Minoration de la hauteur normalisée en petite codimension

Corentin Pontreau

Université de Caen/Basse-Normandie

U.F.R. de Sciences

École doctorale SIMEM

T H È S E

présentée par

M. **Corentin PONTREAU**

et soutenue le vendredi 09 décembre 2005

en vue de l'obtention du

DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN

Spécialité : mathématiques et leurs applications
(Arrêté du 25 avril 2002)

Minoration de la hauteur normalisée en petite codimension

MEMBRES du JURY

M. Francesco AMOROSO, professeur à l'Université de Caen *(directeur)*

M. Laurent HABSIEGER, DR CNRS à l'Université de Lyon 1

M. Federico PELLARIN, maître de conférence à l'Université de Caen

M. Patrice PHILIPPON, DR CNRS à l'Université de PARIS VI *(rapporteur)*

M. Éric REYSSAT, professeur à l'Université de Caen

M. Umberto ZANNIER, professeur à la Scuola Normale Superiore di Pisa *(rapporteur)*

Table des matières

Notations

Nous dirons qu'un ensemble algébrique (ou fermé de Zariski) est *défini* sur un corps $k \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ s'il est stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/k)$. Le *corps de définition* d'un ensemble algébrique sera le plus petit sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur lequel il est défini. Une *variété* désignera un ensemble algébrique irréductible sur son corps de définition.

– Par abus de langage, on notera $\mathbb{G}_m^n$ le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}})$ isomorphe à $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^n$;
– k un corps de nombres ;
– k_ν le complété de k pour la topologie induite par la valeur absolue ν ;
– $k[\mathbf{x}]$ l'anneau des polynômes sur k en n variables ;
– $k[\mathbf{x}]_{\leq L}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré total $\leq L$;
– $\mathcal{M}_k$ ensemble des places de k ;
– $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers du corps k ;
– $\overline{S}^{Zar}$ l'adhérence de Zariski de S ;
– pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n$, notons $|\boldsymbol{\lambda}| := \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ la *longueur* de $\boldsymbol{\lambda}$ et

$$D_{\boldsymbol{\lambda}} := \frac{1}{\boldsymbol{\lambda}!} \cdot \frac{\partial^{\boldsymbol{\lambda}}}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\lambda}}} = \frac{1}{\lambda_1! \cdots \lambda_n!} \cdot \frac{\partial^{\lambda_1}}{\partial x_1^{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial^{\lambda_n}}{\partial x_n^{\lambda_n}} \;;$$

– on dira qu'un polynôme $F \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ s'annule en un point $\boldsymbol{\alpha}$ avec multiplicité au moins $T \in \mathbb{N}$ si pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\boldsymbol{\lambda}| \leq T - 1$, on a $D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)(\boldsymbol{\alpha}) = 0$;
– pour toute partie S de $\mathbb{C}^n$ on pose :

$$E_k(S, L, T) \;:= \left\{ F \in k[\mathbf{x}]_{\leq L} \mid \forall \boldsymbol{\beta} \in S,\; F \text{ nul en } \boldsymbol{\beta} \text{ avec multiplicité } \geq T \right\} ,$$

autrement dit on a $E_k(S, L, T) = [\mathfrak{P}^{(T)}]_L \cup \{0\}$ si S est une variété et $\mathfrak{P}$ est l'idéal de définition sur k de sa clôture projective. De plus, si $H_k(\mathfrak{P}, L)$ est la fonction de Hilbert de $\mathfrak{P}$, alors on a $\dim_k E_k(S, L, T) = \binom{L+n}{L} - H_k(\mathfrak{P}, L)$;
– pour $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n$, on pose :

$$\binom{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}} := \binom{\mu_1}{\lambda_1} \cdots \binom{\mu_n}{\lambda_n} \;;$$

– pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_m^n$, on notera $\omega_k(\boldsymbol{\alpha}) := \min \left\{ \deg(F) \mid F \in k[\mathbf{x}] \setminus \{0\}, F(\boldsymbol{\alpha}) = 0 \right\}$;
– pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_m^n$ et tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{Z}^n$, on notera $\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\lambda}}$ le produit $\alpha_1^{\lambda_1} \cdots \alpha_n^{\lambda_n}$.

Chapitre I

Introduction

En 1933, dans un article désormais célèbre, D. H. Lehmer [Leh33] écrit :

> *The following problem arises immediately. If ε is a positive quantity, to find a polynomial of the form*
>
> $$f(x) = x^r + a_1 x^{r-1} + \cdots + a_r$$
>
> *where the a's are integers, such that the absolute value of the product of those roots of f which lie outside the unit circle, lies between 1 and $1+\varepsilon$.*

Ce problème connu aujourd'hui sous le nom de *conjecture de Lehmer* reste ouvert, mais il semble que la réponse soit non pour $\varepsilon < 0{,}176$.[1]

1 Conjectures et résultats en dimension 1

Définition I.1 *Soit $F(x) = a\prod_{j=1}^{d}(x-\alpha_j)$ un polynôme à coefficients complexes, on définit la mesure de Mahler de F et on note $M(F)$ le nombre : $M(0) = 1$ et, si $F \neq 0$,*

$$M(F) = |a| \prod_{j=1}^{d} \max\{1, |\alpha_j|\}.$$

Si $F \in \mathbb{Z}[x]$, nous avons bien sûr $M(F) \geq 1$. Un théorème de Kronecker nous dit que si de plus F est irréductible et $F(x) \neq \pm x$, alors

$$M(F) = 1 \Longleftrightarrow F \text{ est un polynôme cyclotomique.}$$

Définition I.2 *Soient α un nombre algébrique et k est un corps de nombres le contenant. On appelle hauteur de Weil (logarithmique) de α et on note $h(\alpha)$ le nombre :*

$$h(\boldsymbol{\alpha}) := \sum_{v \in \mathcal{M}_k} \frac{[k_v : \mathbb{Q}_v]}{[k : \mathbb{Q}]} \log\left(\max\{1, |\alpha_1|_v\}\right) \ ,$$

où l'on normalise une valeur absolue $|\cdot|_v$, si v divise un premier p, en prenant $|p|_v = p^{-1}$.

[1] La valeur 0,176 provient du polynôme $x^{10} + x^9 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1$, pour lequel le produit en question vaut environ 1,17628, exemple donné par [Leh33].

Si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ et F son polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$, on peut montrer que l'on a $h(\alpha) = \frac{\log M(F)}{[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]}$. La question posée par Lehmer peut donc se traduire par la conjecture suivante :

Conjecture I.3 *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout polynôme non nul $F \in \mathbb{Z}[x]$ irréductible, $F(x) \neq \pm x$ qui ne soit pas un polynôme cyclotomique on ait*

$$\log M(F) \geq c.$$

Nous travaillerons dans la suite dans $\mathbb{G}_m$, le groupe multiplicatif $\overline{\mathbb{Q}}^*$. La conjecture I.3 peut se traduire en terme de hauteur :

Conjecture I.4 *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{G}_m$ de degré D sur $\mathbb{Q}$ qui n'est pas racine de l'unité, on ait*

$$h(\alpha) \geq \frac{c}{D}.$$

En 1971, C. J. Smyth (voir [Smy71]) montre que l'on peut se réduire à l'étude des entiers algébriques réciproques[2], plus précisément :

Théorème I.5 (Smyth) *Soit $\alpha \in \mathbb{G}_m$ un nombre algébrique de degré D non réciproque. Alors*

$$h(\alpha) \geq \frac{\log \theta}{D} \ ,$$

où θ désigne la racine réelle du polynôme $x^3 - x - 1$.

Néanmoins le meilleur résultat aujourd'hui allant dans le sens de la conjecture I.4 a été trouvé par E. Dobrowolski en 1979 [Dob79] :

Théorème I.6 (Dobrowolski) *Pour tout $\alpha \in \mathbb{G}_m$ de degré $D \geq 2$ sur $\mathbb{Q}$ qui n'est pas racine de l'unité, on a :*

$$h(\alpha) \geq \frac{1}{1200D} \cdot \left(\frac{\log \log D}{\log D} \right)^3 .$$

D'autres résultats plus forts, mais avec des hypothèses plus restrictives ont été trouvés. Par exemple A. Schinzel [Sch73] montre que si α appartient à un corps de nombres Kroneckerien (c'est-à-dire soit un corps totalement réel, soit une extension quadratique complexe d'un tel corps) tel que $|\alpha| \neq 1$, alors $h(\alpha) \geq \frac{1}{2} \log \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

En 2000, F. Amoroso et R. Dvornicich (voir [AD00b]) ont montré que si α appartient à une extension cyclotomique, alors $h(\alpha) \geq \frac{\log 5}{12}$; bien sûr dans les deux cas on suppose α non racine de l'unité et non nul.

Enfin, peu après, F. Amoroso et U. Zannier généralisent ce résultat, en donnant une minoration de la hauteur d'un nombre algébrique en fonction de son degré sur une extension abélienne d'un corps de nombres $\mathbb{K}$ (*c.f.* [AZ00] et théorème III.12 page 46).

[2] C'est-à-dire les entiers algébriques non nuls conjugués à leur inverse.

2 Hauteur normalisée

Soit n un entier positif non nul. Dans la suite, nous considérerons le plongement naturel de $\mathbb{G}_m^n := \mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}})$ dans $\mathbb{P}^n$, défini par

$$\iota \ : \ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto (1 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_n).$$

De plus si V est une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$, nous noterons $\deg(V)$ le degré de l'adhérence de Zariski[3] de $\iota(V)$ dans $\mathbb{P}^n$. Nous utiliserons la structure naturelle de groupe commutatif (donc de $\mathbb{Z}$-module) de $\mathbb{G}_m^n$ ainsi, si $\boldsymbol{\alpha}$ et l désignent respectivement des éléments de $\mathbb{G}_m^n$ et de $\mathbb{Z}$, alors, pour tout ensemble algébrique $V \subseteq \mathbb{G}_m^n$, nous noterons $\boldsymbol{\alpha} \cdot V := \{\boldsymbol{\alpha\beta} \mid \boldsymbol{\beta} \in V\}$ et $[l]V := \{\boldsymbol{\beta}^l \mid \boldsymbol{\beta} \in V\}$.

La hauteur de Weil se généralise naturellement, *via* le plongement ι à un point $\boldsymbol{\alpha}$ de $\mathbb{G}_m^n$: ce sera la hauteur de Weil logarithmique du point projectif correspondant, soit, si k est un corps de nombres contenant $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$:

$$h(\boldsymbol{\alpha}) := \sum_{v \in \mathcal{M}_k} \frac{[k_v : \mathbb{Q}_v]}{[k : \mathbb{Q}]} \log \left(\max\{1, |\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_n|_v\} \right).$$

Comme en dimension 1, la hauteur possède des propriétés intéressantes, compatibles avec la structure de groupe de $\mathbb{G}_m^n$.

- Un point $\boldsymbol{\alpha}$ de $\mathbb{G}_m^n$ est de hauteur nulle si et seulement si c'est un point de $\mathbb{Z}$-torsion (*i.e.* si ses coordonnées sont racines de l'unité) ;
- pour tout entier $l \in \mathbb{N}$ et tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_m^n$, on a : $h(\boldsymbol{\alpha}^l) = lh(\boldsymbol{\alpha})$;
- pour tout $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{G}_m^n$, on a : $h(\boldsymbol{\alpha\beta}) \leq h(\boldsymbol{\alpha}) + h(\boldsymbol{\beta})$. En particulier si $\boldsymbol{\zeta}$ désigne un point de torsion, alors $h(\boldsymbol{\zeta\beta}) = h(\boldsymbol{\beta})$;
- un sous-ensemble de $\mathbb{G}_m^n$ de points de hauteur et de degré (c'est-à-dire le degré du corps engendré par les coordonnées du point) bornés est fini (théorème de Northcott).

Nous allons maintenant nous intéresser à la *hauteur normalisée*. Celle-ci décrit d'une certaine manière la complexité arithmétique d'une variété. Dans [Phi91], P. Philippon définit, *via* les formes de Chow, la notion de hauteur normalisée $\hat{h}$ pour les variétés projectives, puis généralise ceci aux sous-variétés de $\mathbb{G}_m^n$ avec S. David dans [DP99]. L'idée est de fixer dans un premier temps, une hauteur locale (*via* une norme), puis globale, pour les polynômes, et de définir la hauteur h d'une variété comme la hauteur d'une de ses formes de Chow. On obtient alors la hauteur normalisée par un procédé limite à la Néron-Tate :

$$\hat{h}(V) := \lim_{l \to \infty} \frac{h([l]V) \deg(V)}{l \deg([l]V)}.$$

[3]En général, si S désigne une partie de $\mathbb{G}_m^n$, on notera $\overline{S}^{Zar}$ pour désigner $\overline{\iota(S)}^{Zar} \cap \mathbb{G}_m^n$.

Dans le cas d'une hypersurface V de $\mathbb{G}_m^n$ (plongé dans $\mathbb{P}^n$ *via* ι), définie sur $\mathbb{Q}$ par un polynôme F de $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, irréductible sur $\mathbb{Z}$ (c'est-à-dire irréductible sur $\mathbb{Q}$ et de contenu 1), la hauteur de V est le logarithme de la mesure de Mahler de F :

$$\hat{h}(V) = \log M(F) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \log \left| F(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \right| d\theta_1 \dots d\theta_n.$$

(On peut montrer que cette définition coïncide bien avec celle donnée en dimension 1.)

De façon plus générale, si V est définie sur un corps de nombres k, nous avons :

$$\hat{h}(V) = \frac{1}{[k : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathcal{M}_k} [k_v : \mathbb{Q}_v] \log M_v(F) \ ,$$

où $M_v(F)$ est la mesure de Mahler de $\sigma(F)$ si v est archimédienne, associée au plongement σ, et $M_v(F) := \max\{|\operatorname{coeff}(F)|_v\}$ si v est ultramétrique.

Comme pour les hypersurfaces, la hauteur normalisée d'un point $\boldsymbol{\alpha}$ peut être aisément décrite. En effet, on peut montrer que celle-ci est la hauteur de Weil de $\boldsymbol{\alpha}$.

On peut facilement étendre aux ensembles algébriques *équidimensionnels* (*i.e.* dont toutes les composantes ont même dimension) la définition de hauteur normalisée. En effet, comme le degré, celle-ci est additive ; plus précisément si $W_1, \dots, W_l$ désignent les composantes géométriquement irréductibles d'une variété V on a :

$$\hat{h}(V) = \hat{h}(W_1) + \cdots + \hat{h}(W_l).$$

On étendra ainsi dans la suite de façon naturelle cette notion aux cycles (*i.e.* aux sommes formelles de variétés de même dimension).

La hauteur normalisée est toujours positive et est stable par translation par un point de torsion. On sait de plus qu'elle ne s'annule que pour les cycles réunions (ou plutôt sommes) de variétés de torsion (*i.e.* une union de translatés de sous-tores[4] de $\mathbb{G}_m^n$ par des points de torsion) : ce résultat a été montré notamment par Lawton [Law77] dans le cas des hypersurfaces de $\mathbb{G}_m^n$ et par Zhang [Zha92] dans le cas général. La question qui se pose alors naturellement est :

> Quelle minoration de la hauteur normalisée d'une variété qui n'est pas de torsion peut-on espérer ?

Deux cas se présentent : arithmétique et géométrique.

[4]On appellera sous-tore un sous-groupe algébrique connexe.

3 Cas arithmétique

3.1 Hypersurfaces

Soit V une hypersurface irréductible sur $\mathbb{Q}$, représentée par un polynôme F à coefficients entiers irréductible sur $\mathbb{Z}$. On a vu que dans ce cas, la hauteur normalisée de V par était simplement $\log M(F)$. La mesure de Mahler des polynômes à plusieurs variables a été étudiée par plusieurs auteurs. En particulier, Boyd, Lawton et Smyth ont montré indépendamment (voir [Boy80], [Law77] et [Smy81]) que la mesure de Mahler d'un polynôme irréductible

$$F \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n], \quad F(x_1, \ldots, x_n) \neq \pm x_j,$$

est égale à 1 si et seulement si F est un *polynôme cyclotomique généralisé*, c'est-à-dire un polynôme irréductible de la forme

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\lambda}} \varphi(\mathbf{x}^{\boldsymbol{\mu}}),$$

où $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{Z}^n$ sont deux multi-indices et $\varphi \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme cyclotomique. Les hypersurfaces définies sur $\mathbb{Q}$ de torsion sont donc celles qui ont pour équation un polynôme cyclotomique généralisé. La conjecture I.3 donne une minoration pour la mesure de Mahler d'un polynôme à coefficients entiers en une variable, qui se généralise naturellement aux hypersurfaces :

Conjecture I.7 *Pour tout entier $n \geq 1$, il existe une constante $c(n) > 0$ telle que, pour toute hypersurface V de $\mathbb{G}_m^n$ définie et irréductible sur $\mathbb{Q}$ qui ne soit pas une variété de torsion, on ait :*

$$\hat{h}(V) \geq c(n).$$

Notons que la conjecture I.4 de Lehmer implique la précédente (avec $c(n) = c$), car il est possible d'exprimer la mesure de Mahler d'un polynôme en n variables comme la limite de celles de polynômes en une variable. Plus précisément, pour tout $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ dans $\mathbb{Z}^n$, notons :

$$\mu(\mathbf{r}) := \min \{ \|\mathbf{v}\|_\infty \mid \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n, \mathbf{v} \neq 0, <\mathbf{v}, \mathbf{r}>= 0 \} \ ,$$

où $< \cdot, \cdot >$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $F \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, notons $F_{\mathbf{r}}(x) := F(x^{r_1}, \ldots, x^{r_n})$, polynôme en une variable défini à partir de F. W. Lawton et D. Boyd ont montré le résultat suivant (voir par exemple [Boy80] or [Law77]) :

$$\lim_{\mu(\mathbf{r}) \to \infty} M(F_r) = M(F).$$

Pour obtenir le résultat souhaité, il nous reste à montrer que, si F n'est pas un polynôme cyclotomique généralisé, alors $M(F_{\mathbf{r}})$ est différent de 1, (donc supérieur à $c(1)$ si la conjecture est vraie en dimension 1) pour une infinité de $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^n$. Pour voir cela, il nous suffit d'utiliser un lemme de A. Schinzel (voir [Boy80, lemma 3]) qui nous dit que si $M(F_{\mathbf{r}})$ est égal à 1, alors il existe un élément $\mathbf{v}$ de $\mathbb{Z}^n$ tel que $<\mathbf{v}, \mathbf{r}>= 0$ et $\|\mathbf{v}\|_\infty \leq c(F)$, où $c(F)$ est une constante ne dépendant que de F. En particulier, pour tout $\mathbf{r}$ sauf un nombre fini, on a $M(F_{\mathbf{r}}) > c(1)$.

Dans la direction de la conjecture I.7, F. Amoroso et S. David (voir [AD00a]) obtiennent le résultat suivant :

Théorème I.8 *Soit V une hypersurface de $\mathbb{G}_m^n$ irréductible sur $\mathbb{Q}$ de degré D. Si V n'est pas une réunion de translatés de sous-groupes algébriques par des points de torsion, alors*

$$\hat{h}(V) \geq \frac{c}{(n+1)^{1+4/(n-s)}(n-s)^2} \cdot \frac{\big(\log\big((n+1)\log((n+1)D)\big)\big)^{2+1/(n-s)}}{\big(\log\big((n+1)D\big)\big)^{1+2/(n-s)}}$$

où $c > 0$ est une constante absolue et s est la dimension du stabilisateur de V.

Nous obtenons dans [Pon01] une version plus faible, mais complètement explicite de ce théorème :

Théorème I.9 *Soit V une hypersurface de $\mathbb{G}_m^n$ irréductible sur $\mathbb{Q}$ de degré D. Alors, si V n'est pas une réunion de translatés de sous-groupes algébriques par des points de torsion de $\mathbb{G}_m^n$, on a*

$$\hat{h}(V) \geq 10^{-4} \cdot \left(\frac{\log\big(n\log(nD')\big)}{n\log(nD')}\right)^3$$

où $D' := \max\{16, D\}$.

3.2 Variété de dimension quelconque

Nous avons vu qu'il était possible d'obtenir des minorations de la hauteur normalisée de certaines hypersurfaces en fonction de leur degré. Dans le cas général, le bon invariant n'est pas le degré, mais l'*indice d'obstruction* :

Définition I.10 *Soit V une sous-variété algébrique de $\mathbb{P}^n$ et soit k un sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$. On appelle* indice d'obstruction *sur k de V et on note $\omega_k(V)$ le plus petit degré d'une hypersurface définie sur k et contenant V.*

De façon générale, si V et Z sont des variétés définies sur k telles que $V \subseteq Z$, il découle immédiatement d'un résultat de M. Chardin (*cf.* [Cha88], corollaire 2, chapitre 1, page 310 et exemple 1, page 311) l'inégalité :

$$\omega_k(V) \leq n \deg(Z)^{1/\operatorname{codim}(Z)}. \tag{I.1}$$

Nous donnerons une démonstration élémentaire de ce résultat dans le cas où V est réduit à un point et Z est une hypersurface (voir propriétés III.1).

Dans [AD99] les auteurs proposent une conjecture (*c.f.* Conjecture 1.3[5]) généralisant la conjecture I.4. Rappelons que n nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont dits multiplicativement indépendants si

$$\forall a_1, \ldots a_n \in \mathbb{Z}, \quad \prod \alpha_i^{a_i} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \forall i, a_i = 0.$$

Conjecture I.11 *Pour tout entier $n \geq 1$, il existe une constante $c(n) > 0$ telle que, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_m^n$ dont les coordonnées sont multiplicativement indépendantes, on ait :*

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha})}.$$

On ne peut obtenir de minoration de ce type pour tous les points de $\mathbb{G}_m^n$ qui ne sont pas de torsion, il suffit pour cela de considérer la suite de points $\big((2^{1/d}, \ldots, 2^{1/d})\big)_d$, dont la hauteur tend vers 0 et dont l'indice d'obstruction vaut 1, d'où l'hypothèse « $\boldsymbol{\alpha}$ est à coordonnées multiplicativement indépendantes ». Cette dernière est en fait équivalente à dire que $\boldsymbol{\alpha}$ n'appartient à aucune sous-variété de torsion de $\mathbb{G}_m^n$; le cas où $\boldsymbol{\alpha}$ appartient à une sous-variété de torsion de dimension $r < n$ se ramène au problème de Lehmer dans $\mathbb{G}_m^r$.

Nous utiliserons dans la suite la notion de *minimum essentiel* de V, noté $\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V)$, dont l'idée remonte à L. Szpiro. Pour tout nombre réel θ et toute variété V, notons $V(\theta)$ le sous-ensemble des points $\boldsymbol{\alpha}$ de V tels que $h(\boldsymbol{\alpha}) \leq \theta$. Le minimum essentiel est défini par :

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) := \inf \left\{ \theta > 0 \mid \overline{V(\theta)}^{Zar} = V \right\} ,$$

où $\overline{V(\theta)}^{Zar}$ est l'adhérence de Zariski de $V(\theta)$. Dans [Zha92] et [Zha95], S. Zhang montre les inégalités suivantes[6] :

$$\frac{\hat{h}(V)}{(\dim(V)+1)\deg(V)} \leq \hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) \leq \frac{\hat{h}(V)}{\deg(V)}.$$

On peut alors donner une conjecture plus générale :

Conjecture I.12 *Pour tout entier $n \geq 1$, il existe une constante $c(n) > 0$ telle que, pour toute sous-variété V de $\mathbb{G}_m^n$ qui ne soit contenue dans aucune variété de torsion on ait :*

$$\hat{\mu}_{ess}(V) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}}(V)}.$$

[5] Dans *op. cit.*, l'indice d'obstruction $\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha})$ est noté $\delta(\boldsymbol{\alpha})$.

[6] Il montre en fait des inégalités plus fines sur des minima successifs.

Dans *op. cit.*, les auteurs montrent la conjecture I.11 à un facteur ■ log ■ près. Plus tard, dans [AD01], ils généralisent ce résultat en dimension quelconque :

Théorème I.13 *Pour tout entier $n \geq 1$, il existe une constante $c(n) > 0$ telle que, pour toute sous-variété V de $\mathbb{G}_m^n$ définie sur $\mathbb{Q}$, qui ne soit contenue dans aucune variété de torsion, on ait :*

$$\hat{\mu}_{ess}(V) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}}(V)} \cdot (\log(3\omega_{\mathbb{Q}}(V)))^{-\kappa(n)} ,$$

où $\kappa(n) := 2n(n+1)!^n - 1$.

Enfin, en 2004, F. Amoroso et S. David approfondissent leur étude du problème pour les points, et obtiennent le résultat suivant :

Théorème I.14 *Soit V une sous-variété algébrique de $\mathbb{G}_m^n$, définie sur une extension cyclotomique K de $\mathbb{Q}$, intersection d'hypersurfaces de $\mathbb{G}_m^n$ définies sur K de degré au plus ω.*

Alors il existe une constante $c'(n) > 0$ (effectivement calculable) telle que l'on ait, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in V$ n'appartenant à aucune sous-variété de torsion de V :

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{c'(n)}{\omega} \cdot (\log(3[K : \mathbb{Q}]\omega))^{-\kappa(n)} ,$$

où de nouveau $\kappa(n) = 2n(n+1)!^n - 1$.

Ici on ne suppose donc plus $\boldsymbol{\alpha}$ *n'appartient à aucune sous-variété de torsion de* $\mathbb{G}_m^n$, mais $\boldsymbol{\alpha}$ *n'appartient à aucune sous-variété de torsion de* V. Pour arriver à ce résultat, les auteurs montrent que si $\boldsymbol{\alpha}$ est de hauteur trop petite, alors il appartient à une sous-variété (propre) de torsion de $\mathbb{G}_m^n$ de degré contrôlé, ce qui leur permet de réduire le problème à une étude en dimension inférieure. Ainsi un raisonnement par récurrence sur la dimension n leur permet de conclure.

4 Cas géométrique

Nous nous intéressons maintenant aux minorations de la hauteur de variétés indépendantes de leurs corps de définition. On peut conjecturer le résultat suivant :

Conjecture I.15 *Soit V une sous-variété propre et géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_m^n$. Si V n'est contenue dans aucun translaté d'un sous-tore propre de $\mathbb{G}_m^n$, alors*

$$\hat{\mu}_{ess}(V) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\overline{\mathbb{Q}}}(V)} ,$$

où $c(n) > 0$ est une constante ne dépendant que de n.

Comme dans le cas arithmétique, on ne peut pas donner de minoration du minimum essentiel d'une variété géométriquement irréductible quelconque, ne dépendant que de son indice d'obstruction. Remarquons que le cas des translatés de sous-tores se ramène essentiellement au problème de Lehmer pour les points de $\mathbb{G}_m^n$; dans le cas général, on ne peut pas minorer la hauteur d'une sous-variété V uniquement en fonction de son degré géométrique si l'on ne fait aucune hypothèse sur V. Pour voir cela, considérons une suite de points $(\boldsymbol{\alpha}_i)_i$ de $\mathbb{G}_m^n$ tels que $h(\boldsymbol{\alpha}_i)$ tend vers 0 quand i tend vers l'infini (par exemple $\boldsymbol{\alpha}_i = (3^{1/i}, \ldots, 3^{1/i})$). Nous avons :

$$\hat{h}(\boldsymbol{\alpha}_i \cdot H) \leq n \deg(\boldsymbol{\alpha}_i \cdot H) \hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\boldsymbol{\alpha}_i \cdot H) \leq n \deg(H) h(\boldsymbol{\alpha}_i).$$

On peut toutefois énoncer des conjectures semblables à la conjecture I.15 pour toute variété V qui n'est pas le translaté d'un sous-tore, en considérant un invariant plus fin, l'*indice d'obstruction relatif*, qui prend en compte le plus petit translaté d'un sous-tore contenant la variété. On pourra à ce propos consulter [DP99] (conjecture 1.1) et [AD03] (conjecture 1.2).

De nouveau, dans *op. cit.*, les auteurs montrent la conjecture I.15 à un ■ ε ■ près :

Théorème I.16 *Soit W une sous-variété propre et géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_m^n$ de codimension k. Si W n'est contenue dans aucun translaté d'un sous-tore propre de $\mathbb{G}_m^n$, alors*

$$\hat{\mu}_{ess}(W) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\overline{\mathbb{Q}}}(W)} \cdot \Big(\log(3\omega_{\overline{\mathbb{Q}}}(W))\Big)^{-\lambda(k)} ,$$

où $c(n) > 0$ est une constante ne dépendant que de n et $\lambda(k) := \big(9(3k)^{k+1}\big)^k$.

Considérons une variété V, **composante isolée** d'une intersection d'hypersurfaces de degré au plus[7] ω. Dans [AD05], les auteurs montrent que si W est une sous-variété de V de codimension k, qui n'est contenue dans aucun translaté d'un sous-tore de V, alors on a

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(W) \geq \frac{c'(n)}{\omega} \cdot (\log(3\omega))^{-\lambda(k)} ,$$

où $c'(n) > 0$ est une constante ne dépendant que de n. Remarquons qu'il s'agit bien là d'une généralisation du théorème I.16, il suffit pour cela de prendre pour V une hypersurface de degré minimal contenant W, auquel cas on a $\omega_{\overline{\mathbb{Q}}}(W) = \omega$.

Notons que dans ces deux résultats nous n'avons aucune information sur les points, ceux-ci étant trivialement des translatés de sous-tores. Néanmoins on peut montrer que, si l'on note V° la variété V privée de tous les translatés de sous-tores non triviaux contenus dans V, il n'existe plus qu'un nombre fini de points de ■ petite ■ hauteur dans V°. Plus

[7] Dans [AD05], les auteurs définissent ce nombre ω comme étant l'*indice de quasi-interpolation* de V.

précisément, en 1995, E. Bombieri et U. Zannier montrent (voir [BZ95]) que si V est l'intersection d'hypersurfaces de degré $\leq d$, alors il existe deux nombres $q > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que l'ensemble des points de V°, de hauteur $\leq \varepsilon$, est fini, de cardinal au plus q. Notons qu'ils utilisent une hauteur légèrement différente h_s, correspondant au plongement $s : \mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}_1^n$; cette hauteur permet de définir, *via* l'application $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \mapsto h_s(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}^{-1})$, une semi-distance sur $\mathbb{G}_m^n$. Il est facile de voir que cette hauteur est équivalente à la nôtre, en effet pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_m^n$ nous avons : $\frac{1}{n}h(\boldsymbol{\alpha}) \leq h_s(\boldsymbol{\alpha}) \leq nh(\boldsymbol{\alpha})$ (plus généralement si $\varphi : \mathbb{G}_m^n \to \mathbb{G}_m^n$ est un isomorphisme, alors la hauteur $h \circ \varphi$ est comparable à h).

Ici, ε et q dépendent de n et de d et sont effectivement calculables. Peu après, dans [Sch96], W. M. Schmidt obtient notamment une version explicite de ce résultat :

Théorème I.17 *Soit V une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$, intersection d'hypersurfaces de degré $\leq d$, notons $N(d) := \binom{n+d}{d}$ et*

$$q(V) := \exp\left((4n)^{2dN(d)}\right).$$

Alors les points $\boldsymbol{\alpha} \in V^\circ$ tels que $h_s(\boldsymbol{\alpha}) \leq q(V)^{-1}$ sont au plus $q(V)$.

Remarquons que V° peut être vide, comme on peut le voir dans l'exemple suivant :

Exemple : Soit $\mathcal{C}$ une courbe de $\mathbb{G}_m^2$ de stabilisateur discret et soit $V := \mathcal{C} \times \mathbb{G}_m \subseteq \mathbb{G}_m^3$. Comme V est une union infinie de translatés de sous-tores non triviaux, nous avons $V^\circ = \emptyset$.

Plus récemment, dans [DP99], S. David et P. Philippon améliorent le résultat de W. M. Schmidt :

Théorème I.18 *Soit V une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$, et notons*

$$q(V) := \left(2^{n+4\dim(V)+22}\deg(V)\left(\log(\deg(V)+1)\right)^{2/3}\right)^{7^{\dim(V)}}.$$

Alors les points $\boldsymbol{\alpha} \in V^\circ$ tels que $h_s(\boldsymbol{\alpha}) \leq q(V)^{-3/4}$ sont au plus $q(V)$.

En fait, comme les auteurs le remarquent dans [AD05], un résultat plus précis est montré dans [DP99] (voir la proposition 5.6) : *l'ensemble des points de V de hauteur inférieure ou égale $q(V)^{-3/4}$ est contenu dans une réunion finie de translatés de sous-tores $B_1, \ldots, B_m$ tels que $\sum_{j=1}^m \deg(B_j) \leq q(V)$.* L'avantage de cette dernier résultat est que l'on possède des informations sur V, même si V° est vide. Ceci nous amènent à utiliser le dernier invariant géométrique $\hat{\mu}^\circ_{\dim(V)}(V)$ introduit dans [DP99] que nous noterons pour simplifier $\mu^\circ(V)$ comme dans [AD05] :

$$\hat{\mu}^\circ(V) := \sup_Y \inf\{h(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha} \in V \setminus Y\}$$

où Y parcourt l'ensemble des unions **finies** de translatés de sous-tores, en particulier Y peut contenir un nombre fini de points.

Dans [AD05] (voir lemme 2.2), les auteurs donnent une caractérisation simple de $\mu^\circ(V)$, plus précisément ils montrent :

$$\hat{\mu}^\circ(V) = \inf_W \hat{\mu}_{\text{ess}}(W) \tag{I.2}$$

où W parcourt l'ensemble des sous-variétés de V qui ne sont pas contenues dans un translaté d'un sous-tore de V. On peut alors retranscrire le résultat cité après le théorème I.16 ;

Théorème I.19 (Amoroso-David) *Soit V une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$,* **composante isolée** *d'une intersection d'hypersurfaces de degré au plus ω. On a :*

$$\hat{\mu}^\circ(V) \geq \frac{c'(n)}{\omega} \cdot (\log(3\omega))^{-\lambda(n-1)} ,$$

où $c'(n) > 0$ ne dépend que de n et $\lambda(k) := \left(9(3k)^{k+1}\right)^k$.

De plus, il existe un nombre fini de translatés de sous-tores $B_1, \ldots, B_m$ contenus dans V tels que pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in V \setminus \cup_{j=1}^m B_j$ nous avons :

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{c'(n)}{\omega} (\log(3\omega))^{-\lambda(n-1)} .$$

On peut alors légitimement se demander s'il est possible d'obtenir, comme dans [DP99] des informations sur la somme des degrés des B_j. En effet comme on l'a vu dans [DP99], les auteurs montrent en fait que $\hat{\mu}^\circ(V) \geq q(V)^{3/4}$ et que les points de V de hauteur $\leq q(V)^{3/4}$ sont contenus dans des translatés de sous-tores dont la somme des degrés est inférieure à $q(V)$. On ne sait pas grand chose dans le cas où l'on souhaite une minoration quasi-optimale du type du théorème I.19, toutefois, nous apporterons une réponse partielle à ce problème dans le cas $\mathbb{G}_m^3$.

