



**HAL**  
open science

# Etude de la dynamique des bulles infinies : application à l'étude de la vidange et du remplissage de réservoir

Pierre Héraud

► **To cite this version:**

Pierre Héraud. Etude de la dynamique des bulles infinies : application à l'étude de la vidange et du remplissage de réservoir. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2002. Français. NNT: . tel-00011664

**HAL Id: tel-00011664**

**<https://theses.hal.science/tel-00011664>**

Submitted on 22 Feb 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE PROVENCE AIX-MARSEILLE I

Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre

THESE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE PROVENCE AIX-MARSEILLE I**

Discipline : Sciences

Formation doctorale : Mécanique, Physique et Modélisation

**ETUDE DE LA DYNAMIQUE DES BULLES INFINIES :  
APPLICATION A L'ETUDE DE LA VIDANGE ET DU  
REEMPLISSAGE DE RESERVOIR**

présentée et soutenue publiquement par

Pierre Héraud

le 13 Novembre 2002

---

Directeurs de Thèse :  
**M. Christophe Clanet**  
**M. Geoffrey Searby**

---

JURY

M. Louis Boyer	
M. Christophe Clanet	
M. Jean Fabre	Président
M. Emil Hopfinger	Rapporteur
Mme Christine Lallemand	
M. Jacques Magnaudet	Rapporteur
M. Geoffrey Searby	



# Remerciements

*Mes remerciements vont, tout d'abord, à mes directeurs de thèse Christophe Clanet et Geoffrey Searby pour la qualité de leurs encadrements durant trois ans.*

*Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Christophe. Il a su me faire partager sa rigueur et son sens des interprétations physiques malgré la complexité apparente des phénomènes étudiés. Je voudrais aussi le remercier pour son esprit passionné et enthousiaste qui rendait nos discussions de travail agréables et studieuses. La qualité de ce travail doit beaucoup à ce caractère entier.*

*Mes pensées vont aussi à Geoff qui, par sa disponibilité, ses compétences et ses qualités humaines, a permis que cette thèse se déroule dans une atmosphère agréable.*

*Je tiens tout particulièrement à remercier Jacques Magnaudet et Emil Hopfinger pour leur travail de rapporteur et Jean Fabre d'avoir bien voulu présider le jury. Il m'est impossible d'oublier les autres membres du jury, Louis Boyer et Christine Lallemand, avec qui j'ai passé deux heures d'une présentation à laquelle j'ai pris plaisir.*

*Je suis reconnaissant à M. Jacques Magnaudet pour son analyse dimensionnelle élégante concernant la dynamique des bulles infinies visqueuses ainsi que pour toutes les remarques et suggestions qu'il a formulées.*

*Les expériences ne s'étant pas montées seules, il me semble naturel de remercier pour leurs compétences et leur bonne humeur : Jacky Minelli, François Abetino, Franck Dutertre et Guy Girard. J'ai trouvé en eux des amis, et leurs conseils, tant au niveau du travail que des relations humaines, m'ont permis de traverser les petits déserts qui parsèment le travail de thèse.*

*Je tiens à remercier Lionel Castillon pour ses résultats expérimentaux concernant l'étude du "Glouglou" obtenus lors d'un stage ingénieur quelques mois avant mon arrivée.*

*Je remercie la D.G.A. d'avoir financé cette thèse et plus particulièrement Christine Lallemand du C.T.S.N. pour avoir suivi l'avancement des travaux avec intérêt et enthousiasme.*

*Je remercie aussi Paul Clavin pour son accueil au sein du laboratoire I.R.P.H.E., tout d'abord à St Jérôme dans le rez-de-jardin de l'aile 2 puis dans le nouveau bâtiment de la Technopôle où je me suis senti à mon aise pour rédiger cette thèse.*

*Mener à bien une thèse est une gageure scientifique mais c'est aussi une aventure humaine dans laquelle on entraîne son entourage.*

