration. La proposition V est « Soit, comme dans la prop. I, *FCO* angle constant donné tournant autour de son sommet *C* ; et soit un angle *LNQ* constant dont le sommet *N* parcoure la droite donnée *AE* telle que la branche *NQ* passe toujours par un point fixe *S* ; si le point de concours des branches *CF* et *SN* est toujours sur une droite BQ, alors le point d'intersection entre *CO* et *NL* décrit une ligne courbe du troisième ordre. »[118] (Fig. 13)

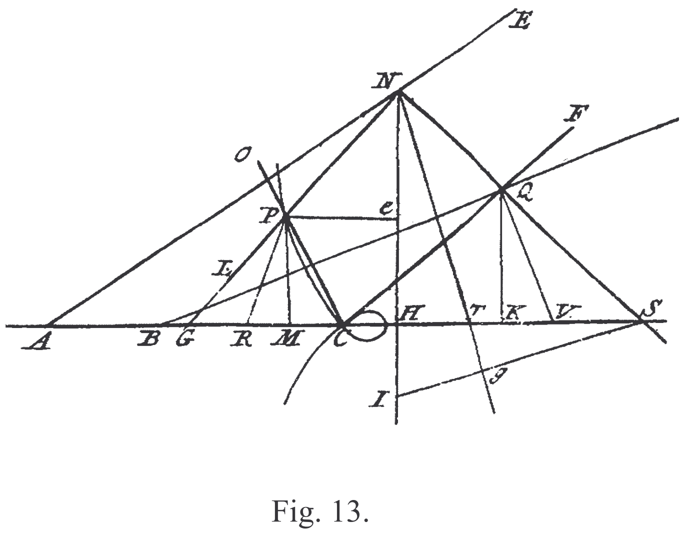


Fig. 13.

[118] « Moveatur ut in Prop. I. Angulus datus FCO circa Polum C ; & interea Angulus datus LNQ semper percurrat, angulari suo puncto N, Rectam infinitam AE, ita ut Crus NQ perpetuo transeat per datum punctum S ; si concursus crurum CF & SN ducatur per rectam infinitam BQ concursus crurum CO & NL describet Lineam tertii Ordinis. » In Maclaurin (1720c), p. 11.

Cette proposition reprend la construction de la proposition 1 que l'on a étudiée plus haut à la différence près que pour le deuxième angle, ce n'est pas le sommet qui est fixe mais une autre point par lequel passe une branche du deuxième angle. La démonstration reprend l'esprit de celle de la première proposition. Nous ne la reprenons pas car elle est fastidieuse, mais elle ne pose pas plus de difficulté de lecture que celle de la première proposition. En exprimant de deux façons différentes la longueur *HN*, Maclaurin arrive à une équation du troisième degré qu'il donne sous forme simplifiée : $Ay^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dx^3 + Ey^2 + Fxy + Gx^2 = 0$ où les constantes sont fonctions des conditions initiales, c'est-à-dire de la valeur des angles constants, des distances entre les points *C* et *S*, *B* et *C*, etc. Ainsi, en fonction des valeurs respectives de ces constantes, il donne une partie des courbes décrites par Newton dans l'*Enumeratio*.

La proposition IX nous donne le cas particulier de la proposition V dans lequel, lorsque *NL* passe par *C*, la branche *CO* de l'angle *FCO* coïncide avec *NP*. Dans ce cas, la courbe est la réunion d'une conique et d'une droite. Ce que Maclaurin signale comme n'étant plus une courbe du troisième ordre mais simplement une section conique.

Avant de voir comment Maclaurin procède pour engendrer des courbes d'ordres supérieurs, signalons que, déjà dans la section XXI[119] de l'*Enumeratio*, Newton indique une méthode pour générer des courbes d'ordre supérieur. En effet, si l'on prend deux angles donnés qui tournent autour de leurs sommets et que le point de concours des deux premières branches des angles se déplace sur une section conique alors le point de concours des deux dernières branches génère soit une section conique soit une courbe de troisième ordre ou même une courbe d'ordre 4 ayant deux points doubles (fig. 14).

---

[119] Newton (1704), pp. 158-9

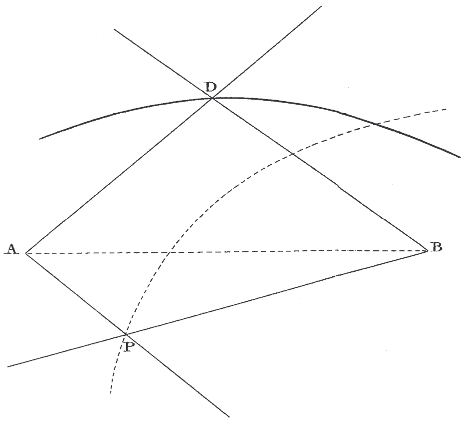


Fig. 14.

Bien entendu, comme dans le reste de l'ouvrage, Newton ne donne pas de démonstration pour ces différents résultats. Cette façon d'engendrer des courbes à partir d'une section conique prolonge ce que Newton a déjà fait pour la description des sections coniques et que Maclaurin utilise dans la première partie du *Geometria*. Dans cette même section de l'*Enumeratio,* Newton énonce la propriété qui annonce que l'on peut décrire une conique passant par cinq points, mais en plus, il donne la propriété suivante : sept points suffisent pour décrire une courbe de troisième ordre ayant un point double. Cette propriété n'est pas reproduite par Maclaurin dans le *Geometria Organica* car ce n'est pas le but de Maclaurin d'étudier de façon systématique toutes les propriétés possibles concernant ce type de courbes. Son ambition est plus importante. Newton ne va pas plus loin dans cette étude. Il annonce également sans démonstration ni résultat que certaines des courbes d'ordres supérieurs peuvent être décrites de la même manière, c'est-à-dire engendrées par le mouvement de leur lieu[120.]

Ainsi, Newton donne l'idée que l'on peut construire des courbes à partir d'autres courbes parfaitement connues. Mais il s'arrête au cas où la courbe génératrice est une conique. En revanche, Maclaurin développe cela dans le *Geometria*. Dans la première

[120] « Eadem methodo Curvas tertii, quarti & superiorum generum describere licet, non omnes quidem sed quotquot ratione aliqua commoda per motum localem describi possunt » *In* Newton (1704), p. 160.

partie, il utilise cette même idée en changeant en partie les paramètres, ce que nous verrons par la suite. Dans la deuxième partie, comme nous l'avons déjà signalé plus haut, Maclaurin s'attache à donner des méthodes pour décrire des courbes algébriques d'un certain ordre à partir de courbes d'ordre inférieur. Il est possible de prendre appui sur des courbes d'un certain ordre (Newton utilise des sections coniques), pour en construire d'autres. Dans les sections I et II de la deuxième partie, Maclaurin développe largement ce que Newton a initié en reprenant les théorèmes énoncés par Newton. À ces théorèmes, il adjoint une démonstration. De plus, si au lieu d'une section conique, le lieu du point de concours des deux premières branches est une courbe algébrique d'ordre n alors, le point de concours des deux autres branches engendre une courbe d'ordre $2n$.[121] À la suite de la démonstration de cette proposition, Maclaurin déclare qu'il y a deux voies pour développer les deux premiers théorèmes de Newton et rendre la description organique des courbes de Newton universelle. La première est d'ajouter des angles et des droites comme Maclaurin l'a annoncé dans son article des *Philosophical Transactions*. La seconde est de ne pas considérer que les sommets des angles soient fixes, mais de les considérer se déplaçant sur des courbes[122]. Il nous apparaît important de s'arrêter sur ces deux voies de recherche pour montrer comment Maclaurin a largement dépassé l'intuition newtonienne et a fait sienne la description organique et ainsi dire que contrairement au titre de la section une de la seconde partie[123], la méthode utilisée est une description organique « maclaurinienne ».

Dans la section 2 de la première partie, Maclaurin s'attache à donner de façon systématique toutes les courbes énumérées dans l'ouvrage de Newton. Il le fait à la fois pour donner une validité et une universalité à sa méthode mais aussi pour donner une réelle

---

[121] Proposition III *In* Maclaurin (1720c), p. 85.
[122] « Prop. I, & II. Post enumerationem Linearum tertii Ordinis protulit *Neutonus*, atque eas universaliores reddi posse ibidem innuit ; quod *Prop.* Hac 3 conati sumus efficere. In his unicam Lineam curvam & duos tantum angulos ad lineas superiores ducendas adhibuimus ; sequentibus vero omnes *Partis 1*. Propositiones universales reddere conabimur, quemadmodum hanc Propositionem I. *Partis* I. quam fieri potest generalem reddidimus. » *In* Maclaurin (1720c), p. 86.
[123] « Ubi demonstratur Organ Curvarum descriptio Neutoniana »

démonstration aux propositions énoncées dans l'*Enumeratio*. Maclaurin réalise sans problème ce double projet. Il montre que les courbes décrites dans l'*Enumeratio* sont bien des courbes mécaniques c'est-à-dire issues de la méthode de Maclaurin. Ce qui fait l'originalité de Maclaurin par rapport à Newton dans ce type de géométrie, c'est que Maclaurin donne une méthode qui résout le problème que Newton considérait comme très difficile c'est-à-dire étudier et donner les courbes du troisième ordre sans point double. C'est le sujet de la troisième section. Nous allons voir très rapidement comment il procède et de quelle manière, il arrive à passer cette difficulté. Cette manière constitue un trait remarquable. En effet, Newton est resté « bloqué » sur cette construction car il a voulu que les sommets des deux angles soient fixes. Maclaurin, lui, a résolu le problème en annonçant que fixer les sommets ne permettait pas d'universaliser cette méthode de construction. Par contre, en déplaçant les sommets des angles suivant des droites définies, cette construction gagne en profondeur et permet de donner des courbes de degré quelconque (ou presque).

C'est avec cette nouvelle façon de voir les points mobiles et ceux qui ne le sont pas que Maclaurin construit dans un premier temps des courbes d'ordre 4. Ainsi, il prend trois droites fixes et deux angles donnés. La première branche du premier angle passe par un point fixe, la deuxième du second angle passe par un autre point fixe. Les sommets des angles parcourent chacun une des droites fixes. Et le point d'intersection de la deuxième branche du premier angle et de la première branche du deuxième angle se déplace sur la troisième droite. Alors le point d'intersection de la première branche du premier angle et de la deuxième branche du second angle décrit une courbe du 4ème ordre[124] avec deux points doubles, les points fixes du départ. La démonstration de cette propriété est du même

[124] « Angulorum datorum CNL, SRQ crura CN & SR semper transeant per data puncta C & S ; Puncta vera angularia N & R percurrant Rectas infinitas AN & DR ; dico si concursus crurum NL & RQ ducatur per rectam BQ concursum crurum CN & SR descripturum Lineam quarti Ordinis » *In* Maclaurin (1720c), p. 46.

type que celles que nous avons précédemment étudiées. Les axes de coordonnées sont toujours orthogonaux. Il donne plusieurs propriétés dans lesquelles les points fixes ne sont pas les mêmes et donc la construction qui en découle est modifiée. Par exemple, si on inverse le rôle des deux points d'intersection, on arrive à une quartique ayant un point triple. Et comme corollaire de cette construction, si les droites fixes sont parallèles, alors la courbe est une cubique. Il retrouve ainsi, comme des cas particuliers une partie des résultats qu'il avait trouvés dans les deux premières sections. Mais, dans le Scholie de la page 59, il déclare qu'il ne peut faire la description de toutes les courbes algébriques d'ordre 4 car cela est trop ardu et trop fastidieux. Il généralise les différentes propriétés de cette section en disant que des quatre points particuliers que sont les sommets des angles, et les points d'intersection des branches des deux angles, trois se déplacent sur des droites définies, alors le quatrième point décrit une quartique. Cette section était simplement une mise en bouche de la section suivante où il va généraliser ce qu'il a fait précédemment. Décrivons les différentes étapes pour arriver au théorème final qui clôt la première voie qu'il a choisi de prendre pour étudier les courbes algébriques d'ordre supérieur.

Dans un premier temps, il explique comment il crée ce que nous appelons une suite d'angles. Ce sont des angles de mesures constantes dont les branches sont liées (la seconde branche d'un angle est la première branche de l'angle suivant) et dont les sommets décrivent des droites données. La première branche passe par un point fixe S (fig. 15).

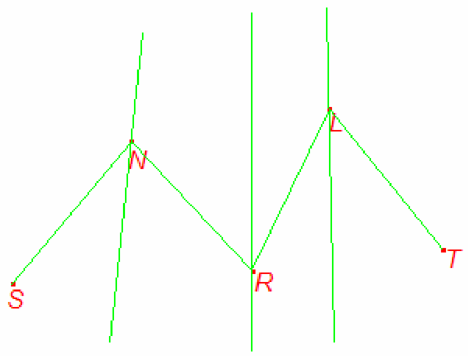


Fig. 15.

Dans un second temps, il donne quelques propriétés dont la première est : soit une suite de *n* angles (fig. 16), soient deux points fixes *C* et *S*, un point mobile *P* appartenant à la dernière branche de la suite d'angles tels que *CPL* (où *L* est le sommet du dernier angle de la suite) forme un angle constant, alors *P* décrit une courbe algébrique d'ordre $n+2$ quand les points *N*, *R*, *L*, etc. décrivent des droites fixes[125].

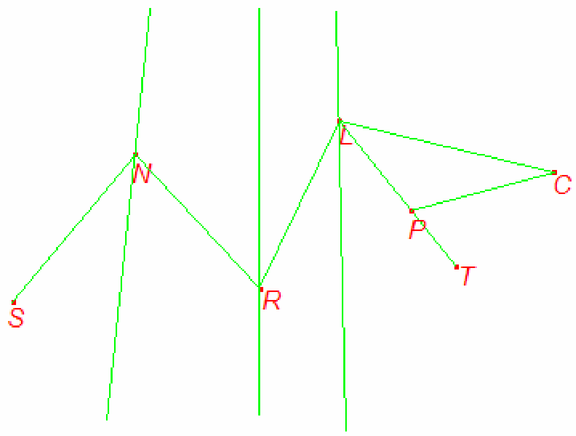


Fig. 16.

Dans notre exemple de la figure 16, le nombre de sommets est égal à 3, donc *P* décrit une courbe algébrique d'ordre 5 quand les points, *N*, *R*, *L*, décrivent des droites fixes. Par cette

[125] « Prop. XX. Caeteris manentibus ut in Lemmate praecedenti, detur aliud punctum C, ex quo in LT demittatur semper CP angulum CPL datum constituens ; moveantur puncta N, R, L, &c. per rectas suas AN, DR, GL, & punctum P interea describet Lineam Ordinis *n*+2 si *n* denotet numerum datarum rectarum. » *In* Maclaurin (1720c), p. 63.

propriété, on peut aussi retrouver quelques cubiques, en effet, si $n=1$, alors $n+2=3$ et donc P décrira une cubique. La propriété suivante[126] permet la construction d'une courbe algébrique de degré $n+1$ en prenant une droite donnée BQ, un point fixe C, un suite de $n-1$ angles et un autre angle FCO en rotation autour de son sommet (fig. 17).

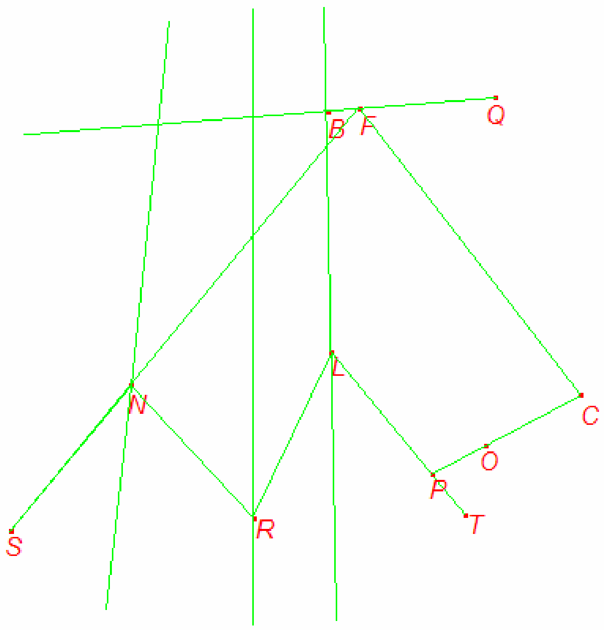


Fig. 17.

Si, maintenant, le point d'intersection entre la première branche de la suite d'angles et la branche FC parcourt la droite BQ, alors l'intersection entre la dernière branche de la suite d'angles et la branche CO engendre une courbe algébrique d'ordre $n+1$. En particulier, si $n=3$ alors la courbe décrite sera une quartique avec un point triple en C et on retrouve le résultat de la propriété 19 déjà citée[127]. En reprenant la construction de la dernière propriété (fig. 17), c'est-à-dire une suite de $n-1$ angles, d'un autre angle FCO en rotation autour de son sommet C, d'une droite fixe BQ sur lequel se déplace le point d'intersection de la $r^{\text{ième}}$ branche de la suite d'angles et de la première branche FC,

---

[126] « Prop. XXI. Caeteris manentibus ut in Lemmate 3 detur Positione alia recta BQ, angulus FCO, & punctum aliud C ; circa quod ut Polum moveatur angulus rectam BQ, si puncta N, R, L, rectas suas infinitas percurrant concursus crurum CO & LT describet Lineam Ordinis n+1, si n denotet numerum Rectarum omnium positione datarum » *In* Maclaurin (1720c), p. 65.
[127] Corollaire 7 *In* Maclaurin (1720c), p. 67.

Maclaurin annonce[128] que le point d'intersection entre la dernière branche de la suite d'angle avec *CO* décrit une courbe algébrique d'ordre $n+r$ quand les points N, R, etc. décrivent les droites données.

Pour démontrer ce résultat, Maclaurin aborde cette propriété comme une extension de la précédente. La dernière propriété[129] que nous qualifions de préparatoire reprend l'étude d'une suite d'angles à laquelle il ajoute une autre suite d'angles. Ainsi, soient deux suites d'angles satisfaisant aux conditions que nous avons citées plus haut, la première de *n* angles, la seconde de *m* angles, si le point d'intersection des dernières branches de chaque suite se déplace sur une droite fixe donnée, alors le point d'intersection des premières branches des deux suites engendre une ligne courbe de degré $n+m+2$.

Il reprend le même principe que la démonstration pour exprimer les équations algébriques des courbes de second ordre vue plus haut. Il va exprimer une même quantité de deux façons différentes en utilisant, premièrement la première suite d'angles, et deuxièmement la seconde suite. Avec la première suite et grâce à la propriété 21, il exprime AQ sous forme de fraction rationnelle de la forme $\frac{Ax^{n+1}+Bx^n y+\cdots}{ax^{n+1}+bx^n y+\cdots}$ où x et y sont les coordonnées du point d'intersection dont on recherche le lieu.

[128] « Prop. XXIII. Caeteris manentibus ut in Prop. 21. ducatur concursus crurum CD & RL per rectam infinitam BQ, & si numerus (r) exprimat ordinem rectae RL in serie rectarum SN, NR, RL, LT, &c. concursum crurum CO & LT describet Lineam Ordinis $n+r$ » *In* Maclaurin (1720c), p. 68.

[129] « Prop. XXIV. Sumantur ad libitum rectae in eodem plano ubicunque positae BN, ER, FT quarum sit numerus (n). Sumantur etiam ad libitum aliae rectae DM, GL,HK quarum sit numerus (m) sint anguli CNR, NRT, RTQ, &c. atque anguli SML, MLK, LKQ, &c. invariati ; dentur puncta C & S, at puncta angularia N, R, T, M, L, K ducantur per rectas infinitas BN, ER, FT, DM, GL, HK, & concursus crurum TQ & KQ per rectam AQ ; dico concursum crurum CN & SM descripturum Lineam Ordinis $n+m+2$. » *In* Maclaurin (1720c), p. 72.

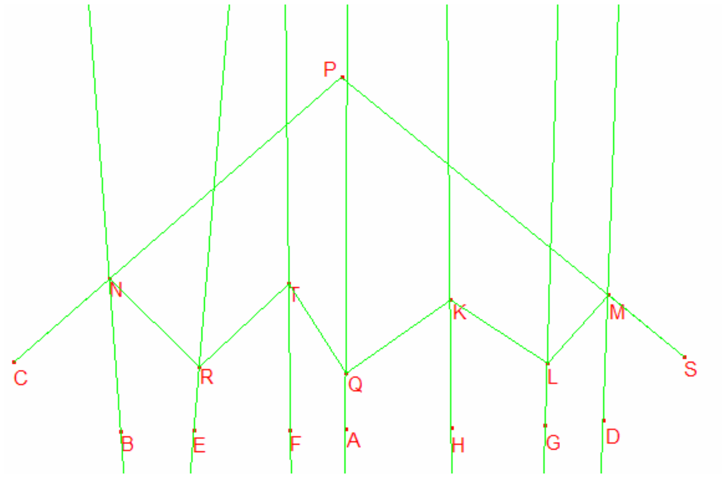


Fig. 18

En utilisant le même principe mais en prenant appui sur la seconde suite d'angles, il trouve pour cette même quantité l'expression suivante $\frac{Ex^{m+1} + Fx^m y + \cdots}{ex^{m+1} + fx^m y + \cdots}$. Ensuite, il relie ces deux expressions et donne l'équation algébrique du lieu qui peut être mise sous la forme, $\left(Ax^{n+1} + Bx^n y + \cdots\right)\left(ex^{m+1} + fx^m y + \cdots\right) = \left(Ex^{m+1} + Fx^m y + \cdots\right)\left(ax^{n+1} + bx^n y + \cdots\right)$, qui sous forme développée est bien une équation algébrique d'ordre $n+m+2$. Dans le corollaire 5 de cette propriété, il déclare que l'ordre de ce type de courbes est un maximum et qu'il peut ne pas être atteint.

La troisième et dernière étape de cette partie du corpus de Maclaurin nous fournit deux résultats : le premier est celui qu'il avait énoncé dans les *Philosophical Transactions*[130] et le second est une généralisation du premier. En prenant la même construction que celle de la proposition 24, il s'intéresse[131] non pas à l'intersection entre les premières branches des suites, mais à l'intersection entre la $s^{\text{ième}}$ branche de la première suite et de la première branche de la seconde suite. Alors le lieu de cette intersection, O,

[130] Maclaurin (1720b), pp. 944-5.
[131] « Prop. XXV. Caeteris manentibus ut in Prop. 24. concurrant rectae RT & SM in O, & si puncta N, R, T, Q, K, L, M, O omnia ducantur per rectas positione datas praeter unum quodvis, dico id unum descripturum Lineam Ordinis $ms+s+n+1$ si s denotet ordinem Lineae RT in serie rectarum CN, NR, RT, TQ. » *In* Maclaurin (1720c), p. 74.

est une courbe algébrique de degré $s(m+1)+n+1$ (fig. 19).

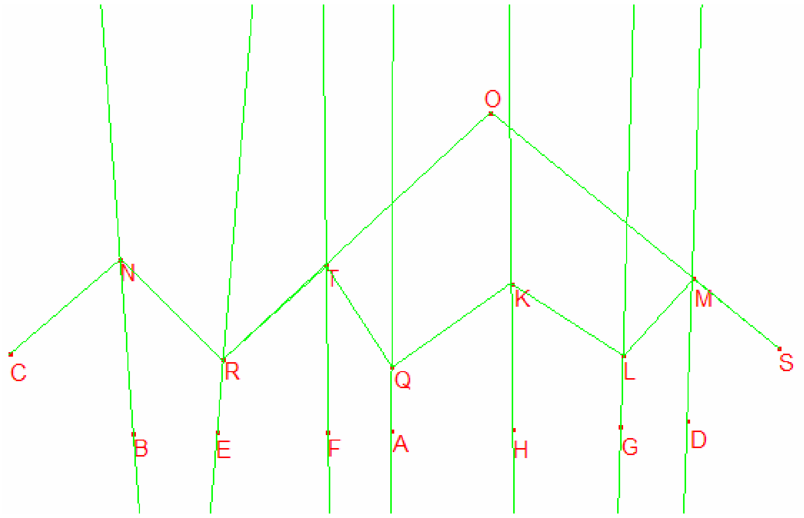


Fig. 19

La démonstration suit le même principe que celle de la proposition précédente. Maclaurin exprime de deux façons différentes une même ordonnée, OY où Y est le pied de la perpendiculaire sur la droite CS qui fait office d'axe des abscisses de centre C. La première utilisant la première suite d'angles, la deuxième la seconde suite. Étant équivalente à la précédente, nous ne nous étendons pas plus sur la démonstration.

De cette propriété vient naturellement une extension. Dans cette proposition, Maclaurin s'intéresse à l'intersection entre la $s^{\text{ième}}$ branche de la première suite d'angles à la $r^{\text{ième}}$ branche de la seconde. Alors le lieu décrit par ce point est une courbe algébrique de degré $ms+s+nr+r$ ou écrit sous une forme différentes, $s(m+1)+r(n+1)$[132] (fig. 20).

[132] « Prop. XXVI. Caeteris manentibus ut in Prop. 24. si (s) exprimat ordinem rectae RT in serie rectarum CN, NR, RT? TQ, & (r) ordinem rectae LK in serie SM, ML, LK, KQ, Linea descripta motu puncti O concursus rectarum RT, LK, dum puncta N, R, T, Q, K, L, M percurrunt rectas infinitas datas BN, ER, FT, AQ, HK, GL, DZ, erit ordinis $ms+nr+s+r$ » *In* Maclurin (1720c), p. 75.

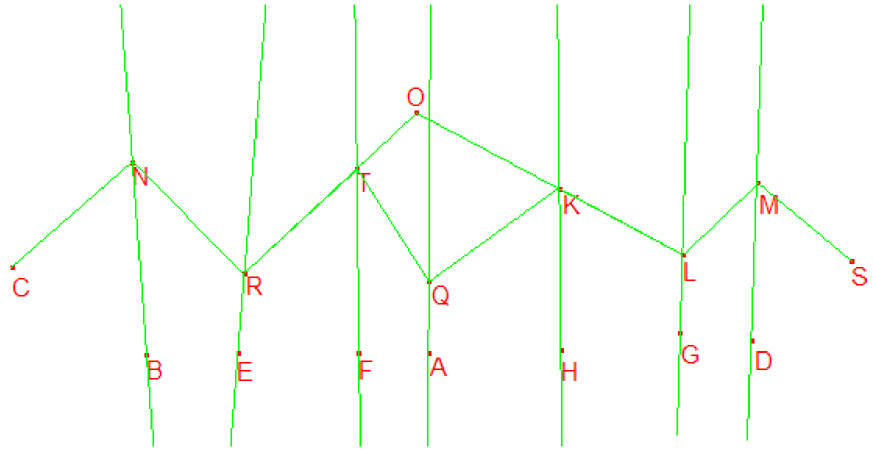


Fig. 20

Ce résultat qui clôt la première partie est la propriété universelle annoncée par Maclaurin au début de son ouvrage. Il conclut cette partie par un scholie général dans lequel il fait référence à différents savants connus pour avoir « découvert » des courbes particulières. Il cite donc Fermat, Varignon, De la Hire ou encore Nicole. Mais, il marque encore une fois la filiation certaine entre ce qu'il a fait dans cette partie pour la génération de courbes algébriques et les écrits de Newton sur les lignes courbes du troisième ordre. Il reconnaît qu'avec sa méthode, il ne construit qu'une partie des courbes algébriques, mais qu'elle jalonne la voie pour rendre cette théorie parfaite[133].

4. La méthode des podaires : une nouvelle catégorie de courbes.

Dans la section 3 de la partie 2 du *Geometria*, Maclaurin donne une « nouvelle » génération de courbes qui sera reprise au 19ème siècle sous le terme de podaire. Nous avons signalé dans la première section de cette partie que les podaires étaient déjà présentes dans un article que Maclaurin a fait paraître dans les *Philosophical Transactions*. Dans cet

[133] « Nos vero tantum sinem in praecedentibus affecutos esse nequaquam profitemur ; cum varia de curvarum descriptione problemata proponi possint quibus construendis ea non sufficiunt ; sed ad eam Geometriae perfectionem obtinendam viam struunt quae jam demonstravimus, & ad eundem sinem conducere poterint quae sequenti parte sumus demonstraturi. » *In* Maclaurin (1720c), p. 78.

article, il annonce la construction et les particularités de ce type de courbes. Son utilisation des fluxions est relativement libre et il ne donne pas véritablement de démonstration. En revanche, dans la section 2 de la deuxième partie du *Geometria*, Maclaurin s'attache à donner plus de détails, il s'efforce d'utiliser les fluxions de façon plus précise. Nous donnerons dans un premier temps la définition des podaires de Maclaurin, puis nous regarderons comment il procède pour mettre en relation la courbe initiale et sa podaire, enfin à travers quelques résultats nous montrerons sa méthode pour trouver les podaires ainsi que la rectification de ces mêmes podaires.

Soient une courbe quelconque, *BLl*, et un point fixe du plan de la courbe, S, de ce point tirer les perpendiculaires aux tangentes à la courbe *BLl* (fig. 21).

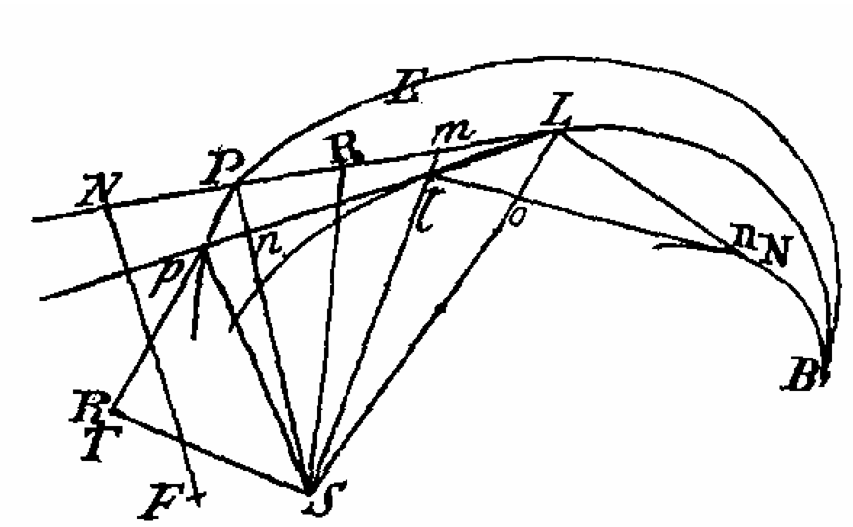


Fig. 21.

Les pieds des perpendiculaires décrivent une courbe, l'objet d'étude. Cette dernière n'est jamais nommée podaire par Maclaurin. Ce terme sera introduit au 19ème siècle. Pour étudier cette courbe, il introduit deux axes orthogonaux dont l'axe des abscisses et *BS* avec *S* considéré comme le centre de ce repère. Les coordonnées de *L* sont nommées x et y. Il suppose que, quels que soient x et y, le rapport $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{m}{n}$ existe avec m et n des quantités finies. En d'autres termes, il suppose que la courbe initiale admet des tangentes en tout point, L. Soit P le pied de la perpendiculaire en L à la courbe passant par S, alors $SP = \frac{my - nx}{\sqrt{m^2 + n^2}}$. Ce résultat, donné sans démonstration, et $SL = \sqrt{x^2 + y^2}$ caractérisent la courbe engendrée. En effet, à partir des coordonnées et de leurs fluxions, Maclaurin exprime un rayon entre le pôle S et la courbe podaire, « facile erit ex curvae aequatione ad axem quemvis data rationem radii *SL* ad *SP* invenire, & vice versa ex ea ratione data curvae aequatio deduci potest, sed difficilium potest »[134]. Ainsi, il accorde plus d'importance au rapport $\frac{SL}{SP}$ et c'est même ce rapport qui est à la base de sa théorie des podaires.

En effet, en utilisant des triangles semblables, les relations ci-dessus ainsi que l'équation de la courbe *BLl*, il exprime une équation dont les variables sont *SL* et *SP* où *SL* désigne le rayon entre la courbe et le centre *S*, et où *SP* désigne le rayon entre le centre *S* et la podaire ainsi construite. Cette équation est appelée par Maclaurin, équation radiale[135].

Dans le premier corollaire de la proposition 9, si on considère la podaire comme une courbe en tant que telle, alors on peut construire la podaire de celle-ci, et ainsi de suite. Maclaurin considère la suite des podaires à une courbe. Il peut être intéressant d'exhiber non pas la première podaire mais la seconde ou la troisième. La difficulté sera de trouver la relation de récurrence mettant en relation les différentes podaires. Maclaurin donnera cette relation pour les spirales archimédiennes que nous étudierons plus bas. De plus, de l'équation radiale de la première podaire, il est facile de déduire l'équation radiale de la seconde par le même type de rapport. De cela, Maclaurin conclut qu'il est possible de

---

[134] Maclaurin (1720c), p. 95.
[135] « Aequatione radiali » *In* Maclaurin (1720c), p. 96.

considérer la suite de podaires de façon infinie[136]. Maclaurin précise que cette suite est nommée positive et qu'il ne faut pas la confondre avec la suite négative des podaires.

En effet, il annonce qu'en procédant de manière opposée, on peut construire une courbe telle que la première courbe, dans notre exemple *BLl*, soit la podaire de celle-ci, et ainsi de suite. Il considère ces courbes comme les podaires négatives de la courbe initiale[137]. La possibilité de construire des podaires négatives (aujourd'hui, nous appelons cette courbe, antipodaire) offre à Maclaurin une plus grande épaisseur à sa théorie. De plus, il énonce des propriétés qui ont besoin des podaires négatives. Pour construire la première podaire négative de pôle *S*, il prend un point de la courbe initiale, par exemple *L*. À partir de ce point, il trace la perpendiculaire à *SL* passant par *L*. Mais, comment choisir parmi les courbes qui admettent cette perpendiculaire comme tangente ? Maclaurin déclare qu'en fait il ne faut pas prendre un point seul, mais deux points très proches, dans notre exemple *L* et *l*, et choisir comme courbe podaire négative la courbe qui admet comme tangentes les deux droites issues de *L* et de *l* (qui sont très proches).

Il ajoute une propriété intéressante qui dit que d'une podaire de pôle *S*, on peut en déduire les podaires de pôles différents. Si *F* est le pôle de la podaire à construire à partir de la podaire de pôle *S*, si *P* est un point de la podaire initiale, construire la perpendiculaire

---

[136] « Similiter ex curva quam P perpetuo tangit alia nova perpendiculares in ejus tangentes demittendo construi potest, & ex hac tertia ; unde series curvarum infinita ex una quavis deduci potest in unica positione puncti S, & triangula quorum latera sunt semper radii curvarum, perpendicula in tangentes & partes tangentium radiis & perpendiculis interceptae erunt sibi mutuo semper similia. Proinde data aequatione radiali (seu ratione radii ad perpendiculum) unius in serie dabuntur similes aequationes omnium. » *In* Maclaurin (1720c), p. 96.

[137] « *Corol*. II. Sicut autem in *Prop.* Ex curva BL*l* construximus curvam EP*p* ex EP*p* contraria ratione construi posset curva BL*l* ; erigendo nim. perpendiculares in radio SP & S*p* sibi mutuo occurrentes in L ; vel facilius, si detur angulus SP*p* tangentis cum radio, ducendo SL ita ut angulus PSL sit illius anguli SP*p* complementum ad rectum,& ad P normalem radio SP erigendo rectae SL occurrentem in L ; curva enim per omnia hujusmodi puncta I, ducta erit BL*l*, ex qua simili ratione alia construi potest perpendicula ad L & *l* radiis SL & S*l* erigendo, & eorum occursus notando. Unde ex quavis curva series utrinque infinita curvarum construi potest puncto S manente immoto ; quod si locus puncti S mutetur simul mutabitur integra series. Unde in quavis curva infinitae sunt positiones puncti S ex quibus singulis infinitae curvarum series deduci possunt. » *In* Maclaurin (1720c), pp. 96-7.

PN à *PS* et *FN* la perpendiculaire à *PN*, alors le point *N* décrit la podaire de pôle *F*[138]. Cette propriété permet à Maclaurin de ne pas étudier les différents cas de construction de podaires. En d'autres termes, Maclaurin se consacre à l'étude d'un cas particulier, souvent celui que lui semble le plus simple. Puis, s'il veut donner un résultat plus large, il n'a qu'à employer cette propriété pour rendre au résultat un caractère général.

Le premier exemple de construction de podaires que Maclaurin décrit est la podaire du cercle dont le pôle est un point quelconque du plan du cercle. On considère le cercle de centre *C* et de rayon *CL* et *S* le pôle de la podaire. Il prend *B* sur le cercle de telle façon que *S*, *C* et *B* soient alignés. Soient *L* un point du cercle et *P* le point qui lui associé sur la podaire. Alors par construction, *SP* et *CL* sont parallèles. Il construit le cercle de centre *S* de rayon *SC*. *M* est le point d'intersection du cercle de centre *S* et la droite *SP*. *Q* est le projeté orthogonal de *M* sur la droite *SC*. *F* est un point de cette droite telle que $SF = CL$ (c'est-à-dire le rayon du cercle initial dont on cherche la podaire) (fig. 22).

[138] « *Corol*. VIII. Postquam ducta est curva quam P tangit in una positione puncti S reliquae quae ex eadem curva construuntur in alia quavis positione puncti S sic describi possunt ; sit S in F & ex S exeat SPN angulus rectus cujus punctum P ducatur per curvam jam descriptam & si FN sit perpendicularis in PN punctum N describet curvam quaesitam. » *In* Maclaurin (1720c), p. 98.

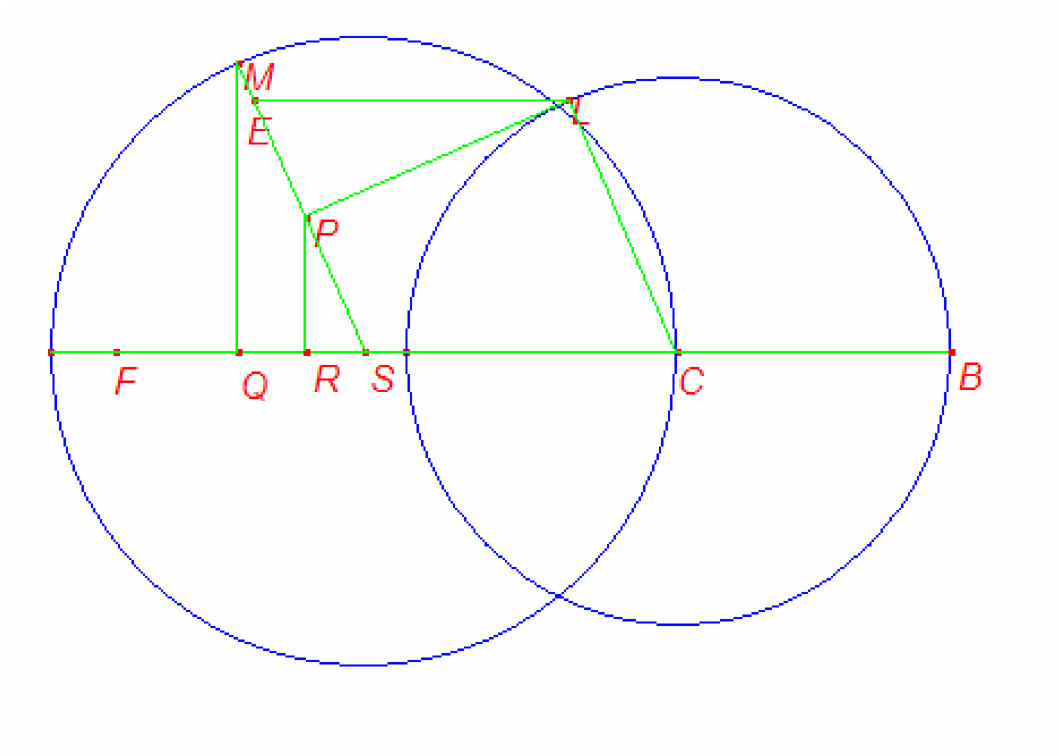


Fig. 22

E est un point de *MS* tel que *LE* soit parallèle *SC*. *R* est le projeté orthogonal de *P* sur *SC*. Il montre tout d'abord que les triangles *LEP* et *QSM* sont semblables. En effet, les angles $\widehat{LPE}$ et $\widehat{SQM}$ sont égaux car ils sont droits. Les angles $\widehat{LEP}$ et $\widehat{QSM}$ sont égaux car les droites *LE* et *QS* sont parallèles et la droite *MS* coupe ces deux droites en *E* et *S* (par la proposition des angles alternes-internes). De cela, on déduit l'égalité des rapports $\frac{EP}{SQ} = \frac{EL}{SM}$. De plus, $EL = SM$ car $EL = SC$ par construction (*ELCS* est un parallélogramme) et $SC = SM$ car *C* et *M* sont sur le cercle de centre *S*. Ainsi, $EP = SQ$.

$FQ = SF - SQ = SE - EP$ car $SF = CL = ES$. Or $SP = SE - EP$. D'où $FQ = SP$.

Par le théorème de Thalès appliqué au triangle *SMQ*, on a l'égalité

$$\frac{SM}{SP} = \frac{SQ}{SR}$$

D'où, sachant que $SQ = SF - FQ = SF - SP$ et en posant, $SM = a, SF = CL = b, SR = x$ et $PR = y$, et $SP = \sqrt{x^2 + y^2}$ on a :

$$\frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{b - \sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$$

Maclaurin met cette expression sous la forme $\left(ax + x^2 + y^2\right)^2 = b^2\left(x^2 + y^2\right)$ qui est une équation algébrique de degré 4. Maclaurin déclare, en guise de conclusion, que la courbe ainsi engendrée est une quartique. Il donne par la suite quelques propriétés de cette courbe. Ainsi, il annonce qu'elle a un point double en *S* si ce point est à l'extérieur du cercle. Si ce dernier point est sur le cercle alors il sera un point de rebroussement (« cupsidata ») et s'il est à l'intérieur alors il sera un point isolé (« nodata ») à la courbe. Comme il l'avait déjà signalé dans son article paru en 1718, la podaire est une épicycloïde décrite par le mouvement d'un cercle de rayon la moitié du rayon du cercle initial tournant autour d'un cercle de même rayon que le cercle initial et de centre le milieu de *S* et *C*. Maclaurin a montré que la courbe ainsi engendrée était rectifiable seulement dans le cas où *S* est sur le cercle. Ainsi, il donne une autre démonstration d'un résultat donné en 1707 par Nicole[139] dans un article où il est montré que les épicycloïdes ne sont pas rectifiables. Il montre ensuite que cette courbe est aussi une conchoïde à base circulaire de diamètre *CS* dont De la Hire a décrit les propriétés en 1708[140]. Maclaurin déclare qu'il est le premier à s'apercevoir de la similitude entre les épicycloïdes et les conchoïdes à base circulaire[141]. Cramer, dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, annonce ce résultat[142] sans faire référence à Maclaurin[143].

---

[139] Nicole (1707)
[140] De La Hire (1708)
[141] « Eorum tamen nemo quantum novi eam Epicycloidem esse observavit » In Maclaurin (1720c), p. 100.
[142] Cramer (1750), p. 431.
[143] Loria (1902), p. 498, l'auteur certifie que c'est Cramer qui, le premier, fait le parallèle entre les épicycloïdes et les conchoïdes.

D’autres résultats importants concernent un type de courbes sur lesquelles Maclaurin s’attarda dans l’article des *Philosophical Transactions*, les spirales sinusoïdales qu’il nomme spirales d’Archimède. Il considère les spirales d’Archimède et montre que leur équation podaire (c’est-à-dire l’équation radiale) est de type $SP = A.SL^{n+1}$ ou $\frac{SP}{SL} = \frac{SL^n}{SB^n}$ où B est un point fixe de la courbe initiale, S le pôle, L le point de la courbe initiale et P le point correspondant sur la podaire (Fig. 23).

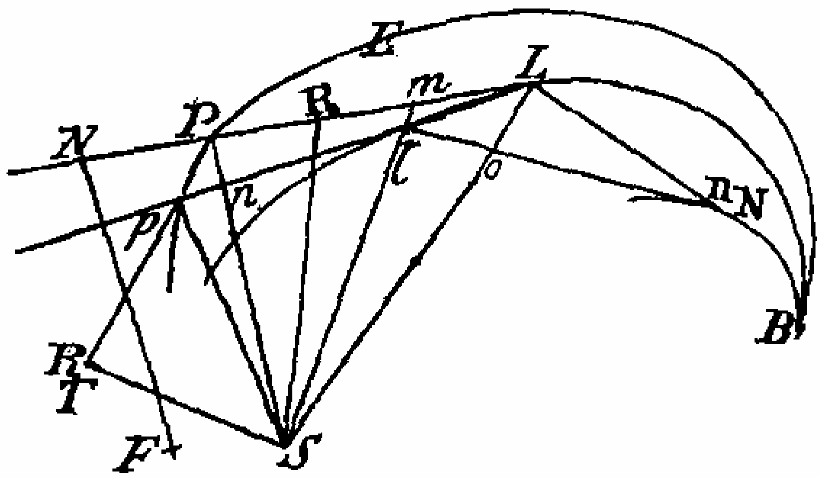


Fig. 23.

Il redonne ce qu’il avait énoncé dans l’article des *Philosophical Transactions*, c’est-à-dire que si la courbe initiale est une spirale sinusoïdale de paramètre n alors la podaire sera elle aussi une spirale sinusoïdale de paramètre $\frac{n}{n+1}$. Pour montrer cela, il a besoin de former l’équation podaire de degré 2. Il construit le pied de la perpendiculaire issue de S à la tangente en P de la podaire, T. Alors, T décrit la podaire de la podaire de même foyer S. Maclaurin exprime le rapport $\frac{ST}{SP}$ et trouve

$$\frac{ST}{SP} = \frac{SP^{\frac{n}{n+1}}}{SB^{\frac{n}{n+1}}}.$$

Ainsi, P décrit bien une spirale sinusoïdale de paramètre $\frac{n}{n+1}$.

De cela, il déduit que si on note L et l deux points très proches de la courbe initiale et P et p leurs points correspondant sur la podaire, alors $\widehat{PSp} = (n+1)\widehat{LSl}$. En d'autres termes, cette relation signifie que la fluxion de l'angle de sommet S de la podaire (dont les branches parcourent la podaire) est égale à $(n+1)$ fois la fluxion de l'angle de sommet S de la courbe initiale (dont les branches parcourent la courbe initiale). Par conséquent, en intégrant cette relation et si B est l'origine de la courbe initiale, alors on a $\widehat{BSP} = (n+1)\widehat{BSL}$. Avec celle-ci, il peut construire la courbe décrite par P. En effet, P est définie à la fois par la longueur qu'il fait avec le sommet S (donnée par exemple par l'équation radiale), SP et par l'angle $\widehat{BSP}$. Ces quantités sont exprimées en fonction des quantités SL et $\widehat{BSL}$ qui correspondent à la courbe initiale et qui la caractérisent (aujourd'hui, nous parlons de coordonnées polaires).

Maclaurin va même plus loin en établissant la rectification de la podaire donnée ci-dessus. Ainsi, dans la proposition XV (Fig. 24), B est toujours l'origine de la courbe initiale, L un point de la courbe, N le point correspondant sur la podaire négative et P le point correspondant sur la première podaire positive. Alors $\widehat{BP} = (n+1)\left(\widehat{BN} + LN\right)$. D'après la relation précédente $\widehat{PSp} = (n+1)\widehat{LSl}$ et par construction $\widehat{SPp} = \widehat{SLl}$, donc on a $\frac{Pp}{Ll} = (n+1)\frac{SP}{SL}$. En posant, o comme le projeté orthogonal de l sur SL et comme L et l sont très proches, les triangles SLP et Lol sont semblables et donc on a la relation $\frac{Ll}{lo} = \frac{SL}{SP}$. Des deux relations précédentes, on a $Pp = (n+1)lo$. Or comme $lo = ln - on$ et que $on = Ln$ (ce sont les côtés du triangle Lon isocèle en n), on a $lo = ln - LN + Nn$. D'où la relation $Pp = (n+1)(ln - LN + Nn)$. Or $ln - LN$ représente le moment (ou la fluxion) de la droite *LN*, *Nn* est la fluxion de l'arc décrit par *N* et *Pp* est la fluxion de l'arc de la courbe décrite par *P* (c'est-à-dire la podaire). Ainsi, en intégrant la dernière égalité et en considérant *B* comme l'origine de la courbe, on a le résultat voulu $\overset{\frown}{BP} = (n+1)\left(\overset{\frown}{BN} + LN\right)$.

Une utilisation que fait Maclaurin de cette propriété est de (re)trouver la longueur de l'épicycloïde à un point de rebroussement (ce que nous appelons la cardoïde). En effet, si *BL* est un cercle et *S* est sur la circonférence de ce cercle, alors la podaire de pôle *S* de cette courbe est bien une épicycloïde à un point de rebroussement. D'après une proposition précédente, il montre que lorsque *BL* est un cercle, alors $n = 1$, et que *B* et *N* coïncident (c'est-à-dire que la podaire négative du cercle est réduite à un point, dans notre exemple *B*),alors en remplaçant *n* et *N* dans la relation $\overset{\frown}{BP} = (n+1)\left(\overset{\frown}{BN} + LN\right)$, on arrive à $\overset{\frown}{BP} = 2BL$. Il conclut donc que la longueur de cette podaire (ce qui est pour nous la moitié d'une cardioïde) est égale au double du diamètre du cercle[144].

Il finit cette section par établir le rayon de courbure des spirales sinusoïdales qu'il vient d'étudier. Avant de donner sa démarche, signalons que Maclaurin considère la normale à la courbe déjà trouvée. Il ne s'interroge pas sur la possible construction de cette normale, comme sur les tangentes à la courbe. Il suppose simplement que les normales existent (car il suppose que les tangentes existent). Pour établir le rayon de courbure, il démontre la relation générale $RL : SL = Lo : Pn$ où *R* est le centre de courbure de la courbe initiale au point *L*. *Lo* est la fluxion de *SL*, *Pn* est celle de *SP* (fig. 24). Cette relation permet d'exprimer le rayon de courbure en fonction de l'équation podaire étudiée plus haut. Il applique cette relation au cas où $SP = \frac{SL^{n+1}}{a^n}$. En différentiant cette égalité, Maclaurin déduit

[144] Maclaurin (1720c), p. 111.

$$Pn = \frac{(n+1)\,Lo.SL^n}{a^n}.$$

Par conséquent,

$$RL = \frac{a^n}{(n+1)\,SL^{n-1}}.$$

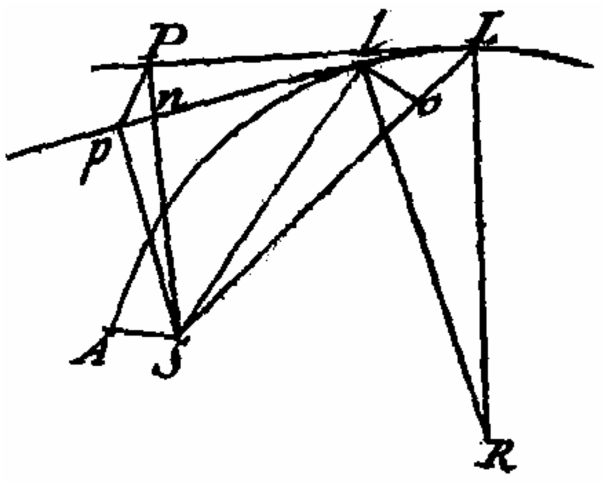


Fig. 24.

Dans cette partie, Maclaurin nous montre une autre facette de ses compétences en géométrie. Par une construction ingénieuse, il permet de (re)trouver des courbes découvertes peu de temps auparavant comme l'épicycloïde ou la conchoïde de cercle, ce qui permet de trouver d'autres caractéristiques de ces courbes. De plus, il montre que d'une courbe, on peut en déduire d'autres qui sont en relation les unes par rapport aux autres. Ainsi, il montre qu'il existe des familles de courbes. Mais, contrairement à ce qu'il a fait dans la première partie du *Geometria Organica*, Maclaurin ne fait pas une étude systématique de ces familles. Nous pouvons noter que, grâce à la construction des podaires, il a mis en relation les épicycloïdes et les conchoïdes ce qui montre qu'il fait une tentative d'organiser la géométrie selon des critères bien spécifiques. Dans la première partie, il les organise en fonction du degré de leurs équations, dans la seconde partie, avec les podaires, il les organise en fonction de leurs courbes génératrices. Nous avons signalé que certains historiens attribuaient à Cramer un résultat donné par Maclaurin dans cet ouvrage, ce n'est pas le seul. Ainsi, nous allons nous arrêter sur le fameux paradoxe de Cramer.

5. Le « Paradoxe de Cramer » chez Maclaurin.

Dans la partie 2 de la section V du *Geometria Organica* se trouve une proposition connue sous le titre de « paradoxe de Cramer ». Ce paradoxe est énoncé par Cramer dans son traité dont le titre est *Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes Algébriques*[145]. Comme l'indique Cramer en notes de bas de page, la paternité de ce paradoxe revient clairement à Maclaurin. En réalité, Cramer ne fait que reprendre les propos de Maclaurin.

Énonçons ce paradoxe chez Maclaurin qui se trouve dans la section V, la dernière de ce traité, s'intitulant « De la description des lignes géométriques par des points donnés »[146]. Dans cette section, Maclaurin donne différentes méthodes pour construire des courbes algébriques ayant des caractéristiques particulières (en particulier des points multiples). Nous les étudierons par la suite.

Cette section commence par l'énoncé d'un lemme dans lequel il annonce que toute courbe algébrique de degré n coupe une section conique en $2n$ points et une courbe de troisième degré en $3n$ points. La démonstration est analytique et procède de la manière suivante. Maclaurin utilise l'équation d'une courbe algébrique d'ordre n sous la forme arrangée suivante :

$$y^n + (ax+b)\,y^{n-1} + \left(cx^2+dx+e\right)y^{n-2} + \cdots + \left(kx^{n-1}+lx^{n-2}+\cdots\right)y + \left(mx^n + px^{n-1}+\cdots\right) = 0$$

dans laquelle x représente l'abscisse et y l'ordonnée, a, b, c, ... étant des constantes

[145] Cramer (1750)

[146] « De Descriptione Linearum Geometricarum per data Puncta » *in* Maclaurin (1720c), p. 135.

données. Il prend l'équation générale d'une section conique arrangée de la même manière : $y^2+(Ax+B)y+Cx^2+Dx+E=0$ où, encore, x et y représentent respectivement l'abscisse et l'ordonnée et où A, B, C, D et E sont des constantes. En utilisant la deuxième équation grâce à laquelle il peut exprimer y^2 en fonction de *y* et de *x*, il exprime toutes les puissances de *y* supérieures à 2 en fonction de *y* et des puissances successives de *x*. Comme on peut exprimer y^2 en fonction de *y* et de *x*, on peut exprimer toute puissance de *y* par celles qui sont inférieures à celle-ci et par suite arriver à exprimer la puissance n$^{\text{ième}}$ de *y* en fonction de *y* et des puissances de *x*. Maclaurin ne donne pas une démonstration précise de cela, il indique simplement que cela est possible[147]. Puis, en remplaçant ces puissances de *y* dans la première équation, il arrive à exprimer *y* comme une fraction rationnelle de *x* de la forme $y=\dfrac{Kx^n+Lx^{n-1}+\cdots}{Hx^{n-1}+Gx^{n-2}+\cdots}$. Il remplace, dans l'équation de la section conique, y par l'expression ci-dessus, et arrive à une fraction rationnelle égale à 0 dont le dénominateur est une relation algébrique d'ordre $2n$. Il conclut en disant que toute équation algébrique d'ordre $2n$ admet $2n$ racines et pas plus donc il y a $2n$ points (et pas plus) d'intersection entre une courbe algébrique d'ordre *n* et d'ordre 2.[148]

Puis, il s'attaque à l'intersection d'une courbe algébrique d'ordre *n* avec une courbe du troisième ordre. Il utilise la même méthode, c'est-à-dire essayer d'exprimer les puissances supérieures de *y* dans la première équation en prenant l'expression algébrique de la courbe du troisième ordre. La forme générale de cette dernière est :

$$y^3+(Ax+B)y^2+\left(Cx^2+Dx+E\right)y+fx^3+gx^2+hx+i=0$$

Ici, il est réduit à exprimer les puissances de *y* en fonction des deux premières puissances

[147] « In prima aequatione pro y^2 substituatur valor ejus quae ex secunda consequitur ; pro y^n, y^{n+1}, y^{n+2} similiter substituantur in aequatione ad Lineam Ordinis (*n*) valores earum quae ex secunda deduci possunt & hujusmodi operatione prodibit aequatio in qua erit *y* unius dimensionis. » *In* Maclaurin (1720c), p. 136.

[148] « Unde harum curvarum occursus possunt esse 2*n* & nunquam plures » *In* Maclaurin (1720b), p. 136.

de y car avec l'équation du troisième ordre, on ne peut écrire y^3 qu'en fonction de y^2 et y et de x. Dans l'équation de la courbe de degré n, il substitue les différentes puissances supérieures à 3 de y, et celle-ci se réduit à une équation d'ordre 2 qu'il met sous la forme $my^2 + py - r = 0$ où m, p, r sont des polynômes en x (de degré maximal $n-2$). Afin d'éviter d'alourdir la démonstration, il donne l'équation du troisième ordre sous la forme $y^3 + iy^2 + hy - k = 0$ sans oublier que les coefficients sont des polynômes en x de degré respectivement 1, 2 et 3. De ces deux équations, il trouve une relation algébrique entre les différentes constantes, m, p, r, k, h, i, qu'il donne sous cette forme :

$$mi^2r^2 - ipr^2 - 2krm^2i + k^2m^5 - p^3k(mi-p) + prh(mi-p) - pkm^2h - r(hm-r^2) = 0\,.$$

Il annonce que m, p, r, k, h, i sont des expressions algébriques en x d'ordre respectivement $n-2, n-1, n, 3, 2, 1$ donc en remplaçant les constantes par leurs expressions respectives en x, on arrive à une équation d'ordre $3n$ en x. Il conclut, par le même théorème que le nombre de points d'intersection est au maximum de $3n$ (nombre maximal de racines d'une équation de degré $3n$). Nous pouvons remarquer encore une fois que ce type de démonstration est clairement analytique, aucune référence à une forme de synthèse n'est présente. Cela renforce encore le fait que Maclaurin a adhéré à ce type de démonstration à la fois par souci de concision et par référence à la géométrie cartésienne qui trouve un écho dans cet écrit de Maclaurin.

À ce lemme, il ajoute plusieurs corollaires. Le premier est une extension du lemme que l'on vient de donner. Ainsi, il énonce que l'intersection de deux courbes algébriques, l'une de degré n, la seconde de degré m, ne peut se faire qu'en mn points maximum. Il ne donne pas une démonstration générale de cette propriété mais simplement il examine le cas où la courbe d'ordre m a comme expression algébrique $y = x^m$. Ainsi, en remplaçant dans la relation algébrique de l'autre courbe y par son expression en x, on arrive bien à une équation en x de degré mn. Ce qui permet d'utiliser toujours la même propriété. Il signale dans ce même corollaire que la démonstration générale est trop difficile et dépasse ce qu'il est capable de faire[149]. Ce corollaire nous permet de dire qu'en n^2 points passe une unique courbe algébrique d'ordre n. Car, d'après le corollaire précédent, deux courbes distinctes de même degré n se rencontrent en maximum n^2 points. C'est de là que vient le paradoxe dit de Cramer. Comme toute expression algébrique à deux variables (ici x et y) d'ordre n a $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$ soit $\frac{1}{2}(n^2+3n)$ coefficients, on peut dire qu'une courbe est définie de façon unique par ses coefficients lorsque $\frac{1}{2}(n^2+3n)$ est strictement supérieur à n^2.[150] Le problème se pose donc pour les courbes du troisième ordre. En effet, pour $n=3$, $\frac{1}{2}(n^2+3n)=n^2=9$. Or, d'après le corollaire 2 et le lemme 3, il est impossible de déterminer une courbe du troisième ordre passant par neuf points ce qui devrait néanmoins se passer[151]. Le but de ce lemme n'est pas d'arriver à cette contradiction sur les courbes du troisième ordre, mais d'étudier l'intersection de différentes courbes. Il ne faut pas oublier que ce lemme inaugure une section dans laquelle Maclaurin s'évertue à donner des courbes passant par des points fixes. Ainsi, les corollaires suivants, 3, 4 et 5 portent sur l'intersection de courbes. Par exemple, dans le corollaire 3, il énonce que si une courbe d'ordre n passe par $nr+1$ points d'une courbe algébrique d'ordre inférieur r, alors soit c'est impossible, soit la courbe d'ordre supérieur (n) se dégénère en une courbe d'ordre

---

[149] « Omnes altiorum curvarum casus quos adhuc frustra quaesivimus proptera quod difficile sit divisores in arduis aequationibus invenire » *In* Maclaurin (1720c), p. 136.

[150] « Cum vero coefficientes in aequatione generali ad Lineam Ordinis (n) sint $\frac{1}{2}(n^2+3n)$, patet si plura dentur puncta, Lineam Ordinis (n) per ea forsan duci non posse & Problema reddi posse impossibile. » *In* Maclaurin (1720c), p. 137.

[151] « Sic novem puncta non adeo plene determinant Lineam Ordinis Tertii ac quinque Lineam Ordinis secundi, decem tamen ad Lineam tertii Ordinis determinandam nimia sunt. » *In* Maclaurin (1720c), p. 137.

$n-r$[152].

La section se termine par trois propositions dans lesquelles Maclaurin montre comment construire des courbes :

- d'ordre n passant par $2n+1$ points fixés dont un est un point multiple d'ordre $n-1$.[153]
- d'ordre $2n$ passant par autant de points qu'il faut pour déterminer une ligne courbe d'ordre n et qui passe par trois autres points qui sont, chacun, multiples d'ordre n.[154]
- d'ordre $2n$ passant par $2n+4$ points donnés dont trois sont des points multiples d'ordre n et un quatrième un point multiple d'ordre $n-1$.[155]

Dans son ouvrage, Cramer est un continuateur de la pensée de Maclaurin. Dépassant le cadre de notre propos, nous ne faisons pas une étude systématique de l'ouvrage de Cramer qui en mérite une malgré tout. Néanmoins, nous remarquerons par la suite que Cramer s'est aussi inspiré d'une partie d'un autre ouvrage de Maclaurin, le *Treatise of Algebra*.

Nous avons vu que Maclaurin maîtrisait déjà des mathématiques fines. En effet, nous avons montré que la construction des courbes algébriques requiert une dextérité à la fois en géométrie et en algèbre. De plus, dans la construction des podaires, il utilise les fluxions de façon systématique et ces dernières sont la base de ce type de construction. Même s'il reste dans le champ de la géométrie, il apparaît assez distinctement qu'il donne un statut assez important à ce type d'objets mathématiques, même s'il faudra attendre 1742 pour lire dans les écrits publiés de Maclaurin une réflexion « axiomatique » des fluxions. Nous nous intéressons dorénavant à un autre écrit traitant de géométrie, le *De Linearum*

---

[152] Maclaurin (1720c), p. 137.

[153] « Prop. XXV. Lineam Ordinis (n) ducere per data puncta $2n+1$, in quorum aliquo oportet arcus curvae $(n-1)$ concurrere. » *In* Maclaurin (1720c), p. 137.

[154] « Prop. XXVI. Ducere Lineam Ordinis ($2n$) per puncta quot sufficiunt ad determinandam Lineam Ordinis (n) & tria alia quae singula nodi sunt arcum curvae (n) se mutuo dessantium » *In* Maclaurin (1720c), p. 138.

[155] « Prop. XXVI. Ducere Lineam Ordinis ($2n$) per puncta $(2n+4)$, quorum tria nodi arcuum curvae (n) in iisdem punctis concurrentium, & quartum similis nodus arcuum $(n-1)$. » *In* Maclaurin (1720c), p. 139.

Geometricarum Proprietatibus Generalibus Tractatus[156] qui fut publié de façon posthume. Il s'agit, comme son titre l'indique, d'un autre corpus de géométrie, et nous remarquerons qu'il est, comme le *Geometria Organica,* une œuvre originale d'une grande fécondité.

[156] Maclaurin (1748a), pp. 369-432

C. *De Linearum Geometricarum Proprietatibus Generalibus Tractatus* : extension du *Geometria Organica* ?

1. Un essai re-paru en annexe du *Treatise of Algebra* de 1748.

Le deuxième écrit de Maclaurin traitant de géométrie apparaît dans un de ses ouvrages posthumes. En effet, l'annexe du *Treatise of Algebra* dont la première édition paraît en 1748 s'intitule *De Linearum Geometricarum Proprietatibus Generalibus Tractatus*[157]. En revanche, aucune indication n'est fournie quant à la période d'écriture de cet ouvrage. Dans la préface de ce dernier, les éditeurs insistent sur le fait qu'il est important de fournir à nouveau cet écrit de Maclaurin qui semble, du vivant de l'auteur, n'avoir jamais été publié. Erik Sageng, à l'instar de plusieurs historiens[158], dans sa thèse sur Maclaurin[159], date la publication de cet écrit en 1720 et déclare qu'il a été publié à Londres et qu'il est très rare. Malheureusement, nous n'avons pu le localiser ni en France ni à l'étranger. Dans leur *Biobibliography of British Mathematics and its Applications*[160], le couple Wallis n'indique aucun ouvrage paru en 1720 autre que le *Geometria Organica*. L'ouvrage des Wallis est une recension importante de tous les ouvrages, touchant de près ou de loin aux mathématiques entre 1701 et 1760, dont l'auteur est britannique.

[157] Pour les premières éditions de cet ouvrage, l'appendice est en latin, puis à partir de la quatrième édition traduite en anglais par Lawson. Dans Jonquières (1856), l'auteur fournit une traduction française du *De Linearum*. Nous prenons pour les citations, la quatrième édition (1779) du *Treatise of Algebra*.
[158] Par exemple, Rouse-Ball dans son *Short Account of the History of Mathematics* déclare que cet écrit de Maclaurin est paru à Londres en 1720. A la lecture de la partie dévolue à Maclaurin, nous sommes étonnés par la méconnaissance de l'auteur du *Geometria Organica* et du *De Linearum*. Dans la description du *Geometria Organica*, Rouse Ball mélange des résultats des deux ouvrages précédemment cités. Turnbull dans son livre sur Maclaurin indique la même référence.
[159] Sageng (1989), p. 16.
[160] Wallis (1986)

Concernant Maclaurin, il est fait recension à la fois de toutes les éditions de ses œuvres et des diverses traductions de ces dernières. Nous avons donc la référence des traductions françaises des divers ouvrages de Maclaurin[161]. Dans les archives de Maclaurin auxquelles nous avons eu accès, il n'est fait mention à aucun endroit d'une version manuscrite ou imprimée du *De Linearum*. De plus, dans sa correspondance, Maclaurin ne fait pas allusion directement à cet ouvrage. Dans l'introduction de l'annexe, l'auteur signale qu'il a eu connaissance d'un résultat de Cotes par le révérend Robert Smith (1689-1768) du Trinity College de Cambridge. La seule fois où Maclaurin fait référence au *De Linearum*, c'est dans une lettre adressée à Sir Martin Folkes datée du 10 janvier 1744 dans laquelle il signale qu'il doit envoyer à Smith, la personne qui lui avait envoyé l'énoncé du théorème de Cotes pour lequel il fournit une démonstration. Ce théorème est inclus dans un projet plus important sur l'étude de des lignes courbes de plus haut degré[162]. Le théorème de Cotes sera cité plus loin. Le résultat dont parle Maclaurin dans cette lettre a été donné par Smith relativement tard par rapport à la publication supposée de l'ouvrage de Maclaurin. Alors comment situer les résultats contenus dans le *De Linearum* dans la vie de Maclaurin ? Dans la lettre ci-dessus, ce dernier déclare qu'il a utilisé des résultats pour élaborer une partie de son *Traité des Fluxions* dont l'écriture débute vers 1734-5 et dont une grande partie de l'ensemble est finie en 1737. La partie du *Traité des Fluxions* dont l'inspiration géométrique provient du *De Linearum* a dû être écrite vers 1737 comme il le

[161] Pour un travail sur les mathématiques britanniques au 18ème siècle, cet ouvrage est d'une utilité très importante voire essentielle. Malheureusement, sa disponibilité en France est quasiment nulle. A notre connaissance, il n'est disponible qu'à la BNF et à la bibliothèque de mathématiques d'Orsay.

[162] « I must send my theorems first to Dr Smith before I can make them publick, because I take in a most elegant one discovered by Mr Cotes & communicated by Dr Smith to me without a demonstration, which I have deduced from the same principles by which I demonstrated the rest, particularly that mentioned in Art. 401 of my Fluxions. This theorem I cannot publish without his agreeing to it, and I would be glad he would publish Mr Cotes's demonstration, which I am sure will be excellent. It is pity it is delayed, for this theorem with the consequences & the others I have derived from my principles, before I demonstrated Mr Cotes's will throw a new light on the doctrine of the higher Loci[162], which is an obscure part of the high Geometry at present. » in Mills (1982), pp. 395-6.

signale dans la préface de son *Traité des Fluxions*[163]. Ce dont nous pouvons être certain c'est que l'écriture du *De Linearum* est antérieure à 1737.

2. Des propriétés générales des courbes

D'après Maclaurin, les sections coniques ont été largement étudiées par les géomètres de l'antiquité et par les géomètres modernes, tandis que pour les courbes de degré supérieur, peu de choses ont été découvertes avant Newton surtout, toujours d'après Maclaurin, à la parution de l'*Enumeratio*. Depuis cet écrit, de nombreux géomètres se sont attachés à développer la géométrie dans des voies souvent difficiles mais qui méritent le respect. Ainsi, Maclaurin, dans l'introduction de cet appendice, se situe clairement dans la suite de Newton en particulier de l'*Enumeratio*. Maclaurin déclare qu'il étudie, au moins dans son projet, certaines propriétés générales des lignes courbes à la manière de Newton, c'est-à-dire les segments de parallèles et les asymptotes ainsi que des caractéristiques propres à ce type de courbes. Nous verrons plus loin s'il utilise ou non la méthode newtonienne. Par des considérations géométriques, il donne une construction du cercle osculateur à une courbe algébrique quelconque en généralisant une méthode et un théorème de Newton. De plus, à partir de cela, il énonce un théorème dont un des corollaires est le théorème de Cotes cité dans l'introduction.

Dans un premier temps, nous étudierons le théorème de Newton qui se trouve à l'origine de la démarche de Maclaurin, puis dans un second temps, nous donnerons la construction du cercle osculateur, enfin, nous examinerons le théorème qui aboutit au résultat de Cotes.

---

[163] Maclaurin (1742), p. ix.

Le premier résultat de Maclaurin est la donnée d'un théorème de Newton. Soit un angle donné, APM, si les branches de l'angle coupe une courbe algébrique en autant de points que la dimension, alors le produit des longueurs entre le sommet P et les points d'intersection d'une branche avec la courbe est toujours comme le produit des longueurs entre le sommet P et les points d'intersection entre la courbe et l'autre branche dans un rapport invariable[164] (Fig. 25)

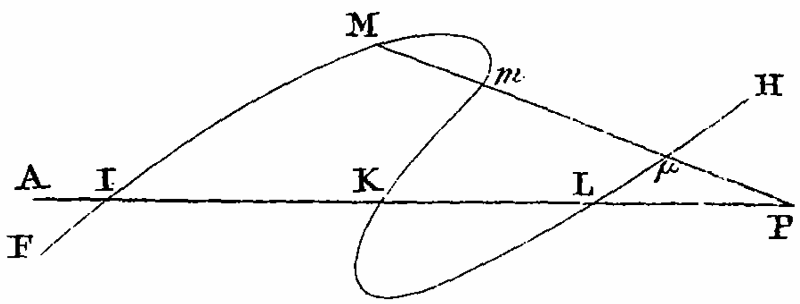


Fig. 25

Dans l'*Enumeratio*, Newton commence son propos par l'énoncé de plusieurs résultats qui vont lui permettre de pouvoir organiser les courbes du troisième ordre en fonction des propriétés bien particulières telles que le nombre d'asymptotes par exemple. Toutes ces propriétés sont énoncées sans démonstration, en particulier celle[165] qui nous intéresse ici.

La démonstration que donne Maclaurin est la suivante : il prend comme axe des abscisses la droite AP d'origine A. l'abscisse est symbolisée par $AP = x$ et l'ordonnée PM par *y*. L'équation de la courbe (il prend une courbe du troisième ordre), est

[164] « Dato angulo APM, I rectae AP, PM, lineam geometricam cujusvis ordinis secent in tot punctis quot ipsa est dimensionum, fore semper factum ex segmentis prioris ad punctum P & curvam terminatis ad factum ex segmentis posterioris eodem puncto & curvam terminatis in ratione invariabili. » in Maclaurin (1748b), p. 376.

[165] « Sic in Curvis non Parabolicis secundi generis Parallelepipedum sub tribus Ordinatim applicatis est ad Parallelepipedurn sub partibus Diametri ad Ordinatas & tres Vertices figura abscislis, in ratione quadam data » *In* Newton (1704), p. 141

$y^3-(ax+b)y^2+(cx^2-dx+e)y-fx^3+gx^2-hx+k=0$. M, *m*, μ sont des points de la courbe. L'axe PM est considéré par Maclaurin comme la droite des ordonnées. Ainsi, PM, P*m* et Pμ sont les racines de l'équation ci-dessus dont l'inconnue considérée est *y*. Comme le produit des racines est égal au coefficient constant (au signe près), alors $\mathrm{PM.P}m.\mathrm{P}\mu = fx^3-gx^2+hx-k$. Les points d'intersection de cette courbe avec l'axe des abscisses (ici I, K, L) sont donnés par les racines de l'équation lorsque *y* s'annule, c'est-à-dire les racines de $x^3-\frac{g}{f}x^2+\frac{h}{f}x-\frac{k}{f}=0$.

D'où $x^3-\frac{g}{f}x^2+\frac{h}{f}x-\frac{k}{f}=(x-\mathrm{AI})(x-\mathrm{AK})(x-\mathrm{AL})=(\mathrm{AP}-\mathrm{AI})(\mathrm{AP}-\mathrm{AK})(\mathrm{AP}-\mathrm{AL})$.

En reliant les deux expressions, on arrive bien au résultat voulu (dans le cas d'une courbe du troisième ordre) : $\mathrm{IP.KP.LP}=\frac{1}{f}\mathrm{PM.P}m.\mathrm{P}\mu$. La démonstration est analogue dans le cas d'une courbe algébrique de degré quelconque.

Le Théorème 1 de Maclaurin est le suivant : Soit un point P donné, soient deux droites, PA et P*a*, qui rencontre une droite en autant de point, A, B, C, et *a*, *b*, *c*¸ etc. que la dimension de la courbe algébrique. En ces points d'intersection, traçons la tangente à la courbe en ces points, AK, BL, CM, etc. et *ak*, *bl*, *cm*. Ces tangentes rencontrent une droite EP respectivement en K, L, M, etc. et *k*, *l*, *m*, etc. Alors

$$\frac{1}{\mathrm{PK}}+\frac{1}{\mathrm{PL}}+\frac{1}{\mathrm{PM}}+\&\mathrm{c.}=\frac{1}{\mathrm{P}k}+\frac{1}{\mathrm{P}l}+\frac{1}{\mathrm{P}m}+\&\mathrm{c.}$$

Cette relation est vraie quelque soit la droite EP, P restant fixe[166]. (Fig. 26)

---

[166] « Occurrat recta quaevis per punctum datum ducta lineae geometricae cujunque ordinis in tot punctis quot ipsa est dimensionum ; rectae figuram in his punctis contingentes abscindant ab alia recta positione data per idem punctum datum ducta segmenta ottidem hoc puncto terminata ; & horum segmentorum reciproqua eandem semper consicient summam, modo semgenta ad contrarias partes puncti dati sita contrariis signis afficiantur.
Sit P punctum datum, PA and P*a* rectae quaevis duae ex P ductae quarum utraque curvam secat in tot punctis A, B, C, et *a*, *b*, *c*¸ &c. quot ipsa est dimensionum. Abscindant tangentes AK, BL, CM, &c. et *ak*, *bl*, *cm*, &c. a recta EP per punctum datum P segmenta PK, PL, PM, &c. et P*k*, P*l*, P*m* &c. dico fore

Le premier temps de la démonstration de cette propriété utilise le résultat préliminaire en considérant les points A, B, C et *a*, *b*, *c* qui se trouvent sur la courbe. Les produits des longueurs sont en rapport constant. En appliquant la dérivée logarithmique à cette relation que Maclaurin énonce juste avant la propriété, il arrive à la relation $\frac{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{P}}{\mathrm{AP}}+\frac{\dot{\mathrm{B}}\mathrm{P}}{\mathrm{BP}}+\frac{\dot{\mathrm{C}}\mathrm{P}}{\mathrm{CP}}+\&\mathrm{c.}=\frac{\dot{a}\mathrm{P}}{a\mathrm{P}}+\frac{\dot{b}\mathrm{P}}{b\mathrm{P}}+\frac{\dot{c}\mathrm{P}}{c\mathrm{P}}+\&\mathrm{c.}$

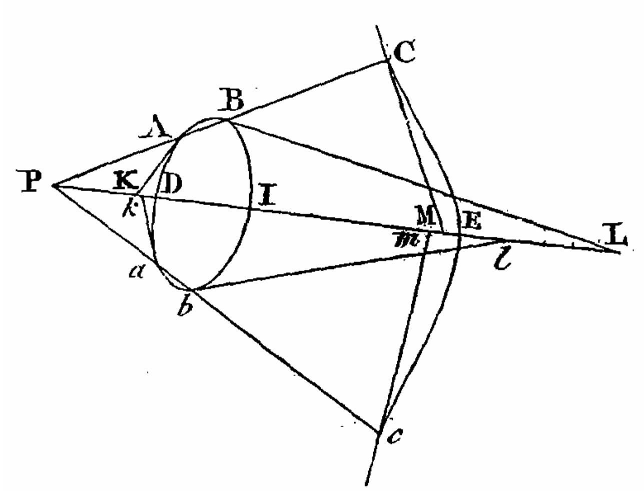


Fig 26

Puis, la propriété de la sous-tangente, appliquée à A, donne $\frac{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{P}}{\dot{\mathrm{E}}\mathrm{P}}=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PK}}$. Par conséquent, on a $\frac{\dot{\mathrm{A}}\mathrm{P}}{\mathrm{AP}}=\frac{\dot{\mathrm{E}}\mathrm{P}}{\mathrm{PK}}$. En appliquant cette même relation à tous les autres points, Maclaurin arrive au résultat espéré, $\frac{\dot{\mathrm{E}}\mathrm{P}}{\mathrm{PK}}+\frac{\dot{\mathrm{E}}\mathrm{P}}{\mathrm{PL}}+\frac{\dot{\mathrm{E}}\mathrm{P}}{\mathrm{PM}}+\&\mathrm{c.}=\frac{\dot{\mathrm{E}}\mathrm{P}}{\mathrm{P}k}+\frac{\dot{\mathrm{E}}\mathrm{P}}{\mathrm{P}l}+\frac{\dot{\mathrm{E}}\mathrm{P}}{\mathrm{P}m}+\&\mathrm{c.}$ en prenant $\dot{\mathrm{E}}\mathrm{P}=1$.

$\frac{1}{\mathrm{PK}}+\frac{1}{\mathrm{PL}}+\frac{1}{\mathrm{PM}}+\&\mathrm{c.}=\frac{1}{\mathrm{P}k}+\frac{1}{\mathrm{P}l}+\frac{1}{\mathrm{P}m}+\&\mathrm{c.}$ atque hanc summam manere semper eandem manente puncto P & recta PE positione data. » in Maclaurin (1748b), p. 446.

À la suite de cette démonstration, il fait une remarque qui sera essentielle pour démontrer le Théorème 2. Si, on note D, I, E, les points d'intersection entre la droite PE du théorème avec la courbe (Fig. 26), alors on a la relation suivante :

$$\frac{1}{\mathrm{PK}}+\frac{1}{\mathrm{PL}}+\frac{1}{\mathrm{PM}}+\&\text{c.}=\frac{1}{\mathrm{PD}}+\frac{1}{\mathrm{PE}}+\frac{1}{\mathrm{PI}}+\&\text{c.}$$

Il étudie ensuite le cas où le pied de la tangente se trouve de l'autre côté de P, il faudra alors changer de signe devant le rapport concerné. Par exemple, si K tombe sur la droite de l'autre côté de P par rapport à A, alors dans la formule, il faudra remplacer $\frac{1}{\mathrm{PK}}$ par $-\frac{1}{\mathrm{PK}}$.

Maclaurin énonce son Théorème 2 qui est le théorème de construction du cercle osculateur à une courbe algébrique. D'un point quelconque d'une courbe algébrique (Fig. 27), traçons deux droites, DE et DA, qui coupent en autant de points D, I, E, &c. et D, A, B, &c. que la dimension de la courbe. Soient les tangentes AK, BL, &c. coupant la droite DE où K, L, &c. sont sur la droite DE. Soit une droite QV parallèle à la tangente DT telle que Q appartienne à DA et V à DE et telle que $\mathrm{QV}^2:\mathrm{DV}^2=m:1$. Soit R sur la droite DE tel que $\frac{m}{\mathrm{DR}}$ soit égal à l'excès de la somme $\frac{1}{\mathrm{DE}}+\frac{1}{\mathrm{DI}}+\&c.$ sur la somme $\frac{1}{\mathrm{DK}}+\frac{1}{\mathrm{DL}}+\&c.$. Alors le cercle de diamètre DR est le cercle osculateur à la courbe en D et donc la longueur DR est le rayon de courbure de la courbe en D[167]

[167] « Ex puncto quovis D lineae geometricae ducantur duae quaevis rectae DE, DA, quarum utraque eam secet in tot punctis D, I, E, &c. et D, A, B, &c quot ipsa est dimensionum ; abscindant tangents AK, BL, &c. a recta DE segmenta DK, DL, &c. Occurat recta quaevis, QV tangenti DT parallela ipsis DA & DE in Q & V, sitque $\mathrm{QV}^2:\mathrm{DV}^2=m:1$; sumatur in DE recta DR ita ut $\frac{m}{\mathrm{DR}}$ aequalis sit excessui sumae $\frac{1}{\mathrm{DE}}+\frac{1}{\mathrm{DI}}+\&c.$ supra summam $\frac{1}{\mathrm{DK}}+\frac{1}{\mathrm{DL}}+\&c.$ & circulus supra chordam DR descriptus rectam DT contigens erit circulus osculatorius, sive ejusdem curvaturae cum linea geometrica proposita, ad punctum D. » in Maclaurin (1748b), pp. 382-3.

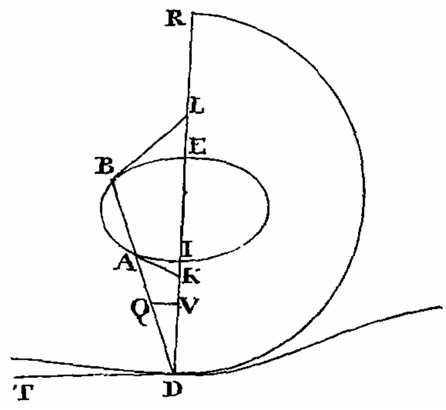


Fig 27

Pour pouvoir démontrer le Théorème 2, Maclaurin a besoin d'introduire la construction du cercle osculateur à une courbe en un point donné. Pour cela, il donne une propriété particulière au cercle. Soit un cercle CDR (le diamètre étant DR), soit P un point de la droite DR (extérieur au cercle dans la figure 28). C étant un point du cercle, soit N l'autre point d'intersection avec le cercle de la droite PC. Soit la tangente au cercle en C, elle coupe la droite DR en M (Fig. 28).

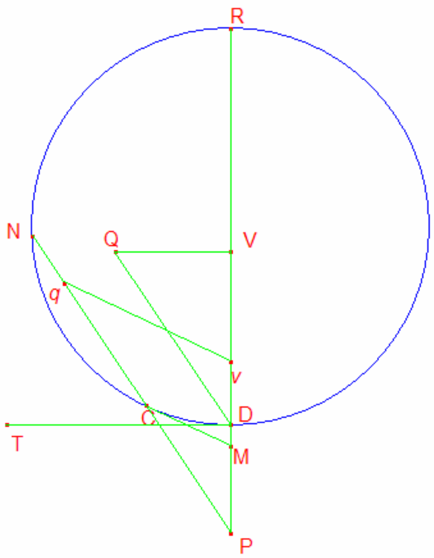


Fig 28

Lors du déplacement de C vers le point D (jusqu'à coïncider), la droite PC se meut parallèlement à elle-même. Ainsi lorsque C sera en D, P y sera aussi. Il place les points q et v, respectivement sur PC et DR tels que qv soit parallèle à CM et lorsque C sera en D, q

sera en Q et v sera en V. Avec cette construction, il évalue la différence $\frac{1}{PM}-\frac{1}{PD}$ pour tout point C. Mais ce qui l'intéresse est la valeur de cette différence lorsque C sera en D, c'est-à-dire la limite de cette différence lorsque les points P, M et D (et C) coïncideront. Il démontre que la dernière valeur de $\frac{1}{PM}-\frac{1}{PD}$ est $\frac{QV^2}{DV^2.DR}$. Nous remarquons que dans cette dernière relation, issue de la construction à partir d'un cercle, intervient le rayon de ce cercle.

Maintenant, il lui faut raccrocher ce résultat au problème du théorème 2, c'est-à-dire donner le rayon du cercle osculateur en un point d'une courbe. Pour cela, il considère une courbe algébrique qui passe par un point D. Si C est un point de la courbe très proche de D, alors la dernière valeur de la différence $\frac{1}{PM}-\frac{1}{PD}$ sera identique pour les points de la courbe et pour les points C et D du cercle osculateur[168]. Donc la dernière valeur de la différence $\frac{1}{PM}-\frac{1}{PD}$ considérée avec des points sur la courbe algébrique dépend de son rayon de courbure, $\frac{m}{DR}$. Il lui reste donc à évaluer d'une autre manière la différence ci-dessus. C'est à ce moment qu'intervient le Théorème 1. En effet, avec les notations et les conditions de ce théorème, on a :

$$\frac{1}{PK}+\frac{1}{PL}+\frac{1}{PM}+\&c.=\frac{1}{PD}+\frac{1}{PE}+\frac{1}{PI}+\&c.$$

Donc, en réarrangeant cette relation, c'est-à-dire en mettant la différence qui l'intéresse d'un côté et le reste de l'autre,

$$\frac{1}{PM}-\frac{1}{PD}=\frac{1}{PE}+\frac{1}{PI}+\&c.-\frac{1}{PK}-\frac{1}{PL}-\&c.,$$

[168] « this also the last value of the difference $\frac{1}{PM}-\frac{1}{PD}$ if D and C are in the arc of any line of the same curvature with the circle CDR. » in Maclaurin (1779), pp. 449-450.

et en faisant coïncider P avec D, il arrive bien au résultat énoncé dans le Théorème 2 :

$$\frac{m}{\mathrm{DR}}=\frac{1}{\mathrm{DE}}+\frac{1}{\mathrm{DI}}+\&\mathrm{c.}-\frac{1}{\mathrm{DK}}-\frac{1}{\mathrm{DL}}-\&\mathrm{c.}$$

Nous pouvons remarquer que pour avoir le rayon du cercle osculateur, on suppose déjà construit la normale à la courbe au point D. En effet, ce théorème nous fournit une construction géométrique du rayon de courbure uniquement en présupposant la droite DR donnée. D'autre part, si la droite DA est bissectrice de l'angle EDT où T est un point de la tangente à la courbe en D, alors on trouve un cas particulier de cette relation. Dans ce cas, le rapport $\frac{\mathrm{QV}}{\mathrm{DV}}=1$, d'où $m=1$ et donc $\frac{1}{\mathrm{DR}}=\frac{1}{\mathrm{DE}}+\frac{1}{\mathrm{DI}}+\&c.-\frac{1}{\mathrm{DK}}-\frac{1}{\mathrm{DL}}-\&c.$

Après la démonstration du Théorème 2, Maclaurin s'intéresse à la variation du rayon de courbure, c'est-à-dire la variation du diamètre du cercle osculateur, au point D. Il donne un théorème dans lequel, par une construction géométrique, comme dans le Théorème 2, se trouve une relation qui évalue la variation du rayon de courbure en un point. L'énoncé est du même type que celui du théorème précédent.

Soit D un point de la courbe (fig. 29). Soit DS le diamètre du cercle osculateur (construit avec la méthode du théorème 2), la droite DS coupe la courbe en autant de points que sa dimension, D, A, B,… Soit DT la tangente à la courbe en D. Elle coupe la courbe en I, … Soient les tangentes à la courbe issues de A, B,…, elles rencontrent DT en K, L, … Alors la variation de la courbure sera égale à

$$\frac{1}{\mathrm{DS}}\times\left(\frac{1}{\mathrm{DK}}+\frac{1}{\mathrm{DL}}+\ldots-\frac{1}{\mathrm{DI}}-\ldots\right)$$ [169].

[169] « Sit D punctum in linea quavis geometrica datum, occurat DS diameter circuli osculatorii per D ducta curvae in tot punctis, D, A, B, &c. quot ipsa est dimensionum ; ducatur DT curvam contigens in D, quae curvam secet in punctis I, &c. binario paucioribus, & occurrat tangentibus AK, BL, &c. in K, L, &c. eritque variatio curvaturae, sive mensura anguli contactus curva & circulo osculatorio comprehensi, directe ut excessus quo summa reciprocarum segmentis tangentis DT puncto contactus D & tangentibus AK, BL, &c. terminatis superat summam reciprocaru segmentis eodem puncto & curva terminatis, & inverse ut radius curvaturae, i. e. ut $\frac{1}{\mathrm{DS}}\times\left(\frac{1}{\mathrm{DK}}+\frac{1}{\mathrm{DL}}+\ldots-\frac{1}{\mathrm{DI}}-\ldots\right)$ » in Maclaurin (1748b), p. 386.

La démonstration est du même type que la précédente.

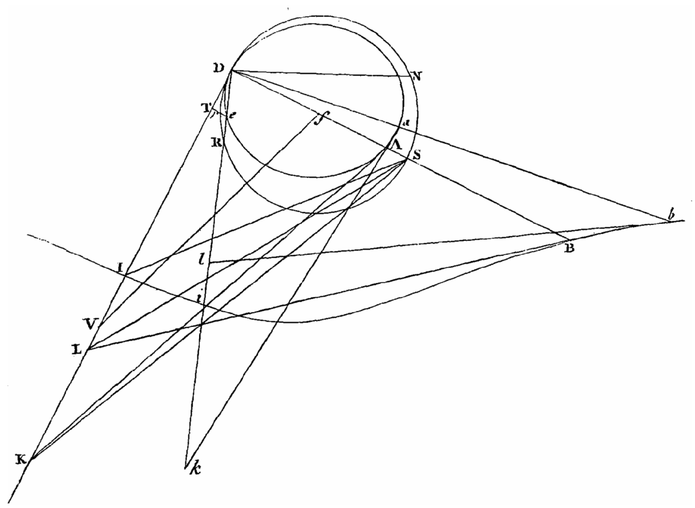


Fig. 29.

De plus, en considérant V un point de DT (la tangente à la courbe en D) tel que DV satisfasse la relation $\frac{1}{DV}=\frac{1}{DK}+\frac{1}{DL}+...-\frac{1}{DI}-...$ et f est le centre du cercle osculateur (ou Df est le rayon de courbure) et en construisant le point N sur le cercle osculateur tel que $\widehat{SDN}=\widehat{DVf}$, alors la parabole passant par D, admettant DT comme tangente et de paramètre DN aura la même variation de courbure que la courbe en D et donc peut être considérée comme une osculatrice[170]. Nous reviendrons plus bas sur la notion de courbe osculatrice à une autre. En effet, quand Maclaurin donnera des propriétés spécifiques aux courbes du troisième ordre, il s'interrogera sur la possibilité qu'une parabole soit une courbe osculatrice à une cubique.

À partir de cette proposition, Maclaurin change d'orientation pour s'attaquer au théorème de Cotes dont il est question dans l'introduction de l'appendice. Le théorème de Cotes s'énonce ainsi : soit P un point donné, PD, une droite tournant autour de P rencontre une courbe algébrique en autant de points, D, E, I, etc. que la dimension, alors le point M

[170] Maclaurin (1748b), pp. 387-8.

de PD tel que $\frac{1}{PM} = \pm\frac{1}{PD} \pm \frac{1}{PE} \pm \frac{1}{PI} \pm \&c.$ (où le signe dépend de la position des points) décrit une droite lorsque la droite tourne autour de P (fig. 30)[171].

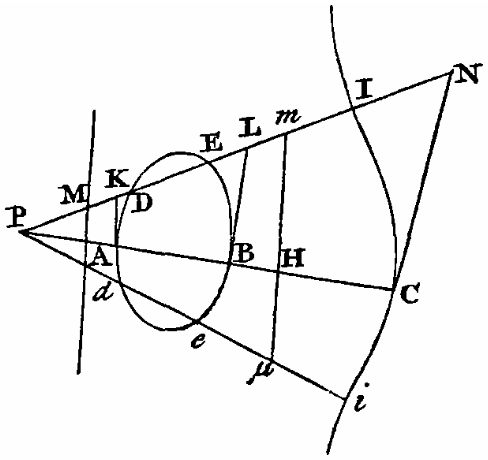


Fig 30

Maclaurin a besoin pour cela des droites harmoniques données par De la Hire dans son ouvrage sur les sections coniques. Dans cet ouvrage, De la Hire introduit la notion de droite coupée harmoniquement. En effet, « j'appelle une ligne droitte AD couppée en 3 parties harmoniquement quand le rectangle contenu sous la toutte Ad & la partie du milieu BC est égal au rectangle contenu sous les deux parties extremes AB, CD : ou bien lorsque la toutte AD est à l'une des 2 extremes AB, CD comme l'autre extreme CD ou AB est à la partie du milieu ce qui est la mesme chose »[172] soit $AD \times BC = AB \times CD$. Cette définition est équivalente à ce que nous appelons la division harmonique du segment AC par les points B et D, c'est-à-dire que les points A, B, C et D sont tels que $\frac{2}{AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}$.

Maclaurin privilégie la seconde écriture par rapport à celle de De la Hire. Il étend cela et propose la definition de la moyenne harmonique. Comme la droite P*m* est appellée

---

[171]« Circa datum punctum P revolvatur recta PD quae occurat lineae geometricae cujuscunque ordinis in tot punctis D, E, I, &c. quot ipsa est dimensionum, & si in eadem recta sumatur simper PM ita ut $\frac{1}{PM} = \pm\frac{1}{PD} \pm \frac{1}{PE} \pm \frac{1}{PI} \pm \&c.$ (ubi signa terminorum regulam saepius descriptam observare supponimus) erit locus puncti M linea recta. » Maclaurin (1748b), p. 392.

[172] De La Hire (1673), p. 1.

moyenne harmonique de PD et PE quand $\frac{2}{\mathrm{P}m}=\frac{1}{\mathrm{PD}}+\frac{1}{\mathrm{PE}}$, de la même manière, P*m* est appellée moyenne harmonique des *n* droites quelconques, PD, PE, PI, etc, si $\frac{n}{\mathrm{P}m}=\frac{1}{\mathrm{PD}}\pm\frac{1}{\mathrm{PE}}\pm\frac{1}{\mathrm{PI}}\pm\text{\&c.}$[173]. En utilisant cette propriété, le théorème de Cotes n'est qu'un corollaire du premier théorème énoncé dans ce chapitre.

3. Les applications aux coniques et aux cubiques

Dans les sections 2 et 3, Maclaurin applique les théorèmes qu'il a démontrés dans la première section aux sections coniques (section 2) puis aux cubiques (section 3).

Dans la section 2, il donne quelques résultats déduits de la moyenne harmonique appliqués aux coniques et l'étude de la courbure de ce type de courbes. Beaucoup de résultats énoncés sont connus avant Maclaurin. Nous pouvons signaler ce théorème : Soit une conique, soit A, B, F, et G des points sur cette conique. Le point d'intersection de AB et FG se nomme P, celui entre AG et BF, π, K est le point d'intersection des tangentes en A et F et L celui des tangentes en B et G, alors les points P, L, π et K sont colinéaires[174]. (Fig. 31)

---

[173] « Sicut recta P*m* medium est harmonicum inter duas rectas PD & PE, cum $\frac{2}{\mathrm{P}m}=\frac{1}{\mathrm{PD}}+\frac{1}{\mathrm{PE}}$; similiter P*m* dicatur *medium* harmonicum inter rectas quaslibet PD, PE, PI, &c. quarum numerus est *n*, cum $\frac{n}{\mathrm{P}m}=\frac{1}{\mathrm{PD}}\pm\frac{1}{\mathrm{PE}}\pm\frac{1}{\mathrm{PI}}\pm\text{\&c.}$ » in Maclaurin (1779), p. 463.

[174] Maclaurin (1748b), pp. 398

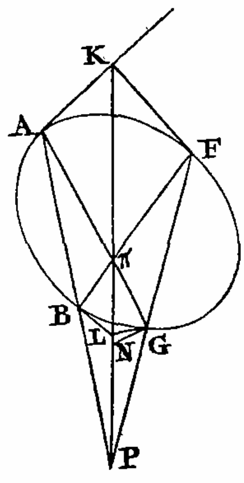


Fig 31.

Dans la section 3 consacrée aux cubiques, Maclaurin énonce vingt-quatre propriétés découlant des quatre théorèmes donnés dans la première section du *De Linearum*. Comme pour la section 2, Maclaurin donne des résultats connus par différents mathématiciens. Par exemple, les deux premières propositions de cette section ont été énoncées par Newton dans son *Enumeratio*[175]. Par exemple, la proposition 6 indique que les tangentes à une cubique en trois points colinéaires rencontrent cette même cubique en trois autres points colinéaires. Ou encore, il montre que si par un point A d'une cubique, on peut tracer trois tangentes à cette courbe, AF, AG et A*f* (F, G et *f* appartenant à cette cubique), et si la droite G*f* rencontre la courbe en N, la droite FN rencontre la cubique en *g*, alors A*g* est aussi tangente à la courbe en *g*[176] (Fig. 32).

[175] Newton (1704), pp. 140-1
[176] Maclaurin (1748b), p. 409.

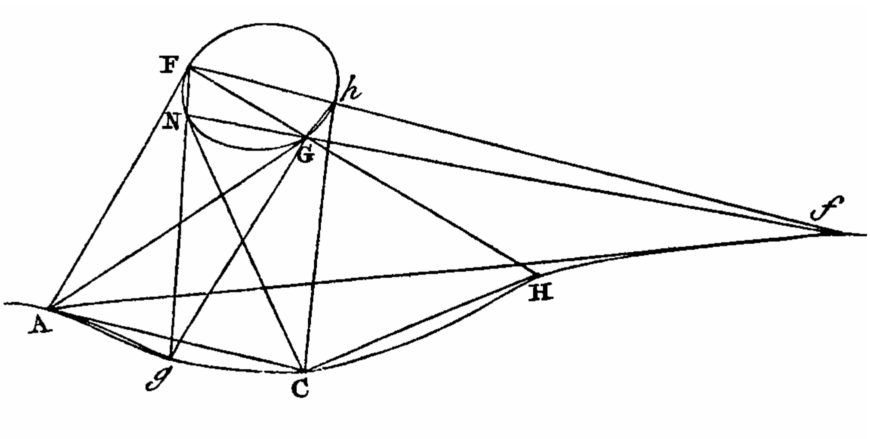


Fig. 32

Comme corollaire à ce résultat, Maclaurin montre que d'un point d'une cubique, on ne peut tirer que quatre tangentes à cette courbe au maximum[177]. Nous pouvons encore signaler une proposition qui a aussi été énoncée par De Gua en 1740[178]. Cette dernière est la suivante : si une droite passe par deux points d'inflexion d'une cubique, alors cette droite rencontrera la cubique en un troisième point qui sera aussi un point d'inflexion. Les démonstrations de ces résultats prennent appui sur les quatre théorèmes de la première section.

Maclaurin ne s'intéresse pas simplement aux cercles comme osculateurs à une courbe. Comme nous l'avons déjà vu, Maclaurin a donné la construction d'une parabole osculatrice. Dans cette section, comme il se cantonne à l'étude des courbes algébriques du troisième ordre, il donne des propriétés simplifiées par rapport aux théorèmes énoncés plus haut. Par exemple, pour la variation du rayon de courbure, et donc de la construction de la parabole osculatrice, en prenant la même écriture que dans le théorème 3 (Fig. 33), et en

[177] Maclaurin (1748b), p. 410.
[178] De Gua (1740), p. 1779.

prenant le point V sur la droite DI tel que $\frac{1}{\mathrm{DV}} = \frac{1}{\mathrm{DK}} + \frac{1}{\mathrm{DL}} - \frac{1}{\mathrm{DI}}$, alors la variation de la courbure est égale à la tangente de l'angle $\widehat{\mathrm{DVS}}$ soit le rapport $\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{DV}}$[179].

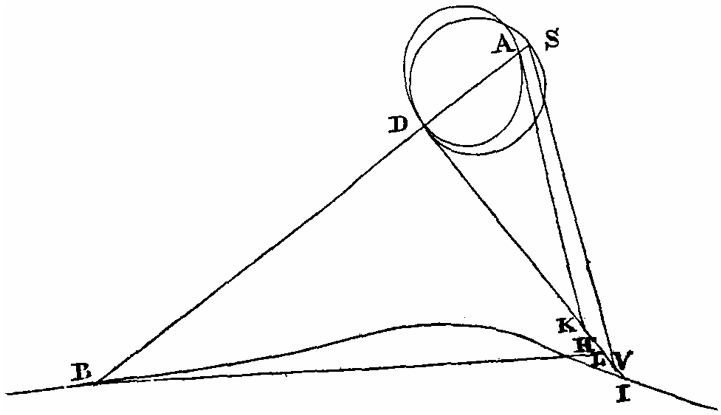


Fig. 33

4. L'ambition de Maclaurin dans le *De linearum*

Après l'étude que nous venons de faire de l'appendice, il nous semble intéressant de confronter cet écrit de Maclaurin avec celui de Newton portant sur l'étude des courbes du troisième ordre. Maclaurin, dans l'introduction de son opuscule, se réclame ouvertement de Newton. Il considère l'*Enumeratio* comme une œuvre majeure dans l'étude des courbes algébriques. Il insiste sur le fait que c'est Newton qui s'est aperçu d'une analogie entre les propriétés des sections coniques et celles des cubiques et qu'il a montré la voie à de nombreux géomètres sur l'étude des courbes du troisième ordre. Maclaurin se situe dans cette voie des géomètres qui sont à la suite de Newton. Mais, à l'instar de ce qu'il a fait dans le *Geometria Organica*, les résultats qu'il propose dans le *De Linearum* ne sont pas du même type que les résultats de Newton dans l'*Enumeratio*. Tout d'abord,

---

[179] Maclaurin (1748b), p. 431.

même s'il part d'une proposition énoncée par Newton dans son ouvrage, Maclaurin le démontre, ce que Newton ne s'est pas donné la peine de faire. De plus, Newton prend appui sur une notion de segments de parallèles et d'asymptotes, ce que ne fait pas du tout Maclaurin. En effet, même dans l'énoncé et la démonstration de la proposition de Newton, comme nous l'avons vu, Maclaurin ne fait pas intervenir ni de segments de parallèles ni d'asymptotes. Une grande partie de son inspiration provient de la notion de moyenne harmonique déduite des travaux de De la Hire dans son ouvrage précédemment cité. Cela lui permet à la fois de démontrer le théorème de Cotes et de simplifier l'écriture de certaines expressions faisant intervenir ce qu'il appelle les réciproques de longueurs (ce que nous appelons inverses). Maclaurin retrouve des résultats trouvés ou énoncés par Newton mais en utilisant une méthode démonstrative différente de celle de Newton.

L'ambition de l'*Enumeratio* est de donner et de classer les courbes du troisième ordre et Newton donne une méthode de construction d'un type précis de cubiques (pour plus de détails, voir la partie sur le *Geometria Organica*). L'ambition de Maclaurin est tout autre ici. En effet, alors que Newton donnait des analogies entre des propriétés des coniques et celles des cubiques, Maclaurin montre que ces propriétés ne sont en réalité que des cas particuliers de propriétés valables pour toutes les courbes algébriques. Donc, on peut dire que l'œuvre de Maclaurin a une portée supérieure. De plus, à partir de ces résultats, en utilisant la même démarche géométrique, il donne quelques caractéristiques des courbes. Par exemple, les rayons de courbure d'une courbe peuvent être donnés en utilisant les moyennes harmoniques, c'est-à-dire sans considération de type analytique. Pour conclure, nous pouvons dire que Newton et Maclaurin ne poursuivent pas le même projet et que celui de Maclaurin va plus loin car il n'est pas cantonné à un type de courbes mais à tout type de courbes algébriques. C'est en partie cela que vont retenir Chasles et Poncelet.

5. Chasles et Poncelet, lecteurs de Maclaurin

Dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Chasles consacre une partie à l'œuvre géométrique de Maclaurin. Nous pouvons y lire une sorte d'éloge des méthodes géométriques utilisées par Maclaurin dans plusieurs de ses ouvrages. Chasles cite bien entendu le *Traité des Fluxions*, le *Geometria Organica*, mais surtout l'appendice *De Linearum*. Ainsi, il déclare que « dans le premier [le *Geometria Organica*] (…), ses démonstrations, traitées par la méthode des coordonnées, n'offrent pas toujours un degré de simplicité satisfaisant ; mais le deuxième écrit de Maclaurin, intitulé : *De Linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus*, est d'une élégance et d'une précision remarquable. »[180] Ce type de construction uniquement géométrique qui n'utilise pas (ou très peu) les méthodes de l'analyse a ravi Chasles qui s'étonne du peu d'écho chez les mathématiciens de la fin du 18ème siècle et du début du 19ème siècle. Ainsi, Chasles remarque que

> « cette construction géométrique de cercle osculateur, sur la figure même, et sans le secours du calcul des fluxions, ni même de l'analyse de Descartes, paraît être restée inaperçue dans l'ouvrage de Maclaurin, car nous ne voyons pas qu'on en ait jamais parlé. Nous croyons pourtant qu'elle méritait d'y être remarquée, parce que ce problème avait paru jusque là exiger absolument l'emploi de l'analyse. »[181]

Chasles fait référence à Poncelet au sujet de la moyenne harmonique utilisée par Maclaurin. D'après lui, Poncelet utilise la moyenne harmonique qu'il nomme centre des moyennes harmoniques dans un mémoire paru dans le Journal de Crelle[182]. En revanche, Chasles ne fait pas allusion à l'utilisation de la méthode géométrique de construction des

[180] Chasles (1837), p. 146.
[181] Chasles (1837), p. 148.
[182] Mémoires sur les centres des moyennes harmoniques journal de Crelle, tome 3.

cercles osculateurs de Maclaurin par Poncelet dans son *Traité des Propriétés projectives des figures* paru en 1822.

Pourtant, nous pouvons lire Poncelet donner son avis sur cette méthode : « cet illustre successeur de Cotes et de Newton, (…) dans son *Traité des Fluxions* et son *Algèbre posthume*, aborda la question [détermination des osculatrices] par des considérations directes purement géométriques, dans lesquelles il cherche à tracer, par une série de points successifs, le cercle osculateur, le diamètre et le paramètre de la parabole osculatrice du 3ème ordre en un point donné d'une courbe continue quelconque, censée décrite sur un plan, en faisant pour cela simplement intervenir les portions de la courbe qui avoisinent le point de contact, et traçant une nouvelle ligne ou *dérivée* qui sert à déterminer certains points ou paramètres du cercle de courbure ou de la conique osculatrice »[183]. Cet extrait nous montre la bonne connaissance d'une partie des écrits de Maclaurin par Poncelet. En effet, ce dernier quand il fait référence à « l'algèbre posthume » de Maclaurin considère le *De Linearum*, en particulier la méthode que Maclaurin a utilisée pour trouver le rayon de courbure que nous avons décrit plus haut. Il fait aussi référence au *Traité des Fluxions* de Maclaurin dans lequel toute une partie est consacrée à la courbure en général traitée à la fois de manière géométrique mais aussi en utilisant la théorie fluxionnelle[184]. De plus, Poncelet annonce clairement qu'il s'est servi des écrits de Maclaurin pour échafauder sa fameuse géométrie projective dans son *Traité des propriétés projectives des figures*[185]. En effet, Poncelet déclare « qu'en m'occupant des matières du IIème Cahier de ce second volume [méthode des transversales], je me proposai de déterminer, sans tâtonnements, d'une manière directe et rationnelle, pour un point donné d'une courbe décrite sur un plan,

[183] Poncelet (1864), tome 2, p. 585.
[184] Maclaurin (1742), pp. 304-412.
[185] Poncelet (1822)

non pas seulement la tangente, mais l'osculatrice conique d'un ordre quelconque, en suivant partiellement les traces de l'illustre Maclaurin »[186].