Pour plus de détails sur le sujet, on pourra notamment consulter [Dav] et [Amo04].

5 Contenu de la thèse

Nous commençons le **chapitre II** par un certain nombre de rappels sur les sous-groupes algébriques de $\mathbb{G}_m^n$; leur caractérisation assez simple nous permettra de ramener certains problèmes à une étude en dimension inférieure. Nous rappellerons ensuite les principales propriétés liées à la multiplication par un entier dans $\mathbb{G}_m^n$, ainsi que quelques inégalités classiques et utiles. Dans la mesure du possible, nous démontrons les résultats cités.

Au **chapitre III**, on s'intéresse à des minorations de type arithmétique, en codimension 1 et 2. Notre principal résultat dans le cas arithmétique est le suivant, analogue du théorème I.14 où l'exposant du logarithme ($\kappa(2) = 143$) est sensiblement amélioré. De plus, contrairement à ce dernier, il est complètement explicite :

Théorème I.20 *Soit V une courbe de $\mathbb{G}_m^2$ définie sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$-irréductible de degré ω qui ne soit pas de torsion, et soit $\boldsymbol{\alpha} \in V \setminus (\mathbb{G}_m^2)_{tors}$, on a :*

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{1,2 \cdot 10^{-16}}{\omega} \cdot \frac{\big(\log\log\omega'\big)^{11}}{\big(\log\omega'\big)^{13}}$$

où $\omega' := \max\{\omega, 16\}$.

Notons qu'ici l'hypothèse ■ $\boldsymbol{\alpha} \in V$ n'appartenant à aucune sous-variété de torsion de V ■ se réduit à ■ $\boldsymbol{\alpha}$ non de torsion ■, hypothèse minimale puisque les points de torsion sont précisément les points de hauteur nulle.

F. Amoroso et S. David montrent dans [AD99], en corollaire de leur résultat principal, que si $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_m^n$ est un point à coordonnées multiplicativement indépendantes, alors il existe une constante $C(n)$ telle que :

$$\Big(h(\alpha_1)\cdots h(\alpha_n)\Big)^{1/n} \geq \frac{C(n)^{1/n}}{D^{1/n}} \cdot (\log 3D)^{-\kappa(n)}\ , \tag{I.3}$$

où $D := [\mathbb{Q}(\boldsymbol{\alpha}) : \mathbb{Q}]$ et $\kappa(n)$ est la même quantité que dans le théorème I.14. Une observation de Bilu (voir [Bil]) mène à la minoration :

$$\Big(h(\alpha_1)\cdots h(\alpha_n)\Big)^{1/n} \geq \frac{C(2)^{1/2}}{D^{1/2}}(\log 3D)^{-\kappa(2)}.$$

En effet, il suffit pour cela d'appliquer l'inégalité (I.3) en dimension 2 pour (α_1, α_2),..., (α_{n-1}, α_n) et (α_n, α_1). Le théorème I.20 nous permet d'expliciter la constante $C(2)$ et d'améliorer l'exposant $\kappa(2)$:

Corollaire I.21 *Soient $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_m^n$ et σ une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ telle que, pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$, les coordonnées α_i et $\alpha_{\sigma(i)}$ soient multiplicativement indépendantes, alors :*

$$\Big(h(\alpha_1)\cdots h(\alpha_n)\Big)^{1/n} \geq \frac{2 \cdot 10^{-21}}{D^{1/2}} \cdot (\log 3D)^{-13},$$

où $D := [\mathbb{Q}(\boldsymbol{\alpha}) : \mathbb{Q}]$.

Dès que l'on fixe un entier $n \geq 3$, ce résultat est moins bon que (I.3) lorsque D est grand, néanmoins il est bien meilleur pour les petites valeurs de D (rappelons que $\kappa(n) := 2n(n+1)!^n - 1)$, de plus il est entièrement explicite et les conditions sur $\boldsymbol{\alpha}$ sont un peu plus faibles.

Au **chapitre IV**, on s'intéresse à des minorations de type géométrique, en codimension 1 et 2. Le premier objectif est d'obtenir une minoration du minimum essentiel d'une courbe de $\mathbb{G}_m^3$, sous des conditions minimales. Pour cela on montre tout d'abord au paragraphe 3, des minorations pour la hauteur d'hypersurfaces dans $\mathbb{G}_m^n$, il s'agit d'un analogue complètement explicite du théorème I.8 dans le cas de variétés géométriquement irréductibles :

Théorème I.22 *Soit V une hypersurface de $\mathbb{G}_m^n$ géométriquement irréductible de degré ω. Si V n'est pas translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^n$, alors*

$$\hat{h}(V) \geq \frac{10^{-14}}{n^8} \cdot \frac{(\log(n \log \omega'))^{2+2/(n-s-1)}}{(\log \omega')^{1+4/(n-s-1)}}.$$

où $\omega' := \max\{n\omega, 16\}$ et s est la dimension du stabilisateur de V.

Nous nous attardons ensuite au paragraphe 4 sur le cas des hypersurfaces de $\mathbb{G}_m^2$ et $\mathbb{G}_m^3$, cas qui nous intéresse plus particulièrement dans la suite. Dans le cas de $\mathbb{G}_m^2$, on montre en fait un résultat plus précis : on majore le nombre de petits points d'une courbe qui n'est pas le translaté d'un sous-tore, ce qui est à peu près une version optimale du théorème I.19 dans le cas de $\mathbb{G}_m^2$. On obtient alors au paragraphe 5 le résultat suivant :

Théorème I.23 *Soient V une surface de $\mathbb{G}_m^3$ de degré ω et $\mathcal{C} \subset V$ une courbe, toutes deux géométriquement irréductibles. Si V et $\mathcal{C}$ ne sont pas translaté d'un sous-tore, alors*

$$\hat{\mu}_{ess}(\mathcal{C}) > \frac{10^{-97}}{\omega} \cdot \frac{(\log \log \omega')^{21}}{(\log \omega')^{30}}$$

où $\omega' = \max\{16, \omega\}$.

Notons que l'hypothèse ■ $\mathcal{C}$ n'appartient à aucun translaté d'un sous-tore contenu dans V ■ se réduit ici à V et $\mathcal{C}$ ne sont pas un translaté d'un sous-tore. Si γ désigne la quantité $\frac{10^{-97}}{\omega}\frac{(\log\log\omega')^{21}}{(\log\omega')^{30}}$, nous aurons à ce stade montré que toute sous-variété W de V, qui n'est pas inclue dans le translaté d'un sous-tore contenu dans V, vérifie $\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(W) \geq \gamma$. Grâce à (I.2), on en déduit : $\mu^{\circ}(V) \geq \gamma$, autrement dit il existe un nombre fini de sous-tores en dehors desquels tout point de V est de hauteur $\geq \gamma$. Comme dans le théorème I.19, nous ne savons pas majorer la somme des degrés de tous ces translatés de sous-tores, néanmoins nous obtenons une réponse concernant ceux de dimension 1 :

Théorème I.24 *Soient V une surface de $\mathbb{G}_m^3$ géométriquement irréductible de degré ω, qui n'est pas le translaté d'un sous-tore.*

Alors il existe un nombre fini de translatés de sous-tores $B_1, \ldots, B_t$ *de* V *tels que, pour tout* $\boldsymbol{\alpha} \in V \setminus B_1 \cup \cdots \cup B_t$*, on ait*

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{10^{-97}}{\omega} \cdot \frac{(\log\log\omega')^{21}}{(\log\omega')^{30}}.$$

De plus, si $B_1, \ldots, B_m$ *sont de dimension* 1 *et* $B_{m+1}, \ldots, B_t$ *de dimension* 0 *on a :*

$$\sum_{i=1}^{m} \deg(B_i) \leq 2 \cdot 10^{100} \omega^2 (\log\omega')^{32}.$$

Chapitre II

Résultats généraux

1 Groupes algébriques dans $\mathbb{G}_m^n$

Nous rappelons ici un certain nombre de faits sur les sous-groupes algébriques de $\mathbb{G}_m^n$ qui nous seront utiles par la suite. Ce paragraphe est principalement issu de [Sch96].

Rappelons qu'un *groupe algébrique* est simplement une variété algébrique munie d'une structure de groupe compatible, *i.e.* : telle que les applications

$$\begin{array}{rccc} \mu : & G \times G & \to & G \\ & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \mapsto & \mathbf{xy} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccc} \iota : & G \times G & \to & G \\ & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \mapsto & \mathbf{x}^{-1} \end{array}$$

soient des morphismes de variétés. Rappelons aussi que la topologie sur $G \times G$ est la topologie de Zariski et non la topologie produit.

Le résultat suivant est un cas particulier du théorème 1.1 p. 234 de [DG70].

Proposition II.1 *Soit $G \subset \mathbb{P}^n$ un groupe algébrique et soit G^0 sa composante neutre (*i.e.* la composante connexe contenant* $\mathbf{e}$*). Alors G^0 est un sous-groupe algébrique normal de G irréductible, et les composantes géométriquement irréductibles (*i.e.* irréductibles sur $\overline{\mathbb{Q}}$) de G sont des translatés de G^0.*

Démonstration - Supposons G^0 non irréductible, en particulier il s'écrit comme l'union finie

$$G^0 = \bigcup_{i=1}^{r} G_i^0$$

de ses composantes irréductibles (avec $r \geq 2$) ; de plus, G^0 étant connexe, cette union n'est pas disjointe. Il existe alors deux points $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ de G^0 tels que $\mathbf{x}$ n'appartienne qu'à une seule composante irréductible de G^0 et $\mathbf{y}$ à au moins deux. Comme G est un groupe algébrique, on peut voir que les fonctions régulières au voisinage de $\mathbf{x}$ et de $\mathbf{y}$ respectivement sont les mêmes à translation près ; autrement dit les anneaux locaux $\mathcal{O}_{\mathbf{x}}$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{y}}$ sont isomorphes, ce qui est impossible car le premier est intègre et le deuxième non.

Soient maintenant $\mathbf{z}$ dans G et H la composante connexe de G contenant $\mathbf{z}$. Le morphisme de translation τ qui envoie $\mathbf{e}$ sur $\mathbf{z}$ est à la fois ouvert et fermé, en particulier $\tau(G^0)$ est ouvert et fermé dans H, donc égal à H, ainsi toutes les composantes connexes de G ont même dimension.

Montrons que G^0 est un groupe. Pour tout $\mathbf{x} \in G^0$, l'ensemble $\mathbf{x}^{-1} \cdot G^0$ est une composante connexe de G, de plus $\mathbf{e} \in \mathbf{x}^{-1} \cdot G^0$ donc $\mathbf{x}^{-1} \cdot G^0 = G^0$, ainsi $(G^0)^{-1} = G^0$, et par conséquent, $G^0 G^0 = G^0$, donc G^0 est bien un sous groupe (fermé) de G. Pour voir que G^0 est normal, il suffit de remarquer encore une fois que pour tout $\mathbf{x} \in G$, $\mathbf{x}^{-1} \cdot G^0 \cdot \mathbf{x}$ est une composante connexe de G et contient $\mathbf{e}$, donc égale à G^0. ■

Définition II.2 *Soit H un sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}})$. On dit que H est un* tore *s'il est connexe.*

D'après la proposition précédente, un tore est géométriquement irréductible. Nous allons dans la suite caractériser de façon précise les sous-groupes algébriques de $\mathbb{G}_m^n$. Donnons dans un premier temps quelques notations :

Notations :

- Pour toute partie S de $\mathbb{R}^n$ on note $\mathrm{Vect}(S)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par S ;
- soit A un sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$, on note :

$$H_A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{G}_m^n \mid \forall \mathbf{a} \in A,\ \mathbf{x}^{\mathbf{a}} = 1\}$$

  et $\rho(A)$ l'indice de A dans $\mathrm{Vect}(A) \cap \mathbb{Z}^n$;
- pour $i = 1, \ldots, n$, on note $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$;
- pour $r = 1, \ldots, n$ on note $G^{(n-r)} := H_{<\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r>}$, autrement dit :

$$G^{(n-r)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{G}_m^n \mid x_1 = \cdots = x_r = 1\}.$$

Si A est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$, alors $H(A)$ est un sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}_m^n$; nous allons montrer que ce sont les seuls (théorème II.6). Pour cela nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

Définition II.3 *Pour tout $\tau \in GL_n(\mathbb{Z})$, on note φ_τ l'automorphisme de $\mathbb{G}_m^n$ défini par :*

$$\varphi_\tau(\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}^{\tau(\mathbf{e}_1)}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}^{\tau(\mathbf{e}_n)}).$$

Nous dirons que deux sous-groupes algébriques H et H' sont équivalents et on notera $H \sim H'$ s'il existe $\tau \in GL_n(\mathbb{Z})$ tel que $H' = \varphi_\tau(H)$.

Lemme II.4 *Soit A un sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ de rang*[1] *r, alors*

$$H_A = F \times M \ ,$$

où $M \sim G^{(n-r)}$ et F est un groupe fini d'ordre $\rho(A)$.

DÉMONSTRATION - Soit $\tau \in GL_n(\mathbb{Z})$ tel que $\tau(A) \subset \mathrm{Vect}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r)$, on peut alors identifier $\tau(A)$ à un sous-groupe A' de $\mathbb{Z}^r$. Ainsi $H_{\tau(A)}$ est l'ensemble des $(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ dans $\mathbb{G}_m^r \times \mathbb{G}_m^{n-r}$ tels que $\mathbf{x}' \in H_{A'}$. Comme A' est de rang r, il est facile de voir que $H_{A'} \subset \mathbb{G}_m^r$ est fini d'ordre $\rho(A') = \rho(A)$. Ainsi $H_{\tau(A)} = H_{A'} \times G^{(n-r)}$. ■

En particulier H_A possède $\rho(A)$ composantes irréductibles ; de plus, si B est un autre sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ de rang r contenant A, alors

$$H_B = F' \times M \ ,$$

avec F' d'ordre $\rho(B)$ contenu dans F.

Lemme II.5 *Soit $V \subset \mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}})$ un sous-ensemble algébrique défini par les polynômes $\sum_{\mathbf{i} \in I} a_{\ell,\mathbf{i}}\, \mathbf{x}^{\mathbf{i}}$ $\quad (\ell = 1, \ldots, t)$, où I est un ensemble fini de n-uplets. On note*

$$D(I) := \{\mathbf{i} - \mathbf{j} \mid \mathbf{i}, \mathbf{j} \in I\}.$$

Si H est un groupe algébrique maximal contenu dans V, alors il existe un sous-groupe A de $\mathbb{Z}^n$ engendré par des vecteurs de $D(I)$ tels que $H = H_A$.

DÉMONSTRATION - Étant donné $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^n$, la restriction de l'application $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^{\mathbf{i}}$ à H est un caractère χ_i de H. Pour tout caractère χ de H, notons

$$I_\chi := \{\mathbf{i} \in I \mid \chi_{\mathbf{i}} = \chi\}.$$

Pour tout χ et tout $\mathbf{x} \in H$ nous avons, par définition de I_χ,

$$\mathbf{x}^{\mathbf{i}-\mathbf{j}} = 1 \quad \text{si} \quad \mathbf{i}, \mathbf{j} \in I_\chi. \tag{II.1}$$

Ainsi, si A désigne le sous-groupe engendré par les vecteurs $\mathbf{i} - \mathbf{j}$, où $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I_\chi$ et χ parcourt l'ensemble des caractères de H, on a $H \subseteq H_A$. Comme I est une union disjointe de I_χ et $H \subseteq V$, on a sur H les relations :

$$\sum_{\chi} \left(\sum_{\mathbf{i} \in I_\chi} a_{\ell,\mathbf{i}} \right) \chi = 0 \quad \text{pour} \quad \ell = 1, \ldots, t.$$

[1] C'est-à-dire la dimension sur $\mathbb{Q}$ de $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Par le théorème d'Artin sur les relations linéaires entre caractères, celles-ci doivent être triviales ; ainsi, pour tout ℓ et tout χ on a

$$\sum_{\mathbf{i} \in I_\chi} a_{\ell,\mathbf{i}} = 0. \tag{II.2}$$

Pour tout $\mathbf{x} \in H_A$, la fonction $\mathbf{i} \mapsto \mathbf{x}^{\mathbf{i}}$ est constante sur chaque I_χ, car un tel $\mathbf{x}$ vérifie (II.1). Pour $\ell = 1, \ldots, t$, nous avons alors, d'après (II.2) :

$$\forall \mathbf{x} \in H_A, \quad f_\ell(\mathbf{x}) = \sum_\chi \left(\sum_{\mathbf{i} \in I_\chi} a_{\ell,\mathbf{i}} \right) \chi(\mathbf{x}) = 0 \ ,$$

en particulier $H_A \subseteq V$. Par maximalité de H on en déduit $H_A = H$. ■

Théorème II.6 *L'application $A \mapsto H_A$ réalise une bijection entre les sous-groupes de $\mathbb{Z}^n$ et les sous-groupes algébriques de $\mathbb{G}_m^n$.*

DÉMONSTRATION - Montrons tout d'abord que cette application est injective. Soient A et B deux sous-groupes de $\mathbb{Z}^n$ tels que $H_A = H_B$. Pour tout $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A \times B$ et tout $\mathbf{x} \in H_A$ nous avons $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = \mathbf{x}^{\mathbf{b}} = 1$, ainsi pour tout $\mathbf{c} \in A + B$ et tout $\mathbf{x} \in H_A$ nous avons $\mathbf{x}^{\mathbf{c}} = 1$. On en déduit $H_A \subseteq H_{A+B}$ et *a fortiori* $H_A = H_{A+B}$, l'autre inclusion étant évidente. D'après le lemme II.4, les sous-groupes A et $A + B$ ont même rang et $\rho(A) = \rho(A + B)$. On obtient alors $A = A + B$ et de même $B = A + B$ d'où $A = B$. Pour conclure, il suffit de remarquer que tout sous-groupe algébrique H de $\mathbb{G}_m^n$ est un ensemble algébrique, donc, d'après le lemme II.5, de la forme H_A pour un certain sous-groupe A de $\mathbb{Z}^n$. ■

Une des conséquences de ce résultat est que tout sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}_m^n$ est défini sur $\mathbb{Q}$, nous reviendrons sur ce point plus tard.

2 Stabilisateur et multiplication

Notations : Soit $l \in \mathbb{Z}$, nous noterons $[l]$ la *multiplication* par l dans $\mathbb{G}_m^n$:

$$\begin{array}{rccc} [l] : & \mathbb{G}_m^n & \longrightarrow & \mathbb{G}_m^n \\ & \boldsymbol{\alpha} & \longmapsto & \boldsymbol{\alpha}^l \end{array}$$

(le mot ■ multiplication ■ vient de la structure de $\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{G}_m^n$) ainsi, si $V \subseteq \mathbb{G}_m^n$ on aura :

$$[l]V = \{\boldsymbol{\alpha}^l \mid \boldsymbol{\alpha} \in V\} \quad \text{et} \quad [l]^{-1}V = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha}^l \in V\}.$$

Un cas particulier de groupe algébrique qui nous intéressera est le noyau de cette application ($\ker[l]$), qui n'est autre que l'ensemble des points de l-torsion, c'est-à-dire les points dont les coordonnées sont des racines l-ièmes de l'unité.

Remarquons que si V est un ensemble algébrique irréductible, il en est de même de $[l]V$. Plus précisément, nous avons :

Proposition II.7 *Soit V une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$ définie sur un corps de nombres k et soit $l \in \mathbb{N}$. Si V est irréductible sur k, alors il en est de même de $[l]V$.*

Démonstration - Remarquons tout d'abord que si une variété W est définie sur k, alors il en est de même de $[l]W$ et de $[l]^{-1}W$. Notons $W_1 \cup \cdots \cup W_r$ la décomposition en composantes irréductibles de $[l]V$ sur k ; nous avons alors :

$$\bigcup_{\boldsymbol{\xi} \in \ker[l]} \boldsymbol{\xi} \cdot V = [l]^{-1}[l]V = [l]^{-1}W_1 \cup \cdots \cup [l]^{-1}W_r.$$

Soit maintenant X une composante géométriquement irréductible de V ; il existe un indice i tel que $[l]^{-1}W_i$ contienne X, et a fortiori V tout entier puisque $[l]^{-1}W_i$ est définie sur k. Il vient :

$$[l]V \subseteq [l][l]^{-1}W_i = W_i \ ,$$

en particulier $[l]V$ est irréductible sur k. ∎

Lemme II.8 *Soit V une variété définie (et irréductible) sur un corps de nombres k. Pour tout entier $l > 0$ on a :*

$$\hat{\mu}_{ess}([l]V) = l\hat{\mu}_{ess}(V).$$

Démonstration - Soient $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{G}_m^n$ et $\theta > 0$. On a :

$$\boldsymbol{\beta} \in [l]\,(V(\theta)) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \boldsymbol{\alpha} \in V \ ; \ \boldsymbol{\alpha}^l = \boldsymbol{\beta} \\ h(\boldsymbol{\alpha}) \leq \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\beta} \in [l]V \\ h(\boldsymbol{\beta}) \leq l\theta \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta} \in ([l]V)\,(l\theta).$$

Donc

$$[l]\,(V(\theta)) = ([l]V)\,(l\theta).$$

Écrivons maintenant la série d'inclusions :

$$\overline{[l]\,(V(\theta))} \subseteq [l]\overline{(V(\theta))} \subseteq [l]V.$$

Ainsi, si $\theta > \hat{\mu}_{\mathrm{ess}}([l]V)$, alors $[l]V = [l]\overline{(V(\theta))}$ d'où $V = \overline{V(\theta)}$, en particulier

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}([l]V) \geq l\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V).$$

Soient $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{G}_m^n$ et $\theta > 0$. On a :

$$\boldsymbol{\beta} \in [l]^{-1}\left(V(\theta)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\beta}^l \in V \\ h(\boldsymbol{\beta}^l) \leq \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\beta} \in [l]^{-1}V \\ h(\boldsymbol{\beta}) \leq \theta/l \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta} \in \left([l]^{-1}V\right)(\theta/l).$$

Donc

$$[l]^{-1}\left(V(\theta)\right) = \left([l]^{-1}V\right)(\theta/l).$$

Écrivons maintenant la série d'inclusions :

$$\overline{[l]^{-1}\left(V(\theta)\right)} \subseteq [l]^{-1}\overline{(V(\theta))} \subseteq [l]^{-1}V.$$

Ainsi, si $\theta > \hat{\mu}_{\mathrm{ess}}([l]^{-1}V)$, alors $[l]^{-1}V = [l]^{-1}\overline{(V(\theta))}$ d'où $V = \overline{(V(\theta))}$, en particulier

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}([l]^{-1}V) \geq \frac{\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V)}{l}.$$

En combinant ces deux résultats on obtient :

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) = \hat{\mu}_{\mathrm{ess}}\left(\bigcup_{\boldsymbol{\xi}\in\ker[l]} \boldsymbol{\xi}\cdot V\right) = \hat{\mu}_{\mathrm{ess}}([l]^{-1}[l]V) \geq \frac{\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}([l]V)}{l} \geq \hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V).$$

■

Un cas particulier de sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}_m^n$ qui nous intéresse est celui du stabilisateur d'une variété. Le groupe $\mathbb{G}_m^n$ agit naturellement sur lui-même :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m^n \times \mathbb{G}_m^n & \longrightarrow & \mathbb{G}_m^n \\ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) & \longmapsto & \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} \end{array}$$

où le produit est fait coordonnée par coordonnée.

Définition II.9 *Soit V un ensemble algébrique, on note G_V son* stabilisateur *:*

$$G_V := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_m^n \mid \boldsymbol{\alpha}\cdot V = V\}.$$

On peut en donner une autre caractérisation :

Proposition II.10 *Soit $V \subset \mathbb{G}_m^n$ un ensemble algébrique, on a :*

$$G_V = \bigcap_{\mathbf{y} \in V} \mathbf{y}^{-1} \cdot V.$$

DÉMONSTRATION - Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{G}_m^n$; si $\mathbf{x} \in G_V$, pour tout $\mathbf{y} \in V$ on a alors $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in V$; autrement dit, $\mathbf{x} \in \mathbf{y}^{-1} \cdot V$, d'où une première inclusion. Réciproquement, si $\mathbf{x} \in \bigcap_{\mathbf{y} \in V} \mathbf{y}^{-1} \cdot V$, alors pour tout $\mathbf{y} \in V$ on a $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in V$, d'où $\mathbf{x} \cdot V \subseteq V$ et la seconde inclusion. ■

En particulier, le stabilisateur d'un ensemble algébrique est un sous-groupe **algébrique** de $\mathbb{G}_m^n$. On déduit de cette proposition les propriétés suivantes :

Proposition II.11 *Pour toute sous-variété V de $\mathbb{G}_m^n$ on a :*

$$\dim(G_V) \leq \dim(V) \quad et \quad \deg(G_V) \leq \deg(V)^{\dim(V) - \dim(G_V) + 1}.$$

DÉMONSTRATION - La première assertion est une conséquence directe de la proposition précédente. Posons $d := \dim(V)$ et $s := \dim(G_V)$. L'idée est d'utiliser le fait que, V étant irréductible, il existe $n - d$ hypersurfaces $H_1, \ldots, H_{n-d}$ de degré au plus $\deg(V)$ telles que V soit une composante isolée de $H_1 \cap \cdots \cap H_{n-d}$ (voir par exemple [Fal91, proposition 2.1]). On a en particulier, pour tout $\mathbf{y} \in V$, d'après la proposition II.10, l'inclusion $G_V \subseteq \mathbf{y}^{-1} \cdot H_i$, pour tout i.
Soit $\mathbf{y}_0 \in V$, comme G_V est un sous-ensemble algébrique de $\mathbf{y}_0^{-1} \cdot V$ on peut montrer qu'il existe $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{d-s}$ tels que toutes les composantes géométriquement irréductibles de G_V soient des composantes isolées de $\mathbf{y}_0^{-1} \cdot V \cap \mathbf{y}_1^{-1} \cdot H_1 \cap \cdots \cap \mathbf{y}_{d-s}^{-1} \cdot H_{d-s}$.
Par le théorème de Bézout on en déduit

$$\deg(G_V) \leq \deg(V)^{\dim(V) - \dim(G_V) + 1}.$$

■

Dans le cas où V est irréductible sur son corps de définition, les stabilisateurs de V et de ses composantes connexes sont très liés :

Lemme II.12 *Soit V une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$. Alors, pour toute composante géométriquement irréductible W de V et tout $\sigma \in Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, on a :*

$$G_{\sigma(W)} = G_W \subset G_V \quad et \quad G_W^0 = G_V^0.$$

DÉMONSTRATION - Une conséquence du théorème II.6 est que G_W et G_V sont définis sur $\mathbb{Q}$; en particulier, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et tout $\mathbf{x} \in G_W$, on a :

$$\mathbf{x} \cdot \sigma(W) = \sigma(\sigma^{-1}(\mathbf{x}) \cdot W) \subset \sigma(W) \ ,$$

d'où la première assertion.

Pour le second point, il suffit de remarquer que l'image de l'application $f : G_V^0 \times W \to V$, est connexe (la multiplication étant continue) et contient W. Elle est donc égale à W puisque W est une composante connexe de V. On obtient ainsi la suite d'inclusions :

$$G_W^0 \subset G_V^0 \subset G_W \subset G_V \ ,$$

d'où la seconde assertion. ■

Remarque : Si V est $\mathbb{Q}$-irréductible, on a l'inclusion $G_W \subset G_V$ et égalité des composantes neutres de V et de W. Néanmoins, on n'a pas toujours $G_W = G_V$. Voici un exemple : si on prend $V := \left\{x \in \mathbb{G}_m \mid x^k = 2\right\}$ et W une composante $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible, on a :

$$G_W = \{1\} \text{ et } G_V = \mu_k$$

où μ_k désigne l'ensemble des racines k-ième de l'unité.

Nous avons vu dans la proposition II.11 que la dimension d'une variété était supérieure ou égale à celle de son stabilisateur. Le lemme suivant permet de caractériser précisément les cas d'égalité.

Lemme II.13 *Une sous-variété géométriquement irréductible W de $\mathbb{G}_m^n$ est le translaté d'un sous-tore si et seulement si on a* $\dim(G_W) = \dim(W)$.

Étant donnée une variété V, le lemme II.12 nous dit que toute composante $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible W de V, vérifie $\dim(G_W) = \dim(G_V)$. On déduit ainsi de ce lemme qu'une variété V est de même dimension que son stabilisateur G_V si et seulement si V est une réunion de translatés de sous-groupes algébriques.

DÉMONSTRATION - Par définition, on a :

$$G_W = \bigcap_{y \in W} y^{-1} \cdot W.$$

Si $\dim(G_W) = \dim(W)$, alors, W étant irréductible, on a :

$$\forall y \in W,\ G_W = y^{-1} \cdot W.$$

donc W est le translaté de son stabilisateur.

Réciproquement, si H est un sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}_m^n$ et x un élément de $\mathbb{G}_m^n$ tels que $W = x \cdot H$, alors

$$G_W = \bigcap_{y \in W} y^{-1} \cdot W = \bigcap_{y \in W} (y^{-1}x) \cdot H = \bigcap_{h \in H} h^{-1} \cdot H = G_H = H.$$

Donc $\dim(G_W) = \dim(H) = \dim(W)$. ■

Rappelons quelques propriétés qui nous seront utiles par la suite :

Lemme II.14 *Soient W une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$ géométriquement irréductible, G_W son stabilisateur et $l > 0$ un entier. On a :*

1. $\hat{h}([l]^{-1}W) = l^{n-\dim(W)-1}\hat{h}(W)$ *et* $\deg([l]^{-1}W) = l^{n-\dim(W)}\deg(W)$ *;*
2. $\hat{h}([l]W) = \dfrac{l^{\dim(W)+1}}{|\ker[l] \cap G_W|}\hat{h}(W)$ *et* $\deg([l]W) = \dfrac{l^{\dim(W)}}{|\ker[l] \cap G_W|}\deg(W)$ *;*
3. $|\ker[l] \cap G_W| = l^{\dim(G_W)}\left|\ker[l] \cap (G_W/G_W^0)\right|$ *;*
4. *si $\boldsymbol{\xi}$ est un point de torsion, on a* $\hat{h}(\boldsymbol{\xi} \cdot W) = \hat{h}(W)$.

Démonstration -

– Pour les points 1 et 4 on pourra consulter le lemme 6 de [Hin88] et la proposition 2.1 de [DP99].

– Pour le point 3, notons tout d'abord que l'on a :

$$|\ker[l] \cap G_W| = \left|\ker[l] \cap G_W^0\right| \cdot \left|\ker[l] \cap (G_W/G_W^0)\right|.$$

D'après le théorème II.6 et le lemme II.4, le groupe connexe G_W^0 est équivalent à $G^{(\dim(G_W))}$ (le sous-ensemble des points de $\mathbb{G}_m^n$ dont les $n - \dim(G_W)$ premières coordonnées sont égales à 1 ; voir définitions page 18). Il nous suffit donc de remarquer que l'on a :

$$\left|\ker[l] \cap G_W^0\right| = \left|\ker[l] \cap G^{(\dim(G_W))}\right| = l^{\dim(G_W)}.$$

– Montrons maintenant le point 2. S'il existe $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}'$ dans $\ker[l]$ tels que $\boldsymbol{\xi} \cdot W = \boldsymbol{\xi}' \cdot W$, alors $\boldsymbol{\xi}^{-1}\boldsymbol{\xi}' \in \ker[l] \cap G_W$. On a donc

$$[l]^{-1}[l]W = \bigcup_{\boldsymbol{\xi} \in \ker[l]} \boldsymbol{\xi} \cdot W = \bigcup_{\overline{\boldsymbol{\xi}} \in \ker[l]/\ker[l] \cap G_W} \boldsymbol{\xi} \cdot W.$$

Comme les fonctions deg et $\hat{h}$ sont additives, on obtient :

$$\hat{h}([l]^{-1}[l]W) = \frac{l^n}{|\ker[l] \cap G_W|}\hat{h}(W) \quad \text{et} \quad \deg([l]^{-1}[l]W) = \frac{l^n}{|\ker[l] \cap G_W|}\deg(W) \ ,$$

car $|\ker[l]| = l^n$.

D'après la proposition II.7, la variété $[l]W$ est géométriquement irréductible, on peut donc lui appliquer le point 1 de la proposition :

$$\hat{h}([l]^{-1}[l]W) = l^{n-\dim(W)-1} \quad \text{et} \quad \deg([l]^{-1}[l]W) = l^{n-\dim(W)}\deg([l]W) \ ,$$

car $\dim([l]W) = \dim(W)$. En combinant ces résultats on en déduit :

$$\hat{h}([l]W) = \frac{l^{\dim(W)+1}}{|\ker[l] \cap G_W|}\hat{h}(W) \quad \text{et} \quad \deg([l]W) = \frac{l^{\dim(W)}}{|\ker[l] \cap G_W|}\deg(W).$$

■

3 Premiers exceptionnels

Dans ce paragraphe, V désigne une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$, irréductible sur son corps de définition. Nous allons voir que pour tout nombre premier p sauf pour certains appartenant à un ensemble exceptionnel $\mathrm{E}(V)$, introduit dans [AD99], la variété $[p]V$ a un bon comportement, dans un sens que nous allons préciser.

Définition II.15 *On note $W_1, \dots, W_k$ les composantes $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductibles de V. On pose :*

$$\mathrm{E}(V) := \big\{l \in \mathbb{Z} \mid \exists i,j,\ i < j \ ;\ [l]W_i = [l]W_j\big\} \cup \big\{l \in \mathbb{Z} \mid \exists i \ ;\ \deg([l]W_i) < \deg(W_i)\big\}.$$

La proposition 2.4 de [AD99] donne des informations sur cet ensemble ; nous en rappelons quelques propriétés.

Proposition II.16 *Nous avons la majoration*

$$\mathrm{Card}\left(\mathrm{E}(V) \cap \{p \ \textit{premier}\}\right) \leq \frac{\dim(V)+1}{\log 2}\log\big(\deg(V)\big).$$

De plus, si Λ est un ensemble fini de nombres premiers et si V n'est pas de torsion, alors :

$$\deg\Big(\bigcup_{p\in\Lambda}[p]V\Big) \geq \mathrm{Card}\left(\Lambda \setminus \mathrm{E}(V)\right) \times \deg(V).$$

Nous utiliserons dans la suite cette proposition dans le cas où Λ est l'ensemble des premiers dans $[N/2, N]$, pour un certain paramètre N, d'où la nécessité du lemme suivant :

Lemme II.17 *Pour tout réel x on note $\pi(x)$ le nombre de premiers inférieurs ou égaux à x. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a*

$$\pi(N) - \pi(N/2) \geq c(N)\frac{N}{\log N}$$

où $c(N) \geq 0,41$ si $N \geq 41$ et $c(N) \geq 0,23$ si $N \geq 2$.

