



**HAL**  
open science

# Bruit thermique et effets de la pression de radiation dans une cavité optique de grande finesse

Pierre-François Cohadon

► **To cite this version:**

Pierre-François Cohadon. Bruit thermique et effets de la pression de radiation dans une cavité optique de grande finesse. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2000. Français. NNT: . tel-00011772

**HAL Id: tel-00011772**

**<https://theses.hal.science/tel-00011772>**

Submitted on 7 Mar 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**LABORATOIRE  
KASTLER BROSSEL**



**Thèse de doctorat de l'Université Paris 6**

**Spécialité : Physique Quantique**

présentée par

**Pierre-François Cohadon**

Pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet :

**Bruit thermique et effets de la pression de radiation  
dans une cavité optique de grande finesse.**

Soutenue le 25 janvier 2000 devant le jury composé de :

M. Alain BRILLET

M. Massimo CERDONIO

Rapporteur

M. Philippe GRANGIER

Rapporteur

M. Antoine HEIDMANN

Directeur de thèse

M. Michel PINARD

M. Philippe TOURENC



**LABORATOIRE  
KASTLER BROSSEL**



**Thèse de doctorat de l'Université Paris 6**

**Spécialité : Physique Quantique**

présentée par

**Pierre-François Cohadon**

Pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet :

**Bruit thermique et effets de la pression de radiation  
dans une cavité optique de grande finesse.**

Soutenue le 25 janvier 2000 devant le jury composé de :

M. Alain BRILLET

M. Massimo CERDONIO

Rapporteur

M. Philippe GRANGIER

Rapporteur

M. Antoine HEIDMANN

Directeur de thèse

M. Michel PINARD

M. Philippe TOURENC

*Ce travail a été réalisé de septembre 1996 à janvier 2000 au Laboratoire Kastler Brossel de l'Ecole Normale Supérieure et de l'Université Pierre et Marie. Je remercie Michèle Leduc et Elisabeth Giacobino, ses directrices successives, de m'y avoir accueilli, ce qui m'a permis de profiter de conditions idéales pour débiter dans la recherche.*

*Après une première année de thèse financée par l'ENS Lyon, j'ai eu la chance d'obtenir un poste d'agrégé-préparateur au département de physique de l'ENS. Je remercie Serge Haroche, directeur du département, et Olivier Abillon, directeur des études, pour ce financement de ma thèse, et pour m'avoir permis d'assouvir mon goût pour l'enseignement, dans des conditions idéales là encore.*

*Deux années se sont écoulées entre le DEA de Physique Quantique et le début de cette thèse. Il fallait bien cela pour trouver non pas un, mais deux directeurs de thèse. Antoine Heidmann et Michel Pinard ont dirigé cette thèse avec une extraordinaire disponibilité. Il serait vain d'essayer d'énumérer tout ce qu'ils m'ont appris pendant ces trois dernières années, et de façon générale tout ce que je leur dois. Je les remercie également de la confiance et de la liberté qu'ils m'ont accordées quant à l'organisation de mon travail. Tristan, tu es en de bonnes mains ! Merci enfin de leur disponibilité lors de la rédaction « express » de cette thèse : j'espère que Xlab ne me tiendra pas rigueur des infidélités d'Antoine à cette occasion et continuera à accepter de passer mes commandes.*

*Yassine Hadjar a commencé sa thèse dans la même équipe deux ans avant moi. Si nous n'avons que rarement eu l'occasion de travailler directement ensemble, j'ai eu maintes fois l'occasion d'apprécier la qualité de son travail, notamment en utilisant quotidiennement la source laser d'une incroyable fiabilité qu'il m'a « léguée ». Merci Yassine pour tout ce travail sans lequel cette thèse n'aurait pu se dérouler dans d'aussi bonnes conditions.*

*Carl Aminoff était visiteur dans notre équipe au début de ma thèse. Je me souviens avoir commencé ce travail de « Physique Quantique » en bricolant avec lui toutes sortes de matériaux aux propriétés très peu quantiques : plexiglas, caoutchoucs de toutes sortes, mousse au plomb, sans parler d'une caisse en bois d'un mètre-cube... J'ai été très heureux de le retrouver apparemment en bonne santé à une conférence en Italie en octobre 1998. La maladie a hélas rapidement repris le dessus. Il nous manquera.*

*Je remercie l'ensemble des membres du jury de l'intérêt qu'ils ont ainsi montré pour ce travail. Philippe Grangier et Massimo Cerdonio ont accepté la charge de rapporteur. Merci à eux deux pour leurs remarques constructives sur le manuscrit. Merci également à Massimo Cerdonio d'avoir fait l'effort de lire ce gros manuscrit en français. Merci à Alain Brillet et Philippe Tournenc de m'avoir consacré un peu de leur temps, malgré les multiples charges qui pèsent sur eux.*

*J'ai eu un immense plaisir à travailler à l'antenne « Jussieu » du laboratoire. Merci à Claude Fabre qui est à l'origine de ma venue au laboratoire, tant par ses cours au DEA de Physique Quantique que par ses bonnes relations avec la DGA. Merci à tous ceux qui ont successivement partagé avec moi le « Triangle des Bermudes » : Jean-Pierre Plaut, Fabien Lemarchand, Paulo Souto-Ribeiro, Laurent Hilico, Francesca Grassia, Nicolas Treps et depuis peu Cyriaque Genet et Tristan Briant. Merci tout spécialement à Jean-Pierre qui pendant toutes ses années a répondu au téléphone avant d'arpenter patiemment les couloirs à ma recherche, et à Nicolas et Cyriaque pour avoir conjointement pris en charge la décoration du bureau.*

*Je remercie tous les membres et visiteurs successifs de l'équipe « Optique Quantique » pour les conseils, le matériel prêté, toutes les discussions, scientifiques ou non, qui ont émaillé ces années et leur amitié : Catherine Schwob, Agnès Maître, Thomas Coudreau, Alberto Bramati, Cédric Bégon, Gaëtan Messin, Laurent Vernac, Antonio Zelaquett-Khoury, Matthias Vaupel, Jean-Philippe Karr, Isabelle Maurin, Laurent Longchambon...*

*Un merci tout particulier à Jean-Pierre Hermier qui, non content d'être désormais le seul interlocuteur footballistique du laboratoire, a assuré un très efficace soutien informatique et a accepté d'endosser le rôle ingrat de « dénicheur de fautes de frappe » de ce manuscrit. Merci enfin pour la partie de « baby-foot » quotidienne. Cela dit, JP, si tu m'avais laissé gagner, ça m'aurait encore plus détendu...*

*Je remercie Astrid Lambrecht, Jean-Michel Courty et Serge Reynaud des discussions et des (trop rares !) réunions que nous avons tenues sur notre expérience. Puisse cette collaboration informelle se prolonger et s'étendre à l'avenir.*

*Merci également à François Biraben et François Nez pour leurs conseils sur le laser titane-saphir, leurs réponses à toutes sortes de questions d'optique, et tout le matériel prêté !*

*Merci à François Bondu et Jean-Yves Vinet pour nous avoir fait profiter de leur programme CYPRES de calcul des modes des miroirs plan-plan. Merci également à François pour m'avoir transmis les courbes de la figure 38, et pour les explications et les commentaires qu'il m'a donnés à Aspen sur les différents aspects des interféromètres.*

*Le Service des Matériaux Avancés de VIRGO à l'IPN de Lyon, dirigé par Jean-Marie Mackowski, a réalisé le traitement hautement réfléchissant et à faibles pertes de nos miroirs mobiles. Ces miroirs ont été caractérisés par l'équipe de Claude Boccara à l'ESPCI. Merci à eux sans qui ces expériences n'auraient pu avoir lieu.*

*Ce travail expérimental doit bien sûr énormément au travail des différents services techniques. Je remercie donc Francis Tréhin, et avec lui tout le service cryogénique de la fac dirigé par Francis Buch, pour son aide sur le cryostat.*

*Merci à Bernard Rodriguez, notamment pour l'énorme travail effectué sur la mécanique du cryostat. Merci aussi à Alexis Poizat et Pascal Travers pour leurs conseils sur les pièces « faciles », et leur travail sur les « dures » (il y en a eu beaucoup).*

*Je remercie Mohammed Boujrad, Philippe Pace et Jean-Pierre Okpisz pour les montages électroniques en tout genre dont nous avons eu besoin et qu'ils ont réalisés : amplificateurs haute tension, filtres électroniques, lambdamètre, ...*

*Merci également à eux tous pour avoir pris un peu de leur temps pour me dépanner sur des pièces mécaniques ou des montages électroniques destinés à l'enseignement.*

*Merci à nos secrétaires, Blandine Moutiers, Karine Gautier et Monique Bonnamy, pour leur efficacité, leur gentillesse, et pour m'avoir envoyé successivement au soleil et à la neige. J'attends avec impatience le lieu de ma prochaine mission !*

*Merci enfin à ma famille et à mes amis pour m'avoir soutenu et agréablement changé les idées pendant ces trois ans. Antoine et Michel vous diront qu'ils m'ont bien aidé à gérer l'inévitable stress de la rédaction et de la préparation de la soutenance.*

*Mon arrivée au laboratoire comme scientifique du contingent a coïncidé avec mon installation à Paris avec Valérie : elle a donc tout connu de cette thèse, de la recherche du sujet à la soutenance, en passant par les journées à essayer de faire fonctionner le lambdamètre avec un sèche-cheveux et les pannes du laser de pompe. Merci pour avoir toujours supporté les variations d'humeur correspondantes et pour s'être intéressée pendant plusieurs années à la mesure interférométrique de petits déplacements ...*

*Il m'est impossible de terminer ces remerciements sans mentionner les rares personnes que je tiens à ne pas remercier : la société Newport pour s'être trompé lors d'une livraison, ce qui nous a fait perdre un bon mois à essayer de régler une cavité plan-plan de finesse 50000, Maris-Delfour qui n'était pas obligée de finir de polir ses miroirs au Scotch-Brite, et TBT qui n'a apparemment pas compris que l'intérêt d'un cryostat avec accès optique, c'était de pouvoir faire rentrer de la lumière dedans...*

---

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Le couplage optomécanique</b>	<b>7</b>
2.1	Cavité Fabry-Perot à miroir mobile . . . . .	7
2.1.1	Présentation du système . . . . .	7
2.1.2	Evolution du champ dans la cavité . . . . .	9
2.1.3	Mouvement du miroir mobile . . . . .	11
2.1.4	Etat stationnaire . . . . .	12
2.1.5	Effet de la pression de radiation : bistabilité . . . . .	13
2.2	Mesure de petits déplacements . . . . .	15
2.2.1	Présentation de quelques dispositifs interférométriques . . . . .	16
2.2.2	Limitations de la sensibilité . . . . .	21
2.2.3	Sensibilité optimale de la mesure . . . . .	24
2.3	Limite Quantique Standard . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Le montage expérimental</b>	<b>37</b>
3.1	La source laser . . . . .	38
3.1.1	Le laser titane-saphir . . . . .	39
3.1.2	Stabilisation en fréquence . . . . .	42
3.1.3	Stabilisation en intensité . . . . .	45
3.1.4	Filtrage spatial . . . . .	46
3.1.5	Asservissement sur la cavité à miroir mobile . . . . .	49
3.1.6	Autres éléments de la source laser . . . . .	51
3.2	La cavité à miroir mobile . . . . .	53
3.2.1	Caractéristiques générales de la cavité à miroir mobile . . . . .	53
3.2.2	Présentation des différentes cavités . . . . .	56
3.2.3	Alignement et adaptation de la cavité . . . . .	57
3.2.4	Mesure des caractéristiques optiques de la cavité . . . . .	59
3.3	La détection homodyne . . . . .	64
3.3.1	Principe de la détection . . . . .	64
3.3.2	Réalisation expérimentale . . . . .	68
3.3.3	Détection équilibrée . . . . .	69
3.3.4	L'oscillateur local . . . . .	75
3.4	Calibration de la sensibilité de l'expérience . . . . .	83

3.4.1	Etalonnage de la modulation de fréquence . . . . .	84
3.4.2	Calibration de la cavité de grande finesse . . . . .	87
3.4.3	Détermination de la sensibilité . . . . .	89
3.4.4	Effet du bruit de fréquence . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Observation des petits déplacements d'un miroir</b>	<b>93</b>
4.1	Expériences déjà réalisées . . . . .	93
4.1.1	Système pendulaire . . . . .	93
4.1.2	Oscillateur de torsion . . . . .	94
4.1.3	Autres expériences . . . . .	96
4.2	Couplage optomécanique avec un résonateur mécanique . . . . .	97
4.2.1	Equation des ondes acoustiques. Modes propres d'un résonateur . . . . .	99
4.2.2	Mouvements du résonateur . . . . .	100
4.2.3	Effet du mouvement du résonateur sur le champ . . . . .	105
4.2.4	Susceptibilité mécanique effective . . . . .	107
4.3	Géométrie des résonateurs . . . . .	109
4.3.1	Miroir plan-convexe . . . . .	109
4.3.2	Miroir plan-plan . . . . .	113
4.4	Observation des modes acoustiques du résonateur . . . . .	116
4.4.1	Observation du mouvement brownien . . . . .	116
4.4.2	Etude de la réponse mécanique du résonateur . . . . .	118
4.5	Etude du mode fondamental d'un miroir plan-convexe . . . . .	124
4.5.1	Etude du bruit thermique . . . . .	124
4.5.2	Etude de la réponse mécanique du miroir . . . . .	126
4.5.3	Reproduction de l'article "High-sensitivity optical measurement of mechanical Brownian motion" . . . . .	129
4.6	Etude des modes d'un miroir plan-plan . . . . .	137
4.6.1	Etude du spectre de bruit thermique . . . . .	137
4.6.2	Etude détaillée des modes . . . . .	139
4.7	Comparaison des bruits thermiques à basse fréquence d'un miroir plan- convexe et d'un miroir plan-plan . . . . .	142
4.7.1	Evaluation du bruit thermique à basse fréquence . . . . .	143
4.7.2	Reproduction de l'article "Thermal noise of a plano-convex mirror" . . . . .	147
<b>5</b>	<b>Refroidissement d'un miroir par pression de radiation</b>	<b>155</b>
5.1	Introduction et motivations . . . . .	155

---

5.1.1	Température thermodynamique. Conséquences du théorème fluctuation-dissipation . . . . .	156
5.1.2	Méthodes de réduction du bruit thermique . . . . .	158
5.2	Refroidissement à résonance par pression de radiation . . . . .	164
5.2.1	Etude théorique pour un seul mode . . . . .	165
5.2.2	Procédure expérimentale . . . . .	168
5.2.3	Filtre passe-bande électronique . . . . .	170
5.2.4	Observation du refroidissement . . . . .	174
5.2.5	Chauffage du miroir . . . . .	176
5.2.6	Evolution du spectre de bruit avec le gain . . . . .	178
5.3	Refroidissement à basse fréquence . . . . .	186
5.3.1	Refroidissement en régime quasi-statique . . . . .	187
5.3.2	Choix de la fréquence et réponse mécanique . . . . .	188
5.3.3	Résultats expérimentaux . . . . .	190
5.4	Reproduction de l'article "Cooling of a mirror by radiation pressure" . .	192
5.5	Prolongements . . . . .	197
5.5.1	Limite quantique du refroidissement . . . . .	197
5.5.2	Refroidissement du miroir par la cavité . . . . .	201
5.5.3	Applications du refroidissement aux interféromètres gravitationnels . . . . .	204
6	Conclusion	207
	Bibliographie	211





# 1 Introduction

Les mesures optiques ont atteint à l'heure actuelle une très grande sensibilité. Des percées comme l'apparition du laser au début des années soixante, alliées à des progrès technologiques dans des domaines aussi variés que l'électronique (pour la réalisation d'amplificateurs à faible bruit) ou la physique des matériaux (pour la réalisation de miroirs à très faibles pertes) ont permis de réduire considérablement les sources de bruit classique. De nombreuses mesures sont aujourd'hui essentiellement limitées par le bruit quantique, ou bruit de photon, lié aux fluctuations quantiques de la lumière. Si la notion de fluctuations quantiques est connue depuis la fin des années vingt et les premières heures de la physique quantique [1], il a fallu attendre les années soixante-dix et la maîtrise des sources laser pour que ces fluctuations constituent pour le physicien une limitation pratique de la sensibilité de mesures de grande précision et deviennent par conséquent un objet d'étude.

On a assisté lors des quinze dernières années à des progrès expérimentaux spectaculaires sur la mesure et la réduction de ces fluctuations. On sait maintenant réaliser des états comprimés du champ [2-4], pour lesquels les fluctuations d'une quadrature du champ sont inférieures aux fluctuations quantiques des états classiques de la lumière que sont les états cohérents. On est ainsi parvenu à améliorer significativement la sensibilité d'une mesure limitée par le bruit quantique, en mesurant une grandeur reliée seulement à la quadrature comprimée [5,6].

Un des domaines importants de mesures de très grande sensibilité concerne la détection des ondes gravitationnelles, avec des barres de Weber [7-9] ou des détecteurs interférométriques [10,11]. Ces ondes, prédites par la théorie de la Relativité Générale, sont produites par des événements astrophysiques tels que l'explosion d'une supernova. Elles induisent sur Terre une déformation de la métrique de l'espace-temps qui pourrait être détectée optiquement, en déterminant avec une très grande précision la distance optique entre deux miroirs sur lesquels se réfléchit un faisceau lumineux. Cependant, les effets induits sur Terre par le passage d'une onde gravitationnelle sont très petits,

et on utilise en pratique un dispositif interférométrique avec des bras de plusieurs kilomètres de long [12, 13]. Les interféromètres actuellement en cours de construction fonctionneront à température ambiante. De ce fait, le bruit thermique des miroirs limite la sensibilité de ces appareils sur la plus grande partie de leur zone d'analyse spectrale. Le bruit de photon du faisceau lumineux n'est important que pour des fréquences d'analyse supérieures au kilohertz.

Le bruit de photon du faisceau lumineux dont on a parlé jusqu'à présent n'est qu'un aspect des limites quantiques dans les mesures interférométriques. Un deuxième aspect est lié à la pression de radiation exercée par la lumière sur les miroirs de l'interféromètre [14–16]. Cette force dépend de l'intensité du faisceau lumineux et présente comme elle des fluctuations quantiques. Pour de fortes intensités, le miroir devient sensible à ces fluctuations qui se traduisent par des fluctuations de position du miroir et donc par une dégradation de la précision de la mesure. Il existe ainsi deux sources de bruit liées à la nature quantique de la lumière : le bruit de photon du faisceau lumineux, dont l'amplitude relative diminue quand l'intensité augmente, et le bruit de pression de radiation, qui est proportionnel à cette intensité. La sensibilité optimale d'une mesure interférométrique résulte donc d'un compromis entre ces deux effets, ce qui mène à une *Limite Quantique Standard* [14] pour une mesure de position. Les interféromètres actuellement réalisés opéreront bien au-dessus de cette limite [12], mais elle pourrait jouer un rôle important si on parvenait à diminuer le bruit thermique des miroirs et à augmenter significativement la puissance lumineuse dans l'interféromètre.

L'étude de cette Limite Quantique Standard, et des moyens de la dépasser dans les détecteurs interférométriques d'ondes gravitationnelles, ont d'ailleurs motivé les premiers travaux théoriques sur les états comprimés, à la fin des années soixante-dix. Il a notamment été montré que l'utilisation d'états comprimés permettrait d'atteindre la Limite Quantique Standard pour des intensités beaucoup plus faibles [14, 15], et même d'obtenir une sensibilité de la mesure meilleure que celle imposée par cette limite [16]. Malgré l'abondance de travaux théoriques sur ce sujet, aucune mise en évidence expérimentale de cette limite n'a été réalisée jusqu'à présent : les fluctuations quantiques de la pression de radiation ne déplacent que très peu un objet macroscopique tel qu'un miroir.

La première génération d'interféromètres gravitationnels aura néanmoins sa sensibilité limitée essentiellement par le bruit thermique des miroirs. Dans ces appareils, les miroirs sont suspendus de façon à les isoler du bruit sismique terrestre. Leur bruit thermique peut ainsi se décomposer entre l'agitation thermique pendulaire des suspensions, qui correspond au mouvement du centre de masse des miroirs, et le bruit thermique

---

interne associé à l'excitation des modes acoustiques du substrat des miroirs [17]. La sensibilité de la détection est limitée par le bruit pendulaire à basse fréquence et par le bruit thermique interne aux fréquences intermédiaires [12].

Les fréquences de résonance mécanique des suspensions et des miroirs sont situées en dehors de la zone d'analyse spectrale des détecteurs interférométriques. C'est donc le bruit de fond thermique, situé loin des résonances, qui limite la sensibilité de ces appareils. Ce bruit est estimé à l'heure actuelle en combinant des mesures des facteurs de qualité des résonances mécaniques avec l'application du théorème fluctuation-dissipation [18–20]. Les phénomènes de relaxation dans les matériaux comme la silice fondue qui constituent les fils de suspension et les miroirs étant très mal connus, la déduction du bruit thermique hors de résonance à partir de ces mesures est délicate. Une mesure directe du bruit de fond thermique paraît donc nécessaire, d'autant plus que son influence sur le faisceau lumineux qui se propage dans l'interféromètre dépend de nombreux paramètres mécaniques, géométriques et optiques de l'interféromètre [21–23].

Ainsi l'augmentation des facteurs de qualité mécaniques diminue le bruit thermique dans la zone d'analyse spectrale de l'interféromètre. On est parvenu aujourd'hui à être limité seulement par les pertes internes du matériau, en limitant par exemple les pertes liées au système de fixation des miroirs aux fils de suspension [24]. Augmenter encore la sensibilité exige de trouver de nouveaux matériaux aux propriétés mécaniques plus favorables.

De même, des travaux théoriques sur l'adaptation spatiale entre le faisceau lumineux dans l'interféromètre et les modes acoustiques des miroirs ont montré qu'il est préférable d'utiliser des miroirs de géométrie cylindrique en forme de tube plutôt qu'en forme de gong [21]. Des techniques cryogéniques sont également envisagées pour réduire le bruit thermique en abaissant la température du miroir [25]. Enfin, nous présenterons dans ce mémoire une méthode de contrôle actif du bruit thermique qui permet de réduire la température *effective* des miroirs.

Pour mener une étude exhaustive de ce bruit thermique, il est donc important de développer un dispositif expérimental capable de mesurer de très petits déplacements du miroir. Un tel dispositif permettrait par ailleurs de mettre en évidence les effets quantiques de la pression de radiation, tels que la Limite Quantique Standard. Une technique prometteuse consiste à utiliser une cavité Fabry-Perot de grande finesse à une seule entrée-sortie, dont l'un des miroirs est susceptible de se déplacer [26–29]. La grande finesse de la cavité rend la phase du faisceau réfléchi extrêmement sensible à de très petits déplacements du miroir mobile. Nous présentons dans ce mémoire la réalisation et la caractérisation d'un tel dispositif. L'objectif de notre montage

expérimental est la mise en évidence des effets quantiques de la pression de radiation exercée par la lumière sur le miroir. On présente ici un premier pas dans cette direction, puisque l'extrême sensibilité de notre dispositif aux déplacements du miroir est illustrée par l'observation du mouvement brownien du miroir mobile [29]. Nous démontrons ensuite expérimentalement que la pression de radiation d'un faisceau lumineux peut être utilisée pour réduire le bruit thermique d'un miroir, tant autour de sa fréquence de résonance mécanique qu'à basse fréquence [30].

Le chapitre 2 est consacré à une présentation générale des effets qui résultent du *couplage optomécanique* entre le champ intracavité d'une cavité Fabry-Perot de grande finesse et le mouvement du miroir mobile dû à la pression de radiation qu'exerce le champ sur le miroir. Après une présentation du système couplé champ-mouvement du miroir, nous présentons différents dispositifs interférométriques de petits déplacements, ainsi que les différents bruits qui peuvent en limiter la sensibilité. Nous établissons ensuite les conditions de fonctionnement nécessaires pour atteindre la Limite Quantique Standard, qui est l'un des objectifs de notre expérience.

Le dispositif interférométrique qui permet de mesurer de très petits déplacements constitue le cœur de notre montage expérimental, et sera présenté dans le chapitre 3. Il est essentiellement composé de trois parties : la source laser, la cavité à miroir mobile et le dispositif de détection homodyne. La source laser est un laser titane-saphir stabilisé en fréquence, en intensité, et filtré spatialement. La cavité à miroir mobile est une cavité linéaire de grande finesse à une seule entrée-sortie. Enfin, le système de détection homodyne est basé sur un mélange entre le faisceau réfléchi par la cavité, dont on veut analyser les fluctuations, et un faisceau de référence.

Dans le chapitre 4, nous expliquons comment on réalise en pratique un miroir mobile : le mouvement résulte de l'excitation des modes acoustiques internes du substrat sur lequel est déposé le traitement réfléchissant. Nous présentons ensuite une première caractérisation du couplage optomécanique réalisée en observant le mouvement brownien de deux miroirs mobiles différents : un miroir plan-convexe et un miroir de géométrie cylindrique dont les faces sont planes. Enfin, nous tirons les premiers enseignements de ces expériences en proposant de réduire le bruit thermique interne des miroirs dans un interféromètre gravitationnel en modifiant la forme des miroirs : nous montrons que l'utilisation de miroirs de géométrie plan-convexe permettrait de réduire d'un facteur 10 l'influence du bruit thermique interne sur l'interféromètre.

Le chapitre 5 est consacré au refroidissement d'un miroir par la pression de radiation. Nous utilisons le dispositif interférométrique de mesure du mouvement brownien présenté dans le chapitre 4 pour moduler l'intensité d'un second faisceau laser,

de façon à appliquer une force qui s'oppose au mouvement d'agitation thermique du miroir. La démonstration expérimentale de cet effet est effectuée aussi bien au voisinage d'une résonance mécanique du miroir qu'à basse fréquence. Nous montrons ainsi qu'il est possible de réaliser un contrôle actif du bruit thermique et de réduire l'amplitude de ce bruit par un facteur 10.

## 2 Le couplage optomécanique

Ce chapitre est consacré à l'exposé des caractéristiques essentielles du couplage optomécanique entre un faisceau lumineux et un miroir susceptible de se déplacer. Nous décrivons plus particulièrement les conséquences de ce couplage pour une cavité Fabry-Perot dont un miroir est mobile, et nous montrons les capacités d'un tel système pour mesurer de très petits déplacements du miroir mobile.

### 2.1 Cavité Fabry-Perot à miroir mobile

#### 2.1.1 Présentation du système

On va s'intéresser dans tout ce mémoire au système présenté sur la figure 1, constitué d'une cavité Fabry-Perot dont un des miroirs est mobile. L'un des miroirs de la cavité, par exemple le miroir mobile, est supposé totalement réfléchissant. On obtient ainsi une cavité à une seule entrée-sortie : la lumière pénètre dans la cavité par le miroir d'entrée (également appelé coupleur), y effectue un certain nombre d'aller-retours et ressort par le même miroir. Si on néglige les pertes (absorption et diffusion) de la cavité, tous les photons finissent par ressortir : l'intensité moyenne réfléchie est donc égale à l'intensité moyenne incidente, et ceci quelle que soit la longueur de la cavité.

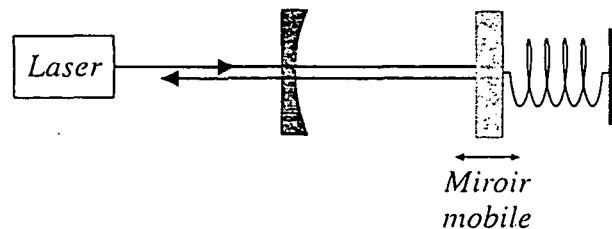


Fig. 1: Cavité Fabry-Perot à miroir mobile avec une seule entrée-sortie.

En revanche, l'intensité intracavité présente des résonances. Le champ à l'intérieur de la cavité est en effet la somme d'une infinité d'ondes qui interfèrent de façon constructive lorsque la lumière se déphase d'un multiple de  $2\pi$  lors d'un aller-retour dans la cavité, c'est-à-dire quand la longueur de la cavité est un multiple entier de la demi-longueur d'onde  $\lambda/2$  du faisceau laser incident. Lorsqu'on s'écarte de cette condition de résonance, en modifiant la longueur d'onde  $\lambda$  ou en déplaçant le miroir mobile, l'intensité intracavité décrit un pic d'Airy, qui a la forme d'une lorentzienne si le coupleur d'entrée de la cavité a une haute réflectivité (voir la figure 2).

La largeur de cette lorentzienne est reliée à une des grandeurs caractéristiques de la cavité : sa finesse  $\mathcal{F}$ . Plus précisément,  $\mathcal{F}$  correspond au rapport entre la distance  $\lambda/2$  entre deux résonances et la largeur à mi-hauteur  $\lambda/2\mathcal{F}$  d'une résonance. La finesse ne dépend que de la transmission et des pertes des deux miroirs. Elle détermine aussi le rapport entre l'intensité intracavité moyenne  $\bar{I}$  à résonance et l'intensité moyenne incidente  $\bar{I}^{in}$  :

$$\bar{I} = \frac{2}{\pi} \mathcal{F} \bar{I}^{in}. \quad (2.1)$$

Cette amplification de  $\bar{I}$  par rapport à  $\bar{I}^{in}$  d'un facteur de l'ordre de  $\mathcal{F}$  permet d'interpréter  $\mathcal{F}$  comme le nombre moyen d'aller-retours qu'effectue la lumière dans la cavité avant de sortir.

Pour une cavité sans perte, l'intensité moyenne réfléchie est égale à l'intensité moyenne incidente, et ce quel que soit le désaccord de la cavité par rapport à la résonance. La phase du faisceau réfléchi subit en revanche une variation qui dépend de la longueur de la cavité, et donc de la position du miroir mobile. La figure 2 montre que cette variation est de l'ordre de  $2\pi$  pour un déplacement du miroir de part et d'autre d'une résonance d'une quantité égale à la largeur  $\lambda/2\mathcal{F}$  de la résonance. La pente de la courbe est maximale à résonance où elle vaut  $8\mathcal{F}/\lambda$ . Un petit déplacement  $\delta x$  du miroir mobile autour de la résonance produit donc un déphasage du faisceau réfléchi égal à :

$$\delta\varphi = 8\mathcal{F} \frac{\delta x}{\lambda}. \quad (2.2)$$

Notons que le même effet de déphasage du champ existe lorsqu'un faisceau lumineux se réfléchit sur un seul miroir au lieu d'entrer dans une cavité. Cependant,



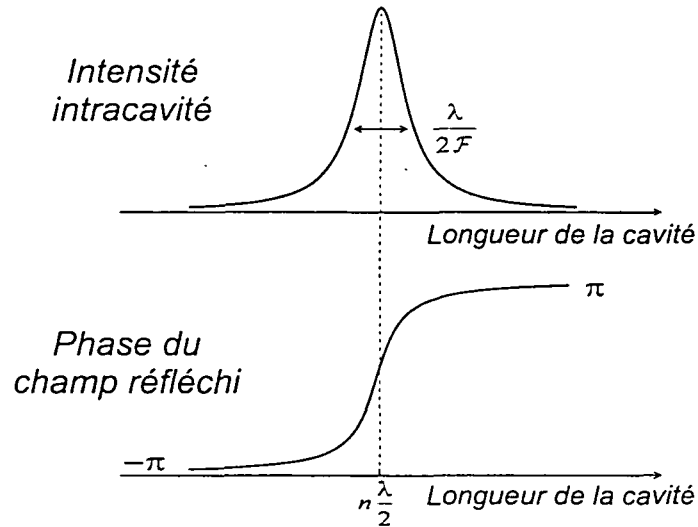


Fig. 2: Variations de l'intensité du champ intracavité et de la phase du champ réfléchi en fonction de la longueur de la cavité.

dans ce cas, un déplacement  $\delta x$  du miroir mobile produit seulement un déphasage de  $4\pi\delta x/\lambda$ . Les nombreux aller-retours de la lumière dans la cavité augmentent donc la sensibilité de la phase à un déplacement du miroir mobile par un facteur de l'ordre de la finesse de la cavité  $\mathcal{F}$ . Cette grande sensibilité de la phase du champ réfléchi aux déplacements du miroir explique les possibilités de ce dispositif pour mesurer des petits déplacements, qu'ils soient dus à l'agitation thermique ou aux effets de pression de radiation du champ dans la cavité. Nous établissons maintenant les équations de base décrivant le couplage optomécanique entre le miroir mobile et le champ dans la cavité.

### 2.1.2 Evolution du champ dans la cavité

On suppose que le miroir d'entrée a une très grande réflectivité  $r = 1 - \gamma$ , avec  $\gamma \ll 1$ . On néglige les pertes au niveau des deux miroirs. Le miroir d'entrée a alors une transmission  $t$  égale à  $\sqrt{2\gamma}$  et la finesse de la cavité vaut  $\mathcal{F} = \pi/\gamma$ .

Nous nous limiterons à une description unidimensionnelle du champ et de la cavité. Le faisceau laser envoyé dans la cavité, de fréquence  $\omega_0$ , est traité comme une onde plane qui se propage le long de l'axe de la cavité. Le champ électrique  $\mathcal{E}(t)$  au niveau du miroir d'entrée peut être décrit par une amplitude complexe  $\alpha(t)$ , qui varie lentement à l'échelle de la période  $T = 2\pi/\omega_0$  de l'onde lumineuse :

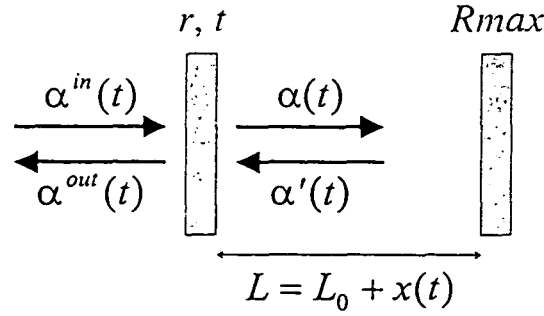


Fig. 3: Schéma d'une cavité Fabry-Perot de longueur variable et définition des champs incident, intracavité et réfléchi.

$$\mathcal{E}(t) = \alpha(t)e^{-i\omega_0 t}. \quad (2.3)$$

Cette amplitude est normalisée de façon à ce que l'intensité moyenne  $\bar{I}$  du champ, exprimée en nombre de photons par seconde, soit égale à  $|\bar{\alpha}|^2$ . La cavité est par ailleurs entièrement déterminée par sa longueur  $L = L_0 + x(t)$  où  $L_0$  est la longueur de la cavité lorsque le miroir est fixe, et  $x(t)$  le déplacement du miroir mobile.

La conservation de l'énergie au niveau du miroir d'entrée entraîne l'existence de relations linéaires et unitaires entre les champs incidents et réfléchis par le miroir (voir la figure 3) :

$$\alpha(t) = t\alpha^{in}(t) + r\alpha'(t), \quad (2.4)$$

$$\alpha^{out}(t) = t\alpha'(t) - r\alpha^{in}(t). \quad (2.5)$$

La première relation montre que le champ intracavité  $\alpha$  à l'instant  $t$  est la somme du champ incident  $\alpha^{in}$  au même instant et du champ intracavité  $\alpha'$  qui a déjà effectué un aller-retour dans la cavité. La seconde relation montre que le champ réfléchi  $\alpha^{out}$  résulte de l'interférence entre le champ incident directement réfléchi et le champ intracavité transmis par le miroir.

La propagation du champ dans la cavité permet de relier les champs  $\alpha$  et  $\alpha'$  :

$$\alpha'(t) = \alpha(t - \tau)e^{i\Psi(t)}, \quad (2.6)$$

où  $\tau$  est le temps mis par la lumière pour effectuer un aller-retour dans la cavité, et  $\Psi$  le déphasage subi par le champ :

$$\tau = 2L_0/c, \quad (2.7)$$

$$\Psi(t) \equiv 2kL(t) [2\pi], \quad (2.8)$$

où  $k = 2\pi/\lambda$  est le vecteur d'onde du champ. Pour écrire l'équation (2.6), nous avons négligé les effets de retard temporel subis par le champ : pour des petits déplacements du miroir mobile, le champ est essentiellement déphasé d'une quantité  $\Psi(t)$ , et la variation du temps  $\tau$  avec la position du miroir peut être négligée [31].

Pour une cavité proche de la résonance ( $\Psi(t) \ll 1$ ) et de grande finesse ( $\gamma \ll 1$ ), l'enveloppe du champ varie peu lors d'un aller-retour. On obtient alors les expressions usuelles pour une cavité Fabry-Perot à une seule entrée-sortie, avec toutefois un déphasage  $\Psi(t)$  qui dépend ici du déplacement  $x(t)$  du miroir mobile :

$$\tau \frac{d}{dt} \alpha(t) = [-\gamma + i\Psi(t)] \alpha(t) + \sqrt{2\gamma} \alpha^{in}(t), \quad (2.9)$$

$$\alpha^{out}(t) = \sqrt{2\gamma} \alpha(t) - \alpha^{in}(t), \quad (2.10)$$

$$\Psi(t) = \Psi_0 + 2kx(t), \quad (2.11)$$

où  $\Psi_0$  est le déphasage induit par la cavité lorsque le miroir est immobile.

### 2.1.3 Mouvement du miroir mobile

Pour de petits mouvements, le déplacement  $x[\Omega]$  est relié aux forces appliquées par la théorie de la réponse linéaire [32]. Nous supposons que le miroir est couplé à un bain thermique à la température  $T$  et qu'il n'est soumis qu'à la force de pression de radiation du champ dans la cavité. L'équation du mouvement du miroir s'écrit alors :

$$x[\Omega] = \chi[\Omega] (F_T[\Omega] + F_{rad}[\Omega]), \quad (2.12)$$

où  $\chi[\Omega]$  est la susceptibilité mécanique du miroir. La force  $F_{rad}$  due à la pression de radiation exercée par le faisceau intracavité est égale au produit de l'impulsion

$2\hbar k$  transférée au miroir lors de la réflexion d'un photon, par l'intensité du faisceau intracavité (exprimée en nombre de photons par seconde) :

$$F_{rad}(t) = 2\hbar k I(t) = 2\hbar k |\alpha(t)|^2. \quad (2.13)$$

La force de Langevin  $F_T$  résulte du couplage avec le bain thermique. Elle a une valeur moyenne nulle et son spectre de bruit est relié à la susceptibilité mécanique par le théorème fluctuation-dissipation [32] :

$$S_T[\Omega] = -\frac{2k_B T}{\Omega} \text{Im} \left( \frac{1}{\chi[\Omega]} \right), \quad (2.14)$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann.

#### 2.1.4 Etat stationnaire

On cherche à déterminer dans cette section l'état stationnaire du système couplé champ-mouvement du miroir. Le déplacement moyen  $\bar{x}$  du miroir est donné par l'équation (2.12) à fréquence nulle :

$$\bar{x} = 2\hbar k \chi[0] \bar{I}, \quad (2.15)$$

où  $\bar{I} = |\bar{\alpha}|^2$  est l'intensité moyenne du champ intracavité et  $\chi[0]$  la susceptibilité statique du miroir.

Le déphasage moyen  $\bar{\Psi}$  entre le champ intracavité et la résonance de la cavité peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{\Psi} = \Psi_0 + \Psi_{NL}, \quad (2.16)$$

où  $\Psi_0 \equiv 4\pi L_0/\lambda [2\pi]$  est le déphasage pour un miroir fixe, qui ne dépend que de la longueur de la cavité et de la fréquence du laser, et  $\Psi_{NL} = 2k\bar{x}$  est le déphasage lié au déplacement moyen du miroir sous l'effet de la pression de radiation :

$$\Psi_{NL} = 4\hbar k^2 \chi[0] \bar{I}. \quad (2.17)$$

Les valeurs moyennes des champs dans l'état stationnaire s'obtiennent alors directement à partir des équations (2.9) et (2.10) :

$$\bar{\alpha} = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\Psi} \bar{\alpha}^{in}, \quad (2.18)$$

$$\bar{\alpha}^{out} = \frac{\gamma + i\bar{\Psi}}{\gamma - i\bar{\Psi}} \bar{\alpha}^{in}. \quad (2.19)$$

On retrouve ici les expressions usuelles des champs pour une cavité Fabry-Perot à une seule entrée-sortie. La cavité étant supposée sans perte, l'intensité réfléchie (donnée par le module carré de l'équation 2.19) est égale à l'intensité incidente : le champ subit donc uniquement un déphasage qui dépend de  $\bar{\Psi}$ . La différence fondamentale par rapport à une cavité Fabry-Perot fixe est que le déphasage total  $\bar{\Psi}$  dépend de l'intensité intracavité par l'intermédiaire du paramètre  $\Psi_{NL}$  (éq. 2.17).

### 2.1.5 Effet de la pression de radiation : bistabilité

Cette dépendance du déphasage total de la cavité vis-à-vis de l'intensité est due à la pression de radiation exercée par le faisceau intracavité sur le miroir mobile. Elle a des conséquences importantes sur l'état stationnaire du champ intracavité : pour une intensité incidente suffisante, le système devient bistable [33].

Cet effet peut se comprendre de la façon suivante. Si on augmente de façon régulière la fréquence du laser incident, en débutant par une fréquence inférieure à la résonance de la cavité, on augmente le déphasage  $\Psi_0$  en s'approchant de la résonance  $\Psi_0 = 0$ . L'intensité intracavité augmente quand on commence à parcourir le pic d'Airy. Le miroir recule alors sous l'effet de la pression de radiation et la longueur de la cavité augmente, ce qui a pour effet de diminuer sa fréquence de résonance : la résonance de la cavité vient donc "au devant" de la fréquence du laser. Inversement, quand on a dépassé le sommet du pic d'Airy, l'intensité intracavité chute : la longueur de la cavité diminue, et la fréquence de résonance a tendance "à suivre" celle du laser. On observe donc un pic d'Airy déformé et asymétrique, avec un flanc montant plus raide qu'en l'absence d'effet de la pression de radiation, et un flanc descendant moins pentu.

A partir d'une valeur seuil pour l'intensité incidente, il peut exister pour certains déphasages  $\Psi_0$  jusqu'à trois points de fonctionnement distincts, dont deux sont stables. Lorsqu'on augmente la fréquence du laser de façon à se rapprocher d'une résonance, l'intensité suit la branche basse de la résonance jusqu'au point  $B_B$ , où l'intensité intracavité varie brusquement en passant sur la branche haute (voir la figure 4). Lorsqu'on balaie la fréquence en sens inverse, l'intensité reste sur la branche haute jusqu'au point  $B_H$ , où elle diminue brusquement en passant sur la branche basse. On obtient ainsi un cycle d'hystérésis, typique des systèmes bistables.

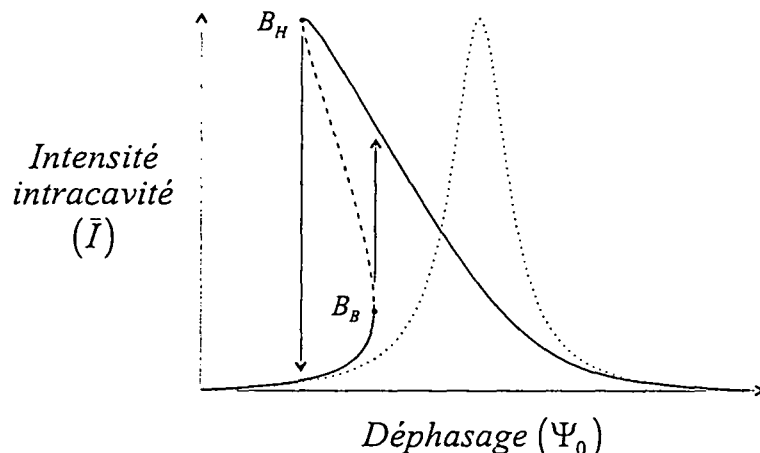


Fig. 4: Comportement bistable de l'intensité dans une cavité à miroir mobile, en fonction du désaccord du laser avec la cavité. Le pic d'Airy est déformé par rapport à la forme symétrique obtenue sans miroir mobile (pointillés). La partie en traits tiretés représente la zone instable de la courbe et les flèches indiquent le parcours du cycle d'hystérésis.

On peut également observer ce phénomène de bistabilité en faisant varier l'intensité du laser, à désaccord  $\Psi_0$  fixé. Le déphasage total  $\bar{\Psi}$  du champ dans la cavité dépend de l'intensité intracavité. Il est donc possible de balayer la résonance de la cavité en jouant sur l'intensité. A partir des équations (2.17) et (2.18), on obtient une équation du troisième degré pour l'intensité  $\bar{I}$  :

$$\bar{I} \left[ \gamma^2 + \left( \Psi_0 + 4\hbar k^2 \chi [0] \bar{I} \right)^2 \right] = 2\gamma \bar{I}^{in}. \quad (2.20)$$

Il peut donc exister jusqu'à trois solutions stationnaires de l'intensité intracavité, pour des paramètres  $\bar{I}^{in}$  et  $\Psi_0$  fixés.

Cette bistabilité purement mécanique a été observée expérimentalement dès 1983 [34]. Dans cette expérience, la cavité optique de finesse 15 est constituée d'un miroir fixe et d'un miroir déposé sur une plaque en quartz de 60 mg suspendue par deux fils en tungstène. La fréquence de résonance mécanique de ce pendule est de l'ordre de quelques hertz. La figure 5 présente le cycle d'hystérésis observé expérimentalement sur la puissance transmise par la cavité (directement proportionnelle à l'intensité intracavité  $\bar{I}$ ) quand on fait varier la puissance incidente. Les points tournants de la bistabilité correspondent ici à des puissances incidentes de 1,1 et 2,2 W.

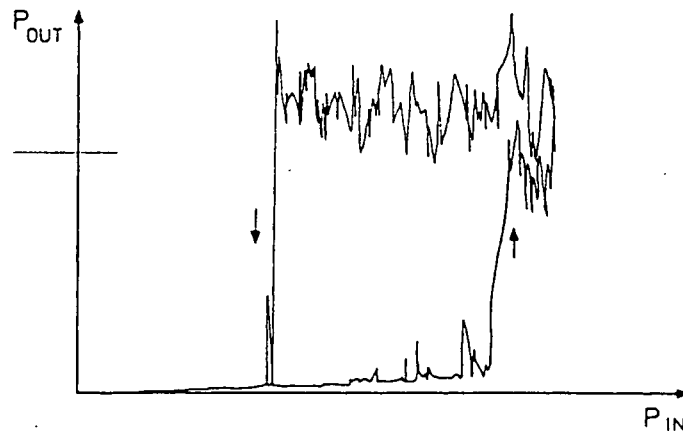


Fig. 5: Courbe de bistabilité obtenue expérimentalement sur le système pendulaire discuté dans le texte. Les points tournants de la bistabilité correspondent ici à des puissances incidentes de 1,1 et 2,2 W. Cette courbe est reproduite de la référence [34].

Cette bistabilité d'origine optomécanique est responsable d'un certain nombre d'effets quantiques. Ainsi, une cavité de grande finesse dont un des miroirs est mobile peut produire des états comprimés du champ [35], de la même façon qu'un milieu Kerr placé dans une cavité. La relation (2.17) entre le déphasage de la cavité et l'intensité intracavité est en effet tout à fait similaire à celle correspondant à un milieu Kerr. De même, le miroir mobile peut induire un effet Kerr croisé entre deux faisceaux et permettre de réaliser une mesure quantique non destructive de l'intensité d'un faisceau [36,37]. Le principe de la mesure consiste à envoyer un faisceau intense dans la cavité et à sonder les déplacements du miroir à l'aide d'un second faisceau. On crée ainsi des corrélations entre l'intensité du premier faisceau et la phase du second, comme cela a pu être réalisé expérimentalement avec un milieu atomique non-linéaire [38]. Nous étudierons dans la section (2.3) un autre effet quantique de la pression de radiation, qui est l'existence d'une limite quantique dans les mesures interférométriques.

## 2.2 Mesure de petits déplacements

On cherche dans cette partie à évaluer les performances de ce système pour mesurer de petits déplacements du miroir mobile, sous l'action d'une force extérieure ou de l'agitation thermique. Nous avons vu comment la phase du faisceau réfléchi par la cavité reflète le mouvement du miroir mobile. On peut mesurer expérimentalement ces variations de phase en utilisant une détection homodyne (figure 6) [4,39].

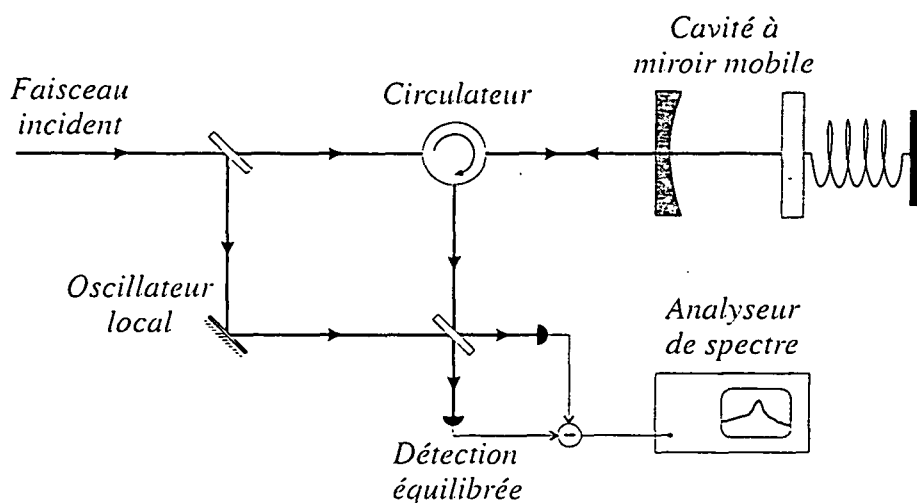


Fig. 6: Schéma de principe d'une détection homodyne. Le spectre de bruit de phase du faisceau réfléchi est obtenu en le faisant interférer avec un faisceau de référence (oscillateur local). Les lames séparatrices et le circulateur sont réalisés en pratique à l'aide de cubes séparateurs de polarisation et de lames quart-d'onde et demi-onde.

Une grande partie du faisceau incident est prélevée à l'aide d'une lame séparatrice pour fournir un faisceau de référence, appelé oscillateur local. Ce faisceau est mélangé avec celui réfléchi par la cavité au niveau d'une seconde lame. La détection des faisceaux transmis et réfléchi par la lame permet alors, sous certaines conditions qu'on verra au chapitre 3, d'obtenir à l'aide d'un analyseur de spectre le bruit de phase du faisceau réfléchi par la cavité.

Un tel montage présente une grande similitude avec un interféromètre de Mach-Zender, même si ici les deux bras sont dissymétriques : la cavité insérée dans un des bras permet d'amplifier considérablement l'effet du mouvement du miroir.

Nous allons maintenant présenter différents dispositifs de détection interférométrique de petits déplacements, ce qui nous permettra d'effectuer un rapide tour d'horizon des différents facteurs qui peuvent affecter les performances de l'instrument de mesure, en terminant par l'effet des fluctuations quantiques de la lumière.

### 2.2.1 Présentation de quelques dispositifs interférométriques

A l'heure actuelle, l'essentiel des recherches sur la mesure de petits déplacements se fait dans le contexte de la détection des ondes gravitationnelles. Les ondes gravita-



tionnelles sont des perturbations de la métrique de l'espace-temps qui sont émises par des masses accélérées et qui se propagent à la vitesse de la lumière [40]. Même pour des événements astrophysiques violents, comme l'effondrement d'une étoile qui donne naissance à une étoile à neutrons, leur effet à la surface de la Terre est extrêmement faible : on s'attend à une amplitude  $h$  de la variation de la métrique de l'ordre de  $10^{-23}$ . Deux types de dispositifs permettent d'espérer détecter prochainement cette très faible variation. Le premier appareil est un résonateur mécanique, dont un des modes de vibration peut être excité par le passage d'une onde gravitationnelle de fréquence proche de celle du mode, l'amplitude de vibration permettant de remonter à  $h$ . Le deuxième dispositif est un interféromètre de type Michelson qui réalise une mesure de la différence de longueur de deux bras orthogonaux, différence qui varie lors du passage d'une onde gravitationnelle.

### 2.2.1.1 Barres de Weber

Joseph Weber a inventé dans les années soixante ce premier type de détecteur, qui porte désormais son nom [7]. Une *barre de Weber* consiste en un résonateur mécanique, généralement de forme cylindrique, réalisé dans un matériau (niobium, saphir ou aluminium par exemple) présentant le moins de pertes possible pour les ondes acoustiques, de façon à obtenir un grand facteur de qualité pour les modes de vibration mécanique. Le passage d'une onde gravitationnelle d'une fréquence proche de celle d'une résonance mécanique peut alors exciter cette résonance [7–9]. Afin de minimiser les effets des perturbations sismiques et thermiques, la barre est suspendue dans le vide, à très basse température (inférieure au Kelvin). Pour détecter le mouvement, on utilise un transducteur qui est couplé mécaniquement à la barre et capacitivement à un circuit électrique résonnant. On atteint des sensibilités de l'ordre de  $\delta x \approx 10^{-21} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$  [41]. L'unité en  $\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$  est celle utilisée pour décrire une amplitude de bruit de position. Cette amplitude correspond en effet à la racine carrée de la puissance de bruit qui s'exprime en  $\text{m}^2/\text{Hz}$  (puissance de bruit par bande spectrale d'analyse).

L'utilisation d'une cavité optique dont un des miroirs serait couplé mécaniquement à la barre est actuellement en cours d'étude afin d'améliorer la sensibilité de la mesure [42, 43]. Ce système permettra donc une intéressante comparaison entre les dispositifs capacitifs et optiques de mesure de petits déplacements.

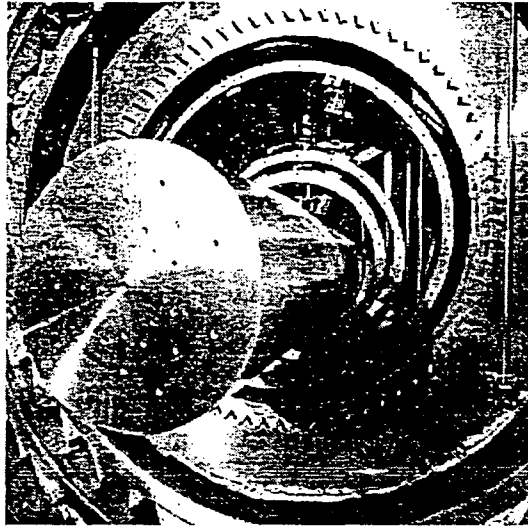


Fig. 7: Photographie de la barre Auriga, en fonctionnement en Italie. On peut distinguer au premier plan le résonateur cylindrique avant l'assemblage final du transducteur et des écrans thermiques, et à l'arrière-plan l'ensemble du dispositif de suspension (masses annulaires), contenu dans le corps du cryostat.

### 2.2.1.2 Détecteurs interférométriques

Le principe des détecteurs interférométriques d'ondes gravitationnelles repose sur la mesure de la déformation différentielle que le passage d'une onde impose à deux bras d'un interféromètre de Michelson : la mesure interférométrique d'une variation de longueur est donc ici au coeur même du dispositif. Une onde gravitationnelle produit une variation de métrique qui se traduit par une variation apparente de longueur  $\delta x \approx h \times L$  des bras de l'interféromètre, proportionnelle à l'amplitude  $h$  de l'onde et à la longueur  $L$  des bras. Du fait de la nature quadrupolaire des ondes gravitationnelles, ces variations de longueur ont des signes opposés dans les deux bras orthogonaux et induisent une variation des interférences en sortie de l'interféromètre [12].

Pour pouvoir détecter des ondes gravitationnelles d'amplitude  $h \approx 10^{-23}$ , les interféromètres ont en pratique des longueurs kilométriques et il est nécessaire d'atteindre une sensibilité sur la mesure de la longueur des bras de l'ordre de  $\delta x \approx 10^{-20} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ . Pour atteindre une telle sensibilité, la réponse de l'interféromètre à une variation de longueur des bras est amplifiée en plaçant des cavités résonnantes (de finesse  $\mathcal{F} = 50$ ) dans chacun des bras, et en insérant un miroir à l'entrée de l'interféromètre pour recycler la puissance incidente (voir la figure 8). Malgré cela, le fonctionnement de tels détecteurs à la sensibilité désirée impose des contraintes extrêmement sévères sur les caractéristiques optiques et mécaniques des différents composants : on verra cer-

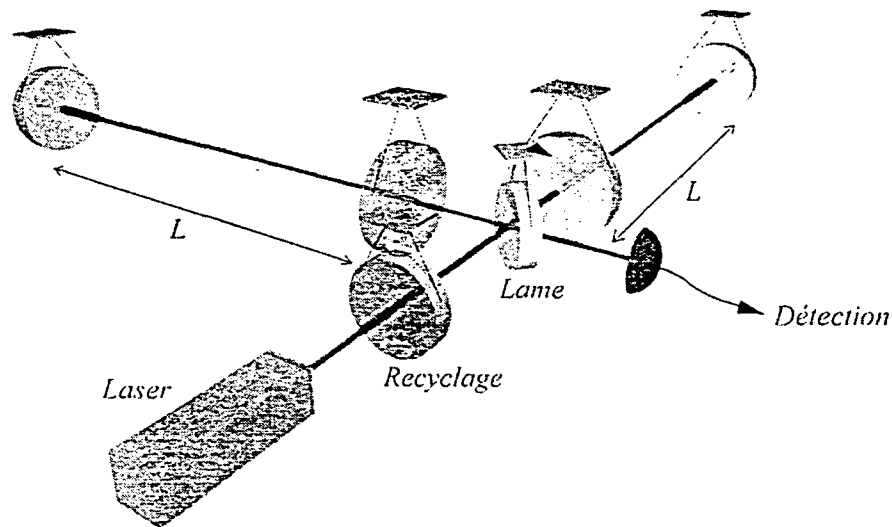


Fig. 8: Schéma de principe d'un détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles. L'onde induit une variation de longueur apparente des bras qui modifie les interférences en sortie de l'interféromètre. Afin d'augmenter la sensibilité, les bras sont formés de deux cavités Fabry-Perot et un miroir de recyclage renvoie la lumière réfléchie par l'interféromètre dans celui-ci.

taines de ces contraintes dans le paragraphe suivant. Un certain nombre de grands interféromètres sont actuellement en cours de réalisation : le projet franco-italien VIRGO [10] dont les bras mesurent  $3\text{ km}$ , le projet américain LIGO [11] constitué de deux interféromètres de  $4\text{ km}$ , le projet anglo-allemand GEO600 [44] de  $600\text{ m}$  de long, et enfin l'interféromètre japonais TAMA [45] qui a déjà fonctionné avec des bras de  $300\text{ m}$ .

Notons pour finir qu'une barre de Weber utilise une résonance mécanique et n'a donc qu'une bande de détection étroite, alors que les interféromètres sont des détecteurs large bande (de  $10\text{ Hz}$  à quelques kilohertz), et peuvent donc donner plus facilement accès à la variation temporelle  $h(t)$  de l'onde gravitationnelle.

### 2.2.1.3 Autres mesures de petits déplacements

On utilise également des techniques interférométriques dans un tout autre domaine : en microscopie à force atomique par exemple, on cherche à mesurer l'interaction entre une surface et une pointe montée à l'extrémité d'un *cantilever* [46]. Dans le mode d'opération "en continu", l'interaction est mesurée à partir de la déflexion statique du *cantilever*.

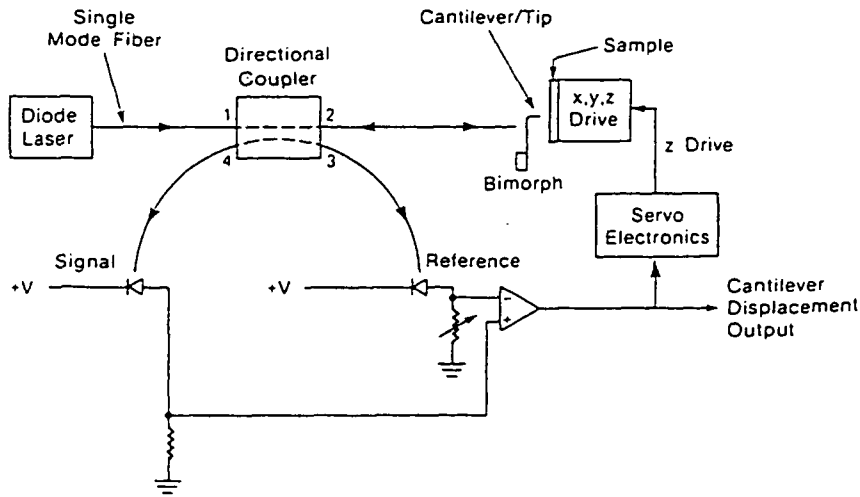


Fig. 9: Montage interférométrique de détection de la déflexion du cantilever. Le faisceau issu de la diode laser (voie 1) est envoyé sur le cantilever (voie 2) et vers une photodiode de référence (voie 3). L'intensité réfléchiée par le cantilever est envoyée sur la photodiode signal (voie 4). On soustrait ensuite le bruit d'intensité (voie 3) au signal mesuré. Cette figure est extraite de la référence [47].

Dans les premiers microscopes réalisés, cette déflexion était détectée par une sonde basée sur l'effet tunnel. Mais de nombreuses autres techniques ont été proposées depuis, et notamment une mesure interférométrique [47]. Dans cette expérience, décrite sur la figure 9, le faisceau issu d'une diode laser opérant à  $830 \text{ nm}$  est envoyé à travers une fibre optique monomode vers le *cantilever*, placé à une distance  $d$  de l'extrémité de la fibre. Une partie de la lumière réfléchiée par le *cantilever* retourne alors dans la fibre, où elle interfère avec la lumière directement réfléchiée à l'interface de la fibre. L'intensité  $I$  reçue par la photodiode est caractéristique d'une interférence à deux ondes présentant une visibilité des franges  $V$  :

$$I = I_0 \left( 1 - V \cos \frac{4\pi d}{\lambda} \right). \quad (2.21)$$

Quand les deux ondes sont en quadrature ( $2d = (2n + 1) \lambda/4$ , avec  $n$  entier), la sensibilité de la mesure est maximale :

$$\frac{\Delta I}{I_0} = 4\pi V \frac{\Delta d}{\lambda}. \quad (2.22)$$

Ce senseur a une bien moins bonne sensibilité que les montages basés sur des cavités de grande finesse car le signal résulte d'une simple interférence à deux ondes. Cette méthode permet néanmoins d'atteindre une sensibilité suffisante (de l'ordre de

$0,1 \text{ \AA}/\sqrt{Hz}$ ) et présente de nombreux avantages par rapport à d'autres techniques, comme la simplicité du dispositif expérimental et sa grande robustesse mécanique.

### 2.2.2 Limitations de la sensibilité

De nombreuses sources de bruit peuvent limiter la sensibilité de telles mesures interférométriques. Ces sources peuvent être réparties en deux catégories : celles qui créent des fluctuations de position des miroirs, et celles qui simulent de telles fluctuations. Ce paragraphe en présente quelques exemples.

#### 2.2.2.1 Bruits sismique et thermique

Une première limitation pour mesurer de petits déplacements relatifs de deux miroirs provient bien entendu des fluctuations de position de ces objets. Ces fluctuations peuvent par exemple être engendrées par les vibrations des supports des composants optiques. Elles peuvent être de plusieurs origines : sismique ou liées à l'activité humaine. Ces bruits limitent essentiellement la sensibilité des détecteurs fonctionnant à basse fréquence. On les modélise en effet généralement comme des bruits en  $1/f^2$  et leurs effets décroissent donc rapidement avec la fréquence. Le bruit sismique est ainsi dans un environnement normal de l'ordre de [12]:

$$\delta x_{sism} \approx 10^{-8} \text{ m}/\sqrt{Hz} \text{ à } 10 \text{ Hz.} \quad (2.23)$$

Pour éviter que ce bruit ne limite la sensibilité, l'ensemble des miroirs et la lame séparatrice d'un interféromètre gravitationnel sont isolés à l'aide de dispositifs de filtres mécaniques. Dans le cas de VIRGO, les miroirs des cavités Fabry-Perot dans les bras de l'interféromètre sont suspendus à des "superatténuateurs", qui sont constitués d'une série de sept pendules couplés qui rendent le bruit sismique négligeable dans la bande de fréquence de détection.

Les fluctuations de position peuvent également être dues à l'agitation thermique des miroirs. Deux bruits de ce type limitent la sensibilité d'un interféromètre comme VIRGO : le bruit thermique pendulaire du dispositif de suspension, prépondérant à basse fréquence (de 10 à 50 Hz), et le bruit thermique interne des miroirs, c'est-à-dire les déformations de la surface des miroirs induites par l'agitation thermique, importantes entre 50 et 1000 Hz. Ces bruits sont responsables d'une variation de longueur de la cavité qui peut masquer le passage d'une onde gravitationnelle de faible

amplitude. La sensibilité de VIRGO est ainsi limitée dans la gamme des fréquences intermédiaires à :

$$\delta x_{pend} \approx 5 \cdot 10^{-18} \text{ m}/\sqrt{Hz} \text{ à } 10 \text{ Hz}, \quad (2.24)$$

par les modes pendulaires des miroirs [12], et à :

$$\delta x_{int} \approx 10^{-19} \text{ m}/\sqrt{Hz} \text{ à } 100 \text{ Hz}, \quad (2.25)$$

par le bruit thermique interne des miroirs. On verra au paragraphe (5.1.2) les techniques utilisées pour limiter l'effet de ces perturbations.

### 2.2.2.2 Bruit de fréquence

Indépendamment de toute variation de longueur, la mesure peut présenter des fluctuations liées aux fluctuations de fréquence (ou, de façon équivalente, de longueur d'onde) du faisceau incident. On voit en effet sur l'équation (2.2) que la variation de phase du faisceau réfléchi par une cavité ne dépend que du rapport  $\delta x/\lambda$ . On peut simuler une variation de longueur des bras en changeant la "règle"  $\lambda$  utilisée dans la mesure. On a un effet similaire dans un interféromètre, mais comme on effectue une mesure différentielle de longueur des bras, le bruit de fréquence n'intervient que lorsque l'interféromètre présente une certaine dissymétrie [12].

L'influence de ce bruit de fréquence se voit aussi très bien sur l'exemple du microscope à force atomique déjà décrit. La différentiation de l'équation (2.21) amène en effet immédiatement :

$$\frac{\Delta I}{I_0} = 4\pi V \left( \frac{\Delta d}{\lambda} - d \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2} \right). \quad (2.26)$$

Une variation  $\Delta \lambda$  de la longueur d'onde de la diode laser produit alors un effet équivalent à une variation  $\Delta d$  de la distance entre la sortie de la fibre et le cantilever :

$$\Delta d = d \frac{\Delta \lambda}{\lambda}. \quad (2.27)$$

Cette prédiction a été vérifiée expérimentalement, en mesurant le bruit *rms*  $\Delta d$  sur une bande de fréquence allant de 1 à 1000 Hz, en fonction de la distance  $d$  [47]. Le comportement observé était consistant avec l'équation (2.27), pour un bruit *rms* de longueur d'onde  $\Delta \lambda/\lambda = 1,8 \cdot 10^{-6}$ . Pour une distance  $d$  inférieure à 4  $\mu\text{m}$ , on obtient un déplacement équivalent dû au bruit de fréquence, et donc une limite de sensibilité

de l'expérience, inférieur à  $0,1\text{\AA}$ , ce qui est suffisant pour atteindre une résolution atomique.

L'effet du bruit de fréquence est donc proportionnel à la distance  $d$ , et de façon plus générale à la longueur de la cavité ou à la dissymétrie de longueur des bras de l'interféromètre. Pour une cavité de longueur  $L$ , la sensibilité est ainsi limitée à :

$$\delta x_{\text{fréq}} = \frac{L\lambda}{c} \delta\nu, \quad (2.28)$$

où  $L$  est remplacée par la dissymétrie  $\Delta L$  dans le cas d'un interféromètre. Notons que dans les détecteurs interférométriques d'ondes gravitationnelles, une dissymétrie de l'ordre du mètre est imposée par la technique de modulation et d'extraction du signal en sortie. Les niveaux de bruit de fréquence obtenus sur un laser libre limiteraient donc drastiquement la sensibilité. Pour un laser *Nd : YAG*, on a en effet typiquement  $\delta\nu \approx 1000 \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}}$  à  $10 \text{ Hz}$ , ce qui limiterait la sensibilité à :

$$\delta x_{\text{fréq}} \approx 10^{-12} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}. \quad (2.29)$$

On peut heureusement résoudre ce problème en asservissant la fréquence du laser sur des cavités très stables, et éventuellement sur l'interféromètre lui-même.

Il existe bien sûr de très nombreuses autres sources de bruit : le bruit de phase du faisceau incident (détaillé plus loin), le bruit newtonien (mouvements des miroirs induits par l'attraction gravitationnelle de masses à proximité), le bruit dû à la pression de radiation (présenté au paragraphe 2.3), ...

La courbe de sensibilité attendue de VIRGO, présentée sur la figure 10, montre que c'est néanmoins le bruit thermique pendulaire et interne des miroirs qui limite la sensibilité sur la plus grande partie de la zone d'analyse spectrale. La mesure du bruit thermique interne des miroirs est ainsi un enjeu important pour déterminer la sensibilité de ces interféromètres [49, 50], d'autant plus que son évaluation théorique est rendue difficile par la méconnaissance des processus de relaxation qui ont lieu dans les substrats des miroirs [51]. On présentera au chapitre 4 une expérience visant à mesurer expérimentalement ce bruit thermique.

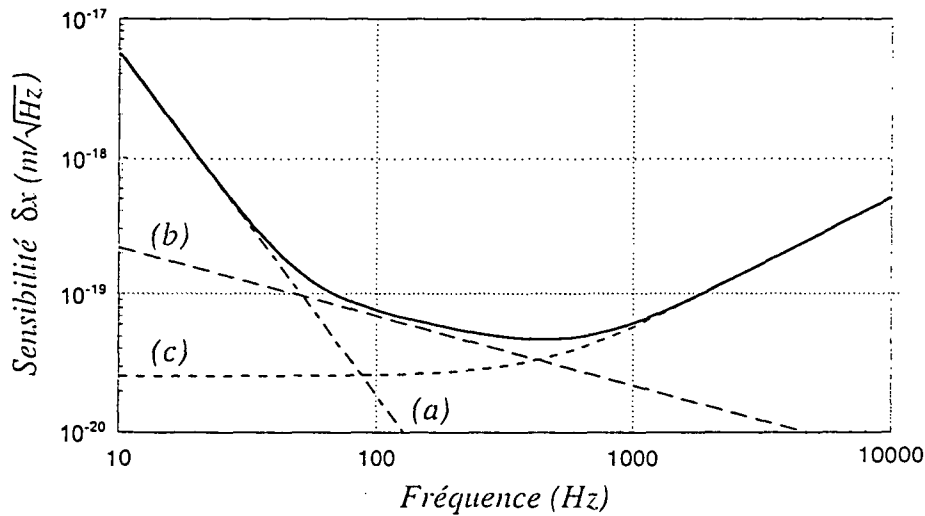


Fig. 10: Sensibilité de l'interféromètre VIRGO sur la variation apparente de longueur des bras. La limite de sensibilité est essentiellement due au bruit thermique des suspensions des miroirs (a), au bruit thermique interne des miroirs (b) et au bruit de photon, filtré par les cavités placées dans chacun des bras (c). On n'a pas représenté les pics dus aux modes violons des fils de suspension. Cette courbe est adaptée de la référence [17].

### 2.2.3 Sensibilité optimale de la mesure

Si l'ensemble de ces sources de bruit sont maîtrisées, la sensibilité de l'appareil est en dernier lieu limitée par le bruit quantique de phase du faisceau incident. On va calculer dans ce paragraphe la sensibilité correspondante dans le cas d'une cavité à miroir mobile, et voir comment elle peut être optimisée. On suppose ici qu'on envoie une intensité incidente suffisamment faible dans la cavité pour pouvoir négliger la dépendance de  $\bar{\Psi}$  avec l'intensité intracavité, induite par la pression de radiation. On va dans un premier temps introduire la description quantique du champ électromagnétique, avant d'étudier l'évolution des quadratures d'intensité et de phase du champ lors de sa réflexion sur la cavité, et d'en déduire la limite de sensibilité correspondante pour une mesure de déplacement.

#### 2.2.3.1 Description quantique du champ

Le champ électromagnétique peut se décomposer en une somme de modes équivalents à des oscillateurs harmoniques indépendants. On supposera dans la suite que le champ peut être décrit par un seul mode, de fréquence  $\omega_0$ , avec une direction de pro-



pagation et un état de polarisation donnés. Le champ électrique de ce mode particulier s'écrit alors, en un point donné :

$$\mathcal{E}(t) = (\alpha_1 + i\alpha_2)e^{-i\omega_0 t}, \quad (2.30)$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les quadratures du champ.

En optique quantique, les quadratures  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  deviennent des opérateurs  $\widehat{a}_1$  et  $\widehat{a}_2$ , qui s'expriment en fonction des opérateurs annihilation  $\widehat{a}$  et création  $\widehat{a}^\dagger$  du mode :

$$\widehat{a}_1 = (\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger), \quad \widehat{a}_2 = i(\widehat{a}^\dagger - \widehat{a}). \quad (2.31)$$

$\widehat{a}_1$  et  $\widehat{a}_2$  sont donc les analogues pour le champ des observables de position  $\widehat{x}$  et d'impulsion  $\widehat{p}$  pour un oscillateur harmonique matériel. Comme eux,  $\widehat{a}_1$  et  $\widehat{a}_2$  ne commutent pas :

$$[\widehat{a}_1, \widehat{a}_2] = 2i. \quad (2.32)$$

Dans tout état du champ, les dispersions de ces deux observables autour de leur valeur moyenne vérifient alors une inégalité de Heisenberg :

$$\Delta\widehat{a}_1 \cdot \Delta\widehat{a}_2 \geq 1. \quad (2.33)$$

Cette inégalité traduit l'existence de fluctuations quantiques. Pour étudier ces fluctuations, nous allons utiliser la méthode semi-classique qui va permettre de leur associer une représentation géométrique dans l'espace des phases.

### 2.2.3.2 Représentation et traitement semi-classiques des fluctuations quantiques

La méthode semi-classique consiste à représenter les fluctuations quantiques par une distribution de quasi-probabilité de Wigner [52]. On associe ainsi des variables classiques aléatoires  $\alpha$  et  $\alpha^*$  aux opérateurs du champ  $\widehat{a}$  et  $\widehat{a}^\dagger$ . La distribution de Wigner décrit alors la loi de distribution de ces variables.

Pour les états usuels du champ, la distribution de Wigner est toujours positive : elle peut donc être considérée comme une véritable distribution de probabilité, les variables  $\alpha$  et  $\alpha^*$  représentant les valeurs possibles du champ. La figure 11 montre la fonction de Wigner d'un état cohérent, qui modélise assez bien l'état du champ en sortie d'un laser. Le plan horizontal représente l'espace des phases, dont les axes sont définis par les parties réelle  $\alpha_1 = (\alpha + \alpha^*)/2$  et imaginaire  $\alpha_2 = i(\alpha^* - \alpha)/2$  du champ. La distribution de Wigner est une gaussienne, centrée sur la valeur moyenne  $\bar{\alpha}$  du champ

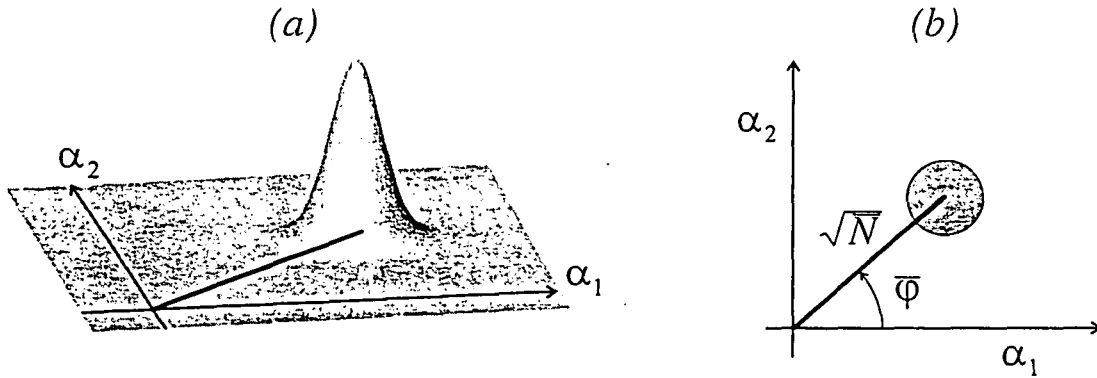


Fig. 11: Représentation dans l'espace des phases d'un champ cohérent. La distribution de Wigner est une gaussienne (a) et sa projection dans le plan est un disque (b), centré sur la valeur moyenne  $\bar{\alpha} = \sqrt{N}e^{i\varphi}$  du champ.

qui correspond à sa valeur classique, et dont la variance est égale à 1 dans toutes les directions. On a donc ici  $\Delta\alpha_1 \cdot \Delta\alpha_2 = 1$  : un état cohérent est un état minimal vis-à-vis de l'inégalité de Heisenberg.

On peut simplifier la représentation du champ en projetant la distribution de Wigner dans le plan  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ . Les fluctuations du champ sont alors représentées par un disque, centré sur le champ moyen  $\bar{\alpha}$ , et dont la périphérie correspond à la courbe d'isoprobabilité à  $1/e$  de la gaussienne. Chaque point à l'intérieur du disque peut être considéré comme une réalisation possible du champ.