D'après son propre témoignage, dans son ouvrage, *Application d'analyse et de géométrie, qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figures*, Poncelet a eu connaissance du *De Linearum* en 1816 qui lui a permis de réorienter sa recherche, « j'en suis venu à changer de route et à me rapprocher de la méthode de Maclaurin que j'avais ignorée jusque-là »[187]. Plus loin, il ajoute « qu'en 1816, on ne connaissait rien de plus original en France, où ces travaux du savant anglais étaient pour ainsi dire complètement ignorés ou oubliés »[188]. C'est par l'intermédiaire de François Français, un de ses anciens professeurs, que Poncelet eut connaissance du *Traité d'algèbre* et donc de l'appendice qu'il « [s'empressa] d'en faire, pour mon usage particulier, une translation exacte du latin en français, sans commentaires, interprétations ni mutilations quelconques, comme il convient quand il s'agit d'une production en elle-même aussi correcte et remarquable d'un grand géomètre : cette traduction littérale est demeurée jusqu'à ce jour, entre mes mains, dans un état qui en permettrait la publication immédiate, si le goût des sérieuses études géométriques venait à se propager davantage. »[189] A notre connaissance, Poncelet ne s'est jamais occupé de publier cette traduction. Dans son *Traité des Propriétés Projectives des Figures*, Poncelet déclare que les travaux de Maclaurin l'ont inspiré. À maintes reprises, des résultats de Maclaurin sont énoncés par Poncelet. Par exemple, la propriété suivante : « Si on inscrit, à une section conique, un quadrilatère quelconque ABCD, et qu'on lui circonscrive un autre abcd, dont les côtés touchent la courbe aux sommets du premier. Les quatre diagonales de ces deux quadrilatères se

---

[186] Poncelet (1864), tome 2, p. 584.
[187] Poncelet (1864), tome 2, p. 102n.
[188] Poncelet (1864), tome 2, p. 107n.
[189] Poncelet (1864), tome 2, p. 120n.

croiseront en un même point P »[190]. Ce résultat est donné par Maclaurin dans le *De Linearum*, dans la deuxième section sur les sections coniques[191]. L'énoncé est différent et la façon d'appréhender le problème l'est aussi mais la conclusion de Poncelet est équivalente à celle de Maclaurin.

Une autre mathématicien du 19ème siècle s'est intéressé à cet ouvrage de Maclaurin, il s'agit de Fauque de Jonquières. A la suite de son *Mélange de Géométrie Pure* se trouve une traduction française du *De Linearum*. Cet ouvrage est paru en 1856. Nous citons cela simplement pour remarquer que Poncelet, encore vivant, semble avoir ignoré l'ouvrage[192] de Fauque de Jonquières. En effet, dans sa remarque sur sa traduction, Poncelet ne fait aucune référence à l'œuvre de Jonquières.

Il nous paraît évident que les travaux géométriques de Maclaurin ont influencé l'essor de certaines géométries au 19ème siècle. Ceci est un sujet qui n'a pas encore été abordé. Nous ne l'avons qu'effleuré car cela dépasse la cadre de notre dessein.

---

[190] Poncelet (1822), p. 100.
[191] Maclaurin (1779), p. 470.
[192] Fauque de Jonquières (1856)

D. Le Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris sur la loi des chocs de 1724.

1. Les conditions du prix

Le 10 mai 1724, l'Académie Royale des Sciences de Paris annonce que le savant qui a gagné le prix pour cette même année est un Écossais, Colin Maclaurin déjà connu par les savants parisiens. En effet, nous pouvons le lire dans le procès-verbal de la séance du 10 mai 1724 de l'Académie des Sciences ceci (Fig. 34.). Gagner ce prix c'est recevoir une somme de 2500 livres françaises[193]. Cela représente une somme non négligeable pour un jeune professeur de mathématiques[194].

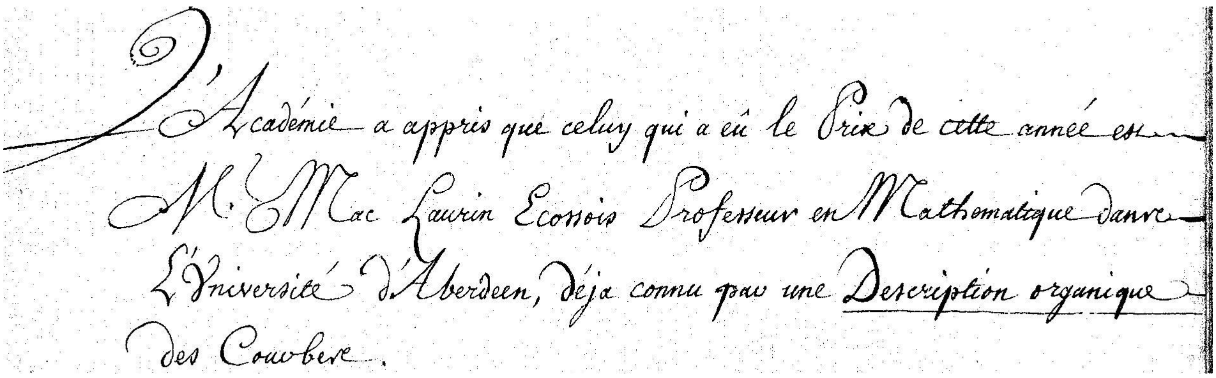

L'Académie a appris que celuy qui a eû le Prix de cette année est M. Mac Laurin Ecossois Professeur en Mathematique dans l'Université d'Aberdeen, déja connu par une Description organique des Courbes.

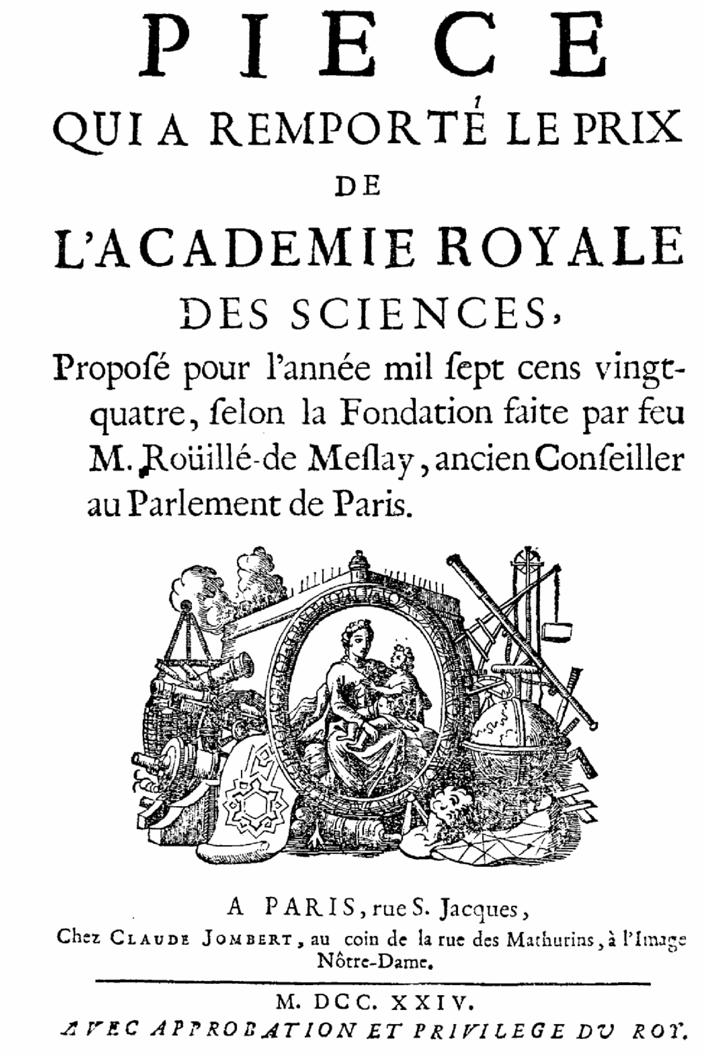
Fig. 34.

Le sujet de ce concours était les lois du choc des corps parfaitement durs. De nombreuses réponses ont traité, d'après les examinateurs, des lois du choc des corps à ressort. Parmi les essais qui n'ont pas répondu complètement à la question, il en est un qui a impressionné le jury, celui de Jean Bernoulli. Ce dernier, à partir du traité refusé par les

[193] Costabel (1983), p. 4.
[194] Cela représente plus de trois années de son traitement en tant de professeur de mathématiques à Édimbourg. Voir le chapitre suivant sur son élection à l'université d'Édimbourg.

membres examinateurs de l'Académie, publie en 1727, son *Discours sur les lois de la communication du mouvement*[195].

Maclaurin, réputé pour ses talents de géomètre, connaîtra avec le gain de ce prix une première reconnaissance du monde savant continental. Cet essai, long d'une vingtaine de pages, est écrit en français et porte comme titre, *Démonstration des Loix du Choc des corps*[196].



PIECE
QUI A REMPORTÉ LE PRIX
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES SCIENCES,
Proposé pour l'année mil sept cens vingt-quatre, selon la Fondation faite par feu M. Roüillé-de Meslay, ancien Conseiller au Parlement de Paris.

A PARIS, rue S. Jacques,
Chez CLAUDE JOMBERT, au coin de la rue des Mathurins, à l'Image Nôtre-Dame.

M. DCC. XXIV.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Fig. 35.

Nous ne regarderons pas cet essai dans le détail, une grande partie étant reprise dans certains de ses ouvrages ultérieurs. Nous allons en donner les grandes lignes et

[195] Bernoulli (1727)
[196] Maclaurin (1724b)

l'esprit. Dans un premier temps, l'auteur énonce les axiomes et les premiers principes généraux dans le mouvement des corps, ce qu'il appelle les « Loix du mouvement », la mise en relation de la force avec la vitesse et la masse d'un corps. Puis, il entre dans le débat entre les partisans de Leibniz et Gravesande et les partisans de Newton, dont il fait partie, à propos de la relation entre force et vitesse, et plus généralement ce qui est appelé la querelle des forces vives[197]. Dans un troisième temps, il énonce les lois du choc direct et quelques propositions sur les calculs des vitesses des corps après le choc. Enfin, il résout un problème sur le choc indirect.

Nous commencerons par examiner les premiers principes de la théorie de Maclaurin, puis nous résumerons la critique de Maclaurin sur les propos de Gravesande, enfin nous montrerons comment Maclaurin résout le problème du choc indirect.

2. Les principes de l'essai

Maclaurin débute son opuscule par énoncer ses principes en sept points. Nous allons les donner car nous en aurons besoin par la suite. Le premier principe énoncé par Maclaurin est le principe d'inertie : « Tout corps en repos reste dans cet état jusques à ce que quelque cause étrangère le mette en mouvement ; & tout Corps en mouvement continue à se mouvoir dans une ligne droite, sans changer sa vîtesse, aussi long-temps qu'aucune cause étrangère n'agit point sur ce Corps »[198]. Le deuxième principe est : « Le

[197] C'est à partir de 1724 avec l'annonce de ce prix que débute la querelle des forces vives. Nous ne prétendons pas nous immiscer dans ce débat qui nous amènerait trop loin. Néanmoins, nous pouvons signaler quelques références, par exemple, Costabel (1983) dans lequel se trouve un commentaire du prix de 1724 ainsi qu'un extrait de l'édition de 1734, Papineau (1977) donne aussi une bonne vision d'ensemble de cette polémique.

[198] Contrairement à Costabel ou Papineau qui ont utilisé des éditions ultérieures de ce texte, nous utilisons l'édition de 1724. Costabel déclare que cette première édition est sortie en 1727 (Costabel, p.4.), or sur la page de titre nous lisons 1724. C'est pourquoi, nous considérons cette édition comme cela : Maclaurin (1724b), p. 5.

changement de force, c'est-à-dire, son augmentation ou diminution, est toujours proportionnel à la force imprimée, & la fait dans la direction de cette force. On entend par *force imprimée*, celle qui se consume entierement en augmentant ou diminuant le mouvement du Corps »[199]. Il énonce ensuite le principe d'action réaction : « L'action et la réaction sont toûjours égales, & ont leurs directions contraires ; c'est-à-dire, que l'action & la réaction produisent dans les corps d'égaux changemens de mouvement »[200]. Ces trois principes sont appelés par Maclaurin, *les Loix du mouvement*. Il déclare, alors, que si le mouvement d'un corps est uniforme, alors l'espace parcouru est égal au produit de la vitesse avec le temps mis pour parcourir cet espace, ceci est son quatrième principe[201]. Puis, le cinquième principe est que la force est proportionnelle à la masse[202]. C'est alors qu'il énonce que « la force produite dans un Corps ne peut jamais être plus grande que celle qu'avoit l'agent, qui lui communique son mouvement, s'il n'entre point de ressort dans leur action »[203]. Enfin, il s'attache à bien énoncer le référentiel dans lequel il échafaude sa théorie. Quelque soit le système de référence, les lois ne changent pas et un même phénomène dans deux types de référentiel sera traité de la même manière : « Tous les mouvemens, les forces & les chocs des Corps se font dans un espace qui s'avance avec une vîtesse uniforme, de même que si cet espace étoit absolument en repos. (…) Les chocs des Corps sur un vaisseau qui s'avance avec un mouvement égal, sont les mêmes que si le vaisseau n'avoit point de mouvement. »[204] C'est à partir de ces sept principes de base qu'il construit son corpus.

---

[199] Maclaurin (1724b), pp. 5-6.
[200] Maclaurin (1724b), p. 6.
[201] Maclaurin (1724b), p. 6.
[202] Maclaurin (1724b), p. 6.
[203] Maclaurin (1724b), p. 6.
[204] Maclaurin (1724b), pp. 6-7.

3. La critique de Maclaurin des arguments de Gravesande

La deuxième section est la plus importante du traité. Dans celle-ci, Maclaurin désire démontrer que la force est égale au produit de la masse par la vitesse. Ce qu'il veut montrer est en opposition avec le parti pris de Leibniz et de Gravesande qui considèrent que la force est proportionnelle au produit de la masse et du carré de la vitesse. La critique de Maclaurin s'articule non pas autour des propos même de Leibniz mais de ceux de Gravesande. En 1722, ce dernier a publié un ouvrage sur la loi des chocs[205]. Dans cet ouvrage, il suit les préceptes de Huygens et Leibniz au sujet de la « vis viva ». Nous n'allons pas entrer dans le détail mais simplement signaler ce que Gravesande entend faire dans cet ouvrage. Il déclare que « M. de Leibnitz est le premier qui ait avancé, que la force d'un corps en mouvement n'est pas proportionnelle à sa vitesse, suivant le sentiment ordinaire, mais au quarré de sa vitesse »[206]. Gravesande est tombé d'accord avec ce principe de Leibniz en le confrontant à l'expérience, ainsi nous pouvons lire « Les expériences que j'ai faites sur le choc, m'aiant fait voir démonstrativement que le sentiment de M. de Leibnitz est véritable, c'est-à-dire que les forces de différents corps sont en raison des masses multipliées par les quarrés des vitesses. »[207] Il signale que les règles qu'il donne ne sont pas nouvelles. En revanche, leurs démonstrations le sont et les expériences aussi. Nous pouvons lire dans la proposition X que « La force d'un corps est proportionnelle à sa masse multipliée par le quarré de sa vitesse »[208]. Cette proposition est déduite de deux propositions, la première montre que la force est proportionnelle à la masse du corps, la seconde « dans les corps égaux les forces sont en raison des quarrés de leurs vitesses. Comme cette proposition est contestée, je la prouverai par l'expérience

[205] Essai d'une nouvelle théorie du choc des corps, fondée sur l'expérience, in Gravesande (1774), pp. 215-247
[206] Gravesande (1774), p. 217.
[207] Gravesande (1774), p. 217.
[208] Gravesande (1774), p. 232.

avant d'en donner la démonstration »[209]. Cette expérience est la chute de corps sur de l'argile molle. Les corps pesants sont des boules de cuivre au nombre de trois, « exactement égales ». Leurs masses sont différentes, elles ont un rapport de un, deux, trois. La boule trois est trois fois plus pesante que la boule une. Dans l'argile plane, il fait tomber ces boules à partir d'hauteurs différentes. Après chaque chute, il mesure la trace de la boule laissée sur la terre glaise. Il s'appuie sur le précepte suivant : « Les cavités que font les boules en tombant dans la terre glaise, sont les actions entières des forces qu'ont les corps à la fin de leurs chutes »[210]. Sa conclusion est la suivante « Si *la boule un* & *la boule trois* tomboient toutes deux de la hauteur de neuf pouces, leurs forces acquises en tombant seroient comme un à trois ; par conséquent l'action de la *boule un* en tombant de la hauteur de vingt-sept pouces, est triple de ce qu'elle feroit en tombant de la hauteur de neuf pouces, puisque que cette action est égale à celle de la *boule trois*, lors que celle-ci tombe de la hauteur de neuf pouces ; par où il paroit que la force d'une boule croit comme la hauteur dont elle tombe : ce qui suit de même des autres expériences. Or cette hauteur est comme le quarré de la vitesse acquise en tombant & avec laquelle le corps frape [sic] la terre glaise ; cela est démontré & confirmé par un grand nombre d'expériences, & est connu. »[211] Nous avons repris cette conclusion dans sa grande partie pour indiquer l'esprit de l'ouvrage de Gravesande. De plus, comme Maclaurin s'attache à contredire Gravesande, il est nécessaire de le faire. Examinons la critique de Maclaurin sur cette mesure de la force.

Maclaurin considère cette question comme primordiale dans l'essai qu'il propose à l'Académie. En effet, « C'est la question la plus fondamentale que l'on puisse traiter à l'occasion des chocs des Corps ; c'est pourquoi je m'étendrai plus particulièrement sur la

---

[209] Gravesande (1774), p. 228.
[210] Gravesande (1774), p. 229.
[211] Gravesande (1774), p. 229.

discussion. »[212] Pour réfuter le type d'argument de Gravesande, Maclaurin se base sur l'expérience du bateau. Le bateau navigue avec un mouvement uniforme avec une vitesse comme 2. Deux personnes, l'un sur le bateau l'autre sur la berge, jettent deux corps égaux qu'il nomme A et B avec des efforts égaux dans la direction du mouvement du bateau et une vitesse comme 8. De la berge, le corps A a une vitesse comme 10, somme de la vitesse du bateau avec la vitesse du corps. Ainsi, d'après les dires de Leibniz, la force est proportionnelle à 100 si l'on regarde de la berge, et cette force est égale à 64 si l'on se trouve sur le bateau. Or ce corps A appartenant au bateau subissait déjà, du fait du mouvement du bateau une force proportionnelle à 4 (la vitesse du bateau est égale à deux). Par conséquent, vu de la berge, le corps aurait une force égale à $64+4=68$. Ceci est loin de la force proportionnelle à 100, calculée plus haut. « Ainsi, leurs forces ne peuvent par être comme les quarrez de leurs vîtesses. »[213] Maclaurin reprend le même type d'argument avec d'autres exemples. De même, il réfute avec force Gravesande qui soutient que, si deux corps dont les masses sont en raison inverse du carré de leurs vitesses se choquent (en ligne droite), alors elles seront en repos après le choc[214]. Il considère que cela « répugne extrêmement à l'expérience »[215]. Alors que Gravesande introduit l'inertie pour expliquer le phénomène. Maclaurin rétorque que « il faudroit, pour accorder à l'Auteur ses raisonnemens sur l'inertie & la résistance des Corps changer entierement nos idées de la force, de l'inertie & du mouvement, & quitter ce qui est assez clair pour adopter des obscuritez très profonde. »[216] Après une critique sur les principes mêmes, Maclaurin s'attache à émettre des doutes sur les expériences, en particulier celle de la chute des billes dans de la terre glaise. En effet, « il est impossible ou très-difficile de réduire à un juste calcul les retardements d'un corps qui tombe dans cette terre. L'Auteur avouë que la seule

[212] Maclaurin (1724b), p. 7.
[213] Maclaurin (1724b), p. 8.
[214] Gravesande (1722)
[215] Maclaurin (1724b), p. 11.
[216] Maclaurin (1724b), p. 11.

pesanteur d'un Corps qui n'a point de force, le peut enfoncer dans cette terre glaise. D'où l'on voit que les enfoncements ne sont pas proportionnels aux forces ; & que quand ceux-là sont égaux, il ne s'ensuit pas que celles-ci soient aussi égales. (…) Mais cette expérience ne suffit pas pour établir un principe que l'on ne peut pas accorder avec des autres expériences incontestables, comme nous avons démontré. »[217] Maclaurin refuse l'expérience en elle-même mais aussi parce qu'elle n'est rattachée à aucune autre expérience. Nous retrouvons ici la méthodologie que Maclaurin avait donnée dans la préface du *Geometria Organica*, à savoir que les expériences doivent être multiples, cohérentes entre-elles et facilement reproductibles. D'après Maclaurin, l'expérience de Gravesande ne satisfait donc pas toutes les conditions nécessaires pour la valider.

4. Les résultats démontrés par Maclaurin

A la suite de la critique de Gravesande, Maclaurin établit quelques résultats sur les chocs directs. Un choc entre deux corps est dit direct si le mouvement des centres de gravité est rectiligne et si les corps se déplacent sur la même ligne (droite). De plus, la surface de contact, lors du choc, est perpendiculaire à cette droite. Il définit ensuite les différents types de corps : les corps durs, les corps élastiques et les corps mous. Les corps durs sont les corps qui, lors du choc, ne sont pas modifiés dans leur forme. Les corps élastiques, eux, perdent une partie de leurs formes, mais en récupèrent tout (parfaitement élastiques) ou une partie. Les corps mous perdent en partie leur forme à la suite du choc. Il ajoute qu'il est nécessaire d'abstraire en mathématiques, en effet « on ne trouve point de Corps parfaitement durs, ni parfaitement élastiques ; mais cela n'empêche pas qu'on ne les considère dans la Physique. Il n'y a point de fluide Mathématique ; mais cela n'empêche

[217] Maclaurin (1724b), p. 15.

pas que l'on ne cherche les proprietez d'un tel fluide, & les résistances qu'il pourroit faire aux mouvemens des Corps »[218].

La première propriété est « si deux Corps parfaitement durs vont du même côté, il faut diviser la somme de leurs forces avant le choc par la somme de leurs masses pour avoir leur vîtesse commune après le choc. »[219] Les corps sont considérés comme sans ressort. L'argument se base sur la conservation des forces lors du choc. Ainsi, la force après le choc (commune aux deux corps) est égale à la somme des forces précédant le choc. D'après le principe selon lequel la force est égale au produit de la vitesse par la masse, la vitesse après le choc sera bien égale au rapport de la force avec la masse après le choc (égale à la somme des masses des deux corps). Si on note les deux corps A et B, avec leurs vitesses respectives, V et u, alors la vitesse après le choc est égale à $\frac{\mathrm{AV}+\mathrm{B}u}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$. La deuxième propriété donne la vitesse après le choc lorsque les corps ont des directions contraires. Si c'est le corps A qui a la plus grande force, alors la vitesse commune après le choc est égale à $\frac{\mathrm{AV}-\mathrm{B}u}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$. Pour les chocs de corps parfaitement élastiques, il faut prendre en compte l'action du ressort. Cette dernière « double les changemens de forces qui devroient être produits dans les Corps, s'ils n'avoient point de ressort »[220] Et, dans le cas des corps qui ne sont pas parfaitement élastiques, Maclaurin fait référence à un scholie[221] où Newton énonce la propriété conforme à l'expérience du choc de deux pendules. La propriété énoncée est que « Pour trouver les forces des corps qui ne sont pas parfaitement élastiques après le choc, il faut diminuer la vîtesse respective avec laquelle ils se séparent après le choc dans la raison de la force élastique. »[222] Le commentaire qu'en donne

---

[218] Maclaurin (1724b), p. 16.
[219] Maclaurin (1724b), p. 16.
[220] Maclaurin (1724b), p. 19.
[221] Newton (1687), pp. 21-23.
[222] Maclaurin (1724b), p. 21.

Maclaurin est le suivant « dans les chocs des corps parfaitement élastiques, la vîtesse respective après le choc est égale à la vitesse respective avant le choc : dans les chocs moins élastiques elle est moindre à proportion que l'effort du ressort qui produit la vîtesse respective après le choc est moins fort. (…) Il [Newton] trouva, par exemple, que deux Spheres de verre se separoient toujours après le choc avec une vitesse respective, qui étoit à la vîtesse respective de leur rencontre comme 15 est à 16 ».[223] De plus, ce rapport est constant pour les corps de même nature si, dans le choc, les corps ne subissent pas de déformation définitive. Il ajoute que ce raisonnement doit se faire au cas par cas, car il faut connaître la force élastique qui se trouve par l'expérience[224].

Le dernier point que nous aborderons est la résolution du problème du choc indirect. Pour Maclaurin, un choc indirect entre deux corps se produit lorsque les directions des deux corps ne sont pas sur la même ligne droite. Ainsi le problème est le suivant : « Les directions, les vîtesses & les diamètres de deux corps sphériques étant données avec leur situation dans quelques instants avant le choc, trouver l'endroit où ils se rencontreront. »[225]

Nous donnons dans le détail la résolution de ce problème car cette démonstration est caractéristique du type de ce que peut faire Maclaurin. Soient deux corps sphériques, A et B, de rayons respectifs r_{A} et r_{B} qui, au départ, se trouvent en A et B (Fig. 36). A se meut vers C, B vers C. Tout d'abord, Maclaurin suppose que la vitesse du corps A est à la vitesse du corps B comme AC est à BD, ainsi $\frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{B}}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BD}}$, ces vitesses ne sont pas considérées comme uniformes, mais considérées à un moment donné. Ce qui signifie que

[223] Maclaurin (1724b), pp. 21-2.
[224] Maclaurin (1724b), p. 22.
[225] Maclaurin (1724b), p. 22.

Maclaurin place un point D de telle façon que, pendant le temps que A a besoin pour parcourir AC, la boule B avec sa vitesse parcoure la distance BD.

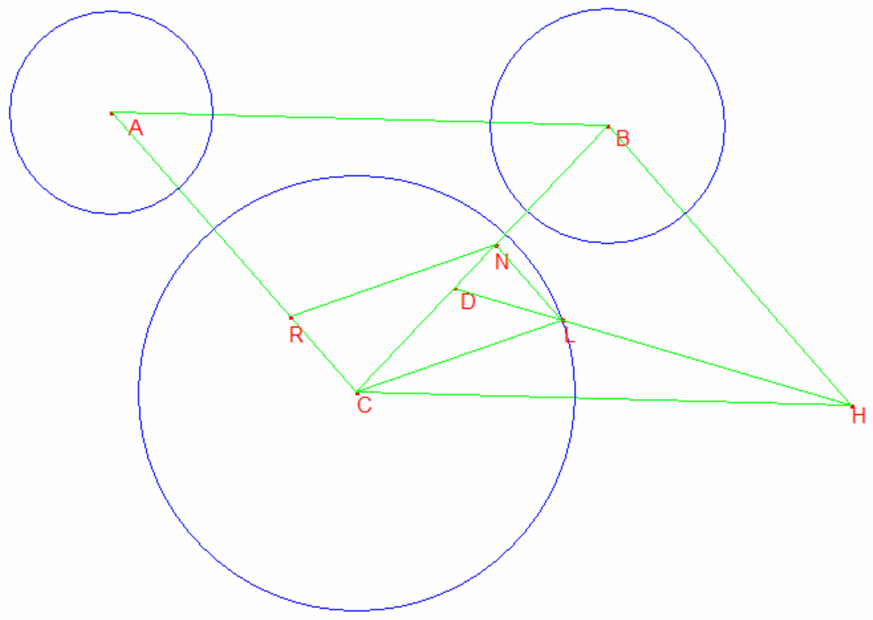


Fig. 36.

Pour trouver le lieu de contact des deux boules, Maclaurin recherche le lieu des centres des deux boules au moment de l'impact respectivement sur AC et BC, les trajectoires des boules. C'est-à-dire lors du choc entre les deux boules, le centre de la boule A sera sur AC, dans la figure 2, c'est le point R, et le centre de la boule B sera sur BC, dans notre exemple, c'est le point N. Pour cela, il construit le point H tel qu'ABHC soit un parallélogramme, puis, le cercle de centre C et de rayon la somme des rayons des deux boules, $r_{\mathrm{A}} + r_{\mathrm{B}}$. L est le point d'intersection entre ce cercle et la droite DH. Il construit alors le parallélogramme RCLN de telle façon que R soit sur AC et N sur BC. Alors, il conclut que le choc aura donc lieu lorsque A sera en R et B en N.

Donnons sa démonstration. NL et AC sont parallèles (du fait de la construction de RCLN) donc NL est parallèle à BH. Ainsi, dans le triangle BDH, par l'application du théorème de Thalès, $\frac{\mathrm{NL}}{\mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{DN}}{\mathrm{BD}}$. Par conséquent, $\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{DN}}{\mathrm{NL}}$. Puisque NLCR et ABHC sont des parallélogrammes, il remplace NL par CR et BH par AC dans l'égalité précédente.

Il obtient : $\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{DN}}{\mathrm{CR}}$. D'où, $\frac{\mathrm{BD}-\mathrm{DN}}{\mathrm{AC}-\mathrm{CR}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AC}}$, ou encore $\frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{AR}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AC}}$. Comme $\frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{B}}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BD}}$, il arrive à l'égalité $\frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{AR}} = \frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}$. Il applique le quatrième principe. D'après l'égalité précédente $\frac{V_{\mathrm{A}}}{\mathrm{AR}} = \frac{V_{\mathrm{B}}}{\mathrm{BN}}$ et comme la vitesse d'un corps est égale au rapport de l'espace parcouru par le temps qu'il faut pour parcourir cet espace, alors $\Delta T_{\mathrm{A}} = \Delta T_{\mathrm{B}}$. Ainsi, pendant le même intervalle de temps, la boule A décrit la distance AR tandis que la boule B décrit la longueur BN. En d'autres termes, les centres des boules A et B arriveront en même temps en R et N. Reste à savoir si à cet instant précis a lieu un choc entre les deux boules. Pour cela, il faudrait que les centres des deux boules soient séparés d'exactement la somme des deux rayons. Or, Maclaurin a construit les points de telle façon que RN qui est égal à CL est effectivement égal à la somme des deux rayons, $r_{\mathrm{A}} + r_{\mathrm{B}}$. Donc, à cet instant précis, il y a bien choc entre les deux boules et Maclaurin a bien trouvé le lieu de rencontre des deux boules. Dans la résolution de ce problème, Maclaurin utilise relativement peu les premiers principes qu'il a énoncés au début de son traité. Il utilise le principe que la vitesse est égale au rapport de la distance parcourue par le temps nécessaire pour la parcourir. L'essentiel de la résolution est de type géométrique. En revanche, pour la suite du problème, il a besoin d'utiliser ou de prendre appui sur des résultats qu'il a donnés précédemment. Il s'intéresse aussi à des cas particuliers de ce type de choc. Par exemple, le cas où il n'y a pas de choc entre les deux boules est lorsque le point L ne peut être construit, ou encore « si le sinus de l'angle CDL n'est pas moindre que la somme des demi-diamètres des Corps A & B, en prenant DC pour rayon, il n'y aura pas de choc »[226].

---

[226] Maclaurin (1724b), p. 23.

La suite de ce problème est de connaître les trajectoires et les vitesses des deux boules après le choc. Dans un premier temps, il s'intéresse aux vitesses respectives après le choc, puis dans un second temps, il donne la construction des trajectoires.

Pour avoir la vitesse après le choc, il décompose la vitesse en deux composantes. Pour ce faire, il part du principe « démontré » dans la partie deux, c'est-à-dire la force imprimée est égale au produit de la masse du corps par sa vitesse. Ainsi, la force qui produit le déplacement (et, par suite, le choc) est proportionnelle à la vitesse. Or, comme on peut décomposer la force en deux composantes perpendiculaires l'une de l'autre, on peut donc faire la même chose avec la vitesse en la décomposant en deux vitesses perpendiculaires. Comme la vitesse de la boule A en R est proportionnelle à la longueur AR, il décompose cette droite en deux, AQ et QR (Fig. 37). AQ est perpendiculaire à la droite RN, et QR est sur cette droite. De même, comme la vitesse de B en N est proportionnelle à BN, il décompose BN en BM et MN. Comme « les forces comme AQ & BM ayant des directions parallèles & agissantes dans la direction de la tangente des deux Corps, n'ont point d'effet dans le choc »[227], les forces agissantes dans le choc sont donc les autres composantes c'est-à-dire celles qui sont proportionnelles à QR et MN. Par conséquent, le choc indirect entre les deux boules peut être considéré comme un choc direct entre les deux boules suivant la direction RN avec des vitesses proportionnelles respectivement à RQ et à MN.

[227] Maclaurin (1724b), p. 23.

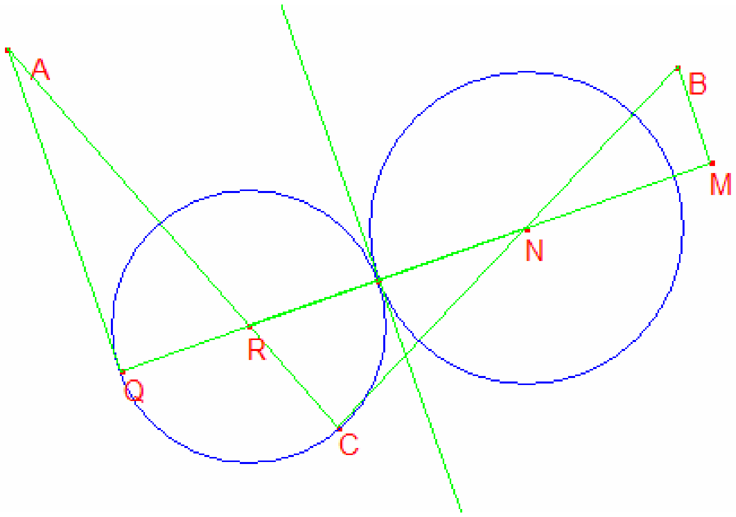


Fig. 37.

Étant donné que l'on peut considérer ce choc comme direct, pour trouver les trajectoires et les vitesses après le choc des deux corps, il suffit d'appliquer les résultats qu'il a donnés précédemment dans le cas des chocs directs. Donnons simplement la construction qui permet d'avoir à la fois la direction des trajectoires des boules après le choc, ainsi que leurs vitesses respectives.

Il suppose dans un premier temps les vitesses de A et de B à la suite du choc connues. Pour les trouver, il suffit de reprendre les résultats précédents des cas du choc direct. Les vitesses respectives sont alors R*g* et N*m*. (Fig. 38)

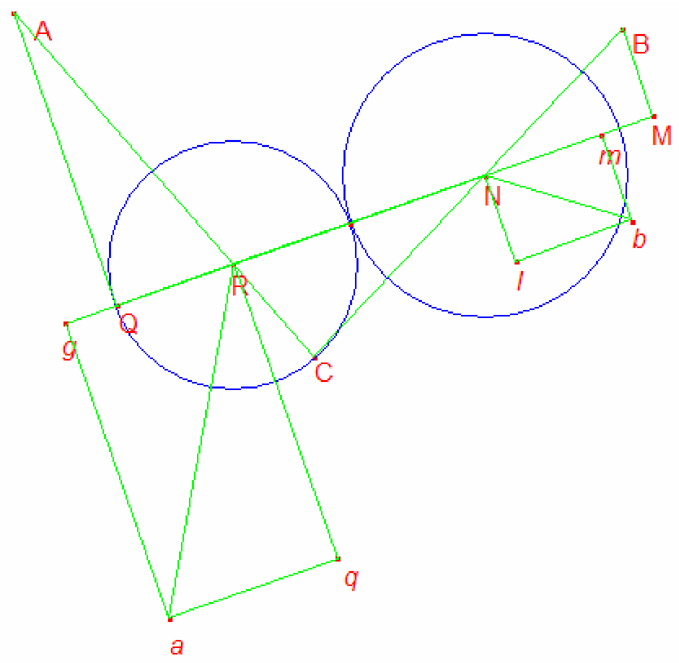


Fig. 38.

Alors, il construit les parallélogrammes R*qag* et N*mbl* tels que R*q* est parallèle et égal à AQ et que N*l* est parallèle et égal à BM. R*q* représente la vitesse résultant de la partie de la force qui n'agit pas lors du choc mais qui agit pendant le déplacement de la boule A. C'est la même chose pour la longueur N*l* pour la boule B. Ainsi, la vitesse de la boule A après le choc est bien la combinaison de la vitesse R*g* et R*q* qui est bien la diagonale, R*a*, du parallélogramme R*qag*. Et de la même manière, la vitesse de B après le choc est bien N*b*.

Il conclut par « il n'est pas nécessaire d'expliquer tous les cas particuliers du choc indirect ; il est aisé d'appliquer toûjours cette construction generale »[228]. C'est par ce résultat que se finit l'essai de Maclaurin. Il s'interdit de prolonger l'étude de cas plus complexes de chocs indirects car « il faudroit entrer dans un long détail de la Géométrie profonde »[229]. En revanche, il indique bien que les lois données dans cet ouvrage sont à la base de recherches sur des cas plus complexes.

[228] Maclaurin (1724b), p. 24.
[229] Maclaurin (1724b), p. 24.

5. Maclaurin et l'essai de Bernoulli

Revenons sur l'essai de Bernoulli. D'après Harman[230], ce mémoire est présenté par son auteur comme une élaboration systématique de la conception leibnizienne de la dynamique. Il se base sur les principes de continuité et de causalité chers à Leibniz. Bernoulli applique le concept de mouvement à l'analyse du choc des corps. La raison pour laquelle le traité de Bernoulli a été refusé est que ce dernier ne considère pas la dureté d'un corps comme une propriété fondamentale de la matière mais comme une condition supplémentaire, ce qui est en contradiction avec la pensée newtonienne sur cette question. Il démontre que la force vive est mv^2 où m est la masse et v la vitesse du corps. Maclaurin a connu l'ouvrage de Bernoulli très rapidement. En 1728, dans une lettre adressée à Hutcheson, Maclaurin déclare que le célèbre Bernoulli est en compétition avec lui par ce livre. Maclaurin se sent obligé de répondre aux idées de Bernoulli[231]. Ainsi, entre-t-il dans une phase de conflit avec certains savants continentaux, en particulier avec Bernoulli. La réfutation des arguments de Bernoulli sera reprise à la fois dans *The Account of Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries*[232] et dans le *Treatise of Fluxions*[233]. Quand Maclaurin signale qu'il se sent obligé de répondre, cela prend la forme d'un essai. Pour contrecarrer l'affront provenant de ces mathématiciens étrangers, cet essai doit être plus approfondi que son prix de 1724 et doit prendre en compte des résultats nouveaux[234]. Malheureusement, ce

---

[230] Harman (1988), pp. 215-219.
[231] « the celebrated Mr. Bernoulli had given in a piece which compeated with mine. Which he has since published ; and by it I think myself obliged to answer » in Mills (1982), p. 26
[232] Maclaurin (1748a), pp. 183-197
[233] Maclaurin (1742), vol. II, pp. 25-6
[234] « I am involved in a dispute with the forreign Mathematicians about estimating the forces of Bodys on Motion and am going to publish a small treatise just nou on that subject wherein I endeavour to answer all they have said hitherto against our Doctrine. To make it more use I make it a compleat treatise on the Motions arising from the Collision of Bobys and solve several new problems in it I was led into this dispute

traité qu'il considère comme écrit en 1728[235] ne sera jamais publié en tant que tel. En revanche, dans le *Cours de Physique Expérimentale* de Desaguliers apparaît une dissertation de Maclaurin s'intitulant « La mesure des forces en mouvement »[236]. Cette dernière correspond à l'ambition de Maclaurin annoncée à Hutcheson. Dans cet ouvrage, une partie de l'argumentation du prix de 1724 est reprise, à laquelle il ajoute des arguments supplémentaires. Par exemple, il reprend l'expérience du navire. Il est intéressant de noter que Desaguliers, toujours dans ses cours de physique, donne aussi les arguments de Gravesande que nous avons cités précédemment. L'ambition de Desaguliers exprimée dans une lettre adressée à Maclaurin, est de donner non seulement ce qu'il appelle l'ancienne opinion, celle de Newton, mais aussi de donner les arguments de la nouvelle opinion, celle de Leibniz, et ainsi de montrer comment ces derniers sont dans l'erreur. C'est pourquoi, il demande à Maclaurin l'accord de publier le manuscrit de Maclaurin[237]. Dans cette partie des cours de physique, Desaguliers rend ainsi compte du débat sur les forces vives en reprenant les deux théories. Le cours de Physique Expérimentale de Desaguliers offre au lecteur un ensemble de théories physiques qui a cours au 18ème siècle et donne ainsi un regard sur les connaissances à cette époque.

L'essai pour le prix de 1724, comme un article paru dans les *Philosophical Transactions*, a été rédigé lorsque Maclaurin était en France. En effet, pendant une relative

---

by the R. Academy of Sciences giving their annual prize in 1724 to a paper I sent them in which I endeavoured to demonstrate our Doctrine » in Mills (1982), p. 26.

[235] « treatise concerning the mensuration of the force of bodies in motion and the effects of their collisions, written in 1728 » in Maclaurin (1742), vol. II., p. 25

[236] Desaguliers (1744) ou (1751)

[237] « In writing the second Volume of my Experimental Philosophy (which I am doing now) I have undertaken to clear up fully the Question about the measure of the Force of Bodies in Motion, not only by repeating the Reasoning and Experiments that we commonly alledge in Defence f the old Opinion, and adding some new ones : but have also promis'd to acquiesce in what is right in our Adversaries Arguments and Experiments in Defence of the new Opinion ; and shewing wherein I think they are mistaken. (…)Now Sir, the Reason of my writing this to you now, is, that I have met in the Hands of one Mr Charles (a young mathematician) a Manuscript of yours concerning measure of the Force of Bodies in Motion, which contains the very same Thoughts tat I have had upon this Subject. But as yours were written before mine, and I can't pretend to express them so well and clearly as you have done, I intend to quote and copy your Paper in your own Words ; which I would not do without your leave, which I do hereby ask you, & which I hope you will grant me in your Answer. » in Mills (1982), p. 333-5.

longue période, il est employé comme tuteur d'un jeune anglais séjournant en France. Avec cet élève, Maclaurin va entamer ce que nous appelons son Tour de France. Ce périple changera radicalement la vie de Maclaurin.

E. Son Tour de France et son élection comme professeur de mathématiques à Édimbourg : premier tournant dans sa vie qui orientera à la fois sa carrière et sa vie d'homme.

1. Son départ d'Aberdeen

Depuis 1717, Maclaurin est employé par le *Marishall College* comme professeur de mathématiques. Cet emploi lui laisse du temps libre. Plus exactement, les cours à donner doivent être dispensés entre octobre et avril. Ceci lui laisse la moitié de l'année sans enseignement. Son envie de voyager se fait sentir très tôt chez lui. Nous avons déjà signalé qu'il était parti à Londres en mai 1719. Il y retourne en mai 1721. Lors du deuxième voyage dans la capitale, il rencontre à nouveau certains membres de la Royal Society avec qui il avait déjà eu des relations, par exemple Newton, Mitchell et surtout Folkes, qui est un homme de grande qualité, ayant un grand savoir et qui est un excellent ami[238]. Le jour de son départ du retour de Londres à Aberdeen, le 27 novembre, on propose à Maclaurin de devenir le tuteur et le compagnon de voyage du fils de Lord Polwarth. Ce dernier est alors ambassadeur du roi George I au Congrès de Cambrai réuni depuis 1720. Le fils de Lord Polwarth, George[239] Hume, entame son tour de l'Europe et a besoin d'un compagnon et d'un maître pour finir sa formation. Maclaurin accepte et retourne en Écosse dans l'espoir d'avoir la permission de se libérer de sa charge d'enseignant à l'université d'Aberdeen pendant quelques années.

---

[238] « a Gentleman of Norfolk of a good Estate of great Learning and an excellent friend » in Maclaurin, Colin, MS 206, f. 188r, les feuillets ne sont numérotés que sur le recto

[239] Les biographes de Maclaurin ont nommé ce jeune homme Patrick. Or, dans la correspondance de son père, il est fait mention de George Hume Campbell comme le compagnon de Maclaurin. De plus, dans une lettre de James Tait à George Hume datée du 20 juillet 1722, Tait annonce à Hume que son nouveau tuteur est Maclaurin. Voir lettre de James Tait à George Hume, N.A.S, GD158/2886 et Bound letterbook of Alexander, 2nd earl of Marchmont, N.A.S, GD158/2507.

Ainsi, dès son retour à Aberdeen, il cherche un moyen d'obtenir l'autorisation de pouvoir voyager. Il finit quand même, au *Marishal college*, son service jusqu'en avril. À la suite d'une demande du Duc D'Argyll, Maclaurin écrit à un certain Mr B[240] (nous n'avons pas réussi à trouver l'identité de cet homme) pour savoir quelle était sa position pour les élections du parlement qui devaient se dérouler prochainement. En échange, Maclaurin veut un appui pour valider son départ d'Aberdeen. Mais ce monsieur B est incapable d'obtenir l'accord des instances universitaires pour libérer Maclaurin de ses tâches d'enseignant et ainsi pouvoir voyager pendant quelques années[241]. Ces mêmes personnes lui conseillent alors de demander cette autorisation après l'élection des magistrats de la ville d'Aberdeen qui a lieu en septembre 1722. Mais, Maclaurin n'attend pas cette échéance et décide de partir. Le 29 mai 1722, il part d'Aberdeen, apparemment sans en référer aux instances du *Marishall College*. Cependant, il est inquiet de ce départ et de ses conséquences. À plusieurs reprises, il fait part de sa crainte de perdre son poste. Il déclare ainsi, dans une lettre adressée à Lord Kimminghame, que le maire de la ville fait pression sur lui pour qu'il soit démis de ses fonctions s'il n'est pas présent le 7 octobre 1722 à Aberdeen[242]. Il explique qu'il ne peut pas car d'une part il s'est engagé avec Lord Polwarth et il ne veut pas voyager à cette époque de l'année car il considère cela comme trop risqué. C'est pour quoi il demande que Lord Kimminghame fasse pression sur le conseil municipal et sur le principal du Marishal College pour que Maclaurin puisse rester en France[243]. Dans une lettre adressée à Lady Grissel datée du 16 octobre 1723, on apprend

[240] C'est peut-être George Baillie, le mari de Lady Grizel Baillie avec qui Maclaurin est en contact.
[241] « Mr B was not able to effectuate what was desyr'd of him by this I got much of the confidence of the D and his friends and of Mr B to which made me hope to obtain the liberty I want to Absent from Aberdeen for some years » in Maclaurin, MS 206, f. 188v
[242] « that the magistrates & toun Council being at his devotion they will declare my office vacant if I do not appear there this winter » in lettre de Maclaurin à Lord Kimmergham, du 7 novembre 1722, N.A.S, RH15/15/108. citée en annexe.
[243] « If your Lordship could procure me by your Interest with the Members of the Commission the justice that I desyre it would lay the highest Obligation on me and would I believe not be disagreeable to his Excellency. » in Lettre de Maclaurin à Lord Kimmergham.

qu'il a envoyé par l'intermédiaire de Lady Grissel, en juillet, une demande d'absence aux magistrats de la ville d'Aberdeen. Or en octobre, il n'a toujours pas reçu de nouvelles de la part de Lady Grissel. Il déclare à cette personne qu'il a peur de perdre son poste si rien n'est fait car il manque d'appui à Aberdeen pour défendre son cas[244]

2. Son voyage

Le journal de voyage[245] de Maclaurin est une source importante pour connaître son voyage et les personnes qu'il a rencontrées. Maclaurin fait tout d'abord une halte à Londres, rencontre à nouveau ses connaissances londoniennes, Mr Baillie, Mr Burnet, Mr de la Pillonière, mais aussi des membres de la Royal Society tels que Newton, Folkes, Graham…. Les entrevues entre Maclaurin et Folkes et celles avec Newton sont nombreuses. Maclaurin assure qu'il a toujours été bien accueilli par Newton et que ce dernier lui accorde sa confiance[246]. Cela conforte l'idée que, déjà à cette époque, Maclaurin est connu du monde savant et qu'il a des relations avec des savants londoniens. Lors de ce séjour à Londres, il assiste aussi aux funérailles du Duc de Marlborough qu'il décrit avec beaucoup de précision.

Dans ce journal, Maclaurin apparaît comme un jeune homme enthousiasmé par ce périple. Ses descriptions oscillent entre la découverte naïve et l'amusement le plus total. Donnons un exemple du type de sentiment de Maclaurin. Il décrit assez longuement son

---

[244] « I took the liberty to send your Ladyship in July some letters from Aberdeen that I might knou if I could have the permission of the Magistrates & Colledge to absent this winter. I am surprises I have had no ansuer and humbly beg that if your Ladyship has any letters for me they may be forwarded. If I had not permission to absent tho' might be secured otherwise yet I am afraid to disoblige too much people that I must live amongst probably all my life I had some letters last moneth by which I was assured that my absence was taken ill ; and as there is no body can officiate for me there, it cannot look well I shall be glad to knou what success Your Ladyship's applications may have had. » in Lettre de Maclaurin à Lady Grissel, du 16 octobre 1723, N.A.S, RH15/15/108 citée en annexe.

[245] Ce manuscrit se trouve à la bibliothèque de l'université d'Aberdeen, MS 206

[246] « I was to see Sir Isaac Newton and was very well received by him. He showed me a letter he had from Mr Stirling the mathematician who proposed to set up to teach Mathematicks at London. » in Maclaurin, MS 206, f. 196v.

séjour à Auxerre. Ce qui l'étonne le plus lors du séjour dans cette ville, ce sont les reliques qui se trouvent dans l'abbaye Saint Germain qui est, d'après lui, le lieu des reliques les plus célèbres de France voire d'Europe[247]. Il explique que les membres de cette abbaye prétendent avoir les corps de 70 saints. Il raconte que lorsque les tombes ont été examinées en 1636, une bonne partie des morts était dans un bon état de conservation et que leurs habits étaient intacts[248]. Nous avons pris cet exemple car il est significatif de ce que Maclaurin rapporte dans son journal. En effet, il y fait la description de nombreuses églises, cathédrales, abbayes. De plus, il est intrigué par la religion catholique et par ses habitudes. Dans une de ses lettres adressée à I. Spreull, il raconte ce que nous venons de décrire. Il ajoute un commentaire sur les morts. Certains sont présentés comme dans un cabinet de curiosités. Il ne veut donner de détails sur les miracles à la suite des expositions car il ne veut pas provoquer l'hilarité de son lecteur[249]. Ce qu'il pense des religieux est du même type, il les décrit ignorants avec toujours cette volonté farouche de le convertir[250]. Revenons maintenant à son parcours en France.

Nous ne pouvons pas retracer exactement son itinéraire à travers la France et une partie de l'Europe. Ce que nous savons, c'est qu'il arrive à Calais le 17 août 1722, rejoint Cambrai le 19. Il reste à Cambrai une dizaine de jours et le 30 août, avec son élève il quitte cette ville pour Lunéville qu'ils rejoignent quatre jours après. Maclaurin passe avec Patrick Hume une longue période à la cour de Léopold en Lorraine. Il semble que les deux britanniques ont pris leur villégiature pendant quelques mois à Lunéville. Maclaurin décrit

[247] « the most celebrated place for reliques of all France or perhaps of all Europe » in Maclaurin, MS 206, f. 191.

[248] « the Prior told us that when the tombs were examined in 1636 by their Bishop, Mr de Seguier, a great many of these Saints who had been Bishops of Auxerre had been found in their pontificall habits as entire and in as good condition as body they had been 'rien'. » in Maclaurin, MS 206, f. 191v.

[249] « as in a Cabinet of Curiosities. (…) Of the rest each had performed several Miracles. I cou'd tell you Some of them, but I am afraid they might make you laugh » in Mills (1982), p. 21.

[250] « The Monks of this Country [Lorraine] are generally unlearned. There is only one Man a Benedictine named Don Calmet that is much famed. » in Mills (1982), p. 18.

cette cour comme l'une des plus polies d'Europe[251]. Dans cette ville, Hume se forme à l'Académie de Lunéville. Cette dernière est une Académie[252] pour les jeunes nobles dans laquelle ils se forment aussi à l'équitation, à l'escrime, … C'est dans ce centre intellectuel de l'est de la France, que Maclaurin commence réellement son voyage en France. Il rencontre beaucoup de personnes proches de la cour et de l'Académie. C'est à leurs contacts qu'il parfait son français. De plus, il fournit à la Royal Society un compte-rendu d'une naissance monstrueuse à Domrémy[253]. Ce séjour est aussi fécond en production scientifique. Ainsi, c'est toujours à Lunéville (ou Nancy) qu'il produit l'essai du prix de 1724. De Nancy (ou Lunéville), il envoie quelques résultats[254] dont la découverte a eu lieu lors de la traversée de la Manche[255] et qui seront publiés bien plus tard lors d'une polémique avec Braikenridge. Ce sont des théorèmes qui font suite à son ouvrage de géométrie, le *Geometria Organica*. Cela aurait dû être l'objet d'un ouvrage comme supplément au *Geometria* avec lequel il aurait dû ajouter des résultats trouvés en 1722[256]. Nous reviendrons sur cette polémique plus bas.

Nous ne connaissons pas les tribulations de Maclaurin pendant l'année 1723. En revanche, nous possédons plus de détails sur la dernière année de son séjour en France. A la demande du père de Hume, ce dernier arrête sa formation dans l'Académie de Lunéville. Ainsi, vers mars 1724, Maclaurin a comme projet de partir vers Genève pour l'été qui sera, il l'espère, un grand moment de plaisir[257]. Mais, il semble que cela ne se soit pas passé ainsi.

En effet, Maclaurin quitte Paris fin juillet. Il a donc fait un séjour dans cette ville qu'il considère comme très agréable et qu'il regrette de quitter. Il nous a été impossible de

---

[251] « one of the politest Courts in Europe » in Mills (1982), p. 17.
[252] Boutier (1999)
[253] Maclaurin (1724a).
[254] Maclaurin (1737b).
[255] « the paper on this Subject I have, is dated July 31, 1722, at Sea, being then in my way to London going for Cambray » in Maclaurin (1737b), p. 146.
[256] « I shall first give you an abstract of that Supplement as far as it was then printed, and shall subjoin to this an Account of some theorems I added to it the following Year, *viz*. in 1722. » in Maclaurin (1737a), p. 144.
[257] « where I promise my Self a great deal of pleasure » in Mills (1982), p. 18.

savoir quelles personnes Maclaurin a rencontré lors de ce séjour à Paris, et en particulier quels savants parisiens. Après ce séjour à Paris, nos deux voyageurs partent vers Fontainebleau, Sens, Pont sur Yonne, Auxerre. Ils restent quelques jours dans cette ville qui est pour Maclaurin un lieu pittoresque par ses habitudes que nous avons citées plus haut. D'Auxerre, ils continuent leurs périples vers Dijon qui est très belle[258]. Dans cette ville, Maclaurin découvre dans la Sainte-Chapelle l'hostie miraculeuse[259] qui est marquée de rouge provenant de sang lorsque cette hostie est touchée par un juif[260]. Maclaurin ajoute que pour les possesseurs de cette hostie, elle est une démonstration de la religion catholique, car elle continue d'avoir des couleurs toujours aussi vives malgré son ancienneté. Il ne trouve pas cela étonnant de rencontrer ce type d'objet dans un pays dans lequel Dieu peut être enfermé dans des boîtes et gardé comme cela pour amuser les voyageurs[261]. Ils poursuivent leur périple par Chalons-sur-Saône puis par Lyon, qui est une des plus beaux endroits du monde[262]. Maclaurin rencontre dans cette ville une communauté protestante avec laquelle il a de bonnes relations. Leur voyage continue vers le sud avec Avignon (et la Fontaine du Vaucluse), Marseille qui « makes a fine Appearance from the Harbour, like an Amphitheatre, of which the Bassin or Harbour is the Areana. »[263] Leur séjour à Marseille se situe autour du 26 août 1724. Nous retrouvons Maclaurin ensuite à Montpellier qui est la fin de son « Tour de France ». En effet, son élève George Hume tombe malade à Montpellier et meurt le 19 septembre 1724. Cette épreuve est pour Maclaurin très douloureuse car d'une part il perd à la fois son ami[264] et

[258] « is very beautiful » in Maclaurin, MS 206, f. 193r.
[259] Cette hostie a été offerte en 1433 à Philippe le Bon par le pape Eugène IV.
[260] « mark'd with red spots supply to be from drops of blood it shed when struck by a jeu [sic] » in Maclaurin, MS 206, f. 194r.
[261] « they pretend it is an unansuerable demonstration of their religion that this wafer continues of a fresh colour for these hundred years. (…) It is no wonder this raritys are of this kind in a country where their god can be lock'd up in boxes and keep'd for ages to amuse travellers » in Maclaurin, MS 206, f. 194r.
[262] « has one of the finest Situations in the World ; the two Rivers that meet there, the Irregular Hills about it adorn it extremly. » in Mills (1982), p. 21.
[263] Mills (1982), p. 22.
[264] Pour cette occasion, Maclaurin écrit un poème dédié à Hume. In NAS, GD158/492 cité en annexe.

élève et d'autre part sa raison d'être en France. Dans la lettre au comte de Morton écrit vers le mois d'avril 1744, il décrit cette période et il explique que c'est cela qui l'a amené à rentrer à Aberdeen et à refuser catégoriquement d'être à nouveau tuteur et compagnon de voyage d'un jeune noble. De plus, cela a confirmé chez lui, sa certitude de ne pas devenir médecin[265]. Donc, après s'être occupé de l'enterrement de Hume à Montpellier, il annonce aux instances d'Aberdeen son retour et espère arriver avant le début de sa charge[266].

3. Le retour à Aberdeen

De retour à Aberdeen en janvier 1725, Maclaurin se retrouve dans une position très inconfortable. En effet, parti avant d'avoir obtenu l'autorisation des instances universitaires et n'ayant pas donné de nouvelles pendant près de trois ans, Maclaurin se rend compte que les autorités du *Marishal College* l'ont remplacé pour la période 1725. En effet, considérant que Maclaurin était à l'étranger et qu'il n'a pas assuré ses cours pendant près de trois ans, ils ont nommé un de leurs recteurs anciennement professeur de mathématiques à l'université de Saint Andrews comme remplaçant (temporaire) au poste de professeur de mathématiques[267]. De plus, dès son retour, il est convoqué, devant le conseil, pour s'expliquer de ses agissements lors de ces trois dernières années[268]. Il faut

[265] « When the Young Lord fell ill, I had enough to make me despise the Skill of the Physicians of the place, who were french. And resolved, when he dyed, either never to engage in that sort of business again, or first to study physick. » in Mills (1982), p. 153.

[266] « by severall missive Letters from him he promised to have been here before now » in Minutes of Aberdeen Town Coucil, vol. 59, p. 151.

[267] « consideration that Master Colin McLaurin Professor of Mathematicks in the College Marishall of Aberdeen had been abroad and not attended his charge in the said Colledge for near thir three years bygone (…) therefore the said Magistrats and Counsell Recomended to Master Daniel Gordon one of the Regents of the said Colledge (who had formerly taught Mathematicks at the University of St Andrews) that he may teach the Mathematicks to the Students of this Colledge for this Session » in Minutes of Aberdeen Town Coucil, vol. 59, p. 151.

[268] « But that the Provost by desire of the Magistrats had told him not to teach the Mathematicks to the Students, Untill he should give some reasonable satisfaction and acknowledgement, First, For his going away without Liberty from the Counsell. 2[do] / For his being so long absent from his Charge and not attending the same » in Minutes of Aberdeen Town Coucil, vol. 59, p. 159.

attendre le 27 avril pour que le conseil reçoive les excuses officielles de Maclaurin[269]. Ce dernier reprend les cours qu'il doit donner mais il se sent étouffé par l'ambiance autour de lui. En effet dans une lettre à Archibald Campbell du 9 avril 1725, il déclare qu'il est soumis à une pression de tous les instants, en particulier par le principal du *Marishall College*[270]. Son désir de quitter à nouveau Aberdeen augmente. Il lui manque une opportunité.

4. Son arrivée à Édimbourg

A l'Université d'Édimbourg, le professeur de mathématiques, James Gregory a des difficultés à assurer ses cours à cause d'une constitution fragile et d'un âge avancé (en 1725, il a 59 ans). Ainsi, cette université est à la recherche d'un jeune professeur de mathématiques pour devenir l'assistant de Gregory. Newton, au courant des mésaventures de Maclaurin avec son université, s'emploie pour signifier au conseil municipal d'Édimbourg que le jeune professeur de mathématiques du *Marishal College* d'Aberdeen est disponible. A cette époque, le conseil municipal d'Édimbourg dirige et finance l'université[271], il décide la création ou la modification d'une chaire, paie les professeurs, maintient en bon état les bâtiments de l'université. De plus, en 1725, le Lord Provost (le maire), George Drummond, est un homme dont l'ambition pour sa ville et pour l'Écosse est très importante. Il considère qu'Édimbourg ne doit plus être une capitale régionale du

[269] « there had been several meetings with Mr Colin Mclauran Professor of Mathematicks anent his remaining abroad so long from his office, and that now he was content to appear this day in Counsell and give satisfaction, Which being considered by the said magistrates and Counsell they were content to accept of the same, and the said Mr Colin Mclauran being called, compeared in Counsell had taken offence and promised to be carefull of his Charge hereafter, wherewith the Magistrats and Counsell were satisfied and appointed such Salarys as were due to the said Professor to be payed to him. » in Minutes of Aberdeen Town Coucil, vol. 59, p. 180.

[270] « I have been in such a hurry as you cannot imagine ; Our Principall has been more & more obstreperous, and has multiplyed troubles on us. (…) what with teaching & affairs I have had no little embarrass this winter » in Mills (1982), p. 170.

[271] Morrell (1976)

nord de l'Europe mais un lieu important de l'Europe. Pour cela, il a compris que le développement intellectuel et commercial se fera si cette ville est attrayante[272]. Il lui faut donc des savants de renommée internationale. Tout naturellement, le conseil municipal est enthousiaste lorsque Newton, entre-autres, propose à la municipalité d'Édimbourg, Maclaurin qui a toutes les compétences en mathématiques et qui est très connu pour son savoir. Le conseil municipal est convaincu qu'avoir Maclaurin parmi les enseignants est une opportunité à saisir et que Maclaurin contribuera à la réputation de l'université par le développement de ses recherches[273].

Il semble que le conseil municipal ne soit pas au courant des déboires de Maclaurin avec le *Marishal College*, car il n'en est pas fait mention dans le procès verbal du conseil. De plus, pour l'université d'Édimbourg, le plus important n'est pas d'employer un bon enseignant. La seule exigence à propos de l'enseignement est que le candidat doit donner des cours sur toutes les branches des mathématiques durant toute la période de façon aussi appliquée et assidue que les autres professeurs[274]. La réponse de Maclaurin au conseil municipal ne se fait pas attendre. Le 10 novembre, lors du conseil municipal, il est dit que Maclaurin accepte le poste de professeur de mathématiques et prête serment à la fois devant le conseil municipal et devant le roi d'exercer fidèlement sa charge[275].

James Gregory, malgré l'arrivée d'un assistant, continuera de percevoir son salaire

---

272 Morrell (1976), p. 47.

273 « [Maclaurin] had made surprising appearances in that part of learning and these so very well known to all the Learned world that thoke had a very favourable Character bestowed on him by very Great men & even by Sir Isaac Newton himself he did not seem to need any of those to convince us that it was Impossible for us to hope for any opportunity of doing athing more Honorable and advantageous of the City. That could contribute more to the Reputation of the University & advence the interest of Learning in this country than the giving M^r^ Maclaurin suitable encouragement to settle among us. » in Minutes of Edinburg Town Concill, vol. 51, p. 16. cite en annexe

274 « M^r^ M^c^Laurin should attend the dutie of teaching all the several parts of the Mathematicks as there should to be occasion during the Sitting of the Colledge as the same had been practised by other diligent professors » in Minutes of Edinburg Town Concill, vol. 51, p. 18.

275 « The Same Day compeared M^r^ Colin Maclaurin formerly Elected professor of Mathematicks in the University of this City accepted of his office made faith defideli administratione & qualified himself conform to law by taking the Oath of alleadgeance and subscribing the same with the assurance to his majestie King George & took & subscribe the Oath in the Councells act » in Minutes of Edinburg Town Concill, vol. 51, p. 24.

annuel initial, de quatre-vingt trois livres six shillings et huit pence sterling jusqu'à son décès. De plus, si la mort de celui-ci intervient avant 1732, ses héritiers percevront cette rente pendant sept ans[276]. Maclaurin, quant à lui, reçoit comme salaire annuel cinquante livres sterling en tant que « joint professor ». Il ne recevra donc le salaire de Gregory que lorsque les conditions seront réunies, c'est-à-dire soit au décès de Grégory après 1732, soit sept ans après le décès de cet homme avant 1732. Maclaurin perçoit donc un petit salaire de base. Pour vivre convenablement, il perçoit des appointements de la part de ses élèves. Ainsi, plus il fait de cours, plus il reçoit de l'argent. Et plus il y a d'élèves, plus il perçoit d'appointements. Cette façon d'opérer est à l'initiative de la politique de Drummond[277]. Nous y reviendrons plus loin, mais nous pouvons déjà signaler que Maclaurin enseigne à Édimbourg cinq à six heures par jour dans des classes regroupant en tout une centaine d'étudiants.

Maclaurin quitte donc Aberdeen dès novembre 1725, sans en parler aux instances du *Marishal College* d'Aberdeen. En effet, nous pouvons lire dans les procès-verbaux du conseil du *Marishal College*, que ce dernier a appris par les journaux que Maclaurin a été nommé professeur à Édimbourg et déclare donc son poste vacant[278]. Le conseil est vexé de n'avoir par eu la nouvelle par Maclaurin lui-même. Ce que Maclaurin récuse fermement. Lors de la session du 23 février, il annonce qu'il avait envoyé sa démission aux instances de l'université d'Aberdeen[279]. Malheureusement, la lettre de démission ne nous est pas parvenue. Il convient donc de rester prudent sur ce fait qui est d'un intérêt mineur. Nous sommes portés à croire Maclaurin lorsqu'il signale qu'il a bien procédé dans les règles. Après les déboires qu'il a subis en rentrant de son voyage en France et qui l'ont beaucoup

[276] Minutes of Edinburg Town Concill, vol. 51, pp. 16-17
[277] Morrell (1976) ou Wood (1994), pp. 101-5.
[278] « The Council learning 'by the Public Newsprints.' That McLaurine has been admitted conjunct professor with Mr. James Gregory in the University of Edinburgh, declare his office vacant » in Records of Marishal college, 12 janvier 1726.
[279] « Maclaurin intimates that he sent his demission to the Masters. » in Records of Marishal college, 23 février 1726.

peiné, Maclaurin a dû faire les démarches nécessaires.

Ainsi, à partir de la fin de 1725, Maclaurin possède à nouveau un statut de professeur et il est accepté par l'université. Dans un de ses manuscrits[280], il déclare qu'il a été très touché par les appuis qu'il a reçus pour obtenir ce poste de professeur adjoint. En particulier, il est reconnaissant vis-à-vis du conseil qui a réussi à trouver le financement du poste[281]. Comme nous l'avons déjà signalé, Newton a eu une part non négligeable dans la réussite de Maclaurin dans cette affaire. Dès le début de cette histoire, Newton écrit à Maclaurin qu'il est content d'apprendre que ce dernier a été contacté par l'université d'Édimbourg surtout par ses compétences et non pour les relations qu'il entretient avec Newton, et qu'il espère fortement que son correspondant sera élu à ce poste[282]. Newton va même plus loin. En effet, pour financer ce deuxième poste de mathématiques à Édimbourg, il propose à la municipalité une sorte de rente annuelle de vingt livres Sterling si c'est Maclaurin qui détient le poste. Cette rente proposée est censé durer jusqu'à la mort de James Gregory ou de Newton[283]. Nous suivons l'avis des éditeurs de la correspondance de Newton qui considèrent qu'il y a de grande chance que cette lettre n'ait jamais été envoyée car dans les minutes du conseil municipal d'Édimbourg, il n'est pas fait mention de cette proposition. Néanmoins, l'appui que Newton donne à la candidature de Maclaurin

---

[280] Ce manuscrit est une partie des mémoires de Maclaurin écrite par un secrétaire ou par un de ses étudiants à la fin de sa vie. C'est la raison pour laquelle la troisième personne du singulier est utilisée dans ce manuscrit.

[281] «Mr MacLaurin had a very grateful sense of the Kindness shewn him by the City of Edinbr in this Matter, by their taking such Pains to have him settled among them when it cou'd not be done without appointing a New Salary on purpose for him, & particularily (sic) of the Friendship shewn by some Gentlemen who exerted themselves in this Affair with much activity. » in Maclaurin, MS. Gen.1378/2, p. 4.

[282] « I am very glad to hear that you have a prospect of being joyned with M^{r}. James Gregory in the Professorship of Mathematicks at Edinburgh, not only because you are my friend, but principaly because of your abilities, you being acquainted as well with the new improvem^{ts} of Mathematicks as with the former state of those sciences. I heartily wish you good success, & shall be very glad to heare of your being elected. » in Mills (1982), p. 171.

[283] « I received the honour of your Letter & am glad to understand that Mr MacLaurin is on good repute amongst you for his skill in Mathematicks. For I think he deserves very well. And to satisfy you that I do not flatter him, & also to encourage him to accept of the place of assisting Mr Gregory in order to succeed him, I am ready (if you please to give me leave) to contribute twenty pounds per annum towards a provision for him till Mr Gregories place becomes void if I live so long… » in Newton (1977), vol. VII, p. 338.

nous incite à penser que cet appui provient de cette lettre[284]. La proposition de Newton n'est connue de Maclaurin que relativement tard. Ce n'est qu'en 1731, bien après la mort de Newton, que John Conduitt indique la proposition financière de Newton. Maclaurin considère cela comme la meilleure preuve des ses propres compétences et de la générosité de Newton[285].

La seconde période qui nous intéresse dorénavant débute avec son arrivée à Édimbourg jusqu'à son mariage avec Anne en 1733. Cette période est largement consacrée à l'enseignement car, dans une des lettres adressée à Folkes, il se plaint qu'il est, depuis six ans (c'est-à-dire depuis son arrivée à Édimbourg), excessivement pris. Son temps a essentiellement été consacré à enseigner différentes parties des sciences alors qu'il aurait préféré consacrer plus de temps au développement des sciences. En effet, après six heures de cours dans la journée, il est trop fatigué pour travailler sur des sujets difficiles[286]. Nous verrons comment cet enseignement s'est traduit dans sa production mathématique. En effet, nous regarderons comment son *Treatise of Algebra*, qui est un manuel d'algèbre, s'articule avec de nouveaux résultats.

---

[284] Newton (C), vol VII, pp. 338-9, n. 1.

[285] « I find Sir Isaac Newton's friendship for me went still farther than I imagined. I find he offered to pay a part of my Salary himself during Mr Gregory's life. There can be no greater proof of my meriting some encouragement given than this. (…) I had never the pleasure to thank him for his kind & generous offer. » in Mills, pp. 32-3

[286] « [has] been drudging here six years in an intolerable way. My whole time almost has been employed in teaching the Elements of a Science when I would have with much greater pleasure cultivated any Genius I may have for the sublimer part of it. (…) When I taught Six hours in a day I am so fatigued that I can read nothing if it is not of a much easier Nature. » in Mills (1982), p. 32.

II. La maturité de Maclaurin

A. Le *Treatise of Algebra* : un mélange de commentaires de l'*Arithmetica Universalis* de Newton et de résultats originaux.

Deux ans après la mort de Maclaurin paraît *The Treatise of Algebra*. Ce traité a connu, en Angleterre et en Écosse tout au long du 18ème siècle, de nombreuses éditions (6 en tout). Une traduction française a été produite par Le Cozic[287]. Il était utilisé par les enseignants britanniques pour faire découvrir l'algèbre aux étudiants. Dès le début de sa carrière d'enseignant, Maclaurin enseigne aussi l'algèbre. C'est même l'un des plus importants sujets de ses cours. Nous avons à notre disposition des notes d'un cours d'algèbre de Maclaurin prises par un étudiant et plusieurs manuscrits d'un traité d'algèbre de Maclaurin. Dans un premier temps, nous regarderons ce que nous qualifions de premières versions du *Treatise of Algebra*. Ces différents manuscrits nous permettent surtout de situer la période où son activité intellectuelle s'est focalisée sur l'algèbre. C'est pourquoi, comme nous le montrerons, nous avons décidé de mettre dans ce chapitre notre étude du *Treatise of Algebra*. De plus, nous pourrons comparer les versions manuscrites avec la version publiée et nous rendre compte des éventuels ajouts des éditeurs. Ces derniers précisent dans la préface qu'ils ont édité cet ouvrage parce que c'est un très bon commentaire de l'*Arithmetica Universalis* de Newton. Il nous semble intéressant de le comparer, brièvement avec la production newtonienne et ainsi nous rendre compte qu'il ne s'arrête pas à un commentaire de l'ouvrage de Newton, mais qu'il donne des résultats

[287] Maclaurin (1753). Cette traduction n'est pas fidèle et le traducteur a ajouté de nombreux articles complètement étrangers à Maclaurin. Nous ne l'avons pas du tout utilisée.

supplémentaires et des démonstrations nouvelles. À l'instar de l'ouvrage newtonien, une partie du traité s'intéresse aux diverses relations entre l'algèbre et la géométrie. Maclaurin propose de regarder la géométrie par le filtre de l'algèbre et réciproquement, d'utiliser la géométrie pour résoudre des problèmes d'algèbre. Nous examinerons cette façon d'opérer au sein de son traité. Enfin, plusieurs résultats de la troisième partie de ce traité sont à l'origine d'une polémique avec Braikenridge. Nous donnerons les grandes lignes de ce débat entre les deux hommes.

1. Sa genèse.

a) Le premier manuscrit

Dès ses premières années d'enseignant, Maclaurin s'est confronté à l'écriture d'un manuel qui servirait de base à son cours sur l'algèbre. En effet, nous avons trouvé dans les archives de l'université d'Édimbourg un manuscrit qui n'est pas de la main de Maclaurin, probablement de celle d'un étudiant, dont le titre est *Ane introduction to the Mathematicks*[288]. Dans ce manuscrit, nous trouvons une introduction sur le savoir en général et plus particulièrement les mathématiques. Elle nous fournit une bonne vision des réflexions de Maclaurin sur les mathématiques dans la période 1725-6. Même si aucune date ne figure sur le manuscrit, deux indices nous portent à croire que l'écriture de ce manuscrit a bien eu lieu durant cette période. Tout d'abord, Maclaurin est encore désigné comme professeur à Aberdeen. Or, comme nous l'avons signalé dans le premier interlude, Maclaurin retourne à Aberdeen au début de l'année 1725 et quitte cette ville à la fin de

[288] Maclaurin, Ms.Gen.2251D

cette année. Par conséquent il nous paraît évident que l'écriture a eu lieu avant 1726. De plus, à la suite du cahier dans lequel se trouve le cours d'algèbre se trouvent les notes d'un cours de logique enseigné par Colin Drummond. Ce dernier était enseignant à l'université d'Édimbourg. Entre 1708 et 1730, il occupait la chaire de logique et de métaphysique qu'il quitta pour la chaire de grec. Ainsi, Maclaurin est déjà enseignant à Édimbourg mais encore considéré comme un professeur venant d'Aberdeen. Cette situation ne peut avoir lieu que juste après son arrivée à Édimbourg, soit 1725-6.

Ce manuscrit peut être considéré comme une ébauche assez avancée d'un traité d'algèbre car, dans une lettre adressée à John Machin, alors secrétaire de la Royal Society of London et lue pendant la séance du 21 décembre 1732, Maclaurin déclare en réaction à des attaques de Braikenridge qu'en 1727, il a ajouté dans un chapitre dans un traité d'algèbre qui était très connu à Édimbourg, des démonstrations algébriques à des problèmes de géométrie[289]. Or, comme nous le verrons par la suite, la dernière partie du *Treatise of Algebra* est dédiée à l'utilisation de l'algèbre à la géométrie et réciproquement. Ainsi, nous pouvons en déduire que, dès 1726, Maclaurin a pour son traité d'algèbre un plan bien précis. De plus, son ambition d'écrire un traité d'algèbre remonte à 1725, dès son arrivée à Édimbourg. En effet, dans une lettre adressée à Folkes, le 19 avril 1729, Maclaurin déclare qu'en 1725, lorsqu'il a découvert une démonstration à la règle de Newton concernant les racines imaginaires d'une équation, il décide de l'incorporer dans un traité d'algèbre qui élargirait le sujet[290]. S'il faut fournir une autre preuve du projet d'écriture d'un traité d'algèbre très tôt, il suffit de lire à la fin de *A Defence of the Letter Published in the Philosophical Transactions for March and April 1729*, où Maclaurin

---

[289] « In 1727 I added to a Chapter in my Algebra, which is very publick in this Place [Édimbourg], an Algebraick Demonstration of the Locus when three Poles are employed and the method of describing a Conic section through five points » in Maclaurin (1737a), pp. 146-7.

[290] « in the Year 1725, I wrote to you that I had a Method of demonstrating Sir Isaac Newton's Rule concerning the impossible Roots of Equations. (…) The Design I have for some Time had of publishing a Treatise of Algebra, where I proposed to treat this and several other Subjects in a new Manner » in Maclaurin (1730a), p. 59.

déclare qu'il a modifié son traité d'algèbre dans le chapitre sur les limites des équations[291]. Dans ce manuscrit, Maclaurin énonce les règles de l'algèbre. L'addition, la soustraction, la multiplication et la division sont les bases de l'algèbre auxquelles il ajoute les fractions, les différentes puissances et une méthode de résolution des équations du second degré. Il donne aussi des exemples de résolution d'équations de plus haut degré mais se réduisant à la résolution d'équations du second degré. Nous ne dirons rien sur les méthodes utilisées dans le corpus de ce manuscrit. En revanche, il nous semble intéressant de donner quelques passages de son introduction. En effet, dans cette dernière, Maclaurin considère l'esprit de l'homme naturellement noir et vide mais capable d'une grande puissance et d'une grande capacité[292]. L'esprit de l'homme se remplit de savoir, ce qui est vraiment digne de la condition de l'homme en référence à sa nature immortelle[293]. Parmi le savoir humain, les sciences ont une place à part, importante. Et une science en particulier mérite une attention particulière, ce sont les mathématiques qui sont non seulement les plus plaisantes mais aussi celle de plus grande valeur[294]. Maclaurin sépare en deux les mathématiques. La première catégorie est l'ensemble des mathématiques comme un ensemble théorique qui est la plus belle production humaine, car il contient de grandes quantités de vérités. Mais, cela est surtout dû à l'évidence des propositions qui sont faites et à l'élégance de leurs démonstrations. La seconde catégorie est l'ensemble des applications de cette théorie. Ces applications sont si vastes, non seulement dans les autres parties de la science mais aussi dans tous les registres de la vie quotidienne, tel que le

[291] « IN a *Treatise of Algebra*, which I composed in the Year 1726, and which, since that time, very publick in this Place, after giving the same Demonstration of the Doctrine of the *Limits* (…), I add in *Article 50* these Words, "If any Roots of the Equation of the limits are impossible, then must be some Roots of the proposed Equation impossible" » in Mills (1982), p. 240.

[292] « The mind of man is naturally dark and empty, but inherits very ample power and capacity » in Maclaurin, Ms.Gen.2251Dn, non paginé.

[293] « its chief perfection and pleasure, y[e] pursuit of w[c] is truly worthy of its native origin and immortality » in Maclaurin, Ms.Gen.2251Dn, non paginé.

[294] « we'll find ye mathematicks a most pleasant, not only, but a most valuable part » in Maclaurin, Ms.Gen.2251Dn, non paginé.

commerce[295]. Donc, d'après Maclaurin, les mathématiques sont à l'origine du commerce et servent encore à l'économie. Il ne faut pas oublier que ce cours d'algèbre est destiné à un public de jeunes étudiants dont le but est d'acquérir un niveau de mathématiques suffisant pour les utiliser par la suite dans le commerce. Ce type d'argument peut ainsi être compris comme une manière d'opérer d'un enseignant qui cherche à remplir ses classes (et ainsi gagner plus d'argent).

Dans cette introduction, Maclaurin considère la méthode des fluxions comme un important développement de l'algèbre et de la géométrie et non pas comme une branche à part entière des mathématiques. À cette époque, Maclaurin, comme la plupart de ses contemporains, ne voit pas dans le calcul des fluxions une catégorie bien précise des mathématiques à l'instar de la géométrie et de l'algèbre[296].

b) Le deuxième manuscrit

La première trace que l'on a d'une ébauche d'un traité d'algèbre en tant que tel est un manuscrit de la main d'un étudiant ou d'un secrétaire de Maclaurin, qui s'intitule *A treatise of Algebra By Mr. Colin McLaurin, Professor of Mathematiks In the University of Edinburgh, Written by John Russell, Edin. AD 1729*[297].

Son projet est divisé en trois parties. La première partie explique les opérations fondamentales. La génération et la résolution des équations de tout type et l'énoncé des

---

[295] « If we consider ye Theory it must appear among ye most beautifull (sic) Products of Humane nature, because of ye amazing abyss of admirable Truths in it. The irresistible brightness of their Evidence, and particular Elegancie (sic) of their demonstration. If we consider their practice, their application is so generall, as not only to be vast use in most sciences, but to extend to many common usefull arts, and particularly by their commerce w[t] ye most distant nations is rendered safe and easy so he therfor [therefore] tis (???) ye foundation of Trade and Riches » in Maclaurin, Ms.Gen.2251Dn, non paginé.

[296] « All ye various parts of pure Mathematicks may be reduced to Algebra and Geometry if they be taken in a generall sense and if we added to them ye method of Fluxions (the noble invention of the celebrated Isaac Newton) w[c] seems indeed rather to be ane Improvement upon both than a part distinct from either. » in Maclaurin, Ms.Gen.2251Dn, non paginé.

[297] Maclaurin, Dc.3.66.

propriétés des racines sont l'objet de la deuxième partie. La dernière partie est dévolue à la construction géométrique d'équations algébriques et à la résolution de problèmes géométriques par l'algèbre[298]. L'objectif de la première partie et d'une partie de la seconde est semblable à celui du premier manuscrit. La troisième partie est clairement ce qui a été ajouté, d'après les dires de Maclaurin, en 1727. Malheureusement, dans le manuscrit disponible à la bibliothèque de l'université d'Édimbourg, seulement la première partie du traité est écrite. Nous ne savons pas si l'objectif global est tenu, c'est-à-dire si Maclaurin a réellement composé les deux dernières parties. Dans la première partie, nous retrouvons tout d'abord l'étude des quatre opérations, puis l'étude des fractions, des puissances et des racines, enfin l'étude des équations à une et à deux inconnues. Le contenu de cette première partie est identique au premier manuscrit. L'introduction, en revanche, diffère, tant dans sa forme que dans le fond. Maclaurin ne porte pas de jugement sur l'esprit de l'homme et de sa nature. Toutefois, il considère toujours que les mathématiques possèdent une place importante dans le champ du savoir. Ce qui lui donne ce caractère supérieur sont à la fois l'élégance des théorèmes et l'irrésistible évidence des démonstrations. De plus, leurs applications sont si générales, qu'il y a peu de domaines qui n'utilisent pas les mathématiques. Le caractère d'évidence en mathématiques procure aux autres domaines un exemple de ce qui est évident ou non[299]. Il est donné de grands repères historiques sur les mathématiques. Ainsi, même si l'origine est incertaine, la géométrie a été considérée en premier par les Égyptiens à cause des inondations du Nil. Il est dit que l'arithmétique est

---

[298] « The following treatise is to be divided into three parts; the fundamental operations are to be explained in the first part. The genesis and resolutions of equations of all kinds, with the propertys of their roots in the second, In the third we shall give the Geometricall constructions of Equations and apply the Algebraick computations to the Geometricall Problems » in Maclaurin, Dc.3.66.

[299] « The elegance of its theorems and the irresistable evidence of the demonstrations reinder them in a peculiar manner aggreable to the understanding; their application is so generall, that there are few usefull arts or sciences that are not indebted to them for some degree of perfection; and because of the degree of distinctness and certainty of both they are said to give the mind a habite of reasoning strictly and of distinguishing that evidence which is perfect from that which is imperfect; this was the opinion of the ancients had of them when all their parts were incomparably less perfect than they are now » in Maclaurin, Dc.3.66, non paginé.

inventée par les Indiens, et que les Arabes l'ont développé pour en faire l'algèbre. Les progrès en mathématiques furent lents et produits par étapes. Les Grecs ont développé la géométrie de façon importante. Mais c'est depuis la Renaissance en Europe, que les progrès devinrent rapides et impressionnants[300].

Parmi les deux grands champs de mathématiques, c'est-à-dire la géométrie et l'algèbre, Maclaurin est conscient des avantages et des défauts de chacun. Il considère l'algèbre comme une extension de l'arithmétique. Les résultats trouvés à l'aide de l'algèbre deviennent des théorèmes puissants qui permettent d'en découvrir d'autres. Ainsi, l'algèbre est un outil puissant dans l'investigation et la recherche de nouveaux résultats, en d'autres termes pour l'analyse. Malheureusement, pour la démonstration de résultats, l'algèbre est souvent inefficace. Il lui faudra donc lui préférer la géométrie pour avoir des démonstrations d'une plus grande beauté et rapidité[301]. Il peut paraître étonnant que dans un traité d'algèbre, l'auteur conseille l'utilisation de la géométrie pour résoudre des problèmes. Dans la première partie de cette thèse, nous avons remarqué que ses premières productions mathématiques sont des productions de géométrie. Même si dans ses différents écrits de géométrie, il utilise l'algèbre comme un outil de découverte, les démonstrations sont d'ordre géométrique. Dès qu'il le peut, il démontre géométriquement. Cet amour de jeunesse peut expliquer en partie la place prépondérante de cette partie des

[300] « Their rise and beginning is not very certain. We are told that Geometry was first considered by the Egyptians the inundations of the Nile making some art necessary for manureing their lands. It is said that Arithmetick was invented by the Indians, and afterwards made more general by the Arabians and called Algebra; Their progress at first was slow and by steps that appear easie to us; they began by funding particular theorems very much restricted which their successors by degrees extended more and more. Thus one found that the three angles of a rectangular triangles were equal to two rights : which gave occasion soon after to discover, that this was a general property of all triangles ; as we are informed by Proclus an antient [sic] commentator on Euclide, and they being very much relished by the Greeks, who had them from the Egyptians, they became very extensive; but since the restoration of learning in Europe; especially these last hundred years, the mathematical sciences have been improven (sic) in a manner altogether surprising » in Maclaurin, Dc.3.66, non paginé.

[301] « The connection of the operations, and the grounds on which it is built, are more obvious, and the conclusions that are used in the solutions of Questions are theorems that many serve for all oy[rs] of the same kind. It is very generall kind of computation, and of great use in the vestigation (sic) of truth, But is often unskilfully used for y[e] demonstration of theorems; even sometimes when the Geometricall method can serve better, and more succinctly; the great use and beauty of Geometry being to shun tedious computations by an expedite construction and when that can be done it is to be preferred » in Maclaurin, Dc.3.66, non paginé.

mathématiques. Le degré de certitude qui peut être atteint par le biais de la géométrie et l'élégance des démonstrations semblent être les arguments décisifs. Il y en a peut-être un autre. Maclaurin est attaché à la certitude d'une démonstration mathématique. Le fait qu'il soit peu enclin à utiliser l'algèbre comme mode démonstratif nous incite à penser que l'algèbre n'est pas assez « sûre » pour pouvoir l'utiliser lors de démonstrations. Nous pouvons donc voir le *Treatise of Algebra* comme une tentative de donner des bases solides à l'algèbre.

c) Le troisième traité

Un troisième manuscrit d'un traité d'algèbre de Maclaurin se trouve à l'université d'Édimbourg. Le titre de cet écrit est *A Treatise of Algebra in three parts By Mr. Colin Maclaurin M. P. in the University of Edinburgh*. Comme le titre l'indique, ce manuscrit est formé de trois parties, la première s'intéresse à la « fondation » de l'algèbre, les opérations élémentaires et le travail sur les puissances et les racines, ainsi qu'à la résolution des équations du second degré et des systèmes linéaires à deux ou trois inconnues. La deuxième partie s'occupe de la résolution d'équations de plus haut degré. La troisième partie s'intéresse à la relation entre algèbre et géométrie. Ce manuscrit est complet (il ne manque que quelques planches), c'est-à-dire que les trois parties sont écrites. La comparaison des premières parties des deux manuscrits indique que ce troisième manuscrit est une évolution du second. Les phrases ont changé, mais le sens reste le même, les exemples quoique différents sont du même type. Les plans des premières parties sont identiques. Et l'objectif global est le même. En ce qui concerne l'introduction, le sens est le même tandis que la forme change. Nous n'étudierons pas plus ce manuscrit, car en le comparant avec la version imprimée de 1748, il nous apparaît évident que la source première pour les éditeurs de la version posthume est ce manuscrit.

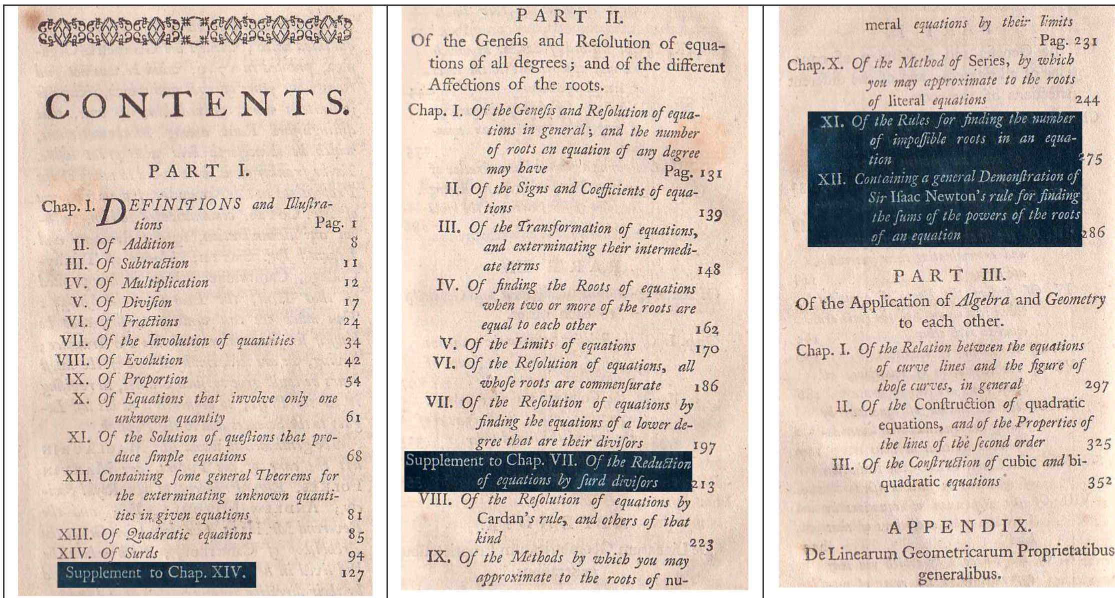
d) La version finale

Il est intéressant de comparer la version posthume de l'ouvrage de Maclaurin avec les différents manuscrits que nous avons en notre possession pour plusieurs raisons. La première est de savoir dans quelle mesure les éditeurs de l'ouvrage de 1748 se sont inspirés des manuscrits précédents de Maclaurin et ainsi de pouvoir dire si le *Treatise of Algebra* est bien un ouvrage de Maclaurin ou si au contraire l'esprit de Maclaurin a disparu[302]. La seconde, qui est proche de la première, concerne les éventuels ajouts et retraits. En effet, comment peut-on interpréter un retrait d'une partie du texte de Maclaurin ? De même, qu'apporte un ajout des éditeurs sur le texte original ?

Pour répondre à la première question que nous nous sommes posée, il est évident que les éditeurs ont pris le dernier manuscrit que nous avons cité comme base pour l'ouvrage de 1748. Le plan est quasiment le même. Nous pouvons recenser quelques ajouts. Le supplément au chapitre 14 de la première partie, le supplément au chapitre 7, les chapitres 11 et 12 de la deuxième partie sont les seuls ajouts au manuscrit. Il y a un retrait qui nous semble important. En effet, dans la version imprimée, l'introduction disparaît. Toute la vision des mathématiques et en particulier de l'algèbre est effacée. La raison de ce retrait nous échappe. Les ajouts décidés par les éditeurs sont des reprises de différents écrits de Maclaurin. Ainsi, le chapitre 11 est une refonte de deux articles de Maclaurin concernant les racines imaginaires des équations[303]. Ces deux articles feront l'objet d'une étude rapide dans un chapitre ultérieur, car ce sont des pièces importantes de la polémique

[302] La version française de cet ouvrage en est un exemple parfait. Il y a tellement d'ajouts complètement étrangers aux écrits de Maclaurin qu'il est difficile d'attribuer cet ouvrage à Maclaurin.
[303] Maclaurin (1729) et Maclaurin (1730a).

entre Maclaurin et Campbell. Le chapitre 12 est une lettre de Maclaurin adressée à Lord Stanhope et datée du 8 juillet 1743 à propos des relations entre les racines d'une équation et ses coefficients. Dans cette lettre, il y a une ébauche d'une démonstration de la règle reliant coefficients et racines d'un polynôme. Ci-dessous (Fig. 39) se trouve la table des matières de la version imprimée, dans laquelle nous avons noirci les parties ajoutées par les éditeurs.



CONTENTS.

PART I.

PART II.

Of the Genesis and Resolution of equations of all degrees; and of the different Affections of the roots.

PART III.

Of the Application of *Algebra* and *Geometry* to each other.

APPENDIX.

De Linearum Geometricarum Proprietatibus generalibus.

Fig. 39.

2. Un commentaire newtonien

a) Une structure qui se veut celle de l'*Arithmetica* de Newton

D'après la préface des éditeurs de la version imprimée, il s'agit d'un commentaire de l'*Arithmetica Universalis*[304] de Newton. Pour être plus précis, ce traité aurait été écrit

[304] Nous ne savons pas de quelle version de cet ouvrage Maclaurin s'est servi. A la bibliothèque de l'université d'Edimbourg, les différentes versions existent. Nous nous référerons ici à la version révisée par Newton, donc celle de 1722.

autour de la règle de Newton pour connaître le nombre de racines imaginaires d'une équation et le but de cet ouvrage serait d'être un commentaire et une explication de cette règle, ainsi que certains passages obscurs de l'*Arithmétique Universelle* de Newton[305]. Procédons à un rapide recensement du contenu de l'ouvrage de Newton[306] pour pouvoir le comparer avec celui de Maclaurin.

Newton débute son ouvrage en donnant les différentes notations dont il a besoin dans la suite de son ouvrage. Il introduit la multiplication de deux quantités de manière géométrique sans pour autant donner les règles de la multiplication. Puis, il introduit les fractions, les quatre opérations élémentaires des expressions algébriques, addition, soustraction, multiplication, division. Il enchaîne avec les extractions de racines, puis, la simplification des racines et des fractions ou d'expressions algébriques par les diviseurs. Ensuite, il s'intéresse à la forme des équations algébriques, et à la résolution de celles-ci. Il donne ainsi quelques règles pour la résolution de quelques types d'équations, celles de degré un, deux et de certaines équations de degré quatre avec une ou deux inconnues. Il applique tout ce qu'il a donné à des problèmes qu'il faut mettre sous forme d'équations. Ces problèmes sont séparés en deux parties. La première partie regroupe seize problèmes arithmétiques. La seconde partie rassemble soixante et une questions géométriques qu'il faut résoudre en utilisant les règles de l'algèbre. La section des problèmes est la plus grande section de cet ouvrage. Newton s'intéresse ensuite à la résolution d'équations de plus haut degré (supérieur à 3). Dans cette partie, il s'interroge sur la nature des racines des équations, il transforme ces équations pour simplifier leurs expressions. Il donne ensuite

---

[305] « Sir Isaac Newton's Rules, in his Arithmetica Universalis, concerning the Resolution of the higher equations, and the Affections of their roots, being, for the most part, delivered without any demonstration, Mr Maclaurin had designed, that his Treatise should serve as a Commentary on that Work. For we here find all those difficult passages in Sir Isaac's Book, which have so long perplexed the Students of Algebra, clearly explained and demonstrated. » in Maclaurin (1748b), non paginé.

[306] Pour une étude systématique de l'*Arithmetica universalis* voir Pycior (1997). Dans ce dernier, se trouve aussi une étude sur l'algèbre (en particulier sur les imaginaires) chez Maclaurin (cf. Pycior (1997), pp. 250-75, en particulier sur le *Treatise of Algebra*, pp. ???.

deux règles, la première nommée règle de Descartes qui donne le nombre de racines positives et négatives dans une équation algébrique, la seconde que l'on nomme la règle de Newton sur le nombre de racines imaginaires d'une équation algébrique. Il continue sur la « transmutation des équations » puis il donne quelques relations entre coefficients et racines d'une équation algébrique. Il énonce des propriétés sur les limites d'une équation, sur la recherche de diviseurs entiers rationnels puis sourds. Il élargi le champ d'étude en travaillant sur la construction géométrique d'équations algébriques. Dans cette dernière partie, la grande majorité des constructions concerne les équations de degré trois.

La structure et le contenu de l'ouvrage de Maclaurin peuvent faire penser à ceux de l'ouvrage de Newton. En effet, si nous reprenons la table des matières que l'on a donnée plus haut, il est évident que ce qui vient d'être cité de l'ouvrage de Newton se retrouve dans celui de Maclaurin : les opérations élémentaires, l'extraction de racines, l'étude des fractions, la mise en équation de problèmes et la résolution de ces équations. Les différentes règles, celle des limites, celle de Newton pour connaître le nombre de racines complexes d'une équation algébrique sont aussi présentes. Il y aussi le traitement algébrique de problèmes géométriques.

De plus, Maclaurin à certains endroits utilise la même façon d'énoncer les règles et donne à plusieurs reprises les mêmes exemples. Ainsi, dans le chapitre « Of the limits of equation »[307], dans lequel il énonce une méthode pour trouver un encadrement des racines réelles d'une équation, on retrouve la même méthode organisée différemment avec le même exemple que dans le chapitre « De Limitibus aequationum »[308]. Dans cet exemple, Maclaurin s'inspire des écrits de Newton, et se fait clairement un commentateur. Pour être plus précis, Maclaurin se propose d'expliquer d'une meilleure manière la méthode de Newton. C'est pour cette raison qu'il change l'exposition de celle-ci. Ainsi, il reprend le

307 Maclaurin (1748b), pp. 170-85.
308 Newton (1722), pp. 258-63, ou Newton (MP), vol. 5, pp. 362-9.

même exemple que Newton, à savoir $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$, et à partir de cet exemple, il donne la règle pour trouver une limite supérieure des racines réelles de cette équation, c'est-à-dire trouver une majoration des racines. Il considère alors le polynôme $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120$. Il différencie celui-ci suivant *x*, il réitère le processus jusqu'à ce que le degré du polynôme soit un. Les polynômes sont alors, après simplifications[309], $5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63$, $5x^3 - 6x^2 - 15x + 15$, $5x^2 - 4x - 5$ et $5x - 2$. Il remplace ensuite dans les polynômes successifs *x* par une valeur. Si le résultat pour chaque polynôme est positif, alors la valeur prise pour *x* est une majoration supérieure des racines. Dans l'exemple, le plus petit entier dont les valeurs prises par les différents polynômes sont positifs est 2. Ainsi, ce nombre peut être considéré comme un majorant des racines du polynôme en question[310]. De même, si on recherche la limite inférieure, c'est-à-dire un minorant des racines du polynôme, il suffit de trouver une valeur pour *x* telles que sa valeur pour chaque polynôme soient négatives. Dans l'exemple, il prend -3. Tandis que Newton s'arrête à cet exemple, Maclaurin va un peu plus loin. En utilisant un changement de variable de la forme $y = m - x$ où *m* est la limite supérieure trouvée par la règle précédente, dans l'équation initiale en *x*, alors l'équation en *y* n'admet que des racines réelles positives. Avec ce résultat, Maclaurin peut énoncer la propriété qui dit qu'en général, parmi les coefficients négatifs d'une équation, le plus grand (en valeur absolue) augmenté d'un est un majorant des racines de cette équation[311]. Maclaurin donne aussi une méthode pour trouver les autres « limites » de l'équation, c'est-à-dire trouver des valeurs qui séparent deux racines successives de l'équation. Ceci n'a pas été fait par Newton dans son ouvrage sur l'algèbre.

---

[309] Une factorisation des coefficients a été faite.

[310] « The least integer number which give each of these positive, is 2 ; which therefore is the limit of the roots of the proposed equation ; or a number that exceeds the greatest positive root » in Maclaurin (1748b), p. 171.

[311] « In general, we conclude that The greatest negative coefficient in any equation increased by unit, is always a limit that exceeds all the roots of that equation » in Maclaurin (1748b), p. 174.

Un autre exemple de la proximité de l'ouvrage de Maclaurin avec celui de Newton, concerne la recherche d'éventuelles racines entières ou rationnelles d'une équation dont les coefficients sont réels. Newton développe sa méthode dans la partie « De Inventione Divisorum »[312]. Maclaurin reprend la méthode donnée par Newton, mais auparavant il étudie un cas plus simple. Il part du principe que le coefficient constant d'une équation est le produit des racines au signe près (ce résultat est connu bien avant Maclaurin, Newton le cite et on le retrouve dans l'*Invention Nouvelle en l'Algèbre* d'Albert Girard[313]). Ainsi, la première étape à franchir est de chercher parmi tous les diviseurs du coefficient constant une racine. Il réunit cela avec la règle précédente, à savoir les limites de l'équation, pour simplifier le travail. Ensuite, il enchaîne avec la règle donnée par Newton. Soit une équation à une seule inconnue, x, dont on cherche les racines. Chercher tous les diviseurs des valeurs prises respectivement par 1, 0 et -1. Parmi ces diviseurs, chercher une progression arithmétique dont la raison est égal à 1. Alors, la valeur de l'élément de la suite correspondant à la valeur prise par 0 sera une racine de l'équation[314]. Donnons l'exemple de Maclaurin sous forme de tableau avec l'équation $x^3 - x^2 - 10x + 6 = 0$.

Supposition Résultat	Diviseurs	Progression arithm. trouvée
$\left.\begin{matrix} x=1 \\ x=0 \\ x=-1 \end{matrix}\right\} x^3 - x^2 - 10x + 6 = \begin{cases} -4 \\ 6 \\ 14 \end{cases}$	$\begin{matrix} 1,2,4 \\ 1,2,3,6 \\ 1,2,7,14 \end{matrix}$	4 3 donne $x=-3$ 2

Voici quelques exemples qui nous poussent à croire que le *Treatise of Algebra* de Maclaurin n'est pas uniquement un commentaire de l'ouvrage de Newton et qu'aucune nouvelle propriété, ni des démonstrations originales ne sont incluses. En réalité, il convient

---

312 Newton (1722), pp. 42-53. ou Newton (MP), vol. 5, pp. 371-87 et 547-55.
313 Girard (1629)
314 « Substitute in place of the unknown quantity successively the terms of the progression 1, 0, -1, &c. and find all the divisors of the sums that result ; then take out all the arithmetical progressions you can find among these divisors, whose common difference is unit ; and the values of x will be among the divisors arising from the substitutions of $x = 0$ that belong to these progressions »in Maclaurin (1748b), pp. 194-5.

de modérer ce propos. Même si effectivement, la structure et l'essence des deux ouvrages sont comparables, il existe des différences fondamentales.

La première concerne la fondation de l'algèbre. Newton ne s'en préoccupe pas véritablement, en revanche Maclaurin s'attache à asseoir son algèbre. Nous verrons dans le chapitre suivant s'il y réussit. La deuxième concerne l'efficacité de l'ouvrage. En effet, contrairement à l'ouvrage de Newton, la très grande partie des problèmes d'algèbre et de géométrie qui couvrent plus de 160 pages de l'ouvrage de Newton[315] n'est pas reprise par Maclaurin. Les raisons nous sont données par les éditeurs de l'ouvrage de Maclaurin. Ces derniers ne donnent pas d'applications à ces règles et à ces propriétés car le rayon d'action de l'algèbre étant très large, il est impossible de tous les aborder et qu'il n'est pas nécessaire de les introduire dans un traité qui se veut élémentaire[316]. En d'autres termes, pour les éditeurs, il n'est pas nécessaire d'ajouter beaucoup d'exemples sur les différentes manières d'utiliser les règles données. Concernant les exemples de géométrie de l'ouvrage de Newton, Maclaurin ne les reprend pas tous pour plusieurs raisons. La première raison est que la résolution des problèmes par Newton est suffisamment claire pour qu'il soit inutile de les reprendre dans sa totalité. La deuxième raison concerne les prérequis géométriques nécessaires pour pouvoir résoudre une grande partie des problèmes de géométrie de l'*Arithmétique Universalis*, car son traité étant élémentaire, il ne doit pas faire appel à des connaissances fines de matières autre que l'algèbre. En revanche, s'il refuse de reprendre l'ensemble des problèmes géométriques de l'ouvrage de Newton, il se permet dans la troisième partie d'expliquer comment il est possible d'appliquer l'algèbre en géométrie et réciproquement[317]. Nous verrons plus bas comment il utilise l'algèbre pour

---

[315] Newton (1722), pp. 79-239.

[316] « He [Maclaurin] rejects some applications of Algebra, that are commonly to be met with others writers ; because the number of such applications is endless : and, however useful they in Practice, they cannot, by the rules of good method, have place in an elementary Treatise. » in Maclaurin (1748b), préface, non paginé.

[317] « He has likewise omitted the Algebraical solution of particular Geometrical problems, as requiring the knowledge of the Elements of Geometry ; from which those of Algebra ought to be kept, as they really are,

résoudre des problèmes de géométrie.

b) Une tentative de fondement de l'algèbre

À l'instar de son *Treatise of Fluxions* qui est, entre autres, une tentative de donner des fondements solides aux fluxions, le *Treatise of Algebra* se veut aussi une exposition de bases solides pour donner à l'algèbre une certitude comme celle que l'on peut avoir de la géométrie. Chez Maclaurin, la géométrie, en particulier celle des Anciens, est la partie des mathématiques qui est la plus noble car

> « la Géométrie a acquis ce caractère d'évidence par le grand soin que les anciens ont pris de n'admettre que peu de principes évidens par eux-mêmes, et de ne donner, pour démonstrations, que ce qui étoit conclu évidemment de ces premiers principes »[318].

Il insiste sur le fait que la géométrie est à préférer aux autres parties des mathématiques, mais il reconnaît que l'utilisation de l'algèbre est plus étendue, souvent plus facile d'application[319]. Ainsi, l'algèbre est une méthode générale de calcul de signes et de symboles. Elle est aussi appelée Arithmétique Universelle en référence aux opérations et règles qui sont similaires à celle que l'on trouve dans l'arithmétique commune. Mais, il convient de prendre soin à l'utilisation des symboles et que ces derniers soient clairement établis pour éviter les erreurs qui peuvent arriver en les manipulant[320]. De plus, en

---

entirely distinct (…) He might think too ,that such an application was the less necessary, that Sir Isaac Newton's excellent Collection of Examples is in every boby's hands » in Maclaurin (1748b), préface, non paginé.

[318] Maclaurin (1749b), vol. I., p. 3.

[319] « The use of Algebra more extensive, and often more ready : especially since the mathematical sciences have acquired so vast an extent, and have been applied to so many enquiries » In Maclaurin (1748b), p. 2.