Démonstration - Le théorème 1 de [RS62] nous donne :

$$\forall x \geq 59, \quad \frac{x}{\log x} + \frac{3x}{2(\log x)^2} \;\geq\; \pi(x) > \frac{x}{\log x} + \frac{x}{2(\log x)^2},$$

si on note $c(N) := \log(N/2)/\log(N)$ on en déduit :

$$\begin{aligned}\pi(N) - \pi(N/2) &> \frac{N}{\log N} + \frac{N}{2(\log N)^2} - \left(\frac{N}{2c(N)\log N} + \frac{3N}{4(c(N)\log N)^2}\right)\\ &> \frac{N}{\log N}\left(1 - \frac{1}{2c(N)} - \left(\frac{3}{4c(N)^2} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\log N}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, pour $N \geq 5000$, nous avons bien l'inégalité voulue et une vérification numérique pour les petites valeurs de N nous permet de conclure. ∎

4 Quelques inégalités

Nous utiliserons plusieurs fois l'inégalité suivante, valable pour tous réels $a, b > 0$ et $x > 1$:

Fait II.18

$$\frac{x^a}{(\log x)^b} \geq \left(\frac{ea}{b}\right)^b.$$

Lemme II.19 *Soient $Q \in \mathbb{C}[x]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Nous avons :*

$$\|(x-\alpha)Q(x)\|_2 = \|(\bar{\alpha}x - 1)Q(x)\|_2.$$

DÉMONSTRATION - Écrivons :

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k.$$

Ainsi, si on pose $c_{-1} = c_{m+1} = 0$:

$$\begin{aligned}
\|(x-\alpha)Q(x)\|_2^2 &= \|\sum_{k=0}^{m+1}(c_{k-1}-\alpha c_k)x^k\|_2^2 = \sum_{k=0}^{m+1}(c_{k-1}-\alpha c_k)(\overline{c_{k-1}}-\bar{\alpha}\bar{c_k}) \\
&= \sum_{k=0}^{m+1}(c_{k-1}\overline{c_{k-1}}+\alpha\bar{\alpha}c_k\bar{c_k}) - \sum_{k=0}^{m+1}(\alpha c_k\overline{c_{k-1}}+\bar{\alpha}\bar{c_k}c_{k-1}).
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\|(\bar{\alpha}x-1)Q(x)\|_2^2 &= \|\sum_{k=0}^{m+1}(\bar{\alpha}c_{k-1}-c_k)x^k\|_2^2 = \sum_{k=0}^{m+1}(\bar{\alpha}c_{k-1}-c_k)(\alpha\overline{c_{k-1}}-\bar{c_k}) \\
&= \sum_{k=0}^{m+1}(c_k\bar{c_k}+\bar{\alpha}\alpha c_{k-1}\overline{c_{k-1}}) - \sum_{k=0}^{m+1}(\alpha c_k\overline{c_{k-1}}+\bar{\alpha}\bar{c_k}c_{k-1}) \\
&= \sum_{k=0}^{m+1}(c_{k-1}\overline{c_{k-1}}+\alpha\bar{\alpha}c_k\bar{c_k}) - \sum_{k=0}^{m+1}(\alpha c_k\overline{c_{k-1}}+\bar{\alpha}\bar{c_k}c_{k-1}).
\end{aligned}$$

■

Propriétés II.20 (Inégalité de Landau) *Soit $P \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$, on a :*

$$M(P) \le \|P\|_2.$$

En particulier, $\log M(P) \le \log\|P\|_\infty + \frac{n}{2}\log(\deg(P)+1)$.

DÉMONSTRATION - Nous avons, pour $n \ge 2$:

$$\log M(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\Big(M(P(e^{it},x_2,\dots,x_n))\Big)dt. \tag{II.3}$$

Nous allons donc raisonner par récurrence sur n. Supposons $n=1$ et écrivons

$$P(x) = a_0 + \dots + a_{d-1}x^{d-1} + a_d x^d = a_d\prod_{j=1}^{d}(x-\alpha_j).$$

Si $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ désignent les racines de P situées en dehors du disque unité, on sait que $M(P) = |a_d\alpha_1\dots\alpha_k|$. Notons :

$$R(x) := a_d\prod_{j=1}^{k}(\bar{\alpha}_j x - 1)\prod_{j=k+1}^{d}(x-\alpha_j) = b_d x^d + \dots + b_0.$$

En appliquant k fois le lemme II.19, on constate que $\|P\|_2 = \|R\|_2$. D'autre part nous avons :

$$\|R\|_2^2 \geq |b_d|^2 + |b_0|^2 = M(P)^2 + |a_0 a_d| M(P)^{-2} ,$$

d'où l'inégalité pour $n = 1$.

Soit maintenant $n \geq 2$ tel que l'inégalité soit vraie jusqu'au rang $n-1$. L'égalité (II.3) et l'hypothèse de récurrence nous donnent

$$M(P)^2 \leq \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left(\|P(e^{it}, x_2, \ldots, x_n)\|_2^2\right) dt\right).$$

De l'inégalité de Jensen

$$\int_0^{2\pi} \log|f(t)|dt \leq \log\left(\int_0^{2\pi} |f(t)|dt\right)$$

on obtient alors

$$\begin{aligned} M(P)^2 &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|P(e^{it}, x_2, \ldots, x_n)\|_2^2 dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{j_2,\ldots,j_n} \left|\sum_{j_1} a_{j_1\ldots j_n} e^{ij_1 t}\right|^2 dt. \end{aligned}$$

Or, pour tout $j_2, \ldots, j_n$, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\sum_{j_1} a_{j_1,j_2,\ldots,j_n} e^{ij_1 t}\right|^2 dt = \sum_{j_1} |a_{j_1,j_2,\ldots,j_n}|^2.$$

On en déduit

$$M(P)^2 \leq \sum_{j_1,\ldots,j_n} |a_{j_1,\ldots,j_n}|^2 = \|P\|_2^2,$$

d'où la première inégalité pour tout n.

Pour la seconde inégalité, il suffit de remarquer que le nombre de coefficients non nuls de P est majoré par

$$\binom{n+\deg(P)}{n} \leq (\deg(P)+1)^n .$$

■

Chapitre III

Cas Arithmétique

Ce chapitre correspond, à peu de choses près, à l'article [Pon05b] à paraître dans la revue *Acta Arithmetica*.

1 Schéma de la preuve

Dans un premier temps on développe les outils d'une démonstration de transcendance (lemme de Siegel, extrapolation) et au paragraphe 4, on montre des minorations explicites pour les courbes non de torsion de $\mathbb{G}_m^2$ et des points de $\mathbb{G}_m$. La démonstration du théorème I.20 à proprement parler est l'objet du paragraphe 5. La stratégie est la suivante : par l'absurde on suppose la hauteur de $\boldsymbol{\alpha}$ petite, on peut alors construire un polynôme s'annulant sur V avec multiplicité, de degré et de hauteur contrôlés via un lemme de Siegel (proposition III.3). Ensuite on extrapole dans le paragraphe 5.2 en montrant, grâce à la proposition III.8, que ce polynôme s'annule sur les puissances $\boldsymbol{\alpha}^{pq}$, où p et q parcourent des ensembles de premiers $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Nous reprenons au paragraphe 5.3 le lemme de zéros de [AD04] (théorème 2.6) ; nous obtenons ainsi une suite décroissante $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3$ de sous-variétés de $\mathbb{G}_m^2$ contenant des puissances $\boldsymbol{\alpha}^{pq}$ de $\boldsymbol{\alpha}$. Deux de ces variétés étant de même dimension, on obtient une sous-variété obstructrice Z, composante $\mathbb{Q}$-irréductible de Y_3 ou Y_2 contenant une puissance $\boldsymbol{\alpha}^{\ell}$ de $\boldsymbol{\alpha}$ et dont on contrôle le degré. Deux cas se présentent alors.

Si la variété obstructrice Z est de dimension 0 (paragraphe 5.3), alors Z est simplement l'union des conjugués de $\boldsymbol{\alpha}$. Comme ici $\ell = 1$, on arrive, grâce notamment à l'inégalité (I.1), à un encadrement du type :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}_2)\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha})^2 \ll \mathrm{Card}(\mathcal{P}_2)\deg(Z) \ll (\log \omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha}))^a \omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha})^2$$

ainsi, de par nos choix de paramètres, on arrive à une contradiction.

Dans le cas où la variété obstructrice Z est de dimension 1 (paragraphe 5.3), la puissance ℓ est a priori différente de 1. On peut obtenir l'encadrement :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}_1)\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha}^{\ell}) \ll \mathrm{Card}(\mathcal{P}_1)\deg(Z) \ll (\log \omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha}))^b \omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha})$$

ainsi l'indice d'obstruction de $\boldsymbol{\alpha}^\ell$ est très petit par rapport à celui $\boldsymbol{\alpha}$. Ceci n'étant pas suffisant pour conclure, dans [AD04] les auteurs utilisent un argument de descente pour arriver à une contradiction. Ici notre démonstration diffère ; des arguments plus simples nous donnent de meilleurs résultats. On travaille avec la hauteur normalisée ; on majore celle de Z en fonction de la hauteur de notre fonction auxiliaire F, sur laquelle on a un bon contrôle :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}_1)^2\hat{h}(Z) \ll h(F).$$

Si Z n'est pas une courbe de torsion, on arrive à une contradiction en utilisant une minoration explicite de $\hat{h}(Z)$ (proposition III.10). Dans le cas contraire, on se ramène dans le lemme III.15 à une étude en dimension 1, auquel cas, *via* la proposition III.13, on obtient une minoration de $h(\boldsymbol{\alpha})$.

2 Construction de la fonction auxiliaire.

On cherche ici un polynôme F de degré $\leq L$ nul en $\boldsymbol{\alpha}$ à un ordre $\geq T$. Nous aurons besoin dans la suite d'encadrements pour l'indice d'obstruction $\omega_k(\boldsymbol{\alpha})$ et pour la dimension du k-espace vectoriel $E_k(\{\boldsymbol{\alpha}\}, L, T)$.

Propriétés III.1 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_m^n$ et $L, T \in \mathbb{N}$, on a :*

1. $\dim E_k(\{\boldsymbol{\alpha}\}, L, T) \geq \binom{L-T\omega_k(\boldsymbol{\alpha})+n}{n}$.
2. $1 \leq \omega_k(\boldsymbol{\alpha}) \leq n[k(\boldsymbol{\alpha}) : k]^{1/n}$.

DÉMONSTRATION -

1. Soit $F \in k[\mathbf{x}]$ non nul de degré $\omega_k(\boldsymbol{\alpha})$ tel que $F(\boldsymbol{\alpha}) = 0$. Pour tout $H \in k[\mathbf{x}]$ de degré inférieur ou égal à $L - T\omega_k(\boldsymbol{\alpha})$, on a $F^T H \in E_k(S, L, T)$, de plus le sous-espace vectoriel de $k[\mathbf{x}]$ des polynômes de degré $\leq L - T\omega_k(\boldsymbol{\alpha})$ est de dimension $\binom{L-T\omega_k(\boldsymbol{\alpha})+n}{n}$, d'où le résultat.
2. Posons $\omega := [n[k(\boldsymbol{\alpha}) : k]^{1/n}]$ et considérons l'application linéaire :

$$\begin{array}{ccc} k[\mathbf{x}]_{\leq\omega} & \longrightarrow & k(\boldsymbol{\alpha}) \\ P & \longmapsto & P(\boldsymbol{\alpha}). \end{array}$$

Remarquons que $\dim_k k[\mathbf{x}]_{\leq\omega} = \binom{\omega+n}{n} \geq n^{-n}(\omega+1)^n$. Or $n^{-n}(\omega+1)^n > [k(\boldsymbol{\alpha}) : k]$, cette application n'est donc pas injective, *i.e.* il existe $P \in k[\mathbf{x}]_{\leq\omega}$ non nul tel que $P(\boldsymbol{\alpha}) = 0$, donc $\omega_k(\boldsymbol{\alpha}) \leq \omega \leq n[k(\boldsymbol{\alpha}) : k]^{1/n}$.

■

Nous allons faire apparaître F comme la solution d'un système linéaire :

Lemme III.2 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_m^n$ et $L, T \in \mathbb{N}$, soient k un corps et $N := \binom{L+n}{n} = \dim_k(k[\mathbf{x}]_{\leq L})$. On considère la matrice $\binom{T+n-1}{n} \times N$ définie par*

$$A := \left(\binom{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}} \right)$$

où les lignes (respectivement les colonnes) sont indexées par les multi-indices $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $|\boldsymbol{\lambda}| \leq T-1$ (respectivement par les multi-indices $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $|\boldsymbol{\mu}| \leq L$).

Si l'on identifie $k[\mathbf{x}]_{\leq L}$ à k^N de façon standard, alors :

$$E_k(\{\boldsymbol{\alpha}\}, L, T) = \left\{ \mathbf{x} \in k^N \mid A\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

DÉMONSTRATION - Soit P un polynôme de degré au plus L nul en $\boldsymbol{\alpha}$ à un ordre $\geq T$. Il s'agit ici en fait de traduire en termes matriciels le fait que $\frac{\partial^{\boldsymbol{\lambda}} P}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\lambda}}}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$ pour tout $|\boldsymbol{\lambda}| \leq T-1$. On pose

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\mu}| \leq L} a_{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\mu}}.$$

On a alors :

$$0 = \frac{\partial^{\boldsymbol{\lambda}} P}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\lambda}}}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{|\boldsymbol{\mu}| \leq L} a_{\boldsymbol{\mu}} \frac{\boldsymbol{\mu}!}{(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda})!} \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}}.$$

D'où, en divisant par $\boldsymbol{\lambda}!$:

$$0 = \sum_{|\boldsymbol{\mu}| \leq L} a_{\boldsymbol{\mu}} \binom{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}}.$$

Les polynômes recherchés sont donc les solutions du système :

$$A \times (a_{\boldsymbol{\mu}})_{|\boldsymbol{\mu}| \leq L} = 0.$$

■

Ci-dessous nous donnons la version du lemme de Siegel que nous utiliserons dans la suite (analogue à la proposition 2.1 de [AD04]).

Proposition III.3 *Soient θ un réel > 0 et $\mathbf{E} \subset \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_m^n \mid h(\boldsymbol{\alpha}) \leq \theta\}$ un ensemble fini non vide. Soient k un corps de nombres et $L, T \in \mathbb{N}$. Si $E_k(\mathbf{E}, L, T)$ est non réduit à $\{0\}$, alors il existe un polynôme $F \in E_k(\mathbf{E}, L, T) \cap \mathcal{O}_k[\mathbf{x}]$ non nul tel que :*

$$h(F) \leq \frac{r}{N-r}\Big((T+n-1)\log(L+1) + L\theta\Big) + \log c_k. \qquad \text{(III.1)}$$

où $c_k := \left\{ (\frac{2}{\pi})^s \sqrt{|\Delta_k|} \right\}^{\frac{1}{[k:\mathbb{Q}]}}$, s le nombre de places complexes de k et Δ_k son discriminant, $N := \dim_k k[\mathbf{x}]_{\leq L}$ et $r := \dim_k k[\mathbf{x}]_{\leq L} - \dim_k E_k(\mathbf{E}, L, T)$.

DÉMONSTRATION - On reprend ici principalement les preuves de la proposition 4.2 de [AD99] et du théorème 7 de [SV90]. Fixons un ordre sur $\mathbf{E}$ et sur $\mathbb{N}^n$ et considérons la matrice A de taille $\mathrm{Card}(\mathbf{E}) \cdot \binom{T+n-1}{n} \times \binom{L+n}{n}$ définie par

$$A := \left(\binom{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}} \right)$$

où les lignes (respectivement les colonnes) sont indexées par les couples $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})$, où $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{E}$ et $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n$ est tel que $|\boldsymbol{\lambda}| \leq T-1$ (respectivement par les multi-indices $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^n$ tels que $|\boldsymbol{\mu}| \leq L$). Autrement dit, si on pose

$$\mathcal{A} := \{\mathbf{x} \in k^N, \ A\mathbf{x} = 0\} \ ,$$

alors $\mathcal{A} = E_k(\mathbf{E}, L, T)$ d'où $r = \mathrm{rang}(A)$. Soit Y une matrice $N \times (N-r)$ à coefficients dans k telle que $\mathcal{A}$ soit l'image de l'application k-linéaire définie par Y. Comme $E_k(\mathbf{E}, L, T)$ est non réduit à $\{0\}$, on a $\mathrm{rang}(Y) = N-r < N$; le théorème 8 de [BV83] appliqué à Y montre alors qu'il existe $N-r$ vecteurs linéairement indépendants $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{N-r}$ de k^{N-r} tels que, si l'on pose $F_i := Y\mathbf{u}_i$, pour $i = 1, \ldots, N-r$, on ait $F_i \in \mathcal{O}_k^N$ pour tout i et :

$$\sum_{j=1}^{N-r} h_{L_2}(F_j) \leq h_{L_2}(Y) + (N-r)\log c_k = h_{L_2}(\mathcal{A}) + (N-r)\log c_k \ ,$$

où $h_{L_2}(Y)$ est la hauteur du sous-espace engendré par les lignes de Y (la hauteur non logarithmique $H_{L_2} := \exp h_{L_2}$ est définie p. 499 de [SV90]). Rappelons que si $\mathbb{F}$ est un corps de nombres contenant les coordonnées d'un vecteur $\mathbf{y}$, sa hauteur[1] L_2 est

$$h_{L_2}(\mathbf{y}) = \sum_{v \in \mathcal{M}_{\mathbb{F}}} \frac{[\mathbb{F}_v : \mathbb{Q}_v]}{[\mathbb{F}_v : \mathbb{Q}_v]} \log \|\mathbf{y}\|_v$$

où $\|\cdot\|_v$ est la norme du sup si v est ultramétrique, et la norme euclidienne sinon.

Remarquons que $(F_1, \ldots, F_{N-r})$ est une base de $\mathcal{A}$, en particulier il existe F dans $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_k^N$ non nul tel que

$$(N-r)h_{L_2}(F) \leq h_{L_2}(\mathcal{A}) + (N-r)\log c_k, \tag{III.2}$$

nous allons montrer que ce F vérifie bien (III.1).

[1] À la différence de *op. cit.*, nous notons h_{L_2} et pas h, car ils utilisent la norme euclidienne comme métrique aux places infinies.

Soit $\mathbb{F}$ la clôture galoisienne de $k(\mathbf{E})/k$, considérons la matrice :

$$B := \begin{pmatrix} \sigma_1 A \\ \vdots \\ \sigma_R A \end{pmatrix}$$

où les σ_i sont les éléments de $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}/k)$, et posons :

$$\mathcal{B} := \{\mathbf{y} \in \mathbb{F} \mid B\mathbf{y} = 0\}.$$

On a alors $\dim_{\mathbb{F}}(\mathcal{B}) = \dim_k(\mathcal{A})$ et $H_{L_2}(\mathcal{A}) = H_{L_2}(\mathcal{B})$ (voir [SV90], (2.31) page 506). Soit $\tilde{B}$ une sous-matrice de B de rang maximal ($\tilde{B}$ est une matrice $r \times \binom{L+n}{n}$ de rang r), par le principe de dualité, (voir [SV90] p. 500, (2.2)), on a :

$$H_{L_2}(\mathcal{A}) = H_{L_2}(\mathcal{B}) = H_{L_2}(\tilde{B}).$$

En majorant $H_{L_2}(\tilde{B})$ par le produit des hauteurs de ses lignes (inégalité de Hadamard, voir [BV83], équation (2.6)), on obtient :

$$h_{L_2}(\tilde{B}) \leq r \log \max \Big\{ H_{L_2}(\mathbf{b}^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})}) \mid \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{E} \text{ et } |\boldsymbol{\lambda}| \leq T-1 \Big\}, \tag{III.3}$$

où les $\mathbf{b}^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})}$ désignent les lignes de $\tilde{B}$:

$$\mathbf{b}^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})} = (\mathbf{b}_{\boldsymbol{\mu}}^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})})_{|\boldsymbol{\mu}| \leq L} = \left(\binom{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}} \right)_{|\boldsymbol{\mu}| \leq L}.$$

Soit $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})$ un multi-indice réalisant ce maximum ($|\boldsymbol{\lambda}| \leq T-1$), on a :

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{|\boldsymbol{\mu}| \leq L} \binom{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} &\leq \sum_{|\boldsymbol{\mu}| \leq L} \binom{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{\mu_1=1}^{L} \cdots \sum_{\mu_n=1}^{L} \binom{\mu_1}{\lambda_1} \binom{\mu_n}{\lambda_n} \\ &\leq \binom{L+1}{\lambda_1+1} \cdots \binom{L+1}{\lambda_n+1} \leq (L+1)^{T+n-1} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\sum_{\mu=1}^{L} \binom{\mu}{\lambda} = \binom{L+1}{\lambda+1} \leq (L+1)^{\lambda+1}$.
Notons d le degré de $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{Q}$, en utilisant cette inégalité nous trouvons, pour toute place archimédienne $\nu \in \mathcal{M}_k$,

$$H_{L_2,\nu}(\mathbf{b}^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})})^d = \Big(\sum_{|\boldsymbol{\mu}| \leq L} |\mathbf{b}_{\boldsymbol{\mu}}^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})}|_\nu^2 \Big)^{\frac{d_\nu}{2}} \leq (L+1)^{(T+n-1)d_\nu} \max \big\{1, |\alpha_1|_\nu, \ldots, |\alpha_n|_\nu \big\}^{Ld_\nu}.$$

Pour $\nu \in \mathcal{M}_k$ ultramétrique, on obtient :

$$H_{L_2,\nu}(\mathbf{b}^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})})^d = \max_{|\boldsymbol{\mu}| \leq L} |\mathbf{b}_{\boldsymbol{\mu}}^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})}|_\nu^{d_\nu} \leq \max \big\{1, |\alpha_1|_\nu, \ldots, |\alpha_n|_\nu \big\}^{Ld_\nu}.$$

En faisant le produit sur toutes les places on obtient :

$$H_{L_2}(\mathbf{b}^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})})^d \leq (L+1)^{(T+n-1)\sum_{\nu|\infty} d_\nu} H(\boldsymbol{\alpha})^{Ld}$$

soit, en passant au logarithme :

$$dh_{L_2}(\mathbf{b}^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})})\big) \leq d(T+n-1)\log(L+1) + dLh(\boldsymbol{\alpha}) \ ,$$

d'où, en reprenant l'inégalité (III.3)

$$\log H_{L_2}(\tilde{B}) \leq r\Big((T+n-1)\log(L+1) + L\theta\Big).$$

L'inégalité (III.2) devient alors :

$$\begin{aligned} h_{L_2}(F) &\leq \frac{1}{N-r}\log H_{L_2}(\tilde{B}) + \log c_k \\ &\leq \frac{r}{N-r}\cdot\Big((T+n-1)\log(L+1) + L\theta\Big) + \log c_k. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que l'on a $h(F) \leq h_{L_2}(F)$. ■

Dans la suite, on utilisera cette proposition dans le cas $n = 2$:

Corollaire III.4 *Soient $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_m^2$, $T \in \mathbb{N}^*$, D le degré de $\mathbb{Q}(\boldsymbol{\alpha})$ sur $\mathbb{Q}$, et $\omega \geq \omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha})$. Si $L = \min\{\ 2\omega T^2,\ \big[(TD)^{1/2}(T+1)\big]\}$, alors il existe un polynôme $F \in E_{\mathbb{Q}}(\{\boldsymbol{\alpha}\}, L, T) \cap \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$ non nul tel que :*

$$h(F) \leq \frac{1}{T-1}\big((T+1)\log(L+1) + Lh(\boldsymbol{\alpha})\big).$$

Démonstration - Comme $D^{1/2} \geq \frac{1}{2}\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha})$, on a $L \geq \frac{1}{2}\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha})(T+1)T^{1/2} \geq \omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha})T$, en particulier $E_{\mathbb{Q}}(\{\boldsymbol{\alpha}\}, L, T)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, d'après la proposition III.1. Considérons le polynôme F donné par la proposition III.3, on a :

$$h(F) \leq \frac{r}{N-r}\big((T+1)\log(L+1) + Lh(\boldsymbol{\alpha})\big) \ ,$$

où $r := \dim \mathbb{Q}[\mathbf{x}]_{\leq L} - \dim_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}}(\{\boldsymbol{\alpha}\}, L, T)$ et $N := \dim \mathbb{Q}[\mathbf{x}]_{\leq L}$.

On a, si $L = 2\omega T^2$:

$$\begin{aligned} \frac{r}{N-r} &\leq \frac{\binom{L+2}{2}}{\binom{L-\omega T+2}{2}} - 1 = \frac{L+1}{L-\omega T+1} \times \frac{L+2}{L-\omega T+2} - 1 \\ &\leq \left(\frac{L}{L-\omega T}\right)^2 - 1 = \left(\frac{2T}{2T-1}\right)^2 - 1 \leq \frac{1}{T-1}. \end{aligned}$$

Sinon, si $L = \left[(TD)^{1/2}(T+1)\right]$:

$$\begin{aligned}\frac{r}{N-r} &\leq \frac{\binom{T+1}{2}D}{\binom{L+2}{2}-\binom{T+1}{2}D} = \frac{T(T+1)D}{(L+1)(L+2)-T(T+1)D} \\ &\leq \frac{T(T+1)D}{(T+1)^2TD - T(T+1)D} = \frac{1}{T} \leq \frac{1}{T-1}.\end{aligned}$$

■

Nous aurons également besoin de ce second corollaire, qui est en fait à peu de chose près le théorème 4.1 de [AD00a] :

Corollaire III.5 *Soient $L, T \in \mathbb{N}$ et V un hypersurface algébrique propre de $\mathbb{G}_m^n$ définie sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$-irréductible de degré D. Si $L \geq DT$ alors il existe $F \in E_{\mathbb{Q}}(V, L, T) \cap \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$ non nul tel que :*

$$h(F) \leq \frac{r}{N-r}\Big((T+n-1)\log(L+1) + L\hat{\mu}_{ess}(V)\Big),$$

où $N := \dim \mathbb{Q}[\mathbf{x}]_{\leq L}$ et $r := N - \dim_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}}(V, L, T)$.

DÉMONSTRATION - Nous reprenons l'argument de densité utilisé dans la démonstration du théorème 4.1 de [AD00a]. Fixons un nombre réel $\theta > \hat{\mu}_{\text{ess}}(V)$ et considérons, pour $d \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble

$$S_d = \Big\{\boldsymbol{\alpha} \in V(\overline{\mathbb{Q}}) \mid h(\boldsymbol{\alpha}) \leq \theta \text{ et } [\mathbb{Q}(\boldsymbol{\alpha}) : \mathbb{Q}] \leq d\Big\}.$$

D'après le théorème de Northcott, celui-ci est fini, de plus, il est stable sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$; V étant définie sur $\mathbb{Q}$. Remarquons que $S_i \subset S_j$ si $1 \leq i \leq j$; de plus, par définition du minimum essentiel, l'ensemble $S := \bigcup_{d \in \mathbb{N}^*} S_d$ est Zariski-dense dans V.

Considérons maintenant le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{A}_d$ des polynômes de $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]_{\leq L}$ nuls sur S_d à un ordre $\geq T$, on a

$$\mathcal{A}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{A}_d \supset \cdots \supset E_{\mathbb{Q}}(V, L, T)$$

et $E_{\mathbb{Q}}(V, L, T)$ étant de dimension finie, il existe $d_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{A}_d = \mathcal{A}_{d_0}$ pour $d \geq d_0$. Les polynômes de $\mathcal{A}_{d_0}$ (que nous noterons désormais $\mathcal{A}_\theta$) sont alors nuls sur S à un ordre $\geq T$ donc sur V. En effet, pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $|\boldsymbol{\lambda}| \leq T-1$, le polynôme $\frac{\partial^{\boldsymbol{\lambda}} P}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\lambda}}}$ est nul sur S, donc sur son adhérence de Zariski : V. On en déduit l'égalité

$$\mathcal{A}_\theta = E_{\mathbb{Q}}(V, L, T).$$

La proposition III.3 nous donne alors l'existence d'un polynôme $F_\theta \in E_{\mathbb{Q}}(V, L, T) \cap \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$ non nul de contenu 1 vérifiant :

$$h(F_\theta) \leq \frac{r}{N-r}\Big((T+n-1)\log(L+1) + L\theta\Big).$$

Comme $F_\theta \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$ et de contenu 1, sa hauteur est simplement le maximum des valeurs absolues de ses coefficients. On remarque pour finir que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{Z}[\mathbf{x}]_{\leq L}$ de contenu 1 et de hauteur bornée est fini ; ainsi, en faisant tendre θ vers $\hat{\mu}_{\text{ess}}(V)$, on obtient le corollaire. ■

3 Extrapolation

3.1 Lemme clef de Dobrowolski : cas de plusieurs variables.

Nous allons utiliser le lemme clef de Dobrowolski (*c.f.* [Dob79]) dans le cadre plus large de polynômes à plusieurs variables à coefficients dans un anneau d'entiers d'une extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$.

Lemme III.6 *Soient $\mathbb{F}$ un corps de nombres, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des éléments de $\mathbb{F}$ et ν une place finie de $\mathbb{F}$. Il existe alors un élément $\delta \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ tel que*

$$\left\{\begin{array}{c} \delta\alpha_1, \ldots, \delta\alpha_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}} \\ \textit{et} \\ |\delta|_\nu = \max\{1, |\alpha_1|_\nu, \ldots, |\alpha_n|_\nu\}^{-1}. \end{array}\right.$$

DÉMONSTRATION - Fixons une place archimédienne quelconque v_0, et notons Σ l'ensemble fini :

$$\Sigma = \Big\{v \in \mathcal{M}_{\mathbb{F}}, v \nmid \infty \text{ et } \max\{1, |\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_n|_v\} > 1\Big\} \cup \Big\{\nu\Big\}.$$

Pour toute place $v \in \Sigma$, notons aussi 0_v^{-1} celui des éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (vus comme des éléments du complété $\mathbb{F}_v$ de $\mathbb{F}$ en v) de valeur absolue maximale en v (si $v = \nu$ et si $\max_{1\leq i\leq n}\{|\alpha_i|_\nu\} < 1$, on posera $0_\nu = 1$). D'après le théorème de [CF67], chapitre II, §15, page 67, il existe un élément $\delta \in \mathbb{F}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{ll} |\delta - 0_v|_v < \max\{1, |\alpha_1|_\nu, \ldots, |\alpha_n|_\nu\}^{-1}, & \text{pour tout } v \in \Sigma, \\ |\delta|_v \leq 1, & \text{si } v \notin \Sigma \cup \{v_0\}. \end{array}\right.$$

Sachant que $|0_v|_v = \max\{1, |\alpha_1|_\nu, \ldots, |\alpha_n|_\nu\}^{-1}$ pour tout $v \in \Sigma$ et en utilisant l'inégalité ultramétrique, on en déduit :

$$\left\{\begin{array}{ll} |\delta|_v = \max\{1, |\alpha_1|_\nu, \ldots, |\alpha_n|_\nu\}^{-1}, & \text{pour tout } v \in \Sigma, \\ |\delta|_v \leq 1, & \text{si } v \notin \Sigma \cup \{v_0\}. \end{array}\right.$$

En particulier, pour toute place finie v de $\mathbb{F}$ on a $|\delta|_v \leq 1$ (et donc $\delta \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}}$) ; de même, pour tout i, $1 \leq i \leq n$, $|\delta\alpha_i|_v \leq |\delta|_v \max\{1, |\alpha_1|_\nu, \ldots, |\alpha_n|_\nu\} \leq 1$ (et donc $\delta\alpha_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}}$). Enfin, on a bien $|\delta|_\nu = \max\{1, |\alpha_1|_\nu, \ldots, |\alpha_n|_\nu\}^{-1}$ (car $\nu \in \Sigma$). Le lemme est donc établi. ■

Soient $k/\mathbb{Q}$ une extension galoisienne, p un nombre premier non ramifié dans k et Q un idéal premier de $\mathcal{O}_k$ tel que $Q|p$. Si l'extension $k/\mathbb{Q}$ est abélienne, alors l'automorphisme de Frobenius associé $\phi_{Q,p} \in \mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$ ne dépend que de p et on le notera ϕ_p ; on a

$$\forall \alpha \in \mathcal{O}_k, \ \phi_p(\alpha) \equiv \alpha^p \mod p\mathcal{O}_k. \tag{III.4}$$

Dans la suite de ce paragraphe, on supposera $k/\mathbb{Q}$ **cyclotomique** et on notera Δ_k son discriminant. De plus $\boldsymbol{\alpha}$ désignera un élément de $\mathbb{G}_m^n$, $\mathbb{F}$ la clôture galoisienne de $k(\boldsymbol{\alpha})$, et L, T deux entiers naturels. Le résultat qui suit correspond au théorème 2.2 de [AD04] :

Théorème III.7 *Soit $F \in E_k(\{\boldsymbol{\alpha}\}, L, T) \cap \mathcal{O}_k[\mathrm{x}]$; pour tout nombre premier $p \nmid \Delta_k$ et pour tout $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{F}}$ divisant p, on a la majoration*

$$|F^{\phi_p}(\boldsymbol{\alpha}^p)|_\nu \leq p^{-T}|F|_\nu \max\{1, |\alpha_1|_\nu, \ldots, |\alpha_n|_\nu\}^{pL},$$

où l'on a noté $\boldsymbol{\alpha}^p = (\alpha_1^p, \ldots, \alpha_n^p)$.

Démonstration - La démonstration originale de ce théorème utilise des arguments d'algèbre commutative (voir [AD99] pour le cas $k = \mathbb{Q}$ et [AD04] pour le cas général) ; nous donnons ici une preuve plus récente, trouvée par [Zan01]. Nous supposerons dans un premier temps que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont dans $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$.

Soit $p \nmid \Delta_k$ un nombre premier, en particulier p est non ramifié, fixons $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbb{F}}$ divisant p. L'inégalité (III.4) se prolonge :

$$\forall \alpha \in \mathcal{O}_{k_\nu}, \ \phi_p(\alpha) \equiv \alpha^p \mod p\mathcal{O}_{k_\nu}. \tag{III.5}$$

Remarquons tout d'abord que pour tout $x \in \mathcal{O}_k$, on a $|\phi_p(x)|_\nu = |x|_\nu$. En effet, écrivons $x = p^a y$, avec $a \in \mathbb{R}$ et y un inversible de $\mathcal{O}_k$, comme $\phi_p(\mathcal{O}_k) \subseteq \mathcal{O}_k$, on a $\phi_p(y)$ inversible de $\mathcal{O}_k$, ainsi $|\phi_p(x)|_\nu = |p^a|_\nu |\phi_p(y)|_\nu = |x|_\nu$. On peut donc supposer que $|F|_\nu = 1$.