Grâce à cette représentation simple, on peut définir une quadrature quelconque du champ par :

$$\alpha_\theta = e^{-i\theta}\alpha + e^{i\theta}\alpha^*, \quad (2.34)$$

et la variance de cette quadrature est donnée par la projection de la distribution sur l'axe d'angle  $\theta$ . Pour un état cohérent, les variances sont égales à 1 dans toutes les directions :

$$\Delta\alpha_\theta = 1. \quad (2.35)$$

On peut également déterminer les fluctuations d'intensité et de phase du champ. L'intensité, exprimée comme le nombre de photons  $N$  dans le mode, et la phase  $\varphi$  du champ sont telles que :

$$\alpha = \sqrt{N}e^{i\varphi}. \quad (2.36)$$

Les fluctuations d'intensité et de phase sont obtenues en linéarisant les fluctuations autour du champ moyen  $\bar{\alpha} = \sqrt{\bar{N}}e^{i\bar{\varphi}}$ . Pour modifier l'intensité du champ, il faut se déplacer sur le même rayon que le champ moyen. Par contre, pour modifier la phase du champ, il faut se déplacer dans l'espace des phases sans modifier l'intensité, donc selon la direction perpendiculaire à celle du rayon du champ moyen : les fluctuations d'intensité sont ainsi reliées à la quadrature d'amplitude  $\alpha_{\bar{\varphi}}$  et celles de phase à la quadrature orthogonale  $\alpha_{\bar{\varphi}+\frac{\pi}{2}}$  :

$$\delta N = \sqrt{\bar{N}}\delta\alpha_{\bar{\varphi}}, \quad (2.37)$$

$$\delta\varphi = \frac{1}{2\sqrt{\bar{N}}}\delta\alpha_{\bar{\varphi}+\frac{\pi}{2}}. \quad (2.38)$$

On obtient finalement une variance de l'intensité  $\Delta N^2 = \bar{N}$ , typique de la distribution poissonnienne des photons dans un état cohérent. Les fluctuations relatives d'intensité  $\Delta N/\bar{N}$  décroissent donc comme  $1/\sqrt{\bar{N}}$ .

La variance des fluctuations de phase est inversement proportionnelle au nombre de photons :

$$\Delta\varphi^2 = \frac{1}{4\bar{N}}. \quad (2.39)$$

Ce résultat s'interprète très simplement en remarquant que la dispersion de phase  $\Delta\varphi$  correspond à l'angle sous lequel on voit le disque des fluctuations (d'aire constante et égale à 1) depuis l'origine :  $\Delta\varphi$  décroît donc au fur et à mesure que le disque s'écarte de l'origine lorsqu'on augmente l'intensité.

Notons que dans le cas d'un état cohérent, les variances sur les deux quadratures sont égales et l'inégalité (2.33) fixe leur valeur commune  $\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_2 = 1$ . Mais rien n'interdit de considérer un état dont une des variances est inférieure à cette valeur, à condition que la variance de la quadrature conjuguée soit augmentée de façon à toujours satisfaire l'inégalité de Heisenberg (2.33). La figure 12 présente la distribution de Wigner d'un tel *état comprimé*, qui a une section ellipsoïdale avec une variance  $\Delta\alpha_1$  inférieure à 1. Il a déjà été mentionné qu'une cavité à miroir mobile peut, sous certaines conditions, produire un état comprimé du rayonnement [35]. L'intérêt de ces états est qu'ils permettent de repousser certaines limites quantiques à la sensibilité des mesures optiques [6, 14, 16] (voir la section 2.3).

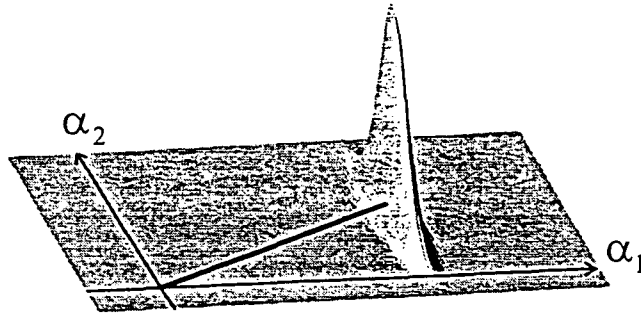


Fig. 12: Distribution de Wigner d'un état comprimé. Les fluctuations sur la quadrature  $\alpha_1$  sont inférieures à celles du vide. Les fluctuations sur la quadrature  $\alpha_2$  sont nécessairement augmentées, pour que l'inégalité de Heisenberg soit respectée.

### 2.2.3.3 Evolution des quadratures dans la cavité

On cherche maintenant à évaluer l'évolution des fluctuations du champ lors de son interaction avec la cavité. Dans le cas d'un champ intense comme celui d'un faisceau laser,  $\bar{\alpha}$  est très grand devant 1 et les fluctuations  $\delta\alpha$  du champ sont petites devant sa valeur moyenne  $\bar{\alpha}$ . On peut donc linéariser l'équation d'évolution de la distribution de Wigner : l'équation obtenue pour les fluctuations quantiques est alors la même que celle décrivant l'évolution classique du système. On peut ainsi décrire les fluctuations quantiques du champ et tenir compte de la dynamique du système en étudiant l'évolution des fluctuations  $\delta\alpha[\Omega]$  à la fréquence d'analyse  $\Omega$  sous l'effet des équations classiques du système. On obtient alors les fluctuations du champ sortant en fonction des fluctuations entrantes et de la dynamique du système [53, 54].

On a déjà vu au paragraphe (2.1.1) que la phase du faisceau réfléchi reproduit les variations de position  $\delta x[\Omega]$  du miroir, avec une sensibilité maximale quand la cavité est à résonance ( $\bar{\Psi} = 0$ ). Dans ce cas, les équations (2.18) et (2.19) se simplifient en :

$$\bar{\alpha}^{out} = \bar{\alpha}^{in} = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \bar{\alpha}. \quad (2.40)$$

A résonance, tous les champs moyens ont la même phase. On supposera pour simplifier ces champs réels.

Nous allons maintenant étudier les conséquences d'un déplacement  $\delta x[\Omega]$  du miroir sur le spectre du faisceau réfléchi. Les équations d'évolution des fluctuations du champ

lors de la réflexion sur la cavité sont obtenues comme on vient de le voir en linéarisant les équations classiques du champ autour du point de fonctionnement de la cavité. A résonance ( $\bar{\Psi} = 0$ ), les équations (2.9) et (2.10) deviennent alors :

$$(\gamma - i\Omega\tau)\delta\alpha[\Omega] = \sqrt{2\gamma}\delta\alpha^{in} + 2ik\bar{\alpha}\delta x[\Omega], \quad (2.41)$$

$$\delta\alpha^{out}[\Omega] = \sqrt{2\gamma}\delta\alpha[\Omega] - \delta\alpha^{in}[\Omega]. \quad (2.42)$$

On s'intéresse par la suite aux composantes d'amplitude  $p$  et de phase  $q$  du champ  $\alpha$ , qui, dans le cas d'un champ moyen réel, s'identifient aux quadratures  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  déjà définies :

$$p[\Omega] = \frac{1}{2}(\alpha[\Omega] + \alpha^*[\Omega]) \quad , \quad q[\Omega] = \frac{i}{2}(\alpha^*[\Omega] - \alpha[\Omega]). \quad (2.43)$$

Notons que  $\alpha^*[\Omega]$  est la transformée de Fourier de  $[\alpha(t)]^*$  et on a la relation suivante :

$$\alpha^*[\Omega] = (\alpha[-\Omega])^*. \quad (2.44)$$

On obtient alors les fluctuations des champs intracavité et réfléchi en fonction des fluctuations du champ incident et de celles de la position du miroir :

$$\delta p[\Omega] = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\Omega\tau} \delta p^{in}[\Omega], \quad (2.45)$$

$$\delta q[\Omega] = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\Omega\tau} \delta q^{in}[\Omega] + \frac{4}{\gamma - i\Omega\tau} \bar{\alpha}k\delta x[\Omega], \quad (2.46)$$

$$\delta p^{out}[\Omega] = \frac{\gamma + i\Omega\tau}{\gamma - i\Omega\tau} \delta p^{in}[\Omega], \quad (2.47)$$

$$\delta q^{out}[\Omega] = \frac{\gamma + i\Omega\tau}{\gamma - i\Omega\tau} \delta q^{in}[\Omega] + \frac{4\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\Omega\tau} \bar{\alpha}k\delta x[\Omega]. \quad (2.48)$$

On retrouve sur les équations (2.45) et (2.47) un résultat attendu : à résonance, les fluctuations d'amplitude ne sont couplées ni aux fluctuations de phase, ni aux variations de position du miroir. En effet, au sommet du pic d'Airy de la cavité, l'intensité intracavité est maximale et ne varie pas au premier ordre avec le déphasage de la cavité.

Les spectres des quadratures étant définis par [4]:

$$\langle \delta\alpha_\theta [\Omega] \delta\alpha_\theta [\Omega'] \rangle = 2\pi \delta(\Omega + \Omega') S_\theta [\Omega], \quad (2.49)$$

où le symbole  $\langle \rangle$  représente la moyenne prise sur la distribution de Wigner, on trouve que les spectres de bruit d'amplitude des faisceaux incident et réfléchi sont égaux :

$$S_p^{out} [\Omega] = S_p^{in} [\Omega]. \quad (2.50)$$

#### 2.2.3.4 Sensibilité optimale de la mesure

Les fluctuations de phase du faisceau réfléchi sont en revanche reliées à celles du faisceau incident, mais aussi aux fluctuations de position du miroir. On cherche à mesurer des déplacements du miroir mobile créés par une force extérieure (ou éventuellement par l'agitation thermique) : les déplacements  $\delta x [\Omega]$  ne sont alors pas corrélés aux fluctuations de phase  $\delta q^{in} [\Omega]$  du faisceau incident. Le calcul du spectre de bruit de phase du faisceau réfléchi à partir de l'équation (2.48) donne alors immédiatement :

$$S_q^{out} [\Omega] = S_q^{in} [\Omega] + 256 \frac{\mathcal{F}^2 \bar{I}^{in}}{1 + (\Omega/\Omega_{cav})^2} \frac{S_x [\Omega]}{\lambda^2}, \quad (2.51)$$

où  $\Omega_{cav} = \gamma/\tau$  est la bande passante de la cavité.

Le spectre de bruit de phase du faisceau réfléchi est donc la somme d'un "signal", relié au spectre  $S_x$  de déplacement du miroir que l'on veut mesurer, et d'un terme de "bruit", dû aux fluctuations quantiques de la phase du faisceau incident.

On peut estimer la sensibilité d'une mesure de position en définissant le plus petit déplacement mesurable, pour lequel les deux termes sont égaux. Pour un faisceau incident cohérent, le spectre de bruit de phase incident est blanc et  $S_q^{in} [\Omega] = 1$  pour toutes les fréquences  $\Omega$ . On obtient alors un déplacement minimum détectable  $\delta x_{shot}$  :

$$\delta x_{shot} [\Omega] = \frac{\lambda}{16\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{\bar{I}^{in}}} \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_{cav}}\right)^2}. \quad (2.52)$$

Pour une cavité de finesse  $\mathcal{F} = 3.10^5$  et une puissance incidente de 3 mW (correspondant à un flux de photons  $\bar{I}^{in} = 2.10^{16}$  photons/s à une longueur d'onde de 1  $\mu m$ ), on obtient une sensibilité  $\delta x_{shot}$  égale à  $10^{-21}$  m/ $\sqrt{Hz}$  ! On peut donc envisager de détecter ainsi un déplacement inférieur au milliardième d'Angström en intégrant sur une seconde.

Il est intéressant de comparer cette expression à celles correspondant aux limites de sensibilité dues par exemple au bruit thermique des miroirs ou au bruit de fréquence. À côté du facteur  $1/\sqrt{\bar{I}^{in}}$  qui fixe l'échelle du bruit quantique de phase (comme la température fixe celle du bruit thermique), on voit que la sensibilité est d'autant meilleure que la finesse de la cavité est grande, alors que celle-ci n'intervenait pas dans les autres limites de sensibilité dont nous avons déjà parlé. Pour le bruit de phase, on compare l'effet d'un déplacement  $\delta x$  du miroir, amplifié par la finesse de la cavité, à un bruit extérieur à la cavité, lié à la statistique des photons détectés, et qui a donc un niveau indépendant de  $\mathcal{F}$ . En revanche, le déplacement que l'on cherche à mesurer a un comportement similaire au déplacement lié à l'agitation thermique : pour une cavité de finesse  $\mathcal{F}$ , les deux effets sont amplifiés de la même façon et la limite de sensibilité due au bruit thermique ne dépend pas de  $\mathcal{F}$ . On obtient le même résultat pour le bruit de fréquence.

De la même façon, la dégradation de la sensibilité due au filtrage par la cavité n'apparaît que sur  $\delta x_{shot}$  : les variations du champ intracavité à une fréquence  $\Omega \gg \Omega_{cav}$  ont lieu sur une échelle de temps petite devant le temps de stockage de la cavité. Elles subissent un effet de filtrage passe-bas qui les empêche de profiter pleinement de l'amplification par la finesse de la cavité.

Cet effet de diminution de la sensibilité à haute fréquence se voit très bien sur la courbe de sensibilité de VIRGO (figure 10, page 24), puisque les cavités Fabry-Perot insérées dans les bras de l'interféromètre ont une bande passante d'un kilohertz. Pour les paramètres de VIRGO,  $\lambda \approx 1 \mu m$ ,  $\mathcal{F} = 50$  et une puissance lumineuse  $P^{in} = 1 kW$  en tenant compte du recyclage (soit  $\bar{I}^{in} = 5 \cdot 10^{21}$  photons par seconde), on obtient une sensibilité  $\delta x_{shot}$  à basse fréquence [12] :

$$\delta x_{shot} [\Omega \ll \Omega_{cav}] \approx 2 \cdot 10^{-20} m / \sqrt{Hz}. \quad (2.53)$$

## 2.3 Limite Quantique Standard

La sensibilité d'une mesure de déplacement augmente avec l'intensité incidente sur la cavité à miroir mobile (éq. 2.52). On pourrait penser qu'elle peut devenir arbitrairement grande en augmentant la puissance de la source laser. Indépendamment des contraintes techniques sur la tenue au flux des miroirs qui limite l'intensité intracavité qu'on peut effectivement utiliser, il existe une limite quantique à la sensibilité

d'une telle mesure de position, qui est due à l'effet sur le mouvement du miroir des fluctuations de la pression de radiation.

Si on cherche à mesurer un déplacement du miroir induit par une force extérieure, qu'il s'agisse de l'agitation thermique due à la force de Langevin  $F_T$  ou d'une force  $F_{ext}$  appliquée au miroir mobile, la mesure est limitée non seulement par le bruit de phase du faisceau incident, mais aussi par les fluctuations de position  $\delta x_{rad}$  produites par la pression de radiation. D'après l'équation (2.48), le bruit de phase à résonance du faisceau réfléchi par la cavité s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta q^{out} [\Omega] &= \frac{\gamma + i\Omega\tau}{\gamma - i\Omega\tau} \delta q^{in} [\Omega] \\ &+ \frac{4\sqrt{2}\gamma}{\gamma - i\Omega\tau} \bar{\alpha} k [\delta x_{rad} [\Omega] + \chi [\Omega] (F_T [\Omega] + F_{ext} [\Omega])], \end{aligned} \quad (2.54)$$

où  $\delta x_{rad}$  est relié aux fluctuations de la pression de radiation qui ne dépendent à résonance que des fluctuations d'intensité du faisceau incident (éqs. 2.13, 2.40 et 2.45) :

$$\delta F_{rad} [\Omega] = 2 \hbar k \bar{\alpha} \delta p [\Omega], \quad (2.55)$$

$$\delta x_{rad} [\Omega] = \chi [\Omega] \delta F_{rad} [\Omega] = \frac{4\hbar k \sqrt{\bar{I}^{in}}}{\gamma - i\Omega\tau} \chi [\Omega] \delta p^{in} [\Omega]. \quad (2.56)$$

Alors que le bruit de phase est indépendant de l'intensité incidente (premier terme de l'équation 2.54), le bruit de pression de radiation croît avec l'intensité. En termes de sensibilité pour la mesure d'un déplacement  $\delta x$ , le bruit de pression de radiation  $\delta x_{rad}$  est proportionnel à  $\sqrt{\bar{I}^{in}}$ , alors que le bruit de phase  $\delta x_{shot}$  décroît comme  $1/\sqrt{\bar{I}^{in}}$  (éq. 2.52). On peut noter aussi que  $\delta x_{rad}$  dépend de la réponse dynamique du miroir, par l'intermédiaire de sa susceptibilité mécanique  $\chi [\Omega]$  (éq. 2.56). Ainsi, les effets de pression de radiation sont plus importants au voisinage d'une résonance mécanique que loin de résonance.

La figure 13 montre la dépendance de  $\delta x_{shot}$  et  $\delta x_{rad}$  en fonction de l'intensité incidente  $\bar{I}^{in}$  en échelle logarithmique, à une fréquence  $\Omega$  donnée. Cette figure montre aussi le bruit total lorsque le faisceau incident est dans un état cohérent. Dans ce cas, les deux quadratures  $\delta q^{in}$  et  $\delta p^{in}$  sont décorréélées et ont un spectre égal à 1 ( $S_p^{in} [\Omega] = S_q^{in} [\Omega] = 1$ ). Le bruit total est alors simplement la somme quadratique de  $\delta x_{shot}$



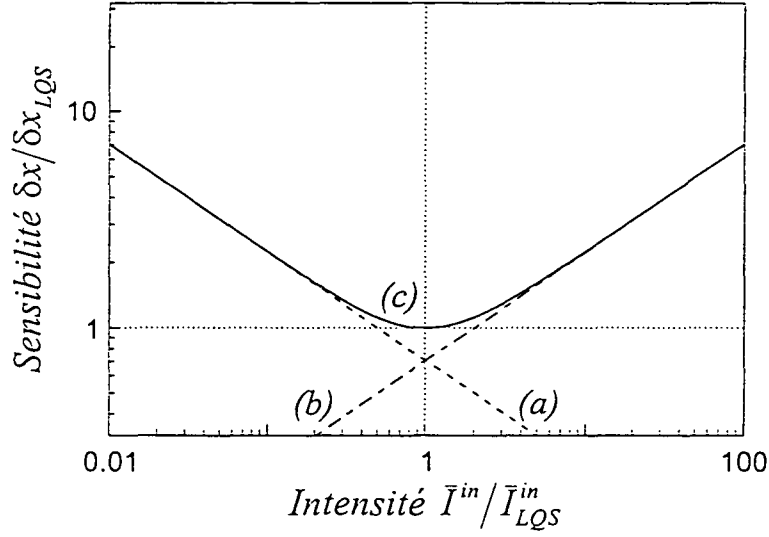


Fig. 13: Variation de la sensibilité d'une mesure de position en fonction de l'intensité moyenne incidente. La courbe (a) représente l'effet du bruit de phase du faisceau incident, la courbe (b) l'effet des fluctuations de la pression de radiation, et la courbe (c) la sensibilité totale résultante, qui atteint la Limite Quantique Standard  $\delta x_{LQS}$  pour  $\bar{I}^{in} = \bar{I}_{LQS}^{in}$ .

et  $\delta x_{rad}$ . Il apparaît clairement sur cette figure qu'il existe une limite quantique à la sensibilité de la mesure, atteinte lorsque les deux bruits sont égaux. D'après les équations (2.52) et (2.56), cette *Limite Quantique Standard* [14] est atteinte pour une intensité incidente égale à :

$$\bar{I}_{LQS}^{in} = \frac{\gamma^2 + \Omega^2 \tau^2}{32 \hbar k^2 |\chi[\Omega]|}. \quad (2.57)$$

La sensibilité minimale  $\delta x_{LQS}$  atteinte pour cette intensité possède la propriété remarquable de ne dépendre que des caractéristiques mécaniques du miroir mobile. A partir des équations (2.52), (2.56) et (2.57), on trouve en effet :

$$\delta x_{LQS}[\Omega] = \sqrt{\hbar |\chi[\Omega]|}. \quad (2.58)$$

Ce résultat est en fait une conséquence de la théorie quantique de la mesure et de l'inégalité de Heisenberg. Supposons que l'on cherche à mesurer de manière continue la position  $x$  d'un miroir libre pendant un temps  $\tau$  (c'est ce qu'on fait dans une mesure interférométrique). Cette mesure se heurte alors à une limite fondamentale imposée par l'inégalité de Heisenberg : après une mesure initiale de  $x$  avec une précision  $\Delta x_0$ , l'impulsion du miroir ne peut être définie à mieux qu'une quantité  $\Delta p_0 = \hbar/2\Delta x_0$ . Si on répète la mesure après un temps  $\tau$ , la position du miroir présente une dispersion supérieure à  $\Delta x_1 = \tau \Delta p_0 / M = \hbar \tau / (2M \Delta x_0)$  où  $M$  est la masse du miroir. Un com-

promis entre les deux mesures conduit à une Limite Quantique Standard  $\Delta x_{LQS}$  pour la mesure qui est de l'ordre de [55] :

$$\Delta x_{LQS} \approx \sqrt{\frac{\hbar \tau}{M}}. \quad (2.59)$$

Le résultat de l'équation (2.58) apparaît ainsi comme une généralisation de ce raisonnement simple,  $\delta x_{LQS}$  représentant l'amplitude spectrale de la dispersion  $\Delta x_{LQS}$  dans le cas d'un miroir libre, de susceptibilité  $\chi[\Omega] = 1/M\Omega^2$ .

Cette Limite Quantique Standard est donc liée à la théorie quantique de la mesure et, du fait de son caractère universel, elle existe dans de nombreux dispositifs de mesure. Ainsi, dans un détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles, les modes pendulaires des suspensions des miroirs ont des fréquences de résonance très basses (inférieures au hertz) et dans la zone d'analyse spectrale qui commence vers  $10 \text{ Hz}$ , leur comportement dynamique correspond pratiquement à celui d'une masse libre. La limite sur la sensibilité  $\delta x_{LQS}$  est alors inversement proportionnelle à la fréquence :

$$\delta x_{LQS}[\Omega] \approx \frac{\sqrt{\hbar/M}}{\Omega}, \quad (2.60)$$

et vaut  $6 \cdot 10^{-20} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$  à  $10 \text{ Hz}$ , en tenant compte des quatre miroirs de l'interféromètre. Cette limite quantique est dans VIRGO environ cent fois plus petite que le bruit thermique (éq. 2.24) [12].

Ce résultat montre qu'il est relativement délicat de mettre en évidence cette limite quantique. Il existe principalement deux conditions pour pouvoir observer cet effet de la pression de radiation. La première est de pouvoir disposer d'une intensité incidente suffisante. L'équation (2.57) peut être écrite en fonction du déphasage non-linéaire  $\Psi_{NL}$ , qui dépend de l'intensité intracavité (éq. 2.17). En négligeant l'effet de filtrage par la cavité, la condition sur l'intensité nécessaire pour atteindre la Limite Quantique Standard est équivalente à :

$$4 \frac{\Psi_{NL}}{\gamma} \left| \frac{\chi[\Omega]}{\chi[0]} \right| = 1. \quad (2.61)$$

A basse fréquence (où  $\chi[\Omega] \approx \chi[0]$ ), cette condition se résume à  $\Psi_{NL}/\gamma \approx 1$ . Comme  $\Psi_{NL}$  est le déphasage lié au recul  $\bar{x}$  du miroir sous l'effet de la pression de radiation moyenne (voir la section 2.1.4), on trouve finalement que le recul  $\bar{x}$  doit être de l'ordre de la largeur de la résonance de la cavité :

$$\frac{\Psi_{NL}}{\gamma} = \frac{2\bar{x}}{\lambda/2\mathcal{F}} \approx 1. \quad (2.62)$$

Cette condition est similaire à celle qui doit être vérifiée pour atteindre le régime de fonctionnement bistable de la cavité [33] : le recul du miroir lorsque la cavité est à résonance a pour effet de déformer le pic d'Airy comme sur la figure 4 (page 14). Il s'agit là d'une condition très générale en optique quantique : au voisinage des points tournants de la bistabilité, ou des points d'instabilité d'un système, les non-linéarités sont suffisamment importantes pour modifier fortement les fluctuations quantiques. Ici, lorsque la non-linéarité  $\Psi_{NL}$  est de l'ordre des pertes  $2\gamma$  de la cavité, les fluctuations quantiques de phase  $\delta q^{out}$  du faisceau réfléchi sont profondément modifiées par les fluctuations de l'intensité incidente, proportionnelles à  $\delta p^{in}$  (voir les équations 2.54 et 2.56).

Notons que la condition (2.61) dépend de la fréquence. Si on suppose que le mouvement du miroir est harmonique, la susceptibilité est de la forme :

$$\chi[\Omega] = \frac{1}{M[\Omega_M^2 - \Omega^2 - i\Omega\Omega_M/Q]}, \quad (2.63)$$

où  $M$  est la masse de l'oscillateur,  $\Omega_M$  sa fréquence de résonance et  $Q$  son facteur de qualité mécanique. La dynamique du miroir est ainsi plus favorable aux effets des fluctuations de la pression de radiation à la fréquence de résonance, où la condition (2.61) devient :

$$\frac{\Psi_{NL}}{\gamma} \approx \frac{1}{Q}. \quad (2.64)$$

On peut ainsi atteindre la Limite Quantique Standard avec une intensité beaucoup plus faible. En revanche, à haute fréquence, la condition est moins favorable puisqu'elle devient :

$$\frac{\Psi_{NL}}{\gamma} \approx \left(\frac{\Omega}{\Omega_M}\right)^2. \quad (2.65)$$

Cette condition n'est toutefois pas suffisante pour pouvoir observer la Limite Quantique Standard. Il faut aussi que les effets de la pression de radiation soient grands devant le bruit thermique. Pour évaluer cette condition, on peut comparer les deux spectres de bruit associés. A partir de l'équation (2.56), de la définition de  $\Psi_{NL}$  et de l'expression des fluctuations d'amplitude intracavité (éqs. 2.17 et 2.45), on trouve que le spectre de bruit de position  $S_x^{rad}[\Omega]$  dû à la pression de radiation est donné par :

$$S_x^{rad}[\Omega] = 2\hbar \frac{\Psi_{NL}}{\gamma} \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_{cav})^2} \frac{|\chi[\Omega]|^2}{\chi[0]}. \quad (2.66)$$

Le bruit d'agitation thermique  $S_x^T[\Omega]$  est relié au spectre de la force de Langevin (éq. 2.14) :

$$S_x^T[\Omega] = |\chi[\Omega]|^2 S_T[\Omega] = -\frac{2k_B T}{\Omega} |\chi[\Omega]|^2 \text{Im} \left( \frac{1}{\chi[\Omega]} \right). \quad (2.67)$$

Pour un mouvement harmonique, et en négligeant le filtrage de la cavité dans l'équation (2.56), la condition se met alors sous la forme :

$$\frac{n_T}{Q} \ll \frac{\Psi_{NL}}{\gamma}, \quad (2.68)$$

où  $n_T = k_B T / \hbar \Omega_M$  est le nombre de quanta thermiques de l'oscillateur. Si on rapproche cette condition de celle nécessaire à l'observation de la bistabilité, on trouve, à basse fréquence, que  $n_T$  doit être petit devant  $Q$  : on a donc intérêt à se placer à basse température, et à prendre un oscillateur de fréquence de résonance  $\Omega_M$  la plus grande possible.

La combinaison de ces deux conditions est encore plus difficile à satisfaire à la fréquence de résonance, où on trouve à partir des équations (2.64) et (2.68) que le nombre de quanta thermiques doit être petit devant 1. En d'autres termes, le miroir doit être dans un régime quantique, son agitation thermique devant être petite devant la dispersion quantique de position. En revanche, il est plus facile de satisfaire la condition (2.68) à haute fréquence puisqu'alors  $\Psi_{NL}/\gamma$  est grand devant 1 (éq. 2.65). Remarquons toutefois que cette dernière condition signifie que le recul moyen  $\bar{x}$  du miroir est très grand devant la largeur de la résonance. La cavité à miroir mobile fonctionne donc dans un régime très bistable, le pic d'Airy de la figure 4 (page 14) étant très incliné sur l'axe horizontal, et il peut être délicat d'asservir la cavité à résonance.

Notons pour finir que nous avons supposé le champ incident dans un état cohérent. Si ce n'est pas le cas, le bruit quantique  $\delta q^{out}$  dans la mesure peut être très différent de celui qui mène à la Limite Quantique Standard. Par exemple, si le champ incident est un état comprimé dont la quadrature comprimée correspond à la combinaison linéaire de  $\delta q^{in}$  et  $\delta p^{in}$  qui apparaît dans l'expression de  $\delta q^{out}$  (éq. 2.54), le bruit dans la mesure va être réduit. Il est donc possible d'augmenter la sensibilité au-delà de la Limite Quantique Standard, qui n'apparaît pas comme une limite quantique fondamentale [16]. Cette possibilité d'améliorer la sensibilité de la mesure au niveau quantique est d'ailleurs à l'origine des nombreux travaux qui ont été réalisés sur les états comprimés.

### 3 Le montage expérimental

Ce chapitre est consacré à la description de la partie optique du montage expérimental, qui va nous permettre d'étudier les mouvements du miroir avec une sensibilité comparable à celle discutée au chapitre 2. Le montage est essentiellement composé de trois parties :

- la source laser est un laser titane-saphir délivrant une puissance supérieure à 1 W à une longueur d'onde voisine de 810 nm. Etant données les caractéristiques de la cavité à miroir mobile, la source laser doit être stabilisée en fréquence et en intensité. De plus, le faisceau laser traverse une cavité de filtrage afin de supprimer l'astigmatisme qu'il présente à la sortie du laser. Ceci permet d'obtenir une bonne adaptation spatiale avec le mode fondamental de la cavité à miroir mobile ;

- les différentes cavités à miroir mobile que nous allons étudier dans la suite sont toutes des cavités linéaires à une seule entrée-sortie. Le miroir d'entrée est toujours un coupleur commercial plan-concave (*Newport SuperMirror*). Le miroir arrière, dont la face traitée est plane, peut être un autre *SuperMirror* ou un miroir mobile plan-convexe réalisé spécifiquement pour notre expérience ;

- enfin, pour mesurer les fluctuations du faisceau réfléchi, on utilise un système de détection homodyne, basé sur un dispositif interférométrique et sur une détection équilibrée constituée de deux photodiodes appariées de très grande efficacité quantique.

Dans ce chapitre, nous allons décrire ces différentes parties et leurs performances. D'autres éléments du montage expérimental, plus spécifiques aux expériences que nous avons réalisées, seront décrits dans les chapitres suivants. Au début de cette thèse en septembre 1996, l'ensemble de la source laser et la détection équilibrée (le bloc des deux photodiodes et l'électronique associée) avaient déjà été réalisés dans le cadre de la thèse de Yassine Hadjar [37]. Nous décrirons donc plus brièvement ces deux éléments, utilisés quotidiennement mais qui avaient déjà été réalisés.

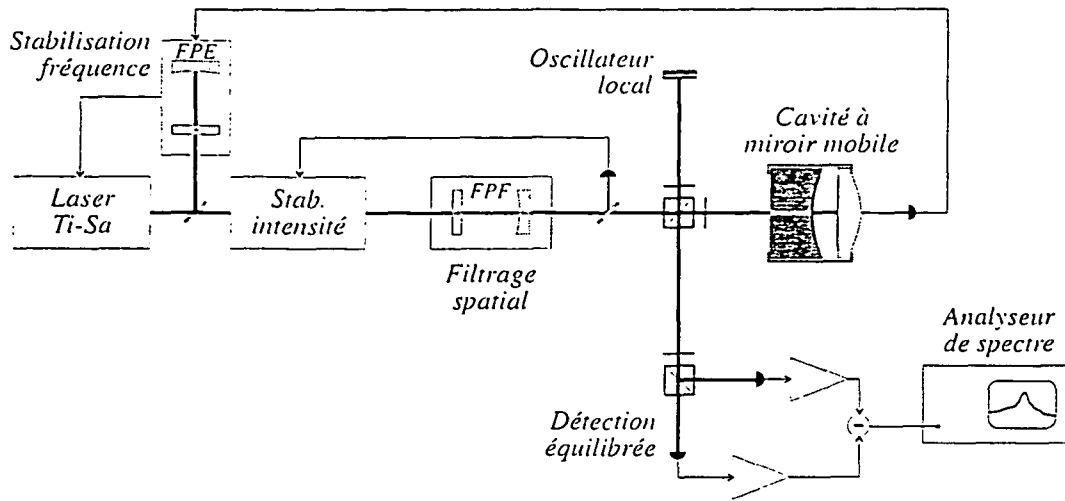


Fig. 14: Vue d'ensemble du montage expérimental, constitué de la source laser, de la cavité à miroir mobile, et de la détection homodyne.

### 3.1 La source laser

Etant donné les objectifs de notre expérience et les propriétés de la cavité à miroir mobile, la source laser doit présenter certaines caractéristiques spécifiques :

- pour trouver la résonance de la cavité, qui est très courte ( $L \leq 1 \text{ mm}$ ), il faut pouvoir facilement balayer la fréquence du laser sur une plage d'au moins  $300 \text{ GHz}$ . Ce balayage n'a pas besoin cependant d'être effectué continûment. Lorsqu'on règle l'alignement du faisceau sur la cavité, on observe un peigne très large de résonances, correspondant aux différents modes transverses de la cavité. Il suffit en pratique que le laser puisse être balayé continûment sur quelques intervalles entre modes transverses (soit un balayage continu de l'ordre de  $10 \text{ GHz}$ ), le reste pouvant s'effectuer par sauts de fréquence. Un *lambdamètre* est alors nécessaire pour suivre les évolutions de la longueur d'onde du laser lors du balayage continu ou des sauts de fréquence ;

- comme nous le verrons dans la section (3.2), la cavité à miroir mobile ne dispose pas d'élément piézoélectrique pour faire varier sa longueur. Pour parcourir le pic d'Airy de la cavité, ce qui facilite son réglage et permet de déterminer sa bande passante, il faut donc pouvoir moduler la fréquence du laser, avec une amplitude supérieure à la bande passante de la cavité (qui est de l'ordre de quelques mégahertz) à une fréquence au moins égale à  $100 \text{ Hz}$  pour faciliter la visualisation du pic sur un oscilloscope ;

- quand le laser est asservi sur la résonance de la cavité, ses fluctuations de fréquence doivent être petites devant la bande passante de la cavité. De plus, la cavité

étant un système bistable, l'intensité du laser doit être contrôlée à basse fréquence afin de pouvoir définir précisément le point de fonctionnement du système ;

- enfin, pour obtenir la sensibilité aux petits déplacements discutée au chapitre 2 et espérer observer les effets quantiques du couplage optomécanique, il est nécessaire que les fluctuations d'intensité et de phase du laser se réduisent, à la fréquence d'analyse la plus basse possible, aux fluctuations quantiques.

En résumé, la source laser doit être parfaitement stabilisée en fréquence et en intensité, aisément balayable en fréquence sur de grands intervalles et son bruit technique doit être négligeable aux fréquences d'analyse auxquelles on travaille. On pourrait ajouter qu'elle doit être le mieux adaptée possible au mode fondamental de la cavité à miroir mobile. Toutes ces contraintes nous ont amenés à choisir un laser titane-saphir, fonctionnant aux environs de  $810\text{ nm}$ , où des miroirs à faibles pertes sont disponibles pour réaliser une cavité de grande finesse.

L'ensemble de la source laser peut se décomposer en cinq éléments, visibles sur la figure 14. L'élément principal est un laser titane-saphir qui produit un faisceau monomode et balayable. Un système de stabilisation sur une cavité externe (FPE) permet de réduire les importantes fluctuations de fréquence du laser. Le faisceau est ensuite stabilisé en intensité et filtré spatialement, ce qui lui permet de présenter toutes les qualités requises par l'expérience au niveau de l'entrée de la cavité. Un dernier asservissement permet alors de maintenir le laser à résonance avec la cavité à miroir mobile. Nous allons maintenant présenter plus en détail ces cinq éléments.

### 3.1.1 Le laser titane-saphir

Notre laser titane-saphir est un laser en anneau, construit selon un modèle initialement développé au laboratoire par François Biraben [56]. La figure 15 présente l'ensemble des éléments assurant son fonctionnement. Les miroirs  $M_1$  à  $M_5$  sont totalement réfléchissants à la longueur d'onde d'émission ( $\lambda \approx 810\text{ nm}$ ), le coupleur de sortie  $M_6$  ayant une transmission de 4%. Le cristal titane-saphir, taillé à l'angle de Brewster, est pompé par un laser à Argon ionisé continu (modèle *Coherent INNOVA 400*), utilisé en mode multiraies et qui délivre une puissance de  $10\text{ W}$ .

Un certain nombre d'éléments sont placés dans la cavité. Il y a tout d'abord le rotateur de Faraday, qui sert à fixer le sens de propagation du faisceau dans la cavité. Dans une cavité en anneau, il peut y avoir a priori deux ondes progressives se propageant en sens inverse. Le rotateur de Faraday, constitué d'une lame de verre *Hoya FR5* ayant une forte constante de Verdet et d'un aimant créant un champ magnétique

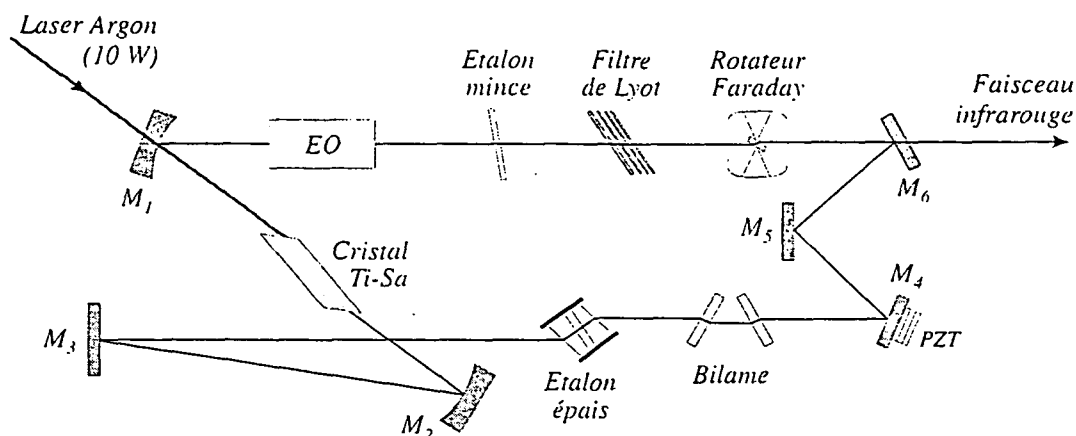


Fig. 15: Vue d'ensemble du laser titane-saphir.

de  $0,5 T$ , fait tourner la polarisation du faisceau d'un angle indépendant du sens de propagation (effet Faraday). L'utilisation des miroirs non coplanaires  $M_4$ ,  $M_5$  et  $M_6$  ( $M_5$  est situé au-dessus du plan du laser) compense cette rotation pour un des sens de propagation et l'augmente pour l'autre, qui subit alors des pertes au niveau des éléments polarisants (lames à l'incidence de Brewster) présents dans la cavité. La différence des pertes entre les deux sens de propagation suffit alors à assurer un fonctionnement unidirectionnel stable du laser.

Les autres éléments placés dans la cavité servent essentiellement à la sélection de la longueur d'onde émise par le laser. La courbe de fluorescence du cristal est en effet très large par rapport à l'intervalle entre les modes longitudinaux de la cavité (de l'ordre de  $200 MHz$  en fréquence pour une cavité de longueur  $1,6 m$ ), et on obtient une émission laser multimode.

On utilise alors trois éléments sélectifs en fréquence pour rendre l'émission monomode. Le premier est le filtre de Lyot qui sélectionne une plage de quelques centaines de gigahertz. Il s'agit d'un ensemble de quatre lames biréfringentes à l'incidence de Brewster. Leurs axes optiques sont parallèles et leurs épaisseurs sont choisies dans les rapports 1, 2, 4 et 16, la lame la plus mince ayant une épaisseur de  $410 \mu m$ , pour qu'elles sélectionnent toutes la même longueur d'onde.

Le second élément sélectif est l'étalon mince, qui est une cavité Fabry-Perot constituée d'une simple lame en silice non traitée, avec un intervalle spectral libre  $c/2nL = 150 GHz$  pour un indice  $n = 1,43$  et une épaisseur  $L = 0,7 mm$ . On peut incliner la lame par rapport au laser grâce à un bras de levier commandé par un moteur,



ce qui permet de modifier l'épaisseur optique de la lame, et donc la longueur d'onde sélectionnée. Pour maintenir la lame à résonance lors d'un balayage de la longueur d'onde du laser, on utilise un asservissement qui minimise l'intensité réfléchie par la lame.

Le dernier élément sélectif est l'étalon épais, constitué d'une cavité Fabry-Perot formée par deux prismes dont les faces en regard sont traitées pour avoir un coefficient de réflexion d'environ 30 %. Pour une distance entre les deux faces de 8 mm, on obtient un intervalle spectral libre de 19 GHz. L'un des deux prismes est monté sur une cale piézoélectrique, ce qui permet de modifier la fréquence de résonance de l'étalon. Cette fréquence de résonance est asservie sur la fréquence du laser grâce à une détection synchrone. La modulation interne de la détection synchrone module la longueur de l'étalon à travers un amplificateur haute-tension qui commande la cale piézoélectrique. Le signal d'erreur est fourni par la modulation d'intensité résultante à la même fréquence en sortie du laser, qui s'annule lorsque l'étalon épais est à résonance avec le laser.

Lorsque ces trois éléments sélectifs sont réglés et centrés sur un même mode de la cavité laser, les asservissements des deux étalons étant fermés, on obtient à la sortie du laser un faisceau monomode, d'une puissance supérieure à 1,1 W. Le laser peut osciller sur une très large plage de longueur d'onde, de 800 à 850 nm, sans changer les miroirs de la cavité. En pratique, on n'utilise le laser qu'aux environs de 810 nm, où les traitements optiques de la cavité à miroir mobile sont les plus réfléchissants.

Le dernier élément placé dans la cavité est un bilame qui permet de balayer continûment la fréquence du laser. Un moteur permet de faire tourner les lames de façon symétrique, et donc de modifier la longueur optique de la cavité sans la désaligner. Les différents asservissements de la cavité permettent de réaliser un balayage continu de la fréquence du laser sur plusieurs dizaines de gigahertz. On peut par ailleurs effectuer des sauts de 19 GHz par saut de mode de l'étalon épais en inclinant l'étalon mince, ou encore de 150 GHz par saut de mode de l'étalon mince en tournant les lames du Lyot.

Pour se repérer lors des différents balayages et des sauts qu'on effectue, la longueur d'onde du laser est mesurée en permanence par un lambdamètre. Une petite partie (environ 30 mW) du faisceau issu du laser est ainsi envoyée, à travers une fibre optique, dans un lambdamètre placé sur une table optique séparée. Ce modèle conçu au laboratoire est basé sur un double interféromètre de Michelson, un bloc de deux coins de cubes motorisé permettant de modifier la longueur des deux bras, dans lesquels on envoie simultanément le laser à mesurer et un second laser de référence. Les deux faisceaux sont alignés très précisément et suivent des trajets équivalents dans les deux bras

de l'interféromètre. Les franges d'interférences associées aux deux lasers sont détectées sur des photodiodes séparées, le rapport  $f_1/f_2$  des fréquences des deux signaux donnant alors directement le rapport  $\lambda_2/\lambda_1$  des deux longueurs d'ondes.

Le faisceau de référence est issu d'un laser hélium-néon. Pour une cavité laser suffisamment courte ( $L \approx 15 \text{ cm}$ ), seuls deux modes longitudinaux, polarisés linéairement et orthogonalement, sont situés dans la courbe de gain. L'utilisation de deux lames à l'incidence de Brewster ayant leurs plans d'incidence orthogonaux, permet de prélever une petite partie de ces deux polarisations, et de mesurer leurs intensités respectives à l'aide de deux photodiodes. Un asservissement en température de la longueur du tube du laser permet alors de maintenir une différence nulle entre les intensités de ces deux composantes et de les placer à égale distance de part et d'autre du sommet de la courbe de gain. Un polariseur sélectionne une seule de ces deux raies, afin d'obtenir un faisceau de référence stabilisé en fréquence.

Les franges sont mises en forme et comptées électroniquement, la vitesse de déplacement du bloc de coins de cube étant asservie sur la fréquence des franges du laser de référence, fixée à  $100 \text{ kHz}$ . La précision de la mesure dépend du temps d'acquisition. En pratique, on a une précision relative de l'ordre de  $10^{-6}$  avec une mesure par seconde, ce qui est largement suffisant pour retrouver la résonance de la cavité à miroir mobile. En effet, la valeur exacte de la longueur d'onde de cette résonance évolue dans le temps à cause de la dilatation des pièces mécaniques occasionnée par les variations de température dans la salle. Pour retrouver la résonance, on se place donc à proximité de la valeur attendue et on balaie la longueur d'onde du laser autour de cette valeur.

### 3.1.2 Stabilisation en fréquence

Le faisceau issu du laser est monomode et sa longueur d'onde est aisément balayable sur une très grande plage. On a donc rempli la première condition indiquée au début de cette section. Mais il présente d'importantes fluctuations de fréquence (*jitter*) occasionnées par les vibrations mécaniques des différents éléments optiques de la cavité laser. Ces fluctuations ont une amplitude de l'ordre du mégahertz, c'est-à-dire du même ordre de grandeur que la bande passante des cavités à miroir mobile que l'on va utiliser. Il faut donc absolument les réduire dans une très large proportion. On utilise pour cela une cavité externe très stable mécaniquement, et on asservit la fréquence du laser sur une des résonances de cette cavité.

La stabilisation en fréquence utilise un asservissement basé sur la méthode Pound-Drever [57], en réflexion sur une cavité Fabry-Perot externe (FPE). Il s'agit d'une

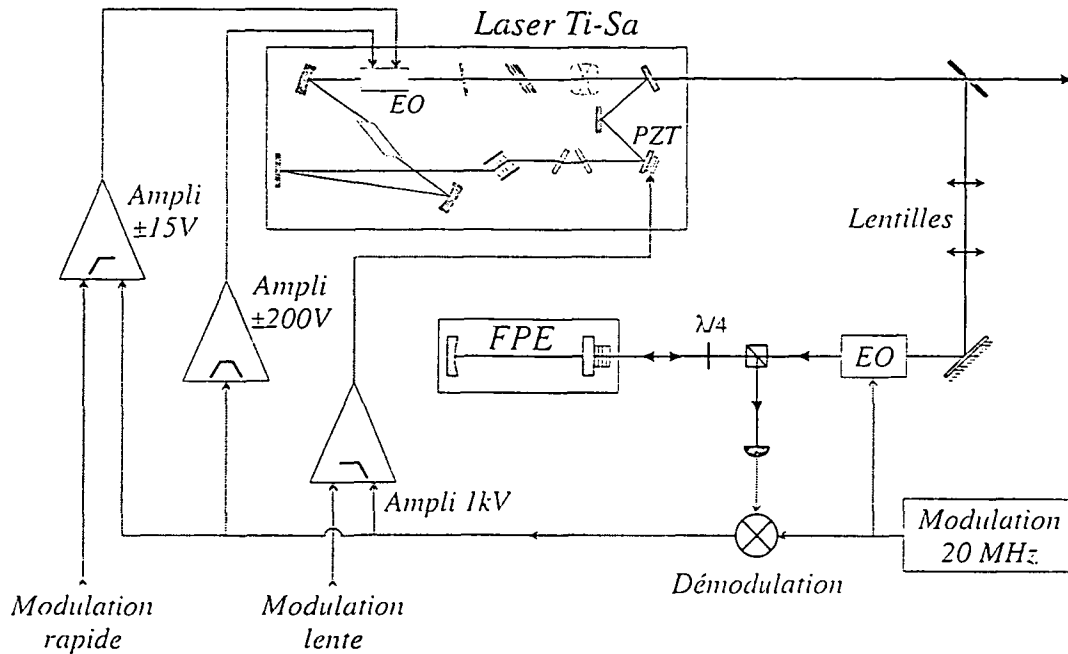


Fig. 16: Schéma général de l'asservissement du laser sur le FPE par la méthode Pound-Drever. Le signal d'erreur, obtenu à partir de la modulation d'intensité du faisceau réfléchi par la cavité, contrôle la fréquence du laser par l'intermédiaire d'un miroir monté sur une cale piézoélectrique (PZT) et de l'électro-optique du laser (EO).

cavité à une entrée-sortie, avec un miroir d'entrée plan d'une réflectivité de 98 % et un miroir arrière sphérique de grande réflectivité. La cavité est montée sur un barreau en invar (matériau à très faible coefficient de dilatation). Pour l'isoler des vibrations mécaniques de la table, la cavité est suspendue par des tiges élastiques à l'intérieur d'une boîte étanche en laiton.

Une petite partie du faisceau est prélevée à la sortie du laser et adaptée spatialement au mode fondamental  $TEM_{00}$  du FPE par un jeu de deux lentilles. Avant d'être envoyé dans la cavité FPE, le faisceau traverse successivement un cube séparateur de polarisation et une lame  $\lambda/4$ . Ce dispositif permet de récupérer le faisceau réfléchi par la cavité : le passage à l'aller dans la lame  $\lambda/4$  transforme la polarisation, qui est alors circulaire au niveau de la cavité, et le passage au retour dans la lame la transforme en polarisation linéaire, perpendiculaire à la polarisation incidente. Le cube éjecte ainsi le faisceau réfléchi par la cavité, ce qui permet de le séparer spatialement du faisceau incident et de mesurer son intensité avec une photodiode.

Le principe de l'asservissement Pound-Drever est le suivant : avant d'être envoyé sur la cavité, le faisceau traverse un modulateur électro-optique, qui module sa phase à une fréquence  $f_m = 20 \text{ MHz}$ , intermédiaire entre la bande passante de la cavité FPE (de l'ordre de  $2 \text{ MHz}$ ) et l'intervalle entre ses modes transverses (de l'ordre de  $90 \text{ MHz}$ ). Pour une faible amplitude de modulation, on obtient à l'entrée de la cavité un champ qui présente deux raies latérales décalées de  $\pm f_m$  en fréquence, et en quadrature avec la porteuse du faisceau. On n'a donc pas de modulation d'intensité du faisceau incident sur le FPE, ni sur le faisceau réfléchi quand la cavité est à l'accord. Mais le déphasage subi par la porteuse lors de sa réflexion sur le FPE dépend de son désaccord avec la fréquence de résonance de ce dernier (voir le paragraphe 2.1.1) : un désaccord non-nul se traduit donc par une modulation d'intensité du faisceau réfléchi. Le signal démodulé, obtenu en mélangeant l'intensité détectée par la photodiode avec la modulation utilisée pour piloter l'électro-optique, fournit un signal d'erreur qui reproduit une courbe de dispersion en fonction du désaccord entre le laser et le FPE. On obtient ainsi un signal d'erreur qui présente à la fois une pente importante à résonance et une importante plage de capture, de l'ordre de  $20 \text{ MHz}$ , ces deux conditions étant nécessaires à l'efficacité de l'asservissement.

Comme on le voit sur la figure 16, le signal d'erreur est utilisé pour agir sur la fréquence du laser de façon à la garder à résonance avec la cavité FPE. A partir de ce signal, on obtient à l'aide de filtres trois signaux qui vont agir dans trois boucles d'asservissement en parallèle. La voie lente pilote la cale piézoélectrique du miroir  $M_4$  du laser. Elle permet ainsi de corriger à basse fréquence d'importantes variations de longueur de la cavité laser. Ce signal est intégré jusqu'à une fréquence de  $150 \text{ Hz}$ , ce qui améliore le fonctionnement de la boucle à basse fréquence. Cette voie possède aussi une entrée qui permet de moduler à  $100 \text{ Hz}$  la fréquence du laser sur une plage de quelques dizaines de mégahertz. Cette entrée est utilisée pour visualiser le pic d'Airy de la cavité à miroir mobile.

La voie intermédiaire, constituée d'un amplificateur rapide d'amplitude  $\pm 200 \text{ V}$ , pilote une des deux voies de l'électro-optique interne du laser, à des fréquences allant jusqu'à  $100 \text{ kHz}$ . Cet amplificateur sert également à compenser la modulation de la fréquence du laser induite par l'asservissement de l'étalon épais.

Enfin, la voie rapide pilote directement la seconde voie de l'électro-optique avec une amplitude maximale de  $\pm 15 \text{ V}$ . Elle permet ainsi de contrôler des fluctuations de plus faible amplitude, mais à des fréquences allant jusqu'au mégahertz. Notons pour finir qu'il y a également une entrée modulation sur la voie rapide, qui permet de moduler la fréquence du laser avec une faible amplitude (typiquement de l'ordre du kilohertz) à

des fréquences allant jusqu'à quelques mégahertz. On verra dans la section (3.4) qu'on peut ainsi calibrer les mesures de petits déplacements réalisées avec la cavité à miroir mobile.

Lorsque les gains des trois boucles sont optimisés, on obtient des fluctuations de fréquence inférieures à  $4 \text{ kHz rms}$ .

### 3.1.3 Stabilisation en intensité

Le faisceau sortant du laser présente également d'importantes fluctuations d'intensité, dues pour l'essentiel aux vibrations des différents éléments optiques du laser. Le point de fonctionnement de la cavité à miroir mobile dépendant de l'intensité incidente, par l'intermédiaire du déplacement moyen du miroir sous l'effet de la pression de radiation, il est important de fixer avec précision l'intensité moyenne incidente, et de limiter les fluctuations d'intensité à basse fréquence.

Le principe de l'asservissement consiste à utiliser un atténuateur variable piloté par une boucle électronique de contre-réaction qui contrôle l'intensité transmise par l'atténuateur. Le faisceau en sortie du laser étant polarisé linéairement, il traverse un modulateur électro-optique dont les lignes neutres sont à  $45^\circ$  de la polarisation incidente. L'électro-optique est suivi d'un polariseur parallèle à cette polarisation. L'intensité  $I^t$  transmise par cet atténuateur variable peut alors s'écrire :

$$I^t = \frac{I^{in}}{2} [1 + \cos(\epsilon)], \quad (3.1)$$

où  $\epsilon$  est la différence des déphasages subis par les deux polarisations propres de l'électro-optique, différence qui est proportionnelle à la tension appliquée à l'entrée du modulateur.

Le signal d'erreur est fourni par une photodiode placée après la cavité de filtrage décrite dans le paragraphe suivant (voir figure 19, page 52), de façon à contrôler l'intensité incidente sur la cavité à miroir mobile, indépendamment de toute perturbation que pourrait introduire la cavité de filtrage. Ce signal est comparé, grâce à un amplificateur différentiel à faible bruit, à une tension de référence très stable et réglable, ce qui permet de régler l'intensité moyenne envoyée vers la cavité à miroir mobile.

Pour avoir un gain suffisant, on a intérêt à travailler à mi-transmission de l'atténuateur variable, ce qui n'est en pratique pas gênant, puisque l'intensité disponible à la

sortie du laser est très nettement supérieure à celle qu'il faut envoyer vers la cavité à miroir mobile.

Les fluctuations relatives d'intensité passent de quelques pourcent à environ 0,2 % en présence de l'asservissement. L'asservissement est efficace jusqu'à environ 50 kHz. On constate également qu'il crée un léger excès de bruit aux environs de 100 kHz, probablement dû à un déphasage incontrôlé dans la boucle de contre-réaction.

Enfin, nous avons mesuré le bruit d'intensité à haute fréquence à l'aide de la détection équilibrée décrite dans la section (3.3.3). Le laser présente un excès de bruit d'environ 30 dB par rapport au bruit de photon standard pour des fréquences inférieures à 500 kHz, mais le bruit d'intensité est égal au bruit de photon standard au-delà de 1 MHz.

### 3.1.4 Filtrage spatial

Une bonne adaptation spatiale entre le faisceau lumineux et la cavité à miroir mobile est une condition importante pour obtenir la meilleure sensibilité possible aux déplacements du miroir mobile. Si cette adaptation n'est pas parfaite, seule la composante du faisceau incident correspondant au mode fondamental pénètre dans la cavité, le reste étant réfléchi directement sans interagir avec la cavité et le miroir mobile. Une mauvaise adaptation réduit donc l'intensité utile incidente sur la cavité. La sensibilité étant déterminée par le bruit quantique total du faisceau réfléchi, une mauvaise adaptation est équivalente à des pertes qui limitent la sensibilité.

Le faisceau sortant du laser présente un astigmatisme important, occasionné par des effets de lentille thermique dans le cristal et par la présence dans la cavité laser de nombreux éléments optiques à l'incidence de Brewster, qui ne respectent pas la symétrie cylindrique autour de l'axe du faisceau. On peut mesurer les caractéristiques du mode spatial avec un analyseur de modes (modèle *Coherent ModeMaster*) : le faisceau présente un col  $w_L = 0,6 \text{ mm}$ , qui est situé à environ 180 mm du miroir  $M_6$  de sortie du laser, et donc une longueur de Rayleigh  $z_R = \pi w_L^2 / \lambda$  égale à 1,4 m. Le faisceau n'est néanmoins pas parfaitement gaussien. Ainsi, on a un écart de 10 % entre les tailles des cols dans les directions horizontale et verticale, et une séparation d'environ 20 cm, soit 15 % de la longueur de Rayleigh, entre la position de ces deux cols. Un dispositif de filtrage spatial permet de donner au faisceau un profil gaussien et cylindrique, qui peut ainsi mieux s'adapter au mode fondamental de la cavité.

### 3.1.4.1 Principe et réalisation du filtrage

On utilise une cavité linéaire non-dégénérée, dont les deux miroirs ont la même transmission. On asservit la longueur de cette cavité de façon à garder son mode fondamental à résonance avec le laser : la composante du faisceau sur ce mode  $TEM_{00}$  est alors intégralement transmise par la cavité, les autres composantes étant hors de résonance et donc réfléchies. On obtient ainsi après la cavité de filtrage un faisceau parfaitement gaussien  $TEM_{00}$ .

La cavité Fabry-Perot de filtrage spatial (FPF) est constituée d'un miroir d'entrée plan et d'un miroir de sortie de rayon de courbure égal à 1 m. Ces deux miroirs ont le même coefficient de réflexion de 95%. L'adaptation spatiale du laser sur la cavité est réalisée par un jeu de deux lentilles de focales respectives 30 et 28 mm montées sur deux platines de translation, et par un ensemble constitué de deux miroirs placés dans des supports micrométriques. Le miroir d'entrée de la cavité est monté sur une cale piézoélectrique qui permet de moduler la longueur de la cavité. Grâce à ce balayage, on effectue l'alignement précis du faisceau sur la cavité en visualisant sur un oscilloscope les résonances associées aux différents modes transverses. En pratique, on peut répartir environ 90 % de la puissance incidente dans le mode fondamental du FPF.

L'asservissement de la longueur de la cavité est réalisé avec une détection synchrone. Une modulation à 4,5 kHz est appliquée à la cale piézoélectrique du miroir d'entrée de la cavité par l'intermédiaire d'un amplificateur haute tension. La variation de longueur de la cavité qui en résulte induit une modulation de l'intensité réfléchie, qui est détectée sur une photodiode BPW34 et fournit, après démodulation par la détection synchrone et intégration, un signal d'erreur proportionnel au désaccord entre la résonance de la cavité et le laser. Ce signal est renvoyé sur la cale piézoélectrique par l'intermédiaire de l'amplificateur haute tension.

En présence de l'asservissement, la résonance du mode fondamental est verrouillée sur la fréquence du laser, et le faisceau obtenu à la sortie du dispositif est bien  $TEM_{00}$ , comme on peut le vérifier expérimentalement avec l'analyseur de mode (modèle *Coherent ModeMaster*). L'efficacité de ce dispositif relativement simple s'explique par la stabilité des fréquences du laser et du FPF.

L'utilisation de l'intensité réfléchie par la cavité pour fournir le signal d'erreur permet d'inclure l'ensemble du dispositif de filtrage spatial à l'intérieur de la boucle d'asservissement de l'intensité (voir figure 19, page 52). Ainsi, toute modification de l'intensité transmise par le FPF liée à un désaccord non nul entre le laser et la cavité est corrigée par cet asservissement.

Notons pour finir que les bandes passantes des cavités FPF et à miroir mobile sont du même ordre de grandeur (quelques mégahertz). Lorsqu'on cherche à visualiser la forme de la résonance de la cavité à miroir mobile en modulant à  $100\text{ Hz}$  la fréquence du laser, l'asservissement n'arrive pas à compenser cette modulation égale à plusieurs fois la bande passante du FPF. On applique alors la même modulation sur le laser et la cale piézoélectrique du miroir d'entrée de la cavité FPF, après l'avoir convenablement amplifiée et déphasée, de façon à ce que la fréquence de résonance du FPF suive la fréquence du laser. L'asservissement d'intensité supprime toute variation résiduelle de l'intensité transmise.

On a donc une source laser conforme au cahier des charges établi au début de cette section : le faisceau incident sur la cavité à miroir mobile est parfaitement  $TEM_{00}$ , ses fluctuations de fréquence et d'intensité sont négligeables, et on peut moduler sa fréquence sur une plage large devant la bande passante de la cavité. Avant de finir la présentation de la source laser en expliquant comment on l'asservit sur la résonance de la cavité à miroir mobile, on va expliquer comment on mesure la bande passante de la cavité de filtrage spatial.

### 3.1.4.2 Mesure de la bande passante de la cavité de filtrage

La valeur de la bande passante  $f_{BP}$  de la cavité de filtrage sert de référence pour déterminer la bande passante, et donc la finesse de la cavité à miroir mobile. Ce paramètre caractérise en fin de compte la sensibilité de la cavité à miroir mobile à des déplacements du miroir. Il est donc important de mesurer  $f_{BP}$  avec précision. Pour cela, on déconnecte l'asservissement d'intensité et on utilise le modulateur électro-optique pour moduler en intensité le faisceau incident sur le FPF, à l'aide d'une tension sinusoïdale de fréquence  $f_m$  générée par un synthétiseur haute fréquence et appliquée directement sur le modulateur. Le FPF se comporte comme un filtre passe-bas, la puissance de modulation en intensité du faisceau transmis étant reliée à celle du faisceau incident par :

$$S_t[f_m] = \frac{1}{1 + (f_m/f_{BP})^2} S_i[f_m] \quad (3.2)$$

Pour s'affranchir des réponses en fréquence de la détection, on mesure les deux signaux  $S_i[f_m]$  et  $S_t[f_m]$  avec une photodiode rapide  $FND100$  placée alternativement avant et après le FPF et dont la sortie est envoyée sur l'analyseur de spectre ( $HP\ 8560E$ ). Le rapport entre ces deux spectres, obtenu en balayant la fréquence  $f_m$ , est représenté sur la figure 17. Un ajustement lorentzien de la fonction de transfert donne alors une bande passante  $f_{BP}$  égale à  $5,8\text{ MHz}$ . Cette valeur est nettement inférieure



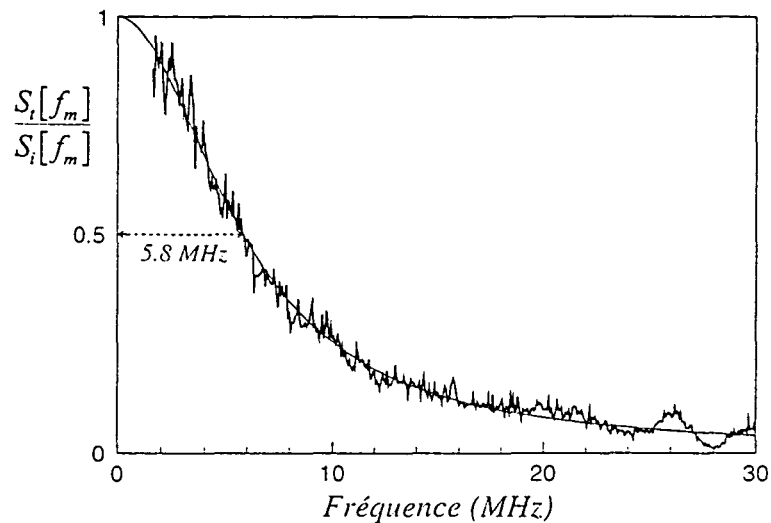


Fig. 17: Mesure de la fonction de transfert du FPF pour une modulation d'intensité incidente. La courbe est ajustée par une lorentzienne. L'échelle verticale est normalisée à 1 en tenant compte des pertes en transmission de la cavité.

à la valeur prévue d'après les spécifications du constructeur sur la transmission des miroirs, puisque pour des coefficients de réflexion des miroirs de 95 % et une longueur de la cavité de 12 cm, la bande passante devrait être égale à 10 MHz. La valeur trouvée expérimentalement a été confirmée par une mesure de la bande passante par comparaison directe de la largeur de la résonance avec l'intervalle spectral libre de la cavité (obtenu en modulant la longueur de la cavité grâce à la cale piézoélectrique du FPF).

### 3.1.5 Asservissement sur la cavité à miroir mobile

On a vu au chapitre 2 que la sensibilité d'une mesure de petits déplacements effectuée avec une cavité de grande finesse est maximale lorsque le faisceau incident est à résonance avec la cavité à miroir mobile. Malgré la stabilité de fréquence du laser et la rigidité de la cavité à miroir mobile, on observe une dérive lente du désaccord entre la résonance de la cavité et le laser, due pour l'essentiel à la dilatation des supports des miroirs de la cavité lorsque la température de la salle varie. Nous avons donc dû réaliser un asservissement afin de compenser cette dérive. La cavité n'étant pas accordable, on agit sur la fréquence du laser, ou plus précisément sur la fréquence de résonance de la cavité FPE sur laquelle le laser est asservi.

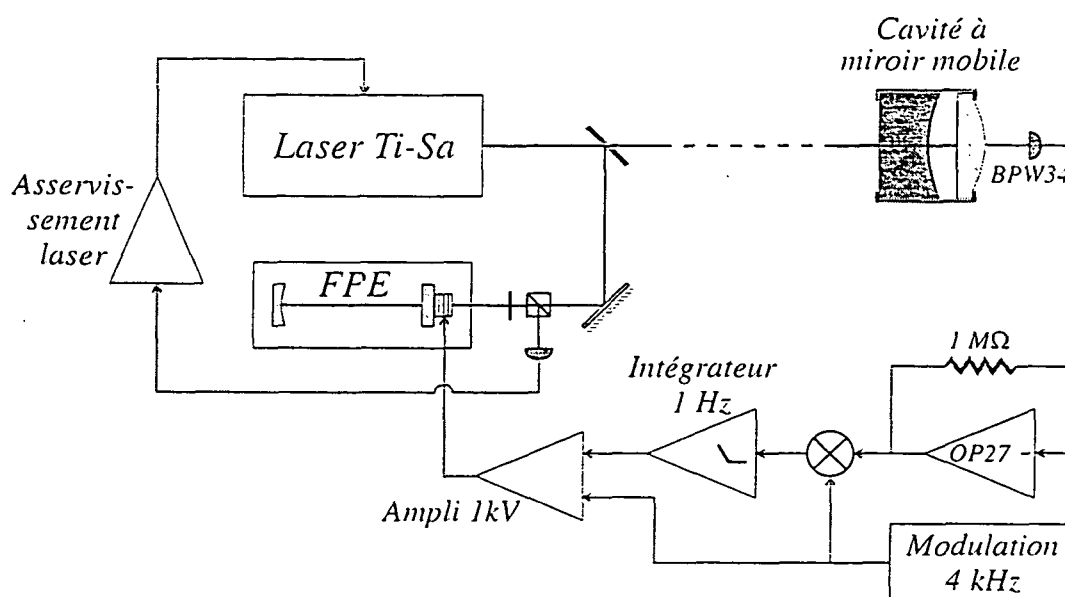


Fig. 18: Schéma de principe de l'asservissement du laser sur la cavité à miroir mobile. La fréquence du laser est modulée par l'intermédiaire de la cavité FPE et le signal d'erreur fourni par l'intensité résiduelle transmise par la cavité à miroir mobile contrôle cette fréquence.

Le principe de l'asservissement, présenté sur la figure (18), est similaire à celui utilisé pour maintenir le FPF à résonance avec le laser. On utilise une détection synchrone commerciale (modèle *EG&G 5209*) dont la modulation interne pilote la cale piézoélectrique sur laquelle est monté le miroir d'entrée du FPE, de façon à moduler la fréquence du laser. L'intensité résiduelle transmise par la cavité à miroir mobile, fournit, une fois démodulée, le signal d'erreur qui est utilisé pour contrôler la même cale piézoélectrique : ce signal s'annule en effet en haut du pic d'Airy, c'est-à-dire lorsque le faisceau laser est à résonance avec la cavité à miroir mobile.

Nous avons choisi une fréquence de modulation de  $4\text{ kHz}$ . Cette fréquence ne doit pas être trop élevée de façon à rester dans la plage d'efficacité de l'asservissement d'intensité. La modulation de fréquence du laser peut en effet se traduire par une modulation d'intensité en sortie de la cavité FPF de filtrage, si celle-ci n'est pas parfaitement à résonance. Or toute modulation d'intensité incidente sur la cavité à miroir mobile vient s'ajouter au signal d'erreur et perturber le fonctionnement de l'asservissement. Il faut donc que la fréquence de modulation soit suffisamment basse pour que l'asservissement d'intensité puisse corriger toute modulation d'intensité en sortie de la cavité FPF. Elle doit aussi être suffisamment éloignée de la fréquence de

modulation du FPF (4,5 kHz) utilisée pour son asservissement, afin de ne pas perturber le fonctionnement de celui-ci.

Pour détecter l'intensité transmise par la cavité à miroir mobile, qui peut être très faible même à résonance (inférieure à  $1 \mu W$ ), on utilise une photodiode *BPW34* suivie d'un montage en transimpédance formé d'un amplificateur opérationnel *OP27* et d'une grande résistance de contre-réaction ( $1 M\Omega$ ). On obtient ainsi une tension de sortie raisonnable à partir du courant (typiquement  $300 nA$ ) délivré par la photodiode. Ce montage permet de limiter l'influence de la capacité parasite de la photodiode, et donc d'obtenir des bandes passantes suffisamment élevées malgré la valeur importante de la résistance. Ce signal est envoyé dans la détection synchrone commerciale dont la constante de temps est fixée à une milliseconde. Le signal d'erreur est ensuite intégré pour des fréquences inférieures à  $1 Hz$ , ce qui augmente l'efficacité de l'asservissement à basse fréquence.

Notons que cette fréquence de coupure très basse est justifiée par le fait que l'asservissement ne doit corriger que des dérives relativement lentes, avec des constantes de temps de plusieurs dizaines de secondes. Il serait de toute façon inutile d'augmenter la bande passante de l'asservissement car celui-ci ne peut pas fonctionner à des fréquences très élevées : il s'agit en effet d'une boucle de contre-réaction qui englobe tous les autres asservissements de l'expérience (fréquence du laser sur la cavité FPE, cavité FPF sur la fréquence du laser, asservissement d'intensité, ...). L'asservissement doit donc agir à des fréquences suffisamment basses pour assurer un fonctionnement stable de l'ensemble.

Lorsque l'asservissement est fermé, la fréquence du laser suit les variations de la résonance de la cavité à miroir mobile, les fluctuations relatives de l'intensité transmise par la cavité étant inférieures à 0,2 %. L'asservissement est très stable et peut rester verrouillé plusieurs heures. La seule limitation vient en fait de la saturation de l'amplificateur haute tension qui commande la cale piézoélectrique du FPE. Lorsque la résonance de la cavité dérive toujours dans le même sens, comme c'est le cas par exemple quand la température de la salle s'élève lentement au cours de la journée, la tension de sortie de cet amplificateur finit par arriver en butée et l'asservissement décroche.

### 3.1.6 Autres éléments de la source laser

Nous avons présenté dans les paragraphes précédents le laser titane-saphir et les éléments essentiels de stabilisation et de filtrage qui permettent d'obtenir les perfor-

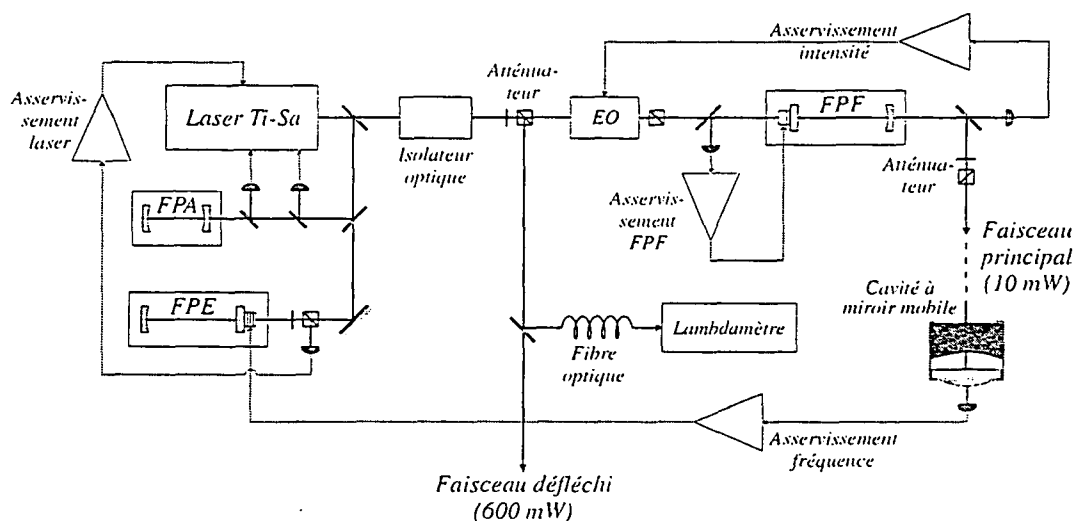


Fig. 19: Vue d'ensemble de la source laser.

mances désirées. Nous décrivons maintenant quelques éléments périphériques et nous récapitulons le fonctionnement de la source laser.

Dès la sortie du laser titane-saphir, une petite partie du faisceau ( $20 \text{ mW}$ ) est prélevée à l'aide d'une lame de verre. Ce faisceau est lui-même subdivisé pour être envoyé vers la cavité FPE d'asservissement en fréquence, vers les photodiodes utilisées par les asservissements de l'étalon mince et de l'étalon épais, et vers une cavité Fabry-Perot confocale (FPA sur la figure 19) qui permet de vérifier que le laser est bien monomode et balayable.

Le faisceau principal traverse ensuite un isolateur optique, qui évite tout retour de lumière dans le laser, puis un atténuateur variable, constitué d'une lame demi-onde dans un support tournant suivie par un cube séparateur de polarisation. Cet atténuateur prélève la plus grande partie de la puissance du faisceau (environ  $600 \text{ mW}$  dans le faisceau défléchi et  $150 \text{ mW}$  dans le faisceau "principal"). Comme on le verra au chapitre 4, le faisceau défléchi est utilisé pour exciter optiquement le mouvement du miroir. Une faible fraction (environ  $30 \text{ mW}$ ) de ce faisceau est envoyé via une fibre optique dans le lambdamètre, ce qui permet de suivre l'évolution de la longueur d'onde du laser.

Le faisceau principal traverse ensuite le modulateur électro-optique et le polariseur utilisés par l'asservissement d'intensité, puis la cavité de filtrage. Un dernier atténuateur variable, composé d'une lame  $\lambda/2$  et d'un cube séparateur de polarisation, permet enfin

de régler l'intensité totale envoyée vers l'ensemble constitué de la cavité à miroir mobile et de la détection homodyne. Ces éléments seront présentés dans les paragraphes suivants.

## 3.2 La cavité à miroir mobile

Nous présentons dans cette section les caractéristiques des cavités à miroir mobile que nous avons utilisées. Nous insistons ici sur les propriétés optiques de ces cavités, le montage des miroirs et les propriétés mécaniques du miroir mobile étant décrits plus en détail dans le chapitre 4.

### 3.2.1 Caractéristiques générales de la cavité à miroir mobile

La cavité doit avoir un certain nombre de caractéristiques spécifiques pour pouvoir mettre en évidence les effets du couplage optomécanique. Nous avons déjà vu que la finesse de la cavité doit être grande pour que la phase du faisceau réfléchi soit la plus sensible possible aux déplacements du miroir mobile. Ceci impose de choisir un miroir d'entrée ayant une faible transmission. Mais les pertes dans la cavité sont aussi un paramètre important qui peut dégrader la sensibilité, si elles ne sont pas petites devant la transmission du coupleur d'entrée.

Les calculs présentés dans la section (2.1.2) peuvent être complétés de façon à tenir compte des pertes dans la cavité, qu'elles soient dues à des pertes par absorption ou par diffusion au niveau du miroir, ou à une transmission non-nulle du miroir arrière. Si on ne s'intéresse qu'aux fluctuations du champ réfléchi, on peut modéliser l'ensemble de ces pertes par une transmission non-nulle du miroir arrière. Ainsi, les équations d'entrée-sortie du champ (2.9) et (2.10) deviennent :

$$\tau \frac{d}{dt} \alpha(t) = [-\gamma + i\Psi(t)] \alpha(t) + \sqrt{T} \alpha^{in}(t) + \sqrt{P} \alpha_{vide}(t), \quad (3.3)$$

$$\alpha^{out}(t) = \sqrt{T} \alpha(t) - \alpha^{in}(t), \quad (3.4)$$

où  $T$  est la transmission en intensité du coupleur d'entrée,  $P$  les pertes dans la cavité, et  $2\gamma = T + P$  sont les "pertes totales" de la cavité, incluant la transmission du coupleur. Les fluctuations du vide  $\alpha_{vide}$  sont couplées au champ intracavité par l'intermédiaire des pertes  $P$ .