[320] « the import of those symbols is to be clearly stated, that no obscurity or error may arise from the frequent use and complication of them » in Maclaurin (1748b), p. 2.

dépassant le cadre bien défini de la vision de la grandeur dans la définition 3 du livre V des *Éléments* d'Euclide, Maclaurin affirme que toutes les propriétés d'une quantité peuvent être prises en compte en algèbre, sous réserve de bien définir ce que représentent les lettres et nombres. Il prend comme exemple le cas de l'étude d'un mouvement dans lequel la direction est aussi importante que la vitesse de ce mouvement.

Le premier énoncé concerne la relation d'égalité :

> « the relation of equality is expressed by the sign = ; thus to express that the quantity represented by a is equal to that which is represented by b, we write $a = b$. But if we would express that a is greater than b, we write $a \square b$ »[321].

Puis il définit la quantité. En effet, une quantité est soit ce qui est constituée de parties soit ce qui est capable d'augmenter ou de diminuer. Elle est augmentée par addition, et diminuée par soustraction. L'addition et la soustraction sont alors les deux relations primaires entre les quantités[322]. Il continue en opposant les quantités qui augmentent, les incréments, de celles qui diminuent, les décréments. Ainsi, deux quantités pouvant être égales peuvent avoir des effets contraires et s'annuler. De cette façon, il définit les quantités positives et négatives comme opposées entre-elles. Nous pouvons considérer ceci comme une définition ou une justification des quantités négatives[323]. Par conséquent cette dernière relation est à la base de son algèbre[324].

Il s'intéresse ensuite aux opérations élémentaires, l'addition, la soustraction, la multiplication et la division de quantités algébriques. Pour la multiplication, Maclaurin

---

[321] Maclaurin (1748b), p. 3.

[322] « Quantity is what is made up of parts, or is capable of being greater or less. It is increased by *Addition*, and diminished by *Subtraction* ; which are therefore the two primary operations that relate to quantity » in Maclaurin (1748b), pp. 3-4

[323] « A quantity that is to be added is likewise called a positive quantity ; and a quantity to be subtracted is said to be negative : they are equally real, but opposite to each other, so as to take away each other's effect, in any operation, when they are equal as to quantity. Thus $3-3=0$, and $a-a=0$ » in Maclaurin (1748b), p. 6.

[324] Pycior (1997), p. 268.

prend le temps d'expliquer la règle des signes. Pour cette règle, il cherche à procurer une forme de démonstration. Pour cela, il sépare la règle des signes en quatre cas. Le premier cas est la multiplication d'une quantité positive a par un nombre positif n. Il exprime ce type de multiplication par le fait que la quantité est prise autant de fois qu'il y a d'unité dans le nombre et le résultat est na. Le deuxième cas est la multiplication d'une quantité négative par un nombre positif, alors cela revient à prendre la quantité négative autant de fois qu'il y a d'unité dans le nombre. Le troisième cas est l'énoncé de la multiplication d'une quantité positive par un nombre négatif. Ce cas peut être interprété comme les soustractions successives de la quantité autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre, et le produit sera négatif. Comme soustraire un négatif revient à additionner son contraire, alors la multiplication d'une quantité négative par un nombre négatif, revient à additionner l'opposée de la quantité autant de fois qu'il y a d'unité dans le nombre. Ceci est le quatrième cas. Ce type de justification n'est pas original car on le retrouve dans des ouvrages d'autres auteurs. En revanche, Maclaurin donne une autre justification du deuxième et quatrième cas. En effet, pour le deuxième cas, c'est-à-dire la multiplication d'une quantité négative par un nombre positif, Maclaurin part des définitions initiales et de $+a-a=0$. Si on multiplie $+a-a$ par n, le produit est nul. Le premier terme du produit est, d'après le premier cas de la règle des signes, na, le second, pour satisfaire aux définitions, doit être $-na$. Le quatrième cas est démontré de la même façon.

Dans la règle des signes, Maclaurin ne s'intéresse qu'à la multiplication entre une quantité et un nombre. Qu'en est-il de la multiplication de deux quantités ? En effet, généralement le multiplicateur est habituellement considéré comme un nombre. Mais, on ne peut pas multiplier une dette par une dette, ou des livres par des livres. Pour concevoir ce type de multiplication, on peut considérer l'analogie entre les rectangles en géométrie et le produit de deux quantités[325]. Ainsi, pour justifier le produit de deux quantités, Maclaurin tente de faire le parallèle entre l'aire en géométrie et le produit en algèbre. Mais, contrairement à Newton[326] qui fait de longs développements sur ce sujet qui tiennent sur de nombreuses pages, Maclaurin la donne en une phrase. Il semble gêné par ce type d'arguments qu'il ne veut pas. En effet, comme nous l'avons déjà signalé, Maclaurin veut expliquer les règles de l'algèbre sans l'intervention d'une quelconque référence à la géométrie. Il veut « fonder » son algèbre indépendamment de la géométrie. Il définit la dimension d'un produit comme le nombre de quantités dans le produit[327].

Pour l'étude et la résolution des équations de degré quelconque dans la partie 2 de son ouvrage, Maclaurin s'appuie sur une version du théorème fondamental de l'algèbre[328]. Celle-ci est : une équation de degré quelconque peut être considérée par le produit d'autant d'équations de degré un qu'il a d'unités dans le degré[329]. À la suite de cette définition, il ajoute une autre version : aucune équation n'a plus de racines que sa dimension[330]. Il s'intéresse ensuite aux imaginaires[331]. Le rôle que tiennent les imaginaires est double. Dans l'expression des racines des équations, ces nombres reçoivent un statut quasiment équivalent aux nombres qu'il appelle réels (par opposition à imaginaires et non par référence au corps des réels). Ainsi, dans le chapitre sur la règle de Newton pour connaître le nombre de racines complexes d'une équation, les imaginaires tiennent le même rôle que

---

[325] « In this general doctrine the multiplicator is always considered as a number. A quantity of any kind may be multiplied by a number : but a pound is not be multiplied by a pound, or a debt by a debt, or a line by a line. We shall afterwards consider the analogy there is betwixt rectangles in Geometry and a product of two factors. » in Maclaurin (1748b), pp. 13-14

[326] Newton (1722), pp. 4-6 ou Newton (MP), vol. 5, pp. 492-9.

[327] « Products that arise from the multiplication of two, three, or more quantities, as *abc*, are said to be of two, three, or more *dimensions* ; and those quantities are called *factors* or *roots* » in Maclaurin (1748b), pp. 15

[328] Pour une etude historique de ce théorème voir Gilain (1991)

[329] « an equation of any dimensions may be considered as produced by the multiplication of as many simple equations as it has dimensions; or of any other equations whatsoever, if the sum of their dimensions is equal to the dimension of that equation » in Maclaurin (1748b), pp. 131-2.

[330] « A y other equation admits of as many solutions as there are simple equations multiplied by one another that produce it, or as many as there are units on the highest dimension of the unknown quantity in the proposed equation. (…) *No equation can have more roots than it contains dimensions of the unknown quantity* » in Maclaurin (1748b), pp. 134-5.

[331] Il utilise aussi le terme de nombres *impossibles* pour désigner les nombres complexes.

les réels. En revanche, dans la troisième partie, dans laquelle l'algèbre est appliquée à la géométrie, les imaginaires ont un statut différent. Une quantité imaginaire est le symbole d'une opération qui ne peut aboutir, alors cette quantité imaginaire sert à montrer la génération des quantités et des limites des cas possibles[332]. Ainsi, dans la représentation géométrique d'une équation, les racines imaginaires ne sont plus visibles ce qui leurs procure un statut inférieur aux racines réelles qui elles sont visibles ou représentables.

c) Une portée supérieure à l'ouvrage de Newton

Nous avons déjà signalé que Maclaurin n'avait pas inséré dans son ouvrage l'ensemble des exemples fournis par Newton. En revanche, le *Treatise of Algebra* comprend quelques parties qui ne sont pas dans l'ouvrage newtonien. Nous allons en donner deux exemples. Le premier est l'énoncé de la résolution des systèmes linéaires. Le second est la démonstration de la règle pour trouver les sommes des puissances d'une équation. Mais auparavant, signalons que des méthodes de Newton apparaissant chez Maclaurin ne proviennent pas de l'*Arithmetica Universalis* mais de *The Method of Fluxions*[333]. Ainsi, ce qu'on appelle la méthode de Newton-Raphson[334] se trouve dans les chapitres neuf et dix de la partie deux de l'ouvrage de Maclaurin, où sont abordées des méthodes de recherche de solutions approchées d'équations. Maclaurin considère cela comme la continuité de la recherche des limites des solutions des équations. Ainsi, cela rentre naturellement dans le cadre de l'étude de l'algèbre.

Maclaurin, dans le chapitre 12 de la première partie, énonce ce qu'il nomme les théorèmes

---

[332] « an *imaginary* quantity (…) "*is the symbol of an operation which, in that case, cannot be perfomed* ;" and serves only to shew the *genesis* of the quantity, and the *limits* within it is possible » in Maclaurin (1748b), pp. 299-300.

[333] Newton (1736) ou Newton (1740) pour la traduction française.

[334] Newton (1740), pp. 6-20.

généraux pour déterminer les inconnues d'un système d'équations. Dans ce chapitre, il donne la règle dite de Cramer pour la résolution des systèmes linéaires dans les cas où il n'y a que deux, trois ou quatre inconnues. Pour cela, il a besoin de distinguer les coefficients d'un système donné. Les coefficients d'une même inconnue sont dits de « même ordre ». Les coefficients sont dits opposés s'ils sont d'inconnues différentes et d'équations différentes[335]. En d'autres termes, si l'on considère, comme Maclaurin, le système suivant

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases},$$

a et e sont des coefficients opposés. Dans le cas d'un système à trois inconnues à trois équations, par exemple

$$\begin{cases} ax+by+cz=m \\ dx+ey+fz=n \\ gx+hy+kz=p \end{cases},$$

les coefficients a, e et k, ou encore a, f et h sont dits opposés. Avec ces deux classes de coefficients, il peut énoncer ces deux théorèmes.

Le premier est le cas d'un système à deux inconnues et à deux équations. Soit le système suivant, où x et y sont les inconnues,

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$$

Alors,

$$y=\frac{af-dc}{ae-db}.$$

Où le numérateur est la différence des produits des coefficients opposés en ne prenant pas en compte les coefficients de y, et le dénominateur est la différence des produits des

[335] « But those are called '*opposite*' coefficients that are taken each from a different equation and from a different order of coefficient » in Maclaurin (1748b), pp. 81-2.

coefficients opposés pris dans l'ordre où apparaissent les deux inconnues[336]. La démonstration est établie par substitution.

Le théorème II donne la résolution d'un système à trois inconnues. Soit le système suivant :

$$\begin{cases} ax+by+cz=m \\ dx+ey+fz=n \\ gx+hy+kz=p \end{cases}$$

Alors

$$z=\frac{aep-ahn+dhm-dbp+gbn-gem}{aek-ahf+dhc-dbk+gbf-gec}.$$

Où le numérateur est la somme alternée des différents produits qui peuvent être faits avec trois coefficients opposés sans prendre ceux de l'inconnue dans l'ordre où ils apparaissent et le dénominateur est la somme alternée de tous les produits des coefficients opposés pris dans l'ordre où apparaissent les inconnues[337]. La démonstration se déroule de la même façon.

Ces deux théorèmes sont bien les énoncés de la règle dite de Cramer. Comme nous pouvons le constater, les déterminants n'interviennent pas en tant que tels. En revanche, lorsque Maclaurin donne la méthode pour le cas des systèmes à quatre équations et à quatre inconnues, il déclare que leurs valeurs peuvent être trouvées, en prenant tous les produits qui peuvent être effectués de quatre coefficients opposés en prenant soin d'y adjoindre des signes contraires. Ceci est bien la règle pour développer un déterminant

---

[336] « Theorem I : Suppose that two equations are given, involving two unknown quantities, as $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$, then shall $y=\frac{af-dc}{ae-db}$. Where the numerator is the difference of the products of the opposite coefficients in the orders in which y is not found, and the denominator is the difference of the products of the opposite coefficients taken from the orders that involve the two unknown quantities » in Maclaurin (1748b), p. 82.

[337] « much after the same manner, by taking all the products that can be made of four opposite coefficients, and always prefixing contrary signs to those that involve the products of two opposite coefficients » in Maclaurin (1748b), p. 85.

d'ordre quatre. Maclaurin n'en dit pas plus et il ne donne pas de démonstration ni d'indication pour les systèmes d'ordre supérieur. Toutefois, cette manière de « dire » les formules, sans utiliser le langage symbolique, offre une possibilité de généralité. Maclaurin considère cela sûrement comme fastidieux à exprimer pour chaque dimension. Mais, nous pouvons dire qu'il possède la formule que Cramer énoncera avec une généralité plus importante.

Le second exemple que nous voulons aborder est celui de la démonstration de la règle sur les sommes de ou des puissances de ou des racines d'une équation. Cette démonstration est bien de Maclaurin, car c'est la reproduction d'une lettre que Maclaurin a envoyée à Lord Stanhope datée du 8 juillet 1743. On peut penser que cette démonstration aurait été incluse par Maclaurin lui-même s'il avait pu publier son traité. Cette règle se trouve dans l'*Arithmetica Universalis*, et est reprise par Maclaurin dans son traité d'algèbre. Il écrit de deux façons l'équation étudiée, la première en fonction des racines $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\times\&\text{c.}=0$ et la seconde en fonction des coefficients de l'équation mise sous cette forme $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} \cdots - Ix^3 + Kx^2 - Lx + M = 0$. Il sépare cette règle en deux cas. Le premier est lorsque *r* est plus grand que *n*, où *r* est la puissance des racines dont la somme est recherchée. Alors, la somme des puissances des racines d'exposant *r* est égale à la somme de leurs puissances d'exposant $r-1$ multipliée par *A* moins la somme des puissances des racines d'exposant $r-2$ multipliée par *B*, plus la somme des puissances des racines d'exposant $r-3$ multipliée par *C* et ainsi de suite[338]. Lorsque *r* est plus petit que *n*, la règle change. Soit *H* le coefficient associé à la puissance $n-r$, c'est-à-dire que les produits des racines contiennent *r* racines. Alors,

[338] « the sum of the powers of the roots, of the exponent *r*, is equal to the sum of their powers of the exponent $r-1$ multiplied by *A*, *minus* the sum of their powers of the exponent $r-2$ multiplied by *B*, + the sum of those of the exponent $r-3$ multiplied by *C*, and so on » in Maclaurin (1748b), p. 287.

$$a^r + b^r + c^r + d^r + \&c. = \left(a^{r-1} + b^{r-1} + c^{r-1} + d^{r-1} + \&c.\right) \times A \quad .^{339}$$
$$- \left(a^{r-2} + b^{r-2} + c^{r-2} + d^{r-2} + \&c.\right) \times B$$
$$+ \left(a^{r-3} + b^{r-3} + c^{r-3} + d^{r-3} + \&c.\right) \times C$$
$$\cdots - r \times H$$

Pour démontrer cela, il commence par exprimer la relation avec $r = n-1$. Puis, il s'intéresse au cas où $r = n-2$, enfin, par analogie avec ce qu'il a donné dans le dernier cas, il considère le cas général dont la démonstration nécessite le lemme suivant. Avec les notations précédentes, G un coefficient de l'équation, H le coefficient qui suit. La différence des dimensions de G et A est $r-2$. Soit $A' \times G'$ représentant la somme des tous les termes du produit $A \times G$ dans lesquels les carrés des racines, a^2, b^2 ou c^2, etc. sont trouvés. Alors, on a $A' \times G' = AG - rH$ [340]. Ce dernier lemme a été donné dans un article de Maclaurin sur les racines complexes d'une équation[341].

Les deux exemples que nous venons d'examiner ne sont pas dans l'ouvrage de Newton et ils ont une portée non négligeable. Le premier exemple nous permet de comprendre comment Cramer a eu l'idée de la fameuse règle qui porte son nom[342]. Nous avons déjà remarqué précédemment que celui-ci connaît très bien les écrits géométriques, en particulier le *Geometria Organica* de Maclaurin et que ces derniers sont une grande source d'inspiration pour Cramer. Il n'est pas étonnant que cet écrit de Maclaurin soit aussi

---

[339] « if r is less than n, and H be the coefficient in the equaiton, of the *dimensions* r ; that is, if H be taken so that the number of terms preceding it in the equation be equal to r, or the number of *factors* in its parts *abcdefgh*, *abcdefgi*, &c. equal to r, then the theorem may be expressed in the following manner : $a^r + b^r + c^r + d^r + \&c. = \left(a^{r-1} + b^{r-1} + c^{r-1} + d^{r-1} + \&c.\right) \times A$. » in Maclaurin (1748b), pp. 287-8.

$$- \left(a^{r-2} + b^{r-2} + c^{r-2} + d^{r-2} + \&c.\right) \times B$$
$$+ \left(a^{r-3} + b^{r-3} + c^{r-3} + d^{r-3} + \&c.\right) \times C$$
$$\cdots - r \times H$$

[340] « to shew it *universally*, we may use the following Lemma : 'That if A is the coefficient of one dimension, or the coefficient of the second term, in an equation, G any other coefficient, H the coefficient next after it ; the difference of the dimensions of G and A being $r-2$: if likewise $A' \times G'$ represent the sum of all terms of the products $A \times G$ in which the square of any root, as a^2, or b^2, or c^2, &c. is found ; then will $A' \times G' = AG - rH$ » in Maclaurin (1748b), pp. 290-1.

[341] Maclaurin (1730a), pp. 61-4.

[342] Cramer (1750), pp. 657-9.

connu du mathématicien genevois. L'autre exemple nous indique que Maclaurin ne se satisfait pas de propriétés énoncées sans démonstration même si cela est fait par l'illustre Newton. C'est pourquoi, cet ouvrage ne peut pas être considéré comme un simple commentaire de l'*Arithmetica Universalis*. Une autre raison nous pousse à croire cela, à travers la relation entre algèbre et géométrie présente dans la troisième partie de l'ouvrage de Maclaurin.

3. Une application réciproque entre géométrie et algèbre.

a) De l'algèbre à la géométrie et réciproquement

Comme nous l'avons signalé précédemment, Maclaurin considère qu'il faut séparer géométrie et algèbre pour en faire deux sciences distinctes dans leur justification mutuelle. Plus précisément, il refuse que la géométrie explique les opérations de l'algèbre et il veut que cette dernière ait son autonomie propre. C'est pourquoi, dans le *Treatise of Algebra*, les deux premières parties sont uniquement consacrées à l'algèbre en tant que telle et la géométrie n'y apparaît pas[343]. En revanche, il est conscient et c'est le sujet de la troisième partie de son traité que l'on peut utiliser l'algèbre en géométrie comme une aide non négligeable pour la résolution de problèmes d'ordre géométrique et réciproquement, c'est-à-dire utiliser les figures géométriques pour résoudre des problèmes d'ordre algébrique[344]. Même si Maclaurin préfère, quand cela est possible, utiliser la géométrie pour démontrer, quand cela est plus long et plus difficile, il n'hésite pas à employer les résultats et les

[343] « In the two first parts we considered Algebra as independent of Geometry ; and demonstrated its operations from its own principles. » in Maclaurin (1748b), p. 297.
[344] « It remains that we now explain the use of Algebra in the resolution of geometrical problems ; or reasoning about geometrical figures ; and the use of geometrical lines and figures on the resolution of equations. » in Maclaurin (1748b), p. 298.

techniques de l'algèbre pour résoudre des problèmes d'ordre géométrique. L'exemple le plus visible est son ouvrage de jeunesse, le *Geometria Organica* paru en 1720 dans lequel l'utilisation de l'algèbre est quasi-systématique. On retrouve même dans le traité d'algèbre un résultat qui a été donné dans le *Geometria Organica*. De plus, il est conscient que l'utilisation mutuelle des deux champs des mathématiques a créé de nouvelles théories dont le champ est large et important. Ainsi, le but de la troisième partie est de regrouper ces deux sciences par la relation qui peut être mise entre une courbe et une équation de sorte à établir une nouvelle théorie[345]. Cette mise en relation a des limites qu'il faut connaître pour éviter les déceptions et les mésinterprétations. Il existe des objets qui ont une signification et une interprétation dans l'une des sciences mais qui n'ont plus de signification dans l'autre science. En d'autres termes, un objet qui a une valeur en algèbre peut ne pas avoir d'équivalent en géométrie qui jouerait le rôle de cet objet. Par exemple, les quantités imaginaires n'ont pas de statut en géométrie car elles ne peuvent être représentées, contrairement en algèbre où elles ont un statut. Dans la résolution géométrique de l'exhibition des racines d'une équation, la méthode ne permet de trouver que les solutions réelles[346]. Il donne l'exemple de l'intersection d'un cercle avec une droite. Les trois cas d'intersections donnent les différentes possibilités de solutions d'une équation du second degré. Lorsque la droite coupe le cercle en deux endroits distincts, alors l'équation admet deux racines réelles distinctes, lorsque la droite touche le cercle en un point, alors l'équation admet une racine double et lorsque l'intersection est vide, cela signifie que l'équation n'admet que des racines imaginaires[347]. (Fig. 40)

---

[345] « The mutual intercourse of these sciences has produced many extensive and beautiful Theories, the chief of which we shall endeavour to explain, beginning with the relation betwixt curve lines and their equations. » in Maclaurin (1748b), p. 298.

[346] « in the geometrical resolution of a question, the thing required is exhibited only in those cases when the question admits of a *real* solution ; and beyond those limits, no solution appears. » in Maclaurin (1748b), p. 300.

[347] Maclaurin (1748b), pp. 306-7

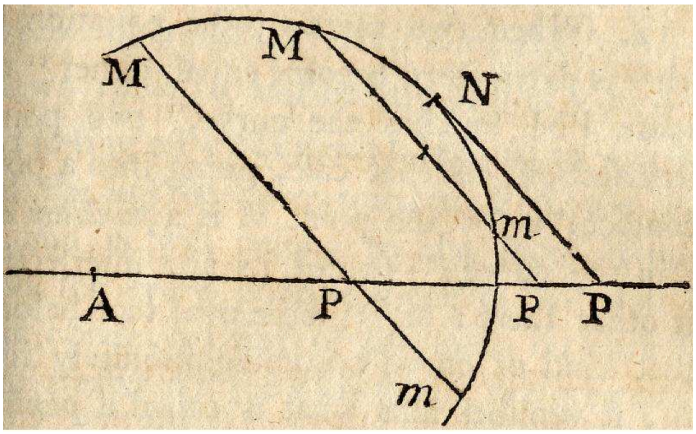


Fig. 40.

b) La notion de repère

La notion de repère est première et primordiale dès le début de la troisième partie. C'est cette notion de repère qui va permettre à l'algèbre et à la géométrie de se rejoindre. Maclaurin considère les quantités représentées par des lignes (des droites), une quantité connue par une droite donnée, une inconnue par une droite indéterminée[348]. A partir de cela, il va construire son repère. Il prend un segment d'extrémités A et B toutes deux déterminées, ce segment AB représentant donc une quantité donnée (Fig. 41.)

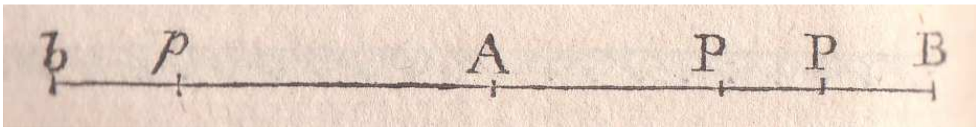


Fig. 41.

Si P est un point quelconque de AB alors le segment AP représente une quantité inconnue. Une quantité plus petite sera représentée par un segment AP plus petit, où P sera plus proche de A. Et si on suppose P se déplaçant sur AB vers A alors AP représentera successivement toutes les quantités inférieures à la quantité de départ. Lorsque P est en A,

[348] « we are now to consider quantities as represented by lines ; a known quantity by given line, and an unknown by an undetermined line » in Maclaurin (1748b), p. 298.

alors AP représente la quantité nulle, et s'il continue son déplacement de l'autre côté de A, alors AP représente une quantité négative si AP initialement était supposé positif. On retrouve ici la convention des nombres négatifs définis comme opposés des nombres positifs. Ainsi, si AP représente x, et $\mathrm{A}p = \mathrm{AP}$ (cette égalité est une égalité de longueurs), alors Ap représentera $-x$ (en plus de la longueur, la position du point p est prise en compte). Et pour la même raison, si AB représente $+a$ alors Ab représentera $-a$[349]. Il définit ainsi un axe. Puis, il donne l'autre axe qu'il définit de la même façon par ce mouvement continu qui lui permet de passer des positifs aux négatifs. Dans cette définition, les deux axes ne sont pas obligatoirement perpendiculaires. En revanche, dans une grande majorité des constructions, il prend des axes perpendiculaires. (cf. Fig. 42).

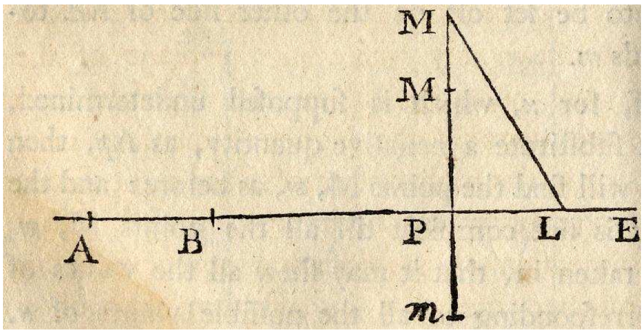


Fig. 42.

Maclaurin a défini le repère de façon intrinsèque. Il est indépendant de toute courbe ou de toute figure. Mais, le deuxième axe se déplace avec P. Maintenant qu'il a défini un repère, il peut associer une courbe à une équation. Ainsi, quand une équation admet deux inconnues, x et y, alors pour chaque valeur prise par x correspond autant de valeurs pour y que le degré en y de l'équation. Si AE est l'axe des x, et PM l'axe des y, alors AP représente x et PM représente y et il y aura autant de points M qu'il y a de degrés en y, et

[349] « Thus the line AB, whose extremities A and B are both determined, may represent a given quantity : while AP, whose extremity P is undetermined, may represent an undetermined quantity. A lesser undetermined quatity may be represented by AP, taking P nearer to A ; and, if you suppose P move towards A, then will AP, successively, represent all quantities less than the first AP ;and after P has coincided with A, if it proceed in the same direction to the place p, then will Ap represent a negative quantity, if AP was supposed positive. If AP represent x, and $\mathrm{AP} = \mathrm{A}p$, then will A$p$ represent $-x$; and for the same reason, of AB represent $+a$, then will Ab $(= \mathrm{AB})$ represent $-a$. » in Maclaurin (1748b), pp. 298-9.

les valeurs de PM seront les valeurs de y dans l'équation où x sera substitué par sa valeur AP[350]. Si parmi les valeurs prises par y, il y en a qui sont représentées par des points en dessous de l'axe AE alors cela signifie qu'elles sont négatives. De plus, si une des valeurs de y devient infinie, alors la courbe a une branche infinie et la droite PM devient alors une asymptote à la courbe si AP est de longueur finie. En revanche, si y s'évanouit lorsque x devient infiniment grand, alors la courbe approche AE qui devient une asymptote à la courbe.

Maclaurin introduit le changement de repère (il n'emploie pas ces termes). Il le fait en liaison avec la propriété suivante : lorsque l'étude porte sur une courbe algébrique, le changement de repère (c'est-à-dire, chez Maclaurin, changer d'origine, ne plus avoir les axes perpendiculaires) ne change pas le degré de cette courbe. Ceci est important car il permet de faire des changements de repères pour faciliter l'étude des courbes. Voici comment opère Maclaurin (Fig. 18). Soit LM une droite rencontrant l'axe AE en L suivant un angle donné. Soit $\mathrm{LM} = u$ et $\mathrm{AL} = z$. En considérant les sinus des angles PLM, MPL et PML, respectivement l, m et n. Alors, comme $\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{ML}} = \frac{l}{m}$ et $\frac{\mathrm{PL}}{\mathrm{ML}} = \frac{n}{m}$, Maclaurin exprime x et y en fonction de u et z : $y = \frac{l}{m}u$ et $x = z - \frac{n}{m}u$. Ainsi, en remplaçant x et y par leurs expressions respectives dans l'équation de la courbe à étudier, la nouvelle équation en u et z n'a pas plus de degré que celle en y et en x ou que la somme des degrés en y et en x[351]. Cela provient du chapitre 3 de la partie 2 « Of the Transformations of Equations, and exterminating their intermediate terms » dans lequel Maclaurin montre que si on remplace

[350] « When in an equation there are two undetermined quantities, x and y, then for each particular value of x, there may be as many values of y as it has dimensions in that equation. So that, if AP (a part of the indefinite line AE) represent x, and the perpendiculars PM represent the corresponding values of y, then will be as many points (M), the extremities of these perpendiculars or *ordinates*, as there are dimensions of y in the equation. And the values of PM will be the roots of the equation arising by substituting for x its particular value AP in any case » in Maclaurin (1748b), pp. 300-1.

[351] « then the equation involving u and z shall not rise to more dimensions than y and x had in the proposed equation, or, than the sum of their dimensions in any of its terms » in Maclaurin (1748b), p. 303.

l'inconnue x par $u-e$ où e est une constante ou par fu où f est une constante, alors le degré de l'équation ne change pas et cela permet suivant le choix de la constante de simplifier le problème. Maclaurin ajoute que le changement d'origine s'opère en remplaçant x par $z-\frac{n}{m}u+e$ où $e=\mathrm{AB}$ avec B la nouvelle origine du repère.

Après avoir donné le repère, la façon dont on peut représenter une équation géométriquement et la procédure pour changer de repère, il donne la méthode pour donner l'allure générale de certaines courbes. Il s'intéresse aux valeurs que peuvent prendre y et x, ce que nous appelons domaines de définition. Il cherche d'éventuelles asymptotes, des points particuliers, comme les points doubles. Pour certaines courbes, il recherche la croissance ou la décroissance de la courbe (sans utiliser la méthode des fluxions). Examinons sa façon d'opérer avec l'exemple suivant.

Soit la courbe dont l'équation est $\left(a^2-x^2\right)\left(x-b\right)^2=x^2y^2$. (Fig. 43.) Maclaurin simplifie cette expression et la remplace par $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}\times\frac{x-b}{x}$.

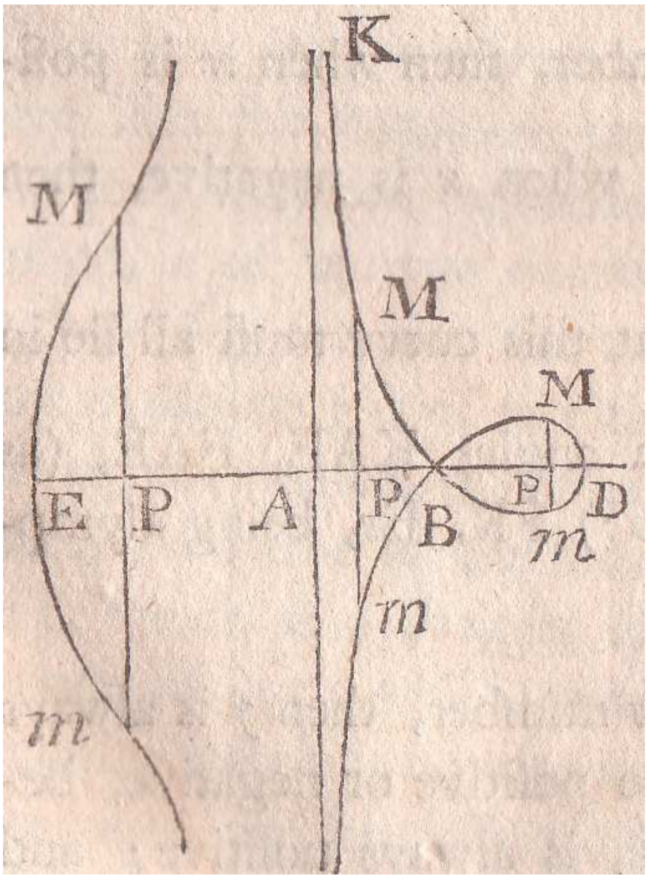


Fig. 43.

Tout d'abord, il s'intéresse aux valeurs positives de x. Il remarque, alors, que lorsque x est égal à 0, alors y devient infini, alors, l'ordonnée en A (l'origine du repère), AK, est une asymptote. Il pose B tel que $\mathrm{AB} = b$. Il sépare les cas où P est pris entre A et B ($x < b$) et le cas où P est situé après B ($x > b$). Déjà, si $x = b$, alors les deux valeurs possibles de y sont égales et nulles. B est donc un point double. Maclaurin remarque que, pour chaque valeur de x, il existe deux valeurs de y de signes opposés. Il remarque que y s'annule lorsque $x = a$. Il pose alors sur l'axe des abscisses D tel que $\mathrm{AD} = a$. Quand P se déplace entre A et D, alors y décroît et devient négatif et à l'arrivée en D, y redevient nul. Puis quand P se déplace de D vers A, alors y a l'allure opposée. De plus, lorsque AP est plus grand que AD, alors y admet des valeurs impossibles, par conséquent la courbe ne va pas au-delà de D. Pour les valeurs négatives de x, il prend la même forme d'équation. Lorsque x s'évanouit, les deux valeurs de y deviennent infinies (l'une positive, l'autre négative).

Par conséquent, la courbe admet deux arcs infinis qui ont une asymptote AK. De plus, lorsque x croît, y décroît. Soit E placé à l'opposé de D par rapport à A, alors aucun point de la courbe ne se situe après E.

La troisième partie est riche en différentes constructions. Elle comporte plusieurs méthodes pour construire les sections coniques. La première est reprise du *Geometria Organica* que nous avons déjà étudiée. C'est celle qui est à l'origine de la construction de certaines courbes algébriques à l'aide de suites d'angles. La seconde ne s'appuie pas sur deux angles qui tournent autour de leurs sommets, mais sur un ensemble de points fixes et de droites mobiles. Cette deuxième méthode est à l'origine d'une polémique entre Braikenridge et Maclaurin.

4. La polémique entre Braikenridge et Maclaurin

Dans un article paru dans les *Philosophical Transactions*, Maclaurin déclare qu'en 1727, il a ajouté, dans un Traité d'Algèbre, une démonstration algébrique du lieu géométrique lorsque trois pôles sont utilisés et une méthode pour construire une conique passant par cinq points[352]

Regardons la construction d'une section conique utilisée par Maclaurin dans son ouvrage. Celle-ci est un cas particulier de résultats trouvés à la fois par Maclaurin et par Braikenridge. Contrairement à ce qu'il fait dans le *Geometria Organica* où il prend comme référence des angles (constants), Maclaurin prend appui sur des pôles et des droites. Il considère trois droites DQ, CN, SP, mobiles autour des points fixes, D, C et S. Il prend les points d'intersection des droites entre-elles qu'il nomme P, N et Q (Fig. 44). Si deux de ces

---

[352] « In 1727, I added to a Chapter in my Algebra, which is very publick in this Place [Édimbourg], an Algebraick Demonstration of the Locus when three Poles are employed and the method of describing a Conic section through five points » in Maclaurin (1737a), pp. 146-7.

points, N et Q, se déplacent sur des droites fixes, AE et BE, alors le troisième point, P, décrit une section conique.

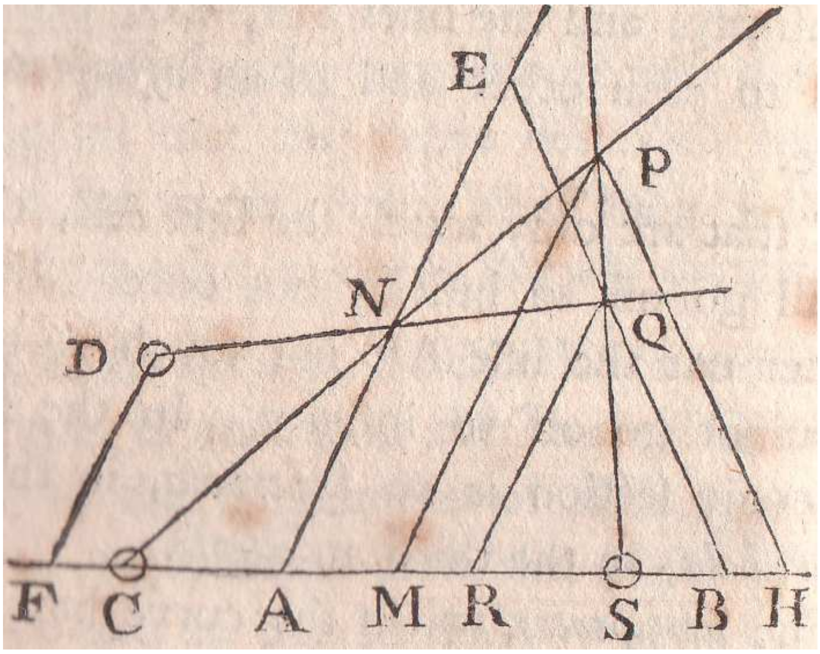


Fig. 44.

L'axe des abscisses est CS[353], l'origine du repère est C, et l'axe des ordonnées est parallèle à la droite AE. AE et CS ne sont pas forcément perpendiculaires. Ainsi, $\mathrm{CM} = x$ et $\mathrm{PM} = y$. Les droites DF, PM, QR sont parallèles à la droite AE et PH est parallèle à BE. Il pose : $\mathrm{CS} = a$, $\mathrm{CA} = b$, $\mathrm{SB} = c$, $\mathrm{DF} = k$, $\mathrm{AF} = l$, $\mathrm{AE} = d$, $\mathrm{BE} = e$, $\mathrm{AB} = f = a - b + c$.

Comme les triangles PMH et AEB sont semblables, les égalités de rapports $\frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{AE}}$ et $\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{BE}} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{AE}}$ entraînent les relations $\mathrm{MH} = \frac{fy}{d}$ et $\mathrm{PH} = \frac{ey}{d}$. Et comme $\mathrm{SH} = \mathrm{CM} + \mathrm{MH} - \mathrm{CS}$, alors $\mathrm{SH} = \frac{dx + fy - ad}{d}$. En appliquant le théorème de Thalès dans les triangles PCS, SPH et dans le quadrilatère RQDF, Maclaurin exprime les quantités $\mathrm{AN} = \frac{by}{x}$, $\mathrm{BQ} = \frac{cey}{dx + fy - ad}$, $\mathrm{QR} = \frac{cdy}{dx + fy - ad}$ et $\mathrm{BR} = \frac{cfy}{dx + fy - ad}$.

---

353 Ici, le repère est posé *a posteriori*, mais, comme nous l'avons déjà signalé, grâce aux changements de repère possibles, il se permet de poser son repère comme bon lui semble.

À partir de la relation issue du quadrilatère RQDF,

$$\frac{\mathrm{AN}-\mathrm{DF}}{\mathrm{RQ}-\mathrm{AN}}=\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AR}}\text{[354]},$$

en remplaçant les longueurs par leurs expressions respectives, et en simplifiant, Maclaurin arrive à l'équation en x et y :

$$bf\left(c-l-f\right)y^2+\left(c\left(ld-kf\right)-bd\left(l+f\right)+kff\right)xy+bad\left(l+f\right)y-adfkx+dfkx^2=0\,.$$

Cette dernière est bien de degré 2 en y. Il annonce qu'en fonction des situations des pôles et des droites, la courbe change. Mais, dans tous les cas, cette courbe ne peut pas être d'ordre supérieur à 2, en revanche elle peut être une droite, dans le cas où, par exemple D est sur la droite CS.

La propriété « par cinq points donnés passe une conique » se démontre aussi à partir de la construction que nous venons de donner. Une autre propriété découle de cette construction, si, maintenant, il y a un nombre de pôles quelconques, et des droites tournant autour de ces points. Alors, si toutes les intersections sauf une se déplacent sur des droites fixes, alors la dernière intersection décrit une section conique[355]. Cette dernière propriété connue sous le nom de théorème de Braikenridge-Maclaurin est une extension de la construction décrite par Maclaurin. Ce théorème peut être considéré comme un cas particulier du théorème suivant : soit un polygone dont tous les sommets sauf un sont sur des courbes d'ordre quelconque, alors le dernier sommet décrit une courbe d'ordre maximum le double du produit des ordres des courbes parcourues par les autres sommets. Maclaurin cite ce dernier théorème dans un article des *Philosophical Transactions*[356]. Ainsi, dans le cas de la propriété donnée dans le *Treatise of Algebra*, les courbes sont des droites (donc des

[354] Cette relation s'obtient en utilisant le théorème de Thalès plusieurs fois.
[355] « If you assume any number of poles whatsoever, and make rulers revolve about each of them, and all intersections but one, be carried along given right lines, that one shall never describe a line above a conic section » in Maclaurin (1748b), p. 351.
[356] « If you suppose L, Q, R, M, N, to be carried over Curve Lines of the Dimensions m, n, r, s, t, respectively, the Locus of P may arise to $2mnrst$ Dimensions, but no higher. » in Maclaurin (1737b), p. 156.

courbes d'ordre 1), par conséquent le dernier point décrit une courbe d'ordre 2 (donc une section conique). Le théorème de l'hexagone de Pascal peut se déduire aussi de cette méthode. Pascal l'a découvert en 1640 et l'a publié dans son *Essay sur les coniques*[357]. Ce dernier a été publié sous forme d'affiche en 50 exemplaires[358]. Nous pouvons penser que Maclaurin ne connaissait pas ce résultat.

Nous reprenons seulement à grands traits la dispute qui a lieu pendant les années 1730 car Stella Mills l'a abordée dans un de ses articles[359]. Signalons simplement que dans la préface de son ouvrage[360] qui paraît en 1733, William Braikenridge accuse Maclaurin de « plagiat ». En effet, il écrit qu'en 1727, après avoir fourni à J. Craig la démonstration de ce résultat, il a rencontré Maclaurin. Ce dernier lui apprend que Craig lui a fait part de ses découvertes et que lui aussi a trouvé les mêmes résultats, il lui montre un manuscrit dans lequel se trouve l'énoncé des propriétés. Braikenridge, sûrement vexé, rétorque qu'étant donné que dans ce manuscrit ne se trouve aucune démonstration ni méthode de découverte, il soupçonne fortement Maclaurin de n'avoir pas de démonstration et que ce dernier a simplement recopié ses résultats[361]. Maclaurin, informé par quelques amis, du traitement qu'il considère comme injurieux[362], écrit à Folkes le 28 juillet 1736 et lui demande que sa lettre envoyée à John Machin le 15 novembre 1732, soit publiée dans les *Philosophical Transactions*[363]. Maclaurin affirme que ce théorème lui était connu très tôt, dès 1722, et qu'il était inclus dans son cours d'algèbre et qu'il était alors connu par des centaines de

---

[357] Taton (1955), pp. 11-18.
[358] Taton (1955), p. 5.
[359] Mills (1984).
[360] Braikenridge (1733). La préface est citée dans Mills (1984), p. 235.
[361] « In the year 1727, during a three months stay in London I shared these thoughts with the celebrated gentleman J Craig, a very expert mathematician. After a few days it happened that I visited Colin Maclaurin, Edinburgh Professor, who at that time was visiting London, who recalled his conversation with Craig who had described my theorems, and [Maclaurin] said moreover that he had discovered similar ones and he showed me manuscripts which he said contained his own discoveries; but I am ignorant of the method he used for he did not entrust the manuscript to my hands, nor was I allowed to glance over it. » in Mills (1984), p. 235. Traduction du latin par l'auteur.
[362] « I have been lately informed of a piece of injurious treatment I have received in print from one Mr Braikenridge who was formerly a private teacher of Mathematics here » in Mills (1982), p. 260.
[363] Maclaurin (1737a).

personnes. Lorsqu'il commente l'article de Braikenridge paru dans les *Philosophical Transactions* pour le mois de janvier 1735[364] (il sera édité en 1737), il écrit que l'auteur de cet article ne l'a même pas nommé et qu'il le considère comme un plagiaire[365]. Dans la lettre à Machin, Maclaurin certifie qu'il a montré à Braikenridge en 1727 les théorèmes que ce dernier a aussi produits[366]. Il semble que Braikenridge (ou ses amis) n'ait pas apprécié cela, et Maclaurin, dans une lettre à Scott, se plaint de recevoir des lettres anonymes d'injures qu'il suppose écrites soit par Braikenridge lui-même soit par son entourage. Ces lettres reprennent les accusations de plagiat. Maclaurin est choqué car dans l'article dans lequel il donne ses règles et sa méthode, il se place volontairement en dehors d'un quelconque débat et ne veut surtout pas rentrer dans une polémique[367]. Il est donc chagriné d'être mêlé bien malgré lui dans une polémique fâcheuse. De plus, dans cette dispute, ce qui le pousse à répondre n'est pas de montrer la priorité de ses découvertes mais d'assurer sa bonne foi et de montrer qu'il n'a pas plagié Braikenridge. Enfin, lassé de recevoir des propos injurieux de la part de Braikenridge, il envoie à celui-ci une lettre qui veut clore le débat par des mots assez secs[368]. La conclusion que l'on peut faire de cette dispute entre les deux hommes, est que Braikenridge et Maclaurin ont trouvé de manière

---

[364] Braikenridge (1738).

[365] « have communicated to hundreds of people, and taught here every year since 1725 (…) where he not only publishes theorems I have taught here every year without naming me (to do wish he was welcome) but insults me as if I had them not because I did not publish them quanquam lacessines. He does not name me, but I am told (for I have seen neither of his pieces) that I supposed he means me » » in Mills (1982), p. 261.

[366] « Braikenrigde will not refuse, that I shew'd him the Theorems I now send you, in 1727 » in Mills (1982), p. 249.

[367] « yet this day I received a letter subscribed by a fictitious name writ evidently at Mr B's direction or by himself, full of scurrilous language, and such reproaches as I never merited from him or any man. It goes on the supposition that in this paper I am to accuse him of receiving or stealing hints from me ; in which this letterwriter is grossly mistaken & shews his rashness (…) While he is attacking me unprovock'd, unjustly, my paper which contains an answer to his insinuations lyes dormant in the Society's hands. Can any man find fault with publishing such a paper when no man is in the least injured by any expression in it, but a plain narrative is given of the method by which I came at those theorems & a short list of some of them is proposed. (…) I assure you if you had a full view of the matter you would see how softly I have acted in this matter. I have done nothing from provocation, as I have added no thing to this paper. (…) If he imagines to intimidate me from doing myself this small piece of justice, he mistakes me much. » in Mills (1982), p. 266-7.

[368] « For after reflecting on your scurrilous manner of writing to me who never gave you any ground for such unaccountable usage, I cannot help desire that your correspondence & mine may be at an end » in Mills (1982), p. 273.

plus ou moins indépendante un résultat équivalent. Maclaurin ne cherche pas la paternité ou la priorité mais récuse fermement le plagiat. Enfin, l'attitude des deux protagonistes est complètement différente. La lecture des lettres et articles nous incite à voir Braikenridge comme un homme difficile, à la limite de l'impolitesse et Maclaurin comme un homme poli et honnête. De plus, la demande qu'il fait à la Royal Society de reproduire une lettre ancienne est acceptée sans aucune difficulté et avec une certaine diligence, ce qui montre que Maclaurin a du pouvoir et une aura bien supérieure dans la communauté savante britannique à celle que peut avoir Braikenridge.

Une autre polémique intervient avant celle entre Braikenridge et Campbell. Maclaurin et George Campbell se disputent la priorité d'une démonstration en algèbre dans le cadre de la recherche des racines complexes d'une équation. Cette dispute se passe entre les années 1727 et 1732. Contrairement à la précédente, nous allons l'étudier un peu plus dans le détail.

B. La polémique avec George Campbell : un débat sur l'algèbre[369].

1. L'article de Maclaurin et celui de Campbell : une démonstration de la règle de Newton.

Dans le *Treatise of Algebra*, Maclaurin reprend entre autres la règle de Newton sur les racines complexes d'une équation[370]. Le chapitre qui contient cette règle a été ajouté par les éditeurs de l'ouvrage. Mais, comme ils le signalent dans la préface, Maclaurin a publié plusieurs articles concernant les racines imaginaires d'une équation. C'est pourquoi les éditeurs du *Treatise of Algebra* incorporèrent ces résultats qui inspirent le chapitre 11 de la deuxième partie[371]. Ce chapitre diffère relativement des deux articles des *Philosophical Transactions*, néanmoins l'esprit est le même.

La règle a été donnée pour la première fois par Newton dans l'*Arithmetica Universalis*[372]. Elle consiste à trouver le nombre de racines complexes d'une équation. Nous la donnons telle qu'elle est énoncée dans le *Treatise of Algebra*[373], mais en des termes plus modernes.

---

[369] Dans Mills (1983), Mills donne un compte-rendu assez précis de cette polémique.
[370] Maclaurin (1748), pp. 275-86.
[371] « The rules concerning the Impossible roots of equations, our Author had very fully considered, as appears from his Manuscript papers : but as he had no where reduced any thing on that Subject to a better form, than what was long ago published in the Philosophical Transactions, N° 394[371], and 408[371], we thought it best take the substance of Chap. 11 Part II. From thence ; especially as the latter of these Papers furnishes a demonstration of the original rule » in Maclaurin (1748), préface, non paginé.
[372] Newton (MP), vol. 5., pp. 338-53 et pp. 362-71. ou Newton (1722), pp. 247-51.
[373] « Rule. Write down a series of fractions whose denominators are the numbers in this progression 1, 2, 3, 4, 5, &c. continued to the number which expresses the dimension of the equation. Divide every fraction in the series by that which precedes it, and place the quotients in order over the middle terms of the equation. And if the square of any term multiplied into the fraction than stands over it gives a product greater than the rectangle of the two adjacent terms, write under the term the sign $+$, but if that product is not greater than the rectangle, write $-$; and the signs under the extreme terms being $+$, there will be as many imaginary root

Soit une équation de degré n : $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_k x^{n-k} + \cdots a_n = 0$. Maclaurin pose la fraction $r_k = \dfrac{k(n-k)}{(k+1)(n-k+1)}$ pour k compris entre 1 et $n-1$. Si $r_k a_k^2$ est plus petit que $a_{k-1}.a_{k+1}$, alors le signe $+$ est assigné au $k^{\text{ème}}$ terme, a_k, sinon c'est le signe $-$ qui lui est associé. Pour le premier et le dernier terme, on leur associe le signe $+$. La règle signale que le nombre de changements de signes est le nombre de racines impossibles c'est-à-dire les racines imaginaires non réelles[374] de l'équation étudiée.

Dans le premier article qui paraît dans les *Philosophical Transactions*[375], Maclaurin annonce qu'il a trouvé une démonstration simple et rapide de la règle énoncée ci-dessus[376]. Il montre que, lorsque les racines d'une équation sont toutes réelles, la relation $r_k a_k^2 > a_{k-1}.a_{k+1}$ est toujours vraie pour *k* égal à 1 et à *n*. Dans cet article, il ne s'intéresse pas aux relations entre les autres coefficients. Et comme corollaire, il indique que, lorsque cette relation n'est pas vraie pour *k* égal à 1 ou à *n*, alors cette équation admet des racines impossibles. A la fin de l'article, il annonce qu'il y aura une suite et donc qu'il s'intéressera aux autres coefficients de l'équation.

En 1728, la Royal Society publie dans les *Philosophical Transactions* un article de George Campbell[377] dont le titre est *A Method for determining the Number of impossible Roots on the Adfected AEquations*[378]. Dans ce dernier se trouve une méthode tirée de la règle de Newton dont l'esprit ressemble à celui de Maclaurin. En revanche, par rapport à

---

as there changes of the signs from $+$ to $-$, and from $-$ to $+$ » in Maclaurin (1748), p. 275. et dans Mills (1982), p. 173.

374 Dorénavant, lorsque nous considérons les racines dites imaginaires cela signifie que nous prenons en compte uniquement les racines imaginaires non réelles.

375 Il paraît pour l'année 1726. C'est une lettre de Maclaurin adressée à Martin Folkes et datée du 26 février 1726. Cette lettre est datée par Mills en 1725 ce qui ne convient pas avec l'environnement de Maclaurin à cette époque. De plus, cette lettre est publiée pour les mois de mai à juillet 1726.

376 « I thought of a very easy & simple way of demonstrating Sir Isac Neuton's Rule. » in Maclaurin (1728), p. 104.

377 Pour quelques indications biographiques voir Weeks (1991), ou Wallis (1993), p. 24. ou encore Mills (1983), p. 149, n. 1.

378 Campbell (1729)

l'article de Maclaurin de 1726, celui de Campbell est beaucoup plus fourni. Donnons deux des propriétés de cet article qui sont à la source de la querelle.

La deuxième proposition de l'article de Campbell concerne une équation de degré *n*, $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - \&c. \pm A = 0$. Les racines de cette équation sont notées par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *&c*. Soit *M* représentant un coefficient de cette équation. Soit *L*, *N*, les coefficients adjacents à *M* ; *K*, *O* les coefficients adjacents à *L* et à *N* ; *I*, *P* ceux adjacents à *K* et à *O* ; *H*, *Q*, ceux adjacents à *I* et à *P*, ainsi de suite. Soit *m* le degré associé au coefficient *M* et soit *Z* la somme des carrés de toutes les différences possibles entre les termes[379] du coefficient *M*, alors le produit du carré de *M* avec la fraction suivante

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\&c.\times\frac{n-m+1}{m}}\right)$$

excède tout le temps $L\times N - K\times O + I\times P - H\times Q + \&c.$ de

$$\frac{\frac{1}{2}Z}{n\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\&c.\times\frac{n-m+1}{m}}$$

qui est positif quand les racines soient réelles positives ou négatives[380]. En termes plus

[379] Par termes d'un coefficient, nous nous référons à l'ensemble de combinaisons des racines de l'équation, c'est-à-dire si $M = \sum \alpha_i \alpha_j \cdots \alpha_k$ avec $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$ les racines de l'équation, nous appelons terme du coefficient *M* un des produits $\alpha_i \alpha_j \cdots \alpha_k$ de cette somme.

[380] « Let $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - \&c. \pm A = 0$ be an Aequation of any Degree, whose Roots with their Signs let be expressed by the Letters *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *&c*. let *M* represent an Coefficient of this AEquation, *L*, *N*, the coefficients adjacent to *M* ; *K*, *O* the Coefficients adjacent to *L*, *N* ; *I*, *P* those adjacent to *K*, *O* ; *H*, *Q*, those adjacent to *I*, *P*, and so on. Let *m* represent the Exponent of *M* and let *Z* (…) represent the Sum of the Squares of all the possible Differences between the Terms of the Coefficient *M*. Then the Product of the Square of any Coefficient *M* multiply'd by the Fraction $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\&c.\times\frac{n-m+1}{m}}\right)$ doth always

modernes :

Soit $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_k x^{n-k} + \cdots a_n = 0$ et soit m un nombre compris entre 1 et n, alors $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{m!(n-m)!}{n!}\right) a_k^2 = a_{k+1}a_{k-1} - a_{k+2}a_{k-2} + a_{k+3}a_{k-3} - \cdots + \frac{\frac{1}{2}m!(n-m)!}{n!} Z$ où Z est le carré des différences possibles entre les termes du coefficient a_k.

L'autre résultat se trouve dans le lemme 3. Il signale que si une équation de degré n, $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - \&c. \mp bx \pm A = 0$, n'admet que des racines réelles alors $nx^{n-1} - (n-1)Bx^{n-2} + (n-2)Cx^{n-3} - (n-3)Dx^{n-4} + (n-4)Ex^{n-5} - \&c. \mp b = 0$ n'admet que des racines réelles. Campbell déclare que ce résultat peut se montrer par la méthode des minima et maxima. À partir de cela, il montre qu'en appliquant ce lemme autant de fois qu'il le faut, on obtient le corollaire suivant : si $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - \&c. \mp bx \pm A = 0$ n'admet que des racines réelles, il en est de même pour $n\frac{n-1}{2}x^2 - (n-1)Bx + C = 0$[381].

Maclaurin a une relative bonne opinion de Campbell, qui a été professeur privé à Édimbourg avant de tenter sa chance à Londres. En effet, il a usé de son influence pour aider Campbell à Londres : le 7 décembre 1728, il écrit à Stirling qu'il a contacté quelques personnages ayant une certaine influence à Londres pour permettre à Campbell de trouver un poste de professeur dans une académie londonienne ou dans un collège[382]. Maclaurin considère que Campbell est un mathématicien compétent et que son article des

---

exceed $L \times N - K \times O + I \times P - H \times Q + \&c.$ by $\frac{1}{2}\frac{Z}{n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \&c. \times \frac{n-m+1}{m}}$ which is always a positive Number, when the Roots *a*, *b*, *c*, *d*, *e* &c. are real Numbers positive or negative » in Campbell (1728), p. 527-8.

381 Campbell (1728), pp. 517-8.

382 « I spoke to Col. Middleton & some others of influence here and find they have better hopes of success to Mr Campbell in that business than you have. I think some of his performances deserved to be taken notice of » in Mills (1982), p. 181.

Philosophical Transactions est d'un intérêt non négligeable. Dans cette même lettre à Stirling, il reconnaît qu'initialement il voulait donner une suite à son article, mais par manque de temps dû à son enseignement et par son ambition d'écrire un traité d'algèbre, il a changé d'avis et ne veut plus publier de suite[383]. Nous pouvons juger qu'il n'est donc pas étonnant qu'il y ait des articles qui paraissent sur le même sujet. Dans la réponse de Stirling, ce dernier fait un compte-rendu de l'article de Campbell à Maclaurin et raconte que Campbell a envoyé son article à Machin de la *Royal Society* avant la parution de l'article de Maclaurin, mais ce dernier tarde à le lire lors d'une séance de la Société. Il faut les remontrances de Sir Alexander Cuming, à la demande de Campbell, pour voir le papier de Campbell présenté en séance. C'est Stirling qui doit corriger l'épreuve de la publication de cet article[384].

Lors de la lecture de l'article, en février 1729, Maclaurin s'étonne de retrouver dans la méthode de Campbell, une méthode très proche de la sienne. Il est à remarquer que Maclaurin, lorsqu'il conseillait aux membres de la Royal Society de prendre au sérieux les écrits de Campbell, ne savait pas que ce dernier travaillait sur le même sujet que lui. Il s'étonne de plus qu'à la suite d'une discussion dans la rue avec Campbell, ce dernier a suivi la méthode de Maclaurin de façon très étroite. Il regrette alors de n'avoir pas écrit la suite tout de suite après, surtout avant la parution de l'article de Campbell[385]. De plus, pour affirmer la priorité de sa découverte, il ajoute que lors d'un voyage en septembre 1727 à

---

[383] « I have too long delayed publishing the remainder of my piece for which I have only the excuse of much teaching and my design of giving a treatise of algebra where I was to treat that subject at large » in Mills (1982), p. 181.

[384] « for as soon as your paper was printed, Mr Campbell sent up his directly to Mr Machine, who at that time being very busy, delayed presenting it to the Society (…). Upon this delay Sr Alex: Cuming complained grievously to Mr Machine that Mr Campbell was ill used, this made Mr Machine present it to the Society, upon which it was ordered to be printed, Mr Machine came to me and desired I would take the trouble of correcting it in the Press, which was all the Concern I had in it » in Mills (1982), p.183.

[385] « But ev'n when I heard of it from you I was not much concerned because from a conversation with the author on the street I concluded his Method was from the Equations for the Limits and never suspected that he had followed the very tract which I had mark'd out in my paper in the transactions for May 1726 (…) and had it marked that my paper was to be continued another pursuing the very same thought should be published at the interval ; at least I might have been acquainted that I might have sent the Continuation of mine before the other was published » in Mills 1982, pp. 185-6.

Londres chez Machin, ce dernier ne lui parla pas d'un éventuel article qu'il avait reçu de Campbell sur le sujet. Il conclut que cet article a été envoyé après ce voyage, c'est-à-dire bien après l'envoi de son article de 1726[386]. Pour montrer sa bonne foi, il donne à Stirling la démonstration d'un résultat qu'énonce Campbell dans son article. C'est la proposition 2 que nous avons citée plus haut. Pour le faire, il a besoin d'un résultat donné dans son article de 1726. Ainsi, Maclaurin conclut que le résultat donné par Campbell était connu de lui et démontré par lui. Il est décidé à se faire justice lui-même mais « without disputing or displeasing any body »[387]

C'est pourquoi, dans la lettre qu'il envoie le 19 avril 1729 à Martin Folkes, il n'est pas fait référence à un quelconque plagiat. La seule référence à Campbell peut être lorsqu'il annonce que de nombreuses règles peuvent être déduites de la règle de Newton et que certaines ont été découvertes dernièrement[388].

Maclaurin reprend la proposition 2 de Campbell pour laquelle il a donné une démonstration. Soit l'équation $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + Fx^{n-6} - \&c. = 0$. Soit $l = n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \,\&\text{c.}$ de telle façon qu'il y ait autant de facteurs que la dimension de E, alors $\frac{l-1}{2l} \times \mathrm{E}^2$ est toujours plus grand que $DF - CG + BH - AI + K$ quand toutes les racines de l'équation sont réelles[389]. Cette proposition est bien celle rencontrée dans l'article de Campbell. L'énoncé de Maclaurin est même moins précis, car il n'évalue pas la

---

[386] "I believe you will not find that Mr Campbell sent up his paper or at least the latter part of it so soon after I sent up mine which was in the beginning of 1726. One reason I have is that Mr Machin never mentioned it to me tho' I spent a whole day with him in September 1727 and talked to him on this subject and sau some other papers of Mr Campbell's in his hand at that time. So that I have ground to think that the paper of May 1726 led the Author into the latter part of his for October 1728 » in Mills (1982), p.188.

[387] Mills (1982), p. 188.

[388] « Besides Sir *Isaac Newton*'s Rule there arises from the following general propositions, a great variety of new Rules different from his and from any other hitherto published, for discovering when an Equation has Imaginary roots » in Maclaurin (1730a), p. 59.

[389] « Let $l = n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \,\&\text{c.}$ taking as many Factors as the Coefficient E has dimensions and $\frac{l-1}{2l} \times \mathrm{E}^2$ shall always exceed $DF - CG + BH - AI + K$ when the Roots of the Equation are all real Quantities » in Maclaurin (1730a), p. 64.

différence entre les deux quantités. La démonstration de celle-ci suit la proposition 5 de son article de 1726. Maclaurin considère l'article de 1729 comme la suite de celui-ci et c'est pour cette raison que la première proposition énoncée dans cet article est numérotée 6. Il ajoute ensuite quelques autres propositions qui étendent la proposition 7, qu'il considère comme meilleures car elles permettent de trouver des racines imaginaires impossibles à trouver avec la proposition 7.

L'autre exemple que nous avions pris de l'article de Campbell se trouve aussi dans l'article de Maclaurin comme corollaire d'un théorème plus important. Le théorème est le suivant : l'équation $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} \,\&c. = 0$ a autant de racines imaginaires que l'équation $nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} \,\&c. = 0$ et même que l'équation $Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} \,\&c. = 0$ [390]. De ce théorème, il déduit la proposition de Campbell par dérivations successives. Il déduit un autre corollaire qui est que si l'équation initiale admet des racines imaginaires alors l'équation quadratique qui en est déduite, par dérivations successives, admet aussi des racines imaginaires[391]. De plus, dans cet article se trouvent beaucoup d'autres résultats qui ne sont pas dans l'article de Campbell. Nous pouvons donc considérer que le travail de Maclaurin est plus complet que celui de son confrère.

Lorsque Campbell apprend que Maclaurin a envoyé un article pour être publié dans les *Philosophical Transactions* et qu'il l'a été, il est furieux. Et la réponse qu'il donne à cet article prend la forme d'un pamphlet d'une vingtaine de pages. Le *Remarks on a Paper published by Mr. MacLaurin in the Philosophical Transactions for the Month of May,*

---

[390] « The Equation $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} \,\&c. = 0$ will have as many imaginary Roots as the Equation $nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} \,\&c. = 0$ or the Equation $Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} \,\&c. = 0$ » in Maclaurin (1730a), p. 88.

[391] Maclaurin (1730a), p. 89-90.

1729[392] a plusieurs objectifs. Le premier est d'accuser Maclaurin de plagiat et de prétendre à la priorité de certains résultats. Il est aussi mécontent que Maclaurin n'ait pas cité ses précédents travaux qui, d'après lui, sont la source du travail de son adversaire. Le second objectif est de montrer que les résultats de Maclaurin n'apportent rien de plus à ce qu'il a déjà écrit si ce n'est de la difficulté, de l'obscurité dans les règles qu'il énonce. De plus, il montre qu'il existe une erreur dans les propos de Maclaurin (celui-ci dira que l'erreur est due à « by some Mistake of the Pen, or Press »[393]).

Nous pouvons citer simplement quelques phrases pour donner la teneur du pamphlet. Dans cet opuscule, il veut se défendre d'être un plagiaire, ce que, d'après lui, Maclaurin l'accuse[394]. Campbell considère que les théorèmes de Maclaurin sont inférieurs à ses règles ou à celle de Newton, car contrairement à ce que Maclaurin pense, elles sont d'une utilisation très difficile et sans fin[395].

La surprise de Maclaurin est totale lorsqu'il apprend la publication de cet écrit. Il demande alors à Stirling son avis sur le pamphlet que Maclaurin n'a pas entre les mains. Maclaurin regrette l'emportement de Campbell et suggère, dans ce type de débat, la prudence et les bonnes manières[396]. Maclaurin est décidé à répondre à cet affront. Pour cela, il doit préparer sa défense. Celle-ci prendra la forme d'un essai. Il demande donc à

---

[392] Campbell (1729).
[393] Maclaurin (1730b), cité dans Mills (1982), p. 222-41.
[394] « AND tho' I am vain enough to think, that my best Acquaintenances will not suspect me guilty of that mean Crime of Plagiarism, with which Mr. *M-n* has been pleased to brand me ; yet I do not know how far his Friends might interpret my Silence as a tacite Confession that I have deserved this Charge » in Campbell (1729) cité dans Mills (1983), p. 160.
[395] « WHEN Mr. *M-n* … labours so earnestly to shew the Preference of his Rules to Sir *Isaac's*, or mine, he cannot surely mean, that all his Rules taken together, are better than either of ours ; he must certainly understand, that any one of his Rules is preferable to Sir *Isaac's* or mine : For it is not to be imagin'd, when one is trying, whether there are impossible Roots in an Equation, that he is to undertake the endless Labour of going thro' all Mr. *M-'s* Rules. (…) the Excellency of a Rule of this Sort, consists in Extensiveness to the proposed Design, and Simplicity ; in this Respect, any of his Rules, instead of being preferable to either of ours, falls short of them » in Campbell (1729) cité dans Mills (1983), p. 161.
[396] « I was surprised with a printed piece from Mr Campbell against me which the gentleman who frank'd the letter told me he sent you a Copy off. The Gentleman indeed added he had not frank'd it if he had knoun the Nature of the paper ; and was ashamed of it. I wonder I had no message by a good hand from Mr Campbell before he printed these silly reports he diverts himself with. Good manners & Prudence one would think ought to have led to another sort of Conduct. He misrepresented my paper much and found things in it I never asserted » in Mills (1982), p. 217-8.

Stirling les copies des lettres qu'il lui a envoyées pour pouvoir les inclure dans cet essai et ainsi montrer sa bonne foi[397]. Il indique qu'il fera de même avec Martin Folkes. Les deux correspondants se prêtent au jeu et en juin 1730 paraît *A Defence of the Letter Published in the Philosophical Transactions for March and April 1729*[398].

Dans celui-ci, Maclaurin s'attachera à répondre à toutes les attaques formulées par Campbell. Tout d'abord, il indique que les résultats qu'il a donnés ont été trouvés par lui avant la parution de l'article de Campbell. C'est à cet effet que Maclaurin donne des extraits de sa correspondance avec Stirling. De plus, il nie fermement avoir accusé Campbell de plagiat, que ce soit dans une conversation ou dans une lettre. Maclaurin prend appui sur ses connaissances, en particulier celles de Londres, qui unanimement prennent sa défense[399]. Enfin, il répond aux attaques de Campbell sur l'obscurité et les difficultés de ses règles. En guise de conclusion, Maclaurin déclare qu'il n'a pas provoqué cette dispute et que, jamais, il ne s'est engagé à attiser la vigueur de cette polémique. Il ajoute qu'il en est désolé[400]. Il montre ainsi à ses lecteurs un aspect modéré de son caractère que nous avons déjà signalé et qui est une constante dès son plus jeune âge. En effet, il avait arrêté ses études de théologie parce qu'au sein de l'Église d'Écosse, de nombreux débats et polémiques avaient lieu et qu'il refusait de rentrer dans ce type de dispute. La parution de sa *Defence* clôt le débat entre les deux hommes. Aucune réplique de Campbell n'intervient après. Aucun article dans les *Philosophical Transactions*, aucune référence dans la

---

[397] Mills (1982), p. 218.

[398] Maclaurin (1730b). Cet écrit est reproduit dans Mills (1982), pp. 222-43. Nous prendrons la version de Mills pour les citations car la version imprimée n'est pas disponible en France et que la version de Mills est bonne.

[399] « I never accused him of *Plagiarism*, or of copying my Papers, either in Conversation, or in Letters. As an Evidence of this, I appeal to all my Acquaintenance ; who unanimously agree, That they never heard me speak of him in that Manner ; and to the Letters I wrote, on that subject, to my Friends at *London* (…) : From whence it will appear, that if he had examined them with any Care, they had never produced this Dispute. » in Mills (1982), p. 224.

[400] « that tho' I have been induced to appear in Publick on several Occasions, I have never, till now, troubled the World with any Thing particulary relating to my self ; and assure you it shall be a very important Invention that I will not rather choose to give up, than run the Hazard of being engaged in such a Dispute as the Remarker has made this. Please, Sir, to forgive this Trouble » in Mills (1982), p. 241.

correspondance qui nous est parvenue, ne nous indiquent une relance du débat. Maclaurin sort de cette polémique profondément touché et avec une impression de gâchis de temps et d'énergie. Dans une lettre à Stirling dans laquelle il affirme encore une nouvelle fois son aversion pour cette polémique, Maclaurin se déclare fatigué (de cette affaire) et qu'il va se retirer à la campagne pour se reposer[401].

Nous avions signalé que Campbell avait réagi assez vivement à la parution du second article de Maclaurin. La raison que nous avions évoquée était qu'il considérait cet article comme un plagiat de son article. Il y a peut-être une autre raison. Celle-ci est avancée par Maclaurin et ne serait pas d'ordre mathématique et de priorité mais due à une vieille rancœur de Campbell vis-à-vis de Maclaurin. Dans la lettre du 7 décembre 1728 qu'il envoie à Stirling, Maclaurin déclare, concernant la tentative de Campbell pour trouver un emploi de professeur de mathématiques à Londres, que « I have been at pains to soften some prejudices & jealousies that may possible revive by it »[402]. Cette phrase fait référence à un fait douloureux passé dont deux des acteurs étaient Campbell et Maclaurin. Cette phrase est expliquée par Maclaurin à la suite de la polémique, encore dans une lettre à Stirling. D'après lui, la raison principale de la dispute est due au choix que les instances municipales d'Édimbourg ont fait lors de la recherche du « joint professor » à Gregory. A priori, George Campbell qui était, en 1725, professeur privé à Édimbourg, désirait ce poste. Alors une espèce de jalousie de sa part envers Maclaurin est apparue. Cette rancœur est ressortie au moment de la publication de l'article de Maclaurin[403]. Malgré cette affaire, Campbell sera élu Fellow de la Royal Society le 10 décembre 1730.

---

[401] Mills (1982), p. 424.
[402] Mills (1982), p. 181.
[403] « At the same time that I oun this Aversion I can assure you it flous not from any Consciousness of any other Wrong I have done this Author than that I accepted of a settlement here that was proposed to me when some persons at Aberdeen were persecuting me and when a settlement her every way made me easy ; at the same time that he had some hopes tho' uncertain in a Course of Years of getting the same place » in Mills (1982), p. 423.

2. Une relation épistolaire comme signe de changement de statut.

Lors de cette polémique, comme celle avec Braikenridge (qui intervient après celle-ci), Maclaurin a une activité épistolaire relativement importante. Cette activité rend compte, dans une certaine mesure, de l'insertion de Maclaurin dans l'environnement social de la Grande-Bretagne pendant la période qui nous intéresse. Nous avions signalé que lors de sa période de jeunesse (jusqu'à son éviction d'Aberdeen), il bénéficiait dans ses relations de l'appui d'un personnage ayant un poids très important dans la vie intellectuelle de la Grande-Bretagne, Isaac Newton. C'est lui qui lui permet de publier son *Geometria Organica*, c'est encore grâce à lui qu'il devient Fellow de la *Royal Society* en 1719 à l'âge de 21 ans. Lors de l'élection de Maclaurin au poste de professeur de mathématiques à Édimbourg, Newton a joué un rôle non négligeable dont la portée est limitée.

Les relations avec la Royal Society, déjà existantes lors de la précédente période, sont fortes. Elle s'intensifie même depuis le début des années vingt (juste après son élection). Le nombre d'articles qui paraissent dans les *Philosophical Transactions* augmente durant cette période. Mais au-delà du nombre, ce qui est le plus important c'est le délai d'attente qui se réduit entre l'envoi du manuscrit par Maclaurin et la lecture effective en séance et ensuite la parution. Dans la polémique entre Campbell et Maclaurin, il est évident qu'il existe une différence de traitement entre les deux hommes de la part de la société savante londonienne. En effet, comme nous l'avons déjà signalé, George Campbell se plaint que son manuscrit tarde à être lu et publié[404]. En effet, il a envoyé son écrit à Machin en Septembre 1727 et il ne sera publié qu'au mois d'octobre 1728, soit presque avec un an de

[404] « Mr Campbell sent up his directly to Mr Machine, who at that time being very busy, delayed presenting it to the Society (…). Upon this delay Sr Alex: Cuming complained grievously to Mr Machine that Mr Campbell was ill used, this made Mr Machine present it to the Society, upon which it was ordered to be printed » in Mills (1982), p. 183.

délai. Il a donc fallu que Campbell réagisse et demande de l'appui de ses amis pour que son papier soit publié. Au contraire, Maclaurin n'a pas le même délai d'attente. Il voit son article publié avec une rapidité peu commune. En effet, il envoie à Martin Folkes alors vice-président de la Royal Society, le 19 avril 1729 une première partie et le 30 avril la seconde partie. Cet article sera inclus dans les *Philosophical Transactions* pour les mois de mars et avril 1729.

Maclaurin est en contact avec d'autres savants londoniens qui ont un poids non négligeable. Stirling, malgré son statut de professeur de mathématiques dans une académie pour la jeunesse noble de Londres[405], est élu pour ses compétences en mathématiques comme Fellow à la *Royal Society* le 3 novembre 1726. Lors de la publication de sa *Defence*, il envoie des exemplaires à certaines personnes qu'il considère comme influentes et importantes. Ces personnes sont Folkes, Machin, Lord Islay et Stirling. Il en a peut-être envoyé un au secrétaire de la Royal Society, Rutty.

Ceci montre que l'implication de Maclaurin dans la vie scientifique britannique est de plus en plus importante. De jeune savant plein d'avenir, il devient un savant reconnu en Grande-Bretagne mais aussi sur le continent. Son implication au sein de la ville d'Édimbourg n'est pas encore importante. Cette période est surtout une période d'enseignement, ce qui lui prend énormément de temps. Nous y reviendrons. Un autre exemple du changement de son statut est la demande de John Conduitt d'écrire un ouvrage sur les découvertes de Newton à la mort de celui-ci. Nous allons maintenant étudier cette production qui est l'une des plus connues de Maclaurin.

[405] C'est la *William Watt Academy*, situé à Little Tower Street de Londres.

C. *The Account of Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries* : un hommage posthume à Newton et un commentaire éclairé des Principia de Newton.

1. La raison de l'écriture de cet ouvrage.

Newton meurt le 20 mars 1727. Pour la communauté savante britannique, cette mort est une grande perte. Leur plus grand représentant disparaît. En effet, Newton avait un poids institutionnel très fort. Il était président de la Royal Society, avait ses entrées à la Cour[406]… De plus, la science britannique dépendait largement de ses recherches. Les mathématiques, la mécanique, l'astronomie par exemple découlaient en grande partie du travail et des idées de Newton. Tout cela lui donnait une position dominante de chef de file. Car Newton avait réussi à s'entourer de savants de niveaux et d'âges différents qui avaient comme objectif de développer la science newtonienne[407]. Newton a été mêlé à plusieurs débats, le plus connu est certainement la querelle de priorité avec Leibniz[408]. Mais, il ne faut pas oublier la défense de sa théorie gravitationnelle contre les défenseurs de celle de Descartes. Son influence est très bien décrite dans de nombreux livres, il nous est inutile de prolonger cette description.

Maclaurin est, lui aussi, très touché par la perte de son ami. En 1728, John Conduitt demande à Maclaurin d'écrire un ouvrage sur les principes de la philosophie naturelle de Newton. Cet homme est le mari de Catherine Barton, la fille de la demi-sœur de Newton, Hannah Smith. Ce livre doit être une présentation des principes newtoniens à des lecteurs

[406] Il existe une nombreuse littérature sur ce sujet. Nous signalons simplement, Westfall (1994), ou Panza (2003).
[407] Voir, entre-autres, Emerson (1986), Guicciardini (1989) et (1999), Schaffer (1983) et dans une certaine mesure, Hurlbutt (1965), pp. 3-92.
[408] Voir Meli (1993).

de niveaux divers et dont la formation en mathématiques n'est pas très élevée. Ce livre doit aussi servir à la propagation de la science newtonienne. On peut considérer que le choix de Maclaurin pour écrire un tel ouvrage est étonnant. Pourquoi John Conduitt a-t-il demandé à un homme relativement jeune (en 1728, Maclaurin a trente ans) d'être le promoteur de la science newtonienne ? En effet, de nombreux savants en sont capables. Par exemple, en 1728, Henri Pemberton sort un ouvrage de popularisation de la science newtonienne[409]. Ce dernier a aidé Newton dans la réédition[410] des *Principia*, à partir de 1723. Il aurait aussi pu choisir parmi les savants ayant participé à l'affrontement contre les leibniziens.

Mais c'est Maclaurin qui a été choisi. Comme nous l'avons déjà montré dans le chapitre précédent, celui-ci a une réputation de savant aux compétences manifestes. Cette réputation dépasse les frontières. De plus, depuis sa jeunesse, Maclaurin connaît très bien les progrès dus à Newton, comme en témoigne sa thèse. Il a su reprendre la problématique newtonienne, par exemple sur les forces vives, et l'exposer avec suffisamment de clarté et de profondeur pour pouvoir gagner un prix à l'Académie Royale des Sciences de Paris. C'est bien cet ensemble de facteurs qui a pu conditionner le choix du rédacteur de cette présentation.

Pourquoi Maclaurin a-t-il accepté de s'engager dans ce projet qui est, à cette époque, relativement loin de ses préoccupations ? Nous venons de voir qu'il se plaint d'être surchargé de travaux d'enseignement, qu'il doit répondre à diverses polémiques, celle avec Campbell puis celle avec Braikenridge. Il se plaint de ne pouvoir approfondir ses propres recherches en mathématiques, en algèbre, par manque de temps. Alors pourquoi satisfaire Conduitt dans la rédaction d'une sorte d'éloge de Newton ? Nous voyons deux raisons principales.

---

[409] Pemberton (1728).
[410] C'est la troisième édition de cet ouvrage

La première est d'ordre scientifique. Maclaurin a une dette scientifique envers Newton. Une grande partie de la production scientifique de Maclaurin prend sa source dans les écrits de Newton. Même s'il utilise d'autres ouvrages et que sa culture scientifique est grande, sa première référence est Newton, tant en algèbre qu'en géométrie. De plus, sa thèse est basée sur les *Principia*. Il lui est donc naturel d'écrire un ouvrage d'exposition des découvertes de Newton. La vision des sciences de Maclaurin, en particulier celle des mathématiques, conforte Maclaurin à glorifier l'illustre savant. Mais, cela n'explique pas tout. En effet, Maclaurin a déjà publié des ouvrages dont la teneur en elle-même sert à la gloire des principes newtoniens.

La seconde raison qui peut expliquer son projet est d'ordre personnel. Avec son poste d'enseignant associé à James Gregory, Maclaurin ne gagne pas beaucoup d'argent et doit en donner une part importante à son associé. Il cherche donc une source supplémentaire de ressources. Nous donnerons les détails de sa recherche dans l'interlude ci-après. Néanmoins, produire un ouvrage dédié au grand public et dont l'ambition est aussi de défendre dans une certaine mesure la science britannique (enfin celle défendue par Newton) peut être un avantage supplémentaire dans la recherche d'une pension supplémentaire. De plus, Conduitt fait référence au poste de « Savilian professor » occupé par Halley. Il annonce à Maclaurin que ce dernier est premier sur la liste des personnes susceptibles de remplacer l'astronome à sa mort (qu'il ne désire pas)[411]. Ainsi, Maclaurin se sent obligé de favoriser l'écriture de cet ouvrage en vue de ne pas décevoir un homme qui peut améliorer sa condition. Malheureusement pour lui, Halley tarde à décéder (il meurt en 1743) et la mort de Conduitt, en 1737, bloque ce possible avancement.

---

[411] « If any thing should happen to Dr Halley who is so very old, I have already mentioned you to several proper persons to succeed him in the Savilian Professorship, but as I hope that is still at some distance I shall be very glad in the mean time of any opportunity to convince you of my being Sincerely Sr Yr most humble Ser^{t}. » in Mills (1982), p. 47.

Maclaurin accepte donc. Il commence la rédaction en 1731. Le 13 mars, il annonce à Lord Hamilton de Dalzell qu'il commence à réfléchir au projet de Conduitt et que cela lui demande beaucoup d'attention[412]. Une première version est envoyée à Conduitt en 1732. Ce dernier apprécie ce que Maclaurin écrit. En effet, sa réaction est vive et enjouée. Il fait lire cette première version à plusieurs savants londoniens dont Martin Folkes pour qu'ils émettent un jugement sur la présentation des idées newtoniennes. Folkes se porte garant des écrits de Maclaurin. L'ensemble des lecteurs étant ravi de cette première version, Conduitt encourage Maclaurin à continuer son travail. Il écrit à Maclaurin pour lui dire le plaisir que lui procuré la lecture et l'impatience difficilement contenue[413]. Il lui propose aussi des suggestions de faits ou de matières à incorporer, ce dernier étant libre de s'en servir ou non. De plus, il l'exhorte à continuer à écrire avec le même style qui permet au lecteur, qui n'est pas spécialiste de ces matières, de pouvoir comprendre les intentions de l'auteur[414].

Avant d'étudier l'ouvrage un peu plus dans le détail, il nous apparaît important de comparer succinctement l'édition imprimée de la version manuscrite[415] à partir de laquelle l'ouvrage sera édité par Murdoch, en 1748. Dans la seconde partie de ses mémoires[416], Maclaurin signale (par l'intermédiaire d'un secrétaire, c'est pour cela que Maclaurin est décrit à la troisième personne) qu'en voyant la fin de sa vie approcher (en 1746), il s'est remis à travailler sur ce manuscrit et qu'il a fait des retouches non négligeables. Ces retouches sont donc celle d'un homme qui, selon ses propres termes, se rapproche de Dieu.

---

[412] « I [Maclaurin] began to think of Mr Conduit's desyre and was so immerged in these speculations that I could not leave them » in Mills (1982), p. 30.

[413] « I shewed the treatise you sent me to Mr. Folkes, who is delighted with it as every one must be who sees it – I have read it over & over again, with infinite pleasures & it has raised in me a great expectation & impatience for the continuation which I flatter my self you will think of at your leisure hours » in Mills (1982), p. 41.

[414] « continue the same florid style in order to take f as much as possible from the dryness of the subject & to make it more palpable to the vulger reader for whom it is intended. » in Mills (1982), p. 42.

[415] MS 205/6 à la bibliothèque de l'université d'Aberdeen.

[416] Maclaurin, The second paper of Memories of Mr. Maclaurin beginning at 1725, Université de Glasgow, MS. Gen.1378/2

La fin du premier livre dans les chapitres 4 et 5 et la fin du dernier livre aux chapitres 8 et 9 sont modifiées en profondeur. Il convient donc d'examiner ces parties avec précaution dans l'étude que nous ferons. Le dernier chapitre de l'ouvrage est écrit à la fin de la vie de Maclaurin, dans les derniers mois avant sa mort. Ce chapitre a pour titre, « Of the Supreme Author and Governor of the Universe, the True and Living God ». C'est la partie la plus métaphysique de l'ouvrage. C'est un homme alité, malade, incapable d'écrire, assisté d'un secrétaire qui produit ces dernières pages. Il sent la mort venir. C'est donc dans ces conditions si particulières qu'il écrit ce chapitre et qui lui donne ce ton éminemment religieux[417]. C'est pour cela, qu'il faut prendre quelques précautions dans l'interprétation que l'on peut faire de cette partie. De plus, il nous apparaît difficilement concevable que Maclaurin, dans les années 30, puisse écrire ce type de propos. C'est pourquoi nous ne prenons pas en compte ici cette partie. En revanche, dans l'interlude 3, nous reviendrons sur cette partie. Donc, pour résumer, l'écriture de *the Account* débute au début des années 30, une première partie est envoyée en 1732 à Conduitt. Maclaurin continue pendant quelques années l'écriture mais la publication devient accessoire à la mort du promoteur du projet. À partir du milieu des années 30, il arrête plus ou moins l'écriture pour la reprendre à la fin de sa vie, en 1746.

Nous ferons une dernière remarque sur l'écriture de cet ouvrage. Dans les livres deux et trois surtout, il est fait référence fréquemment au *Treatise of Fluxions*. Nous l'étudierons en profondeur dans un chapitre ultérieur. Néanmoins, signalons que le début d'écriture de cet ouvrage se situe vers 1735, la grande partie est finie en 1737 et que des ajouts ont été

[417] « his weakness could not fail to relaid him much in carrying on his Account of the illustrious Sir Isaac's Philosophy; instead of proving a total Hinderances of that last service to the publick ; it occasion'd easyer Efforts to get it compleated if possible. His Young friend who was his amanuensis (John Mcleod) tells that deliver the 15th of April & the time if his Death which was the 14th of June, he decided to him about 42 sheets of it. And that instead of delaying the intented Conclusion, about the substency of the knowledge of Nature to the Regards due to its Author ; he commenly bestew'd a share of his labour on it every week: according for it some of that saved Part of Time to which such Divine Contemplation is so sutable. » in Maclaurin, second papers of memoirs, p. 23.

effectués par Maclaurin jusqu'en 1740 environ. Il faut donc avoir en tête que le *Treatise of fluxions* et une partie de *the Account* sont produites de concert. Plus exactement, des retouches dans *the Account* interviennent lors de l'écriture et de la mise en forme du *Treatise of Fluxions*. *The Account* n'a pas cessé d'évoluer entre le début de l'écriture et la mort de Maclaurin (et même après). Il ne faut donc pas oublier que ce qui est écrit dans cet ouvrage n'est pas forcément du début des années 30, mais peut aussi être des années 1740. Lorsque nous considérerons des parties comme n'étant pas en phase avec ce que pensait Maclaurin durant la période des années 30, nous n'en parlerons pas.

L'édition posthume de cet ouvrage a été commandée pour aider la famille de Maclaurin à survivre. En effet, à la suite de la mort de Maclaurin, sa femme doit s'occuper de cinq enfants sans réelle ressource. Ainsi, Patrick Murdoch, avec l'aide d'anciens amis de Maclaurin propose d'éditer le manuscrit de Maclaurin. Pour cela une souscription est lancée. Cette dernière reçoit un succès très important, car il y a plus de 1200 souscripteurs parmi lesquels se trouvent des membres de l'aristocratie britannique dont la Princesse de Galles et le Prince d'Orange, des membres des différentes universités et des différentes sociétés savantes britanniques (en particulier celle de Londres). Dans un de ses articles[418], Peter Wallis a fait une étude très intéressante de quelques souscriptions dans lesquelles Maclaurin apparaissait et celle de *The Account*. Il montre que Maclaurin était très connu par les différentes strates de la population et il affirme que l'étude des souscriptions donne une idée précise de l'aura d'un personnage.

2. La structure des deux ouvrages : un essai de comparaison

Comme nous venons de le dire, l'ouvrage est conçu et a été commandé pour être un

[418] Wallis (1982)

éloge des principes et des découvertes de Newton ainsi qu'un commentaire des *Principia* de Newton. En comparant les structures des deux ouvrages, nous allons déjà pouvoir savoir si l'ouvrage de Maclaurin a été écrit véritablement comme le voulait le projet initial. Donnons rapidement la structure de l'ouvrage de Newton. Il commence par donner des définitions et des axiomes sur les lois du mouvement. Ensuite, dans son premier livre, il donne le mouvement des corps avec l'aide de la méthode des premières et dernières raisons et l'utilisation des propriétés géométriques des sections coniques. Dans le deuxième livre, il s'intéresse au mouvement des corps en prenant en compte la résistance du milieu. Dans le troisième et dernier livre, il propose un traitement mathématique du système du monde. Dans ce dernier livre, il donne sa méthodologie en philosophie naturelle et plus particulièrement en philosophie expérimentale. Les problèmes des marées et de la figure de la Terre sont abordés dans le troisième livre.

L'ouvrage de Maclaurin, quant à lui, se sépare en quatre livres qui ne suivent pas forcément la structure de celui de Newton. En effet, dans le premier livre, Maclaurin donne un historique des méthodes en philosophie naturelle jusqu'à celle de Newton. Dans cette partie, il critique aussi certaines méthodes, en particulier celles de Descartes, de Spinoza et de Leibniz. Dans le deuxième livre, Maclaurin expose les notions premières de la théorie du mouvement qu'il nomme mécanique rationnelle. Dans cette partie, se trouve la définition de l'espace, du temps, de la matière et du mouvement. Il donne les lois du mouvement ainsi que le problème du choc des corps. La troisième partie est dévolue à démontrer la gravité par l'analyse. La dernière partie est consacrée à l'exposition de problèmes résolus par la notion de gravité. En comparant la structure des deux ouvrages, il est évident que l'objectif de Maclaurin est différent de celui de Newton. Maclaurin met en perspective l'ouvrage de Newton, il considère celui-ci dans une histoire, et en opposition à certaines philosophies. Il met en avant la méthodologie de Newton, mais la théorie, à proprement parlé, n'intervient qu'après, comme exemple du bien fondé de la méthode newtonienne. Newton, en revanche, avance tout d'abord sa théorie (surtout celle du mouvement) qu'il applique ensuite à son système du monde. Maclaurin donne la théorie newtonienne en séparant la façon d'opérer, l'analyse puis la synthèse sont expliquées et appliquées à des phénomènes différents. Nous donnons ci-dessous, la table des matières de l'ouvrage de Maclaurin[419].

BOOK I.

Of the method of proceeding in natural philoſophy, and the various ſyſtems of philoſophers.

BOOK II.

Of the theory of motion, or rational mechanics.

BOOK III.

Gravity demonſtrated by analyſis.

BOOK IV.

The effects of the general power of gravity deduced ſynthetically.

3. Une histoire critique des courants philosophiques avant Newton.

Dans le premier livre, dès le premier chapitre, Maclaurin donne la définition de ce qu'est la philosophie naturelle chez Newton :

[419] Maclaurin (1749a).

« L’objet de la Philosophie Naturelle est de décrire les Phénomènes de la Nature, de découvrir leurs causes, en exposer les rapports et faire des recherches sur toute la constitution de l’Univers. » [420]

Mais il faut prendre garde à ne pas se contenter de cette étude des différents phénomènes de la nature et de l’explication de l’Univers. En effet, tout cela précède un projet plus vaste. La philosophie naturelle est le socle sur lequel peuvent s’appuyer les défenseurs de la religion naturelle. Ainsi, elle sert à améliorer la connaissance de Dieu qui est le Gouverneur de l’univers :

« Mais la Philosophie Naturelle a d’autres usages beaucoup plus importans ; car elle tire son principal mérite de ce qu’elle sert de fondement solide à la Religion naturelle & à la Philosophie morale, en nous conduisant d’une manière satisfaisante à la connoissance de l’Auteur & du Maître de l’Univers »[421].

Pour être sûr de l’interprétation et de la description des phénomènes, il faut absolument faire très attention à la méthode de découverte sinon, cela entraîne de faux schémas et de mauvaises interprétations qui peuvent conduire à l’athéisme :

« Dans la vûe de parvenir à ces grandes fins, nous ne devons pas nous précipiter dans nos recherches ; mais avancer pas à pas avec les plus grandes précautions. Les faux systêmes de Physique peuvent conduire à l’Athéisme, ou du moins faire naître des opinions sur la Divinité & sur l’Univers d’une

[420] Maclaurin (1749a), p. 1.
[421] Maclaurin (1749a), p. 2.

dangereuse conséquence pour le Genre humain ; et on ne les a vûs que trop souvent employés à soutenir de semblables erreurs. »[422]

Il est clair que chez Maclaurin le but de la recherche a une visée théologique. Le travail sur la nature n'est qu'une étape et n'est pas une fin en soi. Il doit servir à améliorer la connaissance de Dieu. Mais, pour arriver à cette connaissance, le passage obligé est la recherche avec l'aide des outils de la science.

La science, en particulier les mathématiques, doit être au service de la religion mais cette dernière ne doit pas interférer dans le processus de recherche en science. En d'autres termes, c'est en s'appuyant sur la science dégagée de toute métaphysique que la recherche de l'existence de Dieu peut se faire en toute certitude. Pour ce faire, il faut une entière liberté dans la recherche, qui doit néanmoins rester cohérente avec les observations et les expériences. Pour être sûr que les expériences et observations sont bonnes, il faut procéder avec beaucoup d'attention et éviter ainsi les erreurs. Un système très ingénieux peut être pensé et trouver un certain écho dans la communauté savante, mais ce système peut être anéanti très rapidement s'il n'est pas cohérent avec l'expérience :

> « Nous devons avoir une entière liberté dans nos recherches pour que la Philosophie Naturelle puisse devenir utile aux desseins les plus importans, & acquérir toute la certitude & la perfection dont elle est susceptible ; supposant, au lieu de rechercher, & en imaginant des systêmes au lieu de recourir à l'observation & à l'expérience pour découvrir la vraie constitution des choses. Les hommes spéculatifs par la force de leur génie, peuvent inventer des systêmes qui peut-être seront admirés pour un tems. Mais ces systêmes, quels, qu'ils soient ne sont que des phantômes que la force de la vérité dissipera tôt

[422] Maclaurin (1749a), pp. 2-3.

ou tard ; & tandis que nous nous divertissons de leur chûte, la vraie Philosophie avec tous les arts & tous les avantages qui en dépendent, en souffre. »[423]

En revanche, l'observation et l'expérience n'ont de valeur et acquièrent un statut véritable uniquement si elles sont subordonnées à la géométrie et plus généralement aux mathématiques. Les mathématiques, reines des sciences comme nous l'avons déjà signalé plus avant, sont les gardiennes de la bonne tenue de la recherche. En effet, si les observations et les expériences révèlent la meilleure façon d'appréhender le monde, cela est dû à l'aide des mathématiques. Le système newtonien ne sera plus le bon uniquement à partir du moment où le monde changera :

> « Les expériences et les observations, il est vrai, ne pouvoient seules l'élever jusqu'à découvrir les causes par leurs effets, & expliquer les effets par leurs causes : une Géométrie sublime lui [Newton] servit de guide dans cette recherche délicate & épineuse. (…) Mais sa Philosophie étant fondée sur l'expérience & la démonstration, ne peut tomber que la raison ou la nature des choses ne soient changées. »[424]

La méthode à utiliser associe l'analyse et la synthèse, qui sont les deux procédures assurant une certitude parfaite. Dans un premier temps, l'analyse procède du particulier vers le général. À partir d'observations et d'expériences, c'est-à-dire des cas particuliers, il convient de chercher les causes de ces effets ainsi observés. De ces causes, il faut alors rechercher des causes encore plus générales que Maclaurin appelle les principes. Dans un second temps, la synthèse s'effectue dans l'ordre inverse. Ainsi, à partir de ces principes généraux énoncés, la tâche du philosophe est d'expliquer et de démontrer tous les phénomènes qui sont alors considérés comme de simples conséquences des premiers

---

[423] Maclaurin (1749a), p. 5.
[424] Maclaurin (1749a), p. 7.

principes :

> « Afin de procéder en toute sûreté & mettre fin pour toujours aux disputes, il apprit à se servir dans l'étude de la Nature des méthodes d'analyse & de synthèse dans un ordre convenable : ensorte qu'ayant commencé par les phénomènes ou les effets, de-là on recherchoit les puissances ou les causes qui opèrent dans la Nature ; que des causes particulières, on remonteroit à d'autres plus générales, & celles-ci enfin jusqu'aux plus générales de toutes ; telle est la méthode d'analyse. Ayant une fois découvertes ces causes, on descend dans un ordre contraire & on les considère comme autant de principes établis au moyen desquels on explique tous les phénomènes qui n'en sont que les conséquences, & on fait voir la solidité de ces explications : c'est-là la méthode de synthèse. Il est évident que dans la Physique comme dans les Mathématiques, on doit procéder dans les choses difficiles par la méthode d'analyse avant que de faire usage de celles de composition ou d'analyse. »[425]

Cette méthode se valide elle-même, en effet, il n'est pas besoin de faire appel à des théories ou des champs de savoir extérieurs pour corroborer la cohérence issue de la méthode que Maclaurin nomme newtonienne.

Maclaurin déclare que les systèmes précédents n'avaient pas cette caractéristique propre et c'est en partie pour cette raison que ces systèmes ne sont pas valables. Il s'attache donc à donner les précédents systèmes en commençant par les systèmes grecs. Il donne, en les critiquant, ceux de Platon, de Pythagore et de ses successeurs, ainsi que celui d'Aristote qui a un statut particulier par rapport aux autres. D'abord, ce dernier a eu beaucoup plus de rayonnement à travers l'histoire.

---

[425] Maclaurin (1749a), pp. 7-8.

> « Aristote fut long-tems appellé le Prince des Philosophes, & il a été en possession de l'autorité la plus absolue dans les Écoles, non-seulement en Europe, mais même en Afrique, parmi les Mahométans, aussi-bien que les Chrétiens. »[426]

Et, ce système est le plus profond des divers systèmes grecs, « il surpassa tous les autres Philosophes en établissant les divisions et les définitions relatives à ses sujets avec une exactitude particulière »[427]. D'autres systèmes sont expliqués, celui de Philolaos, par exemple. Maclaurin fait la critique de tous ces systèmes. Deux critiques majeures se dégagent. La première revient à mettre en doute la méthode utilisée par les savants. L'utilisation de la géométrie, bien que nécessaire et obligatoire, ne doit pas se faire dans un premier temps, c'est-à-dire avant les expériences et les observations. Sinon cela induit en erreur toute la conception du monde. Par exemple, les platoniciens et les pythagoriciens ont une conception mystique des mathématiques et en particulier des nombres et des figures qui les amènent à penser l'univers en fonction de cette conception. En voulant expliquer le monde avec l'aide de leurs conceptions mystiques des mathématiques, ils sont allés dans une voie faussée et se sont éloignés de la réalité. Ce type de méthode est étranger à toute observation ou expérience :

> « Nous avons raison de penser que l'attachement que les Pythagoriciens & les Platoniciens avoient pour elles [les mathématiques] les séduisit quelquefois, en les induisant à tirer les mystères de la Nature de certaines analogies de figures & de nombres, qui non-seulement sont intelligibles pour nous, mais qui dans quelques cas ne paroissent susceptibles d'aucune juste explication. (…) Mais comme la Géométrie est une matière de pure spéculation, on ne peut concevoir

[426] Maclaurin (1749a), p. 37.
[427] Maclaurin (1749a), p. 35.

qu'il puisse y avoir quelqu'analogie entr'elles & la constitution de la Nature. Ceux qui en dernier lieu ont tâché de développer cette analogie n'y ont pas réussi. (…) Ce n'est pas là que le seul exemple, où des analogies & des harmonies prétendues nous ayent induit en erreur dans la Philosophie. La Géométrie ne peut y être que de peu d'usage jusqu'à ce qu'on ait rassemblé des vérités connue sur lesquelles on bâtisse. »[428]

La deuxième critique de Maclaurin est que non seulement ces théories ne sont pas issues d'observations ou d'expériences mais, en plus, qu'elles ne sont pas validées par différentes observations. Le système d'Aristote en est un bon exemple, ce système a été remis en cause à la fois par des observations et par une argumentation prenant appui sur d'autres observations :

> « L'Auteur [Aristote] prétend démontrer que la matière des Cieux est increéée incorruptible, & qu'elle n'est sujette à aucune altération ; & il avance que les Étoiles sont emportées autour de la Terre dans les Orbites solides. Il fut généralement suivi dans ces opinions, jusqu'à ce que Tycho par ses observations, & Galilée par ses raisonnements en firent voir leur fausseté. »[429]

Maclaurin modère quand même son propos. Il ne faut pas rejeter en bloc les découvertes des Anciens. Car, d'une part, elles sont issues d'un long labeur et d'autre part elles proviennent certaines fois d'une interprétation imparfaite de bonnes causes. Certaines de ces découvertes seront encore valables dans les systèmes donnés par certains savants du 17ème siècle dont Newton :

> « Pendant que les anciens, toutesfois, s'appliquoient à considérer les Cieux, ou à faire des collections d'Histoire naturelle, ils ne perdoient pas leur peine, leurs

[428] Maclaurin (1749a), pp. 34-5.
[429] Maclaurin (1749a), p. 36.

> observations leur faisoient quelquefois entrevoir les véritables causes qui ont lieu dans l'Univers : & nous avons d'admirer quelques idées de cette sorte, qui paroissent dans différents passages de leurs écrits, & qui semblent être des anticipations à quelques découvertes modernes des plus importantes. »[430]

Après avoir passé en revue l'Antiquité, il s'intéresse aux philosophes modernes avant Descartes. C'est grâce à différentes inventions que la connaissance du monde a pu se développer et qu'un vent de réformes a eu lieu :

> « Ces inventions avec plusieurs autres aussi surprenantes produisirent un grand changement dans les affaires du Monde ; & un esprit de réforme se fit bientôt remarquer dans tous ce qui avoit quelque connexion avec les Arts & les Sciences. »[431]

Les premiers à changer de vue et à l'exprimer sont Copernic et Tycho Brahé qui ont suivi les suppositions de Philolaos. Puis, deux excellents savants ont défendu le système copernicien : Kepler et Galilée. Kepler, considéré comme admirable par Maclaurin, a découvert la vraie figure des orbites et les vraies proportions des mouvements dans le système solaire. Néanmoins, c'est Newton qui a donné une valeur et une explication à ces phénomènes :

> « Nous devons à l'admirable Kepler la Découverte de la véritable figure des Orbites & les proportions des mouvemens du système Solaire, mais il étoit réservé à M. le Chevalier Newton de faire connoître l'avantage qui revient à la Philosophie de la découverte de ces Phénomènes. »[432]

---

430 Maclaurin (1749a), p. 39.
431 Maclaurin (1749a), p. 43.
432 Maclaurin (1749a), p. 47-8.

Il considère Galilée comme un philosophe naturel car les découvertes qu'il fît avec son télescope et l'utilisation du traitement mathématique à la théorie du mouvement assurent une fondation sûre à la philosophie naturelle.

> « Galilée fit des découvertes surprenantes dans les Cieux, par le Télescope, instrument inventé alors ; & en appliquant la Géométrie à la doctrine du mouvement, il commença à établir la Philosophie naturelle, sur des fondemens solides. »[433]

Mais, le savant du 17ème siècle qui a joué un rôle fondamental dans le développement de la philosophie naturelle est Francis Bacon, Lord Verulam. D'après Maclaurin, Bacon est le fondateur de la philosophie expérimentale et d'une nouvelle organisation du savoir en général et plus particulièrement des sciences.

> « Il considère la Physique, comme une vaste Pyramide, qui doit avoir pour base, l'Histoire Naturelle ; l'exposition des puissances & des principes, qui opèrent dans la Nature, ce qu'il appelle la partie physique pour le second étage ; pour le troisième, la partie métaphysique qui traite des causes formelles & finales des choses. Mais quant au sommet de cette pyramide, ce qui tient le premier rang dans la Nature, opus quod operator Deus a principio usque ad finem. »[434]

Ce nouvel ordonnancement des différentes parties du savoir semble convenir à Maclaurin et il est la source de grandes avancées en mathématiques et en philosophie :

> « Les exhortations cependant, & l'exemple du Chancelier Bacon eurent un bon effet, & la Philosophie expérimentale a été beaucoup plus cultivée depuis son

---

[433] Maclaurin (1749a), p. 55.
[434] Maclaurin (1749a), pp. 57-8.

tems, qu'elle n'avoit été auparavant. La Géométrie & la Philosophie, se perfectionnèrent ensemble, & se donnèrent un secours mutuel. »[435]

Les mathématiques gardant un rôle très particulier. Maclaurin considère que c'est Bacon qui le premier a entrevu et énoncé cette position prédominante des mathématiques et en particulier de la géométrie. Le rôle d'arbitre qu'a la géométrie est dû au caractère évident de cette science :

> « L'évidence de la Géométrie commença à avoir lieu en Philosophie, lorsqu'on examina tout par nombre, poids & mesure, & les principes de la théorie du mouvement, étant alors pleinement entendus, fournirent d'excellens éclaircissemens sur les parties abstraites de la Géométrie. »[436]

En revanche, certains savants qui sont contemporains de Newton ont émis des systèmes différents. Maclaurin prend l'exemple de Descartes, de Spinoza et de Leibniz.

Maclaurin donne les principes de la philosophie cartésienne, énonce les lois de la nature de Descartes. Il trouve extravagant cet ensemble de principes et de lois incapables d'expliquer les phénomènes de la nature :

> « Il n'y eut peut-être jamais une entreprise plus extravagante que celle de déduire par des conséquences nécessaires toute la structure de l'Univers & une entière explication des phénomènes de la Nature de quelques idées que nous sommes capables de former d'un Etre infiniment parfait. »[437]

De plus, Maclaurin émet des doutes quant à l'utilisation des observations par Descartes pour asseoir sa théorie. Ce dernier n'indique pas comment il les produit :

---

[435] Maclaurin (1749a), p. 61.
[436] Maclaurin (1749a), p. 61.
[437] Maclaurin (1749a), p. 69.

> « Descartes vit la nécessité d'avoir recours à l'Observation, quoique malgré lui, & il paroît que ce fut avec beaucoup de peine qu'il l'avoua, après avoir tant vanté ses Principes. Il nous dit qu'il les trouvoit si étendus & si fertiles, qu'on en déduisoit beaucoup plus de choses, qu'on n'en connoissoit dans le Monde visible. (…) C'est pourquoi il a recours aux phénomènes, non pas qu'il veuille rien prouver par une si mauvaise opinion de sa Philosophie, que de penser qu'il l'établisse sur des faits ; mais afin qu'il puisse déterminer son esprit à considérer quelques-uns de ces effets inombrables, qu'il jugeoit pouvoir être produits par les mêmes causes, plûtôt qu'à en examiner d'autres. »[438]

Il situe Spinoza comme un héritier de Descartes. Il se base sur les mêmes principes, en particulier sur le fait que la matière est une et indivisible et non pas infinie et nécessaire. Spinoza connaît très bien les idées et la méthode de Descartes, et que c'est à partir de certains principes cartésiens que Spinoza développe sa propre philosophie :

> « Descartes en mettant l'essence de la matière dans l'étendue, donna occasion à d'autres de tirer de cette doctrine de dangereuses conséquences, qu'il auroit indubitablement désavouées. (…) Spinoza raisonne conséquemment aux principes de Descartes, soutenant que la Matière est non-seulement infinie & nécessaire, mais encore qu'elle est une, & indivisible. (…) Il nous dit aussi que si une partie de la Matière étoit anéantie, toute l'étendue s'évanouiroit avec elle. Cet Auteur paroît avoir été très versé dans les écrits de Descartes (…) & il paroît que sa méthode & plusieurs de ses dogmes, étoient dérivés de cette source. »[439]

[438] Maclaurin (1749a), pp. 75.
[439] Maclaurin (1749a), p. 76-7.