*Je voudrais, tout d'abord, citer Claire, qui a toujours su, avec douceur et sincérité, m'apporter un regard extérieur au monde intra-laborantin à l'intérieur duquel je me débattais parfois.*

*Je ne peux pas oublier tout les amis rencontrés à Marseille : le trio infernal, j'ai nommé Pat, Redge et Stef, Remi qui complète idéalement le tableau, Camille, Patrick, Vincent, Florent, Manu, Céline, Benoit, Alain, Geraldine, Christophe, Jess, Nico, Marge, Laurent, Luc, Matthieu, l'équipe de rugby de l'A.U.C., etc . . . (je sens qu'il en manque, ne vous inquiétez pas, je vous fais de grosses bises quand même)*

*Je tiens aussi à remercier pour l'ambiance générale du labo, les compagnons de thèse : Anne Cros qui a réussi à tenir dans cette ambiance (malheureusement) essentiellement masculine, Xabier, François (dit marron-land), François (bonjour les jeunes!), Laurent Lacaze (spécialiste du débarquement à l'improviste dans un bureau), Fabien, Sébastien, Stéphane, Christophe, Limo qui est devenu Bavarois depuis (t'es où?) et tous ceux du laboratoire avec qui j'ai eu des relations de travail cordiales.*

*Merci enfin au BDM et à Marseille pour ces cinq ans passés ensemble. Les meilleures choses ont une fin . . .*



# TABLE DES MATIÈRES

Introduction . . . . .	1
Origine de la thèse . . . . .	1
Problème traité et structure de la thèse . . . . .	4
Cadre général de l'étude et autres phénomènes impliqués . . . . .	4
PARTIE I : Étude de la vitesse des bulles infinies . . . . .	9
1. Problème posé . . . . .	9
1.1 Introduction . . . . .	9
1.2 Résultats de la littérature et paramètres de similitude . . . . .	10
1.3 Espace des paramètres et plan de l'étude . . . . .	11
2. Montage expérimental . . . . .	17
2.1 Description du montage et du protocole . . . . .	17
2.2 Présentation des tubes . . . . .	18
2.3 Présentation des fluides . . . . .	19
2.4 Estimation des incertitudes de mesures . . . . .	20
3. Observations . . . . .	23
3.1 Région 1 : $Re_{equ} \gg Re_{equ}^*$ , $Bo_{equ} \gg Bo_{equ}^*$ . . . . .	23
3.2 Région 2 : $Re_{equ} \ll Re_{equ}^*$ , $Bo_{equ} \gg Bo_{equ}^*$ . . . . .	27
3.3 Transition $A_{12}$ : $Bo_{equ} \gg Bo_{equ}^*$ . . . . .	30
3.4 Transition $A_{13}$ : $Re_{equ} \gg Re_{equ}^*$ . . . . .	31
3.5 Transition $A_{24}$ : $Re_{equ} \ll Re_{equ}^*$ . . . . .	31
3.6 Conclusion . . . . .	33
4. Approche analytique . . . . .	35
4.1 Conditions dynamiques à l'interface gaz-liquide . . . . .	36
4.1.1 Cas non visqueux . . . . .	36
4.1.2 Cas visqueux . . . . .	37
4.2 Comportement de la fonction courant autour de l'apex . . . . .	37
4.2.1 Écoulements 2D plans . . . . .	37
4.2.2 Écoulements 2D axisymétriques . . . . .	42
4.3 Raccordement avec l'écoulement en amont de la bulle . . . . .	46
4.3.1 Écoulements 2D plans . . . . .	46
4.3.2 Écoulements 2D axisymétriques . . . . .	48
4.4 Effet de la courbure sur la vitesse de la bulle . . . . .	50
4.4.1 Cas non visqueux . . . . .	51
4.4.2 Cas visqueux . . . . .	52
4.5 Conclusion . . . . .	53