Les pertes modifient à la fois les valeurs moyennes et les fluctuations des champs. Les champs moyens sont donnés par :

$$\bar{\alpha} = \frac{\sqrt{T}}{\gamma - i\bar{\Psi}} \bar{\alpha}^{in} , \quad \bar{\alpha}^{out} = \frac{\gamma - P + i\bar{\Psi}}{\gamma - i\bar{\Psi}} \bar{\alpha}^{in}. \quad (3.5)$$

Comparés aux valeurs sans pertes (éqs. 2.18 et 2.19), le champ intracavité est réduit par un facteur  $\sqrt{T/2\gamma} = \sqrt{T/(T+P)}$ , et l'intensité réfléchie n'est plus égale à l'intensité incidente. En présence de pertes, quand le champ intracavité augmente au voisinage de la résonance, une partie de l'intensité est dissipée : l'intensité réfléchie présente ainsi un pic d'Airy en absorption quand on balaie la résonance de la cavité. La profondeur de ce pic est donnée par le coefficient de réflexion à résonance  $\mathcal{R}_0$  :

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\bar{I}_{\bar{\Psi}=0}^{out}}{\bar{I}_{\bar{\Psi}=\pm\infty}^{out}} = \left[ \frac{T-P}{T+P} \right]^2. \quad (3.6)$$

On trouve que le champ réfléchi peut devenir nul lorsque  $T = P$ . C'est le cas par exemple lorsque les pertes sont dues à la transmission du miroir arrière et que les deux miroirs ont la même transmission : on retrouve ici que pour une cavité symétrique, tout le faisceau est transmis à résonance.

Les fluctuations de phase à résonance ( $\bar{\Psi} = 0$ ) deviennent :

$$(\gamma - i\Omega\tau) \delta q^{out} = \frac{\gamma - P + i\Omega\tau}{\gamma - i\Omega\tau} \delta q^{in} + \frac{\sqrt{TP}}{\gamma - i\Omega\tau} \delta q^{vide} + \frac{4\sqrt{2}\gamma}{\gamma - i\Omega\tau} \bar{\alpha} k\delta x. \quad (3.7)$$

Les fluctuations  $\delta q^{in}$  et  $\delta q^{vide}$  étant indépendantes et ayant toutes deux un spectre égal à 1, on trouve que la contribution des deux premiers termes de l'équation (3.7) au spectre de bruit  $S_q^{out}[\Omega]$  est égale à 1. Pour un miroir immobile, le spectre de bruit de phase du faisceau réfléchi reste égal au bruit de photon standard en présence de pertes. En revanche, l'effet du dernier terme est réduit du fait de l'atténuation du champ intracavité  $\bar{\alpha}$ . Ainsi, le déplacement minimum observable  $\delta x_{shot}$  devient (voir l'éq. 2.52) :

$$\delta x_{shot}[\Omega] = \frac{\lambda}{16\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{\bar{I}^{in}}} \sqrt{1 + (\Omega/\Omega_{cav})^2} \sqrt{\frac{T+P}{T}}. \quad (3.8)$$

La sensibilité est donc réduite par un facteur  $\sqrt{T/(T+P)}$ . On peut noter sur cette expression les rôles fondamentalement différents que peuvent jouer les pertes sur les champs moyens et sur les fluctuations. Prenons l'exemple d'une cavité symétrique et sans perte, pour laquelle  $T = P$ . Le champ moyen réfléchi est strictement nul : les

perdes ont donc complètement modifié le fonctionnement de la cavité. Et pourtant, même dans cette situation extrême, la sensibilité n'est dégradée que d'un facteur  $\sqrt{2}$ .

Le choix de la transmission du coupleur d'entrée résulte d'un compromis entre l'obtention d'une grande finesse et la réduction des effets des pertes. En pratique, il est possible de réaliser aujourd'hui des miroirs avec de très faibles pertes, de l'ordre de quelques parts par millions ( $P \approx 2 \text{ ppm}$ ) [58]. En choisissant une transmission  $T$  égale à  $20 \text{ ppm}$ , on obtient une cavité de finesse de l'ordre de 300 000, tout en ayant un effet raisonnable des pertes. Les miroirs que nous avons utilisés sont toutefois d'une qualité moindre, et nous verrons que les pertes jouent un rôle non négligeable.

En plus de la finesse et des pertes, un autre paramètre important est l'adaptation spatiale entre le faisceau incident et le mode optique de la cavité. Pour une adaptation spatiale imparfaite, une fraction du faisceau incident est directement réfléchi par le miroir d'entrée, même à résonance. Cette fraction n'est pas couplée à la cavité et n'interagit pas avec le miroir mobile. Plus précisément, on peut décomposer le champ incident sur le mode fondamental  $v_0$  de la cavité et sur tous les autres modes :

$$\alpha^{in}(\mathbf{r}, t) = \alpha_0(t) v_0(\mathbf{r}) + \alpha'(\mathbf{r}, t). \quad (3.9)$$

L'adaptation spatiale peut être décrite par un paramètre  $\eta_{cav}$  défini comme le rapport entre l'intensité couplée au mode fondamental et l'intensité totale incidente :

$$\eta_{cav} = |\bar{\alpha}_0|^2 / |\bar{\alpha}^{in}|^2. \quad (3.10)$$

Le champ réfléchi est modifié si  $\eta_{cav} < 1$  puisque la partie  $\alpha'$  est directement réfléchi. En particulier, l'intensité totale réfléchi est égale à l'intensité incidente loin de résonance, alors qu'à résonance, elle vaut :

$$\bar{I}_{\Psi=0}^{out} = |\bar{\alpha}_0|^2 \left[ \frac{T-P}{T+P} \right]^2 + |\bar{\alpha}'|^2. \quad (3.11)$$

Le coefficient de réflexion à résonance s'écrit alors :

$$\mathcal{R}_0 = \eta_{cav} \left[ \left( \frac{T-P}{T+P} \right)^2 - 1 \right] + 1. \quad (3.12)$$

De même, la sensibilité à des petits déplacements du miroir mobile est modifiée. Le déplacement minimum observable devient :

$$\delta x_{shot} [\Omega] = \frac{\lambda}{16\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{\eta_{cav} \bar{I}^{in}}} \sqrt{1 + (\Omega/\Omega_{cav})^2} \left( \frac{T+P}{T} \right). \quad (3.13)$$

Seule l'intensité  $\eta_{cav}\bar{I}^{in}$  étant couplée au mode de la cavité, la sensibilité est donc réduite par un facteur  $\sqrt{\eta_{cav}}$ .

Un dernier paramètre important, qui apparaît d'ailleurs dans l'équation (3.13), est la bande passante  $\Omega_{cav}$  de la cavité. Comme nous le verrons dans le chapitre 4, il est préférable pour observer les effets quantiques du couplage optomécanique de travailler à haute fréquence, de façon à rendre l'agitation thermique du miroir mobile petite devant les déplacements induits par la pression de radiation. En particulier, les fréquences de résonance mécanique du miroir doivent être élevées, de l'ordre du mégahertz. Pour éviter un effet de filtrage par la cavité, la bande passante  $\Omega_{cav}$  doit être au moins du même ordre de grandeur.  $\Omega_{cav}$  est reliée à la finesse et à la longueur de la cavité :

$$\Omega_{cav} = \gamma/\tau = \frac{\pi c}{2\mathcal{F}L_0}. \quad (3.14)$$

On doit donc utiliser une cavité très courte, la longueur  $L_0$  devant être inférieure ou de l'ordre de 1 *mm*.

### 3.2.2 Présentation des différentes cavités

Pour atteindre des fréquences de résonance mécanique aussi élevées, le miroir mobile n'est pas un miroir suspendu dont on exciterait le mouvement pendulaire, mais un miroir déposé sur un résonateur mécanique haute fréquence. Le mouvement du miroir correspond à l'excitation des modes acoustiques internes de ce résonateur, que nous étudierons plus en détail au chapitre 4.

Dans la suite de ce mémoire, on va s'intéresser à deux miroirs mobiles. Le premier miroir a été réalisé spécifiquement pour notre expérience. Il s'agit d'un miroir déposé sur la face plane d'un résonateur mécanique plan-convexe en silice fondue. Le traitement optique a été réalisé dans le Service des Matériaux Avancés dirigé par Jean-Marie Mackowski à l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon. On verra au chapitre 4 que la silice a été choisie pour ses qualités mécaniques, mais ce matériau est utilisé depuis de nombreuses années comme substrat pour la réalisation de miroirs : les techniques de polissage et de dépôt du traitement réfléchissant sont donc maîtrisées, et on peut espérer de très faibles pertes optiques. En fait, on aurait pu s'attendre à des pertes extrêmement faibles d'après les spécifications du fabricant sur la rugosité de ses substrats, mais une caractérisation de leur état de surface effectuée à l'E.S.P.C.I. par l'équipe de Claude Boccara a montré que leur rugosité est nettement au-dessus des spécifications du fabricant. Les pertes sont donc moins bonnes que prévu. Par



contre, la transmission du miroir, qui dépend essentiellement de la qualité des couches diélectriques déposées, devrait rester très petite, de l'ordre du *ppm*.

La cavité est constituée de ce miroir mobile et d'un coupleur d'entrée ayant un rayon de courbure d'un mètre. Il s'agit d'un miroir commercial *Newport SuperMirror High-Finesse*, dont les spécifications indiquent une transmission de l'ordre de 50 *ppm* et des pertes inférieures à 50 *ppm*. Etant donné la très faible longueur de la cavité (1 *mm*), nous avons rejeté l'idée d'utiliser une cale piézoélectrique pour balayer la résonance de la cavité. Les deux miroirs sont montés dans un support rigide (voir le paragraphe 4.3.1.2), et c'est la fréquence du laser qui est balayée pour s'accorder avec la résonance de la cavité.

Le second miroir mobile que nous avons utilisé est de géométrie cylindrique, les deux faces du substrat étant planes. Notre objectif est d'étudier les modes acoustiques pour cette géométrie plus courante, qui est utilisée en particulier pour les interféromètres gravitationnels. Ce miroir mobile est en fait un *SuperMirror High-Finesse* semblable au coupleur de la première cavité, à ceci près que la face traitée est plane. Etant donné la plus grande transmission de ce miroir par rapport à celle du miroir mobile plan-convexe, le coupleur de la cavité est maintenant un *SuperMirror High-Transmission* de rayon de courbure 1 *m*, dont les spécifications indiquent une transmission de 200 *ppm*, et des pertes inférieures à 50 *ppm*. Ces deux miroirs sont montés en vis-à-vis pour former une cavité, leur séparation (environ 0,5 *mm*) étant plus difficile à évaluer, étant donné le mode de montage qu'on détaillera au chapitre 4.

On va maintenant présenter, sur l'exemple de la première cavité à miroir mobile, le principe de l'alignement du faisceau incident sur la cavité et de la mesure de ses principales caractéristiques optiques.

### 3.2.3 Alignement et adaptation de la cavité

La cavité présente des résonances longitudinales auxquelles sont associés des modes transverses. Dans l'approximation paraxiale, les modes propres d'une cavité plan-convexe sont des modes gaussiens, et le mode transverse fondamental  $TEM_{00}$  est caractérisé par un col  $w_0$  situé au niveau du miroir plan [59] :

$$w_0 = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{L(R-L)}, \quad (3.15)$$

où  $\lambda \approx 812 \text{ nm}$  est la longueur d'onde de la résonance de la cavité,  $R = 1 \text{ m}$  le rayon de courbure du miroir d'entrée *Newport* et  $L$  la longueur de la cavité. Pour la première cavité à miroir mobile,  $L$  est égale à 1 *mm* et la taille du col est d'environ 90  $\mu\text{m}$ .

L'intervalle spectral libre  $\nu_{ISL}$  entre deux résonances longitudinales de la cavité est donné par :

$$\nu_{ISL} = \frac{c}{2L}. \quad (3.16)$$

Cet intervalle vaut environ 150 GHz pour une longueur de l'ordre du millimètre.

On a vu dans la section (3.1) que la source laser délivre un faisceau parfaitement gaussien, dont la position et la taille du col peuvent être ajustées à l'aide d'un système de deux lentilles, de focales respectives 40 et 150 mm. Ces lentilles sont initialement placées de façon à obtenir au niveau du miroir plan un col sensiblement égal à la valeur théorique évaluée ci-dessus.

Pour aligner le faisceau incident sur la cavité, on utilise un système de deux miroirs montés dans des supports micrométriques. On commence par réaliser un pré-alignement du faisceau en le centrant sur la cavité, à l'aide d'une pièce de centrage percée d'un petit trou, et en plaçant le faisceau en autocolimation par rapport au miroir d'entrée. Il suffit pour cela d'observer la tache réfléchi par le miroir au niveau d'un diaphragme placé sur le trajet du faisceau incident.

Pour optimiser l'adaptation spatiale du faisceau incident avec la cavité, il est nécessaire de balayer le désaccord entre le faisceau et la cavité. Comme la cavité est rigide, il faut balayer la fréquence de la source laser sur un intervalle de l'ordre de l'intervalle spectral libre de la cavité. On a vu dans la partie précédente que notre source permet un tel balayage, avec une alternance de balayages continus et de sauts de fréquence, le lambdamètre permettant de suivre les évolutions de la longueur d'onde. Au cours de ce balayage, on cherche à observer la structure de la lumière transmise par la cavité. Etant donné le faible coefficient de transmission du miroir mobile, on utilise en fait une caméra infrarouge placée directement sur le trajet du faisceau transmis.

Dès qu'on observe en transmission une tache présentant un caractère résonnant avec le balayage du laser, on cherche à optimiser son intensité en modifiant la direction et le point d'impact du faisceau incident sur la cavité. Pour cela, on utilise les réglages des montures des miroirs ou ceux des translations horizontale et verticale sur lesquelles est montée une des deux lentilles de focalisation. On finit par obtenir une tache assez intense pour observer sur la photodiode placée en transmission un signal suffisant pour sortir du bruit dû à l'électronique et à la lumière diffusée. Une petite modulation appliquée sur la fréquence du laser (voir le paragraphe 3.1.2) permet alors de visualiser sur un oscilloscope le pic d'Airy de la résonance, qu'on peut alors optimiser plus confortablement.

On part en fait d'une situation où le peigne de résonances excité par le faisceau incident est très large. Comme le mode  $TEM_{00}$  est celui qui présente la fréquence de

résonance la plus basse, on cherche à s'en rapprocher en effectuant des sauts de mode de l'étalon épais du laser. Après un saut de fréquence, on balaie la fréquence du laser jusqu'à observer une résonance, dont on cherche alors à optimiser l'intensité transmise, détectée par la photodiode. Le profil du faisceau incident étant gaussien, on parvient d'autant mieux à se coupler aux différents modes transverses qu'ils sont d'ordre peu élevé et donc bas en fréquence. L'itération de ce processus permet ainsi de converger vers un réglage de l'alignement, qui couple quasiment parfaitement le faisceau incident sur le mode fondamental de la cavité, dont on repère la longueur d'onde de résonance. Une fois la cavité alignée, et malgré la dilatation thermique des supports des miroirs qui modifie légèrement cette longueur d'onde de résonance, on peut alors retrouver facilement la résonance du mode fondamental en se plaçant à une longueur d'onde proche et en balayant la fréquence du laser.

Quand la cavité est réglée au mieux, pratiquement toute la puissance incidente est couplée au mode fondamental. La faible transmission du miroir arrière rend difficile la mesure précise de l'accord de mode  $\eta_{cav}$  entre le faisceau et la cavité, défini comme le rapport de l'intensité couplée au mode fondamental et de l'intensité incidente totale (équation 3.10). En pratique, on mesure la hauteur des pics d'Airy associés aux différents modes transverses observés sur l'oscilloscope. Pour une puissance incidente de  $100 \mu W$ , la tension en sortie du montage photodiode utilisé pour mesurer l'intensité du faisceau transmis (voir la section 3.1.5) est légèrement supérieure à  $300 mV$  pour le mode fondamental. Les pics d'Airy associés aux deux premiers modes transverses (impairs) sont à la limite de disparaître dans le bruit de la détection, chacun étant de l'ordre de  $2 mV$ . Les autres modes ne sont pas visibles sur l'oscilloscope. On constate en revanche avec la caméra infrarouge que leur poids décroît extrêmement vite en fonction de leur ordre transverse. On en déduit finalement un accord de mode  $\eta_{cav}$  entre le laser et la cavité à miroir mobile de l'ordre de 98 %.

### 3.2.4 Mesure des caractéristiques optiques de la cavité

Nous allons maintenant présenter les mesures qui nous ont permis de déterminer les caractéristiques optiques de nos cavités à miroir mobile. Ces caractéristiques sont au nombre de trois : l'intervalle spectral libre  $\nu_{ISL}$  (qui est relié à la longueur  $L$  de la cavité), la bande passante (ou la finesse, qui sont toutes deux reliées aux pertes totales des deux miroirs) et le coefficient de réflexion à résonance (qui donne accès à la transmission du coupleur d'entrée). Ces trois paramètres suffisent à caractériser la sensibilité de la cavité aux petits déplacements du miroir mobile (voir l'équation 3.13).

### 3.2.4.1 Intervalle spectral libre

L'intervalle spectral libre de la cavité à miroir mobile est facile à mesurer, une fois que le faisceau est bien aligné sur la cavité. Il suffit de trouver les longueurs d'onde de deux résonances longitudinales successives de la cavité. En pratique, on se place à résonance avec le mode fondamental : on note alors la longueur d'onde de résonance indiquée par le lambdamètre et l'heure à laquelle on a effectué cette mesure. On effectue ensuite un ou plusieurs sauts de l'étalon mince du laser de façon à se placer à proximité de la résonance longitudinale précédente du mode fondamental, et on balaie la fréquence du laser pour la retrouver précisément. On note de nouveau la longueur d'onde indiquée par le lambdamètre et l'heure. On retourne alors à la résonance initiale, dont on note la nouvelle longueur d'onde, modifiée par la dilatation des supports des miroirs. A partir des heures des différentes mesures, si on suppose que l'élévation de température s'effectue de façon régulière (ce qui peut se confirmer en vérifiant que la longueur d'onde de résonance croît linéairement avec le temps), une simple combinaison linéaire permet d'estimer la longueur d'onde de la première résonance au moment où on a mesuré celle de la seconde. On s'affranchit ainsi des effets de dilatation de la cavité, qui peuvent modifier le résultat sur l'intervalle spectral libre d'environ 5 %.

Avec la première cavité à miroir mobile, on trouve un écart en longueur d'onde  $\Delta\lambda$  de 3,1 Å, pour une longueur d'onde moyenne  $\lambda$  de 812 nm. L'intervalle spectral libre vaut alors :

$$\nu_{ISL} = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = 141 \text{ GHz}. \quad (3.17)$$

La longueur optique de l'étalon mince étant par hasard très proche de 1 mm, ce saut de fréquence s'effectue très simplement grâce à un saut de mode de l'étalon mince, ce qui rend la mesure précise de l'intervalle spectral libre de cette cavité très facile. La longueur de la cavité est alors :

$$L = \frac{c}{2\nu_{ISL}} = 1,06 \text{ mm}, \quad (3.18)$$

relativement proche de la valeur attendue d'après le plan des supports des miroirs (voir chapitre 4).

### 3.2.4.2 Bande passante et finesse

L'intensité transmise par la cavité à miroir mobile est maximale quand le laser est parfaitement à résonance. Lorsqu'on s'écarte de la résonance, par exemple en modulant la fréquence du laser, l'intensité décroît en décrivant une lorentzienne, dont

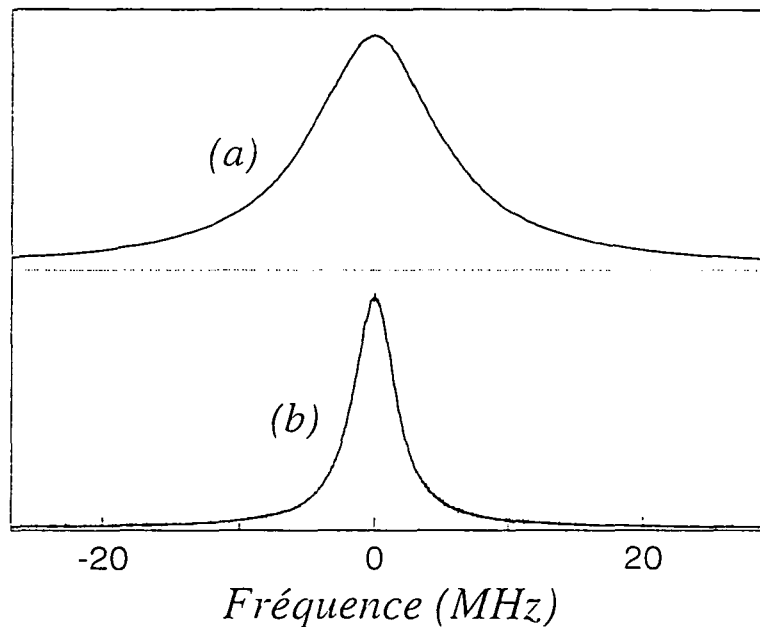


Fig. 20: Profils lorentziens des résonances du FPF (a) et de la cavité à miroir mobile (b). Le rapport des largeurs des deux profils donne une bande passante de  $1,9 \text{ MHz}$  pour la cavité à miroir mobile. L'échelle horizontale est calibrée à partir de la largeur de la résonance du FPF, égale à  $5,8 \text{ MHz}$ .

la demi-largeur à mi-hauteur est la bande passante  $f_{BP}$ , caractéristique de la cavité. Pour mesurer la bande passante de la cavité à miroir mobile, on module la fréquence du laser à  $100 \text{ Hz}$  en agissant sur la cale piézoélectrique du miroir  $M_4$  (voir la section 3.1.2). La modulation de fréquence peut être calibrée par rapport à la cavité de filtrage FPF, dont on a mesuré la bande passante indépendamment (voir le paragraphe 3.1.4.2).

On commence par acquérir sur l'oscilloscope numérique *Tektronix TDS 420* le pic d'Airy en transmission du FPF. On désactive pour cela l'asservissement d'intensité et l'asservissement du FPF sur la fréquence du laser et on modifie manuellement la tension appliquée à sa cale piézoélectrique pour se placer autour de la résonance. La modulation de la fréquence n'est pas une rampe en fonction du temps mais varie sinusoidalement. On doit donc veiller à se placer à résonance lorsque la modulation est dans la zone linéaire de la modulation et appliquer une amplitude de modulation suffisante pour parcourir l'ensemble du pic en restant dans cette zone linéaire.

On asservit ensuite le FPF sur le laser (avec la compensation de la modulation de fréquence présentée au paragraphe 3.1.4.1), l'asservissement d'intensité étant activé, puis on effectue la même acquisition sur l'intensité transmise par la cavité à miroir mo-

bile. Connaissant la bande passante du FPF, le rapport des largeurs des deux lorentziennes donne directement la bande passante de la cavité à miroir mobile. La figure 20 présente les deux profils d'intensité obtenus. On mesure ainsi une bande passante  $f_{BP}$  égale à 1,9 MHz pour la première cavité à miroir mobile.

La bande passante est reliée à la finesse  $\mathcal{F}$  et aux pertes totales  $2\gamma$  de la cavité par la relation :

$$\mathcal{F} = \frac{\pi}{\gamma} = \frac{\nu_{ISL}}{2 f_{BP}}. \quad (3.19)$$

On peut ainsi déterminer la finesse de la cavité, qui vaut  $\mathcal{F} = 37\,000$ . Cette mesure de la finesse permet d'évaluer les pertes totales de la cavité, c'est-à-dire la somme  $2\gamma = T + P$  de la transmission  $T$  du coupleur d'entrée et des pertes  $P$  des deux miroirs, incluant la transmission résiduelle du miroir mobile. On obtient des pertes totales égales à 169 ppm. On ne peut pas à ce stade répartir ces pertes totales entre transmission et pertes. C'est en fait la mesure du coefficient de réflexion à résonance de la cavité qui va permettre de déterminer la transmission  $T$  du miroir d'entrée.

#### 3.2.4.3 Coefficient de réflexion à résonance

Nous avons vu dans la section (3.2.1) qu'en présence de pertes, l'intensité réfléchie présente un pic d'Airy en absorption quand on balaie la résonance de la cavité. L'observation de ce pic permet de déterminer le coefficient de réflexion à résonance  $\mathcal{R}_0$ . Comme le montre l'équation (3.12), on peut alors séparer dans les pertes totales  $2\gamma$  la partie  $T$  correspondant à la transmission du coupleur d'entrée et les pertes  $P$ . On peut mesurer le coefficient de réflexion à résonance  $\mathcal{R}_0$  en comparant les intensités du champ réfléchi par la cavité à résonance, et hors résonance. En dehors de la résonance, le faisceau incident est en effet totalement réfléchi par la cavité, et l'intensité réfléchie  $\bar{I}^{out}$  est égale à l'intensité incidente. Cette méthode permet de s'affranchir des pertes du système de détection. En pratique, on mesure l'intensité réfléchie à l'aide du montage de détection homodyne décrit dans la section suivante, en masquant l'oscillateur local. Le montage fournit alors une tension  $DC$  proportionnelle à l'intensité réfléchie, que l'on moyenne sur un temps suffisant pour assurer une mesure précise. En particulier, la mesure de l'intensité à résonance est effectuée en maintenant la fréquence du laser à résonance à l'aide de l'asservissement décrit dans la section (3.1.5). Pour la première cavité, on obtient une tension de 39 mV hors résonance et de 4 mV à résonance. Le coefficient de réflexion à résonance vaut donc  $\mathcal{R}_0 = 10\%$ . A partir de l'estimation de l'adaptation spatiale ( $\eta_{cav} = 98\%$ ) et de la valeur des pertes totales ( $2\gamma = 169\text{ ppm}$ ), on trouve à partir de l'équation (3.12) que le coefficient de transmission du coupleur de la cavité est

	<i>Cavité Newport – Miroir plan-convexe</i>	<i>Cavité Newport - Newport</i>
Adaptation spatiale (%)	98	≈ 90
Intervalle Spectral Libre (GHz)	141	569
Longueur (mm)	1,06	0,26
Bande passante (MHz)	1,9	11
Finesse	37 000	25 900
Pertes totales (ppm)	169	243
Coefficient de réflexion (%)	10	31,5
Transmission du coupleur (ppm)	60	180

Fig. 21: Tableau récapitulatif des caractéristiques des cavités à miroir mobile utilisées.

$T = 60 \text{ ppm}$ , les pertes  $P$  étant égales à  $109 \text{ ppm}$ . Notons que l'éventuelle imprécision de la mesure de l'adaptation spatiale n'a pratiquement pas d'effet sur les valeurs trouvées puisque le même calcul réalisé en supposant une adaptation parfaite ( $\eta_{cav} = 1$ ) ne change les valeurs de  $T$  et  $P$  que de  $2 \text{ ppm}$ . On peut aussi noter la valeur relativement importante des pertes, sans doute due à la rugosité du substrat du miroir mobile.

#### 3.2.4.4 Récapitulation des résultats

On a donc estimé dans cette section les caractéristiques optiques essentielles de la cavité à miroir mobile : l'adaptation spatiale du faisceau incident sur la cavité, l'intervalle spectral libre, la bande passante, la finesse et le coefficient de réflexion à résonance de la cavité. On a vu au paragraphe (3.2.1) que ces seules caractéristiques suffisent à déterminer la sensibilité de notre dispositif aux petits déplacements du miroir mobile. Le tableau de la figure 21 récapitule les résultats obtenus pour les deux cavités à miroir mobile qu'on utilisera par la suite.

On peut noter sur ce tableau que la seconde cavité Newport-Newport est quatre fois plus courte que la première. Comme nous le verrons dans le chapitre 4, le principe du montage est différent pour ces deux cavités et celui adopté pour la cavité Newport-Newport conduit à une certaine imprécision sur sa longueur. Avec une cavité très courte, on a une grande bande passante ( $11 \text{ MHz}$  au lieu de  $1,9 \text{ MHz}$ ). En revanche,

le col du mode optique est beaucoup plus petit ( $45 \mu m$  au lieu de  $90 \mu m$ ). Nous n'avons pas voulu modifier de façon trop importante les éléments permettant d'injecter le faisceau dans la cavité. C'est pourquoi l'adaptation spatiale du faisceau est moins bonne avec cette cavité (90 % au lieu de 98 %). Cette valeur est toutefois suffisante puisque nous ne désirons pas atteindre une très grande sensibilité avec cette cavité, mais simplement étudier les modes acoustiques d'un miroir de géométrie cylindrique. Notons que la transmission  $T = 180 ppm$  du coupleur d'entrée est en bon accord avec les spécifications du fabricant ( $200 ppm$ ), et que les pertes sont plus petites que prévu (de l'ordre de 20 à 30  $ppm$ ).

### 3.3 La détection homodyne

Le système de détection, capable de mesurer les fluctuations de phase du faisceau réfléchi par la cavité à miroir mobile au niveau du bruit quantique, est un élément essentiel de notre montage expérimental comme nous l'avons vu au chapitre 2 (figure 6, page 16). Il est basé sur une technique d'homodyne entre le faisceau réfléchi par la cavité et un faisceau de référence, appelé *oscillateur local* [39]. Les deux faisceaux sont mélangés à l'aide d'une lame séparatrice pour donner deux faisceaux qui sont détectés séparément sur deux photodiodes à haut rendement quantique. On va voir dans la section suivante que la différence des photocourants délivrés par les deux photodiodes permet alors de remonter aux fluctuations de n'importe quelle quadrature du faisceau réfléchi par la cavité. On verra ensuite comment on réalise expérimentalement le circulateur optique et l'ensemble des lames séparatrices présentées sur la figure 6, qui assurent la séparation puis le mélange des différents faisceaux. On terminera cette partie en présentant les photodiodes utilisées et l'électronique associée, et enfin le contrôle de l'oscillateur local.

#### 3.3.1 Principe de la détection

La figure 22 reprend une partie de la détection homodyne présentée sur la figure 6. Les deux faisceaux incidents sur la lame sont l'oscillateur local  $\alpha_{OL}e^{i\varphi}$  et le champ  $\alpha_{cav}$  réfléchi par la cavité. Les amplitudes moyennes  $\bar{\alpha}_{cav}$  et  $\bar{\alpha}_{OL}$  étant supposées réelles,  $\varphi$  est la phase relative moyenne entre les deux champs. Les deux faisceaux sont mélangés au niveau d'une lame, qui est supposée parfaitement semi-réfléchissante pour les deux



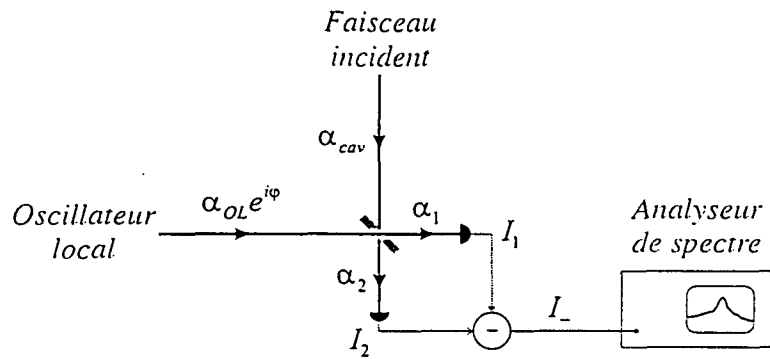


Fig. 22: Représentation schématique d'un système de détection homodyne

champs. On obtient alors à la sortie de la lame les champs réfléchis et transmis :

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha_{cav}(t) + \alpha_{OL}(t) e^{i\varphi}], \quad (3.20)$$

$$\alpha_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha_{cav}(t) - \alpha_{OL}(t) e^{i\varphi}]. \quad (3.21)$$

Les deux photocourants issus des deux photodiodes placées dans les deux voies de sortie sont proportionnels aux intensités  $I_1 = |\alpha_1|^2$  et  $I_2 = |\alpha_2|^2$ . À partir des équations (3.20) et (3.21), on obtient :

$$I_1(t) = \frac{1}{2} [(I_{cav}(t) + I_{OL}(t)) + 2 \operatorname{Re}(\alpha_{cav}(t) \alpha_{OL}^*(t) e^{-i\varphi})], \quad (3.22)$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2} [(I_{cav}(t) + I_{OL}(t)) - 2 \operatorname{Re}(\alpha_{cav}(t) \alpha_{OL}^*(t) e^{-i\varphi})], \quad (3.23)$$

où  $I_{cav}$  et  $I_{OL}$  sont les intensités du faisceau réfléchi par la cavité et de l'oscillateur local. Les deux intensités détectées sont donc chacune la somme d'un terme direct, lié à l'intensité totale des deux faisceaux, et d'un terme d'interférence entre le faisceau réfléchi par la cavité et l'oscillateur local. On peut séparer ces deux contributions en s'intéressant à la différence  $I_-$  et à la somme  $I_+$  des deux intensités détectées :

$$I_- = 2 \operatorname{Re}(\alpha_{cav}(t) \alpha_{OL}^*(t) e^{-i\varphi}), \quad (3.24)$$

$$I_+ = I_{cav}(t) + I_{OL}(t). \quad (3.25)$$

Les valeurs moyennes de ces quantités sont alors :

$$\bar{I}_- = 2\sqrt{\bar{I}_{cav}\bar{I}_{OL}} \cos(\varphi), \quad (3.26)$$

$$\bar{I}_+ = \bar{I}_{cav} + \bar{I}_{OL}. \quad (3.27)$$

La relation (3.26) montre que la différence des photocourants varie avec le déphasage relatif  $\varphi$  entre les deux champs. Cette différence est nulle quand les deux champs sont en quadrature ( $\varphi = \pi/2$ ) et maximale en valeur absolue lorsqu'ils sont en phase ( $\varphi = 0$ ) ou en opposition de phase ( $\varphi = \pi$ ). On verra au paragraphe (3.3.4.3) qu'on peut utiliser les intensités  $\bar{I}_+$  et  $\bar{I}_-$  pour contrôler la phase  $\varphi$ , ce qui détermine la quadrature du champ  $\alpha_{cav}$  étudiée.

Les fluctuations  $\delta\alpha_{cav}$  et  $\delta\alpha_{OL}$  des deux champs entraînent des fluctuations des photocourants. La linéarisation de (3.24) autour des valeurs moyennes permet d'écrire les fluctuations  $\delta I_-$  de la différence des intensités sous la forme :

$$\delta I_-(t) = \bar{\alpha}_{OL} [\delta\alpha_{cav}(t) e^{-i\varphi} + \delta\alpha_{cav}^*(t) e^{i\varphi}] + \bar{\alpha}_{cav} [\delta\alpha_{OL}(t) e^{i\varphi} + \delta\alpha_{OL}^*(t) e^{-i\varphi}]. \quad (3.28)$$

Les fluctuations de  $I_-$  apparaissent donc comme la somme des fluctuations des champs  $\alpha_{cav}$  et  $\alpha_{OL}$  sur la quadrature d'angle  $\pm\varphi$ , pondérées par l'amplitude moyenne de l'autre champ.

Lorsque l'intensité de l'oscillateur local est grande par rapport à celle du champ réfléchi, on peut négliger le second terme dans l'équation (3.28) par rapport au premier. Le spectre  $S_-[\Omega]$  des fluctuations  $\delta I_-(t)$  s'écrit alors :

$$S_-[\Omega] = \bar{I}_{OL} S_\varphi^{cav}[\Omega], \quad (3.29)$$

où  $S_\varphi^{cav}[\Omega]$  est le spectre de bruit de la quadrature d'angle  $\varphi$  du champ  $\alpha_{cav}$  sortant de la cavité à miroir mobile. Le contrôle de la phase relative des deux faisceaux permet ainsi d'avoir accès au spectre de bruit de n'importe quelle quadrature du champ  $\alpha_{cav}$ . Ce spectre est amplifié par l'intensité moyenne de l'oscillateur local. Pour calibrer  $S_\varphi^{cav}[\Omega]$ , il suffit de masquer le faisceau réfléchi par la cavité : le champ  $\alpha_{cav}$  est alors remplacé par le vide, avec  $S_\varphi^{vide}[\Omega] = 1$  quelle que soit la quadrature, et on mesure le bruit de photon standard  $S_-[\Omega] = \bar{I}_{OL}$ .

Le calcul que nous venons de présenter suppose un système de détection parfait. Un certain nombre d'imperfections peut venir modifier ce comportement idéal. La première est le rendement quantique des photodiodes et plus généralement toutes les

pertes dues aux différents éléments optiques utilisés pour recombinaison l'oscillateur local et le champ réfléchi par la cavité. Ces pertes ont pour effet d'atténuer le champ réfléchi et de le mélanger avec des fluctuations du vide. On ne mesure donc plus  $S_{\varphi}^{cav}$  mais un mélange de  $S_{\varphi}^{cav}$  et du bruit de photon standard correspondant aux fluctuations du vide :

$$S_{-}[\Omega] = \bar{I}_{OL} \left( \eta_{ph} S_{\varphi}^{cav}[\Omega] + 1 - \eta_{ph} \right), \quad (3.30)$$

où  $\eta_{ph}$  représente le rendement en intensité du système de détection ( $1 - \eta_{ph}$  est alors égal aux pertes).

En ce qui concerne la mesure du bruit de phase du faisceau réfléchi ( $\varphi = \pi/2$ ), nous avons vu que  $S_{\pi/2}^{cav}[\Omega]$  est égal à la somme du bruit de photon standard et du bruit associé au déplacement du miroir (éq. 2.51). En présence de pertes ( $\eta_{ph} < 1$ ), le spectre mesuré  $S_{-}[\Omega]$  reste égal au bruit de photon standard lorsque le miroir est immobile, mais le terme lié au déplacement du miroir est atténué par un facteur  $\eta_{ph}$ . La sensibilité de la mesure de petits déplacements est donc réduite d'un facteur  $\sqrt{\eta_{ph}}$ .

Un autre point important est l'équilibrage entre les deux voies, aussi bien optique (lame parfaitement semi-réfléchissante, rendement quantique des photodiodes,...) qu'électronique (amplification et soustraction des photocourants). Tout déséquilibre se traduit par une dégradation de la réjection en mode commun du signal  $I_{-}$ . Le signal détecté est alors contaminé par le bruit d'intensité  $I_{+}$ . A la différence des pertes qui ne font que ramener le spectre observé vers le bruit de photon standard et donc réduire la sensibilité de la mesure, un déséquilibre peut ajouter un excès de bruit au signal détecté. Nous verrons cependant (section 3.3.3) que l'équilibrage de notre dispositif est meilleur que 1 %. Cet effet est donc négligeable sauf éventuellement à très basse fréquence où l'excès de bruit d'intensité de la source laser devient important.

Une autre imperfection possible est liée à l'adaptation spatiale entre l'oscillateur local et le faisceau réfléchi par la cavité. Une mauvaise adaptation est équivalente à des pertes puisque seule une partie du faisceau réfléchi interfère avec l'oscillateur local. Cependant, les pertes optiques modifient dans les mêmes proportions les signaux  $I_{+}$  et  $I_{-}$  et préservent donc la visibilité des franges d'interférence. Une mauvaise adaptation ne change pas  $I_{+}$ , mais réduit  $I_{-}$ . On peut d'ailleurs définir le coefficient de recouvrement spatial  $\eta_{OL}$  à partir de la modification de  $\bar{I}_{-}$  :

$$\bar{I}_{-} = 2\sqrt{\eta_{OL} \bar{I}_{cav} \bar{I}_{OL}} \cos(\varphi). \quad (3.31)$$

Comme dans le cas de pertes, une mauvaise adaptation spatiale se traduit par le fait que le spectre observé est plus proche du bruit de photon standard que le spectre

attendu (équation 3.30 en remplaçant  $\eta_{ph}$  par  $\eta_{OL}$ ), ce qui réduit la sensibilité de la mesure de petits déplacements par un facteur  $\sqrt{\eta_{OL}}$ .

### 3.3.2 Réalisation expérimentale

La réalisation expérimentale du dispositif de détection homodyne est présentée sur la figure 23. Pour séparer et recombinaison les différents faisceaux, nous jouons en fait sur leur polarisation. L'élément essentiel est le cube séparateur de polarisation  $PBS_1$ , qui assure à la fois la séparation de l'oscillateur local et du faisceau incident sur la cavité, et la recombinaison partielle de l'oscillateur local avec le champ réfléchi. Comparé au schéma de principe de la figure 6, le montage ressemble donc plus à un interféromètre de Michelson qu'à un interféromètre de Mach-Zender.

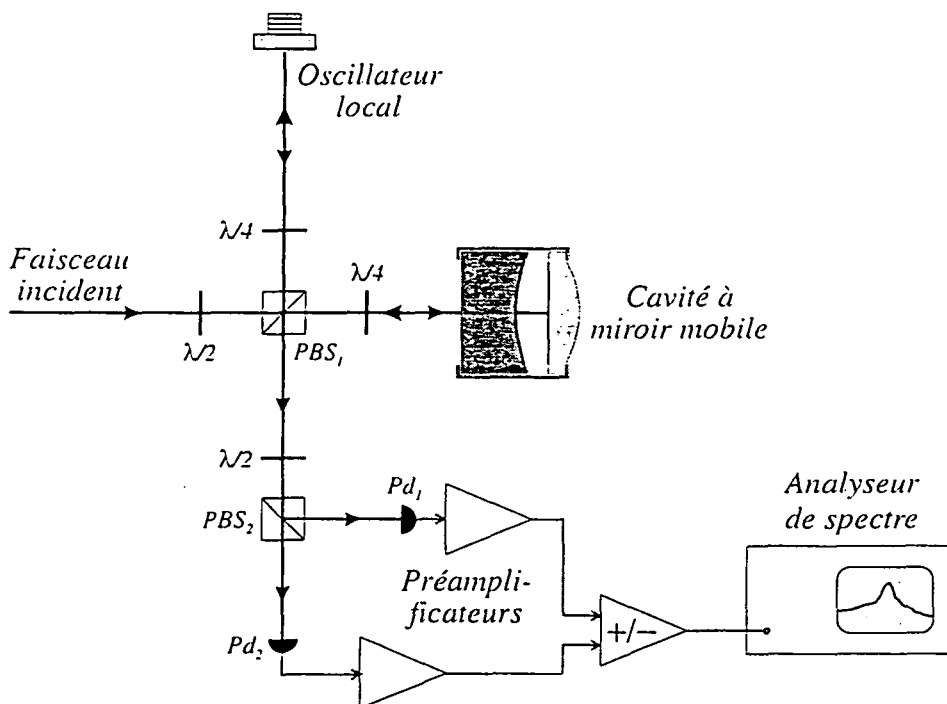


Fig. 23: Réalisation expérimentale du système de détection homodyne. On utilise deux cubes séparateurs de polarisation, des lames  $\lambda/2$  et  $\lambda/4$  pour séparer puis recombinaison les différents faisceaux. L'électronique des photodiodes est composée de préamplificateurs à faible bruit et d'un dispositif sommateur-soustracteur.

Plus précisément, le faisceau issu de la source laser traverse une lame demi-onde ( $\lambda/2$ ) et le cube  $PBS_1$ . La rotation de la lame  $\lambda/2$  autour de son axe permet de répartir l'intensité entre l'oscillateur local et le faisceau incident sur la cavité. En pratique, on envoie  $10\text{ mW}$  dans l'oscillateur local, et  $100\ \mu\text{W}$  dans la cavité. On insère dans les deux bras une lame quart d'onde ( $\lambda/4$ ) dont les axes propres sont tournés d'un angle de  $45^\circ$  par rapport à l'horizontale. Ainsi, la polarisation des faisceaux qui entrent dans chacun des bras, qui est initialement linéaire (horizontale pour le faisceau incident sur la cavité, verticale pour l'oscillateur local), devient circulaire lors de son passage dans la  $\lambda/4$ . Au retour vers le cube  $PBS_1$ , les faisceaux ont de nouveau une polarisation linéaire après le passage dans les lames  $\lambda/4$ , mais de polarisation perpendiculaire à celle du sens aller.

L'oscillateur local et le faisceau réfléchi par la cavité sont alors intégralement éjectés dans la voie de sortie du cube  $PBS_1$  (vers le bas sur la figure), puisque du fait des polarisations, l'oscillateur local est transmis par le cube alors que le faisceau provenant de la cavité est réfléchi. Le cube et ses éléments associés ( $\lambda/2$ ,  $\lambda/4$ ) se comportent donc comme un circulateur optique qui fait se propager le faisceau incident dans les deux bras de "l'interféromètre" et récupère au retour les faisceaux dans la voie de sortie.

Mais si les deux faisceaux sont alors spatialement mélangés, ils n'interfèrent pas car ils sont de polarisations croisées (horizontale pour l'oscillateur local, verticale pour le faisceau réfléchi par la cavité). On utilise alors une lame  $\lambda/2$  tournée d'un angle de  $22,5^\circ$  par rapport à l'horizontale, pour faire tourner de  $45^\circ$  la polarisation des deux champs, puis un second cube  $PBS_2$  sépare chacun des deux faisceaux en deux parties de même intensité, l'une étant transmise avec une polarisation horizontale, et l'autre réfléchie avec une polarisation verticale. La polarisation des deux champs est alors la même dans les deux voies de sortie du cube et ils peuvent interférer. Les champs transmis  $\alpha_1$  et réfléchi  $\alpha_2$  par le cube vérifient les équations (3.20) et (3.21), où la phase relative  $\varphi$  est ajustable en changeant la longueur du bras de l'oscillateur local. Nous avons donc réalisé un dispositif de détection homodyne à partir d'un seul faisceau laser, en utilisant la polarisation des champs pour les séparer et les recombinaison. Les photodiodes  $Pd_1$  et  $Pd_2$  permettent de détecter les intensités des deux champs  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

### 3.3.3 Détection équilibrée

L'ensemble de la détection équilibrée est composé des deux photodiodes  $Pd_1$  et  $Pd_2$ , de leurs préamplificateurs qui fournissent à la fois une tension  $DC$  et un signal

haute fréquence, et d'un dispositif sommateur-soustracteur qui permet de réaliser la différence ou la somme des signaux  $HF$ . On peut ainsi obtenir les fluctuations  $\delta I_-$  (équation 3.28) ou  $\delta I_+$ . Pour mesurer le bruit d'une quadrature du faisceau réfléchi, on utilise en fait le soustracteur-sommeur en position soustracteur, de façon à envoyer le signal  $\delta I_-$  vers l'analyseur de spectre. Mais la position somme permet de mesurer directement le bruit d'intensité du faisceau réfléchi par la cavité, en masquant l'oscillateur local. Dans ce cas, on a en effet,  $\delta I_+ = \delta I_{cav}$  (équation 3.25).

Nous décrivons dans cette section ces différents éléments ainsi que les mesures effectuées sur l'équilibrage des deux voies et sur le rendement quantique de la détection. Nous présenterons dans la section (3.3.4) l'électronique permettant, à partir des voies  $DC$  des préamplificateurs des photodiodes, de détecter les interférences et d'asservir la phase relative entre l'oscillateur local et le faisceau réfléchi par la cavité.

### 3.3.3.1 Les photodiodes

Pour notre expérience, trois qualités sont indispensables pour les photodiodes :

- elles doivent avoir une excellente efficacité quantique ;
- leur réponse en fréquence doit être suffisamment large pour observer sans atténuation les fluctuations des champs à des fréquences d'analyse élevées (plusieurs mégahertz) ;
- enfin, pour l'équilibrage de la détection, il est indispensable que les photodiodes soient appariées, c'est-à-dire qu'elles aient des efficacités quantiques aussi proches que possible.

Les photodiodes utilisées pour la détection homodyne sont des  $FND100$  de  $EG\&G$ , polarisées par une tension de  $70\text{ V}$ , et dont le fonctionnement est optimal pour une longueur d'onde de la lumière comprise entre  $800$  et  $850\text{ nm}$ . Leur surface photosensible est un disque d'un millimètre de diamètre. Ce sont des photodiodes de très grande efficacité quantique (taux de conversion photon-électron supérieur à  $80\%$ ) et cette efficacité peut être augmentée en retirant la fenêtre de protection de la surface photosensible, et en utilisant un miroir de renvoi qui permet de récupérer sur la photodiode la partie du faisceau qui est directement réfléchi par sa surface. Ces deux manipulations permettent ainsi de limiter les pertes optiques de notre dispositif. Une lentille convergente de focale  $f = 100\text{ mm}$  placée avant le cube  $PBS_2$  permet de focaliser les faisceaux au niveau des photodiodes, avec un col à ce niveau de  $0,5\text{ mm}$ . On récupère ainsi sur les photodiodes l'essentiel du faisceau, sans avoir de problème de saturation des photodiodes lié à une focalisation trop importante.

Chaque photodiode est placée dans un boîtier métallique monté sur deux translations micrométriques horizontale et verticale, qui permettent de centrer les photodiodes

sur le faisceau. Les photodiodes sont placées dans une bague en laiton qui met directement en contact leur boîtier métallique avec la masse, ce qui réduit très nettement les sources de bruit parasite à haute fréquence.

### 3.3.3.2 Les préamplificateurs et le dispositif sommateur-soustracteur

Les photodiodes délivrant un courant proportionnel au flux de photons qu'elles reçoivent, on utilise des préamplificateurs pour transformer ce photocourant en une tension mesurable. Ces préamplificateurs doivent avoir une grande bande passante et un faible bruit. Les préamplificateurs que nous utilisons comportent en fait deux voies séparées, l'une pour les signaux basse fréquence (du continu à quelques centaines de  $kHz$ , qu'on appellera la voie *DC*) et l'autre pour la haute fréquence (voie *HF*). La séparation est réalisée par un filtre *RC* (voir la figure 24). Pour la voie *DC*, on obtient un taux de conversion global courant-tension de  $1V/mA$  à l'aide d'un amplificateur de gain 10 construit autour d'un *OP27*. La voie *HF* est basée sur un montage transimpédance, qui limite l'influence de la capacité parasite de la photodiode. Le taux de conversion est ici de  $1,3V/mA$  en tenant compte de l'impédance de charge en sortie de  $50\ \Omega$ . La bande passante de cet étage est supérieure à  $50\ MHz$ .

Les deux voies *HF* sont envoyées dans un dispositif sommateur-soustracteur, basé sur un amplificateur opérationnel *CLC425* monté en amplificateur différentiel de ten-

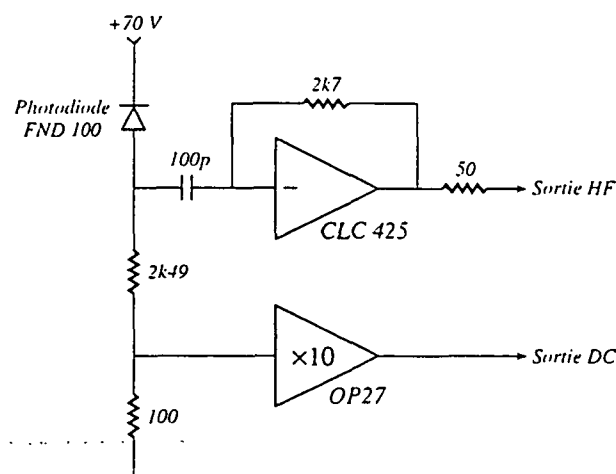


Fig. 24: Schéma des préamplificateurs des photodiodes utilisés dans la détection homodyne. Un filtre *RC* sépare le domaine de fréquences entre la voie *HF*, qui utilise un amplificateur transimpédance à faible bruit, et la voie *DC*.

sion, qui ajoute ou soustrait les deux entrées. Ce circuit est conçu de telle manière que le gain électronique soit le même en valeur absolue quelle que soit la position du commutateur qui permet de sélectionner la somme ou la différence des signaux *HF*. Même si la détection homodyne ne nécessite que la différence des intensités détectées par les deux photodiodes, ce système fournit au choix la somme ou la différence des signaux d'entrée. La somme est par exemple utilisée pour déterminer le bruit d'intensité du faisceau laser (voir la section 3.1.3).

### 3.3.3.3 Equilibrage des deux voies

L'équilibrage entre les deux voies dépend à la fois des caractéristiques optiques et électroniques du système de détection homodyne. Il faut en effet s'assurer indépendamment de l'équilibrage de l'ensemble lame  $\lambda/2$  + cube  $PBS_2$  qui doit diviser en deux faisceaux d'égale intensité l'oscillateur local et le faisceau réfléchi, de l'égalité des rendements quantiques des deux photodiodes, et de l'équilibrage des gains électroniques des préamplificateurs et du dispositif sommateur-soustracteur.

En ce qui concerne l'efficacité quantique des photodiodes, on a sélectionné deux photodiodes parmi un lot d'une dizaine en comparant leur réponse par rapport à une photodiode de référence. Les réponses des photodiodes choisies sont identiques à 0,3 % près.

Pour réaliser l'équilibrage des voies *DC* de l'électronique, on intervertit les deux boîtiers des photodiodes et on regarde la variation des tensions *DC* des deux voies. Pour un équilibre électronique parfait, les tensions mesurées ne doivent pas dépendre du boîtier utilisé. On joue alors sur la valeur d'une résistance interne variable pour équilibrer les deux voies. On obtient finalement un équilibrage des voies *DC* meilleur que 0,2 %.

Une fois cet équilibrage effectué, l'équilibrage de la séparation optique des deux faisceaux s'effectue simplement en tournant la lame  $\lambda/2$  placée avant le cube  $PBS_2$  de façon à annuler la différence des tensions *DC*. La précision de rotation de la lame permet de réaliser un équilibrage à 0,2 % près.

L'équilibrage des deux voies électroniques à haute fréquence est réalisé en deux étapes : on équilibre d'abord séparément les deux voies *HF* des préamplificateurs et le dispositif sommateur-soustracteur. On effectue l'équilibrage des deux voies des préamplificateurs en modulant l'intensité du faisceau incident, à l'aide d'un générateur de signaux haute fréquence qui pilote l'électro-optique de l'asservissement d'intensité, comme nous l'avons déjà fait pour la mesure de la bande passante du FPF (voir le paragraphe 3.1.4.2). On mesure la différence de réponse entre les deux préamplificateurs



avec un soustracteur *Mini-Circuits* dont la sortie est envoyée sur l'analyseur de spectre. On cherche alors à annuler la modulation observée sur l'analyseur de spectre en modifiant légèrement la résistance de contre-réaction du *CLC425* de l'un des préamplificateurs (voir la figure 24). Ce premier équilibrage est limité par la précision de 1 % du soustracteur *Mini-Circuits* utilisé. On équilibre ensuite le dispositif sommateur-soustracteur en le mettant à la place du soustracteur *Mini-Circuits* et en observant le signal à sa sortie sur l'analyseur de spectre. Ici encore, on cherche à réduire la modulation observée en ajustant le gain différentiel du soustracteur.

On voit que cette procédure en deux étapes ne permet pas d'assurer un équilibrage meilleur que 1 % de chaque élément pris séparément (preamplificateur d'une part, dispositif soustracteur d'autre part). Heureusement, un déséquilibre des préamplificateurs peut être compensé par un déséquilibre du dispositif sommateur-soustracteur. En effet, seul compte l'équilibrage électronique global du préamplificateur suivi du sommateur-soustracteur. Notre procédure permet d'obtenir un équilibrage global meilleur que 0,5 %, puisque le taux de rejection de la modulation d'intensité est supérieur à 45 dB sur une plage de fréquence allant jusqu'à 20 MHz.

#### 3.3.3.4 Mesure de l'efficacité quantique de la détection

Il est important pour notre expérience que l'ensemble du système de détection ait un comportement linéaire vis-à-vis de l'intensité arrivant sur les deux photodiodes, et cela pour la plus grande puissance possible. En effet, pour une intensité incidente sur la cavité à miroir mobile de l'ordre de  $100 \mu W$ , il faut utiliser un oscillateur local ayant une puissance d'au moins 10 mW. Il est important d'éviter la saturation des photodiodes et de l'ensemble des amplificateurs. Nous avons donc cherché à caractériser les réponses *DC* et *HF* du dispositif de mesure homodyne en fonction de la puissance reçue par les photodiodes.

Pour la voie *DC*, on mesure avec un voltmètre la somme  $V_+$  des tensions des voies de sortie *DC* des préamplificateurs, en fonction de la puissance incidente  $P^{in}$  sur le système de détection, que l'on mesure avec un microwatt-mètre (modèle *Coherent FieldMaster*). Les carrés sur la figure 25 (courbe (a) de gauche) représentent les points expérimentaux pour des puissances incidentes allant jusqu'à 20 mW. On voit que ces points sont parfaitement ajustés par une droite : le comportement du dispositif de détection est donc bien linéaire dans cette plage de puissance. Comme on connaît le taux de conversion courant-tension  $R_{DC} = 1 V/mA$  de la voie *DC* des préamplificateurs

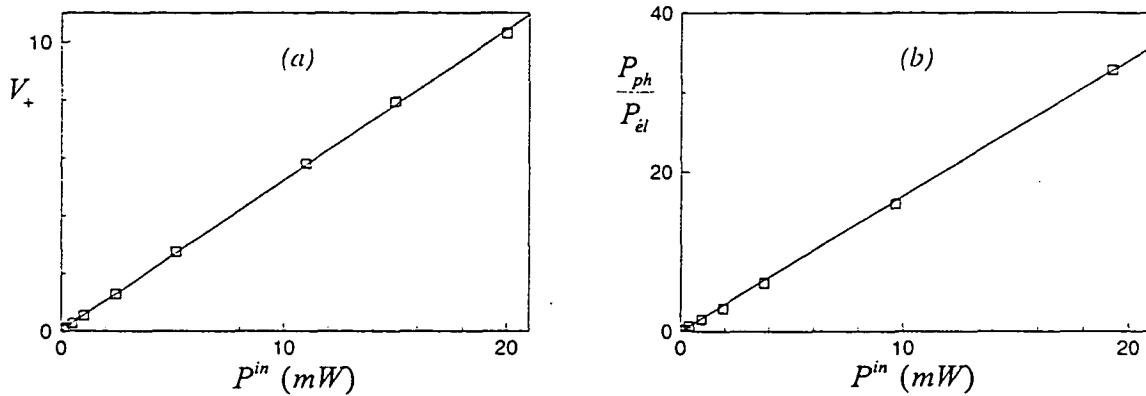


Fig. 25: Linéarité du système de détection en fonction de la puissance lumineuse incidente  $P^{in}$ , pour la voie *DC* (a) et pour le bruit de photon à 2 *MHz* mesuré par la voie *HF* (b).

des photodiodes, la pente de la droite permet de mesurer le rendement quantique  $\eta_{ph}$  du dispositif de détection, qui est le rapport entre le flux d'électrons fourni par les photodiodes et le flux de photons incident sur le système de détection :

$$\eta_{ph} = \frac{hc}{\lambda e} \frac{V_+}{P^{in} R_{DC}} \approx 80 \%. \quad (3.32)$$

Cette valeur reflète en partie les pertes optiques au niveau de la lame  $\lambda/2$  et du cube séparateur de polarisation, qui sont de l'ordre de 4 %. Si on corrige la valeur mesurée de ces pertes, et si on effectue la mesure en plaçant les miroirs de renvoi sur les photodiodes, qui permettent de récupérer 9 % de l'intensité lumineuse incidente, on obtient une valeur du rendement quantique intrinsèque des photodiodes de l'ordre de 90 %.

On peut également tester la linéarité de la voie *HF* en mesurant la puissance du bruit de photon standard à 2 *MHz* en fonction de l'intensité envoyée sur les photodiodes. Le bruit de photon standard doit en effet avoir un comportement linéaire avec la puissance incidente. En pratique, on mesure le bruit de photon standard en masquant le faisceau réfléchi par la cavité et on retranche du signal observé la puissance de bruit  $P_{el}$  de l'électronique, mesurée en masquant la lumière incidente sur le système de détection. On obtient ainsi uniquement la puissance de bruit  $P_{ph}$  de la lumière, qui est tracée sur la figure 25 (courbe (b) de droite) en fonction de l'intensité incidente. On vérifie ainsi le comportement linéaire des voies *HF*.

### 3.3.4 L'oscillateur local

Comme le montre la figure 23 de la page 68, l'ensemble optique de la détection homodyne ressemble à un interféromètre de Michelson. Il doit d'ailleurs avoir les mêmes qualités qu'un interféromètre. Tout d'abord, les deux faisceaux doivent avoir un très bon recouvrement spatial au niveau des photodiodes, puisque seule la partie du faisceau réfléchi qui se projette sur l'oscillateur local interfère pour donner un signal. De plus, le contrôle de la longueur du bras de l'oscillateur local permet de régler la phase relative  $\varphi$  entre les deux faisceaux, et donc la quadrature du faisceau réfléchi dont on mesure les fluctuations. On doit donc pouvoir fixer et contrôler avec précision la valeur du déphasage  $\varphi$ , afin de mesurer en continu le spectre de bruit d'une quadrature donnée.

#### 3.3.4.1 Montage du miroir de renvoi

Pour adapter l'oscillateur local au faisceau réfléchi par la cavité, il faut positionner précisément (à l'échelle de la longueur de Rayleigh  $z_R$  du faisceau, soit le millimètre) le miroir de renvoi de l'oscillateur local de façon à ce que les deux faisceaux aient la même taille au niveau des photodiodes, et l'orienter pour qu'ils aient la même inclinaison. Une fois cette adaptation spatiale effectuée, on veut asservir la phase relative entre les deux faisceaux. On va modifier pour cela la longueur du bras de l'oscillateur local (à l'échelle de la longueur d'onde  $\lambda$ , soit le micron).

Le miroir est donc collé sur une petite cale piézoélectrique, pilotée par l'intermédiaire d'un amplificateur haute tension (0–400 V) rapide, qui permet de déplacer le miroir sur une distance de l'ordre du micron. L'ensemble est monté sur un support *Microcontrôle* à butées micrométriques, lui-même fixé sur une platine de translation micrométrique. Cette platine est commandée par un vérin piézoélectrique *Newport ES1330PT-01*. Il permet d'effectuer des excursions d'environ 30  $\mu\text{m}$ , par l'intermédiaire d'un amplificateur haute tension 0 – 1000 V bridé à 150 V pour ne pas endommager le vérin. On a ainsi tous les degrés de liberté nécessaires à un réglage efficace du recouvrement spatial entre les deux faisceaux, et à un bon fonctionnement de l'asservissement de la phase relative.

#### 3.3.4.2 Recouvrement spatial des faisceaux

On adapte spatialement l'oscillateur local au faisceau réfléchi par la cavité en réglant la position et l'orientation du miroir. En appliquant sur le vérin une rampe de tension, on peut visualiser avec un oscilloscope les franges d'interférences sur la partie

*DC* du signal  $I_-$ . On utilise alors la butée d'avance manuelle du vérin et les butées micrométriques du support de miroir de façon à maximiser les interférences. En pratique, il faut positionner le miroir de renvoi au niveau du col du faisceau incident, c'est-à-dire à la position équivalente à celle du miroir plan de la cavité à miroir mobile : les deux bras ont alors la même longueur, et les structures transverses des deux faisceaux sont les mêmes au niveau des photodiodes.

Une fois le réglage effectué, on peut déterminer le recouvrement  $\eta_{OL}$  à partir de l'amplitude crête à crête des interférences (voir l'équation 3.31), mesurée en visualisant les franges d'interférence sur un oscilloscope digital. On mesure aussi les intensités moyennes  $\bar{I}_{cav}$  et  $\bar{I}_{OL}$ , en masquant alternativement l'oscillateur local et le faisceau réfléchi par la cavité. On obtient ainsi une tension crête à crête de 1,8 V, pour une tension associée à  $\bar{I}_{cav}$  de 38 mV et une tension associée à  $\bar{I}_{OL}$  de 5,68 V. À partir de l'équation (3.31), ces valeurs correspondent à un recouvrement spatial de 94 %.

### 3.3.4.3 Asservissement de la phase

Les fluctuations du déphasage  $\varphi$  entre les deux faisceaux sont essentiellement dues aux fluctuations d'indice de l'air le long des trajets que suivent les deux faisceaux, et aux vibrations mécaniques de l'ensemble des supports optiques. Afin de minimiser ces perturbations, la partie interférométrique du montage (le cube séparateur de polarisation  $PBS_1$  et l'ensemble des deux bras de l'interféromètre) est placée dans une boîte en plexiglas. En plus de ces perturbations mécaniques, les fluctuations du déphasage  $\varphi$  peuvent aussi être dues à une variation du désaccord du faisceau par rapport à la cavité à miroir mobile, qui se traduit par une variation de la phase du faisceau réfléchi. On a enfin une dérive lente du déphasage  $\varphi$ , liée à des effets de dilatation thermique des supports. On compense ces perturbations à l'aide d'un asservissement qui agit sur la longueur du bras de l'oscillateur local.

On utilise comme signal d'erreur les tensions issues des voies *DC* des deux chaînes de détection. On peut écrire la somme et la différence de ces deux tensions sous une forme similaire aux équations (3.26) et (3.27) :

$$V_- = 2g_{DC} \sqrt{\eta_{OL} \bar{I}_{cav} \bar{I}_{OL}} \cos(\varphi) \quad (3.33)$$

$$V_+ = g_{DC} (\bar{I}_{cav} + \bar{I}_{OL}) \quad (3.34)$$

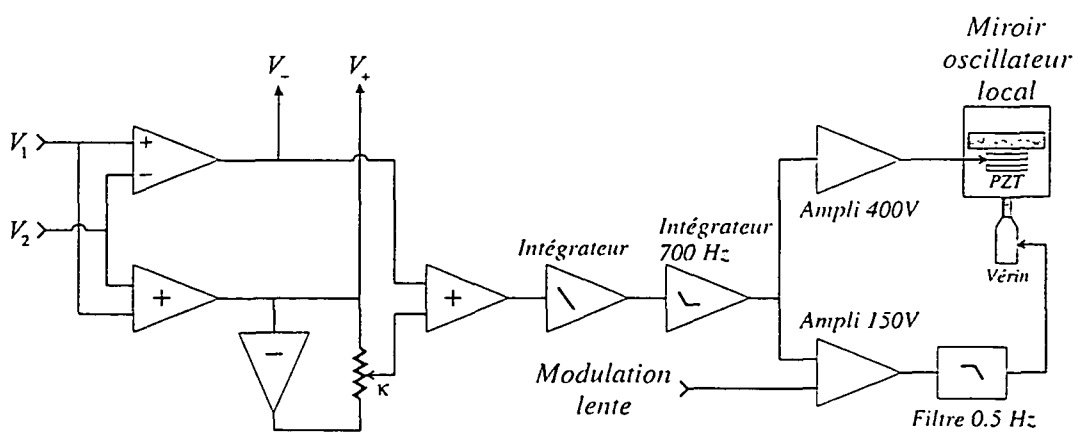
où  $g_{DC}$  est le coefficient de proportionnalité entre les tensions de sortie à basse fréquence des préamplificateurs et la puissance lumineuse reçue par les photodiodes, qui est le même pour les deux voies quand elles sont équilibrées.

Pour fixer le déphasage  $\varphi$  entre les deux bras, ce qui permet de définir le point de fonctionnement de l'interféromètre, il suffit de fixer la tension  $V_-$ , en la comparant avec une tension de référence. Pour compenser d'éventuelles fluctuations d'intensité du faisceau incident, on compare en fait  $V_-$  à une fraction  $\kappa$  de la tension  $V_+$ . Plus précisément, l'asservissement annule le signal d'erreur  $V_- - \kappa V_+$ , ce qui d'après les équations (3.33) et (3.34) revient à fixer la phase relative  $\varphi$  à une valeur qui vérifie :

$$\cos(\varphi) = \kappa \frac{\bar{I}_{cav} + \bar{I}_{OL}}{2\sqrt{\eta_{OL} \bar{I}_{cav} \bar{I}_{OL}}}. \quad (3.35)$$

Cette quantité, qui ne dépend que d'un rapport des intensités, est bien indépendante des fluctuations de l'intensité incidente.

Pour obtenir le signal d'erreur désiré, on utilise le montage schématisé sur la figure 26. A partir des deux tensions  $V_1$  et  $V_2$  fournies par les voies  $DC$  des deux préamplificateurs, le signal d'interférence  $V_-$  est obtenu grâce à un montage soustracteur. Deux amplificateurs, fonctionnant respectivement en additionneur et en inverseur, permettent d'obtenir les tensions  $V_+$  et  $-V_+$ , un potentiomètre connecté à leur



**Fig. 26:** Schéma de principe de l'asservissement de la longueur du bras de l'oscillateur local. Le préamplificateur fournit un signal d'erreur de la forme  $V_- - \kappa V_+$  à partir des deux tensions  $DC$   $V_1$  et  $V_2$  en sortie des photodiodes. Ce signal contrôle le miroir de l'oscillateur local à l'aide de deux boucles d'asservissement en parallèle.

sortie donnant une tension de la forme  $-\kappa V_+$ . Le signal d'erreur de l'asservissement est alors fourni par un dernier amplificateur qui additionne les tensions  $V_-$  et  $-\kappa V_+$ .

On a déjà vu que l'asservissement doit corriger deux types de perturbations : une dérive lente qui peut être de grande amplitude, et des fluctuations à plus haute fréquence (jusqu'à quelques kilohertz), mais de plus faible amplitude. L'asservissement agit ainsi à la fois sur le vérin piézoélectrique et sur une cale piézoélectrique sur laquelle est collé le miroir de renvoi de l'oscillateur local. Etant donné le poids du support de précision utilisé pour orienter le miroir et de la platine de translation, le vérin ne peut agir qu'à basse fréquence (inférieure à quelques hertz), mais sa grande excursion ( $30 \mu m$ ) permet de corriger des dérives importantes. Par contre, le choix d'un miroir de petite taille ( $7,75 \text{ mm}$  de diamètre et  $4 \text{ mm}$  d'épaisseur) permet à l'ensemble composé de la cale et du miroir d'avoir une fréquence de résonance mécanique aux environs de  $5 \text{ kHz}$ . L'asservissement peut donc fonctionner sans entrer en oscillation jusqu'à une fréquence de l'ordre du kilohertz.

Les deux boucles d'asservissement qui pilotent le vérin et la cale piézoélectrique sont représentées sur la figure 26. Le signal d'erreur est tout d'abord amplifié à basse fréquence par un intégrateur de pente  $-20 \text{ dB/décade}$ , puis par un second intégrateur fonctionnant jusqu'à  $700 \text{ Hz}$ . Ce signal pilote alors directement la cale piézoélectrique par l'intermédiaire d'un amplificateur haute tension  $0 - 400 \text{ V}$ . Il pilote également le vérin piézoélectrique par l'intermédiaire d'un amplificateur  $0 - 150 \text{ V}$ , et d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure égale à  $0,5 \text{ Hz}$ . Les gains des différents amplificateurs et les caractéristiques tension-déplacement des deux éléments piézoélectriques sont tels qu'à basse fréquence, le gain de la boucle "lente" est cent fois plus important que celui de la boucle "rapide" : les dérives lentes de la phase relative sont donc compensées par le vérin, ce qui évite à l'amplificateur haute tension de la cale piézoélectrique de se retrouver en butée. La fréquence de séparation entre les domaines de fonctionnement de ces deux boucles est de l'ordre de  $20 \text{ Hz}$ .

Notons la présence d'une entrée modulation sur l'amplificateur haute tension du vérin qui permet de moduler à très basse fréquence (de l'ordre du hertz) la longueur du bras de l'oscillateur local. Ceci permet de balayer les franges d'interférence et de mesurer le facteur de recouvrement spatial  $\eta_{OL}$ .

La figure 27 montre le résultat de l'asservissement sur la tension  $V_-$ . La courbe (a) représente une frange d'interférence, obtenue en laissant dériver le signal  $V_-$ . On peut constater sur cette courbe que la dérive est très lente puisqu'elle correspond à une variation de longueur du bras de l'oscillateur local de  $\lambda/2$  en 25 minutes. Par ailleurs, le bruit à plus haute fréquence reste modéré. Les courbes suivantes (b) et (c) représentent

la tension  $V_-$  en présence de l'asservissement, pour deux valeurs du paramètre  $\kappa$ . La courbe (b), obtenue pour  $\kappa = 0$ , correspond à un asservissement de la phase relative de l'oscillateur local à  $\pi/2$  : on mesure alors le bruit de phase du faisceau réfléchi. C'est cette phase qu'on utilisera en pratique dans les expériences présentées dans les chapitres 4 et 5.

La tension  $V_-$  résiduelle correspond à une valeur *rms* de l'ordre de  $3 \text{ mV}$ . Pour une valeur de la tension crête à crête égale à  $1,8 \text{ V}$ , cela correspond à des fluctuations de la phase  $\varphi$  autour de sa valeur moyenne  $\pi/2$  avec une variance  $\Delta\varphi = 0,2^\circ$ . Ces fluctuations sont concentrées à des fréquences intermédiaires, de l'ordre de quelques dizaines à quelques centaines de hertz.

On peut s'asservir à différentes valeurs du déphasage en modifiant la valeur de  $\kappa$ . La trace (c) correspond ainsi à une tension  $\kappa V_+$  égale à  $490 \text{ mV}$ , ce qui correspond à un déphasage  $\varphi$  d'environ  $\pi/3$ . Il est cependant impossible de s'asservir à des déphasages trop proches de 0 ou  $\pi$ , car le signal d'erreur ne dépend plus du déphasage en ces points de fonctionnement. Ces déphasages correspondent à la quadrature d'amplitude du champ réfléchi par la cavité, et il est possible de mesurer directement ces fluctuations d'intensité en masquant l'oscillateur local et en utilisant le dispositif sommateur-soustracteur en position sommateur.

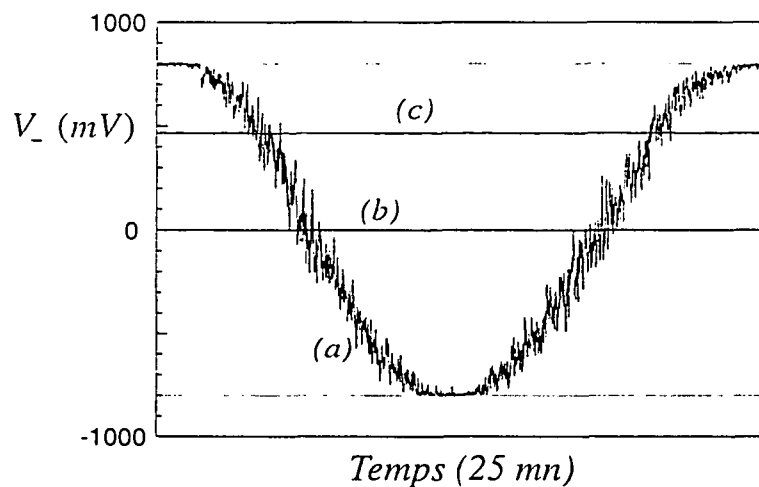


Fig. 27: Résultat de l'asservissement de l'oscillateur local. La courbe (a) représente les dérives enregistrées sans asservissement sur une longue durée. Les courbes (b) et (c) montrent le résultat de l'asservissement pour deux tensions, et donc deux phases, différentes.

### 3.3.4.4 Vérification de la phase

Nous avons vérifié que l'asservissement de l'oscillateur local nous permet bien d'observer le spectre de bruit de la quadrature désirée. Le principe de ce contrôle consiste à appliquer une modulation d'intensité ou de phase au faisceau réfléchi par la cavité et à étudier la dépendance du signal  $S_- [f_m]$  observé à la sortie de la détection homodyne à la fréquence de modulation  $f_m$ , en fonction de la phase relative  $\varphi$  telle qu'elle est définie par l'asservissement.

On peut écrire les fluctuations  $\delta I_-$  (éq. 3.28) en fonction des quadratures d'amplitude  $\delta p_{cav}$  et de phase  $\delta q_{cav}$  du faisceau réfléchi. En négligeant le second terme dans l'équation (3.28) qui est proportionnel à  $\bar{\alpha}_{cav}$ ,  $\delta I_-$  est donné par :

$$\delta I_- [f_m] = \bar{\alpha}_{OL} (\delta p_{cav} [f_m] \cos(\varphi) - \delta q_{cav} [f_m] \sin(\varphi)). \quad (3.36)$$

Le spectre  $S_- [f_m]$  s'écrit alors, en supposant les fluctuations  $\delta p_{cav}$  et  $\delta q_{cav}$  décorréelées :

$$S_- [f_m] = \bar{I}_{OL} (S_p^{cav} [f_m] \cos^2(\varphi) + S_q^{cav} [f_m] \sin^2(\varphi)). \quad (3.37)$$

Pour vérifier la dépendance de  $S_- [f_m]$  pour une modulation d'intensité  $S_p^{cav} [f_m]$  non-nulle, il est difficile d'appliquer une telle modulation sur le faisceau réfléchi par la cavité. Nous avons donc choisi de moduler en intensité le faisceau issu de la source laser, à l'aide de l'électro-optique utilisé pour asservir l'intensité de la source laser, sur lequel on applique une tension sinusoïdale à 2 MHz. Une telle modulation  $\delta p_{in} [f_m]$  du faisceau incident sur le cube  $PBS_1$  se traduit par une modulation d'intensité du faisceau réfléchi par la cavité, celle-ci étant hors résonance, mais aussi par une modulation d'intensité de l'oscillateur local. En fait, si la modulation est suffisamment importante pour pouvoir négliger le bruit quantique, les modulations d'amplitude  $\delta p_{cav}$  et  $\delta p_{OL}$  des champs sont proportionnelles aux champs moyens  $\bar{\alpha}_{cav}$  et  $\bar{\alpha}_{OL}$  :

$$\frac{\delta p_{cav} [f_m]}{\bar{\alpha}_{cav}} = \frac{\delta p_{OL} [f_m]}{\bar{\alpha}_{OL}} = \frac{\delta p_{in} [f_m]}{\bar{\alpha}_{in}}. \quad (3.38)$$

A partir de l'équation (3.28), on trouve alors qu'on ne peut plus négliger le second terme, proportionnel à  $\bar{\alpha}_{cav}$ , puisqu'il est identique au premier terme. La modulation  $\delta I_- [f_m]$  est donc doublée par rapport à la situation où seul le faisceau réfléchi est modulé, et le spectre  $S_- [f_m]$  est quadruplé. Si on tient compte aussi du recouvrement entre les deux faisceaux  $\eta_{OL}$ , on obtient finalement :

$$S_- [f_m] = 4\eta_{OL} \bar{I}_{OL} S_p^{cav} [f_m] \cos^2(\varphi). \quad (3.39)$$



Rappelons qu'on a négligé dans cette expression le bruit de photon standard, en supposant la modulation  $S_p^{cav}$  suffisamment grande, ce qui est le cas expérimentalement.