D'après [Ser68, Prop. 12, p. 66], il existe un élément monogène γ pour $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_\nu}$. En particulier on a $\alpha_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}_\nu} = \mathcal{O}_{k_\nu}[\gamma]$ pour tout i :

$$\alpha_i = a_i(\gamma), \quad a_i \in \mathcal{O}_{k_\nu}[\mathrm{x}],$$

de plus on pose

$$\beta_i = a_i^{\phi_p}(\gamma^p) \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}_\nu}.$$

Par l'inégalité (III.5) on aura en particulier :

$$\alpha_i^p = \beta_i + p\delta_i, \quad \delta_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}_\nu}. \tag{III.6}$$

Remarquons que $D_{\boldsymbol{\lambda}}(F) \in \mathcal{O}_k[\mathbf{x}]$. Montrons que pour tout polynôme $H \in \mathcal{O}_k[\mathbf{x}]$ nul en $\boldsymbol{\alpha}$ avec multiplicité au moins t on a :

$$H^{\phi_p}(\boldsymbol{\beta}) \equiv 0 \mod p^t\mathcal{O}_{\mathbb{F}_\nu}. \tag{III.7}$$

Soit $\Gamma(\mathrm{x}) \in \mathcal{O}_{k_\nu}[\mathrm{x}]$ le polynôme minimal de γ sur k_ν et soit U la plus grande puissance de Γ divisant $G(\mathrm{x}) = H(a_1(\mathrm{x}), \ldots, a_n(\mathrm{x}))$, nous allons montrer que $U \geq t$, en particulier nous supposerons $G \neq 0$. La dérivée $G^{(U)}(\mathrm{x})$ n'est pas divisible par $\Gamma(\mathrm{x})$, de plus le polynôme $G^{(U)}(\mathrm{x})$ appartient à l'idéal engendré par

$$\Big\{D_{\boldsymbol{\lambda}}(H)(a_1(\mathrm{x}), \ldots, a_n(\mathrm{x}))\ ,\ |\boldsymbol{\lambda}| \leq U\Big\},$$

ainsi il existe un n-uplet $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n$ avec $|\boldsymbol{\lambda}| \leq U$ tel que $D_{\boldsymbol{\lambda}}(H)(a_1(\mathrm{x}), \ldots, a_n(\mathrm{x}))$ ne soit pas divisible par $\Gamma(\mathrm{x})$. En évaluant x en γ on obtient alors $D_{\boldsymbol{\lambda}}(H)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$, d'où, puisque H est nul en $\boldsymbol{\alpha}$ avec multiplicité au moins t : $|\boldsymbol{\lambda}| \geq t$ et donc $U \geq t$.
On vient donc de montrer que $\Gamma^t(\mathrm{x}) \in \mathcal{O}_{k_\nu}[\mathrm{x}]$ divise $H(a_1(\mathrm{x}), \ldots, a_n(\mathrm{x})) \in \mathcal{O}_{k_\nu}[\mathrm{x}]$; on peut donc écrire :

$$H^{\phi_p}(a_1^{\phi_p}(\mathrm{x}), \ldots, a_n^{\phi_p}(\mathrm{x})) = Q^{\phi_p}(\mathrm{x})(\Gamma^{\phi_p}(\mathrm{x}))^t, \quad Q \in \mathcal{O}_{k_\nu}[\mathrm{x}].$$

En évaluant x en γ^p dans cette équation et en tenant compte du fait que

$$\Gamma^{\phi_p}(\gamma^p) \equiv (\Gamma(\gamma))^p \equiv 0 \mod p\mathcal{O}_{\mathbb{F}_\nu},$$

on obtient (III.7).

Si on applique (III.7) à $H = D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)$ et $t = T - |\boldsymbol{\lambda}|$, pour un n-uplet quelconque $\boldsymbol{\lambda}$ vérifiant $|\boldsymbol{\lambda}| \leq T$, on obtient :

$$D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)^{\phi_p}(\boldsymbol{\beta}) \equiv 0 \mod p^{T-|\boldsymbol{\lambda}|}\mathcal{O}_{\mathbb{F}_\nu}. \tag{III.8}$$

Enfin, en utilisant (III.6) et la formule de Taylor :

$$F^{\phi_p}(\boldsymbol{\alpha}^p) = \sum_{|\boldsymbol{\lambda}| \geq 0} p^{|\boldsymbol{\lambda}|}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{\lambda}} D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)^{\phi_p}(\boldsymbol{\beta}).$$

On remarque que $p^{|\boldsymbol{\lambda}|}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{\lambda}}D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)^{\phi_p}(\boldsymbol{\beta})$ est divisible par p^T dans $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_\nu}$ pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n$; en effet si $|\boldsymbol{\lambda}| \geq T$, c'est évident, et dans le cas contraire, il suffit d'utiliser (III.8). Le théorème est donc démontré sous l'hypothèse que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ soient des entiers algébriques.

Dans le cas géneral, on se ramène, comme dans [AD99] et [AD04] au cas précédent en utilisant le lemme suivant qui est un corollaire du théorème d'approximation forte III.6. Ce dernier nous dit qu'il existe $\delta \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ tel que

$$\begin{cases} \delta\alpha_1, \ldots, \delta\alpha_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}} \\ \text{et} \\ |\delta|_\nu = \max\{1, |\alpha_1|_\nu, \ldots, |\alpha_n|_\nu\}^{-1}. \end{cases}$$

Le polynôme

$$\tilde{F}(\mathrm{x}_0, \ldots, \mathrm{x}_n) = \mathrm{x}_0^L F\Big(\frac{\mathrm{x}_1}{\mathrm{x}_0}, \ldots, \frac{\mathrm{x}_n}{\mathrm{x}_0}\Big) \in \mathcal{O}_k[\mathbf{x}]$$

est nul à un ordre $\geq T$ en $(\delta, \delta\alpha_1, \ldots, \delta\alpha_n) \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}}^{n+1}$. On en déduit alors

$$|\tilde{F}(\delta^p, \delta^p\alpha_1^p, \ldots, \delta^p\alpha_n^p)|_\nu \leq p^{-T} \ ,$$

par la première partie de la preuve. D'autre part,

$$\begin{aligned} |\tilde{F}(\delta^p, \delta^p\alpha_1^p, \ldots, \delta^p\alpha_n^p)|_\nu &= |\delta|_\nu^{pL}|F(\boldsymbol{\alpha}^p)|_\nu \\ &= |F(\boldsymbol{\alpha}^p)|_\nu \max\{1, |\alpha_1|_\nu, \ldots, |\alpha_n|_\nu\}^{-pL}. \end{aligned}$$

Le théorème est donc maintenant complètement démontré. ■

3.2 Extrapolation dans une extension abélienne

Proposition III.8 *Soit $F \in E_k(\{\boldsymbol{\alpha}\}, L, T) \cap \mathcal{O}_k[\mathbf{x}]$. Pour tout nombre premier $p \nmid \Delta_k$, le polynôme F^{ϕ_p} est nul en $\boldsymbol{\alpha}^p$ à un ordre T_1 vérifiant :*

$$T_1\Big(\log(L+1) + \log p\Big) \ > \ T\log p - h(F) - pLh(\boldsymbol{\alpha}) - n\log(L+1).$$

DÉMONSTRATION - Soit $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\boldsymbol{\lambda}| = T_1$ et $D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)^{\phi_p}(\boldsymbol{\alpha}^p) \neq 0$ (on peut supposer $T_1 < T$). Soit $v \in \mathcal{M}_{\mathbb{F}}$; on déduit de l'inégalité

$$\sum_{|\boldsymbol{\mu}| \leq L} \binom{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}} \leq \binom{L+1}{\lambda_1+1} \cdots \binom{L+1}{\lambda_n+1} \leq (L+1)^{|\boldsymbol{\lambda}|+n}$$

et de l'inégalité ultramétrique les majorations :

$$|D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)^{\phi_p}(\boldsymbol{\alpha}^p)|_v \leq \begin{cases} |F|_v \cdot \max\{1, |\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_n|_v\}^{pL} & \text{si } v \nmid \infty \text{ et } v \nmid p \\ (L+1)^{|\boldsymbol{\lambda}|+n}|F|_v \cdot \max\{1, |\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_n|_v\}^{pL} & \text{si } v \mid \infty \end{cases}$$

De plus, si $v \mid p$, le théorème III.7 donne :

$$|D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)^{\phi_p}(\boldsymbol{\alpha}^p)| \leq p^{-(T-|\boldsymbol{\lambda}|)}|F|_\nu \max\{1, |\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_n|_v\}^{pL}.$$

On a, par la formule du produit :

$$1 = \prod_{v \in \mathcal{M}_{\mathbb{F}}} |D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)^{\phi_p}(\boldsymbol{\alpha}^p)|_v^{[\mathbb{F}_v:k_v]/[\mathbb{F}:k]}.$$

En passant au log, et en utilisant les trois majorations obtenues ci-dessus on obtient :

$$0 \leq (|\boldsymbol{\lambda}| + n)\log(L+1) + h(F) + pLh(\boldsymbol{\alpha}) - (T - |\boldsymbol{\lambda}|)\log p \ ,$$

soit

$$|\boldsymbol{\lambda}|\Big(\log(L+1) + \log p\Big) \ > \ T\log p - h(F) - pLh(\boldsymbol{\alpha}) - n\log(L+1).$$

■

Dans le cas $k = \mathbb{Q}$ par densité on obtient un résultat analogue pour les variétés définies et irréductibles sur $\mathbb{Q}$, correspondant en fait au lemme 4.2 de [AD00a] :

Corollaire III.9 *Soient V une sous-variété propre de $\mathbb{G}_m^n \subset \mathbb{P}^n$, définie sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$-irréductible et $F \in E_{\mathbb{Q}}(V, L, T) \cap \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$. Soit p un nombre premier tel que*

$$T\log p - h(F) - pL\hat{\mu}_{ess}(V) - n\log(L+1) > 0.$$

Alors, F est identiquement nul sur $[p]V$.

DÉMONSTRATION - Soit $h_0 > \hat{\mu}_{\text{ess}}(V)$ tel que

$$T\log p - h(F) - pLh_0 - n\log(L+1) > 0.$$

D'après le lemme II.8, on a $\hat{\mu}_{\text{ess}}([p]V) = p\hat{\mu}_{\text{ess}}(V)$, en particulier l'ensemble

$$\{\boldsymbol{\alpha}^p \in \mathbb{G}_m^n \mid \boldsymbol{\alpha} \in V(h_0)\}$$

est Zariski dense dans de $\hat{\mu}_{\text{ess}}([p]V)$. Il suffit ainsi de montrer que pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in V(\overline{\mathbb{Q}})$ de hauteur $h(\boldsymbol{\alpha}) \leq h_0$, on a $F(\boldsymbol{\alpha}^p) = 0$, ce qui est bien le cas d'après le lemme III.8. ■

4 Versions explicites de certaines minorations

4.1 Une minoration pour les courbes

Dans [AD00a], F. Amoroso et S. David obtiennent une minoration de la hauteur d'une hypersurface de $\mathbb{G}_m^n$ définie sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$-irréductible qui n'est pas de torsion ; de plus notre résultat principal dans [Pon01] donne une version explicite de ce résultat. Nous reprenons celui-ci en améliorant la constante pour $n = 2$, cas qui nous intéresse ici.

Proposition III.10 *Soit V une courbe définie sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$-irréductible de $\mathbb{G}_m^2$ de degré D. Alors, si V n'est pas de torsion, on a*

$$\hat{h}(V) \geq 5^{-6}\left(\frac{\log\log D'}{\log D'}\right)^3 ,$$

où[2] $D' := \max\{16, D\}$.

Notons que si $P \in \mathbb{Z}[x_1, x_2]$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$ (en particulier de contenu 1) et est une équation de V, alors $\hat{h}(V) = \log M(P)$, où $M(P)$ est la mesure de Mahler de P.

Supposons l'inégalité fausse pour une courbe V de degré D définie sur $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$-irréductible qui ne soit pas de torsion. D'après un théorème de Zhang [Zha92] on a $\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) \leq \frac{1}{D}\hat{h}(V)$, ainsi :

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) < \frac{1}{5^6 D}\left(\frac{\log\log D'}{\log D'}\right)^3 . \tag{III.9}$$

Choix des paramètres et fonction auxiliaire

On pose

$$\begin{cases} T := \left[5\dfrac{\log D'}{\log\log D'}\right] \\ L := DT^2 \\ N := 5^4\dfrac{(\log D')^2}{\log\log D'}. \end{cases}$$

Notons que :

$$T \geq [5e] \geq 13, \quad L \geq T^2 \geq 169 \quad \text{et} \quad N \geq 5^4\frac{(\ln 16)^2}{\ln\ln 16} \geq 4000.$$

[2]Nous avons choisi de mettre D' dans le log car la fonction $x \mapsto \frac{\log(x)}{\log\log(x)}$ est croissante sur $[16, +\infty[$, et afin de pouvoir minorer $\log\log D'$ par 1 dans les calculs.

Fait III.11 *On a*

$$N/2 \geq (\log D')^{1,99} \quad \textit{et} \quad 6,1\log(L+1) \leq T\log(N/2).$$

DÉMONSTRATION - Pour la première inégalité, il suffit d'utiliser (II.18) avec $(a,b) = (0.01, 1)$. Pour la seconde, on a :

$$\frac{\log L}{T\log(N/2)} \leq \frac{\log D'}{T\log(N/2)} + \frac{\log T}{T}\frac{2}{\log(N/2)}.$$

De plus, comme $T \geq 13$, la premiére inégalité du fait nous donne $T\log(N/2) \geq 9,2\log D'$. Ainsi, puisque $N \geq 4000$:

$$\frac{\log L}{T\log(N/2)} \leq \frac{1}{9,2} + \frac{\log 13}{13}\frac{2}{\log(2000)} \leq \frac{1}{6,2}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $\log(L+1) \leq 1,01\log L$, d'où le résultat. ■

En appliquant la proposition III.3 à un ensemble fini suffisamment gros de points de V de hauteur $\leq \theta$ où

$$\theta := 5^{-6}\left(\frac{\log\log D'}{\log D'}\right)^3,$$

on trouve, par le même argument que celui utilisé dans le théorème 4.1 de [AD00a], un polynôme non nul $F \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$, de contenu 1 et de degré au plus L, qui s'annule en tout point de V à un ordre $\geq T$ et tel que

$$h(F) \leq l\Big\{(T+2)\log(L+1) + L\hat{\mu}_{\text{ess}}(V)\Big\},$$

où

$$l := \frac{\binom{L+2}{2} - \binom{L-DT+2}{2}}{\binom{L-DT+2}{2}}.$$

Extrapolation

Soit p un nombre premier dans $[N/2, N]$ et notons

$$\begin{aligned}
\varepsilon &:= T\log p - h(F) - 2\log(L+1) - pL\hat{\mu}_{\text{ess}}(V) \\
&\geq T\log(N/2) - (l(T+2)+2)\log(L+1) - (N+l)L\hat{\mu}_{\text{ess}}(V).
\end{aligned}$$

Le corollaire III.9 nous assure que F s'annule sur $[p]V$ si $\varepsilon > 0$; il suffit donc de montrer que notre choix de paramètres assure cette condition.

Majorons tout d'abord l :

$$l \leq \frac{L+1}{L-DT+1} \times \frac{L+2}{L-DT+2} - 1 \leq \left(\frac{L}{L-DT}\right)^2 - 1 = \frac{2T-1}{(T-1)^2}$$

en particulier, comme $T \geq 13$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} l(T+2)+2 &\leq \frac{2T^2+3T-2}{(T-1)^2} + 2 \\ &\leq \frac{2(T^2-2T+1)+7(T-1)+3}{(T-1)^2} + 2 \leq 5. \end{aligned}$$

Nous avons, puisque $l < 1$ et $N > 100$:

$$\varepsilon \geq T \log N/2 - 5\log(L+1) - 1,01 NL\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V).$$

Remarquons maintenant que, d'après le fait III.11 nous avons $T\log(N/2) \geq 6{,}1\log(L+1)$, et d'après (III.9) nous avons $NL\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) < \log D' \leq \log(L+1)$, ainsi $\varepsilon > 0$.

Conclusion

Soit Λ l'ensemble des nombres premiers dans $[N/2, N]$; nous avons vu que, sous l'hypothèse (III.9), F s'annulait sur $[p]V$ pour tout premier $p \in \Lambda$. Comme $N \geq 4000$, la proposition II.16 et le lemme II.17 nous donnent :

$$L \geq \deg\Big(\bigcup_{p\in\Lambda}[p]V\Big) \geq \Big(0,4\frac{N}{\log N} - \frac{2}{\log 2}\log D\Big)D. \tag{III.10}$$

Minorons le membre de droite :

$$\frac{\log\log D'}{\log N} \geq \frac{\log\log D'}{4\log 5 + 2\log\log D'} \geq \frac{3}{25},$$

d'où

$$\frac{N}{\log N} \geq 3\left(\frac{5\log D'}{\log\log D'}\right)^2.$$

En reportant ceci dans l'inégalité (III.10) on obtient :

$$\begin{aligned} L &\geq \left(0,4\cdot 3 - \frac{2}{\log 2}\frac{(\log\log D')^2}{5^2\log D'}\right) D \left(5\frac{\log D'}{\log\log D'}\right)^2 \\ &\geq \left(1,2 - \frac{2}{\log 2}\frac{(\log\log 16)^2}{5^2\log 16}\right) L \\ &> L \end{aligned}$$

d'où une contradiction.

4.2 Dans les extensions d'un corps cyclotomique

F. Amoroso et U. Zannier donnent une minoration de la hauteur d'un nombre algébrique en fonction de son degré sur une extension abélienne d'un corps de nombres $\mathbb{K}$ (*c.f.* [AZ00]) :

Théorème III.12 *Soient $\mathbb{K}$ un corps de nombres et $\mathbb{L}$ une extension abélienne de $\mathbb{K}$. Alors, pour tout $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}}^* \setminus \overline{\mathbb{Q}}^*_{tors}$, on a :*

$$h(\gamma) \geq \frac{C(\mathbb{K})}{d} \left(\frac{\log \log 5d}{\log 2d} \right)^{13},$$

où $d := [\mathbb{L}(\gamma) : \mathbb{L}]$ et $C(\mathbb{K})$ est une constante dépendant uniquement de $\mathbb{K}$.

Nous aurons besoin de ce résultat dans le cas particulier d'une extension cyclotomique, aussi nous nous proposons d'en montrer une version faible, mais explicite :

Proposition III.13 *Soient $k = \mathbb{Q}(\zeta_m)$ un corps cyclotomique et $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}}^* \setminus \overline{\mathbb{Q}}^*_{tors}$, alors :*

$$h(\gamma) \geq \frac{10^{-3}}{d} \left(\frac{\log \log D}{\log D} \right)^{3},$$

où $d := [k(\gamma) : k]$, $D := [k(\gamma) : \mathbb{Q}]$ et $D \geq 2$.

Notons $\varphi(m)$ l'indicatrice d'Euler de m ; nous pourrons supposer dans la suite $\varphi(m) = D/d \geq 3^4$. En effet, supposons le contraire, en particulier $[\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}] \leq D = \varphi(m)d < 3^4 d$. Si $[\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}] \leq 15$, alors $h(\gamma) \geq 10^{-2}$, et si $16 \leq [\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}] < 3^4 d$, le théorème principal de [Vou96] nous dit que :

$$h(\gamma) \geq \frac{1}{4[\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}]} \left(\frac{\log \log [\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}]}{\log [\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}]} \right)^{3}.$$

Par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{\log \log x}{\log x}$ sur $[16, +\infty]$ on en déduit

$$h(\gamma) \geq \frac{1}{4D} \left(\frac{\log \log D}{\log D} \right)^{3} \geq \frac{1}{324d} \left(\frac{\log \log D}{\log D} \right)^{3}.$$

Notons qu'ici que nous traitons les cas de petits degrés avec [Vou96], ceci étant il est possible d'obtenir le même résultat (avec la même méthode) sans l'utiliser, avec toutefois une constante un peu plus petite : 2.10^{-4} au lieu 10^{-3} (la différence étant due à une moins bonne majoration de $\log(L+1)$ dans l'extrapolation).

Choix des paramètres et fonction auxiliaire

Rappelons que nous nous sommes réduit au cas où $\varphi(m) \geq 3^4$. Posons

$$\begin{cases} T &= \left[3\dfrac{\log D}{\log\log D}\right] \\ L &= dT^2 \\ N &= 175\dfrac{(\log D)^2}{\log\log D}. \end{cases}$$

Fait III.14 *Nous avons : $T \geq 8$, $L \geq 64$, $N \geq 175$, $T \leq 3D^{1/4}$ et*

$$2,125\log(L+1) < 3,2\log D - \log\varphi(m).$$

DÉMONSTRATION - L'inégalité (II.18) nous donne $T \geq [3e] = 8$, (en particulier $L \geq 64$), et $N \geq 175 \times 2e \geq 951$. Pour montrer $T \leq 3D^{1/4}$, comme $\log D \geq \log\varphi(m) \geq 4\log 3$, il suffit de remarquer que la fonction $x \mapsto \frac{x}{\log x} - e^{0.25x}$ est négative en $4\log 3$ et de dérivée négative sur $]1, +\infty[$.

Pour la dernière inégalité nous avons :

$$\begin{aligned} \log L &= \log D - \log\varphi(m) + 2\log T \\ &\leq 1,5\log D + 2\log 3 - \log\varphi(m) \end{aligned}$$

car $T \leq 3D^{1/4}$. Ainsi, puisque $\varphi(m) \geq 3^4$ il vient

$$\log L \leq 1,5\log D - \frac{1}{2}\log\varphi(m).$$

Comme $L \geq 64$ on a $\log(L+1) < 1,0038\log L$, ainsi

$$2,125\log(L+1) < 3,2\log D - \log\varphi(m).$$

■

Supposons par l'absurde :

$$h(\gamma) < \frac{10^{-3}}{d}\left(\frac{\log\log D}{\log D}\right)^3. \tag{III.11}$$

D'après la proposition III.3, il existe un polynôme $F \in \mathcal{O}_k[\mathrm{x}]$ non nul, de degré au plus L, et nul en γ à un ordre $\geq T$ tel que :

$$\begin{aligned} h(F) &\leq \frac{dT}{L+1-dT}\big(Lh(\gamma) + T\log(L+1)\big) + \log c_k \\ &\leq \frac{1}{T-1}\big(Lh(\gamma) + T\log(L+1)\big) + \log\varphi(m). \end{aligned}$$

En effet, comme $\Delta_k | m^{\varphi(m)}$, on a $c_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}\Delta_k^{1/\varphi(m)}} \leq \sqrt{\frac{2m}{\pi}} \leq \varphi(m)$. Ainsi, comme $T \geq 8$:

$$h(F) \leq Lh(\gamma) + 1,125\log(L+1) + \log\varphi(m). \tag{III.12}$$

Extrapolation

Soit maintenant $p \in [N/2, N]$ un nombre premier ne divisant pas m (en particulier $p \nmid \Delta_k$) et soit ν une place ne divisant pas p. Notons T_1 l'ordre d'annulation de F^{ϕ_p} en γ^p ; nous devons donc montrer $T_1 > 0$. D'après la proposition III.8, on a $T_1\Big(\log(L+1) + \log p\Big) > \varepsilon$ où $\varepsilon := T\log p - h(F) - pLh(\gamma) - \log(L+1)$, il nous suffit ainsi de voir que ε est positif. Par hypothèse sur F on a :

$$\varepsilon \geq T\log p - Lh(\gamma)\,(1+p) - 2,125\log(L+1) - \log\varphi(m)$$

soit, d'après le fait III.14 :

$$\varepsilon > T\log p - Lh(\gamma)(1+p) - 3,2\log D.$$

Nous allons voir que F^{ϕ_p} s'annule en γ^p, en montrant que $\varepsilon > 0$. Par hypothèse $p \geq N/2 \geq \big(\log D\big)^{1,99}$ (d'après (II.18) avec $x = \log D$, $a = 0,01$ et $b = 1$) et $T \geq 8$, ainsi :

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \Big(\frac{8}{9}(T+1)1,99\log\log D - 3,2\log D\Big) - Lh(\gamma)(1+p) \\ &> 2\log D - Lh(\gamma)(1+N) \\ &> 2\log D - 176\cdot 3^2 d\frac{(\log D)^4}{(\log\log D)^3} \times h(\gamma). \end{aligned}$$

Donc, d'après (III.11), on a $\varepsilon > 0$, en particulier $T_1 > 0$ et $F^{\phi_p}(\gamma^p) = 0$.

Conclusion

Remarquons que si $F^{\phi_p}(\gamma^p) = 0$ et si $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/k)$ prolonge ϕ_p^{-1}, alors $F(\tau(\gamma^p)) = 0$. Notons Σ l'ensemble des $\tau(\gamma^p)$, où

- p parcourt l'ensemble des premiers p de $[N/2, N]$ ne divisant pas m,
- $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/k)$ prolonge ϕ_p^{-1}.

Sous l'hypothèse (III.11) sur la hauteur de γ, nous avons vu que F s'annule sur Σ. Pour arriver à une contradiction, nous allons montrer que $\mathrm{Card}(\Sigma) > \deg(F)$.

• Soient $p_1 < \cdots < p_s$ les diviseurs premiers de m dans $\{N/2, \ldots, N\}$, nous avons :

$$\varphi(m) \geq (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_s - 1) \geq (N/2 - 1)^s,$$

en particulier

$$s \leq \frac{\log(\varphi(m))}{\log(N/2 - 1)} \leq \frac{\log D}{6}.$$

• Remarquons maintenant que si p est un nombre premier tel que $\mathbb{Q}(\gamma^p) = \mathbb{Q}(\gamma)$, alors $k(\gamma^p) = k(\gamma)$ c'est-à-dire $[k(\gamma^p) : k] = [k(\gamma) : k]$, auquel cas les k-automorphismes de $\overline{\mathbb{Q}}$ prolongeant ϕ_p^{-1} sont au nombre de $d = [k(\gamma) : k]$.

Ainsi, d'après la proposition II.16 page 26, le nombre de premiers p tels que $[k(\gamma^p) : k] < [k(\gamma) : k]$ ou tel que γ^p soit égal à $\sigma(\gamma^p)$ pour un certain $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/k)$, $\sigma \neq id$, est inférieur à :

$$\frac{\log([\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}])}{\log 2} \leq \frac{\log D}{\log 2}.$$

De plus, comme γ n'est pas racine de l'unité, γ^p et $\gamma^{p'}$ ne sont pas conjugués si $p \neq p'$, d'où :

$$\mathrm{Card}(\Sigma) \geq d \times \left(\pi(N) - \pi(N/2) - \left(\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{6}\right) \log D\right)$$

soit, d'après le lemme II.17 page 27 et (II.18) avec $x = \log D$, $a = 1$ et $b = 2$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(\Sigma) &\geq d\left(0{,}4\frac{N}{\log N} - 1{,}7\log D\right) \\ &\geq d\left(0{,}4\frac{N}{\log N} - 1{,}7\left(\frac{2}{e}\right)^2\left(\frac{\log D}{\log\log D}\right)^2\right). \end{aligned}$$

De plus, $\log N \leq (2 + \log 175)\log\log D$, donc :

$$\mathrm{Card}(\Sigma) \geq d\left(\frac{0,4 \cdot 175}{2 + \log 175} - 1\right)\left(\frac{\log D}{\log\log D}\right)^2,$$

d'où

$$\mathrm{Card}(\Sigma) > 3^2 d\left(\frac{\log D}{\log\log D}\right)^2.$$

Ainsi $\mathrm{Card}(\Sigma) > L \geq \deg(F)$; en particulier F ne peut pas s'annuler sur Σ tout entier, contradiction avec l'hypothèse (III.11). ∎

La proposition III.13 va en fait nous permettre, dans la démonstration du théorème I.20, de se ramener au cas où notre point $\boldsymbol{\alpha}$ n'est contenu dans aucune variété de torsion, comme nous l'indique le lemme suivant.

Lemme III.15 *Soit V une courbe de $\mathbb{G}_m^2$ définie sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$-irréductible de degré ω qui ne soit pas de torsion, et soit $\boldsymbol{\alpha} \in V \setminus (\mathbb{G}_m^2)_{tors}$. S'il existe une courbe B de torsion définie et irréductible sur $\mathbb{Q}$ contenant $\boldsymbol{\alpha}$, alors :*

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{5.10^{-4}}{\omega} \left(\frac{\log\log(\omega \deg(B)^2)}{\log(\omega \deg(B)^2)} \right)^3 .$$

DÉMONSTRATION - Il existe un sous-groupe algébrique H de $\mathbb{G}_m^2$ et un $\boldsymbol{\theta} \in (\mathbb{G}_m^2)_{\text{tors}}$ tels que :

$$B = \bigcup_{\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})} \sigma(\boldsymbol{\theta})H.$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{G}_m^2 \mid x^{\lambda_1} y^{\lambda_2} = 1\}.$$

Comme $\boldsymbol{\alpha} \in B$, il existe $\eta \in (\mathbb{G}_m)_{\text{tors}}$ tel que $\alpha_1^{\lambda_1}\alpha_2^{\lambda_2} = \eta$. Soit γ une racine λ_2-ième de α_1 ($\boldsymbol{\alpha}$ n'étant pas de torsion, $\gamma \notin (\mathbb{G}_m)_{\text{tors}}$), on a $\alpha_2^{\lambda_2} = \eta\gamma^{-\lambda_1\lambda_2}$. En particulier, il existe $\eta' \in (\mathbb{G}_m)_{\text{tors}}$ tel que $\alpha_2 = \eta'\gamma^{-\lambda_1}$. Posons $M := \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} h(\boldsymbol{\alpha}) & \geq & \max\{h(\alpha_1), h(\alpha_2)\} \\ & \geq & \max\{h(\gamma^{\lambda_2}), h(\eta'\gamma^{-\lambda_1})\} \\ & \geq & M \cdot h(\gamma) \end{array}$$

Considérons

$$g(t) := t^{\lambda} G(t^{\lambda_2}, \eta t^{-\lambda_1}) \in \mathbb{Q}(\eta)[t],$$

où $G \in \mathbb{Q}[\mathbf{x}]$ est une équation de V et $\lambda \in \mathbb{Z}$ est choisi le plus petit possible. En particulier G est nul en $\boldsymbol{\alpha}$ de degré ω et *a fortiori* on a $g(\gamma) = 0$. Notons que, comme V n'est pas de torsion, le polynôme g est non nul. De plus, V étant irréductible et non de torsion, V et B n'ont pas de composante commune, le théorème de Bézout nous donne :

$$D \leq \deg(V) \cdot \deg(B) = \omega \deg(B),$$

où D est le degré de $\boldsymbol{\alpha}$ sur $\mathbb{Q}$. .

Notons $D_\gamma := [\mathbb{Q}(\eta,\gamma) : \mathbb{Q}]$ et $d_\gamma := [\mathbb{Q}(\eta,\gamma) : \mathbb{Q}(\eta)]$; l'extension $\mathbb{Q}(\eta)/\mathbb{Q}$ étant cyclotomique, la proposition III.13 nous dit que :

$$h(\gamma) \geq \frac{10^{-3}}{d_\gamma} \left(\frac{\log\log(D_\gamma)}{\log(D_\gamma)} \right)^3,$$

or $d_\gamma \leq \deg(g) \leq 2\deg(G)M = 2\omega M$ et $D_\gamma \leq MD$, d'où :

$$h(\gamma) \geq \frac{5.10^{-4}}{\omega M} \left(\frac{\log\log(MD)}{\log(MD)} \right)^3,$$

ainsi :

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{\alpha}) &\geq M \cdot h(\gamma) \\ &\geq \frac{5 \cdot 10^{-4}}{\omega} \left(\frac{\log\log(MD)}{\log(MD)} \right)^3 . \end{aligned}$$

Pour finir, il suffit de remarquer que, comme H et B ont la même dimension, on a

$$M \leq \deg(H) \leq \deg(B) \quad \text{et} \quad D \leq \omega \deg(B).$$

■

5 Démonstration du théorème principal

Si $V_{\boldsymbol{\alpha}}$ désigne la variété de dimension zéro définie sur $\mathbb{Q}$ par un point $\boldsymbol{\alpha}$ de $\mathbb{G}_m^n$, c'est-à-dire $\{\sigma(\boldsymbol{\alpha}) \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\}$, la propriété III.1 nous dit

$$\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha}) \leq n(\deg(V_{\boldsymbol{\alpha}}))^{1/n}.$$

Afin de pouvoir conclure leur démonstration, [AD03] considèrent des variétés de différentes dimensions contenant un translaté de la variété qu'ils étudient, aussi ont-ils été amenés à introduire *l'indice d'obstruction généralisé de poids* T :

$$\omega(T; \boldsymbol{\alpha}) := \min\{(T\deg(W))^{1/\operatorname{codim}(W)}\} ,$$

où T est un réel > 0 et W parcourt l'ensemble des variétés définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\overline{\mathbb{Q}}$ irréductibles contenant $\boldsymbol{\alpha}$. Notons en particulier qu'aucune hypothèse sur le corps de définition de V n'est faite ici. Nous utiliserons cet *indice d'obstruction généralisé* un peu modifié, en gros :

$$\min\left\{ 2\omega T,\ (TD)^{1/2} \right\} ,$$

où D est le degré sur $\mathbb{Q}$ d'un point $\boldsymbol{\alpha}$ et le ω le degré d'une courbe V définie sur $\mathbb{Q}$ fixée contenant $\boldsymbol{\alpha}$ (voir dans le choix des paramètres ci-dessous). Celui-ci dans notre cas n'est pas nécessaire pour retrouver la minoration du théorème I.20 à une puissance du log près, néanmoins il permet de gagner non seulement sur la constante, mais surtout dans le terme d'erreur (sur la puissance du log).