Ce que Maclaurin refuse le plus dans la philosophie spinoziste est que la philosophie naturelle et la recherche de systèmes de représentation de la nature n'impliquent pas une étude de la religion naturelle qui, pour lui, est essentielle :

> « Il seroit inutile de faire une exposition plus particulière du système de Spinoza, & il n'est pas possible de rapporter entièrement d'une manière intelligible, une doctrine si absurde. Ceux même qui, dans d'autres occasions, ont paru fort approcher du Scepticisme, par rapport aux fondemens de la Religion naturelle, avouent que ce systême est le plus monstrueux qui puisse être imaginé, & le moins capable de séduire, parce qu'il combat les notions les plus distinctes, qui soient dans l'entendement de l'homme. »[440]

Mais, le système dont il faut particulièrement prendre garde est celui de Leibniz. Maclaurin considère que ce système est un mélange de principes cartésiens et de lois newtoniennes. Leibniz admet les mouvements célestes par un éther à l'instar de Descartes et y ajoute la notion de gravité de Newton. Mais il ne montre pas comment il peut concilier les deux ce qui est, toujours d'après Maclaurin, impossible :

> « Après que la Philosophie du Chevalier Newton fut donnée au Public (en 1687) M. Leibnitz fit imprimer un Essai sur les mouvemens célestes (*Act. Erudit.* 1689.) où il admet la circulation de l'Éther avec Descartes, & la Gravité avec le Chevalier Newton ; mais il n'a jamais expliqué comment ces deux choses devoient être combinées ensemble, pour produire les révolutions des Planètes, ou comment l'impulsion de cet Éther pouvoit causer la Gravité. »[441]

[440] Maclaurin (1749a), pp. 79-80.
[441] Maclaurin (1749a), p. 81.

Néanmoins, il reconnaît chez Leibniz une certaine légitimité et que son système est plus acceptable que les deux précédents (ceux de Descartes et Spinoza) car il prend en compte un Dieu qui est proche de ce que conçoit Maclaurin :

> « Le systême de Mr. Leibnitz a eu beaucoup de Prosélites, parce que de la sagesse & de la bonté de Dieu, il conclud que l'Univers est un Ouvrage parfait ou le meilleur qui puisse avoir été produit. Cette doctrine a toujours extrêmement plu à la plûpart des Philosophes, qui n'étoient pas assez aveugles pour douter de l'existence d'un souverain Être bienfaisant. »[442]

Cependant, certains points sont inacceptables. Outre sa critique des monades, Maclaurin s'attache à dénoncer l'usage du principe de continuité par Leibniz :

> « Nous avons un autre exemple de l'Art avec lequel ils soutiennent leurs systêmes dans la prétendue démonstration qu'ils donnent contre la possibilité des Atômes ou d'aucuns corps parfaitement durs & inflexibles. Suivant ce qu'ils appellent la Loi de *continuité*, tous les changemens dans la Nature sont produits par des degrés insensibles & infiniment petits : ensorte qu'un corps ne peut dans aucuns cas passer du mouvement au repos ou du repos au mouvement, sans passer par tous les degrés possibles de mouvement intermédiaires ; d'où ils concluent que les Atômes ou tous corps parfaitement durs sont impossibles : parce que si deux de ces corps se recontroient avec des mouvemens égaux en directions contraires, ils s'arrêteroient nécessairement tout-à-coup, & violeroient la loi de continuité. »[443]

L'autre principe avec lequel Maclaurin est fermement en désaccord est de considérer que la force est proportionnelle au carré de la vitesse. Cette critique est l'objet d'un chapitre

[442] Maclaurin (1749a), p. 82.
[443] Maclaurin (1748a), p. 90.

entier, le quatrième, dans le deuxième livre. Dans cette partie, Maclaurin s'attache à contrecarrer les arguments des défenseurs de Leibniz, en particulier ceux de Jean Bernoulli. La critique fait référence au *Traité des fluxions* qui paraît en 1742, soit largement après la période qui nous intéresse ici. Néanmoins, même si les références sont postérieures à 1742, le corps du texte reprend les arguments du prix de 1724.

Maclaurin, avec cette description des différents systèmes à la fois physiques et philosophiques, veut atteindre un double objectif. Le premier objectif concerne la légitimation du système. La filiation à travers l'histoire, Philolaos, Kepler, Copernic, Galilée, Bacon, permet à Maclaurin de donner une légitimité historique aux propos de Newton. Les découvertes de Newton sont « vraies » car elles sont issues de l'histoire. Elles le sont d'autant plus qu'elles ne sont que des évolutions (brillantes) des théories précédentes. Le fait d'écrire que c'est à partir des lectures des œuvres de Bacon ou de Galilée que Newton a eu l'idée de son système montre la filiation et la continuité dans laquelle le processus de légitimation se poursuit. À la différence, les systèmes de Descartes, de Spinoza et de Leibniz ne sont pas légitimes car ils ne s'inscrivent pas dans cette filiation historique. Ils rompent, d'après les propos de Maclaurin, avec ce qui a été écrit précédemment. De plus, ils ne reconnaissent pas la vision de la science de Bacon et du rôle primordial et essentiel des observations et des expériences.

En fait, en critiquant les manques des systèmes précédents, Maclaurin place Newton comme celui qui accomplit le système, qui le finalise. Mais, en même temps, il réunit plusieurs branches de la science en une seule car ces parties dépendent en réalité d'une même cause. En associant l'étude de la chute des corps dont le chef de file est Galilée et la doctrine de Kepler, Newton donne une nouvelle vision de la philosophie naturelle au sens large. Ainsi, il dépasse toutes les anciennes doctrines qui, soit n'expliquaient pas tout, soit avaient des lacunes méthodologiques ou mathématiques.

Ainsi, c'est la fin d'un certain type de recherche, celle des causes différentes aux divers phénomènes physiques. Le système de Newton est considéré par Maclaurin comme le point de départ pour la résolution de nombreux problèmes en mécanique et en astronomie, et plus généralement, liés à l'étude de la nature. De plus, en affrontant le système cartésien qui n'a pas eu un grand écho dans le monde savant britannique et qui, dans les années 1730, n'a plus d'autorité dans les sphères savantes en Europe, Maclaurin décrit Newton en rupture avec des idées « farfelues » du 17ème siècle et donc comme un gage de nouveauté et de modernité. Critiquer les considérations leibniziennes sur cette partie du savoir renforce la critique de tout ce qui utilise les indivisibles tant en philosophie qu'en mathématiques :

> « Le génie de cette sorte de Philosophie ne paroît nulle part aussi évidemment que par les artifices qu'on a mis en usage pour se tirer des objections insurmontables qui ont été faites contre les Tourbillons. Afin d'éloigner un peu plus la difficulté & envelopper la question dans l'obscurité, on a introduit de nouveaux Tourbillons dans chaque partie de Matière infiniment petite. Delà s'ils en ont besoin, ils descendront à un autre ordre infiniment plus petit & ainsi de suite. Car ils prétendent positivement tirer le même avantage en Philosophie des ordres infinis d'infiniment petits, que quelques Géomètres de ces derniers tems dans la résolution de leurs problêmes. Ainsi (comme nous l'avons remarqué ailleurs) une Philosophie absurde est la production naturelle d'une Géométrie défectueuse. »[444]

4. Un éloge de la méthodologie de Newton.

[444] Maclaurin (1749a), p. 89.

Maclaurin attache beaucoup d'importance à la façon de procéder dans la découverte et dans l'interprétation des phénomènes étudiés. Dans *The Account*, il est clair qu'il s'attache à donner avant tout une méthodologie de recherche. Dans la section précédente, nous avons déjà signalé que Maclaurin considérait Galilée, Bacon et Newton comme les savants qui permirent de faire avancer la connaissance de la nature. En prenant appui sur les *Principia* de Newton, Maclaurin montre comment il faut procéder dans une recherche rigoureuse.

Après le premier livre qui consiste en une introduction historique aux idées de Newton, Maclaurin s'efforce de donner les grands principes de la théorie du mouvement ou ce qu'il appelle la mécanique rationnelle. Ce que Newton avait fait dans le livre premier des *Principia*.

Il débute en donnant un principe méthodologique concernant la position du savant face à l'objet qu'il doit étudier. Comme nous sommes certains de notre propre existence et donc de nos propres idées par une conscience interne, nous pouvons par cette même conscience savoir qu'il existe des objets, des causes qui sont extérieurs à nous et qui agissent sur nous. De plus, il faut séparer ces objets en deux classes. La première classe regroupe ceux qui peuvent se mouvoir par eux-mêmes et sont susceptibles d'affections propres, la seconde classe rassemble ceux qui, de nature passive, n'ont pas ces attributs :

> « Comme nous sommes certains de notre propre existence & de celle de nos idées, par un sens intime ; de même nous sommes intérieurement convaincus qu'il y a des objets, des puissances, ou des causes hors de nous, & qui agissent sur nous. Car dans plusieurs de nos idées, particulièrement celles qui sont accompagnées de douleurs, l'Âme est passive & reçoit les impressions (qui sont involontaires) des causes externes qui ne dépendent pas de nous. Nous distinguons aisément ces objets en deux classes générales. La première est de

> ceux que nous apercevons avoir une spontanéité, ou une puissance de se mouvoir d'eux-mêmes & différentes autres propriétés & affections semblables à celles de notre Âme, telles que de raisonner, de juger, de vouloir, d'aimer, de haïr, &c. La seconde classe générale, est de ceux qui n'ont point de pareilles affections, mais qui sont tellement d'une nature passive, qu'ils ne se meuvent jamais d'eux-mêmes, & lorsqu'ils sont en mouvement, ne s'arrêtent pas sans quelque cause externe. »[445]

Il met en garde contre la diversité des impressions que nous pouvons ressentir à partir d'un même objet. Ce qu'il faut faire c'est mettre sous la même idée un ensemble d'impressions qui se ressemblent suffisamment. Il faut savoir qu'il y a un décalage entre ce que nous ressentons et l'idée qui ressort de notre esprit. C'est par un ensemble de réflexions, d'examens et d'arrangements des idées, de raisonnements, mais aussi de sensations externes que l'esprit humain acquiert les idées de cause et d'effet :

> « L'Âme est intimement persuadée de sa propre activité en réfléchissant sur ses idées, en les examinant & en les arrangeant, en formant celles qui sont complexes des plus simples, & enfin lorsqu'elle raisonne en conséquence, choisit & se détermine. Par-là, aussi-bien que par l'influence des objets externes sur elle, & par la connoissance du cours de la Nature, l'Âme acquiert aisément les idées de cause & d'effet. »[446]

Ce sont sur les relations entre les causes et les effets et sur des idées bien précises que s'appuie Maclaurin pour établir la philosophie naturelle. Ces idées essentielles sont l'espace, le corps, le temps et le mouvement. L'espace est une étendue sans limites, fixe, uniforme et semblable en toute partie et vide de toute résistance : « L'espace est d'une

[445] Maclaurin (1749a), pp. 101-2.
[446] Maclaurin (1749a), p. 103.

étendue sans bornes, immobile, uniforme, similaire en toutes ses parties, & libre de toute résistance. »[447]. En revanche, un corps est étendu dans l'espace, mobile, limité par une figure, solide, impénétrable, dépendant de son inertie. Il est divisible en parties sans fin et il est capable de changer de situation :

> « Le corps est étendu dans l'Espace, mobile, terminé par une figure, solide & impénétrable, résistant par son inertie, divisible en parties de plus petites ne plus petites jusqu'à l'infini, en sorte qu'elles peuvent être séparées les unes des autres, & avoir leurs situations & leurs distances changées de toute manière. »[448]

Nous pouvons concevoir et mesurer le temps et la durée grâce aux successions de nos propres idées et des variations successives des objets extérieurs à nous. Ce temps coule uniformément dans le même cours. Il permet de mesurer avec exactitude tous les changements (des idées, des objets) :

> « La succession de nos propres idées, & les variations successives des objets externes suivant le cours de la Nature, nous font aisément naître les idées de la durée, du tems et de leurs mesures. Nous concevons que le tems vrai & absolu s'écoule uniformément, suivant un cours immuable, en sorte qu'il sert seul à mesurer avec exactitude les changemens de toutes les autres choses. »[449]

Le mouvement est le changement de lieu d'un corps. Il y a deux types de mouvements, le mouvement absolu d'un corps dans l'espace absolu et le mouvement relatif d'un corps par rapport aux objets qui l'entourent :

---

447 Maclaurin (1749a), p. 105.
448 Maclaurin (1749a), p. 105.
449 Maclaurin (1749a), p. 105.

> « Le Mouvement est un changement de lieu, c'est-à-dire, de la partie d'espace que le corps occupe, ou dans laquelle il est étendu. Le mouvement est *réel* ou *absolu*, lorsque le corps change de place dans l'esapce absolu. On l'appelle *relatif*, lorsque le corps ne change de place que respectivement aux corps environnants. »[450].

Maclaurin reprend les trois lois du mouvement que Newton énonce dans les *Principia*. La première est le principe d'inertie. Tout corps persévère dans son état ou continue de se mouvoir uniformément en ligne droite jusqu'à ce qu'une influence externe au corps agisse :

> « La première loi du mouvement est, qu'un corps persévère toujours dans son état de repos, ou de mouvement uniforme, en droite ligne, jusqu'à ce que quelque cause externe vienne à le changer. » [451]

La deuxième loi générale du mouvement est que le changement de mouvement est proportionnel à la force imprimée et est produit en ligne droite dans la direction dans laquelle la force agit :

> « La seconde Loi générale du Mouvement, est que le changement de mouvement est proportionnel à la force imprimée, & qu'il est produit dans la ligne droite, suivant laquelle la force agit. »[452]

La dernière loi est que l'action et la réaction sont opposées en direction et ont la même valeur :

[450] Maclaurin (1749a), p. 106.
[451] Maclaurin (1749a), p. 118.
[452] Maclaurin (1749a), p. 121.

« La troisième Loi générale du Mouvement, est que l'action & la réaction, sont égales dans des directions opposées, & doivent être toujours estimées dans la même ligne droite. »[453]

De cela, il déduit le premier corollaire des *Principia*, la loi du parallélogramme, lorsque deux forces agissent sur un corps en même temps, alors ce corps subit une force dans la direction de la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés sont celles des forces initiales :

« Le premier Corollaire que tire M. Newton des Loix du Mouvement est, que lorsque deux forces agissent en même tems sur un Corps elles lui font parcourir la diagonale, par le mouvement qui résulte de leur position, dans le même tems qu'il parcourroit les côtés du Parallélogramme, si ces forces agissoient séparément. »[454]

Cela lui permet, entre-autres, d'entrer à nouveau dans le débat sur l'étude des chocs des corps. Pour le débat sur la loi des chocs et des forces vives, Maclaurin prend appui sur son écrit pour le prix de 1724 et sur ce qui sera l'essence de ce qui est publié dans le livre de Desaguliers[455]. Il énonce aussi tout cela car il est convaincu que c'est grâce aux recherches à la fois en mécanique pratique et en mécanique rationnelle que la philosophie naturelle peut s'approfondir :

« La connoissance de la Méchanique est une de ces choses qui contribuent le plus à distinguer les Nations civilisées des Barbares (…) sans son secours nous

[453] Maclaurin (1749a), p. 128.
[454] Maclaurin (1749a), p. 121.
[455] Voir partie sur le prix de 1724.

ne pourrions faire que très-peu de progrès dans la connoissance des ouvrages de la Nature. »[456]

Cette séparation entre mécanique pratique et rationnelle est, d'après Maclaurin, instaurée par Newton lui-même. La première est celle qui étudie les puissances mécaniques issues du levier, de poulies, … La seconde est l'étude de la théorie du mouvement tout entière. Elle montre comment, à partir de forces données, les mouvements sont produits et elle donne les trajectoires de ces mouvements et inversement :

« M. le Chevalier Newton la distingue en Méchanique *pratique* & Méchanique *rationnelle* ; la première traite des puissances méchaniques à sçavoir du *Levier*, de l'*Axe* & de la *Roue* (…). Les Méchaniques rationnelles renferment toute la théorie du Mouvement ; & enseignent lorsque les Puissances ou les Forces sont données, comment on doit déterminer les Mouvemens qu'elles produisent, & réciproquement lorsque les Phénomènes des Mouvemens sont donnés, comment on doit rechercher les Puissances ou les Forces dont ils sont les effets. »[457]

Dans la philosophie naturelle, en plus de décrire les phénomènes de la nature, la mécanique rationnelle peut être appliquée à ces phénomènes. C'est en étudiant comment opèrent les phénomènes dans la nature que nous procédons par analyse, la première phase de recherche, et c'est en déduisant les phénomènes à partir des causes qui les produisent que nous procédons par la synthèse :

« Ainsi, il paroît que toute la Philosophie naturelle après la description des Phénomènes de la Nature n'est presque qu'une juste application des Méchaniques rationnelles à ces Phénomènes ; en remontant de ces derniers aux

[456] Maclaurin (1749a), p. 156.
[457] Maclaurin (1749a), p. 156.

Puissances qui opèrent dans la Nature, nous procédons par analyse ; & en déduisant les Phénomènes des Puissances ou des causes qui les produisent, nous employons la Méthode de Synthèse. »[458]

Le concept de gravitation universelle est pour Maclaurin un parfait exemple pour montrer le bien-fondé de la méthode newtonienne telle qu'il la conçoit. Il sépare de façon stricte l'analyse de la synthèse. Chaque étape de la méthode fait l'œuvre d'un livre.

Dans le livre consacré à l'analyse, il donne les différentes étapes pour montrer la pertinence de la gravitation universelle. Pour cela, il faut partir des expériences et des observations. A partir de cela, avec l'aide de la géométrie et de la mécanique, avec beaucoup de précautions, nous pouvons arriver à la fondation de la philosophie de la nature et ainsi donner sens à cette superstructure :

> « Les expériences & les Observations suffisent seules pour nous rendre capables de faire de vastes collections d'Histoire naturelle ou de décrire les Phénomènes de la Nature. Les Principes de Géométrie & de Méchanique nous mettent en état de porter l'Analyse depuis les Phénomènes jusques aux Puissances & aux causes qui les produisent : en procédant ainsi avec précaution, nous sommes certains de la solidité des fondemens, & que l'édifice qu'ils soutiennent ne court aucun risque d'être renversé. »[459]

L'observation utilise dans un premier temps les sens. L'observation peut donc être opérée par un philosophe ou par un homme n'ayant pas de connaissance scientifique. Mais là où l'homme sans science ne peut interpréter ou peut donner de mauvaises interprétations, le philosophe, avec l'aide de la connaissance de la géométrie et de la mécanique, peut

---

[458] Maclaurin (1749a), pp. 156-7.
[459] Maclaurin (1749a), p. 231-2.

dégager de la première observation, liée uniquement au sens, une interprétation fidèle de ce qu'il veut :

> « Les premières connoissances que les Philosophes eurent de la Nature n'étoient pas plus parfaites que celles du vulgaire, ils les tenoient tous immédiatement des sens. Mais en comparant ces connoissances entre-elles en examinant la Nature des Sens eux-mêmes, en les aidant, ou même en découvrant les erreurs où ils pouvoient nous induire, & faisant une juste application des Principes Géométriques & Méchaniques, le Système de la Nature devint bientôt fort différent pour un Philosophe de ce qu'il est aux yeux du vulgaire. »[460]

Dans un premier temps, Maclaurin, à l'instar de Newton, considère que la chute des graves sur Terre et le mouvement apparent de la Lune autour de la Terre proviennent d'un même phénomène. L'expérience qu'il utilise pour le montrer est la même que celle qu'il a donnée dans sa thèse et elle est issue de la proposition 4 du livre 3 des *Principia*[461]. Nous ne la reprenons pas ici. Ainsi, un corps quelconque projeté de la Terre à la distance de la Lune à la Terre avec la même vitesse que la Lune sur son orbite aurait la même trajectoire que la Lune. De plus, la Lune est un projectile et le mouvement de tout projectile nous donne une image du mouvement d'un satellite ou de la Lune. Les phénomènes étant les mêmes, alors ils proviennent d'une même cause : la gravitation. Maclaurin écrit :

> « M. le Chevalier Newton a démontré que la Puissance de la Gravité s'étend à la Lune, que cette Planète est pesante, comme une expérience constante nous apprend que le sont tous les Corps appartenans à la Terre & que la Lune est retenue par son Orbite, par la même cause qui fait décrire une Courbe dans

[460] Maclaurin (1749a), p. 232.
[461] Maclaurin (1713), p. 5 et Newton (1687), pp. 406-7.

l'Air à une pierre, à un boulet, ou à tout autre Projectile. Si la Lune, ou quelqu'une de ses parties, étoit transportée à la Terre, & jettée dans la même ligne & avec la même vitesse, qu'un Corps terrestre, elle se mouvroit dans la même Courbe ; & si quelque Corps étoit porté de notre Terre à la distance de la Lune, & jetté dans la même direction & avec la même vitesse que la Lune se meut, il parcourroit la même Orbite que la Lune, & avec la même vitesse. Ainsi, la Lune est un Projectile, & le mouvement de tout Projectile est une image du mouvement d'un satellite ou de la Lune. Ces Phénomènes sont si semblables en tout, qu'il est évident qu'ils doivent procéder de la même cause. »[462]

Dans un deuxième temps, Newton a étendu ce qu'il a découvert en l'appliquant au système solaire. Il s'est rendu compte que les mouvements des planètes autour du Soleil pouvaient s'expliquer par la même cause :

> « La Gravité de la Lune le conduisit à la Gravitation universelle de la Matière, & une explication si heureuse de son Mouvement lui fit déduire du même Principe celle de tous les Mouvements Curvilignes du Système Solaire. »[463]

Ce qui rend le concept de la gravitation vraiment universelle. De plus, la gravitation est une force qui agit à l'extérieur des corps, mais aussi, à l'intérieur des corps :

> « Ayant trouvé, par tant d'expériences & d'observations, que la Gravité affecte toute la Matière des Corps également, nous avons toujours plus de raison d'en inférer son universalité ; puisqu'elle paroît être une Puissance qui n'agit pas seulement sur la surface des Corps, mais qui pénètre intimement leur substance, même jusqu'à leurs centres, puisqu'elle affecte leurs parties internes

---

[462] Maclaurin (1749a), p. 268.
[463] Maclaurin (1749a), p. 269.

> avec la même Force que les externes, & que son action ne peut être altérée par aucun Corps interposé, ou par aucun obstacle ; enfin puisqu'elle n'admet aucune sorte de variation dans la même Matière, que celle qui résulte de se différentes distances au Corps vers lequel elle gravite. »[464]

Cela sera important pour étudier la figure de la Terre.

Le quatrième et dernier livre est consacré à la synthèse. A partir du concept de gravitation universelle, Maclaurin montre et explique divers phénomènes qui semblaient, avant les travaux de Newton, ne pas provenir d'une même cause. Les exemples sont nombreux :

> « Tout Principe général démontré dans la Nature est une grande acquisition en Philosophie, particulièrement lorsque les variations de cette Puissance, avec sa direction & sa force, sont clairement déterminées ; la fertilité de ce Principe se manifeste par les solutions qu'on en déduit de tant de Phénomènes différens, comme nous allons le faire voir. »[465]

Grâce à Newton, de nombreux problèmes peuvent être expliqués et résolus. Dans cette partie, Maclaurin donne bon nombre de résultats qui prennent naissance dans les travaux de Newton et qui ont été développés par ses successeurs. Même s'il ne fait pas beaucoup référence à ses travaux dans cette partie, Maclaurin rend compte des découvertes dont il est l'auteur. Les problèmes énoncés sont le problème des trois corps, l'évolution du mouvement des planètes, l'étude du mouvement de la Lune, la figure de la Terre et la précession des équinoxes, le flux et le reflux des marées, enfin le cas des comètes. Le problème des trois corps tient compte du fait que, par exemple, la Lune ne subit pas simplement l'attraction de la Terre mais aussi celle du Soleil (et des autres planètes). C'est pourquoi, elle n'a pas une trajectoire qui ne prendrait en compte uniquement que la Terre.

---

[464] Maclaurin (1749a), p. 292.
[465] Maclaurin (1749a), p. 314.

Pour le cas des marées, ce sont les étendues maritimes qui sont sur la Terre qui subissent l'effet de l'attraction de la Lune. La Terre est déformée en raison de sa rotation autour de son axe qui modifie la gravité à la surface de la Terre. Elle a donc une forme de sphéroïde aplatie aux pôles.

Une partie des problèmes abordés dans ce livre fait aussi l'objet d'études (avec une orientation plus mathématique) dans d'autres ouvrages ou articles de Maclaurin. Ainsi, nous retrouvons la figure de la Terre et le cas des marées dans son prix de l'Académie Royale des sciences de Paris de 1740, et dans le Traité des Fluxions. Dans *The Account*, Maclaurin adopte un regard plus méthodique sur ces problèmes. Il décrit plus la ou les méthodes utilisées par Newton et ses successeurs. Il donne plus de détails sur les observations et il n'aborde pas les démonstrations lorsqu'elles sont difficiles. C'est donc avant tout une mise en avant de la méthodologie de recherche qui prime dans cette œuvre.

D. Les conditions de vie de Maclaurin et son mariage avec Anne Stewart.

Au début de l'année 1733, dans une lettre adressée à Sir Robert Menzies, Maclaurin décrit son désarroi d'être célibataire[466]. Son regret de ne pas être encore marié ne dure pas très longtemps. En effet, quelques mois après Maclaurin demande en mariage la jeune Anne Stewart, qu'il épouse le 8 juillet 1733 à Édimbourg[467]. Le contrat de mariage liant les deux parties a été signé le 18 juillet. Anne Stewart est l'unique fille de Walter Stewart qui a été solliciteur du roi George 1er. Walter Stewart est décédé avant le mariage, c'est donc Barbara Scott, la mère d'Anne, qui représente sa fille. Il semble que ce contrat n'ait été déposé dans les registres qu'à la mort de Maclaurin[468]. Maclaurin se marie relativement tard, à l'âge de 35 ans. Il nous a été impossible de trouver la date de naissance ou de baptême d'Anne Stewart. Néanmoins, nous savons que ses parents, Walter Stewart et Barbara Scott, se sont mariés dans la paroisse St Cuthbert à Édimbourg le 7 septembre 1709[469]. Nous pouvons en déduire que vraisemblablement la naissance d'Anne intervient après cette date. Ce qui signifie que les mariés ont plus de 10 ans d'écart.

Le contrat de mariage nous indique quelques données sur les conditions de vie de Maclaurin à cette époque. En effet, lors du mariage, Maclaurin s'engage à fournir trente milles merks et dans le même temps, sa femme Anne s'engage à apporter dix milles

[466] « All the Company which were together at the Coronation are all married except myself. I knou not hou I have been so singular in this Case. » in Mills (1982), p. 54.
[467] GROS, Old Parish Register, 685/01/0047
[468] Erick Sageng fait cette supposition, car on retrouve le contrat de mariage dans le volume 160 qui couvre du 1er juillet au 31 décembre 1746. Voir Sageng (1989), p. 46.
[469] General Register Office of Scotland, Old Parish register : Banns & Marriages, GROS: 685/02/0015.

merks[470] au ménage et ainsi pourvoir à la vie de chacun en cas de décès de Maclaurin[471]. Parmi les témoins qui ont signé ce contrat de mariage, il y a le principal d

e l'université de Glasgow, Niel Campbell, William Robertson, écrivain à Édimbourg. Maclaurin, en 1733, a en sa possession une somme non négligeable alors que quelques années auparavant, il se plaignait de son manque d'argent.

Regardons rapidement ses ressources financières. Dans une lettre à Martin Folkes, il se plaint que depuis son arrivée à Édimbourg, il est obligé de donner beaucoup de cours, environ six par jour. Il n'est même plus capable de lire ou de faire ses propres recherches. Cette situation le peine beaucoup[472]. Dans l'ensemble de ses cours, il reçoit environ une centaine d'étudiants. Dans le *Scots Magazine* d'avril 1741, un article sur les cours donnés par les professeurs à l'université d'Édimbourg indique que l'enseignement de mathématiques de Maclaurin se faisait en trois années. La première année est consacrée à l'étude des six premiers livres des *Éléments* d'Euclide, de l'arithmétique, de la trigonométrie plane, de l'utilisation des tables de logarithmes et de trigonométrie, de la fortification, des premiers principes de l'algèbre ainsi que des cours de géographie. La deuxième année, les étudiants approfondissent l'algèbre, ils étudient les sections coniques, la géométrie dans l'espace, la trigonométrie sphérique, la navigation, la trajectoire des tirs, l'optique, et l'astronomie. La troisième année, enfin, les étudiants se consacrent encore à l'astronomie et à l'optique, auxquelles il faut ajouter les *Principia* de Newton, la méthode

[470] À la suite de *The Act of Union*, en 1707, la monnaie écossaise devient uniforme avec la monnaie anglaise. Le merk équivaut à 56 shillings écossais. La livre écossaise vaut 20 shillings écossais. Ce qui fait que la livre écossaise vaut un merk six shillings écossais. Si on veut comparer avec la livre stirling. Une livre sterling vaut treize livres écossaises. Ainsi, 40000 merks valent environ 2153 livres sterling. Nous rappelons que Maclaurin reçoit du conseil municipal d'Édimbourg 50 livres sterling annuelle.

[471] « the sum of Thirty thousand merks Scots money and to Lay out the same with the sum of Ten thousand merks money foresaid assigned by the s[d] M[rs] Ann Stewart to him in manner underwritten making in whole the Sum of Fowrty (sic) thousand merks mony (sic) fores[d] upon Land or for a rent upon god security at the sight and by the advice of the s[d] Mrs Ann Stewart her friends afternamed »

[472] « I have been drudging here six years in an intolerable way. My whole time almost has been employed in teaching the Elements of a Science when I would have with much greater pleasure cultivated any Genius I may have for the sublimer part of it. (…) When I taught Six hours in a day I am so fatigued that I can read nothing if it is not of a much easier Nature. » in Mills (1982), p. 32.

des fluxions (inverse et directe). De plus, pour tous les étudiants ainsi que pour des personnes extérieures à l'université, Maclaurin propose un cours de philosophie expérimentale avec l'utilisation de télescopes[473]. Ainsi, l'enseignement de Maclaurin couvre l'ensemble des mathématiques pures et des mathématiques mixtes. Ce qui était convenu dans son contrat avec les instances édimbourgeoises lorsqu'il est arrivé à Édimbourg à savoir enseigner toutes les parties du champ des mathématiques s'est donc réalisé. Nous reviendrons sur son enseignement sur les fluxions ultérieurement. Dans les archives de l'université d'Édimbourg se trouve un manuscrit dans lequel sont regroupées des notes d'un cours d'expériences donné par Maclaurin[474]. De ces notes manuscrites prises par un étudiant qui n'a pas véritablement compris ce que Maclaurin disait[475], il convient de remarquer que, pendant ces fameux cours d'expériences, Maclaurin donne des expériences de mécanique, de pneumatique, d'optique, de mécanique rationnelle et de cordes vibrantes. De plus, dans ce manuscrit, il donne la résolution de problèmes de géométrie, en particulier de planimétrie et de stéréographie.

Maclaurin doit faire beaucoup d'heures d'enseignement parce que c'est ce qui a été convenu avec le conseil municipal. Mais comme nous l'avons déjà signalé, plus il fait

---

[473] « *Mr. Colin Maclaurin, F.R.S. Professor of mathematics* (…) gives every year three different colleges ; and sometimes a fourth upon such of the abstruse parts of the science as are not explained on the former three. In the First, he begins with demonstrating the ground of Vulgar and Decimal Arithmetic: then proceeds to *Euclid* ; and after explaining the first six books, with the plane Trigonometry and use of tables of Logarithms, Sines, &c. he insists on Surveying, Fortification, and other practical parts; and concludes this college with the elements of Algebra. He gives Geographical lectures once in the fortnight to this class of students. In the second college, he repeats the Algebra again from its principles, and advances farther in it; then proceeds to the theory and mensuration of Solids, the Spherical Trigonometry, the doctrine of the Sphere, Dialling, and other practical parts. After this, he gives the doctrines of conic Sections, with the theory of Gunnery; and concludes this college with the elements of Astronomy and Optics. He begins the third college with Perspective; then treats more fully of the Astronomy and Optics. Afterwards he prelects on Sir Isaac Newton's *Principia*, and explains the direct and inverse method of Fluxions. – At a separate hour, he begins a college of Experimental Philosophy, about the middle of December, which continues thrice every week till the beginning of April; and at proper hours of the night describes the constellations, and shews the planets by telescopes of various kind. » in A short account of the University of Edinburgh, the present Professors in it, and the several parts of Learning taught by them, *The Scots Magazine* 3 (1741), 371-374.

[474] *A collection from Mr Mclaurens course of Experiments*, Bibliothèque de l'Université d'Édimbourg, DC.7.73.

[475] En effet, à quelques endroits, des incohérences et de mauvaises interprétations indignes de Maclaurin nous font penser que c'est un étudiant distrait qui a pris ces notes.

d'heures d'enseignement, plus il gagne de l'argent. Alors, pourquoi se plaint-il de son manque de ressources ? La raison est simple : il doit reverser une (grande) partie des montants qu'il perçoit par ses étudiants à James Gregory. En effet, Maclaurin déclare à un de ses amis qu'il doit donner à Gregory entre 260 et 270 livres sterling pour que ce dernier « accepte » de lui laisser faire les cours. En réalité, Gregory lui vend sa place. Cette somme très importante[476] à rassembler explique en partie pourquoi Maclaurin se désespère de faire autant de cours. Il ne profite même pas de ses propres gains. Cela l'empêche aussi de prendre un assistant qui pourrait le décharger d'une partie des cours et ainsi lui permettre de se consacrer de façon plus attentive à ses recherches[477]. Six ans après son installation à Édimbourg, Maclaurin n'a toujours pas remboursé la somme qu'il doit à Gregory. Nous ne savons pas quand il finit de payer cette dette.

Considérant qu'il en avait assez de manquer d'argent, Maclaurin s'active pour chercher une charge supplémentaire qui lui permettrait d'être financièrement plus libre. Pour cela, il fait appel à ses protecteurs. Le premier fut Newton, nous avons déjà vu le rôle qu'il a eu lors de l'élection de Maclaurin à la Royal Society et à Édimbourg. Mais au début des années 1730, Newton étant mort, Maclaurin doit faire appel à d'autres personnages importants. John Conduitt a occupé ce rôle au moment de la commande du *The Acccount*, en proposant à Maclaurin le poste de Halley au moment de la mort de celui-ci. Martin Folkes, alors vice-président de la Royal Society, a beaucoup plus de pouvoir. C'est à lui que Maclaurin demande conseil, assistance et surtout appui dans sa recherche d'une pension lucrative[478]. En effet, en 1731, Maclaurin a vent d'un poste à l'Échiquier. Ce poste

---

[476] Maclaurin est payé 50 livres sterling par an pour sa charge d'enseignant. Ainsi, Maclaurin « doit » à Gregory plus de 5 ans plein de son service.
[477] « The Salary that was settled on me at my admission was 50 lib. St. yearly, but I was obliged to pay Mr Gregory a considerable sum for consenting my Settlement which I was obliged to take of my own funds, and indeed it cost me several Years to make it up for he got from me in all betwixt 260 and 270 lib. St. Thus it is not easy for me to be at the expence of an Assistant at present. » in Mills (1982), p. 33.
[478] « I take the liberty to ask your Advice and Assistance in an Affair of great Consequence to me. » in Mills (1982), p. 31.

serait le *Clerk of the Pipe*, charge à vie, dont le salaire annuel serait de 200 livres sterling auquel il faut ajouter 20 à 25 livres pour la députation[479]. Il n'y a pas que Folkes qui a été contacté par Maclaurin au sujet de ce poste. En effet, Maclaurin se confie aussi à plusieurs hommes d'influence de l'époque. Par exemple, William Kerr, le troisième marquis de Lothian, promet à Maclaurin d'être un acteur favorable à son établissement si cela lui est possible[480]. William Kerr demande aussi à Maclaurin, pour que son appui soit le plus efficace possible, une liste de personnages faisant partie de ses proches qui ont un poids politique et scientifique et qui peuvent se porter garant. Cette liste pourrait servir à asseoir encore plus la candidature de Maclaurin. Ce dernier propose comme candidat à cette liste Sir Robert Menzies, un cousin du 2nd Duc d'Argyll, et le frère de lord Ilay. Maclaurin, entre 1729 et 1732[481] environ, est aussi le tuteur de Robert Kerr[482], le second fils du marquis de Lothian. Ceci explique en partie la « protection » du marquis envers Maclaurin. Un autre protecteur de Maclaurin est un homme dont l'influence sur le développement des sciences en Écosse est importante ; il s'agit de Lord Ilay. Roger Emerson montre très bien le rôle très important que ce dernier a joué dans les institutions savantes du 18ème siècle écossais[483]. Les relations avec Maclaurin existent très tôt, en partie dues au fait que celui-ci vient d'une région contrôlée par la famille de lord Ilay. Dès le début des années 20, Maclaurin connaît bien lord Ilay ainsi que son frère le duc John qu'il a rencontré lors de

---

479 « There is an excellent place for me in the Exchequer just now vacant or probably in a few days will be vacant by the death of him that has had it which is looked upon as certain. Tis that they call Clerk of the Pipe. It is fir Life and admits a deputation, the Salary is 200 lib. St. besides a few perquisites which would pay the Depute and allow perhaps 20 or 25 lib. over. » in Mills (1982), p. 32.

480 « I spoke of my views to the Marquis of Lothian when he was in this Country, he espoused my Interest with a great earnestness approved my Schemes and promised to be an Agent for me when an Occasion should offer » in Mills (1982), p. 32.

481 Dans le fonds des Marquis de Lothian aux archives nationales d'Écosse se trouvent des relevés de compte concernant l'activité de tuteur de Maclaurin pour le fils Kerr, N.A.S, GD/40/8/374

482 « During the first vacation that he spent at Murehouse in 1730 & some time after at his house at Edinbr, he had that hopeful young Nobleman wt him studying under his Direction, Lord Robert Kerr Second Son to the most honourable the Marquiss of Lothian for whom & his noble family he had very great Regard. » in Second Papers of memoirs, p. 5.

483 Emerson (2002). Sur le patronage de Maclaurin, pp. 31-2.

ses premiers voyages à Londres[484]. Ce dernier demande aussi à Folkes de rencontrer directement Robert Walpole, qui avait à cette époque la charge la plus importante au gouvernement de l'époque, pour lui conseiller de nommer Maclaurin au poste que le mathématicien désire[485]. Sa tentative d'avoir ce poste, malgré ses espoirs et sa recherche d'appuis, échoue. D'après Emerson, l'appui de Ilay n'est que factice, car à cette époque, Walpole était confronté à des attaques et Ilay voulait réserver ses appuis à des personnes qui aurait mieux servi les intérêts de Ilay que Maclaurin ne l'aurait fait[486]. Ainsi, Maclaurin se retrouve déçu de ne pas avoir ce poste.

Maclaurin avait acheté à la fin de 1729 ou au début de l'année 1730, une petite ferme, Muirhouse, à côté de Hamilton, proche de Glasgow. Nous ne savons pas quel est le montant de la transaction. En revanche, nous savons qu'il l'a propose à la vente à James Hamilton of Muirhouse pour la somme de 13000 Merks[487]. La vente se conclue à la fin de l'année 1735. Cette même année, il emprunte à la Banque Royale d'Écosse la somme de 300 livres sterling[488]. Il achète une maison à Deanmills, alors dans la banlieue d'Édimbourg pour y loger sa famille. Lors de la période de cours, Maclaurin logeait à Édimbourg, dans un logement de l'université pendant la semaine et revenait auprès de sa famille à Deanmills.

Même si cela touche la période suivante, signalons plusieurs faits qui concernent sa vie privée. Maclaurin a eu avec Anne plusieurs enfants. Le premier, John, est né le 15 décembre 1734[489]. Une fille, Barbara, vient un an après, le 11 novembre 1735[490]. Celle-ci

---

[484] « as I had a great deal of old of the Duke's favour and of his brother's My Lord Islay I was in hopes I might by theirs means obtain some of these places about the Exchequer which when vacant the bestow sometimes without much attachment perhaps. » in Mills (1982), p. 32.
[485] « If after you know the Marquis of Lothian's sentiments you could speak to Sir Robert Walpole it would be obliging me on the most important Occasion. » in Mills (1982), p. 32.
[486] Emerson (2002), p. 31, n. 41.
[487] Soit 700 livres sterling.
[488] Le 9 mai 1735 in Minutes of The Royal Bank of Scotland.
[489] GROS, 685/01/19
[490] GROS, 685/01/20

et un autre garçon, Walter, décèderont la même année, en 1739[491]. Leur père est très touché par la perte de ces deux enfants. Il décrit ses sentiments sur la perte de Barbara à son frère John dans une lettre emplie de peine et de confiance[492]. Les autres enfants de Maclaurin, Colin et deux autres filles survivront à Maclaurin.

À partir de 1738, Maclaurin est suffisamment à l'aise financièrement. En effet, il fait le 17 novembre 1738 un dépôt de 500 livres sterling à la Banque Royale d'Écosse. La même année, le 19 juillet, il achète une ferme dans la campagne de Melrose à Drygrange[493]. Cet achat est un investissement car il le loue à des fermiers avec qui il a quelques problèmes et qu'il traite de fieffés coquins[494].

---

[491] « In the year 1739 two of his Children dead Barbara and Walter » in Second Papers of memoirs, p. 7

[492] « It has pleased Almighty God to remove Baby this morning betwixt one & two. She retained her composed & wise Looks to the last Moment : and even her Eyes appeared beautiful after she was dead. She had Little Struggle, only breathed fast for a while before She departed. I promised my Self much Comfort from her, but Providence has determined otherways. This affects me the more, that it is the first affliction of the kind has been in my Lot. Anxiety however for Johny, who is no better, Struggles with Grief for Baby. In my partial Eyes they were become most delightful Children, and I hope God will still preserve Johnie. I doubt not of your Sympathy. A parent who has lost Children can only know the Condition of my Family, & my Distress. I hope this Stroak will help me to be more Sensible of the weakness and vanity of the Comforts this world affords, and lead my Thoughts to the place where I hope my child is gone ; for I will never forget my Dear Baby. May God preserve and prosper your wife & Children for your Comfort ; and may we all thro' his Mercy meet where there will be no more tears, Your afflicted Broy[r]. » in Mills (1982), p. 75.

[493] NAS, CS137/414, le contrat est daté du 29 juillet. Mais dans la lettre à James Hamilton du 20 juillet 1738, il parle du 19. In Mills (1982), pp. 74-5.

[494] « My far mat Drygrange is not set, and a combination of rogues are there my plague. » in Mills (1982), p. 151. Aussi, NAS, CS100/211, 9 juin 1741.

III. L’apogée de Maclaurin

A. Memorial to the commissioners of Excise concerning the mensuration of Tuns or backs : un exemple de l’implication sociale de Maclaurin.

En 1735, Maclaurin dépose un mémoire à l’*Excise*[495] sur la mesure des barriques de mélasse. Ce mémoire a été publié pour la première fois par Judith Grabiner en 1996 dans les *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*[496]. À la suite de ce mémoire, elle publia dans *Social Studies of Science*[497] un commentaire sur l’influence de ce mémoire dans l’Écosse des années 1730.

Dans cette partie, nous nous baserons sur ce que Judith Grabiner a montré dans ses deux études. Nous donnerons rapidement les conditions d’écriture de ce mémoire. Ensuite, nous donnerons un théorème de ce mémoire. Enfin, nous montrerons que Maclaurin considère les mathématiques appliquées comme ayant une valeur importante pour le développement de son pays, et qu’il est en quelque sorte considéré ou qu’il se considère comme un expert scientifique et que tout savant doit appliquer la théorie à des problèmes de la vie quotidienne. Selon les propres termes de Judith Grabiner, l’élégance et la sophistication des mathématiques utilisées fait de ce mémoire un très bon exemple de la création et de l’utilisation des mathématiques pour résoudre des disputes[498].

---

[495] L’Excise est l’organisme de l’État britannique qui a comme rôle de contrôler et d’élaborer les taxes sur les produits.
[496] Grabiner (1996).
[497] Grabiner (1998).
[498] « The elegance and sophistication of the mathematics involved makes this an especially compelling example of the creation and use of mathematics t resolve disputes. » in Grabiner (1998), p. 140.

1. Les conditions d'écriture de ce mémoire

Le 6 novembre 1735, Maclaurin envoie son *Memorial offered to the Honourable Commissioners of Excise concerning the Mensuration of Tums or Backs that have some irregularity in the Figure and Situation of the Bottom, and in the Height and Position of the Staves ; and of ascertaining a just place for taking the dry Inches in such a Vessel : To which is added a Method of correcting the common Tables, and some new Theorems concerning the Mensuration of regular Solids*[499].

À cette époque, un des patrons de Maclaurin, Lord Ilay a une grande influence au sein de l'*Excise*. Une bonne partie de ses commissaires sont des partisans de Lord Ilay. Ainsi, les commissaires en place en 1735 sont Gilbert Burnet, un ami de Maclaurin, Richard Dowdeswell, Thomas Cochrane, Richard Somers et Christopher Wyvil[500]. Par exemple, Dowdeswell a joué un rôle important dans la création de la Banque royale d'Écosse créée en 1729 et a été nommé en 1732 à l'*Excise* sur les conseils de Lord of Ilay. Somers et Wyvil sont neutres et ne sont pas étiquetés comme des partisans de Ilay. Burnet ne fait pas partie des favoris de Ilay. Ainsi, soit par Ilay, soit par Burnet, Maclaurin peut entrer en contact relativement facilement avec l'*Excise*. A priori, ce mémoire n'est pas une commande de la part de l'*Excise* à Maclaurin, car dans les archives, on ne retrouve rien concernant cela. De plus, il n'est pas fait mention d'un paiement affecté à Maclaurin[501].

---

[499] Ce manuscrit se trouve à la bibliothèque nationale d'Écosse, Adv. MS 23.1.13. Une copie se trouve aussi à la bibliothèque de l'université d'Édimbourg, DC.1.17. Nous avons pris comme référence la version de Grabiner (1996). Mais, lorsque nous faisons des citations de ce manuscrit, par souci de bien séparer le texte de Maclaurin d'avec les commentaires de Judith Grabiner, nous prendrons Maclaurin (1735) avec la pagination de Maclaurin (telle qu'elle se trouve dans Grabiner (1996)).

[500] NAS, RH 2/4/446, p. 382. cité dans Grabiner (1998), pp. 159-160.

[501] Aucune somme n'est allouée pour Maclaurin dans les registres de the Excise entre 1734 et 1736, NAS RH2/4/385-6, 444-6 in Grabiner (1998), p. 156 et n.129, p. 166. Néanmoins, Maclaurin dépose la somme de 500 livres sterling le 17 novembre 1738 à la Banque royale d'Écosse. Une partie ou la totalité de cette somme pourrait provenir d'une éventuelle rétribution pour ce mémoire.

Cela aurait pu être une demande de la part de Lord Ilay lui-même, sans passer par l'*Excise*. Mais, là non plus, nous n'avons pas de preuves de cela dans leurs correspondances. Ainsi, nous sommes tentés de croire que c'est de sa propre initiative que Maclaurin s'engage dans ce projet.

Nous avons vu, lors du précédent chapitre, la tentative de Maclaurin d'obtenir un poste à l'Échiquier. Cette tentative a échoué malgré les appuis que Maclaurin avait. Il ne désespère pas et tente d'obtenir un poste dans une autre branche de l'État : *the Excise*. Dans sa tentative d'obtenir cette charge, Maclaurin veut montrer qu'il a non seulement des appuis mais aussi qu'il est disposé à travailler réellement et qu'il a les compétences pour cela. Dans la lettre qu'il envoie à Martin Folkes, Maclaurin déclare que James Gregory, celui qu'il remplace à Édimbourg, avait une charge dans ce corps de l'État. Il insiste sur le fait que scientifiquement, il est aussi capable que Gregory, pour ne pas dire supérieur[502]. Ainsi, avec l'écriture de ce mémoire, Maclaurin veut montrer aux instances dirigeantes écossaises qu'il est apte scientifiquement à assumer une charge. Cette tentative échouera encore.

2. Le contenu mathématique : entre théorie et applications pratiques

a) Le but mathématique de ce mémoire

Maclaurin a un double objectif mathématique lors de l'écriture de ce mémoire. En effet, ce mémoire est destiné aux employés de *l'Excise* qui ont en charge l'évaluation de la

[502] « M^r Gregory got and enjoyed several years a better place in the excise here than that I seek for : and yet my pretensions on several respects may be judged as good as his were. » in Mills (1982), pp. 33.

taxation des barriques de mélasse. Ce que veulent ces employés, ce ne sont pas des discours mathématiques théoriques qui ne sont pas utilisables au quotidien. Maclaurin leur fournit donc une méthode pour créer des tables de calcul de volumes. Mais pour montrer que sa méthode est meilleure que celles qui existent déjà, Maclaurin va démontrer ses principes et montrer mathématiquement que sa méthode est plus juste que les autres. Cette évaluation est relativement difficile car elle dépend de plusieurs facteurs. Le premier est que les barriques ne sont pas toutes identiques les unes aux autres pour diverses raisons, dont le vieillissement. La hauteur est environ de 5 pieds et le diamètre moyen de 6 pieds, donc une contenance variant entre 800 et 1000 gallons[503]. Ainsi, évaluer uniquement un volume standard sans prendre en compte les différences notables entraîne une taxation inégalitaire. Une taxe trop importante provoque le mécontentement des marchands, au contraire, si la taxe est trop faible, l'entrée d'argent pour l'État est moins importante[504]. Le second facteur est que, même si les barriques sont hermétiques, il y a toujours une perte de liquide lors du voyage[505]. Ainsi, il faut aussi prendre en compte cette perte lors du calcul de la taxe. D'après Maclaurin, les différences entre les barriques peuvent être très importantes et il ne faut surtout pas les négliger[506]. Enfin, plusieurs méthodes sont disponibles pour calculer le volume. Elles sont équivalentes lorsque la barrique est régulière, mais elles ne le sont plus lorsque les barriques ont des irrégularités. Il faut donc faire un choix parmi les différentes méthodes[507]. À partir de ces méthodes, des tables ont été produites pour

---

503 Ce sont les dimensions données dans Grabiner (1998), p. 140.
504 « There is but one particular height of the dipping place to which any Table can answer, and tho' the bottom of the Tun was level, if the Gauging Officer dip at a part of the Brim that has a greater altitude than this, the Charge from the Table will be below the truth; and if he dip at a lower part of the Brim he must have too few dry Inches, and will overcharge the Trader. » in Maclaurin (1735), p. 8.
505 Ce voyage est souvent mouvementé car il consiste à récupérer cette mélasse dans les îles des Caraïbes pour les emmener en Écosse et en Angleterre.
506 « It is enough to direct him to dip at the quarters from the drip ; for in the case we are now supposing, when the bottom is levell, there is no drip, and yet the irregularity of the Brim may lead him into considerable Errors. » in Maclaurin (1735), p. 8.
507 « But tho' this Rules are very good, yet they are not sufficient, without some further precautions to prevent Errors in measuring the Content of a Vessel that has a sensible irregularity in the figure of the Bottom or in the Height and position of the Staves. (…) A Difference of the Contents may arise from

déterminer en fonction de différents paramètres le volume de liquide dans chaque barrique. Mais ces tables sont, d'après Maclaurin, imprécises et sujettes à de nombreuses erreurs. Il définit les barriques utilisées pour transporter la mélasse à Glasgow comme proches d'un tronc de cône qui tient sur la plus petite base[508]. C'est à partir de cette définition, avec les dimensions qu'il a en sa possession, qu'il va, à la fois, donner une méthode (théorique) de calcul du volume et élaborer des tables plus précises.

Nous allons tout d'abord examiner quelques résultats sur le calcul des volumes puis nous donnerons son choix méthodologique pour l'écriture de ces tables.

b) Une étude et des résultats théoriques

Contrairement à l'ordre d'exposition de son mémoire où Maclaurin commence par donner l'explication de ses tables et leurs intérêts dus à leur précision puis énonce les différentes propositions théoriques, nous allons exposer dans un premier temps les résultats théoriques puis, dans la partie suivante, nous étudierons l'élaboration des tables. Même si ces dernières apparaissent avant la théorie, les propositions d'ordre théorique servent de supports pour asseoir celle-ci. Cette disposition tient sûrement au fait que Maclaurin veut donner du poids à l'élaboration de ses tables.

Maclaurin prend un tronc de différentes surfaces de révolution, le cône, une section conique tournant autour de son axe, le paraboloïde de révolution et l'ellipsoïde de révolution ou la sphère. Il cherche à comparer la différence entre le volume à l'intérieur de ce tronc et le volume d'un cylindre de même hauteur que le tronc et de diamètre pris à la

---

different Methods, which may be equally god in measuring a regular Vessel, while one or perhaps both of them may be improper for measuring a Vessel that has certain irregularitys in its Figure. » in Maclaurin (1735), pp. 1-2.

[508] « The Backs which serve for holding the Molasses at Glasgow are nearly Frustums of Cones that stand on their lesser Base. » in Maclaurin (1735), p. 2.

mi-hauteur du tronc[509]. Cela revient à approcher le volume réel par le volume d'un cylindre. De plus, il se pose la question de savoir si cette différence ou approximation dépend de la position du tronc dans la surface. Cela prend la forme de trois propositions que nous allons examiner. D'après Judith Grabiner, c'est la première fois que ce type de réponses est donné à ces problèmes en Grande-Bretagne[510]. Cette comparaison est nécessaire pour établir les tables. En effet, Maclaurin va « découper » la barrique en tronc de hauteurs égales (ou non). Pour connaître le volume de la barrique entière, il suffit de sommer les volumes de chaque tronc. L'écart entre le volume réel et le volume trouvé en sommant les volumes de chaque cylindre sera l'erreur à évaluer et à affiner. Savoir si, pour chaque tronc, la différence entre le volume du tronc et celui de son cylindre associé est dépendante de l'altitude du tronc et de sa hauteur permet de simplifier les calculs. De plus, savoir si le fait de prendre les mesures à partir du haut ou à partir du bas de la barrique a une influence sur l'erreur commise permet de choisir la meilleure méthode.

Nous allons commencer par les propositions qui ne servent pas véritablement pour l'élaboration des tables. En effet, pour les tables, Maclaurin prend des barriques dont la forme est proche d'un tronc de cône. Occupons-nous des autres formes.

---

[509] Pour simplifier le discours, ce cylindre sera dorénavant nommé cylindre associé au tronc.
[510] Grabiner (1996), p. 193.

Dans le cas d'une sphère ou d'un sphéroïde (Fig. 45), la différence entre le volume d'un tronc et celui du cylindre de même hauteur et dont le diamètre est pris à la mi-hauteur est toujours négative. Pour une hauteur de tronc (et du cylindre associé) constante, la différence entre les deux volumes ne dépend pas de l'altitude. De plus, lors de la recherche du volume de la barrique entière qui se fait en sommant le volume des cylindres découpant la barrique, le fait de commencer par le fond ou par le dessus ne modifie pas l'erreur commise[511].

Maclaurin est même plus précis quand à la valeur de cette erreur. Il indique que dans le cas de la sphère, l'erreur est égale à la moitié du volume d'une sphère dont le diamètre est égal à la hauteur[512]. Dans le commentaire de cette propriété, Maclaurin écrit que cette erreur peut être très importante. Pour un sphéroïde, l'erreur implique une surtaxe, c'est-à-dire que le volume calculé à partir des cylindres est supérieur au volume du

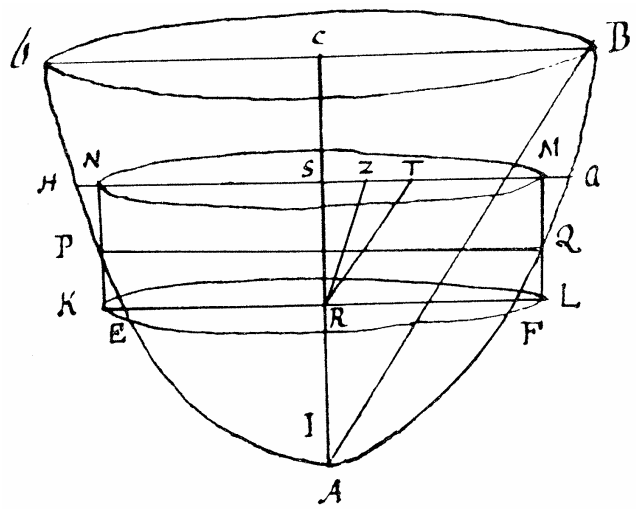


Fig. 45.

[511] « Prop. XXV. In a spherical or spheroidical Vessel the Content of a frustum computed from its mean area multiplyed by its depth, is above the truth. When the depth of the frustum is given, the Error is always the same in the same Vessell or in similar Vessels; and the totall Content will be found the same whether the Vessel be gauged upwards or downwards. » in Maclaurin (1735), pp. 75-6.
[512] « In a Vessel that is of a spherical Figure the Error that arises by computing the Content of a frustum from the Area that passes through the midle of its depth is precisely equall to half the Content of a sphere that has its Diameter equall to that depth. » in Maclaurin (1735), p. 76.

sphéroïde[513]. Dans le cas d'un sphéroïde dont le grand axe est le double du petit axe, l'erreur commise pour des cylindres de 6 pouces[514] de hauteur est d'environ 1 gallon. Si la hauteur n'est plus de 6 pouces mais de 10 pouces, alors l'écart serait de plus de quatre gallons et demi. Ainsi, si la hauteur globale est de 40 pouces et que l'on découpe ce volume en 4 cylindres, alors l'écart serait de plus de 18 gallons[515].

Pour un paraboloïde (Fig. 46), l'écart entre le volume du tronc et celui de son cylindre associé est nul. En revanche, pour un hyperboloïde, l'écart entre le volume du tronc et celui du cylindre est positif, c'est-à-dire que les barriques ne sont pas assez taxées[516].

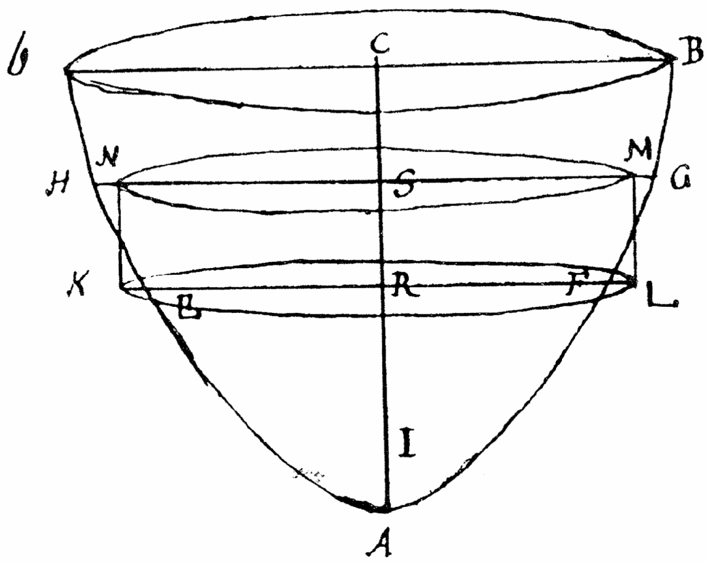


Fig. 46.

Ainsi, pour que cette méthode soit parfaitement précise et juste, il faudrait que les barriques aient la forme de paraboloïde. La démonstration de ce que Maclaurin avance

---

[513] « In a Spheroid, the error always produces an overcharge and is in proportion to the Error in computing the Content of a frustum of the same height in a Sphere as the square of the horizontal Axis of the spheroid, to the square of its perpendicular Axis. In such a Vessel the overcharge may become very considerable. » in Maclaurin (1735), p. 77.

[514] Nous gardons les mesures de Maclaurin et nous ne faisons de conversion dans le système de mesure français car cela n'aiderait pas davantage à la compréhension des propos de Maclaurin.

[515] Maclaurin (1735), p. 77.

[516] « Prop. XXVI. In a parabolic Conoid [the volume] of a frustum computed from its mean Area multiplied by its depth is precisely true ; In a Hyperbolic Conoid it is below the truth. In both it is the same thing whether they are gauged upwards or downwards. » in Maclaurin (1735), pp. 79-80.

figure sous forme d'annexe à la fin de son mémoire. Il déclare que ces propriétés peuvent être démontrées à l'aide de la méthode d'exhaustion d'Archimède, mais il lui préfère la méthode des fluxions[517]. En prenant appui sur les deux figures précédentes, il pose $AR = x$ et $EF = y$. L'équation de la section conique *AEB* peut être écrite sous la forme $y^2 = Ax^2 + Bx$. *A* est alors l'origine du repère orthogonal. En utilisant la méthode inverse des fluxions avec *x* qui varie entre 0 et *x*, le volume AEF est égal à

$$3\frac{m}{n}Ax^3 + \frac{m}{n}B\frac{x^2}{2}$$

où le rapport $\frac{m}{n}$ représente ce que nous notons π. De la même manière, en prenant la hauteur *RS* égale à *d*, le volume *AHG* sera égal à

$$3\frac{m}{n}A(x+d)^3 + \frac{m}{n}B\frac{(x+d)^2}{2}.$$

Le volume du tronc de hauteur *RS* sera égal à

$$EFGH = AFG - AEF = \frac{m}{n}\left(Adx^2 + Ad^2x + Bdx + A\frac{d^3}{3} + B\frac{d^2}{2}\right).$$

Le volume du cylindre *KNML* est égal à l'aire du disque de diamètre *PQ* (cf. Fig. 1.) multipliée par la hauteur du tronc soit *RS*. Alors,

$$PQ = A\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + B\left(x + \frac{d}{2}\right).$$

D'où

$$KLMN = \frac{m}{n}\left(Adx^2 + Ad^2x + Bdx + A\frac{d^3}{4} + B\frac{d^2}{2}\right).$$

Ainsi la différence entre les deux volumes est égale à

[517] « These Propositions may be demonstrated from some of Archimedes Theorems ; but more briefly by the Method of Fluxions thus. » in Maclaurin (1735), p. 91.

$$\frac{m}{n} A \frac{d^3}{12}.$$

Cette différence ne dépend que de la hauteur du tronc et pas de l'altitude. Lorsque la section conique est une parabole, le coefficient *A* dans l'équation est nul, par conséquent la différence est nulle. Lorsque *A* est négatif (c'est le cas pour l'ellipse et le cercle), il y a une surtaxe, en revanche, si *A* est positif (c'est le cas de l'hyperbole), la taxe est moindre[518].

Intéressons-nous maintenant à l'étude des barriques en forme de tronc de cône. Pour cette forme de barrique, Maclaurin donne plus de détails car c'est à partir de cette étude que les officiers de l'*Excise* utiliseront les tables. Dans une barrique conique, pour chaque tronc de cône, le volume du cylindre associé[519] est légèrement inférieur au volume du tronc. Pour une hauteur donnée de tronc, la différence est toujours la même quelle que soit l'altitude du tronc. De plus, la différence est proportionnelle au cube de la hauteur du tronc de cône[520]. Il donne une explication de cette erreur de façon géométrique. Pour cela, il prend deux troncs de cône à des altitudes différentes, *EFGH* et *efgh*, de même hauteur *RS* et *rs*. Les diamètres à mi-hauteur sont *PQ* et *pq*. Les cylindres associés sont *LMNK* et *lmnk* (Fig. 47.).

---

[518] Maclaurin (1735), pp. 91-94.

[519] Le volume est le produit de l'aire à la moitié de la hauteur du tronc par la hauteur du tronc.

[520] « Prop. XXIII. In a conical Vessell the Content that is computed from the Area at the midle of every frustum multiplied by the depth of that frustum, is a little below the truth. In a frustum of a given depth the Error is always the same Magnitude in the same Vessel. In frustums of different Altitudes in the same Vessel it is as the Cube of the Altitude : and in frustums of equal Altitudes in different Vessels this Error is proportional to the square of the difference betwixt the upper and lower Diameters of the Frustums. » in Maclaurin (1735), p. 67.

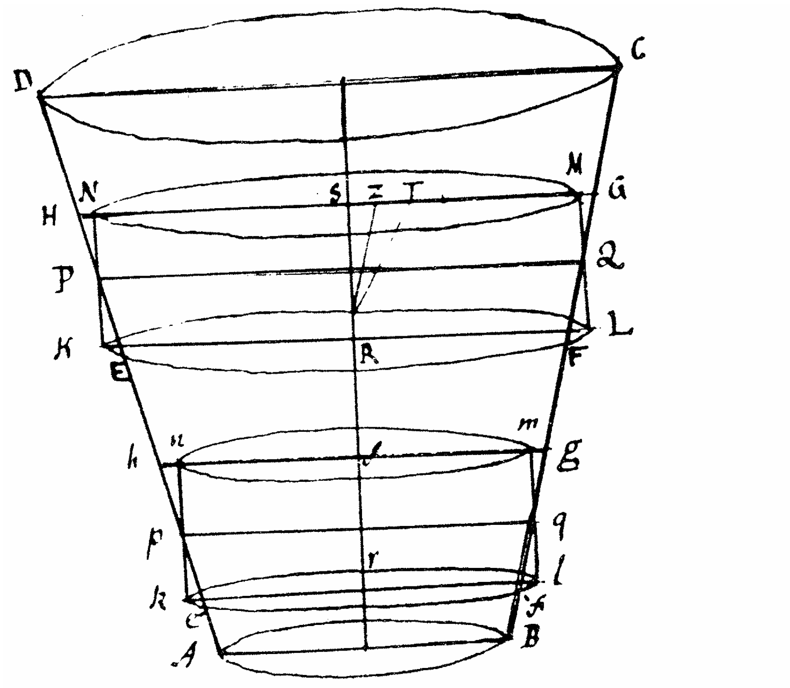


Fig. 47.

Pour montrer que l'erreur engendrée par l'approximation du tronc de cône par un cylindre ne dépend par de la position du cylindre dans le tronc, il construit le point *T* qui appartient au segment *SG* tel que la droite *RT* soit parallèle à la droite *BC* (c'est-à-dire à l'enveloppe du cône). Soit *Z* un point de *SG* tel que l'angle $\widehat{SRZ}$ bissecte l'angle $\widehat{SRT}$. Grâce à cette construction, il annonce que le volume du cône formé par la révolution du segment *RZ* autour de l'axe *RS* est exactement l'erreur recherchée. L'évaluation de ce volume est la suivante. Cette erreur est égale au volume d'un cône de même hauteur mais dont la base aurait un diamètre égal à la moitié de la différence entre le diamètre supérieur avec le diamètre inférieur[521]. À la suite de cette construction, il ne donne pas de démonstration. En revanche, dans l'annexe II à la fin du mémoire, il fournit une autre façon d'appréhender l'erreur commise dans le cas du cône, à laquelle il joint la démonstration. Tout d'abord, il prend $3{,}1416$ comme valeur approchée du rapport entre le

[521] « that Error is equall to the Content of a Cone of the same Altitude with the frustum that stands upon a Base whose diameter is half the difference of the upper and lowers diameters of the frustum. » in Maclaurin (1735), p. 67.

périmètre du cercle et son diamètre, ce qu'il considère comme une approximation tout à fait correcte dans le cadre de son mémoire[522]. De plus, il prend garde de convertir les mesures des longueurs qui sont faites en pouces et donc donne les volumes en pouces cubes par des mesures en gallons[523]. C'est pourquoi, en réunissant la valeur, 3,1416 et la conversion de pouces cubes en gallons, il y a dans les expressions le coefficient $0,0034$ [524].

Il pose dans le tronc de cône *EFGH*, $HG = A$, $EF = B$ et $RS = D$ (voir fig. 3.). Le volume du tronc de cône vaut

$$\left(A^2 + AB + B^2\right) \times 0,0034 \times \frac{D}{3}$$

Pour cela, il a utilisé les expressions des volumes classiques[525]. Le volume du cylindre associé à ce tronc exprimé[526] lui aussi en gallons vaut

$$\left(A^2 + 2AB + B^2\right) \times 0,0034 \times \frac{D}{4}.$$

Ainsi, la différence entre les deux volumes est égale à

$$\frac{1}{12} D \times \left(A - B\right)^2 \times 0,0034.$$

Par conséquent, l'erreur calculée ci-dessus ne dépend que de la hauteur du cylindre et de la différence entre les diamètres supérieurs et inférieurs du tronc de cône. De plus, dans une même barrique, la différence entre les rayons supérieurs et inférieurs est proportionnelle à la hauteur du tronc de cône, il s'ensuit que l'erreur est proportionnelle au cube de la hauteur du tronc. En effet, soit deux troncs de cône différents d'une même barrique, alors l'approximation pour chaque tronc est $\frac{1}{12} D \times \left(A - B\right)^2 \times 0,0034$ pour le premier et

[522] Maclaurin (1735), p. 71.
[523] Il prend pour la conversion gallon- pouces cubes la relation suivante, un gallon correspond à 231 pouces cubes.
[524] Maclaurin (1735), p. 70.
[525] Maclaurin (1735), p. 88.
[526] La hauteur est la même *D* et le rayon du disque est $\frac{1}{2}\left(A + B\right)$.

$\frac{1}{12}d\times(a-b)^2\times 0,0034$ pour le second avec d la hauteur, a et b les diamètres supérieur et inférieur. Comme $\frac{A-B}{a-b}=\frac{D}{d}$, alors le rapport entre les deux erreurs est comme $\frac{D^3}{d^3}$. Par conséquent, si on prend en considération deux cylindres de même hauteur, l'erreur est identique quelque soit l'altitude du cylindre considéré[527].

Ce résultat est très important car il donne toute la légitimité des tables que Maclaurin se propose de donner dans la méthode de construction. Avec la proposition précédente, il calcule l'approximation pour un tronc donné. En utilisant cette technique, il découpe la barrique entière en autant de troncs de hauteur fixe qu'il faut (la hauteur que Maclaurin prend est 10 pouces). Ensuite, il se demande si commencer par le haut ou par le bas change l'approximation. Il s'assure que calculer à partir du haut ou du bas donne le même résultat[528].

c) La correction des tables : un calcul d'erreurs

Maclaurin n'est pas le premier à introduire le fait d'utiliser des tables pour les commissaires de l'*Excise*, bien avant lui, des tables sont créées pour le même usage. Il prend appui sur les méthodes que des savants, en particulier au 17ème siècle, ont élaborées. Le calcul de volumes de cylindres est déjà utilisé par les jaugeurs pour établir des tables. Par exemple, William Oughtred et Thomas Everhard ont donné des formules

---

527 Maclaurin (1735), pp. 89-90.

528 « Prop. XXIV. In measuring a conical Vessel the Content will be found the same whether you take the Diameters at the midle of every ten inches from the top downwards, and leave the Slice at the Bottom, or take the Diameters at the midle of every ten inches from the bottom upwards leaving the Slice at the top, the Content of the Slice being computed on both cases from the Area that passes through the midle of its depth. » in Maclaurin (1735), p. 72.

d'approximation de volumes qui seront reprises par Crouch pour les appliquer à la taxation[529].

Dans son mémoire, Maclaurin ne fournit pas beaucoup de tables. Le but de son mémoire n'est pas d'être un catalogue de tables directement exploitables par les membres de l'*Excise*. En revanche, il donne une méthode de calcul qui permet de corriger les anciennes tables, les affiner et rendre la taxation plus juste. Ainsi, il affirme que l'erreur donnée par ses tables ne dépassera pas un quarantième de gallon[530].

L'une des tables présentes dans son mémoire est une table pour une barrique en forme de tronc de cône dont le diamètre supérieur est de 71 pouces, le diamètre inférieur 62 pouces et la hauteur 45 pouces. Nous la reproduisons ci-dessous[531].

---

[529] In Grabiner (1996), p. 197.

[530] « I shall here propose a very easy method by which it may be corrected so that the table shall not err $\frac{1}{40}$ of a Gallon and shall illustrate my Rule by an Example. » in Maclaurin (1735), p. 61.

[531] Ce tableau est tiré de l'article de Judith Grabiner, Grabiner (1996), p. 227 qui se trouve dans le mémoire de Maclaurin à la page 63.

A Tun of a Conical figure gauged downwards The Diameter at the top being 71 inches The Diameter at the bottom 62 The Whole depth….45				
Depths	Diameter	Contents of each frustum computed from the area of its mean Diameter	True Content of each frustum	Error
10	70	166.6	166.611 1/3	.011 1/3
10	68	157.216	157.227 1/3	.011 1/3
10	66	148.104	148.104 1/3	.011 1/3
10	64	139.264	139.264 1/3	.011 1/3
05	62.5	066.40625	066.407 2/3	.011 5/12
45		677.59025	677.637	.046 3/4
The Same gauged upwards				
Depths	Diameter	Contents of each frustum computed from the area of its mean Diameter	True Content of each frustum	Error
05	70.5	084.49425	084.495 2/3	.011 5/12
10	69	161.874	161.885 1/3	.011 1/3
10	67	152.626	152.637 1/3	.011 1/3
10	65	143.65	143.661 1/3	.011 1/3
10	63	134.946	134.957 1/3	.011 1/3

45		677.59025	677.637	.046 3/4

Avec cette table, il veut montrer que le fait de commencer le jaugeage par le bas ou par le haut ne change pas le résultat final.

Il expose aussi une règle pour affiner les tables. Cette règle sert dans le cas où la barrique n'a pas de liquide jusqu'au bord et donc lorsque le dernier cylindre, en principe celui qui se trouve tout en haut de la barrique n'est pas rempli entièrement. Il l'énonce comme ceci : au volume du premier cylindre (c'est-à-dire en commençant par le haut et associé au premier tronc de cône de hauteur 10 pouces), retrancher le volume du second cylindre. Diviser cette différence par 8 permet d'avoir l'erreur au milieu de chaque tronc, cette erreur est nommée *P*. En affectant des coefficients à *P*, Maclaurin évalue alors l'erreur lorsque le liquide se trouve à 1, 2, 3, etc. pouces de hauteur. Ainsi $0,96 \times P$ est l'erreur pour les hauteurs 4 et 6 pouces, $0,84 \times P$ celle pour les hauteurs 3 et 7 pouces, $0,64 \times P$ celle pour les hauteurs 2 et 8 pouces et enfin $0,36 \times P$ celle pour les hauteurs 1 et 9 pouces. A partir de cette règle, il donne un exemple qu'il met sous forme de tableau. Dans le cas de la barrique de l'exemple, le premier volume est 166,6, le second vaut 157,216. Ainsi,

$$P = \frac{166,6 - 157,216}{8} = 1,173$$

Donc les erreurs pour les différentes hauteurs sont $P = 1,173$, $0,96 \times P = 1,126$, $0,84 \times P = 0,985$, $0,64 \times P = 0,751$, $0,36 \times P = 0,422$. Il compare dans un tableau les erreurs commises en utilisant la méthode habituelle avec celles qu'il calcule avec la règle ci-dessus. Il montre avec cet exemple, que sa méthode donne des approximations meilleures que la méthode traditionnelle. Les données ci-dessus sont utiles lorsque le dernier tronc n'est pas tout à fait rempli[532]. Il résume cela sous la forme d'un tableau[533] dans lequel il remarque que la différence est la plus importante quand ce dernier tronc est rempli à moitié. Ainsi, la différence la plus importante entre sa méthode et celle habituelle est 0,023[534].

Dry Inches	Table computed in the usual way for the said Back	Table shewing the true Content of the Back	Differences shewing the Errors of the Common Method	Errors by our Rule	Differences of the real Error and those computed by our Rule
0	677.59	677.590	0.000	0.000	0.000
1	660.93	660.499	0.431	0.422	0.009
2	644.27	643.504	0.766	0.751	0.015
3	327.61	626.605	1.005	0.985	0.020
4	610.95	609.802	1.148	1.126	0.022
5	594.29	593.094	1.196	1.173	0.023
6	577.63	576.482	1.148	1.126	0.022
7	560.97	559.964	1.005	0.985	0.020
8	544.31	543.542	0.768	0.751	0.017
9	527.65	527.213	0.437	0.422	0.015
10	510.99	510.979	0.011	0.000	0.011

Pour arriver à ce type de correction et ainsi élaborer des tables plus précises, Maclaurin a d'abord recensé toutes les sources d'erreurs en étudiant directement sur les quais du port de Glasgow une grande quantité de barriques. Voici des exemples de sources

---

[532] « These Numbers will serve for correcting not only the uppermost part of the Table, but all the Numbers in it till you come to the Slice ; and if so much exactness is required, the contents corresponding to the inches of the Slice may also be corrected by a similar operation. » in Maclaurin (1735), p. 66.

[533] Le tableau est lui aussi tiré du même article de Judith Grabiner, Grabiner (1996), p. 228 qui se trouve dans le mémoire de Maclaurin à la page 65.

[534] « In this Example the difference of the Errors does not exceed 23/1000 or 1/43 of an English Gallon. » in Maclaurin (1735), p. 64.

d'erreurs qu'il recense. Il signale que les douves[535] des barriques ne sont pas de même hauteur. Ces différences de hauteurs provoquent des irrégularités au niveau du fond et du bord de la barrique. Le fond n'est pas forcément un plan régulier, il peut être aussi déformé par divers facteurs, dont le temps et les mouvements subis par la barrique. Les douves ne sont pas placées correctement et donc provoquent des irrégularités dans la forme de la barrique. Les douves opposées ne font pas toujours le même angle avec le fond, ce qui donne des erreurs lors de la mesure de la hauteur du liquide[536]. Ces quelques exemples de raisons d'irrégularités doivent être pris en compte lors des mesures. Et, donc améliorer les mesures afin de minimiser le plus possible les erreurs dues aux mesures et aux irrégularités et non à la méthode elle-même, Maclaurin consacre les 20 premières propositions de son mémoire à la résolution de ce type de problème.

3. Les mathématiques : certitude et prise de décision

Pour parvenir à une méthode pour établir des tables plus précises que celles qui étaient déjà utilisées par les officiers jaugeurs de the *Excise*, Maclaurin ne s'est pas appuyé dans un premier temps sur la théorie mathématique. Nous avons dit qu'il était allé sur les quais du port de Glasgow pour étudier un grand nombre de barriques. C'est grâce à cette étude très précise et très attentive qu'il a pu recenser au début de son mémoire toutes les possibilités d'irrégularités. Après cela, il s'est demandé comment prendre en compte toutes ces irrégularités. Maclaurin a donc (re)pensé les prises de mesures par les jaugeurs. Donnons rapidement un exemple. En effet, si la barrique est penchée pour diverses raisons, par exemple un défaut de fabrication ou un dépôt non horizontal, quelle hauteur mesurer

[535] Les douves des barriques sont les lames de bois qui, tenues par des cercles, forment la barrique.
[536] Maclaurin (1735), pp. 2-4.

avec la jauge ? Cette question fait l'objet d'un traitement spécial[537].

C'est à partir de ces nombreuses observations qu'interviennent les mathématiques. Les mathématiques sont présentes dans ce mémoire pour deux raisons. La première est qu'il faut calculer des volumes. Ainsi, les mathématiques interviennent naturellement dans ce type de problème. Comme nous l'avons déjà signalé, des tables recensant des volumes existaient déjà bien avant celle de Maclaurin. Mais ce que Maclaurin a fait de plus c'est d'évaluer les erreurs commises en utilisant l'approximation d'un cône par un cylindre. Ses prédécesseurs savaient qu'il y avait des erreurs mais ne s'étaient pas posé la question de les quantifier. Maclaurin utilise donc les mathématiques pour calculer les erreurs et ainsi pouvoir les diminuer. C'est ce qu'il fait en utilisant la méthode que nous avons donnée plus haut. La seconde raison est liée au statut particulier des mathématiques. La notion de certitude en mathématiques confère à l'objet sur lequel les mathématiques travaillent une validité et une force qu'il n'avait pas avant d'être confronté aux mathématiques. C'est la raison pour laquelle Maclaurin donne les démonstrations de ce qu'il avance dans les propositions. Savoir si la différence entre les volumes du tronc de cône et de son cylindre associé dépend de la position du tronc dans la barrique est un bon exemple de l'exigence mathématique ou démonstrative de Maclaurin. Dans cet exemple, cela permet deux choses. La première est d'évaluer l'erreur commise, la seconde est de signaler qu'il est possible de faire des économies de mesures. Il est inutile de comparer pour chaque strate le tronc et son cylindre. Calculer le volume du cylindre suffit. Car, en évaluant la différence pour la première strate, les différences pour les autres strates sont les mêmes.

Ainsi, Maclaurin en utilisant les mathématiques réussit son double objectif. Valider mathématiquement, c'est-à-dire par l'utilisation du mode démonstratif et de constructions

---

[537] « It is evident that this is the best mean Content that can be assigned for a tun that is sometimes moved ; and any Error that might arise from the Tun's inclining to one side is prevented by adjusting the dipping place to its new Situation. » in Maclaurin (1735), p. 10.

géométriques, les différentes observations qu'il a faites et les différentes intuitions qui ont amené sa règle. De plus, grâce aux mathématiques « pures », en particulier la géométrie et la méthode des fluxions, il a pu montrer que l'on peut faire des économies de mesures et donc gagner en efficacité. Ce double objectif nous rappelle le discours sur la méthodologie de l'analyse et de la synthèse qui se trouve dans *the Account*. Nous pouvons dire qu'avec ce mémoire, Maclaurin met en pratique la méthode qu'il a défendue avec beaucoup de force dans son ouvrage de philosophie naturelle. Dans ce mémoire, Maclaurin part de l'expérience et de l'observation pour échafauder un ensemble de principes et de règles qui sont vérifiés mathématiquement. Et à partir de ces principes, en faisant appel à une bonne partie de son savoir mathématique, il parvient à développer et à asseoir ces mêmes principes.

B. L'observation de l'éclipse de lune et la création de la Philosophical Society of Edinburgh : Maclaurin comme moteur de la vie scientifique d'Écosse.

1. L'éclipse de Lune : une observation en équipe entraînée par Maclaurin.

À partir de 1735, Maclaurin s'implique de plus en plus dans la vie intellectuelle et sociale de son pays et d'Édimbourg. Une des formes de son implication est la création de la Société philosophique d'Édimbourg qui sera un des pôles majeurs de la vie intellectuelle écossaise dès sa création. Mais, avant de donner les grandes étapes de la création de cette société savante, intéressons-nous à un fait marquant qui sera le point de départ de la création de cette Société, l'éclipse du soleil de 1737.

Dans les *Philosophical Transactions* pour les mois de janvier à mai 1738, une lettre[538] de Maclaurin adressée à Martin Folkes et datée du 12 mai 1737 donne un compte-rendu d'observations de l'éclipse du soleil du 18 février 1737 faite à Édimbourg et dans d'autres parties de l'Écosse[539]. Cette éclipse a été observée à partir de plusieurs endroits stratégiques de l'Écosse. L'éclipse a pu être visible du nord de l'Angleterre, à Morpeth[540] dans le Northumberland jusqu'à Inverness[541]. Maclaurin ne connaît pas réellement la limite supérieure de l'observation car les conditions météorologiques n'étaient pas très favorables pour une observation astronomique. Il a recensé une petite vingtaine d'observations de

---

[538] Maclaurin (1738) reproduit dans Mills (1982), pp. 275-85.

[539] « I shall give you as full an Account of this Eclipse as I can collect from the Observations that were made here, and those that have been communicated to me from the Country. » in Maclaurin (1738), p. 177. ou Mills (1982), p. 275.

[540] Au nord de Newcastle upon Tyne

[541] Au nord de l'Écosse, au sud des Highlands.

nature différentes. Certaines ont été réalisées à partir de lunettes comme celle qui ont été faites à plusieurs endroits à Édimbourg, ainsi qu'à Aberdeen. À Édimbourg, il y a eu deux groupes d'observateurs, l'un dirigé par Lord Aberdour[542] qui se trouvait au château d'Édimbourg, l'autre sous la direction de Maclaurin auquel appartenaient James Short, le lunettier et Sir John Clerk. D'autres observations ont été faites sans instrument particulier, à part une montre pour connaître l'heure de départ et la durée de l'éclipse. Les observateurs ne sont pas forcément des professeurs, certains sont pasteurs. Leur point commun est un intérêt pour l'étude de la nature et des sciences en général. Il est clair par le compte-rendu que nous avons entre les mains, que c'est Maclaurin qui a organisé et voulu que des observations aient lieu à différents endroits d'Édimbourg et d'Écosse. De plus, parmi les autres observations, certaines ont été demandées par Maclaurin lui-même et les comptes-rendus lui sont adressés directement, d'autres en revanche ont été rapportées par d'autres voies et n'ont pas été commandées par Maclaurin. Néanmoins, dans le cas d'une éclipse de soleil, phénomène relativement rare, Maclaurin a été le moteur et l'instigateur d'une série d'observations. Cela nous révèle deux choses. La première est qu'à travers les personnes aussi éloignées d'Édimbourg, Maclaurin a tout un ensemble de relations qui s'intéressent aux sciences et qu'il peut mobiliser pour rendre compte de phénomènes liés à la nature. La seconde est que, parmi les observateurs, certains seront des membres fondateurs de la Société philosophique d'Édimbourg[543]. En effet, le rôle de Maclaurin et de ces observateurs n'est pas négligeable dans la création de cette société savante.

---

[542] Cet homme deviendra le 14ème comte de Morton à la mort de son père, le 4 janvier 1738. Ainsi, lorsque nous ferons référence à un fait qui aura lieu après 1738, nous le nommerons comte de Morton et plus Lord Aberdour.

[543] Le comte de Morton (alors Lord Aberdour), John Hope, John Clerk, Fullarton de Fullarton, James Short et Maclaurin.

2. La création de la Société Philosophique d'Édimbourg : une vision « maclaurinienne » des sciences.

Roger Emerson et Steven Shapin ont donné[544] une histoire de cette société et ont montré le rôle que Maclaurin a joué dans la création de celle-ci. Notre propos, ici, est de préciser ce rôle pour pointer son importance.

À la suite de l'observation de l'éclipse, Maclaurin propose à certaines personnes qui ont participé à cette entreprise de continuer et d'observer une comète fin avril début mai, chose qu'il ne peut faire de chez lui[545]. Il leur propose aussi de créer une société savante à Édimbourg. Cette société aurait pour but de promouvoir l'étude et la connaissance de la nature dans ce pays et de développer les sciences autant qu'ils le peuvent. Cette société prend comme référence les sociétés savantes et académiques des pays étrangers[546]. Maclaurin pense à la Royal Society, à l'Académie des sciences de Paris ou à celle de Berlin.

Ainsi, lord Hope, lord Aberdour, Andrew Plummer, Alexander Monro, John Pringle, John Clerk, et Lyne sont contactés par Maclaurin pour lui donner leurs avis. Et la réponse de ces savants est unanime : il est utile pour la ville d'Édimbourg et pour l'Écosse d'avoir une société savante. Quasiment tous appartiennent à d'autres sociétés, locales, londoniennes ou étrangères. Ainsi les médecins Monro, Plummer et Pringle appartiennent à la société médicale d'Édimbourg[547], fondée en 1731. Cette société composée de

---

[544] Sur l'histoire de la société philosophique d'Édimbourg, voir Shapin (1974a), pp. 6-10, et surtout Emerson (1979), (1981) et (1985). Pour la période qui nous intéresse ici, voir Emerson (1979)

[545] « I was much obliged to you for the Observations concerning the Comet. (…) I am at a great loss for want of a proper place for looking out for such appearances, my windous in the College having a view southwards only. » in Mills (1982), p. 71.

[546] « Some Gentlemen of your acquaintance have been talking together of forming a society for promoting the Study of Natural Knowledge in this Country and for the advancement of the Science as much as this may be in their power, in imitation of those that have been established of late in most Countrys where learning is cultivated. » in Mills (1982), p. 71.

[547] Pour une histoire du développement de la médecine à Édimbourg et l'influence des sociétés médicales dans cette ville voir par exemple Emerson (2004).

médecins d'Édimbourg n'est plus vraiment active. C'est sur cette société déjà existante que Maclaurin et les fondateurs vont s'appuyer pour créer leur société. Dans la lettre que Maclaurin adresse à John Clerk le 5 mai 1737, il espère que les statuts sur lesquelles ils travaillent (et surtout Maclaurin) seront prêts pour début juin. Le mercredi avant le 9 juin, la société pour le développement des arts et des sciences et en particulier le savoir naturel (« Natural Knowledge ») est créée. Lors de cette inauguration, vingt et un membres étaient présents : Lord Lauderlane, Aberdour, Clerk, Hope, St Clair, Sir John Clerk, les docteurs Clerk, Stevenson, Pringle, Plummer, Porterfield, Boswell, Alston, ainsi que Craw, Monro, Wallace, Gray, Short, Lynn, St Clair et Maclaurin. Ils ont approuvé les statuts et ont décidé que le nombre de membres serait limité à quarante-deux[548]. Ces derniers sont séparés en deux catégories, les ordinaires et les extraordinaires. Les premiers doivent présenter lors des réunions mensuelles des communications, les seconds ne sont pas obligés de proposer un papier. Un conseil de treize membres est élu, dans lequel seront choisis le président, les deux vice-présidents, le trésorier et les deux secrétaires. Pendant la première session, Lord Aberdour est élu président, les deux vice-présidents sont sir John Clerk et Dr Clerk. Les deux secrétaires sont Plummer et Maclaurin. Le trésorier est Lynn[549]. Nous pouvons remarquer que les responsables de cette académie sont parmi les instigateurs de ce projet.

[548] « There met 21 in number; Lord Lauderdale, Aberdour, Clerk, Hope, St Clair, Sir John Clerk, Drs Clerk, Stevenson, Pringle, Plummer, Porterfield, Boswell, Alston ; Messrs Craw, Monro, Wallace, Gray, Short, Lynn, St Clair and I. A plan that had been formed by some gentlemen was read, and after some alterations, was approved. (…) It was agreed the number should not exceed 42, at least for some time. There were several named who had accepted, but were not present, as Lord Minto, Sir James Dalrympe, Mr Fullarton of Fullarton, Mr Scott of Scotstarvet, Drs St Clair, Rutherford, Simpson, and Martin at St Andrews? There were some who had not been spoke to as yet being at a distance, but had been named from the first; as Lord Advocate, Lord Elphingston, Mr James Stirling, and some others I cannot just now recollect. » in Mills (1982), pp. 72-3.

[549] « That the meetings of the society may be employed about those things which relate to the design of their institution, a council was chosen of 13 for the management. A president, two vice presidents, two secretaries, and a treasurer were chosen. In the election of those, regard was had to such as live in or near the town, for a considerable part of the year. (…) Lord Aberdour was chosen president, Sir John Clark, and Dr Clark, vice presidents, Dr Plummer and I, secretaries, Mr Lynn, treasurer. » in Mills (1982), p. 73.

Le projet et les statuts de cette société ont été publiés en 1739[550] sous le titre *Proposals for the Regulation of a Society For Improving Arts and Sciences, And particularly Natural Knowledge*. Dans ces statuts, est repris ce qui a été écrit dans le paragraphe précédent. Des articles permettent de donner le ton de cette société. Par exemple, toute discussion d'ordre politique ou religieuse est bannie des réunions de cette société. La raison est simple, cela entraîne souvent des conflits, des heurts verbaux ou même physiques qui sont eux-aussi interdits au sein de cette société. Même lors du débat sur des sujets autorisés, les échanges doivent être polis, cordiaux et si deux personnes sont en profond désaccord, leurs échanges doivent être faits à l'extérieur de la réunion[551]. Ceci est une des caractéristiques fortes de Maclaurin. Le refus des disputes et des désaccords était une des raisons de n'être pas devenu pasteur. Les polémiques qu'il a vécues (ou même qu'il vit à cette époque) l'ont profondément marqué et il ne veut pas à nouveau être la cible d'insultes. C'est aussi pour cela qu'un des articles concerne la non propagation des idées sans l'avis exprès de l'auteur, ceci pour éviter le plagiat ou d'être accusé de plagiat. L'autre caractéristique de cette société est l'exigence de rigueur dans les expériences faites par les membres de la société et dans les démonstrations des propositions. Toutes expériences faites par un membre, soit avec ses propres instruments ou ceux de la société doivent être produites de façon minutieuse et avec la plus grande exactitude[552]. Ceci nous

---

[550] *Proposals for the regulations of a society for improving arts and sciences…*, National Library of Scotland, 6.296(73). Nous tenons à remercier Roger Emerson pour la copie de cette édition.

[551] « XXVI. IN the Meetings of the Society, no Conversations are to be allowed on Religious, or Political Disputes. But this is not to be understood as if these Reflexions should be unacceptable, which Enquiries into Nature suggest concerning the Wisdom of its Author, and the Beauty of its Workmanship. XXVII. IN their Conversations, any warmth that may be offensive or improper for Philosophical Enquiries, is to be avoided. No injurious Insinuations or Expressions of Dislike are to be suffered. Every Member is to have the Intention of the Their Meetings any Remembrance of Differences, if there happen to be any, betwixt him and any other Member. » in *Proposals*, p. 12.

[552] « XXIX. AUTHORITY is to be held of no Weight in their Reasonings. The shew of Learning, and Quotation of Authors sparingly used in their Papers. Things to be mined, not Words. Arguments to be chiefly drawn from proper Experiments and clear Consequence deduced from them, or from evident Propositions. Metaphysical Subtiltie not to be insisted on. XXIX. IN making Experiments, and reporting then, great

rappelle la méthodologie énoncée avec force dans l'*Account of Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries*.

Cette société continue de publier les volumes des *Medical Essays*[553] qui appartenaient à la société médicale d'Édimbourg[554]. Ce périodique changera de nom à la suite pour devenir *Essays and Observations Physical and Literacy*[555] en 1754. Cette deuxième version connaîtra une réputation relativement importante et une traduction française paraît[556]. Comme dans beaucoup de sociétés savantes, les papiers lus en séances sont repris en partie dans les *Medical Essays* ou dans les *Essays and Observations*. Ainsi, nous retrouvons deux articles de Maclaurin que celui-ci a lus en séances[557]. Néanmoins, les communications ne donnent pas toujours lieu à une publication directement. Maclaurin préfère les garder pour lui car il ne trouve pas de telles communications suffisamment finies[558]

Caution and Accuracy is to be observed. The Members who report Experiments and Observations are to sign them. » in *Proposals*, pp.12-3.

[553] « *A* Society *being formed in this Place for the Improvement of* Natural Knowledge*, in which all the branches of medicine are included ; and the members of our Society being adopted into this one, the Design of publishing more Volumes of Medical Papers was dropt some time ago.*

It is now at the Desire of the Gentlemen of this new Society that we cause this Fifth volume to be printed, which is so much enlarged by the papers which they generously published us from their Repository, that we are obliged to divide it into two parts. The first of these, containing the Register of the Weather, Account of epidemical Diseases, Papers on the Materia Medica, Chemie, Anatomy, Animal O Economy and Surgery, is now in your Hands, thro' the Impatience of the Booksellers, who would not delay the Publication of this part till the second, containing the Papers on the Theory and Practice of Medicine, the Improvements made elsewhere, Lift of Books published and Nouvelles Literaires, was also printed, tho' it is ready for the Press. » in Medical Essays (1742), préface non paginée

[554] « Mon premier soin, Monsieur, après avoir reçu votre lettre a été d'envoyer chercher les Essais ou Memoires de la Société chez un de mes amis qui les a, et une traduction du premier volume, que va paroître au premier jour, pour m'instruire des reglemens et des intentions de la compagnie. C'est ce que j'ai fait par la lecture de la préface, dont j'ai admiré la Sagesse. » in Mills (1982), p. 323.

[555] Les trois volumes parus de ce périodique ont été réédités par la société royale d'Édimbourg en 2001 aux éditions University Chicago Press. À notre connaissance, cette réédition n'est pas présente en France.

[556] Il n'y a eu de traduction française que pour le premier volume, celui de 1754, qui paraît en 1757.

[557] Maclaurin (1754a) et Maclaurin (1754b).

[558] Il demande expressément de ne pas publier un papier qu'il a lu sur la figure de la Terre. Folkes

Ainsi, Maclaurin est l'un des deux secrétaires de cette institution. Le but des secrétaires est de recevoir les contributions des membres et des correspondants, ils écrivent les minutes, les ordres et résolutions de la Société. Ils mettent à jour les registres des statuts, font des copies des lettres et des demandes des correspondants. Un des deux secrétaires (c'est Maclaurin) est en charge des livres, des instruments achetés ou reçus qui sont recensés dans des registres[559]. Leur rôle est essentiel pour le bon fonctionnement de la société. Et cela est une charge de travail très importante. Ils sont aussi en relation avec un comité dont le but est de recenser les communications qui méritent d'être publiées dans les *Essays*. Les deux secrétaires (le deuxième étant Plummer) se partagent la tache, en deux catégories, la première concerne les parties générales de la Philosophie Naturelle à savoir la géométrie, l'astronomie, la mécanique, l'optique et la géographie, la seconde concerne la médecine, l'anatomie, la chimie, la botanique, la minéralogie et l'histoire naturelle[560] Maclaurin a en charge la première partie, et Plummer la seconde. Ainsi tout ce qui aura un lien avec ses préoccupations premières, tombera dans les mains de Maclaurin.

Ce dernier prend à cœur cette fonction. En plus d'être un des fondateurs, il est un des promoteurs de cette Société. Dans ses relations épistolaires avec des savants qui ne sont pas forcément de cette Société, il rend compte de la vie intellectuelle qui a lieu lors des réunions mensuelles. Le but de cette Société est très proche des conceptions de Maclaurin. Nous retrouvons dans les statuts, son projet de développer les différentes

---

[559] « XIV. (…) The Secretaries are to write down all the Transactions, Orders, and Resolutions of the Society, and afterwards to record them in a Journal-Book ; to insert all the Statutes or Laws in a Statute-Book ; to keep Copies of all Letters and Queries by written Order of the Society ; to lay up in a safe Place the Memoirs of Members and Correspondent, taking care that no surreptitious Copies or Excerpts be taken from any of the Books or Papers of the Society. One of the Secretaries, whom the Council shall appoint, shall have the Charge of all Books, Instruments, Models and Curiosities of Nature or Art, gifted to, or purchased by the Society; at the Delivery of which to the Secretary; their Names or Titles, with a Value fixed by the Council, are to be inserted in two Books or Catalogues, under their proper Classes. One of which Books is to be kept by the President and the other by the Secretary appointed. » in *Proposals*, p. 6.

[560] « THE Provinces of the two Secretaries may be distributed in such a Manner, that one of them shall have the collecting and reporting what relates to the general Parts of Natural Philosophy ; the other, what is more particular. Geometry, Astronomy, Mechanicks, Opticks, and some of the general Parts of Geography may belong to the former. Anatomy, Medicine, Chemistry, Botany, what relates to Metals and other Minerals, and the natural History of the Country, to the latter. » in *Proposals*, p. 6.

branches de la philosophie naturelle, en particulier les mathématiques, la physique, l'optique. Les parties médicales qui sont des restes de l'ancienne société ont toujours leur place. Leur poids est important au départ car il y a un stock de communications à écouler et il reste quatorze médecins parmi les membres qui sont au nombre de quarante-cinq[561]. Maclaurin présente plusieurs communications lors des séances de cette société. Les sujets, qu'il choisit et qui sont parvenus jusqu'à nous, concernent pour la plupart la figure de la Terre et le débat autour de ce sujet, des problèmes d'astronomie et d'autres concernant la physique[562]. Parmi les savants qui deviendront membres après 1739, certains sont, soit des amis très proches de Maclaurin, comme Martin Folkes qui est nommé par la seule volonté de Maclaurin, soit des étrangers qui sont des connaissances de Maclaurin. C'est ainsi que, dès 1739, Dortous de Mairan est nommé membre[563]. Il est alors le seul étranger à être dans cette société. La raison pour laquelle ce dernier a été choisi est difficile à donner. La plus probable est que Maclaurin et d'autres étaient déjà membres de la *Royal Society* et avaient donc des relations avec cette société savante, en revanche, personne n'était membre de l'Académie royale des Sciences de Paris. Or Maclaurin a des relations avec différents membres de cette Académie, en particulier avec Dortous de Mairan. Avoir parmi les membres des académiciens ou des savants étrangers de grands renoms, augmente le prestige de la Société à la fois dans la ville d'Édimbourg, en Écosse mais aussi à l'extérieur de l'Écosse et surtout sur le continent. Du vivant de Maclaurin, deux autres étrangers à

---

[561] À la suite des *Proposals*, il y a une liste des membres de cette société en 1739. C'est à partir de cette liste que nous avons compté le nombre de médecins et chirurgiens.

[562] «I gave two papers; the first was on the figure of the earth; when I shewed how to deduce the *ratio* of the diameter from observations accurately, and applied it to the Jamaica experiment, and the mensuration of the Polar circle by the French. The second was an account of asset of experiments I had made concerning the quality of the [air] by which it rarefies flame; and a project for measuring the variations of this quality with a diary I had kept for a month.» in Mills (1982), pp. 292-3. De plus, lors de la séance du 4 janvier 1739, il a aussi fait une présentation de ces travaux sur le sujet. In Mills (1982), p. 309.

[563] « Votre lettre du 14/25 avril dernier [en 1739], par laquelle vous m'apprenez l'honneur que m'a fait la Société d'Édimbourg, en me donnant une place dans son illustre corps, n'est parvenuë jusqu'à moi que depuis trois jours. » in Mills (1982), p. 322.

l'Écosse seront élus membres : Voltaire[564] (en 1745) et Martin Folkes (en 1743). C'est bien grâce à la renommée de Maclaurin que la société d'Édimbourg se fait connaître en Angleterre et à Paris. Nous allons nous pencher sur deux projets dans lesquels Maclaurin a eu une part non négligeable et dont la société a été un des moteurs.

3. L'influence de cette société sur la vie écossaise : le cas de l'expédition dans les îles Shetland et Orkney

À l'instar de ce qui s'est fait en France au début du siècle c'est-à-dire de redessiner les cartes côtières du Royaume[565], le comte de Morton, qui a des intérêts dans les îles Orkney et Shetland, demande à la Société Philosophique d'Édimbourg, de dessiner de nouvelles cartes du nord de l'Écosse[566]. Ainsi les élites savantes locales sont mises à contribution pour que ce voyage scientifique au nord de l'Écosse soit une réussite. Maclaurin ne pouvant y aller écrit un mémorandum[567] de ce qui doit être réalisé. Un journal de toutes les observations effectuées tout au long de l'expédition doit être tenu. Ces observations sont séparées en catégories : observations astronomiques, des marées, des météores, histoire naturelle, Antiquités. Les observations dépassent largement le cadre de la cartographie et doivent rendre compte de toutes les branches correspondant aux buts de la Société Philosophique d'Édimbourg. En ce qui concerne les recherches en histoire naturelle ou sur les Antiquités, Maclaurin ne donne pas beaucoup d'indications. Pour l'étude des Antiquités (« antiquities »), il indique qu'il vaut mieux se référer à Mac

---

[564] « J'ai l'Honneur de vous apprendre, par l'Ordre de la Societe Philosophique d'Edinbourgh, quils vous ont etês aujourdhuy, d'un commun sentiment, un de leur Membres.(…) 4ème Avril 1745. » in Mills (1982), p. 125.
[565] Voir entre-autres Pelletier (2002).
[566] Sur l'histoire de la cartographie en Écosse, voir Withers (2000) et Withers (2001).
[567] Mills (1982), pp. 441-5.

Farland[568], qui semble être un membre de la Société d'Édimbourg (élu entre 1739 et 1743)[569]. Il se décharge de la partie histoire naturelle en décrivant quatre grandes parties qu'il faut confier à quelqu'un d'autre[570]. En revanche, ce qui l'intéresse le plus est bien ce qui concerne l'astronomie, les marées et les météores. Toutes ces observations doivent être l'objet de la plus grande attention pour qu'elles soient correctes. Il semble que Maclaurin conseille James Short, le fabricant de matériels d'astronomie, d'effectuer les observations sur place. Chercher le méridien et la latitude pour chaque lieu sont les travaux principaux. Pour cela, il faut des instruments de précision. Le comte de Morton possède ses propres instruments comme l'indique l'observation de l'éclipse du soleil en 1737. De plus, la Société philosophique d'Édimbourg en possède aussi. Ainsi, pour toutes ces observations, les instruments de Morton et une partie de ceux de la Société philosophique seront utilisés.

Le rôle de Maclaurin dans ce projet est clair. C'est lui qui donne les grandes directives pour que cette expédition soit couronnée de succès. Ainsi, outre les relevés topographiques et astronomiques pour la réalisation de cartes, un autre but de cette expédition est de fournir une autre source de vérification de la forme de la Terre. Cette expédition se veut être, dans une moindre mesure, le pendant des expéditions françaises en Laponie ou au Pérou. Maclaurin profite de cette expédition à l'extrême nord de l'Écosse (à peu près à la même latitude qu'une partie de la Norvège) pour avoir de nouvelles mesures et ainsi pouvoir les comparer avec celles de la Laponie. La figure de la Terre est un sujet très présent chez Maclaurin, car s'il parvient à montrer que la Terre a la forme d'un sphéroïde aplati aux pôles alors une partie de la théorie newtonienne sera validée. Nous reviendrons sur le problème de la figure de la Terre dans le prochain chapitre. Néanmoins,

---

[568] « Antiquities. This I leave to Mr Mac Farland, who no doubt will endeavour to trace the origin of the people, and see if there are any remains of Druids or of paganism ther as is said of some other Islands, &c. &c. » in Mills (1982), p. 445.

[569] Il n'est pas sur la liste de membres élus avant 1739, et Maclaurin le considère comme un des membres de la société dans une lettre de 1743. in Mills (1982), p. 96 et *Proposals*.

[570] « Natural Philosophy (…) This Article ought to have been supplied by some other person » in Mills (1982), p. 445.

nous pouvons signaler que les résultats provenant de cette expédition semblent convenir aux défenseurs de la position newtonienne[571].

4. Le projet de construction d'un observatoire d'astronomie : un projet dans la continuité de la société.

À la fin de l'article sur les observations de l'éclipse du soleil de 1737, Maclaurin signale à Martin Folkes le manque d'un observatoire en Écosse et en particulier à Édimbourg. Il ajoute qu'il travaille à ce qu'un observatoire se construise prochainement dans cette ville[572]. En effet, dès 1736, il prend contact avec les instances de la municipalité d'Édimbourg pour proposer la construction d'un observatoire[573]. Mais, rien n'est signalé dans les minutes du conseil municipal d'Édimbourg jusqu'en 1740[574].

Ainsi, juste après l'expédition dans les îles Shetland et Orkney, Maclaurin, dans le même désir de recueillir de plus en plus de données relevant de l'astronomie, s'attaque à un projet beaucoup plus ambitieux : construire un observatoire d'astronomie à Édimbourg. Pour cela, il a besoin de fonds. Tout naturellement, il se tourne vers le conseil municipal d'Édimbourg. En effet, la ville est pourvoyeur de fonds pour le développement des sciences même si George Drummond n'est plus Lord Provost à cette époque, de plus, c'est bien la ville qui gère aussi en grande partie l'université d'Édimbourg. Nous retrouvons

---

[571] « I'm glade to hear that the Shetland observations of the pendulum, tend to restore the Earth to her former shape: the french have a strange humour for changing fashions, even of the human figure, as well as dress, and I suspect their Accademists have endeavoured to cause old mother Earth conform her shape to that of their ladys at Versailles, which at present happens to be shorter waisted, than Nature made them. » in Mills (1982), p. 448.

[572] « You will perceive by this Account that we are no Observatory in this place ; but we are in hopes that some time or other we shall obtain one from the Patrons of the University. » in Maclaurin(1738), p. 194. ou Mills (1982), p. 284.

[573] « Application have been formerly made several times to the Hon^{ble} Magistrats of Edinburgh for this purpose and in particular in the year 1736 when it almost brought to a Conclusion but that attempt was interrupted and disappointed by the publick misfortunes. » in Town Council Minutes, vol. 62, p. 68.

[574] Sur l'histoire de l'observatoire d'Édimbourg, voir Bryden (1990), en particulier pp. 445-58.

dans les minutes du conseil municipal du 10 juin 1741 la requête de Maclaurin pour la construction d'un observatoire. L'argumentation de Maclaurin a plusieurs points.

Étant donné que les membres du conseil municipal sont en majorité des marchands, le premier argument porte sur les fruits que peuvent apporter les connaissances astronomiques sur la navigation et le commerce. Pour une contrée comme l'Écosse où le développement économique est important, maîtriser la navigation permet de développer le commerce avec les îles d'une part mais aussi avec le continent et même au sein de la Grande-Bretagne[575]. Les membres du conseil municipal d'Édimbourg sont responsables de la gestion de l'université et donc de l'éducation offerte à la jeunesse dans cette ville. Un observatoire sert aussi à l'éducation des jeunes hommes. La connaissance de l'astronomie est importante pour cette éducation, pour la défense de la théorie newtonienne et de la philosophie naturelle, et pour l'utilisation de ce savoir après les études[576]. Cela ne concerne pas uniquement les étudiants de l'université, des observations astronomiques pourront être organisées pour toutes les personnes de bonne volonté, hommes ou femmes. Et cela participe au développement intellectuel de la société édimbourgeoise. Après avoir abordé l'angle du développement économique et celui de l'utilisation dans l'éducation, Maclaurin insiste en faveur d'une recherche astronomique poussée à Édimbourg qui servira à une meilleure connaissance de la géographie du pays[577]. Or, en 1741, malgré la possession d'instruments astronomiques de bonne facture, cela reste impossible car aucun lieu idéal

---

[575] «The usefullness of Astronomical Learning especially to those Nations whose prosperity depends on Commerce and Navigation is so well known that it is unnecessary to insist on it. » in Town Council Minutes, p. 67.