Le spectre de bruit décrit donc une parabole quand on modifie la tension  $V_-$  de l'asservissement de l'oscillateur local ( $V_- = V_{cc} \cos(\varphi)$ , où  $V_{cc}$  est la tension crête à crête des interférences, voir l'équation 3.33). La figure 28 (courbe (a) de gauche) montre le résultat expérimental, pour un recouvrement spatial  $\eta_{OL}$  de 90 %.  $S_- [f_m]$  est normalisé au bruit de photon standard  $\bar{I}_{OL}$ , mesuré directement en masquant le faisceau réfléchi par la cavité. Les points expérimentaux sont parfaitement ajustés par une parabole, avec un léger offset sur la valeur de  $V_-$ , de l'ordre de  $V_{offset} = 25 \text{ mV}$ , ce qui correspond à un déphasage  $\varphi$  de  $0,8^\circ$ . Ce décalage est sans doute dû à un offset des préamplificateurs utilisés pour l'asservissement de l'oscillateur local, qui déplace le point de consigne de la valeur mesurée  $V_-$ . On peut alors tracer la puissance de bruit  $S_-/\bar{I}_{OL}$  en fonction de  $(V_- - V_{offset})^2/V_{cc}^2$  qui, d'après l'équation (3.33), doit représenter  $\cos^2(\varphi)$ . Les points expérimentaux (courbe (b) de droite) sont parfaitement alignés : on mesure donc bien la quadrature correspondante à la tension  $V_-$  de l'asservissement.

Les étoiles qui apparaissent sur les deux courbes correspondent aux valeurs théoriques attendues pour  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \pi$ . Elles sont déterminées en mesurant directement la modulation d'amplitude  $S_p^{OL} [f_m]$  de l'oscillateur local en cachant le faisceau réfléchi et en utilisant le dispositif sommateur-soustracteur en sommateur. D'après les équations

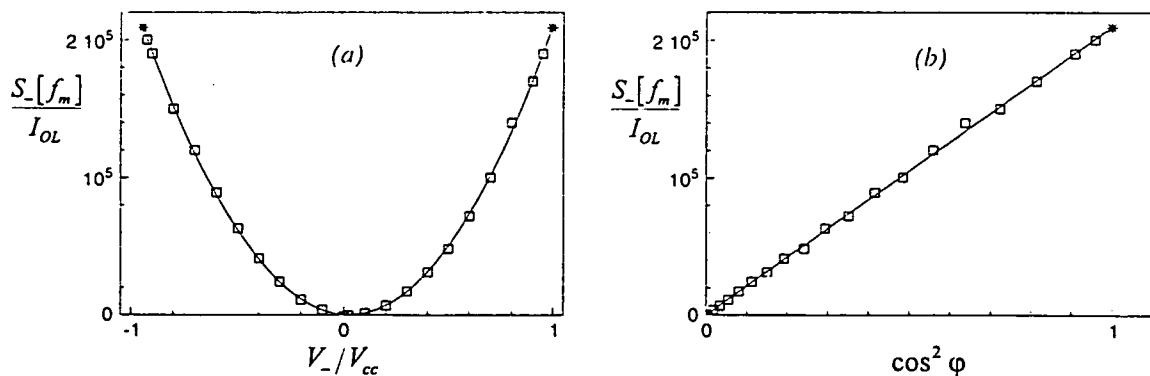


Fig. 28: Vérification de la quadrature mesurée du faisceau réfléchi, pour une modulation d'intensité du faisceau incident. La courbe de gauche représente la puissance de modulation  $S_- [f_m]$  normalisée au bruit de photon standard, en fonction de la tension de consigne  $V_-$  de l'asservissement de l'oscillateur local. La courbe de droite donne  $S_- [f_m]$  en fonction de la quadrature mesurée  $\varphi$ , déduite de la tension de consigne  $V_-$ .

(3.38) et (3.39), la valeur attendue de  $S_- [f_m]$  pour ces angles  $\varphi$  est alors reliée à la modulation  $S_p^{OL} [f_m]$  par :

$$S_- [f_m] = 4\eta_{OL} \bar{I}_{cav} S_p^{OL} [f_m]. \quad (3.40)$$

On constate que la parabole et la droite sont parfaitement compatibles avec cette valeur.

Nous avons aussi vérifié le comportement de la détection homodyne vis-à-vis d'une modulation de phase. Notons qu'il n'est pas possible dans ce cas d'appliquer une modulation de phase globale au faisceau incident, car la détection homodyne n'y est pas sensible : le signal observé ne dépend que de la phase relative entre l'oscillateur local et le faisceau réfléchi par la cavité. Heureusement, on peut utiliser un des pics de bruit thermique de la cavité à miroir mobile qu'on étudiera au chapitre 4, qui induit une modulation de phase du faisceau réfléchi par la cavité à une fréquence voisine de 2 MHz. D'après l'équation (3.37), le spectre de bruit en sortie de la détection homodyne s'écrit alors :

$$S_- [f_m] = \bar{I}_{OL} \left[ 1 + \eta_{OL} \left( S_q^{cav} [f_m] - 1 \right) \sin^2 (\varphi) \right]. \quad (3.41)$$

La figure 29 montre le résultat obtenu, en fonction de la tension de consigne  $V_-$  de l'asservissement de l'oscillateur local. Les points expérimentaux sont encore bien ajustés par une parabole, avec un offset très faible cette fois-ci ( $V_{offset} < 1 \text{ mV}$ ). Si on trace la puissance de bruit  $S_- / \bar{I}_{OL}$  en fonction de  $(V_- / V_{cc})^2$ , on obtient des points expérimentaux alignés sur une droite qui passe bien par 1 pour  $\cos(\varphi) = \pm 1$  (points correspondants aux étoiles sur la figure). Ces résultats montrent que la détection homodyne se comporte comme prévu, aussi bien vis-à-vis d'une modulation d'intensité que pour du bruit de phase. De plus, la figure 29 montre qu'il n'y a a priori que du bruit de phase sur le faisceau réfléchi par la cavité.

Notons enfin que l'équation (3.41) permet d'estimer la dégradation du signal détecté due aux fluctuations résiduelles du déphasage  $\varphi$  de l'oscillateur local. Pour un oscillateur local asservi sur la phase  $\varphi = \pi/2$  de façon à observer le bruit de phase du faisceau réfléchi par la cavité, les fluctuations résiduelles de  $\varphi$  sont concentrées à basse fréquence (de quelques dizaines à quelques centaines de hertz) par rapport au signal observé, qui est dans le domaine du mégahertz : on peut alors estimer la dégradation en moyennant le spectre observé sur les fluctuations *rms* de la phase ( $\Delta\varphi \approx 0, 2^\circ$ ). Le

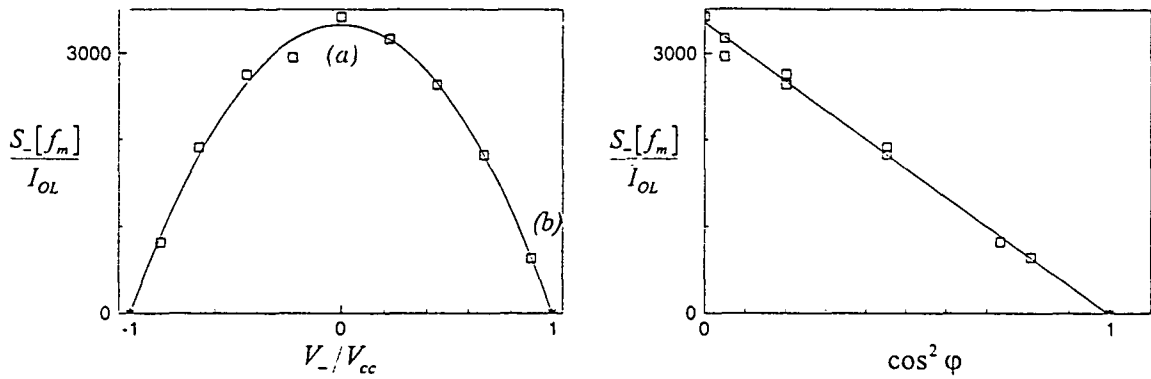


Fig. 29: Vérification de la quadrature mesurée, en utilisant une modulation de phase produite par la cavité. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure précédente.

terme correctif  $1 - \cos^2(\Delta\varphi)$  est alors bien inférieur à un pour mille. Les fluctuations de phase de l'oscillateur local ne limitent donc pas la sensibilité de notre dispositif.

### 3.4 Calibration de la sensibilité de l'expérience

Nous avons déjà souligné au chapitre 2 que la grande finesse de la cavité à miroir mobile permet de mesurer avec une très grande sensibilité les déplacements du miroir. Dans cette section, on se propose de calibrer ces déplacements en modulant en fréquence le faisceau incident sur la cavité à miroir mobile. On a vu en effet au paragraphe (2.2.2.2) que la phase du faisceau étant sensible au déphasage  $\Psi = 2kx$  du champ dans la cavité, une modulation  $\delta\nu_m$  de la fréquence du laser est équivalente à un déplacement  $\delta x_m$  du miroir mobile :

$$\frac{\lambda}{c} \delta\nu_m = \frac{\delta x_m}{L} \quad (3.42)$$

où  $L$  est la longueur de la cavité. Cette relation permet de calibrer les déplacements du miroir observés sur la phase du faisceau réfléchi. Pour un déplacement donné, on détermine la modulation de fréquence  $\delta\nu_m$  qui produit le même signal de modulation de la phase du faisceau réfléchi. Le déplacement  $\delta x_m$  observé est alors relié à  $\delta\nu_m$  par la relation (3.42). Ceci permet donc de graduer l'échelle du spectre de bruit de phase observé sur l'analyseur de spectre en terme de déplacement équivalent. Nous verrons aussi que cette procédure permet de déterminer la sensibilité de la mesure, le plus petit déplacement observable  $\delta x_{shot}$  correspondant au bruit de photon standard du faisceau réfléchi par la cavité.

Pour moduler la fréquence du laser, nous utilisons un générateur haute fréquence (*HP 8648A*) qui fournit une tension sinusoïdale d'amplitude  $V_m$  et de fréquence  $f_m$  variables. Ce signal haute fréquence est envoyé dans l'entrée modulation rapide de l'électro-optique interne du laser (voir le paragraphe 3.1.2). On module ainsi la longueur optique de la cavité laser, et donc la fréquence du faisceau émis. Dans le régime de fonctionnement linéaire du modulateur électro-optique, l'amplitude  $\delta\nu_m$  de cette modulation est proportionnelle à la tension  $V_m$  appliquée.

### 3.4.1 Etalonnage de la modulation de fréquence

Il faut donc commencer par étalonner l'amplitude de la modulation de fréquence  $\delta\nu_m$  en fonction de la tension  $V_m$ . Pour cela, on utilise la cavité de filtrage spatial FPF, dont on a mesuré précisément la bande passante  $f_{BP}$  au paragraphe (3.1.4.2). La modulation de fréquence du laser va induire une modulation d'intensité du faisceau transmis par la cavité FPF, à condition que celle-ci fonctionne sur le flanc de son pic d'Airy, c'est-à-dire à désaccord  $\bar{\Psi}$  non-nul. La mesure de cette modulation d'intensité transmise  $\delta I_m^t$  et du point de fonctionnement  $\bar{\Psi}$  permet donc de déterminer l'amplitude  $\delta\nu_m$  de la modulation de fréquence.

Plus précisément, la modulation de fréquence du faisceau incident induit une modulation  $\delta\Psi_m$  du désaccord  $\Psi = 2kL$  du champ dans le FPF :

$$\Psi(t) = \bar{\Psi} + \delta\Psi_m(t), \quad (3.43)$$

$$\delta\Psi_m(t) = 4\pi \frac{L}{c} \delta\nu_m \cos(2\pi f_m t). \quad (3.44)$$

Le champ intracavité est également modulé autour du champ moyen  $\bar{\alpha}$  correspondant au désaccord moyen  $\bar{\Psi}$ . Cette modulation  $\delta\alpha_m(t)$  peut être obtenue en linéarisant l'équation d'évolution (2.9) du champ intracavité du FPF autour du point de fonctionnement donné par l'équation (3.43) :

$$\tau \frac{d}{dt} \delta\alpha_m(t) = (-\gamma + i\bar{\Psi}) \delta\alpha_m(t) + i\bar{\alpha} \delta\Psi_m(t), \quad (3.45)$$

où  $2\gamma$  représentent les pertes totales de la cavité et  $\tau$  est le temps mis par la lumière pour effectuer un aller-retour dans la cavité.

On peut alors déterminer l'amplitude de la modulation  $\delta I_m^t$  de l'intensité transmise par la cavité FPF à la fréquence  $f_m$  puisque le champ transmis  $\alpha^t$  est directement proportionnel au champ intracavité ( $\alpha^t = \sqrt{\gamma}\alpha$ ). On obtient ainsi une profondeur de

modulation  $\delta I_m^t / \bar{I}^t$  égale à:

$$\frac{\delta I_m^t}{\bar{I}^t} = \frac{\delta \nu_m}{f_{BP}} \frac{2\bar{\Psi}/\gamma}{\sqrt{\left[1 + \bar{\Psi}^2/\gamma^2 - (f_m/f_{BP})^2\right]^2 + [2f_m/f_{BP}]^2}} \quad (3.46)$$

L'amplitude de la modulation de l'intensité transmise dépend de l'amplitude  $\delta \nu_m$  bien sûr, mais aussi du point de fonctionnement de la cavité, et du filtrage par la cavité.

La connaissance du point de fonctionnement  $\bar{\Psi}$  de la cavité et de la profondeur de modulation  $\delta I_m^t / \bar{I}^t$  du faisceau transmis par le FPF permet alors d'étalonner l'amplitude  $\delta \nu_m$  de la modulation de fréquence du faisceau laser. En pratique, pour optimiser la profondeur de modulation de l'intensité, on se place au voisinage de la mi-transmission ( $\bar{\Psi} \approx \gamma$ ). Pour cela, nous avons légèrement modifié le fonctionnement de la source laser. Comme on désire asservir le FPF à mi-transmission, on désactive à la fois l'asservissement à résonance de cette cavité, et l'asservissement d'intensité du faisceau transmis (voir la figure 19, page 52). On utilise alors la photodiode placée au niveau du faisceau transmis et utilisée normalement par l'asservissement d'intensité, ainsi que le préamplificateur différentiel de cet asservissement pour obtenir un signal d'erreur égal à la différence entre l'intensité transmise et une tension de référence (voir la figure 30). Ce signal pilote la cale piézoélectrique de la cavité FPF par l'intermédiaire d'un amplificateur haute tension. On règle la tension de référence de façon à ce que la cavité fonctionne à mi-transmission. L'intensité incidente est suffisamment stable pour assurer la stabilité du point de fonctionnement : lors de la mesure, l'intensité transmise  $\bar{I}^t$  et le point de fonctionnement  $\bar{\Psi}$  ne varient pas de plus d'un pourcent.

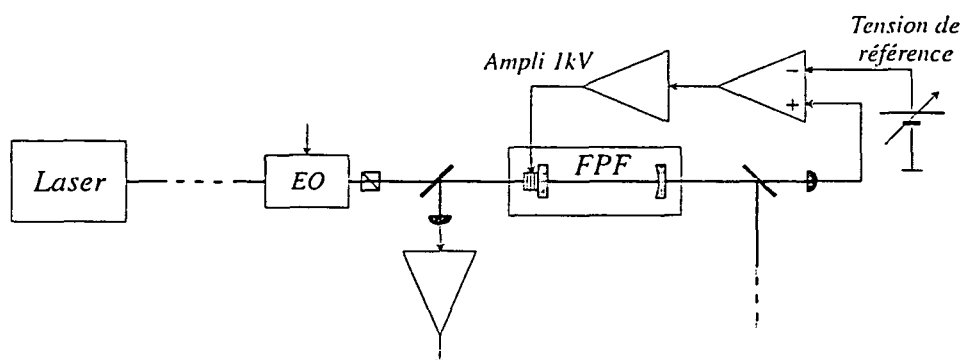


Fig. 30: Principe de l'asservissement à mi-transmission du FPF. L'intensité transmise est comparée à une intensité de référence, le signal différentiel pilotant la cale piézoélectrique du FPF.

Les mesures qui suivent ont été réalisées pour une fréquence de modulation de  $2\text{ MHz}$ . L'intensité moyenne  $\bar{I}^t$  et la modulation haute fréquence  $\delta I_m^t$  sont toutes deux détectées sur la photodiode placée au niveau du faisceau transmis par la cavité et mesurées respectivement au voltmètre et à l'analyseur de spectre. L'intensité transmise moyenne  $\bar{I}^t$  correspond à une tension de  $291\text{ mV}$  à la sortie de la photodiode. Le point de fonctionnement de la cavité est  $\bar{\Psi} = 1,05\ \gamma$ . Le tableau présenté sur la figure 31 récapitule les résultats obtenus pour différentes amplitudes de modulation  $V_m$ .

La première colonne indique la tension appliquée à l'électro-optique interne du laser, telle qu'elle est donnée par le générateur haute fréquence. La colonne suivante présente le niveau de modulation indiqué par l'analyseur de spectre. Pour déterminer la profondeur de modulation (3<sup>ème</sup> colonne), on utilise la relation entre la valeur en  $\text{dBm}$  affichée par l'analyseur et la tension en volts appliquée à l'entrée de celui-ci, valable pour une impédance d'entrée de  $50\ \Omega$  :

$$\delta I_m^t (\text{dBm}) = 10 \text{ Log} \left[ 20 \delta I_m^t (V)^2 \right]. \quad (3.47)$$

Nous avons aussi tenu compte de la différence de gain du préamplificateur de la photodiode, entre la mesure de  $\bar{I}^t$  en  $\text{DC}$  et celle de  $\delta I_m^t$  à  $2\text{ MHz}$ , en calibrant les gains par comparaison avec une photodiode  $FND100$  suivie d'un préamplificateur rapide dont le gain est plat en fréquence.

$V_m$ ( $\text{dBm}$ )	$\delta I_m^t$ ( $\text{dBm}$ )	$\delta I_m^t / \bar{I}^t$ ( $\times 10^{-6}$ )	$\delta \nu_m$ ( $\text{Hz}$ )
-40	-93,25	11,8	68,5
-30	-83,33	37,1	215
-20	-73,33	117	679
-10	-63,56	361	2090
0	-53,58	1130	6600
+10	-43,67	3540	20600

Fig. 31: Etalonnage de la modulation de fréquence du laser sur la cavité FPF.

Enfin, la dernière colonne donne l'amplitude  $\delta\nu_m$  de la modulation de fréquence, calculée à partir de la profondeur de modulation  $\delta I_m^t / \bar{I}^t$  et de l'équation (3.46). On peut noter que pour le point de fonctionnement choisi ( $\bar{\Psi} = 1,05 \gamma$ ,  $f_m = 2 \text{ MHz}$ ,  $f_{BP} = 5,8 \text{ MHz}$ ), cette relation s'écrit (à  $10^{-4}$  près) :

$$\delta\nu_m = f_{BP} \frac{\delta I_m^t}{\bar{I}^t}. \quad (3.48)$$

Nous avons donc déterminé l'amplitude de modulation  $\delta\nu_m$  pour différentes tensions  $V_m$  appliquées. On peut noter sur le tableau que l'amplitude de la modulation de fréquence croît bien linéairement avec celle de la tension appliquée à l'électro-optique. Nous allons maintenant déterminer l'effet de cette modulation sur la cavité à miroir mobile.

### 3.4.2 Calibration de la cavité de grande finesse

On mesure directement le bruit de phase du faisceau réfléchi par la cavité à miroir mobile, asservie à résonance, pour les mêmes valeurs de la modulation de fréquence du laser, c'est-à-dire pour les mêmes tensions  $V_m$ . Pour un oscillateur local de  $10 \text{ mW}$  et une puissance incidente sur la cavité de  $100 \mu\text{W}$ , on obtient les résultats présentés sur le tableau de la figure 32.

Le bruit de photon est mesuré en masquant le faisceau réfléchi par la cavité, et le bruit électronique en masquant en plus l'oscillateur local. Les lignes suivantes donnent le niveau de bruit de phase tout d'abord sans modulation (bruit thermique), puis pour des tensions de modulation  $V_m$  allant de  $-40 \text{ dBm}$  jusqu'à  $+10 \text{ dBm}$ . La deuxième colonne représente les valeurs, mesurées sur l'analyseur de spectre avec une résolution spectrale (RBW) de  $1 \text{ Hz}$ , de la puissance de bruit pour les différentes mesures. La dernière colonne représente les tensions correspondantes corrigées : pour le bruit de photon, on a retranché le niveau du bruit électronique, pour le bruit thermique celui du bruit de photon et pour les différentes valeurs de la modulation le niveau du bruit thermique.

On peut ensuite tracer l'amplitude de la modulation de phase, normalisée par rapport à l'amplitude du bruit de photon standard  $V_\varphi^{shot} = 67,1 \text{ nV}$ , en fonction de l'amplitude  $\delta\nu_m$  de la modulation de fréquence. La figure 33 représente les résultats expérimentaux. On constate que ceux-ci sont très bien ajustés par une droite de pente

$V_m$ (dBm)	$S_\varphi$ (dBm)	$V_\varphi$ ( $\mu V$ )
bruit électronique	-140	0,0224
bruit de photon	-130	0,0671
bruit thermique	-108	0,887
-40	-73,5	47,25
-30	-63,5	149,4
-20	-53,5	472,6
-10	-43,5	1495
0	-33,5	4728
+10	-23,5	14950

Fig. 32: Calibration de la cavité de grande finesse.

égale à 1, comme c'est attendu en échelle logarithmique, puisque l'amplitude de la modulation de phase doit être proportionnelle à l'amplitude de la modulation de fréquence.

L'interpolation des points expérimentaux par une droite de pente 1 donne la relation :

$$V_\varphi = 7 \cdot 10^{-7} \delta\nu_m \quad (V/Hz). \quad (3.49)$$

Cette relation permet de calibrer les déplacements du miroir mobile. En effet, on peut relier un déplacement  $\delta x_m$  à une modulation de phase par l'équation (3.42). Pour notre première cavité à miroir mobile, de longueur 1,06 mm et avec  $\lambda = 812 \text{ nm}$ , on obtient un déplacement équivalent :

$$\frac{\delta x_m}{\delta\nu_m} = 2,87 \cdot 10^{-18} \quad (m/Hz). \quad (3.50)$$

Ainsi, un bruit de phase correspondant à une tension  $V_\varphi$  mesurée sur l'analyseur de spectre est dû à un déplacement  $\delta x$  donné par :

$$\delta x = 4,1 \cdot 10^{-12} V_\varphi \quad (m/V). \quad (3.51)$$



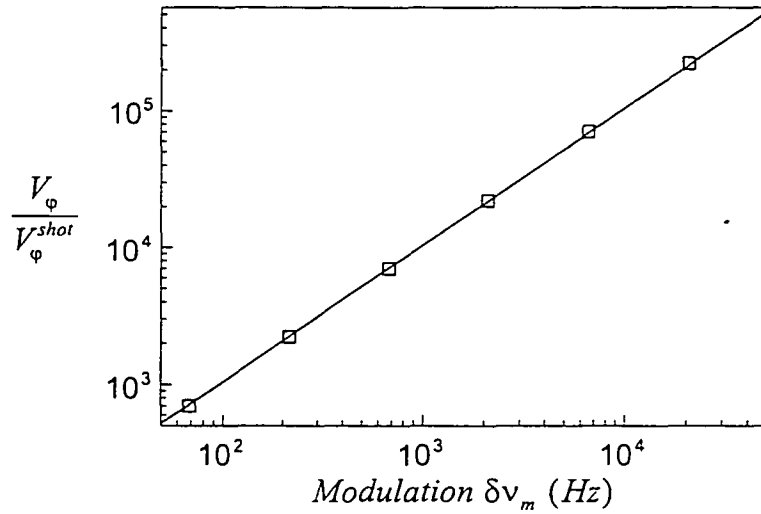


Fig. 33: Calibration des déplacements observés sur la cavité à miroir mobile. Les carrés représentent la modulation  $V_\varphi$  observée sur l'analyseur de spectre, normalisée au bruit de photon standard  $V_\varphi^{shot}$ , pour différentes valeurs de la modulation  $\delta\nu_m$  de la fréquence du laser. Le trait continu est un ajustement par une droite de pente 1.

### 3.4.3 Détermination de la sensibilité

La calibration réalisée dans la section précédente permet de déterminer la sensibilité de la mesure de petits déplacements. La mesure est en effet limitée par le bruit de photon standard (nous verrons dans la section suivante que le bruit de fréquence a un effet négligeable). Le plus petit déplacement observable  $\delta x_{shot}$  est donc celui qui produit une tension  $V_\varphi$  égale à  $V_\varphi^{shot}$ , pour une résolution spectrale de 1 Hz. D'après l'équation (3.51), on trouve :

$$\delta x_{shot} = 2,75 \cdot 10^{-19} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}. \quad (3.52)$$

On peut chercher à comparer cette valeur à sa valeur théorique, en prenant en compte toutes les imperfections du dispositif expérimental. La sensibilité attendue est alors de la forme :

$$\delta x_{shot} = \frac{\lambda}{16\mathcal{F}\sqrt{I^{in}}} \frac{T+P}{T} \frac{1}{\sqrt{\eta_{ph}\eta_{OL}\eta_{cav}}} \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_{cav}}\right)^2}, \quad (3.53)$$

où tous les paramètres ont été définis dans les sections précédentes. Rappelons les paramètres de notre expérience : longueur d'onde  $\lambda = 812 \text{ nm}$ , finesse  $\mathcal{F} = 37\,000$ , puissance incidente  $P^{in} = (hc/\lambda)\bar{I}^{in} = 100 \mu\text{W}$ , transmission du coupleur  $T = 60 \text{ ppm}$ , pertes  $P = 109 \text{ ppm}$ , rendement quantique de la détection  $\eta_{ph} = 0,91$ , recouvrement

spatial avec l'oscillateur local  $\eta_{OL} = 0,94$ , adaptation spatiale  $\eta_{cav} = 0,98$  et bande passante  $\Omega_{cav}/2\pi = 1,9 \text{ MHz}$ . On trouve alors une sensibilité théorique de :

$$\delta x_{shot} = 3 \cdot 10^{-19} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}, \quad (3.54)$$

en bon accord avec la valeur expérimentale (3.52) : l'écart relatif n'est que de 8 %.

### 3.4.4 Effet du bruit de fréquence

On cherche dans cette section à vérifier que le bruit de fréquence de la source laser ne limite pas la sensibilité de notre dispositif aux déplacements du miroir mobile. Pour mesurer le bruit de fréquence du laser, on peut utiliser le signal d'erreur fourni par la cavité FPE qui sert à asservir la fréquence du laser. A haute fréquence (supérieure à quelques centaines de kilohertz), les vibrations mécaniques de la cavité FPE sont négligeables et le signal d'erreur dépend essentiellement du bruit de fréquence du laser. On peut alors calibrer cette dépendance en mesurant l'effet d'une modulation de fréquence sur ce signal d'erreur. Malheureusement, l'intensité envoyée dans la cavité est trop faible pour obtenir une sensibilité suffisante. On utilise donc en pratique une autre cavité, qu'on appellera FPE<sub>2</sub>, dans laquelle on peut envoyer une intensité suffisante. On asservit le laser sur cette cavité par la méthode des bandes latérales, en utilisant toute l'électronique prévue pour l'asservissement du laser sur le FPE (voir la section 3.1.2). On va donc déterminer dans la suite le jitter du laser asservi sur cette cavité FPE<sub>2</sub>. L'asservissement de fréquence du laser ne fonctionnant pas à haute fréquence, ce jitter est semblable pour une fréquence supérieure à quelques centaines de kilohertz à celui du laser asservi sur le FPE.

#### 3.4.4.1 Présentation de la cavité utilisée

La cavité que nous avons utilisée a été réalisée par Yassine Hadjar au cours de sa thèse. Il s'agit d'une cavité linéaire de 21 cm de long, constituée d'un miroir d'entrée plan monté sur une cale piézoélectrique, et d'un miroir de sortie courbe de rayon de courbure égal à 1 m. Sa bande passante est égale à 200 kHz, ce qui correspond à une finesse  $\mathcal{F} \approx 1800$ . La taille importante du col du mode fondamental ( $w_0 \approx 300 \mu\text{m}$ ) de cette cavité, associée à la tenue au flux des miroirs supérieure à 10 kW/cm<sup>2</sup>, permet d'envoyer plus de 50 mW dans cette cavité. Pour les mesures qui suivent, on asservit le laser sur cette cavité, avec une intensité incidente de 10 mW.

## 3.4.4.2 Mesure du jitter

La fréquence du laser est modulée (à différentes fréquences de modulation  $f_m$ ) de la même façon que pour la calibration de la sensibilité, avec une tension de modulation de  $-40$  dBm appliquée à l'électro-optique interne du laser. L'amplitude  $\delta\nu_m$  de la modulation de fréquence est étalonnée à partir de la cavité FPF, de la même façon que dans la section précédente. Les deux premières colonnes du tableau de la figure 34 indiquent les fréquences  $f_m$  et les amplitudes  $\delta\nu_m$  obtenues.

On mesure alors le niveau de modulation sur le signal d'erreur de la cavité FPE<sub>2</sub>, à l'aide de l'analyseur de spectre avec une résolution spectrale de  $1$  Hz (3<sup>ème</sup> colonne). Ceci permet de calibrer la réponse de la cavité FPE<sub>2</sub> à une modulation de fréquence du laser : pour chaque fréquence de modulation, on détermine le coefficient de proportionnalité (en Hz/ $\mu$ V) entre l'amplitude de la modulation de fréquence et la tension de modulation mesurée sur le signal d'erreur (4<sup>ème</sup> colonne).

Cette calibration étant effectuée, il reste à mesurer le bruit du signal d'erreur (obtenu sans modulation) et à le convertir en bruit de fréquence du laser. Les 5<sup>ème</sup> et 6<sup>ème</sup> colonnes du tableau présentent respectivement le bruit du signal d'erreur et le bruit de l'électronique, obtenu en l'absence de toute lumière incidente sur la cavité FPE<sub>2</sub>. On obtient le bruit du signal d'erreur dû au jitter du laser en faisant la différence entre les puissances de ces deux bruits. Etant donné les différentes sources de bruit

$f_m$ (kHz)	$\delta\nu_m$ (Hz)	Modulation FPE <sub>2</sub> (dBm)	Transfert (Hz/ $\mu$ V)	Bruit FPE <sub>2</sub> (dBm)	Bruit élect. (dBm)	Jitter (mHz/ $\sqrt{\text{Hz}}$ )
100	389	-48,2	0,447	-102,9	-149,9	716
250	186	-57,3	0,61	-120,3	-151,5	132
500	234	-60,3	1,08	-135,6	-152,2	40
750	176	-64,5	1,20	-143,4	-152	17
1000	160	-67,4	1,68	-146,5	-152	15
1500	87,1	-75,3	2,27	-148,2	-151,6	15
2000	75	-78,7	2,89	-148	-151,8	20

Fig. 34: Etude du bruit de fréquence du laser à haute fréquence.

pouvant affecter le signal d'erreur, on obtient ainsi une surestimation du bruit dû au jitter. La dernière colonne présente le résultat de cette estimation, convertie en bruit de fréquence grâce à la calibration.

On voit que le jitter est au moins inférieur à  $20 \text{ mHz}/\sqrt{\text{Hz}}$  au-delà de  $750 \text{ kHz}$ . On peut alors déterminer l'effet de ce jitter sur la cavité à miroir mobile, en convertissant ce bruit en un déplacement équivalent  $\delta x_{\text{jitter}}$  à l'aide de l'équation (3.50). On trouve ainsi :

$$\delta x_{\text{jitter}} \leq 6 \cdot 10^{-20} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}. \quad (3.55)$$

Cette valeur est bien inférieure à la limite de sensibilité  $\delta x_{\text{shot}}$  due au bruit de photon (éq. 3.52) : le bruit de fréquence ne limite donc pas la sensibilité de notre expérience.

---

## 4 Observation des petits déplacements d'un miroir

Nous présentons dans ce chapitre les résultats que nous avons obtenus avec le montage expérimental décrit dans le chapitre précédent, concernant la mesure de petits déplacements du miroir mobile. Après un rapide tour d'horizon des expériences déjà réalisées, ou en cours de réalisation, sur le couplage optomécanique et sur la mesure du bruit thermique, nous décrivons la théorie du couplage optomécanique avec les modes acoustiques internes d'un miroir. Nous présentons ensuite nos résultats expérimentaux sur l'observation du bruit thermique et sur l'étude de la réponse mécanique, pour un miroir plan-convexe et un miroir de géométrie cylindrique. Ce chapitre se termine par une comparaison théorique du bruit thermique à basse fréquence pour ces deux géométries.

### 4.1 Expériences déjà réalisées

#### 4.1.1 Système pendulaire

On a déjà présenté au chapitre 2 l'expérience réalisée par Dorsel *et al* en 1983, à l'Institut Max-Planck de Garching [34]. Dans cette expérience, le miroir mobile est constitué d'une lame de quartz de 60 *mg* suspendue par deux fils de tungstène. Le miroir décrit alors un mouvement pendulaire qui fait varier la longueur de la cavité.

Pour une longueur des fils de l'ordre de 10 *cm*, la fréquence de résonance mécanique est de l'ordre du Hertz ( $\Omega_M = 2\pi \times 1,4$  *Hz* dans cette expérience). A ces fréquences, le bruit sismique est extrêmement important : une isolation de la cavité est donc nécessaire.

Au-delà de l'observation de la bistabilité de la cavité, Dorsel *et al* ont étudié la dynamique très complexe de ce système non-linéaire [60], et ont notamment observé la génération d'harmoniques du mouvement lors de l'excitation par une force extérieure. Dans leur expérience, l'excitation était en fait fournie par le bruit sismique. Notons pour finir que l'anharmonicité du potentiel pendulaire a permis de mettre en évidence sur ce dispositif l'existence, non plus seulement de 3, mais aussi de 5, 7, ... points de fonctionnement (dont certains instables) en augmentant l'intensité incidente.

#### 4.1.2 Oscillateur de torsion

Une expérience récente [28], réalisée à l'Université de Constance dans le groupe de Stephan Schiller et Jürgen Mlynek, a utilisé un oscillateur d'un tout autre type : un oscillateur de torsion en silicium, déjà utilisé pour étudier les processus de relaxation interne du matériau [61,62]. La figure 35 présente cet oscillateur.

Un cadre intérieur, de dimensions  $8\text{ mm} \times 12\text{ mm}$ , est connecté à une ailette centrale ( $2\text{ mm} \times 4\text{ mm}$ ) par deux barres de torsion de  $400\text{ }\mu\text{m}$  de large, chacun de ces éléments ayant une épaisseur de  $380\text{ }\mu\text{m}$ . Le couplage entre les deux principaux modes de vibration de ces deux oscillateurs conduit à l'existence de deux modes d'oscillation du système couplé : un, symétrique, à basse fréquence, et l'autre, antisymétrique, à haute fréquence. C'est ce mode antisymétrique qui présente le meilleur facteur de qualité mécanique, et toute l'étude est faite sur ce mode de vibration, situé aux environs de  $26\text{ kHz}$ . Ce mode, calculé par un programme à éléments finis, est représenté (avec une amplitude très exagérée) sur la figure 35. Un traitement optique appliqué directement sur l'ailette permet de réaliser un miroir mobile.

Les mesures de facteur de qualité sont effectuées en plaçant l'oscillateur dans un cryostat à hélium liquide. Le mode est excité par une cale piézoélectrique attachée à la monture de l'oscillateur. Un faisceau issu d'un laser hélium-néon est réfléchi sur l'ailette, et détecté sur une photodiode à quadrants, qui donne alors un signal directement proportionnel au déplacement angulaire de l'oscillateur.

Après coupure de l'excitation piézoélectrique, on peut observer la décroissance de l'amplitude du mouvement, et avoir ainsi accès au temps de décroissance  $\tau$  et au facteur de qualité mécanique  $Q = \Omega_M \tau / 2$ ,  $\Omega_M$  étant la fréquence du mode de vibration ( $2\pi \times 26\text{ kHz}$ ). A la température de  $2\text{ K}$ , on mesure ainsi  $\tau = 52\text{ sec}$ , ce qui correspond

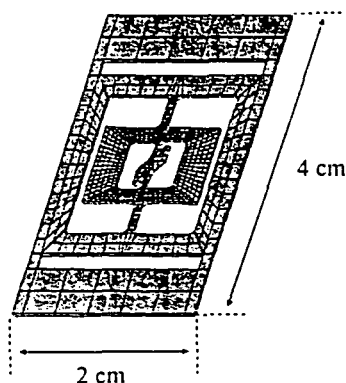


Fig. 35: Oscillateur de torsion utilisé dans l'expérience réalisée à l'Université de Constance [28]. L'oscillateur est constitué des deux pièces centrales (l'ailette et le cadre intérieur). Le mode anti-symétrique représenté ici correspond à une torsion de l'ailette, et à une rotation plus faible du cadre, invisible sur la figure.

à un facteur de qualité mécanique  $Q = 4,3 \cdot 10^6$ . Quand la température augmente, le facteur de qualité diminue et n'est plus égal qu'à 300 000 à température ambiante.

Il faut également noter qu'entre la température ambiante et celle de l'hélium liquide, la fréquence de résonance du système augmente d'environ  $100 \text{ Hz}$ , à cause d'un changement des constantes élastiques du matériau.

Ce miroir mobile est alors monté dans une cavité optique, le faisceau laser se réfléchissant à une distance  $d = 1 \text{ mm}$  de l'axe de torsion, afin que la rotation de l'ailette modifie la longueur de la cavité. Pour un tel oscillateur, la masse effective  $m$  est donnée par :

$$m = \frac{I}{d^2}, \quad (4.1)$$

où  $I$  est le moment d'inertie de l'ailette. Ici,  $I = 9,6 \cdot 10^{-12} \text{ kg.m}^2$  et on obtient une masse  $m$  de l'ordre de  $10 \text{ mg}$ .

Pour monter la cavité, on colle le cadre de l'oscillateur à un anneau en invar, qui définit la distance et le parallélisme avec le coupleur d'entrée. La cavité a une longueur de  $1 \text{ cm}$  (et donc un intervalle spectral libre de  $15 \text{ GHz}$ ). Le miroir d'entrée, de  $10 \text{ cm}$  de rayon de courbure, a une transmission de  $50 \text{ ppm}$ , mais les pertes du miroir mobile limitent la finesse  $\mathcal{F}$  à 15 000.

Le faisceau incident, issu d'un laser Nd:YAG à  $1064 \text{ nm}$ , a typiquement une intensité de  $5 \text{ mW}$ . L'insertion dans un cryostat à hélium liquide perturbe l'accès optique à la cavité (accord de mode entre le laser et la cavité limité à 50 %) et crée des pertes optiques (rendement total de la détection, incluant l'efficacité quantique de la photodiode, d'environ 70 %). Le schéma de détection utilisé pour cette expérience est différent de

celui présenté au chapitre précédent et s'appuie sur la méthode des bandes latérales correspondant à une modulation de phase du faisceau incident. Les déplacements observés peuvent être calibrés en utilisant une modulation de fréquence du laser, comme on l'a déjà vu pour notre expérience.

Ce dispositif a permis d'observer le mouvement brownien du résonateur pour une température variant de 300 à 4,5 K, avec une sensibilité limitée à  $2 \cdot 10^{-16} \text{ m}/\sqrt{Hz}$  par le bruit électronique du système de détection. Pour des facteurs de qualité mécanique de l'ordre du million, la largeur des pics de bruit thermique observés est convoluée par la bande passante de la détection (4 Hz dans cette expérience). Les niveaux de bruit thermique observés à 300 K ( $\Delta x = (1,3 \pm 0,4) \cdot 10^{-13} \text{ m}$ ) et à 4,5 K ( $\Delta x = (1,3 \pm 0,6) \cdot 10^{-14} \text{ m}$ ) sont relativement proches des valeurs attendues théoriquement ( $\Delta x_{th} = 1,2 \cdot 10^{-13} \text{ m}$  à 300 K), et la dépendance du bruit avec la température est vérifiée.

### 4.1.3 Autres expériences

On a déjà vu dans la section (2.2.2) que le bruit thermique, que ce soit celui des suspensions ou celui des miroirs, est la principale limitation à la sensibilité des détecteurs interférométriques d'ondes gravitationnelles, comme VIRGO [12]. Jusqu'à présent, le bruit thermique hors résonance est évalué indirectement, par une mesure des facteurs de qualité mécanique des modes, combinée à l'application du théorème fluctuation-dissipation [18–20]. Il n'existe que très peu de mesures directes du bruit thermique hors de résonance. Mais l'extrapolation du bruit thermique hors résonance à partir de la mesure des fréquences de résonance et des facteurs de qualité est rendue délicate par la méconnaissance que l'on a des mécanismes de dissipation dans les différents matériaux qui constituent les fils de suspension et les miroirs. Aussi les différents projets de grands interféromètres ont-ils lancé, indépendamment les uns des autres, des expériences destinées à la mesure directe de ce bruit thermique. Les expériences en cours des deux côtés de l'Atlantique sont toutes basées sur le même principe : asservir un laser sur la résonance d'une cavité, et observer le bruit de phase du faisceau réfléchi. Si les deux miroirs de la cavité sont suspendus à un super-atténuateur semblable à ceux qui seront utilisés dans les interféromètres, et si le bruit de fréquence du laser est maîtrisé, le bruit de phase reflète le bruit thermique des suspensions et des miroirs. Ces montages sont donc des modèles réduits des grands interféromètres et sont un outil essentiel des programmes de Recherche et Développement qui visent à améliorer les suspensions et les substrats afin d'augmenter la sensibilité des interféromètres.



Les équipes de VIRGO et de LIGO ont adopté des démarches assez différentes. VIRGO développe un programme intitulé *Low Frequency Facility* (LFF) dont l'objectif est d'utiliser une cavité plan-plan [50]. Ainsi, malgré le diamètre des miroirs, il est possible de réaliser une cavité extrêmement courte ( $L = 100 \mu m$ ), et donc de minimiser l'influence du bruit de fréquence (voir le paragraphe 2.2.2.2). Les premiers essais qu'ils ont réalisés leur ont permis de minimiser les pertes par diffraction pour obtenir une finesse de l'ordre de  $\mathcal{F} = 5400$ . Pour des longueurs plus importantes, les pertes par diffraction augmentent et la finesse décroît. Pour une intensité incidente de l'ordre de  $100 mW$  à  $1,06 \mu m$ , on obtient alors une sensibilité de l'ordre de :

$$\delta x_{shot} \approx \frac{\lambda}{16\mathcal{F}\sqrt{I^{in}}} \approx 2 \cdot 10^{-20} m/\sqrt{Hz}. \quad (4.2)$$

Avec le laser *YAG* préstabilisé de VIRGO, le bruit de fréquence  $\delta\nu$  est de l'ordre de  $10^{-1} Hz/\sqrt{Hz}$  à  $10 Hz$ . La limitation de sensibilité due au bruit de fréquence est du même ordre de grandeur que  $\delta x_{shot}$  :

$$\delta x_{jitter} \approx L\lambda \frac{\delta\nu}{c} \approx 3 \cdot 10^{-20} m/\sqrt{Hz}. \quad (4.3)$$

Des améliorations de la finesse de la cavité et du jitter du laser permettraient d'augmenter encore la sensibilité du LFF.

Le programme du *Thermal Noise Interferometer* développé par LIGO consiste à réaliser une cavité optiquement stable, avec deux miroirs concaves, ce qui permet d'espérer une finesse de l'ordre de  $\mathcal{F} = 100\,000$ . Pour s'affranchir des effets du bruit de fréquence, cette équipe compte en fait réaliser deux cavités et observer le bruit thermique sur la différence des signaux fournis par ces deux cavités.

Un projet semblable est également en cours à l'Université d'Hanovre, dans le cadre du projet *GEO 600*.

## 4.2 Couplage optomécanique avec un résonateur mécanique

On a présenté dans la section précédente les différentes expériences, en dehors de celle que nous développons, reliées au couplage optomécanique. Ces expériences ont permis, ou permettront, d'observer de très petits déplacements des miroirs tels que leur mouvement brownien, ou encore de mettre en évidence les effets statiques du couplage optomécanique tels que la bistabilité de la cavité. Mais l'observation des

effets quantiques du couplage optomécanique impose des conditions assez sévères sur les caractéristiques du système. Nous avons vu dans la section (2.3) qu'il y a principalement deux conditions pour pouvoir observer la Limite Quantique Standard. On trouve en fait les mêmes conditions pour les autres effets quantiques tels que la production d'états comprimés ou la réalisation de mesures quantiques non destructives.

Il faut tout d'abord que les effets quantiques de la pression de radiation soient suffisamment importants. Cette condition dépend à la fois des caractéristiques optiques et mécaniques de la cavité à miroir mobile. Mais elle peut se traduire simplement par le fait que les non-linéarités induites par la pression de radiation doivent être de l'ordre des pertes de la cavité ( $\Psi_{NL} \approx \gamma$ , voir éq. 2.61), ou encore que le système fonctionne dans un régime bistable. Cette condition est évidemment satisfaite dans l'expérience de Dorsel et pourrait l'être aussi dans les autres expériences décrites dans la section précédente. Pour une finesse de la cavité et un système mécanique donnés, elle se traduit en fait par une puissance incidente minimale sur la cavité.

La seconde condition est que les déplacements du miroir induits par les fluctuations quantiques de la pression de radiation doivent être grands devant les autres fluctuations de position. Ainsi dans l'expérience de Dorsel, la fréquence de résonance très basse du pendule rendrait très délicate l'observation d'effets quantiques du fait du bruit sismique. L'utilisation d'un oscillateur de torsion, comme dans l'expérience du groupe de S. Schiller, permet d'atteindre des fréquences de résonance de plusieurs dizaines de kilohertz, et ainsi de s'affranchir du bruit sismique. Reste alors le bruit thermique. Nous avons vu dans la section (2.3) que le bruit thermique devient négligeable lorsque le nombre  $n_T$  de quanta thermiques de l'oscillateur est petit devant le facteur de qualité  $Q$  du miroir mobile.  $n_T$  étant inversement proportionnel à la fréquence, ceci impose de travailler à des fréquences élevées. En particulier, les fréquences de résonance du miroir doivent être élevées. Pour une fréquence de résonance de  $1\text{ MHz}$  et un facteur de qualité de  $10^6$ , il est nécessaire de descendre à une température de  $4\text{ K}$  pour obtenir un rapport  $n_T/Q$  inférieur à  $1/10$ .

Travailler à des fréquences élevées permet par ailleurs d'éliminer la plupart des bruits techniques, comme par exemple les fluctuations classiques de la source laser. Mais des fréquences aussi élevées ne peuvent correspondre à des mouvements d'ensemble du miroir. Aussi avons-nous décidé d'utiliser les modes de vibration des substrats des miroirs pour réaliser nos miroirs mobiles. Etant donné la valeur élevée de la vitesse du son dans des matériaux comme la silice fondue (environ  $6\text{ km.s}^{-1}$ ), on peut obtenir des fréquences de résonance mécanique de l'ordre du mégahertz avec des épaisseurs raisonnables, de l'ordre de quelques millimètres.

Dans cette section, on présente l'équation d'onde qui régit ces modes de vibration, on montre comment la prise en compte des conditions aux limites mène à l'existence de modes propres du résonateur, et comment ces modes peuvent être excités. On fait ensuite le lien avec le couplage optomécanique en montrant comment ces modes de vibration modifient la longueur de la cavité vue par le faisceau laser. Enfin, on montre comment l'effet cumulé des différents modes propres du résonateur peut s'exprimer en fonction d'une susceptibilité mécanique effective du miroir.

#### 4.2.1 Equation des ondes acoustiques. Modes propres d'un résonateur

Les différents résonateurs mécaniques qu'on va utiliser par la suite sont tous en silice fondue (Herasyl). On peut donc considérer le milieu comme élastique, homogène et isotrope. Les déformations du miroir résultent de la propagation d'ondes acoustiques dans le résonateur. La géométrie du résonateur est supposée pour le moment quelconque, exceptée l'existence d'une face plane sur laquelle est déposé le miroir. On définit alors l'axe ( $Oz$ ) normal à cette surface, le miroir étant dans le plan  $z = 0$  (voir la figure 36, page 105).

L'équation de propagation de la déformation  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  dans le résonateur s'écrit de manière générale [63] :

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)), \quad (4.4)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du matériau, et  $\lambda$  et  $\mu$  ses constantes de Lamé.

Les déformations doivent également satisfaire des conditions aux limites à la périphérie du résonateur, qui s'écrivent par exemple pour un résonateur libre :

$$\sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) n_j = 0, \quad (4.5)$$

en tout point  $\mathbf{r}$  de la surface, définie par le vecteur normal  $\mathbf{n}$ ,  $[\sigma]$  étant le tenseur des contraintes, relié au tenseur des déformations  $[u]$  par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = 2\mu u_{ij} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij}, \quad (4.6)$$

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (4.7)$$

On peut, de la même façon qu'en électromagnétisme, chercher des solutions de la forme  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r})e^{-i\Omega t}$ ,  $\Omega$  étant la fréquence d'évolution de l'onde. La déformation acoustique peut être décomposée en une composante longitudinale qui induit des déplace-

ments dans la direction de propagation (onde de compression) et une composante transverse qui crée des déplacements dans le plan perpendiculaire au vecteur d'onde (onde de cisaillement) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^l(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^t(\mathbf{r}), \quad (4.8)$$

avec :

$$\nabla \times \mathbf{u}^l(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^t(\mathbf{r}) = 0. \quad (4.9)$$

Ces deux composantes vérifient alors les équations suivantes :

$$\Delta \mathbf{u}^l(\mathbf{r}) + \frac{\Omega^2}{c_l^2} \mathbf{u}^l(\mathbf{r}) = 0, \quad (4.10)$$

$$\Delta \mathbf{u}^t(\mathbf{r}) + \frac{\Omega^2}{c_t^2} \mathbf{u}^t(\mathbf{r}) = 0. \quad (4.11)$$

où  $c_l$  et  $c_t$  sont les vitesses de propagation des ondes longitudinales et transverses :

$$c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}, \quad (4.12)$$

$$c_t = \sqrt{\mu / \rho}. \quad (4.13)$$

Des solutions des équations (4.8), (4.10) et (4.11) vérifiant les conditions aux limites n'existent que pour certaines valeurs discrètes  $\Omega_n$  de la fréquence, correspondant aux fréquences propres du résonateur. L'ensemble des modes propres  $\{\mathbf{u}_n(\mathbf{r})\}$  ainsi trouvés forme une base orthogonale de l'ensemble des solutions de l'équation (4.4). Cette base permet ainsi de décomposer tout déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_n a_n(t) \mathbf{u}_n(\mathbf{r}), \quad (4.14)$$

où  $a_n(t)$  est l'amplitude du mode acoustique  $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$ , qui dépend des différentes forces appliquées au résonateur.

#### 4.2.2 Mouvements du résonateur

On va utiliser dans ce paragraphe la décomposition modale de la déformation  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  présentée au paragraphe précédent pour déterminer l'évolution temporelle de chaque mode, en présence d'une force extérieure et en présence de dissipation.

## 4.2.2.1 Mouvement d'un résonateur libre

Nous traitons pour commencer le cas d'un résonateur libre, qui n'est donc soumis à aucune contrainte. Pour étudier le mouvement du résonateur, il faut calculer l'énergie associée à la déformation  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , qui est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle associées.

L'énergie cinétique  $\mathcal{E}_c$  s'écrit comme l'intégrale sur tout le volume du résonateur de la densité d'énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \int_V d^3\mathbf{r} \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \right]^2. \quad (4.15)$$

En utilisant la décomposition modale (4.14) et l'orthogonalité des modes propres  $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$ , on obtient :

$$\mathcal{E}_c = \sum_n \frac{1}{2} M_n \left[ \frac{da_n}{dt}(t) \right]^2, \quad (4.16)$$

où  $M_n$  est la masse du mode acoustique  $\mathbf{u}_n$ , égale au produit de la masse volumique  $\rho$  du matériau par le volume du mode acoustique, c'est-à-dire le volume du résonateur mis en mouvement par le mode :

$$M_n = \rho \int_V d^3\mathbf{r} |\mathbf{u}_n(\mathbf{r})|^2. \quad (4.17)$$

L'énergie potentielle est donnée par la relation :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_V d^3\mathbf{r} \sigma_{ij} u_{ij}. \quad (4.18)$$

En intégrant par parties, l'énergie potentielle peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_V d^3\mathbf{r} \left[ \frac{\partial (\sigma_{ij} u_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} u_j \right]. \quad (4.19)$$

Le premier terme est égal à une intégrale sur la surface du résonateur de  $\sigma_{ij} u_j$ , qui est nulle pour un résonateur libre caractérisé par l'équation (4.5). En ce qui concerne le deuxième terme, la définition de  $\sigma_{ij}$  (éq. 4.6) permet de le mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_p = -\frac{1}{2} \int_V d^3\mathbf{r} [(\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} - \mu [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})] \cdot \mathbf{u}]. \quad (4.20)$$

En utilisant la décomposition des modes propres en composantes longitudinale et transverse (éqs. 4.8 et 4.14), on obtient :

$$\mathcal{E}_p = -\frac{1}{2} \sum_{n,m} a_n(t) a_m(t) \int_V d^3\mathbf{r} [(\lambda + 2\mu) \Delta \mathbf{u}_n^l \cdot \mathbf{u}_m + \mu \Delta \mathbf{u}_n^t \cdot \mathbf{u}_m]. \quad (4.21)$$

Chaque composante  $\mathbf{u}_n^l$  et  $\mathbf{u}_n^t$  vérifie les équations de propagation (4.10) et (4.11) qui permettent d'écrire  $\mathcal{E}_p$  sous la forme :

$$\mathcal{E}_p = \sum_{n,m} \frac{\rho \Omega_n^2}{2} a_n(t) a_m(t) \int_V d^3\mathbf{r} (\mathbf{u}_n^l + \mathbf{u}_n^t) \cdot \mathbf{u}_m. \quad (4.22)$$

On obtient finalement à partir de l'orthogonalité des modes propres et de la définition de la masse  $M_n$  (éq. 4.17) :

$$\mathcal{E}_p = \sum_n \frac{1}{2} M_n \Omega_n^2 [a_n(t)]^2. \quad (4.23)$$

L'énergie totale  $\mathcal{E}$  du résonateur prend donc la forme d'une somme d'énergies d'oscillateurs harmoniques non amortis, de masse  $M_n$  et de fréquence propre  $\Omega_n$  :

$$\mathcal{E} = \sum_n \frac{1}{2} M_n \left\{ \left[ \frac{da_n}{dt}(t) \right]^2 + \Omega_n^2 [a_n(t)]^2 \right\}. \quad (4.24)$$

Le mouvement du résonateur peut donc se décomposer sur l'ensemble des modes propres  $\mathbf{u}_n$ , dont les amplitudes sont décrites comme des oscillateurs harmoniques indépendants.

#### 4.2.2.2 Effet d'une force appliquée

Nous allons maintenant déterminer l'équation du mouvement du résonateur quand une force est appliquée au résonateur. On se limitera ici au cas d'une force appliquée sur la face du miroir dans le plan  $z = 0$ , et parallèle à l'axe ( $Oz$ ). Pour tenir compte de cette force, il faut ajouter à l'énergie totale (4.24) du résonateur un terme supplémentaire, qui est l'opposé du travail accompli par la force extérieure sur la surface plane :

$$\mathcal{W} = - \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (4.25)$$

où  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$  est la force par unité de surface appliquée au point  $\mathbf{r}$  et où les crochets représentent l'intégrale de recouvrement dans le plan  $z = 0$  :

$$\langle f, g \rangle = \int_{z=0} d^2r f(r)g(r). \quad (4.26)$$

En utilisant la décomposition modale (4.14) du déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , on obtient :

$$\mathcal{W} = - \sum_n \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}_n \rangle a_n(t). \quad (4.27)$$

L'énergie totale du résonateur s'écrit alors :

$$\mathcal{E} + \mathcal{W} = \sum_n \left\{ \frac{1}{2} M_n \left[ \frac{da_n}{dt}(t) \right]^2 + \frac{1}{2} M_n \Omega_n^2 [a_n(t)]^2 - \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}_n \rangle a_n(t) \right\}. \quad (4.28)$$

Cette énergie se met toujours sous la forme d'une somme d'énergies d'oscillateurs harmoniques indépendants, mais chaque oscillateur est soumis à la force  $\langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}_n \rangle$ . L'amplitude  $a_n(t)$  de chaque mode est alors régie par l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique forcé, obtenue à partir des équations de Hamilton :

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2}(t) + \Omega_n^2 a_n(t) = \frac{1}{M_n} \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}_n \rangle. \quad (4.29)$$

Dans l'espace des fréquences, l'amplitude de chaque mode peut s'écrire sous la forme :

$$a_n[\Omega] = \chi_n[\Omega] \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, \Omega), \mathbf{u}_n \rangle, \quad (4.30)$$

où  $\chi_n[\Omega] = 1/M_n(\Omega_n^2 - \Omega^2)$  est la susceptibilité mécanique d'un oscillateur harmonique non amorti, de masse  $M_n$  et de fréquence de résonance  $\Omega_n$ .

#### 4.2.2.3 Amortissement et mouvement brownien

On n'a pas tenu compte jusqu'à présent de l'amortissement de l'oscillateur, et on a obtenu en conséquence une susceptibilité mécanique qui diverge à la fréquence de résonance. On peut néanmoins en tenir compte en ajoutant une partie imaginaire à la susceptibilité  $\chi_n[\Omega]$ , qu'on écrira de façon générale :

$$\chi_n[\Omega] = \frac{1}{M_n(\Omega_n^2 - \Omega^2 - i\Omega_n^2 \phi_n[\Omega])} \quad (4.31)$$

où l'angle de pertes  $\phi_n[\Omega]$  dépend a priori de la fréquence et du mode considéré. Les mécanismes de dissipation dans les solides étant encore mal connus, la forme exacte de ce paramètre ne peut pas être décrite de manière générale sans faire d'hypothèses simplificatrices sur les mécanismes de dissipation.

On se limitera par la suite aux deux modèles les plus couramment utilisés. Pour un amortissement de type visqueux, l'oscillateur est soumis à une force opposée à sa

vitesse [64,65]. La susceptibilité  $\chi_n[\Omega]$  se met alors sous la forme (4.31) avec :

$$\phi_n[\Omega] = \frac{\Omega}{Q_n \Omega_n} \quad (4.32)$$

où  $Q_n$  est le facteur de qualité mécanique de la résonance  $\Omega_n$ . On supposera toujours  $Q_n \gg 1$  dans ce qui suit.

Le second modèle, basé sur des mesures des pertes acoustiques effectuées pour l'essentiel dans le domaine des ultrasons, modélise les pertes en ajoutant une partie imaginaire à la constante de raideur [17,48,66,67]. L'angle de pertes est alors constant :

$$\phi_n[\Omega] = \frac{1}{Q}. \quad (4.33)$$

Cette expression est a priori valable sur une grande gamme de fréquences, mais pas à fréquence nulle, où la susceptibilité doit être réelle.

Les prédictions des deux modèles ne diffèrent qu'en dehors de la résonance mécanique. Tant qu'on observe le bruit thermique autour de la fréquence de résonance, on décrira par la suite l'amortissement par le premier modèle.

L'amortissement du résonateur par couplage avec un bain thermique est également à l'origine de fluctuations de position liées au bruit thermique. Ces fluctuations peuvent être décrites comme le résultat d'une force de Langevin  $F_{T,n}$  appliquée à chaque mode acoustique. Ces forces sont indépendantes les unes des autres, et vérifient le théorème fluctuation-dissipation qui relie leur spectre  $S_{T,n}$  à la partie imaginaire de la susceptibilité  $\chi_n[\Omega]$  :

$$S_{T,n}[\Omega] = -\frac{2k_B T}{\Omega} \text{Im} \left\{ \frac{1}{\chi_n[\Omega]} \right\}. \quad (4.34)$$

Finalement, le mouvement du résonateur à la température  $T$  et en présence d'une force extérieure  $\mathbf{F}$  est décrit dans l'espace des fréquences par l'ensemble des amplitudes  $\{a_n[\Omega]\}$  des différents modes acoustiques. Chaque amplitude  $a_n[\Omega]$  vérifie l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique forcé :

$$a_n[\Omega] = \chi_n[\Omega] (\langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, \Omega), \mathbf{u}_n \rangle + F_{T,n}[\Omega]). \quad (4.35)$$

On retrouve donc, pour le résonateur mécanique, une équation du mouvement semblable à l'équation (2.12), chaque mode étant ici mis en mouvement forcé par la projection de la force extérieure sur la structure spatiale du mode acoustique.



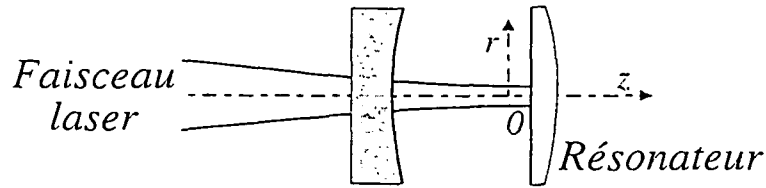


Fig. 36: Géométries du résonateur et de la cavité. L'axe de propagation du champ dans la cavité correspond à l'axe ( $Oz$ ), le miroir mobile se trouvant dans le plan  $z = 0$ . La figure correspond ici à une géométrie plan-convexe du résonateur.

### 4.2.3 Effet du mouvement du résonateur sur le champ

Nous allons traiter dans cette partie l'effet d'une déformation quelconque de la face traitée du résonateur sur le champ dans la cavité. La figure 36 présente la géométrie de la cavité. La forme exacte du résonateur mécanique n'a pas d'importance pour l'instant, tant qu'elle respecte la symétrie cylindrique autour de l'axe optique de la cavité.

On suppose que la face traitée du miroir mobile est plane (ce qui est le cas expérimentalement). Pour être bien adapté spatialement à la cavité, le faisceau doit alors converger au niveau du miroir mobile et être parfaitement aligné avec l'axe optique de la cavité. L'ensemble du système (cavité+faisceau incident) respectant alors la symétrie cylindrique, on a intérêt à utiliser un système de coordonnées cylindriques (voir la figure 36).

La structure spatiale du mode  $TEM_{00}$  incident dans le plan du miroir mobile est alors [59] :

$$v_0(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2}} e^{-r^2/w_0^2}, \quad (4.36)$$

où  $w_0$  est le *col* commun à la cavité et au faisceau quand celui-ci est parfaitement adapté. Le champ dans le plan du miroir est donc de la forme :

$$\mathcal{E}(r, t) = v_0(r)\alpha(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad (4.37)$$

où  $\alpha(t)$  est l'amplitude lentement variable du champ, et  $\omega_0$  la fréquence optique.

En suivant les trajets optiques, on constate que le champ subit en tout point du miroir un déphasage proportionnel au déplacement  $u(r, z = 0, t)$  du miroir. Il devient

alors après réflexion :

$$\mathcal{E}'(r, t) = v_0(r)\alpha(t)e^{-i\omega t}e^{2iku(r, z=0, t)}. \quad (4.38)$$

Pour un déplacement  $u(r, z = 0, t)$  dépendant de  $r$ , le champ après réflexion ne se limite donc plus au seul mode  $TEM_{00}$  incident. Le champ réfléchi se décompose alors sur la base des modes propres  $v_{pql}$  de la cavité :

$$\mathcal{E}'(r, t) = \sum_{p, q, l} \langle v_0 e^{2iku(r, z=0, t)}, v_{pql} \rangle v_{pql}(r)\alpha(t)e^{-i\omega t}, \quad (4.39)$$

où les crochets représentent comme précédemment l'intégrale de recouvrement dans le plan  $z = 0$ .

Toutefois dans notre expérience, les fréquences d'évolution de  $u(r, z = 0, t)$  (qui sont les fréquences acoustiques) sont inférieures ou de l'ordre de la bande passante de la cavité, qui est une cavité non dégénérée et de grande finesse. Dans ces conditions, seul le mode  $TEM_{00}$  est résonnant dans la cavité : l'écart en fréquence des autres modes est en effet très supérieur à la bande passante de la cavité. La cavité filtre ainsi la diffusion du champ sur les autres modes, et seul le mode fondamental  $TEM_{00}$  subsiste dans la somme (4.39) [68] :

$$\mathcal{E}'(r, t) = \langle v_0 e^{2iku(r, z=0, t)}, v_0 \rangle \mathcal{E}(r, t). \quad (4.40)$$

Les déplacements  $u(r, z, t)$  étant supposés très petits devant la longueur d'onde du faisceau incident, on peut se contenter d'écrire cette relation à l'ordre le plus bas :

$$\mathcal{E}'(r, t) = \left(1 + 2ik \langle u, v_0^2 \rangle\right) \mathcal{E}(r, t). \quad (4.41)$$

Le champ subit donc lors de la réflexion un simple déphasage, relié à la moyenne spatiale  $\hat{u}(t) = \langle u, v_0^2 \rangle$  du déplacement  $u(r, z = 0, t)$  en tout point du résonateur, pondéré par l'intensité locale  $v_0^2$  du champ. L'approche monodimensionnelle du couplage optomécanique présentée au chapitre 2 peut donc s'appliquer pour des modes optiques gaussiens se réfléchissant sur un miroir vibrant, à condition de remplacer le déplacement du miroir par la moyenne  $\hat{u}$  de la déformation locale du résonateur.

#### 4.2.4 Susceptibilité mécanique effective

On peut maintenant utiliser les résultats des paragraphes précédents pour écrire de manière extrêmement condensée l'effet de la force de pression de radiation intracavité et du bruit thermique sur le mouvement  $\hat{u}$  du résonateur vu par le champ. La force de pression de radiation en tout point du miroir est proportionnelle à l'intensité locale du champ, donnée par la structure gaussienne du mode :

$$F_{rad}(r, t) = 2\hbar k |\mathcal{E}(r, t)|^2 = 2\hbar k v_0^2(r) I(t), \quad (4.42)$$

où  $I(t) = |\alpha(t)|^2$  est l'intensité du champ, exprimée en photons par seconde et intégrée sur la section du faisceau.

En utilisant la décomposition modale (4.14) de la déformation  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  et l'équation d'évolution de l'amplitude de chacun de ces modes, le déplacement moyen  $\hat{u}$  auquel est sensible le champ s'écrit :

$$\hat{u}[\Omega] = \sum_n \langle v_0^2, u_n \rangle \chi_n[\Omega] \left( 2\hbar k I[\Omega] \langle v_0^2, u_n \rangle + F_{T,n}[\Omega] \right), \quad (4.43)$$

relation que l'on peut mettre sous une forme compacte [69] :

$$\hat{u}[\Omega] = \chi_{eff}[\Omega] \left( 2\hbar k I[\Omega] + F_T[\Omega] \right), \quad (4.44)$$

où  $\chi_{eff}$  est une susceptibilité effective égale à la somme des susceptibilités  $\chi_n$  des différents modes du résonateur, pondérées par le carré de leur recouvrement spatial avec l'intensité intracavité :

$$\chi_{eff}[\Omega] = \sum_n \langle v_0^2, u_n \rangle^2 \chi_n[\Omega]. \quad (4.45)$$

La force  $F_T$  dans l'équation (4.44) représente une force de Langevin effective, qui s'exprime en fonction des forces de Langevin  $F_{T,n}$  de tous les modes du résonateur :

$$F_T = \sum_n \langle v_0^2, u_n \rangle \frac{\chi_n[\Omega]}{\chi_{eff}[\Omega]} F_{T,n}[\Omega]. \quad (4.46)$$

A partir des équations (4.34), (4.45) et (4.46), on montre que cette force de Langevin vérifie le théorème fluctuation-dissipation, son spectre étant relié à la partie imaginaire

de la susceptibilité effective  $\chi_{eff}$  par :

$$S_T[\Omega] = -\frac{2k_B T}{\Omega} \text{Im} \left\{ \frac{1}{\chi_{eff}[\Omega]} \right\}. \quad (4.47)$$

Cette relation montre que le résonateur est globalement à l'équilibre thermodynamique, lorsque chaque mode acoustique l'est indépendamment.

Le couplage optomécanique avec un résonateur peut donc être décrit par des équations tout à fait similaires à celles obtenues pour un système pendulaire dans le cadre d'une description monodimensionnelle du champ. La relation entre l'intensité totale  $I[\Omega]$  et le déplacement  $\hat{u}[\Omega]$  vu par le champ est formellement identique à celle obtenue au chapitre 2 (équation 2.12). La susceptibilité effective  $\chi_{eff}$  intègre à la fois la dynamique du résonateur, à travers les susceptibilités  $\chi_n$  des différents modes acoustiques, et l'adaptation spatiale avec le faisceau lumineux, par l'intermédiaire des intégrales de recouvrement  $\langle v_0^2, u_n \rangle$ .

Au voisinage d'une résonance, par exemple près de la fréquence de résonance fondamentale, l'essentiel de la dynamique est déterminé par le mode résonnant. On peut en effet écrire :

$$\chi_{eff}[\Omega \approx \Omega_1] \simeq \frac{\langle v_0^2, u_1 \rangle^2}{M_1(\Omega_1^2 - \Omega^2 - i\Omega_1^2 \phi_1[\Omega_1])} + \sum_{n \neq 1} \frac{\langle v_0^2, u_n \rangle^2}{M_n(\Omega_n^2 - \Omega_1^2 - i\Omega_n^2 \phi_n[\Omega_1])}, \quad (4.48)$$

où le deuxième terme peut être considéré comme constant au voisinage de  $\Omega_1$ . Notons que l'adaptation spatiale avec le faisceau lumineux apparaît comme une modification de la masse du mode fondamental, sa masse effective devenant  $M_1 / \langle v_0^2, u_1 \rangle^2$  [21].

Dans la limite basse fréquence, où la fréquence  $\Omega$  est petite devant toutes les fréquences propres  $\Omega_n$  du résonateur, chaque susceptibilité  $\chi_n$  tend vers sa valeur statique  $1/M_n \Omega_n^2$  et la susceptibilité effective prend alors une valeur indépendante de la fréquence :

$$\chi_{eff}[\Omega \approx 0] = \sum_n \frac{\langle v_0^2, u_n \rangle^2}{M_n \Omega_n^2}. \quad (4.49)$$

C'est par exemple cette susceptibilité effective à basse fréquence qui est utilisée pour évaluer le bruit thermique interne des composants optiques des grands interféromètres. En supposant les pertes homogènes, on peut considérer que les angles de pertes  $\phi_n[\Omega]$  des différents modes acoustiques sont indépendants de la structure spatiale du mode et sont tous égaux à un angle  $\phi[\Omega]$  qui ne dépend que de la fréquence. Le calcul de la partie imaginaire  $\text{Im}(1/\chi_{eff})$  à partir des équations (4.31) et (4.45) donne alors à

basse fréquence :

$$S_T [\Omega \approx 0] = 2k_B T \frac{\phi[\Omega]}{\Omega} \frac{1}{\chi_{eff}[\Omega \approx 0]}. \quad (4.50)$$

Le spectre thermique du déplacement  $\hat{u}$ , quand on néglige l'effet de la pression de radiation dans l'équation (4.44), est alors simplement proportionnel à la susceptibilité effective :

$$S_{\hat{u}} [\Omega \approx 0] = 2k_B T \frac{\phi[\Omega]}{\Omega} \chi_{eff} [\Omega \approx 0]. \quad (4.51)$$

Notons pour finir qu'il est possible d'obtenir un résultat tout à fait semblable à l'équation (4.44) dans le cas où une force de pression de radiation est appliquée par un faisceau autre que le faisceau intracavité, avec un recouvrement spatial différent des modes acoustiques et du faisceau. La réponse à une force extérieure de la forme  $2\hbar k I_{ext} [\Omega] v_0'^2(r)$  fait intervenir une susceptibilité effective "croisée" :

$$\hat{u} [\Omega] = \chi'_{eff} [\Omega] 2\hbar k I_{ext} [\Omega], \quad (4.52)$$

avec :

$$\chi'_{eff} [\Omega] = \sum_n \langle v_0^2, u_n \rangle \langle v_0'^2, u_n \rangle \chi_n [\Omega]. \quad (4.53)$$

## 4.3 Géométrie des résonateurs

Dans la section précédente, on a vu comment l'équation d'onde et les conditions aux limites d'un résonateur conduisent à l'existence de modes propres de vibration. On va maintenant expliciter ces modes propres pour deux formes de résonateur à symétrie cylindrique : pour un résonateur plan-convexe et pour un résonateur plan-plan.

### 4.3.1 Miroir plan-convexe

La première géométrie de résonateur que nous avons utilisée est la géométrie plan-convexe, qui présente l'intérêt d'offrir des expressions analytiques pour les modes propres, expressions qui se rapprochent énormément des modes gaussiens bien connus en optique.

#### 4.3.1.1 Modes gaussiens

Les modes propres d'un résonateur mécanique sont solutions de l'équation (4.4) avec les conditions aux limites (4.5). Pour un résonateur plan-convexe, on peut utiliser

sous certaines conditions l'approximation paraxiale pour résoudre ces équations. Cette approximation est valide lorsque la composante longitudinale  $k_z$  du vecteur d'onde selon l'axe ( $Oz$ ) est très grande devant sa composante transverse  $k_\perp$ . Nous verrons qu'en acoustique, ceci n'est vérifié que si le rayon de courbure  $R$  de la face convexe est très grand devant l'épaisseur du résonateur. Dans ces conditions, les modes propres se séparent en deux familles : les modes de compression et les modes de cisaillement. nous ne considérerons par la suite que les modes de compression, car les modes de cisaillement ne produisent pas de déplacement suivant l'axe ( $Oz$ ) et ne sont donc pas couplés au faisceau lumineux. Chaque mode de compression est défini par un triplet d'indices  $\{p, q, l\}$  et l'amplitude du déplacement engendré par le mode selon l'axe ( $Oz$ ) s'écrit [70] :

$$u_{pql}(r, \theta, z) = e^{-(r/w_p)^2} \left( \sqrt{2} \frac{r}{w_p} \right)^l L_q^l \left( \frac{2r^2}{w_p^2} \right) \cos \left( \frac{p\pi z}{h(r)} + l\theta \right), \quad (4.54)$$

où  $L_q^l$  est un polynôme de Laguerre.  $h(r)$  est l'épaisseur du résonateur à une distance  $r$  de l'axe. Pour une épaisseur au centre  $h_0$  et un rayon de courbure  $R$ , des calculs élémentaires donnent, dans la limite  $r \ll R$  :

$$h(r) = h_0 - \frac{r^2}{2R}. \quad (4.55)$$

Le *col acoustique*  $w_p$  est défini de la même façon qu'en optique par :

$$w_p^2 = \frac{2h_0}{p\pi} \sqrt{Rh_0} = \frac{w_1^2}{p}. \quad (4.56)$$

La longueur de Rayleigh  $\sqrt{Rh_0}$  étant fixée par la géométrie du résonateur, le col  $w_p$  décroît quand le vecteur d'onde longitudinal  $k_z = p\pi/h_0$  augmente. La fréquence propre  $\Omega_{pql}$  se met, comme en optique, sous la forme :

$$\Omega_{pql}^2 = \Omega_M^2 \left[ p^2 + (2q + l + 1) \frac{2p}{\pi} \sqrt{\frac{h_0}{R}} \right], \quad (4.57)$$

où  $\Omega_M = \pi c_l/h_0$  est l'*intervalle spectral libre* du résonateur. Le nombre  $p$  est ainsi associé à la résonance longitudinale, alors que  $q$  et  $l$  sont associés à la structure transverse de l'onde :  $q$  représente le nombre de zéros de la fonction radiale, et  $l$  détermine la structure angulaire du mode.

Seuls les modes acoustiques qui contribuent à modifier la longueur de la cavité nous intéressent. Pour un faisceau incident  $TEM_{00}$ , l'intégrale de recouvrement entre le champ et le mode acoustique s'annule pour tous les modes acoustiques ne présentant

pas la même propriété de symétrie par rotation autour de l'axe ( $Oz$ ). Par la suite, on ne s'intéresse donc plus qu'aux modes  $l = 0$ , et on oublie cet indice dans les notations.

La forme explicite de l'amplitude  $u_{pq}$  permet de déterminer, en plus de la fréquence de résonance, un deuxième paramètre du mode qui est sa masse  $M_{pq}$ . A l'ordre le plus bas en  $h_0/R$  (approximation paraxiale), on se ramène à une intégrale simple de polynômes de Laguerre, qui donne :

$$M_{pq} = \frac{\pi}{4} \rho h_0 w_p^2, \quad (4.58)$$

où  $\rho$  est la masse volumique de la silice fondue. La masse  $M_{pq}$  est ainsi reliée au volume du mode  $\{p, q\}$  et décroît lorsque  $p$  augmente.

Pour le résonateur utilisé dans notre expérience, l'épaisseur au centre est égale à  $h_0 = 1,5 \text{ mm}$  et le rayon de courbure de la face convexe vaut  $R = 100 \text{ mm}$ . Avec les propriétés de la silice fondue (masse volumique  $\rho = 2,2 \text{ g.cm}^{-3}$  et vitesse du son  $c_l = 5970 \text{ m.s}^{-1}$ ), on obtient une fréquence de résonance du mode longitudinal fondamental légèrement inférieure à  $2 \text{ MHz}$ , un col acoustique  $w_1 \approx 3,4 \text{ mm}$  et une masse  $M_{10}$  de l'ordre de  $30 \text{ mg}$ .