5.1 Choix des paramètres et fonction auxiliaire

Notons D le degré de $\mathbb{Q}(\boldsymbol{\alpha})$ sur $\mathbb{Q}$ et rappelons que $\omega' := \max\{16, \omega\}$. Posons :

$$\left\{ \begin{aligned} T &= \left[9 \left(\frac{\log \omega'}{\log\log \omega'} \right)^2 \right] \\ L &= \min\left\{ 2\omega T^2,\ \left[(TD)^{1/2}(T+1) \right] \right\} . \end{aligned} \right.$$

Notons $c_1 := 3{,}7 \cdot 10^4$, $c_2 := 2{,}05 \cdot 10^9$ et considérons les réels N_1, N_2 suivants :

$$\begin{cases} N_1 & := & c_1 \dfrac{\big(\log\omega'\big)^2}{\log\log\omega'} \\ N_2 & := & c_2 \dfrac{\big(\log\omega'\big)^8}{\big(\log\log\omega'\big)^6}. \end{cases}$$

Fait III.16 *Nous avons :*

1. $T \geq [9e^2] = 66$ *et* $N_1^2 \leq N_2$.
2. $\log(L+1) \leq 4{,}3 \log\omega$.
3. $\log(N_1/2) \geq 1{,}999 \log\log\omega'$ *et* $\log(N_2/2) \geq 7{,}92 \log\log\omega'$.
4. *Les inégalités suivantes nous permettrons de majorer le cardinal d'ensembles de premiers exceptionnels :*

$$\frac{2}{\log 2}\log L \leq 0{,}01 \frac{N_1}{\log N_1} \quad \textit{et} \quad \frac{2}{\log 2}\log(N_1 L^2) \leq 0{,}01 \frac{N_2}{\log N_2}.$$

DÉMONSTRATION -

1. Pour la première inégalité on utilise (II.18) avec $a = b = 2$. La seconde découle immédiatement du choix des constantes.
2. Comme $T \geq 66$ nous avons $L + 1 \leq 2\omega' T^2 + 1 \leq 1{,}0002 \cdot 2\omega' T^2$ or :

$$\begin{aligned} \log L &\leq \log 2 + \log\omega' + 2\log(9/\log\log 16) + 4\log\log\omega' \\ &\leq \Big(1 + (\log 2 + 2\log 8{,}9 + 4\log\log 16)/\log 16\Big)\log\omega' \\ &\leq 4{,}299 \log\omega' \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. Il suffit de remarquer que, d'après (II.18) avec $(a,b) = (0.001, 1)$ puis $(0.08, 6)$ nous avons :

$$\frac{N_1}{2} \geq \frac{c_1}{2} \cdot 0{,}001 e (\log\omega')^{1{,}999} \quad \text{et} \quad \frac{N_2}{2} \geq \frac{c_2}{2}\left(\frac{0{,}08e}{6}\right)^6 (\log\omega')^{7{,}92}.$$

4. Comme $\log N_1 \leq (2 + \log c_1)\log\log\omega'$ on a

$$0{,}01 \frac{N_1}{\log N_1} \geq \frac{c_1}{100(2+\log c_1)}\left(\frac{\log\omega'}{\log\log\omega'}\right)^2 \geq \frac{2\cdot 4{,}3\log\omega'}{\log 2}\frac{\log\omega'}{\big(\log\log\omega'\big)^2}$$

or $4,3\log\omega' \geq \log L$ et d'après (II.18), $\frac{\log\omega'}{\left(\log\log\omega'\right)^2} \geq \frac{e^2}{4} \geq 1$, d'où l'inégalité voulue.

Enfin nous avons, puisque $N_2 \geq N_1^2$:

$$0{,}01\frac{N_2}{\log N_2} \geq 0{,}01 N_1 \frac{N_1}{2\log N_1} \geq 100\frac{N_1}{\log N_1}$$

de plus

$$\frac{2}{\log 2}\log(N_1L^2) = \frac{2}{\log 2}(\log N_1 + 2\log L) \leq \frac{2}{\log 2}\log N_1 + 0{,}02\frac{N_1}{\log N_1}.$$

■

Le corollaire III.4 nous donne un polynôme $F \in E(\{\boldsymbol{\alpha}\}, L, T) \cap \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$ vérifiant :

$$h(F) \leq \frac{1}{T-1}\big((T+1)\log(L+1) + Lh(\boldsymbol{\alpha})\big)$$

Pour $j = 1, 2$ posons $\mathcal{P}_j := \{p \in [N_j/2, N_j] \text{ premier}\} \cup \{1\}$ et notons

$$T_1 := \min_{p\in\mathcal{P}_1} \operatorname{ord}_{\boldsymbol{\alpha}^p}(F),$$

en particulier, comme $1 \in \mathcal{P}_1$ nous avons $T_1 \leq T$. Nous allons montrer le théorème I.20 par l'absurde, aussi nous supposerons dans la suite $\boldsymbol{\alpha}$ de hauteur petite, plus précisément :

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \leq \frac{T_1 \log N_2}{10N_1N_2L} \leq \frac{(T+1)}{10L}. \tag{III.13}$$

On a alors :

$$h(F) \leq \frac{T+1}{T-1}\left(1 + \frac{1}{10\log(L+1)}\right)\log(L+1)$$

ainsi, comme $T \geq 66$ et $L + 1 \geq T^{3/2} \geq 500$ on obtient

$$h(F) \leq 1,05\log(L+1).$$

5.2 Extrapolation

Proposition III.17 *Sous l'hypothèse (III.13) sur la hauteur de $\boldsymbol{\alpha}$, nous avons, pour tout (p, q) dans $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$,*

$$F(\boldsymbol{\alpha}^{pq}) = 0.$$

Démonstration - Soit $(p,q) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$, puisque $T_1 \leq T$ et $N_1 \geq 100$ nous avons d'après (III.13)

$$Lh(\boldsymbol{\alpha}) \leq \frac{T_1}{10N_1}\frac{\log N_2}{N_2} \leq \frac{T}{1000}\frac{\log N_2}{N_2}.$$

Par décroissance de la fonction $x \mapsto \log(x)/x$, comme $p \leq N_1 \leq N_2/2 \leq q \leq N_2$ il découle

$$pLh(\boldsymbol{\alpha}) \leq 0{,}001 T \log p \quad \text{et} \quad pqLh(\boldsymbol{\alpha}) \leq 0{,}1 T_1 \log q. \tag{III.14}$$

• Notons $T_{1,p}$ l'ordre d'annulation de F en $\boldsymbol{\alpha}^p$, comme $h(F) \leq 1{,}05\log(L+1)$, la proposition III.8 nous donne :

$$T_{1,p}\big(\log(L+1) + \log p\big) > 0{,}999 T \log p - 3{,}05 \log(L+1).$$

Deux cas apparaissent :

<u>si $L+1 \leq p$:</u>

$$2T_{1,p} \log p > (0{,}999T - 3{,}05)\log p, \tag{III.15}$$

donc, comme $T \geq 66$, on obtient $T_{1,p} \geq 32$.

<u>si $L+1 > p$:</u>

$$(2T_{1,p} + 3,05)\log(L+1) > 0{,}999 T \log p \geq 0{,}999 T \log(N_1/2) \tag{III.16}$$

Comme $T \geq 66$, on a, d'après le point 2 du fait III.16 :

$$\begin{aligned} 2T_{1,p} + 3{,}05 &> \frac{0{,}999T}{T+1}(T+1)\frac{\log(N_1/2)}{4{,}3\log\omega'} \\ &> \frac{0{,}999\cdot 66}{67}\cdot 9 \cdot \frac{\log(N_1/2)}{4{,}3}\frac{\log\omega'}{(\log\log\omega')^2} \end{aligned}$$

Soit, en utilisant les inégalités $N_1/2 \geq \frac{c_1 \log 16}{2(\log\log 16)^2}$ et $\frac{\log\omega'}{(\log\log\omega')^2} \geq \frac{e^2}{4}$ (via (II.18)) :

$$2T_{1,p} + 3,05 > 45{,}05$$

car $c_1 = 3,7.10^4$. Ainsi dans les deux cas on a $T_{1,p} \geq 22$.

• Notons maintenant $T_{2,pq}$ l'ordre d'annulation de F en $\boldsymbol{\alpha}^{pq}$; nous avons d'après (III.14) $pLh(\boldsymbol{\alpha}^q) = pqLh(\boldsymbol{\alpha}) \leq 0{,}1T_{1,p}\log q$. Comme $h(F) \leq 1{,}05\log(L+1)$, de nouveau la proposition III.8 nous donne :

$$T_{2,pq}\big(\log(L+1) + \log q\big) > 0{,}9 T_{1,p} \log q - 3{,}05\log(L+1).$$

Il nous faut ici montrer que le membre de droite de cette inégalité est > 0. Si $L+1 \leq p$, c'est évident, car $T_{1,p} \geq 22$ et $q \geq p$. Supposons donc $L+1 > p$; comme $T_{1,p} \geq 22$ nous avons :

$$0{,}9T_{1,p} > 0{,}42(2T_{1,p} + 3{,}05),$$

ainsi d'après (III.16)

$$0{,}9T_{1,p}\log(N_2/2) > 0{,}42\frac{0{,}999T\log(N_1/2)}{\log(L+1)}\log(N_2/2).$$

D'où, d'après les points 1,2 et 3 du fait III.16 :

$$\begin{aligned} 0{,}9T_{1,p}\log(N_2/2) &> 0{,}42\cdot 0{,}999\cdot \tfrac{66}{67}\cdot \tfrac{1{,}999}{4{,}3}\cdot 7{,}92\cdot 9\log\omega' \\ &> 13{,}5\log\omega'. \end{aligned} \tag{III.17}$$

Ainsi $0{,}9T_{1,p}\log q > 3{,}05\cdot 4{,}3\log\omega' \geq 3{,}05\log(L+1)$.

■

5.3 Lemme de zéros

Notons X_1 l'ensemble algébrique définie par F et posons :

$$\begin{cases} X_2 = \bigcap_{p\in\mathcal{P}_1}[p]^{-1}X_1, \\ X_3 = \bigcap_{(p,q)\in\mathcal{P}_1\times\mathcal{P}_2}[pq]^{-1}X_1. \end{cases}$$

Notons que, puisque $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ contiennent 1, nous avons les inclusions suivantes :

$$X_3 \subset X_2 \subset X_1.$$

Nous travaillons ici avec $\boldsymbol{\alpha}$, aussi nous ne considérerons que les composantes de ces variétés rencontrant une puissance de $\boldsymbol{\alpha}$; plus précisément posons :

– Y_1 l'union des composantes $\mathbb{Q}$-irréductibles de X_1 contenant $\boldsymbol{\alpha}^{pq}$ pour au moins un (p,q) dans $\mathcal{P}_1\times\mathcal{P}_2$
– Y_2 l'union des composantes $\mathbb{Q}$-irréductibles de X_2 contenant $\boldsymbol{\alpha}^{q}$ pour au moins un $q\in\mathcal{P}_2$
– Y_3 l'union des composantes $\mathbb{Q}$-irréductibles de X_3 contenant $\boldsymbol{\alpha}$.

On a les inclusions suivantes :

$$\boldsymbol{\alpha}\in Y_3\subset Y_2\subset Y_1$$

En particulier, deux de ces trois variétés ont même dimension ce qui nous permettra de comparer leurs degrés ou leur hauteurs normalisées.

Cas où Y_2 et Y_3 sont de dimension 0

Soit Z une composante $\mathbb{Q}$-irréductible de Y_3 ; comme Z rencontre $\boldsymbol{\alpha}$ on a :

$$Z = \bigcup_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})} \sigma(\boldsymbol{\alpha}).$$

En particulier $\deg(Z) = D$. De l'inclusion

$$\bigcup_{q \in \mathcal{P}_2} [q]Z \subseteq Y_2 \ ,$$

on obtient une première inégalité :

$$\deg\Big(\bigcup_{q \in \mathcal{P}_2} [q]Z\Big) \leq \deg Y_2. \tag{III.18}$$

• Soient $F_1, \ldots, F_r$ les facteurs $\mathbb{Q}$-irréductibles de F. Les composantes $\mathbb{Q}$-irréductibles de X_2 de dimension 1 sont les $Z(F_j)$, où :

$$F_j \mid \mathrm{pgcd}\big(\{F(\mathbf{x}^p),\ p \in \mathcal{P}_1\}\big).$$

Quitte à les réordonner, on peut supposer que $1, \ldots, l$ sont les indices i pour lesquels F_i ne divise pas $\mathrm{pgcd}\big(\{F(\mathbf{x}^p),\ p \in \mathcal{P}_1\}\big)$. En particulier, comme Y_2 est de dimension zéro par hypothèse, si $j \in \{l+1, \ldots, r\}$, alors $F_j(\boldsymbol{\alpha}^q) \neq 0$ pour tout $q \in \mathcal{P}_2$. Notons $\tilde{F} := F_1 \cdots F_l$ et choisissons maintenant un polynôme G de la forme

$$G(\mathbf{x}) = \sum_{p \in \mathcal{P}_1 \setminus \{1\}} \lambda_p \tilde{F}(\mathbf{x}^p) \qquad \lambda_p \in \mathbb{Q}$$

tel que G ne soit pas un diviseur de zéro de $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]/(\tilde{F})$. Un tel polynôme existe bien, il suffit en effet de remarquer que pour tout j dans $\{1, \ldots, l\}$, le sous-espace vectoriel

$$\left\{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{Q}^{\mathrm{Card}(\mathcal{P}_1)-1} \ \Big| \ \sum_{p \in \mathcal{P}_1 \setminus \{1\}} \lambda_p \tilde{F}(\mathbf{x}^p) \in (F_j) \right\}$$

est propre. Comme $Y_2 \subseteq Z(\tilde{F}) \cap Z(G)$ et ce dernier est de dimension 0, le théorème de Bézout nous donne :

$$\deg Y_2 \leq \deg(F)\deg(G) \leq N_1 L^2 \leq N_1 D T (T+1)^2.$$

• Considérons maintenant le membre de gauche de (III.18). Comme $N_2 \geq 5000$, la proposition II.16 et le lemme II.17 nous donnent :

$$\left(0{,}41 \frac{N_2}{\log N_2} - \frac{2}{\log 2} \log D\right) D \leq \deg\Big(\bigcup_{q \in \mathcal{P}_2} [q]Z\Big).$$

De plus, comme $Z \subset Y_2$, on a $D \leq \deg(Y_2) \leq N_1 L^2$, soit, d'après le point 4 du fait III.16 :

$$\frac{2}{\log 2}\log D \leq \frac{2}{\log 2}\log(N_1L^2) \leq 0{,}01\frac{N_2}{\log N_2}.$$

En reportant tout ceci dans (III.18) on en déduit

$$\frac{0{,}4N_2}{\log N_2} \leq N_1 T(T+1)^2.$$

D'où, en utilisant les inégalités $\log N_2 \leq (8+\log c_2)\log\log\omega'$ et $T \geq 66$:

$$\frac{0{,}4c_2}{8+\log c_2} \leq c_1 9^3\left(\frac{67}{66}\right)^2,$$

contradiction, car $c_1 = 3{,}7\cdot 10^4$ et $c_2 = 2{,}05\cdot 10^9$.

Cas où Y_1 et Y_2 sont de dimension 1

Soit Z une composante $\mathbb{Q}$-irréductible de Y_2 de dimension 1, et soit $q \in \mathcal{P}_2$ tel que $\boldsymbol{\alpha}^q \in Z$.

• Supposons dans un premier temps que Z soit de torsion. Si B désigne $[q]^{-1}Z$, alors B est de torsion et contient $\boldsymbol{\alpha}$. Le lemme III.15 nous dit alors :

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{5.10^{-4}}{\omega}\left(\frac{\log\log(\omega\deg(B)^2)}{\log(\omega\deg(B)^2)}\right)^3. \qquad \text{(III.19)}$$

Comme Z et Y_1 sont de même dimension, on a :

$$\deg(B) \leq N_2\deg(Z) \leq N_2\deg(Y_1) \leq N_2 L \leq 2c_2 9^2\omega\big(\log\omega'\big)^{12}.$$

Ainsi, comme $\omega' \geq 16$:

$$\omega\deg(B)^2 \leq (2c_2 9^2)^2\omega^3\big(\log\omega'\big)^{24} \leq \omega'^{23}\big(\log\omega'\big)^{24} \leq \omega'^{47}.$$

En reportant ceci dans (III.19) on en déduit :

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{10^{-9}}{\omega}\left(\frac{\log\log\omega'}{\log\omega'}\right)^3,$$

ce qui nous donne bien le théorème I.20.

• Nous supposerons dans la suite que Z n'est pas de torsion. Nous avons l'inclusion

$$\bigcup_{p\in\mathcal{P}_1}[p]Z \subseteq Y_1.$$

Comme les variétés Z et Y_1 sont de même dimension, on en déduit :

$$\hat{h}(Y_1) \geq \hat{h}\Big(\bigcup_{p\in\mathcal{P}_1} [p]Z\Big).$$

Notons $W_1, \ldots, W_l$ les composantes géométriquement irréductibles de Z. Comme Z n'est pas de torsion, le lemme 2.3 de [AD99] nous dit que, si (p, i) et (p', j) sont deux couples distincts d'éléments de $(\mathcal{P}_1 \setminus \mathrm{E}(Z)) \times \{1, \ldots, l\}$, alors les sous-variétés $[p]W_i$ et $[p']W_j$ sont distinctes ; ainsi

$$\hat{h}(Y_1) \geq \sum_{\substack{p\in\mathcal{P}_1\\ p\notin \mathrm{E}(Z)}} \sum_{i=1}^{l} \hat{h}([p]W_i). \tag{III.20}$$

Si W désigne une composante géométriquement irréductible de Z, il nous faut donc majorer le cardinal de $\mathrm{E}(Z)$ et évaluer $\hat{h}([p]W)$ en fonction de $\hat{h}(W)$. Rappelons que le stabilisateur de W est par définition :

$$G_W := \{\mathbf{y} \in \mathbb{G}_m^n \mid \mathbf{y}\cdot W = W\} = \bigcap_{y\in W} y^{-1}W,$$

en particulier $\dim(G_W) \leq \dim(W) = 1$. Notons ici que les premiers divisant le cardinal de G_W/G_W^0 (quotient de G_W par sa composante neutre G_W^0) sont dans $\mathrm{E}(W)$[3]. On sait de plus, d'après la proposition 2.1 de [DP99] que :

$$\hat{h}([p]W) = \frac{p^{\dim(W)+1}}{|\ker[p]\cap G_W|}\hat{h}(W),$$

et $|\ker[p]\cap G_W| = p^{\dim G_W}|\ker[p]\cap G_W/G_W^0| \leq p\cdot|\ker[p]\cap G_W/G_W^0|$. En particulier si $p \notin \mathrm{E}(Z)$, auquel cas p ne divise pas $|G_W/G_W^0|$, on a :

$$\hat{h}([p]W) \geq p\cdot\hat{h}(W).$$

La proposition II.16 et le point 4 du fait III.16 nous donnent de plus

$$\mathrm{Card}(\mathrm{E}(Z)\cap\mathcal{P}_1) \leq \frac{2\log\deg(Z)}{\log 2} \leq \frac{2\log L}{\log 2} \leq 0{,}01\frac{N_1}{\log N_1}.$$

Ainsi, en reportant ceci dans (III.20) :

$$\hat{h}(Y_1) \geq \sum_{\substack{p\in\mathcal{P}_1\\ p\notin \mathrm{E}(Z)}} p\cdot\hat{h}(Z) \geq \left(\pi(N_1) - \pi(N_1/2) - 0{,}01\frac{N_1}{\log N_1}\right)\frac{N_1}{2}\cdot\hat{h}(Z).$$

Comme $N_1 \geq 5000$, nous déduisons du lemme II.17 :

$$\hat{h}(Y_1) \geq 0{,}2\frac{N_1^2}{\log N_1}\cdot\hat{h}(Z). \tag{III.21}$$

[3]dont le cardinal est indépendant du choix de la composante W.

Comme $\dim Z = \dim Y_1 = \dim X_1 = 1$ et $Z \subset Y_1 \subset X_1$ on a $\deg(Z) \leq \deg Y_1 \leq L$. La variété Z n'étant pas de torsion, la proposition III.10 nous dit :

$$\hat{h}(Z) \geq 5^{-6}\left(\frac{\log\log L}{\log L}\right)^3,$$

de plus, l'inégalité de Landau (propriété II.20) nous donne :

$$2{,}05\log(L+1) \geq h(F) + \log(\deg(F)+1) \geq \log M(F) = \hat{h}(X_1) \geq \hat{h}(Y_1).$$

En reportant tout cela dans (III.21) on obtient alors

$$2{,}05\log(L+1) \geq 5^{-7}\frac{N_1^2}{\log N_1}\left(\frac{\log\log(L+1)}{\log(L+1)}\right)^3.$$

Remarquons maintenant que $\log N_1 \leq (2+\log c_1)\log\log\omega'$ et, d'après le point 2 du fait III.16, que $\log(L+1) \leq 4{,}3\log\omega'$, soit

$$\frac{N_1^2}{\log N_1} \geq \frac{c_1^2}{2+\log c_1}\frac{\left(\log\omega'\right)^4}{\left(\log\log\omega'\right)^3} > 2{,}05\cdot 5^7\cdot 4{,}3^4\cdot\frac{\left(\log\omega'\right)^4}{\left(\log\log\omega'\right)^3}$$

car $c_1 = 3{,}7\cdot 10^4$, contradiction.

5.4 Conclusion de la démonstration du théorème I.20

L'hypothèse (III.13) est donc fausse, ainsi :

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{T_1\log N_2}{10N_1N_2L}.$$

Fait III.18 *On a*

$$T_1\log N_2 \geq 15\log\omega'$$

DÉMONSTRATION - Soit $(p,q) \in \mathcal{P}_1\times\mathcal{P}_2$, tel que l'ordre d'annulation $T_{1,p}$ de F en $\boldsymbol{\alpha}^p$ vérifie $T_{1,p} = T_1$. Si $L+1 > p$, c'est exactement l'inégalité (III.17). Supposons donc $L+1 \leq p$, comme $N_2 \geq N_1^2$ et $N_1 \geq p \geq N_1/2$, l'inégalité (III.15) donne :

$$T_1\log N_2 \geq 2T_1\log N_1 > (0{,}999T - 3{,}05)\log(N_1/2)$$

soit, d'après le point 3 du fait III.16 :

$$\begin{aligned} T_1\log N_2 &> 1{,}999(0{,}999T-3{,}05)\log\log\omega' \\ &> (T+1)\log\log\omega' \\ &> 9\tfrac{(\log\omega')^2}{\log\log\omega'} \\ &> 9e\log\omega' \end{aligned}$$

■

Par définition, $L \leq 2\omega T^2$, le Fait III.18 montre alors que

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{1{,}5}{2 \cdot 9^2 c_1 c_2} \frac{1}{\omega} \frac{(\log\log\omega')^{11}}{(\log\omega')^{13}}$$

ainsi,

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{1{,}2 \cdot 10^{-16}}{\omega} \frac{\left(\log\log\omega'\right)^{11}}{\left(\log\omega'\right)^{13}}$$

car $c_1 = 3{,}7.10^4$ et $c_2 = 2{,}05.10^9$.

6 Démonstration du corollaire I.21

Soient $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2)$ un point à coordonnées multiplicativement indépendantes. On peut supposer sans perte de généralité $h(\alpha_1) \leq h(\alpha_2) \leq 1$ et $D := [\mathbb{Q}(\boldsymbol{\alpha}) : \mathbb{Q}] \geq 2$. Soient $A \in \mathbb{N}^*$ et $\boldsymbol{\beta} := (\beta_1, \beta_2)$ tels que $\beta_1 = \alpha_1$ et $\beta_2^A = \alpha_2$. Comme $\boldsymbol{\beta}$ est à coordonnées multiplicativement indépendantes, toute courbe $\mathbb{Q}$-irréductible de $\mathbb{G}_m^2$ passant par $\boldsymbol{\beta}$ n'est pas de torsion. D'après le théorème I.20 nous avons alors :

$$h(\boldsymbol{\beta}) \geq \frac{1{,}2 \cdot 10^{-16}}{\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\beta})} \max\left\{\log\omega_{\mathbb{Q}}, \log 16\right\}^{-13}.$$

On choisit maintenant :

$$A := \left[\frac{2h(\alpha_2)}{h(\alpha_1)}\right] > \frac{2h(\alpha_2)}{h(\alpha_1)} - 1 \geq \frac{h(\alpha_2)}{h(\alpha_1)}$$

en particulier

$$h(\boldsymbol{\beta}) \leq h(\beta_1) + h(\beta_2) = h(\alpha_1) + A^{-1}h(\alpha_2) \leq 2h(\alpha_1) \ ,$$

et

$$\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\beta}) \leq 2[\mathbb{Q}(\boldsymbol{\beta}) : \mathbb{Q}]^{1/2} \leq 2(AD)^{1/2} \leq 2(2\frac{h(\alpha_2)}{h(\alpha_1)}D)^{1/2}.$$

Nous obtenons alors

$$2h(\alpha_1) \geq \frac{1{,}2 \cdot 10^{-16}}{2(2\frac{h(\alpha_2)}{h(\alpha_1)}D)^{1/2}} \max\left\{\log(2(AD)^{1/2}), \log 16\right\}^{-13}$$

soit

$$(h(\alpha_1)h(\alpha_2))^{1/2} \geq \frac{3.10^{-17}}{(2D)^{1/2}} \max\left\{\log(2(AD)^{1/2}), \log 16\right\}^{-13}. \qquad \text{(III.22)}$$

Minorons le membre de droite, nous avons :

$$2(AD)^{1/2} \leq 2\left(\frac{2D}{h(\alpha_1)}\right)^{1/2}.$$

Comme $\boldsymbol{\alpha}$ est à coordonnées multiplicativement indépendantes, α_1 n'est pas une racine de l'unité et la version explicite du théorème de Dobrowolski par Voutier [Vou96] nous donne :

$$h(\alpha_1) \geq \frac{1}{4D}\left(\log(3D)\right)^{-3}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \log\left(2(AD)^{1/2}\right) &\leq \log\left(4\sqrt{2}D(\log 3D)^{3/2}\right) \\ &\leq 2\log(3D). \end{aligned}$$

Comme $D \geq 2$, nous avons $2\log(3D) \geq \log 16$, et, en reportant ceci dans (III.22) nous obtenons :

$$\left(h(\alpha_1)h(\alpha_2)\right)^{1/2} \geq \frac{3 \cdot 2^{-13,5} \cdot 10^{-17}}{D^{1/2}}\left(\log(3D)\right)^{-13}.$$

Ainsi $C(2)^{1/2} = 2.10^{-21}$ et $\kappa(2) = 13$.

Chapitre IV

Cas géométrique

Ce chapitre correspond aux travaux [Pon05a] et [Pon05c]. Nous montrons ici principalement les théorèmes I.22, I.23 et I.24.

1 Schéma des preuves

Comme dans le chapitre III, nous commençons par développer (**paragraphe 2**) les outils d'une démonstration de transcendance : nous utiliserons cette fois un lemme de Siegel ■ absolu ■, qui nous donne un polynôme s'annulant avec multiplicité sur une variété, indépendant de son corps de définition. On donne ensuite des résultats d'extrapolation pour des polynômes à coefficients algébriques quelconques, puis un lemme de zéros pour des variétés géométriquement irréductibles.

Nous montrons au **paragraphe 3** une minoration assez fine pour la hauteur d'une hypersurface géométriquement irréductible, qui prend en compte la dimension de son stabilisateur. Un argument de réduction proche de celui de [AD00a] (proposition 2.4) nous permet de nous ramener au cas où ce stabilisateur est connexe.

Dans notre étude de la hauteur d'une courbe de $\mathbb{G}_m^3$, nous aurons plus particulièrement besoin de ce résultat pour les hypersurfaces de $\mathbb{G}_m^2$ et $\mathbb{G}_m^3$. Nous ne pourrons pas dans la suite exploiter la précision apportée concernant la dimension du stabilisateur. Aussi, de la même façon qu'au paragraphe 4 du chapitre III, nous donnons au **paragraphe 4** des minorations pour le minimum essentiel des surfaces de $\mathbb{G}_m^3$ (proposition IV.10) et des courbes de $\mathbb{G}_m^2$ (proposition IV.9) qui ne sont pas des translatés de sous-tores. Ceci nous permet notamment d'obtenir des constantes plus précises dans ces deux cas particuliers. De plus, pour les courbes de $\mathbb{G}_m^2$, nous arrivons à majorer le nombre de ses points de hauteur exceptionnellement petite. Cela nous permettra dans notre étude de la hauteur d'une courbe $\mathcal{C}$ de $\mathbb{G}_m^3$, de traiter le cas où $\mathcal{C}$ est incluse dans un translaté de sous-tore de dimension 2 dont on contrôle le degré.

Nous montrons le théorème I.23 au **paragraphe 5**. La stratégie est la suivante : par l'absurde on suppose la hauteur de $\mathcal{C}$ petite, on peut alors construire un polynôme s'annulant sur V avec multiplicité, de degré et de hauteur contrôlés via un lemme de Siegel absolu (proposition IV.1). On extrapole ensuite en montrant que ce polynôme s'annule sur les translatés $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathcal{C}$, où $\boldsymbol{\xi}$ parcourt un ensemble de points de pq-torsion, pour des nombres premiers p et q appartenant à deux certains ensembles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Dans le cas géométrique, contrairement au cas arithmétique, on ne peut pas extrapoler sur des multiples $[pq]\mathcal{C}$, car cela ferait intervenir le corps de définition de $\mathcal{C}$, ce que l'on cherche précisément à éviter pour obtenir une minoration de type géométrique. L'idée est que dans le cas de $\mathbb{Q}$ (ou pour certains corps de nombres), on utilise une congruence du type

$$F^p \equiv F \mod p$$

lorsque F est un polynôme à coefficients entiers.

Au paragraphe 5.3 nous construisons, à l'aide d'un lemme de zéros, des suites décroissantes $Y \supseteq Y_p \supseteq Y_{p,q}$ de sous-ensembles algébriques de $\mathbb{G}_m^3$ contenant des translatés $\boldsymbol{\xi}_{pq} \cdot \mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$, où p et q parcourent respectivement des ensembles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de nombres premiers. Pour tous p, q, deux de ces ensembles algébriques étant de même dimension, on obtient une sous-variété obstructrice Z_p, composante $\mathbb{Q}$-irréductible de $Y_{p,q}$ ou de Y_p contenant des translatés $\boldsymbol{\xi}_{pq} \cdot \mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$, et dont on contrôle le degré.

Notons que dans tous les cas, en utilisant notamment l'égalité

$$\bigcup_{\boldsymbol{\xi} \in \ker[pq]} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathcal{C} = [pq]^{-1}[pq]\mathcal{C} \ ,$$

on peut montrer l'inégalité $\omega_{\overline{\mathbb{Q}}}([pq]\mathcal{C}) < \omega_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{C})$ pour un certain couple (p, q). Mais ceci n'est pas suffisant pour conclure ; dans [AD03] les auteurs utilisent comme dans [AD04] un argument de descente pour arriver à une contradiction.

Si une des variétés obstructrices Z_{p_0} est de codimension 2, alors Z_{p_0} est simplement un translaté de $\mathcal{C}$, auquel cas on arrive à un encadrement du type :

$$\operatorname{Card}(\mathcal{P}_2)^a \deg(\mathcal{C}) \ll \deg(Y_{p_0}) \leq \deg(F)^2 \ll (\log \deg(V))^b \deg(\mathcal{C}).$$

Ainsi, de par nos choix de paramètres, on arrive à une contradiction.

Sinon, la variété $\mathcal{C}$ est de codimension 2, il ne reste donc qu'une possibilité : celle où toutes les variétés obstructrices Z_p sont de codimension 1. Dans la dernière partie du paragraphe 5.3, on travaille alors de nouveau avec la hauteur normalisée ; on majore celle de Z en fonction de la hauteur de notre fonction auxiliaire F, sur laquelle on a un bon contrôle :

$$\min_p p \cdot \hat{h}(Z_p) \ll h(F).$$

Si aucun des Z_p n'est un translaté d'un sous-tore, on arrive à une contradiction en utilisant une minoration explicite de $\hat{h}(Z_p)$ pour l'ensemble de ces hypersurfaces Z_p (proposition IV.10). Dans le cas contraire, on se ramène dans le lemme IV.12 à une étude en dimension 2, auquel cas, *via* la proposition IV.9, on obtient une minoration de $\hat{\mu}_{\text{ess}}(\mathcal{C})$.

Pour terminer ce chapitre, on s'intéresse au **paragraphe 6** à l'étude des petits points d'une variété. Dans le théorème I.24, étant donné une surface géométriquement irréductible V de $\mathbb{G}_m^3$, nous obtenons une majoration de la somme des degrés des translatés de sous-tores de codimension 2 inclus dans V contenant les petits points de V. L'idée de la preuve est la suivante : on construit comme au paragraphe 5 un ensemble de variétés obstructrices contenant les translatés des sous-tores exceptionnels. On montre ensuite en reprenant un lemme du paragraphe précédent, que l'un d'eux au moins est de codimension 2, auquel cas, grâce au théorème de Bézout, on majore la somme des degrés de ces sous-tores.

2 Transcendance

Dans ce paragraphe ainsi que dans le paragraphe 5.3, de nouveau bon nombre de résultats sont proches de ceux que l'on peut trouver dans [AD03]. Comme dans *op. cit.*, nous utiliserons *l'indice d'obstruction de V de poids T*, noté $\omega(T;V)$:

$$\omega(T;V) := \min\{(T\deg(Z))^{1/\operatorname{codim}(Z)}\} ,$$

où le minimum est pris sur l'ensemble des sous-variétés propres et géométriquement irréductibles de $\mathbb{G}_m^n$ contenant V. On peut montrer les inégalités suivantes (voir par exemple [AD03]) :

$$n^{-1}T^{1/\operatorname{codim}(V)}\omega_{\overline{\mathbb{Q}}}(V) \leq \omega(T;V) \leq T\omega_{\overline{\mathbb{Q}}}(V).$$

Énonçons et démontrons tout d'abord un lemme de Siegel absolu, analogue de la proposition III.3.

Proposition IV.1 *Soient θ un réel > 0 et $\mathbf{E} \subseteq \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_m^n \mid h(\boldsymbol{\alpha}) \leq \theta\}$ un ensemble fini non vide. Soient L et T deux entiers. Si $E_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathbf{E},L,T)$ est non réduit à $\{0\}$, alors il existe un polynôme $F \in E_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathbf{E},L,T)$ non nul tel que :*

$$h(F) \leq \frac{r}{N-r}\Big((T+n)\log(L+1) + L\theta\Big) + \frac{1}{2}\log N ,$$

où $N := \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]_{\leq L}$ et $r := \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]_{\leq L} - \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathbf{E},L,T)$.