5. Résultats expérimentaux et discussions . . . . .	55
5.1 Région 1 : $Re_{equ} \gg Re_{equ}^*, Bo_{equ} \gg Bo_{equ}^*$ . . . . .	55
5.1.1 Bulle inertielle dans un tube cylindrique . . . . .	55
5.1.2 Bulle inertielle dans un tube rectangulaire . . . . .	56
5.1.3 Bulle inertielle dans un tube de section quelconque . . . . .	59
5.2 Région 2 : $Re_{equ} \ll Re_{equ}^*, Bo_{equ} \gg Bo_{equ}^*$ . . . . .	61
5.2.1 Bulle visqueuse dans un tube cylindrique . . . . .	63
5.2.2 Bulle visqueuse dans un tube rectangulaire . . . . .	63
5.2.3 Bulle visqueuse dans un tube de section quelconque . . . . .	66
5.3 Transition $A_{12}$ : $Bo_{equ} \gg Bo_{equ}^*$ . . . . .	67
5.4 Influence de la courbure sur la vitesse d'ascension des bulles . . . . .	68
5.4.1 Transition $A_{13}$ , $Re_f \gg Re_f^*$ . . . . .	68
5.4.2 Transition $A_{24}$ , $Re_f \ll Re_f^*$ . . . . .	74
5.4.3 Discussion des résultats sur l'influence de la courbure . . . . .	78
6. Conclusions . . . . .	81
PARTIE II : Application à l'étude des temps de vidange et de remplissage de réservoirs cylindriques . . . . .	
	85
7. Étude du temps de vidange de réservoirs cylindriques . . . . .	85
7.1 Problème posé . . . . .	85
7.2 Liquides non visqueux, $r < R$ . . . . .	86
7.2.1 Montage expérimental . . . . .	86
7.2.2 Observations expérimentales . . . . .	88
7.2.3 Modèle . . . . .	90
7.2.4 Résultats expérimentaux et discussions . . . . .	91
7.3 Liquides visqueux, $r = R$ . . . . .	92
7.3.1 Montage expérimental et protocole de mesure . . . . .	92
7.3.2 Étude de l'épaisseur moyenne $\bar{e}_0$ du film : $t < t_b$ . . . . .	95
7.3.3 Drainage d'un film de liquide visqueux : $t > t_b$ . . . . .	100
8. Étude du temps de remplissage de réservoirs cylindriques . . . . .	109
8.1 Problème posé . . . . .	109
8.2 Montage expérimental . . . . .	109
8.3 Observations expérimentales . . . . .	111
8.3.1 Exemple de remplissage . . . . .	111
8.3.2 Influence de la hauteur d'eau $h$ . . . . .	111
8.3.3 Influence des paramètres géométriques . . . . .	112
8.4 Modèle . . . . .	112
8.5 Résultats expérimentaux et discussions . . . . .	113
8.5.1 Temps de remplissage $T_r$ . . . . .	113
8.5.2 Discussion sur les effets de courbure et visqueux . . . . .	114
8.6 Comparaison entre vidange et remplissage . . . . .	114
9. Conclusion sur les temps longs . . . . .	117