Pour finir, notons que la condition de validité de l'approximation paraxiale est plus difficile à satisfaire en acoustique qu'en optique. En effet, les deux composantes  $k_z$  et  $k_\perp$  du vecteur d'onde s'écrivent :

$$k_z = p \frac{\pi}{h_0}, \quad k_\perp = \sqrt{(2q+1) \frac{2p\pi}{h_0 \sqrt{Rh_0}}}. \quad (4.59)$$

En optique, la longueur d'onde est généralement très petite devant la longueur de la cavité et les ordres longitudinaux  $p$  sont toujours très élevés [59]. La condition de validité de l'approximation paraxiale est donc toujours réalisée. En acoustique en revanche, on travaille avec des modes longitudinaux peu élevés ( $p \approx 1$ ). Pour être valide, l'approximation impose donc que  $R$  soit grand devant  $h_0$ . Pour les résonateurs utilisés,  $R$  est de l'ordre d'une centaine de fois  $h_0$ , et cette condition est bien vérifiée.

#### 4.3.1.2 Montage du miroir mobile

Le miroir mobile utilisé a un diamètre de  $14 \text{ mm}$ . Le coupleur d'entrée de la cavité est un *SuperMirror* commercial de *Newport*, de diamètre  $25,4 \text{ mm}$  et d'épaisseur  $6,35 \text{ mm}$ . Les deux miroirs sont montés dans un support en cuivre, qui assure le centrage, le parallélisme et l'espacement (qui vaut environ  $1 \text{ mm}$ ) des deux miroirs. La figure 37 présente une vue en coupe de la cavité. Les deux miroirs sont plaqués en

vis-à-vis sur des faces parallèles du support  $A$ . Le serrage est assuré par deux autres pièces en cuivre ( $B$  et  $C$ ) et par deux bagues en chrysocale souple ( $D$ ) qui sont fixées sur le support  $A$  (directement ou à travers la pièce  $B$ ) et permettent d'exercer une contrainte uniforme sur les bords des miroirs.

Il faut apporter le maximum de soin possible au parallélisme des deux faces du support en cuivre  $A$ . Tout défaut de parallélisme  $\alpha$  entraîne en effet un décalage de l'axe optique de la cavité  $\alpha R$ , où  $R$  est le rayon de courbure du miroir concave. Ceci peut avoir pour effet de modifier le recouvrement spatial entre le champ intracavité et les modes acoustiques du résonateur. Plus précisément, le décalage latéral de l'axe doit être petit devant la taille caractéristique des premiers modes acoustiques du miroir mobile, qui est de l'ordre de quelques millimètres (voir la section précédente). Pour un rayon de courbure  $R = 1 \text{ m}$ , le parallélisme des pièces doit alors être meilleur que  $1 \text{ mrad}$ , ce qui correspond à une variation d'épaisseur de la pièce inférieure à  $10 \mu\text{m}$  sur le diamètre du miroir mobile de  $14 \text{ mm}$ . Nous n'avons constaté aucun décentrage notable de l'axe optique de la cavité avec les pièces réalisées à l'atelier de mécanique du laboratoire par Bernard Rodriguez.

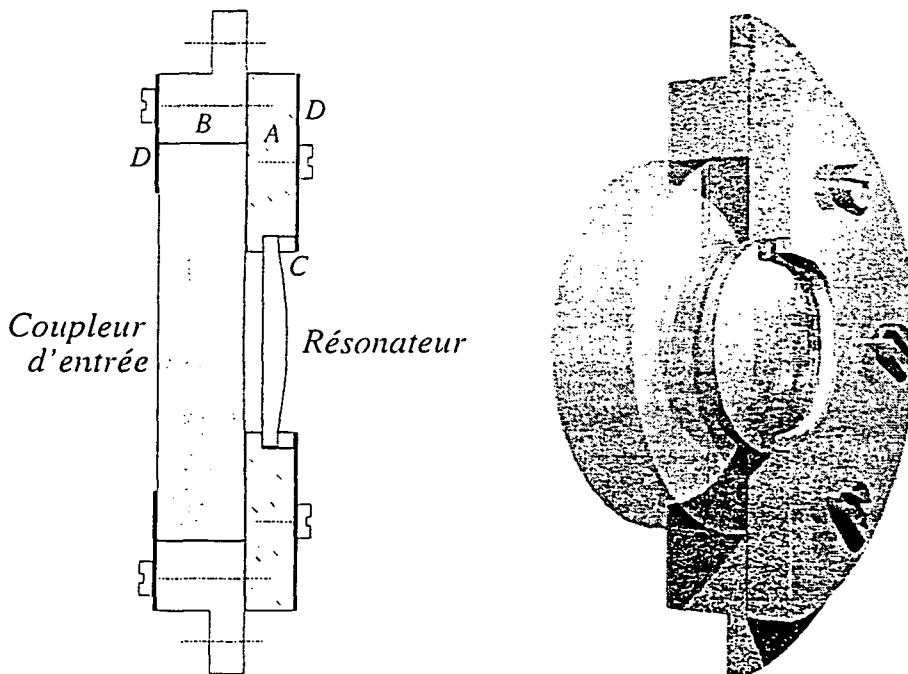


Fig. 37: Schéma de montage de la cavité à miroir mobile, avec un coupleur *Newport* de  $25,4 \text{ mm}$  de diamètre et un miroir déposé sur un résonateur plan-convexe de  $14 \text{ mm}$  de diamètre. Les pièces en cuivre  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et les bagues en chrysocale  $D$  assurent le centrage, le parallélisme et l'espacement entre les deux miroirs.



### 4.3.2 Miroir plan-plan

#### 4.3.2.1 Modes propres

Contrairement au résonateur plan-convexe, le résonateur plan-plan n'offre pas de solution analytique pour ses modes propres de vibration. Pour un solide élastique de forme quelconque, la détermination des modes peut se faire par un programme de calcul par éléments finis. Dans le cas d'un cylindre, il existe toutefois une méthode spécifique mise au point au début des années 80 par J.R. Hutchinson [71], et reprise par François Bondu et Jean-Yves Vinet dans le cadre du projet VIRGO [21]. L'intérêt de cette méthode réside dans le fait qu'elle est extrêmement bien adaptée aux calculs dont on a besoin par la suite, pour évaluer par exemple le couplage des modes avec un faisceau gaussien. En pratique, on a utilisé le programme CYPRES développé par François Bondu, qui permet de calculer les fréquences de résonance, mais aussi la géométrie des modes et leur masse.

Les modes propres de ces résonateurs sont définis par 3 indices : l'ordre circonférentiel  $n$ , la parité  $\xi$  et le numéro d'ordre  $m$ . L'ordre circonférentiel  $n$  reflète la géométrie angulaire du mode. Ainsi, les modes à symétrie cylindrique sont les modes  $n = 0$ , et, si le faisceau est parfaitement centré et normal par rapport au miroir, seuls ces modes sont couplés au mode  $TEM_{00}$  incident. Le paramètre  $\xi$ , égal à 0 ou 1, indique la parité du mode :  $\xi = 0$  pour les modes pairs, où les deux faces antagonistes du résonateur vibrent en opposition de phase (le résonateur "respire") et  $\xi = 1$  pour les modes impairs, où les deux faces vibrent en phase. Enfin,  $m$  reflète la structure radiale du mode. La figure 38 présente la structure de certains des modes que l'on rencontrera dans la suite.

Pour les paramètres des miroirs que nous avons utilisés (*Supermirror Newport*), correspondant à un diamètre de 25,4 mm et à une épaisseur de 6,35 mm, on trouve une dizaine de fréquences de résonance inférieures à 500 kHz si on se limite aux seuls modes  $l = 0$ . La fréquence la plus basse est de 72 kHz.

Il faut noter pour finir que le coupleur d'entrée a une face concave pour des raisons de stabilité optique de la cavité. Nous le considérons cependant comme un cylindre de géométrie plan-plan pour les modes acoustiques. Cela est justifié par le fait que le rayon de courbure de la face concave est très grand devant la structure spatiale des modes acoustiques.

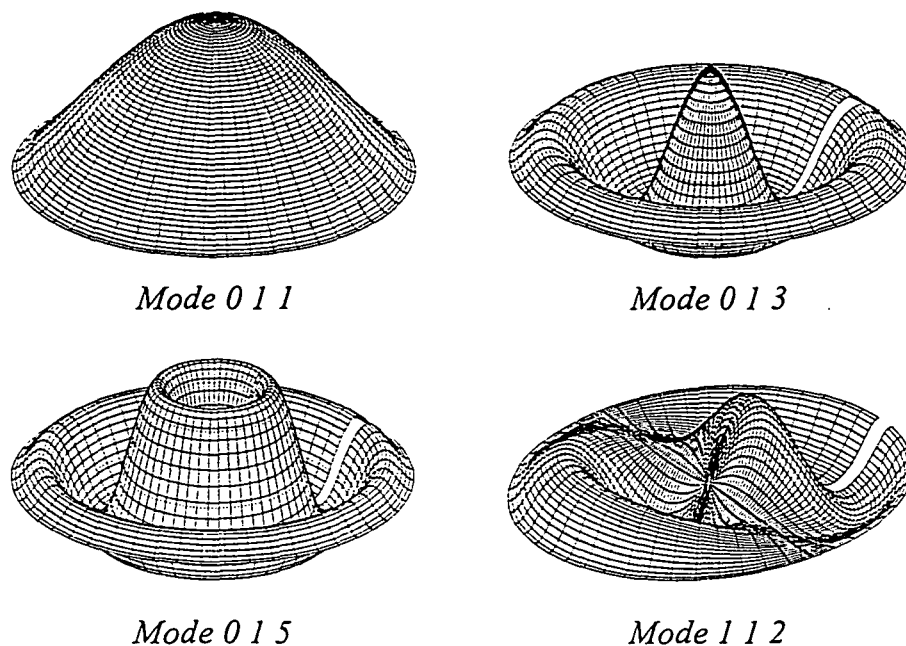


Fig. 38: Représentation de la déformation de la surface d'un miroir cylindrique pour quelques modes qu'on étudiera expérimentalement dans la section (4.6). Ces courbes ont été obtenues à partir du programme CYPRES [17,21].

#### 4.3.2.2 Montage des miroirs

Notre objectif en montant une cavité composée de deux miroirs plan-plan était d'essayer d'obtenir pour les modes acoustiques un accord entre l'expérience et les prévisions théoriques, en particulier en ce qui concerne les fréquences de résonance et les amplitudes de déplacement sous l'effet du bruit thermique. Les calculs théoriques correspondent à des résonateurs libres. Aussi avons-nous cherché à monter ces miroirs de façon à perturber le moins possible les modes de vibration. Une première idée a été de tenir les miroirs par leur tranche, à l'aide de trois vis placées à  $120^\circ$ . Mais une fois la cavité optique montée et testée, il a fallu se rendre à l'évidence : elle était beaucoup trop instable, même si les facteurs de qualité mécaniques observés étaient nettement améliorés.

Après divers essais, nous avons choisi la solution présentée sur la figure 39 : le miroir est maintenu par une bague en laiton avec trois plots de quelques  $mm^2$  de surface usinés sur le diamètre interne de la bague. La bague est coupée radialement sur une épaisseur de l'ordre du millimètre, une vis assurant le serrage de l'ensemble. Chaque miroir est

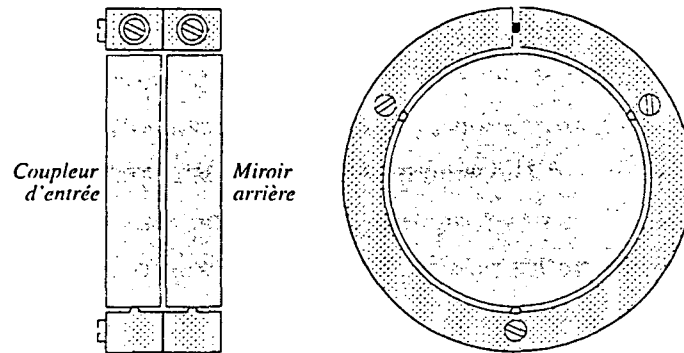


Fig. 39: Schéma de montage de la cavité composée de deux miroirs de géométrie cylindrique et de  $25,4\text{ mm}$  de diamètre. Chaque miroir est monté dans une bague en laiton, qui est coupée sur son diamètre pour permettre le serrage. Les deux pièces sont ensuite fixées l'une à l'autre par 3 vis placées à  $120^\circ$ .

monté dans sa bague en le plaquant sur une pièce de centrage afin d'assurer le meilleur parallélisme possible entre la face de la bague et celle du miroir. En plaquant les deux bagues l'une contre l'autre, on espère ainsi obtenir un parallélisme correct des deux miroirs. Mais l'alignement d'une cavité montée ainsi a été fort décevant : le faisceau incident devait, pour être adapté au mode  $TEM_{00}$  de la cavité, faire un angle avec l'axe théorique du montage optique tel qu'il était impossible après réflexion sur la cavité de le faire interférer avec l'oscillateur local !

On a donc cherché à évaluer le parallélisme des miroirs au moment de leur montage, et non après toute la procédure d'alignement du faisceau sur la cavité, qui peut prendre plusieurs heures. On commence par aligner un faisceau laser par rapport au support de la cavité, de façon à ce qu'il coïncide avec l'axe théorique de la cavité. On monte alors le miroir arrière, qui est le miroir plan de la cavité, dans sa bague et l'ensemble est placé dans le support. Le décalage latéral sur la réflexion du faisceau observé à l'aide d'un diaphragme permet d'évaluer l'angle d'inclinaison du miroir arrière par rapport à l'axe théorique de la cavité. Différents essais montrent clairement que ce décalage varie beaucoup d'une tentative à l'autre. Quand le décalage est jugé satisfaisant, on règle l'orientation du faisceau de façon à se placer en auto-collimation sans changer le point d'impact du faisceau sur le miroir. On place ensuite le miroir d'entrée dans sa bague et l'ensemble est fixé au support de la cavité. On déplace dans son ensemble la cavité à l'aide de translations micrométriques de façon à retrouver la situation d'auto-collimation : le faisceau se trouve alors selon l'axe optique de la cavité, puisqu'il est

normal aux deux miroirs. Par ailleurs, le déplacement effectué permet d'évaluer la distance séparant l'axe optique de la cavité du centre des miroirs. Cette procédure en deux étapes permet d'évaluer à la fois l'erreur d'orientation et le décentrage du faisceau lumineux par rapport à l'axe théorique de la cavité. Elle permet aussi de réduire le décalage du faisceau lumineux par rapport au centre du miroir, qui intervient dans le calcul du recouvrement entre les modes acoustiques des miroirs et le mode  $TEM_{00}$  de la cavité.

## 4.4 Observation des modes acoustiques du résonateur

Nous présentons maintenant la méthode expérimentale que nous avons utilisée pour étudier les modes acoustiques du résonateur. La cavité de grande finesse permet d'observer le mouvement brownien du résonateur en mesurant le spectre de bruit de phase du faisceau réfléchi. Elle permet par ailleurs de mener une étude très précise de la réponse mécanique du résonateur à une force extérieure. Pour cela, nous avons développé un dispositif d'excitation optique du résonateur qui applique sur celui-ci une force d'amplitude et de fréquence données. La réponse du résonateur est alors observée sur la phase du faisceau réfléchi par la cavité.

### 4.4.1 Observation du mouvement brownien

Pour observer le bruit thermique des miroirs de la cavité, on maintient le faisceau laser à résonance avec la cavité grâce à l'asservissement qu'on a présenté dans la section (3.1.5). Afin de pouvoir négliger les effets de la pression de radiation dans la cavité, la puissance incidente sur la cavité est relativement faible. On envoie en pratique  $100 \mu W$  dans la cavité, et  $10 mW$  dans le bras de l'oscillateur local. On asservit ce bras de façon à ce que l'oscillateur local soit en quadrature avec le champ réfléchi par la cavité, en réglant la tension de consigne de l'asservissement de l'oscillateur local à  $0 V$  (voir le paragraphe 3.3.4.3). On observe ainsi le bruit de phase du faisceau réfléchi. Les spectres de bruit sont obtenus avec l'analyseur de spectre *HP 8560E*.

L'observation directe des spectres sur l'analyseur de spectre pose un problème de temps d'acquisition, étant donné la finesse des pics de bruit thermique : pour des facteurs de qualité mécanique supérieurs à  $10^4$  par exemple, leur largeur est inférieure à quelques dizaines de hertz. Si l'on veut étudier le spectre de bruit thermique sur une grande plage de fréquences (typiquement de l'ordre du mégahertz), l'utilisation

du seul analyseur de spectre ne suffit pas. En effet, indépendamment de toute considération de résolution spectrale, celui-ci n'affiche que 600 points, ce qui ferait un point tous les kilohertz environ ! Découper la plage de fréquence en un certain nombre d'intervalles plus petits multiplierait d'autant le temps total d'acquisition, ce qui peut poser des problèmes, compte tenu des dérives de l'ensemble des éléments du montage expérimental.

La solution que nous avons adoptée consiste à récupérer le signal fourni par l'analyseur de spectre sur un oscilloscope digital (*Tektronix TDS 420*) qui travaille de façon synchrone avec l'analyseur. Le nombre de points élevé de l'oscilloscope (15 000 en mode *Haute Résolution*) permet par exemple de réaliser directement une acquisition sur une plage de 500 *kHz* avec un point tous les 35 *Hz*.

L'ensemble de ces appareils est piloté par ordinateur à travers une liaison *GPIB*. Le balayage de l'analyseur de spectre est déclenché par l'ordinateur (mode *single sweep* de l'analyseur). Pour une résolution spectrale supérieure ou égale à 300 *Hz*, la sortie vidéo de l'analyseur fournit un signal analogique qui représente le spectre de bruit. La fréquence d'analyse est balayée linéairement en fonction du temps pendant toute la durée de balayage de l'analyseur, et le signal de sortie à un instant donné représente la puissance de bruit à la fréquence associée. Ce signal est compris entre 0 et 1 *Volt*, avec un taux de conversion de 9,6 *mV/dB*, le niveau 1 *Volt* correspondant au niveau de référence (*reference level*) de l'analyseur de spectre. A la fin du balayage, on obtient sur l'oscilloscope une trace dont l'échelle horizontale représente les fréquences balayées et l'échelle verticale le spectre de bruit en *dB*. Le balayage est relancé automatiquement par l'ordinateur une centaine de fois de façon à moyenner le spectre sur l'oscilloscope, ce dernier fonctionnant en mode *average*. A la fin de l'acquisition, le spectre est transféré depuis l'oscilloscope vers l'ordinateur. Etant donné la résolution spectrale (*RBW*) limitée à 300 *Hz* en mode analogique, le temps d'acquisition reste raisonnable, de l'ordre de 25 minutes pour un spectre moyenné sur 100 acquisitions de 15 000 points et 500 *kHz* de large.

Le spectre ainsi obtenu sur une large plage de fréquence permet de localiser les différents pics de bruit thermique des miroirs. Ceux-ci peuvent alors être étudiés plus précisément en observant le spectre de bruit sur une plage de fréquence beaucoup plus étroite, de l'ordre du kilohertz, centrée sur le pic étudié. On utilise directement l'analyseur de spectre, sa résolution spectrale minimale (1 *Hz*) et sa résolution en points (600) étant suffisantes pour mener à bien cette opération. Cependant, pour obtenir des spectres avec un faible bruit sur la trace, il est nécessaire d'effectuer un moyennage important des spectres, de l'ordre de 1000. L'ordinateur est mis à contribution : il

recupère le spectre moyenné 100 fois par l'analyseur, et effectue le moyennage en temps réel en le relançant 10 fois de suite.

#### 4.4.2 Etude de la réponse mécanique du résonateur

Nous présentons dans cette section un dispositif expérimental d'excitation optique du mouvement du résonateur. Ceci permet d'étudier la réponse mécanique du résonateur à une force appliquée, ce qui constitue une étude complémentaire de celle du spectre de bruit thermique.

L'un des objectifs de cette excitation optique est de s'assurer que les pics de bruit thermique observés sont bien dus aux miroirs de la cavité. Cela permet par ailleurs de déterminer auquel des deux miroirs correspond chaque pic. Enfin, une comparaison précise entre le spectre de bruit thermique et le spectre de réponse à une force extérieure permet d'estimer dans quelle mesure le bruit thermique vérifie le théorème fluctuation-dissipation.

Nous avons développé un dispositif qui permet d'appliquer une force d'amplitude et de fréquence contrôlables au miroir arrière, dispositif qui s'est avéré un outil précieux pour caractériser les modes de vibration de nos miroirs mobiles. Mais appliquer une force à haute fréquence sur un résonateur acoustique n'est pas facile, a fortiori quand celui-ci est intégré à une cavité optique de grande finesse.

Les premières études des propriétés des résonateurs acoustiques plan-convexes ont été faites sur des résonateurs en quartz [70, 72-74]. On peut alors utiliser les propriétés piézoélectriques de ce matériau pour exciter les différents modes de vibration, grâce à des électrodes placées sur le résonateur. Une telle excitation est impossible pour notre résonateur qui est en silice fondue, matériau qui ne présente pas de telles propriétés. Il est de plus difficilement envisageable de placer des électrodes sur le miroir.

On peut également envisager d'utiliser une cale piézoélectrique extérieure au résonateur, comme cela a été fait pour l'oscillateur de torsion présenté dans la section (4.1.2) [28]. Mais la proximité de la cavité et l'asservissement du laser sur la cavité, qui utilise sa transmission résiduelle, limitent considérablement les possibilités d'installation du dispositif excitateur. Notons d'ailleurs que pour l'oscillateur de torsion, l'excitation piézoélectrique n'était pas implantée sur le dispositif interférométrique qui a servi à observer le mouvement brownien. En dehors du problème pratique de coller un miroir à très faibles pertes sur une cale piézoélectrique, une telle cale ajouterait un bruit de position au miroir qui serait préjudiciable pour l'observation du bruit thermique. Enfin, l'utilisation de cales piézoélectriques est impossible aux hautes fréquences qui nous

intéressent (de l'ordre du mégahertz) : leur fonctionnement est limité au domaine du kilohertz.

On a donc décidé d'utiliser la pression de radiation pour exciter les modes acoustiques du résonateur. Plus précisément, un faisceau laser intense est envoyé par l'arrière de la cavité sur le miroir mobile. Modulé en intensité à haute fréquence, ce faisceau exerce une force de pression de radiation à la même fréquence en se réfléchissant sur le miroir. Si on fait varier l'amplitude et la fréquence de cette modulation, on peut donc tester la réponse mécanique du miroir à cette force extérieure.

Cette excitation optique s'avère néanmoins moins efficace qu'une excitation piézoélectrique, car pour des intensités lumineuses raisonnables (de l'ordre de quelques centaines de milliWatts), la force de pression de radiation est beaucoup moins intense que celle que peut exercer une cale piézoélectrique. Nous verrons cependant que les mouvements du résonateur induits par la pression de radiation sont largement suffisants pour être détectés par notre dispositif, grâce à la très grande sensibilité de la cavité optique à de petits déplacements du miroir. Pour éviter que le faisceau arrière ne perturbe ce dispositif, nous devons prendre certaines précautions, que nous détaillerons plus loin.

La figure 40 présente l'ensemble du dispositif d'excitation optique du résonateur. Une fraction importante (de l'ordre de 600  $mW$ ) du faisceau sortant du laser titane-saphir est prélevée au niveau d'un cube séparateur de polarisations, et est focalisée par une lentille de focale  $f = 200\text{ mm}$  au niveau d'un modulateur acousto-optique qui sert à moduler son intensité (avec un waist à ce niveau de l'ordre de 70  $\mu m$ ). Le faisceau ainsi modulé est envoyé via un montage de type "baïonnette" dans un ensemble atténuateur, composé d'une lame  $\lambda/2$  et d'un cube, qui permet de régler l'intensité effectivement envoyée sur le miroir mobile. Le faisceau traverse ensuite un jeu de deux lentilles montées sur platines de translation, qui permettent de modifier sa taille au niveau du miroir mobile. Enfin, un miroir monté sur un support inclinable permet d'aligner précisément le faisceau au centre du résonateur. Après réflexion, le faisceau est absorbé au niveau d'un cache-lumière. Une petite fraction du faisceau réfléchi est détectée à l'aide d'une photodiode de façon à mesurer la modulation d'intensité du faisceau.

Dans le modulateur acousto-optique, la lumière interagit avec une onde acoustique stationnaire qui crée un réseau de phase et diffracte le faisceau. Pour un angle d'incidence du faisceau par rapport au réseau égal à l'angle de Bragg et pour une puissance de l'onde acoustique suffisante, l'essentiel de l'intensité incidente est diffracté dans le premier ordre de diffraction. Dans ces conditions, l'intensité diffractée dans

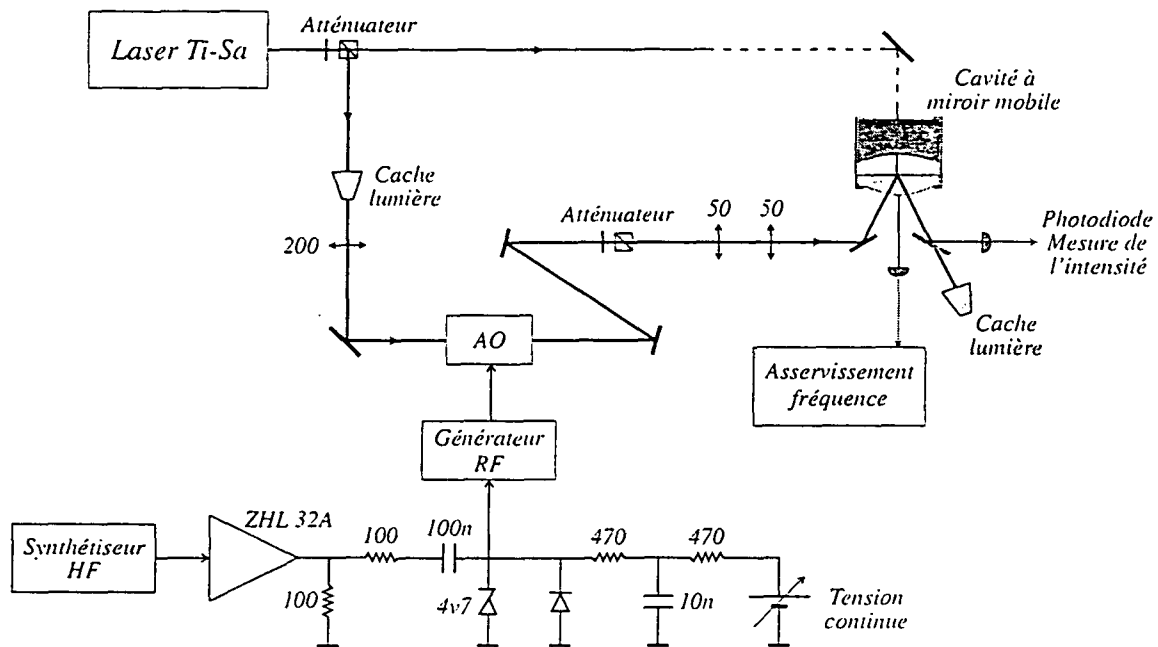


Fig. 40: Schéma général du dispositif d'excitation optique du miroir mobile. Le faisceau arrière, dérivé du laser, est modulé en intensité à l'aide d'un modulateur acousto-optique piloté par un synthétiseur haute fréquence. Ce faisceau se réfléchit par l'arrière sur le miroir mobile.

l'ordre 1 dépend du signal basse tension (entre 0 et 5 Volts) qu'on applique au pilote du modulateur acousto-optique (générateur RF sur la figure 40). On peut ainsi moduler l'intensité du faisceau envoyé vers le miroir mobile avec une profondeur de modulation voisine de 100 % jusqu'à des fréquences de quelques mégahertz.

L'efficacité du modulateur acousto-optique dépend beaucoup de l'alignement relatif du réseau acoustique et du faisceau incident. Pour réaliser cet alignement, le modulateur acousto-optique est monté sur un support de prisme qui permet de faire tourner le modulateur autour de trois axes orthogonaux. Le support de prisme est lui-même monté sur un ensemble de deux platines de translation qui permettent de déplacer le modulateur dans un plan perpendiculaire au faisceau, suivant les directions horizontale et verticale. Lorsque le faisceau incident est bien focalisé au niveau du réseau et que l'alignement est optimisé, on parvient à obtenir jusqu'à 95 % de l'intensité incidente dans le premier ordre de diffraction.

Le signal de commande du modulateur est obtenu en mélangeant par un ensemble de filtres RC une tension sinusoïdale délivrée par un synthétiseur haute fréquence (HP 8648A) et amplifiée par un amplificateur Mini-Circuits ZHL 32A, avec une tension continue, de façon à obtenir une tension modulée comprise entre 0 et 5 Volts (voir la figure 40). Le filtre (circuit RC du côté haute fréquence et filtre en T du côté continu,



associés à l'impédance d'entrée du pilote du modulateur acousto-optique, d'environ  $200 \Omega$ ) est conçu de façon à éviter tout couplage entre la tension  $DC$  et la voie  $HF$ , tout en assurant une bonne transmission de ces signaux vers le générateur  $RF$ . Une diode Zener ( $4,7 V$ ) et une diode germanium permettent de limiter l'excursion du signal de commande afin d'éviter d'endommager le générateur  $RF$ . En pratique, la tension continue est réglée en observant la modulation d'intensité du faisceau arrière à l'aide de la photodiode placée après le miroir mobile. Cette photodiode est une *FND100*, suivie par un amplificateur rapide *CLC425* monté en transimpédance, selon un schéma similaire à celui utilisé pour les photodiodes de la détection homodyne (figure 23, page 68). La capacité d'entrée du montage transimpédance a été supprimée de façon à avoir un gain plat en fréquence du continu jusqu'à plusieurs dizaines de mégahertz. On observe ainsi directement la modulation d'intensité et le fond continu du faisceau arrière. On règle alors la tension continue appliquée au pilote du modulateur acousto-optique de façon à obtenir une saturation symétrique de la modulation pour des amplitudes de modulation élevées. On s'est assuré que ce réglage correspond au minimum de distorsion du modulateur, en envoyant le signal de la photodiode dans l'analyseur de spectre et en minimisant les harmoniques.

Les éléments optiques placés après l'acousto-optique permettent de déterminer la position et la taille du faisceau au niveau du miroir mobile. La taille du faisceau est contrôlée par un jeu de deux lentilles. On n'a pas besoin ici de faire coïncider le col du faisceau avec la position du miroir. En effet, la force de pression de radiation ne dépend pas de la courbure du faisceau et seule la section de celui-ci au niveau du miroir mobile importe. La première lentille, de focale  $50 \text{ mm}$ , est placée à  $650 \text{ mm}$  de l'acousto-optique. La seconde, de même focale, est placée  $120 \text{ mm}$  plus loin sur une translation micrométrique. Avec un tel dispositif, la taille du col image est toujours de l'ordre de  $50 \mu\text{m}$ , mais on peut déplacer sa position en faisant varier la distance entre les deux lentilles. La divergence du faisceau étant très importante, on fait ainsi varier de façon appréciable la taille du faisceau. Nous avons mesuré avec un analyseur de faisceau *Thorlabs  $\Omega$ -mètre* une taille comprise entre  $50 \mu\text{m}$  et  $1 \text{ mm}$  au niveau du miroir mobile.

Il importe également de faire en sorte que le faisceau arrière ne perturbe pas le fonctionnement du dispositif de mesure de petits déplacements, ce qu'il peut a priori faire d'au moins trois façons différentes : en perturbant l'asservissement du laser sur la cavité, en étant couplé au mode de la cavité, ou en créant un signal parasite au niveau de la détection homodyne. Le faisceau arrière est envoyé sur le miroir mobile avec un angle de l'ordre de  $10^\circ$  (voir la figure 40). Ainsi, le faisceau arrière réfléchi est nettement

séparé du faisceau transmis par la cavité, qui sert à asservir la fréquence du laser. Mais les intensités de ces deux faisceaux sont tellement déséquilibrées (environ 500 *mW* pour le faisceau arrière, et seulement quelques microWatts pour le faisceau transmis) que la simple lumière diffusée sur le miroir mobile suffit à perturber le bon fonctionnement de l'asservissement. Le faisceau arrière étant polarisé linéairement (puisqu'il est transmis par un cube), on peut minimiser cet effet en plaçant un polariseur croisé devant la photodiode qui reçoit l'intensité transmise par la cavité. Ainsi, la lumière qui provient du faisceau arrière est fortement atténuée, alors que celle transmise par la cavité (de polarisation circulaire) n'est divisée que par un facteur deux.

Cet angle de  $10^\circ$  permet également de diminuer suffisamment le couplage entre le faisceau arrière et le mode  $TEM_{00}$  de la cavité de façon à ce que la détection homodyne ne soit pas perturbée par le faisceau arrière. En effet, malgré la grande dissymétrie entre les transmissions des deux miroirs et le décalage en fréquence de 200 *MHz* (soit environ 100 fois la bande passante de la cavité) créé par le modulateur acousto-optique, le coefficient de transmission de la cavité pour le faisceau arrière peut être de l'ordre de  $10^{-6}$  si celui-ci est adapté spatialement au mode  $TEM_{00}$  de la cavité. La puissance résiduelle du faisceau arrière qui est envoyée dans le dispositif de détection homodyne est alors de l'ordre du microwatt. Cette puissance est bien inférieure à celle du faisceau réfléchi par la cavité, qui est de l'ordre de plusieurs dizaines de microwatts. Mais le faisceau arrière étant fortement modulé en intensité, elle est suffisante pour perturber la détection homodyne. Le désalignement du faisceau arrière d'un angle  $\theta = 10^\circ$  permet de supprimer cet effet indésirable en réduisant de façon considérable le coefficient de couplage entre le faisceau arrière et le mode fondamental de la cavité : ce coefficient est égal à  $e^{-(\theta/\theta_0)^2}$  où  $\theta_0 = \pi w_0/\lambda = 0,2^\circ$  est l'angle de divergence du mode  $TEM_{00}$  de la cavité.

Il faut enfin s'assurer que la modulation d'intensité ne crée pas un signal parasite au niveau du système de détection, que ce soit par la lumière parasite ou par interférences électriques. On place ainsi des écrans autour du bloc des deux photodiodes de la détection homodyne pour les protéger de toute lumière modulée en intensité qui, en étant captée différemment par les deux photodiodes, perturberait la détection. Malgré cela, nous avons observé une modulation parasite au niveau du système de détection. Ce signal était dû en fait à l'alimentation *DC* qui fournit le signal de commande du modulateur acousto-optique (figure 40). Par un couplage entre les voies *HF* et *DC*, cette alimentation émettait un fort rayonnement à la fréquence de modulation, rayonnement qui était capté électriquement par le système de détection. Le filtre en *T* placé dans la voie *DC* a permis d'éliminer ce rayonnement.

Toutes ces précautions ont permis d'éliminer les effets parasites de la modulation du faisceau arrière sur le système de détection homodyne. Nous avons pu vérifier cela expérimentalement de deux façons différentes. Nous avons tout d'abord placé la cavité hors résonance. Dans ce cas, le spectre de phase du faisceau réfléchi est indépendant du déplacement du miroir et doit rester au bruit de photon standard. Nous avons vérifié que la modulation du faisceau arrière ne se traduit par aucune modulation parasite du spectre de phase du faisceau réfléchi. Par ailleurs, nous présenterons dans les sections (4.5) et (4.6) les résultats obtenus lorsque la cavité est à résonance avec le faisceau incident. Ces résultats font apparaître une modulation de la phase du faisceau réfléchi qui a un caractère résonnant de type lorentzien en fonction de la fréquence de modulation. Une telle réponse est incompatible avec un effet parasite qui ne devrait pas dépendre de la fréquence : une réponse résonnante fait nécessairement intervenir la réponse mécanique du miroir. En d'autres termes, le faisceau arrière n'a d'effet sur le faisceau réfléchi par la cavité que par l'intermédiaire de la force de pression de radiation qu'il exerce sur le miroir.

Nous présentons maintenant la procédure expérimentale que nous utilisons pour étudier la réponse d'un mode particulier du miroir à l'excitation optique. Une fois la cavité à résonance et l'oscillateur local asservi de façon à mesurer le bruit de phase (comme pour la mesure du mouvement brownien), on commence par visualiser l'effet d'une modulation à une fréquence donnée. Pour une modulation de l'ordre de 100% du faisceau arrière avec une intensité de quelques centaines de milliWatts, le pic de modulation se détache nettement du bruit thermique. On peut alors se placer en *ZeroSpan* à cette fréquence pour optimiser l'adaptation spatiale du faisceau arrière avec les modes acoustiques, en faisant varier la section du faisceau grâce au jeu de lentilles, ou en réglant l'alignement grâce à l'ensemble des supports orientables. Une fois cette adaptation spatiale effectuée, on obtient (avec une résolution spectrale  $RBW = 1 \text{ Hz}$  de l'analyseur de spectre) un pic de modulation environ 30 dB au-dessus du bruit thermique.

La bande de fréquence où on veut tester la réponse mécanique est alors divisée en un nombre choisi d'intervalles égaux, ce qui fixe l'échantillon de fréquences où on effectue la mesure. Un ordinateur pilote à la fois le générateur de signaux et l'analyseur de spectres, et récupère les signaux. L'ordinateur règle la fréquence du générateur et la fréquence d'analyse de l'analyseur de spectre (toujours en mode *ZeroSpan*) à chaque valeur préétablie de la fréquence. Il récupère ensuite le signal obtenu lors d'un balayage (typiquement de l'ordre de dix secondes) et en fait la moyenne pour obtenir la valeur de la réponse du résonateur à cette fréquence.

Le signal issu du générateur haute fréquence étant de largeur inférieure au hertz, on aurait a priori intérêt à prendre une résolution spectrale de  $1\text{ Hz}$  (valeur minimale pour l'analyseur de spectre). Mais en pratique, on prend un  $RBW$  de  $10\text{ Hz}$  afin de tenir compte d'un léger écart (de l'ordre du hertz) entre les échelles de fréquences des deux appareils. Le rapport signal à bruit de la mesure reste néanmoins élevé, typiquement supérieur à 100. La précision de la mesure peut être encore améliorée en soustrayant le bruit thermique, dont le niveau est obtenu en faisant, pour chaque fréquence, un second balayage en l'absence de modulation d'intensité du faisceau arrière.

## 4.5 Etude du mode fondamental d'un miroir plan-convexe

On va utiliser dans cette section l'ensemble des techniques présentées dans la section précédente pour étudier le mode acoustique fondamental du miroir mobile constitué d'un résonateur mécanique plan-convexe en silice fondue, de  $1,5\text{ mm}$  d'épaisseur [29]. Nous présentons tout d'abord les résultats concernant le spectre de bruit thermique, puis on étudiera la réponse mécanique du mode fondamental à l'excitation optique.

### 4.5.1 Etude du bruit thermique

Nous avons réalisé une étude du bruit thermique de la cavité à miroir mobile sur une très grande plage de fréquence allant de 0 à  $4\text{ MHz}$ , avec la technique présentée dans la section précédente. Notre dispositif expérimental n'est bien sûr pas conçu pour étudier le bruit de phase du faisceau réfléchi par la cavité à des fréquences inférieures à quelques centaines de kilohertz, et sa sensibilité aux déplacements du miroir est bien moins bonne à ces fréquences. Il n'en reste pas moins que le spectre obtenu présente de très nombreux pics en-dessous de la fréquence attendue pour le mode fondamental du miroir mobile (aux environs de  $2\text{ MHz}$ ), et au-dessus de  $500\text{ kHz}$ , on est certain de ne pas pouvoir imputer ces pics aux défauts de la source laser.

On verra dans la section suivante que ces pics sont pour la plupart dus à l'agitation thermique du miroir d'entrée : plus gros et de géométrie différente, celui-ci présente des fréquences de résonance beaucoup plus basses que le miroir plan-convexe. Nous reviendrons sur ce point dans la section (4.7).

L'étude de la réponse mécanique du miroir mobile permet heureusement de repérer les pics dus au miroir plan-convexe. Celui situé le plus bas en fréquence, qui est le

mode fondamental (longitudinal et transverse), se trouve à une fréquence voisine de  $1858,59 \text{ kHz}$ . On peut alors étudier son mouvement brownien à température ambiante, en analysant le bruit de phase du faisceau réfléchi par la cavité sur une fenêtre de fréquence centrée sur sa fréquence de résonance mécanique, et large de  $500 \text{ Hz}$ .

La figure 41 présente le spectre de bruit thermique obtenu en moyennant 1000 acquisitions successives de l'analyseur de spectre, pour les paramètres suivants : oscillateur local de  $10 \text{ mW}$ , puissance incidente sur la cavité à miroir mobile de  $100 \mu\text{W}$  et résolution spectrale (RBW) de l'analyseur de spectre fixée à  $10 \text{ Hz}$ . Tous les autres paramètres (recouvrement  $\eta_{OL}$  de l'oscillateur local, ...) ont les valeurs indiquées au chapitre précédent. Le spectre de bruit de phase, qui reflète le mouvement brownien du miroir mobile, peut être ajusté par une lorentzienne, dont la largeur  $\Gamma = 43 \text{ Hz}$  permet de remonter au facteur de qualité mécanique  $Q \approx 44\,000$  du mode acoustique fondamental. Le choix d'un RBW de  $10 \text{ Hz}$  permet de limiter l'élargissement dû à la convolution du spectre par la largeur d'analyse (la largeur mesurée n'est augmentée que de  $1 \text{ Hz}$  environ) tout en réduisant significativement la durée d'une acquisition, ce qui permet de moyennner efficacement le spectre. La fréquence de résonance du mode acoustique dépend de la température à travers les constantes élastiques de la silice ; on

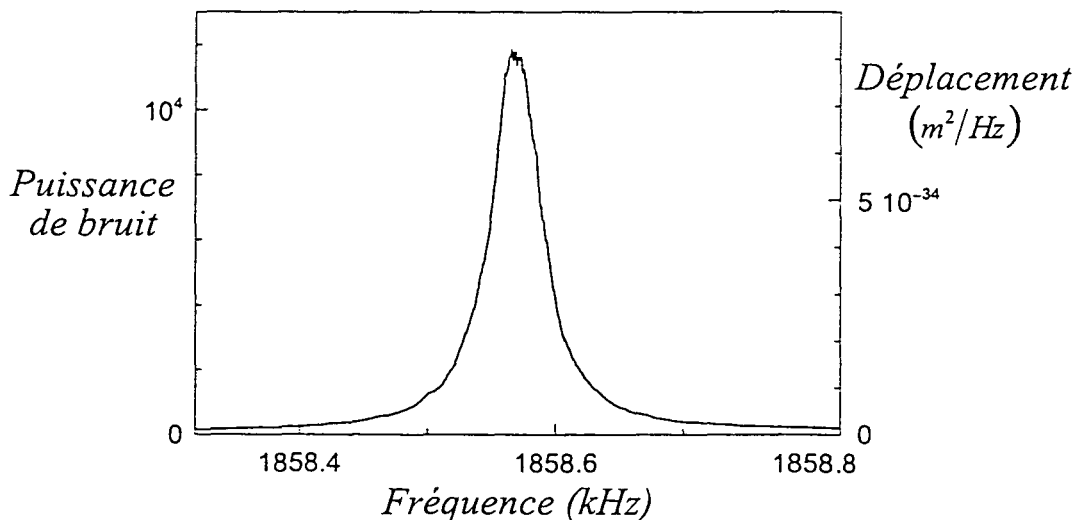


Fig. 41: Spectre de bruit observé autour de la première résonance du miroir plan-convexe, en l'absence d'excitation optique. L'échelle de gauche correspond à la puissance de bruit normalisée au bruit de photon standard, l'échelle de droite au déplacement équivalent.

a donc pris soin de vérifier que la température de la salle n'évolue pas significativement pendant toute l'acquisition, ce qui élargirait le spectre de bruit thermique.

On peut calibrer les déplacements observés avec la technique de modulation de fréquence du laser présentée au paragraphe (3.4). L'échelle correspondante (en  $m^2/Hz$ ) est représentée à droite sur la figure 41. L'intégration de l'ajustement lorentzien du mouvement brownien sur toutes les fréquences permet de remonter à la variance  $\Delta x^2$  du mouvement d'agitation thermique, qui doit vérifier le théorème d'équipartition de l'énergie :

$$\frac{1}{2}M\Omega_M^2\Delta x^2 = \frac{1}{2}k_B T, \quad (4.60)$$

où  $M$  est la masse effective du mode vue par le faisceau intracavité, et  $\Omega_M$  la fréquence de résonance mécanique. Pour  $\Delta x = 3,65 \cdot 10^{-16} m$ , on obtient une masse effective  $M \approx 230 mg$ , qui diffère sensiblement de la valeur théorique évaluée au paragraphe (4.3.1.1), qui est de  $30 mg$ .

La calibration de la sensibilité étant difficile à remettre en cause, puisque la valeur obtenue expérimentalement correspond bien à la valeur attendue d'après les caractéristiques de la cavité et du dispositif de détection homodyne, on peut attribuer cet écart important à la fixation du miroir mobile, qui est plaqué sur une pièce en cuivre. Même pour un mode confiné, une telle fixation sur un diamètre de  $14 mm$  (à comparer à la taille du col acoustique de  $3,4 mm$ ) semble perturber notablement les modes. Cette explication est confirmée par le fait que les fréquences de résonance du miroir plan-convexe ne sont pas distribuées comme celles de modes gaussiens : si on observe bien un regroupement des modes en ensembles (associés aux différents modes longitudinaux) à peu près espacés de  $2 MHz$ , les écarts entre les différents pics qui composent un même ensemble ne sont pas suffisamment réguliers pour être attribués à des modes gaussiens transverses.

#### 4.5.2 Etude de la réponse mécanique du miroir

L'étude de la réponse mécanique du miroir aux environs de la fréquence de résonance mécanique permet de confirmer l'origine thermique du mouvement d'agitation observé. Le résultat de la procédure de mesure de la réponse mécanique du miroir est présenté sur la figure 42, pour un faisceau arrière d'environ  $500 mW$ , totalement modulé en intensité.

Les carrés représentent les points expérimentaux de la puissance de modulation de phase du faisceau réfléchi par la cavité à miroir mobile, en fonction de la fréquence de modulation de l'intensité du faisceau arrière. Il faut noter que la puissance de modulation du mouvement du miroir est plus de mille fois supérieure à celle de l'agitation thermique. La réponse du miroir mobile à l'excitation optique correspond tout à fait à celle d'un oscillateur amorti forcé, puisque les points expérimentaux peuvent être ajustés par une lorentzienne de largeur 44 Hz. La coïncidence entre les fréquences de résonance et les largeurs des résonances observées sur les figures 41 et 42 permet d'attribuer le pic de bruit observé sur la figure 41 à un mouvement du miroir mobile. Il reste à savoir si ce mouvement est dû à l'agitation thermique ou à une autre forme d'excitation, telle que les vibrations mécaniques, même si cette forme d'excitation est a priori à exclure à si haute fréquence.

La calibration des déplacements (échelle représentée sur la droite de la figure 42) permet de remonter à la susceptibilité effective, vue par le faisceau intracavité, de ce mode de vibration. La réponse mécanique étant de forme lorentzienne, on peut la décrire par une susceptibilité d'oscillateur harmonique, de la forme :

$$\chi[\Omega] = \frac{\chi_0}{1 - (\Omega/\Omega_M)^2 - i\Omega/Q\Omega_M}, \quad (4.61)$$

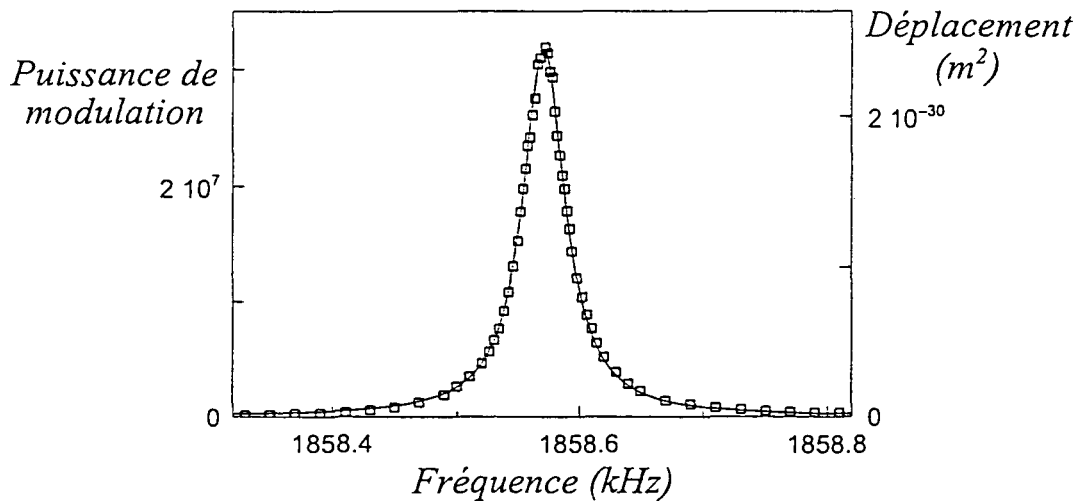


Fig. 42: Réponse mécanique du miroir mobile, soumis à un faisceau arrière de 500 mW modulé en intensité. Les carrés représentent la puissance de modulation mesurée sur la phase du faisceau réfléchi par la cavité, pour chaque valeur de la fréquence de modulation. La courbe en trait continu est un ajustement lorentzien. L'échelle de droite représente le déplacement équivalent.

où  $\Omega_M$  est la fréquence de résonance et  $Q = \Omega_M/\Gamma$  son facteur de qualité ( $\Gamma = 44 \text{ Hz}$ ). Pour déterminer  $\chi_0$ , il suffit d'évaluer le rapport entre l'amplitude du mouvement  $\delta x$  observé à résonance sur la figure 42 et celui de la pression de radiation  $\delta F_{rad}$  appliquée au miroir par le faisceau arrière. Le col de ce faisceau étant très petit devant la taille du mode acoustique fondamental,  $\delta F_{rad}$  est simplement égale à  $2\hbar k \delta I$ , où  $\delta I$  est la modulation d'intensité appliquée au miroir arrière, exprimée en nombre de photons par seconde. Pour un faisceau arrière de  $500 \text{ mW}$  modulé en intensité avec une profondeur très proche de 100 % (ce que nous avons vérifié grâce à la photodiode placée sur le faisceau arrière, voir la figure 40), et pour un déplacement  $\delta x$  à résonance de  $1,6 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ , on trouve  $\chi_0 = 3,2 \cdot 10^{-11} \text{ m/N}$ .

Le théorème fluctuation-dissipation permet alors de déterminer le spectre de la force de Langevin thermique responsable du mouvement brownien (voir la section 4.2.2.3) :

$$S_T[\Omega] = -\frac{2k_B T}{\Omega} \text{Im} \left( \frac{1}{\chi[\Omega]} \right) = \frac{2k_B T}{Q\Omega_M \chi_0}. \quad (4.62)$$

Le spectre de bruit thermique attendu a alors la forme d'une lorentzienne :

$$S_x^T[\Omega] = |\chi[\Omega]|^2 S_T[\Omega] = \frac{2k_B T \chi_0}{Q\Omega_M} \frac{1}{\left[1 - (\Omega/\Omega_M)^2\right]^2 + [\Omega/Q\Omega_M]^2}, \quad (4.63)$$

dont tous les paramètres sont déterminés à partir de la réponse à l'excitation optique. Le spectre de bruit attendu à température ambiante est tracé sur la figure 43, superposé au spectre de bruit thermique obtenu expérimentalement, qu'on a reproduit de la figure 41. On voit que les deux courbes coïncident presque parfaitement, sans aucun paramètre ajustable : le bruit thermique explique donc parfaitement l'amplitude du mouvement observé.

On peut conclure de cette étude que l'écart entre la variance mesurée du bruit thermique et celle attendue d'après l'analyse théorique du paragraphe (4.3.1.1) est due à une modification de la géométrie et de la masse du mode acoustique, probablement occasionnée par la fixation du miroir.



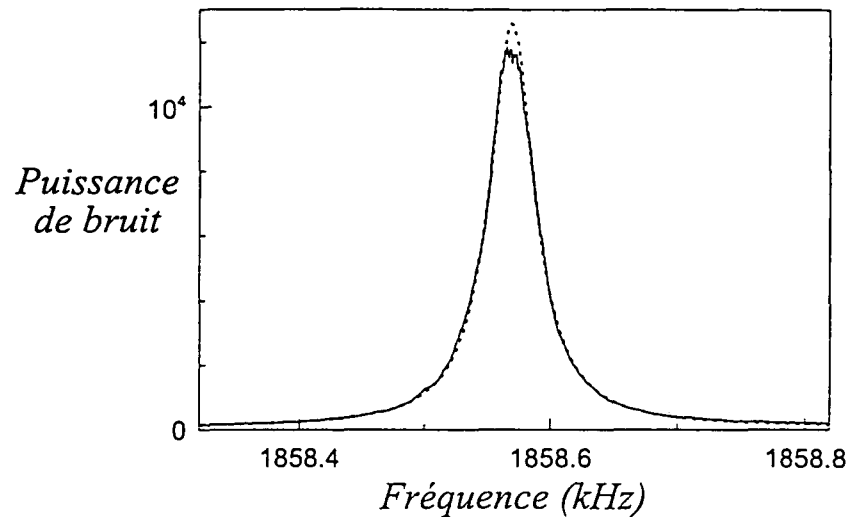


Fig. 43: Comparaison entre le spectre de bruit thermique mesuré et le spectre de bruit attendu d'après la réponse mécanique du miroir et le théorème fluctuation-dissipation (courbe en pointillés).

#### 4.5.3 Reproduction de l'article "High-sensitivity optical measurement of mechanical Brownian motion"

Cet article a été publié dans *Europhysics Letters* en septembre 1999, avec la référence *Europhys. Lett.* 47 (5), pp. 545-551 (1999). Il présente l'ensemble de nos résultats sur l'étude du mode acoustique fondamental du miroir plan-convexe.

EUROPHYSICS LETTERS

1 September 1999

*Europhys. Lett.*, 47 (5), pp. 545-551 (1999)

## High-sensitivity optical measurement of mechanical Brownian motion

Y. HADJAR, P. F. COHADON, C. G. AMINOFF(\*), M. PINARD and A. HEIDMANN(\*\*)

*Laboratoire Kastler Brossel(\*\*\*), case 74  
4 place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France*

(received 16 April 1999; accepted in final form 1 July 1999)

PACS. 05.40Jc - Brownian motion.

PACS. 04.80Nn - Gravitational wave detectors and experiments.

PACS. 42.50Lc - Quantum fluctuations, quantum noise, and quantum jumps.

**Abstract.** - We describe an experiment in which a laser beam is sent into a high-finesse optical cavity with a mirror coated on a mechanical resonator. We show that the reflected light is very sensitive to small mirror displacements. We have observed the Brownian motion of the resonator with a very high sensitivity corresponding to a minimum observable displacement of  $2 \times 10^{-19} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ .

Thermal noise plays an important role in many precision measurements [1]. For example, the sensitivity in interferometric gravitational-wave detectors [2-4] is limited by the Brownian motion of the suspended mirrors which can be decomposed into suspension and internal thermal noises. The latter is due to thermally induced deformations of the mirror surface. Experimental observation of this noise is of particular interest since its theoretical evaluation strongly depends on the mirror shape and on the spatial matching between light and internal acoustic modes [5-9]. It is also related to the mechanical dissipation mechanisms which are not well known in solids [10]. Mirror displacements induced by thermal noise are however very small and a highly sensitive displacement sensor is needed to perform such an observation.

Monitoring extremely small displacements has thus become an important issue in precision measurements [11] and several sensors have been developed. A technique commonly used for the detection of gravitational waves by Weber bars is based on capacitive sensors [12]. Another promising technique consists in optical transducers [13, 14]. Reflexion of light by a high-finesse Fabry-Perot cavity is very sensitive to changes in the cavity length. Such a device

---

(\*) Permanent address: Helsinki University of Technology, Department of Engineering Physics and Mathematics, 02015 HUT Espoo, Finland.

(\*\*) E-mail: heidmann@spectro.jussieu.fr

(\*\*\*) Laboratoire de l'Université Pierre et Marie Curie et de l'École Normale Supérieure associé au Centre National de la Recherche Scientifique.

can thus be used to monitor displacements of one mirror of the cavity, as has been proposed for gravitational wave bar detectors where the mirror is mechanically coupled to the bar [15, 16], or for the detection of Brownian motion in gravitational wave interferometers [17, 18]. In this letter we report a high-sensitivity observation of the Brownian motion of internal modes of a mirror. The sensitivity reached in our experiment is better than that of present sensors and comparable to the one expected in gravitational wave interferometers.

We use a single-ended Fabry-Perot cavity composed of an input coupling mirror and a totally reflecting back mirror. The intracavity intensity shows an Airy peak when the cavity length is scanned through a resonance, and the phase of the reflected field is shifted by  $\pi$ . The slope of this phase shift strongly depends on the cavity finesse and for a lossless resonant cavity a displacement  $\delta x$  of the back mirror induces a phase shift  $\delta\varphi_x$  of the reflected field on the order of

$$\delta\varphi_x \simeq 8\mathcal{F} \frac{\delta x}{\lambda}, \quad (1)$$

where  $\mathcal{F}$  is the cavity finesse and  $\lambda$  is the optical wavelength. This signal is superimposed to the phase noise of the reflected field. If all technical noise sources are suppressed, the phase noise  $\delta\varphi_n$  corresponds to the shot noise of the incident beam

$$\delta\varphi_n \simeq \frac{1}{2\sqrt{\bar{I}}}, \quad (2)$$

where  $\bar{I}$  is the mean incident intensity counted as the number of photons per second. The sensitivity of the measurement is given by the minimum displacement  $\delta x_{\min}$  that yields a signal of the same order of magnitude as the noise,

$$\delta x_{\min} \simeq \frac{\lambda}{16\mathcal{F}\sqrt{\bar{I}}}. \quad (3)$$

One expects to be able to detect a displacement corresponding to a small fraction of the optical wavelength for a high-finesse cavity and an intense incident beam.

In our experiment the coupling mirror has a curvature radius of 1 meter and a typical transmission of 50 ppm (Newport high-finesse SuperMirror). The back mirror is coated on the plane side of a small plano-convex mechanical resonator made of silica. The coating has been made at the *Institut de Physique Nucléaire (Lyon)* on a 1.5 mm thick substrate with a diameter of 14 mm and a curvature radius of the convex side of 100 mm. The two mirrors are mounted in a rigid cylinder which defines the distance and the parallelism between them. The cavity length is close to 1 mm so that the TEM<sub>00</sub> optical mode of the cavity has its waist in front of the back mirror with a size of 90  $\mu\text{m}$ .

The mirror motion is due to the excitation of internal acoustic modes which have been extensively studied for plano-convex resonators [19-22]. For a curvature radius of the convex side much larger than the thickness of the resonator, those modes can be described as Gaussian modes confined around the central axis of the resonator. The intracavity field experiences a phase shift proportional to the longitudinal deformation of the resonator averaged over the beam waist [5-9, 22] and only compression modes which induce such a longitudinal deformation are coupled with the light. In the following we focus on the fundamental mode which has a waist equal to 3.4 mm and a resonance frequency close to 2 MHz.

We have measured the optical characteristics of the cavity. Its bandwidth is equal to 1.9 MHz and its free spectral range is equal to 141 GHz. These values correspond to a cavity length of 1.06 mm and a finesse  $\mathcal{F}$  of 37000. We also measured the reflexion coefficient of the cavity at resonance to derive the transmission of the coupling mirror and the cavity losses. We found a transmission of 60 ppm and losses equal to 109 ppm.

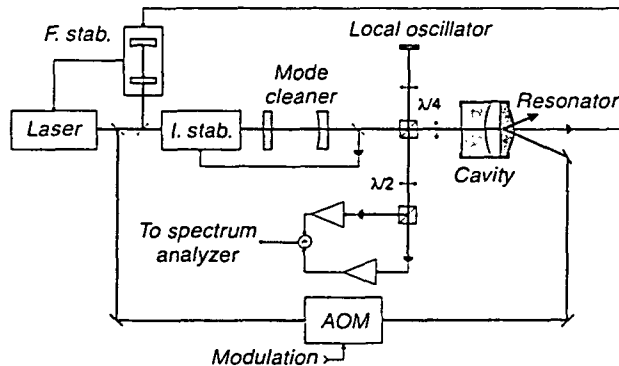


Fig. 1. - Experimental setup. A light beam supplied by a frequency (F. stab.) and intensity (I. stab.) stabilized titane-sapphire laser is sent into a high-finesse cavity composed of a coupling mirror and a highly reflecting back mirror coated on a mechanical resonator. Phase fluctuations of the reflected field are measured by homodyne detection. An auxiliary beam with modulated intensity (AOM) is used to optically excite the acoustic modes of the resonator.

The light entering the cavity is supplied by a titane-sapphire laser working at 810 nm and frequency-locked to a stable external cavity by sideband techniques [23]. We use a triple servoloop to monitor the laser frequency via a mirror mounted on a piezoelectric ceramic and an electro-optic modulator placed inside the laser cavity. The residual jitter is mainly concentrated at low frequency and is less than 3 kHz rms. The frequency noise is less than  $15 \text{ mHz}/\sqrt{\text{Hz}}$  above 1 MHz. The laser frequency is locked to a resonance of the high-finesse cavity by monitoring the residual light transmitted by the back mirror via a control of the external cavity length. We use a mode cleaner to reduce the astigmatism of the laser beam. It consists of a non-degenerate linear cavity locked at resonance with the laser. The transmitted beam corresponds to a fundamental mode of the cavity which is Gaussian  $\text{TEM}_{00}$ . The mode matching of the resulting beam with the high-finesse cavity is equal to 98%. The intensity after the mode cleaner is actively stabilized by a variable attenuator inserted in front of the mode cleaner. One gets a  $100 \mu\text{W}$  incident power on the high-finesse cavity with residual relative intensity fluctuations less than 0.2%. Note that the incident power is low enough to neglect quantum effects of radiation pressure [14, 21, 22]. Quantum noise induced by radiation pressure is less than 1% of the phase noise  $\delta\varphi_n$ .

The phase of the field reflected by the high-finesse cavity is measured by homodyne detection (fig. 1). The reflected field is mixed on two photodiodes (FND100 from EGG Instruments) with a 10 mW local oscillator derived from the incident beam. We use a set of quarter-wave plates, a half-wave plate and polarizing beamsplitters to separate and mix those fields. The two photocurrents are preamplified with wideband and low-noise transimpedance amplifiers and their difference is sent to a spectrum analyzer. The overall quantum efficiency of the detection system is equal to 91%. The signal obtained on the spectrum analyzer is proportional to the fluctuations of the quadrature component of the reflected field in phase with the local oscillator. A servoloop monitors the length of the local oscillator arm so that we detect the phase quadrature of the reflected field. This setup is thus similar to an interferometer with dissymmetric arms. It indeed performs an interferometric measurement of the back-mirror position, the sensitivity being increased by the cavity finesse.

The last part of the experimental setup is used to optically excite the mechanical resonator. A 500 mW auxiliary beam derived from the titane-sapphire laser is intensity-modulated by

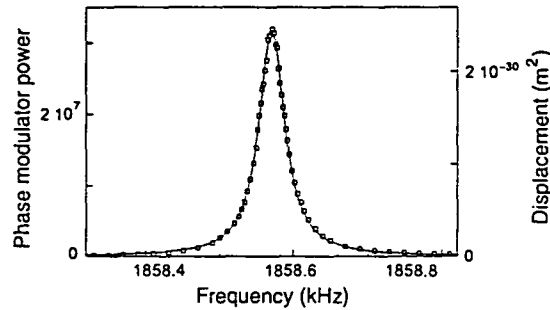


Fig. 2. – Mechanical response of the resonator. Squares represent the power of phase modulation of the reflected field normalized to the shot-noise level. Each square corresponds to a different modulation frequency of the optical excitation, around the fundamental resonance frequency of the resonator. The solid curve is a Lorentzian fit of the resonance. The vertical scale on the right represents the equivalent displacement in  $\text{m}^2$ .

an acousto-optic modulator and reflected from the rear on the back mirror. A modulated radiation pressure force is thus applied to the resonator. The amplitude of this force can be changed by varying the depth of the intensity modulation. The auxiliary laser beam is uncoupled from the cavity by frequency filtering due to an optical frequency shift of 200 MHz induced by the acousto-optic modulator and by spatial filtering due to a tilt angle of  $10^\circ$  between the beam and cavity axes. We have checked that the auxiliary beam has no spurious effect on the homodyne detection.

Figure 2 shows the experimental result of the optical excitation. Each square is obtained for a different modulation frequency of the auxiliary laser beam around the expected frequency for the fundamental mode of the mechanical resonator. The power of phase modulation of the reflected field is normalized to the shot-noise level, independently measured by sending only the local oscillator in the homodyne detection. We have checked that the phase noise of the reflected field corresponds to the shot-noise level when the laser is out of resonance with the high-finesse cavity. Any deviation of the phase from the shot-noise level is thus due to the interaction of the light with the cavity. Such a deviation reflects the mirror motion and the resonance in fig. 2 corresponds to the excitation of the fundamental acoustic mode of the resonator. The solid curve is a Lorentzian fit which shows that the mechanical response has a harmonic behavior around the resonance frequency with a quality factor  $Q$  of 44000.

As explained in the end of this paper, we have calibrated the measured displacement and the resulting scale is shown on the right of fig. 2. The displacement at resonance corresponds to an amplitude of  $1.6 \times 10^{-15}$  m. One can estimate the radiation pressure exerted by the auxiliary beam as  $F_{\text{rad}} = 2\hbar k \delta I = 1.2 \times 10^{-9}$  N, where  $2\hbar k$  is the momentum exchange during a photon reflection and  $\delta I$  is the intensity modulation. One thus finds that the mechanical susceptibility  $\chi[\Omega]$  has a Lorentzian shape around the mechanical resonance frequency  $\Omega_M$ :

$$\chi[\Omega] = \frac{\chi_0}{1 - \Omega^2/\Omega_M^2 - i/Q}, \quad (4)$$

with  $\chi_0 = 3.2 \times 10^{-11}$  m/N.

Figure 3 shows the phase noise spectrum of the reflected beam obtained with a resolution bandwidth of 1 Hz and for the same frequency range (500 Hz span around the fundamental resonance frequency). The auxiliary laser beam is now turned off (no optical excitation) and the resonator is at room temperature. The spectrum is obtained by an average over

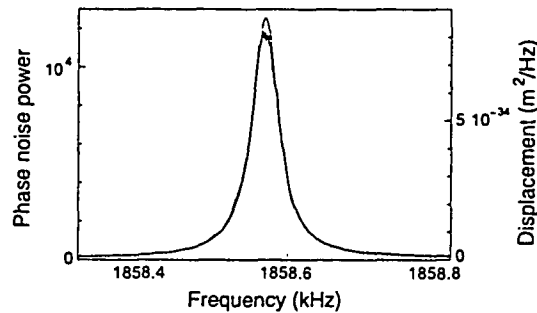


Fig. 3. – Phase noise spectrum of the reflected field normalized to the shot-noise level for a frequency span of 500 Hz around the fundamental resonance frequency of the resonator. The peak reflects the Brownian motion of the resonator at room temperature. The thin line is a theoretical estimation of the thermal noise. The vertical scale on the right represents the equivalent displacement in  $\text{m}^2/\text{Hz}$ .

1000 scans of the spectrum analyzer. It is normalized to the shot-noise level and the vertical scale is smaller than the one of fig. 2. The thin line in fig. 3 corresponds to a theoretical estimation of the thermal noise at 300 K by using the mechanical susceptibility  $\chi[\Omega]$  derived from optical excitation (eq. (4)). Note that there is no adjustable parameter and the excellent agreement with experimental data clearly shows that the peak observed in fig. 3 corresponds to the thermal noise of the fundamental mode of the resonator.

We have calibrated the observed displacements by frequency modulation of the incident laser beam. The detuning between the laser and the cavity resonance indeed only depends on the optical frequency and on the cavity length. A displacement  $\delta x$  of the back mirror is thus equivalent to a frequency modulation  $\delta\nu$  of the laser related to  $\delta x$  by

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\delta x}{L}, \quad (5)$$

where  $\nu$  is the optical frequency and  $L$  the cavity length. We can thus calibrate the observed displacements by measuring the frequency modulation which yields the same phase signal for the reflected field.

The frequency modulation of the laser beam is obtained by applying a sinusoidal voltage on the internal electro-optic modulator of the laser. We determine the amplitude  $\delta\nu$  of modulation by locking the mode cleaner at half-transmission and by measuring the intensity modulation of the transmitted beam. This intensity modulation is proportional to the ratio  $\delta\nu/\nu_{\text{cav}}$  between the amplitude of frequency modulation and the cavity bandwidth  $\nu_{\text{cav}}$  of the mode cleaner. We have determined this bandwidth with a good accuracy by measuring the transfer function of the mode cleaner at resonance for an intensity-modulated incident beam.

Figure 4 shows the result of the calibration. We applied a sinusoidal voltage to the laser with different amplitudes at a frequency of 2 MHz. The horizontal axis represents the amplitude  $\delta\nu$  of frequency modulation determined from the mode-cleaner cavity. The vertical axis corresponds to the power of phase modulation observed in the field reflected by the high-finesse cavity. Experimental results represented by squares are obtained with a 1 Hz resolution bandwidth of the spectrum analyzer and are normalized to the shot-noise level. The linear fit (solid curve in fig. 4) has a slope equal to 2 as expected in log-log scales since the power of phase modulation must be proportional to the square of the frequency modulation. From eq. (5) one can associate a displacement  $\delta x$  to any observed phase modulation of the reflected field. In particular, the shot-noise level corresponds to a frequency modulation  $\delta\nu_{\text{min}}$

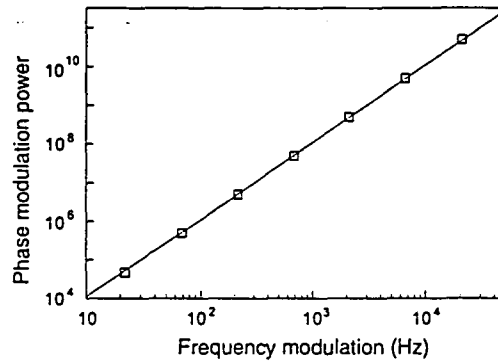


Fig. 4. – Power of phase modulation of the reflected field normalized to the shot-noise level as a function of the amplitude of the laser frequency modulation. The solid line is a linear fit of the data points represented by squares.

equal to  $96 \text{ mHz}/\sqrt{\text{Hz}}$ . The smallest observable thermal displacement  $\delta x_{\min}$  which corresponds to the shot-noise level is thus equal to

$$\delta x_{\min} [2 \text{ MHz}] = L \frac{\delta \nu_{\min}}{\nu} = 2.8 \times 10^{-19} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}. \quad (6)$$

This experimental result can be compared to the theoretical prediction. Equation (3) corresponds to a static analysis for a lossless cavity and for a perfect detection system. Cavity filtering at non-zero frequency and losses reduce the theoretical sensitivity. The proper expression of the minimum displacement at frequency  $\Omega$  is

$$\delta x_{\min} [\Omega] = \frac{\lambda}{16\mathcal{F}\sqrt{I}} \frac{T_c + A}{\sqrt{\eta T_c}} \sqrt{1 + (\Omega/\Omega_{\text{cav}})^2}, \quad (7)$$

where  $\eta$  is the quantum efficiency of the detection,  $T_c$  the transmission of the coupling mirror,  $A$  the cavity losses and  $\Omega_{\text{cav}}$  the cavity bandwidth. The cavity behaves like a low-pass filter with a cutoff frequency  $\Omega_{\text{cav}}$ . We have thus performed another sensitivity measurement at the frequency of 500 kHz. We have found that the shot-noise level corresponds to a frequency modulation  $\delta \nu_{\min}$  of  $68 \text{ mHz}/\sqrt{\text{Hz}}$  and the sensitivity  $\delta x_{\min}$  is then equal to

$$\delta x_{\min} [500 \text{ kHz}] = 2 \times 10^{-19} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}. \quad (8)$$

Both experimental values (eqs. (6) and (8)) are in perfect agreement with theoretical values deduced from eq. (7) with the parameters of the cavity (finesse  $\mathcal{F} = 37000$ , coupler transmission  $T_c = 60 \text{ ppm}$ , cavity losses  $A = 109 \text{ ppm}$ , cavity bandwidth  $\Omega_{\text{cav}}/2\pi = 1.9 \text{ MHz}$ , quantum efficiency  $\eta = 0.91$ , wavelength  $\lambda = 810 \text{ nm}$  and incident power  $P = (hc/\lambda) \bar{I} = 100 \text{ } \mu\text{W}$ ). The discrepancy is less than 5%.

In conclusion, we have observed the Brownian motion of internal acoustic modes of a mirror with a very high sensitivity. This result demonstrates that a high-finesse cavity is a very efficient displacement sensor. The possibility to observe the thermal noise even far on the wings of the mechanical resonances opens up the way to a quantitative study of the spectral dependence of the Brownian motion. This would allow to discriminate between different dissipation mechanisms in solids. Let us emphasize that our device also allows to study with a very high accuracy the mechanical characteristics of the various acoustic modes (resonance frequency, quality factor, spatial structure, effective mass) and their coupling with the light.

It is furthermore possible to obtain even larger sensitivities by increasing the finesse of the cavity or the incident light power. Mirrors with losses of the order of 1 ppm are now available and cavity finesse larger than  $3 \times 10^5$  have been obtained [24]. For an incident power of 1 mW one would obtain a sensitivity better than  $10^{-20}$  m/ $\sqrt{\text{Hz}}$ .

\*\*\*

We gratefully thank J. M. MACKOWSKI of the *Institut de Physique Nucléaire (Lyon)* for the optical coating of the mechanical resonator. YH acknowledges a fellowship from the *Association Louis de Broglie d'Aide à la Recherche*.

#### REFERENCES

- [1] SAULSON P. R., *Phys. Rev. D*, **42** (1990) 2437.
- [2] BRADASCHIA C. *et al.*, *Nucl. Instrum. Methods A*, **289** (1990) 518.
- [3] ABRAMOVICI A. *et al.*, *Science*, **256** (1992) 325.
- [4] ABRAMOVICI A. *et al.*, *Phys. Lett. A*, **218** (1996) 157.
- [5] BONDU F. and VINET J. Y., *Phys. Lett. A*, **198** (1995) 74.
- [6] GILLESPIE A. and RAAB F., *Phys. Rev. D*, **52** (1995) 577.
- [7] NAKAGAWA N., AULD B. A., GUSTAFSON E. and FEJER M. M., *Rev. Sci. Instrum.*, **68** (1997) 3553.
- [8] LEVIN Y., *Phys. Rev. D*, **57** (1998) 659.
- [9] BONDU F., HELLO P. and VINET J. Y., *Phys. Lett. A*, **246** (1998) 227.
- [10] STARTIN W. J., BEILBY M. A. and SAULSON P. R., *Rev. Sci. Instrum.*, **69** (1998) 3681.
- [11] BRAGINSKY V. B., GORODETSKY M. L., ILCHENKO V. S. and VYATCHANIN S. P., *Phys. Lett. A*, **179** (1993) 244.
- [12] BOCKO M. F. and ONOFRIO R., *Rev. Mod. Phys.*, **68** (1996) 755.
- [13] MIO N. and TSUBONO K., *Appl. Opt.*, **34** (1995) 186.
- [14] TITTONEN I. *et al.*, *Phys. Rev. A*, **59** (1999) 1038.
- [15] RICHARD J. P., *Phys. Rev. D*, **46** (1992) 2309.
- [16] CONTI L. *et al.*, *Rev. Sci. Instrum.*, **69** (1998) 554.
- [17] STEPHENS M., *Rev. Sci. Instrum.*, **64** (1993) 2612.
- [18] BERNARDINI M. *et al.*, *Phys. Lett. A*, **243** (1998) 187.
- [19] WILSON C. J., *J. Phys. D*, **7** (1974) 2449.
- [20] STEVENS D. S. and TIERSTEN H. F., *J. Acoust. Soc. Am.*, **79** (1986) 1811.
- [21] HEIDMANN A., HADJAR Y. and PINARD M., *Appl. Phys. B*, **64** (1997) 173.
- [22] PINARD M., HADJAR Y. and HEIDMANN A., *Eur. Phys. J. D*, **7** (1999) 107.
- [23] DREVER R. W. P. *et al.*, *Appl. Phys.*, **31** (1983) 97.
- [24] REMPE G., THOMPSON R. J., KIMBLE H. J. and LALEZARI L., *Opt. Lett.*, **17** (1992) 363.



## 4.6 Etude des modes d'un miroir plan-plan

L'étude qui précède d'une cavité composée d'un miroir plan-convexe et d'un miroir commercial plan-plan a montré que les modes du miroir d'entrée plan-plan contribuent significativement au bruit thermique de la cavité, principalement à basse fréquence. Elle a également montré que la fixation des miroirs perturbe leurs modes acoustiques, puisque dans le cas du miroir plan-convexe, les fréquences de résonance mesurées expérimentalement (sur le spectre de bruit thermique, et confirmées par la réponse mécanique à l'excitation optique) ne suivent pas la loi de répartition attendue pour des modes gaussiens. De plus, on a vu que la masse effective mesurée du mode acoustique fondamental diffère notablement de la valeur attendue.