DÉMONSTRATION - Notons tout d'abord que, comme $\mathbf{E}$ est inclus dans $\mathbb{G}_m^n$, lui-même plongé par ι dans $\mathbb{P}^n$, il peut être vu comme une partie de l'hyperplan affine $\{x_0 \neq 0\}$, on travaillera donc dans la suite dans $\overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}] = \overline{\mathbb{Q}}[x_1,\ldots,x_n]$. Pour tout $D \in \mathbb{N}^*$ considérons l'ensemble fini :

$$\Lambda_D := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{E} \mid [\mathbb{Q}(\boldsymbol{\alpha}) : \mathbb{Q}] \leq D\}$$

et notons S_D le sous-espace vectoriel de $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]_{\leq L}$ des polynômes nuls sur Λ_D avec multiplicité supérieure ou égale à T (autrement dit $S_D = E(\Lambda_D, L, T)$). On obtient ainsi une suite décroissante

$$S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq E(\mathbf{E}, L, T)$$

d'espaces vectoriels de dimensions finies. Il existe donc un entier D_0 tel que

$$S_{D_0} = E(\mathbf{E}, L, T).$$

Pour alléger nous noterons dans la suite $S = S_{D_0}$ et $\Lambda = \Lambda_{D_0}$. Pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda$ et tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n$ de longueur $|\boldsymbol{\lambda}| \leq T - 1$ notons :

$$\mathbf{y}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda}} = \left(\binom{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}} \right)_{\substack{\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{N}^n \\ |\boldsymbol{\mu}|\leq L}}.$$

Comme on a pu le voir dans le lemme III.2, les $\mathbf{y}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda}}$ sont des générateurs du $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel $S^{\perp}$ (qui est de dimension r), de plus leur hauteur L_2 est majorée par

$$h_{L_2}(\mathbf{y}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda}}) \leq (L - |\boldsymbol{\lambda}|)h(\boldsymbol{\alpha}) + \frac{1}{2}\log\left(\sum_{|\boldsymbol{\mu}|\leq L} \binom{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}}^2 \right) \leq (T+n)\log(L+1) + L\theta$$

(voir la démonstration de la proposition III.3 pour plus de détails). Rappelons ici que si $\mathbb{F}$ est un corps de nombres contenant les coordonnées d'un vecteur $\mathbf{y}$, sa hauteur L_2 est

$$h_{L_2}(\mathbf{y}) = \sum_{v\in\mathcal{M}_{\mathbb{F}}} \frac{[\mathbb{F}_v : \mathbb{Q}_v]}{[\mathbb{F}_v : \mathbb{Q}_v]} \log \|\mathbf{y}\|_v$$

où $\|\cdot\|_v$ est la norme du sup si v est ultramétrique, et la norme euclidienne sinon. Par le principe de dualité, (voir [SV90] p. 500, (2.2)), et en majorant la hauteur $H_{L_2} = \exp(h_{L_2})$ de $S^{\perp}$ par le produit de celles de ses lignes (inégalité de Hadamard, voir [BV83], équation (2.6)), on obtient :

$$\begin{aligned} h_{L_2}(S) &= h_{L_2}(S^{\perp}) \\ &\leq \dim(S^{\perp}) \max_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda}} h_{L_2}(\mathbf{y}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda}}) \leq r\Big((T+n)\log(L+1) + L\theta\Big). \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.7 de [DP99] (lui-même basé sur une inégalité sur des minima successifs de [Zha95]) et la remarque qui le suit, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un élément $\mathbf{x}$ de S tel que

$$h_{L_2}(\mathbf{x}) \leq \frac{h_{L_2}(S)}{\dim(S)} + \frac{1}{2}\log\dim(S) + \varepsilon.$$

En appliquant ceci à

$$\varepsilon := \frac{1}{2}\log\frac{N}{\dim(S)}$$

on obtient, puisque $\dim(S) = N - r$, l'existence d'un polynôme F (vu comme élément de S) vérifiant :

$$h_{L_2}(F) \leq \frac{r}{N-r}\Big((T+n)\log(L+1) + L\theta\Big) + \frac{1}{2}\log N.$$

$\blacksquare$

Corollaire IV.2 *Soient $V \subset \mathbb{G}_m^n$ une variété géométriquement irréductible. Soient L et T deux entiers tels que*

$$L + 1 \geq nT\omega(T;V).$$

Pour tout réel $\theta > 0$, il existe un polynôme $F \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]$ non nul de degré $\leq L$ nul sur $V(\theta)$ avec multiplicité au moins T tel que

$$h(F) \leq \frac{1}{T-1}\Big((T+n)\log(L+1) + L\theta\Big) + \frac{n}{2}\log(L+1).$$

En particulier, si $T \geq 10^3 n$ et $\theta \leq 10^{-3}\frac{T}{L}$, alors

$$h(F) \leq \Big(1{,}01 + \frac{n}{2}\Big)\log(L+1). \tag{IV.1}$$

DÉMONSTRATION - En appliquant la proposition IV.1 à $\mathbf{E} := V(\theta)$ on obtient :

$$h(F) \leq \frac{\binom{L+n}{n} - \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E(V(\theta), L, T)}{\dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E(V(\theta), L, T)}\Big((T+n)\log(L+1) + L\theta\Big) + \frac{1}{2}\log\binom{L+n}{n}.$$

Soit Z une variété propre et géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_m^n$ contenant V telle que $\omega(T;V) = (T\deg(Z))^{1/\operatorname{codim}(Z)}$. Le lemme 2.5 de [AD03] nous dit que,

$$\binom{L+n}{L} - \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E_{\overline{\mathbb{Q}}}(V, L, T) \leq \binom{T-1+\operatorname{codim}(Z)}{\operatorname{codim}(Z)}\binom{L+\dim(Z)}{\dim(Z)}\deg(Z).$$

Rappelons que l'on a $\binom{L+n}{L} - \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E_{\overline{\mathbb{Q}}}(V, L, T) = H_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathfrak{P}, L)$, où $\mathfrak{P}$ est l'idéal de définition sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de la clôture projective de V et $H_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathfrak{P}, L)$ est la fonction de Hilbert de $\mathfrak{P}$. On obtient alors, si k' désigne la codimension de Z :

$$\frac{\binom{L+n}{n} - \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E(V, L, T)}{\binom{L+n}{n}} \leq \binom{T-1+k'}{k'}\binom{L+n-k'}{n-k'}\binom{L+n}{n}^{-1}\deg(Z)$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k'+1)}{k'!} \times \frac{(T+k'-1)\cdots T}{(L+n)\cdots(L+n-k'+1)} \deg(Z).$$

En utilisant, pour $j = 0, \dots k'-1$, l'inégalité $T + j \leq (j+1)T$, on en déduit :

$$\frac{\binom{L+n}{n} - \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E(V, L, T)}{\binom{L+n}{n}} \leq \left(\frac{nT}{L+1}\right)^{k'} \deg(Z) = \frac{1}{T}\left(\frac{nT\omega(T;V)}{L+1}\right)^{k'} \leq \frac{1}{T},$$

d'où

$$\frac{\binom{L+n}{n} - \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E(V, L, T)}{\dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E(V, L, T)} \leq \frac{1}{T-1}.$$

Comme $\dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E_{\overline{\mathbb{Q}}}(V(\theta), L, T) \geq \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E(V, L, T)$, en reprenant la majoration de la hauteur de notre fonction auxiliaire F on obtient

$$h(F) \leq \frac{1}{T-1}\Big((T+n)\log(L+1) + L\theta\Big) + \frac{1}{2}\log\binom{L+n}{n}.$$

Si maintenant θ est inférieur à $10^{-3}\frac{T}{L}$ il vient, puisque $\binom{L+n}{n} \leq (L+1)^n$:

$$h(F) \leq \frac{1}{T-1}\Big((T+n)\log(L+1) + 10^{-3}T\Big) + \frac{n}{2}\log(L+1).$$

Par hypothèses, on a $L + 1 \geq nT\omega(T;V) \geq e$, ainsi

$$h(F) \leq \frac{1,001T+n}{T-1}\log(L+1) + \frac{n}{2}\log(L+1).$$

Enfin on a supposé $T \geq 10^3 n$, ainsi $\frac{1,001T+n}{T-1} \leq 1,01$, d'où l'inégalité (IV.1). ■

Le point clef de l'extrapolation ici est la ■ proximité ■ p-adique d'une racine p-ième de l'unité et de 1 ; plus précisément si p est un nombre premier, alors le polynôme $(X-1)^p$ est congru à $X^p - 1$ modulo p, ainsi il en est de même de $(X-1)^{p-1}$ et $\phi_p(X)$. En évaluant ces derniers en une racine p-ième ξ de l'unité, on obtient :

$$\forall v \mid p,\ |\xi - 1|_v \leq p^{-1/(p-1)} \leq p^{-1/p}. \tag{IV.2}$$

Proposition IV.3 *Soient $\theta > 0$, T, L des entiers et $\mathbf{E}$ un ensemble de points de hauteur inférieur ou égale à θ. Soient $F \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]_{\leq L}$ un polynôme non nul s'annulant sur $\mathbf{E}$ avec multiplicité au moins T.*

Alors, pour tout nombre premier p et tout $\boldsymbol{\xi} \in \ker[p]$, l'ordre d'annulation T^* de F sur $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{E}$ vérifie :

$$T^*(1 + \log(L+1)) \geq T\frac{\log p}{p} - h(F) - n\log(L+1) - L\theta.$$

DÉMONSTRATION - Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{E}$ et $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n$ de longueur $|\boldsymbol{\lambda}| = T^*$ tel que $D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\alpha})$ soit non nul. Si G est un polynôme à coefficients algébriques, d'après la formule de TAYLOR nous avons :

$$G(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{N}^n} D_{\boldsymbol{\mu}}(G)(\boldsymbol{\alpha})\cdot(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{\mu}}.$$

Si $v \mid p$, alors $|D_{\boldsymbol{\mu}}(G)(\boldsymbol{\alpha})\cdot(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{\mu}}|_v$ est majoré par :

$$|G|_v \max\{1, |\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_n|_v\}^{\deg(G)-|\boldsymbol{\mu}|} \max\{|\alpha_1\xi_1-\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_n\xi_n-\alpha_n|_v\}^{|\boldsymbol{\mu}|}$$

soit d'après l'inégalité (IV.2) :

$$|D_{\boldsymbol{\mu}}(G)(\boldsymbol{\alpha})\cdot(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{\mu}}|_v \le |G|_v \max\{1, |\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_n|_v\}^{\deg(G)} p^{-|\boldsymbol{\mu}|/p}$$

Appliquons ceci à $G = D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)$,

$$\begin{aligned} |D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\alpha})|_v &\le \max_{|\boldsymbol{\mu}|\ge T-T^*} |D_{\boldsymbol{\mu}}(D_{\boldsymbol{\lambda}}(F))(\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{\mu}}|_v \\ &\le |F|_v \max\{1, |\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_n|_v\}^L \; p^{-(T-T^*)/p} \end{aligned}$$

car $D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)$ est nul en $\boldsymbol{\alpha}$ à un ordre $\ge T - T^*$. Nous avons ainsi :

$$|D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\alpha})|_v \le \begin{cases} |F|_v \max\{1, |\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_n|_v\}^{L-|\boldsymbol{\lambda}|} & \text{si } v \nmid \infty \\ |F|_v \max\{1, |\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_n|_v\}^{L-|\boldsymbol{\lambda}|} \; p^{-(T-T^*)/p} & \text{si } v \mid p \\ |F|_v \max\{1, |\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_n|_v\}^{L-|\boldsymbol{\lambda}|}(L+1)^{T^*+n} & \text{si } v \mid \infty \end{cases}$$

On déduit alors de la formule du produit

$$0 \le \frac{-(T-T^*)}{p}\log p + h(F) + (T^*+n)\log(L+1) + Lh(\boldsymbol{\alpha}),$$

d'où

$$T\frac{\log p}{p} - h(F) - n\log(L+1) - L\theta \le T^*\left(\frac{\log p}{p} + \log(L+1)\right).$$

■

Corollaire IV.4 *Soient V une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$. Soient T, L des entiers et $F \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]$ non nul de degré $\le L$, nul sur V avec multiplicité au moins T.*

Étant donnés un nombre premier p et un $\boldsymbol{\xi} \in \ker[p]$, l'ordre d'annulation T^* de F sur $\boldsymbol{\xi}\cdot V$ vérifie :

$$T^*(1+\log(L+1)) \ge T\frac{\log p}{p} - h(F) - n\log(L+1) - L\hat{\mu}_{ess}(V).$$

Démonstration - Il suffit d'appliquer la proposition IV.3 à l'ensemble

$$\mathbf{E} := V(\theta) = \{\boldsymbol{\alpha} \in V, \mid h(\boldsymbol{\alpha}) \leq \theta\},$$

qui est Zariski dense dans V si $\theta > \hat{\mu}_{\text{ess}}(V)$ et de faire tendre θ vers $\hat{\mu}_{\text{ess}}(V)$. ■

Lemme IV.5 *Soient W une sous-variété propre de $\mathbb{G}_m^n$ géométriquement irréductible et N, l_0 deux entiers strictement positifs. On suppose que l_0 n'est divisible par aucun nombre premier de $[N/2, N]$ et est premier avec $|G_W/G_W^0|$.*

1. *Si W n'est pas le translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^n$ et si $N \geq 10^3 n \log(\max\{16, \deg(W)\})$, alors*

$$\deg\left(\bigcup_{\substack{p\in[N/2,N]\\ p \text{ premier}}} [l_0p]^{-1}[l_0p]\cdot W\right) \geq 0,4\frac{N}{\log N}\left(\frac{l_0N}{2}\right)^{n+1-\dim(W)}\deg(W).$$

2. *Si le stabilisateur de G_W de W est connexe et si $(N/2)^{n-\dim(G_W)} \geq 23$, alors*

$$\deg\left(\bigcup_{\substack{p\in[N/2,N]\\ p \text{ premier}}} [l_0p]^{-1}[l_0p]\cdot W\right) \geq 0,22\frac{N}{\log N}\left(\frac{N}{2}\right)^{n-\dim(G_W)}\deg(W).$$

Démonstration - Pour tout premier p dans $[N/2, N]$ on a :

$$[l_0p]^{-1}[l_0p]\cdot W = \bigcup_{\boldsymbol{\zeta}_{l_0},\boldsymbol{\zeta}_p} \boldsymbol{\zeta}_{l_0}\boldsymbol{\zeta}_p\cdot W,$$

où l'union est prise sur les $(\boldsymbol{\zeta}_{l_0}, \boldsymbol{\zeta}_p)$ dans $\ker[l_0]\times\ker[p]$. De plus tous les translatés $\boldsymbol{\zeta}_{l_0}\boldsymbol{\zeta}_p\cdot W$ de W sont géométriquement irréductibles de degré $\deg(W)$. Ainsi, il nous faut ici étudier à quelles conditions deux tels translatés de W sont égaux.

Considérons donc deux premiers p, p' dans $[N/2, N]$ et deux couples de points de torsion $(\boldsymbol{\zeta}_{l_0}, \boldsymbol{\zeta}_p) \in \ker[p]\times\ker[p]$ et $(\boldsymbol{\xi}_{l_0}, \boldsymbol{\xi}_{p'}) \in \ker[p]\times\ker[p']$ tels que

$$\boldsymbol{\zeta}_{l_0}\boldsymbol{\zeta}_p\cdot W = \boldsymbol{\xi}_{l_0}\boldsymbol{\xi}_{p'}\cdot W.$$

Nous avons donc $\boldsymbol{\zeta}_{l_0}^{-1}\boldsymbol{\xi}_{l_0}\boldsymbol{\zeta}_p^{-1}\boldsymbol{\xi}_{p'} \in G_W$. Il s'ensuit, puisque l_0 est premier avec p et p' :

$$\boldsymbol{\zeta}_{l_0}^{-1}\boldsymbol{\xi}_{l_0} \in G_W \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\zeta}_p^{-1}\boldsymbol{\xi}_{p'} \in G_W.$$

Pour éviter cela il suffit que $\boldsymbol{\zeta}_{l_0}$ et $\boldsymbol{\xi}_{l_0}$ soient distincts modulo G_W, de même pour $\boldsymbol{\zeta}_p$ et $\boldsymbol{\xi}_{p'}$ si $p = p'$, et que $\boldsymbol{\zeta}_p^{-1}$ et $\boldsymbol{\xi}_{p'}$ n'appartiennent pas à G_W si $p \neq p'$. Nous avons donc

$$\deg\left(\bigcup_{\substack{p\in[N/2,N]\\ p \text{ premier}}} [l_0p]^{-1}[l_0p]\cdot W\right) \geq \sum_p \sum_{\substack{\boldsymbol{\zeta}_{l_0}\in\ker[p]/G_W\\ \boldsymbol{\zeta}_p\in(\ker[p]\setminus G_W)/G_W}} \deg(\boldsymbol{\zeta}_{l_0}\boldsymbol{\zeta}_p\cdot W) \tag{IV.3}$$

Notons Λ l'ensemble des premiers de $[N/2, N]$ **ne divisant pas** $|G_W/G_W^0|$. Si $p \in \Lambda$, alors p est premier à $|G_W/G_W^0|$, de même pour l_0, le lemme II.14 nous donne alors :

$$\begin{cases} |\ker[l_0]\cap G_W| = l_0^{\dim(G_W)} \left|\ker[l_0]\cap (G_W/G_W^0)\right| = l_0^{\dim(G_W)} \\ |\ker[p]\cap G_W| = p^{\dim(G_W)} \left|\ker[p]\cap (G_W/G_W^0)\right| = p^{\dim(G_W)} \end{cases}$$

En reprenant (IV.3) on en déduit que le degré de l'ensemble étudié est encore minoré par

$$\mathrm{Card}(\Lambda)\left(\left(\frac{N}{2}\right)^{n-\dim(G_W)} - 1\right) l_0^{n-\dim(G_W)}\deg(W). \tag{IV.4}$$

Reste à compter le cardinal de Λ, soit les diviseurs premiers de $|G_W/G_W^0|$ dans $\mathcal{P}$.

1. Dans le premier cas, d'après la proposition II.11, ceux-ci sont au plus au nombre de :
$$\frac{\log|G_W/G_W^0|}{\log(N/2)} \leq \frac{\log\deg(G_W)}{\log(N/2)} \leq \frac{n\log\deg(W)}{\log(N/2)}.$$
Ainsi, en utilisant l'inégalité $N \geq 10^3 n\log(\deg(W))$ et le lemme II.17 :
$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(\Lambda) &\geq \pi(N) - \pi(N/2) - \frac{10^{-3}N}{\log(N/2)} \\ &\geq 0,41\frac{N}{\log N} - \frac{2\cdot 10^{-3}N}{\log N} \\ &\geq 0,408\frac{N}{\log N}. \end{aligned}$$
De plus, comme $N \geq 10^3$, on a
$$\begin{aligned} 0,408\left(\left(\frac{N}{2}\right)^{n-\dim(G_W)} - 1\right) &\geq 0,408\times\left(1-\frac{1}{500}\right)\left(\frac{N}{2}\right)^{n-\dim(G_W)} \\ &\geq 0,4\left(\frac{N}{2}\right)^{n-\dim(G_W)}. \end{aligned}$$
En reportant tout ceci dans (IV.4) il vient :
$$\deg\left(\bigcup_{\substack{p\in[N/2,N]\\ p \text{ premier}}} [l_0p]^{-1}[l_0p]\cdot W\right) \geq 0,4\frac{N}{\log N}\left(\frac{l_0N}{2}\right)^{n-\dim(G_W)}\deg(W).$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que, comme W n'est pas le translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^n$, son stabilisateur G_W est, d'après le lemme II.13, de dimension au plus $\dim(W) - 1$, d'où :

$$\deg\left(\bigcup_{\substack{p\in[N/2,N]\\ p \text{ premier}}} [l_0p]^{-1}[l_0p]\cdot W\right) \geq 0,4\frac{N}{\log N}\left(\frac{l_0N}{2}\right)^{n+1-\dim(W)}\deg(W).$$

2. Dans le second cas, comme $|G_W/G_W^0| = 1$, on a, d'après le lemme II.17 :

$$\mathrm{Card}(\Lambda) \geq \pi(N) - \pi(N/2) \geq 0,23\frac{N}{\log N}.$$

De plus, comme ici $\left(\frac{N}{2}\right)^{n-\dim(G_W)} \geq 23$, en écrivant $0,23\cdot\left(1-\frac{1}{23}\right) \geq 0,22$, on obtient bien la seconde inégalité du lemme.

■

3 Hypersurfaces de $\mathbb{G}_m^n$

Nous allons montrer dans cette partie le théorème I.22, donnant une minoration du minimum essentiel d'une hypersurface géométriquement irréductible qui n'est pas le translaté d'un sous-tore, en fonction de son degré et de la dimension de son stabilisateur. Rappelons tout d'abord son énoncé.

Théorème I.22 *Soit V une hypersurface de $\mathbb{G}_m^n$ géométriquement irréductible de degré ω. Si V n'est pas translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^n$, alors*

$$\hat{h}(V) \geq \frac{10^{-14}}{n^8}\cdot\frac{(\log(n\log\omega'))^{2+2/(n-s-1)}}{(\log\omega')^{1+4/(n-s-1)}}.$$

où $\omega' := \max\{n\omega, 16\}$ et s est la dimension du stabilisateur G_V de V.

Nous allons d'abord montrer une version plus faible, dans laquelle on supposera le stabilisateur connexe.

Théorème IV.6 *Soit V une hypersurface de $\mathbb{G}_m^n$ géométriquement irréductible de degré ω qui n'est pas translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^n$. Si le stabilisateur G_V de V est connexe, alors*

$$\hat{\mu}_{ess}(V) \geq \frac{3.10^{-12}}{n^8\omega}\frac{(\log(n\log\omega'))^{2+2/(n-s-1)}}{(\log\omega')^{1+4/(n-s-1)}}.$$

où $\omega' := \max\{n\omega, 16\}$ et $s = \dim(G_V)$.

Dans le cas général on peut en fait se ramener au cas où le stabilisateur G_V de V est connexe, quitte à perdre un peu sur la constante, *via* la proposition 2.4[1] de [AD00a] :

Proposition IV.7 *Soient V une hypersurface géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_m^n$ de degré D. Il existe alors une hypersurface V_1 de degré $\leq n^2D$ dont le stabilisateur est connexe et telle que $\hat{h}(V_1) \leq \hat{h}(V)$ et $\dim G_{V_1} = \dim G_V$.*

Démonstration - D'après la théorie des diviseurs élémentaires, il existe des entiers $d_1|\cdots|d_k$ tels que G_V/G_V^0 soit isomorphe à ;

$$\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z}.$$

Le lemme 2.3 de [AD00a] appliqué à G_V nous donne, pour $l = 1, \ldots, k$ un élément $\boldsymbol{\xi}_l \in \ker[d_l]$ de G_V de la forme :

$$\boldsymbol{\xi}_l = (1, \ldots, 1, \omega_l, \omega_l^{\lambda_{l,l+1}}, \ldots, \omega_l^{\lambda_{l,n}}) \ ,$$

ω_l étant une racine primitive d_l-ième de l'unité, tel que leurs images dans G_V/G_V^0 engendrent ce dernier. On pourra pour tout l, j imposer dans la suite $0 \leq \lambda_{l,j} < d_l$. Considérons l'isormorphisme φ de $\mathbb{G}_m^n$ dans lui-même défini par

$$\begin{array}{rcl}
\varphi(t_1) & = & t_1 \\
\varphi(t_2) & = & t_1^{\lambda_{1,2}} \cdot t_2 \\
 & \vdots & \\
\varphi(t_{k+1}) & = & t_1^{\lambda_{1,n}} \cdots t_k^{\lambda_{k,n}} \cdot t_{k+1} \\
\varphi(t_{k+2}) & = & t_1^{\lambda_{1,n}} \cdots t_k^{\lambda_{k,n}} \cdot t_{k+2} \\
 & \vdots & \\
\varphi(t_n) & = & t_1^{\lambda_{1,n}} \cdots t_k^{\lambda_{k,n}} \cdot t_n.
\end{array}$$

Si $F \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]$ est une équation de V, alors l'hypersurface $\varphi^{-1}(V)$ est définie par l'équation $F(\varphi(\mathbf{t})) = 0$. Par construction, on a :

$$\boldsymbol{\xi}_l = \varphi(1, \ldots, 1, \omega_l, 1, \ldots, 1) \ , \quad l = 1, \ldots, k \tag{IV.5}$$

où le ω_l se trouve sur la l-ième coordonnée. Ainsi, si $\boldsymbol{\mu}_d$ désigne le groupe des racines d-ièmes de l'unité, on a

$$\boldsymbol{\mu}_{d_1} \times \cdots \times \boldsymbol{\mu}_{d_k} \times \{1\} \times \cdots \times \{1\} \subseteq G_{\varphi^{-1}(V)}. \tag{IV.6}$$

[1]Notons que celle-ci est énoncée dans le cas d'une sous-variété $\mathbb{Q}$-irréductible, néanmoins la démonstration est la même dans le cas géométriquement irréductible.

Cette inclusion montre qu'il existe un polynôme $H \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]$ tel que

$$F(\varphi(t_1,\ldots,t_n)) = H(t_1^{d_1},\ldots,t_k^{d_k},t_{k+1},\ldots,t_n).$$

Considérons maintenant l'application monomiale

$$\psi(t_1,\ldots,t_n) := (t_1^{d_1},\ldots,t_k^{d_k},t_{k+1},\ldots,t_n)\ ,$$

et posons $V_1 := \psi\circ\varphi^{-1}(V)$. En particulier cette hypersurface a pour équation H. Vérifions que V_1 vérifie bien les conclusions de la proposition IV.7. Pour $l = 1,\ldots,k$, d'après (IV.5), on a $\psi\circ\varphi^{-1}(\boldsymbol{\xi}_l) = \mathbf{1}$, on en déduit que le groupe :

$$G_{V_1} = G_{\psi\circ\varphi^{-1}(V)} = \psi\circ\varphi^{-1}(G_V)$$

est connexe et de même dimension que G_V. Calculons ensuite la hauteur normalisée de V_1. Le lemme 2.2 de [AD00a] nous dit que

$$\hat{h}(\varphi^{-1}(V)) = \hat{h}(V) \quad \text{et} \quad \hat{h}\Big(\psi(\varphi^{-1}(V))\Big) \leq \left|\frac{\ker(\psi)}{\ker(\psi)\cap G_V}\right| \hat{h}(\varphi^{-1}(V)).$$

D'après (IV.6), nous avons $\ker(\psi)\subseteq G_V$, on en déduit donc :

$$\hat{h}\Big(\psi(\varphi^{-1}(V))\Big) = \hat{h}(V_1) \leq \hat{h}(V).$$

Il nous reste à majorer le degré de V_1. Notons tout d'abord que, par définition de φ on a[2] :

$$\deg_{t_l}(F(\varphi(\mathbf{t}))) \leq \sum_{j=l}^{n} \lambda_{l,j}\deg_{x_j}(F(\mathbf{x}))$$

pour $l = 1,\ldots,k$ et $\deg_{t_l}(F(\varphi(\mathbf{t}))) = \deg_{x_l}(F)$ sinon. Par ailleurs, par construction de H, on a :

$$\deg_{t_l}(H(\mathbf{t})) = \frac{1}{d_l}\deg_{t_l}\Big(F(\varphi(\mathbf{t}))\Big)$$

pour $l = 1,\ldots,k$ et $\deg_{t_l}(H(\mathbf{t})) = \deg_{t_l}\Big(F(\varphi(\mathbf{t}))\Big)$ sinon. Finalement on obtient :

$$\begin{aligned}
\deg(V_1) &\leq \sum_{l=1}^{n}\deg_{t_l}(H)\\
&\leq \sum_{l=1}^{k}\frac{1}{d_l}\deg_{t_l}\Big(F(\varphi(\mathbf{t}))\Big) + \sum_{l=k+1}^{n}\deg_{t_l}\Big(F(\varphi(\mathbf{t}))\Big)\\
&\leq \sum_{l=1}^{k}\frac{1}{d_l}\left(\sum_{j=l}^{n}\lambda_{l,j}\deg_{x_j}(F)\right) + \sum_{l=k+1}^{n}\deg_{x_l}(F).
\end{aligned}$$

[2]On conviendra ici que $\lambda_{l,l} = 1$.

Comme pour tout l, j on a $\lambda_{l,l} = 1$ et $\lambda_{l,j} \leq d_l$ on en déduit

$$\begin{aligned}
\deg(V_1) &\leq \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{1}{d_l} \deg_{x_l}(F) + \sum_{j=l+1}^{n} \deg_{x_j}(F) \right) + \sum_{l=k+1}^{n} \deg_{x_l}(F) \\
&\leq \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{d_l} \deg_{x_l}(F) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\min\{k,j-1\}} \deg_{x_j}(F) + \sum_{l=k+1}^{n} \deg_{x_l}(F) \\
&\leq \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{1}{d_l} + l - 1 \right) \deg_{x_l}(F) + (k+1) \sum_{l=k+1}^{n} \deg_{x_l}(F) \\
&\leq \big(1 + 2 + \cdots + k + (n-k)(k+1)\big) \deg(V) \\
&\leq (k+1) \left(n - \frac{k}{2} \right) \leq n^2 \deg(V).
\end{aligned}$$

■

Nous pouvons maintenant montrer le théorème I.22 à partir du théorème IV.6

DÉMONSTRATION - Considérons l'hypersurface irréductible V_1 donnée par la proposition IV.7. Son stabilisateur est connexe et $\omega_1 := \deg(V_1) \leq n^2\omega$ de plus

$$\hat{h}(V_1) \leq \hat{h}(V) \quad \text{et} \quad \dim G_{V_1} = \dim G_V.$$

En lui appliquant le théorème IV.6 nous obtenons :

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V_1) \geq \frac{3.10^{-12}}{n^8\omega_1} \frac{(\log(n \log \omega_1'))^{2+2/(n-s-1)}}{(\log \omega_1')^{1+4/(n-s-1)}} ,$$

où, naturellement, $\omega_1' = \max\{n\omega_1, 16\}$. Remarquons que, comme $\omega' = \max\{n\omega, 16\}$, on a $\omega_1' \leq (\omega')^3$ et donc, en utilisant l'inégalité $\hat{h}(V) \geq \hat{h}(V_1) \geq \omega_1 \hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V_1)$, il vient :

$$\hat{h}(V) \geq \frac{3.10^{-12}}{n^8} \frac{(\log(n \log \omega_1'))^{2+2/(n-s-1)}}{(\log \omega_1')^{1+4/(n-s-1)}} \geq \frac{3.10^{-12}}{3^5 n^8} \frac{(\log(n \log \omega'))^{2+2/(n-s-1)}}{(\log \omega')^{1+4/(n-s-1)}} ,$$

d'où la conclusion souhaitée. ■

On s'intéresse désormais à la démonstration du théorème IV.6.

3.1 Paramètres

Notons que le cas $n = 1$ est vide ; nous supposerons donc dans la suite $n \geq 2$. Rappelons que s désigne la dimension du stabilisateur G_V de V et $\omega' := \max\{n\omega, 16\}$. On pose,

$$\left\{\begin{array}{l} N := 2\left(100nc_0^2\dfrac{(\log\omega')^2}{\log(n\log\omega')}\right)^{1/(n-s-1)} \\ T := \left[c_0\dfrac{N\log\omega'}{\log(n\log\omega')}\right] \\ L := n\omega T^2 \end{array}\right.$$

où l'on a noté $c_0 := 10(n+1)(n-s-1)$.

Fait IV.8 *Nous avons*

1. $\frac{3}{2}(n+1)\log(L+1) < 0,9T\frac{\log N}{N}$
2. $L < \frac{0,2}{2^{n-s}}\frac{N^{n-s+1}}{\log N}\omega$.

DÉMONSTRATION - Démontrons tout d'abord des inégalités concernant les paramètres T et N qui nous serons utiles dans la suite. Comme $N \geq 2$ et $c_0 \geq 10n$ nous avons

$$T \geq \left[20\frac{n\log\omega'}{\log(n\log\omega')}\right] ,$$

il vient alors, en utilisant le Fait (II.18) avec $a = b = 1$, l'inégalité :

$$T \geq [20e] \geq 27. \tag{IV.7}$$

De plus

$$\begin{aligned} N^{n-s-1} &= 2^{n-s-1}\cdot 100n\frac{(c_0\log\omega')^2}{\log(n\log\omega')} \\ &\geq 100\frac{(n\log\omega')^{0.01}}{\log(n\log\omega')}\ (c_0\log\omega')^{1.99} \end{aligned}$$

ainsi, en utilisant (II.18) avec $a = 0.01$ et $b = 1$, on obtient :

$$N^{n-s-1} \geq (c_0\log\omega')^{1.99}. \tag{IV.8}$$

Finalement

$$\log N \leq \log(200nc_0^2) + 2\log(n\log\omega') ,$$

or, comme $n \geq 2$, $\omega' \geq 16$, et $c_0 \leq 10n^2$ on a :

$$200nc_0^2 \leq 2\times 10^4 n^5 \leq 2^3(\log 16)^8 n^5 < (n\log\omega')^8 ,$$

d'où

$$\log N < 10\log(n\log\omega'). \tag{IV.9}$$

1. Nous avons, puisque $\log N \geq \frac{1,99}{n-s-1}\log(c_0 \log\omega')$ (d'après (IV.8)) et $T \leq c_0 N \log\omega'$, l'inégalité :
$$\begin{aligned}\frac{\log L}{\log N} &\leq \frac{\log\omega' + 2\log N + 2\log(c_0\log\omega')}{\log N}\\ &\leq \frac{(n-s-1)}{1,99}\frac{\log\omega'}{\log(c_0\log\omega')} + 2 + \frac{2(n-s-1)}{1,99}\\ &\leq \frac{(n-s-1)}{1,99}\left(\frac{\log\omega'}{\log(n\log\omega')} + 6\right).\end{aligned}$$
L'inégalité $\frac{t}{\log(nt)} \geq \frac{1}{1+e^{-1}}$ valable pour $t \geq \log n$ nous donne alors :
$$\begin{aligned}\frac{\log L}{\log N} &\leq \frac{(n-s-1)}{1,99}\frac{\log\omega'}{\log(n\log\omega')}\left(1+6(1+e^{-1})\right)\\ &\leq 5\cdot(n-s-1)\frac{\log\omega'}{\log(n\log\omega')}.\end{aligned}$$
On en déduit
$$\begin{aligned}N\times\frac{3}{2}(n+1)\log L &\leq 7,5\cdot(n+1)(n-s-1)\frac{N\log\omega'}{\log(n\log\omega')}\log N\\ &\leq 0,75(T+1)\log N.\end{aligned}$$
Pour conclure, il suffit de remarquer que, comme $T \geq 27$ (d'après (IV.7)) et $L \geq T^2$, nous avons $\frac{T+1}{T} \leq \frac{28}{27}$ et $\log(L+1) \leq 1.001\log L$.
2. On a :
$$\frac{0,2}{2^{n-s}}\frac{N^{n-s+1}}{\log N}\omega = \frac{10^{-1}}{\log N}\left(\frac{N}{2}\right)^{n-s-1}N^2\omega$$
ainsi, comme $\log N < 10\log(n\log\omega')$ (d'après (IV.9)) :
$$\begin{aligned}\frac{0,2}{2^{n-s}}\frac{N^{n-s+1}}{\log N}\omega &= \frac{10^{-1}}{\log N}\left(\frac{N}{2}\right)^{n-s-1}N^2\omega\\ &> \frac{10^{-2}}{\log(n\log\omega')}\left(100nc_0^2\frac{(\log\omega')^2}{\log(n\log\omega')}\right)N^2\omega\\ &> n\omega\left(\frac{c_0N\log\omega'}{\log(n\log\omega')}\right)^2 \geq L.\end{aligned}$$

■

3.2 Fonction auxiliaire et extrapolation

Raisonnons par l'absurde, supposons
$$L\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) < T\frac{\log N}{10N}. \tag{IV.10}$$

Remarquons que, comme $L+1 \geq n\deg(V)T^2 = nT\omega(T;V)$, l'espace vectoriel des polynômes de $\overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]$ de degré $\leq L$ nul sur V avec multiplicité au moins T est non réduit à $\{0\}$. En appliquant le corollaire IV.2 à $\theta = T\frac{\log N}{10NL}$, on obtient un polynôme F non nul de degré au plus L, s'annulant sur $V(\theta)$ (donc sur V puisque $\theta > \hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V)$) avec multiplicité au moins L tel que :

$$h(F) \leq \frac{1}{T-1}\Big((T+n)\log(L+1) + L\theta\Big) + \frac{n}{2}\log(L+1).$$

d'où, puisque $L\theta \leq 10^{-1}T$:

$$h(F) \leq \frac{1}{T-1}\Big((T+n)\log(L+1) + 10^{-1}T\Big) + \frac{n}{2}\log(L+1).$$

Par hypothèses, on a $L+1 \geq nT^2 \geq e$, ainsi

$$h(F) \leq \frac{1,1T+n}{T-1}\log(L+1) + \frac{n}{2}\log(L+1).$$

Comme $T \geq 10n$ on obtient finalement :

$$h(F) \leq \frac{1}{2}(n+3)\log(L+1). \tag{IV.11}$$

Notons T^* l'ordre minimal d'annulation de F sur $\boldsymbol{\xi}\cdot V$, où $\boldsymbol{\xi}$ parcourt $\ker[p]$ et le nombre premier p parcourt $[N/2, N]$. D'après le corollaire IV.4 nous avons :

$$T^*(1+\log(L+1)) \geq T\frac{\log N}{N} - h(F) - n\log(L+1) - L\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V)$$

soit, d'après (IV.10) et (IV.11)

$$T^*(1+\log(L+1)) \geq 0,9T\frac{\log N}{N} - \frac{3}{2}(n+1)\log(L+1).$$

Ainsi, d'après le fait IV.8-1, on a $T^* > 0$, autrement dit, F est nul $\boldsymbol{\xi}\cdot V$, pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \ker[p]$ et tout $p \in [N/2, N]$ premier.