PARTIE III : Temps courts et oscillateurs associés à la vidange et au remplissage de tubes cylindriques	121
10. Étude du temps court lié à la vidange d'un réservoir	121
10.1 Problème posé	121
10.2 Montage expérimental	121
10.3 Observations expérimentales	123
10.3.1 Influence des paramètres géométriques	125
10.3.2 Influence des paramètres physiques	128
10.4 Modèles	129
10.4.1 Analogie mécanique : modèle masse-ressort	129
10.4.2 Prise en compte des effets non-linéaires	134
10.5 Résultats expérimentaux et discussions	137
11. Étude du temps court lié au remplissage d'un réservoir	141
11.1 Problème posé	141
11.2 Montage expérimental	141
11.3 Observations expérimentales	143
11.3.1 Premières observations	143
11.3.2 Influence de la hauteur d'eau $h$	143
11.3.3 Influence de la longueur $L$	144
11.3.4 Influence du rayon d'échange $r$	145
11.3.5 Influence du rayon $R$	145
11.4 Modèles	146
11.4.1 Analogie mécanique : le résonateur de Helmholtz	146
11.4.2 Remarque sur le calcul de $X_{max}$	149
11.4.3 Modèle pour le temps d'entrée de l'eau	150
11.4.4 Modèle de remplissage	150
11.5 Résultats expérimentaux et discussions	151
12. Conclusion sur les temps courts d'émission de bulles	153
Conclusion	155
Annexe	159
A. Origine du retour à l'équilibre	161
A.1 Origine physique de l'instabilité	161
A.2 Analyse linéaire de stabilité de l'interface	162
A.3 Sélection d'une longueur - Mécanisme de fusion entre bulles	164
B. Synthèse bibliographique sur les bulles infinies	167
B.1 Bulles infinies dans les tubes cylindriques	167
B.2 Influence de la viscosité et de la tension de surface sur la vitesse de remontée d'une bulle infinie	170
B.3 Bulles infinies dans les tubes non-cylindriques	171
C. Présentation des tubes pour l'étude des bulles infinies	173



D. Détails complémentaires de calcul pour l'étude de la bulle visqueuse dans un tube de section rectangulaire . . . . .	177
---	-----

## TABLE DES FIGURES

0.1	Schéma du problème posé par le C.T.S.N. . . . .	1
0.2	Photographies du remplissage du réservoir du CTSN . . . . .	2
0.3	Expérience du CTSN : Niveau de l'eau dans le tube . . . . .	3
1.1	Présentation du problème : (a) cas général (b) tube cylindrique . . . . .	9
1.2	Photographie d'une bulle infinie . . . . .	10
1.3	Espace des paramètres . . . . .	12
1.4	Configuration A . . . . .	14
1.5	Configuration B . . . . .	14
1.6	Configuration C . . . . .	15
1.7	Configuration A. Impossibilité de l'étude de la transition $A_{34}$ . . . . .	15
1.8	Impossibilité de l'étude de la transition $A_{23}$ . . . . .	15
1.9	Présentation des transitions possibles . . . . .	16
2.1	Schéma du montage expérimental . . . . .	17
2.2	Schéma explicatif de la méthode de montage des petits tubes . . . . .	19
2.3	Histogramme des résultats de nos mesures de vitesse de bulle . . . . .	21
3.1	Trajectoires de bulles dans les premiers instants de la remontée . . . . .	24
3.2	Trajectoires de bulles dans des tubes cylindriques . . . . .	24
3.3	Trajectoire d'une bulle dans les derniers instants de la remontée . . . . .	25
3.4	$U_b^2$ en fonction de $g R_{equ}$ . Tubes cylindriques. Région 1 . . . . .	26
3.5	$U_b^2$ en fonction de $g R_{equ}$ . Tubes rectangulaires. Région 1 . . . . .	27
3.6	$U_b$ en fonction de $g R_{equ}^2/\nu$ . Tubes cylindriques. Région 2 . . . . .	28
3.7	$U_b$ en fonction de $g R_{equ}^2/\nu$ . Tubes rectangulaires. Région 2 . . . . .	29
3.8	$Fr_{equ}$ en fonction de $Re_{equ}$ . Transition $A_{12}$ . . . . .	30
3.9	$\bar{U}_i$ en fonction de $Bo_{equ}$ . Transition $A_{13}$ . . . . .	32
3.10	$\bar{U}_\nu$ en fonction de $Bo_{equ}$ . Transition $A_{24}$ . . . . .	33
4.1	Notations utilisées pour l'écoulement 2D plan. . . . .	38
4.2	Structure de l'écoulement au $2^{nd}$ ordre du développement de $\psi$ . . . . .	39
4.3	Discussion sur le signe des coefficients de l'équation (4.23) . . . . .	39
4.4	Ligne de courant $\psi = 0$ au $3^e$ ordre du développement de $\psi$ . . . . .	40
4.5	Notations utilisées pour l'écoulement 2D axisymétrique. . . . .	43
4.6	Présentation du problème. Bulle 2D plane . . . . .	47
4.7	Présentation du problème. Bulle 2D axisymétrique . . . . .	48
4.8	Problème de la bulle de Hadamard-Rybczynski . . . . .	49
5.1	Bulle infinie remontant dans un tube rectangulaire rempli d'eau . . . . .	56
5.2	Formes des lignes de courant dans le plan $(x, z)$ . . . . .	57
5.3	$U_b^2$ en fonction de $gP$ . Tubes rectangulaires. Région 1 . . . . .	59
5.4	$U_b^2$ en fonction de $gP$ . Tubes de section circulaire, carrée, triangulaire, rectangulaire et toroïdale. Région 1 . . . . .	60