Nous avons donc eu l'idée de monter une cavité avec deux miroirs commerciaux de géométrie cylindrique. En tenant les miroirs par la tranche comme on l'a décrit au paragraphe (4.3.2.2), on peut espérer minimiser l'effet de la fixation et observer des modes qui s'apparentent aux modes présentés au paragraphe (4.3.2.1), et qui sont calculés pour la situation idéale de résonateurs libres.

### 4.6.1 Etude du spectre de bruit thermique

La figure 44 présente le spectre de bruit thermique de cette cavité à miroir mobile, sur une plage de fréquence allant du continu à  $500\text{ kHz}$ . On a utilisé la technique présentée dans la section (4.4.1) pour réaliser directement cette acquisition sans être limité par le nombre de points de l'analyseur de spectre. On a ici un point tous les  $35\text{ Hz}$  environ. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle oblige à fixer la résolution spectrale de l'analyseur à une valeur supérieure à  $300\text{ Hz}$ . Cette valeur suffit néanmoins pour repérer les pics de bruit thermique et pour mesurer leurs fréquences de résonance. On peut comparer ces fréquences aux valeurs prévues théoriquement par le programme CYPRES [17, 21]. Ces valeurs sont indiquées sur la figure, en utilisant la numérotation que nous avons expliquée au paragraphe (4.3.2.1). On constate un très bon accord avec les résultats expérimentaux : on observe tous les pics attendus, qui correspondent aux modes à symétrie cylindrique dont l'indice  $n$  est nul, à des fréquences très proches des valeurs calculées numériquement (voir le tableau de la figure 46). Une étude détaillée de la répartition en fréquence de ces modes est présentée dans le paragraphe suivant.

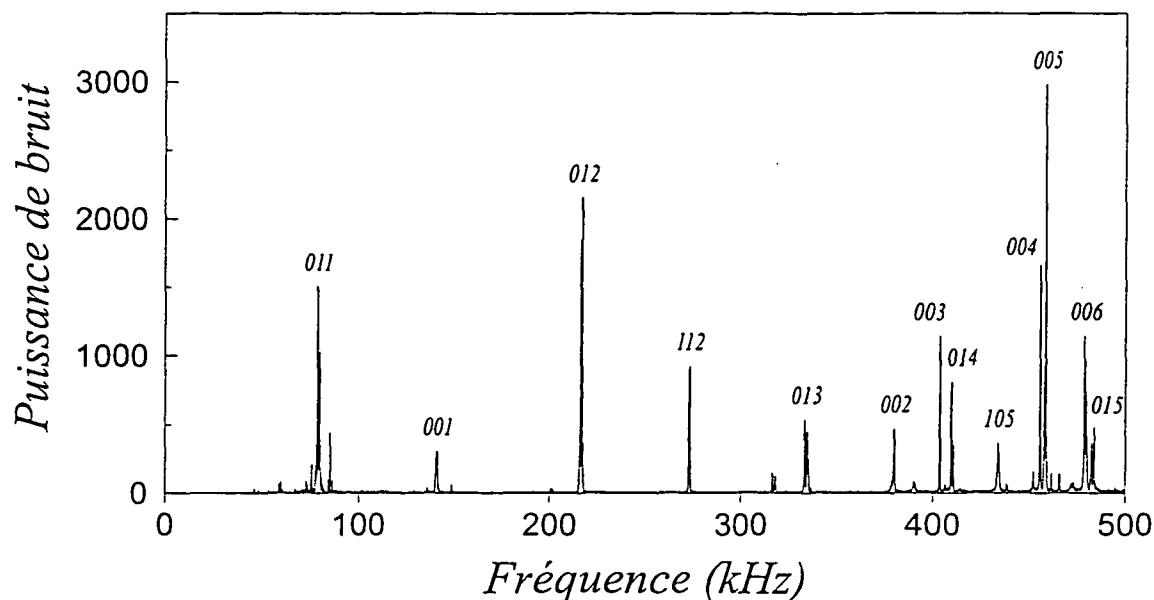


Fig. 44: Spectre de bruit thermique mesuré de 0 à 500  $kHz$ . Les différents pics sont repérés par la notation indiquée au paragraphe (4.3.2.1). La puissance de bruit du faisceau réfléchi par la cavité est normalisée au bruit de photon standard.

On observe également des pics correspondant à des modes qui ne respectent pas la symétrie cylindrique, et auxquels le faisceau lumineux ne devrait pas être sensible s'il était parfaitement centré sur les miroirs. Ceci est dû à la méthode de montage des miroirs qui ne permet pas d'assurer un centrage parfait de l'axe optique de la cavité par rapport aux miroirs. Comme nous l'avons vu au paragraphe (4.3.2.2), la méthode de montage permet d'estimer ce décentrage, et on trouve un décalage de l'ordre de 3  $mm$ . Ces modes sont toutefois moins bien couplés au faisceau que ceux à symétrie cylindrique, et on peut constater sur la figure 44 que la plupart des pics correspondants sont beaucoup moins hauts que les pics principaux associés aux modes d'indice  $n$  nul. Notons pour finir que la densité de modes d'ordre radial supérieur à 1 augmente très rapidement avec la fréquence à partir de 400  $kHz$ , ce qui explique le bruit de fond observé sur le spectre.

De même, la densité de modes à symétrie cylindrique augmente très rapidement au-delà de 500  $kHz$  : les écarts entre les fréquences calculées et celles mesurées empêchent alors d'identifier clairement chaque mode. Enfin, on peut voir sur ce spectre que pratiquement tous les pics de bruit thermique sont dédoublés : les deux miroirs n'étant pas exactement semblables, leurs fréquences de résonance sont légèrement différentes.

### 4.6.2 Etude détaillée des modes

Une fois les fréquences de résonance mesurées à l'aide de cette étude préliminaire, on peut bien sûr reprendre l'étude systématique des différents modes, en faisant l'acquisition de spectres sur une petite plage de fréquence centrée sur les fréquences de résonance. La figure 45 montre un exemple de spectre obtenu autour de la fréquence de résonance du mode 012. On observe clairement sur cette figure la présence de deux pics de bruit thermique, correspondant à deux résonances différentes dues aux deux miroirs de la cavité. Par ailleurs, l'excitation optique du miroir arrière montre qu'un seul pic correspond à ce miroir (courbe b). Ces deux pics correspondent donc bien au même mode 012 des deux miroirs. Les deux résonances sont ici écartées d'environ  $800 \text{ Hz}$ , soit de  $0,4 \%$  en valeur relative. Nous avons réalisé une étude systématique de tous les modes repérés sur la figure 44, et nous avons obtenu systématiquement un doublet de résonances. Les écarts relatifs entre les fréquences de résonance des deux composantes d'un même doublet sont toujours inférieurs à  $1 \%$  et peuvent s'expliquer par la tolérance sur les dimensions des miroirs. Selon les spécifications du fabricant *Newport*, la tolérance est égale à un dixième de millimètre, soit environ  $1 \%$  des dimensions des miroirs ( $25,4 \text{ mm}$  de diamètre et  $6,35 \text{ mm}$  d'épaisseur). On constate également que l'écart relatif entre les différentes fréquences de résonance n'est pas constant d'un doublet à l'autre. Ceci peut s'expliquer par le fait que le facteur d'aspect, égal au rapport entre l'épaisseur et le rayon du miroir n'est pas tout à fait le même pour les deux miroirs. Ainsi la différence entre les fréquences de résonance des deux miroirs ne correspond pas à une simple homothétie.

Il serait intéressant de comparer entre elles les aires totales  $\Delta x_{n\xi m}^2$  des différents pics de bruit thermique. Ceci permettrait de déterminer les masses effectives  $M_{n\xi m}$  des modes qui sont reliées à l'aire totale par le théorème d'équipartition de l'énergie :

$$\frac{1}{2} M_{n\xi m} \Omega_{n\xi m}^2 \Delta x_{n\xi m}^2 = \frac{1}{2} k_B T. \quad (4.64)$$

Malheureusement, cette masse effective dépend de l'adaptation spatiale entre le faisceau lumineux et le mode acoustique considéré. Or nous avons vu que le faisceau est décalé d'environ  $3 \text{ mm}$  par rapport au centre des miroirs, avec une incertitude de l'ordre du millimètre sur la connaissance de ce décalage. Cette incertitude est du même ordre de grandeur que la dimension caractéristique des variations radiales des modes, ce qui rend impossible la détermination précise des valeurs théoriques des masses effectives.

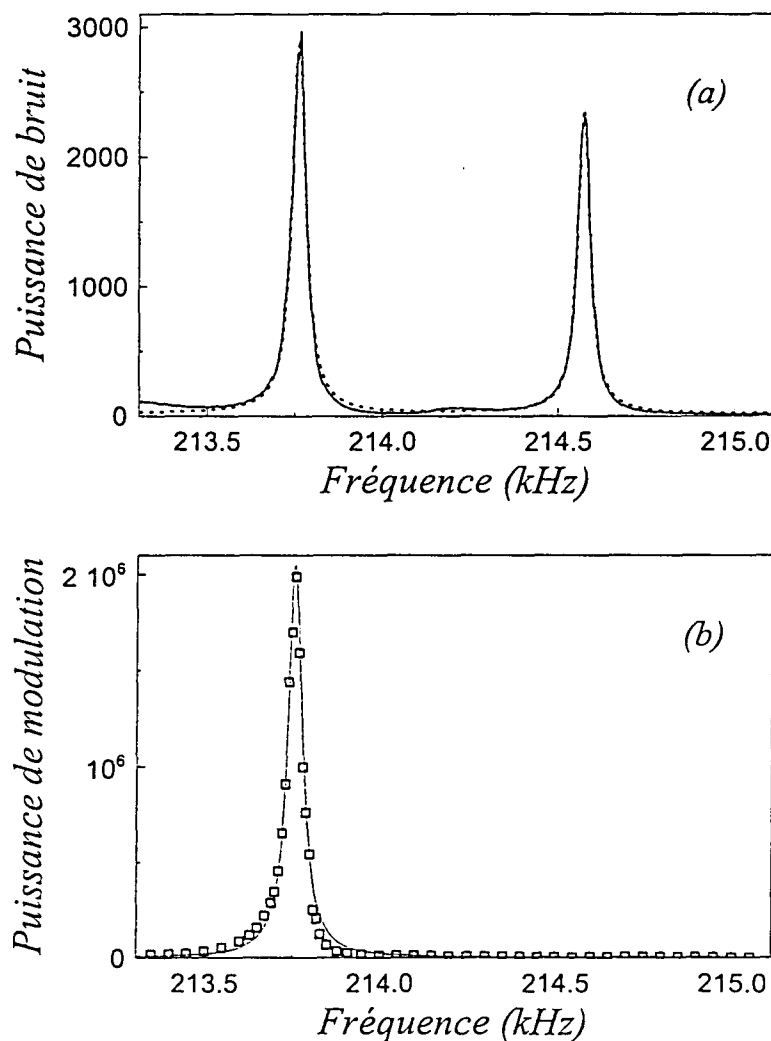


Fig. 45: Spectre de bruit thermique de la cavité vers 214 kHz (courbe a). L'étude de la réponse à une force extérieure (courbe b) permet de déterminer à quel miroir est dû chaque pic.

En revanche, on peut comparer les aires des deux composantes d'un même doublet de modes. Etant donné la longueur de la cavité (0,26 mm), le décalage du faisceau est en effet pratiquement le même pour les deux miroirs. Pour chacune des fréquences de résonance mesurées sur le spectre de la figure 44, nous avons fait l'acquisition d'un spectre de bruit similaire à celui de la figure 45, afin de déterminer, pour chaque composante du doublet, la fréquence de résonance, le facteur de qualité, et l'aire totale.

Le tableau suivant récapitule les résultats de ces acquisitions. Chaque ligne correspond à un doublet repéré par les indices  $n$ ,  $\xi$  et  $m$  du mode (première colonne). Les colonnes suivantes donnent la fréquence calculée par le programme CYPRES, la moyenne des deux fréquences de résonance mesurées, et l'écart relatif entre les valeurs

<i>Mode (nξ,m)</i>	<i>Fréquence théorique (kHz)</i>	<i>Fréq. moyenne mesurée (kHz)</i>	<i>Ecart relatif (%)</i>	<i>Q<sub>max</sub> mesuré</i>	<i>Ecart relatif des aires (%)</i>
011	72	77	6,5		
001	143,1	141,2	1,5		
012	210,7	214,1	1,6	5 000	20
112	268,6	270,5	0,7	8 000	14
013	330,5	333,7	1	2 400	35
002	377,6	380,6	0,75		
003	405,4	402,1	0,7	24 000	21
014	407	408	0,25	16 000	50
105	435,6	437,2	0,4	28 000	26
004	461	460,4	0,15	23 000	13
005	468	462,3	1,5	11000	13
006	483	477,2	1,2	24 000	39
015	491,6	482,4	1,9	18 000	7

Fig. 46: Récapitulation des résultats obtenus par une étude détaillée des principaux modes apparaissant sur la figure 44. Les cases vides correspondent à des mesures non significatives, à cause d'un excès de bruit du laser à basse fréquence, ou parce qu'on n'est pas parvenu à résoudre le doublet (mode 002).

théorique et mesurée. On a également porté dans la cinquième colonne le plus grand des deux facteurs de qualité mesurés. Les deux facteurs de qualité sont généralement très proches, seul le mode 013 présentant un écart conséquent (du simple au double). Enfin, on a indiqué dans la dernière colonne l'écart relatif entre les aires des spectres de bruit associés aux deux résonances du doublet.

L'écart entre la fréquence de résonance moyenne mesurée et la fréquence calculée par le programme CYPRES est dans la plupart des cas inférieure à 1 %, et peut parfaitement s'expliquer par les tolérances sur les dimensions des miroirs, et par la précision (également de l'ordre de 1 %) des valeurs tabulées des constantes élastiques de la silice. Précisons également que des mesures des fréquences de résonance de miroirs de plus grande taille (diamètre de l'ordre de quelques dizaines de centimètres) ont

été réalisées à Orsay dans le groupe VIRGO en 1994 [17, 75], avec des écarts relatifs similaires, de l'ordre du pourcent.

Les valeurs mesurées des facteurs de qualité sont relativement basses, par rapport au miroir plan-convexe par exemple, mais cela peut s'expliquer par l'influence des fixations. On constate aussi sur le tableau que les facteurs de qualité ont tendance à augmenter pour les modes de fréquence de résonance élevée. Ainsi les modes situés à plus haute fréquence ont des facteurs de qualité comparables à celui du mode fondamental du miroir plan-convexe.

Enfin, les écarts relatifs entre les aires des deux lorentziennes de chaque doublet sont plus délicats à expliquer, surtout pour les modes à symétrie cylindrique. Le faisceau lumineux doit en effet sonder le mouvement des deux miroirs sensiblement au même point. Ces différences pourraient s'expliquer par des différences sur le serrage des deux miroirs dans leur support, qui induiraient des contraintes différentes pour chaque miroir.

Bien que les résultats obtenus doivent être considérés comme préliminaires, ils montrent qu'il est intéressant de poursuivre l'étude du bruit thermique des miroirs cylindriques. On n'a en effet jamais observé directement les modes internes de vibration des miroirs d'un interféromètre, les prototypes réalisés jusqu'à présent étant aveugles dans ce domaine de fréquence. L'étude des modes par excitation piézoélectrique ne permet d'exciter qu'un nombre restreint de modes (une dizaine tout au plus), et ne permet pas de déterminer leur masse effective. L'observation directe du bruit thermique des modes internes de vibration d'un modèle réduit d'interféromètre comme notre montage expérimental permettrait ainsi de valider expérimentalement les résultats numériques qui sont aujourd'hui utilisés pour évaluer le bruit thermique interne.

L'amélioration des performances à basse fréquence de notre source laser est envisageable, et il est bien sûr possible de réaliser une cavité optique présentant des caractéristiques plus favorables à l'obtention d'une sensibilité élevée : meilleur accord de mode avec le laser, faibles pertes, ... Il reste alors à fixer les miroirs sans perturber leurs modes acoustiques.

#### 4.7 Comparaison des bruits thermiques à basse fréquence d'un miroir plan-convexe et d'un miroir plan-plan

Les études que nous venons de présenter dans les deux sections précédentes ont mis en lumière une propriété importante des miroirs plan-convexes : ils présentent une

fréquence de résonance fondamentale essentiellement liée à leur épaisseur, et bien plus élevée que celle d'un miroir plan-plan de dimensions comparables. En effet, la fréquence du mode acoustique fondamental pour un miroir plan-convexe d'épaisseur comparable au miroir plan-plan étudié dans la section (4.6) serait de l'ordre de  $450 \text{ kHz}$ , soit environ 6 fois plus élevée que celle du mode fondamental de ce miroir plan-plan. De manière plus générale, la répartition spectrale des fréquences de résonance et la structure spatiale des modes acoustiques sont très différentes pour ces deux types de miroir. Le bruit thermique à basse fréquence, qui limite la sensibilité des interféromètres gravitationnels, dépend de ces caractéristiques par l'intermédiaire de la susceptibilité effective  $\chi_{eff}$  du miroir. On peut donc se demander si la différence entre ces deux géométries n'a pas des conséquences importantes sur le bruit thermique interne des miroirs.

Rien n'indique en effet que la géométrie plan-plan choisie pour les miroirs des interféromètres soit la plus favorable. Dans cette section, nous allons étudier théoriquement le bruit thermique à basse fréquence d'un miroir plan-convexe et montrer qu'il est nettement plus faible que celui d'un miroir plan-plan [76]. Tout au long de cette étude, on gardera la masse des deux miroirs constante et égale à  $20 \text{ kg}$ , afin de ne pas modifier le niveau du bruit thermique pendulaire.

#### 4.7.1 Evaluation du bruit thermique à basse fréquence

Cette étude est basée sur une décomposition modale du bruit thermique, qui permet d'exprimer le mouvement brownien du miroir comme la somme des contributions des différents modes acoustiques. Si on suppose que les pertes sont homogènes et donc que l'angle de pertes ne dépend que de la fréquence, on a démontré dans la section (4.2.4) que le spectre de bruit thermique à basse fréquence se met sous la forme (équ. 4.51) :

$$S_{\dot{u}}[\Omega \approx 0] = 2k_B T \frac{\phi[\Omega]}{\Omega} \chi_{eff}[\Omega \approx 0], \quad (4.65)$$

où la susceptibilité effective est donnée par l'équation (4.49). A basse fréquence, cette susceptibilité peut être écrite sous une forme équivalente à celle d'un seul oscillateur harmonique  $1/M_{eff}\Omega_M^2$  de fréquence de résonance  $\Omega_M$ , égale à la fréquence fondamentale du miroir, et de masse  $M_{eff}$  effective définie par :

$$\chi_{eff}[\Omega \approx 0] = \frac{1}{M_{eff}\Omega_M^2} = \sum_n \frac{\langle v_0^2, u_n \rangle^2}{M_n \Omega_n^2}. \quad (4.66)$$

Le bruit thermique à basse fréquence est ainsi similaire à celui d'un simple oscillateur harmonique dont la masse effective  $M_{eff}$  dépend toutefois de la répartition des

fréquences de résonance  $\Omega_n$  du miroir et du recouvrement des différents modes acoustiques avec la lumière. La masse effective et la fréquence fondamentale de résonance doivent être les plus grandes possible pour obtenir un faible niveau de bruit thermique.

Pour un miroir cylindrique, la masse effective est généralement du même ordre de grandeur que la masse totale du miroir. Par exemple, un miroir de 35 cm de diamètre et de 10 cm d'épaisseur a une masse totale de 20 kg, et une masse effective de 9,5 kg pour un faisceau laser ayant un col de 5,5 cm [17]. Néanmoins, la première fréquence de résonance est plutôt basse, de l'ordre de 4 kHz. Pour un angle de pertes  $\phi$  égal à  $10^{-6}$  et à température ambiante, on obtient une puissance de bruit thermique de  $S_u^T [1 \text{ Hz}] = 45 \cdot 10^{-38} \text{ m}^2/\text{Hz}$  à basse fréquence (d'après l'équation 4.65, le bruit est inversement proportionnel à la fréquence et nous choisissons une fréquence de référence égale à 1 Hz).

Pour un miroir plan-convexe, toutes les grandeurs apparaissant dans l'équation (4.66) peuvent être calculées analytiquement. La masse effective  $M_{eff}$  peut alors s'exprimer en fonction de la masse  $M_1$  du mode fondamental et du rapport  $r = w_1/w_0$  entre la taille des cols du mode acoustique fondamental et du mode optique. On obtient à partir des équations (4.54) à (4.58) [69] :

$$\frac{1}{M_{eff}} = \frac{1}{M_1} \sum_{p,q} \frac{4r^4}{(2r^2 + p)^2} \left( \frac{2r^2 - p}{2r^2 + p} \right)^{2q} \frac{1}{p + \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{h_0}{R}} (2q + 1)}, \quad (4.67)$$

où la sommation porte sur les deux indices qui caractérisent les modes gaussiens (voir le paragraphe 4.3.1.1).

A la limite  $h_0 \ll R$ , on peut négliger la dépendance en  $q$  dans le dernier terme de l'équation (4.67), ce qui revient à supposer tous les modes transverses dégénérés ( $\Omega_{pq} = \Omega_{p0}$ ). Les sommes successives sont alors de simples séries géométriques et on obtient :

$$\frac{1}{M_{eff}} = \frac{\pi^2 r^2}{12 M_1}. \quad (4.68)$$

En utilisant l'expression (4.58) de  $M_1$ , on obtient finalement :

$$M_{eff} = \frac{12}{\pi^2} \left( \frac{\pi}{4} \rho h_0 w_0^2 \right). \quad (4.69)$$

Le terme entre parenthèses représente la *masse optique*  $M_{opt}$ , qui correspond à la masse du volume du miroir éclairé par le faisceau (voir la figure 47) [69]. Cette masse augmente avec la taille du faisceau. Cet effet est attendu puisque la masse effective décrit l'effet du mouvement du miroir sur la lumière, effet qui est associé à la moyenne  $\hat{u}$  du mouvement sur l'extension spatiale du faisceau. Pour un col optique grand de-



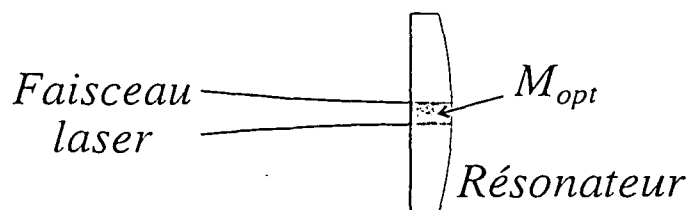


Fig. 47: La masse optique  $M_{opt}$  qui intervient dans le spectre de bruit basse fréquence d'un miroir plan-convexe correspond à la masse du volume du miroir éclairé par le faisceau.

vant la taille des cols acoustiques, le déplacement moyenné vu par la lumière est petit. Le miroir est donc équivalent à un simple oscillateur harmonique ayant une grande raideur, donc une masse effective importante. Ce comportement n'est pas spécifique à la géométrie plan-convexe. Mais pour une telle géométrie, les modes sont confinés au centre du miroir et les masses effectives sont en général petites. En reprenant l'exemple d'un miroir de diamètre  $35\text{ cm}$  et d'un col optique de  $5,5\text{ cm}$ , une géométrie plan-convexe conduirait à une masse effective quarante fois plus petite que la masse totale.

Cette réduction de la masse effective est néanmoins compensée par le fait que la fréquence fondamentale dépend essentiellement de l'épaisseur du miroir (éq. 4.57), et peut être beaucoup plus grande que celle d'un miroir cylindrique de même masse. On obtient des valeurs typiques de l'ordre de  $40\text{ kHz}$ , soit dix fois plus élevées que celles d'un miroir plan-plan. Cette augmentation spectaculaire explique pourquoi un miroir plan-convexe peut être moins bruyant qu'un miroir cylindrique.

La figure 48 montre le bruit thermique  $S_u^T$  à basse fréquence pour les deux géométries, en fonction de l'épaisseur des miroirs. Pour chaque épaisseur, le diamètre des miroirs est ajusté de façon à garder une masse du miroir constante et égale à  $20\text{ kg}$ . La masse effective du miroir cylindrique a été calculée par le programme CYPRES, alors que celle du miroir plan-convexe est déterminée à partir de l'équation (4.67), en sommant numériquement un nombre suffisant de termes pour assurer la convergence de la somme. Il apparaît clairement sur cette figure que le bruit thermique vu par la lumière est beaucoup plus faible pour un miroir plan-convexe (courbe a) que pour un miroir plan-plan (courbe b). Pour une épaisseur de  $7\text{ cm}$  (correspondant à un diamètre de  $57\text{ cm}$ ), on obtient une puissance de bruit thermique  $S_u^T [1\text{ Hz}]$  égale à  $6 \cdot 10^{-38}\text{ m}^2/\text{Hz}$ . Le bruit est donc réduit d'un facteur 7 par rapport à celui d'un miroir cylindrique de même masse.

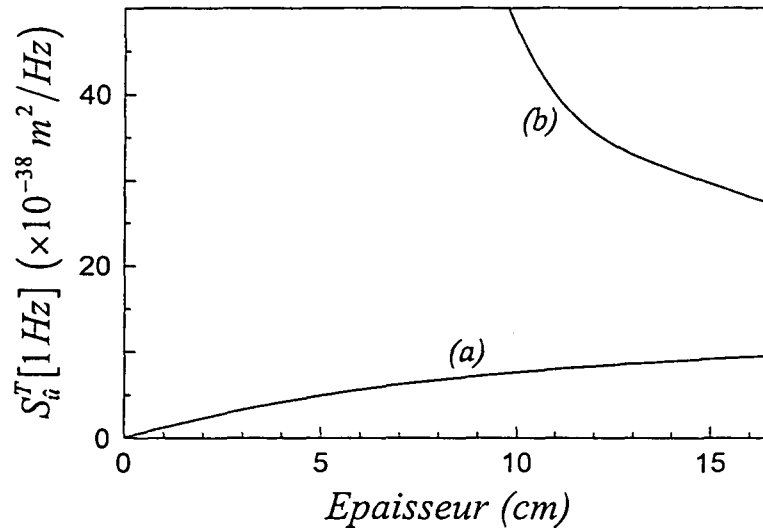


Fig. 48: Evolution du spectre de bruit thermique  $S_u^T$  à basse fréquence en fonction de l'épaisseur du miroir, pour des géométries plan-convexe (courbe a) et plan-plan (courbe b), et pour une masse fixée à 20 kg. Le col optique est égal à 5,5 cm.

On a donc démontré dans cette section que l'utilisation de miroirs plan-convexe pouvait permettre de diminuer l'effet sur la lumière du bruit thermique interne des miroirs. Cette étude est basée sur l'approximation paraxiale et suppose que l'épaisseur du miroir et le col optique sont petits devant le diamètre du miroir et le rayon de courbure de la face convexe. Dans le cas contraire, des effets de bord pour les modes d'ordre transverse élevé pourraient modifier la réduction de bruit obtenue. Ces modes sont en principe peu couplés à la lumière. Néanmoins, le gain appréciable de sensibilité qui pourrait être atteint dans un interféromètre gravitationnel par un simple changement de la forme des miroirs justifie qu'on cherche à confirmer cette analyse. Une estimation du bruit thermique peut être obtenue à partir d'une méthode directe proposée par Levin [23, 77]. Il s'agit d'une application directe du théorème fluctuation-dissipation, sans décomposition modale du déplacement, qui est basée sur un programme de calcul par éléments finis. Il serait également intéressant d'effectuer une comparaison expérimentale des bruits thermiques basse fréquence d'un miroir plan-plan et d'un miroir plan-convexe.

#### 4.7.2 Reproduction de l'article "Thermal noise of a plano-convex mirror"

L'article qui suit est reproduit de la référence *Phys. Lett. A* 263, 27 (1999). Il détaille les calculs de la masse effective du miroir plan-convexe. On étudie de plus l'effet d'un décentrage du faisceau par rapport au centre du miroir. Les modes gaussiens étant confinés autour de l'axe, le déplacement effectif diminue, et on peut encore gagner un facteur 2 sur la puissance de bruit vue par la lumière.



ELSEVIER

22 November 1999

PHYSICS LETTERS A

Physics Letters A 263 (1999) 27–32

[www.elsevier.nl/locate/physleta](http://www.elsevier.nl/locate/physleta)

## Thermal noise of a plano-convex mirror

A. Heidmann <sup>\*</sup>, P.F. Cohadon <sup>1</sup>, M. Pinard <sup>2</sup>*Laboratoire Kastler Brossel <sup>3</sup>, Case 74, 4 place Jussieu, F75252 Paris Cedex 05, France*

Received 19 July 1999; received in revised form 30 September 1999; accepted 1 October 1999

Communicated by P.R. Holland

### Abstract

We study theoretically the internal thermal noise of a mirror coated on a plano-convex substrate. The comparison with a cylindrical mirror of the same mass shows that the effect on a light beam can be reduced by a factor 10, improving the sensitivity of high-precision optical experiments such as gravitational-wave interferometers. © 1999 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

PACS: 05.40.Jc; 04.80.Nn; 43.40.+s

### 1. Introduction

Thermal noise is a basic limit in many precision measurements [1]. For example, the sensitivity in interferometric gravitational-wave detectors [2,3] is limited by the Brownian motion of the suspended mirrors. This thermally excited motion can be decomposed into suspension and internal noises. The former refers to the motion of the center of mass of the mirrors and it has been extensively studied both theoretically [4,5] and experimentally [6–9]. Internal noise is due to thermally induced deformations of the mirror surface and constitutes the main limitation of gravitational-wave detectors in the intermediate fre-

quency domain. It has thus been studied theoretically for mirrors corresponding to the VIRGO and LIGO gravitational-wave observatories, either by a decomposition of the motion over acoustic modes [10,11] or by a direct approach based on the fluctuation–dissipation theorem [12,13]. The normal-mode expansion shows that the internal thermal noise may depend on the mirror shape and on the spatial matching between light and acoustic modes. For example, a bar-shaped cylindrical mirror is less noisy than a gong-shaped one. A slight noise reduction has also been obtained by moving the light beam off center. These works however deal with standard cylindrical shapes although there is no evidence that such a geometry is the best candidate to reach low thermal noise.

In this paper, we study an alternative geometry in which the mirror is coated on the plane side of a plano-convex substrate. Such a plano-convex geometry has been extensively studied for mechanical resonators with high quality factors [14]. Acoustic modes

<sup>\*</sup> Corresponding author. E-mail: [heidmann@spectro.jussieu.fr](mailto:heidmann@spectro.jussieu.fr)

<sup>1</sup> E-mail: [cohadon@spectro.jussieu.fr](mailto:cohadon@spectro.jussieu.fr)

<sup>2</sup> E-mail: [pinard@spectro.jussieu.fr](mailto:pinard@spectro.jussieu.fr)

<sup>3</sup> Laboratoire de l'Université Pierre et Marie Curie et de l'École Normale Supérieure associé au Centre National de la Recherche Scientifique.

are confined near the central axis of the resonator and their spatial structure can be described by analytical expressions similar to gaussian optical modes of a Fabry–Perot cavity [14–16]. We show that this geometry leads to a drastic reduction of the thermal noise. We first recall the effect of mirror deformations on the light reflected by the mirror. We then determine the mirror motion induced by thermal excitation and show that the effect on light at low frequency can be expressed in terms of an effective susceptibility which takes into account every acoustic mode and its coupling to the light. We compare the effect of thermal noise to the one obtained with a cylindrical mirror of the same mass. We finally determine the noise reduction obtained by moving the light beam off center and we show that a global noise reduction of 10 can be reached.

## 2. Effect of thermal noise on light

In a gravitational-wave interferometer, the thermal noise of the mirrors has a similar effect as a gravitational wave since both change the optical path followed by the light in the interferometer arms. At every radial point  $r$  of the mirror surface, the field experiences a local phase-shift proportional to the longitudinal displacement  $u(r, z=0, t)$  of the surface (the origin of the cylindrical coordinates is taken at the center of the mirror surface, see Fig. 1). This leads to a global phase-shift for the reflected field which is actually related to the mirror displacement averaged over the beam profile [11,15]. The phase shift between the two interferometer arms thus contains information about the mirror displacement and the variable read out by this procedure corresponds to the averaged displacement

$$\hat{u}(t) = \langle u(r, z=0, t), v(r) \rangle, \quad (1)$$

where the brackets stand for the overlap integral in the mirror plane ( $z=0$ ),

$$\langle f(r), g(r) \rangle = \int_{z=0} d^2r f(r) g(r), \quad (2)$$

and  $v(r)$  is the intensity profile of the light beam in the mirror plane. Assuming that the beam is in a

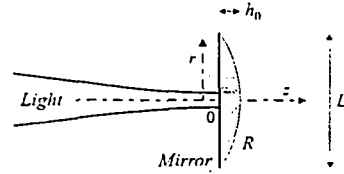


Fig. 1. The mirror is coated on the plane side of a plano-convex substrate of radius  $R$ , thickness  $h_0$  and diameter  $D$ . The effect of the thermally excited motion corresponds to a global phase-shift for the light beam.

TEM<sub>00</sub> Gaussian mode, this profile is related to the beam waist  $w_0$  by

$$v(r) = \frac{2}{\pi w_0^2} e^{-2r^2/w_0^2}. \quad (3)$$

Any displacement can be decomposed onto the acoustic modes of the mirror. Noting  $\{u_n(r, z)\}$  a basis of the internal acoustic modes, the displacement  $u(r, z, t)$  can be expressed as a linear combination of these modes

$$u(r, z, t) = \sum_n a_n(t) u_n(r, z), \quad (4)$$

where  $a_n(t)$  is the time-dependent amplitude of mode  $n$ . Each acoustic mode corresponds to a harmonic oscillator characterized by a Lorentzian mechanical susceptibility

$$\chi_n[\Omega] = \frac{1}{M_n(\Omega_n^2 - \Omega^2 - i\Omega_n^2\Phi[\Omega])}, \quad (5)$$

where  $M_n$  is the effective mass of mode  $n$ ,  $\Omega_n$  is its resonance frequency and  $\Phi[\Omega]$  is the loss angle assumed to be the same for all modes. The mirror motion can be described by the Fourier transforms  $a_n[\Omega]$  of every amplitude coefficient. Assuming that the mirror is in thermal equilibrium at temperature  $T$ , one gets

$$a_n[\Omega] = \chi_n[\Omega] F_{T,n}[\Omega], \quad (6)$$

where  $F_{T,n}$  is a Langevin force describing the coupling of the mode  $n$  with the thermal bath.

One can now determine the averaged displacement  $\hat{u}$  from Eqs. (1), (4) and (6). One gets [15]

$$\hat{u}[\Omega] = \chi_{\text{eff}}[\Omega] F_T[\Omega], \quad (7)$$

where  $\chi_{\text{eff}}$  appears as an effective susceptibility taking into account all the acoustic modes and their spatial overlap with the light beam,

$$\chi_{\text{eff}}[\Omega] = \sum_n \langle u_n(r, z=0), v(r) \rangle^2 \chi_n[\Omega]. \quad (8)$$

This effective susceptibility is then the sum over all modes of the susceptibilities  $\chi_n$  weighted by the overlap with light. The force  $F_T$  in Eq. (7) is an effective Langevin force related to the forces  $F_{T,n}$  of each acoustic mode. One finds [15] that the noise spectrum  $S_T[\Omega]$  of the force  $F_T$  is related to  $\chi_{\text{eff}}$  by the fluctuation–dissipation theorem

$$S_T[\Omega] = -\frac{2k_B T}{\Omega} \text{Im} \left( \frac{1}{\chi_{\text{eff}}[\Omega]} \right). \quad (9)$$

This relation means that the mirror is in thermodynamic equilibrium at temperature  $T$ .

In a gravitational-wave interferometer, the frequency of a gravitational wave is usually much smaller than the mechanical resonance frequencies of internal acoustic modes of the mirrors. We are thus interested in the noise spectrum  $S_{\hat{u}}$  of the averaged displacement  $\hat{u}$  at low frequency compared to the resonance frequencies  $\Omega_n$ . From Eqs. (7)–(9), the background thermal noise can be approximated in this frequency domain to

$$\begin{aligned} S_{\hat{u}}[\Omega \approx 0] &= \frac{2k_B T}{\Omega} \text{Im}(\chi_{\text{eff}}[\Omega]) \\ &\approx 2k_B T \frac{\Phi[\Omega]}{\Omega} \chi_{\text{eff}}[0]. \end{aligned} \quad (10)$$

The effect of thermal noise on light is thus proportional to the effective susceptibility at zero frequency which is given by

$$\chi_{\text{eff}}[0] = \sum_n \frac{\langle u_n(r, z=0), v(r) \rangle^2}{M_n \Omega_n^2}. \quad (11)$$

In the next section we determine this susceptibility for a plano-convex mirror and we compare the values obtained to the ones of a cylindrical mirror.

### 3. Plano-convex mirror

We consider that the mirror is coated on the plane side of a segment of sphere of radius  $R$  and of

thickness  $h_0$  (see Fig. 1). For simplicity we assume that the mirror has a sharp edge on its circumference so that its mass  $M$  and its diameter  $D$  are related to  $R$  and  $h_0$  by

$$M = \pi \rho h_0^2 (R - h_0/3), \quad (12)$$

$$D = 2\sqrt{h_0(2R - h_0)}, \quad (13)$$

where  $\rho$  is the density of the substrate (2200 kg/m<sup>3</sup> for silica). The total mass  $M$  of the mirror is an important parameter for the suspension thermal noise [4,5]. We thus choose a mass of the same order as the one of the mirrors in gravitational-wave interferometers. We will see however that the internal thermal noise is quite insensitive to the mirror mass so that we set the mass  $M$  to 20 kg. All the geometrical parameters of the mirrors (curvature radius  $R$ , diameter  $D$ ) can then be expressed in terms of the thickness  $h_0$ .

If the thickness is much smaller than the curvature radius, the acoustic propagation equation can be solved using a paraxial approximation and one gets analytical expressions for the acoustic modes corresponding to Gaussian modes [14]. Each compression mode is defined by three integers  $n, p, l$ , corresponding to longitudinal, radial and angular indexes, respectively. The longitudinal displacement  $u_{n,p,l}(r, z)$  at radial coordinate  $r$  and axial coordinate  $z$  is given by [14,15]

$$u_{n,p,l}(r, z) = e^{-r^2/w_n^2} L_p^l(2r^2/w_n^2) \cos\left(\frac{n\pi}{h(r)} z\right). \quad (14)$$

$u_{n,p,l}$  is composed of a transverse Gaussian structure, a transverse Laguerre polynomial  $L_p^l$  and a cosine in the propagation direction ( $h(r)$  is the mirror thickness at radial position  $r$ , equal to  $h_0$  for  $r=0$ ). The acoustic waist  $w_n$  and the eigenfrequency  $\Omega_{n,p,l}$  are given by

$$w_n^2 = \frac{2h_0}{n\pi} \sqrt{Rh_0}, \quad (15)$$

$$\Omega_{n,p,l}^2 = \Omega_M^2 \left[ n^2 + \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{h_0}{R}} n(2p+l+1) \right], \quad (16)$$

where  $\Omega_M = \pi c_l/h_0$  is the fundamental longitudinal frequency,  $c_l$  being the longitudinal sound velocity (5960 m/s for silica).

From these equations one can derive an analytical expression for the effective susceptibility  $\chi_{\text{eff}}[0]$  as an infinite sum over all modes  $\{n, p, l\}$  (Eq. 11). In the case where the light beam is centered on the mirror, only modes that have a cylindrical symmetry will contribute. In particular the sum over  $l$  is limited to  $l=0$ . The effective mass of each acoustic mode and the spatial overlap with light are then given by

$$M_n = \frac{\pi}{4} \rho h_0 w_n^2, \quad (17)$$

$$\langle u_{n,p,0}(r, z=0), v(r) \rangle = \frac{2w_n^2}{2w_n^2 + w_0^2} \left( \frac{2w_n^2 - w_0^2}{2w_n^2 + w_0^2} \right)^p. \quad (18)$$

We have numerically computed the effective susceptibility for different thicknesses. Fig. 2 shows the result obtained by computing 30 different values of the thickness. For each value, the curvature radius  $R$  and the diameter  $D$  of the mirror are determined according to Eqs. (12) and (13). For example one gets  $R = 61$  cm and  $D = 57$  cm for a thickness  $h_0$  of 7 cm. The two curves in Fig. 2 are obtained with different optical waists  $w_0$  (2 cm for curve *a* and 5.5 cm for curve *b*). These waists correspond to the beam waists on the front and end mirrors of the VIRGO interferometer [10]. One observes a decrease of the thermal noise for a thinner mirror. This is partly due to the fact that the mechanical resonance frequencies are increased. It would be however difficult to use a very thin mirror since its diameter would become very large ( $D$  evolves as  $h_0^{-1/2}$  for small  $h_0$ ).

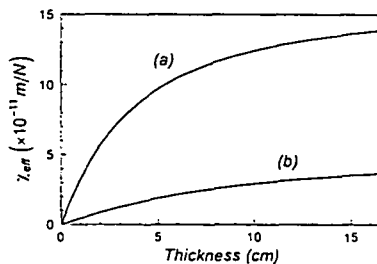


Fig. 2. Variation of the effective susceptibility at zero frequency  $\chi_{\text{eff}}[0]$  as a function of the thickness  $h_0$  of the mirror. Curves (a) and (b) correspond to an optical waist  $w_0$  of 2 cm and 5.5 cm, respectively.

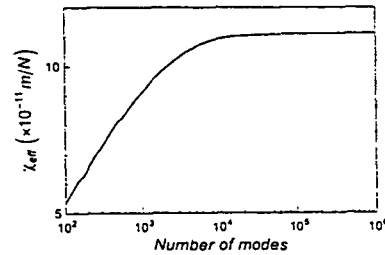


Fig. 3. Convergence of the effective susceptibility as a function of the number of computed modes.

If we consider a reasonable thickness of 7 cm, we obtain an effective susceptibility  $\chi_{\text{eff}}[0]$  equal to  $11 \times 10^{-11}$  m/N for an optical waist of 2 cm, and  $2.4 \times 10^{-11}$  m/N for  $w_0 = 5.5$  cm. These results can be compared to the values obtained for cylindrical mirrors, that is  $46 \times 10^{-11}$  m/N ( $w_0 = 2$  cm) and  $11 \times 10^{-11}$  m/N ( $w_0 = 5.5$  cm) [10]. The internal thermal noise of a plano-convex mirror is thus significantly smaller, by at least a factor 4. If the constraint on the diameter can be relaxed, even larger noise reduction may be obtained.

We have checked the validity of the numerical calculation by plotting the effective susceptibility as a function of the number of computed modes, for example in the case of a thickness of 7 cm and an optical waist of 2 cm (Fig. 3). This curve shows that results become valid as soon as the number of computed modes is larger than  $10^4$ . Since the numerical calculation only deals with simple analytical expressions, it can easily be processed with a very large number of modes, such as  $10^6$ .

#### 4. Relation with the optical mass

Fig. 4 shows the variation of the effective susceptibility as a function of the optical waist. The thermal noise is reduced for a wider waist. The mirror displacement is actually averaged over the beam waist. Since the maximum displacement is at the center of the mirror, one gets less noise for a wide waist.

It is possible to derive a simple approximation of the thermal noise in the case of a thickness  $h_0$  much smaller than the curvature radius  $R$ . We can then assume that the transverse acoustic modes are degenerate and we can replace the resonance frequencies

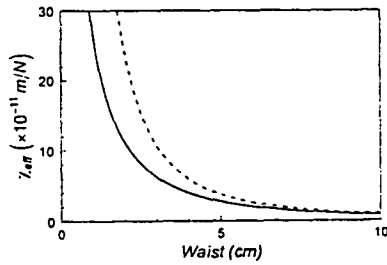


Fig. 4. Variation of the effective susceptibility as a function of the optical waist  $w_0$  for a 7-cm thick mirror. The solid curve is the computed result and the dashed curve corresponds to an approximation for which the effective mass of the mirror is replaced by the optical mass.

$\Omega_{n,p,0}$  by the value for  $p = 0$  (Eq. 16). The sum over  $p$  in the effective susceptibility (Eq. 11) is then a geometric sum and one gets a simple estimate of the susceptibility  $\chi_{\text{eff}}[0]$  in terms of an optical mass  $M_{\text{opt}}$  given by [15]

$$\chi_{\text{eff}}[0] \approx 1/M_{\text{opt}} \Omega_M^2, \quad (19)$$

$$M_{\text{opt}} = \frac{12}{\pi^2} \left( \frac{\pi}{4} \rho h_0 w_0^2 \right). \quad (20)$$

The effective susceptibility is thus equivalent to the one of a single harmonic oscillator of resonance frequency  $\Omega_M$  and of mass  $M_{\text{opt}}$  corresponding to the mass of the part of the mirror illuminated by the light beam (term in brackets in Eq. 20). The resulting susceptibility is shown as a dashed curve in Fig. 4 and appears to be a good approximation of the computed susceptibility. It is actually an overestimation of the effective susceptibility since the resonance frequencies  $\Omega_{n,p,0}$  are always larger than  $\Omega_{n,0,0}$ .

This result shows that the internal thermal noise depends only on a few parameters, mainly the optical waist  $w_0$  and the thickness  $h_0$ . The effective susceptibility evolves as  $h_0/w_0^2$  and one obtains a lower noise for a thin mirror and a wide optical waist, as shown in Fig. 2 and Fig. 4. We have checked that the thermal noise is quite insensitive to other parameters such as the curvature radius  $R$  or the mass  $M$  of the mirror. We have computed the effective susceptibility for different masses by varying the curvature radius  $R$  while the thickness  $h_0$  is kept constant. The relative variation of the thermal noise is less than 5% for masses between 5 kg and 50 kg.

Note that this relation with the optical mass seems to be a specific behavior of the plano-convex geometry. One can define an effective mass for a cylindrical mirror by a relation similar to (19) but this mass is no longer related to the optical mass. From the point of view of thermal noise, the comparison between cylindrical and plano-convex geometries shows that the effective mass of a cylindrical mirror is usually larger than the optical mass, whereas the fundamental resonance frequency  $\Omega_M$  is approximately 10 times larger for the plano-convex geometry (typically 40 kHz instead of 4 kHz). This drastic increase of the fundamental frequency explains why the plano-convex mirror is less noisy.

### 5. Misalignment of the light beam

We now study the effect of a misalignment of the light beam. Since the maximum thermal displacement is at the center of the mirror, moving the light beam off center must improve the noise. However, the number of modes ( $l \neq 0$ ) which contributes to the thermal noise rapidly increases with the misalignment. As a consequence there is only a slight effect for cylindrical mirrors [10]. In the case of a plano-convex mirror, acoustic modes are more confined around the center of the mirror and one expects a larger effect of misalignment.

To efficiently compute the effective susceptibility, we replace the Laguerre polynomial in Eq. (14) by two Hermite polynomials and we use the recurrence relations between them in the numerical calculation. The resulting susceptibility is shown in Fig. 5, for a 7-cm thick mirror and for an optical waist of 2 cm

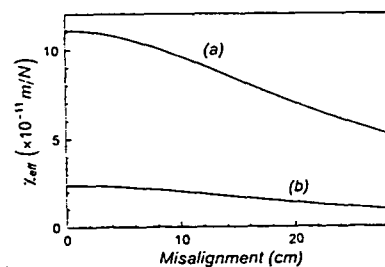


Fig. 5. Variation of the effective susceptibility as a function of the misalignment of the light beam. Curves (a) and (b) correspond to an optical waist  $w_0$  of 2 cm and 5.5 cm, respectively.



(curve *a*) and of 5.5 cm (curve *b*). The reduction of thermal noise with misalignment is clearly visible on those curves since a reduction factor on the order of 2 can be reached.

## 6. Conclusion

We have studied the internal thermal noise at low frequency of a plano-convex mirror. We have shown that it can be related to the susceptibility of an equivalent pendulum of resonance frequency equal to the fundamental resonance frequency of the mirror and of mass equal to the optical mass. As a consequence the thermal noise mainly depends on the thickness of the mirror and on the waist of the light beam. We have found that a thin plano-convex mirror has a lower noise than a standard cylindrical mirror of same mass. For a 7-cm thickness, the thermal noise is approximately 10 times lower. Using such plano-convex mirrors in gravitational-wave interferometers would thus increase the sensitivity of the interferometer in the intermediate frequency domain.

The results derived in this paper are based on a paraxial approximation which allows to describe the acoustic modes of the mirror as Gaussian modes. This approximation is valid if the diameter and the curvature radius of the mirror are large as compared to its thickness and to the optical waist. Otherwise, high-order transverse modes may become sensitive to edge effects and they may be not adequately described as Gaussian modes. These modes however do not significantly contribute to the thermal noise since the overlap with light becomes small for high-order modes. Anyway, considering the large noise reduction that would be obtained by a simple change of the mirror shape, we believe that it would be of great interest to experimentally compare the back-

ground thermal noises of cylindrical and plano-convex mirrors, for example by using a high-sensitivity displacement sensor such as a high-finesse cavity [17].

Finally, let us note that we have studied a geometry with a sharp edge on the circumference. Since the acoustic modes are confined near the center of the mirror, it is possible to truncate the borders of the mirror in order to have an edge with a finite size. This would not degrade the thermal characteristics of the mirror, but it will change its diameter and its mass. A compromise must be found in practice between the thickness which determines the amplitude of internal noise, the mass which is important for suspension thermal noise, and the diameter of the mirror.

## References

- [1] P.R. Saulson, *Phys. Rev. D* 42 (1990) 2437.
- [2] C. Bradaschia, *Nucl. Instrum. Meth. A* 289 (1990) 518.
- [3] A. Abramovici, *Science* 256 (1992) 325.
- [4] G.I. Gonzalez, P.R. Saulson, *J. Acoust. Soc. Am.* 96 (1994) 207.
- [5] J.E. Logan, J. Hough, R.D. Thomson, *Phys. Lett. A* 218 (1996) 181.
- [6] J.E. Logan, N.A. Robertson, J. Hough, *Phys. Lett. A* 170 (1992) 352.
- [7] A. Gillespie, F. Raab, *Phys. Lett. A* 190 (1994) 213.
- [8] G.I. Gonzalez, P.R. Saulson, *Phys. Lett. A* 201 (1995) 12.
- [9] V.B. Braginsky, V.P. Mitrofanov, K.V. Tokmakov, *Phys. Lett. A* 218 (1996) 164.
- [10] F. Bondu, J.Y. Vinet, *Phys. Lett. A* 198 (1995) 74.
- [11] A. Gillespie, F. Raab, *Phys. Rev. D* 52 (1995) 577.
- [12] Y. Levin, *Phys. Rev. D* 57 (1998) 659.
- [13] F. Bondu, P. Hello, J.Y. Vinet, *Phys. Lett. A* 246 (1998) 227.
- [14] C.J. Wilson, *J. Phys. D: Appl. Phys.* 7 (1974) 2449.
- [15] M. Pinard, Y. Hadjar, A. Heidmann, *Eur. Phys. J. D* 7 (1999) 107.
- [16] H.W. Kogelnik, T. Li, *Appl. Opt.* 5 (1966) 1550.
- [17] Y. Hadjar, P.F. Cohadon, C.G. Aminoff, M. Pinard, A. Heidmann, *Europhys. Lett.* 47 (1999) 545.

## 5 Refroidissement d'un miroir par pression de radiation

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle méthode optique de réduction du bruit thermique, méthode dont nous faisons la démonstration expérimentale sur la cavité à miroir mobile déjà présentée.

Nous commençons par des considérations générales sur l'équilibre thermodynamique qui seront utiles pour comprendre le mécanisme de refroidissement que nous avons réalisé. Nous décrivons aussi les différentes méthodes proposées pour réduire le bruit thermique. Nous présentons ensuite le principe de notre expérience, qui peut réduire le bruit thermique à résonance ou à basse fréquence, ainsi que les résultats expérimentaux que nous avons obtenus. Nous terminons ce chapitre en étudiant divers prolongements de notre expérience, notamment la façon dont la limite de sensibilité de notre expérience peut influencer la température atteinte, et l'application éventuelle de ce dispositif à la réduction du bruit thermique d'un interféromètre gravitationnel.

### 5.1 Introduction et motivations

Nous commençons cette section par des considérations générales sur le bruit thermique. Nous rappelons la façon dont tous les degrés de liberté sont thermalisés, et la relation entre la dissipation de ces degrés de liberté et leurs fluctuations à l'équilibre thermodynamique. Certains des concepts exposés ici seront utiles pour comprendre l'efficacité de la méthode présentée dans la suite du chapitre. Nous terminons cette introduction par une revue des différentes méthodes déjà proposées pour réduire l'influence du bruit thermique sur la sensibilité d'une mesure de position.

### 5.1.1 Température thermodynamique. Conséquences du théorème fluctuation-dissipation

Prenons l'exemple du mouvement pendulaire d'un miroir suspendu, dont l'amortissement est dû à la force de friction exercée par le gaz présent dans l'enceinte. A température non-nulle, les molécules de gaz sont animées d'un mouvement d'agitation thermique, avec une vitesse quadratique moyenne  $u$  donnée à l'équilibre thermodynamique par :

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}k_B T, \quad (5.1)$$

où  $m$  est la masse des molécules.

L'analyse des collisions entre les molécules de gaz et le miroir [78] permet alors de démontrer qu'on a nécessairement un mouvement d'agitation thermique du pendule, d'angle quadratique moyen  $\theta$  tel que :

$$\frac{1}{2}J\theta^2 = \frac{1}{2}k_B T, \quad (5.2)$$

où  $J$  est le moment d'inertie du pendule.

Cette relation est un cas particulier du théorème d'équipartition de l'énergie [78], qui stipule qu'à l'équilibre thermodynamique, chaque degré de liberté doit avoir une énergie d'agitation thermique  $\frac{1}{2}k_B T$ . Elle ne dépend pas de l'amortissement du pendule. Pourtant, si on interprète le bruit thermique comme la réponse d'un oscillateur à la force de Langevin thermique, on peut naïvement penser qu'augmenter l'amortissement diminuera la réponse du système, ici le bruit thermique.

Mais, si on augmente l'amortissement du pendule en modifiant par exemple la pression du gaz dans lequel il baigne, on augmente également la fréquence des collisions entre les molécules du gaz et le miroir, et donc la force de Langevin thermique. La réponse totale (intégrée sur tout le spectre de fréquence) du pendule à cette force aura alors la même amplitude. Seule sa répartition spectrale sera modifiée : si l'on augmente l'amortissement, la réponse sera répartie sur une plus large plage de fréquence. Augmenter l'amortissement du système est donc sans effet sur le bruit thermique *total* du système<sup>1</sup>.

On a ici un cas particulier du théorème fluctuation-dissipation [79, 80] qui relie la dissipation d'un système, liée à la partie imaginaire de sa susceptibilité (mécanique dans le cas du pendule), au spectre de la force de Langevin responsable de ses fluc-

<sup>1</sup> On a même généralement intérêt à minimiser l'amortissement de façon à concentrer le bruit thermique à des fréquences où il ne limite pas la sensibilité de l'appareil.

tuations thermiques. Un *amortissement passif* tel que la friction exercée par le gaz (lui-même à température ambiante) qui entoure le pendule ne peut donc pas diminuer la température effective du système.

On peut préciser cette explication sur l'exemple d'un oscillateur harmonique amorti, dont la susceptibilité mécanique s'écrit :

$$\chi[\Omega] = \frac{1}{M(\Omega_M^2 - \Omega^2 - i\Gamma\Omega)}, \quad (5.3)$$

où  $M$  est la masse de l'oscillateur,  $\Omega_M$  sa fréquence de résonance et  $\Gamma$  son amortissement relié au facteur de qualité mécanique  $Q$  par  $\Gamma = \Omega_M/Q$ . La force de Langevin  $F_T$  associée à cette dissipation est alors une force de moyenne nulle, et le théorème fluctuation-dissipation donne son spectre, qui est indépendant de la fréquence :

$$S_T = -\frac{2k_B T}{\Omega} \text{Im}(1/\chi[\Omega]) = 2M\Gamma k_B T. \quad (5.4)$$

Le spectre du mouvement d'agitation thermique est alors donné par :

$$S_x^T[\Omega] = |\chi[\Omega]|^2 S_T = \frac{2\Gamma k_B T}{\Omega} \text{Im}(\chi[\Omega]) = \frac{2\Gamma k_B T}{M[(\Omega_M^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2\Omega^2]}. \quad (5.5)$$

Ce spectre est d'autant plus piqué autour de la fréquence de résonance mécanique que le facteur de qualité  $Q = \Omega_M/\Gamma$  est important. Mais son amplitude maximale croît de façon linéaire avec  $Q$ , si bien que si on cherche la variance  $\Delta x$  de ce mouvement d'agitation thermique, qui est égale à l'intégrale du spectre  $S_x^T[\Omega]$  sur toutes les fréquences, on obtient :

$$\frac{1}{2} M \Omega_M^2 \Delta x^2 = \frac{1}{2} k_B T. \quad (5.6)$$

Le facteur  $Q$  disparaît de l'expression finale, puisqu'on intègre une expression proportionnelle à  $Q$  sur une bande de fréquence qui lui est inversement proportionnelle.

Notons finalement que loin de résonance, le spectre de bruit thermique peut se mettre sous la forme :

$$S_x^T[\Omega \ll \Omega_M] = \frac{2\Gamma k_B T}{M\Omega_M^4}, \quad (5.7)$$

$$S_x^T[\Omega \gg \Omega_M] = \frac{2\Gamma k_B T}{M\Omega^4}. \quad (5.8)$$

Le spectre de bruit thermique est donc indépendant de la fréquence à basse fréquence et son amplitude évolue comme  $1/\Omega^2$  à haute fréquence<sup>2</sup>. Par ailleurs, il est proportionnel au rapport  $T/Q$  en dehors de la résonance. Ce résultat était prévisible puisque l'essentiel du bruit thermique est concentré au voisinage de la fréquence de résonance lorsque le facteur de qualité est élevé.

## 5.1.2 Méthodes de réduction du bruit thermique

### 5.1.2.1 Méthodes cryogéniques

Pour réduire le bruit thermique, la solution la plus évidente consiste bien sûr à diminuer la température du système, en le plaçant dans un cryostat. Dans le domaine de la détection des ondes gravitationnelles, si tous les dispositifs basés sur des barres de Weber (barres Nautilus, Auriga, ...) sont aujourd'hui cryogéniques (à des températures de l'ordre ou inférieures au Kelvin) [8], tous les interféromètres construits ou en construction sont encore à température ambiante.

Il serait pourtant intéressant de diminuer par exemple le bruit thermique interne des miroirs, qui limite la sensibilité dans la gamme des fréquences intermédiaires comprises entre  $50 \text{ Hz}$  et  $1 \text{ kHz}$ . Mais on se trouve confronté au problème de l'évacuation de la chaleur due à l'absorption résiduelle par les miroirs de l'énorme puissance lumineuse présente dans l'interféromètre. Des trois processus de transfert envisageables pour évacuer cette chaleur (rayonnement, convection et conduction), les deux premiers sont à proscrire. En effet, le rayonnement décroît en  $T^4$  et n'est donc pas efficace à basse température, et la convection est impossible dans le vide poussé qui règne dans l'interféromètre. La conduction n'est possible que par les fils qui servent à suspendre le miroir. La question est alors de savoir s'ils peuvent assurer une conduction thermique suffisante.

La seule expérience menée à ce jour a eu lieu dans le cadre du projet japonais TAMA [25]. Dans cette expérience, un cylindre en saphir de dimensions semblables à celles du principal miroir de l'interféromètre TAMA (diamètre de  $10 \text{ cm}$  et épaisseur de  $6 \text{ cm}$ ) est posé sur une table en téflon dont on peut négliger la conduction thermique. Le cylindre est maintenu à l'aide de fibres en saphir fixées à une table en cuivre et tendues de façon à assurer un bon contact thermique avec le cylindre (figure 49). L'ensemble

<sup>2</sup> Cette dépendance en fréquence est liée à l'amortissement de type visqueux choisi ici. Un angle de pertes constant donnerait un résultat différent.

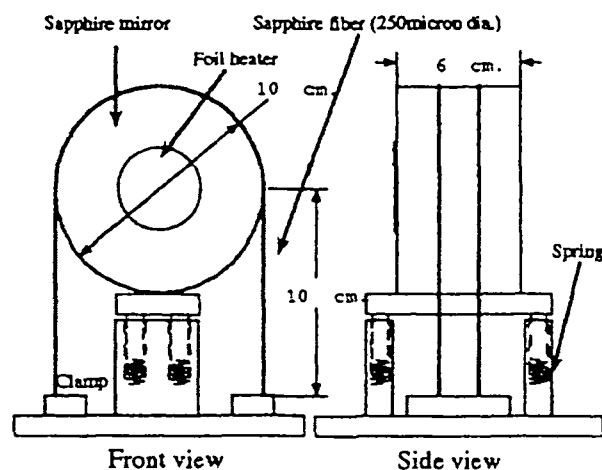


Fig. 49: Montage expérimental utilisé pour refroidir un miroir de TAMA par les fils de suspension. Le miroir, posé sur une table en téflon, n'est en contact thermique avec la table en cuivre inférieure que par l'intermédiaire des fibres en saphir. Cette figure est reproduite de la référence [25].

du dispositif expérimental est installé dans une chambre à vide placée à l'intérieur d'un cryostat à hélium liquide, la température de la table en cuivre étant de  $4,2 K$ .

En présence d'une dissipation de chaleur de  $29 mW$ , l'expérience a révélé une température uniforme dans le miroir de l'ordre de  $25 K$ . Cette température est deux fois plus grande que celle attendue, probablement à cause de phénomènes de résistance thermique de contact au niveau de la fixation entre la fibre et le miroir. L'extrapolation de ces résultats aux caractéristiques de l'interféromètre permet d'espérer une température des miroirs de TAMA de l'ordre de  $15 K$ . Atteindre une telle température permet de réduire l'amplitude du bruit thermique d'un facteur  $\sqrt{20}$  par rapport à la température ambiante, et ainsi d'améliorer du même facteur la sensibilité de l'interféromètre. Malheureusement, il est exclu d'utiliser des substrats en silice fondue pour les miroirs, car les facteurs de qualité des modes de vibration interne se dégradent à cette température [81]. Il faut donc envisager d'utiliser un autre matériau tel que le saphir, qui présente en plus l'avantage d'avoir des facteurs de qualité intrinsèques plus grands que ceux de la silice [24]. Comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, cela permettrait d'améliorer encore la sensibilité de l'interféromètre. Des travaux importants sont réalisés à l'heure actuelle pour arriver à produire des substrats en saphir de dimension correcte et avec une homogénéité satisfaisante.

D'autres problèmes restent néanmoins à résoudre. Il est notamment irréaliste d'espérer placer l'ensemble d'un interféromètre de longueur kilométrique à température cryogénique. Seule une zone voisine des miroirs le serait. Se pose alors le problème des transferts de chaleur qui pourraient s'opérer par rayonnement entre les parois du tube à vide des bras de l'interféromètre, qui sont à température ambiante, et la zone froide. De plus, les particules du gaz résiduel dans l'enceinte auraient tendance à contaminer la surface des miroirs, ce qui réduirait les performances de l'interféromètre. Ici encore, de nombreuses études sont en cours pour développer une technique de nettoyage in situ des miroirs de l'interféromètre.

#### 5.1.2.2 Augmentation des facteurs de qualité mécaniques

S'il est délicat de diminuer la température des miroirs et des fils de suspension, on peut heureusement jouer sur un autre paramètre : le facteur de qualité mécanique des différents modes. On peut distinguer plusieurs types de modes mécaniques pour un miroir suspendu [12]. Nous avons déjà vu les modes acoustiques internes, dont les fréquences de résonance sont de l'ordre de quelques kilohertz (la fréquence de résonance la plus basse est de  $5\text{ kHz}$  pour les miroirs de VIRGO). Les dispositifs de suspension sont caractérisés par des modes pendulaires dont les fréquences de résonance sont les plus basses possible de façon à réaliser un filtrage efficace du bruit sismique. Dans le cas de VIRGO, ces fréquences sont inférieures au hertz. Il existe enfin des modes violons des fils de suspension dont les fréquences de résonance sont les différentes harmoniques d'une fréquence fondamentale située aux environs de  $250\text{ Hz}$ .

Les modes pendulaires comme les modes internes des miroirs résonnent à des fréquences situées à l'extérieur de la zone d'analyse spectrale de l'interféromètre qui s'étend de  $10\text{ Hz}$  à quelques kilohertz. Dans cette zone, le spectre de bruit thermique d'un mode particulier dépend alors du rapport  $T/Q$  entre la température et le facteur de qualité mécanique (voir les équations 5.7 et 5.8). Diminuer les pertes de ces modes concentre le bruit thermique autour des résonances mécaniques et augmente ainsi la sensibilité de l'interféromètre dans la bande de fréquence utile. Ceci explique tout le travail entrepris autour des matériaux et des fixations à faibles pertes. Notons également que les facteurs de qualité intrinsèques des matériaux tels que le saphir augmentent sensiblement à très basse température : une diminution de la température est ainsi doublement profitable.

Pour les modes violons, le problème est un peu différent. Leur bruit hors résonance est en effet négligeable devant celui des modes internes des miroirs. Mais certains de ces modes ont des fréquences de résonance de l'ordre de quelques centaines de hertz, et se

situent donc à l'intérieur de la fenêtre d'analyse de l'interféromètre. Autour d'une de ces résonances, l'interféromètre est rendu aveugle par le bruit thermique très important du mode résonnant. On cherche alors à diminuer le nombre de résonances mécaniques dans la zone utile en jouant sur le diamètre des fils de suspension, et à réduire la largeur de ces résonances en augmentant les facteurs de qualité mécanique (par le choix de matériaux à faibles pertes notamment) [17].

### 5.1.2.3 Compression du bruit thermique

A l'équilibre thermodynamique, on a pour un oscillateur harmonique de masse  $M$  et de fréquence propre  $\Omega_M$  :

$$\frac{1}{2}M\Omega_M^2\Delta x^2 = \frac{\Delta p^2}{2M} = \frac{1}{2}k_B T. \quad (5.9)$$

Même si l'échelle des fluctuations est tout à fait différente, la situation est assez analogue à celle d'un état cohérent, où les dispersions des deux observables  $x$  et  $p$  vérifient :

$$\frac{1}{2}M\Omega_M^2\Delta x^2 = \frac{\Delta p^2}{2M} = \frac{1}{4}\hbar\Omega_M. \quad (5.10)$$

Si l'énergie thermique totale  $k_B T$  est une contrainte qui ne peut être contournée qu'en abaissant la température, on peut imaginer de repousser la limite imposée par l'équation (5.9) en diminuant la variance de  $x$  au détriment de celle de  $p$ . On améliorerait ainsi la sensibilité d'une mesure de position de l'oscillateur, en réalisant l'équivalent d'un état comprimé, où la compression porte sur les fluctuations thermiques au lieu de porter sur les fluctuations quantiques. Une telle expérience a été réalisée sur un dispositif semblable au dispositif de mesure interférométrique des déplacements d'un microscope à force atomique déjà présenté au chapitre 2 [82].

Pour réaliser une telle *compression du bruit thermomécanique*, une technique standard consiste à moduler un des paramètres de l'oscillateur, de façon à obtenir un oscillateur paramétrique opérant juste en-dessous du seuil d'oscillation. Dans cette expérience, une électrode positionnée à  $50 \mu m$  du cantilever est alimentée par une tension sinusoïdale. L'interaction entre cette électrode et le cantilever module la constante de raideur effective du cantilever, ce qui a pour effet d'amplifier mécaniquement une des quadratures du mouvement du cantilever. Rugar et Grütter ont alors observé une réduction de l'ordre de  $5 \text{ dB}$  du bruit sur la position du cantilever : de circulaire (en prenant des unités appropriées), la distribution de probabilité du cantilever



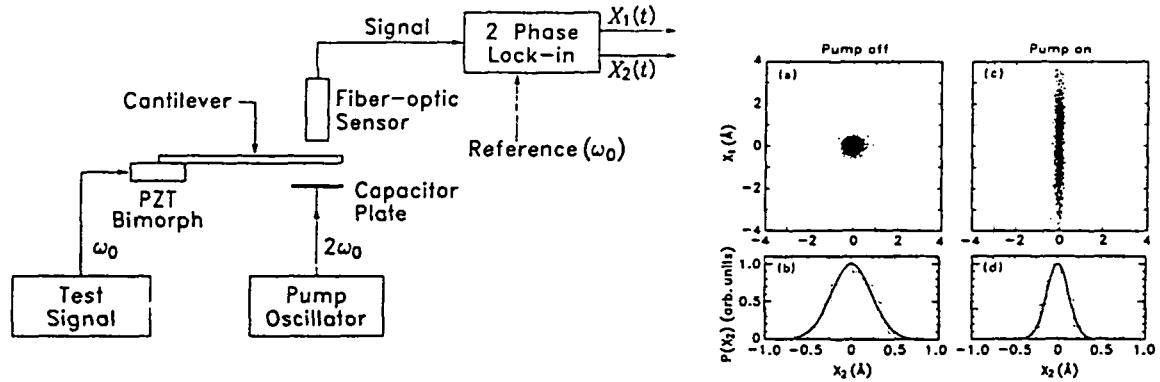


Fig. 50: Montage expérimental utilisé dans l'expérience de compression de bruit thermomécanique, et résultat de cette expérience. On distingue le cantilever, le senseur optique et l'électrode utilisée pour modifier la constante de raideur du cantilever. Quand on module cette raideur à deux fois la fréquence de résonance du cantilever, la distribution de probabilité dans l'espace des phases prend la forme caractéristique d'une ellipse. Cette figure est reproduite de la référence [82].

dans l'espace des phases  $(x, p)$  présentée sur la figure 50 prend la forme d'une ellipse, caractéristique des états comprimés [82].

Notons pour finir que dans cette expérience, la désamplification mécanique du mouvement n'a pas amélioré la sensibilité de la mesure de force : le signal (déplacement du cantilever sous l'effet de son interaction avec la surface étudiée) et le mouvement brownien sont en effet réduits par le même facteur, et le rapport signal à bruit reste inchangé. Toutefois, une expérience similaire, appliquée au mouvement axial d'un ion dans un piège de Penning utilisé comme spectromètre de masse, a permis d'améliorer la précision de la mesure de la fréquence d'oscillation axiale, et donc la précision de la mesure de la masse de l'ion [83].

#### 5.1.2.4 Contrôle par une boucle d'asservissement

Une autre approche a récemment été proposée par Paolo Tombesi et ses collaborateurs [84]. Elle consiste à observer les déplacements du miroir mobile et à réaliser une boucle d'asservissement en appliquant une force sur le miroir de façon à diminuer son mouvement d'agitation thermique. Appliquée au spectre de bruit d'un modèle simplifié de détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles (dans lequel le mouvement du miroir est supposé harmonique), leur étude prévoit une très nette diminution du bruit thermique du système pour des gains importants de la boucle de contre-réaction. Pour

appliquer une force sur le miroir, ils proposent de faire varier le potentiel d'un condensateur formé par le miroir mobile et une électrode fixe.

Une expérience basée sur une idée similaire a déjà été réalisée en 1992 à l'Université de Constance, dans l'équipe dirigée par Jürgen Mlynek [85]. Dans cette expérience, on cherche à modifier la réponse mécanique d'un cantilever de microscope à force atomique, dont la fréquence propre est située vers  $50\text{ kHz}$ . Le mouvement du cantilever est mesuré par une technique standard de microscopie à force atomique, qui utilise un faisceau laser hélium-néon qui se réfléchit sur le cantilever et dont on détecte la déflexion à l'aide d'une photodiode à quadrants. On peut utiliser le microscope en "mode AC" : le cantilever est mis en oscillation forcée à une fréquence proche de sa résonance mécanique. L'interaction avec la surface, qui dépend entre autres de leur distance respective, modifie la fréquence de résonance naturelle du cantilever. Quand on déplace la pointe du microscope au-dessus de l'échantillon, le désaccord entre la fréquence de modulation et celle de la résonance mécanique ne cesse donc de varier. Sa réponse (en amplitude et en phase) à la force due à la surface est donc modifiée : la mesure du mouvement du cantilever permet alors de remonter aux caractéristiques de la surface. On a intérêt à utiliser un oscillateur de facteur de qualité élevé (de l'ordre de 1800 dans cette expérience) pour profiter d'un bon rapport signal à bruit pour mesurer la déflexion, mais les oscillations de relaxation du système peuvent alors gêner la mesure du signal de force atomique.

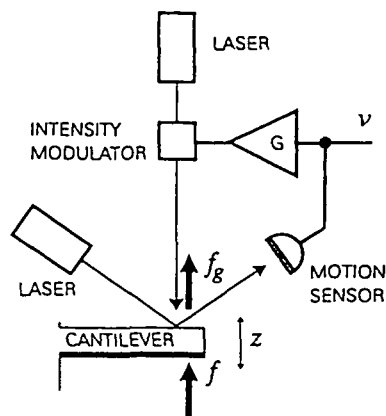


Fig. 51: Montage expérimental utilisé pour modifier la susceptibilité mécanique effective du cantilever. Le mouvement du cantilever est détecté par un laser et une photodiode à quadrants. Ce signal asservit le mouvement par l'intermédiaire de la force photothermique exercée par un second faisceau laser. Cette figure est reproduite de la référence [85].

On peut néanmoins envisager de contrôler le mouvement du cantilever par une boucle d'asservissement pilotée par le signal fourni par la photodiode à quadrants. Si on note  $\chi[\Omega]$  la susceptibilité mécanique du cantilever et qu'on néglige toutes les sources de bruit (bruit thermique, vibrations,...), son mouvement vertical est de la forme :

$$z[\Omega] = \chi[\Omega] f_t[\Omega], \quad (5.11)$$

où  $f_t$  est la force totale subie par le cantilever. Si on utilise le signal  $z[\Omega]$  pour appliquer une force de contre-réaction  $f_g[\Omega] = G[\Omega] z[\Omega]$ , le mouvement en présence d'une force extérieure  $f$  vérifie :

$$z[\Omega] = \chi[\Omega] (f[\Omega] + G[\Omega] z[\Omega]). \quad (5.12)$$

Le mouvement résultant est alors équivalent à celui qu'aurait sous l'action de la force  $f$  un cantilever de susceptibilité mécanique :

$$\hat{\chi}[\Omega] = \frac{\chi[\Omega]}{1 - G[\Omega] \chi[\Omega]}. \quad (5.13)$$

Dans l'expérience, le choix d'une fonction  $G[\Omega]$  adaptée a permis de réduire le facteur de qualité effectif de l'oscillateur jusqu'à une valeur  $\hat{Q} = 2$ , et donc de supprimer les oscillations de relaxation. La force de contrôle est appliquée en modulant l'intensité d'un deuxième faisceau laser, dont l'absorption, conjuguée à la différence des coefficients de dilatation du cantilever et du traitement métallique qui lui a été appliqué, crée une contrainte modulée, équivalente à une force appliquée.

## 5.2 Refroidissement à résonance par pression de radiation

On a déjà vu au chapitre 4 qu'on est capable d'observer avec une très grande sensibilité le mouvement brownien du résonateur mécanique. Le dispositif présenté au paragraphe (4.4.2) permet de plus d'appliquer une force sur le résonateur à partir d'un faisceau arrière modulé en intensité. On peut alors envisager d'utiliser l'information que fournit le système de détection homodyne sur le mouvement  $\delta x$  du miroir pour piloter la force appliquée, de façon à s'opposer au mouvement. On réalise ainsi une boucle d'asservissement qui doit permettre de réduire le mouvement brownien du miroir.

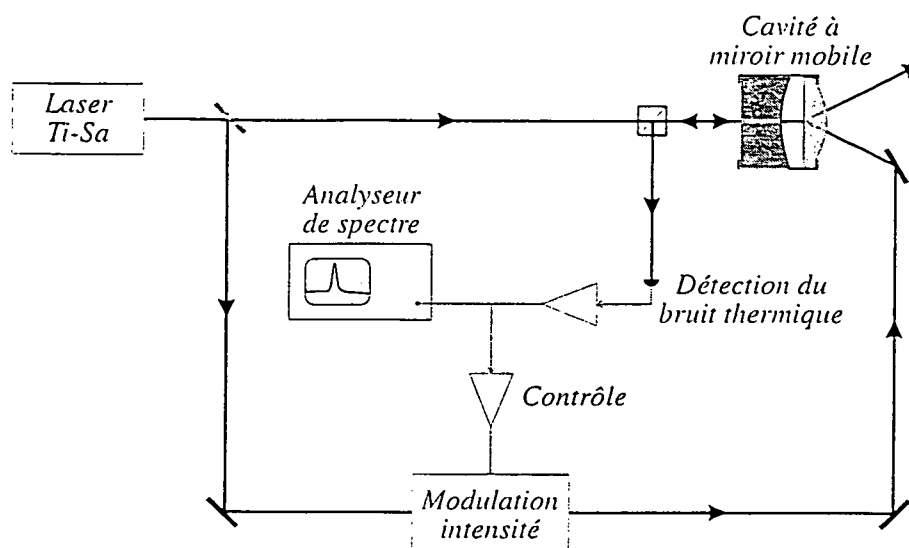


Fig. 52: Principe de la boucle de rétro-action utilisée pour refroidir le miroir. Le mouvement du miroir est détecté par le dispositif présenté au chapitre 4, et on utilise le signal pour piloter le modulateur acousto-optique qui module l'intensité du faisceau arrière.