3.3 Conclusion

Nous avons montré que F est nul sur $\boldsymbol{\xi}\cdot V$, pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \ker[p]$ et tout $p \in [N/2, N]$ premier. Le polynôme F étant de degré au plus L nous avons :

$$L \geq \deg\left(\bigcup_{\substack{p\in[N/2,N] \\ p \text{ premier}}} [p]^{-1}[p]\cdot V\right).$$

Comme G_V est connexe et $(N/2)^{n-s} \geq 23$ (où $s = \dim G_V$), le point 2 du lemme IV.5 avec $l_0 = 1$ nous donne :

$$L \geq \frac{0,22}{2^{n-s}} \frac{N^{n-s+1}}{\log N} \omega \ ,$$

contradiction, d'après le fait IV.8-2. L'hypothèse (IV.10) est donc fausse, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\text{ess}}(V) \quad &\geq \quad T\frac{\log N}{10NL} = \frac{\log N}{10n\omega TN} \\ &\geq \quad \frac{\log(n \log \omega')}{10n\omega c_0 \log \omega'} \frac{\log N}{N^2} \end{aligned}$$

soit

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(V) \geq \frac{1}{40nc_0(100nc_0^2)^{2/(n-s-1)}(n-s-1)} \cdot \frac{1}{\omega} \frac{(\log(n \log \omega'))^{2+2/(n-s-1)}}{(\log \omega')^{1+4/(n-s-1)}}.$$

Il reste à calculer la constante. Comme $c_0 = 10(n+1)(n-s-1)$, on peut facilement voir que le cas le plus défavorable est celui où $n - s - 1 = 1$ auquel cas :

$$40nc_0(100nc_0^2)^{2/(n-s-1)}(n-s-1) = 4.10^{10}n^3(n+1)^5 \leq 4 \cdot (3/2)^5 \cdot 10^{10}n^8 \ ,$$

puisque $n \geq 2$. D'où

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(V) \geq \frac{3.10^{-12}}{n^8} \frac{1}{\omega} \frac{(\log(n \log \omega'))^{2+2/(n-s-1)}}{(\log \omega')^{1+4/(n-s-1)}}.$$

4 Hypersurfaces dans $\mathbb{G}_m^2$ et $\mathbb{G}_m^3$

Nous donnons ici des minorations du minimum essentiel pour des hypersurfaces de $\mathbb{G}_m^2$ et $\mathbb{G}_m^3$. Ces résultats sont moins précis que ceux du paragraphe 3, dans la mesure où ils ne prennent pas en compte la dimension du stabilisateur de l'hypersurface considérée. Néanmoins nous obtenons de meilleures constantes dans ces cas particuliers, ce qui nous sera plus utile, car dans la suite nous ne pourrons pas tirer partie de la dimension du stabilisateur. Notons de plus que, dans le cas de $\mathbb{G}_m^2$, nous obtenons un résultat plus précis : le théorème de Bézout permet de majorer le cardinal de l'ensemble des points de la courbe de petite hauteur.

Proposition IV.9 *Soit W une courbe géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_m^2$ de degré ω, qui ne soit pas un translaté d'un sous-tore. On a alors :*

$$\text{Card}\left\{\boldsymbol{\alpha} \in W, \ | \ h(\boldsymbol{\alpha}) \leq \frac{10^{-11}}{\omega} \frac{(\log \log \omega')^4}{(\log \omega')^5}\right\} \leq 2.10^{11}\omega^2 \frac{(\log \omega')^6}{(\log \log \omega')^4}$$

où $\omega' := \max\{\omega, 16\}$. *En particulier on a :*

$$\hat{\mu}_{ess}(W) \geq \frac{10^{-11}}{\omega}\frac{(\log\log\omega')^4}{(\log\omega')^5}.$$

Proposition IV.10 *Soit* W *une surface de* $\mathbb{G}_m^3$ *géométriquement irréductible de degré* ω *qui n'est pas translaté d'un sous-tore de* $\mathbb{G}_m^3$. *Alors*

$$\hat{\mu}_{ess}(W) \geq \frac{3.10^{-12}}{\omega}\frac{(\log\log\omega')^4}{(\log\omega')^5}$$

où $\omega' := \max\{\omega, 16\}$.

Le déroulement de la preuve de ces deux résultats est similaire, nous les traiterons donc ensembles ; seules les constantes changeront.

4.1 Paramètres

Soit W une hypersurface de $\mathbb{G}_m^n$ (avec $n \in \{2,3\}$) géométriquement irréductible, de degré ω et notons $\omega := \max\{\omega, 16\}$. On pose, pour $n \in \{2,3\}$:

$$\begin{cases} N := c_1\dfrac{(\log\omega')^2}{\log\log\omega'} \\ T := \left[10N\dfrac{\log\omega'}{\log\log\omega'}\right] \\ L := n\omega T^2 \end{cases}$$

où $c_1 = 4.10^4$ si $n = 3$ et $c_1 = 2,5.10^4$ si $n = 2$.

Fait IV.11 *Nous avons*

1. $\log N \geq 1,99\log\log\omega'$;
2. $0,92T\frac{\log N}{N} > \left(1,01 + \frac{3n}{2}\right)\log(L+1)$;
3. $L < 0,1\frac{N^3}{\log N}\omega$.

DÉMONSTRATION -

1. On utilise ici le fait II.18 avec $a = 10^{-2}$ et $b = 1$ soit

$$N \geq (\log\omega')^{1,99} \times 10^{-2}e\cdot c_1 \geq (\log\omega')^{1,99}.$$

2. On veut montrer, pour $n = 2$ et 3 :
$$\frac{\log N}{N} > \frac{1,01 + 1,5n}{0,92T} \log(L+1).$$
Comme $\log(L+1) \leq 3\max\{\log(n\omega), \log(T+1)\}$ et $T+1 \leq 1,001T$, il nous suffit de montrer que
$$\frac{\log N}{N} > \frac{18}{T+1} \max\{\log(n\omega), \log(T+1)\}.$$
Remarquons tout d'abord que l'on a, en utilisant le fait II.18 avec $a = b = 1$:
$$T + 1 \geq 10N \frac{\log \omega'}{\log\log \omega'} \geq 10eN \geq 27N. \tag{IV.12}$$
– Supposons $T + 1 \geq n\omega$. Comme $9\log N \geq 9\log c_1 \geq 18\log 27$, nous avons $27\log N \geq 18\log(27N)$, ainsi
$$\frac{\log N}{N} \geq 18\ \frac{\log(27N)}{27N}.$$
Il suffit alors de remarquer que, d'après (IV.12), on a $T + 1 > 27N$, et que la fonction $x \mapsto (\log x)/x$ est décroissante sur $[e, +\infty[$.
– Supposons maintenant $T + 1 < n\omega$. Comme $\log N \geq 1,99 \log\log \omega'$ (d'après le point 1) on a, par choix de T :
$$\begin{aligned} \frac{\log N}{N} &\geq \frac{\log N}{T+1} \frac{10\log \omega'}{\log\log \omega'} \\ &\geq 19,9\ \frac{\log \omega'}{T+1}. \end{aligned}$$
Comme $27c_1 \leq 27N \leq T + 1$ (d'après (IV.12)) et $T + 1 < n\omega'$, on obtient $\omega' \geq \frac{27}{n} c_1 > 3^{10}$ et donc $1,1 \log \omega' > \log(3\omega')$, d'où
$$\frac{\log N}{N} > 18 \frac{\log(3\omega')}{T+1}.$$
3. On a
$$L = n\omega T^2 \leq n\omega \left(10N \frac{\log \omega'}{\log\log \omega'}\right)^2$$
ainsi
$$10L \frac{\log N}{\omega N^3} < 10^3 n \log N \left(\frac{\log \omega'}{\log\log \omega'}\right)^2 \frac{1}{N}.$$
Notons maintenant que, puisque $\log\log \omega' \geq 1$, on a $\log N \leq (2 + \log c_1) \log\log \omega'$, d'où
$$\begin{aligned} 10L \frac{\log N}{\omega N^3} &< 10^3 n (2 + \log c_1) \frac{(\log \omega')^2}{\log\log \omega'} \frac{1}{N} \\ &< 10^3 n \frac{2 + \log c_1}{c_1} < 1. \end{aligned}$$

■

4.2 Fonction auxiliaire et extrapolation

Posons

$$\theta := 0,08\frac{T\log N}{NL} \le 10^{-3}\frac{T}{L}.$$

Comme $L+1 \ge n\omega T^2 = n\omega(T;W)T$ (puisque W est de codimension 1), le corollaire IV.2 nous donne un polynôme $F \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]$ non nul de degré $\le L$ nul sur $W(\theta)$ avec multiplicité au moins T et tel que

$$h(F) \le \left(1,01+\frac{n}{2}\right)\log(L+1).$$

Notons T^* l'ordre minimal d'annulation de F sur $\boldsymbol{\xi}\cdot W(\theta)$, où $\boldsymbol{\xi}$ parcourt $\ker[p]$ et le nombre premier p parcourt $[N/2,N]$. D'après la proposition IV.3 nous avons :

$$\begin{aligned} T^*(1+\log(L+1)) &\ge T\frac{\log N}{N} - h(F) - n\log(L+1) - L\theta \\ &\ge 0,92T\frac{\log N}{N} - \left(1,01+\frac{3n}{2}\right)\log(L+1). \end{aligned}$$

D'après le point 2 du fait IV.11, cette dernière quantité est strictement positive, donc $T^*>0$. Nous avons donc montré que F s'annule sur $\boldsymbol{\xi}\cdot W(\theta)$, pour tout $\boldsymbol{\xi}\in\ker[p]$ et tout premier p de $[N/2,N]$.

4.3 Conclusion

Supposons par l'absurde F nul sur $\boldsymbol{\xi}\cdot W$, pour tout $\boldsymbol{\xi}\in\ker[p]$ et tout $p\in[N/2,N]$ premier (ce qui est en particulier le cas si $\theta \ge \hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(W)$). Le point 1 du lemme IV.5 appliqué avec $l_0 = 1$ nous dit alors, puisque W n'est pas le translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^n$ et $N \ge 10^3 n\log\omega'$,

$$\begin{aligned} L \ge \deg(F) \ge \deg\left(\bigcup_{\substack{p\in[N/2,N]\\ p\ \text{premier}}} [p]^{-1}[p]\cdot W\right) &\ge 0,4\frac{N}{\log N}\left(\frac{N}{2}\right)^{n+1-\dim(W)}\deg(W) \\ &\ge 0,1\frac{N^3}{\log N}\omega \end{aligned}$$

ce qui contredit le point 3 du lemme IV.11. Il résulte une minoration du minimum essentiel :

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(W) > \theta.$$

De plus, on obtient l'existence d'un premier $p \in [N/2, N]$ et d'un $\boldsymbol{\xi} \in \ker[p]$ tels que le polynôme F soit non nul sur $\boldsymbol{\xi} \cdot W(\theta)$. Si $n = 2$, Bézout nous dit alors

$$\mathrm{Card}\,(W(\theta)) \leq \deg(F) \cdot \deg(\boldsymbol{\xi} \cdot W) \leq L\omega \leq 200 c_1^2 \omega^2 \frac{(\log \omega')^6}{(\log\log \omega')^4}.$$

Pour terminer les preuves des propositions IV.10 et IV.9, il nous reste à minorer θ. On a :

$$\begin{aligned} \theta &= 0,08 \frac{T \log N}{NL} = \frac{0,08}{n\omega} \frac{\log N}{TN} \\ &\geq \frac{0,08}{10 n\omega} \frac{\log\log \omega'}{\log \omega'} \frac{\log N}{N^2} \\ &= \frac{0,08}{10 n\omega} \frac{\log\log \omega'}{\log \omega'} \left(\frac{\log\log \omega'}{c_1 (\log \omega')^2} \right)^2 \log N. \end{aligned}$$

Or, d'après le point 1 du fait IV.11, on a $\log N \geq 1,99 \log\log \omega'$, d'où :

$$\theta > \frac{0,08 \cdot 1,99}{10 n c_1^2} \times \frac{1}{\omega} \frac{(\log\log \omega')^4}{(\log \omega')^5}.$$

La constante $\frac{0,08 \cdot 1,99}{10 n c_1^2}$ vaut donc 3.10^{-12} si $n = 3$ et 10^{-11} sinon (car $c_1 = 4.10^4$ si $n = 3$ et $c_1 = 2,5.10^4$ si $n = 2$).

La proposition IV.9 va en fait nous permettre, dans la démonstration du théorème I.23, de se ramener au cas où notre courbe $\mathcal{C}$ n'est contenu dans aucun translaté de sous tore de $\mathbb{G}_m^3$, comme nous l'indique le lemme suivant.

Lemme IV.12 *Soient V une surface de $\mathbb{G}_m^3$ de degré ω et $\mathcal{C} \subset V$ une courbe géométriquement irréductible qui n'appartient à aucun translaté d'un sous-tore contenu dans V. S'il existe un translaté $\boldsymbol{\zeta} \cdot H$ d'un sous tore H contenant $\mathcal{C}$, alors :*

$$\hat{\mu}_{ess}(\mathcal{C}) \geq \frac{5 \cdot 10^{-12}}{\omega} \frac{(\log\log(2\deg(H)\omega'))^4}{(\log(2\deg(H)\omega'))^5}.$$

DÉMONSTRATION - Comme H est un tore de codimension 1, il existe $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ dans $\mathbb{Z}^3$ tel que ses coordonnées sont premières entres elles et tel que

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{G}_m^3 \mid \mathbf{x}^{\boldsymbol{\lambda}} = 1\}.$$

On peut de plus supposer que $\lambda_3 = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\}$. Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{G}_m^2 & \to & \mathbb{G}_m^3 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1^{\lambda_3}, x_2^{\lambda_3}, x_1^{-\lambda_1} x_2^{-\lambda_2}) \end{array}$$

qui est une paramétrisation de H (non nécessairement injective). Comme $\mathcal{C}$ n'est pas réunion de translatés de sous-tores, $\varphi^{-1}(\boldsymbol{\zeta}^{-1}\cdot\mathcal{C})$ non plus. La proposition IV.9 appliqué à chaque composante de ce dernier nous dit alors que pour tout $\boldsymbol{\beta} \in \varphi^{-1}(\boldsymbol{\zeta}^{-1}\cdot\mathcal{C})$ sauf un nombre fini on a

$$h(\boldsymbol{\beta}) \geq \frac{10^{-11}}{\deg\left(\varphi^{-1}(\boldsymbol{\zeta}^{-1}\cdot\mathcal{C})\right)} \frac{(\log\log d')^4}{(\log d')^5}$$

où $d' := \max\{\deg\left(\varphi^{-1}(\boldsymbol{\zeta}^{-1}\cdot\mathcal{C})\right), 16\}$.
Les sous-variétés $\varphi^{-1}(\boldsymbol{\zeta}^{-1}\cdot\mathcal{C}) \subset \varphi^{-1}(\boldsymbol{\zeta}^{-1}\cdot V)$ de $\mathbb{G}_m^2$ sont de dimension 1, de plus $\varphi^{-1}(\boldsymbol{\zeta}^{-1}\cdot V)$ est définie par un polynôme de degré majoré par

$$\max\{|\lambda_3|, |\lambda_1+\lambda_2|\}\deg(V) \leq 2\lambda_3\omega$$

en particulier $\deg\left(\varphi^{-1}(\boldsymbol{\zeta}^{-1}\cdot\mathcal{C})\right) \leq 2\lambda_3\omega$. Considérons maintenant des éléments $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{C}$ et $\boldsymbol{\beta} \in \varphi^{-1}(\boldsymbol{\zeta}^{-1}\cdot\mathcal{C})$ tels que $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\zeta}\cdot\varphi(\boldsymbol{\beta})$; nous avons

$$h(\boldsymbol{\alpha}) = h(\varphi(\boldsymbol{\beta})) \geq h(\beta_1^{\lambda_3}, \beta_2^{\lambda_3}) = \lambda_3 h(\boldsymbol{\beta}).$$

On en déduit que pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{C}$ sauf un nombre fini on a

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{10^{-11}}{2\omega}\frac{(\log\log 2\lambda_3\omega')^4}{(\log 2\lambda_3\omega')^5}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $\lambda_3 \leq \deg(H)$. ■

5 Courbe dans $\mathbb{G}_m^3$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer une minoration de la hauteur d'une courbe géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_m^3$. Rappelons l'énoncé du théorème I.23 :

Théorème I.23 *Soient V une surface de $\mathbb{G}_m^3$ de degré ω et $\mathcal{C} \subseteq V$ une courbe, toutes deux géométriquement irréductibles. Si V et $\mathcal{C}$ ne sont pas translaté d'un sous-tore, alors*

$$\hat{\mu}_{ess}(\mathcal{C}) > \frac{10^{-97}}{\omega} \cdot \frac{(\log\log\omega')^{21}}{(\log\omega')^{30}}$$

où $\omega' = \max\{16, \omega\}$.

5.1 Paramètres

Soit $c_5 := 84$ on pose :

$$\begin{cases} N_1 := 5.10^{12} c_5^7 \dfrac{(\log\omega')^7}{(\log\log\omega')^4} \\ T := \left[13 c_5^8 N_1 \dfrac{(\log\omega')^8}{(\log\log\omega')^7} \right] \\ L := \left[3T \min\{\omega T, (\deg(\mathcal{C})T)^{1/2}\} \right] \end{cases}$$

Notons ici que $L + 1 \geq 3T\omega(T; \mathcal{C})$. Soit de plus $N_2 \geq e$ tel que :

$$\frac{N_2}{\log N_2} = \frac{T \log N_1}{8N_1(c_5 \log\omega'))^2}.$$

Fait IV.13 *On a les inégalités suivantes :*

1. $\log(L + 1) \leq c_5 \log\omega'$;
2. $N_1/2 \geq N_2 \geq 10^{11} \log(L + 1)$;
3. $\log N_1 \geq 6,9 \log\log\omega'$ *et* $\log N_2 \geq 5,9 \log\log\omega'$;
4. $0,4 \frac{N_2}{\log N_2} \left(\frac{N_1 N_2}{4}\right)^3 \deg(\mathcal{C}) > L^2$.

DÉMONSTRATION -

1. Comme $L \geq 13c_5^8 \geq 10^{16}$, on a $\log(L+1) \leq 1,001 \log L$ il suffit ainsi de remarquer que

$$\begin{aligned} \log L &\leq \log(3\omega' T^2) \\ &\leq \log\omega' + 2\Big(\log(5.10^{12} \cdot 13c_5^{15}) + 15 \log\log\omega' \Big) + \log 3 \\ &\leq \log\omega' + \frac{\log\omega'}{\log 16} \Big(2\log(5.10^{12} \cdot 13c_5^{15}) + 30 \log\log 16 + \log 3 \Big) \\ &\leq 83,4 \log\omega'. \end{aligned}$$

2. Montrons d'abord l'inégalité $N_1/2 \geq N_2$. Par croissance de la fonction $x \mapsto x/\log x$ sur $[e, +\infty[$, il nous suffit de vérifier l'inégalité

$$\frac{T \log N_1}{8N_1(c_5(\log\omega')^2} = \frac{N_2}{\log N_2} \leq \frac{N_1/2}{\log(N_1/2)} ,$$

soit

$$\frac{T}{N_1} (\log N_1)^2 \leq 4c_5^2 N_1 (\log\omega')^2.$$

Notons maintenant que l'on a les inégalités suivantes :

$$\frac{T}{N_1} \leq 13c_5^8 \frac{(\log\omega')^8}{(\log\log\omega')^7} \quad \text{et} \quad \log N_1 \leq \Big(\log(5.10^{12}c_5^7)+7\Big)\log\log\omega'.$$

Compte tenu du fait que l'on a

$$N_1 = 5.10^{12}\frac{(c_5\log\omega')^7}{(\log\log\omega')^4}\ ,$$

il suffit donc de vérifier que $13c_5^8 \cdot \Big(\log(5.10^{12}c_5^7)+7\Big)^2 \leq 5.10^{12}c_5^9$.

Montrons maintenant la seconde inégalité, comme $T \geq 2$ nous avons :

$$\frac{N_2}{\log N_2} \geq \frac{2}{3}\cdot\frac{(T+1)\log N_1}{8N_1(\log(L+1))^2}.$$

Par définition de T et comme $\log(L+1) \leq c_5\log\omega'$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\cdot\frac{(T+1)}{8N_1}\cdot\frac{\log N_1}{(\log(L+1))^2} \quad &\geq \quad \frac{2}{3}\cdot\frac{13c_5^8(\log\omega')^8}{8(\log\log\omega')^7}\cdot\frac{\log\log\omega'}{(c_5\log\omega')^2}\\ &> \quad c_5^6\frac{(\log\omega')^6}{(\log\log\omega')^6}.\end{aligned}$$

Il vient

$$N_2 \geq \frac{N_2}{\log N_2} \geq c_5^6\frac{(\log\omega')^6}{(\log\log\omega')^6}. \tag{IV.13}$$

En utilisant le fait II.18 avec $(a,b)=(5,6)$ et à nouveau la majoration $\log(L+1) \leq c_5\log\omega'$ on obtient :

$$N_2 \geq c_5^5\left(\frac{5e}{6}\right)^6\cdot(c_5\log\omega') \geq 10^{11}\log(L+1).$$

3. On veut montrer les minorations

$$\log N_1 \geq 6,9\log\log\omega' \quad \text{et} \quad \log N_2 \geq 5,9\log\log\omega'.$$

On utilise pour cela deux fois le fait II.18.
– avec $(a,b)=(10^{-1},4)$, on obtient :

$$N_1 \geq 5.10^{12}c_5^7\left(\frac{10^{-1}e}{4}\right)^4(\log\omega')^{6,9} \geq (\log\omega')^{6,9}\ ;$$

– avec $(a,b)=(10^{-1},6)$ dans l'inégalité (IV.13) :

$$N_2 \geq c_5^6\left(\frac{10^{-1}e}{6}\right)^6\cdot(\log\omega')^{5,9} \geq (\log\omega')^{5,9}.$$

4. Comme $L^2 \leq 9T^3 \deg(\mathcal{C})$, il nous suffit ici de montrer :
$$\frac{0,4}{9\cdot 4^3}\frac{N_1^3N_2^4}{T^3\log N_2} > 1.$$
On a :
$$\begin{aligned}\frac{0,4}{9\cdot 4^3}\frac{N_1^3N_2^4}{T^3\log N_2} &= \frac{0,4}{9\cdot 8^2}\cdot\frac{T(\log N_2)^3}{N_1}\cdot\left(\frac{N_1N_2}{T\log N_2}\right)^4\\ &= \frac{0,4}{9\cdot 8^2}\cdot\frac{T(\log N_2)^3}{N_1}\cdot\left(\frac{\log N_1}{8(c_5\log\omega')^2}\right)^4\\ &\geq \frac{0,4}{9\cdot 8^6}\cdot\frac{49}{50}\frac{T+1}{N_1}\cdot\frac{(\log N_1)^4(\log N_2)^3}{(c_5\log\omega')^8}\end{aligned}$$
puisque $T \geq 49$. En utilisant le point 3 il vient :
$$\frac{0,4}{9\cdot 4^3}\frac{N_1^3N_2^4}{T^3\log N_2} > \frac{0,4}{9\cdot 8^6}\cdot\frac{13c_5^8(\log\omega')^8}{(\log\log\omega')^7}\cdot\frac{6,9^4\cdot 5,9^3\cdot(\log\log\omega')^7}{(c_5\log\omega')^8} > 1$$
■

5.2 Fonction auxiliaire et extrapolation

Comme $L+1 \geq 3T\omega(T;\mathcal{C})$, le corollaire IV.2 nous donne un polynôme $F \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]$ non nul de degré $\leq L$ nul sur $\mathcal{C}(\frac{10^{-3}T}{L})$ avec multiplicité au moins T tel que
$$h(F) \leq 2,51\log(L+1).$$
Pour $j=1,2$ posons $\mathcal{P}_j := \{p \in [N_j/2, N_j] \text{ premier}\}$ et notons T_1 l'ordre minimal d'annulation de F sur
$$\boldsymbol{\xi}_p\cdot\mathcal{C}(\frac{10^{-3}T}{L})\ ,$$
où p parcourt $\mathcal{P}_1$ et $\boldsymbol{\xi}_p$ l'ensemble $\ker[p]$. Notons que, puisque $(1,1,1)\in\ker[p]$, nous avons $T_1 \leq T$. Posons maintenant
$$\theta := \frac{T_1\log N_1}{10N_1L} < \frac{10^{-3}T}{L}\ .$$
Nous allons montrer le théorème I.23 par l'absurde, aussi nous supposerons dans la suite le minimum essentiel de $\mathcal{C}$ petit, plus précisément :

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\mathcal{C}) < \theta. \qquad \text{(IV.14)}$$

En particulier $\mathcal{C}(\theta)$ est Zariski-dense dans $\mathcal{C}$, et *a fortiori* F est nul sur $\mathcal{C}$.

Proposition IV.14 *Sous l'hypothèse (IV.14) sur le minimum essentiel de $\mathcal{C}$, pour tout (p,q) dans $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ et tout $(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_q) \in \ker[p] \times \ker[q]$, le polynôme F est nul sur $\boldsymbol{\xi}_p\boldsymbol{\xi}_q \cdot \mathcal{C}$. De plus on a :*

$$T_1 > 0,8 \frac{T \log p}{p \log(L+1)}. \tag{IV.15}$$

DÉMONSTRATION - Soient $(p,q) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ et $(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_q) \in \ker[p] \times \ker[q]$. Comme

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(\boldsymbol{\xi}_p\boldsymbol{\xi}_q \cdot \mathcal{C}) = \hat{\mu}_{\text{ess}}(\boldsymbol{\xi}_p \cdot \mathcal{C}) = \hat{\mu}_{\text{ess}}(\mathcal{C}) < \theta,$$

il suffit de montrer que F est nul sur $\boldsymbol{\xi}_p\boldsymbol{\xi}_q \cdot \mathcal{C}(\theta)$. D'après le fait IV.13-2 nous avons :

$$T_1 \leq T \quad \text{et} \quad N_2/2 \leq q \leq N_2 < N_1/2 \leq p \leq N_1$$

ainsi, par décroissance de la fonction $x \mapsto \log(x)/x$, il vient

$$L\theta = \frac{T_1 \log N_1}{10 N_1} \leq \min\left\{\frac{T \log p}{10p}, \frac{T_1 \log q}{10q}\right\}. \tag{IV.16}$$

• Notons $T_{1,p}$ l'ordre minimal d'annulation de F sur $\boldsymbol{\xi}_p \cdot \mathcal{C}(\theta)$, où $\boldsymbol{\xi}_p$ parcourt $\ker[p]$. La proposition IV.3 nous donne :

$$T_{1,p}\big(1 + \log(L+1)\big) > T\frac{\log p}{p} - h(F) - 3\log(L+1) - L\theta\ ,$$

soit avec (IV.16), comme $\log(L+1) \geq 10$ et $h(F) \leq 2,51 \log(L+1)$

$$1,11 T_{1,p} \log(L+1) > 0,9 T \frac{\log p}{p} - 5,51 \log(L+1).$$

En divisant par $1,11$:

$$T_{1,p} \log(L+1) > 0,81 T \frac{\log p}{p} - 5 \log(L+1). \tag{IV.17}$$

D'après le fait IV.13 (points 1 et 2), on a $c_5 \log \omega' \geq \log(L+1)$ et $N_2 \geq 10^{11}$, d'où

$$\frac{T \log p}{p} \geq \frac{T \log N_1}{N_1} = \frac{8 N_2}{\log N_2}(c_5 \log \omega')^2 \geq 500 \log(L+1)\ ,$$

ce qui montre (IV.15).

• Notons maintenant $T_{2,pq}$ l'ordre minimal d'annulation de F sur $\boldsymbol{\xi}_p\boldsymbol{\xi}_q \cdot \mathcal{C}(\theta)$, où $(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_q)$ parcourt $\ker[p] \times \ker[q]$. En raisonnant comme précédemment, on obtient une inégalité similaire à (IV.17) :

$$\begin{aligned} T_{2,pq} \log(L+1) \quad &> \quad 0,8 \frac{T_{1,p} \log q}{q} - 5 \log(L+1) \\ &> \quad 0,8^2 \frac{T \log p \log q}{pq \log(L+1)} - 5 \log(L+1). \end{aligned}$$

Il nous suffit ici de montrer que le membre de droite de cette inégalité est > 0 pour tout $(p,q) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$, autrement dit que :

$$T \log N_1 \log N_2 \geq 8 N_1 N_2 (\log(L+1))^2,$$

ce qui est bien le cas, par définition de N_2 et puisque $\log(L+1) \leq c_5 \log \omega'$. ■

5.3 Lemme de zéros

Nous ne travaillerons dans la suite qu'avec des ensembles algébriques contenant au moins un translaté de $\mathcal{C}$ par un point de torsion, aussi il nous sera utile d'utiliser la notion de *trace* introduite dans [AD03] :

Dans la suite dans toute union $\boldsymbol{\xi}_p$, $\boldsymbol{\xi}_{p_0}$ et $\boldsymbol{\xi}_q$ parcoureront respectivement $\ker[p]$, $\ker[p_0]$ et $\ker[q]$ respectivement.

Définition IV.15 *Soient Z_1 et Z_2 deux sous-ensembles algébriques de $\mathbb{G}_m^n$, on appelle* trace *de Z_1 relativement à Z_2, notée $\mathrm{tr}(Z_1, Z_2)$, la réunion des composantes isolées de Z_1 contenant au moins une composante isolée de Z_2.*

Notons X l'ensemble algébrique de codimension 1 définie par notre fonction auxiliaire F et

$$Y := \mathrm{tr}\left(X, \bigcup_{\substack{p \in \mathcal{P}_1 \\ q \in \mathcal{P}_2}} \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_q} \boldsymbol{\xi}_p \boldsymbol{\xi}_q \cdot \mathcal{C} \right)$$

Ensuite, pour tout $p \in \mathcal{P}_1$ posons :

$$X_p := \bigcap_{\boldsymbol{\xi}_p} \boldsymbol{\xi}_p^{-1} \cdot X \;=\; [p]^{-1}[p]X$$

et

$$Y_p := \mathrm{tr}\left(X_p, \bigcup_{q \in \mathcal{P}_2} \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_q} \boldsymbol{\xi}_p \boldsymbol{\xi}_q \cdot \mathcal{C} \right).$$

Enfin, pour tout $q \in \mathcal{P}_2$ posons :

$$X_{p,q} := \bigcap_{\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_q} \boldsymbol{\xi}_p^{-1} \boldsymbol{\xi}_q^{-1} \cdot X \;=\; \bigcap_{\boldsymbol{\xi}_q} \boldsymbol{\xi}_q^{-1} \cdot X_p \;=\; [pq]^{-1}[pq]X$$

et

$$Y_{p,q} := \mathrm{tr}\left(X_{p,q}, \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_q} \boldsymbol{\xi}_p \boldsymbol{\xi}_q \cdot \mathcal{C} \right).$$

où rappelons-le $\boldsymbol{\xi}_p$ et $\boldsymbol{\xi}_q$ parcourent $\ker[p]$ et $\ker[q]$ respectivement. Notons les inclusions suivantes, pour tout $(p,q) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$:

$$\mathcal{C} \subseteq X_{p,q} \subseteq X_p \subseteq X \quad \text{et} \quad \mathcal{C} \subseteq Y_{p,q} \subseteq Y_p \subseteq Y. \tag{IV.18}$$

En effet, comme F s'annule sur tous les $\boldsymbol{\xi}_p\boldsymbol{\xi}_q \cdot \mathcal{C}$, la première série d'inclusions est immédiate. La seconde découle du lemme suivant :

Lemme IV.16 *Soient Z_1, Z_1', Z_2 et Z_2' des sous-ensembles algébriques de $\mathbb{G}_m^n$*

1. *On a*
$$Z_1 \subseteq Z_1' \implies \mathrm{tr}(Z_1, Z_2) \subseteq \mathrm{tr}(Z_1', Z_2) \ ;$$
2. *si les composantes isolées de Z_2 et Z_2' sont de même dimension :*
$$Z_2 \subseteq Z_2' \implies \mathrm{tr}(Z_1, Z_2) \subseteq \mathrm{tr}(Z_1, Z_2') \ ;$$
3. *si Σ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{G}_m^n$, alors $\Sigma \cdot \mathrm{tr}(Z_1, Z_2) = \mathrm{tr}(\Sigma \cdot Z_1, \Sigma \cdot Z_2)$.*

Ainsi, comme $\mathrm{codim}(\mathcal{C}) = 2$, deux des trois ensembles algébriques Y, Y_p et $Y_{p,q}$ ont même codimension ce qui nous permettra de comparer leurs degrés ou leurs hauteurs normalisées. Notons que le point 3 du lemme IV.16 nous dit en particulier que les groupes $\ker[p]$ et $\ker[pq]$ stabilisent respectivement Y_p et $Y_{p,q}$.

Cas où un Y_p est de codimension 2

Comme tous les Y_p sont propres et contiennent un translaté de $\mathcal{C}$, il sont tous de codimension 1 ou 2. Notons $\tilde{\mathcal{P}}_1$ l'ensemble des premiers de $\mathcal{P}_1$ pour lesquels l'ensemble algébrique Y_p est de codimension 1 et supposons ici que $|\tilde{\mathcal{P}}_1| < 0,999 \cdot |\mathcal{P}_1|$. Soit $p_0 \in \mathcal{P}_1$ tel que $\mathrm{codim}(Y_{p_0}) = 2$ et considérons un premier $q \in \mathcal{P}_2$. Comme $\mathcal{C} \subseteq Y_{p_0,q} \subseteq Y_{p_0}$ on a en particulier $\mathrm{codim}(Y_{p_0}) = \mathrm{codim}(Y_{p_0,q}) = \mathrm{codim}(\mathcal{C}) = 2$.