[576] «If it is considered as a part of Education only, it deserves Encouragment, as it fills the Minds of Youth with great and noble views, and has a direct tendency to instil the best sentiments. » in Town Council Minutes, p. 67.

[577] « An observatory here could not be of service, for ascertaining the Geography of this country even of the distant parts, by the opportunity Gentlemen would have to learn tho manner of making accurate observations and the correspondence of this kind over the country » in Town Council Minutes, pp. 67-8.

n'existe ni à l'université ni ailleurs[578]. Ainsi, le projet d'un observatoire astronomique à Édimbourg est la suite logique à la fois de l'éclipse du soleil de 1737 et de la création de la Société philosophique cette même année. Cela participe au développement économique, social et intellectuel de l'Écosse en général et en particulier d'Édimbourg. C'est ainsi que le conseil municipal perçoit le projet de Maclaurin, c'est-à-dire qu'un observatoire ne peut qu'être d'une grande utilité à Édimbourg[579].

Pour convaincre encore plus les membres du conseil, Maclaurin propose, pour récupérer des fonds, d'organiser des cours de philosophie expérimentale pendant l'été. Les sommes récupérées lors de ces cours publics sont destinées à ériger cet observatoire[580]. De plus, il n'a pas évoqué ce projet devant le conseil les mains vides. En effet, il affirme qu'il a déjà en possession de l'argent provenant d'un bienveillant bienfaiteur, cent dix livres sterling[581]. Ce bienfaiteur n'est autre que le président de la Société philosophique d'Édimbourg, le comte de Morton qui le 22 avril 1740 donne cent livres sterling pour la construction d'un observatoire au sein de l'université d'Édimbourg[582]. De plus, c'est aussi le comte de Morton qui propose d'offrir des instruments d'astronomie pour l'observatoire[583]. Avec Maclaurin, de nombreuses personnes soutiennent ce projet. Les

---

[578] « We are already provided with several usefull Instruments, but are at a loss for a Convenient place for unseing them or even for shewing them to the students or others ; having no view but Southwards, and that Confined by the Town Wall, which is higher than our windows. » in Town Council Minutes, p. 68.

[579] « Which having been considered Did unanimously approve of the same as highly benificial to the Nation & this place in particular & Did Recomend it to the members of the council & other inhabitants to promote a subscription for building of the said Observatory » in Town Council Minutes, pp. 69-70

[580] « In order to rise what money may be further necessary for Erecting the Observatory, and in a manner that may not be Burdensome to the Good Town, Mr McLaurin proposes to give a course of experimental Philosophy this summer, to begin the 22d of June, and that all the money subscribed for hall be paid in to such Gentlemen as the Town Council shall be pleased to appoint to see if applied for this purpose » in Town Council Minutes, pp. 68-9.

[581] « There is however already a fund of about a hundred and ten pounds sterling for this purpose » in Town Council Minutes, p. 68.

[582] « I have directed my Agent Mr David Anderson to pay in to your hands One Hundred pounds Sterling, which I have given towards building an Observatory within the College of Edinburgh. » in Mills (1982), p. 79.

[583] « And a worthy Gentleman who is possest of a set of excellent Astronomical Instruments of a considerable value, has assured us, that he will bequeath them by is latter will to the Observatory, if it be built soon ; and has already given a curious Magnetick needle to it ; promising further Twenty pounds sterling for purchasing Instruments as soon as it is built » in Town Council Minutes, p. 68.

cours publics rapportent beaucoup d'argent et la souscription publique marche bien. Lors de l'année universitaire suivante, Maclaurin met à contribution ses propres étudiants pour donner des cours publics pour le bénéfice de la construction entre autres de l'observatoire. De plus ces cours ont une vertu pour ses étudiants : cela les oblige à étudier afin de pouvoir répondre aux questions des ladys[584].

Le 3 février 1742, le conseil municipal demande à Maclaurin de payer un loyer et une partie des rénovations d'une maison que ce dernier utilise à l'université[585]. Mais cela n'est qu'une excuse pour pallier le retournement des magistrats de la ville à l'égard de la construction de l'observatoire. Au début de l'année 1743, les défenseurs de ce projet ont récolté environ 300 livres sterling et espère en avoir d'autres, par exemple, Lord Hope promet de fournir de l'argent. Mais Maclaurin est toujours en but avec la mairie qui avance dans le projet lentement et même à reculons. Ceci a pour effet de l'énerver. La personne responsable à l'université de l'observatoire aura la possibilité d'occuper une maison située à côté de l'observatoire dans laquelle il y a aussi des cabinets d'expériences, mais elle devra payer une partie de la construction de l'ordre de huit pour cent. Maclaurin accepte à condition que la municipalité prenne en charge une grande partie de la construction (en particulier le toit) ce qu'elle refuse. D'après Maclaurin, la ville d'Édimbourg se désengage

[584] « One of my scholars gives a short course of experiments here upon my Set of instruments in opposition to two ignorant strollers who have come here. It is for the benefit of the Infirmary, Workhouse and Observatory. And several Ladies of quality attend. This I hope will incite the Young Gentlemen to study, that they may be able to answer the questions of the Ladies. » in Mills (1982), p. 87.
[585] Town Council Minutes, 3 février 1742, vol. 62., p. 255.

du projet. Cela a pour effet, en plus, de le décourager[586], car il a déjà préparé les plans et la disposition de l'observatoire[587].

Néanmoins, un an après, Maclaurin revient à la charge et envoie, le 8 mai 1744, une pétition[588] au conseil municipal pour la construction à la fois de l'observatoire et de la maison attenante. Il déclare que les fonds sont suffisamment importants pour commencer la construction. Il propose qu'une partie de son salaire soit reversée comme rente ou loyer de la construction de la maison attenante sans pour autant que cela dépasse vingt-cinq livres sterling annuel. De plus, les pierres nécessaires à la construction des bâtiments peuvent être récupérées par la destruction de bâtiments vétustes appelés à être remplacés par l'observatoire et la maison. Dans son ensemble, le conseil municipal accepte la volonté de Maclaurin[589], en demandant de fournir des plans précis. Ce conseil déclare quand même que la destruction des bâtiments et leur remplacement prendront du temps, et que les travaux ne pourront commencer que l'année suivante. Mais un évènement très important, qui bouleverse le pays tout entier empêchera le commencement de la construction des nouveaux bâtiments : la montée Jacobite. Nous y reviendrons à la fin de notre étude.

---

[586] « Last night I had a meeting with the Provost & Magistrates about building me a house near to the Observatory. They insisted on my paying 8 per cent. I agreed to it on condition they would subduct the expence of the roof which is ruinous and must be supported by them at any rate. They did not agree to this, tho' the Observatory is to be build without giving them any trouble. Lord Hopeton has sent me word that he is to contribute. The slowness I meet with on the side of the town is a little discouraging, but they are poor and I must get over all difficulties, now I am so far engaged, as well I can. » in Mills (1982), p. 1103.

[587] « I am to bring up the plan & section of the Observatory, our funds amount now is about 300. L. & yesterday I had a message from L[d] Hopeton that he is to give something. Our town however are slow and backward. » in Mills (1982), p. 101.

[588] « That, a considerable fund being now provided for the building an Observatory in the College of Edinburgh the said observatory cannot be so advantageous to the students & to the publick unless the professor live near it. Therfore M[r] Mac Laurin is willing to pay six per cent of that shall be necessary for building such an house & sitting it for him, & to oblige himself to grant receipt for this rent as so much of the annual salary payable to him as it shall amount to, providing it does not exceed twenty five pounds per annum. » in Minutes of Edinburgh Town Council, vol. 64, non paginée. Cité en Annexe.

[589] « The Committee were further of opinion that the Good Town does give the old materials of the buildings that were to be taken down gratis as the report bears which having been considered by the magistrates & Councill They with the Deacons of crafts ordinary and Extracts approved there of and Recommended to the Dean of Gild to call for the Colledge Committee to assist instaking out the ground upon which the said building is to be made and Remitt to the sd Committee to make out and lay before the Councill an Estimate of the whole work before the ground is broke or any Ledge or warrand is granted. » in Minutes of Edinburgh Town Council, p. 245. Cité en Annexe.

C. Le Treatise of Fluxions

1. Une réponse à Berkeley

a) Les critiques de Berkeley

(i) Une critique des fondements

La littérature sur George Berkeley est abondante[590], elle touche aussi bien ses positions philosophiques, épistémologiques ou religieuses. En particulier, Douglas Jesseph[591] montre très bien les différentes positions d'ordre philosophique et épistémologique que Berkeley prend vis-à-vis des mathématiques. Nous nous appuierons sur cette littérature. Ce qui nous occupe ici n'est pas de donner une vision exhaustive des travaux de Berkeley, mais, de pointer à grands traits les caractéristiques principales des différentes critiques que Berkeley émet à propos des infinitésimaux et des fluxions.

Dans les différents écrits de Berkeley, la critique des fluxions et des infiniment petits est largement présente et est un de ses soucis majeurs à la fois philosophique et mathématique. Cette critique donne à lire plusieurs attaques qui sont de différents ordres. Nous allons identifier ces différences en prenant quelques exemples qui résument assez bien sa vision du calcul différentiel et en montrant pourquoi il rejette ce type de mathématiques. Nous dégageons trois grandes critiques dans l'ensemble de ses ouvrages (même si la majeure partie de sa critique se situe dans son *Analyste*, dans les *Notes philosophiques* et dans le *Traité des Principes de la Connaissance Humaine*). La première

---

[590] Nous pouvons citer entre-autres, Bennet (1965), Davie (1965). Sur Berkeley et les mathématiques, voir entre autres, Jesseph (1993a), Pycior (1987). Pour plus de détails, prendre contact avec la société internationale sur Berkeley qui propose une liste de monographies sur la pensée et la vie de l'évêque irlandais à la page http://www.georgeberkeley.org.uk/bookshop.htm

[591] Jesseph (1993a)

des trois concerne la relation de Berkeley avec le savoir, c'est-à-dire sa conception philosophique du savoir et son appréhension. La deuxième concerne l'utilisation d'un langage et sa relation avec le sens. Enfin, Berkeley critique fermement le calcul newtonien parce que le procédé démonstratif utilisé ne lui paraît pas rigoureux.

Avec la parution en 1734 de l'*Analyste*, Berkeley cherche à répondre à plusieurs questions sur les fluxions et des infiniment petits. Ces deux méthodes sont à la base des avancées en mathématiques au 17ème siècle car elles ont permis des résultats jusque là inconnus et largement supérieurs à ceux trouvés par les Anciens. Berkeley se pose la question de la validité et de l'utilité de ces méthodes.

> « La méthode des fluxions est la clé universelle à l'aide de laquelle les mathématiciens modernes révèlent les secrets de la géométrie et, par suite, de la Nature. Et, comme c'est elle qui les a mis à même de dépasser de façon si frappante les Anciens dans la découverte des théorèmes et la solution des problèmes, l'exercice et l'application en sont devenus la principale sinon la seule occupation de tous ceux qui, de nos jours, passent pour de profonds géomètres. Mais cette méthode est-elle claire ou obscure, cohérente ou contradictoire, démonstrative ou incertaine ? Je vais (…) en faire la recherche avec la plus grande impartialité »[592].

Loin de rejeter les résultats trouvés par cette méthode, comme nous le verrons plus bas, c'est le fondement qu'il considère comme faux : « je ne discute en rien vos conclusions, mais seulement votre logique et votre méthode. Comment démontrez-vous ? De quels objets vous occupez-vous et les concevez-vous clairement ? Avec quels principes progressez-vous ? Quel en est la validité ? Et comment les mettez-vous en œuvre ? »[593] C'est à toutes ces questions que Berkeley s'attache à répondre dans l'*Analyste*.

---

[592] Berkeley (1987), vol. II., pp. 273-4. Pour les citations tirées des ouvrages de Berkeley, nous avons utilisé la traduction française et les commentaires des œuvres de Berkeley sous la direction de Geneviève Brykman, indiqué par Berkeley (1987). *L'Analyste* dont le traducteur est Michel Blay, se trouve dans le second volume entre les pages 257-332.
[593] Berkeley (1987), vol. II., p. 292.

Pour être cohérent avec la question qu'il pose au début de *l'Analyste* sur la cohérence de la méthode des fluxions et pour éviter toute attaque sur la possible invalidité de son travail, il prend bien soin de définir avec précision ce qu'est une fluxion. Il en donne une définition qui est celle que l'on peut trouver dans l'introduction du *Tractatus de Quadratura Curvarum*[594] de Newton :

> « On suppose que les lignes sont engendrées par le mouvement de points, les plans par le mouvement de lignes (…). Et comme les quantités engendrées en des temps égaux sont plus ou moins grandes, selon la plus ou moins grande vitesse avec laquelle elles s'accroissent et sont engendrées, on a trouvé une méthode pour déterminer les quantités à partir des vitesses de leurs mouvements générateurs. Ces vitesses sont appelées fluxions, et les quantités engendrées sont appelées quantités fluentes. On dit que ces fluxions sont à peu près comme les incréments des quantités fluentes engendrées dans les plus petites particules égales de temps. »[595]

Tout d'abord, nous allons décrire un trait caractéristique de la philosophie des mathématiques[596] de Berkeley. Comme il l'annonce dans son *introduction aux principes de la connaissance humaine*, dans toute théorie, en particulier mathématique, il faut refuser catégoriquement tout recours aux idées abstraites :

> « Ce serait une affaire interminable autant qu'inutile, que de suivre les Scolastiques, ces grands maîtres de l'abstraction, à travers les multiples et inextricables labyrinthes d'erreurs et de disputes où les a menés leur doctrine des natures et notions abstraites. (…) Une attitude qui pourrait être contrecarrée pour peu qu'on considère les faux principes qui ont cours dans le monde ; et parmi eux, il n'y a aucun, pensé-je, qui n'ait une influence plus étendue sur les pensées des théoriciens, que celui des idées générales et abstraites. »[597]

Ainsi, Berkeley n'accepte pas les concepts abstraits et les remplace par une autre

---

[594] Newton (1704), pp. 165-6.
[595] Berkeley (1987), vol. II., p. 273-274.
[596] Jesseph, dans son premier chapitre, décrit bien les caractéristiques de la philosophie des Mathématiques berkeleyenne. Jesseph (1992), pp. 9-43.
[597] Berkeley (1987), vol. I, p. 311.

notion. Partant d'une idée particulière, bien précise, elle devient générale (mais pas abstraite) quand elle rend compte des idées analogues qui ont les mêmes caractéristiques. « Je crois que nous reconnaîtrons tous qu'une idée qui, considérée en elle-même, est particulière, devient générale quand on lui fait représenter ou tenir lieu de toutes les autres idées particulières de même sorte »[598]. Ainsi, Berkeley accepte les idées générales, ce qu'il refuse ce sont des idées abstraites, « il faut noter ici que je ne nie pas qu'il y ait des idées générales, mais seulement qu'il y ait des idées générales abstraites »[599]. Ce qu'il dit pour les idées quelconques, est toujours (et plus particulièrement) vrai en mathématiques. Il donne l'exemple, lorsque, lors d'une démonstration, le mathématicien trace une ligne noire d'une certaine longueur, c'est une ligne particulière, « elle est néanmoins générale quant à sa signification puisque, telle qu'on l'emploie ici, elle représente toutes les lignes particulières sans exception ; car tout ce qu'on démontre d'elle est démontré de toute ligne ou, en d'autres termes, d'une ligne en général »[600].

Berkeley considère que les fluxions, si elles existent, doivent appartenir soit à l'algèbre (ou l'arithmétique) soit à la géométrie c'est-à-dire à l'une des deux parties des mathématiques. Chez Berkeley, l'arithmétique et, par extension, l'algèbre ont pour objet la combinaison de signes et de symboles qui sont la représentation générale d'un nombre ou d'une quantité. Ils n'appartiennent pas au champ de l'abstraction, c'est-à-dire que les nombres n'existent pas en eux-mêmes à l'extérieur de l'esprit humain, ce qu'il leurs confère un caractère relatif dépendant de ce que l'homme qui les perçoit leur donne. Ainsi, dans le *Traité des Principes de la Connaissance Humaine*, on peut lire que

> « le nombre [est] entièrement une création de l'esprit, c'est ce qui sera évident à celui qui considère qu'une même chose peut porter plusieurs dénominations numériques différentes, selon que l'esprit la regarde sous différents rapports : c'est ainsi que la même étendue est une

---

[598] Berkeley (1987), vol. I., p. 307.
[599] Berkeley (1987), vol. I., p. 306.
[600] Berkeley (1987), vol. I., p. 307.

> ou trois ou trente-six, selon que l'esprit la considère eu égard à un pouce, un pied, ou un yard. Le nombre est si visiblement relatif et dépendant de l'entendement des hommes qu'il est étrange de penser que l'on eût pu lui donner une existence absolue, hors de l'esprit. »[601]

De plus, Berkeley considère qu'un nombre ne peut être à la fois quelque chose (non nul) et rien (nul). Car cela dépasse l'entendement. D'après lui, la quantité que l'on appelle fluxion peut être considérée comme un infiniment petit (nous le verrons plus bas), c'est-à-dire une quantité non nulle plus petite que n'importe quelle quantité finie. Par des manipulations de notations et de règles calculatoires, il arrive à la conclusion que cette fluxion est nulle. Et il conclut que

> « lorsqu'on dit : faites s'évanouir les incréments, c'est-à-dire faites que les incréments ne soient rien ou qu'il n'y ait plus d'incrément du tout, on détruit la première hypothèse suivant laquelle les incréments étaient quelque chose ou suivant laquelle il y avait des incréments, et cependant on conserve une conséquence de cette hypothèse, c'est-à-dire une expression obtenue grâce à elle. Ce qui (…) est une façon incorrecte de raisonner »[602].

Si les fluxions n'appartiennent pas au domaine de l'algèbre, alors, si elles existent, elles doivent appartenir à la géométrie. Chez Berkeley, la géométrie est la science du monde perceptible, du monde sensible. Ainsi, ce doit être l'imagination et les sens qui doivent être mis en jeu et non l'intelligence pure ou la mémoire. De fait, l'abstraction est aussi bannie de la géométrie, et le traitement algébrique de la géométrie est valable si les symboles utilisés correspondent à un objet géométrique clairement conçu, par exemple x peut correspondre à l'aire d'un carré de côté a et ici $x = a^2$. Comme la fluxion est une quantité infinitésimale, ou un mouvement naissant, peut-on représenter cette quantité géométriquement ? La réponse de Berkeley est négative, car il ne peut concevoir une quantité évanescente comme une quantité que l'on peut appréhender distinctement.

---

[601] Berkeley (1987), vol. I, p. 325
[602] Berkeley (1987), p. 285.

> « On dit que les plus petites erreurs ne doivent pas être négligées en mathématique : que les fluxions ne sont nullement des vitesses proportionnelles aux incréments finis, si petits soient-ils, mais seulement aux moments ou incréments naissants, dont on ne considère que le rapport et non la grandeur. (…) Or, de même que nos sens peinent et souffrent un grand embarras dans la perception des objets extrêmement petits, de même l'imagination, faculté qui dépend des sens, peine extrêmement et souffre un grand embarras pour former des idées claires des plus petites particules de temps, ou des plus petits incréments qui y sont engendrés, et beaucoup plus encore pour comprendre les moments, ou ce incréments des quantités fluentes *in statu nascenti* (à l'état naissant), dans leur toute première origine ou commencement d'existence, avant qu'ils ne deviennent des particules finies »[603].

Par exemple, on ne peut pas la représenter à l'aide d'une droite finie (*id est* un segment) car cette quantité est plus petite que n'importe quelle quantité finie, et on pourra donc dessiner un segment plus petit que celui représentant la fluxion, et être en contradiction avec la définition de la fluxion. De plus, si l'on pouvait la représenter (par un segment), ce serait au prix d'un lourd effort d'abstraction qu'il refuse. Ainsi, la fluxion n'est pas une quantité géométrique. Plus loin, il revient encore sur cela : « en vérité, [dit-il], puisqu'il est impossible de concevoir la vitesse hors du temps et de l'espace, hors d'une longueur finie ou d'une durée finie, ce doit être, semble-t-il, au dessus de la puissance humaine de comprendre même les premières fluxions »[604]. Par conséquent, Berkeley rejette les fluxions car elles ne peuvent être incluses ni dans le champ de la géométrie, ni dans le corpus de l'arithmétique ou de l'algèbre. Mais pour convaincre encore plus ses lecteurs, il donne d'autres types d'arguments.

(ii) Une critique langagière

[603] Berkeley (1987), vol. II., pp. 274-5.
[604] Berkeley (1987), vol. II., p. 319.

Le fait d'associer au mot une idée est une attitude omniprésente chez Berkeley. Nous retrouvons cela dans une grande partie de ses œuvres. Le mot n'a de sens et ne peut être utilisé seulement si d'une part il est associé à une idée et d'autre part que cette dernière ne soit pas abstraite. Ainsi, Berkeley refuse les infinitésimaux ou les fluxions car derrière ces mots se cachent aucune idée ou des idées qui sont abstraites et donc interdites. En effet, dans les *Notes Philosophiques*, Berkeley insiste sur le fait « [qu'il ne faut] employer aucun mot sans une idée (§ 422) », et qu'il ne doit pas y avoir « de raisonnement sur des choses dont nous n'avons aucune idée. Donc pas de raisonnement sur les infinitésimaux. (§ 354 et 421) (…) Et on ne peut pas objecter que nous raisonnons sur des nombres qui sont seulement des mots et non des idées, car ces infinitésimaux sont des mots inutiles si on n'admet pas qu'ils représentent des idées. (§354 a) »[605]

Dans l'*Analyste*, il reprend le même type de critique, c'est-à-dire que l'on peut manipuler les termes de fluxion et d'infinitésimal sans aucun problème tant qu'on se réfère au mot. Ainsi, on peut parler de deuxième fluxion en disant que c'est la fluxion de la fluxion et construire ainsi les fluxions successives. Mais comme derrière ces mots il n'y a que confusions et contradictions, il ne faut pas les utiliser :

> « En vérité on doit reconnaître que les mathématiciens modernes ne considèrent pas ces points [les fluxions et les infinitésimaux] comme des mystères, mais comme clairement conçus et maîtrisés par leurs esprits à l'ample compréhension. Ils n'hésitent pas à dire qu'à l'aide de cette nouvelle analyse, ils peuvent pénétrer jusque dans l'infini lui-même, qu'ils peuvent même étendre leurs vues au-delà de l'infini (…). Mais, en dépit de toutes ces affirmations et prétentions, on pourrait demander à bon droit, puisque d'autres hommes en d'autres recherches ont souvent été abusés par les mots ou les termes, si ceux-ci n'ont pas été étrangement abusés et trompés par leurs propres signes particuliers, symboles ou notations

[605] Berkeley (1987), vol. I, pp. 68 et 78.

algébriques. Rien n'est plus facile que d'inventer des expressions ou des notations pour les fluxions et les infinitésimaux des premier, second, troisième, quatrième ordres et des ordres suivants en procédant de la même façon réglée sans fin ni limite $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x}$, etc., ou $dx, ddx, dddx, ddddx$, etc. En effet, ces expressions sont claires et distinctes, et l'esprit n'éprouve aucune difficulté à concevoir qu'on puisse en prolonger la suite au-delà de toute limite assignable. Mais, si nous écartons le voile et regardons derrière, si, mettant de côté les expressions, nous nous appliquons à considérer attentivement les objets eux-mêmes qui sont censés être exprimés ou indiqués par leur moyen, nous trouverons beaucoup de vide, d'obscurité et de confusion ; bien plus, si je ne me trompe pas, des impossibilités et des contradictions franches »[606]

Pour convaincre encore plus son lecteur, il entre aussi dans le champ des « analystes géomètres ». En prenant appui sur des démonstrations faites par ses adversaires, il montre que leurs démonstration ne sont pas correctes, et que derrière se cachent des erreurs qui se détruisent entre-elles.

(iii)Une critique de méthode démonstrative

Dans l'*Analyste* surtout, Berkeley s'attache à montrer que pour arriver à affirmer des résultats corrects, les mathématiciens font usage d'artifices qu'il considère remplaçables par des explications sans utiliser les méthodes des fluxions et des infinitésimaux. Introduire des quantités aussi petites soient-elles introduit des erreurs qui, pour arriver au bon résultat, se compensent. Ainsi, pour Berkeley, il ne faut pas parler de méthode des fluxions, mais de méthode de compensation des erreurs[607]. C'est ce que nous allons illustrer maintenant. Nous allons étudier deux démonstrations qui nous semblent importantes. Nous ne donnons pas les arguments contre la méthode leibnizienne car la

---

606 Berkeley (1987), vol. II., pp. 278-279.

607 Cette thèse est défendue par plusieurs auteurs. Voir, par exemple, Grattan-Guinness (1969), Jesseph (1992), pp. 199-215, Guicciardini (1984), (1989), …

réponse de Maclaurin n'aura pour cadre que la défense de la méthode newtonienne.

La première concerne la fluxion de l'aire d'un rectangle. Soient A et B la longueur des côtés du rectangle et a et b leurs incréments respectifs. Alors la question est : quelle est la fluxion du produit AB ?

Berkeley reprend les arguments et la démonstration de Newton, dans les *Principia*[608] (livre II, lemme 2). Il ajoute à chaque côté un demi incrément puis un demi décrément et il calcule l'aire :

$$S_1 = \left(A - \frac{1}{2}a\right)\left(B - \frac{1}{2}b\right) = AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$$
$$S_2 = \left(A + \frac{1}{2}a\right)\left(B + \frac{1}{2}b\right) = AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$$

Puis, à l'instar de Newton, il assure que la fluxion de AB est égale à la différence des deux quantités c'est-à-dire $S_2 - S_1 = aB + bA$. La critique de Berkeley est la suivante : pourquoi faut-il considérer les demi-incréments, il est plus logique de considérer les incréments entiers. L'aire avec les incréments donne $S_1^{'} = (A+a)(B+b) = AB + aB + bA + ab$ auquel il faut retrancher l'aire du rectangle c'est-à-dire AB et on arrive au résultat $aB + bA + ab$. Pour retrouver le résultat de Newton, il faut faire disparaître la quantité ab. Or d'après Berkeley, « on ne peut parvenir à se débarrasser de ab par un raisonnement légitime »[609]. Ainsi, Berkeley pointe du doigt que la démarche de Newton manque de rigueur, car un artifice de calcul (les demi-incréments) permet de ne pas avoir à négliger cette quantité ab. Ainsi, c'est bien une erreur (l'ajout d'un demi-incrément) qui est compensée par une autre (le retrait d'un demi-incrément). Il va plus loin en disant qu'on ne peut pas négliger des quantités en mathématiques et que cette théorie des fluxions n'est valable que comme une méthode d'approximation. Il demande alors, « ne vaudrait-il pas mieux donner de bonnes

[608] Newton (1687), pp. 250-2.
[609] Berkeley (1987), vol. II., p. 282.

approximations que de prétendre atteindre l'exactitude à l'aide de sophismes ? »[610].

Plus loin, la seconde critique concerne la démonstration du calcul de la fluxion de x^n où n est un entier naturel non nul. Il présente l'algorithme suivi par Newton dans le *Tractatus de Quadratura Curvarum*[611]. Il prend une quantité non nulle o, et il évalue

$$\left(x+o\right)^n - x^n = nox^{n-1} + \frac{n\left(n-1\right)}{2}o^2x^{n-2} + \ldots$$

Il divise ce développement par l'incrément o, puis, il fait évanouir o. Il conclut que cette quantité est égale à nx^{n-1} et que c'est bien la fluxion de x^n. Berkeley s'insurge contre le fait que dans un premier temps on suppose que o est non nulle puis, dans un deuxième temps, on le considère nul. Car, le problème réside dans le fait que quand il divise par o, il fait l'opération $\frac{0}{0}$ (si on considère que o est nul), ce qui, pour Berkeley, n'a aucun sens en mathématiques. Ce qui le gêne le plus, c'est qu'en faisant le changement de valeur de o c'est-à-dire le changement d'hypothèse, les conclusions faites à partir des premières hypothèses ne doivent plus avoir lieu :

> « Aussi êtes-vous entraîné à user de ce procédé sophistique qui consiste à progresser jusqu'à un certain point avec l'hypothèse d'un incrément, puis de le substituer d'un coup votre hypothèse d'un incrément nul. (…) Dès que vous formez la seconde hypothèse ou supposition, à cet instant même, la première hypothèse, et tout ce que vous avez obtenu grâce à elle est à la fois détruite et éliminée. »[612]

Son dernier argument contre le calcul fluxionnel donne une explication sur la validité des résultats qui sont dus à la compensation de deux erreurs lors du raisonnement. Étudions le cas où $AB = x$, $BC = y, BD = o$, si l'aire de la figure ABC vaut x^2, alors que vaut BC ? (Fig. 48)

[610] Berkeley (1987), vol. II., p. 328.
[611] Newton (1704), pp. 168-9.
[612] Berkeley (1987), vol. II., pp. 288-9.

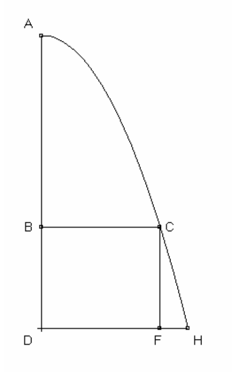


Fig. 48.

Berkeley utilise la méthode des fluxions. Quand *AB* devient *AD* c'est-à-dire quand x devient $x+o$, l'aire *ABC* devient l'aire *ADH* qui est égale à $(x+o)^2 = x^2 + 2xo + o^2$. De plus, l'aire *ADH* est égale à $BCFD + FCH$ où *BCFD* est un rectangle d'aire *oy*. Il suppose maintenant que $FCH = qo^2$. Alors on a l'égalité $2xo + o^2 = oy + qo^2$. Il divise par *o*, on arrive à $2x + o = y + qo$, il fait disparaître *o* (*o* tend vers 0). Il conclut en disant que $y = 2x$. Berkeley ajoute que

> « en ce qui concerne ce raisonnement, on a déjà remarqué qu'il n'est ni légitime, ni logique, de supposer que *o* s'évanouit, c'est-à-dire s'annule, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'incrément, à moins de rejeter à la fois l'incrément lui-même et ses conséquences, c'est-à-dire tout ce qui ne pouvait pas être obtenu sans supposer cet incrément. On doit néanmoins reconnaître que le problème reçoit la solution correcte et la vraie conclusion par l'emploi de cette méthode. On demandera donc : comment se fait-il que le fait de négliger *o* n'entraîne pas d'erreur dans la conclusion ? Je réponds que la véritable raison en est manifestement la suivante : *q* étant égale à l'unité, *qo* est égal à *o*, et, par conséquent : $2x + o - qo = y = 2x$ les quantités égales *qo* et *o* se détruisant puisque de signes contraires. »[613]

Berkeley ne donne pas l'explication du fait que *qo* et *o* se détruisent c'est-à-dire pourquoi *q* est égal à 1. À la suite du traducteur, Michel Blay[614], essayons de donner une explication

[613] Berkeley (1987), vol. II., p. 304.
[614] Berkeley (1987), vol. II., p. 304. note 1.

à cela. Montrons que q est bien égal à 1. Quand il fait s'évanouir o, Berkeley dit que la courbe ACH sera une droite et donc les figures *ABC* et *FCH* seront des triangles. Ainsi ces deux triangles sont semblables. Cela conduit à l'égalité de rapports

$$\frac{FC}{AB} = \frac{FH}{BC}.$$

Ce qui implique que

$$FH = o\frac{y}{x} = o\frac{2x}{x} = 2o$$

Ainsi l'aire *FCH* est égale à

$$FCH = \frac{2o^2}{2} = o^2.$$

Et, comme $FCH = qo^2$, on peut conclure que $q = 1$ et donc $o - qo = 0$. Dans cet exemple, Berkeley montre bien que l'erreur instaurée par l'apparition de o est compensée par une autre erreur qo. Il conclut en disant que la méthode des fluxions ou des différences est inutile, car en utilisant l'évanouissement de o, elle cache l'autre erreur, et que l'on peut arriver au bon résultat sans tomber dans les travers de ces méthodes :

> « Et c'est la véritable raison pour laquelle le rejet de o, en définitive n'a produit aucune erreur. C'est pourquoi on ne doit l'attribuer, ni à la doctrine des différences, ni aux infinitésimaux, ni aux quantités évanouissantes, ni aux moments, ni aux fluxions »[615].

La diversité de ces critiques, de natures différentes, tantôt plutôt philosophiques, tantôt langagières, tantôt mathématiques, tient au fait que le calcul des fluxions et des différences a été un objet d'étude tout au long de sa vie, même si son œuvre majeure traitant du calcul newtonien et leibnizien, l'*Analyste*, ne paraît qu'en 1734. La dernière interrogation nous révèle autre chose, elle nous incite à penser que Berkeley est convaincu que l'on peut trouver une autre méthode se basant à la fois sur la méthode des fluxions et

[615] Berkeley (1987), vol. II., p. 305.

sur les mathématiques des Anciens ; il considère que les fondements de cette « nouvelle géométrie » n'est pas en adéquation avec « l'ancienne ». Maintenant, intéressons-nous à la réplique de Colin Maclaurin.

b) La première réaction de Maclaurin

Dès la parution de cet écrit, de nombreux mathématiciens britanniques ont été choqués par les propos de Berkeley. Ainsi, de nombreuses réponses apparaissent dès 1734. James Jurin[616], John Walton[617], et Benjamin Robins[618] sont parmi les auteurs qui défendirent promptement la méthode des fluxions. De nombreux travaux ont étudié ces réponses à Berkeley. Nous renvoyons donc à la littérature pour de plus amples détails sur cette histoire[619].

Maclaurin, lui aussi, réagit assez vivement à ce pamphlet qu'il considère comme une attaque contre les mathématiciens pour de mauvaises raisons. Il décide aussi de répondre en écrivant un ouvrage dans lequel les fondements de la méthode des fluxions seront clairement identifiés et les démonstrations rigoureuses :

> « C'est pourquoi, dès que cette pièce [l'*Analyste*] fut tombée entre mes mains, (et avant que j'eus connoisance des Ouvrages que d'autres avoient entrepris pour la réfuter), je formai le dessein de démontrer ces élémens à la manière des Anciens, et de ne les appuyer que sur un petit nombre de principes incontestables, par les démonstrations les plus rigoureuses. »[620]

Dans la correspondance de Maclaurin, Stella Mills a incorporé un texte[621] de Maclaurin qui n'est pas une lettre à proprement parler mais une réplique au texte de Berkeley. C'est

[616] Jurin (1734) et Jurin (1735).
[617] Walton (1735a) et Walton (1735b).
[618] Robins (1735).
[619] Voir particulièrement, Guicciardini (1989), Sageng (1989) pp. 236-352, Panza (1989), pp. 195-240, Jesseph (1993), pp. 231-295.
[620] Maclaurin (1749b), vol. I, préface, p. ix.
[621] Mills (1982), pp. 425-35.

sa première tentative de réponse à *l'Analyste* de Berkeley. Mais, elle n'a jamais été publiée de son vivant[622]. Par cette courte réponse, il veut démonter l'argumentation de Berkeley en particulier celle concernant les démonstrations non rigoureuses et obscures, en particulier chez Newton.

Le premier argument contenu dans la première réponse concerne la fidélité qu'ont les mathématiciens pour la religion. En effet, Berkeley a commencé à attaquer certains mathématiciens qui émettaient des réserves sur la véracité de la foi parce qu'ils la considéraient comme obscure. Berkeley considère que la méthode des fluxions est elle très obscure, alors il faut que les mathématiciens, qui se considèrent comme les chantres de la clarté et de l'évidence, au lieu de porter des jugements sur la religion, travaillent à enlever tous les mystères déjà présents au sein de leur science :

> « Tous ces points, dis-je, sont admis et crus par certains qui exigent l'évidence en matière de religion, par des hommes qui prétendent ne croire que ce qu'ils voient. Que des hommes habitués à ne traiter que des sujets clairs puissent difficilement en admettre d'obscurs, cela ne peut pas apparaître inexplicable. Mais celui qui peut digérer une seconde ou troisième fluxion, (…), n'a nulle raison, à mon avis, de faire le délicat sur une question quelconque de théologie. (…) Mais avec quelle apparence de raison quelqu'un prendra-t-il la liberté de dire que les mystères ne peuvent pas être l'objet de foi quand au même moment il admet lui-même des mystères si obscurs sont objet de science ? »[623]

À cette question, Maclaurin répond qu'il est lui-même un sincère croyant et qu'en même temps il se considère comme un authentique mathématicien[624]. De plus, bon nombre de

[622] Nous suivons la thèse de Sageng qui considère ce texte comme une introduction voire une préface d'un ouvrage sur les fluxions
[623] Berkeley (1987), vol. II., pp. 277-8.
[624] « As you know me to be a sincere wellwisher to Religion and that at the same time the Mathematicks are my favourite and particular Study » in Mills (1982), p. 425.

mathématiciens ont été aussi des défenseurs de la vraie foi[625]. Présenter les mathématiciens en général comme des ennemis de la religion n'est pas valable. Maclaurin prend comme exemple de mathématiciens ecclésiastiques Wallis, Barrow et il considère Isaac Newton (qui n'était pas un ecclésiastique) comme un homme féru de théologie, Napier comme un commentateur de la Bible[626]. Maclaurin renverse le problème en disant que ce sont plutôt des religieux, en particulier les catholiques, qui refusent et qui attaquent certaines parties de la science par leurs incompétences[627]. Il ajoute de plus que tous les bénéfices obtenus par les mathématiques dans la philosophie naturelle sert aussi à l'amélioration de la connaissance de Dieu[628] et donc elle sert aussi au développement de la religion[629].

Mais ce que Maclaurin entend faire ici est de répondre aux attaques sur les fondements et sur le manque de rigueur des démonstrations, de Newton en particulier. Tout d'abord, il certifie que toutes les démonstrations de la méthode des fluxions peuvent être produites en utilisant une méthode démonstrative que Maclaurin déclare tenir des Anciens, c'est-à-dire en utilisant une *Reductio ad absurdum*[630]. De plus, même si Newton ne l'a pas fait partout, il l'a fait dans le *Tractatus de Quadratura Curvarum* pour définir la

---

[625] « But it must appear very surprising to see him represent Mathematicians as generally Enemies to Religion & abusing the Authority they may have acquired by their Mathematical Knowledge, by misleading unwary persons in matters of the greatest moment » in Mills (1982), p. 425.

[626] « The greatest Men among them have distinguished themselves as firm in the belief, and ornaments to the practise of Christianity, and particularly these men who invented or promoted the parts which this Author has so warmly attack'd ; D[r] Wallis, Dr Barrow & Sir Isaac Newton have excelled in these very parts, and I believe it will be hard to find three Divines whose Christian faith & practise it less equivocal than theirs was : I could add to these the Inventer of the Logarithms who writ a commentarys on the Bible » in Mills (1982), p.426.

[627] « it may serve an unjust jealousie that some Zealous but ignorant persons still retain against so valuable a part of Learning, while it may unhappily confirm the prejudices of others against the cause of religion when they see it and mathematical knowledge sett in a sort of opposition by this Author » in Mills (1982), pp. 426-7.

[628] Sur le but de la philosophie naturelle voir le chapitre sur *The account* …

[629] « Sir Isaac Newton's Philosophy leads us to a superior principle & is improved y him for hat noble purpose. Every discovery he has made displays a neu beauty in the fabrick of universe, sets in a neu Light the infinite Skill & contrivance of its Author & Governour and point out to us his influences » in Mills (1982), p. 432.

[630] « I shall observe in general that there is not any demonstration in the method of fluxions that may not easily acquire all the certainty of the Demonstrations of the Ancients, by being changed into that form so much used by them called the Reductio ad absurdum. » in Mills (1982), p. 428.

limite des raisons de quantités[631]. Et s'il ne le fait pas par la suite, c'est par souci de rapidité et pour éviter d'ennuyer le lecteur avec des démonstrations trop longues.

Considérant que Berkeley accepte la notion de mouvement dans la génération des quantités, il montre que si deux quantités sont engendrées dans le même temps par deux mouvements uniformes, alors leurs incréments engendrés sont en proportion de leurs vitesses[632]. Il donne aussi une certaine forme de définition de la limite d'une raison. Il y a limite dans les cas où la raison s'approche continuellement comme les incréments diminuent. Et elle s'approche continuellement vers sa limite quand la différence entre les deux est plus petite que toute différence. La limite est appelée la dernière raison des quantités[633]. Pour exploiter cela, il considère AMB une ligne courbe (Fig. 49), MT tangente à la courbe en M, T est un point de l'axe AE. Soit Mo et mo les incréments respectivement de l'abscisse AP et de l'ordonnée PM. H est le point d'intersection de la corde Mm avec l'axe AE. Alors la raison des incréments mo et Mo est comme la raison de PM et PH. Ceci est l'expression générale de cette raison quand les incréments décroissent.

---

[631] « Sir Isaac tells expressly that it was to shun the tedious demonstrations of this kind after the manner of the Ancients, that he had laid down his Lemmata concerning the Limits of the ratios of the Quantitys; and from the first Lemma a Skilful person may Learn how to transform them into that shape when he pleases. » in Mills (1982), p. 428.

[632] « It was evident that if two Quantitys were generated in the same time with uniform motions so that the velocitys with which each flowed should continue the same without any change, the increments generated in equal times should observe the proportions of these velocitys. » in Mills (1982), p. 428.

[633] « There is a limit in these cases towards which the Ration is continually approaching as the increments diminish; they never come to it while they have any assignable magnitude, but they approach so as to be nearer to it than by any assignable difference, and this is justly held the last ration of the Quantitys. » in Mills (1982), p. 431.

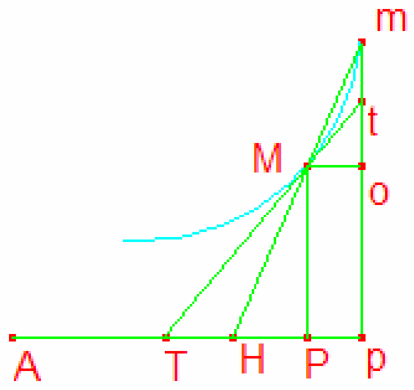


Fig. 49.

Cette relation vient du fait que les deux triangles PHM et Mom sont semblables. Maclaurin annonce que lorsque le point m s'approche de M, la corde Mm s'approche de la tangente Mt et H s'approche de A sans jamais que AH soit plus petit de AT, ou plus précisément AT est la limite de AH. Et ainsi on aurait la formule de la sous-tangente :

$$\frac{\mathrm{Fl}(PM)}{\mathrm{Fl}(AP)} = \frac{PM}{PT}$$

Dans le manuscrit, il manque la fin de ce nous avons écrit[634], mais nous suivons les propos de Giulio Giorello dans un article de 1992[635]. Pour nous, il est manifeste que Maclaurin ne pouvait pas écrire autre chose étant donné que cela intervient juste après sa définition de la limite. De plus, l'expression de la sous-tangente est critiquée par Berkeley dans l'*Analyste*[636].

Maclaurin se rend compte très tôt (il en parle dans une lettre à Stirling datée du 16 novembre 1734) que ce qu'il a fait dans cette première réponse n'est pas suffisant et qu'un autre projet doit le supplanter. C'est ainsi qu'il décide de ne pas faire une simple réponse à

[634] « Let AMB now be a Curve line of which MT is supposed to be a tangent at M meeting the Axis AE in T. let Mo & mo be any finite increments of the Absciss AP and ordinate PM; Draw the Chord Mm which produced cuts the Axis in H. It is evident that the Ratio of the Increments mo & Mo is the same as of PM & PH. This is the general expression of this Ratio which varys while the Increments decrease; As the point m approaches M, the Chord Mm approaches nearer to the Tangent Mt, & the point H approaches towards A; but its distance from A can never… » in Mills (1982), p. 432.
[635] Giorello (1992), p. 156.
[636] Berkeley (1987), p. 292-303.

Berkeley mais un véritable traité qui lui sera aussi utile pour son enseignement et donc qui sera aussi essentiel pour ses étudiants[637]. Ainsi, une grande partie de son temps libre sera consacrée à l'écriture de ce traité des fluxions.

c) L'écriture du Treatise of Fluxions

Entre le début de l'écriture, à la fin de l'année 1734 (ou au début de l'année 1735), et la parution du Traité des Fluxions en 1742, de nombreuses années se sont écoulées. De nombreuses personnes réclament vivement la parution de ce traité. Par exemple, Francis Hutcheson, alors à Dublin, presse son ami de publier son traité pour faire taire l'arrogance de Berkeley qui pense être vainqueur de cette dispute[638]. Les raisons de cette longue durée sont multiples. Nous allons en donner quelques unes.

Une première raison de cette durée est qu'il est enseignant et qu'il n'a pas beaucoup de temps pour se consacrer à sa recherche. Nous en avons déjà assez dit là-dessus dans les chapitres précédents pour qu'il soit inutile de s'étendre encore. La deuxième raison est son investissement dans d'autres projets tels que son mémoire pour l'*Excise*, la création de la Société philosophique d'Édimbourg. Tout cela retarde l'écriture effective de son ouvrage. Mais la raison principale est, qu'à la suite des propositions des premiers lecteurs de son manuscrit, il a étendu son projet. Dans l'extrait de la lettre adressée à Stirling, citée plus haut, Maclaurin annonce déjà son changement d'objectifs. Cela devient plus important encore par la suite. Premièrement, c'est le passage d'une simple réponse à un ouvrage qui peut être considéré comme un manuel utile pour ses étudiants. Deuxièmement, dès 1737,

---

[637] « Upon more consideration I did not think it best to write an Ansuer to Dean Berkeley but to write a treatise of fluxions which might ansuer the purpose and be useful to my scholars » in Mills (1982), p. 250.
[638] « I have constant accounts of the Impatience of our Virtuosi in Dublin about your Fluxions. Your Friends are angry at the Delay & Bp Berkelys are triumphing already. If he should have some silly answer ready before yours be well published, I think you deserve it for your excessive complaisance to a man bursting almost with vanity long ago. » in Mills (1982), p. 274.

les premiers chapitres du premier livre et le premier du deuxième sont écrits, mais en les montrant à certains de ses amis, Stirling en particulier, ces derniers lui conseillent de développer son papier. Il ajoute beaucoup de propositions et de théorèmes montrant la grande utilité des fluxions tant en mathématiques pures qu'en mathématiques mixtes[639]. Troisièmement, l'imprimeur est en retard et a eu des problèmes avec les planches. Ainsi, le traité aurait pu sortir dès 1740[640]. Mais, ce n'est qu'en 1742 que l'ouvrage paraît.

2. Une réflexion sur les fondements du calcul

a) La structure de l'ouvrage

(i) Le contenu du *Treatise of Fluxions*

Tout d'abord, nous allons donner la structure et les grandes lignes de l'ouvrage. La table des matières de la traduction française du *Treatise of Fluxions* est donnée de façon complète en annexe. Nous n'allons ici donner que les grandes lignes et brièvement la substance des chapitres. Maclaurin a décidé de séparer son ouvrage en deux livres.

Le titre du premier livre est « Sur les Fluxions des Grandeurs Géométriques »[641], il contient quatorze chapitres. Le premier s'intéresse aux fondements de la méthode des fluxions. C'est dans ce premier chapitre que se trouvent l'axiomatique de Maclaurin et les premiers théorèmes faisant intervenir les fluxions. Les deuxième et troisième chapitres sont dévolus à appliquer la méthode des fluxions aux figures planes, telles que le triangle, le rectangle. Dans ces chapitres, la fluxion d'un produit est donnée. Le chapitre quatre

---

[639] « Some inquiries relating to the application of fluxions, and several incidents have retarded my book. But tho' my Colleges are now began I hope to finish it this winter or if I cannot get my plan compleated I propose to publish what will be ready of it. » in Mills (1982), p. 307

[640] « I have printed all my book [Treatise of Fluxions], excepting the 3 last sheets. The printers are very slow in the algebraic part , and I have little time at this season of the year. This with the figures will retard the publication I believe for the spring » in Mills (1982), pp. 337-8.

[641] Nous donnons les titres d'édition française de Pézenas.

s'intéresse aux fluxions des solides et Maclaurin se penche sur les fluxions d'ordre supérieurs. Dans le chapitre cinq, Maclaurin donne la fluxion des progressions géométriques c'est-à-dire la fluxion des puissances entières positives. Le chapitre suivant est dédiée au logarithme et au calcul des fluxions de logarithmes et comme corollaire au calcul des fluxions de puissances rationnelles. Dans ce même chapitre, il s'intéresse aux aires hyperboliques. Le chapitre sept regroupe les résultats sur la relation entre tangente à la courbe et fluxion de la courbe. Ceci est ensuite appliqué à la recherche des fluxions des sinus, cosinus, et des angles en général. Le chapitre huit est dévolu à la recherche des fluxions de surfaces. Le chapitre qui suit est consacré aux règles sur les maxima et les minima. C'est dans ce chapitre qu'est donné la méthode des fluentes, c'est-à-dire la méthode inverse des fluxions. Des résultats sur les points d'inflexions, les cuspides se trouvent aussi dans ce chapitre. Le chapitre dix est dédié aux asymptotes aux courbes. Ainsi, il y a plusieurs propositions sur les spirales et leurs aires. La proposition sur la comparaison entre intégrales et séries se trouvent dans ce chapitre. Puis, dans le chapitre onze, Maclaurin donne beaucoup de résultats sur la courbure des courbes, en particulier des théorèmes pour trouver la courbure en un point à une courbe et sa variation. À partir de ces propositions, il donne quelques résultats sur les mouvements liés à la gravitation par exemple. Le chapitre douze est écrit pour montrer que la méthode des fluxions et la méthode leibnizienne sont équivalentes. Maclaurin donne aussi dans ce chapitre des propositions qu'il a donné auparavant lors de son implication dans la querelle des forces vives. Des résultats sur le mouvement de l'eau dans des vasques apparaissent aussi dans ce chapitre. Dans le chapitre treize, Maclaurin travaille sur le problème de la plus rapide descente. Le dernier chapitre du premier livre est entièrement consacré à la figure des planètes, en particulier celle de la Terre, et à l'explication des marées. C'est avec le contenu de ce chapitre que Maclaurin gagna le prix de l'académie royale des Sciences de

Paris de 1740.

Le deuxième livre a pour titre « Sur le calcul dans la méthode des fluxions »[642]. Le premier chapitre est consacré à donner les principes et les règles de la méthode des fluxions « Des Fluxions des quantités considérées abstraitement, ou comme étant représentée par les caractères généraux de l'Algèbre ». Dans ce chapitre, Maclaurin donne ainsi la fluxion des puissances, des logarithmes. Le second chapitre est non seulement dédié aux règles de la méthode des fluxions, mais aussi à la méthode des fluentes, ainsi que la définition de série infinies. C'est dans ce chapitre qu'apparaît la formule dite de Taylor-Maclaurin. Le chapitre trois est dévolu au classement des fluentes de certaines classes de fluxions, en particulier les arcs elliptiques et hyperboliques. Le chapitre quatre est un ensemble de règles de la méthode des fluentes. Le chapitre cinq est un ensemble de problèmes résolus par la méthode des fluxions ou des fluentes de façon algébrique. Dans ce chapitre, se trouve par exemple, la résolution du problème suivant « La vitesse du vent et le vaisseau étant donnés, déterminer la situation la plus avantageuse des voiles pour que le vent puisse pousser ce vaisseau avec la plus grande force, selon une direction donnée ». Le premier livre est de loin le plus volumineux. Pour deux raisons, la première est que tous les résultats présents dans le premier livre n'ont pas été repris par Maclaurin dans le second livre. La seconde raison vient du mode démonstratif différent dans les deux livres. Le premier livre utilise la géométrie pour démontrer, ce qui a tendance à allonger les démonstrations. Le second livre, comme son titre l'indique, utilise l'algèbre ce qui a l'avantage de raccourcir énormément les démonstrations comme nous le verrons plus bas.

Dans la préface, Maclaurin donne aussi au lecteur la lecture « idéale » de son traité. En effet, il déclare que :

---

[642] Pézenas, dans sa traduction, ne donne pas le même titre : « Des Fluxions dans la Méthode des Fluxions ». Mais le titre anglais est « Of the Computations on the method of fluxions ».

> « Si le lecteur n'est pas encore exercé dans le calcul des Fluxions, il fera bien de lire les deux premiers Chapitres du second Livre, et de bien les pénétrer, avant que d'entrer dans les derniers du premier Livre. Il trouvera dans ceux-ci certains articles qu'il comprendra beaucoup mieux, s'il a quelques connoissances des principales regles du calcul des Fluxions, qui sont démontrées dans le second Livre. »[643]

Ainsi, à la lecture de cette indication, il apparaît donc que les deux livres ne sont pas écrits avec le même objectif et ne répondent pas aux mêmes exigences. Nous allons donc voir ce qui les différencie.

(ii) Le livre I : la Géométrie omniprésente

Le titre du livre I, « Sur les Fluxions des Grandeurs Géométriques », nous indique déjà l'ambition de Maclaurin : énoncer la théorie des fluxions et des fluentes dans le cadre de la géométrie avec toute la rigueur démonstrative à la manière des Anciens. En effet, à la première page (p. 51 de l'édition anglaise), nous pouvons lire comme titre « Les éléments de la méthode des fluxions démontrés d'après la manière des Anciens géomètres ». Maclaurin désire expliquer et donner les fondements nécessaires pour cette théorie à travers des objets, des quantités qui ont uniquement une valeur géométrique. Il calcule la fluxion de figures planes rectilignes (chapitre I du *Traité*), de surfaces courbes (chapitre II), etc. La conception des mathématiques et plus spécialement de la géométrie (partie la plus noble des mathématiques selon Maclaurin) mérite d'être énoncée.

Tout d'abord, l'art mathématique doit être au-dessus de toute polémique et de tout désaccord, pour cela les démonstrations doivent être irréprochables et les fondements de la théorie intangibles. Il se réfère à la conception formulée par les mathématiciens grecs en particulier Archimède, Pappus et bien évidemment Euclide. Ces références qui,

---

[643] Maclaurin (1749b), préface p. x.

quelquefois, ne sont que rhétoriques, sont en grande partie significatives. Dans l'introduction, Maclaurin présente de nombreux résultats énoncés et démontrés par les grecs et surtout par Archimède. Nous savons déjà que Maclaurin connaissait parfaitement les travaux et les méthodes démonstratives des mathématiciens de l'Antiquité.

Dans son souci de rigueur et de clore un débat qu'il juge stérile, il se doit de présenter et d'énoncer avec clarté et sans ambiguïté les avancées en mathématiques qui ont été opérées avec le calcul différentiel et intégral. C'est pourquoi Maclaurin prend appui sur la géométrie pour expliciter sa méthode. C'est ce qui fait en réalité l'originalité du *Traité* :

> « Si la Géométrie est universellement estimée par les grands avantages qu'on en retire, on peut dire qu'elle ne se fait pas moins admirer par l'évidence de ses connaissances. Les Démonstrations Mathématiques ont toujours terminé toutes les disputes, et elles ne permettent pas de douter, ni de chicaner. La Géométrie a acquis ce caractère d'évidence par le grand soin que les Anciens ont pris de n'admettre que peu de principes évidens par eux-mêmes, et de ne donner, pour démonstrations, que ce qui étoit conclu évidemment de ces premiers principes. »[644]

La géométrie considérée par Maclaurin est celle d'Archimède révisée par Newton et Galilée, c'est-à-dire une géométrie empreinte de mouvement où la génération des objets, des figures s'opère de façon cinématique. C'est ce que nous appellerons une géométrie de mouvement :

> « Dans la matière que je me propose d'expliquer et de démontrer dans ce *Traité*, nous avons recours à la génération des quantités, et nous en déduisons les relations, en comparant les puissances qui sont conçues les engendrer ; ou en comparant les quantités qui ont été formées, nous découvrons les relations de ces puissances et des autres quantités qu'elles sont

[644] Maclaurin (1749b), vol. I., p. 3.

censées représenter. La puissance que l'on conçoit former les grandeurs en Géométrie est le mouvement. »[645]

Ainsi plus loin dans le *Traité*, il annonce les différentes définitions des objets sur lesquels il va s'appuyer pour former sa théorie : « Les lignes sont produites par le mouvement des points ; les surfaces par le mouvement des lignes ; les solides par le mouvement des surfaces, les angles par la rotation de leurs côtés, en supposant toujours l'écoulement du tems uniforme. »[646] La géométrie n'est pas seulement présente pour auréoler sa théorie ni pour lui conférer un statut plus grand, elle est surtout, et c'est ce qui fait son originalité, ancrée dans le processus démonstratif. Nous le verrons plus bas lorsque nous étudierons quelques démonstrations. Nous pouvons déjà citer quelques outils utilisés par Maclaurin : les différentes propriétés des triangles semblables, la comparaison des aires de différentes surfaces, etc. En fait, il se sert des propriétés de la géométrie élémentaire que l'on retrouve chez Euclide, Archimède, ou Pappus avec de plus cette approche cinématique.

(iii)Le livre II : une exposition algébrique du calcul

Dans le premier livre, il y a beaucoup de résultats, les démonstrations sont parfois longues à cause du choix de la méthode de démonstration. Elles demandent souvent une dextérité et une parfaite maîtrise de la géométrie. Ce premier livre est d'une lecture relativement difficile et bon nombre des lecteurs ont dû être surpris par la difficulté du livre I. Par conséquent, de l'aveu même de Maclaurin, le premier livre ne suffit pas à lui-même. Il faut donc lire une partie du second livre pour bien éclairer certains passages du premier livre. Maclaurin considère le second livre comme une exposition différente du calcul des fluxions. Le titre du premier chapitre du second livre annonce clairement

[645] Maclaurin (1749b), vol. I., p. 2.
[646] Maclaurin (1749b), vol. I., p. 5.

l'objectif de Maclaurin : « Des Fluxions des quantités considérées abstractivement, ou comme étant représentées par les caractères généraux de l'Algèbre ». Maclaurin considère que le premier chapitre des deux livres ont le même objectif, donner le fondement de la méthode des fluxions. Dans le premier livre à l'aide de la géométrie et de la notion de vitesse, dans le second, il évacue toute référence à la vitesse et toute notion géométrique[647]. Nous verrons plus bas comment il « fonde » le calcul des fluxions. Son objectif est clair dans le second livre : donner des fondements et un traitement algébriques à la méthode des fluxions. Cela permet même, dans certains problèmes qui nécessitent une dose importante de calculs de fournir un traitement plus facile. Certaines propositions peuvent être énoncées géométriquement mais la démonstration est soit impossible soit très difficile à faire sans l'aide de l'algèbre[648]. C'est le cas des problèmes qui utilisent la formule dite d'Euler-Maclaurin.

Le livre deux est une aide pour la compréhension du premier, en lui fournissant soit un éclairage différent soit des démonstrations. Ainsi, une bonne partie des résultats donnés dans le livre un est reprise dans le livre deux. Nous retrouvons, bien entendu, le calcul des premières fluxions : la fluxion de sommes, de produits, des puissances, des logarithmes, etc. Mais, le second livre a aussi son autonomie par rapport au premier livre. Ainsi, la réduction des fluentes des arcs elliptiques et hyperboliques n'est présente que dans le second livre. La formule dite de Taylor-Maclaurin est démontrée et est donnée dans sa version générale uniquement dans le second livre, il y a juste une version particulière dans le premier livre. Nous reviendrons plus bas sur cette formule.

Après avoir légitimité les fluxions par l'utilisation de la rigueur de la géométrie, ce

[647] « [The Fluxions] may be determined by comparing the Velocities of points that always describe Lines proportional to the Quantities, as in the First Book ; but they may be likewise determined, without recourse to such suppositions, by a just Reasoning from the simultaneous Increments or Decrements themselves. » in Maclaurin (1744c), p. 405.

[648] « Those Theorems had been described in the First Book, Art. 352, &c. but the Demonstrations and Examples were referred to this Place, as requiring a good deal of Computation. » in Maclaurin (1744c), p. 411.

qui est nécessaire pour répondre à Berkeley, il faut aussi montrer que l'utilisation de la notion de fluxion avec les règles de l'algèbre est également légitime et correcte. C'est aussi l'objectif du second livre :

> « On a contesté l'évidence de cette Méthode [des fluxions dans le livre II], et l'on a fait des objections contre le nombre des symboles qu'on y emploie, comme s'ils devoient servir à couvrir les défauts des principes, et des démonstrations. Pour détruire de pareils soupçons, nous avons tâché d'exposer cette Méthode, d'une manière qui en représente les Théorêmes clairement, et dans toute leur étendue, sans aucun signe, ou caractère particulier, afin qu'on puisse les soumettre plus facilement à l'examen le plus rigoureux »[649].

Maclaurin est conscient qu'il faut fonder le calcul newtonien sous une forme algébrique car « les progrès quon a fait, par son moyen [celui de l'algèbre], tant en Géométrie qu'en Philosophie, viennent principalement de la facilité, de la précision et de la vaste étendue de la Méthode du Calcul, ou de la partie Algébrique. »[650]. Comme nous l'avons remarqué à maintes reprises, Maclaurin distingue la géométrie et l'algèbre. L'utilisation de la géométrie donne aux résultats produits l'évidence due à la rigueur de la démonstration, et la clarté due à l'utilisation de principes plus proches de l'expérience. L'utilisation de l'algèbre, en revanche, fournit comme il le dit lui-même dans la citation ci-dessus, de la facilité dans les démonstrations, plus rapides, moins longues, et un caractère plus général car on n'est pas cantonné à un cadre limité comme en géométrie.

Ainsi, le langage géométrique devrait donc être étranger au second livre. Qu'en est-il réellement ? Nous pouvons tout de suite signaler qu'il l'est dans la plus grande partie du second livre, surtout dans le début du livre. Pourtant, si nous regardons un peu plus loin, le nombre de figures augmente et l'utilisation de la représentation géométrique intervient de façon non négligeable. Dans des articles se trouvant à la fin du chapitre III (articles 802 et

---

[649] Maclaurin (1749b), vol. II.., p. 153.
[650] Maclaurin (1749b), vol. I., introduction, p. iv.

803), Maclaurin se sert d'une construction non pas pour représenter le problème mais pour que cette construction participe pleinement à la démonstration du calcul d'une fluente. En effet, pour calculer la fluente de $\frac{\dot{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1-xx}}$, l'Écossais passe par une construction géométrique. Cette fluente se trouve donc égale à une somme d'aires, ce qui amène Maclaurin à faire le rapprochement entre cette somme d'aires et une courbe appelée lemniscate. Ainsi, les constructions géométriques apportent une aide précieuse à Maclaurin pour illustrer certains de ses résultats qui peuvent être considérés par quelques-uns comme arides et peu évidents. Pour lui, un résultat algébrique quel qu'il soit doit avoir une résonance géométrique. Le second livre est fidèle à cela. Outre des applications à des problèmes de physique, une partie des chapitres concerne, soit la construction de certaines courbes par une écriture algébrique, soit le calcul de volumes de solides, d'aires de surfaces plus ou moins particulières.

Le fait de dissocier d'un côté une version géométrique et de l'autre côté une version algébrique répond bien au double objectif de Maclaurin. Le premier, donner un fondement à cette méthode par deux regards différents qui permet de répondre aux critiques de Berkeley, la deuxième, montrer que les deux parties des mathématiques, l'algèbre et la géométrie, se nourrissent l'une l'autre et que grâce à la méthode des fluxions, la connaissance des deux champs des mathématiques grandit.

b) Le fondement du calcul

(i) Le premier livre : une axiomatique à la manière euclidienne

Un point semble important dans la structure même du traité, c'est la volonté de l'auteur d'échafauder toute sa théorie à partir d'un petit nombre de principes qui sont intangibles et irréprochables :

> « La certitude de cette partie de la Géométrie ayant été révoquée en doute, le moyen le plus efficace de mettre la vérité dans tout son jour, et de prévenir toutes les disputes, se réduit à la déduire des principes les plus évidens, et à n'y employer que les démonstrations les plus rigoureuses, à la manière des Anciens Géomètres. »[651]

Avant d'énoncer les quatre axiomes qui donnent à Maclaurin le sentiment de partir sur des bases solides, nous allons donner, à l'instar de l'auteur, quelques précisions sur sa notion de mouvement, de vitesse et de temps.

Le temps est, pour Maclaurin et pour tous les mathématiciens fidèles à Newton, une quantité coulant uniformément qui a une signification géométrique, ou tout du moins qui peut être représentée géométriquement. Maclaurin utilise cette représentation dans certaines de ses démonstrations surtout en prenant le temps compté sur la base. A propos de la modélisation de l'espace chez l'Écossais, sa vision n'est pas fondamentalement différente des autres mathématiciens du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, elle est newtonienne.

> « Il n'y a pas de quantité que nous concevions plus clairement que les parties limitées de l'espace et du tems. Elles sont, à la vérité, composées de parties, parfaitement uniformes et semblables. Celles de l'espace existent toutes ensembles, celles du tems coulent continuellement. Mais par le mouvement elles se mesurent les unes aux autres réciproquement. Les parties de l'espace sont permanentes ; mais étant décrites successivement par le mouvement, on peut concevoir l'espace comme s'écoulant de la même manière que le tems. Le tems périt continuellement ; mais on peut en conserver une image et se le représenter tout à la fois, par le moyen de l'espace décrit par le mouvement. Le tems est

[651] Maclaurin (1749b), introduction p. iv.

conçu couler toujours d'un cours uniforme, ce qui sert à mesurer les changements de toute chose. »[652]

La définition du mouvement est très proche de celle de Newton. Elle est équivalente à celle utilisée par Berkeley dans l'*Analyste*. Pour être conforme aux souhaits de l'Irlandais et de son objectif, il refuse de considérer le temps ou l'espace comme un indivisible : « Je ne prendrai aucune partie du tems ou de l'espace comme indivisible, ou comme infiniment petite »[653] Il a aussi une notion de la vitesse qui est proche de celle de Newton. Comme le temps et l'espace sont des données de la géométrie, la vitesse, considérée comme une mise en relation de l'espace et du temps, comme le rapport de l'espace parcouru pendant un temps donné par ce temps, fait partie intégrante du champ de la géométrie. C'est donc un objet principal de la géométrie. Cela sera, pour Maclaurin, à la base de toute conception géométrique de la fluxion. Mais refusant d'utiliser toute notion infinitésimale, Maclaurin ne considère pas cette vitesse comme instantanée. Cela peut poser un problème quand on veut l'avoir en un point ou à un moment précis. Pour cela il utilise un subterfuge : il ne calcule pas cette vitesse en un point avec des outils d'ordre infinitésimal. Il présente la vitesse en un point comme si le mouvement était uniforme. En effet, pour avoir la vitesse à un moment précis, il considère le mouvement qui, continué uniformément pendant un temps donné, parcourt un espace donné. Et donc la vitesse sera le rapport de cet espace par l'intervalle de temps, comme dans le cas du calcul d'une vitesse constante.

« La vitesse d'un mouvement uniforme est mesurée par l'espace qui est parcouru dans un tems donné. Si l'action de la puissance varie, son action à chaque terme du tems n'est pas mesurée par l'effet qu'elle produit actuellement après chaque terme, mais par l'effet qu'elle auroit produit, si son action avoit été continuée uniformément après ce terme ; de même la vitesse d'un mouvement variable, à chaque terme donné du tems, n'est pas mesurée par

[652] Maclaurin (1749b), vol. I., p. 3.
[653] Maclaurin (1749b), vol. I., introduction p. iii.

> l'espace qui est parcouru actuellement après ce terme dans un tems donné, mais par l'espace qui auroit été parcouru, si le mouvement avoit été continué uniformément après ce terme. »[654]

Plus loin, il affirme encore :

> « Lorsque nous supposons qu'un corps a telle ou telle vitesse à chaque terme du tems, pendant lequel il se meut, nous ne prétendons pas dire qu'il ait quelque mouvement dans ce terme, limite ou moment du tems, ou dans un point indivisible de l'espace : mais comme nous mesurons toujours une vitesse par l'espace qui auroit été décrit, si ce mouvement avoit été continué uniformément depuis ce terme pendant un tems fini déterminé, on ne pourra pas dire que nous prétendions concevoir un mouvement ou vitesse, sans aucun égard à l'espace et aux tems. »[655]

Maclaurin propose ici une définition de la vitesse en un point complètement dégagée du cadre des premières et dernières raisons ou des infinitésimaux et échappe ainsi aux critiques concernant la définition de cette vitesse. En chaque point étudié, il n'a que des vitesses de mouvements uniformes. Ainsi, par exemple, une ligne droite est engendrée par un point qui parcourt cette droite avec un certain mouvement. Si Maclaurin veut comparer la vitesse en deux points distincts, il va dans un premier temps, considérer les deux points comme deux états issus d'un mouvement. Ce mouvement arrive à un temps donné au premier point dont la vitesse sera calculée en utilisant la définition ci-dessus, c'est-à-dire comme si le mouvement prenait une vitesse constante. Mais le mouvement garde toujours ses caractéristiques propres, ce qui permet de calculer la vitesse au deuxième point. Cette définition de la vitesse que nous pouvons qualifier en puissance ne sera opérante qu'avec l'introduction des axiomes que nous donnons plus bas. À la définition de la vitesse, Maclaurin ajoute deux principes fondamentaux : « Le premier est que lorsque les quantités qui sont produites sont toujours égales l'une à l'autre, les mouvemens qui les produisent

[654] Maclaurin (1749b), vol. I., pp. 4-5.
[655] Maclaurin (1749b), vol. I., p. 5.

sont toujours égaux. Le second est, au contraire, que les mouvemens étant égaux, les quantités qui en proviennent dans le même tems sont toujours égales. »[656]

C'est à partir de tout cela que Maclaurin définit à la fois la fluente et la fluxion. La fluente évolue dans le temps (elle diminue ou elle augmente) par le mouvement, à l'instar de la définition de la droite et autres figures géométriques rencontrées plus haut. Ainsi, une figure géométrique peut donc fluer. Nous avons donné plus haut la définition de la vitesse chez Maclaurin car chez lui, fluxion et vitesse sont très liées. En effet dans sa définition de la fluxion, il déclare :

> « La vitesse, avec laquelle une quantité flue, à chaque terme du tems pendant lequel elle est supposée se former, se nomme fluxion, qui est par conséquent, toujours mesurée par l'incrément ou le décrément que ce mouvement auroit produit pendant un tems donné, s'il avoit été continué uniformément depuis ce terme sans aucune accélération ou retardement. »[657]

Il ajoute encore que si le mouvement est uniforme, les espaces parcourus en des temps égaux sont toujours égaux, par contre si dans des temps toujours égaux, les espaces croissent, alors le mouvement est accéléré, sinon si les espaces décroissent, alors ce mouvement est retardé. De cela, il peut énoncer ces axiomes. Après avoir défini le temps, l'espace, et ainsi énoncé sa définition de la vitesse, il expose ces quatre axiomes sur lesquels toute sa théorie va s'échafauder :

> « Axiome I : L'espace décrit par un mouvement accéléré est plus grand que celui qui auroit été décrit dans le même tems, si le mouvement n'avoit pas été accéléré, mais continué uniformément depuis le commencement du tems.
>
> Axiome II : L'espace parcouru par un mouvement accéléré pendant le tems de l'accélération est plus petit que l'espace qui auroit été parcouru dans un tems égal par un mouvement acquis par cette accélération, et continué uniformément.

[656] Maclaurin (1749b), vol. I., p. 5.
[657] Maclaurin (1749b), vol. I., p. 7.

Axiome III : L'espace parcouru par un mouvement retardé est moindre que celui qui auroit été parcouru dans le même tems si ce mouvement n'avoit pas été retardé, mais continué uniformément depuis le commencement du tems.

Axiome IV : L'espace décrit par un mouvement retardé pendant le tems du retardement est plus grand que celui qui auroit été décrit dans le même tems par le mouvement qui reste après ce retardement et continue uniformément. »[658]

La lecture de ces affirmations se fait sans difficulté et permet de comparer lors de démonstration à la fois l'espace, le temps ou même la vitesse (en particulier dans les quinze théorèmes généraux). Nous pouvons déjà dire qu'en raison de ces axiomes qui comparent différentes quantités, les preuves des premières propositions s'articuleront autour d'une démonstration par l'absurde. Nous verrons cela dans le deuxième chapitre.

Il est intéressant de remarquer la ressemblance des énoncés des quatre axiomes chez Maclaurin avec ceux de Galilée dans le *Discours concernant deux sciences nouvelles*[659]. En effet, dans la troisième journée, Galilée énonce lui aussi quatre axiomes de même teneur, à la différence près que chez Galilée le mouvement est simplement considéré comme uniforme tandis que chez Maclaurin il élargit cela à l'ensemble des mouvements. Nous pouvons les citer :

« Axiome I : Au cours d'un même mouvement uniforme, l'espace franchi pendant un temps plus long est supérieur à l'espace franchi pendant un temps plus bref.

Axiome II : Au cours d'un même mouvement uniforme, le temps durant lequel est franchi un espace plus grand est plus long que le temps durant lequel est franchi un espace plus court.

Axiome III : Pour un même intervalle de temps, l'espace franchi avec une vitesse plus grande est supérieur à l'espace franchi avec une vitesse moins grande.

---

658 Maclaurin (1749b), vol. I., pp. 8-9.
659 Galilée (1995).

> Axiome IV : La vitesse avec laquelle, pendant un même intervalle de temps, est franchie une distance plus grande est supérieure à la vitesse avec laquelle est franchie une distance moins grande. »[660]

Il existe un autre point commun entre les *Discours* et le *Traité* : dans ce dernier, après les quatre axiomes, Maclaurin démontre quinze théorèmes qu'il nomme les quinze théorèmes généraux, les deux premiers des quinze sont également les deux premières propositions suivant les axiomes dans le *Discours.*

À la suite de l'énoncé des axiomes, Maclaurin démontre quinze théorèmes qui mettent en œuvre à la fois la définition de la vitesse et les axiomes. La notion de fluxion n'intervient que dans la démonstration du quatorzième théorème. Ces théorèmes portent sur la comparaison et la mise en proportion des différentes notions citées plus haut. Ils sont fondamentaux dans la poursuite du livre I. Ils se retrouvent dans toutes les démonstrations les plus importantes, de plus ils servent d'entraînement et d'exercice avant d'aborder les résultats concernant les fluxions. Les théorèmes XII et XIII sont l'exemple même de la valorisation de cette méthode, c'est dans ces deux théorèmes que la méthode newtonienne se trouve résumée. Par le théorème XII, il peut dire que la vitesse « instantanée » en un point est à la vitesse en ce point (considérée comme uniforme) comme une limite entre l'espace parcouru par la vitesse acquise juste avant ce point et l'espace parcouru par la vitesse acquise juste après. Dans le théorème XIII, il montre la réciproque du théorème précédent. Ainsi, pour certaines démonstrations, il utilisera soit le douzième soit le treizième théorème. Le douzième correspond à la méthode des fluxions, le treizième à la méthode des fluentes. Mais Maclaurin déclare à la suite de ces deux théorèmes : « et comme on a fait plusieurs objections contre cette Méthode, nous démontrerons ses principales propositions immédiatement par les Axiomes »[661].

---

[660] Galilée (1995), p. 126.
[661] Maclaurin (1749b), vol. I, p. 47.

Enfin, Maclaurin considère le principe d'inertie comme important car il le donne comme étant à la base de la méthode des fluxions :

> « Tout le monde convient, que si un corps est abandonné à lui-même depuis une partie de son temps, il continue toujours de ce mouvoir d'un mouvement uniforme, décrivant toujours un certain espace dans un tems donné, et cela suffit pour regarder dans le langage ordinaire la vitesse comme une puissance qui est dans le corps du mouvement. »[662]

Pour être conforme avec les exigences qu'il se donne dans la fondation de la méthode des fluxions, Maclaurin s'est servi de quelques principes réduits au minimum, les quatre axiomes, et de quelques définitions à partir desquelles les axiomes et les théorèmes fondateurs peuvent être produits. Mais, comme nous pouvons le constater, dans les axiomes la notion de mouvement est omniprésente et c'est sur cette notion que Maclaurin bâtit ses mêmes axiomes. Cette notion est complètement étrangère à la géométrie euclidienne. Si nous voulons trouver une référence chez les Anciens, il faut se tourner vers Archimède chez qui, il existe une notion de mouvement, par exemple dans la génération de la spirale. Les démonstrations, comme nous allons le voir, utilisent la double réduction par l'absurde, qu'il considère comme une méthode archimédienne.

(ii) Le second livre : des règles algébriques à la manière des modernes

Nous venons de voir que le livre premier du *Traité* s'organise à partir d'une axiomatisation clairement exposée sur laquelle est basée sa théorie. Qu'en est-il dans le second livre ? Maclaurin insiste sur le fait que pour la partie algébrique, il faut changer de fondement :

> « Ainsi, pour éviter, autant qu'il est possible, la fréquente répétition des expressions figurées dans cette partie algébrique, nous tâcherons de substituer aux Définitions et Axiomes des

[662] Maclaurin (1749b).

> articles 11 et 15, d'autres Définitions et Axiomes qui auront parfaitement une plus grande généralité, mais qui s'accorderont parfaitement avec les premiers, et qui seront mieux démontrés par ceux-là ; comme les autres principes et propositions de l'Algèbre sont communément mieux éclaircies par la Géométrie. »[663]

Maclaurin déclare qu'il va remplacer l'axiomatisation du premier livre par une autre. Or, dans le premier chapitre du second livre, il n'y a pas d'énoncé d'axiomes comme dans le premier livre. Toute notion de mouvement et donc de vitesse doit être écartée. Les quantités étudiées dans le second livre n'ont pas de consistance, elles sont simplement abstraites dans la formation de celles-ci, mais elles peuvent avoir une représentation comme nous l'avons signalé plus haut. Ainsi, Maclaurin considère qu'il serait hors de propos de leur conférer un quelconque mouvement ou vitesse :

> « nous n'avons pas occasion de considérer, dans cette théorie, ces quantités comme produites par le mouvement, et d'examiner avec les vitesses des mouvemens, ou de considérer les premières, ou dernières vitesses de leurs incremens, ou décremens, mais de fixer des raisons respectives, selon lesquelles elles croissent, ou décroissent, lorsqu'on les suppose ensemble ; pour pouvoir par ce moyen découvrir les propriétés de ces quantités mêmes. »[664]

Pour gagner en généralité, ce qui est une des caractéristiques de l'algèbre, il veut fonder son calcul des fluxions hors du champ géométrique. Pour cela, il fournit au lecteur une nouvelle définition de la fluxion : « Nous appellerons donc *Fluxions* des quantités, *toutes mesures de leurs rapports respectifs d'accroissement, ou de décroissement pendant qu'elles varient (ou fluent) ensemble.* »[665] Cette définition, si nous voulons la comprendre sans prendre en compte la notion de vitesse, mérite quelques éclaircissements. Déjà, dans cette définition, Maclaurin considère une fluxion par rapport à une autre. Ainsi, si nous considérons deux quantités, A et B, qui croissent ensemble. Si nous notons la fluxion de A

---

[663] Maclaurin (1749b), vol. II.., pp. 157-8.
[664] Maclaurin (1749b) vol. II., p. 157.
[665] Maclaurin (1749b) vol. II., p. 158. La mise en italique est de Maclaurin.

par a, alors pour avoir la fluxion de B, il faut la comparer avec celle de A. Ainsi trouver une fluxion, c'est évaluer un rapport de deux différences finies[666], celle de B avec celle de A. Pour éclaircir et pour rendre effectif cette définition et pour développer son calcul des fluxions, Maclaurin va utiliser une formulation sans la notion de vitesse des quatre axiomes du livre un.

Dans un premier temps, il considère que, prenant une quantité A, qui croît ou qui décroît, soit a son incrément (ou décrément). Si A devient $A-a$ respectivement $A+a$, alors $2A$ devient $2A-2a$ respectivement $2A+2a$ et $2A$ croît ou décroît dans un plus grand rapport que A comme $2a$ avec a. Ainsi, pour être en accord avec la définition, si a est la fluxion de A, alors $2a$ sera la fluxion de $2A$[667]. Ensuite, en remplaçant $2A$ par $\frac{m}{n}A \pm e$, où m, n et e sont des quantités invariables, il annonce que si a est toujours la fluxion de A, alors la fluxion de $\frac{m}{n}A \pm e$ sera $\frac{m}{n}a$

> « puisque m est à n en une raison déterminable, on peut toujours assigner une quantité qui croissent, ou décroisse, en plus grand ou moindre rapport que A, en quelque proportion, ou qui ait sa Fluxion plus grande, ou moindre que celle de A en quelque raison. En pareils cas, la raison des Fluxions est la même que celle des différences par lesquelles les quantités croissent ou décroissent. »[668]

Ensuite, il essaie de comparer les différences successives invariables de A avec celles de B qui elles sont variables. « On ne peut pas dire que B croisse, ou décroisse dans aucun rapport constant, et il n'est pas si facile de déterminer la Fluxion variable de B, en supposant celle de A égale à son incrément a »[669].

Pour palier cette difficulté, Maclaurin donne différents énoncés qui peuvent être

---

[666] Panza (1989), pp. 235-6. Dans ce passage, Marco Panza considère que Maclaurin utilise sans le dire la notion de vitesse.
[667] Maclaurin (1749b), vol. II., p. 158
[668] Maclaurin (1749b), vol. II., p. 159
[669] Maclaurin (1749b), vol. II., p. 159

compris comme l'équivalent des axiomes. Premièrement, si les différences successives de B sont toujours plus grandes que les différences successives de $\frac{m}{n}A$, alors « B ne peut pas croître dans un moindre rapport que $\frac{m}{n}A$ ». Si a est la fluxion de A, alors la fluxion de B ne peut pas être inférieure à $\frac{m}{n}a$. Deuxièmement, si, au contraire, les différences successives de B sont toujours plus petites que les différences successives de $\frac{m}{n}A$, alors « B ne peut pas croître dans un plus grand rapport que $\frac{m}{n}A$ ». Donc, si a est la fluxion de A, alors la fluxion de B ne peut pas être supérieure à $\frac{m}{n}a$. À partir de cela, il déclare que « Les propositions suivantes sont des conséquences de celle-ci, et elles nous mettront en état de déterminer en quel rapport B croît, lorsque sa relation avec A est connue ». Par relation avec A, Maclaurin entend que B est ce qu'on appellerait une fonction algébrique de A[670]. Maclaurin compare donc les différences successives invariables de A, ($A-a$, A, $A+a$), avec celles variables de B, ($B-\mathrm{b}$, B, $B+b$). Premier temps, si les différences de B croissent, c'est-à-dire que b est plus grand que b, alors :

> « Si les différences successives b, *b*, etc. de la dernière quantité croissante toujours quelque petit que *a* puissent être, on ne peut pas dire que *B* croisse dans une proportion aussi grande qu'une quantité qui croît uniformément, par des différences successives égales, plus grande que *b*, ou dans une proportion aussi petite qu'une quantité qui croît uniformément, par des différences successives égales, moindres que b. »[671]

En d'autres termes, cela signifie que dans ce cas, la fluxion de B ne peut être plus grande que b car elle est l'accroissement le plus grand et ne peut pas être plus petit que b car ce

---

[670] « Let the corresponding values of any quantity produced from *A* by any algebraic operation (or that has a dependence upon it so as to vary with it) be *B* » in Maclaurin (1742), vol. II., p. 168.
[671] Maclaurin (1749b), vol. II., p. 160.

dernier est le plus petit des accroissements. Par conséquent, la fluxion de *B* est comprise entre b et *b*.

De même :

> « De même si la relation des quantités est telle que les différences successives b, *b*, etc. décroissent continuellement, on ne peut pas dire que *B* croisse en même proportion qu'une quantité qui croît uniformément par des différences successives égales, plus grandes que b, ou moindres que *b* »[672]

Ce qui signifie que si les différences de *B* diminuent, c'est-à-dire que b est plus grand que *b*, alors la fluxion de *B* ne peut pas être plus grande que b, ni plus petite que *b*.

Comme nous le verrons plus bas, c'est bien à partir des ces différents énoncés qu'il va calculer les fluxions dans le chapitre I du livre II, c'est-à-dire pour le calcul de la fluxion des puissances. Même si ces énoncés du livre II ne sont pas aussi clairement définis en tant qu'axiomes que dans le livre I, ils ont ce statut. Nous pouvons dire que, avec cette axiomatisation que nous appellerons celle des paragraphes 703-705, Maclaurin remplace les notions de mouvement accéléré et retardé par les notions de croissance et de décroissance. Et, il remplace la comparaison des vitesses uniformes ou non, par la comparaison successive d'accroissements ou de décroissements. Ainsi, Maclaurin est cohérent avec ce qu'il propose lorsqu'il déclare qu'il remplace l'axiomatisation du premier livre par une autre qui est d'une plus grande généralité[673]

3. Des procédures démonstratives pour les fluxions

a) Un premier exemple simple

Dans la polémique de Berkeley, le *Traité des Fluxions*, devait répondre à la critique

[672] Maclaurin (1749b), vol. II., p. 160.
[673] Maclaurin (1749b), vol. II., p. 158.

de fondements. Maclaurin, nous venons de le voir y répond par deux manières. Ce traité devait répondre aussi à la critique du manque de rigueur dans les démonstrations. Maclaurin va prendre un soin manifeste pour montrer que tous les résultats trouvés à l'aide de la méthode des fluxions ont des démonstrations rigoureuses :

> « La certitude de cette partie de la Géométrie ayant été révoquée en doute, le moyen le plus efficace de mettre la vérité dans tout son jour, et de prévenir toutes les disputes, se réduit à la déduire des principes les plus évidens, et à n'y employer que les démonstrations les plus rigoureuses, à la manière des Anciens Géomètres. C'est-là tout mon dessein dans le Traité suivant, où je ne prétens pas changer l'idée des fluxions que nous a donnée le Chevalier Newton, mais seulement développer et démontrer sa méthode, par des démonstrations les plus rigoureuses, en ne supposant que des principes les plus évidens par eux-mêmes. »[674]

Maclaurin est très clair, il faut donner des démonstrations rigoureuses à la manière des Anciens. Cela sera son but tout au long de l'ouvrage. Mais démontrer « à la manière des Anciens » signifie utiliser dans la démonstration une double réduction par l'absurde. Nous allons donner quelques exemples.

La première proposition du premier livre est « la Fluxion d'un parallélogramme d'une hauteur invariable est toujours mesurée par un parallélogramme de même hauteur décrit sur une ligne droite, qui mesure la Fluxion de sa base »[675]. (Fig. 50) En langage moderne, cela se traduit par : la fluxion d'un produit d'une constante avec une variable est égale au produit de cette constante par la fluxion de la variable.

Il démontre cette proposition dans un premier temps de façon très brève, et suffisante, et dans un second temps il l'examine de façon détaillée pour mettre celle-ci en lien avec son système axiomatique.

---

[674] Maclaurin (1749b), vol. I, introduction, p. iii.
[675] Maclaurin (1749b), vol. I., p. 54.

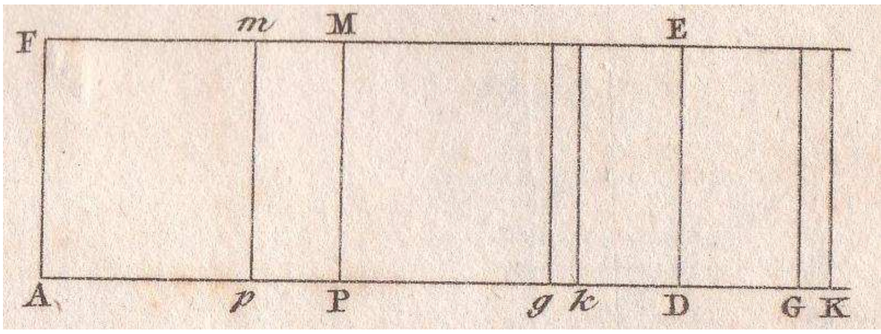


Fig. 50.

En considérant DG la fluxion de la base AP, le rectangle de départ (APMF) aura pour fluxion le rectangle qui est sous (DG) et (ED). Tout d'abord, il signale que lorsque P se meut sur la droite AO, le segment PM se déplace parallèlement à AF en gardant toujours la même longueur (la hauteur est invariable). Puis, en considérant le mouvement de P comme uniforme, le segment PM décrit des parallélogrammes égaux en des temps égaux (cela vient des principes fondamentaux énoncés plus haut). Par conséquent, le segment PM a aussi un mouvement uniforme. Ainsi, étant supposé que la fluxion de AP est l'incrément DG, alors le parallélogramme APMF admet, pendant le même intervalle de temps, comme incrément le rectangle sous EG. Donc la fluxion de APMF est le rectangle de côté DG et ED.

Maintenant qu'il a résolu le problème dans le cas où le point P a un mouvement uniforme, il s'attaque aux cas restants. Si le mouvement de P est accéléré, alors celui de PM le sera aussi, s'il est retardé, celui de PM sera de même. Il dit que, dans ces deux cas, le résultat est le même. Mais, il concède que « si l'on suppose que cela ait besoin d'une autre preuve, on peut la démontrer par les Axiomes de la manière suivante. »[676] Comme nous allons étudier plus bas quelques démonstrations relatives au premier livre, nous allons nous contenter, pour l'instant, de cette démonstration.

Cet exemple ne nous fournit pas sa démarche pour les courbes, mais elle peut se

[676] Maclaurin (1749b), vol. I., p. 55.

résumer en quelques mots. Pour cela, donnons la propriété XIV du livre I : « Que ET soit tangente à la courbe FE en E, et que EI étant parallèle à la base AD, IT soit parallèle à l'ordonnée ED : les fluxions de la base, de l'ordonnée et de la courbe, seront mesurées par les droites EI, IT et ET, respectivement »[677]. (fig. 51)

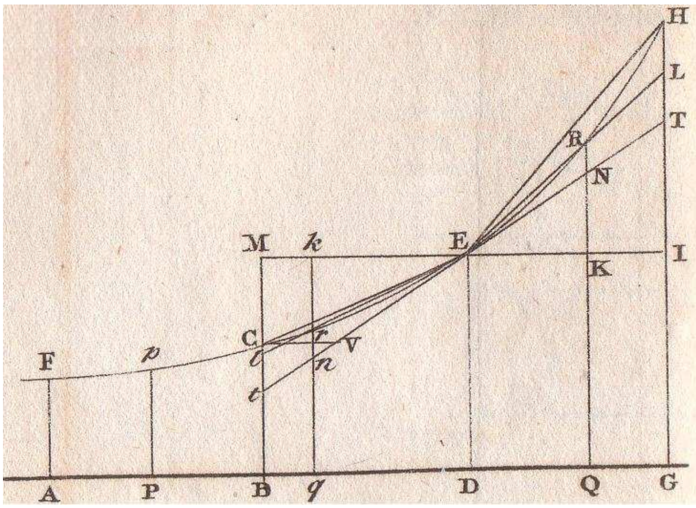


Fig. 51.

Nous ne donnons pas la démonstration de cette proposition[678], mais nous pouvons dire que Maclaurin suppose dans un premier temps que la fluxion de la courbe est plus grande que ET et qu'il arrive à une contradiction. Puis, il suppose que la fluxion de la courbe est plus petite que ET. Et, il arrive encore à une contradiction. Par conséquent, la fluxion de la courbe est donc exactement ET.

b) Le cas des progressions géométriques

(i) Dans le livre I

Pour montrer le procédé démonstratif, nous prenons tout d'abord la proposition

[677] Maclaurin (1749b), vol. I., p. 123.
[678] Pour un commentaire de cette démonstration, voir Panza (1989), pp. 224-8.

VIII du livre I[679] : « la Fluxion d'un terme AN d'une progression géométrique, dont le premier terme est invariable, est à la Fluxion du second terme AP, en raison composée de la raison de ces termes, et de la raison du nombre des termes qui précèdent NA, et à l'unité. »

Cette proposition arrive relativement vite dans le *Traité*. Ainsi, nous n'aurons pas trop d'explications annexes à fournir. Afin d'arriver à la démonstration, Maclaurin a besoin d'un lemme et d'une construction géométrique qui lui est nécessaire pour construire sa progression géométrique. L'explication se fera en trois parties : la première énoncera sa construction géométrique, la deuxième consistera à montrer en quoi le lemme lui servira, enfin la dernière partie s'occupera de la démonstration proprement dite de la proposition.

<u>Partie 1</u> : Il pose une abscisse et une ordonnée sur lesquelles vont évoluer les points de la progression géométrique et il construit les points S, P, L, M et N comme sur la figure 52. *AS*, *AP*, *AL*, *AM* et *AN* sont en progression géométrique car les angles $\widehat{SPL}$, $\widehat{PLM}$ et $\widehat{LMN}$ sont droits. Ainsi en considérant $\theta = \tan(\widehat{ASP})$ comme variable (ce qui sera le cas plus loin lorsque P évoluera sur la demi-droite AE où A est l'origine), *AP*, *AL*, *AM* sont proportionnels aux puissances de θ. Cela se démontre rapidement : *SPA* est un triangle rectangle en *A*, donc $AP = SA \times \theta$. De plus, *APL* est un triangle rectangle en *A* et l'angle $\widehat{APL}$ est égal à l'angle $\widehat{ASP}$, donc $AL = AP \times \theta$, ainsi $AL = SA \times \theta^2$. Par suite, $AM = AL \times \theta$ donc $AM = SA \times \theta^3$. C'est de cette manière que Maclaurin construit sa suite géométrique.

[679] Nous avons mis dans l'annexe II le chapitre V du livre I du *Traité*, ainsi que les figures nécessaires à la compréhension dans l'annexe V.

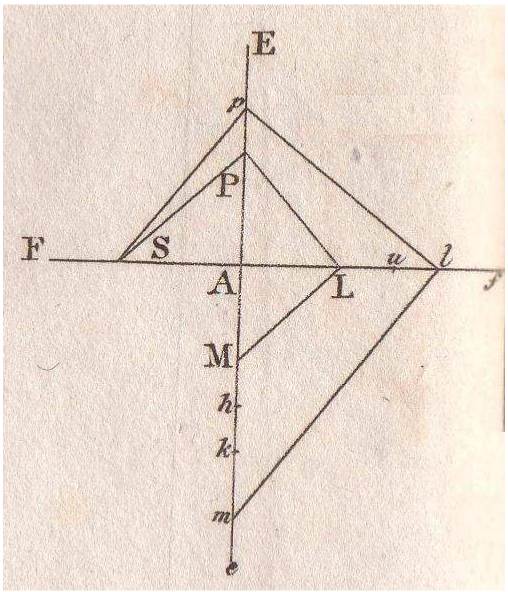


Fig. 52.

Le point S reste fixe, mais le point P varie en croissant uniformément de telle sorte que les points p et p sont des représentants de P tels que $Ap < AP < A\mathrm{p}$ et que $\mathrm{p}P = Pp$ (1). Cela est essentiel pour la démonstration. Il crée les points l et l pour L de la même façon que pour le point P, de même les points m et m pour M, etc.[680]. Ainsi, nous avons deux nouvelles progressions géométriques : la suite *p, l, m ,n,* … et la suite p, l, m ,n, … Par cela, la suite première évoluera entre les deux suites créées.

La première partie consiste à montrer que si P croît de façon uniforme, alors L croît de façon accélérée. Pour cela, il crée les points D et d comme étant les points d'intersection respectivement de lp et LP, et de lp et LP. En utilisant cette construction (Fig. 38.), il prouve que les triangles PSp et Ldl sont semblables[681], de même que pour les triangles PSp

---

[680] Cf. Annexe V, Fig. 40.

[681] Comme les angles $\widehat{SPd}$ et $\widehat{S\mathrm{p}d}$ sont droits (par construction), les points P et p sont sur le cercle de diamètre dS (Euclide, III, 31.). Dans le triangle PSd rectangle en P, on a $\widehat{dSP} + \widehat{PdS} = 90°$ (a), et dans le triangle $dS\mathrm{p}$ rectangle en p, on a $\widehat{dS\mathrm{p}} + \widehat{\mathrm{p}dS} = 90°$ (b). Or $\widehat{SdP} = \widehat{Sd\mathrm{p}} + \widehat{\mathrm{p}dP}$ et $\widehat{dS\mathrm{p}} = \widehat{dSP} + \widehat{PS\mathrm{p}}$. En remplaçant $\widehat{SdP}$ dans (a) et $\widehat{dS\mathrm{p}}$ dans (b) par leur somme respective, puis en soustrayant les égalités (a) et (b) membre à membre, on arrive à l'égalité $\widehat{\mathrm{p}dP} = \widehat{PS\mathrm{p}}$. De cela, on conclut que les triangles PSp et Ldl sont semblables.

et *LDl*. Par la propriété 4 du livre VI des Éléments d'Euclide sur les triangles semblables, il annonce que :

$$\frac{Ll}{Pp}=\frac{DL}{SP} \text{ et } \frac{L1}{Pp}=\frac{dL}{SP} \text{ (2).}$$

De (1) et (2), il conclut que :

$$\frac{Ll}{L1}=\frac{DL}{dL} \text{ (3)}$$

Comme $DL > dL$, alors $Ll > L1$. Il reste pour lui à montrer que *DL* est bien supérieur à *dL*.

Pour cela, il considère le cercle passant par les points D,S,P et *p* (Euclide, III, 31.) et il montre que $\widehat{pSD}=\widehat{DPE}=\widehat{PSA}$ et en ajoutant terme à terme $\widehat{pSP}$, il trouve $\widehat{PSD}=\widehat{pSA}$.

Puis il considère le cercle passant par les points d, S, P et p (Euclide, III, 31.) et montre que $\widehat{PSd}=\widehat{Ppd}=\widehat{pSA}$, comme $\widehat{pSA}=\widehat{pSA}$ on a donc $\widehat{PSD}=\widehat{PSd}$, de plus *d* et *D* appartiennent à *LP* donc $DL > dL$ et par (3) on a bien le résultat escompté $Ll > L1$.

Maintenant qu'il sait que L admet une vitesse sans cesse croissante en accélérant, il cherche donc à la calculer : pour cela il utilise une double démonstration par l'absurde.

Avant tout, il montre que $Dl < 2pl$ et que $dl > 2pl$ (3')[682].

Il veut montrer que

$$\frac{\text{vit}(L)}{\text{vit}(P)}=\frac{2AP}{SA}.$$

Cela se fait en deux temps :

1[er] temps : il suppose que $\frac{\text{vit}(L)}{\text{vit}(P)}>\frac{2AP}{SA}$, il suppose donc que $\frac{\text{vit}(L)}{\text{vit}(P)}=\frac{2Ap}{SA}$ avec $AP < Ap$. Comme *pSA* et *lSp* sont semblables, on a

---

[682] car $Dl = Dp + pl$ et $Dp < pl$ et aussi car $dl = dp + pl$ et $dp > pl$.

$$\frac{Ap}{SA}=\frac{pl}{SP}$$

Ainsi

$$\frac{\mathrm{vit}(L)}{\mathrm{vit}(P)}=\frac{2pl}{SP}.$$

Comme $Dl<2pl$, on a

$$\frac{\mathrm{vit}(L)}{\mathrm{vit}(P)}>\frac{Dl}{SP}$$

Or les triangles *SpP* et *DlL* sont semblables alors :

$$\frac{Dl}{Sp}=\frac{Ll}{Pp}.$$

Par conséquent

$$\frac{\mathrm{vit}(L)}{\mathrm{vit}(P)}>\frac{Ll}{Pp} \quad (4)$$

Le fait que *L* croît avec une vitesse accélérée et que *P* a une vitesse uniforme implique par le premier Axiome que l'on a

$$\frac{\mathrm{vit}(L)}{\mathrm{vit}(P)}<\frac{Ll}{Pp}. \quad (5)$$

De (4) et (5), on obtient une contradiction.

Par conséquent

$$\frac{\mathrm{vit}(L)}{\mathrm{vit}(P)}\not>\frac{2AP}{SA}.$$

2ème temps : il suppose que $\frac{\mathrm{vit}(L)}{\mathrm{vit}(P)}<\frac{2AP}{SA}$, ainsi il pose que $\frac{\mathrm{vit}(L)}{\mathrm{vit}(P)}=\frac{2A\mathrm{p}}{SA}$.

Il utilise le même raisonnement que dans le premier temps et il termine avec le deuxième axiome en une contradiction.

De tout cela, il montre que

$$\frac{\text{vit}(L)}{\text{vit}(P)} = \frac{2AP}{SA}.$$

Maintenant, il désire s'attaquer aux puissances supérieures, c'est-à-dire aux vitesses de *M*, *N*, *R*, etc. Pour cela, il a besoin, comme pour le calcul de la vitesse de *L*, de points équivalents à *D* et *d*. Ainsi il crée les points *G*, *g*, *H*, *h*, *K*, *k*[683]. (Fig. 53).

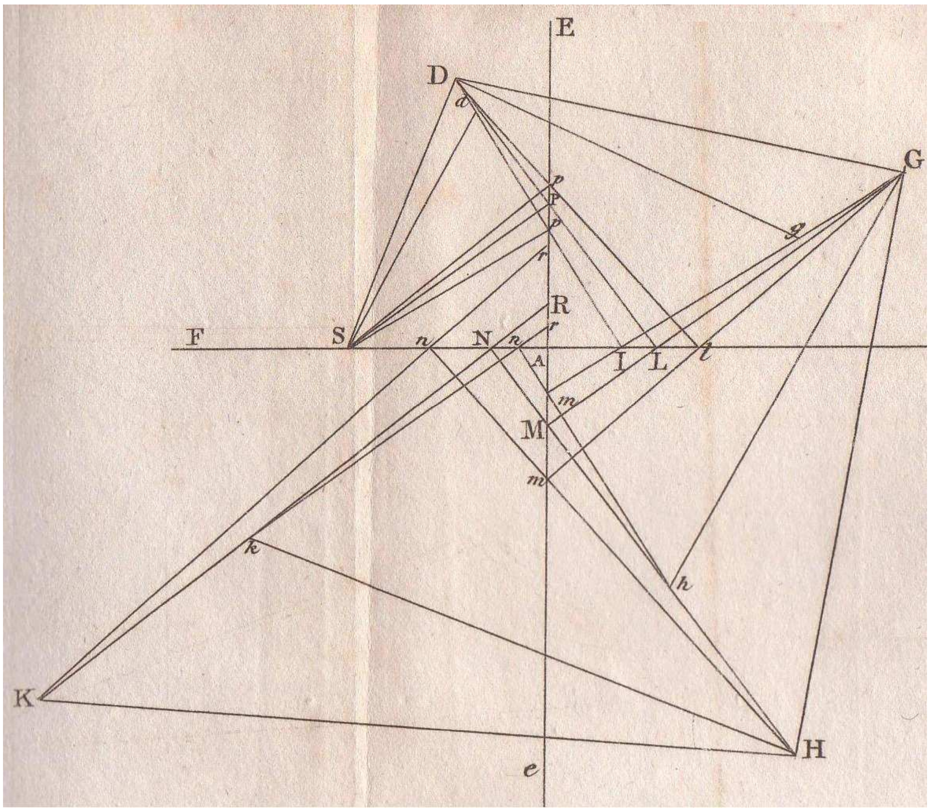


Fig. 53.

Par la construction des points, il montre que la suite des triangles *PS*p, *Ld*l, *Mg*m, *Nh*r, … est une suite de triangles semblables ainsi que la suite de triangles PS*p*, *LDl*, *MGm*, *NHn*, … . De plus, il remarque que certains angles sont égaux entre-eux et ont une différence égale avec une autre suite d'angles égaux[684]. Ces deux remarques lui sont très utiles pour démontrer le lemme VI.

[683] Ces points construits de la façon suivante : G est le point d'intersection de ML et *ml*, g celui de ML et ml, H celui de MN et *mn*, h celui de MN et mn, K le point d'intersection de NR et *nr* et k celui de NR et nr.

[684] Les suites sont respectivement $\widehat{p\text{SA}} = \widehat{\text{PSD}} = \widehat{\text{LDG}} = \widehat{\text{MGH}} = \widehat{\text{NHK}}$ et $\widehat{\text{pSA}} = \widehat{\text{PS}d} = \widehat{\text{LD}g} = \widehat{\text{MG}h} = \widehat{\text{NH}k}$ avec $\widehat{p\text{SA}} - \widehat{\text{pSA}} = \widehat{p\text{Sp}}$.

Partie 2 : Nous avons vu dans la première partie qu'un des résultats les plus importants était le fait de savoir que L a une vitesse qui augmente pendant que la vitesse de P restait constante. Le lemme VI s'énonce comme ceci « Lorsque le premier terme d'une progression Géométrique est invariable, et que le second croît uniformément, chacun des termes suivans croît d'un mouvement accéléré ». Ce lemme est une généralisation de ce résultat à toutes les puissances de la progression géométrique. Cela lui servira pour la démonstration de la proposition. La démonstration de ce lemme est en tout point équivalente à celle étudiée plus haut. Ainsi pendant que le point P se déplace uniformément, les points L, M, N, R ont un mouvement accéléré.

Avant d'entamer la recherche de la fluxion de AN qui est le but de ce préambule, il a besoin de quelques résultats annexes : il lui faut montrer que D*l*, G*m*, H*n*, et K*r* sont respectivement plus petits que 2*pl*, 3*lm*, 4*mn* et 5*nr* et que *d*l, *g*m, *h*n, et *k*r sont respectivement plus grands que 2pl, 3lm, 4mn, 5nr. Il le démontre de la même façon que pour (3'). Maintenant, Maclaurin est armé pour démontrer la proposition VIII.

Partie 3 : La proposition est la suivante : « La Fluxion d'un terme AN d'une progression géométrique, dont le premier terme est invariable, est à la Fluxion du second terme AP, en raison composée de la raison de ces termes, et de la raison du nombre des termes qui précèdent NA, et à l'unité ». En d'autres termes cela signifie que la fluxion d'une puissance x^n (représenté par AN) est à la fluxion de la variable x comme la puissance x^n est à la variable x multipliée par n. Cela peut aussi s'écrire comme $\frac{\mathrm{Fl}(x^n)}{\mathrm{Fl}(x)} = n\frac{x^n}{x}$.

La démonstration se fait encore par l'absurde.

Tout d'abord, on suppose que $\frac{\mathrm{vit}(\mathrm{N})}{\mathrm{vit}(\mathrm{P})} > \frac{4\mathrm{AM}}{\mathrm{SA}}$

Pour cela on pose $\frac{\mathrm{vit}(\mathrm{N})}{\mathrm{vit}(\mathrm{P})} = \frac{4\mathrm{A}m}{\mathrm{SA}}$ avec $\mathrm{A}m > \mathrm{AM}$.

Par construction, les triangles S$\mathrm{A}p$ et Amn sont semblables. D'où $\mathrm{A}m : \mathrm{SA} = mn : \mathrm{S}p$ alors $4\mathrm{A}m : \mathrm{SA} = 4mn : \mathrm{S}p$. Or $4mn > \mathrm{H}n$ ce qui a été démontré lors du deuxième temps, donc $4\mathrm{A}m : \mathrm{SA} > \mathrm{H}n : \mathrm{S}p$. Comme $\mathrm{H}n : \mathrm{S}p = \mathrm{N}n : \mathrm{P}p$ [685], $4\mathrm{A}m : \mathrm{SA} > \mathrm{N}n : \mathrm{P}p$

Donc

$$\frac{\mathrm{vit}(\mathrm{N})}{\mathrm{vit}(\mathrm{P})} > \frac{\mathrm{N}n}{\mathrm{P}p} \quad (6)$$

Comme pendant que P parcourt Pp avec un mouvement uniforme, N parcourt Nn avec un mouvement accéléré, Maclaurin peut appliquer l'axiome I. Et, il déduit que :

$$\frac{\mathrm{vit}(\mathrm{N})}{\mathrm{vit}(\mathrm{P})} < \frac{\mathrm{N}n}{\mathrm{P}p} \quad (7)$$

De (6) et (7), on arrive à une contradiction. Par conséquent ce qui a été supposé initialement est faux.