Comme pour toute boucle d'asservissement, le contrôle est limité d'une manière ou d'une autre à une certaine plage de fréquence. On s'intéresse dans cette partie au refroidissement à résonance, c'est-à-dire lorsque l'asservissement agit essentiellement au voisinage d'une résonance mécanique du miroir. Le refroidissement va donc se traduire par une réduction du pic de bruit thermique déjà observé au chapitre 4. Nous nous intéresserons dans la partie (5.3) au contrôle à basse fréquence, qui permet de réduire le bruit de fond thermique à des fréquences petites par rapport aux fréquences de résonance mécanique. C'est cette situation qui est plus particulièrement intéressante pour la détection interférométrique des ondes gravitationnelles.

### 5.2.1 Etude théorique pour un seul mode

#### 5.2.1.1 Equation générale du mouvement du miroir

Au voisinage d'une résonance mécanique, l'essentiel de la réponse du miroir à une force extérieure est dû au mode résonnant. On peut donc négliger tous les autres modes (nous reviendrons sur cette approximation au paragraphe 5.2.6.2). Dans ce cas, l'équation qui régit le mouvement du miroir en présence de la force de pression de radiation  $F_{rad}$  du faisceau arrière et de la force de Langevin thermique  $F_T$  s'écrit (voir

l'éq. 2.12) :

$$\delta x [\Omega] = \chi [\Omega] (F_T [\Omega] + F_{rad} [\Omega]), \quad (5.14)$$

où  $\chi [\Omega]$  est la susceptibilité mécanique du mode, de masse effective  $M$ , de fréquence de résonance  $\Omega_M$  et d'amortissement  $\Gamma$  (éq. 5.3).

Dans la mesure où le bruit quantique est négligeable (ce qui est le cas expérimentalement), le signal issu du système de détection homodyne est proportionnel au déplacement  $\delta x$  du miroir. On suppose que l'électronique de la boucle d'asservissement est telle que la pression de radiation exercée par le faisceau arrière est proportionnelle à la vitesse du miroir :

$$F_{rad} [\Omega] = iM\Gamma\Omega g\delta x [\Omega], \quad (5.15)$$

où le paramètre sans dimension  $g$  est relié au gain électronique de la boucle. On a ainsi l'équivalent d'une force visqueuse supplémentaire, proportionnelle à la vitesse  $-i\Omega\delta x [\Omega]$  du résonateur.

Le mouvement du résonateur se met alors sous la forme :

$$\delta x [\Omega] = \frac{1}{M [\Omega_M^2 - \Omega^2 - i\Gamma(1+g)\Omega]} F_T [\Omega]. \quad (5.16)$$

Cette équation est similaire à celle obtenue sans contre-réaction (éq. 5.14 avec  $F_{rad} = 0$ ), si ce n'est que la pression de radiation exercée par le faisceau arrière modifie l'amortissement du résonateur, sans ajouter de fluctuations au système. Ce résultat correspond à un processus de *friction froide* [86,87], qui consiste à appliquer à un oscillateur une force de contre-réaction proportionnelle à sa vitesse instantanée. Cette technique est par exemple utilisée pour diminuer le facteur de qualité mécanique d'un oscillateur, ce qui permet d'éviter des oscillations de relaxation en gardant le rapport signal à bruit intrinsèque élevé de l'oscillateur (voir le paragraphe 5.1.2.4) [85]. Elle est également utilisée dans les accéléromètres ultrasensibles développés par l'ONERA [88,89] pour des missions spatiales et des tests de physique fondamentale (accéléromètres ASTRE et STAR, projet  $\mu$ -SCOPE, ...) pour stabiliser la masse test avec une force visqueuse supplémentaire qui n'ajoute pas de fluctuations au système. On va voir dans le paragraphe suivant qu'un tel amortissement *actif* peut diminuer la température effective du miroir.

## 5.2.1.2 Etude du spectre de bruit

Le spectre de bruit thermique  $S_x^{fb}$  en présence de l'asservissement s'obtient à partir de l'équation (5.16) :

$$S_x^{fb}[\Omega] = \frac{S_T}{M^2 [(\Omega_M^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2(1+g)^2\Omega^2]}, \quad (5.17)$$

où  $S_T$  est le spectre de la force de Langevin, donné par le théorème fluctuation-dissipation (éq. 5.4).

La force de Langevin  $F_T$  étant inchangée, le spectre de bruit thermique  $S_x^{fb}$  en présence de contre-réaction a toujours une forme lorentzienne, mais sa largeur est modifiée. Elle passe de  $\Gamma$  à :

$$\Gamma_{fb} = \Gamma(1+g). \quad (5.18)$$

Sa hauteur est aussi changée puisque la réduction en amplitude du spectre de bruit à la fréquence  $\Omega$  s'écrit :

$$R[\Omega] = \sqrt{\frac{S_x^T[\Omega]}{S_x^{fb}[\Omega]}} = \left| \frac{\Omega_M^2 - \Omega^2 - i\Gamma_{fb}\Omega}{\Omega_M^2 - \Omega^2 - i\Gamma\Omega} \right|, \quad (5.19)$$

où  $S_x^T[\Omega]$  est le spectre de bruit thermique sans contre-réaction (éq. 5.5). La réduction maximale est obtenue à résonance où elle vaut :

$$R[\Omega_M] = 1+g, \quad (5.20)$$

et l'efficacité diminue quand on s'écarte de la résonance mécanique. La partie réelle de la susceptibilité devient alors importante, et la modification de la partie imaginaire induite par le processus de friction froide joue moins de rôle :  $R[\Omega]$  tend vers 1 dans les deux cas limites  $\Omega \rightarrow 0$  et  $\Omega \rightarrow +\infty$ . On verra plus loin qu'il est néanmoins possible de réduire efficacement le bruit hors résonance, en opérant différemment.

## 5.2.1.3 Equilibre thermodynamique et température effective

Le spectre de bruit obtenu en présence de l'asservissement correspond à un nouvel équilibre thermodynamique. Plus précisément, le mouvement décrit par l'équation (5.17) est équivalent à celui d'un miroir ayant un amortissement propre  $\Gamma_{fb}$  et une température modifiée  $T_{fb}$ . Ce mouvement satisfait le théorème fluctuation-dissipation

(éq. 5.4) puisque le spectre de la force de Langevin peut s'écrire :

$$S_T = 2M\Gamma_{fb}k_B T_{fb}, \quad (5.21)$$

où  $T_{fb}$  est donnée par (voir les équations 5.4 et 5.18) :

$$T_{fb} = \frac{\Gamma}{\Gamma_{fb}} T = \frac{T}{1+g}. \quad (5.22)$$

On trouve ainsi que le miroir est en équilibre thermodynamique à une température plus basse que la température ambiante (dans le cas où  $g$  est positif). Ce résultat peut aussi être obtenu à partir du théorème d'équipartition de l'énergie, présenté au paragraphe (5.1.1). En présence de contre-réaction, l'intégration de  $S_x^{fb}$  sur toutes les fréquences conduit à :

$$\frac{1}{2}M\Omega_M^2 \Delta x_{fb}^2 = \frac{1}{2}k_B T_{fb}, \quad (5.23)$$

où la température effective  $T_{fb}$  est donnée par l'équation (5.22). La hauteur du spectre à résonance décroissant plus vite que la largeur de la courbe n'augmente, l'aire totale du spectre de bruit diminue en présence de contre-réaction.

Notons que la température et le facteur de qualité effectif  $Q_{fb} = \Omega_M/\Gamma_{fb}$  diminuent dans les mêmes proportions. Ainsi, le rapport  $T/Q$  n'est pas modifié et on retrouve que le processus de friction froide n'a pas d'effet loin de résonance. On peut aussi noter que le fait de rester dans un équilibre thermodynamique n'est vrai que lorsque le mouvement du miroir peut être décrit comme un simple oscillateur harmonique. Nous verrons au paragraphe (5.2.6.2) que ce n'est plus le cas lorsqu'on tient compte des autres modes acoustiques.

Enfin, le modèle présenté ici ignore le bruit rajouté par la boucle d'asservissement. On trouve en particulier que la température effective peut être arbitrairement petite, à condition de prendre un gain suffisamment grand (éq. 5.22). Il existe en fait une limite quantique à ce processus de refroidissement, que nous étudierons dans la section (5.5.1).

## 5.2.2 Procédure expérimentale

Nous allons présenter dans les sections suivantes les résultats expérimentaux que nous avons obtenus sur le refroidissement à résonance [30]. Pour cela, nous allons commencer par décrire comment l'expérience est réalisée.

Pour les paramètres utilisés dans notre expérience, le bruit quantique est toujours négligeable par rapport au bruit thermique du miroir. Même loin de la résonance mécanique, on a un bruit de fond thermique, dû à l'ensemble des autres modes acoustiques du miroir mobile et du miroir d'entrée, qui est toujours supérieur au moins d'un ordre de grandeur à la limite de sensibilité de l'expérience due au bruit quantique du faisceau lumineux. On peut donc considérer que le système de détection homodyne nous fournit le signal  $\delta x$ .

Par la suite, on n'étudiera la modification du spectre de bruit que sur des fenêtres de fréquences assez étroites, typiquement de l'ordre du kilohertz. Cette valeur étant beaucoup plus étroite que la bande passante de la cavité (de l'ordre de  $2\text{ MHz}$ ), on peut négliger la variation avec la fréquence du déphasage subi par le champ lors de sa réflexion sur la cavité.

Le signal fourni par la détection homodyne est donc directement proportionnel au déplacement  $\delta x$  du miroir (voir éq. 2.48) :

$$\delta q^{out}[\Omega] = a \delta x[\Omega], \quad (5.24)$$

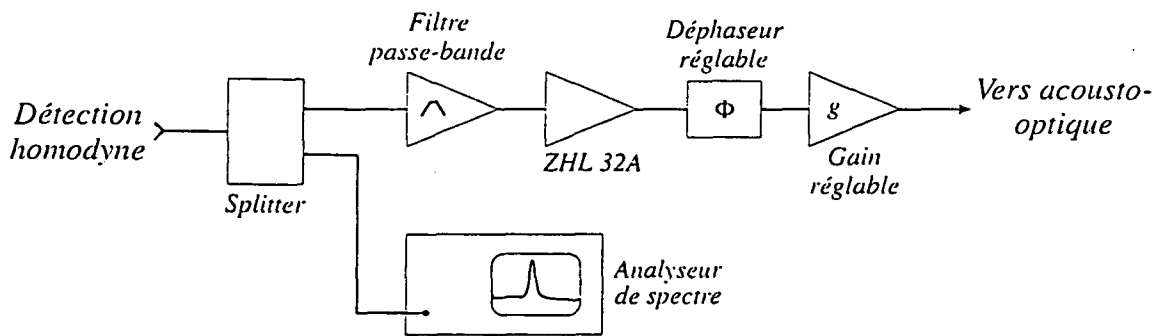
où le coefficient de proportionnalité  $a$  est a priori complexe mais indépendant de la fréquence.

Pour obtenir une force de pression de radiation de type visqueux, il est nécessaire de dériver le signal. Cependant, comme on s'intéresse à une plage de fréquence très étroite au voisinage de  $2\text{ MHz}$ , on peut considérer  $i\Omega$  comme constant et remplacer le différentiateur par un simple déphaseur, ajusté de manière à ce que le déphasage global entre le signal  $\delta x$  et la force de pression de radiation soit égal à  $\pi/2$ .

Le schéma général de la boucle d'asservissement, représenté sur la figure 53, est constitué de plusieurs modules distincts. Tout d'abord, le signal issu de la détection homodyne est séparé en deux parties par un circuit splitter *Mini-Circuits* : la première est envoyée sur l'analyseur de spectre et sert comme précédemment à observer en temps réel le spectre de bruit. La seconde est injectée dans la boucle de contre-réaction qui va piloter le modulateur acousto-optique.

Dans cette boucle, le signal est tout d'abord filtré par un filtre électronique passe-bande centré sur la fréquence de résonance mécanique, afin de limiter l'efficacité de l'asservissement à une plage de fréquence déterminée. Ce circuit est décrit plus en détail dans la section suivante. Le signal est ensuite amplifié par un amplificateur *Mini-Circuits* ZHL 32-A dont le gain est de  $25\text{ dB}$ , puis passe dans un montage déphaseur qui





**Fig. 53:** Détail de la boucle d'asservissement utilisée. Le signal issu de la détection homodyne est séparé en deux parties au niveau d'un splitter. Une partie est envoyée vers l'analyseur de spectre, qui permet de visualiser en temps réel le spectre de bruit thermique. La seconde est tout d'abord filtrée et amplifiée, puis passe dans un déphaseur réglable qui permet d'obtenir une force en quadrature avec le mouvement. Un circuit atténuateur variable permet ensuite de régler le gain global de la boucle, avant que le signal ne soit envoyé vers le pilote du modulateur acousto-optique.

permet de régler la phase nécessaire à l'obtention d'une force en quadrature avec  $\delta x$ . Un dispositif électronique basé sur un circuit PAS3 de *Mini-Circuits* permet ensuite de régler le gain global de la boucle de contre-réaction, avant que le signal ne soit injecté dans le boîtier sommateur  $DC + HF$  qui commande le pilote du modulateur acousto-optique (déjà décrit dans la section 4.4.2).

Une fois l'orientation du faisceau arrière optimisée comme à la section (4.4.2), on centre la fenêtre d'analyse de l'analyseur de spectre sur la fréquence de résonance du mode fondamental du miroir mobile, puis on augmente progressivement le gain de la boucle. L'observation du spectre de bruit modifié par l'asservissement permet de régler la phase globale. Pour une phase mal réglée, le centre de la résonance est décalé, comme on peut le voir sur l'équation (5.16) en prenant un gain  $g$  avec une partie imaginaire. On joue alors sur le déphaseur pour recentrer la résonance.

### 5.2.3 Filtre passe-bande électronique

Pour des valeurs importantes du gain  $g$ , l'amplitude du mouvement d'agitation thermique est diminuée de façon importante. On voit sur l'équation (5.14) que la force de pression de radiation  $F_{rad}$  peut alors devenir du même ordre de grandeur que la force de Langevin  $F_T$ . Son action doit être restreinte à une plage limitée en fréquence afin d'éviter la saturation du modulateur acousto-optique.

Pour cela, on insère un filtre électronique passe-bande, centré sur la fréquence de résonance mécanique, dans la boucle de contre-réaction. Pour une bande passante du

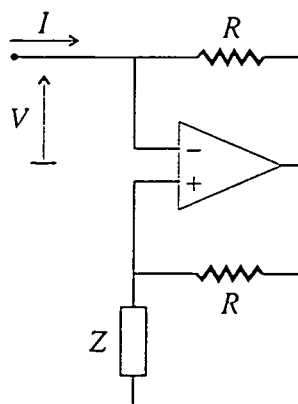


Fig. 54: Schéma de principe d'un convertisseur à impédance négative. Ce circuit est équivalent à une impédance  $-Z$  ( $V = -Z I$ ).

filtre d'une dizaine de kilohertz, on peut éviter la saturation de la boucle sans modifier l'effet du refroidissement du mode fondamental, qui n'est observé que sur une plage de fréquence de l'ordre du kilohertz. Le filtre électronique sert également à éliminer du signal issu de la détection homodyne les résonances associées aux autres modes acoustiques du miroir mobile, qui pourraient également saturer la boucle.

On peut songer à réaliser un filtre passe-bande avec un oscillateur  $RLC$ . Mais les résistances parasites des composants (essentiellement de l'inductance) limitent en pratique le facteur de qualité à une valeur de l'ordre de 100. Les inductances présentent d'autres inconvénients, surtout à haute fréquence, tels que des non-linéarités, des capacités parasites distribuées dans le bobinage ou encore une grande sensibilité aux champs magnétiques extérieurs. L'utilisation de filtres actifs basés sur des amplificateurs opérationnels permet de simuler des circuits  $RLC$  en évitant ces inconvénients [90]. Il existe de nombreux schémas de filtre passe-bande actif. Nous avons choisi d'utiliser un convertisseur à impédance négative, dont le principe est décrit sur la figure 54.

Il est facile de vérifier que ce circuit est équivalent à une simple impédance de valeur  $-Z$ , où  $Z$  est l'impédance connectée entre l'entrée positive de l'amplificateur opérationnel et la masse. Ce circuit transforme donc une impédance en retard de phase, tel qu'un condensateur en une impédance en avance de phase, similaire à une inductance :

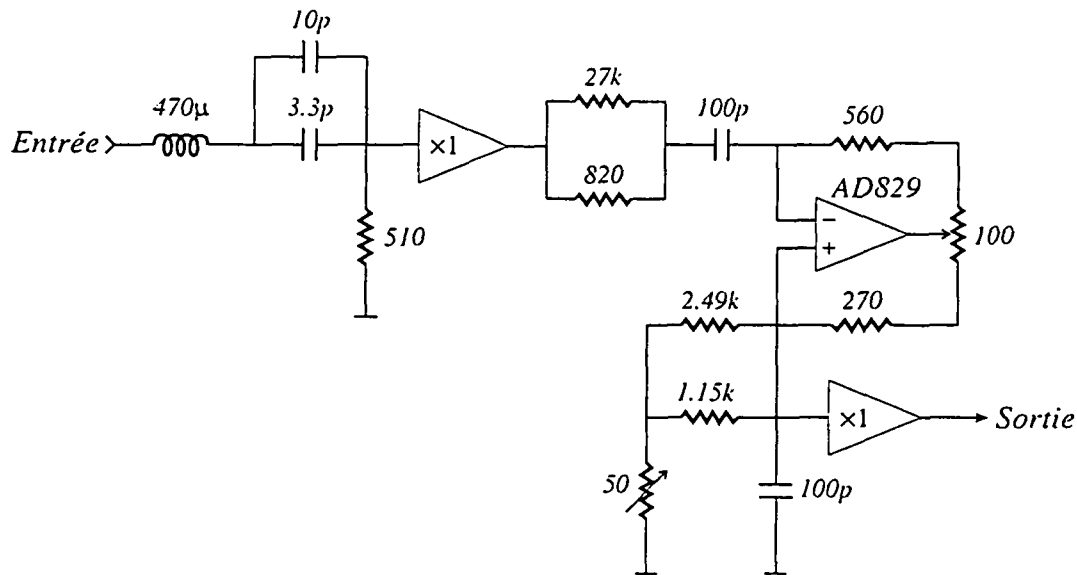


Fig. 55: Schéma de principe du filtre électronique passe-bande utilisé dans cette expérience.

$$Z = \frac{1}{iC\Omega} \rightarrow -Z = \frac{i}{C\Omega} \sim iL\Omega. \quad (5.25)$$

Notons toutefois que ce circuit ne simule pas parfaitement une inductance, puisque la dépendance en fréquence n'est pas bonne. On pourrait simuler plus précisément une inductance en utilisant un gyrateur, qui transforme une impédance  $Z$  en son inverse  $1/Z$ . Mais ce circuit présente l'inconvénient d'être plus complexe. En particulier, il nécessite deux amplificateurs opérationnels, ce qui peut être gênant étant donné les fréquences élevées auxquelles on veut faire fonctionner le filtre.

En pratique, le convertisseur à impédance négative suffit pour réaliser un excellent filtre. La figure 55 présente le schéma électronique du filtre que nous avons utilisé. Le signal d'entrée passe tout d'abord dans un circuit  $RLC$  qui effectue un premier filtrage. Etant donné la valeur des composants, la fréquence de résonance est de l'ordre de  $2\text{ MHz}$  et le facteur de qualité légèrement supérieur à 10. Le signal passe ensuite dans un premier montage adaptateur d'impédance qui permet d'attaquer le filtre actif avec une impédance de source négligeable. Le coeur du montage est le convertisseur à impédance négative, construit avec un amplificateur opérationnel  $AD829$ . Le signal de sortie, pris au niveau de l'entrée  $+$  de cet amplificateur, est dirigé vers un second

montage adaptateur d'impédance, qui permet de récupérer le signal sans surcharger le filtre actif.

Le fonctionnement du filtre dépend des composants (résistances, capacités et potentiomètres) placés autour de l'AD829. La relation entrée-sortie de ce filtre s'écrit :

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 - k Z_1/Z_2}, \quad (5.26)$$

où  $Z_1$  est l'impédance d'entrée (mise en série de  $R = 820 \Omega // 27 k\Omega$  et  $C = 100 pF$ ,  $Z_2$  l'impédance de sortie (mise en parallèle de  $R = 1,15 k\Omega // 2,49 k\Omega$  plus un potentiomètre de  $50 \Omega$  et  $C = 100 pF$ ) et  $k$  est le rapport entre les deux résistances de contre-réaction, placées entre la sortie de l'amplificateur et ses deux entrées.

Il est facile de voir que la relation (5.26) correspond à un filtre passe-bande de fréquence  $\Omega_M$  et de facteur de qualité  $Q$  donnés par :

$$\Omega_M = 1/RC \quad , \quad Q = 1/(2 - k). \quad (5.27)$$

La fréquence de résonance est ajustable autour de la valeur typique de  $2 MHz$  à l'aide du potentiomètre de  $50 \Omega$  qui détermine la valeur de  $R$ . Le facteur de qualité est réglable par le potentiomètre de  $100 \Omega$  qui fixe la valeur de  $k$ . Notons que ces deux potentiomètres ont des valeurs très faibles, ce qui permet de réduire les effets parasites de ces composants. En pratique, chaque potentiomètre agit aussi légèrement sur le second paramètre : il faut alors alterner les deux réglages pour converger vers le filtrage souhaité.

Un soin particulier doit être apporté au blindage du filtre. En effet, pour des facteurs de qualité élevés, une faible fraction du signal de sortie captée comme un signal parasite par les composants suffit à faire osciller l'ensemble du montage. Pour cela, les potentiomètres accessibles de l'extérieur du boîtier, qui servent à régler la fréquence centrale et le facteur de qualité du filtre, sont montés à plat au ras du plan de masse du circuit, et blindés en montant un second plan de masse par dessus. Pour la même raison, l'alimentation électrique du filtre est découplée des alimentations des amplificateurs situés en aval de la boucle.

Pour éviter l'oscillation, on cherche également à limiter le niveau du signal de sortie à quelques millivolts. On place donc des atténuateurs BNC *Mini-Circuits* (typiquement d'une dizaine de  $dB$ ) à l'entrée du filtre, le signal de sortie étant ensuite amplifié. En pratique, pour une fréquence de résonance du filtre aux environs de  $1859 kHz$ , on a obtenu des facteurs de qualité du filtre jusqu'à 1000. Au-delà, le filtre rentre en oscillation même pour un très faible signal d'entrée.

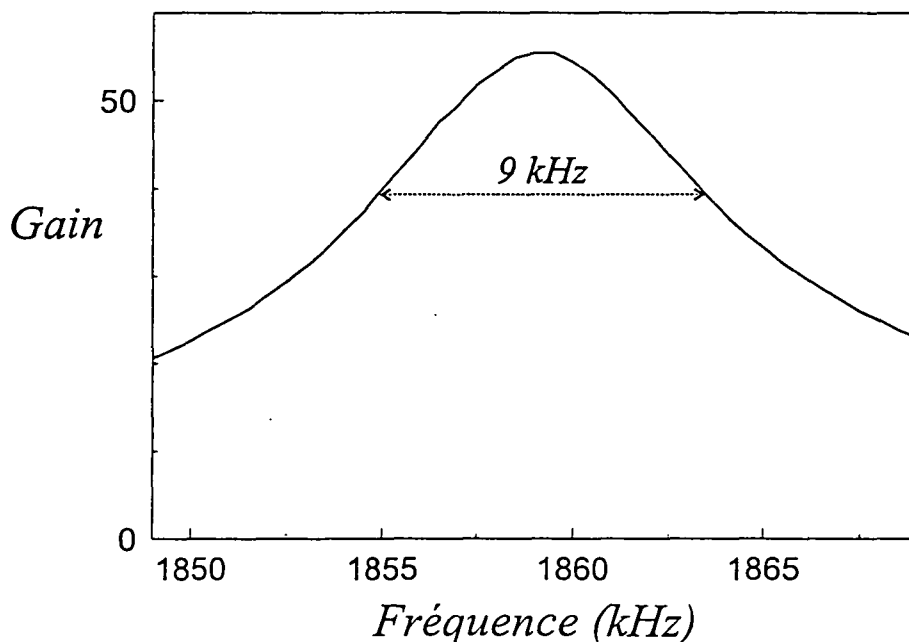


Fig. 56: Exemple de courbe de réponse en amplitude du filtre électronique, prise sur une plage de  $20\text{ kHz}$  de large. Le filtre est centré sur la fréquence de résonance mécanique.

Pour caractériser le filtre, on applique un signal de niveau fixe à l'entrée du filtre (typiquement de l'ordre de  $-60\text{ dBm}$ ), à l'aide d'un générateur de signaux haute fréquence (*HP 8648A*), et on mesure avec un analyseur de spectre le niveau du signal de sortie. On utilise en fait le programme sur ordinateur qui nous a servi à étudier la réponse mécanique du résonateur (section 4.4.2). Celui-ci pilote à la fois les fréquences du générateur haute fréquence et de l'analyseur de spectre fonctionnant en mode *ZeroSpan*, puis récupère la courbe de réponse du filtre. La figure 56 montre un exemple de courbe obtenue dans ces conditions.

Pour les expériences suivantes, le filtre est réglé de façon à avoir un facteur de qualité de l'ordre de 200, et donc une bande passante de l'ordre de  $10\text{ kHz}$ .

#### 5.2.4 Observation du refroidissement

On utilise les mêmes paramètres expérimentaux que pour la détection du bruit thermique du miroir (section 4.5) :  $10\text{ mW}$  de puissance pour l'oscillateur local et  $100\text{ }\mu\text{W}$  pour le faisceau envoyé dans la cavité. Les autres paramètres (accord de mode entre le laser et la cavité, recouvrement de l'oscillateur local, ...) sont également semblables.

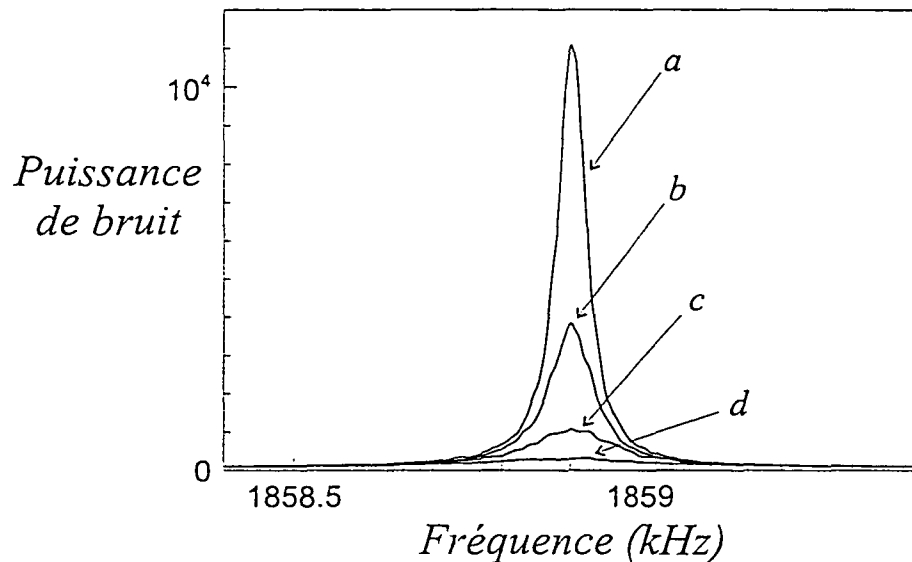


Fig. 57: Spectres de bruit de phase (normalisé au bruit de photon standard) sur une plage de 1 kHz, en l'absence de contre-réaction (courbe a) et pour des valeurs croissantes du gain de la boucle (courbes b à d).

La puissance du faisceau arrière est de l'ordre de 600 mW, dont 500 mW utiles qui sont diffractés dans le premier ordre du modulateur acousto-optique.

La figure 57 présente le spectre de bruit de phase (normalisé au bruit de photon standard) du champ réfléchi par la cavité. Le pic reflète le mouvement brownien du miroir en l'absence de contre-réaction (courbe a, semblable à celle du paragraphe 4.5) et en présence de l'asservissement pour des gains croissants (courbes b à d). Tous ces spectres sont le résultat d'un moyennage de 1000 acquisitions réalisées avec une résolution spectrale (RBW) de l'analyseur de spectre fixée comme précédemment à 10 Hz.

On observe clairement sur ces spectres que l'aire totale est réduite, tandis que la largeur à mi-hauteur augmente. On peut alors faire un ajustement de ces courbes par des lorentziennes, l'aire de ces lorentziennes donnant directement la température effective (par comparaison avec la courbe a, qui correspond à la température  $T = 300 K$ ). La figure 58 montre un exemple d'un tel ajustement, obtenu pour le spectre (c) de la figure 57. L'ajustement a été réalisé avec le programme *Origin* et donne les résultats suivants : fréquence de résonance  $\Omega_M/2\pi = 1858.9 kHz$ , largeur  $\Gamma_{fb}/2\pi = 144 Hz$  (soit une augmentation de l'amortissement  $\Gamma_{fb}/\Gamma = 3$ ), hauteur à résonance nor-

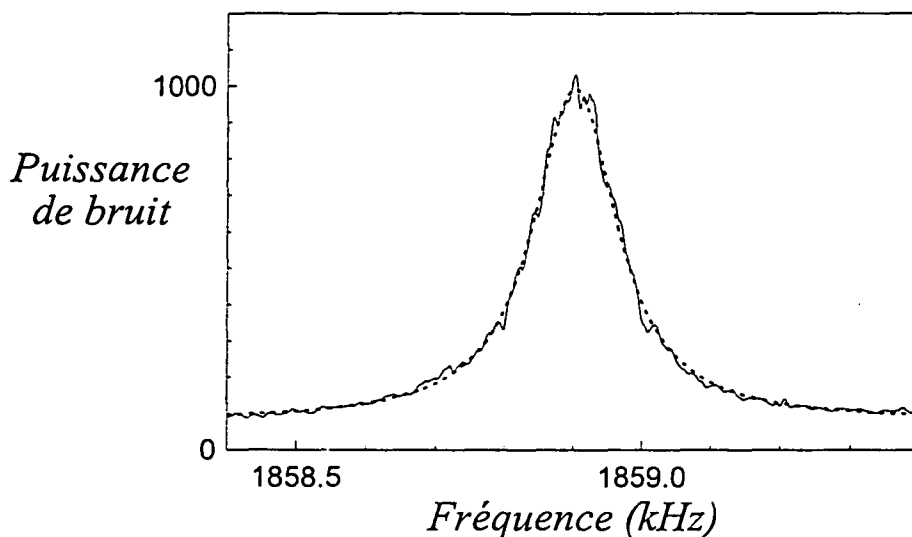


Fig. 58: Ajustement de la courbe (c) de la figure 57 par une lorentzienne. On obtient ainsi tous les paramètres du pic de bruit thermique : la fréquence de résonance, la hauteur, la largeur et le fond thermique résiduel.

malisée au bruit de photon standard  $S_x^{fb}[\Omega_M] = 1006$  (soit une réduction en amplitude  $R[\Omega_M] = 3,2$ ) et aire de la lorentzienne égale à  $2,1 \cdot 10^5 \text{ Hz}$  (soit un facteur de refroidissement  $T/T_{fb} = 3,8$ ).

Notons que la lorentzienne est superposée à un fond indépendant de la fréquence, égal pour l'ajustement lorentzien de la figure 58 à 78 fois le bruit de photon standard. Nous discuterons plus en détails la présence de ce fond et ses conséquences dans la section (5.2.6). Nous étudierons aussi la dépendance des différents paramètres (largeur  $\Gamma_{fb}$ , hauteur  $R[\Omega_M]$ , et température effective  $T_{fb}$ ) en fonction du gain  $g$  de la boucle de contre-réaction.

### 5.2.5 Chauffage du miroir

On peut également, pour une valeur négative du gain  $g$ , diminuer l'amortissement du résonateur, et donc augmenter sa température effective (voir les équations 5.18 et 5.22). La figure 59 présente le résultat expérimental obtenu en déphasant le signal de  $\pi$  par rapport à la situation du refroidissement. On augmente ainsi le facteur de qualité effectif du résonateur, la largeur de la courbe (environ  $1 \text{ Hz}$ ) étant en fait limitée par la résolution de l'analyseur de spectre ( $RBW$  fixé à sa valeur minimale de  $1 \text{ Hz}$ ). Il

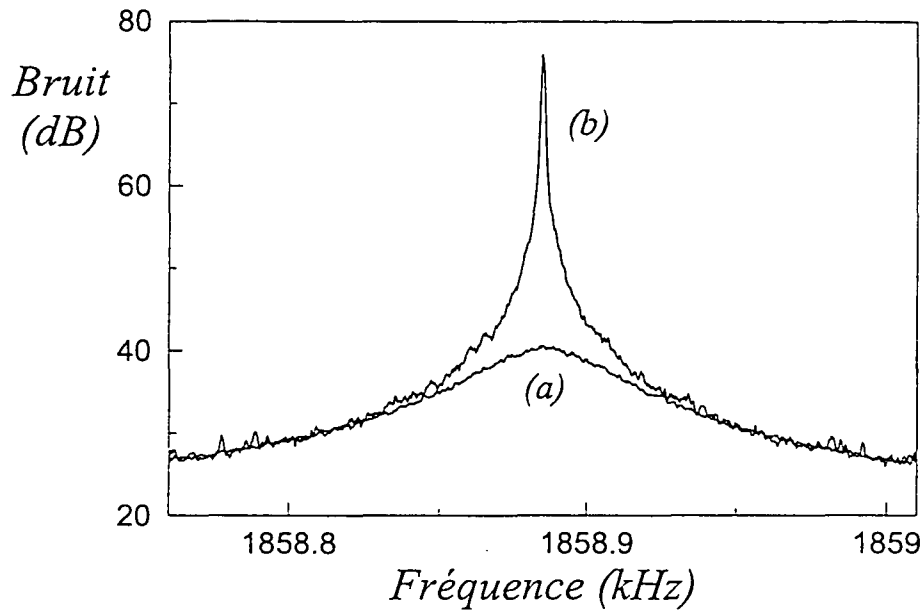


Fig. 59: Spectres de bruit de phase (représentés en  $dB$ ) obtenus sur une plage de  $250\text{ Hz}$  en l'absence de contre-réaction (courbe a), et pour un gain  $g$  négatif (courbe b).

faut noter que le bruit doit ici être représenté en  $dB$ , tant l'effet d'amplification du pic de bruit thermique est important.

Si on regarde la hauteur du bruit à la résonance mécanique, on peut estimer qu'on obtient un facteur de qualité effectif du résonateur :

$$Q_{fb} \approx 100 Q. \quad (5.28)$$

Notons que l'on n'observe pas d'auto-oscillation de la boucle d'asservissement. L'entrée en oscillation est en effet inhibée par un processus de saturation, essentiellement lié à la modulation en intensité du faisceau arrière. L'électronique de la boucle d'asservissement est en effet conçue de telle manière qu'elle ne sature pratiquement pas, même lorsque le signal induit une modulation en tout ou rien du faisceau. L'efficacité du chauffage est donc limitée par la force de pression de radiation exercée lorsque le faisceau est modulé avec une profondeur de modulation proche de 100 %. Au-delà, augmenter le gain ne change pas l'effet de chauffage et la hauteur du pic de bruit thermique observé sur la figure reste constante.



### 5.2.6 Evolution du spectre de bruit avec le gain

Pour vérifier le modèle théorique présenté à la section (5.2.1), il est intéressant d'étudier l'évolution des différentes caractéristiques des spectres (hauteur à résonance, largeur et température effective associée) quand on modifie le gain de la boucle de contre-réaction.

#### 5.2.6.1 Mesure du gain. Evolution de la largeur et de la hauteur du spectre

On ne peut pas mesurer le gain de la boucle en se contentant simplement de calibrer l'atténuation du circuit atténuateur PAS3. En effet, pour des gains importants, on observe une saturation de la modulation d'intensité du faisceau arrière, qui modifie le gain de la boucle de façon difficilement quantifiable. Nous avons donc eu l'idée d'utiliser la définition-même du gain (voir l'équation 5.15) et de mesurer simultanément le spectre de bruit  $S_x^{fb}$  et celui de la force de pression de radiation : le rapport de ces deux quantités, à la fréquence de résonance mécanique, donne accès au gain  $g$  à une constante multiplicative près. Cela suppose que la saturation n'induit pas des variations trop rapides de  $g$  en fonction de la fréquence, au voisinage de la résonance mécanique. Nous pouvons en fait vérifier expérimentalement cette hypothèse en nous assurant que les deux spectres ont la même dépendance en fréquence autour de la résonance.

Pour mesurer le spectre de la force de pression de radiation, on détecte l'intensité du faisceau arrière (après sa réflexion sur le miroir mobile) à l'aide d'une photodiode rapide FND 100 dont la sortie est envoyée vers l'analyseur de spectre. Une densité optique est placée devant la photodiode, de façon à limiter la puissance qu'elle reçoit à une dizaine de milliwatts. On acquiert alors de façon simultanée le spectre de bruit thermique  $S_x^{fb}$  et le spectre d'intensité du faisceau arrière, et cela pour différentes valeurs du gain  $g$  (réglé à l'aide du circuit PAS3), y compris en position "chauffage".

Pour chaque réglage du PAS3, on calcule ainsi le gain, en unité arbitraire, comme le rapport des hauteurs à résonance du spectre de modulation du faisceau arrière et du spectre de bruit thermique  $S_x^{fb}$ . On obtient le gain  $g$  à un coefficient de proportionnalité près, qui dépend de divers paramètres expérimentaux, tels que les gains des montages des photodiodes. Pour chaque réglage de gain, on détermine à l'aide d'un ajustement lorentzien du spectre de bruit  $S_x^{fb}$  les valeurs de la largeur, la hauteur et l'aire de la lorentzienne, comme nous l'avons fait dans la section (5.2.4) (voir la figure 58). Le tableau présenté sur la figure 60 résume les mesures effectuées.

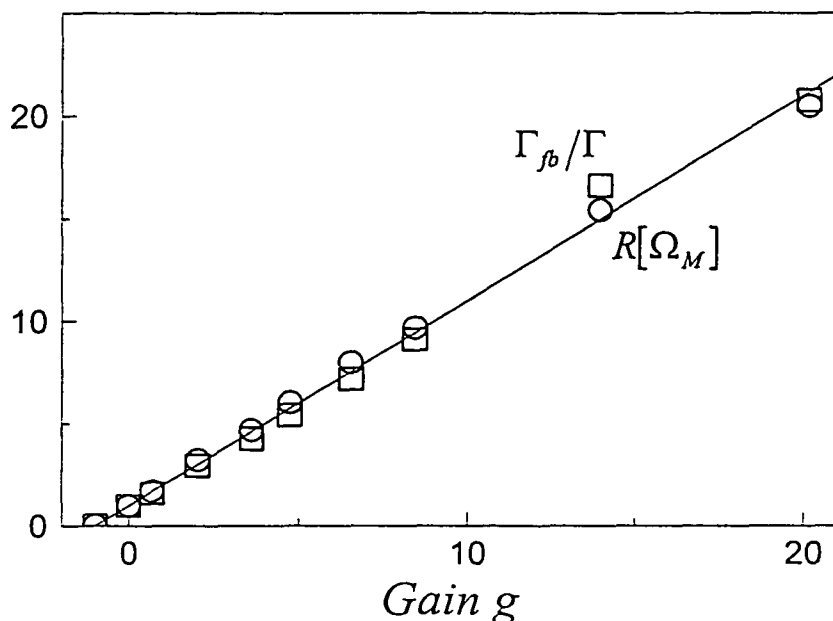
<i>Gain</i> (u.a.)	<i>Largeur</i> $\Gamma_{fb}$ (Hz)	<i>Hauteur</i> $S_x^{fb}[\Omega_M]$	<i>Aire</i> (Hz)	<i>Fond</i>	$\Gamma_{fb}/\Gamma$	$R[\Omega_M]$	$T/T_{fb}$
-17	0,862	$7,9 \cdot 10^9$	$1,1 \cdot 10^{10}$		0,0179	0,00116	$7,53 \cdot 10^{-5}$
0	48,2	$1,04 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^5$	69,9	1	1	1
11,5	72,5	$3,65 \cdot 10^3$	$4,07 \cdot 10^5$	71,3	1,51	1,71	1,97
12,3	78	$3,47 \cdot 10^3$	$4,16 \cdot 10^5$	74,7	1,62	1,75	1,93
35,1	144	$1,01 \cdot 10^3$	$2,09 \cdot 10^5$	78,0	2,98	3,26	3,84
62,4	206	485	$1,32 \cdot 10^5$	75,4	4,28	4,70	6,07
81,9	262	293	$8,7 \cdot 10^4$	81,1	5,43	6,04	9,21
113	347	167	$4,76 \cdot 10^4$	79,8	7,20	8,00	16,9
145	439	114	$2,05 \cdot 10^4$	84,2	9,11	9,69	39,3
241	800	44,9		121	16,6	15,4	
348	1000	25,5		458	20,8	20,5	

Fig. 60: Tableau récapitulatif des différentes acquisitions réalisées pour étudier la variation des paramètres du pic de bruit thermique en fonction du gain  $g$  de la boucle.

Chaque ligne correspond à un réglage différent du gain : la première ligne est obtenue en position chauffage, la seconde (obtenue pour un gain nul) donne les paramètres du spectre thermique sans asservissement  $S_x^T$  de référence, et les lignes suivantes correspondent à des gains positifs croissants. La première colonne donne le gain en unité arbitraire, déterminé comme nous l'avons décrit précédemment, et les quatre colonnes suivantes présentent les paramètres de l'ajustement lorentzien. Notons que pour la première ligne (position chauffage), le fond n'est pas significatif, étant donné la très grande hauteur du pic thermique. D'autre part, les valeurs de la largeur et du fond pour les deux dernières lignes, qui correspondent à des gains très importants, sont assez imprécises du fait que les spectres de bruit ont été pris sur une bande de fréquence de 1 kHz seulement, c'est-à-dire du même ordre de grandeur que la largeur de la lorentzienne.

Les trois dernières colonnes du tableau sont calculées à partir des colonnes précédentes et représentent l'augmentation relative de l'amortissement  $\Gamma_{fb}/\Gamma$ , la réduction de l'amplitude de bruit à résonance  $R[\Omega_M]$ , et le facteur de refroidissement  $T/T_{fb}$ .

La figure 61 montre les largeurs relatives  $\Gamma_{fb}/\Gamma$  en fonction du gain  $g$ . Les points expérimentaux sont alignés, avec une très bonne précision, selon une droite qui passe



**Fig. 61:** Variations mesurées de la largeur  $\Gamma_{fb}$  de la résonance (carrés) et du coefficient  $R[\Omega_M]$  de réduction du bruit en amplitude à résonance (cercles), en fonction du gain  $g$  de la boucle. L'évolution linéaire de  $\Gamma_{fb}$  a été utilisée pour normaliser le gain.

par le point  $(g = 0, \Gamma_{fb}/\Gamma = 1)$  : la largeur des spectres dépend bien linéairement du gain, comme prévu par le modèle théorique présenté au paragraphe (5.2.1) (éq. 5.18). Ce comportement linéaire permet de normaliser le gain  $g$ , en attribuant une pente égale à 1 à la droite qui interpole les points expérimentaux. C'est ce que nous avons fait sur la figure pour déterminer l'échelle horizontale à partir des gains donnés en unité arbitraire dans la première colonne du tableau.

La même figure présente aussi l'amplitude de réduction de bruit  $R[\Omega_M]$  à la fréquence de résonance mécanique, dont on vérifie qu'elle a également bien le comportement linéaire attendu avec le gain (cf éq. 5.20). On peut noter que la droite interpolant les points expérimentaux sur la figure 61 a une pente s'écartant de moins de 1 % de la valeur théorique 1, bien que la normalisation du gain  $g$  soit réalisée à partir de l'évolution des largeurs. Ce résultat montre la grande précision des mesures effectuées. Par ailleurs, on voit sur la figure 61 que la réduction de bruit  $R[\Omega_M]$  atteint un facteur 20. En d'autres termes, le processus de friction froide permet de réduire la puissance de bruit thermique à résonance par un facteur 400.

## 5.2.6.2 Evolution de la température effective. Effet du fond thermique

La largeur et la hauteur à résonance des spectres lorentziens évoluant bien avec le gain de la façon attendue, on pourrait penser que la température effective, proportionnelle à l'aire de la courbe, donc au produit de sa largeur par sa hauteur pour une lorentzienne, évolue elle aussi comme le prévoit le modèle théorique de la section (5.2.1).

En fait, la figure 62 montre que le comportement est totalement différent des prédictions du modèle théorique. Ceci est dû à l'existence d'un fond thermique, induit par les autres modes acoustiques du miroir mobile, et par ceux du miroir d'entrée de la cavité. Cette hypothèse est corroborée par le fait que, comme le montre la figure 62, l'écart au modèle théorique est d'autant plus significatif que le gain de la boucle est élevé : dans ce cas, le pic de bruit thermique est tellement réduit qu'on ne peut plus négliger l'effet du fond thermique.

On peut tenir compte de la présence de ce fond thermique pour corriger le modèle théorique. Notons  $\delta x_b [\Omega]$  cette composante du signal  $\delta x$  fourni par la détection homodyne et  $S_b$  le spectre de bruit associé que l'on suppose indépendant de la fréquence sur

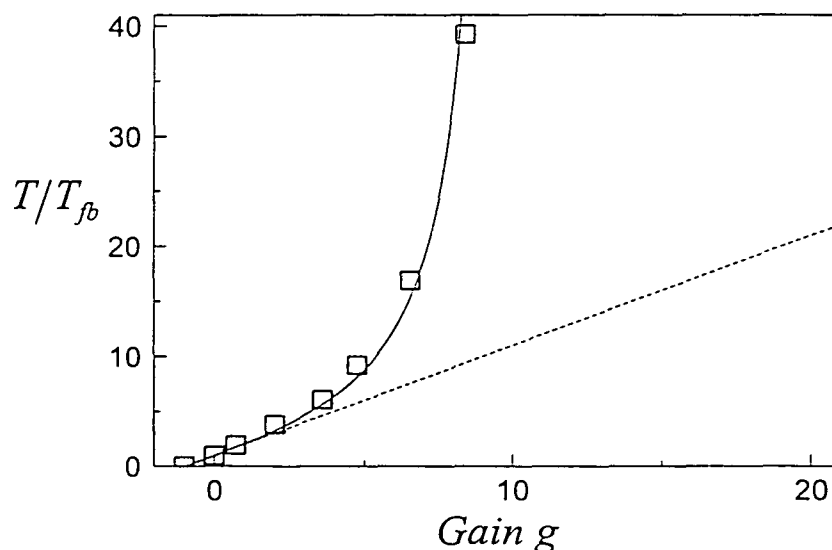


Fig. 62: Variations mesurées de la température effective  $T_{fb}$  du mode, en fonction du gain  $g$  de la boucle. La droite en pointillés correspond aux variations attendues d'après le modèle simple du paragraphe (5.2.1). La courbe en trait plein est un ajustement réalisé à partir du modèle décrit dans le texte.

la plage étudiée. On peut faire l'hypothèse que la boucle d'asservissement n'agit pas sur ce fond thermique. Il reproduit en effet pour partie les variations de la longueur de la cavité dues au bruit thermique du miroir d'entrée, sur lequel le faisceau arrière n'agit pas, et pour le reste celles dues au bruit thermique des nombreux modes acoustiques non résonnants du miroir mobile. On a vu plus haut (équation 5.19) que l'efficacité de l'asservissement décroît au fur et à mesure qu'on s'écarte de la résonance mécanique : on peut donc négliger l'effet de l'asservissement sur le bruit basse fréquence de ces modes acoustiques. On a alors :

$$\delta x [\Omega] = \chi^{(0)} [\Omega] (F_T [\Omega] + iM\Gamma\Omega g\delta x [\Omega]) + \delta x_b [\Omega], \quad (5.29)$$

où  $\chi^{(0)} [\Omega]$  est la susceptibilité mécanique du mode fondamental. Le mouvement résultant s'écrit :

$$\delta x [\Omega] = \frac{1}{M[\Omega_M^2 - \Omega^2 - i\Gamma(1+g)\Omega]} F_T [\Omega] + \frac{\Omega_M^2 - \Omega^2 - i\Gamma\Omega}{\Omega_M^2 - \Omega^2 - i\Gamma(1+g)\Omega} \delta x_b [\Omega] \quad (5.30)$$

Le bruit  $\delta x_b$  n'étant pas corrélé avec la force de Langevin  $F_T$  associée au mode fondamental, le calcul du spectre de bruit donne :

$$S_x^{fb} [\Omega] = S_x^{fb(0)} [\Omega] + \frac{1}{R[\Omega]^2} S_b \quad (5.31)$$

où  $S_x^{fb(0)} [\Omega]$  et  $R[\Omega]$  sont respectivement le spectre lorentzien et la réduction en amplitude de la lorentzienne que l'on obtiendrait sans fond thermique et en présence de l'asservissement (éq. 5.17 et 5.19). Le spectre de bruit  $S_x^{fb}$  peut encore s'écrire sous la forme d'une lorentzienne auquel s'ajoute le fond thermique non modifié  $S_b$  :

$$S_x^{fb} [\Omega] = (1 - \varepsilon_b g(2+g)) S_x^{fb(0)} [\Omega] + S_b, \quad (5.32)$$

où  $\varepsilon_b = S_b/S_x^{T(0)}[\Omega_M]$  est le rapport, à la fréquence de résonance mécanique, entre le spectre de bruit de fond thermique et celui du mode acoustique fondamental sans asservissement (éq. 5.5).  $\varepsilon_b$  est donc l'inverse de la hauteur du pic thermique sur le fond.

Cette équation montre que le spectre reste lorentzien, avec une amplitude de la partie lorentzienne plus petite que celle attendue sans tenir compte du fond, auquel se rajoute le fond thermique qui reste inchangé. On peut vérifier que la largeur de la partie lorentzienne reste égale à  $\Gamma_{fb} = \Gamma(1+g)$ , comme on l'a vu expérimentalement au paragraphe (5.2.6.1). De même, la réduction en amplitude du bruit total (mode

fondamental plus fond) reste égale au coefficient  $R[\Omega]$ . Le bruit total pour un gain  $g$  s'écrit en effet, à partir des équations (5.19) et (5.31) :

$$S_x^{fb}[\Omega] = \frac{S_x^{T(0)}[\Omega] + S_b}{R[\Omega]^2} = \frac{S_x^T[\Omega]}{R[\Omega]^2}, \quad (5.33)$$

où  $S_x^T[\Omega] = S_x^{T(0)}[\Omega] + S_b$  représente le bruit total sans asservissement. On trouve ainsi que le spectre de bruit résultant est égal à celui obtenu sans asservissement (correspondant à la somme d'une lorentzienne et d'un fond), atténué par le facteur  $R[\Omega]^2$ . L'asservissement agit donc de la même façon sur le signal d'erreur  $\delta x$ , en présence ou en l'absence de fond : il réduit l'amplitude du signal d'erreur par un facteur  $R[\Omega]$ . Cela dit, comme  $R[\Omega]$  est maximum à résonance et vaut 1 loin de résonance, le spectre résultant apparaît lui-même comme la somme d'une lorentzienne dont l'amplitude est atténuée et d'un fond qui reste inchangé. On retrouve ainsi le résultat de l'équation (5.32). Mais l'équation (5.33) montre que la réduction en amplitude du bruit total à résonance reste égale au coefficient  $R[\Omega_M] = 1 + g$ , comme on l'a observé expérimentalement.

La température effective  $T_{fb}$  du mode fondamental peut se calculer à partir de la partie du spectre de bruit thermique qui correspond à ce mode, c'est-à-dire le premier terme de l'équation (5.32). Ainsi  $T_{fb}$  est reliée à l'aire de la lorentzienne, une fois le fond enlevé. C'est d'ailleurs de cette manière que l'on a déterminé expérimentalement les températures effectives dans le tableau de la page 179 et sur la figure 62. A partir de l'équation (5.32), on trouve que la température effective du mode fondamental est donnée par :

$$\frac{T}{T_{fb}} = \frac{1 + g}{1 - \varepsilon_b g(2 + g)}. \quad (5.34)$$

La présence d'un fond thermique ( $\varepsilon_b > 0$ ) a donc pour effet de rendre la température effective plus basse que prévue.

Le rapport  $\varepsilon_b$  est fourni expérimentalement grâce à l'ajustement lorentzien réalisé sur le spectre de bruit en l'absence de contre-réaction, ajustement qui permet d'obtenir les valeurs du fond thermique  $S_b$  et de la hauteur à résonance  $S_x^{T(0)}[\Omega_M]$  de la lorentzienne (deuxième ligne dans le tableau de la page 179). On obtient ainsi  $\varepsilon_b = 70/(1,06 \cdot 10^4) \simeq 1/150$ .

La courbe en trait plein de la figure 62 est un ajustement des points expérimentaux à l'aide de la formule (5.34). La valeur optimale de  $\varepsilon_b$  est 1/110. La courbe théorique est en excellent accord avec les points expérimentaux, pour une valeur de  $\varepsilon_b$  proche de celle mesurée expérimentalement : la prise en compte du fond thermique par ce modèle simple permet donc d'expliquer les variations observées de la température effective avec le gain de la boucle.

### 5.2.6.3 Fond thermique et équilibre thermodynamique

Nous avons montré dans la section précédente comment le fond thermique modifie le fonctionnement du processus de refroidissement. Nous avons utilisé pour cela un modèle assez phénoménologique où le fond thermique est décrit comme un bruit de position supplémentaire  $\delta x_b$  sur lequel la boucle d'asservissement n'agit pas. On peut adopter un modèle moins descriptif en supposant que le bruit de fond thermique n'est dû qu'aux autres modes acoustiques du miroir mobile. Nous avons vu dans le chapitre 4 que la réponse mécanique du miroir mobile peut être décrite par une susceptibilité effective  $\chi_{eff}$ , égale à la somme des contributions de chaque mode. Ainsi, le spectre de bruit thermique (sans asservissement) s'écrit :

$$S_x^T[\Omega] = |\chi_{eff}[\Omega]|^2 S_T[\Omega] = \frac{2 k_B T}{\Omega} \text{Im}(\chi_{eff}[\Omega]), \quad (5.35)$$

où le spectre  $S_T[\Omega]$  de la force de Langevin vérifie le théorème fluctuation-dissipation (éq. 4.47). Au voisinage de la résonance du mode fondamental, l'essentiel de la dynamique est déterminé par le mode résonnant et on peut séparer dans  $\chi_{eff}$  la contribution de ce mode de celle de tous les autres modes. Le spectre de bruit thermique apparaît alors comme la somme d'une lorentzienne associée au mode fondamental, et de la contribution de tous les autres modes, qui sur la plage de fréquence considérée peut être traitée comme un fond indépendant de la fréquence.

On peut maintenant déterminer l'effet de l'asservissement. Le déplacement résultant s'écrit :

$$\delta x[\Omega] = \chi_{eff}[\Omega] (F_{rad}[\Omega] + F_T[\Omega]), \quad (5.36)$$

où la force  $F_{rad}$  exercée par le faisceau arrière est donnée par l'équation (5.15). En reprenant le calcul effectué dans la section (5.2.1), mais pour une susceptibilité  $\chi_{eff}$  quelconque, on trouve que le mouvement du miroir s'écrit :

$$\delta x[\Omega] = \chi_{fb}[\Omega] F_T[\Omega] \quad (5.37)$$

où  $\chi_{fb}[\Omega]$  est la susceptibilité modifiée par l'asservissement :

$$\chi_{fb}[\Omega] = \frac{1}{1/\chi_{eff}[\Omega] - iM\Gamma g\Omega}. \quad (5.38)$$

A l'aide des équations (5.35) et (5.37), le spectre de bruit en présence de l'asservissement se met sous la forme :

$$S_x^{fb}[\Omega] = \left| \frac{\chi_{fb}[\Omega]}{\chi_{eff}[\Omega]} \right|^2 S_x^T[\Omega] = \left| \frac{1/\chi_{eff}[\Omega]}{1/\chi_{eff}[\Omega] - iM\Gamma g\Omega} \right|^2 S_x^T[\Omega]. \quad (5.39)$$

Au voisinage de la résonance du mode fondamental, on peut calculer à l'ordre zéro le facteur d'atténuation du bruit thermique apparaissant dans l'équation (5.39), en remplaçant  $\chi_{eff}[\Omega]$  par la lorentzienne associée au mode fondamental. On obtient alors :

$$S_x^{fb}[\Omega] = \frac{1}{R[\Omega]^2} S_x^T[\Omega], \quad (5.40)$$

où  $R[\Omega]$  a déjà été défini précédemment (éq. 5.19). On trouve ainsi le même résultat que dans la section précédente (éq. 5.33) : le spectre de bruit résultant est égal à celui obtenu sans asservissement (correspondant à la somme d'une lorentzienne et d'un fond), atténué par le facteur  $R[\Omega]^2$ . Notons que le calcul du facteur d'atténuation dans l'équation (5.39) peut être poussé à l'ordre 1, en tenant compte dans la susceptibilité  $\chi_{eff}$  des autres modes acoustiques. On obtient alors des termes correctifs par rapport à l'équation (5.32). Pour les paramètres de l'expérience (gain maximal  $g \sim 20$ , hauteur relative du fond  $\varepsilon_b \sim 100$ ), ces termes restent petits et n'induisent pas de variation notable de la courbe théorique présentée sur la figure 62.

Ce modèle permet en outre de montrer que le miroir n'est plus à l'équilibre thermodynamique en présence de contre-réaction. Pour considérer le miroir à l'équilibre thermodynamique, il faut pouvoir définir une température  $T_{fb}$  vérifiant le théorème fluctuation-dissipation :

$$S_T[\Omega] = -\frac{2k_B T_{fb}}{\Omega} \text{Im}(1/\chi_{fb}[\Omega]). \quad (5.41)$$

En utilisant les équations (4.47) et (5.38), cette condition peut s'écrire :

$$T_{fb} = T / \left[ 1 - \frac{M\Gamma g\Omega}{\text{Im}(1/\chi_{eff}[\Omega])} \right]. \quad (5.42)$$

Cette condition ne peut être satisfaite que si  $\text{Im}(1/\chi_{eff}[\Omega])$  dépend linéairement de  $\Omega$ . C'est le cas lorsque  $\chi_{eff}$  décrit la réponse d'un seul oscillateur harmonique, avec un amortissement de type visqueux, mais cela devient faux dans le cas d'un résonateur mécanique qui possède plusieurs modes acoustiques.



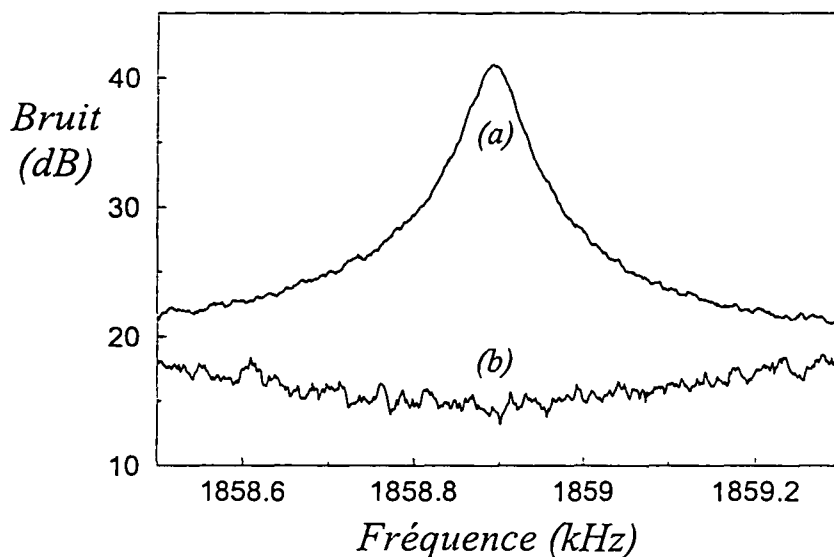


Fig. 63: Spectres de bruit de phase sur une plage de 800 Hz, obtenus en l'absence de contre-réaction (a) et pour un gain de la boucle égal à 20 (b). Les spectres sont représentés en dB et normalisés au bruit de photon standard.

Cette impossibilité de définir une température effective apparaît clairement sur l'équation (5.34) puisque la température  $T_{fb}$  peut devenir négative pour des gains élevés. Avec le paramètre  $\varepsilon_b$  obtenu expérimentalement, cette situation est atteinte pour des gains supérieurs à 10. La figure (63) présente un tel spectre de bruit, obtenu pour un gain  $g$  égal à 20. On voit que le sens de la résonance de bruit thermique est inversé, puisqu'on obtient un creux dans le spectre autour de la fréquence de résonance mécanique. Cette inversion correspond à une "température" effective négative.

### 5.3 Refroidissement à basse fréquence

On a vu que l'efficacité du mécanisme de friction froide décroît rapidement quand on s'écarte de la fréquence de résonance mécanique. Or, les applications potentielles d'un tel dispositif aux interféromètres gravitationnels, qu'on étudiera au paragraphe (5.5.3), nécessitent d'agir à des fréquences petites devant la fréquence de résonance mécanique. On va voir qu'un tel refroidissement basse fréquence est possible, en modifiant légèrement le montage expérimental.

### 5.3.1 Refroidissement en régime quasi-statique

Pour une fréquence très inférieure à celle de la résonance mécanique, la susceptibilité d'un mode acoustique du miroir devient réelle :

$$\chi[\Omega \rightarrow 0] \approx \frac{1}{M\Omega_M^2}. \quad (5.43)$$

On a écrit ici la susceptibilité d'un seul mode à basse fréquence. Il est en fait impératif, pour le comportement basse fréquence, de tenir compte de l'ensemble des modes de vibration du résonateur. Mais on a vu au chapitre 4 que dans la limite basse fréquence, le comportement d'un résonateur se ramène à celui d'un seul mode de vibration, avec une susceptibilité égale à la somme de toutes les susceptibilités basse fréquence des différents modes, pondérées par le recouvrement du mode avec la lumière [69]. On peut alors se ramener à une équation semblable à l'équation (5.43) :

$$\chi_{eff}[\Omega \rightarrow 0] \approx \frac{1}{M_{eff}\Omega_M^2}, \quad (5.44)$$

où  $M_{eff}$  est la masse effective du couplage optomécanique (voir la section 4.2.4).

À ces fréquences, le déplacement  $\delta x[\Omega]$  est donc en phase avec la force appliquée. Pour réduire le bruit thermique, on a donc intérêt à appliquer une force proportionnelle à  $\delta x[\Omega]$ . Si on pose :

$$F_{rad}[\Omega] = -\frac{g_{BF}}{\chi_{eff}[0]}\delta x[\Omega], \quad (5.45)$$

où  $g_{BF}$ , coefficient sans dimension, est là-encore relié au gain électronique de la boucle, le mouvement en présence de l'asservissement s'écrit :

$$\delta x[\Omega] = \frac{\chi_{eff}[0]}{(1 + g_{BF})}F_T. \quad (5.46)$$

Le spectre de bruit basse fréquence est réduit dans la proportion  $1/(1+g_{BF})^2$ . L'interprétation de cette diminution est immédiate : on voit à partir des équations (5.44) et (5.46) qu'on a en fait augmenté la *raideur statique* du résonateur. La force de Langevin étant inchangée, on diminue donc l'amplitude du mouvement d'agitation thermique, même si on n'a pas *stricto sensu* modifié la température du miroir. Ce résultat est ainsi à rapprocher des études effectuées pour trouver un matériau (comme le saphir) aux constantes élastiques plus favorables que la silice.

Dans cette limite basse fréquence, où le déplacement est en phase avec la force appliquée, la dynamique du miroir ne joue aucun rôle. On peut donc interpréter la

réduction de l'agitation thermique à l'aide d'un raisonnement statique : à tout instant, on modifie l'intensité du faisceau arrière pour compenser le déplacement instantané  $\delta x(t)$  donné par le signal issu de la détection homodyne. Pour  $\delta x(t) > 0$  par exemple (le miroir se rapproche du faisceau arrière), on applique une force supérieure à la force de pression de radiation moyenne pour ramener le miroir vers sa position d'équilibre, et inversement pour  $\delta x(t) < 0$ .

### 5.3.2 Choix de la fréquence et réponse mécanique

Pour réaliser cette expérience, il est nécessaire de se placer à une fréquence suffisamment basse. La figure 64 présente un spectre de bruit thermique pris sur une plage de fréquence de 10 *kHz* aux environs de 800 *kHz*, auquel est ajouté l'effet d'une force appliquée par l'intermédiaire du faisceau arrière. Ce spectre est pris sans asservissement, mais en modulant l'intensité du faisceau arrière par l'intermédiaire d'un générateur haute fréquence. On voit que le pic ne se détache que de 20 *dB* au-dessus du niveau de fond thermique. Le rapport entre le pic de modulation et le bruit thermique est donc beaucoup plus petit à basse fréquence qu'à résonance, où on obtient un rapport de l'ordre de 35 *dB* (voir les figures 41 et 42).

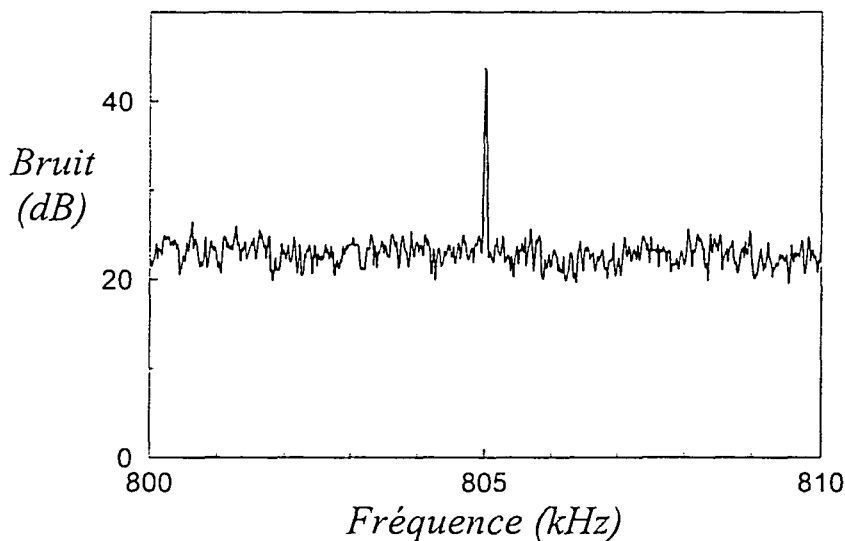


Fig. 64: Spectre de bruit de phase du faisceau réfléchi, au voisinage de 805 *kHz* avec l'effet d'une modulation du faisceau arrière. Le spectre, représenté en *dB* et normalisé au bruit de photon standard, reproduit le bruit de fond thermique à basse fréquence.

Ce résultat n'est pas parfaitement compris : le calcul théorique prévoit que ce rapport doit rester du même ordre de grandeur, et être même éventuellement plus grand à basse fréquence. En effet, on peut reprendre les calculs faits dans le chapitre 4 sur la réponse mécanique du miroir plan-convexe. Nous avons montré que l'amplitude  $a_n$  du mode acoustique  $u_n$  en présence d'une force extérieure  $F_{ext}$  s'écrit (éq. 4.35) :

$$a_n [\Omega] = \chi_n [\Omega] (\langle \mathbf{F}_{ext} [\Omega], \mathbf{u}_n \rangle + F_{T,n} [\Omega]). \quad (5.47)$$

Dans le cas où le faisceau arrière est parfaitement adapté au faisceau dans la cavité, c'est-à-dire s'il est centré et s'il a le même waist, sa force de pression de radiation est proportionnelle à la structure spatiale de l'intensité  $v_0^2(r)$  dans la cavité. En suivant le même raisonnement que dans le chapitre 4, on trouve alors le spectre du déplacement  $\hat{u}$  auquel est sensible le faisceau intracavité :

$$S_{\hat{u}} [\Omega] = |\chi_{eff} [\Omega]|^2 (S_{ext} [\Omega] + S_T [\Omega]), \quad (5.48)$$

où  $S_{ext} [\Omega]$  est le spectre de l'amplitude  $F_{ext} [\Omega] / v_0^2$  de la force engendrée par le faisceau arrière. On voit que le rapport entre le pic de modulation et le bruit thermique est directement égal à  $S_{ext}/S_T$ , qui s'écrit d'après le théorème fluctuation-dissipation (éq. 4.47) :

$$\frac{S_{ext} [\Omega]}{S_T [\Omega]} = -\frac{\Omega}{2k_B T \text{Im}(1/\chi_{eff} [\Omega])} S_{ext} [\Omega]. \quad (5.49)$$

À résonance,  $\text{Im}(1/\chi_{eff} [\Omega])$  dépend essentiellement du mode résonnant, de masse  $M_1$ , alors qu'à basse fréquence, il dépend de la masse effective  $M_{eff}$  :

$$S_{ext}/S_T [\Omega_M] = S_{ext} [\Omega_M] / (2k_B T M_1 \Gamma), \quad (5.50)$$

$$S_{ext}/S_T [\Omega \ll \Omega_M] = S_{ext} [\Omega] / (2k_B T M_{eff} \Gamma). \quad (5.51)$$

Comme la masse effective est plus petite que la masse du mode fondamental, le rapport  $S_{ext}/S_T$  devrait être plus grand à basse fréquence qu'à résonance.

On peut envisager différentes raisons pour expliquer que l'on observe expérimentalement un comportement différent :

- le calcul théorique suppose que le faisceau arrière est parfaitement adapté au faisceau intracavité. Malgré les nombreux réglages dont on dispose (baïonnette pour centrer le faisceau arrière, jeu de deux lentilles pour adapter son waist), un réglage optimal est délicat à réaliser. En cas de mauvaise adaptation, les modes acoustiques

d'ordre élevé peuvent être mal excités du fait de leur variation spatiale  $u_n(r)$  rapide. Par contre, l'excitation du mode fondamental reste inchangée tant que le décalage est inférieur au col du mode, qui est large de quelques millimètres. L'efficacité de la force de pression de radiation est donc réduite à basse fréquence ;

- étant donné leur extension spatiale, les modes acoustiques d'ordre transverse élevé sont plus sensibles aux effets de bord sur la circonférence du résonateur. Ainsi leurs caractéristiques pourraient être modifiées par la façon dont on tient le miroir. La masse effective à basse fréquence pourrait donc être différente de celle calculée théoriquement ;

- enfin, une partie du fond thermique à basse fréquence est due au coupleur d'entrée, alors que le faisceau arrière n'excite évidemment que le résonateur. Il est malheureusement difficile d'évaluer la part du miroir d'entrée, son niveau de bruit thermique dans cette plage de fréquence (au milieu d'un grand nombre de ses résonances mécaniques) dépendant énormément des facteurs de qualité de ces modes.

Quoi qu'il en soit, l'efficacité du faisceau arrière devrait être suffisante, à condition de réduire la bande passante du filtre passe-bande afin d'éviter la saturation de la boucle. Le filtre fonctionne en fait beaucoup mieux aux alentours de  $800\text{ kHz}$  qu'à  $2\text{ MHz}$  puisque nous avons pu réduire sa bande passante jusqu'à une valeur de  $70\text{ Hz}$ , ce qui correspond à un facteur de qualité du filtre électronique de l'ordre de 11000.

Sur une plage de fréquence aussi étroite, on peut considérer que la susceptibilité mécanique  $\chi_{eff}$  est constante. Par ailleurs, la fréquence choisie de  $800\text{ kHz}$  est située à  $1\text{ MHz}$  du premier mode acoustique du miroir, soit à une distance supérieure à 20000 fois la largeur de la résonance : la susceptibilité mécanique est alors essentiellement réelle. Bien que la fréquence de  $800\text{ kHz}$  semble élevée dans l'absolu, on est bien à basse fréquence par rapport aux résonances mécaniques.

### 5.3.3 Résultats expérimentaux

Le dispositif expérimental est le même que celui présenté au paragraphe (5.2.2), à l'exception du filtre électronique dont la fréquence centrale est voisine de  $800\text{ kHz}$  et la bande passante égale à environ  $70\text{ Hz}$ .

La figure 65 présente les spectres de bruit obtenus sans contre-réaction (courbe a) et en présence de l'asservissement (courbe b). On peut noter une très importante réduction du bruit, de l'ordre de  $20\text{ dB}$ , autour de la fréquence centrale du filtre.

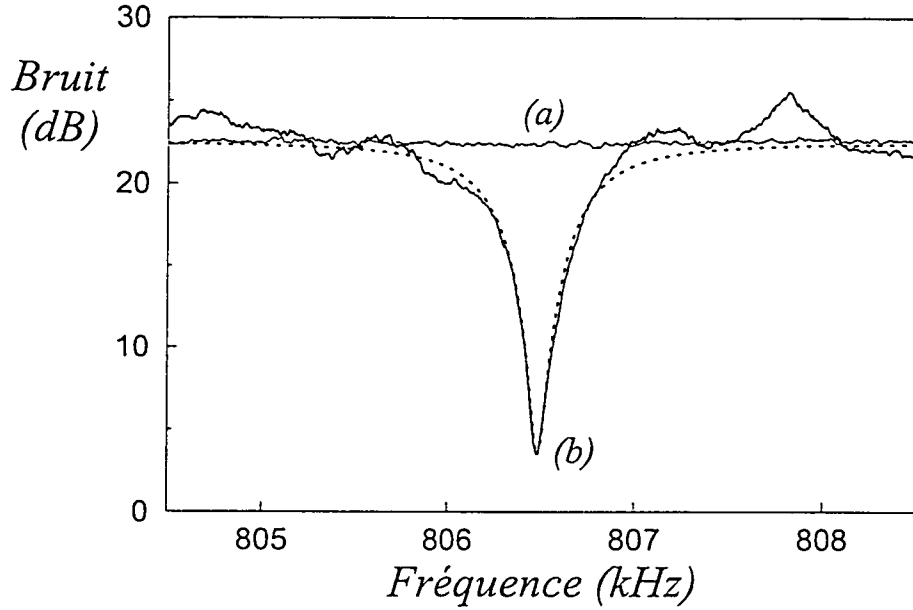


Fig. 65: Effet du refroidissement à basse fréquence. La figure présente le spectre de bruit thermique en l'absence de contre-réaction (courbe a) et celui obtenu avec la boucle d'asservissement fermée (courbe b). Les spectres sont représentés en  $dB$  et normalisés au bruit de photon standard. La courbe en pointillés est un ajustement de cette courbe d'après l'équation (5.54).

La dépendance de la réduction de bruit avec la fréquence peut se comprendre théoriquement en tenant compte du filtrage du signal par le filtre passe-bande. Le gain global  $g_{BF}$  de la boucle s'écrit en effet :

$$g_{BF} = \frac{g_0}{1 + 2i \left( \frac{\Omega - \Omega_C}{\Omega_F} \right)} \quad (5.52)$$

où  $g_0$  est le gain à la fréquence centrale  $\Omega_C$  du filtre, et  $\Omega_F$  la bande passante. En combinant les équations (5.46) et (5.52), on obtient :

$$\delta x [\Omega] = \frac{\chi_{eff} [0]}{1 + g_0 / \left[ 1 + 2i \left( \frac{\Omega - \Omega_C}{\Omega_F} \right) \right]} F_T. \quad (5.53)$$

La réduction en amplitude  $R_{BF} [\Omega]$  du bruit thermique se met alors sous la forme :

$$R_{BF} [\Omega] = \sqrt{\frac{(1 + g_0)^2 + 4 \left( \frac{\Omega - \Omega_C}{\Omega_F} \right)^2}{1 + 4 \left( \frac{\Omega - \Omega_C}{\Omega_F} \right)^2}}. \quad (5.54)$$

La courbe en pointillés sur le spectre présente la réduction de bruit attendue  $R_{BF} [\Omega]^2$ . Il faut noter que le seul paramètre ajustable de cette courbe est la réduction de bruit au centre du filtre, la bande passante et la fréquence centrale du filtre électronique ayant été mesurées indépendamment. L'accord avec la courbe expérimentale est ainsi extrêmement satisfaisant. Les légères augmentations observées de part et d'autre du creux de la courbe de bruit sont certainement dues à des déphasages incontrôlés de la boucle d'asservissement.

La réduction maximale obtenue à la fréquence centrale du filtre est de l'ordre de  $R_{BF} = 10$ . Cela correspond à une réduction par un facteur 100 de la puissance de bruit thermique du miroir.

#### 5.4 Reproduction de l'article "Cooling of a mirror by radiation pressure"

L'article qui suit est reproduit de la référence *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3174 (1999). Il présente l'ensemble de nos résultats expérimentaux sur l'expérience de refroidissement par pression de radiation.

## Cooling of a Mirror by Radiation Pressure

P. F. Cohadon,\* A. Heidmann,<sup>†</sup> and M. Pinard<sup>‡</sup>*Laboratoire Kastler Brossel,<sup>§</sup> Case 74, 4 place Jussieu, F75252 Paris Cedex 05, France*

(Received 30 March 1999; revised manuscript received 24 June 1999)

We describe an experiment in which a mirror is cooled by the radiation pressure of light. A high-finesse optical cavity with a mirror coated on a mechanical resonator is used as an optomechanical sensor of the Brownian motion of the mirror. A feedback mechanism controls this motion via the radiation pressure of a laser beam reflected on the mirror. We have observed either a cooling or a heating of the mirror, depending on the gain of the feedback loop.

PACS numbers: 42.50.Lc, 04.80.Nn, 05.40.Jc

Thermal noise is a basic limit for many very sensitive optical measurements such as interferometric gravitational-wave detection [1–3]. Brownian motion of suspended mirrors can be decomposed into suspension and internal thermal noises. The latter is due to thermally induced deformations of the mirror surface and constitutes the major limitation of gravitational-wave detectors in the intermediate frequency domain [4,5]. Observation and control of this noise have thus become an important issue in precision measurements [6–8]. In order to reduce thermal noise effects, it is not always possible to lower the temperature and other techniques have been proposed, such as feedback control [9].