D'après le point 3 du lemme IV.16, l'ensemble algébrique $Y_{p_0,q}$ est invariant par translation par un point de p_0q-torsion, ainsi :

$$\bigcup_{\boldsymbol{\xi}_q, \boldsymbol{\xi}_{p_0}} \boldsymbol{\xi}_q\boldsymbol{\xi}_{p_0} \cdot \mathcal{C} \subseteq Y_{p_0,q} \subseteq Y_{p_0}.$$

Ceci étant vrai pour tout q dans $\mathcal{P}_2$ on en déduit :

$$\bigcup_{q \in \mathcal{P}_2} [p_0q]^{-1}[p_0q]\mathcal{C} = \bigcup_{q \in \mathcal{P}_2} \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_q, \boldsymbol{\xi}_{p_0}} \boldsymbol{\xi}_q\boldsymbol{\xi}_{p_0} \cdot \mathcal{C} \subseteq Y_{p_0}. \tag{IV.19}$$

Les ensembles algébriques considérés dans cette inclusion sont de même dimension, ainsi nous allons pouvoir comparer leurs degrés.

• Notons $\tilde{F}$ le produit des facteurs irréductibles de F s'annulant sur un translaté $\boldsymbol{\xi}_p\boldsymbol{\xi}_q\cdot\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$; autrement dit $(\tilde{F})$ est l'idéal de définition de Y. L'ensemble algébrique Y_{p_0} est de dimension 1 ainsi que toutes ses composantes (car celles-ci contiennent toutes par définition un translaté de $\mathcal{C}$). Comme dans le paragraphe 5.3 du chapitre III, on peut trouver un polynôme G premier à $\tilde{F}$ de la forme :

$$G = \sum_{\boldsymbol{\xi}_{p_0}} \lambda_{\boldsymbol{\xi}_{p_0}} \tilde{F}(\boldsymbol{\xi}_{p_0}\cdot\mathbf{x}) \ , \quad \lambda_{\boldsymbol{\xi}_{p_0}} \in \overline{\mathbb{Q}} \ ,$$

tel que $(\tilde{F}, G)$ soit contenu dans l'idéal de définition de Y_{p_0}. On en déduit alors :

$$\deg(Y_{p_0}) \leq \deg(\tilde{F})\deg(G) \leq (\deg(F))^2 \leq L^2.$$

• Etudions maintenant le membre de gauche de (IV.19). Notons que $\mathcal{P}_1 \subseteq [N_1/2, N_1]$ et $\mathcal{P}_2 \subseteq [N_2/2, N_2]$, de plus le fait IV.13-2 nous dit que $N_1/2 > N_2$, en particulier p_0 est premier à tout nombre premier de $[N_2/2, N_2]$. Comme $N_2 \geq 10^{11}\log(L+1)$ (fait IV.13-2) et $\deg(\mathcal{C}) \leq \deg(Y_{p_0}) \leq L^2$, on obtient

$$N_2 \geq 3\cdot 10^3 \log\deg(\mathcal{C}).$$

Pour appliquer le lemme IV.5, il faut se ramener au cas où p_0 est premier à $|G_{\mathcal{C}}/G_{\mathcal{C}}^0|$. D'après la proposition II.11, le nombre de diviseurs premiers de $[N_1/2, N_1]$ divisant $|G_{\mathcal{C}}/G_{\mathcal{C}}^0|$ est majoré par

$$\frac{\log|G_{\mathcal{C}}/G_{\mathcal{C}}^0|}{\log(N_1/2)} \leq \frac{2\log\deg(\mathcal{C})}{\log(N_1/2)} \leq \frac{4\log L}{\log(N_1/2)}.$$

Or le fait IV.13-2 nous dit que $N_1 \geq 10^{11}\log(L+1)$, donc

$$\frac{4\log L}{\log(N_1/2)} \leq \frac{4\cdot 10^{-11}N_1}{\log(N_1/2)} \leq 10^{-3}\frac{0,41N_1}{\log N_1}.$$

Par hypothèse on a $|\mathcal{P}_1 \setminus \tilde{\mathcal{P}_1}| > 10^{-3}\cdot|\mathcal{P}_1|$, autrement dit le nombre de Y_p de codimension 2 n'est pas trop petit ; de plus d'après le lemme II.17, on a $|\mathcal{P}_1| \geq 0,41N_1/\log N_1$, puisque $N_1 \geq 41$. On peut donc supposer p_0 premier à $|G_{\mathcal{C}}/G_{\mathcal{C}}^0|$.

Comme $\mathcal{C}$ n'est pas le translaté d'un sous-tore, le point 1 du lemme IV.5 appliqué à $l_0 = p_0$ nous donne alors :

$$0,4\frac{N_2}{\log N_2}\left(\frac{N_1N_2}{4}\right)^3 \deg(\mathcal{C}) \leq \deg(Y_{p_0}) \leq L^2.$$

Contradiction, d'après le fait IV.13-4.

Cas où les Y_p sont de codimension 1

Supposons ici que l'ensemble $\tilde{\mathcal{P}}_1$ des premiers de $\mathcal{P}_1$ pour lesquels l'ensemble algébrique Y_p soit de codimension 1 vérifie $|\tilde{\mathcal{P}}_1| \geq 0,999 \times |\mathcal{P}_1|$. Soit $p \in \tilde{\mathcal{P}}_1$, par définition de la trace, il existe une composante (irréductible) Z_p de X_p de codimension 1 (Z_p est donc aussi une composante de X) contenant un translaté $\boldsymbol{\xi}_p\boldsymbol{\xi}_q \cdot \mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$.

Commençons par une petite réduction du problème. S'il existe $p \in \tilde{\mathcal{P}}_1$ tel que Z_p soit le translaté $\boldsymbol{\xi} \cdot H$ d'un sous-tore H, alors, d'après le lemme IV.12, nous avons :

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(\mathcal{C}) \geq \frac{5 \cdot 10^{-12}}{\omega} \frac{(\log\log(2\deg(H)\omega'))^4}{(\log(2\deg(H)\omega'))^5}. \tag{IV.20}$$

Comme Z_p et X sont de même dimension, on a $\deg(H) = \deg(Z_p) \leq \deg(X) \leq L$, ainsi, d'après le fait IV.13-1 nous avons $\log(2\deg(H)\omega') \leq (2 + c_5)\log\omega'$. En reportant ceci dans (IV.20) on obtient, puisque $c_5 = 84$:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\text{ess}}(\mathcal{C}) &\geq \frac{5.10^{-12}}{(2+c_5)^5\omega} \frac{(\log\log\omega')^4}{(\log\omega')^5} \\ &\geq \frac{10^{-21}}{\omega} \frac{(\log\log\omega')^{21}}{(\log\omega')^{30}}\ , \end{aligned}$$

ce qui est la conclusion recherchée. Nous supposerons donc dans la suite qu'**aucun des Z_p n'est translaté d'un sous-tore**. D'après le point 3 lemme IV.16, pour tout $p \in \tilde{\mathcal{P}}_1$, comme Y_p est stable par translation par un point de p-torsion, on a :

$$\bigcup_{p \in \tilde{\mathcal{P}}_1} \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_p} \boldsymbol{\xi}_p \cdot Z_p \subseteq \bigcup_{p \in \tilde{\mathcal{P}}_1} Y_p \subseteq X.$$

pour conclure, nous allons utiliser le lemme IV.17 suivant dans lequel on encadre la hauteur normalisée de ces ensembles algébriques. Ce lemme nous donne :

$$\frac{\log(N_1/2)}{4,01}|\tilde{\mathcal{P}}_1| < 5.10^{11} \frac{(\log(L+1))^7}{(\log\log(L+1))^4}.$$

Comme $N_1 \geq 41$, le lemme II.17 nous dit que le nombre de premiers dans $[N_1/2, N_1]$ est supérieur à $0,41\frac{N_1}{\log N_1}$, en particulier :

$$\frac{\log(N_1/2)}{4,01}|\tilde{\mathcal{P}}_1| \geq \frac{\log(N_1/2)}{4,01} \times 0,999 \cdot 0,41 \frac{N_1}{\log N_1}.$$

Comme $N_1 \geq 5 \cdot 10^{12} c_5^7 \geq 10^{26}$, on a $0,999 \cdot \frac{0,41\log(N_1/2)}{4,01\log N_1} \geq 10^{-1}$. On déduit alors des deux inégalités précédentes :

$$N_1 < 5.10^{12} \frac{(\log(L+1))^7}{(\log\log(L+1))^4}.$$

Or le fait IV.13-1 nous dit que $\log(L+1) \leq c_5 \log\omega'$, d'où une contradiction, par définition de N_1.

Lemme IV.17 *Soient N, L deux entiers, avec $L \geq 16$ et $\mathcal{P} \subseteq [N/2, N]$ un ensemble de premiers. Soient $F \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]$ un polynôme non nul de degré au plus L et tel que $h(F) \leq 2,51\log(L+1)$. Pour tout $p \in \mathcal{P}$ on considère une hypersurface Z_p géométriquement irréductible qui n'est pas le translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^3$. Si F est nul sur $\boldsymbol{\xi}_p \cdot Z_p$, pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout point de p-torsion $\boldsymbol{\xi}_p$, alors :*

$$\frac{\log N/2}{4,01}|\mathcal{P}| < 5.10^{11}\frac{(\log(L+1))^7}{(\log\log(L+1))^4}.$$

Démonstration - • Plaçons-nous dans un premier temps dans le cas le plus défavorable : celui où pour tout $p \in \mathcal{P}$ on a $\ker[p] \subseteq G_{Z_p}$. Dans ce cas, si X désigne le lieu des zéros de F, on a :

$$\bigcup_{p\in\mathcal{P}} [p]^{-1}[p]Z_p = \bigcup_{p\in\mathcal{P}}\bigcup_{\boldsymbol{\xi}_p} \boldsymbol{\xi}_p \cdot Z_p = \bigcup_{p\in\mathcal{P}} Z_p \subseteq X.$$

Notons $C_1, \ldots, C_s$ les classes d'équivalence pour la relation dans $\mathcal{P}$:

$$p \sim p' \iff Z_p = Z_{p'}$$

et pour tout $j \in \{1, \ldots, s\}$ fixons un premier p_j de C_j. Nous allons voir que dans ce cas le nombre s de classes est grand. Plus précisément, il existe un élément j_0 dans $\{1, \ldots, s\}$ tel que

$$s|C_{j_0}| \geq |\mathcal{P}|.$$

D'après le lemme II.13, pour tout p on a $\dim G_{Z_p} < \dim Z_p = 2$ puisque Z_p n'est pas le translaté d'un sous-tore. De plus, le point 3 du lemme II.14 nous donne :

$$p^3 = |\ker[p]| = |\ker[p] \cap G_{Z_p}| = p^{\dim G_{Z_p}}[G_{Z_p} : G^0_{Z_p}]$$

et donc p^2, et *a fortiori* le produit $\prod_{p\in C_{j_0}} p^2$, divisent $[G_{Z_p} : G^0_{Z_p}]$. On en déduit, *via* la proposition II.11 :

$$|C_{j_0}| \leq \frac{\log[G_{Z_{p_{j_0}}} : G^0_{Z_{p_{j_0}}}]}{2\log(N/2)} \leq \frac{(\dim Z_{p_{j_0}} + 1)\log\deg(Z_{p_{j_0}})}{2\log(N/2)} \leq \frac{3\log L}{2\log(N/2)}.$$

Ainsi

$$s \geq |\mathcal{P}|\frac{2}{3}\frac{\log(N/2)}{\log L}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\hat{h}(X) &\geq \hat{h}\left(\bigcup_{j=1}^{s} Z_{p_j}\right) = \sum_{j=1}^{s}\hat{h}(Z_{C_j}) \\ &\geq s\min_{p\in\mathcal{P}}\hat{h}(Z_p).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\hat{h}(X) \geq |\mathcal{P}| \frac{2}{3} \frac{\log(N/2)}{\log L} \min_{p \in \mathcal{P}} \hat{h}(Z_p). \tag{IV.21}$$

• Supposons maintenant qu'il existe un premier p de $\mathcal{P}$ tel que $\ker[p] \not\subseteq G_{Z_p}$, en particulier

$$\left|\ker[p] \cap G_{Z_p}\right| \leq p^2.$$

En utilisant le lemme II.14 on en déduit :

$$\hat{h}(X) \geq \hat{h}\left([p]^{-1}[p]Z_p\right) = \frac{p^3}{\left|\ker[p] \cap G_{Z_p}\right|} \hat{h}(Z_p) \geq p\hat{h}(Z_p) \geq \frac{N}{2}\hat{h}(Z_p) \ ,$$

ce qui implique l'inégalité (IV.21).

• Nous avons montré à ce stade que l'inégalité (IV.21) était toujours satisfaite. Remarquons maintenant qu'aucun des Z_p n'étant le translaté d'un sous-tore, la proposition IV.10 nous donne, puisque $\deg(Z_p) \leq \deg(X) \leq L$:

$$\hat{h}(Z_p) \geq 3.10^{-12} \frac{(\log\log L)^4}{(\log L)^5}.$$

On obtient alors, en utilisant l'inégalité (IV.21) :

$$\hat{h}(X) \geq 2.10^{-12} \log(N/2) |\mathcal{P}| \cdot \frac{(\log\log L)^4}{(\log L)^6}. \tag{IV.22}$$

• Rappelons que de façon générale, si X est un ensemble algébrique défini par un polynôme F (donc équidimensionnel), à coefficients dans un corps k, alors sa hauteur normalisée vérifie :

$$\hat{h}(X) = \frac{1}{[k:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathcal{M}_k} [k_v : \mathbb{Q}_v] \log M_v(F) \ ,$$

où $M_v(F) = \max\{|\operatorname{coeff}(F)|_v\}$ si v est ultramétrique et $M_v(F) = M(\sigma F)$ si $v|\infty$ est associé au plongement σ. D'après l'inégalité de Landau (propriété II.20), nous avons dans ce dernier cas :

$$\log M_v(F) = \log M(\sigma F) \leq h_v(F) + \frac{3}{2} \log\left(\deg(\sigma F)\right)$$

où, $h_{\tilde{v}}(F) := \max\{|\operatorname{coeff}(F)|_{\tilde{v}}\}$ pour toute place $\tilde{v}$ de k. On en déduit

$$\begin{aligned} \hat{h}(X) &\leq \frac{1}{[k:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in \mathcal{M}_k} [k_v : \mathbb{Q}_v] h_v(F) + \frac{3}{2[k:\mathbb{Q}]} \sum_{v|\infty} [k_v : \mathbb{Q}_v] \log L \\ &\leq h(F) + \frac{3}{2} \log L \\ &\leq 4,01 \log(L+1). \end{aligned}$$

En reprenant l'inégalité (IV.22) on obtient :

$$\frac{\log(N/2)}{4,01}|\mathcal{P}| < 5.10^{11}\frac{(\log(L+1))^7}{(\log\log(L+1))^4}.$$

■

5.4 Conclusion

Dans tous les cas nous sommes arrivé à une contradiction ; l'hypothèse (IV.14) est donc fausse, autrement dit :

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(\mathcal{C}) > \theta.$$

Pour conlure la démonstration du théorème I.23, il nous reste à minorer θ. En utilisant la formule (IV.15) de la proposition IV.14 on obtient :

$$\begin{aligned}\theta &> \frac{0,8T\log N_1}{N_1\log(L+1)}\cdot\frac{\log N_1}{10N_1L}\\ &\geq \frac{0,8(\log N_1)^2}{30\omega'\log(L+1)}\cdot\frac{1}{TN_1^2}.\end{aligned}$$

Comme $\log(L+1)\leq c_5\log(\omega')$ et $\log(N_1)\geq 6,9\log\log\omega'$ (Fait IV.13 points 1 et 3) il vient :

$$\begin{aligned}\theta &> \frac{0,8\cdot(6,9\log\log\omega')^2}{30\omega'(c_5\log\omega')}\cdot\frac{(\log\log\omega')^7}{13c_5^8(\log\omega')^8}\cdot\frac{1}{N_1^3}\\ &\geq \frac{0,8\cdot 6,9^2}{30c_5\cdot(13c_5^8)}\cdot\frac{1}{\omega'}\cdot\left(\frac{\log\log\omega'}{\log\omega'}\right)^9\cdot\left(\frac{(\log\log\omega')^4}{5.10^{12}(c_5\log\omega')^7}\right)^3\\ &\geq \frac{10^{-97}}{\omega'}\frac{(\log\log\omega')^{21}}{(\log\omega')^{30}}.\end{aligned}$$

6 Petits points d'une surface

On s'intéresse maintenant aux petits points d'une surface V géométriquement irréductible. Comme on a pu le constater dans l'introduction, si l'on souhaite obtenir une minoration quasi-optimale pour la hauteur des points de V, alors on obtient dans le cas de $\mathbb{G}_m^n$ quasiment aucune information quand au nombre (ou plus généralement la somme des degrés) de translatés de sous-tores contenant les petits points. Dans le cas de $\mathbb{G}_m^3$, on arrive toutefois à obtenir quelques résultats. Rappelons l'énoncé du théorème I.24.

Théorème I.24 *Soient V une surface de $\mathbb{G}_m^3$ géométriquement irréductible de degré ω, qui n'est pas le translaté d'un sous-tore.*

Alors il existe un nombre fini de translatés de sous-tores $B_1, \dots, B_t$ de V tels que, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in V \setminus B_1 \cup \dots \cup B_t$, on ait

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{10^{-97}}{\omega} \cdot \frac{(\log\log\omega')^{21}}{(\log\omega')^{30}}.$$

De plus, si $B_1, \dots, B_m$ sont de dimension 1 et $B_{m+1}, \dots, B_t$ de dimension 0 on a :

$$\sum_{i=1}^{m} \deg(B_i) \leq 2 \cdot 10^{100} \omega^2 (\log\omega')^{32}.$$

Notons

$$\gamma := \frac{10^{-97}}{\omega} \frac{(\log\log\omega')^{21}}{(\log\omega')^{30}}.$$

D'après la proposition IV.10, nous avons $\gamma < \hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V)$, en particulier, puisque V est géométriquement irréductible, l'adhérence de Zariski de $V(\gamma)$ (l'ensemble des points de V de hauteur majorée par γ) est de dimension 1, écrivons sa décomposition en composantes irréductibles :

$$\overline{V(\gamma)}^{\mathrm{Zar}} = B_1 \cup \dots \cup B_t.$$

La première partie de l'énoncé est alors une reformulation du théorème I.23 : ce dernier nous dit que les B_i sont des translatés de sous-tores (propres) de $\mathbb{G}_m^3$. On peut supposer qu'il existe un entier $1 \leq m \leq t$ tel que $B_{m+1}, \dots, B_t$ soient de dimension 0 et $B_1, \dots, B_m$ soient de dimension 1 ; dans la suite on ne s'intéressera qu'à ces derniers translatés de sous-tores.

6.1 Paramètres, extrapolation

Notre choix de paramètres est proche de celui du paragraphe 4 dans le cas $n = 3$:

$$\begin{cases} N := 6 \cdot 10^{23} \dfrac{(\log\omega')^7}{(\log\log\omega')^4} \\ T := \left[10N \dfrac{\log\omega'}{\log\log\omega'} \right] \\ L := 3\omega T^2. \end{cases}$$

Fait IV.18 *On a les inégalités suivantes :*

1. $0,92T\log N \geq 5,51N\log(L+1)$ *;*

2. $N \geq 5\cdot 10^{12}\frac{(\log(L+1))^7}{(\log\log(L+1))^4}$ *;*

3. $\frac{10^{-3}T}{L} \geq \frac{1}{10^3}\frac{T\log N}{NL} > \gamma$.

DÉMONSTRATION -

1. Le premier point se traite exactement comme le point 2 du fait IV.11 : notre paramètre N est simplement plus grand qu'au paragraphe 4.
2. Comme $\log(L+1) \leq 3\max\{\log(3\omega),\log(T+1)\}$ nous séparons notre étude en deux cas.
   – Dans le cas où $T+1 \geq 3\omega$, nous avons $T+1 \leq 2T \leq N^{8/7}$, et

$$5\cdot 10^{12}\frac{(\log(L+1))^7}{(\log\log(L+1))^4} \leq 5\cdot 10^{12}\left(\frac{3\cdot 8}{7}\right)^7\frac{(\log N)^7}{(\log\log N)^4} < N\ ,$$

   car, d'après le fait II.18 avec $(a,b)=(7,4)$, on a $N \geq 6\cdot 10^{23}\left(\frac{7e}{4}\right)^4$.
   – Dans le cas contraire, nous avons $\log(L+1) \leq 3\log(3\omega') \leq 6\log\omega'$, ainsi :

$$5\cdot 10^{12}\frac{(\log(L+1))^7}{(\log\log(L+1))^4} \leq 5\cdot 10^{12}\cdot 6^7\frac{(\log\omega')^7}{(\log\log\omega')^4} < N.$$

3. On a

$$\begin{aligned}\frac{10^{-3}T}{L} &\geq \frac{1}{10^3}\frac{T\log N}{NL} = \frac{\log N}{3\cdot 10^3\omega}\cdot\frac{1}{NT}\\ &\geq \frac{1}{3\cdot 10^4\omega}\cdot\frac{1}{N^2}\frac{\log\log\omega'}{\log\omega'}\\ &> \frac{10^{-97}}{\omega}\frac{(\log\log\omega')^{21}}{(\log\omega')^{30}} = \gamma\end{aligned}$$

■

Comme $\frac{10^{-3}T}{L} > \gamma$ (fait IV.18-3), le corollaire IV.2 nous donne un polynôme $F \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]$ non nul de degré $\leq L$ nul sur $V(\gamma)$ avec multiplicité au moins T tel que

$$h(F) \leq 2,51\log(L+1),$$

en particulier le polynôme F est nul sur $\overline{V(\gamma)}^{\mathrm{Zar}} \supseteq \bigcup_{i=1}^m B_i$ avec multiplicité au moins T.

Notons X l'ensemble algébrique défini par notre fonction auxiliaire F. On peut supposer que $B_{r+1},\ldots,B_m$ sont les seuls B_i inclus dans un translaté d'un sous-tore H_i de codimension 1 contenu dans X. Pour tout i dans $\{r+1,\ldots,m\}$, on a l'inclusion $B_i \subseteq H_i\cap V \subseteq X\cap V$.

Ainsi par Bézout on obtient, puisque V n'est pas le translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^3$:

$$\begin{aligned} \deg\left(\bigcup_{i=r+1}^{m} B_i\right) &\leq \deg\left(\bigcup_{i=r+1}^{m} H_i \cap V\right) \\ &\leq \deg(V)\deg(X) \leq \omega L. \end{aligned} \tag{IV.23}$$

Nous nous ramenons ainsi au cas où aucun des B_i n'est inclus dans un translaté d'un sous-tore contenu dans X de codimension 1. Posons

$$\mathcal{C} := \bigcup_{i=1}^{r} B_i \ ,$$

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers contenus dans $[N/2, N]$. Notons T_1 l'ordre minimal d'annulation de F sur $\boldsymbol{\xi}_p \cdot V(\gamma)$, où p parcourt $\mathcal{P}$ et $\boldsymbol{\xi}_p$ parcourt $\ker[p]$. Remarquons de nouveau que, puisque $(1,1,1) \in \ker[p]$, nous avons $T_1 \leq T$.

Proposition IV.19 *Pour tout p dans $\mathcal{P}$ et tout $\boldsymbol{\xi}_p \in \ker[p]$, le polynôme F est nul sur $\boldsymbol{\xi}_p \cdot \mathcal{C}$.*

Démonstration - Soient $p \in \mathcal{P}$ et $\boldsymbol{\xi}_p \in \ker[p]$. D'après le point 3 du fait IV.18, et comme $N/2 \leq p \leq N$, la décroissance de la fonction $x \mapsto \log(x)/x$ nous donne

$$\gamma \leq 0,08\frac{T\log N}{NL} \leq 0,08\frac{T\log p}{pL}. \tag{IV.24}$$

Notons $T_{1,p}$ l'ordre minimal d'annulation de F sur $\boldsymbol{\xi}_p \cdot V(\gamma)$, où $\boldsymbol{\xi}_p$ parcourt $\ker[p]$. La proposition IV.3 nous donne :

$$T_{1,p}\big(1+\log(L+1)\big) > T\frac{\log p}{p} - h(F) - 3\log(L+1) - L\gamma$$

soit avec (IV.24), comme $h(F) \leq 2,51\log(L+1)$

$$T_{1,p}\big(1+\log(L+1)\big) > 0,92T\frac{\log p}{p} - 5,51\log(L+1).$$

En utilisant le fait IV.18, on déduit que $T_{1,p} > 0$, et *a fortiori* F s'annule sur $\boldsymbol{\xi}_p \cdot V(\gamma)$. Pour conclure, il suffit de remarquer que $\boldsymbol{\xi}_p \cdot \mathcal{C} \subseteq \overline{\boldsymbol{\xi}_p \cdot V(\gamma)}^{\mathrm{Zar}}$. ■

6.2 Lemme de zéros

Rappelons que X désigne l'ensemble algébrique défini par notre fonction auxiliaire F. Pour tout $p \in \mathcal{P}$, posons :

$$X_p := \bigcap_{\boldsymbol{\xi}_p \in \ker[p]} \boldsymbol{\xi}_p^{-1} \cdot X.$$

et

$$Y := \operatorname{tr}\left(X, \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_p \in \ker[p]} \boldsymbol{\xi}_p \cdot \mathcal{C}\right).$$

Ensuite, pour tout $p \in \mathcal{P}$ posons :

$$Y_p := \operatorname{tr}\left(X_p, \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_p \in \ker[p]} \boldsymbol{\xi}_p \cdot \mathcal{C}\right).$$

Notons, comme page 90, les inclusions suivantes, pour tout $p \in \mathcal{P}$:

$$\mathcal{C} \subset X_p \subset X \quad \text{et} \quad \mathcal{C} \subset Y_p \subset Y.$$

Pour majorer le degré de $\mathcal{C}$, nous allons montrer que l'un des Y_p est, comme $\mathcal{C}$, de codimension 2, auquel cas le théorème de Bézout nous permettra de conclure.

Cas où tous les Y_p sont de codimension 1

Dans ce cas pour tout $p \in \mathcal{P}$, il existe une composante Z_p de codimension 1 de Y_p et $i_p \in \{1, \ldots, r\}$ tels que Z_p contienne un translaté $\boldsymbol{\xi}_p \cdot B_{i_p}$ de B_{i_p}. Par hypothèse **aucun des B_i n'est inclus dans le translaté d'un sous-tore de X de codimension** 1. En particulier, comme $Z_p \subset X$, aucun des Z_p n'est le translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^3$.

D'après le lemme IV.16, comme Y_p est stable par translation par un point de p-torsion, on a :

$$\bigcup_{p \in \mathcal{P}} \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_p \in \ker[p]} \boldsymbol{\xi}_p \cdot Z_p \subset \bigcup_{p \in \mathcal{P}} Y_p \subset X.$$

Le lemme IV.17 nous donne :

$$\frac{\log N/2}{4,01} |\mathcal{P}| < 5.10^{11} \frac{(\log(L+1))^7}{(\log\log(L+1))^4}.$$

Comme $N \geq 10^{26}$, en utilisant le même argument que celui qui précède le lemme IV.17, on obtient :

$$N < 5 \cdot 10^{12} \frac{(\log(L+1))^7}{(\log\log(L+1))^4}$$

contradiction, par définition de N. Il existe donc un premier p dans $[N/2, N]$ tel que Y_p soit de codimension 2.

Cas où l'un de Y_p est de codimension 2

Supposons ici qu'il existe $p_0 \in \mathcal{P}$ tel que $\mathrm{codim}(Y_{p_0}) = 2$. Notons $\tilde{F}$ le produit des facteurs irréductibles de F s'annulant sur au moins une composante d'un translaté $\boldsymbol{\xi}_p \cdot \mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ (*i.e.* sur un des $\boldsymbol{\xi} \cdot B_i$) ; autrement dit $(\tilde{F})$ est l'idéal de définition de Y. L'ensemble algébrique Y_{p_0} est de codimension 2 ainsi que toutes ses composantes (car celles-ci contiennent toutes par définition une composante d'un translaté de $\mathcal{C}$). En particulier il existe un polynôme G premier à F de la forme :

$$G = \sum_{\boldsymbol{\xi} \in \ker[p_0]} \lambda_{\boldsymbol{\xi}} \tilde{F}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x})$$

tel que $(\tilde{F}, G)$ soit inclu dans l'idéal de définition de Y_{p_0}. Comme $\mathcal{C} \subset Y_{p_0}$ on en déduit alors :

$$\sum_{i=1}^{r} \deg(B_i) = \deg(\mathcal{C}) \leq \deg(Y_{p_0}) \leq \deg(\tilde{F}) \deg(G) \leq (\deg(F))^2 \leq L^2. \tag{IV.25}$$

Conclusion

En reprenant les majorations (IV.23) et (IV.25) on a donc :

$$\sum_{i=1}^{m} \deg(B_i) \leq \omega L + L^2 \leq 10\omega^2 T^4 \leq 10(6 \cdot 10^{24})^4 \omega^2 \frac{(\log \omega')^{32}}{(\log \log \omega')^{20}} ,$$

d'où le résultat souhaité.

Bibliographie

[AD99] F. Amoroso et S. David – « Le problème de Lehmer en dimension supérieure », *J. Reine Angew. Math.* **513** (1999), p. 145–179.

[AD00a] — , « Minoration de la hauteur normalisée des hypersurfaces », *Acta Arithmetica* **92** (2000), no. 4, p. 339–366.

[AD00b] F. Amoroso et R. Dvornicich – « A lower bound for the height in abelian extension », *Journal of Number Theory* **80** (2000), p. 260–272.

[AD01] F. Amoroso et S. David – « Densité des points à coordonnées multiplicativement indépendantes », *The Ramanujan Journal* **5** (2001), p. 237–246.

[AD03] — , « Minoration de la hauteur normalisée dans un tore », *Journal of the Inst. of Math. Jussieu* **2** (2003), no. 3, p. 335–381.

[AD04] — , « Distribution des points de petite hauteur dans les groupes multiplicatifs », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci.* **III** (2004), no. 2, p. 325–348.

[AD05] — , « Points de petite hauteur sur une sous-variété d'un tore », *Compositio math.* (2005), à paraître.

[Amo04] F. Amoroso – « Small points on subvarieties of algebraic tori : results and methods », *Riv. Mat. Univ. Parma* **7** (2004), no. 3, p. 1–31.

[AZ00] F. Amoroso et U. Zannier – « A relative Dobrowolski lower bound over abelian extensions », *Ann. Scuola Nom. Sup. Pisa* **29** (2000), p. 711–727.

[Bil] Y. Bilu – Math. Reviews MR 2000g :11058.

[Boy80] D. Boyd – « Kronecker's theorem and Lehmer's problem for polynomials in several variables », *Journal of Number Theory* **13** (1980), p. 116–121.

[BV83] E. Bombieri et J. Vaaler – « On Siegel's lemma », *Inv. math.* **73** (1983), p. 11–32.

[BZ95] E. Bombieri et U. Zannier – « Algebraic points on subvarieties of $\mathbb{G}_m^n$ », *International Mathematics Research Notices* **7** (1995), p. 333–347.

[CF67] J. W. S. Cassels et A. Fröhlich – *Algebraic number theory, proceeding of an instructional conference organized by the London mathematical society*, Academic Press, London-New-york, 1967.

[Cha88] M. Chardin – « Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique », *Bul. Soc. Math. France* **117** (1988), p. 305–318.

[Dav] S. David – « On the height of subvarieties of groups varieties », *The Ramanujan Math. Journal*, à paraître.

[DG70] M. Demazure et P. Gabriel – *Groupes algébriques*, Masson, 1970.

[Dob79] E. Dobrowolski – « On a question of Lehmer and the number of irreductible factors of a polynomial », *Acta Arith.* **34** (1979), p. 391–401.

[DP99] S. David et P. Philippon – « Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores », *Scuola Norm. Sup. Sci.* **28** (1999), no. 4, p. 489–543.

[Fal91] G. Faltings – « Diophantine approximation on abelian varieties », *Ann. of Math.* **133** (1991), no. 2.

[Hin88] M. Hindry – « Autour d'une conjecture de Serge Lang », *Invent. math.* **94** (1988), p. 575–603.

[Law77] W. Lawton – « A generalization of a theorem of Kronecker », *J. Science Faculty of Chiangmai University* **4** (1977), p. 15–23.

[Leh33] D. H. Lehmer – « Factorization of certain cyclotomic functions », *Ann. Math.* **34** (1933), no. 2, p. 461–479.

[Phi91] P. Philippon – « Sur des hauteurs alternatives I », *Math. Ann.* **289** (1991), p. 255–283.

[Pon01] C. Pontreau – « Une généralisation du théorème de Dobrowolski pour les hypersurfaces », mémoire de DEA, Université de Caen, 2001.

[Pon05a] — , « Geometric lower bounds for the normalized height of hypersurfaces », prépublication LMNO, Université de Caen, 2005.

[Pon05b] — , « Minoration effective de la hauteur des points d'une courbe de $\mathbb{G}_m^2$ définie sur $\mathbb{Q}$ », *Acta Arith.* **120** (2005), no. 1, p. 1–26.

[Pon05c] — , « Points de petite hauteur d'une surface », en préparation, 2005.

[RS62] J. B. Rosser et L. Schoenfeld – « Approximate formulas for some functions of prime numbers », *Ill. J. Math.* **6** (1962), p. 64–94.

[Sch73] A. Schinzel – « On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic number », *Acta Arithmetica* **24** (1973), p. 385–399.

[Sch96] W. M. Schmidt – « Heights of points on subvarieties of $\mathbb{G}_m^n$ », *Number theory 93-94* (S. David, éd.), Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 235, Cambridge University Press., 1996, p. 157–187.

[Ser68] J. P. Serre – *Corps locaux*, Hermann, 1968.

[Smy71] C. J. Smyth – « On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer », *Bull. London Math. Soc.* **3** (1971), p. 169–175.

[Smy81] — , « A Kronecker-type theorem for complex polynomials in several variables », *Canad. Math. Bull.* **24** (1981), p. 447–452, Errata, ibid. 25 (1982).

[SV90] T. Struppeck et J. Vaaler – « Inequalities for heights of algebraic subspaces and the Thue-Siegel principle », *Analytic Number Theory, proceedings of a conference in honor of Paul Bateman, Progress in Math.* (Birkhäuser, éd.), vol. 85, 1990, p. 494–527.

[Vou96] P. Voutier – « An effective lower bound for the height of algebraic numbers », *Acta Arith.* **74** (1996), p. 81–95.

[Zan01] U. Zannier – « Communication personnelle », 2001.

[Zha92] S. Zhang – « Positive line bundles on arithmetic surfaces », *Ann. of Math.* **136** (1992), p. 569–587.

[Zha95] — , « Positive line bundles on arithmetic varieties », *J. Amer. Math. Soc* **8** (1995), p. 187–221.