Il suppose ensuite que $\frac{\mathrm{vit}(\mathrm{N})}{\mathrm{vit}(\mathrm{P})} < \frac{4\mathrm{AM}}{\mathrm{SA}}$

Il pose que $\frac{\mathrm{vit}(\mathrm{N})}{\mathrm{vit}(\mathrm{P})} = \frac{4\mathrm{Am}}{\mathrm{SA}}$ avec $\mathrm{Am} < \mathrm{AM}$

Par la même méthode et avec le deuxième axiome, il arrive aussi à une contradiction.

De plus, $\mathrm{AM} : \mathrm{SA} = \mathrm{AN} : \mathrm{AP}$ (par la construction des points de la suite géométrique), conclusion est, donc,

$$\frac{\mathrm{vit}(\mathrm{N})}{\mathrm{vit}(\mathrm{P})} = \frac{4\mathrm{AN}}{\mathrm{AP}}.$$

Comme la vitesse du point est égale à la fluxion de la courbe générée par ce point, Maclaurin conclut par :

$$\frac{\mathrm{Fl}(\mathrm{N})}{\mathrm{Fl}(\mathrm{P})} = \frac{4\mathrm{AN}}{\mathrm{AP}}$$

---

[685] Car les triangles NnH et SpP sont semblables.

Maclaurin s'arrête à ce pas, il ne continue pas plus loin le raisonnement. C'est-à-dire qu'il ne cherche pas la fluxion du n-ième (avec n quelconque) terme de la progression géométrique. Mais, la construction des différents termes de la progression géométrique peut se poursuivre sans aucun problème, et la démonstration qui en découle peut être appliquée à n'importe quel terme de la progression. La suite du chapitre découle de cette proposition, et il montre par ailleurs le calcul des deuxième et troisième fluxions d'un terme d'une progression géométrique. Le calcul de la fluxion d'une puissance est important, surtout si la puissance est rationnelle ou réelle. Dans ce que nous venons de voir, la puissance est uniquement un entier naturel positif. A la fin du chapitre V du livre I, il explique une méthode pour trouver la fluxion d'une puissance rationnelle. Maclaurin en fournit une autre dans le chapitre sur les logarithmes, nous examinerons cette démonstration plus loin. Regardons maintenant le même résultat démontré dans le livre II.

(ii) Dans le livre II

Nous venons de voir, dans la section précédente, la démonstration géométrique de la proposition sur la fluxion de x^n qui est nx^{n-1} où n est un entier naturel dans le livre I. Dans le second livre, Maclaurin, pour arriver au résultat du calcul de la fluxion d'une puissance rationnelle, a une démarche différente avec des outils propres au second livre. Nous allons montrer comment il arrive à ce résultat. Il opère en trois temps. Dans un premier temps, il calcule la fluxion de A^2, puis, il calcule celle de A^n où n est un entier naturel. Enfin, il calcule celle de $A^{\frac{p}{q}}$ où p et q sont des entiers relatifs

La première étape correspond à la première des quatre propriétés du premier chapitre du second livre : « La fluxion de la racine *A* étant supposée égale à *a*, celle du quarré *AA* sera égale à $2Aa$ ».

La démonstration se base sur « l'axiomatisation » du second livre, celle des paragraphes 703-705, en utilisant les différences successives. Maclaurin considère les valeurs successives $A-u, A, A+u$ où u est un incrément quelconque de *A*. Les valeurs successives du carré de *A* sont $A^2-2Au+u^2$, A^2 et $A^2+2Au+u^2$. Les différences avec A^2 sont alors respectivement $2Au-u^2$ et $2Au+u^2$. Ces différences sont croissantes. Or, d'après l'axiomatique des paragraphes 703-705, si les différences successives de l'incrément est croissante, alors la fluxion est comprise entre la plus petite et la plus grande des accroissements. Ainsi, la fluxion de A^2 est comprise entre $2Au-u^2$ et $2Au+u^2$ ($).

Il démarre ensuite une double démonstration par l'absurde.

Soit $\mathrm{Fl}(A)=a$, il suppose que $\mathrm{Fl}\left(A^2\right)\neq 2Aa$.

1er temps : $\mathrm{Fl}\left(A^2\right)>2Aa$, posons $\mathrm{Fl}\left(A^2\right)=2Aa+ka$ où *k* est positif. Soit *u* un incrément de *A* tel que $u<k$. Si $\mathrm{Fl}(A)=u$ alors $\mathrm{Fl}\left(A^2\right)=2Au+ku>2Au+u^2$. Or, d'après ($), $\mathrm{Fl}\left(A^2\right)<2Au+u^2$. Cela est donc contradictoire.

2ème temps : Il suppose ensuite que $\mathrm{Fl}\left(A^2\right)<2Aa$. Il pose $\mathrm{Fl}\left(A^2\right)=2Aa-ka$ où *k* est positif. Par la même méthode, il arrive aussi à une contradiction. Par conséquent, Donc $\mathrm{Fl}\left(A^2\right)=2Aa$.

De cela, il déduit très facilement la fluxion du carré d'une somme, $\mathrm{Fl}\left((A+B)^2\right)=2(a+b)(A+B)$, puis la fluxion de la somme de carrés, $\mathrm{Fl}\left(A^2+B^2\right)=2Aa+2Bb$ et la fluxion d'un produit $\mathrm{Fl}(AB)=bA+aB$, enfin la fluxion du quotient $\mathrm{Fl}\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{aB-bA}{B^2}$[686]. Après avoir donné la fluxion d'une somme (d'une soustraction), d'un produit et d'un quotient, Maclaurin s'attaque à la fluxion d'une puissance.

Cette deuxième étape équivaut à la deuxième proposition : « La Fluxion de la racine A étant supposée égale à a, celle de la puissance A^n sera $nA^{n-1}a$ ».

Avant d'utiliser le même procédé que précédemment, il démontre que les incréments successifs de A^n, c'est-à-dire $A^n-(A-u)^n$ et $(A+u)^n-A^n$ où u un incrément de A, sont croissants[687]. Ainsi, en utilisant l'axiomatique des paragraphes 703-705, la fluxion de A^n est compris entre ces deux différences.

Premier temps, il suppose que $\mathrm{Fl}(A^n)>naA^{n-1}$. Soit r positif tel que $\mathrm{Fl}(A^n)=naA^{n-1}+r$. Soit un incrément positif k tel que

$$k=\sqrt[n-1]{\left(A^{n-1}+\frac{r}{na}\right)}-A.$$

Par conséquent, $na(A+k)^{n-1}=naA^{n-1}+r=\mathrm{Fl}(A^n)$. Soit u tel que $u<k$. Alors, comme $a:u=na(A+k)^{n-1}:nu(A+k)^{n-1}$, en supposant que $\mathrm{Fl}(A)=u$, on a $\mathrm{Fl}(A^n)=nu(A+k)^{n-1}$. Or $nu(A+k)^{n-1}>nu(A+u)^{n-1}>(A+u)^n-A^n$. Cela est en contradiction avec le fait que la fluxion de A^n soit plus petit que $(A+u)^n-A^n$. Donc $\mathrm{Fl}(A^n)\leq naA^{n-1}$.

---

686 La démonstration de cette dernière fluxion est la suivante : soit $Q=\frac{A}{B}$, $BQ=A$ d'où $\mathrm{Fl}(BQ)=qB+bQ=a$. En exprimant q, on a le résultat.

687 Pour démontrer cela, il utilise la formule $E^n-F^n=(E-F)(E^{n-1}+E^{n-2}F+\cdots+EF^{n-2}+F^{n-1})$. Si E est plus grand que F, alors chaque terme de la seconde parenthèse est majoré par E^{n-1}. Par conséquent, la différence E^n-F^n est majorée par $n(E-F)E^{n-1}$. De même, en minorant chaque terme de la seconde parenthèse par F^{n-1}, alors la différence sera minorée par $n(E-F)F^{n-1}$. En appliquant cela respectivement à $E=A+u, F=A$, puis à $E=A, F=A-u$, alors $A^n-(A-u)^n<(A+u)^n-A^n$.

Deuxième temps, il suppose ensuite que $\mathrm{Fl}\left(A^n\right) = naA^{n-1} - r$ où r est positif et par la même méthode, il arrive aussi à une contradiction. La conclusion s'impose : $\mathrm{Fl}\left(A^n\right) = naA^{n-1}$.

Maclaurin fait la remarque que l'on peut calculer les fluxions de $A^{\frac{1}{n}}$ et de A^{-n} et les justifier par la même méthode, mais il précise que ce ne sont que des cas particuliers de la troisième propriété que l'on va étudier dans une troisième étape.

La troisième étape peut se confondre avec la troisième proposition : « La Fluxion de la racine A étant supposée égale à a, celle de $A^{\frac{m}{n}}$ est $\frac{m}{n}A^{\frac{m}{n}-1}a$ ».

Il sépare la démonstration en deux cas.

Dans le premier cas, il suppose le rapport $\frac{m}{n}$ positif. Soit $K = A^{\frac{m}{n}}$, alors $K^n = A^m$ et soit $\mathrm{Fl}\left(K\right) = k = \mathrm{Fl}\left(A^{\frac{m}{n}}\right)$. Alors, en appliquant la règle de la fluxion d'une puissance à l'égalité, $K^n = A^m$, on a $nkK^{n-1} = maA^{m-1}$.

Et donc,

$$\mathrm{Fl}\left(A^{\frac{m}{n}}\right) = k = \frac{m}{n}a\frac{A^{m-1}}{K^{n-1}} = \frac{m}{n}a\frac{K}{A} = \frac{m}{n}aA^{\frac{m}{n}-1}.$$

Dans le second cas, il suppose que $\frac{m}{n} < 0$, il pose $r = -\frac{m}{n}$ et $K = A^{-r}$. Alors $1 = K.A^r$. En calculant la fluxion de chaque partie de l'égalité, il trouve que si $\mathrm{Fl}\left(K\right) = k$, alors $0 = kA^r + raKA^{r-1}$. D'où le résultat.

En trois propositions, Maclaurin détermine avec toujours la même méthode, c'est-à-dire l'utilisation de l'axiomatique des paragraphes 703-705 au sein d'une double réduction par l'absurde, la base de la méthode des fluxions dans le cadre algébrique. Les fluxions d'une somme, d'un produit, et d'une puissance sont ainsi trouvées, utilisant simplement son axiomatique et les outils algébriques de base. Nous pouvons remarquer que Maclaurin, à la dernière page de son *Traité*, donne une autre démonstration de la proposition du calcul de la fluxion de x^n où la fluxion de x est égale à 1 en posant que x^n est l'aire produite par x considérée comme la base du rectangle et $x^{n-1} = y$ comme l'ordonnée[688]. Une autre remarque vient tout de suite : la démonstration de la fluxion du logarithme suit directement tant dans le livre I que dans le second. Étudions cette la démonstration.

c) Le cas des logarithmes

Le calcul de la fluxion du logarithme se trouve dans le corollaire I de la proposition X du chapitre VI du livre I. La démonstration du résultat est l'application directe de la proposition X, qui découle presque uniquement de la définition et la construction du logarithme. La définition d'une quantité qui « croît proportionnellement » est la suivante :

> « Supposons que la ligne *ao* croisse proportionnellement, c'est-à-dire, que le point *p* se meuve sur *oa* prolongée au-delà de *a*, et qu'en tems égaux il parcoure des espaces proportionnels à ses distances au point *o*, au commencement de chaque tems, ensorte que les incrémens *ac*, *cd*, *de*, *ef*, etc. puissent être décrits en tems égaux, lorsque *ac* est à *ao*, *cd* à *co*, *de* à *do*, *ef* à *eo*, etc. toujours dans la même raison invariable. »

La figure ci-dessous (Fig. 54) représente une ligne qui croît proportionnellement avec une raison invariable de $0,5$. La définition nous indique que le point p a un mouvement qui croît proportionnellement si, pour chaque même intervalle de temps donné, l'espace parcouru par p est proportionnel à l'espace parcouru depuis le début, la proportion étant constante. Ainsi, si on prend la longueur *oa* comme la longueur de référence associée à l'intervalle de temps T, p arrive après un intervalle de temps T en c de telle façon que *ac*

[688] La démonstration de cette propriété est bien expliquée dans Grabiner (1997), pp. 398-9.

soit la moitié (ou proportionnel d'un facteur α) de *oa*. À l'intervalle *T* suivant, *p* parcourt la longueur *cd* telle que cette distance soit égale à la moitié (ou proportionnel d'un facteur α) de *oc*, et, ainsi de suite. Cette construction est toujours vraie quelque soit l'intervalle de temps *T* pris.

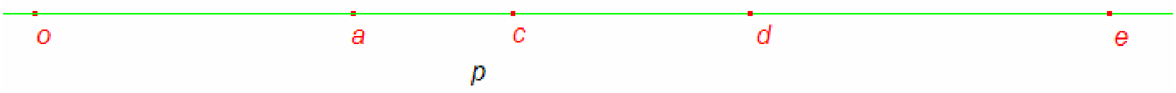


Fig. 54.

À cette suite de points est associée une autre suite de points, *A*, *C*, *D*, *E*,…, telle les longueurs *AC*, *CD*, *DE*, … sont égales. Ces espaces sont parcourus par un point *P* à chaque intervalle *T*. Ainsi, quand *P* est en *A*, *p* est en *a*, puis quand *P* est en *C*, *p* est en *c*, et ainsi de suite. Alors, *AP* est le logarithme de *op*, donc, *AC*, *AD*, *AE*, … sont respectivement les logarithmes de *oc*, *od*, *oe*,…

Étudions sommairement la proposition X. Son intitulé est : « La Fluxion d'une quantité qui croît ou qui décroît proportionnellement, varie toujours en même raison que cette quantité même. »[689] (Fig. 55).

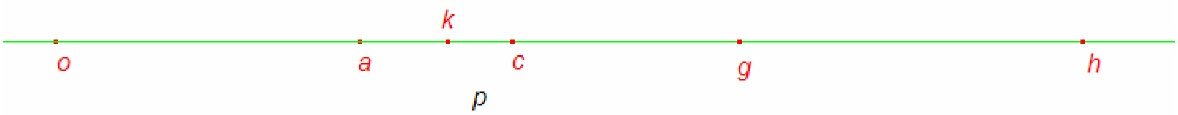


Fig. 55.

Dans la démonstration, Maclaurin sépare le cas où la quantité croît du cas où elle décroît. Dans le premier cas, il commence par prendre cette quantité en deux temps distincts, et par les mettre en relation de cette manière : soit *p* la quantité croissant proportionnellement sur la droite ci-dessus telle qu'elle passe par *c* et par *g* en deux temps distincts séparés par un intervalle de temps *T*. Il veut montrer alors que le rapport des vitesses de *p* en ces deux points est égal au rapport des deux longueurs *og* et *oc*. C'est-à-dire : $\frac{\text{vit}(g)}{\text{vit}(c)} = \frac{og}{oc}$

[689] Maclaurin (1749b), vol. I., p. 107.

Pour démontrer cette égalité de rapport, il utilise toujours la même démarche, c'est-à-dire une double démonstration par l'absurde. Cette démonstration se fait en deux temps :

Premier temps : il suppose $\frac{\text{vit}(g)}{\text{vit}(c)} > \frac{og}{oc}$. Il prend un point *h* sur la droite tel que $oh > og$ et que $\frac{\text{vit}(g)}{\text{vit}(c)} = \frac{oh}{oc}$. Soit *k* un autre point de la droite tel que $oh : oc = og : ok$ c'est-à-dire tel que $ok : oc = og : oh$. Le point *p* croît continuellement, ainsi le rapport $\frac{gh}{oh}$ est constant comme le rapport $\frac{kc}{oc}$. De plus, comme ces deux rapports concernent le même point *p*, on a alors l'égalité $\frac{gh}{oh} = \frac{kc}{oc}$. D'où, $\frac{oc}{oh} = \frac{kc}{gh}$. En associant cette égalité avec celle plus haut, Maclaurin en déduit $\frac{kc}{gh} = \frac{ok}{og}$.

Comme *p* a un mouvement croissant, alors la vitesse de *p* en *k* est plus petite que celle de *p* en *c*, donc par l'axiome II, l'espace parcouru par *p* avec la vitesse de *p* acquis en *c* (considérée comme uniforme) *C* sera plus grand que *kc* (espace parcouru par *p* avec sa vitesse croissante) pendant le même intervalle de temps *T*. De plus, par le premier axiome, l'espace parcouru par *p* avec la vitesse de *p* acquis en *g*, *G*, est plus petit que *gh* pendant le même intervalle de temps *T*. Ainsi, on a $kc < C = \text{vit}(c).T$ et $gh > G = \text{vit}(g).T$. Donc, en associant ces deux inégalités, $\text{vit}(g) : \text{vit}(c) < gh : kc$. D'où $\text{vit}(g) : \text{vit}(c) < oh : oc$. Ceci est en contradiction avec $\text{vit}(g) : \text{vit}(c) = oh : oc$. Donc $\text{vit}(g) : \text{vit}(c) \not> og : oc$.

Deuxième temps : Maclaurin suppose, ensuite, que le premier membre est inférieur au second, par une inversion de l'inégalité et en utilisant le même procédé, il arrive aussi à une contradiction. Il conclut :

$$\frac{\text{vit}(g)}{\text{vit}(c)} = \frac{og}{oc}$$

Dans le deuxième cas, c'est-à-dire quand la vitesse de *p* décroît proportionnellement, il procède de la même manière en utilisant cette fois les axiomes III et IV.

Puis, il démontre la réciproque de cette proposition, c'est-à-dire que si la vitesse de *p* est toujours comme la distance *op*, alors le point p croît ou décroît proportionnellement.

Dans le corollaire, Maclaurin rappelle la construction du logarithme. *P* est le logarithme de *p* (croissant ou décroissant proportionnellement comme dans la citation citée plus haut), *P* a un mouvement uniforme tandis que *p* croît ou décroît proportionnellement et la vitesse uniforme de *P* est égale à la vitesse de *p* en *a*. Par la proposition X, on a $\mathrm{vit}(a):\mathrm{vit}(p)=oa:op$. Or $\mathrm{vit}(a)=\mathrm{vit}(P)=\mathrm{Fl}(AP)$ et $\mathrm{vit}(p)=\mathrm{Fl}(op)$. Alors, il a bien le résultat espéré :

$$\frac{\mathrm{Fl}(P)}{\mathrm{Fl}(p)}=\frac{oa}{op}$$

Dans ce même chapitre, il démontre à l'aide des logarithmes et de leurs fluxions un résultat déjà énoncé dans le chapitre V sur le calcul de la fluxion de A^r où *r* est un rationnel[690].

Dans le second livre, la fluxion du logarithme fait partie des six propositions du chapitre I. L'énoncé et la démonstration concernant cette fluxion sont : « Proposition VI. La Fluxion d'une quantité *N* est à celle de son logarithme, comme *N* est au module du système logarithmique. Car les quantités et leurs logarithmes étant supposées croître, ou décroître en même tems, lorsque la quantité croît, ou décroît en même proportion que son logarithme, elle est alors égale au module. Supposons que cette quantité soit *M*. Puisque la fluxion de *N* est à celle de *M*, comme *N* est à *M*, par le dernier article ; il suit que celle de *N* est à celle de son logarithme, comme *N* est au module. Ainsi, en supposant $N=A^e$, *e* étant

[690] Maclaurin (1749b), vol. I., p. 111.

un exposant constant, le $\log N = e \times \log A$; par conséquent les Fluxions de N et A étant supposées égales à n et a respectivement, $\frac{Mn}{N} = \frac{eMa}{A}$ et $n = \frac{eNa}{A} = eA^{e-1}a$. Nous nous sommes assez étendu sur cela dans le Chapitre VI Du Livre I. »[691] La démonstration suit aussi le calcul des différences successives, nous ne redonnons pas la démonstration.

4. Des procédures démonstratives de la méthode des fluentes

a) La méthode inverse des fluxions dans le livre I : la notion de limite

Dans le livre I, Maclaurin disserte aussi sur ce qu'il appelle « la Méthode inverse des Fluxions ». Ainsi, nous allons étudier une proposition qui représente bien la mise en oeuvre de cette méthode dans le calcul des fluentes. Nous avons mis en annexe, les propositions nécessaires à la compréhension de cette section. Mais avant d'aborder ces propositions, nous allons nous focaliser sur un terme qui revient dans les différentes propositions que nous allons étudier. Il est utile de donner la signification de la notion de limite[692]. Même si c'est dans un contexte géométrique et que la notion de fonction n'est pas présente dans le corpus de Maclaurin, la façon dont il décrit la limite vers l'infini, par « ces aires pourront être prolongées jusqu'à surpasser tout espace donné » est très proche de la conception de la limite que l'on peut utiliser aujourd'hui. De plus, le second lemme du livre I énonce que :

---

691 Maclaurin (1749b), vol. II., p. 166.

692 Robins, dans sa réponse à Berkeley, utilise, lui aussi, une notion de limite pour expliquer les premières et dernières raisons et aussi pour la méthode des fluentes. Voir par exemple, Sageng (1989), pp. 254-81, Jesseph (1992), pp. 259-69 ou Panza (1989), pp. 195-213.

« une quantité déterminée AB est toujours une limite entre deux quantités variable AP et AQ, que l'on suppose s'approcher continuellement l'une de l'autre et de la première AB, en sorte que la différence de l'une ou l'autre de la première devienne plus petite qu'aucune quantité donnée ou en sorte que la raison de AQ à AP devienne plus petite qu'aucune raison déterminable d'une quantité plus grande à une autre quantité plus petite. »[693]

Ceci peut être considéré comme une définition de la limite. Dans cet énoncé, Maclaurin emploie le mot de quantité qui peut être considéré soit dans un contexte géométrique soit dans un contexte algébrique. Plus loin dans le livre I, Maclaurin écrit dans le cas des séries que

« Il y a des progressions de fractions que l'on peut continuer à volonté, sans que la somme des termes arrive à un certain nombre fini. Si la différence, entre leur somme et ce nombre, décroît de telle maniere, qu'en continuant la progression, elle puisse devenir plus petite qu'aucune fraction assignable, quelque petite soit celle-ci, ce nombre est la limite de la somme de la progression, c'est ce que l'on entend par la valeur de la progression que l'on suppose continuée à l'infini. »[694]

Ici, il n'y a aucune référence au contexte géométrique mais Maclaurin se place dans le cadre algébrique. De plus, cette définition peut aider à une meilleure compréhension de la notion de limite en géométrie, car « ces limites sont analogues à celles des figures que nous avons considérées, et elles servent à s'éclaircir mutuellement »[695].

Intéressons-nous maintenant à quelques propositions. Dans un premier temps, nous étudierons la proposition XXIV, puis dans le second temps, nous nous attaquerons à la proposition XXVII.

La propriété XXIV est la suivante :

[693] Maclaurin (1749b), vol. I.,
[694] Maclaurin (1749b), vol. I., p. 225.
[695] Maclaurin (1749b), vol. I., p. 225.

« Que la ligne B*m* (Fig. 56.) soit une asymptote d'une espèce quelconque de la courbe FM ; la Fluxion de la base étant représentée par la droite donnée DG, que les Fluxions des ordonnées PM, P*m* soient toujours mesurées par les droites PN, P*n*, et lorsque PM est égal à AF, soient P*m*, PN et P*n* égales à AB, A*f*, A*b*, respectivement : le rectangle sous BF et DG sera la limite de l'aire *bf*N*n*. »[696]

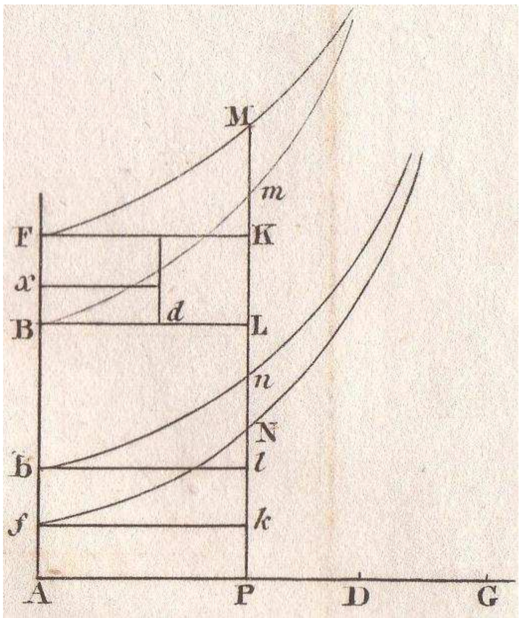


Fig. 56.

Dans cet énoncé, Maclaurin énonce un résultat qui, en langage plus moderne, est que l'aire comprise entre la fluxion d'une courbe et celle de son asymptote admet une limite finie lorsque la courbe est continuée à l'infini et que cette limite est le produit de la fluxion de AP (de l'abscisse) par la différence au départ (ou plutôt à l'origine) des ordonnées de la courbe et de celle de l'asymptote[697]. Regardons de plus près la démonstration.

[696] Maclaurin (1749b), vol. I., p. 189.
[697] En utilisant le langage moderne, si $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0$, alors :
$\lim_{x\to\infty}\int_{x_0}^{x}\left(f'(u)-g'(u)\right)du = f(x_0)-g(x_0)$ où la dérivée de x est considérée égale à un.

On construit les points K, L, *l*, *k* comme étant les points d'intersection de la droite (PM) avec les parallèles de (AP) issues respectivement de F, B, *b*, *f*. Ces points interviennent pour comparer des rectangles dans la suite de la démonstration.

On sait par l'énoncé que $\mathrm{Fl}(\mathrm{AP}) = \mathrm{DG}$ et $\mathrm{Fl}(\mathrm{PM}) = \mathrm{PN}$, donc on a l'égalité $\mathrm{Fl}(\mathrm{AP}).\mathrm{PN} = \mathrm{Fl}(\mathrm{PM}).\mathrm{DG}$. Or comme Maclaurin considère que l'abscisse a un mouvement uniforme $\mathrm{DG} = \mathrm{Fl}(\mathrm{AP})$ est constante, donc on peut dire que $\mathrm{Fl}(\mathrm{PM}).\mathrm{DG} = \mathrm{Fl}(\mathrm{PM.DG}) = \mathrm{Fl}(\mathrm{Rect}(\mathrm{DG},\mathrm{PM}))$[698] (proposition I du livre I). Le premier membre $\mathrm{Fl}(\mathrm{AP}).\mathrm{PN}$ se transforme par une propriété sur les surfaces courbes en la fluxion de l'aire $\mathrm{APN}f$ notée $\mathrm{Fl}(\mathrm{APN}f)$. En utilisant le théorème IV[699], et en sachant que AP et KM (qui est la différence de l'ordonnée PM entre le début du temps et la fin de l'intervalle de temps Δt) commencent en même temps, $\mathrm{APN}f = \mathrm{Rect}(\mathrm{DG},\mathrm{KM})$. De la même manière, il démontre que $\mathrm{AP}nb = \mathrm{Rect}(\mathrm{DG},\mathrm{L}m)$.

Par conséquent, on a $bf\mathrm{N}n = \mathrm{AP}nb - \mathrm{APN}f = \mathrm{Rect}(\mathrm{DG},\mathrm{L}m) - \mathrm{Rect}(\mathrm{DG},\mathrm{KM})$. Donc $bf\mathrm{N}n = \mathrm{Rect}(\mathrm{DG},\mathrm{L}m - \mathrm{KM})$. Or $\mathrm{L}m - \mathrm{KM} = \mathrm{BF} - \mathrm{M}m$.[700] D'où l'aire $bf\mathrm{N}n = \mathrm{Rect}(\mathrm{DG},\mathrm{BF} - \mathrm{M}m) < \mathrm{Rect}(\mathrm{DG},\mathrm{BF})$. Or comme toute aire, *bf*N*n* est croissante et de plus, M*m* tend vers zéro lorsque que AP tend vers l'infini « puisque M*m* décroît continuellement et devient moindre qu'aucune droite donnée, en prolongeant la figure »[701]. Par conséquent la limite de l'aire *bf*N*n* est bien l'aire du rectangle $\mathrm{Rect}(\mathrm{DG},\mathrm{BF})$.

Maclaurin termine sa démonstration en annonçant que ce résultat n'est plus valable

---

698 Nous notons Rect(DG,PM), l'aire du rectangle sous DG et PM.
699 Théorème IV : Si les vitesses de deux mouvemens sont toujours égales entre-elles, les espaces parcourus dans le même tems seront égaux.
700 Car $\mathrm{L}m - \mathrm{KM} = \mathrm{L}m - \mathrm{K}m - m\mathrm{M}$ or $\mathrm{L}m - \mathrm{K}m = \mathrm{KL}$ et que $\mathrm{KL} = \mathrm{BF}$ du fait de la construction des points K et L.
701 Maclaurin (1749b), vol. I., pp. 189-90.

si la courbe de départ FM admet comme asymptote une droite perpendiculaire à la base AP :

> « On voit pourtant que cette Proposition ne s'étend pas au cas où le point m se trouve dans une asymptote rectiligne de la courbe FM, laquelle est perpendiculaire à la base ; car AF et PM ne rencontrent jamais cette asymptote, lui étant parallèle. »[702].

Cette dernière proposition annonce la propriété XXVII. Nous venons de voir que l'aire comprise entre la fluxion de l'asymptote et celle de la courbe est convergente. L'énoncé de la proposition XXVII nous fournit un critère de convergence de l'intégration de puissances :

> « Que Pr ordonnée de la figure APrg soit à PN ordonnée de la figure APNF, en une raison qui approche d'une raison assignable comme de sa limite, pendant que les figures sont prolongées; soit PN réciproquement comme une puissance de BP; si l'exposant de cette puissance est plus grand que l'unité, et si l'on prend AP sur AB prolongée au-delà de A, les aires APNF, APrg auront chacune leurs limites; mais si cet exposant n'est pas plus grand que l'unité, ces aires pourront être prolongées jusqu'à surpasser tout espace donné. C'est le contraire lorsqu'on prend AP de A vers B » (Fig. 57.)

[702] Maclaurin (1749b), vol. I., p. 190.

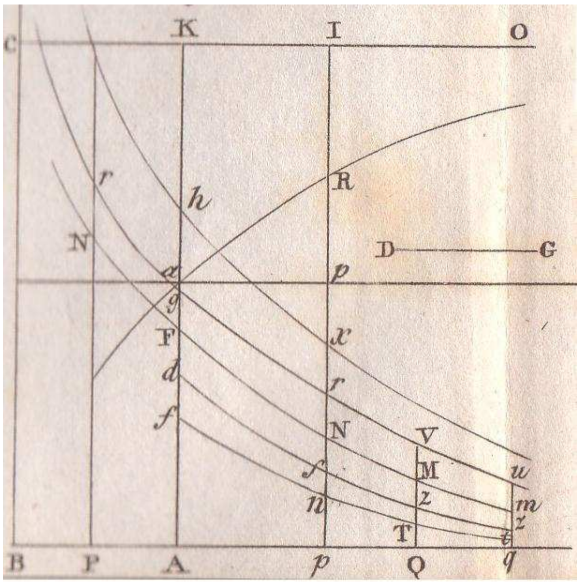


Fig. 57.

Cette proposition nous donne un critère de convergence pour le calcul d'aires de figures dont l'ordonnée est une puissance négative $(-n)$ de l'abscisse. La fluente converge lorsque l'abscisse est entre un point fixe et l'infini si et seulement si la puissance n est plus grande que 1. En revanche, la fluente converge lorsque l'abscisse part d'un point vers l'origine si et seulement si n est plus petite que 1[703].

La démonstration de la propriété XXVII fait appel à quelques articles précédents (ce sont les articles 111, 167, 168, 293, 294 et 295). L'article 111 est un corollaire de la proposition IV, citons-le :

> « Lorsque les Fluxions des bases de deux figures produites dans le même temps, sont égales, les Fluxions des aires sont comme leurs ordonnées, et lorsque les ordonnées sont toujours en raison donnée, (…) les aires produites dans le même temps sont toujours dans la même raison donnée (…). Lorsque les Fluxions des bases sont en raison réciproque des ordonnées,

[703] Cela correspond à la propriété suivante : $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$ est définie si et seulement si $n > 1$ et $\int_0^a \frac{dx}{x^n}$ si et seulement si $n < 1$.

les Fluxions des aires sont égales ; et lorsque les Fluxions des bases sont toujours l'une à l'autre en cette raison, les aires produites dans le même tems sont égales. »[704]

Les articles 167 et 168 sont très proches de la proposition VIII étudiée plus haut. Les articles 293, 294 et 295 sont des parties d'une démonstration d'une proposition du chapitre X sur les asymptotes qui énonce un critère de limite de fluente de certaines courbes. Ces articles apportent des résultats intermédiaires qui concernent les limites de l'intégrale dans les différents cas prévus dans la proposition, l'étude de leurs démonstrations n'apporteront rien de plus à la compréhension de notre sujet. En revanche, les figures utilisées dans la proposition XXVII sont en fait celles de ces articles.

À l'instar de l'énoncé de la propriété XXIV, la démonstration se sépare en deux cas. Nous nous pencherons simplement sur le premier cas.

Maclaurin s'engage dans la démonstration en commençant par prendre la construction des points de l'article 293.

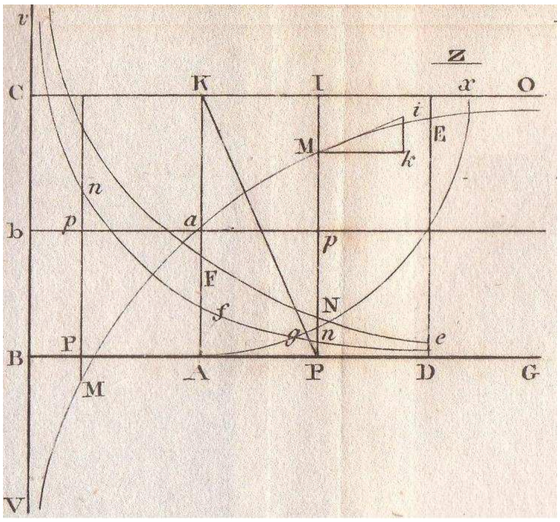


Fig. 58.

Il prend $\text{IM} = \text{k.BP}^{-m}$, où m est une constante positive entière ou rationnelle,et k une constante. Il passe à la fluxion de cette équation, il trouve donc

---

[704] Maclaurin (1749b), vol. I., pp. 78-9.

$$\frac{\mathrm{Fl}(\mathrm{IM})}{\mathrm{Fl}(\mathrm{BP})}=\frac{\mathrm{IM}}{\mathrm{BP}}\times\frac{m}{1}=m\mathrm{BP}^{m-1}.$$

Or par l'article 293, $\mathrm{PN}:\mathrm{DG}=\mathrm{Fl}(\mathrm{PM}):\mathrm{Fl}(\mathrm{AP})$. Et comme $\mathrm{Fl}(\mathrm{PM})=\mathrm{Fl}(\mathrm{IM})$ (par le théorème IX[705]), et $\mathrm{Fl}(\mathrm{BP})=\mathrm{Fl}(\mathrm{AP})$, on a $\mathrm{PN}:\mathrm{DG}=m\mathrm{BP}^{m-1}$. De ce résultat et en faisant référence à l'article 293, il conclut que l'aire APNF (lorsque P s'éloigne de A de l'autre côté de B) est majorée, et sa limite est l'aire du rectangle sous aK et DG. L'aire APNF peut être considérée comme l'intégrale définie de la puissance négative de BP (de bornes A et P). Par contre, si P s'approche de B (qui peut être considéré comme l'origine), cette aire APNF surpassera toute aire et donc n'aura pas de limite.

Ceci est le premier résultat de cette proposition (qui était déjà connu depuis l'article 293). Puis, il considère l'autre aire formée par la courbe gr et l'abscisse AP telle que la limite de la raison de Pr et PN est finie (et connue) lorsque P s'éloigne de A. L'argument tournera autour de cette limite de raison. En effet, comme la raison entre Pr et PN a une limite finie et comme la droite AP est une asymptote à la courbe FN, cette droite AP sera aussi asymptote à la courbe gr. Maclaurin veut majorer le quotient de Pr à PN par un autre quotient. Pour cela, il utilise l'argument sur la limite de la raison $\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{PN}}$. Cette raison est majorée soit par la limite elle-même (c'est-à-dire quand P se déplace vers l'infini), soit par la première (lorsque P se trouve en A). Donc, soient x sur la droite (PN) tel que $\mathrm{Pr}:\mathrm{PN}<\mathrm{Px}:\mathrm{PN}$ (a) ($\mathrm{Px}:\mathrm{PN}$ est cette limite assignable) et h sur la droite (AF) tel que $\mathrm{Ah}:\mathrm{AF}=\mathrm{PX}:\mathrm{PN}$. D'où, l'aire APxh est avec l'aire APNF en même raison que Px à PN. De (a), il déduit que $\mathrm{Px}>\mathrm{Pr}$ et donc que l'aire APxh domine l'aire APrg. Or, comme l'aire APxh est finie, l'aire APrg l'est aussi.

---

[705] « Théorème IX : Lorsqu'un point P parcourt une ligne Aa avec un mouvement d'une certaine espèce, et qu'un autre point p parcourt les mêmes espaces sur cette ligne Aa en tems égaux, mais dans un sens contraire, ou avec une direction opposée, leurs vitesses en un terme donné de cette ligne seront égales. » in Maclaurin (1742), vol. I., p. 83. ou annexe.

Pour montrer que l'aire APrg n'admet pas de limite lorsque P tend vers B, il utilise une minoration de Pr et l'article 295, avec la figure 59 ci-dessous. Pour les autres cas il fait de même.

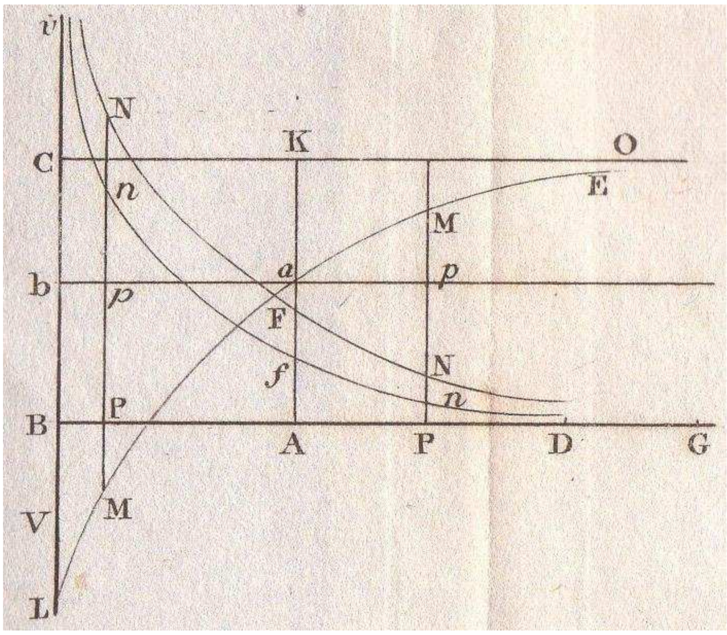


Fig. 59.

Cette proposition XXVII que l'on vient d'étudier possède deux corollaires. Dans le second, Maclaurin propose une extension de sa propriété. Si $\mathrm{Pr} = \dfrac{\mathrm{A}x^m + \mathrm{B}x^{m-1} + \ \&c.}{\mathrm{a}x^n + \mathrm{b}x^{n-1} + \ \&c.}$ où x représente BP, m et n sont des nombres donnés, A, B, a, b des constantes, alors l'aire cherchée est finie si et seulement si $n > m+1$. La démonstration est du même type. Cela constitue encore un critère d'existence d'intégrale généralisée.

b) La méthode des fluentes dans le livre II : une méthode inverse des fluxions et de l'utilisation des séries

Dans le livre II, la méthode inverse des fluxions est sensiblement différente de celle du premier livre. Nous allons, donc, examiner le processus démonstratif du second livre. La méthode se divise en deux parties.

Dans la première partie, pour les fonctions algébriques, les fluxions trouvées lui permettent d'avoir les primitives directement en opérant de façon inverse : « Lorsqu'une Fluxion proposée se confond avec une de celles qui ont été déduites de leurs Fluentes dans les articles précédens, la partie de la Fluente requise, doit se confondre avec celle qui avoit été proposée »[706]. Par exemple, pour trouver la primitive de $\dot{x}x^n$ où n est un réel différent de -1, il considère la fluxion de x^{n+1} qui est $(n+1)\dot{x}x^n$ et par la multiplication de la constante $\frac{1}{n+1}$, il trouve le résultat ainsi cherché[707] (en réalité, il le trouve à une constante près). Déjà, avec cette façon d'opérer, Maclaurin fournit un catalogue de primitives de toutes les fonctions étudiées par la méthode directe des fluxions.

Dans la seconde partie, pour certaines fonctions plus évoluées dont la primitive n'est pas facilement reconnaissable, il utilise un autre mode de résolution :

> « Comme la division en Algèbre nous conduit aux fractions, et l'extraction des racines, ou de l'évolution aux racines sourdes ; ainsi la Méthode inverse des Fluxions nous conduit souvent à des quantités qui ne sont pas connues dans l'Algèbre commune, et qui ne peuvent pas s'exprimer par les symboles Algébriques communs. Dans les articles suivans, nous tâcherons de rendre compte des progrès qui ont été faits dans cette Méthode »[708]

Dans la *Méthode des Fluxions et des suites infinies*[709], Newton utilise des séries entières pour résoudre les problèmes auxquels il se trouve confronté. Maclaurin fait de même, face à une expression dont la primitive n'est pas évidente à trouver, il la développe en série polynomiale puis, étant donné qu'il sait trouver les primitives de puissances, il donne la primitive de cette série qui est la même que celle de la fonction initiale. Le problème de rayon de convergence des séries est très peu abordé. Il n'y a pas de théorie de convergence

[706] Maclaurin (1749b), vol. II., p. 176.
[707] Maclaurin (1749b), vol. II., pp. 176-7.
[708] Maclaurin (1749b), vol. II, p. 176.
[709] Newton (1740)

dans le *Traité des Fluxions* même s'il existe à plusieurs endroits un souci de convergence. Pour la deuxième méthode, laissons à Maclaurin le soin de l'énoncer :

> « Lorsqu'une fluente ne peut pas se représenter exactement en termes Algébriques, on l'exprime par une suite convergente, ou par une fluente plus simple, qui soit déjà connue. Dans la division de l'Algèbre commune, (et dans l'Arithmétique décimale) le quotient est souvent une telle suite. Soit la Fluxion proposée $\frac{a\dot{x}}{a-x}$; si l'on divise a par $a-x$, selon la Méthode commune, on trouvera le quotient $\frac{a}{a-x} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} +$ &c. et ainsi $\frac{a\dot{x}}{a-x} = \dot{x} + \frac{\dot{x}x}{a} + \frac{\dot{x}x^2}{a^2} + \frac{\dot{x}x^3}{a^3} +$ &c. et la fluente de $\frac{a\dot{x}}{a-x}$ est égale (en prenant séparément par l'article 737. les fluentes des termes $\dot{x}, \frac{x\dot{x}}{a}, \frac{x^2\dot{x}}{a^2},$ &c.) à la suite $x + \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^4}{4a^3} +$ &c. laquelle peut servir à déterminer la fluente, lorsque x est fort petit par rapport à a ; parce qu'en ce cas, peu de termes, au commencement de la suite, approcheront beaucoup de la valeur totale. Cette suite donne le logarithme de $\frac{aa}{a-x}$, en supposant le module égale à a, par l'article 731. »[710]

Maclaurin est suffisamment clair dans cet article pour qu'il ne nous soit pas nécessaire de l'expliquer. Il donne à la suite de ces articles, d'autres façons d'opérer en utilisant des interpolations. Il fournit une autre méthode, c'est le développement en série dite de Taylor-Maclaurin. Nous examinerons cette méthode plus bas.

c) La classification des fluentes par des arcs et des aires de sections coniques ou par des arcs hyperboliques et elliptiques

[710] Maclaurin (1749b), vol. II, p. 181.

Dans le chapitre III du deuxième livre, Maclaurin donne une méthode pour le calcul de certaines fluentes qui ne peuvent pas l'être par les moyens exprimés ci-dessus. En effet, il remarque une analogie entre certaines fluentes et l'aire de sections coniques, ou d'arcs elliptiques ou hyperboliques. Christian Gilain a montré dans un de ses articles[711] que le classement que Maclaurin établit pour trier les différents cas a été le point de départ du classement développé par D'Alembert. Dès le début de ce chapitre, Maclaurin donne l'objectif de cette partie, c'est-à-dire de séparer en catégories différentes les différentes fluentes à étudier :

> « Lorsqu'on ne voit pas qu'une fluente puisse être déterminée par un nombre fini de termes Algébriques, on n'est pas obligé, pour cela, de recourir immédiatement à une suite infinie. Les arcs d'un cercle, & les aires hyperboliques, ou logarithmiques, ne peuvent pas s'exprimer en termes Algébriques ; mais on les a calculés avec une grande exactitude, par différentes Méthodes. On peut, par leur moyen, mesurer aisément, avec des quantités Algébriques, tous les segmens des sections coniques, & les arcs d'une parabole ; & lorsqu'on détermine par là une fluente, on regarde cette détermination comme le second degré de résolution. Lorsqu'il ne paroît pas qu'une fluente puisse se mesurer par les aires des sections coniques, on peut néantmoins, en certains cas, les mesurer par leurs arcs, & c'est-là comme le troisième degré de résolution, s'il ne paroît pas qu'on puisse déterminer une fluente par les arcs d'aucune section conique, (y compris le cercle), il peut néantmoins être utile de déterminer la fluente par une aire, ou un arc de quelque autre figure que l'on puisse aisément construire, ou décrire ; & il est souvent important de réduire la Fluxion proposée à une forme, telle que la suite, pour la fluente ne soit pas trop complexe, & qu'elle ne marche pas trop lentement. »[712]

Maclaurin sait que l'utilisation du développement en séries est limitée et que pour la recherche de certaines fluentes, il s'avère inutile. Il ne donne pas de critères généraux de

---

[711] Gilain (2002)
[712] Maclaurin (1749b), vol. II., p. 191.

convergence, mais, pour des exemples particuliers, il indique les valeurs pour que la série converge. C'est le cas du développement de la fraction rationnelle $\frac{1}{1-x}$ qui converge si x est plus petit que l'unité. Nous verrons un autre exemple plus bas lorsque nous aborderons la formule dite de Taylor. Maclaurin commence par aborder les fluentes de fractions rationnelles en prenant comme référence les travaux de Bernoulli, De Moivre, Cotes ou Leibniz. Il énonce quelques règles sur la simplification des fractions rationnelles qui permettent d'utiliser ensuite le logarithme et l'arctangente (en d'autres termes les arcs circulaires). Une des règles de simplification est la décomposition en éléments simples, et il utilise aussi les changements de variables.

Par exemple, pour trouver la fluente de $\frac{y^n \dot{y}}{y-a}$, où n est un entier positif, Maclaurin utilise la relation $\frac{y^n - a^n}{y-a} = y^{n-1} + ay^{n-2} + \cdots + a^{n-2}y + a^{n-1}$. Ainsi,

$$\frac{y^n \dot{y}}{y-a} = \dot{y}\left(y^{n-1} + ay^{n-2} + \cdots + a^{n-2}y + a^{n-1}\right) + \frac{a^n \dot{y}}{y-a}$$

Puis, les fluentes de puissances sont connues ainsi que celle de l'hyperbole, alors la fluente de $\frac{y^n \dot{y}}{y-a}$ est, avec M le module du logarithme,

$$\frac{y^n}{n} + \frac{ay^{n-1}}{n-1} + \cdots + \frac{a^{n-2}y^2}{2} + a^{n-1}y + \frac{a^n}{M}\log(y-a).$$

En utilisant la même méthode, il donne la fluente de $\frac{y^n \dot{y}}{y+a}$. Il fait ensuite la remarque que la fluente de $\frac{y^n \dot{y}}{y^2+a^2}$ peut s'écrire sous la même forme, c'est-à-dire une somme finie de puissances et d'un logarithme. Il sépare le cas où n est un entier pair ou impair. Ensuite, il s'intéresse au cas $\frac{y^{-n} \dot{y}}{y^2+a^2}$ où n est un entier positif. Pour résoudre cela, il utilise le changement de variable $y=\frac{a^2}{z}$ qui lui permet de revenir au cas précédent.

Maclaurin s'occupe du cas des fractions irrationnelles qu'il sépare en trois cas. Il écrit alors :

> « Après les fluentes qui peuvent être déterminées exactement en termes finis, par des expressions Algébriques communes, & celles qui peuvent se réduire aux arcs circulaires, & aux logarithmes, celles, qui méritent la place suivante, sont les fluentes que l'on peut déterminer par les arcs hyperboliques & elliptiques, & celles-ci, avec les premières, sont toutes comprises sous celles qui sont mesurées par des lignes qui terminent les sections coniques, (le triangle & le cercle étant les figures de cette espèce) comme les deux premières sont mesurées par les aires des sections coniques. La fluente de $\frac{\dot{x}}{\sqrt{1\mp x}}$ est de la première classe, celle de $\frac{\dot{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{1\mp x}}$, ou de $\frac{\dot{x}}{\sqrt{1\pm x^2}}$ est de la second ; mais les fluentes de $\frac{\dot{x}\sqrt{x}}{\sqrt{1\pm x^2}}$, $\frac{\dot{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1\pm x^2}}$, $\frac{\dot{x}}{\left(1\pm x^2\right)^{\frac{1}{4}}}$ & $\frac{\dot{x}}{\left(1\pm x^2\right)^{\frac{3}{4}}}$ sont de la troisième classe, & (autant qu'on la put découvrir jusqu'ici) on ne peut pas les réduire à la première. Les fluentes de cette classe, sont quelquefois nécessaires à la résolution de Problêmes utiles, & notre dessein nous oblige d'en rendre compte. »[713]

La première classe a déjà été donnée, regardons comment Maclaurin s'occupe des deux classes suivantes en prenant les exemples qu'il cite. Par exemple, quelle est la fluente de $\dot{Q}=\frac{-\dot{x}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$? En posant $x=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ ce qui revient à prendre la tangente (z) à la place du sinus (x), et en remarquant que $\frac{\dot{x}}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\dot{z}}{1+z^2}$. Alors $\dot{Q}=\frac{-\dot{z}}{z^2}$, donc $Q=\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

[713] Maclaurin (1742), vol. II, pp. 225.

Si maintenant $\dot{Q} = \dfrac{a^2\dot{x}}{\left(a^2 \pm x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$, alors Q est égal à l'arc d'un cercle de rayon $\dfrac{a}{\sqrt{a^2 \pm 1}}$ tel que sa tangente est égal à z ou $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Nous allons prendre un exemple de la dernière catégorie de fluentes, la recherche de la fluente de $\dfrac{\dot{x}\sqrt{x}}{2\sqrt{x^2-1}}$. Pour trouver la fluente de cette fluxion, il considère une branche d'hyperbole équilatère AEH de centre S dont le sommet est en A (Fig. 59). Soit AD la tangente à l'hyperbole en A. il suppose que $\mathrm{SA}=1$, et $\mathrm{SN}=x$. Soit le cercle de centre S et de rayon SN. Soit M le point d'intersection de ce cercle avec la droite AD. La bissectrice de l'angle ASM coupe l'hyperbole en E. Alors la fluente de $\dfrac{\dot{x}\sqrt{x}}{2\sqrt{x^2-1}}$ est égale à l'arc hyperbolique AE.

Il pose $\mathrm{SE}=r$ et l'arc $\mathrm{AE}=s$.

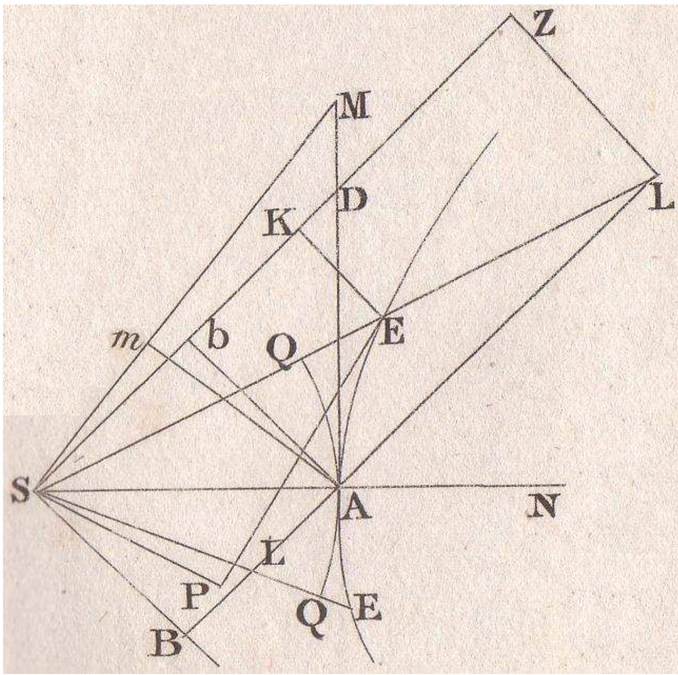


Fig. 59.

Comme les triangles SMA et SEP sont semblables, $\dfrac{\mathrm{SE}}{\mathrm{EP}}=\dfrac{\mathrm{SM}}{\mathrm{AM}}$. Or étant données que EP est tangente à l'hyperbole en E, et que SE est égal à r, on a $\frac{\mathrm{SE}}{\mathrm{EP}}=\frac{\dot{s}}{\dot{x}}$. On remplace SM et AM par leurs valeurs respectives, $x, \sqrt{x^2-1}$ dans la première égalité. Il ne reste plus qu'à évaluer r. Or, comme les longueurs SA, SE et SM sont en proportion, c'est-à-dire $\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{SE}}=\frac{\mathrm{SE}}{\mathrm{SM}}$, alors $r=\sqrt{x}$, d'où $\dot{r}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Par conséquent, on a bien $\dot{r}=\frac{\dot{x}\sqrt{x}}{2\sqrt{x^2-1}}$. Étant donné que $\dot{r}$ est la fluxion d'un arc d'hyperbole, alors la fluente recherchée est un arc d'hyperbole avec la supposition qu'elle commence quand x vaut un. Ainsi, pour la 3ème catégorie, Maclaurin calcule les fluentes à partir de constructions géométriques. Cette façon de classer certaines fluxions en fonction du degré de complexité sera repris et développé par d'Alembert[714].

5. Le *Treatise of Fluxions* : un précis de mathématiques

a) Le développement de Taylor-Maclaurin

Aujourd'hui, pour beaucoup, le nom de Maclaurin est surtout associé à la formule dite de Taylor-Maclaurin. Nous n'allons pas faire l'histoire de cette formule[715], mais simplement donner la démonstration de notre auteur. Cette formule apparaît dans le *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* de Taylor parût en 1715, ce que Maclaurin reconnaît dans son *Traité des Fluxions*.

La démonstration se trouve dans le livre II, à l'article 751. Soit y une quantité quelconque dépendant d'une autre quantité z. Supposons que y puisse se mettre sous la forme d'une série :

[714] Nous renvoyons à l'article de Christian Gilain sur l'influence de Maclaurin sur d'Alembert in Gilain (2002)

[715] Pour une histoire de cette formule, voir Feigenbaum (1985), Panza (1992).

$$y = \mathrm{A} + \mathrm{B}z + \mathrm{C}z^2 + \mathrm{D}z^3 + \&c.$$

Où A, B, C, &c. sont des coefficients invariables. Notons E la valeur de y quand z s'annule, et $\dot{\mathrm{E}}, \ddot{\mathrm{E}}, \dddot{\mathrm{E}}, \&c.$ les fluxions successives de y en 0 (c'est-à-dire lorsque z s'évanouit). Alors

$$y = E + \frac{\dot{\mathrm{E}}z}{\dot{z}} + \frac{\ddot{\mathrm{E}}z^2}{1\times 2\dot{z}^2} + \frac{\dddot{\mathrm{E}}z^3}{1\times 2\times 3\dot{z}^3} + \frac{\ddddot{\mathrm{E}}z^4}{1\times 2\times 3\times 4\dot{z}^4} + \&c.$$

La démonstration est la suivante. Maclaurin suppose tout d'abord que la quantité z flue uniformément c'est-à-dire que $\dot{z}$ est une constante. Il remplace dans la formule initiale, z par 0, alors $y = \mathrm{A}$, mais la valeur de y en 0 est E, donc $\mathrm{A} = \mathrm{E}$. Puis il calcule la fluxion de y dans la formule initiale et il la divise par $\dot{z}$, alors

$$\frac{\dot{y}}{\dot{z}} = \mathrm{B} + 2\mathrm{C}z + \&c.$$

Et en remplaçant z par 0, cela donne

$$\mathrm{B} = \frac{\dot{\mathrm{E}}}{\dot{z}}.$$

Il réitère le processus, c'est-à-dire prendre la fluxion de l'expression précédente, la diviser par $\dot{z}$ et annuler z. c'est ainsi qu'il trouve que $\mathrm{C} = \dfrac{\ddot{\mathrm{E}}}{2\dot{z}^2}$, $\mathrm{D} = \dfrac{\dddot{\mathrm{E}}}{6\dot{z}^3}$ et ainsi de suite.

Maclaurin considère que cette proposition peut servir à trouver la valeur de y lorsque BD, l'ordonnée de la figure FDM en B est égal à E, que BP est égal à z et que PM est égal y, alors ce théorème peut servir à connaître la valeur de PM ou y. (Fig. 60.)

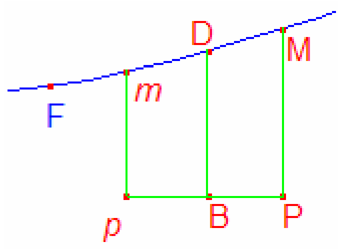


Fig. 60

Cette proposition peut être utile dans la plupart des cas où les deux quantités z et y sont reliées par une équation fluxionnelle. Maclaurin émet quand même une réserve : cette formule n'est pas valable lorsque l'une des fluxions successives en 0 est infinie[716].

Maclaurin donne quelques exemples d'utilisation de sa formule. Il commence par un cas particulier. Lorsque $\dot{z} = z$, la formule se simplifie et devient :

$$y = \mathrm{E} + \dot{\mathrm{E}} + \frac{\ddot{\mathrm{E}}}{2} + \frac{\dddot{\mathrm{E}}}{6} + \frac{\ddddot{\mathrm{E}}}{24} + \&c.$$

Ce cas particulier a été donné dans le premier livre comme un corollaire de la proposition XX[717]. Il donne ensuite d'autres exemples. Le premier est celui de la forme exponentielle, c'est-à-dire lorsque y et z sont reliés par la formule suivante : $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{z}}{\mathrm{M}}$ où M est le module du logarithme, en d'autres termes, z est le logarithme de y. Alors la formule est :

$$y = 1 + \frac{z}{\mathrm{M}} + \frac{z^2}{2\mathrm{M}^2} + \frac{z^3}{6\mathrm{M}^3} + \frac{z^4}{24\mathrm{M}^4} + \&c.$$

Lorsque $z = \mathrm{M}$, $y = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \&c. = 2,7182818\,\&c.$ Cette dernière valeur est appelé par Cotes la *ratio modularis*, le *modulus* M étant toujours le logarithme de cette raison dans tous systèmes logarithmiques. Il donne aussi l'expression des développements en série de cosinus, sinus et tangente. Il conclut par « on trouvera, de même, des Théorêmes généraux pour le retour des suites, tells que Newton les a trouvé, *commerc. Epist.*, dans sa lettre d'Octobre 1676, vers la fin. »[718]

Dans ces pages, Maclaurin fait référence au corollaire 4 de la proposition XX du livre I dans lequel il donne une règle qui est une version géométrique de la formule donnée ci-dessus. Cette proposition énonce :

---

[716] « excepté certains cas particuliers, comme lorsqu'un des coefficiens $\mathrm{E}, \frac{\dot{\mathrm{E}}}{\dot{z}}, \frac{\ddot{\mathrm{E}}}{\dot{z}^2}, \&c.$ devient infini. » in Maclaurin (1749b), vol II, p. 187.

[717] Maclaurin (1742), vol. I, pp. 223-4.

[718] Maclaurin (1749b), vol. II, p. 190.

« De-là, il suit, que lorsque les Fluxions de tous les ordres de l'ordonnée DE croissent, on approche continuellement de la valeur de KH, incrément de l'ordonnée produit dans le même tems que la base acquiert l'incrément DG en ajoûtant continuellement à la droite qui mesure la première Fluxion DE, pendant que DG mesure celle de la base, $\frac{1}{2}$ de celle qui mesure la seconde Fluxion de l'ordonnée, $\frac{1}{6}$ de celle qui mesure sa troisième Fluxion, $\frac{1}{24}$ de celle qui mesure la quatrième Fluxion, & ainsi de suite, les dénominateurs de ces fractions étant les produits des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. Mais lorsqu'une Fluxion décroît, on doit considérer la seconde Fluxion comme négative, & en soustraire la fraction qui affecte la seconde Fluxion. »[719]

Cette proposition n'a pas de démonstration. Elle apparaît ici comme un énoncé géométrique de ce que Maclaurin fait dans le livre II, ainsi nous pensons qu'il a ajouté cela après avoir énoncé la formule dans le livre II comme pour donner une légitimité géométrique à la formule. De plus, il a conseillé de lire les premiers chapitres du second livre avant d'aborder certaines parties du premier livre. Ainsi, le cas de la formule de Taylor est une illustration du conseil de Maclaurin.

b) La correspondance somme - fluente et la formule d'Euler-Maclaurin

Au paragraphe 350 du livre I, juste avant d'énoncer la formule dite d'Euler-Maclaurin, l'auteur donne un critère de convergence de série et de fluente. Donnons l'article dans son intégralité :

« Soient les termes d'une progression représentés par les perpendiculaires AF, BE, CK, HL, &c. qui sont sur la base AD à égales distances (Fig. 61.) ; & soit PN une ordonnée de la courbe FN*e* qui passe par les extrémités de toutes les perpendiculaires. Soit AP prolongée, &

[719] Maclaurin (1749b), vol. I, p. 162.

selon que l'aire APNF a une limite où elle n'arrive jamais, ou qu'on peut prolonger jusques à surpasser tout espace donné, il y a une limite à laquelle la somme de la progression n'arrive jamais, ou l'on peut la continuer jusques à ce que cette somme surpasse tout nombre donné. Car, que les rectangles FB, EC, KH, LI, &c. soient achevés, l'aire APNF étant continuée au-dessus de la même base, est toujours plus petite que la somme de tous les rectangles, mais plus grande que la somme de tous ceux qui sont après le premier. Donc l'aire APNF & la somme de ces rectangles, ont toutes deux une limite, ou toutes n'en n'ont point ; et il est clair qu'on doit dire la même chose de la somme des ordonnées AF, BE, CK, HL, &c. que la somme des termes de la progression qu'elles représentent. »[720]

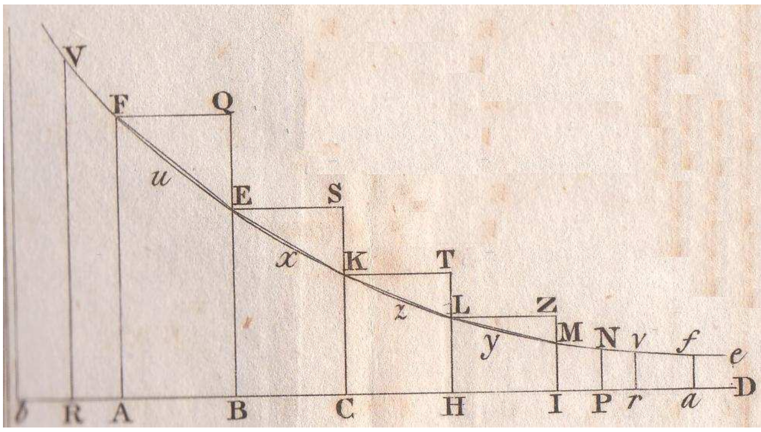


Fig. 61.

En termes plus modernes, la série $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ sont de même nature, car il est possible d'encadrer l'intégrale $\int_{n_0}^{n} f(x)\,dx$ par la série. Maclaurin donne comme exemple de ce critère que la suite harmonique n'a pas de limite car elle est comparable à l'aire de l'hyperbole qui elle n'a pas de limite. Ce critère tient lieu de remarque et n'est présent dans le corpus de Maclaurin que pour introduire la formule d'Euler-Maclaurin. Si l'aire précédente a une limite, la série qui lui est associée admet une limite. Maclaurin déclare que si la limite de l'aire est connue, alors une formule permet de

[720] Maclaurin (1749b), vol. I, pp. 225.

connaître une valeur approchée de la somme de la série. AB représente l'unité, ce qui permet de considérer la série des rectangles, FB, EC, KH, LI, etc. égale à la série des hauteurs AF , BE, CK, HL, etc. Comme la courbe étudiée est convexe par rapport à leur asymptote, alors la somme des rectangles majore l'aire sous la courbe à la fois par des triangles, FEQ, EKS, KLT, LMZ, etc. et par des espaces compris entre la courbe et les triangles, F*u*E, E*x*K, K*z*L, L*y*M, etc. La somme de ces triangles à l'infini est égale à l'aire du rectangle FB. Ainsi, la somme des rectangles est plus grande que l'aire de la figure plus la demi-aire du rectangle FB. L'excès est dû aux petits espaces entre la courbe et les triangles. Tout d'abord, si approcher la somme des rectangles, ou des hauteurs, par l'aire sous la figure à laquelle on ajoute la moitié de l'aire de FB est correct et relativement précis surtout si l'aire est considérée avec une grande abscisse, cette approximation peut être améliorée. Maclaurin va évaluer ces petits espaces pour trouver une approximation plus précise. Ainsi, en prenant appui sur la formule de Taylor et un article concernant l'évaluation d'une aire entre la courbe et son asymptote, en notant A la limite de l'aire APNF, a l'ordonnée AF, b, d, f, &c. respectivement la première, la troisième, cinquième, &c. fluxion de AF, alors la somme des hauteurs est égale à

$$\mathrm{A}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{12}b-\frac{1}{720}d+\frac{1}{30240}f+\&c.$$

Cette formule peut servir aussi à évaluer l'aire sous la courbe lorsque la somme des hauteurs est connue. Maclaurin ne fournit pas de démonstration au sens strict dans la version géométrique. Que fait-il dans la version algébrique ?

Dans le second livre, Maclaurin fournit une version algébrique de la formule[721]. Il suppose tout d'abord que la fluxion de l'abscisse z est égale à 1. Il suppose, AF égale à a, AB égal à 1. Il pose que l'aire ABEF est égale à A. Il pose ensuite que B, C, D, E, F, etc. sont les aires des rectangles de côtés AB et respectivement les fluxions successives de y

[721] Maclaurin (1742), vol. II., p. 261.

c’est-à-dire $\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}, \ddddot{y}$ etc. En d’autres termes, il écrit B, C, D, E, F, les fluxions successives de y. (Fig. 62.)

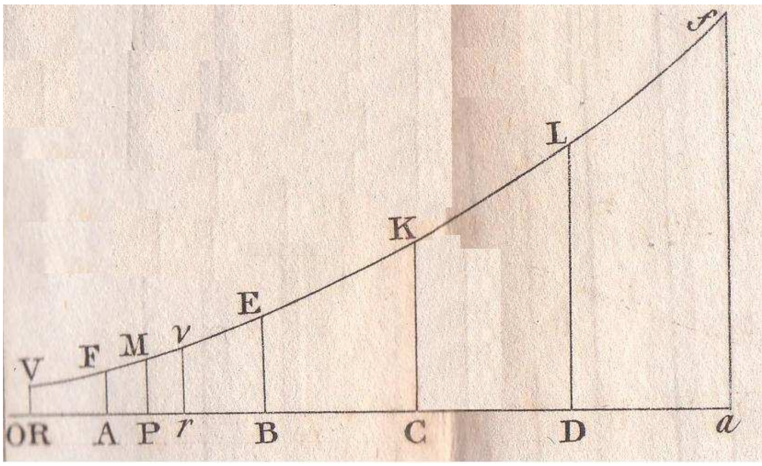


Fig. 62.

Alors

$$\mathrm{AF} = a = \mathrm{A} - \frac{\mathrm{B}}{2} + \frac{\mathrm{C}}{12} - \frac{\mathrm{E}}{720} + \frac{\mathrm{G}}{30240} - \&c.\ (£)$$

En effet, il utilise le développement de Taylor appliqué à A :

$$\mathrm{A} = a + \frac{\dot{a}}{2} + \frac{\ddot{a}}{6} + \frac{\dddot{a}}{24} + \frac{\ddddot{a}}{120} + \&c.$$

De plus, il applique le développement de Taylor aussi à chaque fluxion successive de y, c’est-à-dire, à B, C, D, E, etc. Par exemple, $\mathrm{B} = \dot{a} + \frac{\ddot{a}}{2} + \frac{\dddot{a}}{6} + \frac{\ddddot{a}}{24} + \&c.$

Et, à partir de chaque formule, Maclaurin exprime les fluxions successives de a. Alors :

$$a = \mathrm{A} - \frac{\dot{a}}{2} - \frac{\ddot{a}}{6} - \frac{\dddot{a}}{24} - \frac{\ddddot{a}}{120} - \&c.,\ \dot{a} = \mathrm{B} - \frac{\ddot{a}}{2} - \frac{\dddot{a}}{6} - \frac{\ddddot{a}}{24} - \&c.,$$
$$\ddot{a} = \mathrm{C} - \frac{\dddot{a}}{2} - \frac{\ddddot{a}}{2} - \&c.,\ \dddot{a} = \mathrm{D} - \frac{\ddddot{a}}{2} - \&c.$$

Dans la première équation, à l’aide des suivantes, Maclaurin élimine toutes les fluxions successives de a. C’est ainsi qu’il trouve la formule citée plus haut. Il lui suffit d’exprimer B, C, E, G, etc.

Comme A est la fluente de $y\dot{z}$, alors B est la fluente de $\dot{y}\dot{z}$, C la fluente de $\ddot{y}\dot{z}$, etc.

et comme il a pris $\dot{z}=1$, alors B est la différence entre BE et AF, C est ainsi la différence entre la fluxion de BE et celle de AF, et ainsi de suite. Maclaurin les note respectivement par les premières lettres grecques. Par conséquent, la formule peut donc s'écrire :

$$a = \mathrm{A} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{12} - \frac{\delta}{720} + \frac{\zeta}{30240} + \&c.$$

Tout ce que vient de faire Maclaurin jusqu'à maintenant est d'instaurer la formule que pour une « tranche ». Il applique sa formule pour chaque intervalle de même longueur que AB, BC, CD, etc, qu'il additionne termes à termes. Ainsi, en considérant S la somme des hauteurs AF, BE, CK, etc. jusqu'à *af* et les lettres grecques comme la différence entre les fluxions successives de AF et *af* :

$$\mathrm{S} = \mathrm{A} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{12} - \frac{\delta}{720} + \frac{\zeta}{30240} + \&c.$$

Dans les années 1730, Euler énonce lui aussi cette formule. A priori aucun des deux hommes n'a eu connaissance des travaux de l'autre. Nous ne donnerons pas l'exposition de la formule par Euler[722]. Le Traité des Fluxions est riche encore de résultats de mathématiques. Par exemple, il comporte des règles pour déterminer les points d'inflexion, les points doubles de courbes. Nous allons nous intéresser à deux résultats du Traité concernant ce que nous appelons la physique mathématique. Le premier est un résultat trouvé par un continental, Bernoulli, sur l'angle optimal pour qu'une voile d'un bateau soit la plus efficace. Le second concerne un sujet qui intéresse Maclaurin depuis sa thèse, c'est la figure de la Terre.

[722] Pour cela voir par exemple, Mills (1985). Dans cet article, Stella Mills fournit les deux expositions et montre leur indépendance.

6. Un précis de physique mathématique I : le vent dans les voiles

À la lecture de la table des matières, cette partie peut étonner car elle semble anecdotique par rapport au reste des sujets abordés. Ce sont les articles 910 à 923 du livre II. Le titre de premier problème est « Trouver la position la plus avantageuse d'un plan qui se meut parallèlement à lui-même suivant une direction donnée, pour qu'un courant puisse le choquer avec la plus grande force possible, la vitesse du courant et le plan étant donnés, », le second porte le titre « Que le vent doit frapper les ailes d'un moulin à vent sous un angle plus grand que celui de 54°44' », enfin le dernier a comme titre « La vitesse du vent et le vaisseau étant donnés, déterminer la situation la plus avantageuse des voiles pour que le vent puisse pousser ce vaisseau avec la plus grande force, selon une direction donnée ». Derrière ces problèmes se cache la théorie des maxima et des minima appliquée à des problèmes de physique voire de marine et la question sous-jacente de l'efficacité et de l'optimisation.

Dans un premier temps, Maclaurin résout le problème suivant. Soit AB un arc de cercle de centre C dont le rayon et l'angle ACB est donné. Soit E un point de l'arc de cercle tel que EM soit le sinus de l'angle ECA et EN le sinus de l'angle ECB. Soit *n* un nombre positif quelconque. (Fig. 63) La question posée est : quelle est la position de E pour que la relation $\mathrm{EM}^n \times \mathrm{EN}$ soit un maximum ?

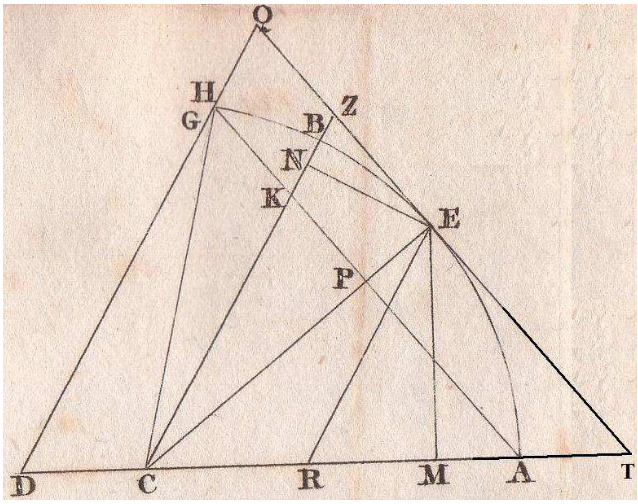


Fig. 63.

Pour répondre à cette question, il pose le point D sur CA tel que $\mathrm{CD}:\mathrm{CA}=n-1:n+1$. Soit DG la droite parallèle à CB coupant le cercle en G. Alors le point d'intersection de la bissectrice de l'angle ACG avec le cercle est le point E demandé. Pour montrer cela, il utilise des points judicieusement placés.

Dans un second temps, Maclaurin considère un liquide se déplaçant selon la direction AC avec une vitesse égale à AC. Ce liquide rencontre le plan CE qui se déplace parallèlement suivant la direction CB (Fig. 63). Pour quel lieu de E, la force du liquide sur CE au début (c'est-à-dire lorsque le plan CE est immobile) sera-t-elle la plus forte ? Cette question est équivalente à la précédente, et en prenant le cas où $n=2$, c'est-à-dire lorsque $\mathrm{CD}:\mathrm{CA}=1:3$, la force sera la plus grande quand CE sera la bissectrice de l'angle ACG. Mais si le plan CE a déjà acquis de la vitesse, il faut prendre en compte cette vitesse dans le problème. Soit cette vitesse est la vitesse du liquide comme A*a* à AC, avec A*a* parallèle à CB, soit le cercle de centre C et de rayon C*a, g* est le point de d'intersection du cercle avec la droite DG. Alors, l'effet du liquide sur le plan CE sera le plus grand quand CE bissecte l'angle *a*C*g*. Pour démontrer cela, Maclaurin trouve une formule sur laquelle on peut appliquer la proposition précédente.

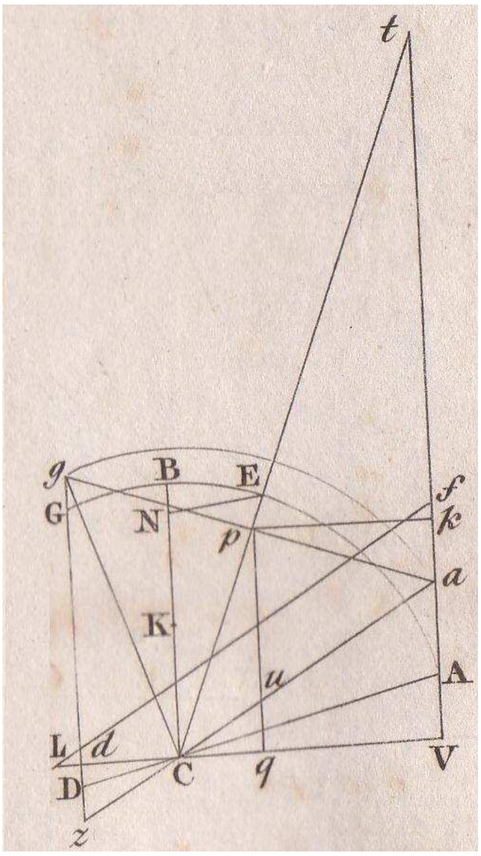


Fig. 64.

Il suppose maintenant que AC représente la direction et la vitesse du vent, CB la direction du bateau et A*a* parallèle à CB représente la vitesse du bateau, et CE est la position de la voile. Il suppose que le bateau n'est pas dévié de sa route par l'action oblique du vent sur la voile. Pour avoir le meilleur rendement de la voile, c'est-à-dire la meilleure position de CE pour que la force du vent sur la voile soit la plus grande, il faut que le point D soit choisi de telle façon que $\mathrm{CD}:\mathrm{CA}=1:3$.

Pour cela, il construit DG parallèle à CB (Fig. 64), le cercle *aeg* de centre C et de rayon C*a* tel que le point *g* soit sur la droite DG. Alors CE bissecte l'angle *a*C*g*. Une autre façon de construire CE est de prendre CV la droite perpendiculaire à A*a* telle que V soit sur la droite A*a*. Il construit les points L et *f* respectivement sur VC et V*a* tels que $LV=VC\times\sqrt{2}$ et $Vf=\frac{3}{2}Va$. Soit *t* un point de V*a* tel que $\mathrm{V}t=\mathrm{L}f+\mathrm{V}f$. La direction C*t* sera la meilleure direction pour la voile.

Maclaurin déclare que, lorsque la vitesse du bateau est négligée, CE est la bissectrice de l'angle ACG. Ce résultat a été trouvé par Fatio et par Huygens en utilisant une équation biquadratique. C'est ce problème que Bernoulli considère dans son ouvrage *Manœuvre des Vaisseaux*[723]. Mais, personne avant Maclaurin n'avait pris en compte la vitesse du bateau. Il prend un exemple où la différence est non négligeable, le cas où la vitesse du bateau $\mathrm{A}a = \frac{1}{3}\mathrm{AC}$, alors l'angle ACE est plus grand que le demi-angle ACG (qui est de 54°44') de 9°2/3.

Ce type de problèmes résolus par Maclaurin dans le Traité a une double fonction. La première est de donner des exemples de résolution de problèmes par l'utilisation des fluxions qui ne sont pas forcément déjà résolus. La seconde, en prenant appui sur des problèmes déjà résolus par des continentaux avec les différentielles, est que ces mêmes problèmes puissent aussi être résolus par la méthode des fluxions et, comme dans ce cas précis, de corriger et de rendre plus précis les résultats[724]. En 1743, Maclaurin, dans un article[725] paru dans les *Philosophical Transactions*, s'intéresse à la forme des cellules des abeilles dans les ruches. Ce problème a déjà été étudié, entre autres, par Réaumur. Les cellules ont une forme hexagonale. Pour résoudre ce problème, Maclaurin utilise une démonstration tirée du *Traité des Fluxions* et considère la question de la forme comme un problème mathématique, il montre que les résultats trouvés empiriquement par Réaumur peuvent être démontrés en utilisant la méthode des fluxions appliquée aux minima et maxima. Et il conclut que pour que ces cellules aient un volume maximal, il faut que

---

[723] Bernoulli (1714)

[724] « I have added lately some mechanical problems relating to the motions of engines and ships, which I have not met with elsewhere or have found resolved in a wrong way. For example, M[r] D. Bernoulli on determining the best position of the sails of a windmills, when regards is had to the motion of the sail mistakes a minimum for a maximum, and draws the very opposite conclusion to what he ought to have drawn: viz. in consideration of the motion of the sail the angle contained by the plane of the sail & wind ought to be diminished ; whereas it ought on that account to be encreased and always greater than 54°44'. But I touch very gently on this mistake, or any others that fall in my way. » in Mills (1982), p. 371.

[725] Maclaurin (1744c) ou Mills (1982), pp. 386-94.

l'angle au sommet soit égal à 109°28'16''. Ceci est encore un exemple de l'utilisation par Maclaurin des mathématiques pour résoudre des questions liées à la nature[726].

7. Un précis de physique mathématique II : la figure de la Terre

a) L'exposition dans le livre I

La première référence à la figure de la Terre se trouve dans la thèse de Maclaurin défendue publiquement en juin 1713[727]. Il annonce que la Terre est un sphéroïde plus large à l'équateur. Dans la première partie, nous avons déjà évoqué le premier écrit de Maclaurin. Il nous semble inutile d'y revenir ici. Plus tard, dans l'*Account of Sir Isaac Newton Philosophical Discoveries* paru en 1749 mais écrit aux alentours de 1730, il donne un commentaire des *Principia* et une partie de cet ouvrage est consacrée à la figure de la Terre dans laquelle il signale que « toute la Terre devienne de la forme d'un Sphéroïde applati, dont le Diamètre sous l'équateur soit la Ligne la plus grande, & l'Axe la moindre, de toutes celles qui pourront passer par le Centre »[728]. Dans cet ouvrage, il indique simplement les raisons mais ne va pas plus loin que Newton.

En réalité, l'apport de Maclaurin sur ce sujet se situe dans le mémoire du prix de l'Académie des sciences de Paris reçu en 1740 sur le flux et reflux de la mer et dans le chapitre 14 du *Treatise of Fluxions* paru en 1742. Nous ne parlerons pas du prix de 1740 car l'essentiel provient de la partie sur la figure de la Terre du *Traité des fluxions*. Comme nous l'avons déjà signalé, une grande partie de l'ouvrage est écrite avant 1740. C'est peut-être parce que cette partie était déjà écrite que Maclaurin prend la peine de concourir à ce

---

[726] Grabiner (2002), pp. 182-3 ou Sageng (1989), pp. 133-4.
[727] Maclaurin (1713), p. 4
[728] Maclaurin (1749a), p. 368.

prix[729]. En effet, dans une lettre à Stirling du 6 décembre 1740, il donne le plan du chapitre destiné à ce problème tel qu'il est publié dans le traité[730].

En 1739, Maclaurin envoie à Folkes, alors vice-président de la Royal Society, un manuscrit sur la démonstration que la vraie figure de la Terre est exactement un sphéroïde aplati en supposant la densité uniforme[731]. Il y annonce la structure de sa démonstration. Il montre tout d'abord qu'un sphéroïde fluide et aplati est en équilibre quand le mouvement de rotation diurne a une bonne vitesse. Ce résultat provient de plusieurs propriétés des sections coniques. Ensuite, il montre comment calculer l'attraction aux pôles, ce qui n'est pas nouveau, avec une démonstration plus simple et plus directe. Enfin, il mesure l'attraction à l'équateur par une méthode analogue à celle utilisée précédemment et par suite, il donne la façon de calculer l'attraction en tout point du sphéroïde sans l'aide de développement en série[732]. Ce passage résume relativement bien à la fois sa démarche et la manière qu'il a de pointer les parties sur lesquelles il apporte quelque chose de nouveau.

L'un des résultats le plus intéressant se trouve dans le §634 du *Treatise of Fluxions* dans lequel il montre que :

> «La pésanteur d'une particule d'une sphère, on d'un sphéroïde étant décomposée en deux forces, l'une perpendiculaire à l'axe du solide, l'autre au plan de son équateur, toutes les particules également distantes de l'axe tendent

---

[729] Il partage le prix avec Bernoulli, Euler, et Cavalieri.

[730] « I wish I had an Opportunity to shew yow all that I have printed my book relating to the attraction of spheroids and the figure of the Earth. » Mills (1982), pp. 336-7.

[731] « demonstration that the true figure of the Earth is accurately an oblate spheroid the density supposed uniform » in Mills, Stella (1982), *The Collected Letters of Colin Maclaurin*, Nantwich, p. 308

[732] « In the first it is shown that a fluid & oblate spheroid is in equilibrio in all parts when the motion of diurnal rotation is of a just velocity; and this is deduced geometrically from some Lemmata containing properties of the ellipsis of which I have a great number by me that are not taken notice of by the Authors on the subject of the conic sections. The II[d] shews how to find the attraction of such a Spheroid at the Pole, this proposition is not new but as far as it measures likewise the attractions of certain portions of the Spheroid, and as far as the investigation or demonstration is more simple & short than that which others have given. The III[d] shews how to measure the attraction at the equator in as easy manner as at the poles & by the same quadrature depending immediately on that of the circle without any series, and the attraction of certain portions of the Spheroid there. And hence it is shewn from the Corol. of Prop. I. how the attraction is measured in any given latitude. » in Mills (1982), p. 308.

vers lui avec des forces égales, & toutes les particules à égales distances du plan de l'équateur, gravitent également vers ce plan, soit que les particules soient à la surface du solide, ou en-dedans. Et les forces, avec les quelles les particules, à différentes distances de l'axe, tendent vers lui, sont comme ces distances ; on doit dire la même chose des forces avec lesquelles elles tendent vers le plan de l'équateur. »[733]

Pour cela, il a besoin de deux résultats. Le premier est le suivant : prenons ADBE et adbe deux ellipses concentriques et semblables. Soit P un point de ADBE tel que Pd soit parallèle à AB. Soit H un point de ADBE tel que PH soit parallèle à DE. Il prend un point quelconque v de de. Il place les points k et l sur la petite ellipse de telle façon que kl soit parallèle à AB. Il trace PN et PM parallèle respectivement à dk et dl. Il démontre la formule : $PQ + PR = 2dv$ [734]. (Fig. 65)

[733] Maclaurin (1749b), vol. II, pp. 106-7.
[734] Malcauirn (1749b), vol. II., p. 104.

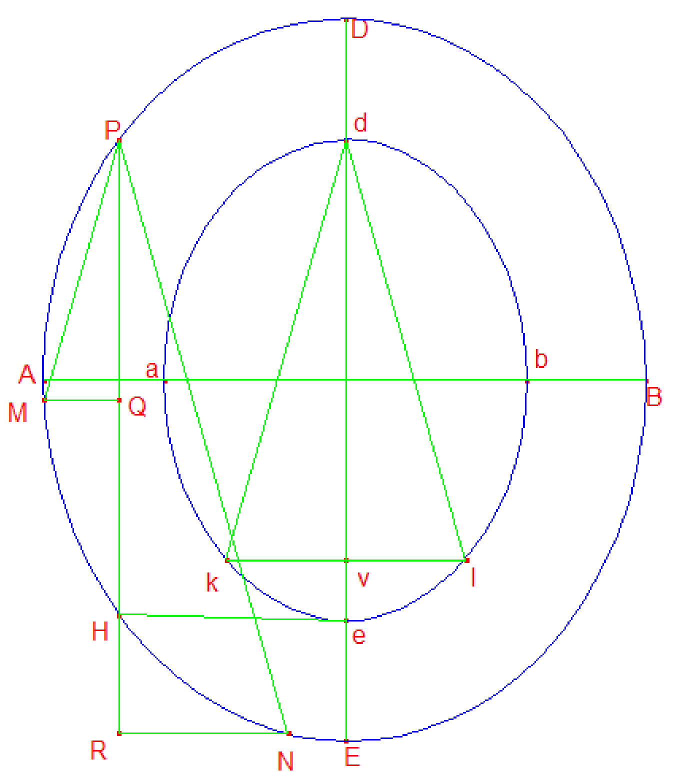


Fig. 65.

Le deuxième résultat se trouve dans l'article 628 dans lequel il montre que « la dernière raison des gravitations en P vers les solides coniques ou pyramidaux PAE*a* et PMN*m* est celle de PA à PM (Fig. 66) »[735].

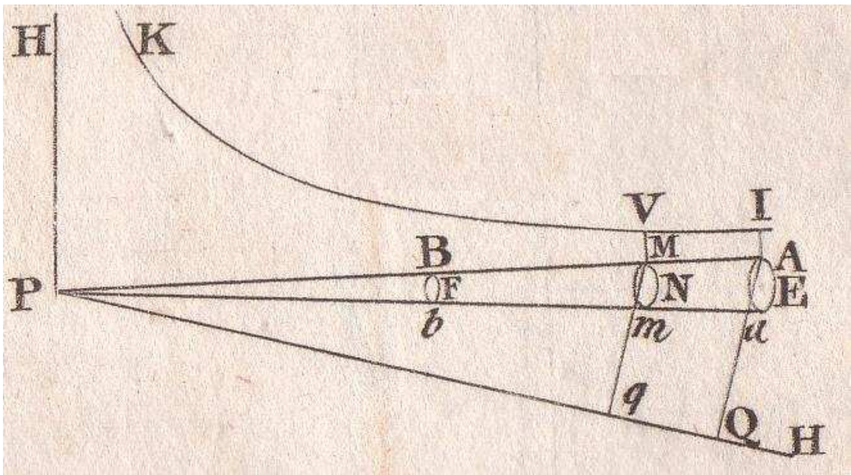


Fig. 66.

Ces deux résultats sont utiles à Maclaurin pour relier la composante verticale de

[735] Maclaurin (1749b), vol. II, p. 105.

l'attraction en P à l'attraction aux pôles de l'ellipsoïde intérieur qui peut être calculé à partir de la proposition 91 des *Principia* de Newton[736].

L'autre résultat est sa « démonstration » qu'une ellipsoïde de révolution est une forme d'équilibre. Pour montrer cela, il se donne trois conditions :

> « 1° Que les forces qui résultent de l'attraction du sphéroïde, & de ces forces étrangères composées ensemble, agit toujours dans une droite perpendiculaire à la surface du sphéroïde. 2°. Que les colonnes du fluide se soutiennent et se balancent mutuellement au centre du sphéroïde, & 3. que chaque particule, dans le sphéroïde, est poussée également dans toutes les directions. »[737]

De plus, il ajoute que

> « les surfaces semblables et concentriques à ADBE seront des surfaces de niveau à toutes les profondeurs, & que les forces par lesquelles les particules égales, dans ces surfaces vers le sphéroïde, seront mesurées par les perpendiculaires aux surfaces terminées, soit par le plan de l'équateur, ou par l'axe du sphéroïde »[738].

Dans le second livre, la question de la figure de la Terre est aussi posée. Ou plus précisément, connaissant la forme de la Terre, il faut donner à l'aide du calcul des fluxions la résolution de problèmes. Ils se trouvent dans les parties sur le « Calcul des parties méridionales d'un sphéroïde par les arcs circulaires ou les logarithmes » et « Mesurer la pesanteur d'un sphéroïde au pôle ou à l'équateur par le moyen des arcs circulaires ou des logarithmes, quand l'attraction de ses particules est en raison inverse d'une puissance quelconque à sa distance ». Comme Maclaurin a largement développé la question dans le

[736] Newton (1687), p. 219.
[737] Maclaurin (1749b), vol. II, p. 110.
[738] Maclaurin (1749b), vol. II, pp. 111-2.

livre I, il lui semble inutile de revenir dessus dans le livre II et de plus, cela est plus éloigné de son objectif, à savoir donner géométriquement la forme de la Terre.

b) Des résultats issus d'échanges épistolaires

L'apport de Maclaurin dans la recherche sur la figure de la Terre a été abondamment étudié par différents historiens[739]. Dans la correspondance de Maclaurin, le problème de la figure de la Terre, en tant que problème physico-mathématique, n'intervient qu'à partir de 1738. C'est après la parution d'un article de Stirling qu'il commence à réfléchir à ce sujet et à commercer avec ce dernier. Maclaurin échange aussi avec Clairaut sur ce sujet à la demande de ce dernier. Nous reviendrons brièvement plus bas sur cet échange.

Même s'il n'est cité qu'une seule fois dans le traité des fluxions, James Stirling a été important pour Maclaurin pour échafauder les parties originales du chapitre 14. Dans l'article 647, Maclaurin cite l'article de Stirling paru dans les Philosophical Transactions[740] : « les approximations proposées, en dernier lieu, sur ce sujet, *Phil. Trans. N. 438* & *445*. sont exactes, & M. Stirling, après avoir déterminé la pésanteur à l'équateur par une suite convergente, a enfin trouvé que la somme de cette suite peut se déterminer par la quadrature du cercle »[741]. Dans la lettre à Stirling du 20 mai 1738, Maclaurin précise qu'il n'utilisera pas les travaux de Stirling si ce dernier ne veut pas qu'ils apparaissent dans le *Traité des Fluxions* qui est en écriture à cette époque[742].

---

[739] Voir par exemple, Guicciardini (1989), pp. 69-73, Greenberg (1995), Todhunter (1873), vol. I, pp. 133-175.
[740] Stirling (1738).
[741] Maclaurin (1749b), vol. II., p. 119.
[742] « Yow [sic] may be assured that I will communicat nothing of what yow send me without your express allowance. I say something on this subject in my book [ie. *Treatise of Fluxions*] and would willingly add to it

L'échange entre les deux hommes est stimulant pour les deux[743], car ils ont deux approches différentes et chacun veut montrer à l'autre le bien-fondé de leur méthode. Dans une lettre à Short du 28 novembre 1738, Maclaurin reconnaît que Stirling a découvert des résultats qui lui étaient inconnus. Mais il veut les démontrer avec sa propre méthode. Stirling utilise des développements en séries et des approximations tandis que Maclaurin utilise une méthode géométrique comme nous l'avons vu plus haut.[744]. Ainsi, l'échange épistolaire entre les deux hommes pousse Stirling et Maclaurin à justifier leurs résultats et affiner leurs arguments.

Par exemple, dans la lettre du 12 mai 1738, Maclaurin donne le résultat de ce qui sera l'article 634 cité plus haut. La réponse de Stirling est immédiate. Le lendemain, Stirling est d'accord avec ce que dit Maclaurin, mais il émet une réserve sur une constante qui, pour lui, ne peut être trouvée précisément autrement que par une série. Ce à quoi Maclaurin répond que cette constante peut être trouvée par une méthode qui n'utilise pas un développement en série. Il est aussi intéressant de souligner qu'à travers cette correspondance, deux méthodologies s'affrontent. L'une, celle de Maclaurin, dans laquelle la géométrie classique est préférée à une méthode d'approximations, ce qui donne au corpus une rigueur que Maclaurin considère comme obligatoire ; l'autre, celle de Stirling, dans laquelle le fait d'utiliser des séries (en particulier les premiers termes) permet d'avoir les résultats désirés avec une approximation nécessaire sans remettre en cause le bien fondé de cette méthode. Dans la référence aux travaux de Stirling dans l'article 647, Maclaurin précise que le résultat trouvé par Stirling provient d'une utilisation des séries et n'est donc d'une approximation.

---

if yow pleased, because since my book is grown to such a bulk I would willingly have as much new in it on the usefull problems as I can » in Mills (1982), p. 302.

[743] Pour une étude approfondie de l'échange épistolaire entre les deux savants, voir Tweedle (1988), pp. 101-139.

[744] « Stirling had considered the subject & made some discoveries about it, of which I had no knowledge. (…) He found this [la forme sphéroïdique de la terre] by some computations from infinite series. He found this however before I had made out my proposition » in Mills (1982), p. 307.

John Greenberg, Irène Passeron, Guy Boistel et d'autres se sont attachés à montrer l'importance des lettres entre Maclaurin et Clairaut pour ce dernier. En effet, ces auteurs ont montré l'influence non négligeable des écrits de Maclaurin sur l'œuvre de Clairaut. Il nous apparaît donc inutile de se pencher de façon attentive sur cet échange épistolaire. Nous pouvons simplement signaler que Clairaut, dans une lettre à Maclaurin[745], se plaint qu'il ne soit pas cité dans le *Treatise of Fluxions*. Contrairement à ce que Clairaut pensait, Maclaurin ne connaissait pas ses travaux au moment de l'écriture de son étude sur la figure de la Terre. Comme nous l'avons indiqué plus haut, la grande partie du travail original de Maclaurin a été écrit au cours des années 1738-9, et donc avant la parution de l'article de Clairaut dans les *Philosophical Transactions*. De plus, dans une lettre adressée à Stirling en date du 6 décembre 1740, Maclaurin dit qu'il a demandé à Short de lui envoyer un exemplaire des *Philosophical Transactions* et ce dernier lui a fait parvenir le second article de Clairaut sur la figure de la Terre, mais que son *Treatise of Fluxions* est entièrement imprimé sauf les trois derniers cahiers[746]. Nous pouvons ajouter que cet échange renforce l'idée que Maclaurin est considéré par certains savants français de l'époque comme un savant de grande qualité et que ses œuvres ont une importance pour l'avancée des sciences. L'écho de Maclaurin sur le continent est non négligeable.

c) Les vérifications expérimentales présentes dans le *Traité des Fluxions*

Dans le *Traité des Fluxions*, les articles 661 à 665 et les articles 682 à 685 portent

[745] « Si vous êtes content de ce petit ouvrage et que vous en daignés parler dans la préface de votre Traité des Fluxions, vous me ferés surement beaucoup de plaisir car ce la ne contribuera pas peu a donner bonne opinion de mon memoire. » in lettre de Clairaut à Maclaurin datée du 10 avril 1741, Mills (1982), p. 348.

[746] « Mr Short who engaged to send me the transactions has not as yet sent me Mr Clairaut's 2d paper. I have printed all my book [Treatise of Fluxions], excepting the 3 last sheets » in lettre de Maclaurin à Stirling datée du 6 décembre 1740, Mills (1982), p. 337

sur la façon de vérifier expérimentalement la théorie avancée dans les premières parties de ce chapitre. Ainsi, l'utilisation de pendules et la variation de l'oscillation des pendules doivent permettre d'asseoir les propos tenus par Newton et ses successeurs.

Ce souci constant de vérification qui dépasse largement le cadre de la figure de la Terre est très présent dans ses écrits. Nous l'avons déjà signalé à plusieurs reprises. Ce n'est donc pas étonnant de retrouver dans le *Traité des Fluxions* des méthodes pour mesurer un degré de méridien par exemple.

Au début de l'année 1739, les mesures qui lui sont connues sont celles qui ont été faites en Jamaïque, à Londres et à Pello, dont certaines ont été faites à l'aide d'instruments construits par Graham. Les mesures faites en Jamaïque et à Londres ont donné une différence de diamètres de l'ordre de 1/192 du diamètre le plus grand, tandis que les expériences entre Londres et Pello indiquent une différence de 1/194 du plus grand diamètre. Maclaurin est aussi au fait des expéditions françaises, en particulier celle en Laponie. Il connaît, suite au rapport de Maupertuis, en comparant les résultats obtenus en Laponie et à Paris, que d'après les Français, la différence entre le diamètre à l'équateur et celui de l'axe est 1/94 du diamètre de l'équateur. Maclaurin est étonné de la différence entre les mesures françaises et britanniques[747].

Bien entendu, cette question est aussi au centre des lettres entre Stirling et Maclaurin. Ainsi, le 26 octobre 1738, Stirling signale à Maclaurin qu'il n'a pas été capable de réconcilier les mesures faites en Laponie avec sa théorie, en revanche, les observations de Pound et Bradley sur les diamètres de Jupiter s'accordent relativement bien avec ses

---

[747] Whereas by the measures of a degree near Paris & the Polar circle, (according to Mr De Maupertuis account) the difference of those degrees being 512 toises, the difference of the diameter of the equator & axis is about 1/94 of the former; which is very wide from the result of the other observations. » in Mills (1982), p. 312.

calculs[748]. De plus, il est très au fait de l'expédition au Pérou des savants français et il demande très régulièrement des nouvelles de ces aventuriers à Clairaut et Dortous de Mairan. Maclaurin utilise aussi l'expédition dans des îles du Nord de l'Écosse pour commander des mesures qui peuvent servir à asseoir sa théorie concernant la figure de la Terre.

[748] « has not been able to reconcile the measurement made in the north to the Theory : altho Dr Pound's and Mr Bradleys most accurate observations on the diameters of Jupiter agree to two thirds of a second with my computation » in Mills (1982), p. 304.

D. Scheme for Providing an Annuity to Minister's Widows and a stock for their Children : Maclaurin comme garant scientifique

Un projet de rente viagère[749] est défendu le 12 mai 1743 devant l'assemblée générale de l'Église d'Écosse par Wallace et Webster. Maclaurin a joué un rôle non négligeable dans cette affaire. Il n'est pas à l'initiative de ce projet mais est intervenu à plusieurs moments. Le premier moment est lorsqu'il a fallu corriger les projections prévues, le second moment a été lorsque les promoteurs sont allés défendre ce projet devant les deux chambres à Londres où Maclaurin a tenu le rôle de garant scientifique. Ainsi, deux facettes de Maclaurin sont visibles à travers ce projet, la première comme mathématicien qui vérifie la validité et corrige éventuellement le projet, la seconde, grâce à l'aura de savant dont la notoriété dépasse largement les frontières de l'Écosse, en d'autres termes, puisque Maclaurin est derrière ce projet, alors ce dernier est valable et consistant. Dans ce chapitre, nous ne prétendons pas donner une histoire complète de ce projet qui a déjà été faite[750], notre but, ici, est de voir quels sont les rôles joués par Maclaurin et ses résultats.

1. Maclaurin vérificateur

L'Église d'Écosse, à partir des années 1730, réfléchit à la création d'un fond d'aide

---

[749] Representation and Scheme For providing an Annuity to Ministers Widows, and a Stock for their Children ;…, N.A.S CH9/17/1.

[750] Pour cela voir, Dunlop (1992), en particulier pour la période qui nous intéresse les pages 3-82.

aux orphelins et veuves de leurs pasteurs[751]. Le projet proposé est la création d'un capital dont les bénéfices seront reversés annuellement aux veuves et aux enfants des pasteurs décédés ayant souscrit. Deux des membres de cette Église sont particulièrement impliqués dans cette affaire. Le premier est Alexander Webster pasteur en charge à Édimbourg et le second est Robert Wallace, lui aussi pasteur et membre de la société philosophique d'Édimbourg[752]. Ce dernier, avant d'être ordonné, a remplacé James Gregory quelques temps pour le suppléer lors des cours de mathématiques à l'université d'Édimbourg[753]. C'est un homme qui a une certaine accointance avec les sciences et en particulier avec les mathématiques. Il demande donc à Maclaurin en mai 1743 de regarder le projet qu'il a produit avec Webster et de vérifier si les projections faites sont plausibles et si le fond est suffisamment viable[754]. C'est ainsi qu'après avoir lu et étudié le projet, Maclaurin rédige ses conclusions sur le projet en lui-même et sur l'utilisation des mathématiques par Wallace.

Tout d'abord, il soutient dans son ensemble le projet qu'il considère essentiel pour la vie de l'Église d'Écosse[755]. La raison principale de ce soutien est que ce système est sur fond d'équité : tous les pasteurs doivent souscrire, c'est-à-dire ceux qui sont susceptibles de laisser des veuves comme ceux qui ne le sont pas. Cela permet en outre de glaner beaucoup d'argent et de diminuer les risques d'échec. De plus, cela permet aux veuves de pasteurs d'avoir une relative sécurité financière que seules les femmes de pasteurs riches

[751] Dunlop (1992), p. 7.
[752] On le trouve parmi les membres de cette société en 1739.
[753] Dunlop (1992), p.
[754] « Mr Wallace earnestly desires me to go over the computations for the scheme, and if possible I would oblige him. There are some wrong-headed people talk absurdly on the subject, which he imagines a paper from me would silence, and such a paper I must not give rashly, tho' I like the main of their scheme now. » in Mills (1982), p. 151.
[755] « You was in the right, Sir, to represent me as a friend to the Scheme in general. (…) For these and other reasons too tedious to mention here, I am of opinion that if this Scheme take place and be faithfully executed, as there is all the reason in the World to expect, it must be advantageous to the whole body of Ministers. » in Mills (1982), p. 105.

peuvent avoir de façon individuelle[756]. C'est en ardent défenseur qu'il se positionne. C'est pour cela aussi qu'il a passé beaucoup de temps à calculer et à vérifier les projections des auteurs du projet[757]. Mais, il est convaincu qu'il doit être modifié pour devenir viable[758]. C'est le sujet de la réponse qu'il donne à Wallace dans sa lettre du 23 mai 1743. Maclaurin fait trois remarques qu'il juge importantes[759]. Le capital prévu par Wallace est de 50000 livres sterling. Pour arriver à cette somme, les bénéficiaires, au début, recevraient moins. Maclaurin certifie, et c'est en grande partie pour cela qu'il passe beaucoup de temps à calculer, que la progression du capital n'est pas aussi rapide que ce que pensait Wallace[760] et même qu'il sera peut-être impossible d'y arriver et qu'il plafonnera à 31000 livres sterling. La raison de cette erreur réside dans la façon de compter les veuves. Wallace considère qu'un dix-huitième des veuves décèdent par an quelque soit l'âge des veuves. Maclaurin rétorque d'après des tables existantes, *a priori* celles de Halley[761], que jusqu'à l'âge de soixante-six ans, la proportion de veuves à mourir est de 1 sur 31[762]. Avant de faire les calculs, Maclaurin pense qu'être plus précis en prenant les tables de Halley ne change pas foncièrement les estimations. Mais, avec l'aide des calculs, il se rend compte

---

[756] « It must be advantageous on a second Account to the Widows and Children of Ministers because the annual tax is payable not only by those shall leave a Widow or children, but likewise by those who shall leave neither. It must be advantageous, because a a [sic] greater improvement can be made of large Sums, and with less danger from the hazard to which all things are subjected, by faithfull Trustees than of small annual Sums by single Ministers; as it is certain rule that no single man, unless he be extremely rich, ought to deal in Insurance, but rich men or companies of men only ; because loss to a poor man is more sensible than an equal gain. » in Mills (1982), p. 105.

[757] « Till Friday I kneu not what I was to compute because of their perpetual alterations. After Friday I laboured day & night till I have put myself so much out of order that I was obliged this day to lye down to sleep. » in Mills (1982), p. 109.

[758] « Having discovered a very material error » in Mills (1982), p. 109.

[759] « and having proposed three Articles to favour the rising of the Capital to Mess Wallace & Webster. » in Mills (1982), p. 109.

[760] « I find great reason to conclude that the Capital of 50000 L. St. will not advance so fast as is supposed in the Calculations of the Scheme. I am obliged to justify the Accountant, who appears to have carried them on with skill & care upon the principles given to him. » in Mills (1982), pp. 105-6.

[761] Halley (1693), p. 600 et 609.

[762] « It is said that one of the Widows dyes out of 17, but for the greater certainty one of 18 only is supposed to dye. Now it is certain that one cannot reasonably be expected to dye out of 18, till the age of 68 years, from registers that have been kept for a century of years of persons of 50 years of Age, one only dyes out of 31 yearly. » in Mills (1982), p. 106.

que le projet ira à la banqueroute. C'est pour cela qu'il crée des tables[763] qu'il joint aux lettres envoyées à Wallace. À la suite d'une lettre à Wallace, il donne un extrait d'une des tables qu'il a produite, dans laquelle il compare le nombre de veuves prévu avec la méthode de Wallace et celui calculé par sa méthode c'est-à-dire en utilisant la doctrine des chances (expression de l'époque pour désigner le calcul de probabilités)[764] :

Years of the Scheme.	Widows in life by the Scheme.	Widows in life by the doctrine of chances, supposing them a medium to be left at 50 years of age.
12	152,27	179,64
17	193	231,85
20	212,17	257,12
25	238	288,33
30	257,11	303,60

Nous pouvons remarquer que la différence entre les résultats obtenus par les deux méthodes est importante. La différence s'explique par deux approches différentes du calcul. Wallace part du principe que l'âge moyen des femmes pour devenir veuves est de cinquante ans. Il prend un échantillon de 18 femmes et il considère alors qu'un dix-huitième des veuves décède par an. Ainsi, au bout d'un an, il reste 17 veuves encore en vie issues de la première année auxquelles il faut ajouter 18 nouvelles veuves, soit un total de 35 veuves. Il procède ainsi pour calculer les prévisions chaque année du nombre de veuves en vie. À l'instar de Wallace, Maclaurin considère que l'âge moyen de 18 femmes à devenir veuves est de 50 ans. Mais contrairement au pasteur qui considère le taux de

763 N.A.S 9/17/16/3 reproduite dans Dunlop (1992), illustration 2.

764 « For the satisfaction of such desyre it, I have copied on this leaf the number of Widows in life entitled to the provisions, according to the Scheme & according to the Doctrine of Chances (or Observations from Experience concerning the probabilities of Life) for some of the Years. » in Mills (1982), pp. 107-8.

mortalité des veuves indépendamment de l'âge de ces femmes, Maclaurin considère un taux de mortalité différent et surtout qui varie en fonction de l'âge des veuves. Il considère que la première année, il y ait 18 nouvelles veuves. Il applique le taux de mortalité de 1 sur 31 de rigueur pour les femmes de cinquante ans, tiré des tables de Halley[765]. Par conséquent, lors de la deuxième année, en ajoutant les nouvelles veuves (supposées être encore dix-huit) il y aurait 35,42[766] veuves environ. Pour la troisième année, il faut compter les 18 nouvelles veuves, plus les 17,42 veuves qui sont arrivées lors de la deuxième année et qui sont encore vivantes, et les veuves encore en vie qui sont depuis la première année. Pour évaluer ce nombre, Maclaurin utilise encore le tableau de Halley mais au lieu de prendre le taux de mortalité de cinquante ans, il prend celui de 51 ans, soit 0,0328. Des premières veuves, il en reste 16,85. Au bout de trois ans d'existence du projet, il faut prendre en compte 52,27 veuves et non pas, comme le fait Wallace, 51,05. Pour donner encore plus de poids à ce qu'il suppose, il fournit des tables comparatives. Même si au départ la différence entre les nombres calculés à partir des deux méthodes est petite, le tableau ci-dessus montre que la différence devient très rapidement très importante. Les projections de Wallace ont tendance à minorer le nombre de veuves encore en vie, et c'est ce qui rend le projet caduc.