In this Letter we report the first experimental observation of the cooling of a mirror by feedback control. The principle of the experiment is to detect the Brownian motion of the mirror with an optomechanical sensor and then to freeze the motion by applying an electronically controlled radiation pressure on the mirror. Mechanical effects of light on macroscopic objects have already been observed, such as the dissipative effects of electromagnetic radiation [10], the optical bistability and mirror confinement in a cavity induced by radiation pressure [11], or the regulation of the mechanical response of a microcantilever by feedback via the photothermal force [12]. In our experiment the radiation pressure is driven by the feedback loop in such a way that a viscous force is applied to the mirror. It thus plays a role somewhat similar to the one in optical molasses for atoms.

The cooling mechanism can be understood from the experimental setup shown in Fig. 1. The mirror is used as the rear mirror of a single-ended Fabry-Pérot cavity. The phase of the field reflected by the cavity is very sensitive to changes in the cavity length [13–15]. For a resonant cavity, a displacement  $\delta x$  of the rear mirror induces a phase shift  $\delta\varphi_x$  of the reflected field on the order of

$$\delta\varphi_x \approx \frac{8\mathcal{F}}{\lambda} \delta x, \quad (1)$$

where  $\mathcal{F}$  is the cavity finesse and  $\lambda$  is the optical wavelength. This signal is superimposed to the quantum phase noise of the reflected beam. Provided that the cavity finesse is high enough, this quantum noise is

negligible and the Brownian motion of the mirror can be detected by measuring the phase of the reflected field [15].

To cool the mirror we use an auxiliary laser beam reflected from the back on the mirror. This beam is intensity modulated by an acousto-optic modulator driven by the feedback loop so that a modulated radiation pressure is applied to the mirror. The resulting motion can be described by its Fourier transform  $\delta x[\Omega]$  at frequency  $\Omega$  which is proportional to the applied forces

$$\delta x[\Omega] = \chi[\Omega] (F_T[\Omega] + F_{\text{rad}}[\Omega]), \quad (2)$$

where  $\chi[\Omega]$  is the mechanical susceptibility of the mirror. If we assume that the mechanical response is harmonic, this susceptibility has a Lorentzian shape

$$\chi[\Omega] = \frac{1}{M(\Omega_M^2 - \Omega^2 - i\Gamma\Omega)}, \quad (3)$$

characterized by a mass  $M$ , a resonance frequency  $\Omega_M$ , and a damping  $\Gamma$  related to the quality factor  $Q$  of the mechanical resonance by  $\Gamma = \Omega_M/Q$ .

The force  $F_T$  in Eq. (2) is a Langevin force responsible for the Brownian motion of the mirror. At thermal equilibrium its spectrum  $S_{F_T}[\Omega]$  is related to the mechanical

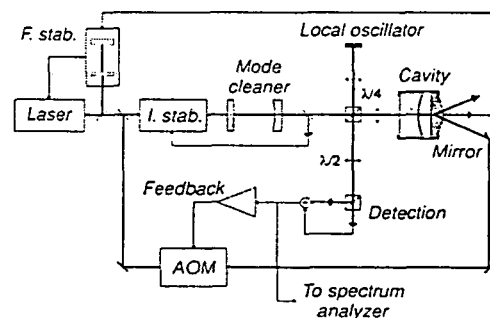


FIG. 1. Experimental setup. The Brownian motion of the mirror is detected with a high-finesse cavity. A frequency (F. stab.) and intensity (I. stab.) stabilized light beam is sent into the cavity, and the phase of the reflected field is measured by homodyne detection. This signal is fed back to the mirror via the radiation pressure exerted by a beam with modulated intensity (AOM).



susceptibility by the fluctuation-dissipation theorem

$$S_{F_T}[\Omega] = -\frac{2k_B T}{\Omega} \text{Im} \left( \frac{1}{\chi[\Omega]} \right) = 2M\Gamma k_B T, \quad (4)$$

where  $T$  is the temperature. The resulting thermal noise spectrum  $S_x^T[\Omega]$  of the mirror motion has a Lorentzian shape centered at frequency  $\Omega_M$  and of width  $\Gamma$ .

The second force  $F_{\text{rad}}$  in Eq. (2) is the radiation pressure exerted by the auxiliary laser beam and modulated by the feedback loop. Neglecting the quantum phase noise in the control signal, this force is proportional to the displacement  $\delta x$  of the mirror [Eq. (1)]. We choose the feedback gain in such a way that the radiation pressure is proportional to the speed  $v = i\Omega \delta x$  of the mirror

$$F_{\text{rad}}[\Omega] = iM\Omega g \delta x[\Omega], \quad (5)$$

where  $g$  is related to the electronic gain. The radiation pressure exerted by the auxiliary laser beam thus corresponds to an additional viscous force for the mirror. The resulting motion is given by

$$\delta x[\Omega] = \frac{1}{M[\Omega_M^2 - \Omega^2 - i(\Gamma + g)\Omega]} F_T[\Omega]. \quad (6)$$

This equation is similar to the one obtained without feedback [Eq. (2) with  $F_{\text{rad}} = 0$ ] except that the radiation pressure changes the damping without adding any fluctuations. The noise spectrum  $S_x^{fb}[\Omega]$  of the mirror motion still has a Lorentzian shape but with a different width  $\Gamma_{fb} = \Gamma + g$  and a different height. The variation of height can be characterized by the amplitude noise reduction  $\mathcal{R}$  at resonance frequency

$$\mathcal{R} = \sqrt{\frac{S_x^T[\Omega_M]}{S_x^{fb}[\Omega_M]}} = \frac{\Gamma_{fb}}{\Gamma} = \frac{\Gamma + g}{\Gamma}. \quad (7)$$

The resulting motion is then equivalent to a thermal equilibrium at a different temperature  $T_{fb}$  which can be either reduced or increased depending on the sign of the gain  $g$

$$\frac{T_{fb}}{T} = \frac{\Gamma}{\Gamma_{fb}} = \frac{\Gamma}{\Gamma + g}. \quad (8)$$

We now describe our experiment. The mirror is coated on the plane side of a small plano-convex mechanical resonator made of silica (Fig. 1). The coating has been made at the *Institut de Physique Nucléaire de Lyon* on a 1.5 mm thick substrate with a diameter of 14 mm and a curvature radius of the convex side of 100 mm. Internal acoustic modes correspond to Gaussian modes confined around the central axis of the resonator [16,17]. The fundamental mode studied in this paper is a compression mode with a waist equal to 3.4 mm and a resonance frequency close to 2 MHz [15,17]. The front mirror of the cavity is a *Newport high-finesse SuperMirror* (curvature radius = 1 m, transmission = 50 ppm) held at 1 mm from the rear mirror. We have measured the following parameters of the cavity: free spectral range = 141 GHz, cavity bandwidth = 1.9 MHz, beam waist = 90  $\mu\text{m}$ . These values correspond to a finesse  $\mathcal{F}$  of 37 000.

The light entering the cavity is provided by a titane-sapphire laser working at 810 nm and frequency locked to a stable external cavity which is locked to a resonance of the high-finesse cavity by monitoring the residual light transmitted by the rear mirror. The beam is intensity stabilized and spatially filtered by a mode cleaner. One gets a 100  $\mu\text{W}$  incident beam on the high-finesse cavity with a mode matching of 98%. The phase of the field reflected by the cavity is measured by homodyne detection. The reflected field is mixed with a 10 mW local oscillator and a servoloop monitors the length of the local oscillator arm so that we measure the phase fluctuations of the reflected field. This signal is sent both to the feedback loop and to a spectrum analyzer.

The feedback loop consists of an amplifier with variable gain and phase which drives the acousto-optic modulator. The 500 mW auxiliary beam is uncoupled from the high-finesse cavity by a frequency shift of the acousto-optic modulator (200 MHz) and by a tilt angle of  $10^\circ$  with respect to the cavity axis. We have checked that this beam has no spurious effect on the homodyne detection. A bandpass filter centered at the fundamental resonance frequency of the mirror is also inserted in the feedback loop to reduce its saturation. For large gains, the radiation pressure  $F_{\text{rad}}$  can become of the same order as the Langevin force  $F_T$ , and it must be restricted in frequency in order to get a finite variance. The electronic filter has a quality factor of 200 and limits the efficiency of the feedback loop to a bandwidth of 9 kHz around the fundamental resonance frequency.

Figure 2 shows the phase noise spectrum of the reflected field obtained by an average of 1000 scans of the spectrum analyzer with a resolution bandwidth of 10 Hz. Curve *a* is obtained at room temperature without feedback. It reproduces the thermal noise spectrum  $S_x^T[\Omega]$  of the mirror which is peaked around the fundamental

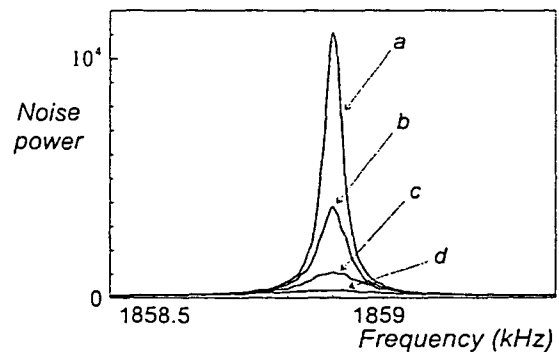


FIG. 2. Phase noise spectrum of the reflected field normalized to the shot-noise level for a frequency span of 1 kHz around the fundamental resonance frequency of the mirror. The peak reflects the Brownian motion of the mirror without feedback (*a*) and with feedback for increasing gains (*b*) to (*d*).

resonance frequency (1858.9 kHz) with a width  $\Gamma/2\pi$  of 45 Hz (mechanical quality factor  $Q \approx 40\,000$ ). The spectrum is normalized to the shot-noise level, and it clearly appears that the thermal noise is much larger than the quantum phase noise [15].

Curves *b* to *d* are obtained with feedback for increasing electronic gains. The phase of the amplifier is adjusted to maximize the correction at resonance. From Eqs. (5) and (6) this corresponds to a global imaginary gain for the loop and to a purely viscous radiation pressure force. The control of the mirror motion is clearly visible on those curves. The thermal peak is strongly reduced while its width is increased. The amplitude noise reduction  $\mathcal{R}$  at resonance is larger than 20 for large gains.

The effective temperature  $T_{fb}$  can be deduced from the variance  $\Delta x^2$  of the mirror motion which is equal to the integral of the spectrum  $S_x^{fb}[\Omega]$ . From Eqs. (4), (6), and (8) one gets the usual relation for a harmonic oscillator at thermal equilibrium

$$\frac{1}{2} M \Omega_M^2 \Delta x^2 = \frac{1}{2} k_B T_{fb}. \quad (9)$$

The decrease of the area of the thermal peak observed in Fig. 2 thus corresponds to a cooling of the mirror.

Figure 3 shows the effect of feedback for a reverse gain ( $g < 0$ ). Noise spectra are obtained by an average of 500 scans with a resolution bandwidth of 1 Hz. Curve *b* exhibits a strong increase of the thermal peak which now corresponds to a heating of the mirror. The feedback also reduces the damping from  $\Gamma$  to  $\Gamma - |g|$ , thus increasing the quality factor of the resonance. We have obtained a maximum effective quality factor of  $2.2 \times 10^6$  ( $\Gamma_{fb} \approx \Gamma/50$ ), limited by the saturation of the feedback loop.

It is instructive to study the efficiency of the cooling or heating mechanism with respect to the gain of the feedback loop. Figure 4 shows the variation of the damping  $\Gamma_{fb}/\Gamma$ , of the amplitude noise reduction  $\mathcal{R}$  at

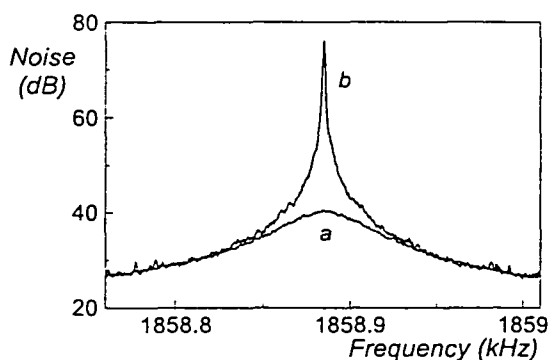


FIG. 3. Phase noise spectrum of the reflected field in dB scale normalized to the shot-noise level for a frequency span of 250 Hz, without feedback (*a*) and with feedback for a negative gain (*b*).

resonance, and of the cooling factor  $T/T_{fb}$ , as a function of the feedback gain. These parameters are derived from the experimental spectra by Lorentzian fits which give the width and the area of the thermal peak, the latter being related to the effective temperature by Eq. (9). To measure the feedback gain, we detect the intensity of the auxiliary beam after reflection on the mirror. The ratio between the modulation spectrum of this intensity at frequency  $\Omega_M$  and the noise spectrum  $S_x^{fb}[\Omega_M]$  is proportional to the gain  $g$ . This measurement takes into account any nonlinearity of the gain due to a possible saturation of the acousto-optic modulator.

As expected from Eqs. (6) and (7), the damping and the amplitude noise reduction  $\mathcal{R}$  have a linear dependence with the gain, as well for cooling ( $g > 0$ ) as for heating ( $g < 0$ ). The straight line in Fig. 4 is in excellent agreement with experimental data and allows one to normalize the gain  $g$  to the damping  $\Gamma$ , as this has been done in the figure.

This figure also shows that large cooling factors  $T/T_{fb}$  can be obtained. This cooling factor does not, however, evolve linearly with the gain as it would be expected from Eq. (8). This is due to the presence of a background thermal noise visible in Fig. 2. This noise is related to all other acoustic modes of the mirror and to the thermal noise of the coupling mirror of the cavity. The feedback loop does not have the same effect on this noise and on the fundamental thermal peak. The solid curve in Fig. 4 corresponds to a theoretical model in which the background noise is assumed to be unchanged by the feedback. As a consequence, only the fundamental mode is cooled at a temperature  $T_{fb}$ , whereas all other modes stay in thermal equilibrium at the initial temperature  $T$ . The resulting cooling factor  $T/T_{fb}$  is in excellent agreement with experimental data.

The cooling mechanism is not limited to the mechanical resonance frequencies. Figure 5 shows the cooling obtained at frequencies well below the fundamental

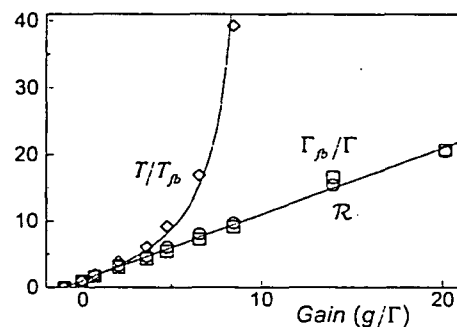


FIG. 4. Variation of the damping  $\Gamma_{fb}/\Gamma$  (squares), of the amplitude noise reduction  $\mathcal{R}$  at resonance (circles), and of the cooling factor  $T/T_{fb}$  (diamonds), as a function of the feedback gain  $g$  normalized to  $\Gamma$ . Solid curves are theoretical results.

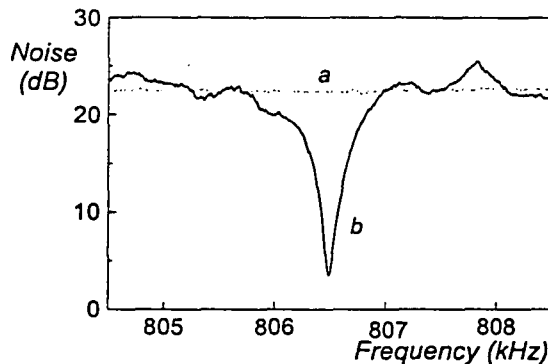


FIG. 5. Cooling far from resonance (800 kHz). The background thermal noise (*a*) is reduced in the presence of feedback (*b*). Curves represent the phase noise spectra of the reflected field in dB scale normalized to the shot-noise level.

resonance frequency. The electronic filter is now centered around 800 kHz and the feedback loop reduces the background thermal noise (curve *a*). The width of the noise reduction (curve *b*) is related to the filter bandwidth. The phase and the gain of the feedback loop have been adjusted since the electronic gain  $g$  has now to be compared to the real part  $M\Omega_M^2$  of the inverse of the mechanical susceptibility at low frequency [Eq. (6)]. Note that the amplitude of the radiation pressure exerted by the auxiliary laser beam is, however, approximately the same as in the resonant case. Large noise reduction is actually obtained when the radiation pressure  $F_{rad}$  is on the order of the Langevin force  $F_T$  whose amplitude is independent of frequency [Eq. (2)].

In conclusion, we have observed a thermal noise reduction by a factor of 20 near the fundamental resonance frequency. The radiation pressure exerted by the feedback loop corresponds to a viscous force which increases the damping of the mirror without adding thermal fluctuations. For large gains, the thermal peak of the fundamental mode becomes of the same order as the background thermal noise and no global thermal equilibrium is reached. As far as an effective temperature can be defined for the fundamental mode, we have obtained a reduction of this temperature by a factor of 40. We have also observed a heating of the mirror for reverse feedback gains, and a cooling of the background thermal noise at low frequencies.

The cooling mechanism demonstrated in this paper may be useful to increase the sensitivity of gravitational-wave interferometers. The main difficulty is to freeze the thermal noise without changing the effect of the signal. We propose in Fig. 6 a possible scheme to control the thermal noise of one mirror of the interferometer. A cavity performs a local measurement of the mirror motion which is fed back to the mirror via the radiation pressure of a laser beam. The coupling mirror of the cavity is a

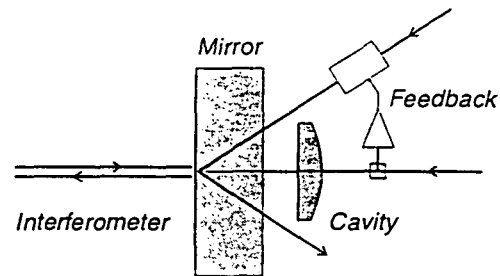


FIG. 6. Application of the cooling mechanism to reduce the thermal noise in a gravitational-wave interferometer.

small plano-convex mirror with a high mechanical resonance frequency and a low background thermal noise at low frequency. As a consequence the cavity measures the thermal noise of the mirror of the interferometer. For a short cavity, this measurement is not sensitive to a gravitational wave and the cooling can reduce the background thermal noise at the gravitational-wave frequencies without changing the response of the interferometer.

\*Email address: cohaddon@spectro.jussieu.fr

†Email address: heidmann@spectro.jussieu.fr

‡Email address: pinard@spectro.jussieu.fr

<sup>§</sup>Laboratoire de l'Université Pierre et Marie Curie et de l'École Normale Supérieure associé au Centre National de la Recherche Scientifique

- [1] P. R. Saulson, Phys. Rev. D 42, 2437 (1990).
- [2] C. Bradaschia *et al.*, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A 289, 518 (1990).
- [3] A. Abramovici *et al.*, Science 256, 325 (1992).
- [4] F. Bondu and J. Y. Vinet, Phys. Lett. A 198, 74 (1995).
- [5] A. Gillespie and F. Raab, Phys. Rev. D 52, 577 (1995).
- [6] V. B. Braginsky, M. L. Gorodetsky, V. S. Ilchenko, and S. P. Vyatchanin, Phys. Lett. A 179, 244 (1993).
- [7] M. Bernardini *et al.*, Phys. Lett. A 243, 187 (1998).
- [8] D. Rugar and P. Grütter, Phys. Rev. Lett. 67, 699 (1991).
- [9] S. Mancini, D. Vitali, and P. Tombesi, Phys. Rev. Lett. 80, 688 (1998).
- [10] V. B. Braginski, A. B. Manukin, and M. Yu. Tikhonov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 58, 1549 (1970) [Sov. Phys. JETP 31, 829 (1970)].
- [11] A. Dorsel, J. D. McCullen, P. Meystre, E. Vignes, and H. Walther, Phys. Rev. Lett. 51, 1550 (1983).
- [12] J. Mertz, O. Marti, and J. Mlynek, Appl. Phys. Lett. 62, 2344 (1993).
- [13] N. Mio and K. Tsubono, Appl. Opt. 34, 186 (1995).
- [14] I. Tittonen *et al.*, Phys. Rev. A 59, 1038 (1999).
- [15] Y. Hadjar, P. F. Cohaddon, C. G. Aminoff, M. Pinard, and A. Heidmann, Europhys. Lett. 47, 545 (1999).
- [16] C. J. Wilson, J. Phys. D 7, 2449 (1974).
- [17] M. Pinard, Y. Hadjar, and A. Heidmann, Eur. Phys. J. D 7, 107 (1999).

## 5.5 Prolongements

Nous avons décrit dans ce chapitre les études que nous avons menées sur le refroidissement d'un miroir par la pression de radiation, qu'il s'agisse d'un processus de friction froide utilisé pour modifier l'amortissement du miroir au voisinage d'une fréquence de résonance mécanique, ou de la boucle d'asservissement qui permet de modifier la raideur à basse fréquence. Nous présentons maintenant quelques prolongements de ce travail.

Tout d'abord, le modèle théorique décrit dans la section (5.2.1) prédit que le processus de friction froide permet de réduire la température effective du miroir jusqu'à des valeurs arbitrairement basses. Nous montrons (section 5.5.1) que la prise en compte du bruit quantique limite la température à une valeur minimale. Cependant, nous verrons que le refroidissement peut être rendu arbitrairement efficace en réduisant le bruit de phase de la mesure.

Nous examinons dans la section (5.5.2) un problème assez différent, qui est la possibilité de refroidir le miroir sans faisceau arrière et sans boucle électronique. Il s'agit d'utiliser la réponse de la cavité aux déplacements du miroir mobile pour réaliser un *self-cooling* du miroir par la pression de radiation du champ dans la cavité. Enfin, nous esquissons dans la section (5.5.3) les possibilités d'application du refroidissement aux interféromètres gravitationnels.

### 5.5.1 Limite quantique du refroidissement

L'étude théorique effectuée dans la section (5.2.1) peut laisser penser que, dans le cas où le mouvement du miroir est harmonique (donc sans fond thermique), la température du miroir peut être rendue arbitrairement petite (voir l'équation 5.22). En fait, il n'en est rien : en l'absence de bruit de fond thermique, le déplacement  $\delta x$  du miroir peut être réduit, mais, à partir d'un certain gain  $g$ , le bruit de phase du faisceau incident n'est plus négligeable devant le bruit de phase induit par l'agitation thermique du miroir, et on ne peut plus considérer que la détection homodyne fournit un signal proportionnel à  $\delta x$ .

D'après l'équation (2.48), le système de détection fournit un signal proportionnel à :

$$\delta q^{out} [\Omega] \propto \delta x [\Omega] + \frac{\lambda}{16\mathcal{F}\sqrt{I^{in}}}\delta q^{in} [\Omega]. \quad (5.55)$$

Pour obtenir cette équation, on a supposé que la fréquence d'analyse  $\Omega$  est petite devant la bande passante de la cavité, ce qui simplifie les calculs intermédiaires mais ne modifie pas le résultat final. En présence de la boucle d'asservissement, on applique au miroir par l'intermédiaire du faisceau arrière une force égale à :

$$F_{rad} [\Omega] = iMg\Gamma\Omega \left[ \delta x [\Omega] + \frac{\lambda}{16\mathcal{F}\sqrt{I^{in}}} \delta q^{in} [\Omega] \right]. \quad (5.56)$$

La force de pression de radiation est donc la somme du terme utile, proportionnel à  $\delta x$ , et d'un terme quantique associé au bruit dans la mesure, et correspondant en fait à la limite de sensibilité  $\delta x_{shot}$  de la mesure (voir éq. 2.52). On néglige pour le moment l'effet des fluctuations quantiques de la pression de radiation du faisceau intracavité et du faisceau arrière. Dans ce cas, le mouvement du miroir ne dépend toujours que de la force de Langevin  $F_T$  et de  $F_{rad}$  (éq. 5.14) :

$$\delta x [\Omega] = \chi [\Omega] (F_T [\Omega] + F_{rad} [\Omega]). \quad (5.57)$$

En présence de l'asservissement, le mouvement du miroir vérifie alors :

$$\delta x [\Omega] = \frac{1}{M(\Omega_M^2 - \Omega^2 - i\Gamma\Omega)} \left[ F_T [\Omega] + iMg\Gamma\Omega \left( \delta x [\Omega] + \frac{\lambda}{16\mathcal{F}\sqrt{I^{in}}} \delta q^{in} [\Omega] \right) \right], \quad (5.58)$$

et on obtient finalement :

$$\delta x [\Omega] = \frac{F_T [\Omega]}{M[\Omega_M^2 - \Omega^2 - i\Gamma(1+g)\Omega]} + \frac{iMg\Gamma\Omega}{M[\Omega_M^2 - \Omega^2 - i\Gamma(1+g)\Omega]} \frac{\lambda}{16\mathcal{F}\sqrt{I^{in}}} \delta q^{in} [\Omega]. \quad (5.59)$$

La boucle d'asservissement modifie toujours l'amortissement du miroir, mais elle introduit en même temps une deuxième force aléatoire qui entraîne des fluctuations supplémentaires du déplacement du miroir.

Pour un gain  $g$  tendant vers l'infini, on voit immédiatement que le mouvement du miroir tend vers :

$$\delta x [\Omega] \longrightarrow -\frac{\lambda}{16\mathcal{F}\sqrt{I^{in}}} \delta q^{in} [\Omega] = -\delta x_{shot} [\Omega]. \quad (5.60)$$

Ce résultat était prévisible, puisque le signal d'erreur de l'asservissement est égal à  $\delta x [\Omega] + \delta x_{shot} [\Omega]$ , et qu'il n'est pas possible de discriminer entre la composante d'agitation thermique et le bruit de photon. On obtient donc le résultat très simple

qu'à la limite d'un gain infini de la boucle de contre-réaction, le mouvement d'agitation thermique résiduel du miroir est égal à la limite de sensibilité de l'expérience. Notons que le mouvement résultant (éq. 5.59) est assez similaire à celui qu'on avait obtenu en présence d'un fond thermique (éq. 5.30) : de la même manière, lorsque le gain est suffisamment élevé pour que le pic de bruit thermique devienne du même ordre de grandeur que le bruit quantique  $\delta x_{shot}$  de la mesure, le miroir n'est plus à l'équilibre thermodynamique et on ne peut plus définir de température effective. On a donc une limite quantique du processus de refroidissement, qu'on ne peut pas décrire par une valeur limite de la température effective, mais qui correspond à un mouvement résiduel du miroir égal à  $\delta x_{shot}$ .

La figure 66 présente le spectre de bruit de position du miroir  $S_x^{fb}[\Omega]$  pour plusieurs valeurs du gain  $g$  de la boucle. Au fur et à mesure qu'on augmente le gain, le pic de bruit thermique s'élargit et son amplitude décroît. A la limite d'un gain  $g$  infini, on obtient un spectre qui reproduit le bruit de photon de la mesure et ne dépend plus de la fréquence (niveau 0 dB sur la figure 66).

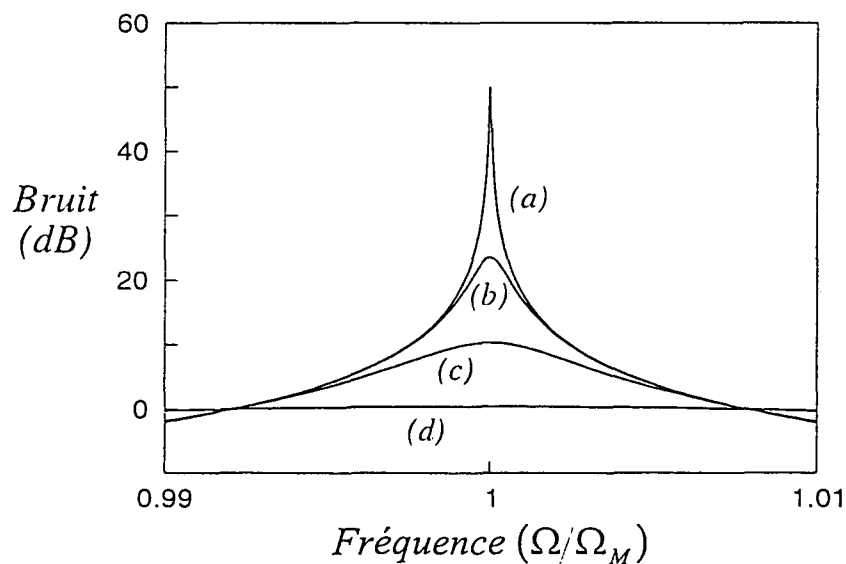


Fig. 66: Effet du bruit quantique de la mesure sur le processus de refroidissement. Les courbes représentent le bruit de position  $S_x^{fb}[\Omega]$  du miroir, normalisé au bruit de photon standard de la mesure. Elles sont tracées pour un oscillateur de facteur de qualité  $Q = 20\,000$ , et pour les valeurs successives 0, 20, 100 et 1000 (courbes a à d) du gain  $g$  de la boucle. Pour des gains élevés, le spectre de bruit tend à toutes les fréquences vers le bruit de photon standard.

La limite quantique du processus de refroidissement est donc la limite de sensibilité de la mesure, qui décroît comme  $1/\sqrt{I^{in}}$ . On peut donc abaisser cette limite en augmentant l'intensité incidente sur la cavité. Cela dit, pour des intensités élevées, il faut évaluer l'influence des fluctuations quantiques de la pression de radiation dont on a vu au chapitre 2 qu'elles peuvent limiter la sensibilité de la détection.

Les fluctuations quantiques de la pression de radiation intracavité apparaissent comme une force supplémentaire agissant sur le miroir. On en tient compte en l'ajoutant à l'équation (5.57) qui décrit la réponse du miroir. Cette force a donc un effet similaire à celui de la force de Langevin. Elle apparaît alors dans l'équation décrivant le mouvement résultant du miroir (éq. 5.59) sur le même plan que la force de Langevin thermique, et son influence sur le spectre de bruit  $S_x^{fb}[\Omega]$  est donc nulle pour un gain  $g$  tendant vers l'infini.

En d'autres termes, cette force de pression de radiation se trouve à l'intérieur de la boucle de contre-réaction et elle est contrôlée par la boucle. Il en est d'ailleurs de même pour les fluctuations quantiques de la pression de radiation du faisceau arrière. Pour toute valeur de l'intensité incidente moyenne  $\bar{I}^{in}$ , la limite du processus de refroidissement est uniquement la limite imposée par le bruit quantique de phase du faisceau incident, et  $\delta x$  tend vers  $\delta x_{shot}$  dans la limite où le gain de la boucle tend vers l'infini. Cette limite peut être rendue arbitrairement petite en augmentant l'intensité du faisceau envoyé dans la cavité à miroir mobile : il n'y a donc aucune Limite Quantique Standard pour ce processus de refroidissement.

Notons enfin que la mise en évidence expérimentale de ces effets est délicate. La figure 66 représente le bruit de position réel du miroir, et non le résultat de la mesure par la cavité. Il faut donc être capable de mesurer ce bruit de position, et la mesure du signal d'erreur n'est pas une solution satisfaisante : ce signal, égal à  $\delta x + \delta x_{shot}$ , est toujours réduit par l'asservissement et tend vers zéro pour de grands gains. On peut observer un effet inverse sur le bruit de position, lorsque le bruit thermique en l'absence d'asservissement est inférieur au bruit de photon, ce qui est le cas sur les ailes de la résonance pour la figure 66 : l'asservissement augmente alors le bruit de position, pour ramener  $\delta x$  vers le bruit de photon.

On peut penser à utiliser deux faisceaux dans la cavité, l'un servant à fournir le signal d'erreur et l'autre permettant de mesurer indépendamment la position du miroir. On obtient alors le bruit de position  $S_x[\Omega]$  auquel s'ajoute le bruit de phase du faisceau de mesure. Ici encore, il n'existe pas de Limite Quantique Standard, la pression de radiation de ce second faisceau étant contrôlée par la boucle d'asservissement.

### 5.5.2 Refroidissement du miroir par la cavité

On a déjà vu au chapitre 2 que la force de pression de radiation intracavité peut avoir des effets importants sur le mouvement du miroir mobile, jusqu'à rendre la cavité bistable pour des intensités incidentes importantes. On peut se demander si l'action mécanique du champ intracavité ne peut pas modifier la dynamique du miroir, et même le refroidir.

#### 5.5.2.1 Pression de radiation intracavité

On va supposer ici que le bruit thermique est grand devant le bruit quantique, ce qui va nous permettre de simplifier la description du mécanisme de refroidissement : la prise en compte des fluctuations quantiques entraînerait simplement une limite quantique à ce mécanisme. Par contre, nous allons voir qu'il est nécessaire de se placer à un désaccord  $\bar{\Psi}$  non nul de la cavité. L'évolution du champ  $\alpha$  dans la cavité est alors décrite par l'équation (2.9), où on néglige les fluctuations quantiques  $\delta\alpha^{in}$  du champ incident. On obtient ainsi l'équation donnant les fluctuations du champ intracavité :

$$(\gamma - i\bar{\Psi} - i\Omega\tau) \delta\alpha[\Omega] = 2ik\bar{\alpha} \delta x[\Omega]. \quad (5.61)$$

Le mouvement du miroir dépend de la force de Langevin thermique  $F_T$  et de la force de pression de radiation intracavité  $F_{rad}$ . On a ainsi les équations (en supposant  $\bar{\alpha}$  réel) :

$$\delta x[\Omega] = \chi[\Omega] (F_T[\Omega] + \delta F_{rad}[\Omega]), \quad (5.62)$$

$$\delta F_{rad}[\Omega] = 2\hbar k\bar{\alpha} \delta p[\Omega], \quad (5.63)$$

où  $\delta p$  sont les fluctuations d'amplitude du champ intracavité. A partir des équations (5.61), (5.63) et de la définition (2.17) du déphasage non-linéaire  $\Psi_{NL}$ , la force  $\delta F_{rad}$  exercée par le champ sur le miroir se met sous la forme :

$$\delta F_{rad}[\Omega] = -2 \frac{\Psi_{NL}\bar{\Psi}}{\gamma^2 + \bar{\Psi}^2} \frac{\delta x[\Omega]}{\chi[0]} \left[ \frac{\gamma^2 + \bar{\Psi}^2}{(\gamma - i\Omega\tau)^2 + \bar{\Psi}^2} \right]. \quad (5.64)$$

On constate que la seule dépendance en fréquence est due au dernier terme entre crochets. Ce terme décrit la réponse dynamique de la cavité, qui vaut 1 à basse fréquence et décroît, mais en devenant complexe, pour des fréquences supérieures ou de l'ordre de la bande passante  $\Omega_{cav} = \gamma/\tau$  de la cavité. Les autres termes décrivent la réponse



statique de la cavité qui dépend du déphasage non-linéaire  $\Psi_{NL}$  et du désaccord  $\bar{\Psi}$ . On peut écrire ces termes sous la forme :

$$\delta F_{rad}[\Omega \rightarrow 0] = -2 \frac{\Psi_{NL} \bar{\Psi}}{\gamma^2 + \bar{\Psi}^2} \frac{\delta x[\Omega]}{\chi[0]} = 2 \hbar k \frac{d\bar{I}}{dx} \delta x[\Omega], \quad (5.65)$$

où  $d\bar{I}/dx$  est la pente du pic d'Airy, qui donne la variation d'intensité intracavité lors d'un déplacement du miroir. On a en effet :

$$\bar{I} = 2\gamma \bar{I}^{in} / (\gamma^2 + \bar{\Psi}^2), \quad (5.66)$$

avec  $\bar{\Psi} = \Psi_0 + 2kx$  (voir les équations 2.16 à 2.18).  $\delta F_{rad}[\Omega \rightarrow 0]$  apparaît ainsi comme la variation de la pression de radiation intracavité moyenne  $F_{rad} = 2 \hbar k \bar{I}$  lors d'un déplacement du miroir. L'interprétation de l'équation (5.65) à basse fréquence ( $\Omega \ll \Omega_{cav}$ ) est très simple. Un petit déplacement du miroir mobile peut modifier l'intensité intracavité, et donc la force de pression de radiation associée. Le signe de cette force varie avec le flanc du pic d'Airy : l'effet du champ peut donc se traduire par une force de rappel supplémentaire, ou par une force répulsive, qui tend à écarter le miroir de la résonance. La force s'annule à résonance : on est alors au sommet du pic d'Airy et l'intensité intracavité n'est pas sensible à de petits déplacements du miroir.

Pour une fréquence quelconque, on retrouve une force proportionnelle à  $\delta x$  (éq. 5.64), le coefficient de proportionnalité étant complexe : l'effet de filtrage par la cavité permet notamment d'obtenir une force en quadrature avec le mouvement, qui peut donc refroidir le miroir.

### 5.5.2.2 Refroidissement du miroir

On va maintenant utiliser l'expression (5.65) de la force de pression de radiation intracavité pour étudier son effet sur la dynamique du miroir. La force  $\delta F_{rad}$  étant proportionnelle au déplacement  $\delta x$ , on obtient directement à partir des équations (5.62) et (5.64) le mouvement résultant du miroir :

$$\delta x[\Omega] = \chi_{fb}[\Omega] F_T[\Omega], \quad (5.67)$$

où  $\chi_{fb}[\Omega]$  est une susceptibilité effective donnée par :

$$\frac{1}{\chi_{fb}[\Omega]} = \frac{1}{\chi[\Omega]} + 2 \frac{\Psi_{NL} \bar{\Psi}}{\gamma^2 + \bar{\Psi}^2} \left[ \frac{\gamma^2 + \bar{\Psi}^2}{(\gamma - i\Omega\tau)^2 + \bar{\Psi}^2} \right] \frac{1}{\chi[0]}. \quad (5.68)$$

On considère dans toute la suite que la dynamique du miroir est équivalente à celle d'un oscillateur harmonique, avec une susceptibilité donnée par l'équation (5.3). On peut alors développer l'expression (5.68) et séparer ses parties réelle et imaginaire :

$$\frac{1}{\chi_{fb}} = M \left[ \Omega_M^2 - \Omega^2 + 2\Omega_M^2 \frac{\Psi_{NL} \bar{\Psi}}{\gamma} \frac{\gamma^2 + \bar{\Psi}^2 - \Omega^2 \tau^2}{\gamma^2 \Delta} \right] - iM\Omega\Omega_M \left[ \frac{1}{Q} - 4 \frac{\Psi_{NL} \bar{\Psi}}{\gamma} \frac{\Omega_M}{\Omega_{cav} \Delta} \right], \quad (5.69)$$

avec :

$$\Delta = \frac{1}{\gamma^4} \left[ (\gamma^2 + \bar{\Psi}^2 - \Omega^2 \tau^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2 \tau^2 \right]. \quad (5.70)$$

L'effet du champ intracavité se traduit donc à la fois comme une correction de la raideur de l'oscillateur, et comme une modification de son amortissement. On peut donc à la fois agir sur ces deux paramètres comme on l'a fait avec un faisceau arrière. Notons toutefois qu'on dispose de moins de degrés de liberté qu'avec une boucle de contre-réaction électronique. Ainsi, on augmente la raideur pour un déphasage  $\bar{\Psi}$  positif, alors qu'on augmente l'amortissement pour  $\bar{\Psi}$  négatif. C'est ici la dynamique de la cavité qui joue le rôle de l'électronique (en particulier, le filtrage par la cavité remplace le dérivateur), et on ne peut pas choisir une réponse en fréquence de forme arbitraire.

Nous allons maintenant étudier le refroidissement à résonance, et on suppose donc que la fréquence  $\Omega$  reste voisine de  $\Omega_M$ . Pour optimiser le refroidissement, on suppose que la bande passante  $\Omega_{cav}$  de la cavité est égale à  $\Omega_M$  et on se place à mi-pente du pic d'Airy ( $\bar{\Psi} = -\gamma$ ). La susceptibilité effective  $\chi_{fb}$  prend alors la forme simple :

$$\frac{1}{\chi_{fb}} = M \left[ \Omega_M^2 \left( 1 - \frac{2}{5} \frac{\Psi_{NL}}{\gamma} \right) - \Omega^2 \right] - iM\Omega\Omega_M \left[ \frac{1}{Q} + \frac{4}{5} \frac{\Psi_{NL}}{\gamma} \right]. \quad (5.71)$$

Les deux termes correctifs qui apparaissent dans cette équation sont bien sûr proportionnels à  $\Psi_{NL}$ , donc à l'intensité intracavité. Il sont par ailleurs du même ordre de grandeur, mais le terme d'amortissement devant être comparé à  $1/Q$ , on a essentiellement un effet de refroidissement. Tant que  $\Psi_{NL}/\gamma$  reste petit devant 1, la fréquence de résonance  $\Omega_{fb}$  et le facteur de qualité effectif  $Q_{fb}$  sont donnés par :

$$\Omega_{fb} \approx \Omega_M \left( 1 - \frac{1}{5} \frac{\Psi_{NL}}{\gamma} \right), \quad (5.72)$$

$$\frac{1}{Q_{fb}} = \frac{1}{Q} + \frac{4}{5} \frac{\Psi_{NL}}{\gamma}. \quad (5.73)$$

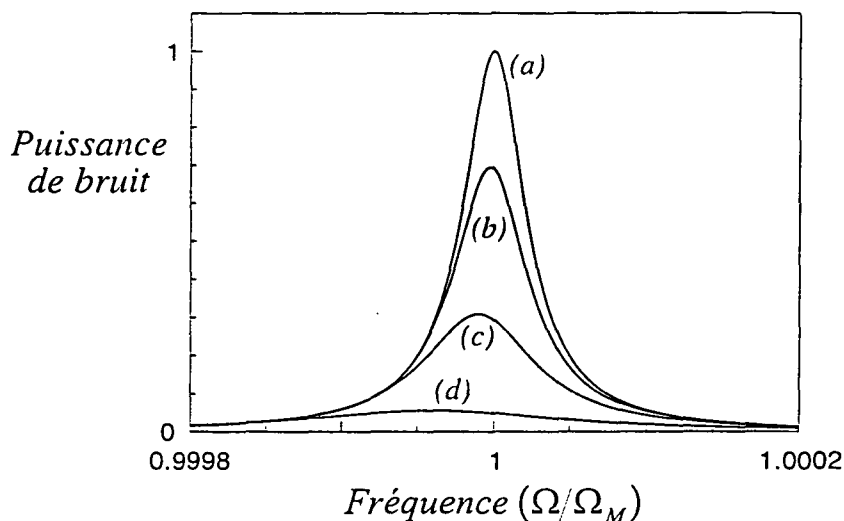


Fig. 67: Evolution du spectre de bruit thermique avec le paramètre  $\Psi_{NL}/\gamma$  caractérisant le couplage optomécanique. Les courbes (a) à (d) sont obtenues pour un oscillateur de facteur de qualité mécanique  $Q = 20\,000$  et des valeurs successives  $\Psi_{NL}/\gamma$  de 0, 1/4, 1 et 4. L'échelle verticale est normalisée au bruit thermique initial à résonance.

On élargit donc plus vite la résonance qu'on ne la décale. L'effet de refroidissement est important dès que  $\Psi_{NL}/\gamma$  est de l'ordre de  $1/Q$ . La figure 67 montre la réduction de bruit thermique obtenue pour différentes valeurs de  $\Psi_{NL}/\gamma$ . On observe très clairement le décalage de la résonance vers les basses fréquences, mais le pic refroidi reste à l'intérieur du pic de bruit thermique initial.

Notons pour finir qu'il est nécessaire d'augmenter l'efficacité du couplage optomécanique par un facteur 10 à 100 dans notre expérience, en améliorant par exemple le facteur de qualité mécanique, la finesse de la cavité ou encore la puissance incidente, pour observer cet effet de *self-cooling* du miroir par la cavité.

### 5.5.3 Applications du refroidissement aux interféromètres gravitationnels

Le mécanisme de refroidissement que nous avons présenté dans ce chapitre permet de réduire de manière très efficace le bruit thermique des miroirs, puisque nous avons obtenu une réduction par un facteur 10 de l'amplitude de bruit, aussi bien au voisinage d'une résonance mécanique qu'à basse fréquence. On peut alors envisager d'utiliser

ce mécanisme pour améliorer la sensibilité des mesures optiques limitées par le bruit thermique.

Malheureusement, ce type de technique ne permet pas en général d'améliorer le rapport signal à bruit : si on cherche à mesurer l'effet d'une force extérieure appliquée au miroir, la boucle de contre-réaction va en effet réduire le déplacement induit par cette force dans les mêmes proportions que le bruit thermique. Cependant, nous avons vu que dans un interféromètre gravitationnel, le passage d'une onde gravitationnelle se traduit par une variation apparente de la longueur des bras, qui est proportionnelle à cette longueur et qui ne peut dépasser le bruit thermique que pour des bras de plusieurs kilomètres de long. Ainsi, une petite cavité est totalement insensible au passage d'une onde gravitationnelle et peut être utilisée pour mesurer le bruit thermique des miroirs d'un interféromètre gravitationnel.

On peut donc en principe améliorer la sensibilité d'un interféromètre gravitationnel en mesurant le bruit thermique de chacun des miroirs des cavités Fabry-Perot placées dans les bras de l'interféromètre à l'aide d'une petite cavité et en venant réagir dessus pour le refroidir (voir la figure 68). Bien sûr, il semble difficile de contrôler le bruit thermique du miroir de l'interféromètre uniquement avec un faisceau lumineux, mais on peut envisager d'utiliser simultanément des dispositifs plus classiques tels que des éléments magnétiques ou électrostatiques, la pression de radiation servant alors à affiner le contrôle et en particulier à supprimer le bruit ajouté par ces éléments.

Il reste cependant de nombreux problèmes à résoudre, essentiellement liés à la mesure du bruit thermique des miroirs de l'interféromètre. Citons parmi ceux-ci les deux problèmes qui semblent les plus sérieux :

- l'effet du bruit thermique sur la lumière dans l'interféromètre dépend de l'adaptation spatiale entre le faisceau lumineux avec les modes acoustiques du miroir. Pour mesurer avec précision cet effet, il faut a priori utiliser un faisceau lumineux ayant la même structure spatiale. Si ce n'est pas le cas, on peut montrer qu'il reste des corrélations entre le bruit thermique du miroir vu par l'interféromètre et la phase du faisceau réfléchi par la cavité, corrélations qui dépendent de la susceptibilité effective croisée  $\chi'_{eff}$  introduite dans la section (4.2.4). Etant donné la taille des faisceaux dans l'interféromètre, il est nécessaire d'utiliser une cavité avec un col optique supérieur à 2 cm pour obtenir des corrélations raisonnables. Il est délicat de réaliser une telle cavité avec une finesse élevée ;

- le second miroir de la cavité de mesure doit être un miroir de référence pour le miroir de l'interféromètre, c'est-à-dire qu'il doit avoir un bruit thermique plus faible. On peut penser à utiliser un miroir plan-convexe de petite dimension. Comme nous l'avons vu dans la section (4.7), un tel miroir a un bruit thermique interne plus faible que les miroirs cylindriques prévus pour les grands interféromètres. Mais le bruit thermique pendulaire étant inversement proportionnel à la masse du miroir, le contrôle aurait pour effet d'augmenter le bruit thermique à basse fréquence.

Une autre solution pourrait consister à combiner le mécanisme de refroidissement avec un dispositif cryogénique classique. Comme on l'a vu au paragraphe (5.1.2.1), l'utilisation de la cryogénie dans un interféromètre gravitationnel ne permettrait de refroidir les miroirs qu'à des températures de l'ordre de quelques dizaines de Kelvin, à cause de la très grande puissance lumineuse circulant dans l'interféromètre. On pourrait donc utiliser la cryogénie pour refroidir également le miroir de référence ; étant donné la puissance lumineuse plus faible dans la cavité de mesure du bruit thermique, il serait possible de descendre la température de ce miroir jusqu'à quelques Kelvin seulement. Le mécanisme de refroidissement que nous avons étudié pourrait alors refroidir le miroir de l'interféromètre jusqu'à cette température très basse.

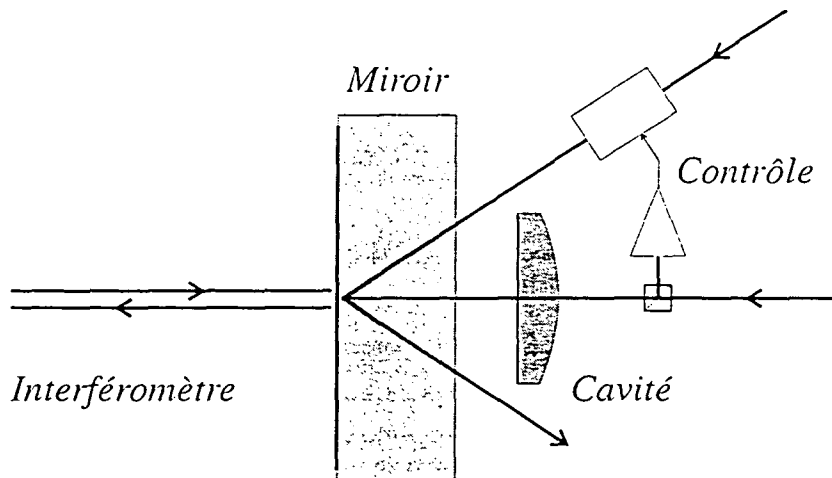


Fig. 68: Principe de la mesure et du contrôle du bruit thermique d'un miroir d'un grand interféromètre. Le bruit thermique est détecté à l'aide d'une cavité de grande finesse, avec un miroir de référence (miroir plan-convexe sur la figure) à faible bruit thermique. Le signal obtenu sert à moduler une force appliquée au miroir. Pour un miroir de fond d'un bras de l'interféromètre, on peut envisager la disposition présentée sur la figure. Pour les miroirs d'entrée des cavités Fabry-Perot, d'autres dispositions (cavités triangulaires) sont possibles.

## 6 Conclusion

Nous avons étudié dans ce mémoire les propriétés optiques et mécaniques d'une cavité Fabry-Perot de grande finesse dont un des miroirs est mobile. Ce dispositif est très sensible à de petits déplacements du miroir : la mesure au niveau quantique du bruit de phase du faisceau réfléchi par la cavité permet de détecter les très faibles déplacements induits par exemple par l'agitation thermique du miroir. L'étude expérimentale de ce bruit thermique est importante car il limite la sensibilité des mesures optiques de très grande précision, telles que la détection interférométrique des ondes gravitationnelles.

Une cavité à miroir mobile devrait aussi permettre de mettre en évidence les effets mécaniques de la pression de radiation du champ intracavité. Le couplage optomécanique entre le champ et le mouvement du miroir est basé sur deux effets complémentaires : tout d'abord, la pression de radiation influe sur le mouvement du miroir et crée des corrélations quantiques entre le mouvement et les fluctuations d'intensité du champ ; ensuite, le mouvement du miroir modifie la longueur de la cavité et change ainsi les propriétés statistiques du champ dans la cavité. Ces deux effets peuvent être mis à profit pour modifier les propriétés quantiques du champ réfléchi par la cavité, en produisant des états comprimés du champ. Ils peuvent aussi être utilisés pour réaliser une mesure quantique non destructive de l'intensité d'un faisceau lumineux. Enfin, le couplage optomécanique joue un rôle fondamental dans les mesures optiques de grande précision, puisqu'il induit une *Limite Quantique Standard* à la sensibilité de la mesure.

Nous avons commencé par présenter le système constitué par une cavité à une seule entrée-sortie dont un des miroirs est susceptible de se déplacer, le mouvement étant décrit comme celui d'un simple oscillateur harmonique. Cette étude a permis de dégager les caractéristiques essentielles du couplage optomécanique. La mise en évidence des effets quantiques de la pression de radiation requiert à la fois une cavité de grande finesse pour augmenter la sensibilité aux petits déplacements, une puissance lumineuse importante et un miroir aussi léger que possible pour que la pression de radiation déplace significativement le miroir. Nous avons montré que ces conditions

sont équivalentes à l'apparition de la bistabilité optique de la cavité que l'on peut observer lorsque le recul statique du miroir sous l'effet de la pression de radiation du champ intracavité est de l'ordre de la largeur de la résonance de la cavité. Pour éviter que l'agitation thermique ne masque les effets quantiques, il est de plus nécessaire de travailler à basse température, avec un miroir de facteur de qualité mécanique et de fréquence de résonance les plus élevés possible.

Ces contraintes nous ont amenés à choisir un miroir mobile déposé sur un résonateur mécanique plan-convexe en silice, de 1,5 mm d'épaisseur. Les fréquences de résonance sont alors suffisamment élevées, de l'ordre du mégahertz. Par ailleurs, les différents modes acoustiques internes étant confinés au centre du résonateur, ils ont des masses effectives qui peuvent être nettement inférieures à la masse totale du miroir : la masse effective est théoriquement de l'ordre de 30 mg pour le mode acoustique fondamental.

Nous avons réalisé un montage expérimental dont l'objectif est de mettre en évidence les effets quantiques du couplage optomécanique. Ce montage est constitué d'une cavité à miroir mobile de grande finesse et d'une source laser construite autour d'un laser titane-saphir. Cette source délivre un faisceau monomode balayable, stable en intensité et très proche d'un faisceau gaussien grâce à des asservissements d'intensité, de fréquence et à un filtrage spatial très efficaces. Le montage comporte aussi un système de détection homodyne qui permet de mesurer au niveau quantique le bruit de n'importe quelle quadrature du faisceau réfléchi par la cavité à miroir mobile. Une série de mesures nous a permis de déterminer précisément les caractéristiques et les performances des différentes parties du montage : bruit de fréquence du laser, adaptation spatiale du faisceau incident avec la cavité à miroir mobile, finesse de la cavité, efficacité de l'asservissement de la phase de l'oscillateur local, ...

Enfin, nous avons effectué la calibration de la sensibilité de notre dispositif aux petits déplacements du miroir : la sensibilité obtenue est de  $2,75 \cdot 10^{-19} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$  à une fréquence d'analyse de 2 MHz, en très bon accord avec la valeur attendue d'après les mesures des caractéristiques de notre dispositif. Cette sensibilité pourrait encore être améliorée en utilisant des miroirs de meilleure qualité optique, avec des pertes plus faibles et une meilleure tenue au flux. Les finesesses des cavités que nous avons utilisées varient entre 25 000 et 47 000, et la tenue au flux des coupleurs d'entrée limite l'intensité incidente sur la cavité à moins de 300  $\mu\text{W}$ . Pour une puissance de 1 mW et une finesse de 300 000, on pourrait obtenir une sensibilité meilleure que  $10^{-20} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ .

La très grande sensibilité de notre expérience nous a permis d'observer directement le bruit thermique du miroir mobile. Nous avons présenté dans ce mémoire l'étude détaillée du spectre de bruit thermique du mode acoustique fondamental du résonateur

plan-convexe. Un dispositif d'excitation optique du mouvement du miroir, qui utilise la pression de radiation d'un faisceau auxiliaire modulé en intensité, nous a permis d'attribuer de façon certaine le pic de bruit thermique observé à un mode acoustique du miroir, et de trouver un excellent accord entre le bruit thermique observé et celui déduit du théorème fluctuation-dissipation. Par contre, nous avons noté un désaccord entre la masse effective mesurée du mode fondamental et la valeur attendue théoriquement, désaccord probablement dû à une modification de la géométrie du mode occasionnée par la fixation du miroir. Cet écart entre les modes gaussiens attendus et les modes observés se traduit également par une modification de la répartition des fréquences de résonance.

Une deuxième cavité, constituée de deux miroirs de géométrie cylindrique, nous a permis d'étudier les modes de vibration pour cette géométrie plus courante, qui est notamment utilisée pour les interféromètres gravitationnels. Les fréquences de résonance très basses des premiers modes de ces miroirs, dues tant à leurs dimensions (6,35 mm d'épaisseur) qu'à leur forme cylindrique, nous ont empêchés de comparer précisément l'amplitude des déplacements observés à leurs valeurs théoriques. On a néanmoins pu vérifier que la répartition des fréquences de résonance correspond tout à fait à celle attendue, avec des écarts relatifs généralement inférieurs à 1 %. Un prolongement de cette étude permettrait de valider expérimentalement les résultats numériques utilisés aujourd'hui pour l'estimation de la sensibilité des futurs interféromètres gravitationnels. Nous avons également comparé théoriquement les bruits thermiques à basse fréquence des miroirs plan-convexe et cylindrique. Ainsi le simple changement des miroirs d'un interféromètre gravitationnel pour des miroirs plan-convexe de même masse devrait permettre de réduire l'influence du bruit thermique dans l'interféromètre par un facteur 10. Notre montage expérimental pourrait être utilisé pour vérifier ce résultat théorique.

Enfin, nous avons réalisé une expérience qui permet de réduire le bruit thermique d'un miroir grâce à la pression de radiation. Cette expérience utilise la sensibilité de notre dispositif expérimental aux déplacements du miroir mobile, pour appliquer au miroir, à l'aide d'une boucle de contre-réaction, une force visqueuse supplémentaire sans ajouter de fluctuations au système. Cette technique de *friction froide* nous a ainsi permis de réduire d'un facteur supérieur à 10 le bruit thermique à résonance du mode acoustique fondamental que nous avons déjà étudié. Une modification de ce montage nous a également permis de modifier la *raideur statique* du miroir, et donc de diminuer l'amplitude du mouvement d'agitation thermique à basse fréquence, d'un facteur 10 également. Un tel dispositif pourrait en principe être appliqué à un interféromètre



gravitationnel, afin d'augmenter sa sensibilité dans le domaine d'analyse spectrale où elle est limitée par le bruit thermique interne des miroirs.

L'étude que nous avons réalisée ouvre la voie à un certain nombre de prolongements intéressants, tels que la possibilité de refroidir le miroir à l'aide du seul champ présent dans la cavité, en utilisant les propriétés dynamiques du couplage optomécanique pour *geler* le miroir. Enfin les propriétés quantiques de ce processus de refroidissement sont assez différentes de celles du couplage optomécanique, puisque la limite de sensibilité due au bruit de photon peut être augmentée indéfiniment : il n'existe pas de Limite Quantique Standard liée aux effets de la pression de radiation. Il est ainsi possible d'atteindre une température arbitrairement basse en augmentant la sensibilité de la mesure de position utilisée dans l'asservissement.

En ce qui concerne l'observation des effets quantiques du couplage optomécanique, il est tout d'abord nécessaire d'améliorer la fixation des miroirs, en utilisant par exemple une fixation par cardans assez semblable au dispositif utilisé à l'Université de Constance présenté au chapitre 4. Ceci permettrait d'augmenter les facteurs de qualité mécanique des modes, et de leur redonner un caractère gaussien dans le cas d'un miroir plan-convexe. On pourrait alors atteindre des masses effectives du couplage optomécanique inférieures au milligramme, et se trouver ainsi dans une situation favorable pour observer les effets de la pression de radiation. Il est envisageable aujourd'hui de réaliser des miroirs de meilleure qualité optique avec une tenue au flux accrue. Ceci permettrait de construire une cavité de grande finesse, de l'ordre de 300 000, capable de supporter une puissance incidente de plusieurs milliwatts. Placée à une température cryogénique de 4 K, une telle cavité devrait permettre d'observer les effets quantiques du couplage optomécanique.

---

## Bibliographie

- [1] “*Quantum theory and measurement*”, eds. J. A. Wheeler and W. H. Zurek (Princeton University Press, 1983).
- [2] R.E. Slusher, L.W. Hollberg, B. Yurke, J.C. Mertz and J.F. Valley, “*Observation of Squeezed States Generated by Four-Wave Mixing in an Optical Cavity*”, Phys. Rev. Lett. **55**, 2409 (1985).
- [3] D.F. Walls, “*Squeezed states of light*”, Nature **306**, 141 (1983).
- [4] S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino and C. Fabre, “*Quantum fluctuations in optical systems*”, Progress in Optics **XXX**, ed. E. Wolf, p. 1 (North-Holland, 1992).
- [5] M. Xiao, L. Wu and J. Kimble, “*Precision Measurement beyond the Shot-Noise Limit*”, Phys. Rev. Lett. **59**, 278 (1987).
- [6] P. Grangier, R. E. Slusher, B. Yurke and A. LaPorta, “*Squeezed-Light-Enhanced Polarization Interferometer*”, Phys. Rev. Lett. **59**, 2153 (1987).
- [7] J. Weber, “*Detection and generation of gravitational waves*”, Phys. Rev. **177**, 306 (1960).
- [8] M. Cerdonio *et al.*, “*The ultracryogenic gravitational-wave detector AURIGA*”, Class. Quantum Grav. **14**, 1491 (1997).
- [9] M. F. Bocko and R. Onofrio, “*On the measurement of a weak classical force coupled to a harmonic oscillator: experimental progress*”, Rev. Mod. Phys. **68**, 755 (1996).
- [10] C. Bradaschia *et al.*, “*The VIRGO project: A wide band antenna for gravitational wave detection*”, Nucl. Instrum. Meth. **A289**, 518 (1990).
- [11] A. Abramovici *et al.*, “*The Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory*”, Science **256**, 325 (1992).
- [12] P. Hello, “*Optical aspects of interferometric gravitational-wave detectors*”, Progress in Optics **XXXVIII**, ed. E. Wolf (North-Holland, 1998).
- [13] P.R. Saulson, “*Fundamentals of interferometric gravitational wave detectors*” (World Scientific, 1994).
- [14] C. M. Caves, “*Quantum-Mechanical Radiation-Pressure Fluctuations in an Interferometer*”, Phys. Rev. Lett. **45**, 75 (1980).

- [15] C. M. Caves, “*Quantum-mechanical noise in an interferometer*”, Phys. Rev. D23, 1693 (1981).
- [16] M. T. Jaekel and S. Reynaud, “*Quantum Limits in Interferometric Measurements*”, Europhys. Lett. 13, 301 (1990).
- [17] François Bondu, “*Etude du bruit thermique et stabilisation en fréquence du laser du détecteur interférométrique d’ondes gravitationnelles VIRGO*”, Thèse de l’Université Paris-Sud (1996).
- [18] J.E. Logan, N.A. Robertson and J. Hough, “*An investigation of limitations to quality factor measurements of suspended masses due to resonances in the suspension wires*”, Phys. Lett. A170, 352 (1992).
- [19] A. Gillespie and F. Raab, “*Thermal noise in the test mass suspensions of a laser interferometer gravitational-wave detector prototype*”, Phys. Lett. A178, 357 (1993).
- [20] V.B. Braginsky, V.P. Mitrofanov and K.V. Tokmakov, “*Energy dissipation in the pendulum mode of the test mass suspension of a gravitational wave antenna*”, Phys. Lett. A218, 164 (1996).
- [21] F. Bondu and J.-Y. Vinet, “*Mirror thermal noise in interferometric gravitational-wave detectors*”, Phys. Lett. A198, 74 (1995).
- [22] A. Gillespie and F. Raab, “*Thermally excited vibrations of the mirrors of laser interferometer gravitational-wave detectors*”, Phys. Rev. D52, 577 (1995).
- [23] F. Bondu, P. Hello and J.-Y. Vinet, “*Thermal noise in mirrors of interferometric gravitational wave antennas*”, Phys. Lett. A246, 227 (1998).
- [24] V.B. Braginsky, V.P. Mitrofanov and V.I. Panov, “*Systems with small dissipation*” (The University of Chicago Press, 1985).
- [25] T. Uchimaya, D. Tatsumi, T. Tomaru, M.E. Tobar, K. Kuroda, T. Suzuki, N. Sato, A. Yamamoto, T. Haruyama and T. Shintomi, “*Cryogenic cooling of a sapphire mirror-suspension for interferometric gravitational wave detectors*”, Phys. Lett. A242, 211 (1998).
- [26] V.B. Braginsky, M.L. Gorodetsky, V.S. Ilchenko and S.P. Vyatchanin, “*On the ultimate sensitivity in coordinate measurements*”, Phys. Lett. A179, 244 (1993).

- 
- [27] N. Mio and K. Tsubono, “*Vibration transducer using an ultrashort Fabry-Perot cavity*”, Appl. Opt. **34**, 186 (1995).
- [28] I. Tittoonen, G. Breitenbach, T. Kalkbrenner, T. Müller, R. Conradt, S. Schiller, E. Steinsland, N. Blanc and N.F. de Rooij, “*Interferometric measurement of the position of a macroscopic body: Towards observation of quantum limits*”, Phys. Rev. A **59**, 1038 (1999).
- [29] Y. Hadjar, P.F. Cohadon, C.G. Aminoff, M. Pinard and A. Heidmann, “*High-sensitivity optical measurement of mechanical Brownian motion*”, Europhys. Lett. **47**, 545 (1999).
- [30] P.F. Cohadon, A. Heidmann and M. Pinard, “*Cooling of a mirror by radiation pressure*”, Phys. Rev. Lett. **83**, 3174 (1999).
- [31] P. Tournenc and N. Deruelle, “*Effects of the time delays in a non linear pendular Fabry-Perot*”, Ann. Phys. (Paris) **10**, 241 (1985).
- [32] L.D. Landau et E.M. Lifshitz, “*Cours de physique théorique : physique statistique*” (Mir, 1967).
- [33] L. Lugiato, “*Theory of optical bistability*”, Progress in Optics **XXI**, ed. E. Wolf, p. 71 (North-Holland, 1984).
- [34] A. Dorsel, J. D. McCullen, P. Meystre and E. Vignes, “*Optical bistability and mirror confinement induced by radiation pressure*”, Phys. Rev. Lett. **51**, 1550 (1983).
- [35] C. Fabre, M. Pinard, S. Bourzeix, A. Heidmann, E. Giacobino and S. Reynaud, “*Quantum noise reduction using a cavity with a movable mirror*”, Phys. Rev. A **49**, 1337 (1994).
- [36] A. Heidmann, Y. Hadjar and M. Pinard, “*Quantum nondemolition measurement by optomechanical coupling*”, Appl. Phys. B **64**, 173 (1997).
- [37] Yassine Hadjar, “*Etude du couplage optomécanique dans une cavité optique de grande finesse ; observation du mouvement Brownien d’un miroir*”, Thèse de l’Université Pierre et Marie Curie (1998).
- [38] J.F. Roch, K. Vigneron, P. Grelu, A. Sinatra, J.P. Poizat and P. Grangier, “*Optical quantum non-demolition measurements using cold trapped atoms*”, Phys. Rev. Lett. **78**, 634 (1997).

- 
- [39] U. Leonhardt and H. Paul, “*Measuring the quantum state of light*”, *Prog. Quant. Elect.* **19**, 89 (1995).
- [40] S. Weinberg, “*Gravitation and Cosmology*” (John Wiley, 1972).
- [41] J.P. Zendri *et al.*, “*Status Report of the Gravitational Wave Detector AURIGA*”, *Proceedings of the Third E. Amaldi Conference*, à paraître.
- [42] L. Conti, M. Cerdonio, L. Taffarellò, J.P. Zendri, A. Ortolan, C. Rizzo, G. Ruoso, G.A. Prodi, S. Vitale, G. Cantatore and E. Zavattini, “*Optical transduction chain for gravitational wave bar detectors*”, *Rev. Sci. Instrum.* **69**, 554 (1998).
- [43] L. Conti, F. Marin, M. De Rosa, G.A. Prodi, L. Taffarellò, J.P. Zendri, M. Cerdonio and S. Vitale, “*An optical transduction chain for the AURIGA detector*”, *Proceedings of the Third E. Amaldi Conference*, à paraître.
- [44] K. Danzmann *et al.*, “*GEO 600, a laser interferometric gravitational wave antenna*”, *Gravitational wave experiments*, eds. E. Coccia, G. Pizella et F. Ronga, p.100 (World Scientific, 1995).
- [45] K. Tsubono, “*300-m laser interferometric gravitational detector (TAMA 300) in Japan*”, *Gravitational wave experiments*, eds. E. Coccia, G. Pizella et F. Ronga, p.112 (World Scientific, 1995).
- [46] G. Binnig, C.F. Quate and C. Gerber, “*Atomic Force Microscope*”, *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 930 (1986).
- [47] D. Rugar, H.J. Mamin and P. Guethner, “*Improved fiber-optic interferometer for atomic force microscopy*”, *Appl. Phys. Lett.* **55**, 2588 (1989).
- [48] P.R. Saulson, “*Thermal noise in mechanical experiments*”, *Phys. Rev.* **D42**, 2437 (1990).
- [49] M. Stephens, “*A sensitive interferometric accelerometer*”, *Rev. Sci. Instrum.* **64**, 2612 (1993).
- [50] M. Bernardini *et al.*, “*Plane parallel mirrors Fabry-Perot cavity to improve Virgo superattenuators*”, *Phys. Lett.* **A243**, 187 (1998).
- [51] W.J. Startin, M.A. Beilby and P.R. Saulson, “*Mechanical quality factors of fused silica resonators*”, *Rev. Sci. Instrum.* **69**, 3681 (1999).
- [52] E. P. Wigner, “*On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium*”, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).

- 
- [53] S. Reynaud and A. Heidmann, "A semiclassical linear input output transformation for quantum fluctuations", *Opt. Comm.* **71**, 209 (1989).
- [54] C. Fabre, S. Reynaud, "Fundamental Systems in Quantum Optics", 1990 Les Houches Lectures, eds. J. Dalibard, J.M. Raimond and J. Zinn-Justin, p. 675 (North-Holland, 1992).
- [55] V.B. Braginsky and F.Y. Khalili, "Quantum measurement" (Cambridge University Press, 1992).
- [56] F. Biraben et P. Labastie, "Balayage d'un laser à colorant continu monomode sur 150 GHz", *Opt. Comm.* **41**, 49 (1982).
- [57] R. W. P. Drever, J. L. Hall, F. V. Kowalski, P. Hough, G. M. Ford, A. J. Munley and H. Ward, "Laser Phase and Frequency Stabilization using an Optical Resonator", *Appl. Phys.* **31**, 97 (1983).
- [58] G. Rempe, R. Thompson, H.J. Kimble and L. Lalezari, "Measurement of ultra low losses in an optical interferometer", *Opt. Lett.* **17**, 363 (1992).
- [59] H. W. Kogelnik and T. Li, "Laser Beams and Resonators", *Appl. Opt.* **5**, 1550 (1966).
- [60] P. Meystre, E. M. Wright, J. D. McMullen and E. Vignes, "Theory of radiation-pressure-driven interferometers", *J. Opt. Soc. Am.* **B2**, 1830 (1985).
- [61] R.N. Kleiman, G. Agnolet and D.J. Bishop, "Two-Level Systems Observed in the Mechanical Properties of Single-Crystal Silicon at Low Temperatures", *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2079 (1987).
- [62] B.E. White, Jr. and R.O. Pohl, "Internal Friction of Subnanometer  $\alpha$ -SiO<sub>2</sub> Films", *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4437 (1995).
- [63] L.D. Landau et E.M. Lifshitz, "Cours de physique théorique : Théorie de l'élasticité", 2<sup>e</sup> édition (Mir, 1990).
- [64] L.D. Landau et E.M. Lifshitz, "Mécanique des fluides", chap II, §15 (Mir, 1971).
- [65] L.D. Landau et E.M. Lifshitz, "Cours de physique théorique : Théorie de l'élasticité", chap V, §33, 2<sup>e</sup> édition (Mir, 1990).
- [66] C. Zener, "Elasticité et anélasticité des métaux" (Dunod, 1955).

- 
- [67] A. S. Nowick and B. S. Berry, "*Anelastic Relaxation in Crystalline Solids*" (Academic Press, 1972).
- [68] J.M. Courty and A. Lambrecht, "*Transverse-mode coupling in a Kerr medium*", Phys. Rev. A **54**, 5243 (1996).
- [69] M. Pinard, Y. Hadjar and A. Heidmann, "*Effective mass in quantum effects of radiation pressure*", Eur. Phys. J. D **7**, 107 (1999).
- [70] C. J. Wilson, "*Vibration modes of AT-cut convex quartz resonators*", J. Phys. D: Appl. Phys. **7**, 2449 (1974).
- [71] J.R. Hutchinson, "*Vibration of solid cylinders*", J. App. Mech. **47**, 901 (1980).
- [72] D. S. Stevens and H. F. Tiersten, "*An analysis of doubly rotated quartz resonators utilising essentially thickness modes with transverse variation*", J. Acoust. Soc. Am. **79**, 1811 (1986).
- [73] B. Capelle, J. Detaint, J. Schwartzel, Y. Zheng and A. Zarka, "*Synchrotron radiation X ray topography study of lateral field resonators*", Proceedings of the 6<sup>th</sup> European Frequency and Time Forum, March 1992 (ESA, Netherlands), p. 105.
- [74] A. El Hatbi, A. Zarka and F. Bastien, "*Physical limitation on the quality factor of quartz resonators*", J. Acoust. Soc. Am. **94**, 917 (1993).
- [75] M. Dialinas, "*Fréquences de résonance de miroirs cylindriques par éléments finis avec SYSTUS*", rapport interne VIRGO Orsay (1994).
- [76] A. Heidmann, P.F. Cohadon and M. Pinard, "*Thermal noise of a plano-convex mirror*", Phys. Lett. A **263**, 27 (1999).
- [77] Y. Levin, "*Internal thermal noise in the LIGO test masses: a direct approach*", Phys. Rev. D **57**, 659 (1998).
- [78] F.S. Crawford, "*Elementary derivation of the law of equipartition of energy*", Am. J. Phys. **55**, 180 (1987).
- [79] H.B. Callen and T.A. Welton, "*Irreversibility and Generalized Noise*", Phys. Rev. **83**, 34 (1951).
- [80] R. Kubo, "*The fluctuation-dissipation theorem*", Rep. Prog. Phys. **29**, 255 (1966).
- [81] A.K. Raychaudhuri and S. Hunklinger, "*Low Frequency Elastic Properties of Glasses at Low Temperature - Implications on the Tunneling Model*", Z. Phys. B - Condensed Matter **57**, 113 (1984).

- 
- [82] D. Rugar and P. Grütter, “*Mechanical Parametric Amplification and Thermomechanical Noise Squeezing*”, Phys. Rev. Lett. **67**, 699 (1991).
- [83] V. Natarajan, F. DiFilippo and D. Pritchard, “*Classical Squeezing of an Oscillator for Subthermal Noise Operation*”, Phys. Rev. Lett. **74**, 2855 (1995).
- [84] S. Mancini, D. Vitali and P. Tombesi, “*Optomechanical Cooling of a Macroscopic Oscillator via Homodyne Feedback*”, Phys. Rev. Lett. **80**, 688 (1998).
- [85] J. Mertz, O. Marti and J. Mlynek, “*Regulation of a microcantilever response by force feedback*”, Appl. Phys. Lett. **62**, 2344 (1993).
- [86] F. Grassia, J.M. Courty, S. Reynaud and P. Touboul, “*Quantum theory of fluctuations in a cold damped accelerometer*”, Eur. Phys. J. D **8**, 101 (2000).
- [87] F. Grassia, “*Fluctuations quantiques et thermiques dans les transducteurs électromécaniques*”, Thèse de l’Université Pierre et Marie Curie (1998).
- [88] A. Bernard and P. Touboul, “*The GRADIO accelerometer: design and development status*”, Proc. ESA-NASA Workshop on the Solid Earth Mission ARISTOTELES, Anacapri (1991).
- [89] E. Willemenot, “*Pendule de torsion à suspension électrostatique, très hautes résolutions des accéléromètres spatiaux pour la physique fondamentale*”, Thèse de l’Université Paris-Sud (1997).
- [90] P. Horowitz et W. Hill, “*Traité de l’électronique*” (Elektor, 1996).



## Abstract

We study how a cavity with a movable mirror can be used to measure very small displacements. The use of a high-finesse optical cavity allows to observe the thermal noise of the mirrors, which is an important limitation to high-sensitivity measurements. The mirror can also move under the influence of the quantum fluctuations of radiation pressure, which leads to a *Standard Quantum Limit* for a position measurement.

We present the results of our experiment in which a laser beam is sent into a single-port cavity with the back mirror coated on a mechanical resonator. We observed the Brownian motion of the mirror with a very high sensitivity ( $2.75 \times 10^{-19} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ ).

We also studied the possibility of cooling the mirror using the radiation pressure of a second intensity-modulated beam. Close to the mechanical resonance, we apply an additional viscous force without any additional noise (cold damping). We have observed a reduction of the thermal noise, both at the mechanical resonance frequency and at low frequency. A potential application of such a cooling process to gravitational interferometers is discussed.

**Keywords :** High-finesse optical cavity, Small displacement measurement, Thermal noise of a mirror, Radiation pressure, Standard Quantum Limit, Cold damping.

## Résumé

Nous étudions les possibilités qu'offre une cavité à *miroir mobile* pour mesurer de très petits déplacements. L'utilisation d'une cavité optique de grande finesse permet d'observer le bruit thermique des miroirs, qui constitue une limitation importante des mesures de très grande sensibilité. Le miroir est également susceptible de se déplacer sous l'effet des fluctuations quantiques de la pression de radiation, ce qui mène à une *Limite Quantique Standard* dans une mesure de position.

Nous présentons les résultats obtenus dans notre expérience, où un faisceau laser est envoyé dans une cavité à une seule entrée-sortie, dont le miroir arrière est déposé sur un résonateur mécanique. Nous avons observé le mouvement Brownien de ce miroir avec une très grande sensibilité ( $2,75 \times 10^{-19} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ ).

Nous avons également étudié la possibilité de refroidir le miroir à l'aide de la pression de radiation d'un second faisceau modulé en intensité. Au voisinage de la résonance mécanique, on applique une force visqueuse supplémentaire sans bruit additionnel (*friction froide*). Nous avons observé une réduction du bruit thermique aussi bien à la fréquence de résonance mécanique qu'à basse fréquence. Une application potentielle d'un tel processus de refroidissement aux interféromètres gravitationnels est discutée.

**Mots-clés :** Cavité optique de grande finesse, Mesure de petits déplacements, Bruit thermique d'un miroir, Pression de radiation, Limite Quantique Standard, Friction froide.