C'est pourquoi, Maclaurin émet plusieurs modifications pour sauver le plan. Il propose alors que la cotisation de première année soit doublée aussi bien pour les pasteurs étant déjà mariés ou ayant déjà des enfants que pour les célibataires et sans enfants[767]. De plus, il propose que la première année de veuvage ne donne pas lieu au paiement de la rente, c'est-à-dire que les droits pour les veuves débutent au premier anniversaire du

[765] Halley (1693), p. 600. Dans le tableau de cette page, Halley considère qu'à cinquante ans, il y a 346 personnes qui restent vivantes contre 11 qui décèdent.
[766] Des dix-huit veuves de la première année, s'il en meurt un trente-et-unième, il en reste environ 17,42.
[767] « That the first year's tax be double not only on those Ministers who are already married or have children but on all the benefices. » in Mills (1982), p. 107.

veuvage[768]. Enfin, il propose que les enfants, les premières années, ne reçoivent pas la totalité des sommes mais une partie seulement[769].

Les deux premières propositions sont acceptées par Wallace et Webster, en revanche la troisième ne l'est pas, car cela donnerait des arguments aux personnes de l'Assemblée Générale de l'Église d'Écosse qui sont contre ce projet[770]. En ne prenant en compte que les deux premières modifications, Maclaurin explique à Andrew Mitchell que le capital augmenterait jusqu'à 41000 livres sterling au lieu des 50000 livres prévues dans le projet, puis redescendrait et arriverait à la ruine du projet[771]. En regardant le projet défendu devant le parlement en 1744, il semble que la troisième remarque de Maclaurin a été prise en compte par Wallace et Webster.

2. Maclaurin un homme d'appui

Dans les archives nationales d'Écosse se trouve deux projets de nettoyage[772] des rues de la ville d'Édimbourg proposés par Robert Mein, le premier en 1734-35, le deuxième entre 1735 et 1737. Pour le second projet, Mein recherche des appuis. C'est ainsi qu'à la suite de sa proposition, plusieurs habitants d'Édimbourg ont signé une pétition appuyant cette proposition. L'architecte William Adam et Maclaurin ont approuvé cette

---

[768] « That the Annuity be not payable to Widows for the first year of their Widowhood, because unless a Minister at his death be in more debt to Your Fund than he can pay (which must be a rare case, and something surely must be left to your compassion & tenderness for one another) the Ann may be supposed to afford as large a supply for the first year as the Annuity for subsequent years. » in Mills (1982), p. 107.

[769] « The third was, that for the first 3 or 4 years of the Scheme Minister's children should receive only 100 L. St. (instead of 200) at the beginning of the Scheme » in Mills (1982), p. 109.

[770] « and having proposed three Articles to favour the rising of the Capital to Mess Wallace & Webster they would not permit me to propose the third to the Assembly tho' the most considerable & equitable lest it should give a handle to those who were against the Scheme. » in Mills (1982), p. 109.

[771] « The two I proposed were agreed to, but these will only raise the Capital to about 41000 L. St. » in Mills (1982), p. 109.

[772] N.A.S, MS.1955

proposition en écrivant une note et en signant la pétition[773]. Maclaurin joue ici plus un rôle d'appui institutionnel que de conseiller scientifique.

Dans l'épisode du projet de rente viagère, Maclaurin a aussi joué un rôle institutionnel, c'est-à-dire celui d'une personnalité dont la renommée est suffisamment importante pour que le projet soit valorisé et promis à la réussite. Maclaurin l'a joué à deux reprises, la première fois, lorsque ce projet a dû être défendu par Wallace devant l'Assemblée Générale de l'Église d'Écosse, la seconde fois quand le projet a dû être accepté par la chambre des communes à Londres.

Pour le premier épisode, dans les archives nationales d'Écosse se trouvent deux lettres[774] de Maclaurin à Wallace, la première du 24 mai 1743 et la seconde du 3 juin de cette même année. Stella Mills a publié la première mais l'a considérait comme perdue. La seconde n'a pas été éditée dans la correspondance de Maclaurin[775]. En revanche, elle a été reproduite dans le livre édité par Ian Dunlop[776]. Étant donné l'impossibilité de le trouver en France[777], nous la reproduisons en annexe. La lettre qui nous intéresse ici est la seconde. Même si elle est destinée à Wallace, le ton utilisé nous laisse comprendre qu'elle est adressée aux représentants de l'Église d'Écosse. En effet, cette lettre est une réponse à Wallace qui a écrit que l'Assemblée émet quelques objections et donc est sceptique quant à la validité de ce projet. Ainsi, cette lettre est adressée à l'Assemblée Générale de l'Église d'Écosse en réponse à une demande de leur part[778]. Maclaurin considère que le projet,

---

[773] N.A.S, MS.1955, 36v

[774] N.A.S, CH9/17/16

[775] Pour écrire la correspondance de Maclaurin, Stella Mills s'est beaucoup appuyé des archives d'un mathématicien de Glasgow, John Carnegie Eaton, qui accumulait beaucoup de choses à propos de Maclaurin, mais quelquefois sans souci de citer ses sources. C'est ainsi que Mills ne sachant où se trouvait l'original de cette lettre l'a déclarée perdue.

[776] Dunlop (1992), pp. 54-5.

[777] Lors de nos recherches, nous avons été dans l'impossibilité de le trouver en France.

[778] « Having considered the scheme for providing an annuity for minister's widows and a stock for their children laid before the late general Assembly the 12th. Of May 1743 together with the alterations and amendments made upon the same by the genl. Assembly and my opinion being desired concerning the whole » in NAS CH9/17/16

même s'il a besoin d'être affiné, est bon dans son ensemble[779]. Il donne quelques arguments sur ce qu'il faut faire comme changement, en particulier sur le capital de départ qu'il faut réévaluer[780]. Mais il se veut un défenseur de ce projet qui évite pour les pasteurs un souci supplémentaire, et qui permet à de nombreuses veuves et orphelins de sortir de la misère[781].

L'autre fait marquant, concernant le poids institutionnel et intellectuel de Maclaurin, intervient lorsque Wallace et Webster sont allés défendre ce projet devant les deux chambres de Londres pour qu'il devienne une loi. Ainsi Wallace, dans une lettre à Maclaurin[782], annonce que le simple nom de Maclaurin a permis de faire taire quelques interrogations au sujet des fondations de ce projet[783]. Le fait que Maclaurin ait vérifié et ajusté les calculs de Wallace, a donné plus que de la cohérence et de la tenue à ce dessein. Il a aussi permis d'ajouter à ce projet un nom qui permet d'accorder la confiance aux promoteurs du projet. Mais, étant aussi partie prenante, Maclaurin s'engage encore plus, il implique ses relations. Ainsi, lors du voyage à Londres de Wallace, ce dernier a été guidé dans les arcanes du pouvoir par un ami très proche de Maclaurin, Sir Andrew Mitchell[784].

---

[779] « I think myself obliged to say that the Design is so good that minute objections against the absolute perfection of the scheme seem to be improper after it has been so long under consideration » in NAS CH9/17/16

[780] « and only observe that I have reason to be apprehensive that the capital will not rise so fast as is supposed in the scheme without deductions from the provisions proposed for the children. And as I am of the opinion that some deductions will be necessary in order that the proposed capital may be completed so it is most equitable that they should take place at the beginning of the scheme when they will have the greatest effect to promote the advancement of the capital and will require to be continued for a smaller number of years. » in NAS CH9/17/16

[781] « I sincerely wish well to this design and cannot but be of opinion that if the scheme take place and be faithfully executed (as there is all the reason in the world to expect) it will prevent the unhappy circumstances to which ministers' widows and children are too often reduced. It is remarkably advantageous to those ministers who are advanced in years and they only seem to have any ground to complain of it who think they have no chance to leave a widow or child behind them. » in NAS CH9/17/16

[782] Cette lettre est reproduite dans les Seconds Papers of Maclaurin… Nous n'avons pas l'original.

[783] « your Name has been very usefull to us here; for when anyone moved a Doubt about the Foundations of our Scheme; & whether our Funds would answer; I answered them that the Calculations had been revised by You, & that you had given your Attestation in the terms of your letter to me, which was printed; this entirely satisfied them. » in *Second Papers*

[784] « We have been in a particular Maner obliged to our common friend Mr Mitchell who allusise [allusive?] gave us the best Advice how to behave to all sorts of Persons & manage everything in the best Manner. Being so little acquainted with London we could never have got clear of some Difficulties & Dangers

Ce dernier et Wallace se connaissent déjà, mais il est clair que c'est Maclaurin qui propose à Wallace d'être accompagné par Sir Mitchell qui était à cette époque sous-secrétaire d'État pour l'Écosse.

Maclaurin, comme nous l'avons vu ici, est un homme qui en 1743-44 est considéré par les différents pouvoirs en place, comme un homme de confiance, dont les avis sur les questions de sciences en général sont sûrs, un homme proche du pouvoir en tant que conseiller qui sait utiliser ses relations pour augmenter les chances qu'un projet aboutisse. Il est intéressant de signaler que le projet était initialement prévu pour les veuves et orphelins de pasteurs de l'Église d'Écosse, mais qu'il a été désigné devant les deux chambres et le roi comme un projet qui concerne les veuves et orphelins des pasteurs et des professeurs des universités d'Édimbourg, de Glasgow et de Saint Andrews[785]. En fait cet ajout a été approuvé lors de la séance du 19 mai 1743 de l'Assemblée Générale de l'Église d'Écosse[786]. Ce fait marquant de l'Église d'Écosse est considéré aujourd'hui par certains historiens comme le premier calcul correct de fond actuaire, car c'est la première fois dans le cadre de l'actuariat, que des tables réalistes et précises de mortalité ont été utilisées[787].

without the Advice and Direction of a Man so experienced in Business. We always found him ready to assist us; & perceive in him a warm affection to his old friends » in *Second Papers*

[785] « I cannot forbear now to acquaint you that this Day our Bill for Providing for the Widows & Children of the Ministers of the Church & Professors in the Universities of Scotland » in *Second Papers*.

[786] Dunlop (1992), p. 67.

[787] « These are almost certainly the earliest actuarially-correct fund calculations ever carried out, if to be "actuarially-correct" requires (inter alia) the use of a realistic and accurate life table. » in Dunlop (1992), p. 68 ou Grabiner (2002), p. 156.

E. La défense d'Édimbourg et la mort de Maclaurin

Durant les années 1745 et 1746, l'Écosse va connaître un de ses épisodes les plus douloureux et marquants de son histoire. Cet épisode appelé la montée Jacobite est un soulèvement des partisans de Charles-Édouard Stuart pour le renversement de la couronne hanovrienne. De nombreux ouvrages ont été écrits sur ce sujet qui fait encore débat aujourd'hui. Nous allons donner les étapes de ce soulèvement à travers les agissements de Maclaurin qui a pris une part non négligeable dans la défense de la ville d'Édimbourg contre les « jacobites ».

Bonnie Prince Charlie (surnom de Charles-Édouard donné par ses partisans) part de France de Paimbœuf, à quelques lieues de Nantes le 8 juillet pour rejoindre l'Écosse et à Glenfinnan, le 19 août, débute réellement le soulèvement. Les troupes jacobites ne rencontrent que très peu de résistance car les troupes britanniques sont occupées ailleurs qu'en Écosse et ils reçoivent l'aide de plus en plus de partisans. Les jacobites descendent vers Édimbourg, capitale traditionnelle des Stuart.

Le 2 septembre de cette même année, voyant cette troupe s'approcher de plus en plus d'Édimbourg, une vingtaine de défenseurs de la couronne britannique décident de mettre tout en œuvre pour défendre leur ville de l'insurrection jacobite[788]. Luttant contre le découragement, cette assemblée est décidée à défendre coûte que coûte leur ville. Pour cela, elle nomme deux de leurs membres, Baillie Stuart et Colin Maclaurin pour être leurs représentants chez le maire et porteurs de plusieurs instructions. La première est de demander au Lord Provost de donner l'ordre de fabriquer des munitions. La deuxième est

---

[788] « Septem. 2nd. The Accounts from the North becoming more and more unfavourable, above Twenty Gentlemen of known god affection to his Majesty and the Government (…) who agreed to apply to the Lord Provost that he would give Orders for putting the Town in a good a state of Defence as possible with all expedition. » in Journal of What pass'd relating to the defence of Edin….., MS 299, 77, pp. 2-13, p. 2.

de protéger l'arrivée d'eau potable de la ville en prévision d'un siège et la troisième est de séparer dans la population édimbourgeoise les défenseurs des Hanovre des sympathisants jacobites et, parmi les défenseurs de la ville, de choisir ceux qui sont capables de se défendre. Le maire accède aux deux premières requêtes mais pas à la troisième. Le Lord Provost méprise le soulèvement et le sous-estime. Le fait d'avoir une garnison de dragons dans le château le rassure d'autant plus. Mais, il tiendra compte des conseils de cette assemblée.

À partir de cette date, la défense se met en place. Maclaurin s'occupe des fortifications et de la remise en forme des murs de la ville qui par endroits étaient en piteux état[789]. Un appel à volontaires est lancé, et plus de 400 édimbourgeois répondent à cet appel. Le maire veut garder le contrôle de l'organisation de la défense, ce qui gêne considérablement et ralentit cette défense. La défense s'organise et attend l'arrivée des jacobites. C'est le 15 septembre que les jacobites arrivent aux portes de la ville, ce qui provoqua parmi la population une panique importante. Le lendemain, entre 2 et 3 heures, quelques édimbourgeois déposent au lord Provost une pétition d'une partie de la population suggérant de capituler. Les membres du conseil acceptent de capituler. Ainsi, les clés de la ville d'Édimbourg sont données aux jacobites le 17 septembre. C'est ainsi la fin de la défense de cette ville et les volontaires rendent leurs armes. Maclaurin est amer de la tournure qu'ont pris les évènements et de la lâcheté d'une partie de la population.

Après la capitulation, Maclaurin vit retiré dans sa maison. Juste après la capitulation, le chef jacobite propose aux défenseurs de la ville de désavouer le gouvernement en place sous 20 jours. Maclaurin s'y oppose vertement, mais auparavant il s'arrange pour mettre sa famille en sécurité à Dalkeith, au sud d'Édimbourg, et le 19ème jour, il fuit de la région d'Édimbourg vers l'Angleterre pour se réfugier à York où il est

[789] « After looking at a part of the Wall he desired Mr. Maclaurin one of the Volunteers to take the trouble to make a Plan of it which he promised to do. » in *Journal*, p.6.

accueilli par l'archevêque de cette place[790]. Après le départ des jacobites d'Édimbourg début novembre, Maclaurin retourne à Édimbourg, en prenant quelques risques et doit voyager de nuit avec un temps déplorable, en étant le plus discret possible[791]. Cette ville est reprise en main par les défenseurs du gouvernement. Et la vie à Édimbourg reprend doucement. L'université est même rouverte fin novembre. À partir de cette période, Maclaurin sera préoccupé par la vie politique et militaire de la Grande-Bretagne et sera attentif à toutes les nouvelles concernant les mouvements de troupes des deux côtés.

Lors de son retour à Édimbourg, Maclaurin tombe malade et ne réussit pas à surmonter cette maladie. Ainsi, durant les premiers mois de 1746, Maclaurin sera de plus en plus alité. Il reçoit ses amis les plus fidèles, comme Dr Clerk, Dr Simson et Dr Monro, qui sont très souvent à son chevet. Voyant sa fin approcher, Maclaurin décide de reprendre l'écriture de certaines parties de *the Account* que nous avons déjà signalées[792]. Plus les jours passent, plus il se rapproche de Dieu, lit de plus en plus la Bible, la commente de plus en plus. Mais la mort interrompt l'écriture du dernier chapitre du *the Account* et ses discussions avec ses amis[793]. Le 14 juin, Maclaurin meurt paisiblement. Trois jours après,

---

[790] « After this Revolution I liv'd retir'd. A proclamation was publih'd by their P. offering an Indemnity to all Volunteers who should submit iin 20 days to their government. (…) Determin'd to make no submission I endeavour'd to settle my family at Dalkeith as well as I could, and crost the border of England on the 19th day of those allow'd. » in Mills (1982), p. 126.

[791] « I got to Dalkeith on Saturday night, but was so much out of order from the severity of the weather and riding several times in the Night that I could not come hither till yesterday. You know I intended to have come with Mareshall Wade, but the motion of the Rebells altered his rout & made my progress hither safer & easier than I expected. » in Mills (1982), p. 128.

[792] « Tho his weakness could not fail to relaid him much in carrying on his Account of the illustrious Sir Isaac's Philosophy; instead of proving a total Hinderances of that last service to the publick ; it occasion'd easyer Efforts to get it compleated if possible. His Young friend who was his amenuensis (John Mcleod ?) tells that deliver the 15th of April & the time if his Death which was the 14th of June, he decided to him about 42 sheets of it. And that instead of delaying the intented Conclusion, about the substency of the knowledge of Nature to the Regards due to its Author ; he commenly bestew'd (?) a share of his labour (?) on it every week: according for it some of that saved Part of Time to which such Divine Contemplation is so sutable (?). And as what he was composing tendend to excite Attention to Sir Isaac's various eminent Atteinments » in *Second Papers*, pp. 23-4.

[793] « Death interrupted him in the last Chapter of his Book ; but not till after he had there sufficiensly prov'd that it could onely (?) reach the Body ; tho if not thus interrupted probably him might have enlarg'd more on

il est enterré au cimetière de Greyfriars Kirk à Édimbourg dans laquelle se trouve encore la stèle de sa tombe[794].

the Proofs of a truth which so him had so great Attentions. Love to learning seem'd in him to promote the Love of Immortality; & Arder for Knowledge, to cause Delight in the Endeavour of the Perpetuity & Perfection of that, & of all the valuable Atteinments to which it is subtenant, in an after state » in *Second Papers*, p. 25.

[794] Sur la plaque tombale qui se trouve aujourd'hui sur un des murs extérieurs de l'église de Greyfriard à Édimbourg, nous pouvons lire un texte de son fils : « Infra Situs Est / COLIN Maclaurin / Mathes. Olim In Acad. Edin. Prof / Electus Ipso Newtono suadente. / H.L.P.F. / Non ut nomini paterno consulat. / ?am tali auxilio nil eget / Sed ut in hoc infelici campo / Ubi Luctus regnant et Pavor / Mortalibus prorsus non absit Slotium : / Hujus enim scripta evolve / Mentemque tantarum rerum capacem / Corpori caduco superstitem crede. ». H.L.P.F, comme le suggère J. Grabiner, veut sûrement dire *Hunc lapidem posuit filius*.

IV. Conclusion

Tout d'abord, nous avons montré que la lecture des œuvres de Newton par Maclaurin a évolué dans le temps. Ainsi, nous avons remarqué qu'au moment de ses études à l'université de Glasgow et au début de sa carrière universitaire, Maclaurin reprend les œuvres de Newton et c'est à partir de ces dernières qu'il écrit, par exemple, sa thèse, le *De Gravitate*. Ses premiers travaux lui ont même valu d'être remarqué par le maître Newton et ceci lui a permis d'être élu fellow de la *Royal Society* de Londres et que le *Geometria Organica* soit publié. Durant cette période, Maclaurin a produit quand même des travaux originaux et de grande qualité. Lors du prix de 1724 de l'Académie Royale des Sciences de Paris, le papier de Maclaurin défend les prises de position newtoniennes sur la loi des chocs. Entre son arrivée à Édimbourg, en 1725, et son mariage en 1733, Maclaurin poursuit son travail mathématique avec une lecture plus éloignée des œuvres de Newton. Il se place un peu plus comme un commentateur de la pensée de Newton. La commande de John Conduitt qui deviendra l'ouvrage posthume, *The Account of Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries* paru en 1748, et dans une certaine mesure le *Treatise of Algebra* paru aussi en 1748, sont des commentaires d'une partie des travaux de Newton. Ces travaux éclairent la pensée de Newton, ou plutôt déforment cette pensée pour la rendre conforme à ce que Maclaurin pense des écrits de Newton. La dernière période, du mariage jusqu'à sa mort en 1746, est une période de maturité mathématique, ce qui implique aussi une certaine prise de distance de la part de Maclaurin vis-à-vis de l'œuvre de Newton. Maclaurin, toujours défenseur de la pensée newtonienne, a réussi à devenir autonome, à se défaire de la pensée de Newton, et à exprimer sa propre méthode. L'exemple le plus frappant est la recherche de fondements à la méthode des Fluxions. Cette attitude n'a pas été la préoccupation de Newton, qui n'a pas constitué une ébauche de fondation de son calcul.

Maclaurin est aujourd'hui connu en tant que mathématicien et son nom est associé à quelques résultats dont il a en partie la paternité. C'est pourquoi, nous avons décidé d'analyser ses apports en mathématiques et de montrer qu'ils étaient importants. Le souci de fondements est constant chez lui. Le *Treatise of Algebra* propose de fonder l'algèbre, cette science servant elle-même de fondement pour une axiomatisation du calcul des fluxions. Le *Treatise of Fluxions* propose, en fait, deux fondements, l'un repose sur la Géométrie et l'autre sur l'Algèbre. Cette double fondation permettra, entre-autres, de pouvoir mêler Géométrie et Algèbre dans la résolution de problèmes.

L'axiomatique du *Treatise of Fluxions* sera reconnue par la postérité. Montucla écrira :

> « que s'il restait quelques doutes sur la solidité de cette dernière [la méthode des fluxions], ils sont entièrement dissipés par cet ouvrage de M. Maclaurin (…) [et] tout ce qui concerne la méthode des Fluxions (…) y est expliqué avec une profondeur beaucoup supérieure à ce qu'on avait vu auparavant »[795]

La méthode des fluxions est devenue alors autant newtonienne que maclaurinienne. Avec sa méthode, Maclaurin a donné la formule dite de Taylor-Maclaurin, et encore la formule dite d'Euler-Maclaurin qui sont encore utilisées aujourd'hui. À l'aide de cette méthode, Maclaurin a aussi travaillé sur la figure de la Terre qui lui a permis de gagner un deuxième prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris, celui de 1740, et qui a influencé Clairaut et D'Alembert. En ce qui concerne la géométrie, Maclaurin produisit aussi quelques théorèmes et quelques méthodes de générations de courbes qui ont suscité chez les savants de l'époque un renom. Le *Geometria Organica* dans lequel on trouve la méthode des

[795] Montucla (1802), vol. 3, p. 119.

podaires, une construction mécanique de courbes algébriques, ainsi que le fameux paradoxe dit de Cramer, est riche de cette créativité géométrique. Parmi l'ensemble des résultats découverts ou développés par Maclaurin, il nous a semblé intéressant et utile d'en donner quelques uns.

Tous ces résultats sont les effets de son art mais surtout de ce que nous avons appelé son opiniâtreté ou son obstination mathématicienne. Tout au long de sa vie, Maclaurin a été préoccupé par les sciences en général et plus particulièrement par les mathématiques. Les mathématiques signifient à la fois certitude et évidence. Elles permettent d'affirmer sans disputes ni contestations, y compris dans d'autres domaines scientifiques et métaphysiques. Ainsi, en procédant par une démonstration de type mathématique, les mathématiques peuvent conférer une certitude même en théologie :

> « Si la Géométrie est universellement estimée par les grands avantages qu'on en retire, on peut dire qu'elle ne se fait pas moins admirer par l'évidence de ses connaissances. Les Démonstrations Mathématiques ont toujours terminé toutes les disputes, et elles ne permettent pas de douter, ni de chicaner. La Géométrie a acquis ce caractère d'évidence par le grand soin que les Anciens ont pris de n'admettre que peu de principes évidens par eux-mêmes, et de ne donner, pour démonstrations, que ce qui étoit conclu évidemment de ces premiers principes. »[796]

Maclaurin considère les mathématiques différemment des autres sciences car elles ont en elles cette capacité à rendre certaine toute proposition, mais aussi à faire accepter toute proposition par leur caractère d'évidence. Le rôle des mathématiques dans le champ du savoir est donc fondamental, Maclaurin considère cette science au-dessus de tous les autres savoirs, car c'est par elles que les autres champs du savoir peuvent acquérir ce caractère

[796] Maclaurin (1749b), vol. I., p. 3.

d'évidence et de certitude. La philosophie naturelle est aussi un bon exemple du souci de démonstration mathématique. Même si ce sont les expériences et les observations qui sont à la source de la philosophie naturelle, le rôle des mathématiques est central. Ce sont les mathématiques qui vont donner à une théorie physique ce caractère sûr car elles sont un guide pour échafauder cette théorie. Cette mathématisation doit pouvoir être utilisable dans tous les champs du savoir et de la société. C'est pourquoi Maclaurin s'investit dans quelques projets éloignés des mathématiques pures. Par exemple, nous pouvons citer le jaugeage des tonneaux ou encore le projet de rentes viagères dans lequel Maclaurin fait intervenir, pour la première fois, des données statistiques et la doctrine des chances. Dans ce dernier exemple, son apport est primordial, car c'est par ses compétences en mathématiques que le projet a été viable. De plus, ses activités sociales et politiques reflètent ce souci du développement des sciences et donc sa volonté de mathématiser. Son implication dans la création de la Société philosophique d'Édimbourg montre sa volonté d'enrichir et de faire connaître les sciences au plus grand nombre. C'est Maclaurin qui a rédigé les statuts et qui est un des deux secrétaires de cette société, plus particulièrement en charge des sciences mathématiques, c'est-à-dire géométrie, astronomie, physique. Par conséquent, Maclaurin joue un rôle central dans la propagation des idées mathématiques et du statut des mathématiques dans cette société.

Dans notre étude, nous nous sommes restreints à la vie de Maclaurin, c'est à travers celle-ci que nous avons abordé à la fois le 18ème siècle écossais et européen. Par conséquent, certains savants britanniques et continentaux n'ont peut-être pas ici la place qu'ils mériteraient. De plus, nous avons dû faire des choix. Ainsi, plusieurs manuscrits n'ont pas été utilisés comme les *De Ortu Geometriae*[797] dont Sageng fait un commentaire dans sa thèse, ou encore deux notes de cours, la première *A collection from Mr.*

[797] In MS 34, Bibliothèque universitaire d'Aberdeen.

McLaurens course of experiments[798] (dont nous avons signalé l'existence dans le corpus de ce travail), la seconde *On Method of Fluxions*[799], car la première n'est pas suffisamment fiable (il y a trop d'erreurs grossières pour que ce soit vraiment le propos fidèle de Maclaurin) et la seconde trop éloignée de notre thèse. De plus, nous avons exhumé trente-quatre lettres inédites de Maclaurin dans le fonds de Lord Polwarth aux Archives Nationales d'Écosse mais trop tardivement pour les exploiter dans ce travail.

Cette étude globale des œuvres de Maclaurin est un travail préalable pour connaître le rôle et l'influence de Maclaurin sur la vie intellectuelle et sociale de l'Europe. Judith Grabiner a déjà entamé ce travail avec plusieurs de ses articles. Par exemple, l'influence du *Treatise of Fluxions* sur le continent permet de mieux comprendre certaines conceptions de savants français, comme chez d'Alembert. Mais Maclaurin a été d'abord connu pour ses travaux en géométrie, il serait donc intéressant de regarder comment ses autres œuvres, comme le *Geometria Organica* ou le *The Account*… ont été perçues par les Continentaux et par les Britanniques. Nous avons montré l'intérêt en soi des ouvrages de Maclaurin, soit par leur contenu soit par leur mode d'exposition, il nous apparaît donc essentiel d'entamer un travail de d'édition et de commentaire d'une partie de ses œuvres qui peuvent être considérées comme des ouvrages qui ont compté dans l'histoire des mathématiques et plus généralement dans l'histoire des idées. Nous pensons particulièrement au *Traité des Fluxions* à la fois pour sa richesse et pour son exposition des fondements qui n'est pas courant au 18ème siècle. Un autre ouvrage mérite aussi un travail de traduction et de commentaires, c'est le *Geometria Organica*, car il n'a jamais reçu de traduction et son contenu est d'une grande richesse largement méconnue. Une autre raison en faveur d'une édition commentée de cet ouvrage, en relation avec le *De Linearum*, est que les ouvrages de géométrie de Maclaurin, comme nous l'avons juste suggéré dans notre

---

[798] Dc.7.73, Bibliothèque universitaire d'Édimbourg.
[799] Gen.75.D, Bibliothèque universitaire d'Édimbourg.

travail, ont pu avoir une influence dans les nouvelles géométries du 19ème siècle, en particulier celle de Poncelet.

UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

POUR UNE BIOGRAPHIE INTELLECTUELLE DE COLIN MACLAURIN (1698-1746) : ou l'obstination mathématicienne d'un newtonien

Tome II

THÈSE DE DOCTORAT
EN ÉPISTÉMOLOGIE, HISTOIRE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES
École doctorale : Connaissance, langage, culture

Présentée et soutenue publiquement par

Olivier BRUNEAU
Le 25 octobre 2005, devant le jury ci-dessous

Président :	M Christian GILAIN, Professeur, Paris
Rapporteurs :	Mme Judith GRABINER, Professeur, Claremont College, États-Unis
	M Pierre CRÉPEL, Chargé de recherche, Lyon
Examinateurs :	M Christian GILAIN, Professeur, Paris
	M François DE GANDT, Professeur, Lille
	M Pierre LAMANDÉ, Maître de Conférence, Nantes

Directrice de thèse : Mme Évelyne BARBIN, Professeur, Nantes

Bibliographie

La bibliographie que nous proposons n'est pas exhaustive, elle recense les titres que nous avons utilisés lors de notre travail qu'ils soient cités ou non dans la thèse.

Sources Primaires concernant Maclaurin

Nous avons pris le parti de séparer les manuscrits et les ouvrages de Maclaurin des autres sources primaires.

Sources Manuscrites

Bibliothèque de l'université d'Aberdeen

MS34 : papiers et correspondances de Maclaurin

MS206 : papiers personnels de Colin Maclaurin

MS 672 : manuscrit de Gregory (1745) [traduction de Maclaurin, version anglaise]

MS 2171 : version latine de MS 672

MS207 : manuscrit du *Traité des Fluxions*

MS208/MS209 : manuscrit du *The Account of Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries*

Thomson 1/47 : *Memorial concerning the building an observatory in the college of Edinburgh* (1741)

Bibliothèque de l’Université de Glasgow

MSGen.1378/2 : *The second paper of Memories of Mr. Maclaurin beginning at 1725*

Bibliothèque de l’Université d’Édimbourg

DC.3.66 : *A treatise of Algebra By Mr. Colin McLaurin, Professor of Mathematiks In the University of Edinburgh, Written by John Russell, Edin. AD 1729*

Gen.75.D : Colin Maclaurin, *A Treatise of Algebra* suivi de *An introduction to the method of fluxions*

Dc.7.73 : *A collection from Mr. McLaurens course of experiments*

Gen.2251D : *Ane Introduction to the Mathematicks*, *By Mr MckLaurence, Prof. Abd.*

DC.1.17 : *Memorial to the commissioners of Excise concerning the mensuration of tuuns or backs*, 1735, [copie manuscrite du manuscrit de Maclaurin qui se trouve à la Bibliothèque Nationale d’Ecosse Adv. MS 23.1.13] voir aussi Grabiner [1996a]

Coll-38 : *De Viribus Mentium Bonipetis*

General Register Office for Scotland

Old Parish Register, 685/01/0047 : registres du mariage de Colin Maclaurin et Ann Stewart
Register of Deeds, vol. 160, du 01/06/1746 au 31/12/1746. [Contrat est daté du 18/07/1733. Enregistré au moment de la mort de Maclaurin].

Bibliothèque Nationale D’Écosse

MS 1342 : *Journall of what pass'd relating to the defence of Edinburgh from Monday September 2d till Monday September 16,.*

Adv. MS 23.1.13 : *Memorial to the commissionners of Excise concerning the mensuration of tuuns or backs…*, 1735

Archives Nationales D'Écosse

RH15/15/108 : lettres de Maclaurin à Lord et Lady Kimmergham

CH9/17/16 : lettres de Maclaurin à Wallace avec les Tables

GD158/492 : poème de Maclaurin dédié à Hume

GD40/8/374 : reçus et résumés des dépenses occasionnées pour l'éducation de Kerr par Maclaurin, 1729-1732

GD158/2507 : lettres d'Alexander, 2nd comte de Marchmont (environ 35 lettres addressées à Maclaurin)

Sources Imprimées

Maclaurin, Colin (1713), *Dissertatio Philosophica Inauguralis, De Gravitate, aliisque viribus Naturalibus, quam Cum annexis Corollariis, Favente summo Numine, Auctoritate Dignissimmi Vice cancellarii, Joannis Stirling, V.D.M.SS.Th Professoris Primarii; Necnon Amplissimi Senatus Academici Consensu, & Celeberrimae FACULTATIS Arium Decreto; Pro Gradu Magisterii, summisque in Philosophia & Artibus liberalibus Privilegiis & Honoribus rite ac legitime consequendis, In Auditorio publico Academiae Glasguensis, Ad diem Junii hora post meridiem, Propugnabit COLINUS M^cLAURIN, Scotus*, Edinburgh

Maclaurin, Colin (1720a), Tractatus de curvarum constructione et mensura ; ubi plurimae series curvarum infinitae vel rectis mensurantur vel ad simpliciores curvas reducuntur, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 30(1717-1719), pp. 803-812

Maclaurin, Colin (1720b), Nova methodus universalis curvas omnes cujuscunque ordinis mechanicae describendi sola datorum angulorum et rectarum ope, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 30(1717-1719), pp. 939-945

Maclaurin, Colin (1720c), *Geometria Organica : sive Descriptio Linearum Curvarum Universalis*, for William and John Innys, Londres

Maclaurin, Colin (1722a), *Dissertatio De Ortu Geometriae, Habita in Auditorio publico Collegii novi Abredonensis*, Febr. 10. 1722., Bibliothèque de l'Université d'Aberdeen MS 34

Maclaurin, Colin (1722b), An acccount of a book, entituled, Geometria Organica, sive Descriptio Linearum Curvarum Universalis. Auctore Colino Mac Laurin, Matheseos in Collegio Novo Abredonensi Professore, et R.S.S., *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 31(1720-1721), pp. 38-42

Maclaurin, Colin (1724a), An account of a monstrous double birth in Lorraine. communicated to the publisher by Mr. Colin Mac Laurin, prof. math. Abredon. R.S.S., *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 32(1722-1723), pp. 346-348

Maclaurin, Colin (1724b), *Démonstration des Loix du choc des corps, Piece qui a remporté le Prix de l'Académie Royale des Sciences, Proposé pour l'année mil sept cens vingt-quatre …*, Jombert, Paris

Maclaurin, Colin (1728), A letter from Mr. Colin Mac Laurin, Professor of Mathematics at Edinburgh, and F.R.S. to Martin Folkes, Esq. V. Pr. R.S. concerning Æquations with impossible Roots, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 34(1726-1727), pp. 104-112

Maclaurin, Colin (1730a), A second letter from Mr. Colin Mc Laurin, Professor of Mathematics in the University of Edinburgh and F.R.S. to Martin Folkes, Esq ; concerning the Roots of Equations, with the Demonstration of other rules in Algebra ; being the Continuation of the letter published in the Philosophical Transactions, n° 394, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 36(1729-1730), pp. 59-96

Maclaurin, Colin (1730b), *A Defence of the Letter Published in the Philosophical Transactions for March and April 1729. Concerning the Impossible Roots of Equations ; in a Letter from the Author, to a Friend at London*, Edimbourg, in Mills (1982), pp. 222-241

Maclaurin, Colin (1737a), A letter from Mr. Colin Mac Laurin, Math. Prof. Edinburgh. F.R.S. to John Machin, Astr. Prof. Gresh. and Secr. R.S. concerning the description of curves lines, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 39(1735-1736), pp. 143-148

Maclaurin, Colin (1737b), An abstract of what has been printed since the year 1721, as a supplement to a treatise concerning the description of curves lines published in 1719, and of what the Author proposes to add to that Supplement, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 39(1735-1736), pp. 148-165

Maclaurin, Colin (1739), An observation of the eclipse of the sun, on feb. 18. 1737. Made at Edinburgh, by Colin Mac Laurin, Professor of Mathematics in that University, and F.R.S. in a letter to Martin Folkes, Esq, V.P.R.S., *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 40(1738-1739), pp.177-195

Maclaurin, Colin (1741), De causa physica fluxus et refluxus Marix in Philosophia Naturalis Principia Mathematica. Newton, *Pieces qui ont remporté le Prix de l'Académie Royale des Sciences, en MDDCXL Sur le Flux et le Reflux de la Mer …*, Paris

Maclaurin, Colin (1742a), *Treatise of Fluxions in two books*, Édimbourg

Maclaurin, Colin (1742b), Of the cause of the variation of the obliquity of the ecliptic, *Medical Essays and Observations edited by A society of Edinburgh*, vol. 5, part. 1, Ruddimans, Édimbourg, pp. 173-183

Maclaurin, Colin (1742c), Concerning the sudden and surprising Changes observed in the Surface of Jupiter's Body; by the same, Medical Essays and Observations edited by A society of Edinburgh, vol. 5, part. 1, Ruddimans, Édimbourg, pp. 184-188

Maclaurin, Colin (1744a), A rule for finding the meridional parts to any spheroid, with the same exactness as in a sphere, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 41(1739-1741), pp. 808-809

Maclaurin, Colin (1744b), An account of a book intituled, A treatise of fluxions in two books, by Colin Mc Laurin, A.M. Professor of Mathematics in the University of Edinburgh, and Fellow of the Royal Society, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 42(1742-1743), pp. 325-363

Maclaurin, Colin (1744c), The continuation of an account of a Treatise of Fluxions, etc. Book II, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 42(1742-1743), pp. 403-415

Maclaurin, Colin (1744d), On the bases of the cells wherein the bees desposite their Honey. Part of a letter from Mr. Mac Laurin, Professor of Mathematics at Edinburgh, and F.R.S. to Martin Folkes, Esq, Pr. R.S., *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 42(1742-1743), pp.565-571

Maclaurin, Colin (1744e), The measure of the forces of bodies in motion, in Desaguliers, (1744), pp. 65-76

Maclaurin, Colin (1745), *A Treatise of Practical Geometry*, basé sur le cours (en latin) de David Gregory

Maclaurin, Colin (1748a), *An Account of Sir Isaac Newton's philosophical discoveries in four books*, Millar & Nourse, Londres

Maclaurin, Colin (1748b), *A Treatise of Algebra in three Parts. Containing I. The Fundamental Rules and Operations II. The composition and Resolution of Equations of all Degrees ; and the different Affections of their Roots III. The Application of Algebra and Geometry to each other. To which added an Appendix, Concerning the General Properties of Geometrical Lines*, Millar & Nourse, Londres

Maclaurin, Colin (1749a), *Exposition des découvertes philosophiques de M. le Chevalier Newton*, trad. Lavirotte, Paris

Maclaurin, Colin (1749b), *Traité des Fluxions*, trad. P. Pézénas, Jombert, Paris

Maclaurin, Colin (1751), La mesure des forces des corps en mouvement, in Desaguliers, (1751), pp. 71-83.

Maclaurin, Colin (1753), *Le Traité d'Algèbre : et de la manière de l'appliquer*, trad. Le Cozic, Jombert, Paris

Maclaurin, Colin (1754a), Of the Cause of the Variation of the Obliquity of the Ecliptic, *Essays and Observations Physical and Literacy*, vol. 1, pp. 173-83

Maclaurin, Colin (1754b), Concerning the sudden and surprising Changes observed in the surface of Jupiter's Boby, *Essays and Observations Physical and Literacy*, vol. 1, pp. 184-8

Maclaurin, Colin (1779), De Linearum Geometricarum Proprietatibus Generalibus Tractatus, Treatise of Algebra, pp. 435-504, trad. Anglaise de l'appendice de Maclaurin (1748b)

Maclaurin, Colin (1804), From Prof. Maclaurin to his friend Dr. Johnston, …, *Scots Magazine*, pp. 421-422 in Mills (1982), pp. 72-74

Autres Sources Primaires

Barrow, Isaac (1705), *Euclid's Elements*, Redmayne, Londres

Berkeley, George (1734), *The Analyst ; or a Discourse addressed to an Infidel Mathematician…* , Londres, J. Tonson

Berkeley, George (1987), *Œuvres*, PUF, Paris

Bernoulli, Jean (1706), Solutio Problematis, A Clariss. Viro D. Jo. Bernouilli in Diario Gallico Febr. 1403. Propositi, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 24(1704-1705), pp. 1527-1529

Bernoulli, Jean (1714), *Essay d'une nouvelle théorie de la manœuvre des vaisseaux,…*, Bâle

Bernoulli, Jean (1727), *Discours sur les lois de la communication du mouvement*, Paris

Blair, Patrick (1720), An Account of the Dissection of a child, communicated in a letter to Dr. Brook Taylor, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 30(1717-1719), pp. 631-701

Braikenridge, William (1733), *Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum*, Londres

Braikenridge, William (1738), A general Method of describing Curves, by the Intersection of Right-Lines ; moving about Points in a given Plane. In a Letter to Dr Hoadly, by the Rev. Mr. Braikenridge, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 39(1735-1736), pp. 25-36.

Campbell, George (1729a), A Method for determining the Number of impossible Roots in adfected Aequations, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 35(1727-1728), pp. 515-31.

Campbell, George (1729b), *Remarks on A Paper published by Mr. MacLaurin in the Philosophical Transactions for the Month of May, 1729*, Edimbourg

Carnot, Lazare (1797), *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal*, Paris, réimpr. Blanchard, 1970

Carré, Louis (1700), *Méthode pour la mesure des surfaces…*, Paris, 1700

Chasles, Michel (1837), *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie…*, Hayes, Bruxelles

Cotes, Roger (1720), *Logometria*, trad. anglaise *in* Gowing (1983), pp. 143-185

Craig(e), John (1699), *Theologiae Christianae Principia Mathematica*, Londres

Cramer, Gabriel (1750), *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, les frères Cramer et C. Philibert, Genève, 1750

De Gua, Jean-Paul (1740), *Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir, sans le secours du calcul différentiel, les propriétés des lignes géométriques de tous les ordres*, Briasson, Paris

De La Hire, Philippe (1673), *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques…*, Moette, Paris

De La Hire, Philippe (1708), Sur les Conchoïdes en général, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 1708, pp. 32-60

De Moivre, Abraham (1699), A Method for extracting the root of an Infinite Equation, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 20(1698), pp. 190-193

De Moivre, Abraham (1704), Methodis quadrandi genera quaedam Curvarum, aut ad Curvas Simpliciores reducendi, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 23(1702-1703), pp. 1113-1127

De Moivre, Abraham (1717), A ready Description and quadrature of a curve of the third Order, resembling that commonly call'd the Foliate, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 29(1714-1716), pp. 329-331

Desaguliers, John (1744), *A course of experimental philosophy*, Printed for Innys, Senex, Longman, Londres, 2 vol.

Desaguliers, John (1751), Cours de Physique Expérimentale, trad. franç. Pezenas, Jombert, Paris,

Euclide (1993), *Les Eléments*, trad. Peyrard, Blanchard, Paris

Galilée (1995), *Discours concernant deux sciences nouvelles*, PUF Epiméthée, Paris

Girard, Albert (1629), *Invention Nouvelle en l'Algèbre*, Amsterdam

Gravesande, G (1774), *Œuvres philosophiques et mathématiques de Mr G. J. 'sGravesande…*, Marc Rey, Amsterdam

Gregory, David (1700), Responso ad Animadversionem ad Davidis Gregorii Catenariant, Act Eruditorum Lipsiae. Mense Februarii An. 1699, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 21(1699), pp.419-426

Halley, Edmund (1694), An Estimate of the Degrees of the Mortality of Malkung, drawn from curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw; with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives. By Mr. E. Halley, R.S.S., *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 17(1693), pp. 596-610.

Hutcheson, Francis (1725), *An Inquiry into the Original of our Ideas of Beauty and Virtue : in two Treatises*, trad. Française de Balmès, Paris, Vrin, 1991

Hospital, Guillaume (de l') (1696*), Analyse des Infiniment Petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Imprimerie Royale, Paris

Jonquières (de), Ernest (1856), *Mélanges de Géométrie Pure comprenant diverses applications des Théories exposées dans le Traité de Géométrie Supérieure de M. Chasles. Au Mouvement infiniment petit d'un corps, aux sections coniques aux courbes du troisième ordre, etc. et la Traduction du Traité de Maclaurin sur les courbes du troisième ordre*, Mallet-Bachelier, Paris (Ch. V, pp. 197-261 et planches IV et V)

Jurin, James (1734), *Geometry no Friend to Infidelity; or, A Defence of Sir Isaac Newton and the British Mathematicians…*, Londres

Jurin, James (1735), *The Minute Mathematician; or the Free-Thinker no Just Thinker …*, Londres

Keill, John (1710), Epistola ad clarissimum virum Edmundum Hallieum Geometriae Professorem Savilianum, de legibus virium centripetarum*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 26 (1708-1709), pp. 174-178

Keill, John (1717), theoremata quaedam infinitam Materia Divisibilatem Spectantia, quae ejusdem raritatem & tenuem compositionem demonstrant, quorum ope plurima in Physica tolluntur difficultates, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 29(1714-1716), pp.82-111

Montucla, J. F. (1799-1802), *Histoire des Mathématiques*, Paris, rééd. Blanchard, 1968, Paris

Murdoch, Patrick (1748), An account of the Life and Writings of the Author, in Colin Maclaurin, *Account of Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries*, For the Author's Children, London, i-xx

Newton, Isaac (1687), *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Jussu Societatis Regiae, Londres

Newton, Isaac (1704), *Opticks : or, a Treatise of the reflexions, refractions, inflexions and colours of light. Also two treatises of the species and magnitude of curvilinear figures.*, Smith and Walford, Londres

Newton, Isaac (1707), *Arithmetica Universalis ; sive De Compositione et Resolutione Arithmetica Liber…*, Tooke, Londres

Newton, Isaac (1722), *Arithmetica Universalis ; sive De Compositione et Resolutione Arithmetica Liber, edition secunda, In qua multa immutantur & emendantur, nonnulla adduntur*, Tooke, Londres

Newton, Isaac (1736), *The Method of Fluxions and infinite suites*, Londres

Newton, Isaac (1740), *La Méthode des Fluxions et des Suites Infinies*, trad. Buffon, Paris

Newton, Isaac (1840), *Enumeration of Lines of the third Order, generation of curves by shadows, organic description of curves, and construction of equations by curves*, trad. Anglaise Talbot, Londres

Newton, Isaac (C), *The Correspondence of Isaac Newton*, édité par Turnbull, H, Scott, J, et Hall, R, Cambridge University Press, Cambridge, 1959-1977

Newton, Isaac (MP), *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, édité par D. T. Whiteside, Cambridge University Press, Cambridge, 1967-1981

Nicole, (1707), Méthode générale pour déterminer la nature des courbes formées par le roulement de toutes sortes de courbes sur une autre courbe quelconque, *Mémoire de l'Académie royale des sciences de Paris*, 1707 pp. 81-97.

Pemberton, H (1728), *A View of Sir Isaac Newton's Philosophy*, Londres

Poncelet, Jean-Victor (1822), *Traité des propriétés projectives des figures…*, Bachelier, Paris

Poncelet, Jean-Victor (1864), *Applications d'analyse et de géométrie, qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figures*, Gauthier-Villars, Paris

Robins, Benjamin (1735), *A Discourse Concerning the Nature and Certainty of Sir Isaac Newton's Methods of fluxions, and of Prime and ultimate Ratios*, Londres

Stirling, James (1720), Methodus Differentialis Newtoniana Illustrata, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 30(1717-1719), pp. 1050-1070

Stirling, James (1730), *Methodus Differentialis sive Tractatus de Summatione et Interpolatione serierum Infinitorum*, Londres

Stirling, James (1738), Of the figure of the Earth, and the variation of gravity on the surface, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 39(1735-1736), pp. 98-105.

Stone (1735), *Analise des infiniments petits comprenant le calcul intégral …*, trad. Rondet, Paris

Taylor, Brook (1717), An Account of a book entituled Methodus Incrementorum, Auctore Brook Taylor, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 29(1714-1716), pp.339-359

Taylor, Brook (1720), An Attempt towards the Improvement of the Method of Approximating, in the Extraction of the Roots of Equations in Number, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 30(1717-1719), pp.610-622

Walton, John (1735a), *A Vindication Of Sir Isaac Newton's Principles Of Fluxions, Against The Objections Contained In The Analyst*, Dublin

Walton, John (1735b), *The Catechism Of The Author Of The Minute Philosopher Fully Answer'd*, Dublin

Sources Secondaires :

Dictionnaires et ouvrages généraux

Dictionary of National Biography, Londres, Smith, Elder & Co, 1885-…

Chambers, Robert (éd.), (1870), *A Biographical Dictionary of Eminent Scotsmen New edition, revised throughout and continued by Thomas Thomson*, Blackie and son

Gillispie, Charles (éd.) (1970-1990), *Dictionnary of Scientific Biography*, Charles Scribner's Sons, New York

Ouvrages et articles par auteur

Allan, David (1993), *Virtue, Learning and the Scottish Enlightenment : Ideas of Scholarship in Early Modern History*, Edinburgh University Press, Édimbourg

Anderson, R.G.W, Simpson, A.D.C. (éd.), (1976), *The Early Years of the Edinburgh Medical School*, Royal Scottish Museum, Édimbourg

Arthur, Richard (1995), Newton's Fluxions and equably flowing time, *Studies in History and Philosophy of Science*, 26, 2, pp. 323-351

Barbin, Evelyne (1997), *La Révolution mathématique du 17ème siècle, méthode et invention du courbe*, Habilitation à diriger des recherches, université de Lille I, Lille

Barfoot, Michael (1991), Hume and the culture of science in the early eighteenth century, in Stewart (1991), pp. 151-190

Baron, Margaret (1969), *The Origins of Infinitesimal Calculus*, Pergamon, Oxford, réed. Dover, New York, 1987

Baum, Robert (1972), The instrumental and formalist elements of Berkeley's philosophy of mathematics, *Studies in History and Philosophy of Science*, 3, pp. 119-134

Berman, David (1986), *George Berkeley : Essay and Replies*, Irish Academic Press, Dublin

Berman, David (1996), *George Berkeley : Idealism and the Man*, Oxford University Press,

Bennet, Jonathan (1965), Berkeley and God, *Philosophy*, 40, pp. 207-221

Berry, Christopher J. (1997), *Social Theory of the Scottish Enlightenment*, Edinburgh University Press, Édimbourg

Blay, Michel (1986), Deux Moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et George Berkeley, *Revue d'Histoire des Sciences*, 39, 3, pp. 223-253

Boutier, Jean (1999), De l'Académie Royale de Lunéville à l'Academia dei nobili de Florence : milieux intellectuel et transferts culturels au début de la Régence, in Contini, (1999), pp. 327-353

Bos, Henk (1974), The Lemniscate of Bernoulli, in Cohen, R.S. (1974), *For dirk Struik*, Reidel Publishing Company, Dordrecht, pp. 3-14

Bos, Henk (1977), Calculus in the Eighteenth century, the role of applications, *Bulletin of the Institute of Mathematics and its applications*, 13, pp. 221-227

Bos, Henk (1986), Fundamental Concepts of the Leibnizian Calculus, *Studia Leibnitiana*, 14, pp. 103-118

Bos, Henk (1988), The Concept of Construction and the Representation of Curves in Seventeenth-Century Mathematics, Proceedings of the international Congress of Mathematicians, august 3-11, 1986, Berkeley, California, USA, *American Mathematical Society*, pp. 1629-1641

Bos, Henk (1998), La structure de la Géométrie de Descartes, *Revue d'Histoire des Sciences*, 51, pp. 291-317

Boyer, Carl (1939), *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover Publications

Boyer, Carl (1956), History of Analytic Geometry, *Scripta Mathematica*, New-York

Broadie, Alexander (2001), *The Scottish Enlightenment*, Birlinn, Edimboug

Brown, Callum (1997), *Religion and Society in Scotland since 1707*, Edinburgh University Press, Édimbourg

Bryden, D. J. (1990), The Edinburgh Observatory 1736-1811: A story of Failure, *Annals of Science*, 47, 5, pp. 445-474

Burnett, John (1983), Robert Simson's Euclid and the Foulis Press, *Bibliotheck*, 11, pp. 136-148

Cajori, Florian (1919), *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse*, Open Court, Chicago and London

Callinger, Ronald (1992a), *Vita Mathematica : Historical Research and integration with Teaching*, The Mathematical Association of America

Callinger, Ronald (1992b), The Mathematics Seminar at the University of Berlin : Origins, Founding, and the Kummer-Weierstrass Years, in Callinger (1992), pp. 153-176

Cameron, James (1967), The Church of Scotland in the age of reason, *Studies on Voltaire and the Eighteenth Century*, 58, pp. 1939-1951

Cameron, James (1982), Theological Controversy : A Factor in the Origins of the Scottish Enlightenment, in Campbell, Skinner (1982), pp. 116-130

Camic, Charles (1982), The Enlightenment and its environment : a cautionary Tale, *Knowledge and Society : Studies in the Sociology of Culture Past and Present*, 4, pp. 143-172

Campbell, Roy, Skinner, Andrew (éd.) (1982), *The Origins and Nature of the Scottish Enlightenment*, Edinburgh, John Donald Publishers

Campbell, T. D. (1982), Francis Hutcheson : 'Father' of the Scottish Enlightenment, in Campbell, Skinner (1982), pp. 167-185

Cant, Ronald G. (1967), The Scottish Universities and Scottish Society in the Eighteenth century, *Studies on Voltaire and the Eighteenth Century*, 58, pp. 1953-1966

Cant, Ronald G. (1982), Origins in the enlightenment in Scotland : the Universities, in Campbell, Skinner (1982), pp. 42-64

Cantor, George (1984), Berkeley's The Analyst Revisited, *ISIS*, 75, pp. 668-683

Cassirer, Ernst (1966), La *Philosophie des Lumières*, trad. Pierre Quillet, Fayard, Paris

Chitnis, Anand C. (1976), *The Scottish Enlightenment*, Rowman and Littlefield, Totowa, New Jersey

Christie, John (1974), The Origins and Development of the Scottish Scientific Community, 1680-1760, *History of Science*, 12, pp. 122-141

Christie, John (1975), The Rise and Fall of Scottish Science, in Crosland (1975), pp. 111-126

Christie, John (1987), The Culture of Science in Eighteenth-Century Scotland, in Craig (1987), vol. 2, pp. 291-305

Civardi, Christian (1998), *L'Ecosse depuis 1528*, Ophrys, Paris

Clero, Jean-Pierre, Le Rest, Evelyne (1981), La naissance du calcul infinitésimal au XVIIIème siècle, *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, 16, CNRS, Paris

Contini, Alessandra, Grazia Parri, Maria (éds) (1999), *Il Granducato di Toscana e i Lorena nel secole XVIII*, Leo Olschki, Florence

Costabel, Pierre (1983), La signification d'un débat de plus de 30 ans (1728-1758) : la question des forces vives, *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, vol. 8, Paris

Craig, Cairns (1987), *The History of Scottish Literature*, Aberdeen University Press, Aberdeen,

Crosland, Maurice (éd.) (1975), *The Emergence of Science in Western Europe*, The Macmillan Press, Londres

Davie, George (1961), *The Democratic Intellect : Scotland and her Universities in 19th Century*, Édimbourg

Davie, George (1965), Berkeley's Impact on Scottish Philosophers, *Philosophy*, 40, pp. 222-234

Dear, Peter (1998), The Mathematical principles of natural philosophy: toward a heuristic narrative for the Scientific Revolution, *Configurations*, 6, pp. 173-193

De Gandt, François (1992), Newton : La justification des infiniment Petits et l'intuition du mouvement, in Monnoyeur (1992), pp. 147-157

De Gandt, François (1995a), *Force and geometry in Newton's Principia*, Princeton University Press, Princeton

De Gandt, François (1995b), La réception de Newton: Philosophes et géomètres, *Revue du Nord: Histoire & Archéologie*, 77, pp. 845-857.

Devine, T. M. (1982), The Scottish Merchants Community, 1680-1740, in Campbell, Skinner, (1982), pp. 26-41

Drummond, Andrew, Bulloch, James (1973), *The Scottish Church 1680-1843*, The Saint Andrew Press, Édimbourg

Duchein, Michel (1998), *Histoire de l'Ecosse*, Fayard, Paris

Dunlop, Ian (éd.) (1992), *The Scottish Ministers' Widows' Fund, 1743-1993*, Saint Andrew Press, Édimbourg

Eagles, Christina (1977), David Gregory and Newtonian Science, *The British Journal for the History of Science*, vol. 10, n° 36, pp. 216-225

Emerson, Roger (1977), Scottish universities in the eighteenth century, 1690-1800, *Studies on Voltaire and the Eighteenth Century*, 167, pp. 453-474

Emerson, Roger (1979), The Philosophical Society of Edinburgh, 1737-1747, *British Journal for the History of Science*, 12, pp. 154-191

Emerson, Roger (1981), The Philosophical Society of Edinburgh, 1748-1768, *British Journal for the History of Science*, 14, pp. 133-176

Emerson, Roger (1985), The Philosophical Society of Edinburgh, 1768-1783, *British Journal for the History of Science*, 18, pp. 255-303

Emerson, Roger (1986), Natural Philosophy and the problem of the Scottish Enlightenment, *Studies on Voltaire and the Eighteenth-Century*, n°242, pp. 243-291

Emerson, Roger (1988a), Science and the Origins and Concerns of the Scottish Enlightenment, *History of Science*, Vol. 26 (1988), 333-66

Emerson, Roger (1988b), Sir Robert Sibbald, Kt, the Royal society of Scotland and the Origins of the Scottish Enlightenment, *Annals of Science*, 45, pp. 41-72

Emerson, Roger (1991), Science and moral philosophy in the Scottish Enlightenment, in Stewart (1991), pp. 11-36

Emerson, Roger (1992), *Professors, patronage and politics: the Aberdeen universities in the eighteenth Century*, Aberdeen, Aberdeen University Press

Emerson, Roger (2002), The Scientific Interest of Archibald Campbell, 1st Earl of Ilay and 3rd Duke of Argyll (1682-1761), *Annals of Science*, 59, pp. 21-56

Emerson, Roger (2004), The founding of the Edinburgh Medical School, *Journal of the History of Medecine and allied Sciences*, 59, 2, pp. 183-218

Faure, Michel (1986), Le Scottish Enlightenment : Naissance d'une Anthropologie Sociale, *Revue de synthèse*, IV$^{\text{ème}}$ série, 4, pp. 411-425

Feigenbaum, Lenore (1985), Brook Taylor and the Method of Increments, *Archive for History of Exact Sciences*, 34, pp. 1-140

Ferraro, Giovanni (1998), Some aspects of Euler's theory of series : inexplicable functions and the Euler-Maclaurin summation formula, *Historia Mathematica*, 25, pp. 290-317

Ferraro, Giovanni, Panza, Marco (2003), Developping into series and returning from series : A note on the Foundations of eighteenth-century analysis, *Historia Mathematica*, 30, pp. 17-46

Forbes, Duncan (1982), Natural Law and the Scottish Enlightenment, in Campbell, Skinner, (1982), pp. 186-204

Fraser, Craig (1985), J.L. Lagrange's changing approach to the foundations of the calculus of variations, *Archive for History of Exact Sciences*, 32, 2, pp. 151-191

Fraser, Craig (1987), Joseph Louis Lagrange's algebraic vision of the calculus, *Historia Mathematica*, 14, pp. 38-53

Fraser, Craig (1989), The Calculus as Algebraic Analysis : some observations on mathematical analysis in the 18$^{\text{th}}$ century, *Archive for History of Exact Sciences*, 39, 4, pp. 317-335

Fraser, Craig (1990), Lagrange's analytical mathematics, its Cartesian origins and reception in Comte's philosophy, *Studies in the History and Philosophy of Science*, 21, 2, pp. 243-256

Fraser, Craig (1992), Isoperimetric problems in the variational calculus of Euler and Lagrange, *Historia Mathematica*, 19, pp. 4-23

Fraser, Craig (1994), The origins of Euler's variational calculus, *Archive for History of Exact Sciences*, 47, 2, pp. 103-141

Gardies, Jean-Louis (1991), *Le Raisonnement par l'Absurde*, PUF, Paris

Gilain, Christian (1991), Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre : Théorie des équations et calcul intégral, *Archive for History of Exact Science*, 42, pp. 91-136

Gilain, Christian (2002), D'Alembert et l'intégration des expressions différentielles à une variable, in Paty, Michel, Michel, Alain (dir.) (2002), pp. 207-235

Giorello, Giulio (1992), The "Fine Structure" of Mathematical Revolution: Metaphysics, Legitimacy and Rigour, The Case of he Calculus from Newton to Berkeley and Maclaurin, in Gillies (1992), pp 134-168

Gillies, Ronald (1992), *Revolutions in Mathematics*, Oxford University Press, Oxford

Goldie, Mark (1991), Common sense philosophy and catholic theology in the Scottish Enlightenment, *Studies on Voltaire and the Eighteenth-Century*, n°302, pp. 281-320

Gowing, R (1983), *Roger Cotes – natural philosopher*, Cambridge University Press

Grabiner, Judith (1996a), A mathematician among molasses barrels :Maclaurin's unpublished memoir on Volumes, Introduction : Maclaurin's memoir and its place in 18th century Scotland, *Proceeding of Edinburgh Mathematical Society*, (2) 39 (2), pp. 193-240

Grabiner, Judith (1996b), The calculus as algebra, the calculus as geometry : Lagrange, Maclaurin and their legacy, *Vita Mathematica*, Washington D.C., pp. 131-144

Grabiner, Judith (1997), Was Newton's calculus a dead end? The continental influence of Maclaurin's Treatise of Fluxions, *American Mathematical Monthly*, 104 (5), pp. 393-410

Grabiner, Judith (1998), Some disputes of consequences : Maclaurin among molasses barrels, *Social Studies of Science*, 28, 1, pp. 139-168

Grabiner, Judith (2002), Maclaurin and Newton : The Newtonian style and the authority of mathematics, in Whithers, Charles, Wood, Paul (2002), pp. 143-171.

Grabiner, Judith (2004), Newton, Maclaurin, and the Authority of Mathematics, *American Mathematical Monthly*, 111 (10), pp. 841-852

Graham, H. G. (1899), *The Social Life of Scotland in the 18th Century*, Édimbourg, 2 vol.

Grattan-Guinness, Ivor (1969), Berkeley's criticism of the Calculus as a study in the theory of limits, *Janus*, 56, pp. 215-227

Greenberg, John (1995), The *Problem of the Earth's Shape from Newton to Clairaut*, Cambridge University Press, Cambridge

Guicciardini, Niccoló (1984), Una riposta a Berkeley: Colin Maclaurin e i fondamenti del calcolo flussionale, *Epistemologia*, VII, pp 201-224

Guicciardini, Niccoló (1989), *The Development of Newtonian Calculus in Britain 1700-1800*, Cambridge University Press, Cambridge

Guicciardini, Niccoló (1998), Did Newton use his calculus in the Principia ?, *Centaurus*, 46, pp. 303-344

Guicciardini, Niccoló (1999), *Reading The Principia : The Debate on Newton's Mathematical Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736*, Cambridge

Haakonssen, Knud (1991), Natural law and moral realism : The Scottish synthesis, in Stewart, (1991), pp. 61-86

Hall, Graham (1998), *Colin Maclaurin, 1698-1746*, Aberdeen Department of mathematical sciences, University of Aberdeen

Hall, Rupert (1992), *Isaac Newton : Adventurer in thought*, Blackwell, Oxford

Harman, Peter (1988), Dynamics and intelligibility: Bernoulli and Maclaurin, in Woolhouse (1988), pp. 213-225

Hébert, Robert F. (1987), In Search of Economic Order : Economic Predecessors of Adam Smith, in Lowry (1987), pp. 185-220

Hunter, Michael (1981), *Science and Society in Restoration England*, Cambridge University Press, Cambridge

Hurlbutt, Robert III (1965), *Hume, Newton, and the Design Argument*, University of Nebraska Press, Lincoln.

Jacob, James (1977), *Robert Boyle and the English Revolution: A Study in Social and Intellectual Change*, Burt Franklin, New York

Jesseph, Douglas (1989), Philosophical theory and mathematical practice in seventeenth century, *Studies in History and Philosophy of Science*, 20, n°2, pp. 215-244

Jesseph, Douglas (1993a), *Berkeley's Philosophy of Mathematics*, University of Chicago Press, Chicago

Jesseph, Douglas (1993b), Hobbes and Mathematical Method, *Perspectives on Science*, 1, pp 306-341

Jesseph, Douglas (1998), Leibniz on the Foundation of the Calculus: The Question of the Reality of Infinitesimal Magnitudes, *Perspectives on Sciences*, 6, 1 et 2, pp. 6-40

Jones, Peter (éd.) (1988), *Philosophy and Science in the Scottish Enlightenment*, John Donald, Édimbourg

Lamandé, Pierre (1993), Trois Traités français de géométrie à l'orée du XIXème siècle: Legendre, Peyrard et Lacroix, *Physis*, Vol. XXX Nuova Serie Fasc. 2-3, pp. 243-302.

Landsman, Ned (1989), Evangelists and Their Hearers : Popular Interpretation of Revivalist Preaching in Eighteenth-Century Scotland, *Journal of British Studies*, 28 (avril 1989), pp. 120-149

Lenman, Bruce (1981), *Integration and Enlightenment, 1746-1832*, Édimbourg

Licoppe, Christian (1996), *La Formation de la Pratique scientifique : Le discours de l'expérience en France et en Angleterre (1630-1820)*, La Découverte, Paris

Loria, Gino (1902), *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte*, Teubner, Leipzig

Lowry, S. Todd (1987), *Pre-Classical Economic Thought : From Greeks to the Scottish Enlightenment*, Kluwer Academic Publishers, Boston

Mackie, J. D. (1964), *A History of Scotland*, Londres

Malet, Antoni (1996), *From Indivisibles to Infinitesimals: Studies on Seventeenth-century Mathematizations of Infinitely Small Quantities*, Barcelone

McClellan, James III (1985), *Science Reorganized : Scientific societies in the Eighteenth Century*, Columbia University Press, New York

Meli, Bertoloni (1993), *Equivalence and Priority : Newton versus Leibniz*, Oxford

Melton, James Van Horn (2001), *The Rise of the Public in Enlightenment Europe*, Cambridge University Press, Cambridge

Mills, Stella (1982), *The Collected Letters of Colin Maclaurin*, Nantwich

Mills, Stella (1983), The controversy between Colin Maclaurin and George Campbell over complex roots 1728-1729, *Archive for History of Exact Sciences*, 28, 2, pp. 149-164

Mills, Stella (1984), Notes on the Braikenridge-Maclaurin Theorem, *Notes and Records of the Royal Society of London*, 38, pp. 235-240

Mills, Stella (1985), The independent derivations by Leonhard Euler and Colin Maclaurin of the Euler-Maclaurin summation formula, *Archive for History of Exact Sciences*, 33, 1-3, pp. 1-13

Monnoyeur, Françoise (éd.) (1992), *Infini des Mathématiciens, Infini des Philosophes*, Belin, Paris

Mooney, John (1994), Colin Maclaurin and Glendaruel, *The Mathematical Intelligencer*, 16, 1, pp.48-49

Moore, Peter (1988), Natural Law and the Pyrrhonian Contreversy, in Jones (1988), pp. 20-38

Moore, Peter (1991), The two systems of Francis Hutcheson : On the origins of the Scottish Enlightenment, in Stewart (1991), pp- 37-60

Morère, Pierre (éd.) (1997), *Ecosse des Lumières : le XVIIIème siècle autrement*, ELLUG, Grenoble

Morell, Jack (1971), The University of Edinburgh in the Late Eighteenth Century : Its Scientific Eminence and Academic Structure, *ISIS*, 62, pp.158-171

Morell, Jack (1974), Reflections on the History of Scottish Science, *History of Science*, 12, pp. 81-94

Morell, Jack (1976), The Edinburgh Town Council and its University, in Anderson, Simpson, (1976), pp. 46-65

Morell, Jack (1997), *Science, Culture and Politics in Britain, 1750-1870*, Aldershot, Variorum

Nash, Richard (1991), *John Craige's Mathematical principles of Christian theology*, Journal of the History of philosophy monograph series, Southern Illinois University Press, Carbondale

Panza, Marco (1986), *La statua di Fidia*, Unicopli, Milan

Panza, Marco (1992), La forma della Quantità - La forme de la quantité, *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, vol. 38 et 39, Belin, Paris

Panza, Marco (2003), *Newton*, Les Belles Lettres, Paris

Panza, Marco, Ferraro, Giovanni (2003), Developing into series and returning from series : A note on the Foundations of eighteenth-century analysis, *Historia Mathematica*, 30, pp. 17-46

Papineau, David (1977), The Vis Viva contreversy : Do meanings matter, *Studies in History and Philosophy of Science*, 8, pp. 111-142.

Paty, Michel, Michel, Alain (Dir.) (2002), *Analyse et Dynamique : Etudes sur l'œuvre de D'Alembert*, Presses de l'université de Laval, Laval

Pedersen, Olaf (1963), The « Philomaths » of 18th century England, *Centaurus*, 8, pp. 238-262

Pelletier, Monique (2002), *Les Cartes des Cassini : la science au service de l'État et des régions*, Paris

Phillipson, N. T., Mitchison, R., (éds.) (1994), *Scotland and the Age of Improvement*, Édimbourg

Pousseur, Jean-Marie (1988), *Bacon*, 1561-1626, Belin, Paris

Pycior, Helena (1987), Mathematics and Philosophy : Wallis, Hobbes, Barrow and Berkeley, *Journal of Ideas*, 48, pp 265-86

Pycior, Helena (1997), *Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements : British Algebra through the Commentaries on Newton's Universal Arithmetick*, Cambridge, Cambridge University Press

Raynor, David R. (1991), Hume and Berkeley's Three dialogues, in Stewart (1991), pp. 231-250

Rivers, Isabelle (éd.) (1982), *Books and their Readers in Eighteenth-Century England*, Leicester University Press

Sageng, Erik (1989), *Colin Maclaurin and the Foundations of the Method of Fluxions*, Thèse de philosophie, Princeton University

Schaffer, Simon (1983), Natural Philosophy and Public Spectacle in the Eighteenth Century, *History of Science*, 21, pp. 1-43

Scott, J. F. (1973), Maclaurin, *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 8, 609-612

Shapin, Steven (1974a), Property, Patronage and the Politics of Science: The founding of the Royal Society of Edinburgh, *The British Journal for the History of Science*, 7, pp. 1-41

Shapin, Steven (1974b), The Audience for Science in Eighteenth-Century Edinburgh, *History of Science*, 12, pp. 95-121

Shapin, Steven (1998), *La Révolution Scientifique*, Flammarion, Paris

Shepherd, Christine (1982), Newtonianism in Scottish Universities in seventeenth century, in Campbell, Skinner, (1982), pp. 65-85

Shepherd, Christine (1992), A National System of University Education in Seventeenth-Century Scotland?, in Withrington, Carter, (éd.) (1992), pp. 26-33

Sher, Richard B. (1985), *Church and University in the Scottish Enlightenment : The Moderate Literati of Edinburgh*, Edinburgh University Press, Édimbourg

Sher, Richard B. (1991), Professors of virtue : The social history of Edinburgh moral philosophy chair in the eighteenth century, in Stewart, (1991), pp. 87-126

Sher, Richard B. (2000), Science and Medecine in the Scottish Enlightenment: The Lessons of Book History, in Wood (2000), pp.99-156

Sherry, David (1991), The Logic of Impossible Quantities, *Studies in History and Philosophy of Science*, 202, pp. 37-62

Sneddon, Ian (1975), Robert Simson, *DSB*, vol. XII, pp. 445-447.

Sorrenson, Richard (1999), George Graham, visible technician, *British Journal for History of Science*, 32, pp. 203-221

Souffrin, Pierre (1980), Trois études sur l'œuvre d'Archimède, *Cahier d'Histoire et de Philosophie des sciences*, 14, Paris

Stewart, Larry (1992), *The Rise of Public Science : rhetoric, technology, and natural philosophy in Newtonian Britain*, Cambridge University Press, Cambridge

Stewart, M. A. (1985), Berkeley and the Rankenian Club, *Hermatheus*, pp. 25-45

Stewart, M. A. (éd.) (1991), *Studies in the Philosophy of the Scottish Enlightenment*, Oxford, Clarendon Press

Sturdy, David (1995), *Science and Social Status: The members of the Académie des Sciences, 1666-1750*, The Boydell Press, Woodbridge

Sutherland, Stewart (1982), The Presbyterian Inheritance of Hume and Reid, in Campbell, Skinner, (1982), pp. 131-149

Tadié, Alexis (2000), *Locke*, Les Belles Lettres, Paris

Taton, René (1955), L'« Essay pour les Coniques » de Pascal, *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications*, vol. 8, n°1, pp. 1-18

Teixeira, Gomes (1911), Note on the Researches of Maclaurin on Circular Cubics, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. 30, pp. 89-96

Thomson, Herbert F. (1987), The Scottish Enlightenment and Political Economy, in Lowry (1987), pp. 221-263

Todhunter, I (1873), *A History of Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth from the time of Newton to that of Laplace*, MacMillan & Co, Londres

Trevor-Roper, Hugh (1967), The Scottish Enlightenment, *Studies on Voltaire and the Eighteenth Century*, 58, pp. 1635-1658

Turnbull, Herbet (1947), Colin Maclaurin, *American Mathematical Monthly*, 54, pp. 318-322

Turnbull, Herbert (1951), *Bi-centenary of the Death of Colin Maclaurin (1698-1746)*, Aberdeen, Aberdeen University Press

Tweedie, Charles (1915) A study of the life and writings of Colin Maclaurin, *The Mathematical Gazette*, 8, pp. 132-151

Tweedie, Charles (1916), The "Geometria Organica" of Colin Maclaurin : a historical and critical Survey, *Royal Society of Edinburgh : Proceedings*, 36, 1, pp. 87-150

Tweedie, Charles (1917) A supplement of A study of the life and writings of Colin Maclaurin, *The Mathematical Gazette*, 9, pp. 303-306

Tweedie, Charles (1922), *James Stirling: A sketch of his life and works along with his scientific correspondence*, Oxford, Clarendon Press

Tweddle, Ian (1991a), Some results on conic sections in the correspondence between Colin Maclaurin and Robert Simson, *Archive for History of Exact Sciences*, 41, 4, pp.285-309

Tweddle, Ian (1991b), John Machin and Robert Simson on Inverse-tangent Series for π, *Archive for History of Exact Sciences*, 42, 1, pp. 1-14

Tweddle, Ian (1998), The prickly Genius : Colin Maclaurin (1698-1746), *The Mathematical Gazette*, 82, 495, pp. 373-378

Wallis, Peter (1973), British Philomaths mid-eighteenth Century and earlier, *Centaurus*, 17, pp. 301-314

Wallis, Peter (1982), The MacLaurin 'Circle' : The Evidence of Subscription Lists, *Bibliotheck : Scottish Journal of Bibliography and allied Topics*, 11, pp. 38-54

Wallis, Peter, Wallis, Ruth (1986), *Bio-bibliography of British Mathematics and its Application, Part II, 1701-1760*, PHIBB, Newcastle Upon Tyne, Epsilon Press

Wallis, Peter, Wallis, Ruth (1993), *Index of British Mathematicians Part III, 1701-1800*, PHIBB, Newcastle upon Tyne

Weeks, Dennis (1991), The Life and Mathematics of George Campbell, F.R.S., *Historia Mathematica*, 18, pp. 328-343

Westfall, Richard (1994), *Newton : 1642-1727*, trad. Marie-Anne Lescourret, Flammarion, Paris

Withers, Charles (2000), Toward a Historical Geography of Enlightenment in Scotland, in Wood (2000), pp. 63-97

Withers, Charles (2001), *Geography, Science and National Identity: Scotland since 1520*, Cambridge University Press, Cambridge

Withers, Charles, Wood, Paul (éd.) (2002), *Science and Medecine in the Scottish Enlightenment*, Tuckwell Press, East Linton

Withrington, Donald, Carter, Jennifer (éd.) (1992), *Scottish Universities: Distinctiveness and Diversity*, John Donald Publisher, Édimbourg

Withrington, Donald (1996), Education and Society in the Eighteenth Century, in Phillipson, Mitchison (1996), pp. 169-199

Wood, Paul (1988), Science and the Aberdeen Enlightenment, in Jones (1988), pp. 39-66

Wood, Paul (1991), Science and the pursuit of virtue in the Aberdeen Enlightenment, in Stewart (1991), pp. 127-150

Wood, Paul (1993), *The Aberdeen Enlightenment : The Arts curriculum in the Eighteenth Century*, Aberdeen, Aberdeen University Press

Wood, Paul (1994), Science, the Universities and the public sphere in eighteenth-century Scotland, *History of Universities*, 13, pp. 99-135

Wood, Paul (éd.) (2000), *The Scottish Enlightenment: Essays in Reinterpretation*, University of Rocherster Press, Rochester

Woolhouse R.S. (éd.) (1988), *Metaphysics and Philosophy of Science in the Seventeenth and Eighteenth Centuries*, Kluwer Academic Publisher,

Wootton, David (1991), Hume's 'Of Miracles' : Probability and irreligion, in Stewart (1991), pp. 191-230

Wright, John P. (1991), Metaphysics and physiology : Mind, body and the animal economy in eighteenth-century Scotland, in Stewart (1991), pp. 251-301

Young, Douglas (1967), Scotland and Edinburgh in the eighteenth century, *Studies on Voltaire and the Eighteenth Century*, 58, pp. 1967-1990

Annexes

Annexe 1 : Tableau chronologique de la vie de Maclaurin, de son œuvre, et des faits marquants de l'Écosse

Repères chronologiques

1698	Février : naissance de Colin Maclaurin à Kilmoden, Argylshire, Écosse, troisième fils de John Maclaurin, pasteur de l'église d'Écosse. Avril: mort de son père. Colin et sa famille vivent avec des subsides de son oncle Daniel, pasteur lui aussi.	
1707	Mort de sa mère et départ chez son oncle.	
1709	Entrée de Maclaurin à l'université de Glasgow.	
1713		Master of Arts avec une thèse : *Dissertatio Philosophica Inauguralis, De Gravitate, aliisque viribus Naturalibus*
1714	Départ de l'université après une année de théologie. Retour chez son oncle à Kilfinan.	
1717	30 septembre: Maclaurin élu comme Professeur de mathématiques au Marischal College d'Aberdeen.	
1719	Été : voyage à Londres, il rencontre,	

	entre autres, Newton. Reçu comme membre de la Royal Society of London.	
1720		*Tractatus de curvarum constructione et mensura, PTRS*[800] *Nova methodus universalis curvas, PTRS* *Geometria Organica*
1721	Novembre: second voyage à Londres.	
1722	Mai: départ pour son "Tour de France". Employé comme tuteur de George Hume, fils de Lord Polwarth, ambassadeur du Roi au Congrès de Cambrai.	*Dissertatio De Ortu Geometriae, MS 34* *An acccount of a book, entituled, Geometria Organica, PTRS*
1724	19 septembre : Mort de George Hume. Retour de Maclaurin à Aberdeen.	*An account of a monstrous double birth in Lorraine, PTRS* *Demonstration des Loix du choc des corps, Piece qui a remporté le Prix de l'Académie Royale des Sciences, Proposé pour l'année mil sept cens vingt-quatre ..., Jombert*
1725	Janvier: arrivée à Aberdeen. 3 novembre: élection de Maclaurin à la chaire de mathématiques à l'université d'Édimbourg.	
1728	Polémique avec George Campbell (jusqu'en 1730).	*A letter (...) concerning Æquations with impossible Roots, PTRS* *A second letter concerning the Roots of Equations, PTRS* *A Defence of the (...) Concerning the Impossible Roots of Equations*
1733	8 juillet: mariage de Colin avec Anne,	

[800] PTRS : Philosophical Transactions of the Royal Society

	fille de Walter Stewart (contrat de mariage enregistré le 18 juillet).	
1734		Parution de *The Analyst* de George Berkeley et première réponse à cet ouvrage (non envoyée) de Maclaurin.
1735		*Memorial to the commissionners of Excise concerning the mensuration of tuuns or backs*
1736-1737	Polémique avec William Braikenridge.	
1737		*A letter concerning the description of curves lines, PTRS* *An abstract (...) as a supplement to a treatise concerning the description of curves lines published in 1719, PTRS*
1739		*An observation of the eclipse of the sun, PTRS*
1741		*De causa physica fluxus et refluxus*, *Pieces qui ont remporté le Prix de l'Académie Royale des Sciences, en MDCCXL Sur le Flux et le Reflux de la Mer ...*
1742		*Treatise of Fluxions in two books*
1743		*Scheme for Providing an Annuity to Minister's Widows and a Stock for their Children*
1744		*A rule for finding the meridional parts to any spheroid, PTRS* *An account of A treatise of fluxions, PTRS* *The continuation of an account of a Treatise of Fluxions, PTRS* *On the bases of the cells wherein the bees desposite their Honey, PTRS* *The measure of the forces of bodies in motion, in Desaguliers, (1744), A*

		course of experimental philosophy
1745	Implication de Maclaurin dans la défense d'Édimbourg face à la montée jacobite. Après la défaite, fuite de Maclaurin à York, recueilli par l'Archevêque. Retour à Édimbourg le 16 novembre.	*A Treatise of Pratical Geometry*
1746	Maclaurin tombe malade et meurt le 14 juin.	
1748		*An Account of Sir Isaac Newton's philosophical discoveries in four books* *A Treatise of Algebra in three Parts*
1749		*Exposition des découvertes philosophiques de M. le Chevalier Newton*, *trad. Lavirotte* *Traité des Fluxions*, *trad. P. Pézénas*
1753		*Traité d'Algèbre, trad. Le Cozic*
1754		*Of the cause of the variation of the obliquity of the ecliptic*
1804		*From Prof. Maclaurin to his friend Dr. Johnston,…,*

Annexe 2 : Le *De gravitate*

Dissertatio Philosophica Inauguralis,

DE

Gravitate, aliisque viribus Naturalibus,

QUAM

Cum annexis Corollariis,

Favente summo Numine,

Auctoritate Dignissimi Vice-cancellarii,

Joannis Stirling, V.D.M.SS.Th. Professoris Primarii ;

NECNON

Amplissimi Senatus Academici consensu, & Celeberrimae

FACULTATIS Artium Decreto :

Pro Gradu Magisterii, summisque in Philosophia & Artibus liberalibus Privilegiis & Honoribus rite ac legitime consequendis,

In Auditorio publico Academiae Glasguensis,

Ad diem Junii hora post meridiem,

Propugnabit COLINUS M^c^ LAURIN, Scotus.

Prov. 3. 19. *Deus sapienta fundavit terram, stabilivit Coelos prudentia*.

EDINBURGI,

Apud ROBERTUM FREEBAIRN, Typographum Regium.

An. Dom. M. DCC. XIII.

Viro Reverendo,

Mro. DANIELI M^{c}LAURIN,

Ecclesiae ad Cellam Finani Pastori fidelissimo,

Patruo suo spectatissimo,

Ob affectum curamque plane parentalem,

Patris charissimi loco semper honorando,

Dissertationem hancte Philosophicam,

Studiorum suorum primitias,

In animi grati & perpetuum addicti tesseram,

D. D. C. q.

Colinus M^{c} Laurin, *Auctor.*

Dissertatio Philosophica,

De Gravitate, aliisque viribus Naturalibus.

I. INTER varia naturae corporeae phaenomena, duo sunt, quae, uti in se spectata prae caeteris fere omnibus maxime sunt insignia, ita omnis aevi Philosophos plurimum exercuerunt. Alterum est, *generalis* illa omnium corporum circa terrae superficiem versantium ad ejus centrum *Tendentia*, quae vulgo *Gravitas* appellatur ; alterum, *regularis*, certisque periodis recurrens, *Planetarum*, in orbitis suis *Gyratio*. Ad mechanicam istorum phaenomenωn explicationem, hypotheses variae a variis excogitatae sunt. Harum aequum examen viam struet ad explicandam & adstruendam generalem illam universalis *Gravitatis* legem, ad quam, tanquam commune principium, referendos constabit duos istos effectus nobilissimos ; tametsi prima specie nihil inter se commune habere videantur : unde etiam occasionem arripiemus, alias quasdam naturae vires, ad aliorum quorundam phaenomenωn solutionem, quae rationibus pariter mechanicis explicare aggressi sunt Philosophi, necessario supponendas, obiter considerandi.

II. Ut a corporum terrestrium gravitate initium fiat, primum examen meretur *Cartesii*, ejusque sectatorum sententia. Illi, inter caeteros, quos *materiae coelesti* adfingunt, stupendos effectus, gravitatem quoque derivant a perenni ejus circa terram gyratione rapidissima ; quae violentum a centro motus recedendi conatum isti materiae necessario indit, quo corpora terrestria, vim multo minorem habentia, versus terrae centrum detruduntur. Quemadmodum aqua, vel quodvis aliud fluidum, sibi injectum corpus specifice levius sursum pellit. Caeterum hoc obvio incommodo laborat haec hypothesis, quod *materiae coelesti*, (cujus nulla nobis se produnt in rerum natura vestigia) motum valde rapidum, & quidem circularem, tribuat, cujus ortum & conservationem (p. 2) mechanice explicare, res aeque magni operis ac laboris est, atque ipsius gravitatis rationem reddere. Praeterea, cum haec ipsa materia necessario sit supponenda omnis gravitatis expers, quid tandem ejus conatum centrifugum, usque adeo violentum, cohibere potest ? Non alterius fluidi circumambientis pressura ; cum necesse sit illud ab hac materia vicissim premi, motumque ei communicari ; atque cum hoc fluidum ab alio aliquo superincumbente fluido premi supponendum sit, illud etiam vicissim premet : quo pacto fiet, ut hujus materiae motus in infinitum propagatus perpetuo decrescat, & tandem in nihilum redigatur. Denique, cum haec materia suos gyros necessario perficiat in circulis AEquatori parallelis, necesse erit omnia gravia in istorum circulorum planis descendere, & proinde in lineis non versus terrae centrum tendentibus, sed ejus axi perpendicularibus ; omnino contra experientiam.

III. Alii *Gravitatem* ab *Aeris* superincumbentis *pressura* oriri asserunt ; non advertentes omnem aeris pressuram ab hac ipsa gravitate dependere : ipsa enim ejus vis elastica, sine aliqua vie laterium tendente, nullam potest diutinam pressuram efficere, utpote qua cito totus aer multo rarior redderetur, quam in machina pneumatica facile reddi potest ; in qua tamen aeris raritatem, plerisque, si non omnibus animalibus, certam perniciem adferre cernimus. Caeterum haec sententia ex eo efficacissime refutatur, quod gravitatis vis multo deprehendatur validior, ubi aeris pressura aufertur, quam ea manente : tantum igitur abest ut illa pressura sit causa gravitatis, ut contra hujus effectum in omnibus corporibus imminuat, & in aliquibus penitus tollat : tantundem enim dati cujusvis corporis gravitati detrahit, quantum aequale est gravitati massae aeris dato corpori mole aequalis ; ubi autem residuum est quantitas negativa, uti res se habet in corporibus, quae *Levis*dicuntur, corpora non descendunt sed ascendunt.

IV. Sunt qui *Gravitatem* asserunt esse *Attractionem* ejusdem generis, ac est ea, qua magnes alium magnetem aut ferrum attrahit ; & proinde, si haec mechanice explicari possit, (quod plurimi fieri posse existimant) de illa pariter esse philosophandum. Rem autem longe alite se habere, ostendet breviuscula utriusque generis virium comparatio. Terra, vi gravitatis, corpora quaelibet circumambientia trahit in lineis adjus centrum tendentibus, vel accurate, vel quam proxime ; idque viribus (ut postea patebit) in paribus a centro distantiis, quantitati materiae in singulis corporibus proportionalibus ; in diversis vero intervallis, in duplicata auctarum distantiarum ratione decrescentibus. (p. 3.) Magnes, ex adverso, non tam versus centrum, quam alterutrum polorum, attrahit ; aequidistantia corpora adeo non attrahit viribus eorum materiae quantitati proportionalibus, ut corporum aequalium alia majori, alia minori, pleraque prorsus nulla vi attrahat : decrescit denique in ratione distantiarum plusquam duplicata.

V. Alia adduci possunt argumenta non pauca, quae evertunt, tum modo propositas, tum alias omnes possibiles hypotheses, mechanicam gravitatis solutionem prae se ferentes ; dum nempe evincunt gravium descensum a nullo impulsu corporeo provenire posse. In primis, quandoquidem, ubi velocitates sunt aequales, momenta motus sunt semper ut materiae quantitates ; cumque gravia, in eadem a terrae centro distantia, pari velocitate (abstrahendo ab aeris resistentia) versus eam tendant ; patet, vires impressas esse directe ut materiae quantitates in ipsis corporibus, nulla figurae, texturae, aut molis habita ratione. Si autem gravitas ab ullo ambientis fluidi impulsu proveniret, ille impulsus vel consisteret in percussione partium fluidi, versus eandem plagam, ad quam urgetur corpus impulsum, libere motarum ; vel in pressura totius fluidi, contra impedimentum in altera parte positum validius nitentis : in priore casu, vis imprimeretur pro ratione superficiei, in posteriore, pro ratione molis corporis impulsi ; in neutro pro ratione quantitatis materiae. Praeterea omnis impulsus corpus quiescens magis urget, quam corpus in motu positum ; ita ut quo majore velocitate moveatur corpus impulsum, eo minus velocitatis incrementum ei addat corpus impellens, donec, corporis impulsi atque impellentis velocitate aequali facta, omnis cesset impulsus, ac motus acceleratio : gravitas autem (ut ex accuratissime institutis experimentis compertum est) corpori celerrime descendenti, & quiescenti, aequali tempore, aequalia addit velocitatis incrementa. Patet igitur gravitatem a nullo impulsu corporeo provenire posse.

VI. Propositioni jam probatae si duae aliae jungantur, patebit, quid de gravitatis causa sit sentiendum. Altera est, quando corpus in quiete positum e loco suo movetur, motum ipsi imprimi ab aliqua causa externa, vel corporea vel incorporea : multo magis, si corpus, versus unam plagam projectum, in plagam directe contrariam retorqueatur, novus ille & contrarius motus a causa externa procedere censendus est. Altera, nullum corpus posse movere aliud, nisi impulsu, *i.e.* corpus nullam vim exerere posse in distans, sive non agere, ubi non est. Sicubi igitur vulgo receptum & concisum loquendi modum sequentes (p. 4.) corporum alia corpora *trahentium* aut fine impulsu *repellentium* faciamus mentionem, indicare volumus istiusmodi phrasibus, non veram & proprie sic dictam motus, de quo agitur, causam, sed occasionem duntaxat, ad cujus praesentiam, secundum generalem aliquam naturae legem, vis ita movendi imprimitur, simulque terminum ad quem, vel a quo, ea vis dirigitur : quod semel monuisse sufficiat. Prior ostendit, corporum terrestrium gravitatem ab aliqua externa causa oriri ; posterior, ejus causam non esse rem quamvis corpoream, siquidem *superiore thesi* probatum est, eam non oriri ab impulsu. Quid superest igitur aliud, quam ut gravitatis causa agnoscatur efficax alicujus causae incorporae & intelligentis voluntas, secundum certam generalem legem, vim suam uniformiter exerentis. Qualis autem sit haec causa intelligens, facile patebit cuivis consideranti, hac ipsa gravitate totam orbis terrae compagem conservari ac firmari ; quae alias impetu centrifugo disrupta cito dilaberetur. Gravitas impedit, quo minus montes, maria, urbes, homines, caeteraque animalia, a tellure excussa, per vasta coelorum spatia longe dissipentur. A gravitate pendet tum hominum, tum reliquorum animantium vita & nutritio ; ita ut jure meritissimo gravitatis Auctor agnoscendus sit terrae dominus & hominum conservator.

VII. Hujusmodi etiam gravitate, Planetarum reliquorum & *Solis* partes inter se uniri, probant eorum circa axes suos rotationes, necessario producentes conatum centrifugum, partes istas cito disjecturum, ni a gravitate cohiberentur : quae quidem rotationes, in *Sole* & plerisque Planetarum observationibus innotescunt ; in *Jove* autem praecipue, non tantum per successivam macularum gyrationem, sed & per figuram sphaeroidicam, ex eadem rotatione oriundam, qui ob corporis magnitudinem & motus rapiditatem satis est sensiblis. Hanc autem partium singulorum Planetarum versus se mutuo gravitatem, in omnibus articulis cum nostra terrestri convenire, ex postea dicendis patebit.

VIII. Sed neque his cancellis continetur hujus principii efficacia ; vim enim illam, qua Planetae in orbitis suis retinentur, ejusdem plane esse generis atque illam, qua corpora terrestria versus terrae centrum detruduntur, accurata istorum effectuum collatio satis evidenter ostendet. Pridem demonstratum est, corpus, quod circa alterum ita movetur, ut radiis ad ejus centrum ductis areas describat temporibus proportionales, in orbita sua retineri per vim versus ejus alterius centrum perpetuo urgentem. Cum igitur compertum sit, rem ita se (p. 5.) habere in Planetis omnibus primariis, & Cometis respectu *Solis*, secundariis vero respectu suorum primariorum ; hinc constat, vi, qua Planetae in orbitis suis curvilineis retinentur, cum corporum terrestrium gravitate, hoc esse commune, quod versus alicujus magni corporis centrum tendant. Earum in caeteris articulis convenentia non minus evidenter probari potest.

IX. Et primo, *Lunae* vim centripetam (qua eam versus *Terrae* centrum urgeri ex modo dictis patet) eandem esse cum gravitate nostra terrestri ita evincitur. Gravitas (secundum accuratissime instituta pendulorum experimenta) corpora terrestria depellit, uno temporis minuto secundo, per pedes *Parisienses* $15\frac{1}{12}$; & proinde (cum spatia gravibus percursa sint ut quadrata temporum) minuto primo per pedes $60x60x15\frac{1}{12}$: quo eodem tempore *Luna* deprehenditur a tangente, versus *Terram* deflecti per longitudinem pedum $15\frac{1}{12}$: tantum enim esse arcus eo tempore descripti sinum versum, temporis periodici & orbitae amplitudinis collatio satis ostendit : vis igitur *Lunae* acceleratrix versus *Terrae* centrum, est ad vim corporum terrestrium acceleratricem versus idem, ut $15\frac{1}{12}$

ad $60x60x15\frac{1}{12}$, sive ut unum ad $60x60$. Atque cum *Lunae* distantia mediocris a *Terrae* centro sit corporum terrestrium circa ejus superficiem versantium distantiae ab eodem sexagecupla ; patet, corpora terrestria, atque *Lunam*, ad *Terrae* centrum urgeri viribus, quae sunt quadratis distantiarum ab eodem reciproce proportionales. Cum porro haec ipsa sit ratio virium *Lunae* centripetarum, in diversis partibus ejus orbitae, utpote Ellipticae, circa *Terram* in foco positam descriptae, patet corpora terrestria & *Lunam*, eadem vi, secundum dictam legem in diversis distantiis variata, ad *Terrae* centrum urgeri.

X. Praeterea, cum haec eadem lex, nempe ut vires centripetae sint ut quadrata distantiarum, obtineat in omnibus corporibus, sectionem quamvis conicam, circa aliud in foco posit um, describentibus ; cumque ejusmodi comperiantur esse orbitae omnium Planetarum & Cometarum (si forte *Joviales* excipias, quorum orbitae perfecte circulares, seorsum spectentur, cum qualibet vis centripetae lege conciliari possunt ;) patet eorum omnium vires centripetas ejusdem esse generis ac est ea vis qua *Luna* & corpora terrestria versus *Terrae* centrum urgentur.

XI. Haec eadem virium centripetarum lex, non minus obtinet in diversis Planetis circa idem centrale corpus revolventibus, quam in (p. 6.) eodem Planeta in diversis a corpore, versus quod tendit, distantiis : quippe demonstratum est, ubi plura corpora circa idem centrale corpus itu revolvuntur, ut quadrata temporum periodicorum sint in triplicata ratione mediocrium distantiarum, ea omnia ad istud corpus centrale viribus distantiarum quadratis ab eodem reciproce proportionalibus urgeri. Planetas autem omnes, qui circa idem centrale corpus revolvuntur, eam ipsam distantiarum & temporum rationem servare accuratissimis observationibus compertum est.

XII. Cum igitur vis acceleratrix corporum terrestrium versus *Terram*, & Planetarum simul ac Cometarum versus propria sua centralis corpora, decrescat in ratione distantiarum auctarum duplicata ; erit haec vis in diversis corporibus, versus idem centrum, in eadem ab et distantia, tendentibus aequalis ; atque adeo eorum vires motrices, sive pondera erunt materiae quantitatibus in iis proportionalia. Cum porri actioni semper aequalis sit reactio, istius corporis centralis versus illa altera tendentia eorum ponderi erit aequalis ; atque adeo materiae quantitati in iis proportionalis. Patet igitur universaliter pondera corporum esse in ratione composita ex directis rationibus quantitatum materia corporum gravitantium, & corporum in quae gravitant, & reciproce quadratorum distantiarum. Cum itaque Planetarum Cometarumque vires centripetae, & corporum terrestrium gravitas ejusdem plane generis sint, nulla est ratio cur non potemus illas aeque ac hanc, ad efficacem Auctoris sapientissimi potentissimique voluntatem uniformiter agentem, tanquam unicam causam, referendas esse.

XIII. Interim hoc phaenomenon, ut alia fere omnia, mechanice solvere aggressi sunt *Cartesiani* : quorum hypotheseωs refutatio omnem mechanicae explicationis spem debet perimere. Secundum eos, *Sol* retando circa axem suum fluidum quoddam subtile, eique innatant primarios Planetas circumfert ; qui singuli vortices quoque suos haber in quorum nonnulis Secundarii deferuntur. Sed primo, cum Planem circulos non describant, in vorticibus infinite extensis, aut vase spherico inclusis, circumferri non possunt ; si autem vorticis limites alit disponantur, Planetae tanto magis a via circulari deviabunt, quam longius a centro distant ; atque eorum omnium Aphelia in eadem coregione reperientur : cum contra Planetarum inferiorum excentrici longe major sit quam superiorum ;

Martis Venerisque aphelia pro modum opposita sint ; eorum enim distantia in principio *Virginis* fere sesquialtera eorundem distantiae in principio *Piscium*. Quae (p. 7.) observatio aliud suppeditat argumentum contra hypothesin vorticosam. Cum enim fluidi per canales inaequaliter amplos circumlati motus, in locis angustioribus citatior esse debeat ; patet, secundum hypothesin *Cartesianam*, fluidum cui *Terra* innatat (& proinde ipsam terram) duabus istis orbitis intermedium, in principio *Piscium*, quam *Virginis*, velocius ferri debere : quod observationibus plane repugnat. Adhaec si vortices sint homogenei, tempora periodica erunt ut quadrata distantiarum ; sin heterogenei sint, & partes a centro remotiores sint crassiores, ut *Cartesius* voluit, & ratio suadet, tempora periodica erunt ut altiores quaedam distantiarum potentiae ; cum tamen Planetarum tempora periodica sint in sesquiplicata tantum mediocrium distantiarum ratione. Efficacissime autem vortices *Cartesianos* refellunt orbitarum planetarium ad *Solis* axem & ad se invicem inclinatio, & Cometarum motus, nunc Planetarum cursui directe contrarius, nunc eorum orbitis perpendicularis.

XIV. Cum igitur *Materia coelestis* (si ulla sit) cum Planetis non circumferatur, & praeterea eorum motum per tot annorum millia sensibiliter non impediverit, Cometisque per eam velocissime tranantibus adeo facilem aperiat viam ; patet, coelorum spatia esse quam liberrima, & proinde materiam nullam in iis reperiri, quae tantorum corporum motui continuo regulariter inflectendo sufficiat. Planetarum igitur ac Cometarum motus in orbitis curvilineis, a nullo imperceptibilium quorumvis corpusculorum impulsu, atque adeo nulla mechanica causa oritur. Atque hinc multum accedit magnificae ideae *thesi 6ta* stabilitae Auctoris gravitatis, quem jam constat, non solum totius terrae, sed etiam coeli dominum, omniumque ejus incolarum Conservatorem esse ; qui omnium corporum coelestium compagem conservat ; cujus pollenti dextra Planetae, in perpetuos gyros circa commune centrale corpus acti, prohibentu, quo minus impetu centrifugo per vastum inane abrepti, omni, quod a *Sole* jam accipiunt, beneficio privati, perpetuo rigeant frigore, & densissimis tenebris involventur, atque alia amittant omnia quae ad vegetantium vel animentium conservantionem pertinent. Sicut autem impetus hic centrifugus, ni gravitate cohiberetur, omnibus Planetis certam cladem adferret, eas a *Sole* abripiendo, ita non minus certam perniciem iis inferret gravitas, eos in ardentem *Solis* atmosphaeram praecipitando, ni ipsis impressus fuisset motus projectilis : duabus vero istis viribus conjuctis, circa *Solem* in linea aliqua curva ferantur necesse est ; quae linea erit circularis, si motus projectilis directio, radio ad *Solem* ducto sit perpendicularis, ejusque vis vi gravitatis (p. 8.) aequalis : sin alterutra harum conditionum desit, curva illa erit sectio aliqua conica. Quae hic de Primariis dicuntur respectu *Solis*, de Secundariis item, respectu suorum Primariorum, intelligenda sunt.

XV. Jam probatum est, Planetas Primarios in *Solem* , & Secundario in suos Primarios, gravitare : cum autem corpus quodvis, quod circa aliud, utcunque motum, areas describit temporibus proportionales praeter vim versus illud aliud tendentem, urgeatur omni vi acceleratrice qua illud aliud ; hinc patet, Planetas Secundarios, non minus quam Primarios, versus *Solem* graves esse. Caeterum non modo Planetis Primariis cum *Sole*, & Secundariis cum *Sole* & suis Primariis ; sed & Planetis etiam ejusdem ordinis, Primariis *ex. gr.* inter se, mutuam gravitationem intercedere, liquet ex quibusdam eorum motuum perturbationibus, a nulla alia causa deducendis ; quales sunt *Apsidum*

Nodorumque migrationes, *&c*. quae sat sensibiles quandoque se reddunt, praesertim in *Jove* & *Saturno* circa conjuctiones istorum Planetarum helio centricas, ob vastam eorum magnitudinem, & a *Sole* distantiam, motusque simul tarditatem. Cum porro ipsorum *Satellitum* motus sensibilitem etiam in illis conjunctionibus perturbari deprehendantur, patet, Planetis Primariis cum aliorum quoque Secundariis gravitationis commercium intercedere.

XVI. Universalis vero illius legis, qua omnia corpora in se mutuo gravitant, efficaciam nihil probat evidentius, quam variae illae, quae omnis aevi Astronomos adeo torserunt, Lunaris motus inaequalitates. Supposita enim gravitationis lege, *Lunae*, cujus distantia a *Terra* adeo magna est (etiam ubi cum *Terrae* distantia a *Sole* confertur) vis acceleratrix versus *Solem*, *Terrae* vi acceleratrice versus eundem aliquando major aliquando minor, esse debet : quae inaequalitas, *Luna* versante in syzygiis, erit maxima ; in quadraturis minima, seu nulla ; quo fiet ut ejus motus a quadraturis ad syzygias (caeteris paribus) acceleretur, a syzygiis vero ad quadraturas retardetur ; atque adeo orbitae ejus curvatura ac a Primario distantia (caeteris paribus) in his, quam in illis, major erit : unde etiam nec *Luna* semper circa *Terram* areas describit temporibus accurate proportionales : quae omnia cum observatis optime conveniunt. Uno verbo, quaecunque irregularitates in *Lunae* motu observationibus deprehenduntur, (deprehenduntur autem quamplurima) illae omnes necessaria consequentia a priori deducuntur ex supposita ut versali quam diximus gravitationis lege ; quae igitur plurimum ab ut confirmari existimanda est. Ex eadem etiam lege, ac pari evidenti (p. 9.) deducitur *Aequinoctiorum* nota *Praecessio*, ac *Telluris axis oscillatio*, quae bis quotannis contingit.

XVII. Praeterea, secundum hanc legem, partes fluidi cujusvis terrestris, *Lunae* vel *Soli* directe obversae, notabiliter magis, aversa vero minus, in *Lunam* vel *Solem* gravitant, quam ipsum *Terrae* centrum, sive integra ejus moles complexe sumpta ; quo proinde tantum earum versus *Terram* gravitationi detrahitur : partium vero lateralium, seu aversis & obversis intermediarum, versus *Terram* gravitationi, *Solis Lunae*vo attractione cum ea aliquantulum conspirante, nonnihil additur : unde necessario sequitur, dum aversae & obversae leviores, laterales autem graviores sunt, illas ab his sursum premi, donec columnarum altitudine pensent, quod gravitati earum acceleratrici deest : *Solis* autem *Lunae*que vires, fluidorum terrestrium (aeris scil. ac maris) aestum, non duplicem, sed unicum, ex eorum compositione aestimandum, efficiunt ; qui, propter diversas istorum Luminarium a *Terra* distantias, & ab AEquatore declinationes, diversus esse debet, idque in triplicata distantiarum istarum ratione reciproca. Atque hinc, nec aliunde, omnia aestus marini Phaenomena facillime deduci possunt ; quae igitur jam probato gravitationis principio summan adferunt confirmationem.

XVIII. Praeter illam, de qua hucusque egimus, gravitatem, qua omnes materiae particulae, sine ullo figurarum, formarum, circumstantiarum, aut motuum discrimine, versus se mutuo tendunt, viribus in duplicata distantiarum ratione decrescentibus, est & alia quaedam vis, qua exiguae materiae particulae, se mutuo contingentes, vel contactui proximae, validius quam secundum gravitatis legem modo explicatam, ad se mutuo tendunt : quae vis minuitur in plusquam duplicata ratione auctae distantiae : cumque haec vis, in contactu, vel prope contactum, se tantum exerat, eo validior erit duarum quarumvis materiae particularum cohaesio, quo major sit earum contactus ; atque adeo particulae, quae ampliores habent superficies planas, vel saltem sibi mutuo congruentes, firmissime sibi mutuo adhaerent ; delibius vero (si omnino) quae sphaericas, aliterve convexas habent superficies : prioris generis particulae, corpus satis durum, posterioris autem, fluidum constituunt ; atque ex variis intermediis contactus rationibus, variae oriuntur cohaesiones : uno verbo, hinc, alias insolubilia, *Soliditatis* ac *Fluiditatis* Phaenomena facile solvi possunt. Cum autem haec vis in minimis distantiis aliqualiter se (p. 10.) exerat, quamvis aliqua externa vi corporis partes nonnihil separentur, si modo cum novis particulis non arctius coalescant ; sublata illa externa vi, in priores suos contactus & cohaesiones redibunt ; quo pacto corpus pristinam suam figuram recuperabit ; quam secus necessario deperdet. Atque hinc *Elasticitatis* & *Mollitiei* natura optime enucleatur. Atque ex his intelligi potest, quam magna, in diversis particulis, ex diversa earum figura & textura, oriatur attractionum diversitas ; hinc enim quaedam vix ulla, alia maxima vi, versus se mutuo tendunt : inter haec autem maxime notabilia sunt acida salia, quae in menstruis fere dominantur ; ista enim a corporis solvendi particulis attracta, in ejus poros, si modo idoneae sint amplitudinis, adeo magna vi ruunt, ut particulas, ni nimis valide cohaereant, disjungant. Quo pacto omnium corporum solutiones facile explicantur.

XIX. Ex hac etiam materiae minimarum particularum mutua attractione, quam plurima fluidorum phaenomena, alias insolubilia, facile enodari possunt. Ex eo enim, quod aquae particulae, ligni aut vitri particulas validius attrahant quam se invicem, oritur notum istud phaenomenon, quod aqua, vase ligneo aut vitreo inclusa, altior sit prope vasis latera quam alibi ; atque adeo in tubis minimis ei aliquantulum immersis altior sit quam extra tubum ; cum autem argenti vivi particulae validius se invicem quam ligni aut vitri particulas attrahant, res in illo prorsus contrario modo se habet. Hinc etiam sit, quod aquae, aliorumque fluidorum guttulae, cum gravitatis vi cadere deberent, a vitro, ligno, aliisque plerisque corporibus, suspendantur. Atque ut ex aequali partium in Planetis versus se invicem gravitate, sphaerica Planetarum figura necessario oritur, ita ex aequali particularum aquae, argenti vivi, & similium fluidorum, sibi mutuo admodum approximantium, vi centripeta, oritur guttularum in istis fluidis figura sphaerica. Ex modo dictis etiam intelligi potest ratio congruitatis aquae cum ligno, vitro, aliisque corporibus, & argenti vivi cum iisdem incongruitatis ; ac pari facilitate omnia reliqua fluidorum congruitatis ac incongruitatis phaenomena solvuntur. Hinc denique patet, quare arenulae, aliaque corpuscula nonnulla, aqua specifice graviora, in ea tamen non demergantur : mutua scilicet aquae particularum attractio, exiguam licet, aliquam tamen producit tenacitatem, cui superandae pa... non est istorum corpusculorum gravitas. Horum phaenomenωn pleraque a quamplurimis per aeris actionem explicabantur ; quorum error ex eo evincitur, quod haec phaenomena etiam in vacuo obtinere deprehendantur. (p. 11.)

XX. Supposita eadem materiae particularum mutua attractione, fermentationis, chrystallizationis, praecipitationis, fluidorum concretionis, electricitatis phaenomena, aliaque plurima, facillime explicari possunt, quibus immorari non licet. Explicatio autem refractionis radiorum lucis, quae hinc suppetit, nobilior est, quam ut eam prorsus intactam praeterire fas sit. Lucis exiguae particulae sive radii (ut ex egregii *Neutoni* observationibus constat) in transitu suo prope corporum angulos incurvantur, idque eo magis quo propius ad corpora accedant : quam incurvationem adeo regularem a nullo effluviorum impulsu provenire, satis est manifestum ; sed ab aliqua vi prorsus amechanica, quae ab Auctore naturae, juxta certam legem, iis imprimitur, pro variis distantiis a corporibus, ad quae appellunt, vel a quibus recedunt : cujusmodi vi supposita demonstravit modo laudatus Auctor, necessario sequi sinum refractionis esse ad sinum incidentiae, quaecunque sit incidentiae obliquitas, in data semper ratione ; quod ita se habere experientia docet. Necesse est igitur ut radii, qui e medio rariore in aliud densius, aut quacunque ratione magis attractivum, oblique incidunt, ab hoc densiore attracti, prius incurventur quam illud attingant, ita ut linea directionis radii, postquam corpus intraverit, minorem cum perpendiculo faciat angulum, quam ante incurvationem : atque hinc oritur refractio ad perpendiculum. Si autem lucis radius e densiore medio in rarius, aut certe minus attractivum, oblique incidat ; ob majorem prioris attractionem, versus id in ipso exitu, vel statim post exitum, incurvabitur, ita ut nunc majorem angulum cum perpendiculo faciat radii directio, quam antea : atque hinc oritur refractio a perpendiculo. Si autem in hoc casu angulus incidentiae sit valde magnus, refractio in reflexionem mutabitur ; ita ut angulus incidentiae sit aequalis angulo reflexionis : patet interim lucis particulae motum in priore casu accelerari, in posteriore autem retardari : atque hinc fit quod lucis velocitas in medio densiori plerumque major sit, quam in rariori. Praeterea cum radius versus partes tantum perpendiculariter sibi subjectas impellatur, patet radium per totum incurvationis tempus versari in eodem plano ad superficiem refringentem perpendiculari. Porro, ex diversis ipsorum lucis radiorum formis, vel forte velocitatibus, diversae inter lucis radios aliaque corpora attractiones, atque adeo diversi refrangibilitatum gradus oriuntur. Ex aliquo etiam simili principio (p. 12.) arcessendae sunt stupendae istae facilioris reflexionis & transmissionis v...ces ; quas in luminis radiis obtinere plurimis experimentis idem egregius Auctor demonstravit.

COROLLARIA.

I. *Mentis natura simplex & incomposita non patitur eam in ulle parte spatii ita existere, ut cum ea coextendatur ; nec tamen impedit, quo minus uni loco, ei scil. ubi corpus est, ita sit praesens, ut it alio loco similiter praesens non sit.*

II. *Quantumvis reales sive absolutae substantiarum essentiae sint nobi ignotae, haudquaquam inde sequitur, nos de earum affectionibus & mutuis relationibus nihil certi pronunciare posse.*

III. *Philosophia moralis tanquam necessario fundamento innititur summi numinis existentiae & providentiae, praesertim quatenus haec in praemi, poenisque dispensandis se exerit.*

IV. *Quaecunque jura, vitae servandae, vel gravis alicujus damni avertendi causa, alienari possunt, ea per actus, consensum indicantes, licet injustissima ejus in cujus favorem eduntur violentia extortos, eousque alienantur ; ut licet hic, vi talis actus, nihil jure petere, aut penes se tenere, queat, ille tamen qui consensu suo aliquod jus ei conferre, atque a deo obligationem sibi contrabere prae se tulit, omnino ex fidelitate teneatur.*

FINIS.

Annexe 3 : Poème de Maclaurin dédié à George Hume

Poème de Maclaurin dédié à George Hume mort à Montpellier le 19 septembre 1724.

National Archives of Scotland, GD159/492[801]

On the Death of the Right Honourable Te Lord P. who dyed at Montpellier Sept^{r} 19 : 1724

by M^{r} M^{c}lauren

Cherish thy Grief my soul fond of this Pain,

The fruit of mighty Hopes : oh 'lis in vain

I oppose its force resistance makes it rage

What remedy such sorrows can afswage

Ah me each dying pang my soul yet wounds

And his last Groans my troubled breast resounds

Still fix'd upon me his dear looks appear,

And cherish'd Accents languish in my ear;

While unrelenting Death prey on his Bloom

Crops every Grace ; and cuts the fatal loom

These ansful Terrors still before me pass

And fill my Soul with woe and deep distress

I in his lively thoughts wont to rejoice,

And long accuslom'd to his cheerful voice

A dreadful quiet, and Death-like silence find,

Still with sad horrours my dejected mind,

[801] Notre transcription est nécessite la correction d'un anglophone, cela sera fait ultétieurement.

Me thinks I'm left in some dreadwaste alone
Midst Gloomy Terrors ; hopeless there to moan
No ray of dawning comfort on me flows
Lost on a Labyrinth of killing woes
Struggling and faint unable to sustain
This grief my soul implores some friend in vain
Whose kind solace might sooth my troubled mind
And lender care the way to comfort find.
Far from our native land I mourn alone
Far from each friend, a stranger and unknown
Oppress'd with sorrow laouring with pain
My muse unstun'd attempts to sing in vain
Less piercing Griefs, Harmonious lay suggest
And meaner Woes in verse are well exprest
This Passes Ard (??), in numbers can't be told
Makes Nature shrink and Reoson to revolt
To see a Noble Youth rising to joy
Full of rich Hopes just in his Blossom dye
Whom every Grace and every Virtue crown'd
Whose early Praises ev'ry Tongue did sound
I thought him destined by the Powers above
To gain and long enjoy his country's Love.
Possess the hounours of a Noble Race
And by great actions their renown surpass
Thus vast designs for him, I dayly fram'd

His future Glory all my soul insham'd
Now he is fallen every hope is gone
And my Insipid Life at Burthen grown.
That awful Power who made the Spations Heaven
For his own Throne; and th'Earth to Men has given
Thus still reserves a right none dare controul
To spread his Terrors far from Pole to Pole
Thus clouds and darkness round his throne he throws
And shakes with doubts his friends, with dread his Toes
What e'er gave pleasure or delight before
Now proves a source of sorrow and Despair
To former pains, my studies gave relief
I lost in them rememberance of each Grief
But his dear Memory ev'n these restore
Increase my sorrows irritate my sore
If to past ages and the Birth of lime
With Curious search ingnisidive I climb
These distant scenes he did Delight to view
And these his dearest Memory renew.
If to the Heav'ns my drooping looks I raise
There we have travelled a thousand ways
And there he dwells crown'd with immortal rays
Where e'er I turn my mournful eyes I see
Tears that ev'ry Country flow for thee
If to fair Albion our native shore

There the great love, thou to thy country bore
Provokes my lears, and wish's that Heavinly Powers
Had for its good prolong'd thy term years
Each Age thy Monument to me appears
And ev'ry Object makes me melt in tears.
In a fair place fam'd for the purest sky
This Noble Youth's remains in peace shall by
Till the world tedious anxious dreams are past
When from some Losty Orb he' ill hither hast
And at the Dawn of ever lasting Day
Revive this Dust and wed th' Immortal clay
Till that great Day ; Oh Lovely Youth farewell
Thy dear Rememberance in my soul shall dwell
What tho' thy Joyful looks no more me chear
Nor lively Wit surprise my ravish'd ear
Dee in my breast thy memory shall live
And while my life remains thy loss I'll grieve
And if such things are in th'immortal state
I'll hope thee in some heav'nly throng to meet
And then with Joy my present Grief relate
Balm to my wounded sol this thought supply's
And soothing hope dawns on me from the skyes

Annexe 4 : Lettres choisies et inédites de Maclaurin

Lettre de Maclaurin à Lady Grissel datée du 16 (nouveau style) octobre 1723 à Lunéville.

National Archives of Scotland, RH15/15/108(a)

Madam

I took the liberty to send your Ladyship in July some letters from Aberdeen that I might knou if I could have the permission of the Magistrates & Colledge to absent this winter. I am surprises I have had no ansuer and humbly beg that if your Ladyship has any letters for me they may be forwarded. If I had not permission to absent tho' might be secured otherwise yet I am afraid to disoblige too much people that I must live amongst probably all my life I had some letters last moneth by which I was assured that my absence was taken ill ; and as there is no body can officiate for me there, it cannot look well I shall be glad to knou what success Your Ladyship's applications may have (lower?) had. I am not insensible that Your Ladyship & His Excellency My Lord Polwarth do me a great honour in desiring that I should continue with his son I wish ansuer the Expectations Your Ladyship seems to have of me.

M^r^ Hume Campbell was very ill for some days; and it was some time before his indisposition form'd into a regular ague : houever he had but two or three fits and is nou as vigorous as ever. I have had orders from My Lord Polwarth to dismiss and pay his footman Daniel that he brought with him from England. I want to knou what he was promised : he pretends that he agreed for seven pounds a year.   I am

Madam

Your Ladyship's

Much Obliged

Most Obedient

Humble Servant

Colin McLaurin

Mr Hume desires to express his humble duty to your Ladyship

N.A.S. RH15/15/108 : Lettre de Maclaurin de Nancy datée du 7 (old style) novembre 1722

My Lord

I do not pretend to take upon me to excuse in any measure the trouble I am at present to give your Lordship, and have beg'd of my Lady Grissel Baillie to undertake that I have the Honour at present to serve his Excellency My Lord Polwarth in the quality of Governor of his eldest son : and I have so much reason to be satisfied with his goodness for me that it is at present all my ambition to be able to continue on that office. I cannot trouble your Lordship with an account of some unexpected accidents that have made the Principall of our Colledge formerly my great friend nou very suddenly shou other sentiments. I am well inform'd that he intends to take the Opportunity of my Absence to have his son plac'd in my room, and that the magistrates & toun Council being at his devotion they will declare my office vacant if I do not appear there this winter. The rest of the Masters have writt to the Right Honourable My Lord Kimmerzam me a joint letter assuring me of their friendship but telling me that as the Princll's niece (?) is married to the present Provost and rest of the council are mostly his friends I have reason to fear their intrigues and that if I cannot return I must take all precautions to secure myself against their designs.

Nou, My Lord, my ague havind return'd on me the 7th of October and it still being dangerous for me to undertake so great a journey in this season as my Physitian is ready to attest: it were but justice to allou me to continue here till the season becomes warm, especially since I am willing to give up my salary to be employed as their toun Council think fit. As I want to apply to the Commission that was appointed to visit the Northern Colledges by his Majesty that still subsists and can secure me against any attempts of these subtile Gentlemen. I cannot condescend particularly on any form of a security or permission that I would be glad to obtain from them by your Lordship's Interest : which you may judge of much better than Dean if this trouble be not too great. It may be a difficulty that the Commission seldom meets : but an Order from a Committee of them to the Masters of the Colledge impowering them to appoint one to officiate for me, or some such resolution I believe might stop the Career of the Principall's friends.

I have presum'd so much on your goodness as to write to the Masters to send to your Lordship any petition relating to this that they may desyre to present to the Commission and also an account of what steps are taken by the other party. What I ask is not only the joint desyre of the Masters of the Colledge except Mr Blackwell the Principall but also of all the toun except his friends. If your Lordship could procure me by your Interest with the Members of the Commission the justice that I desyre it would lay the highest Obligation on me and would I believe not be disagreeable to his Excellency. My Lord Buchan My Lord J Clerk, Sir James Steuart the Principall of Glasgow, Mr Hadou of St Andrews, Mr Johnson of Dundee are in this Commission others whom I have forgot. The people have not the (…?) complain of we [or me?] that I knou of : nor do they pretend any giving out that there is no design against me tho' they are resolv'd at the same time to improve my absence to my disadvantage when the time that I ought to be there comes.

I humbly beg your Lordship to pardon me for this presumption. If any thing can be done for my ….. I hope your Lordship will have the goodness….

My Lord

Your Lordship's

most Obedient and

most Humble servant

Colin M[c] Laurin

Nancy in Lorrain

Nov[r] 7 o. s. 1722

I beg leave to add that since Octo[r]. 7 I have not yet been once abroad

Annexe 5 : Extraits des Minutes du Conseil Municipal d'Aberdeen et d'Édimbourg

Minutes of the Aberdeen Town Council, vol. 58.
p. 553.

11 september 1717

Sederunt Provost Baillies Cruden Moorison Gelly Abercrombie, Dean of Gild Thesaurer Kirkwork Mortifications Hospitall Impost Dr James Gregorie Duncan Gordon William Murdoch Robert Laws Alexr Smith

p. 555
Act Mr Colin Maclaurin to be professor of Mathematics
The said Day Provost Baillies and Counsell patrons and Administrator of the Mortification of the deceast Mr Duncan Liddell Doctor un Physik ofr a Mathematical profession founded within the New College Aberdein be him, Considering that Mr George Lidell late professor of Mathematiks was deposed from his office By the Lords Commissioners apoynted lately by his Majestie for visiting the Colleges and Schools of Aberdein Upon which the Lords Magistrats and Counsell had caused emit programs for supplying the said Vacancy and have elected Mr Charles Gregorie professor of Mathematicks in Saint Andrews and Mr Alex Burnet regent in the Kings college of Aberdein as qualified persons To take tryall of any candidates that should appear for the ad vacant profession, And accordingly Mr Colin McLaurin Student of Divinity in the College of Glasgow and Mr Walter Bowman son to Walter Bowman of Logic hade appeared and listed themselves to undergo tryall for the vacant profession And severall pieces of tryall having been prescribed to them, In end the saids Mr Charles Gregorie and Mr Alexr Burnet gave in the report following vist they doe think that both the saids Mr Colin McLaurine and Mr Walter Bowman are capable to teach the Mathematicks anywhere; In most of the tryalls in the Inferior parts of the Mathematicks ther wes no great odds, Only in Euclide Mr Bowman was much readier and distincter, And in the Last tryall Mr McLaurin plainly appeared better acquainted with the Speculative and higher parts of the Mathematicks, And they conclude that they both excell in ther own way, Mr Bowman only hath applied himself to those things that are commonly taught and

Mr McLaurine hath made further advances – So subst Charles Gregorie Alexr Burnet which report having been read seen and considered be the sd provost Baillies and Counsell, And they being at length rypely and weill advised ther with, They Unanimously nomunat presented and admitted, and hereby Nominats presents and Admits the sd Mr Colin McLaurine to be professor of Mathematicks In the said New College of Aberdein founded be the sd Mr Duncan Lidell, And that during his lyfetyme and good service and behaviour in the said charge <u>And</u> Ordains the Master of Mortifications of Aberdein present or to come To content and pay the sd Mr Colin McLaurine yearlie and ilk year the soume of fyre [??] hundred and four pund Scots of Sallary Out of the sd Mr Duncan Lidell his Mortification to a professor of Mathematics at two terms in the year Whitsunday and Mertinmas be equall portions Beginning the first terms payment at Whitsunday newt to come One Thousand Seven hundred and eighteen years for the preceiding half year And yearlie and termely during the sd Mr colin McLaurine his lyfetyme and god service and behaviour in the Dcharge And their presents with the sd Mr Colin McLaurin his yearlie recept to be sufficient ground and warrand for instructing the sd Mr of Mortifications and allowing the same yeirly therein pro tanto <u>Provyding</u> almayes that the said Mr Colin McLauren observe and perfume faithfully the heads and conditions of the said Mortifications And that he teach the Science of Mathematicks in the said College in maner thereby presrybed, And observe the Acts of Counsell of this burgh made or to be made relative thereto, And that he carry and behave always as becometh, Otherwayes thir presents to be null And als Declaring hereby that the provost Baillies and Counsell of Aberdein shall be only judges of the sd Mr McLaurine his behaviour in the foresaid station And ane extract hereof to be warrand for the haill premys[L]

John Gordon Prosses

Minutes of the Aberdeen Town Council, vol. 59.
p. 151.

23 December 1724

Sederunt Provost Baillies Cruikshank Smith
Chalmers Dean of gild, Thesaurer Kirkwork Mortifications,
Hospitall, Impost, John Gordon, Thomas
Moorison, James Catto, George Gordon, John Walker
And George Knowes

The said Day the Magistrates and Counsell takeing into their serious consideration that Master Colin McLaurin Professor of Mathematicks in the College Marishall of Aberdeen had been abroad and not attended his charge in the said Colledge for near thir three years bygone Whereby the Stundents had sustained considerable loss by their not being taught Mathematicks as formely and that albeit it be now the present Session of the Colledge ; Yet the said Colin McLaurin had not returned to his place to attend his foresaid charge although by severall missive Letters from him he promised to have been here before now And to the end the Students of the said College may not be att further loss this Session by the said Mr McLaurin his absence therefore the said Magistrats and Counsell Recomended to Master Daniel Gordon one of the Regents of the said Colledge (who had formerly taught Mathematicks at the University of St Andrews) that he may teach the Mathematicks to the Students of this Colledge for this Session And that he may allow two hours a day for that affect, And also Recommended to Baillies Cruikshanks, Gregorie and Chalmers or any two of them to meet with the Principall and Masters of the said Colledge and acquaint them hereof, As also to acquaint the said Mr Daniel Gordon and George Fordyce late Provosts, qith the Master of Mortifications and John Wilkie Walker Convener and the Clerk, To meet the morrow att ten aclock beforenoon in the High Counsell House, with the Principall and Masters of the said Colledge, to whom also with the Counsell the Inspection of the Professor of Mathematicks behaviour, By Mr Duncan Lidell his Mortification is commited, And to lay before the said meeting the said Mr Mclaurin his going away without Liberty as said is and continuing so long from his Charge aforesaid, and anent his writing a Letter to the MAgistrats and Counsell from London the Eight of the said Moneth of December last, and desyreing that they might appoint appoint (sic) any fitt person they pleased for supplying his place for this session of the Colledge and that in conformity thereto they had recommended to the said Mr Daniel Gordon To supplie the same as above, But that since the said Mr Mclaurin had returnd to this place as aforesaid: And if after reasoning and deliberating upon the forsaid affait By the forsaid Committee of Counsell and the said Principall and Masters of the Colledge, the said Mclaurin shall give reasonable satisfaction and acknowledgement for what is laid to his Charge as above the saids Counsell Recommended To the said Committee of their number that they might take off the forsaid prohibition given to the said Mr Mclaurin from teaching and they might allow him to goe on in teaching the mathematicks as he had formerly done, But of no satisfaction is as given To continue the prohibition: and recommended to the said Committee To make a Report of the haill premises to the Counsell att their next meeting….

Minutes of the Aberdeen Town Council, vol 59., p. 159.

20th January 1725
Sederunt Provost, Baillies Cruikshank, Smith,
Gregorie and Chalmers, Dean of gild, Thesaurer
Master of Kirk and Bridge Works, Mortifications,
Hospitall, Impost John Gordon and George Fordyce
Late Provost, James Catto, Thomas Morison,
George Gordon, John Walker and George Knows
Counsellors

…

The said Day, the Magistrates and Counsell taking into their serious considerations, That Colin Mclaurin Professor of Mathematicks In the Colledge Marishall of Aberdein has been abroad and not attended his Charge for near three years bygone; that thereupon they by their Act of date the twenty third day of December last bypast, Had recommended to Mr Daniel Gordon one of the Regents of the said Colledge that he might teach the Mathematicks to the Students for this Session in manner mentioned in the foresaid Act of Counsell And that upon Saturday last the Sixteenth instant the said Mr Colin McLaurin had returned to this place. But that the Provost by desire of the Magistrats had told him not to teach the Mathematicks to the Students, Untill he should give some reasonable satisfaction and acknowledgement, First, For his going away without Liberty from the Counsell. 2do / For his being so long absent from his Charge and not attending the same; Of which procedure the Provost, The Counsell unanimously approved of : And now, the said magistrats and Counsell Recommended to the Provost and Baillies, John Gordon of the premises And to desire him to undertake the foresaid Charge upon him during this Session of the Colledge And the Counsell Declared that they would hereafter take into Consideration the said Mr McLaurins Absence and what further is proper to be done therein, and what shall be given to the said Mr Daniel Gordon for his Teaching the Mathematicks this Session of the Colledge

Robt Stewart

Minutes of Aberdeen Town Council, vol. 59. p. 180.

27 Aprile 1725

Sederunt Provost, Baillies Cruikshank, Gregorie
Smith and Chalmers, Dean of gild, Thesaurer
Kirkwork, Master of Mortifications, Shorework,
James Catto, Thomas Moorison, John Walker and
George Knows.

The said Day the Provost represented that conform to the Act of Counsell of the date the twentieth day of January last bypast there had been several meetings with Mr Colin Mclauran Professor of Mathematicks anent his remaining abroad so long from his office, and that now he was content to appear this day in Counsell and give satisfaction, Which being considered by the said magistrates and Counsell they were content to accept of the same, and the said Mr Colin Mclauran being called, compeared in Counsell had taken offence and promised to be carefull of his Charge hereafter, wherewith the Magistrats and Counsell were satisfied and appointed such Salarys as were due to the said Professor to be payed to him.

Minutes of the Aberdeen Town Council, vol. 59. p. 225.

12 January 1726

Sederunt Provost, Baillies Moorison, Smith,
Chalmers and Gellie, Dean of gild, Thesaurer,
Master of Kirk and Bridge Works, Mr of
Mortifications, Master of Hospitall and Master of
Impost, William Cruikshank late Baillies, William
Shirres and Alexander Michy Merchants, Alexander
Nicoll Taylior and William Davidson weaver

Counsellors

The said Day the Magistrats and Counsell takeing into their consideration that by the Publick News Prints in the Beginning of November last bypast They found that Master Colin Mclaurin Professor of Mathematicks in the Colledge Marishall of Aberdeen was admitted as Conjunct Professor with Master James Gregorie Professor of Mathematicks in the University of Edinburgh, And that the said Mr Colin Mclaurin had not returned since that time to this place, but (as it is informed) was teaching the Mathematicks att Edinburgh; Therefore They Did, and hereby Doe Declare the said Colin Mclaurin his office as professor of Mathematicks in this place to be vacant and at the Magistrats and Counsells disposal as Patrons of the said Mortification.

Minutes of the Aberdeen Town Council, vol. 59., p. 233.

Sederunt Provost, Baillies Moorison, Smith,
Chalmers and Gellie, Thesaurer, M^r of Kirk
and Bridgeworks, M^r of Mortifications, M^r of
Hospitall, M^r of Impost, William Cruikshank
late Baillie, John Lumsden, William Shirres,
$Alex^r$ Michie, Alexander Crombie, Alexander
Nicoll and William Davidson Counsellors

The said Day there having been a Letter from Master Colin Mclaurin late Professor of Mathematicks in the Colledge Marishall of Aberdeen read in Counsell anent his demitting of his office and Charge as Professor of Mathematicks, and anent sending of his Demission to the Masters of the Colledge which being considered be the saids Magistrats and Counsell, And that as yet the saids Masters of the Colledge had not showen nor given in the forsaid Demission, Therfore they Recommended to the Touns Clerk to write a Return to the said Mr Colin Mclaurin and to acquaint him that his forsais Demission is neither showen nor yet given in by the saids Masters of the Colledge.

The said Day The Magistrats and Counsell takeing into their Consideration That by their Act of the date of eighteenth day of January last bypast They had Recommended to the

Provost with Baillies Moorison and Smith and William Cruikshank late Baillie four of their number with Mr Alexander Thomson Toun Clerk to meet with the Masters of the Colledge to discourse anent the Vacancy of a Professor of Mathematicks in the Colledge Marishall, And that as yet nothing effectuall hath been done in that affair. Therefore the saids Magsitrats and Counsell Doe hereby Recommend to Baillies Chalmers and Gellie also two of their number to be added to the forenamed Committee for meeting with the saids Masters of the Colledge anent the forsaid business referred by the said Act of Counsell in January last, But the Counsell sere of opinion that the forsaid Committee of their number should not allow any sight of the Touns Registers to the Masters of the Colledge anent any former admissions of Professors of Mathematicks, And that they should not be allowed to have any Extracts of such Admissions But that the Communing upon both sides should be Viva Voce, And only allowed the Magistrats to produce at the said Meeting the old printed Programs.

Minutes du Conseil Municipal d'Édimbourg, vol. 51. pp. 15-19

Le 3 novembre 1725

The Same Days The Lord Provost Baillies Concill Deacons of Crafts ordinary & extraordinary being concerning in Councell & taking to their Consideration the Report on the position of Mr James Gregory professor of Mathematicks in the Colledge of this City setting furth the Reasonableness of the Councells appointing a joint professor of Mathematicks with him That they having fullie considered of the subject there in contained were (p. 16) of opinion that nothing could more contribute to the Reputation of the Colledge than the giving reasonable encouragement to the Justly now somuch valued profession of Mathematicks. That behaved in this consequences very much to promote the Intrest of the City that Mr James Gregory our present professor had for a great many years discharged the duty of that character with great abilities & had concern for the good of the place & with all deference to his Patrons so as now in his advanced years to entitle himself very much to the Councill favour and protection. That M^r Colin Maclaurin present professor of Mathematicks at Aberdeen had made surprising appearances in that part of learning and these so very well known to all the Learned world that thoke had a very favourable Character bestowed (?) on him by very Great men & even by Sir Isaac Newton himself he did not seem to need any of those to convince us that it was Impossible for us to hope for any opportunity of doing a thing more Honorable and advantageous of the City. That could contribute more to the Reputation of the University & advence the interest of Learning in this country than the giving M^r Maclaurin suitable encouragement to settle among us. They were therefore of opinion That in regaird to Mr James Gregories' extraordinary merit the Councill should settle on himself dureing his life his present yearly salary of Eighty three (p.17) pounds six shilling & Eight pence sterling and should likewise settle it on his children to be paid to his Executor for their behoof for after in of seven years certain to commence from Martinmas next. That is that sum annually should be made god to his children for what time Mr Gregory should live short of the term of Martinmas Day by seventeenth & thirtie two & proportionally under this express condition & provision that if Mr James Gregorie & Mr McLaurin should happen both to die within that period and Mr Colin McLaurin should happen to decease last in that event the Sallary payable to Mr James Gregories Executors should lease [ou coast] & determine from the first term of Candlemas withsundy [??] Lambas or Martinmas after Mr Colin McLaurins death The Character of Joint Professor of Mathematicks in the University of the Citie with Mr James Gregory during their joint lives, & of professor of Mathematicks after Mr Gregories death if that event should first Happen during Mr Maclaurin own life. That for Mr Colin Maclaurin present encouragement the Town councell should settle upon him the sum of fifty pounds sterling annually to commence from Martinmas next and to be payable dureing Mr Gregories life or during the term of seven years from period & the sum of Eighty three pounds six shillings & eight pence sterling annually from the (p.18) term of Martinmas (…?) and thirty two in the event of Mr Gregories death before that term or from the death of the said Mr Gregories during Mr Maclaurins life under this express condition. That the said Mr McLaurin should attend the dutie of teaching all the several parts of the Mathematicks as there should to be occasion during the Sithing of the Colledge as the same had been practised by other diligent professors and that the Councill should direct ad Impower Mr Maclaurin so to do as also that the allowance of fifty pounds sterling payable to Mr Colin Maclaurin should cease & determine from the time of the commence of his salary of Eighty three pounds six shilling & eight pence sterling & lastly that the Town Councell should expressly anent that if Mr Maclaurin dies before Mr James Gregorie at any time whole conditions & provisions therein mentioned were to become void & null & that M^{r} Gregory be ipso facto upon the foot he now stands as if the ast [??] of Councell to follow there upon had never been onarted [??] sic subscribitum Gr Drummond Prof Tho Duck Baillie W^{m} Carmichael Baillie Ja^{e} Simpson Baillie Arch^{d} M^{c}Aulay DG Da Flint Treas^{r} Alex Simpson David M^{c}lellan Conv^{r} William Caurt Robert Lees as the said Report signed by the Above persons bears which being considered by the Councell they the Extraordinary Deacons unanimously approved of the fore said (p.19) Report & did & hereby dae nominate & appoint the said M^{r} Colin Maclaurin to be Joint professor of Mathematicks in the Colledge of this City with the said James Gregory during their joint lives & professor of Mathematicks there after his decease & their appoint all the other provisions in the said Report under the conditions therein mentioned both these in favours of Mr James Gregory & his family & of the said M^{r} Colin Maclaurin to be dicely & punctualy made good to them by Robert Wightman present Colledge the famour (fairrom) & his succession in y^{t} after (?) for which these presents with the proper acquittances shall be to them sufficient difch (?) argrs in their acco^{tts} & the Councill with the Extraordinary Deacons also declared & hereby declare that M^{r} James Gregory as the Eldest professor of Mathematicks is hereby entituled during his life to the encouragement on salary which the professor of Mathematicks in the Colledge of the City presently enjoys by his mattrebounty (?) & lastly in order to sell be between themselves how & in what manner these two professors are implery themselves in teaching or in what manner & at what times M^{r} James Gregories attending for teaching may be dispensed with the Councel with the Extraordinary Deacons hereby Impower the Lord Provost Chancellor to the University of this City to sell be the same by write under his hand.

Provost	Old Provost	Trade Councellers

George Drummond Esqur

Baillies

Thomas Dick

John Bell

James Simpson

Dean of Gild

Archbald McAulay

Thesaurer

David Flint

John Campbell

Old Baillies

Duncan Campbell

Alexander Simpson

Charles Crockat

Old Dean of Gild

Patrick Lindsay

Old Thesaurer

James Wauch

Merchant Councellers

Gromwell Hamilton

John Greenlees

John Lainder (?)

John Keir

Deacons

David Mcclellan convr

William Cant

Robert Loes

Alexander Orem

Extraordinary Deacons Andrew Duncan mason Thomas Murray Baxter Alexander moflattwaker (?)

Minutes of Edinburgh town council Vol 64, p. 244, 9 May 1744

Petition from M^{r} M^{c}Laurin anent Building an Observatory

Committee Report

To be allowed the Stones of the old Burrom Room

Anent the petition given in by Collin M^{c}Laurin Professor of Mathematicks setting furth that as the petitioner proposed furth with losett about the building of the Observatory in the Colledge and that as this work could not be so heastily carried through as other buildings, But would require pains & care, and that as the season is far advanced, and that a further Delay might throw off the work for another year Praying therefore the Councile might authorize so much of the old South buildings to be taken down as to make room for the same and to Remitt the petitioner to the Guild Court for Gage and warrant. Also That the Councile might pass from the price of the Stones bought from them for building the observatory which would prove a considerable aid in carrying on the work as the funds are still Deficient as the petition bears, which having been read in Councile the same was Remitt to the Committee on the Colledge affairs with power to takein M^{r} Mac Laurin's proposales and to visit the ground report, accordingly this Day Baillie Thomas Allan Inherit prosses of the said Committee Reported therefrom, that they haveing considered the said petition were of oppinion That the Councile ought to Grant the Desire of the same, and that they ought to Remitt to the Dean of Gild Court To Grant gage and warrand for building the observatory in the middle of the South Row of the buildings And were of oppinion That the price of the stones of the old burrow room amounting to Twenty two pounds sterling lately purchast by Baillie Gavin Hamilton sunderflanding (?) they were to be used in this work so beneficiall to the university and to learning (p. 245) should be Remitt as a furder aid in carrying on the building. ~ The Committee having also considered M^{r} M^{c}Laurins proposale for a house ~contigue to the observatory without which the observatory coud not be so fully usefull either to himself or Students were of opinion that the Councill ought to appoint a sum of money not Exceeding four hundred and Twenty pounds sterling to be lifted out of the Colledge Capitall stock and applied to the building of this House and that a

Approven & Dean of Gild & Colledge Committee to stake out the Ground & Give in ane Estimate of the work to the Councill

plan be accommodate to the said sum to be approven of by the Councill And that Mr. Mc.Laurin be obliged to bind himself to possess this House During his Lifetime or Enjoyment of this office at the rent of six per Cent four the outlaid money. The Committee were further of opinion that the Good Town does give the old materials of the buildings that were to be taken down gratis as the report bears which having been considered by the magistrates & Councill They with the Deacons of crafts ordinary and Extracts approved there of and Recommended to the Dean of Gild to call for the Colledge Committee to assist instaking out the ground upon which the said building is to be made and Remitt to the sd Committee to make out and lay before the Councill an Estimate of the whole work before the ground is broke or any Ledge or warrand is granted. ~

Edinburgh the Ninth day of May one thousand seven hundred & fourty four years

Wednesday
Sederunt

Lord Provost
John Coulls Esqrl.
Baillies
Thomas Allan
David Inglis
Robert Horrester
Treasr.
John Forest

old Provost
Robert Purvis
old Baillies
Alexr. Lindsay
James Stuart
old Dean of Gild
Gavin Hamilton
old treasr.
Thomas Trotter
Mertt.Counlrs.
John Stephen
Ebinezer Mc.Culloch
Neil Mc.Viuar

Trades counlrs.
Walter Orrocks
Deacons
George Langlands Conr.
Edward Lothian
Alexr. Farquhar
David Donaldson
John Craig

Extraordinary Deacons Charles Mack ~ Archibald Dunton, James Brown, William Dickson ~Prayers said ~Minutes read anent

Lettre de Maclaurin au conseil municipal jointe aux minutes

To the Right Hon^{ble} the Lord Provost Magistrates & Town Council of Edinburgh the petition of Mr Colin Mac Laurin Professor of Mathematics in the University of Edinburgh.
Humbly Sheweth
That, a considerable fund being now provided for the building an Observatory in the College of Edinburgh the said observatory cannot be so advantageous to the students & to the publick unless the professor live near it. Therfore M^{r} Mac Laurin is willing to pay six per cent of that shall be necessary for building such an house & sitting it for him, & to oblige himself to grant receipt for this rent as so much of the annual salary payable to him as it shall amount to, providing it does not exceed twenty five pounds per annum.
And whereas he proposes to build the observatory without putting the Hon^{ble} Town Council to any expences besides the granting the stones laid in the circa for that purpose And because he confines himself to prossess this house wheele he enjoys his offices, & proposes to build a good college Room in place of the old ones with an Instrument room in the observatory. And because by these means the Town, besides having an Observatory and college rooms, will be preed from the expence of repairing supporting or renewing the raisons roofs of four rooms in the College for a long time. For these and other reasons he submits to the H^{ble} Town Councill wether they will grant to him or his successors in Office some case as the roof, waving their attention thereto.

Colin Mac Laurin

Edinburgh May 8. 1744

Annexe 6 : Introduction des manuscrits liés au traité d'algèbre

Ane introduction to ye Mathematicks, By Mr MckLaurence, Prof. Abd., Bibliothèque de l'Université d'Édimbourg, Gen.2251D

[Table des matières]

Introduction :

" The mind of man is naturally dark and empty, but inherits very ample power and capacity. It's inward frame was at first proportioned and ye just Economy of its Powers and Passions harmoniously compounded by infinite art, but that divine fabrick was blasted of Old, and we have left only it's bright Ruins, and still it retains large faculties, Unbounded Desires, and sublime Affections. It evidently seeks to have it's darkness removed, it's great want supplied and passionately thirst. After Knowlege (sic) its chief perfection and pleasure, y^e^ pursuit of w^c^ is truly worthy of its native origin and immortality.

But in ye vast field of Human Knowlege (sic), we have regard to ye nature of ye sciences themselves or to ye many advantages that are derived from them, we'll find ye mathematicks a most pleasant, not only, but a most valuable part. If we consider ye Theory it must appear among ye most beautifull (sic) Products of Humane nature, because of ye amazing abyss of admirable Truths in it. The irresistible brightness of their Evidence, and particular Elegancie (sic) of their demonstration. If we consider their practice, their application is so generall, as not only to be vast use in most sciences, but to extend to many common usefull arts, and particularly by their commerce w^{t} ye most distant nations Is rendered safe and easy so he therfor tis ye foundation of Trade and Riches. But is they were ye key of knowledge of nature, ye they are of the highest value as unfold the deep arts et exquisite machine of ye universe which Plato used to call ye Workmanship of ye higher Geometrician expressing at ye same time his sense of Wisdom of Deity and his esteem of these sciences.

Mathematicks are ye Doctrine of Quantity, or of being as far as it is Measurable, and amongst all ye objects of our Knowlege any ye are capable of Augmentation and Diminution in any respect, can be so far reduced to ye mathematicks.

Thus weight, space, motion, time, even ye degrees of evidence, pleasure, pain and other moral quantities, in as far as they can be increased or decreased are ye objects of mathematicks.

All ye various parts of pure Mathematicks may be reduced to Algebra and Geometry if they be taken in a generall sense and if we added to them ye method of Fluxions (the noble invention of the celebrated Isaac Newton) w^{c} seems indeed rather to be ane Improvement upon both than a part distinct from either.

The various reasoning upon this from Nature, have produced ye different parts of mixed Mathematicks the thief of we are of Mechanicks, Cosmography and opticks, after this generall account of ye nature, use, objects and different parts of the mathematicks we begin wt ye algebra."

A treatise of Algebra By Mr. Colin Maclauren, professor of Mathematicks in the University of Edinburgh written by John Russel, Edinburgh A.D. 1729, Bibliothèque de l'Université d'Édimbourg, DC.3.66

Introduction:

If the Value of the different parts of our knowledge is to be estimated from their own certainly, and their usefulness in our Sciences, and arts; Then without doubt the mathematicks will be allowed to a very considerable part. The elegance of its theorems and the irresistible evidence of the demonstrations reinder them in a peculiar manner aggreable to the understanding; their application is so generall, that there are few usefull arts or sciences that are not indebted to them for some degree of perfection; and because of the degree of distinctness and certainty of both they are said to give the mind a habite of reasoning strictly and of distinguishing that evidence which is perfect from that which is imperfect; this was the opinion of the ancients had of them when all their parts were incomparably less perfect than they are now.

Their rise and beginning is not very certain. We are told that Geometry was first considered by the Egyptians the inundations of the Nile making some art necessary for manureing their lands. It is said that Arithmetick was invented by the Indians, and afterwards made more general by the Arabians and called Algebra; Their progress at first was slow and by steps that appear easie to us; they began by funding particular theorems very much restricted which their successors by degrees extended more and more. Thus one found that the three angles of a rectangular triangles were equal to two rights : which gave occasion soon after to discover, that this was a general property of all triangles ; as we are informed by Proclus an antient (sic) commentator on Euclide, and they being very much relished by the Greeks, who had them from the Egyptians, they became very extensive; but since the restoration of learning in Europe; especially these last hundred years, the mathematical sciences have been improven (sic) in a manner altogether surprising.

The object of the mathematicks is said to be quantity; by which is understood whatever is capable of augmentation or diminution; as Space, time, or force; Algebra and Geometry are two fundamental parts of the Mathematicks.

As for Geometry the Elements collected by Euclid have had the approbation of mathematicians, almost without Exception since own time.

The Algebra only is the more general kind of computation than the Arithmetick ; In it not only quantitys that are known; But also those that are unknown; are expressed by letters, and have the same operations performed about them ; sick of Addition, Subtraction, Multiplication, and division as the known. In it the Genus and composition of quantity is preserved more in View, in different operations, than the arithmetick, where that is lost. The connection of the operations, and the grounds on which it is built, are more obvious, and the conclusions that are used in the solutions of Questions are theorems that many serve for all oy^{rs} of the same kind. It is very generall kind of computation, and of great use in the vestigation (sic) of truth, But is often unskilfully used for y^{e} demonstration of theorems; even sometimes when the Geometricall method can serve better, and more succinctly; the great use and beauty of Geometry being to shun tedious computations by an expedite construction and when that can be done it is to be preferred.
The following treatise is to be divided into three parts; the fundamental operations are to be explained in the first part. The genesis and resolutions of equations of all kinds, with the propertys of their roots in the second, In the third we shall give the Geometricall constructions of Equations and apply the Algebraick computations to the Geometricall Problems."

A Treatise of Algebra in three parts By Mr. Colin Maclaurin M. P. in the University of Edinburgh. Suivi de An Introduction To the Method of Fluxions wherein the first Principles of the Method are Demonstrated, Bibliothèque de l'Université d'Édimbourg, Gen. 75. D

[Table des matières de cet ouvrage]

Chap. VII: Of Involution of Quantity

Chap. VIII: Of Evolution

Chap. IX: Of Proportions

Chap. X: Of Equations that Involved only unknown Quantity

Chap. XI: Of the Solution of Questions that produce simple Equations

Chap. XII: Containing some generall Theorems for exterminating the unknown Quantity in given Equations

Chap. XIII: Of Quadraticks Equations

Chap. XIV: Of Surds

Part II: Of the Genesis and Resolution of Equations of all degrees and the different Affections of their Roots

Chap. I: Of the Genesis and Resolution of Equations in general and the Number of Roots an Equation of any degree may have

Chap. II: Of the Signs and coefficients of Equations

Chap. III: Of the transformation of the Equations and Exterminating of their intermediate Terms

Chap. IV: Of Finding the roots of Equations when two or more of their roots are equall (sic) to each other

Chap. V: Of the Limits of Equations

Chap. VI: Of the Resolution of Equations all whose roots are form Commensurable

Chap. VII: Of the Resolution of Equations by finding those Equations of a lower degree that are their Divisors

Chap. VII (VIII): Of the Resolution of Equation by Cardan's rule and other of that kind

Chap. IX: Of the Method of approximating to the values of the Roots of Numerical Equations by their Limits

Chap X: Of the Method of Series by which you may approximate to the Roots of Literal Equations

Part III: Of the Application of Algebra and Geometry to each other

Chap. I: Of the relation betwixt the Equations of Curve lines and the Figures of these Curves in General

Chap. III (II): Of the Construction of Quadratick Equations, and the Properties of the lines of the Second Order

Chap. III: OF the Construction of Cubick and Biquadratick Equations and of the General Properties of the Lines of third and higher Orders

The End

Annexe 7 : Statuts de la Société philosophique d'Édimbourg

PROPOSALS FOR THE Regulation of a Society For Improving Arts end Sciences, And particularly *Natural Knowledge*.

I. THE Society, at the first Institution, shall consist of Forty five Members, one third of whom, at least, shall be Gentlemen who do not make Philosophy or Physick their particular (2) Profession. The Number of Members may afterwards be increased, if two thirds of the Members present at the annual Meeting for Elections agree thereto, but shall always de limited.

II. EVERY Person, at the Admission, shall promise that he will endeavour to pursue the Ends proposed by the Institution of this Society, for the Improvement of Arts and Sciences, and to undertake any Enquiry or Experiment recommended to him by the Society who shall defray the necessary Charges thereof.

III. ALL Elections and Questions shall be determined by ballot ; and every Member shall give his Word of Honour that he shall not bind himself by promise, or in any manner of way, how he shall ballot on any Occasion.

IV THE Members of this Society, at their first Meeting, shall distinguish themselves into two Classes of Ordinary and Extraordinary Members; the Ordinary being such as do engage, each in his Turn, to give in a Paper or Memorial to be read in a Meeting of the Society. The Extraordinary Members, who are not under so strict an Obligation, shall not Exceed ….. in Number.

(3)V. THAT the Time of the Meeting of the Society may be employed to promote the End of the Institution, and for the better Regulation, Government and Policy of the Society, there shall be chosen at the first Meeting of the Society Thirteen Persons, whereof eight at least shall be of the Ordinary Members, to compose a Council for managing the Affairs of the Society ; and out of these thirteen shall be chosen in the same manner a President, two Vice-President, two Secretaries, and a Treasurer, to continue in their respective Offices, till other fit Persons be chosen into the said Offices, on the Day appointed for the annual Election. Of this Council, Six, with the President, or one of the Vice-Presidents, shall be a *Quorum*.

VI. ON the first *Thursday* of *December* 1737, and annually thereafter, the Society shall chuse Eight of the former Counci, and five other Members as the Council for the ensuing Year ; and immediately after shall proceed to elect a President, two Vice-President, two Secretaries, and a Treasurer.

VII. ON or before the first *Thursday* of *July* 1737, and yearly thereafter sometime betwixt the annual Election, and first *Thursday* of *July* following, each Member shall pay to the Treasurer one (4) Guinea for purchasing Instruments or Books, making Experiments, and for defraying other Charges of the Society. It is however hereby provided, That the Council shall have Power of exempt from these Payments such Members as they shall judge proper.

VIII. THE Treasurer shall advertise all the Members a Month before the Term of Payment, and likewise before the annual Election ; and every Member who shall neglect or refuse to pay the above Contribution at the Time appointed shall forfeit his place in the Society ; but it shall be in his Power to redeem the same, by paying two Guineas to the Treasurer, before, or at the next Meeting for the annual Election : otherwise he shall be incapable of being re-elected a Member during the Pleasure of the Society. But this Law is not to be extended to any Member who shall happen not to be within *Great Britain* or *Ireland* at the Time.

IX. AFTER the first Election of Council and Officers, the Order and particular day on which every ordinary Member is to present a Paper to the Society, is to be determined by Lot; the first Diet being at least Six Months after this Meeting, and to go on in a Rotation.

(5) X. EVERY ordinary Member who does not deliver his Paper on the Day appointed, shall, for the first Neglect, incur a Mulct of Half-a-Guinea ; if he does not give in his Paper in the next Course, he shall be fined in a Guinea ; and, for the third Neglect, shall forfeit his Place.

XI. THE society shall meet on the first *Thursday* of every Month except in *September* and *October*, in one of the Chambers in the College belonging to any of the Professors who are Members, at four o'Clock in the Afternoon, until some other convenient Place shall be appointed.

XII. EVERY Member, who shall be absent from the stated Meetings of the Society, if he is within the Kingdom, shall be fined in a Shilling, for each Meeting. But the Council shall have Power to exempt from these Fines certain Members, whose constant Residence and Business lies at a considerable Distance.

XIII. IN all Meetings the President, or in his absence, the first Vice-President; and if both are absent, the second Vice-President, shall regulate the Conversation, keep good Order, appoint Meetings of the Council, and summon extraordinary Meetings of the Society.

(6) XIV. THE Provinces of the two Secretaries may be distributed in such a Manner, that one of them shall have the collecting and reporting what relates to the general Parts of Natural Philosophy ; the other, what is more particular. Geometry, Astronomy, Mechanicks, Opticks, and some of the general Parts of Geography may belong to the former. Anatomy, Medicine, Chemistry, Botany, what relates to Metals and other

Minerals, and the natural History of the Country, to the latter. The Secretaries are to write down all the Transactions, Orders, and Resolutions of the Society, and afterwards to record them in a Journal-Book ; to insert all the Statutes or Laws in a Statute-Book ; to keep Copies of all Letters and Queries by written Order of the Society ; to lay up in a safe Place the Memoirs of Members and Correspondent, taking care that no surreptitious Copies or Excerpts be taken from any of the Books or Papers of the Society. One of the Secretaries, whom the Council shall appoint, shall have the Charge of all Books, Instruments, Models and Curiosities of Nature or Art, gifted to, or purchased by the Society; at the Delivery of which to the Secretary; their Names or Titles, with a Value fixed by the Council, are to be inserted in two Books or Catalogues, under their proper Classes. One of which Books is to be kept by the President and the other by the Secretary appointed.

(7) XV. THE Treasurer shall collect and deburse the Money of the Society, but is not to lay out any Sum exceeding Ten Shillings at one Time, and on one Account, without an Order of the Council, or at least of the President, or one of the Vice-President, and two of the Council, by a Writing under their Hands. He shall keep an exact Account of what Money he has received or debursed for the Society, and every three Months shall lay before the Council an Account of his Debursements. The Treasurer's annual Account and Vouchers shall be laid before the Society at the first monthly Meeting after the Election ; and if another Person has been chosen Treasurer at the preceeding Election, the late Treasurer shall then pay to his Successor in Office the Ballance of Cash in his Hands, if there happens to be any, or give Security for the same, before he is discharged by the Society.

XVI. AT the annual Meeting for Elections, the Society shall appoint a Committee to audite the Treasurer's Accounts for the preceeding Year, and to lay the same with the Vouchers before the next Meeting.

XVII. A Committee shall likewise be appointed at the annual Election to inspect all the Papers, Memorials and Letters in the Secretaries Hands, (8) and to prepare a List to be laid before the Council of what they think should be preserved, and what others may be thrown aside. The same Committee, with the Secretaries, shall likewise determine when there are a sufficient Number of Papers that seem sit to be published in a Volume, of which they shall give in a list to the Council, who may make such Alterations therein as they shall think proper : Then the list shall be laid before the Society, to b considered by the Members ; and, at the next Meeting, the Ballot, in which any Member may write his Objections against any of the Papers contained in the List. These Ballots shall be delivered to the President, who shall read them privately before the next Meeting ; and if he finds, in any of them, anything unfit to be read publickly, he shall suppress and destroy the Paper, but report the Objection itself, and any other Objections made to any of the Papers. After this the Members shall beat Liberty to reason fully on what Papers are fit to be published, and the Matter decided by a Majority of Ballots.

XVIII. AT the annual Meeting for Elections, if there happen to be any Vacancies in the Society, or if two thirds of the Members present agree to increase the Society, any Member may propose one or more Persons to be put upon List of Candidates; (9) and the Society shall determine by Ballot, what Persons shall be admitted Candidates, by voting every Person proposed separately then the List of Candidates being made up, every Member shall put into a box the Names of so many of the Candidates as there are Places to be filled up ; and the persons who have the Majority of Votes shall be declared Members.

XIX. THE Society shall consider and agree on fit Persons in different Places to be their Correspondents. These shall have Access to the Meetings of the Society, if they happen to be in Town when any Experiments are to be performed, or papers read ; but not without the Permission of the president, and Consent of the Member or Members whose Papers are to be read that Day ; and the Names of such Correspondents shall be mentioned in the Minutes. When any Matter of more private Concern is to be debated or voted in the Society, the Correspondents shall be desired to withdraw.

XX. THE Council shall at some convenient Time revise all the Statutes of the Society, and take into their Considerations what Alterations may be necessary, what Laws ought to be repealed, and what Laws they think proper to be made for the Advantage of the Society; and the President shall lay (10) the same in Writing before the Society, at least two Meetings before the annual Election, to be persuaded and considered by the Members, and such Amendments made thereon as seem proper. At the annual Meeting for Elections, the Laws proposed to be altered or repealed, and the new Laws proposed to be made shall be read and separately voted ; and every Amendment, or new Law that is approved of y two thirds of the Members present, shall being inserted in the Statute-book.

XXI. RESOLUTIONS or temporary Regulations taken by the Society are to be recorded by the Secretaries in the Journal-book, but are not to be esteemed concluded on, till they are read and agreed to another Meeting, when any Member may object against them ; and if he is seconded, it shall be determined by a Majority of Ballots to approve the Resolutions or not.

XXII. AFFAIRS proposed from the Council by the President shall be given in to a Meeting of the Society in Writing, and shall be put into the Secretary's Hands for the Perusal of Members till next Meeting.

XXIII. THE ordinary Meetings of the Society shall begin by one of the Secretary's reading an Abstract (11) of what passed at the former Meeting; then any thing that is new may be offered by any Member; Letters and Queries to Correspondents to be drawn up ; Memorials and Answers from Correspondents to be read and considered ; Experiments proposed to be made by some of the Members, and reported at the next, or some following

Meeting, and the Treasurer appointed to defray the necessary charges. Then the Paper of the ordinary Member appointed for that Day, and Papers presented by other Members to be read. After which any Member may propose such Difficulties or Objections as occur to him upon what has been read.

XXIV. SUCH Papers as cannot be judged of by reading in a publick Meeting, shall be referred to a Member, and a Day appointed when he shall give an Account and Judgment of the Performance.

XXV. NO Papers given in to the Society shall be communicated to any person not of the Society, nor lent out to a Member, without the Consent of the Author, and an Order of the Council upon the Borrower's Obligation to return it in a certain time, under such a Penalty as the Author or Council shall think sit. Books and Instruments belonging to the Society may be lent out, but to Members only, upon their Obligation to the Secretaries to return (12) them in a certain Time, under a Penalty exceeding the Value.

XXVI. IN the Meetings of the Society, no Conversations are to be allowed on Religious, or Political Disputes. But this is not to be understood as if these Reflexions should be unacceptable, which Enquiries into Nature suggest concerning the Wisdom of its Author, and the Beauty of its Workmanship.

XXVII. IN their Conversations, any warmth that may be offensive or improper for Philosophical Enquiries, is to be avoided. No injurious Insinuations or Expressions of Dislike are to be suffered. Every Member is to have the Intention of the Their Meetings any Remembrance of Differences, if there happen to be any, betwixt him and any other Member.

XXIX. AUTHORITY is to be held of no Weight in their Reasonings. The shew of Learning, and Quotation of Authors sparingly used in their Papers. Things to be mined, not Words.

Arguments to be chiefly drawn from proper Experiments and clear Consequence deduced from them, (13) or from evident Propositions. Metaphysical Subtiltie not to be insisted on.

XXIX. In making Experiments, and reporting then, great Caution and Accuracy is to be observed. The Members who report Experiments and Observations are to sign them.

Annexe 8 : *Traité des Fluxions* démonstrations plus figures

Dans cette annexe, nous avons inséré quelques parties du *Traité des Fluxions* (la traduction française est celle du père Pezenas). En effet, lors de la partie sur le *Traité des Fluxions*, nous avons fait référence à quelques démonstrations. Il nous apparaît important de donner les démonstrations entières et des points importants du *Traité*. Ainsi, nous commençons par donner la table des matières de la traduction française du père Pezenas, puis l'énoncé des 15 théorèmes, puis nous reproduisons le chapitre cinq sur les progressions géométriques, et enfin, nous avons insérer les articles essentiels sur la méthode des fluentes du livre I.

Table des matières contenues dans le premier volume

L'augmentation d'un triangle partagée en deux parties, dont l'une mesure la génération du mouvement, et l'autre son accélération,
Théorie des mouvemens accélérés ou retardés uniformément,
De la Fluxion d'un rectangle,

- **Ch. III :Des Fluxions de figures planes curvilignes**

De la Fluxion d'une aire dont les ordonnées sont supposées parallèles,
Corollaires généraux relatifs à la théorie du mouvement,
De la Fluxion de l'aire d'un cercle formé par une ligne droite roulant autour d'un centre donné,
Des figures curvilignes semblables,

- **Ch. IV : Des Fluxions des solides**

Eclaircissement sur les secondes et troisièmes Fluxions

- **Ch. V : Des Fluxions des quantités qui sont en progression Géométrique, et dont le premier terme est invariable**

- **Ch. VI : Des Logarithmes et de Fluxions des quantités logarithmiques**

Invention des Logarithmes, par le Lord Neper,
Des Fluxions des quantités croissant ou décroissant proportionnellement,
Des Fluxions des quantités représentées par des puissances, dont l'exposant est variable ou irrationnel,
Des secondes, troisièmes Fluxions d'une quantité qui croît proportionnellement,
Théorêmes pour l'approximation de la valeur des Logarithmes,
Des différens systèmes de Logarithmes, et de la raison appelée ratio modularis,
De la courbe logarithmique,
Des Aires hyperboliques,
De l'analogie qui se trouve entre les Arcs circulaires et les Logarithmes,
hh

- **Ch. VII : Des Tangentes des lignes courbes**

Définitions,
De la Fluxion de la base, de l'ordonnée, et de la courbe,

De la Fluxion d'un arc, et de ses sinus, tangentes, sécantes, etc.,

Des Fluxions d'une courbe dont le rayon est tiré d'un point donné, l'arc circulaire étant décrit de ce point comme centre,

Des Fluxions des angles,

Théorêmes concernant les Tangentes,

- **Ch. VIII : Des Fluxions des surfaces courbes**

Lemmes concernant les surfaces courbes,

De la Fluxion d'une surface courbe,

Des surfaces formées par un arc circulaire mû autour d'une corde quelconque,

Des surface formées par quelque arc que ce soit, du centre de gravité de chaque arc : du Théorême de Guldin,

- **Ch. IX : De la règle ordinaire pour trouver les plus grandes et les plus petites ordonnées**

Analogie entre la Méthode inverse des tangentes et la quadrature des figures,

Règle plus exacte pour trouver les plus grandes et les moindres ordonnées,

Règle semblable pour trouver les points d'inflexion contraire,

Des points de rebroussement de différentes espèces,

Des plus grands et des moindres rayons qu'on puisse tirer d'un point donné à une courbe,

Autres règles pour trouver les points d'inflexion et de rebroussement,

- **Ch. X : Des asymptotes des lignes courbes, etc.**

Définition de l'asymptote. Exemple de cette espèces de lignes,

Des parties de la grandeur Géométrique,

Des asymptotes, et des aires terminés [sic] par ces lignes et par des courbes,

Des solides produit par des aires,

Exemples de construction pour déterminer les tangentes et les asymptotes décrites par la révolution des lignes ou des angles,

Théorêmes pour découvrir si une figure a une asymptote, et si l'aire terminé [sic] par cette asymptote et la courbe a une limite assignable qu'elle le peut surpasser,

De la surface produite par une courbe qui roule autour de son asymptote,

Des lignes spirales et de leurs aires,

Des limite dont les sommes de progression approchent : Théorêmes pour l'approximation de ces limites,

- **Ch. XI : De la courbure des lignes, de ses variations et des différentes sortes d'attouchemens, etc.**

Définitions,

Théorêmes pour trouver la courbure et sa variation dans les figures Géométriques : et pour comparer les différens degrés d'attouchement d'une courbe et du cercle de courbure,

Exemples dans les sections coniques,

De la courbure qui est la plus petite que celle d'aucun cercle,

De la courbure qui est la plus grande que celle d'aucun cercle,

Autres Théorêmes sur la courbure et sa variation,

Propriété générale des lignes du troisième ordre, lorsqu'il s'y trouve un point duquel on peut tirer deux tangentes à la courbe,

De l'évolution des lignes,

Des caustiques par réflexion,

Des caustiques par réfraction,

Des rayons qui terminent l'arc-en-ciel intérieur, l'extérieur,

Des forces centripètes,

Raison de la vitesse dans une courbe à la vitesse dans un cercle donné à la même distance du centre, dans le vuide ou dans un milieu,

Construction de la trajectoire quand la vitesse est acquise par un des centres infinis,

Des mouvemens dans une section conique,

Cas particulier où un corps peut se mouvoir entre les plus hautes et les plus basses absides, et où il peut continuellement s'approcher ou s'éloigner du centre des forces,

De la résistance et de la densité d'un milieu, dans lequel est décrite une trajectoire donnée,

De la gravitation vers différens centres,

Du mouvement des nœuds de la Lune,

De la variation de l'inclinaison du plan de l'orbite de la Lune,

De l'accélération de l'aire décrite par la Lune autour de la Terre,

De la gravitation des fluides vers différens centres,

De la figure d'un fluide qui gravite vers un centre, et fait sa révolution autour d'un axe,

De l'intersection d'une courbe et du cercle de courbure,

(Fin du volume I)

Table des Matières contenues dans le second Volume

Suite du Livre premier,

Le même problème rendu plus général en suivant la même Méthode,
Solution du second problème général des isopérimètres par cette Méthode,
La propriété du solide de moindre résistance démontrée de la même manière,

- **Ch. XIV : De l'ellipse considérée comme la section d'un cylindre : de la pesanteur vers les corps : de la figure de la Terre, du flux et reflux de la Mer ; De l'attraction, etc.**

Propriétés générales des sections coniques, démontrées brièvement et considérée comme étant la projection d'un cercle sur un plan oblique,
De la gravitation vers des sphères et des sphéroïdes,
La densité des planètes «étant supposée uniforme, leur figure set exactement celle d'un sphéroïde aplati produit par une ellipse qui roule autour de son second axe,
De la figure des planètes et de la variation de la pesanteur à leur égard,
La pesanteur au pôle, et à l'équateur, ou à quelque autre point que ce soit de la surface d'un sphéroïde, mesurée exactement par des arcs circulaires ou logarithmes,
La pesanteur à l'axe du Sphéroïde ou au plan de l'équateur, mesurée exactement par la même Méthode,
De la figure de la Terre en particulier, supposant sa densité uniforme,
De la pesanteur envers un sphéroïde dont la densité est supposée variable,
De la figure de la Terre en supposant la densité variable,
De la figure de Jupiter, et de l'effet de sa forme sphéroïde sur le mouvement des ses satellites,
De la théorie des marées,
Des autres lois de l'attraction,

Fin du premier Livre

Livre Second : Des Fluxions dans la Méthode des Fluxions

- **Ch. I : Des Fluxions des quantités considérées abstraitement, ou comme étant représentée par les caractères généraux de l'Algèbre,**

De l'importance de quelques signes Algébriques,
Principes de cette Méthode appliquées à l'Algèbre,

Des Fluxions des puissances de toutes espèces,
Des Fluxions des produits et des quotiens,
Des Fluxions des Logarithmes,
Des secondes Fluxions et de celle d'un ordre plus élevé,

- **Ch. II : De la manière d'exprimer les Fluxions,**

Règles de la Méthode directe,
Règles fondamentales de la Méthode inverse de Fluxions,
Des suites ou séries infinies,
Recherches sur les Théorêmes du binôme et des multinômes,
Autres Théorêmes généraux,
Exemples de l'usage de ces Théorêmes,

- **Ch. III : De l'analogie entre les secteurs elliptiques et hyperboliques,**

Résolutions des Trinômes en diviseurs quadratiques,
Réduction des Fluentes en des arcs circulaires et logarithmiques, lorsque la Fluxion est exprimée par des quantités rationnelles,
De la réduction des Fluentes d'un ordre plus élevé en d'autres d'une forme plus simple,
Manière de réduire des fluentes par les mêmes règles lorsque la Fluxion renferme un binôme ou un trinôme irrationnels,
De la réduction des fluentes à des arcs hyperboliques et elliptiques,

- **Ch. IV : De l'aire des figures quand leur ordonnée est exprimée par une fluente,**

De l'aire quand l'ordonnée et la base sont exprimées par des fluentes,
Exemples de la manière de mesurer le total de l'aire ou la fluente par des arcs circulaires ou des logarithmes, lorsqu'il ne paroît point que cette fluente puisse se réduire généralement aux mêmes mesures,
Théorêmes dérivés de la Méthode des Fluxions pour le calcul des sommes de progression par les aires, et réciproquement,
Théorêmes pour trouver la somme d'une puissance, positive ou négative, des termes d'une progression arithmétiques et pour trouver les sommes de leurs logarithmes,
Résolution du problème concernant la raison de la somme de tous les coefficiens de la puissance d'un binôme au coefficient du terme moyen,
Du calcul des aires par les ordonnées équidistantes,

Théorêmes dérivés de la Méthode des Fluxions pour interpoler les termes intermédiaires des séries,

- **Ch. V : Des règles générales pour la résolution des Problèmes par les calculs, avec des exemples,**

Règles pour déterminer les tangentes,
Des plus grandes et des moindres ordonnées,
Des points d'inflexion et de rebroussement,
Du centre de courbure,
Des caustiques par réflexions et par réfraction,
Des forces centripètes,
Construction de la trajectoire décrite par une force qui est en raison inverse du maximum de la distance par les logarithmes, pour des cas particuliers,
Dans ces deux cas, un corps peut s'éloigner continuellement du centre sans jamais arriver à une certaine hauteur, ou il peut toujours s'en approcher sans descendre plus bas qu'à une certaine distance,
Construction de la trajectoire dans les autres cas,
Règles pour le calcul du temps de la descente le long d'une courbe donnée,
Du temps de la descente dans un arc circulaire fini, mesuré par les arcs des sections coniques,
Les mêmes règles par les séries infinies,
Règles concernant le calcul des mouvemens dans un milieu,
Règles pour déterminer la figure de la chaînette, et des lignes de la plus vite descente,
Règles pour le calcul des solides, des arcs et des surfaces curvilignes,
Calcul des parties méridionales d'un sphéroïde par les arcs circulaires ou les logarithmes,
Mesurer la pesanteur d'un sphéroïde au pôle ou à l'équateur par le moyen des arcs circulaires ou des logarithmes, quand l'attraction de ses particules est en raison inverse d'une puissance quelconque à sa distance,
Des centres de gravité et d'oscillation des figures,
De la proportion que la puissance doit avoir avec le poids à élever pour qu'une machine produise le plus grand effet possible dans un temps donné,
De la même proposition en ayant égard au frottement,

Fin de la Table du second Volume

Les quinze Théorèmes Généraux du *Traité des Fluxions*

Ces quinzes théorèmes sont situés dans le *Traité* dans le premier chapitre du livre un à la suite des définitions et des axiomes. Nous n'avons pas reproduit les démonstrations.

Théorème I : Les espaces décrits par un mouvement uniforme sont en même proportion, l'un à l'autre, que les tems employés à les décrire.

Théorème II : Les espaces parcourus par un mouvement uniforme, sont l'un à l'autre en même proportion que les espaces parcourus dans les mêmes tems par un autre mouvement uniforme.

Théorème III : Si les espaces, qui sont parcourus dans le même tems par deux mouvemens uniformes ou variables, sont toujours égaux l'un à l'autre, les vitesses de ces mouvemens seront égales à chaque terme ou point du tems.

Théorème IV : Si les vitesses de deux mouvemens sont toujours égales entre-elles, les espaces parcourus dans le même tems seront égaux.

Théorème V : Lorsque les espaces parcourus par deux mouvemens dans le même tems, sont toujours en raison constante l'une à l'autre, les vitesses de ces mouvemens, sont toujours dans la même raison invariable.

Théorème VI : Lorsque les vitesses de quelques mouvemens sont toujours entre-elles en raison invariable, les espaces parcourus en même tems seront toujours dans la même raison.

Théorème VII : Lorsque l'espace parcouru par un mouvement est toujours égal à la somme des espaces parcourus dans le même tems par d'autres mouvemens, la vitesse du premier mouvement est toujours égal à la somme des vitesses des autres mouvemens.

Théorème VIII : Lorsque la vitesse d'un mouvement est toujours égale à la somme des vitesses des quelques autres mouvemens, l'espace parcouru par ce mouvement est égal à la somme des espaces parcourus, dans le même tems par ces autres mouvemens.

Théorème IX : Lorsqu'un point P parcourt une ligne Aa avec un mouvement d'une certaine espèce, et qu'un autre point p parcourt les mêmes espaces sur cette ligne Aa en tems égaux, mais dans un sens contraire, ou avec une direction opposée, leurs vitesses en un terme donné de cette ligne seront égales.

Théorème X : Les mouvemens des points P et p dans la ligne Aa étant uniformes, EM étant toujours dérivés de AP, et Em de la même manière de Ap, la vitesse du point M à chaque point de la ligne Ee sera à la vitesse du point m au même terme de cette ligne, comme la vitesse de P est à la vitesse de p.

Théorème XI : Le mouvement du point P sur la ligne Aa étant uniforme, et celui de p sur la même ligne étant accéléré, ou retardé continuellement, soient leurs vitesses égales en D. Alors, EM étant toujours déterminée par AP et Em par Ap de la même manière, lorsque P arrive en D, supposons que M arrive en L avec un mouvement accéléré, ou retardé continuellement, la vitesse de m en L sera égale à la vitesse de M en L.

Théorème XII : La vitesse d'un mouvement qui est accéléré ou retardé continuellement, est en chaque terme du tems, à la vitesse d'un mouvement uniforme, en une raison qui est toujours limite entre la raison des espaces parcourus par ces mouvemens en tems égaux avant ce terme, et la raison des espaces parcourus par les mêmes mouvemens en tems égaux juste après ce terme.

Théorème XIII : L'espace parcouru par un mouvement accéléré ou retardé continuellement, est à l'espace parcouru dans le même tems par un mouvement uniforme, en une raison qui est limite entre la raison des vitesses de des mouvemens au commencement du tems, et leur raison à la fin de ce tems.

Théorème XIV : Le mouvement du point P étant uniforme, mais celui du point M continuellement varié, soit la vitesse de P à la vitesse de M en L, comme une ligne donnée Dg est Lc ; soit Dg toujours à LS, parcouru par M dans le même tems. Alors, en diminuant les espaces DG et LS continuellement, CS peut devenir plus petit qu'aucune grandeur assignable.

Théorème XV : Soit le point M qui décrit Ee d'un mouvement variable, et qui, dans le même tems qu'il décriroît LC par son mouvement en L continué uniformément, auroit décrit LS, si l'accélération ou le retardement de son mouvement auroit été continué uniformément depuis ce terme. Je dis que si la vitesse de M en L, ou la première Fluxion de LE est représenté par LC, la seconde Fluxion de LE sera mesurée par 2CS.

Le Chapitre V du *Traité des Fluxions* : « Des Fluxions des quantités qui sont en progression Géométrique, et dont le premier terme est invariable. »

140) Que les droites E*e*, F*f* se coupent à angles droits en A et AS, AP, AL étant en progression géométrique (fig. 67.), soit SA prise sur AF, AP sur AE, et AL sur A*f* ; SPL sera toujours un angle droit.

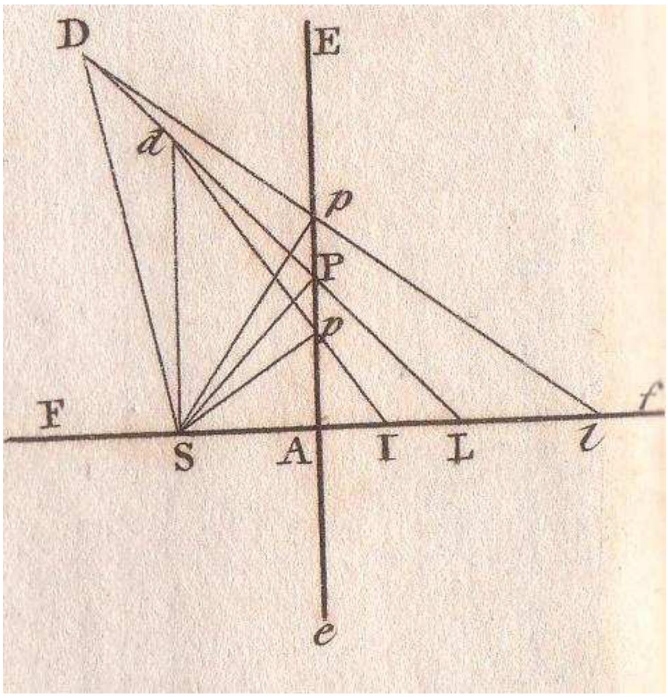


Fig. 67.

Soit SA invariable, et pendant que le point P parcourt d'un mouvement uniforme les droites égales pP et P*p*, soit le point L qui décrive lL et *l*L : prolongez lp et *lp* jusques à la rencontre de LP prolongée en *d* et D. Puisque l'angle SP*d* est égal à Sp*d*, l'angle PSp sera égal à L*d*l. (parce que P et p, S et *d* sont à la circonférence du cercle qui a pour diamétre *d*S.) Mais puisque SPL est droit, l'angle SPp est égal à *d*Ll. Donc les triangles PSp, L*d*l sont semblables. On prouvera de même que les triangles PS*p*, LD*l* sont semblables. Donc L*l* est à P*p*, comme DL est à SP, et Ll est à Pp, comme *d*L est à SP ; en sorte que L*l* est à Ll, comme DL est à *d*L. Mais l'angle PSD est égal à D*p*E ou *p*SA, (à cause du cercle qui passe par les points D, S, P et *p*, et qui donne *p*SD égal à DPE, ou à PSA, et par conséquent, ajoûtant PS*p*, on aura PSD égal à *p*SA) et l'angle P*Sd* est égale à Pp*d*, ou pSA : donc l'angle PSD surpasse PS*d* de DS*d* égal à *p*Sp : en sorte que DL étant plus grand que *d*L, L*l* est plus grand que Ll. Donc lorsque le mouvement de P est uniforme, les espaces parcourus par L, en tems égaux, qui se succedent, croissent continuellement, et son mouvement est accéléré.

141) Puisque l'angle *p*SD est égal à *p*PD, ou PSA, il est moindre que *p*S*l*, et *p*D moindre que *pl*. Donc D*l* est moindre que 2*pl*. Mais l'angle pS*d* étant égal à *d*P*p* ou PSA est plus grand que pSl. Donc p*d* étant plus grand de pl, dl est plus grand que 2pl.

142) La vitesse de L est à la vitesse de P, comme 2AP est à SA. Car si la raison de la vitesse de L à celle de P étoit plus grande que celle de 2AP à SA, supposons qu'elle soit la même que celle de 2A*p* (quantité plus grande que 2AP,) à SA, ou de 2*pl* à S*p*. Puisque D*l* est plus petite que 2*pl*, la vitesse de L sera à la vitesse de P en plus grande raison que D*l* à S*p*, ou (les triangles S*p*P, D*l*L étant semblables) que L*l* à P*p*. Mais le mouvement de L étant accéléré, pendant que celui de P est uniforme, il suit du premier Axiome que L*l* est plus grand que l'espace qui seroit décrit par L, si son mouvement étoit continué uniformément, pendant que P décrit P*p*. Donc la vitesse de L est à la vitesse de P, en moindre raison que L*l* à P*p* : ce qui étant contradictoire, il suit que la vitesse de L n'est pas à la vitesse de P, en plus grande raison que celle de 2AP à SA. Si elle étoit en moindre raison, et la même que celle de 2Ap à SA, ou de 2pl à Sp ; qui étant moindre que celle de *d*l à Sp (parce que *d*l est plus grand que 2pl,) la vitesse de L sera à la vitesse de P, en moindre raison que celle de Ll à Pp. Mais il suit du second Axiome, que Ll est à Pp, en moindre raison que la vitesse de L à la vitesse de P : ce qui étant contradictoire, il est clair que la vitesse de L est à la vitesse de P, ou la Fluxion de AL à la Fluxion de AP, comme 2AP est à SA.

143) Que les angles SPL, LMN, MNR, etc. soient toujours droits, et que les points angulaires P, L, M, N, R, et décrivent toujours des droites AE, A*f*, A*e*, AF, AE, etc. (Fig. 68.)

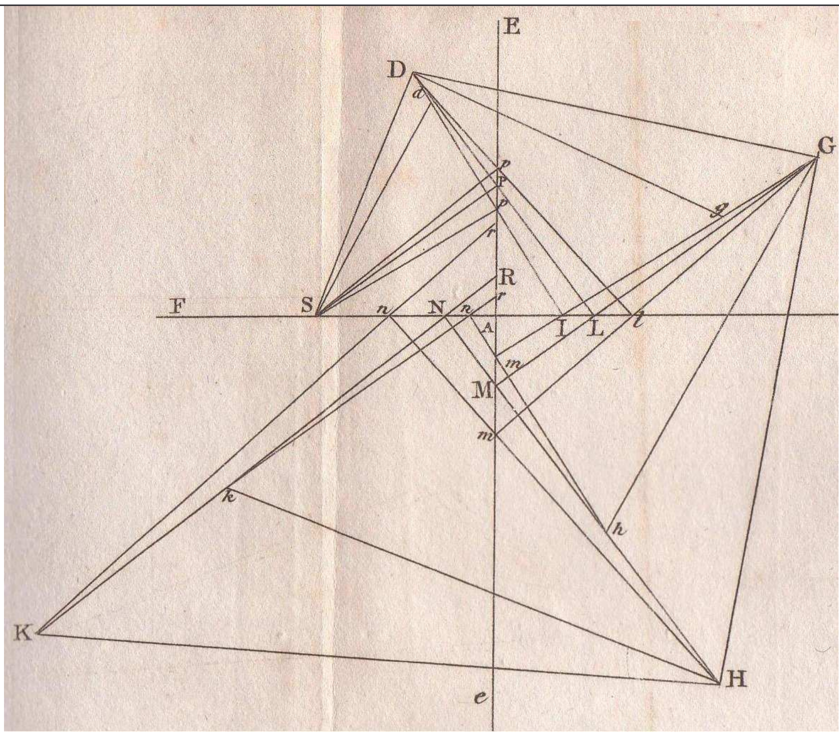


Fig. 68.

Alors SA, AP, AL, AM, AN, AR, etc. seront toujours une suite de Quantités en progression géométrique continue, dont le premier terme invariable est SA. Pendant que le point P décrit des lignes égales pP, P*p* sur la ligne AE ; que les points L, M, N, R, etc. décrivent les espaces que les lignes lL et L*l*, mM et M*m*, nN, rR et R*r*, etc. sur les lignes A*f*, A*e*, AF, AE, les angles Spl, et S*pl*, plm et *plm*, lmn et *lmn* étant toujours droits. Que lp et *lp* rencontrent LP prolongées en *d* et D, que ml et *ml* prolongées rencontrent ML en *g* et G ; que nm et *nm*, rn et *rn*, etc. rencontrent NM, RN, etc. en *h* et H, *k* et K, etc. respectivement. Il est évident que les triangles PSp, L*d*l, M*g*m, N*h*n, etc. et les triangles PS*p*, LD*l*, MG*m*, NH*n*, RK*r*, etc. seront chacun une suite de triangles semblables. Il est aussi évident que les angles *p*SA, PSD, LDG, MGH, NHK, etc. et les angles pSA, PS*d*, LD*g*, MG*h*, NH*k*, etc. seront chacun une suite d'angles égaux, et que chaque angle de la première suite, surpassera toujours l'angle correspondant de la seconde par la différence *p*Sp.

144) Lemme VI *: Lorsque le premier terme d'une progression Géométrique est invariable, et que le second croît uniformément, chacun des termes suivans croît d'un mouvement accéléré.*

Puisque les triangles PSp, L*d*l, M*g*m, N*h*n, R*k*r, etc. sont semblables, les incrémens pP, lL, mM, nN, rR, etc. seront en même raison que les droites SP, *d*L, *g*M, *h*N, *k*R, etc. et les triangles PS*p*, LD*l*, MG*m*, NH*n*, etc. étant aussi semblables, les incrémens P*p*, L*l*, M*m*, N*n*, R*r*, etc. seront en même raison que les droites SP, DL, GM, HN, KR, etc. Donc pP étant égal à P*p*, lL est à L*l*, comme *d*L est à DL ; mM est à M*m*, comme gM est à GM, nN est à N*n*, comme *h*N est à HN ; rR est à *r*R, comme *k*R est à KR. Mais DL est plus grand que *d*L, GM que *g*M, HN que *h*N, KR que *k*R, et ainsi de suite ; parce que les angles PSD, LDG, MGH, NHK, etc. surpassent les angles PS*d*, LD*g*, MG*h*, NH*k*, etc. respectivement (l'excès étant toujours égal à l'angle *p*Sp) Donc L*l*, M*m*, N*n*, R*r*, etc. surpassent toujours Ll, Mm, Nn, Rr, etc. respectivement ; et le mouvement du point P étant uniforme, (en sorte qu'il puisse décrire des lignes égales pP, P*p* en tems égaux) les mouvements des points L, M, N, R, etc. seront continuellement accélérés.

145) Il est évident, que les lignes D*l*, G*m*, H*n*, K*r*, etc. sont respectivement plus petites que 2*pl*, 3*lm*, 4*mn*, 5*nr*, etc. mais que les lignes *d*l, *g*m, *h*n, *k*r, etc. sont respectivement plus grandes que 2pl, 3lm, 4mn, 5nr, etc. Car les angles *p*SD, *l*DG, *m*GH, *n*HK, etc. étant toujours égaux entre eux, et à l'angle PSA, et les angles *p*S*l*, *lpm*, *mln*, *nmr*, etc. étant aussi égaux, les derniers surpassent chacun les premiers de l'angle PS*p*. Donc comme *pl* est plus grand que *p*D et D*l* par conséquent plus petit que 2*pl*, ainsi G*l* est plus petit que 2*lm* et G*m* plus petit que 3*lm* ; H*m* est plus petit que 3*mn* et *Hn* plus petit que 4*mn* ; K*n* plus petit que 4*nr*, et K*r* plus petit que 5*nr*. De même les angles pS*d*, l*dg*, m*gh*, n*hk*, etc. étant toujours égaux à PSA, et les angles pSl, lpm, mln, nmr, etc. étant égaux, les premiers en surpassent toujours les derniers de PSp. Donc, comme p*d* est plus grand que pl, et par conséquent dl plus grand que 2pl ; ainsi *lg* est plus grand que 2lm et gm plus grand que 3lm ; m*h* plus grand que 3mn, et n*h* que 4nm, et n*k* plus grand que 4nr, et *k*r que 5nr, et ainsi de suite.

146) Proposition VIII : *La fluxion d'un terme AN d'une progression Géométrique dont le premier terme est invariable, est la Fluxion du second terme AP, en raison composée de la raison de ces termes, et de la raison du nombre des termes qui précèdent NA, à l'unité.*

La Fluxion d'un terme AN est à celle du second, en raison composée de la raison de AN à AP, et celle du nombre de termes qui précèdent AN à l'unité, c'est-à-dire, dans cet exemple, la Fluxion de AN est à celle de AP, comme 4AN est à AP. 1° Soit le mouvement de P est uniforme ; celui de N sera continuellement accéléré, par le Lemme VI. Si la raison de la vitesse de N est à celle de P, n'étoit pas celle de 4AN à AP, ou de 4AM à SA, qu'on le suppose comme celle de 4A*m* à SA, A*m* étant une ligne plus grande que AM. Les triangles SA*p*, A*mn* étant semblables, 4A*m* est à SA, comme 4*mn* est à S*p* ; mais 4*mn* est plus grand que H*n* (par l'art. 145) et 4*mn* est à *Sp* en plus grande raison que H*n* à S*p*, ou que N*n* à P*p*. Donc, la raison de la vitesse de N à celle de P est plus grande que celle de N*n* à P*p*. Mais le mouvement de N est accéléré pendant que celui de P est uniforme, il suit du premier Axiome, qu'un moindre espace que Nn seroit décrit par le mouvement de N continué uniformément, dans le tems que P*p* est décrit par P. Donc la vitesse de N est à la vitesse de P, en moindre raison que N*n* à P*p* : ce qui étant contradictoire, il suit que la raison de la vitesse de N à celle de P, n'est pas plus grande que celle de 4AM à SA, ou de 4AN à AP. Supposons qu'elle soit plus petite, ou comme 4Am à SA, Am étant moindre que AM. Alors 4Am étant à Sa, comme 4mn à Sp, et 4mn étant moindre que *h*n, (par l'art. 145) il suit que la vitesse de N est à celle de P, en moindre raison que *h*n à Sp, ou Nn à Pp. Mais par le second Axiome, le mouvement de N continué uniformément, décriroit un plus grand espace que Nn, de le tems que P décrit pP, et par conséquent la vitesse de N et à la vitesse de P, en plus grande raison que Nn à Pp ; ce qui étant contradictoire, la vitesse de N n'est pas à la vitesse de P, ni en plus grande, ni en moindre raison que celle de 4AM à SA, ou de 4AN à AP. Donc la Fluxion de AN est à la Fluxion de AP, précisément comme 4AN est à AP. Tous les autres cas de cette proposition, lorsque le mouvement de P est variable, se déduisent de celui-ci, par le onzième théorème général, et il est clair que cette démonstration peut s'appliquer de la même manière à tout autre terme de la progression Géométrique.

147) Proposition IX : *Les Fluxions de deux termes d'une progression Géométrique, dont le premier terme est invariable, sont en raison composée de la raison de ces termes, et de la raison des nombres qui expriment de combien de termes ils sont précédés dans la progression.*

Cela suit de la dernière Proposition, la Fluxion de AN, par exemple, est à la Fluxion de AM, comme 4AN est à 3AM. Car la Fluxion de AN est à celle de AP comme 4AN est à AP, par la dernière Proposition, et la Fluxion de AM est à celle de AP, comme 3AM est à

AP, par la même. Donc la Fluxion de AN est à la Fluxion de AM, comme 4AN est à 3AM, et il est clair que la même démonstration peut s'appliquer à tous les autres termes comparés ensemble.

148) Il suit de ce qui a été démontré, que si les mouvements des points P, L, M, N, R, etc. étoient continués uniformément, ils décriroient dans le même temps des lignes respectivement égales à SA, 2AP, 3AL, 4AM, 5AR, etc.

149) Les seconde, troisième, et plus hautes Fluxions de chaque terme de la progression, peuvent être représentées par certains multiples de termes précédens lorsque la première Fluxion du second terme AP est constante, (ou que le mouvement de P est uniforme) et qu'il est représenté par la droite invariable SA. Car la vitesse du point N, ou la première Fluxion de AN étant représentée par 4AM ; la Fluxion de sa vitesse, ou la seconde Fluxion de AN, pourra être représentée par 4 fois la Fluxion de AM, (qui est elle-même mesurée par 3AL) ou par 12AL ; la troisième Fluxion de AN est représentée par 24AP, (parce que la Fluxion de AL est représentée par 2AP sa quatrième Fluxion par 24SA, et elle n'a point de cinquième Fluxion.

150) Si A*u* est moyenne proportionnelle entre AL et Al, et que AP flue normalement, 2L*u* sera égal à la ligne qui auroit été produite par le mouvement, avec lequel AL flue étant continué uniformément, pendant le tems où P décrit P*p* ; et la différence entre *lu* et L*u* est ce qui est produit en conséquence de l'accélération de ce mouvement pendant ce tems. Car A*u* est à AL en raison sous-doublée de A*l* à AL, ou en raison de A*p* à AP, et L*u* est à P*p*, comme AL est à AP, ou comme AP à SA. Donc 2L*u* est à P*p*, comme 2AP est à SA, ou comme la vitesse du point L est à celle de P. Soient A*h*, et A*k* deux moyennes proportionnelles entre AM et A*m* ; si le mouvement étoit continué uniformément, pendant que P décrit P*p*, M décriroit une ligne égale à 3M*h*, si l'accélération de ce mouvement étoit continué uniformément depuis le même terme, et pour le même tems, il décriroit une ligne égale à 3*hk*, et ce qui seroit égal à trois fois la différence entre *hk* et M*h*. La différence entre M*m* et 3*hk*, ou à l'excès de la différence entre *hk* et M*h*, est tout ce qui est produit en conséquence de l'augmentation de cette accélération pendant le même tems. Les propositions, entre ces différences et les lignes qui mesurent la première, la seconde et la troisième Fluxion de AM paroissent aisément, et ont déjà été exposées dans le dernier Chapitre. Chaque terme a des Fluxions d'autant de degrés qu'il y a de termes qui le précèdent dans la progression, lorsque la fluxion de AP est invariable ; et l'incrément de chaque terme produit dans un tems donné, peut se diviser de cette manière et l'on peut

concevoir chaque partie formée en conséquence de la Fluxion respective. Mais tout cela sera mieux éclairci dans la suite.

Les Propositions XXIV et XXVII du livre I du *Traité des Fluxions*

Proposition XXIV (article 302) (fig. 70.)

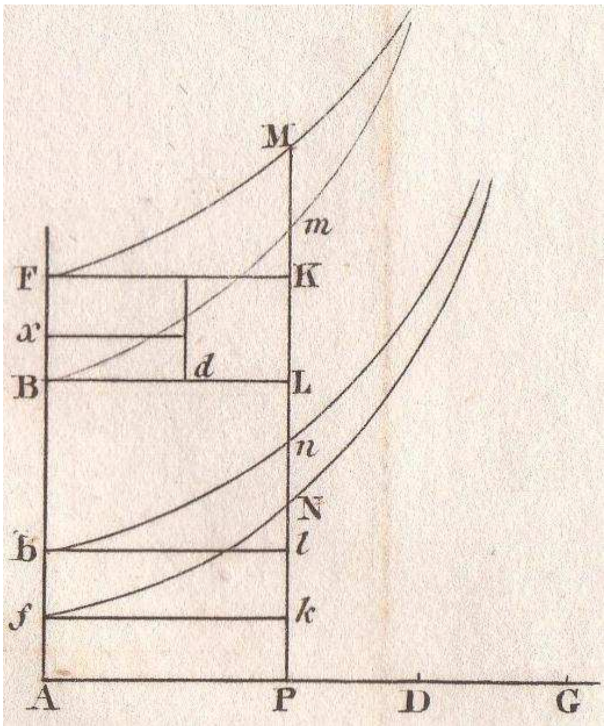


Fig. 70.

« Que la ligne B*m* soit une asymptote d'une espèce quelconque de la courbe FM ; la Fluxion de la base étant représentée par la droite donnée DG, que les Fluxions des ordonnées PM, P*m* soient toujours mesurées par les droites PN, P*n*, et lorsque PM est égal à AF, soient P*m*, PN et P*n* égales à AB, A*f*, A*b*, respectivement : le rectangle sous BF et DG sera la limite de l'aire *bf*N*n*. »

La courbe B*m* est asymptote de la courbe FM, (art. 286.) lorsque Mm décroît continuellement, ensorte qu'il devienne égal à une droite, quelque petite qu'elle soit donnée, en prolongeant la figure, mais sans jamais s'évanouir. Soient FK, BL, *fk*, et *bl* parallèles à la base qui rencontrent PM en K, L, *k*, *l*, respectivement. Puisque PN est à DG, comme la fluxion de l'ordonnée PM à la fluxion de la base AP, il suit que la Fluxion de l'aire APN*f* est égale à la Fluxion du rectangle sous DG et PM : donc l'aire APN*f* est égale au rectangle sous DG et KM, par le Théorême IV. Puisque AP et KM commencent en même tems à se former. De même, l'aire AP*nb* est égale au rectangle sous DG et L*m*. Et par conséquent l'aire *bf*N*n* (différence de AP*nb* et APN*f*) est égale au rectangle sous DG, et la différence entre L*m* et KM, ou sous l'excès de BF sur M*m*. Donc l'aire *bf*N*n* est toujours moindre que le rectangle sous DG et BF ; mais elle approche continuellement de ce rectangle comme de sa limite, puisque M*m* décroît continuellement et devient moindre qu'aucune droite donnée, en prolongeant la figure. Nous avons supposé que les lignes B*m* et FM étoient du même côté de AP ; mais la démonstration s'applique aisément aux autres cas. On voit pourtant que cette Proposition ne s'étend pas au cas où le point m se trouve dans une asymptote rectiligne de la courbe FM, laquelle est perpendiculaire à la base ; car AF et PM ne rencontrent jamais cette asymptote, lui étant parallèle.

Proposition XXVII (articles 325-326)

« Que Pr ordonnée de la figure APrg soit à PN ordonnée de la figure APNF, en une raison qui approche d'une raison assignable comme de sa limite, pendant que les figures prolongées; soit PN réciproquement comme une puissance de BP; si l'exposant de cette puissance est plus grand que l'unité, et si l'on prend AP sur AB prolongée au-delà de A, les aires APNF, APrg auront chacune leurs limites; mais si cet exposant n'est pas plus grand que l'unité, ces aires pourront être prolongées jusqu'à surpasser tout espace donné. C'est le contraire lorsqu'on prend AP de A vers B »

Démonstration: Que IM dans l'article 293, soit réciproquement comme une puissance de CI (ou BP) dont l'exposant est un nombre positif ou une fraction exprimée par m, la Fluxion de IM sera à celle de CI (ou de la base AP) en raison composée de celle de IM à CI, et de celle de m à l'unité (articles 167 et 168). Que PN soit à DG (comme dans l'article 293) comme la Fluxion de PM (ou de IM) est à la Fluxion de la base AP: PN sera en raison directe de IM et inverse de BP, et par conséquent en raison inverse d'une puissance de BP dont l'exposant surpasse l'unité de m. Lorsqu'on prend AP sur BA prolongée au-delà de A, l'aire APNF est toujours moindre que le rectangle sous *a*K et DG, qui est sa limite, par l'article 293., mais si l'on prend AP depuis A vers B, l'aire APNF peut se prolonger jusques à ce qu'elle surpasse tout espace donné et n'a point de pareille limite, par l'article 294. Donc, au contraire, si PN est réciproquement comme une puissance de BP dont l'exposant surpasse l'unité d'un nombre entier ou d'une fraction, quelque petite qu'elle soit, l'aire

APNF a une limite, lorsqu'on le prend de B vers A. De là, on conclut aisément (et l'on peut démontrer de même par l'article 295) que PN étant réciproquement comme une puissance de la base, dont l'exposant est moindre que l'unité, l'aire APNF a une limite qu'elle ne peut jamais surpasser, si l'on prend AP de A vers B, mais qu'elle n'a point de telle limite si l'on prend AP sur BA prolongée au-delà de A. Cela étant supposé, puisque la base AP est asymptote de la figure APNF, et que la raison de Pr à PN approche d'une raison assignable comme de sa limite, pendant que la figure est prolongée, il suit que AP est aussi une asymptote de la figure APrg. Supposons que Ag soit une ordonnée à telle distance de B, que lorsqu'on prend AP sur BA prolongée au–delà de A, Pr ne se confond jamais avec une asymptote que la figure APrg pourroit avoir parallèlement aux ordonnées, et puisque la raison de Pr à PN n'est jamais plus grande qu'une raison assignable, pendant que AP est une distance assignable et que la limite dont leur raison approche (soit en croissant ou en décroissant) est aussi assignable; il suit qu'il peut y avoir une raison d'une plus grande quantité finie à une moindre qui peut surpasser chaque raison de Pr à PN. Que Ah soit à AF, et l'ordonnée Px toujours à PN en cette raison ; la figure APxh sera toujours à APNF en cette même raison, (par l'article 111). Donc s'il y a une limite à laquelle l'aire APxh, ne peut jamais monter, puisqu'elle est à la première, comme Ah est à AF. Mais Px est toujours plus grand que Pr, et l'aire APNF pouvoit être prolongée jusques à surpasser tout l'espace donné, c'est-à-dire , si elle n'avait point de limite, soit Px à PN en une raison invariable moindre que la plus petite raison de Pr à PN, l'aire APxh sera toujours moindre que APrg, mais puisque qu'elle est en raison invariable avec l'aire APNF, il suit qu'elle n'a point de limite. Donc il n'y point de limite que l'aire APrg ne puisse surpasser. Lorsque la figure APNF a une asymptote; et l'on démontrera de même que les aires terminées par une ordonnée donnée Ag (que l'on suppose prise assez près de B pour que la figure APrg n'ait pas d'asymptote parallèle aux ordonnées entre A et B) par l'asymptote BV et par toutes les courbes, ont toutes deux les limites, ou peuvent toutes deux être prolongées jusques à surpasser tout l'espace donné. Donc tout ce qui a été démontré de l'aire APNF doit s'appliquer à l'aire APrg.

Nous donnons aussi les articles 111., 293. et 295.

Article 111) Corollaire II : Lorsque les Fluxions des bases de deux figures produites dans le même tems, sont égales, les Fluxions des Aires sont comme leurs ordonnées, et lorsque les ordonnées sont toujours en raison donnée, (comme dans le cas exposé dans l'Introduction, page vii, fig. 1) les aires produites dans le même tems sont toujours dans la même raison donnée, par le 6ème Théorême général. Lorsque les Fluxions des bases sont en raison données réciproque des ordonnées, les Fluxions des aires sont égales ; et lorsque les Fluxions des bases sont toujours l'une à l'autre en cette raison, les aires produites dans le même tems sont égales, par le 4ème Théorême général.

Article 293) (Fig. 71)

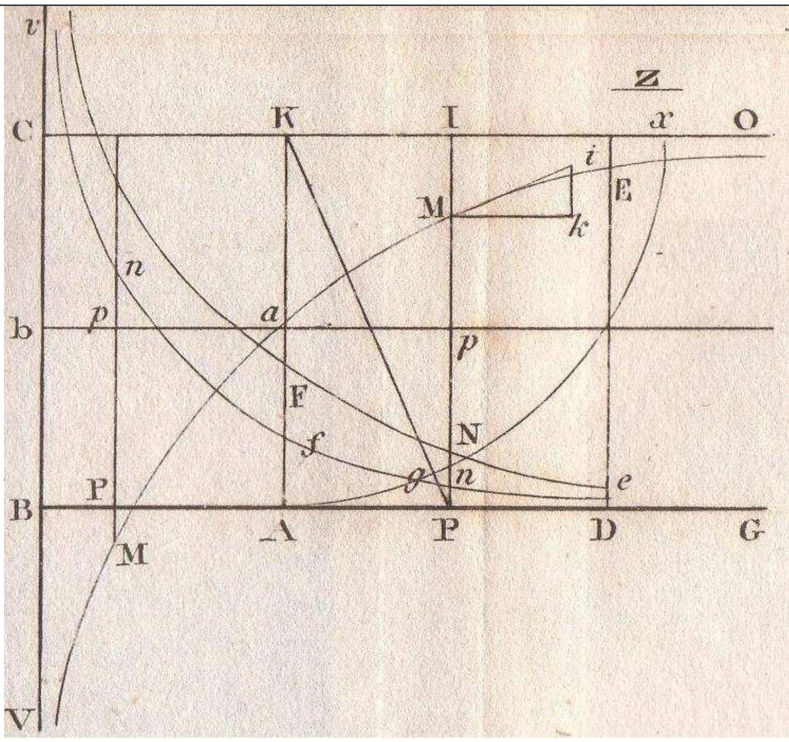


Fig. 71.

La droite KI, parallèle à la base AP, étant asymptote d'une courbe *a*ME, que PN, l'ordonnée de la courbe FN*e*, soit toujours à la droite donnée DG, comme la Fluxion de l'ordonnée PM est à la Fluxion de la base, et que PM rencontre *ap* parallèlement à la base en *p*. La base AP sera asymptote de la courbe FN*e*, et l'aire APNF sera toujours moindre que le rectangle sous K*a* et DG, quoique la base AP et la courbe FN soient prolongées à une distance aussi grande que l'on voudra ; mais elle approchera continuellement de ce rectangle, en sorte que leur différence pourra devenir plus petite, qu'aucun espace donné, en prolongeant la figure. Car il paroît, comme dans l'article 248. que l'aire APNF est toujours égale au rectangle compris sous *p*M et sous la droite donnée DG, et par conséquent toujours moindre que le rectangle sous K*a* et DG, d'un espace égal au rectangle sous JM et DG, lequel peut devenir plus petit qu'aucun espace donné sans jamais s’anéantir ; parce que IM peut devenir plus petite qu’aucune droite donnée, sans jamais disparoître, puisque KI est supposée asymptote de la courbe *a*ME.

Article 295) (Fig. 72)

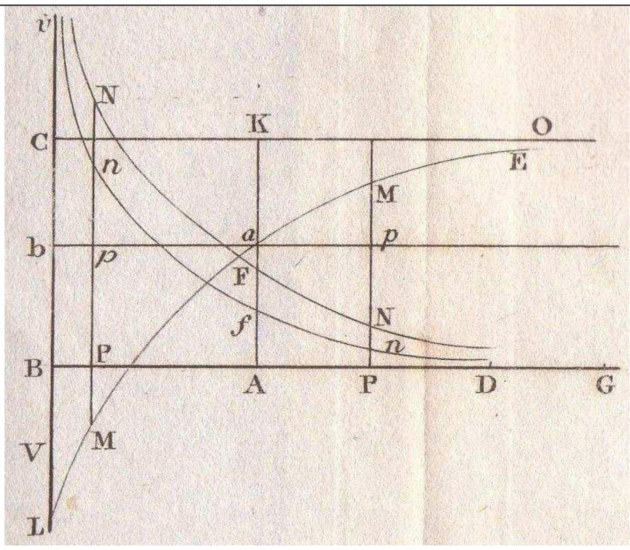


Fig. 72.

Mais lorsque la courbe EM*a* continuée de l’autre côté de A touche la droite CV en L, la droite C*u* est encore asymptote de la courbe décrite par N, continuée de l’autre côté de F, parce que la raison de la Fluxion de PM à celle de la base, ou de PN à DG, peut surpasser toute raison donnée, pendant que P décrit AB ; mais dans ce cas l’aire APNF (qui est égale au rectangle sous *p*M et DG) est toujours moindre que *b*L. En ce cas, la courbe FN étant continuée le long de deux asymptotes Bd, Bu à volonté, l’aire, terminée par les deux ordonnées PN, PM, qui sont de différens côtés de AP, est toujours moindre que le rectangle sous CL et DG, dont elle s’approche néantmoins comme de sa limite, lorsque la figure est prolongée continuellement des deux côtés. Et lorsque la courbe est supposée prolongée à l’infini des deux côtés, et que les asymptotes Bd, Bu sont aussi supposées toutes deux infinies, toute l’aire comprise entre la courbe et ses deux asymptotes est dite devenir égale à ce rectangle sous CL et DG.

Annexe 9 : Tables pour le projet d'annuité pour les veuves

National Archive of Scotland, CH9/17/16.

Lettre du 3 juin 1743 de Maclaurin à Wallace.

Having considered the scheme for providing an annuity for minister's widows and a stock for their children laid before the late general Assembly the 12th. Of May 1743 together with the alterations and amendments made upon the same by the genl. Assembly and my opinion being desired concerning the whole, I think myself obliged to say that the Design is so good that minute objections against the absolute perfection of the scheme seem to be improper after it has been so long under consideration and only observe that I have reason to be apprehensive that the capital will not rise so fast as is supposed in the scheme without deductions from the provisions proposed for the children. And as I am of the opinion that some deductions will be necessary in order that the proposed capital may be completed so it is most equitable that they should take place at the beginning of the scheme when they will have the greatest effect to promote the advancement of the capital and will require to be continued for a smaller number of years. The provisions however supposing these deductions to be allowed will be still abundantly advantageous. It is evident that this scheme must be advantageous to the Body of ministers taken complexely because of the tax on vacancies which I have reason to think will amount to more than is supposed in the scheme. It must be advantageous to the widows & children of ministers on a second account because the taxes are supposed to be payable not only by those who shall leave widows or children but likewise by such as shall leave neither. It must also be advantageous because a greater improvement may be made of large sums by faithfull Trustees and with less danger from the Hazards to which al things of this nature are subjected than of small annual sums by single ministers. For these and other reasons which it would be tedious to describe here at length I sincerely wish well to this design and cannot but be of opinion that if the scheme take place and be faithfully executed (as there is all the reason in the world to expect) it will prevent the unhappy circumstances to which ministers' widows and children are too often reduced. It is remarkably advantageous to those ministers who are advanced in years and they only seem to have any ground to complain of it who think they have no chance to leave a widow or child behind them. But as these are few in number so it can only be said that they shall do for their Brethren what their Brethren must have done for them if it had been their lot to have had their circumstances exchanged.

Colin Maclaurin

College of Edinburgh

June 3, 1743

Tables for the Widows Scheme, 1743

National Archives of Scotland, CH9/17/16

Table 1st Showing the Proposals of the fund according to the Doctrine of Chances. On supposition that Ministers was marryed or having Children and thereafter marrying pay for a Double Tax, and also that the 18 Widows left annually be of 50 years of age but the other provisions to be the same as in the scheme

Years of the Scheme	Number of the first 18 widows alive every year of the Scheme	The Total of Widows upon the Scheme	Sums due to all the Widows alive in every year of the scheme according to the Doctrine of Chances	Stock remaining after the Deductions
1	18,00	18,00	0137 18 06	5899 17 04
2	17,42	35,42	0404 17 09	8629 12 11
3	16,85	52,27	0663 02 04	11191 02 04
4	16,28	68,55	0912 12 04	13589 12 10
5	15,71	84,26	1153 07 05	15830 11 06
6	15,19	99,45	1356 03 02	17918 08 04
7	14,67	114,12	1610 19 04	21651 03 07
8	14,15	128,27	1827 16 05	23304 10 11
9	13,63	141,90	2036 14 00	24821 11 09
10	13,10	155,00	2237 09 02	26205 15 03
11	12,58	167,58	2430 04 11	27453 08 06
12	12,06	179,64	2615 01 03	28567 00 11
13	11,54	191,18	2791 15 03	29549 18 11
14	11,02	202,20	2960 15 10	30404 17 04
15	10,50	212,70	3121 13 11	31139 16 02
16	9,69	222,39	3270 03 10	31754 04 00
17	9,46	231,85	3415 03 04	32250 09 08
18	8,94	240,79	3552 03 04	32682 12 05
19	8,42	249,21	3651 04 00	32904 11 04
20	7,91	257,12	3802 05 04	33070 00 09
21	7,38	264,50	3915 10 03	33133 07 00
22	6,82	271,32	4020 00 07	33100 00 05
23	6,24	277,56	4115 13 01	32974 08 04
24	5,67	283,23	4202 10 11	21st year the Stock
25	5,10	288,33	4280 14 06	cannot be

26	4,58	292,91	4350	17	10	increased by £200 without diminishing the provisions 23d year the Stock decreases
27	4,06	296,97	4413	02	02	
28	3,52	300,49	4467	01	00	
29	3,02	303,51	4513	04	07	
30	2,55	306,06	4562	08	10	
31	2,13	308,19	4585	01	04	
32	1,76	309,95	4612	01	04	
33	1,45	311,40	4634	06	09	
34	1,19	312,59	4652	11	05	
35	1,03	313,62	4668	07	60	

Table 2d : Showing the Proposals of the fund on supposition that the Taxes on all Benefices are doubled the first year, and on all those who marry for the 1st year of their marraige and that all Children receive only half of their provisions stated in the Scheme for the first 5 years and 3/4th of the provisions for the next five years of the Scheme, and that the Widows receive no annuity for the first years of their Widowhood

Years of the Scheme	Stocks remaining after the Deductions			
1	06880	18	04	
2	10259	01	11	
3	13504	10	10	
4	16622	07	02	
5	19617	14	10	
6	22245	02	05	
7	24746	16	07	
8	27128	05	03	
9	29393	08	05	
10	31546	13	00	
11	34337	15	10	
12	35008	12	11	
13	36562	08	00	
14	38003	00	09	
15	39333	14	07	
16	40563	15	00	
17	41693	00	06	
18	42724	15	09	
19	43663	16	05	
20	44514	18	09	

21	45282	11	11	
22	45972	06	09	"= 12838 19 9 the Difference betwixt the stocks in the 1st & second Tables, this year
23	46592	09	10	
24	47145	00	02	
25	47637	18	05	
26	48076	16	03	
27	48468	04	00	
28	48818	09	02	
29	49133	14	02	This year the Stock is not increased by £300
30	49421	07	01	
31	49634	19	08	
32	49929	01	09	
33	50159	11	09	
34	50378	16	05	
35	50578	19	11	