5.5	Schéma du tube toroïdal . . . . .	61
5.6	Photographies d'une bulle toroïdale dans de l'eau . . . . .	62
5.7	$U_b$ en fonction de $gS/\nu$ . Tubes rectangulaires. Région 2 . . . . .	65
5.8	$U_b$ en fonction de $gS/\nu$ . Tubes de section circulaire, carrée, triangulaire et rectangulaire. Région 2 . . . . .	66
5.9	$Fr_f$ en fonction de $Re_f$ . Tubes de section circulaire, carrée, triangulaire et rectangulaire. Transition $A_{12}$ . . . . .	68
5.10	$1 - \bar{U}_{i,f}^2$ en fonction de $(a/R)^2$ . Tubes cylindriques. Région 3 . . . . .	70
5.11	Schéma explicatif de la définition de $R_1$ et $R_2$ . . . . .	71
5.12	$\bar{U}_{i,f}$ en fonction de $Bo_m$ et $Bo_G$ . Tubes de section circulaire, carrée et triangulaire. Transition $A_{13}$ . . . . .	72
5.13	$\bar{U}_{i,f}$ en fonction de $Bo_f$ . Tubes de section circulaire, carrée et triangulaire. Transition $A_{13}$ . . . . .	73
5.14	$1 - \bar{U}_{i,f}^2$ en fonction de $(a/R_G)^2$ . Tubes de section circulaire, carrée et triangulaire. Région 3 . . . . .	74
5.15	$1 - \bar{U}_{\nu,f}$ en fonction de $(a/R)^2$ . Tubes de section circulaire. Région 4 . . . . .	75
5.16	$\bar{U}_{\nu,f}$ en fonction de $Bo_f$ . Tubes de section circulaire, carrée et triangulaire. Transition $A_{24}$ . . . . .	76
5.17	$1 - \bar{U}_{\nu,f}$ en fonction de $(a/R_G)^2$ . Tubes de section circulaire, carrée et triangulaire. Région 4 . . . . .	77
5.18	Forme de la bulle dans un tube de section carrée . . . . .	78
5.19	Vérification de la loi de F. P. Bretherton. Région 4 . . . . .	79
7.1	Photographies de la vidange de tubes cylindriques . . . . .	85
7.2	Dispositif expérimental n°1 . . . . .	87
7.3	Dispositif expérimental n°2 . . . . .	87
7.4	Vue en coupe de la section d'échange . . . . .	88
7.5	Trajectoires $z/L(t)$ de l'interface . . . . .	89
7.6	$T_v$ en fonction de $r$ . . . . .	90
7.7	$T_v/T_\infty$ en fonction de $R/r$ . . . . .	91
7.8	Schéma du montage de pesée . . . . .	93
7.9	Exemple de signal de pesage $M(t)$ . . . . .	94
7.10	Photographie d'une bulle infinie dans un cylindre . . . . .	95
7.11	$\bar{e}_0$ en fonction de $R$ . . . . .	96
7.12	$\bar{e}_0$ en fonction de $\nu$ . . . . .	97
7.13	Schéma de principe du modèle . . . . .	98
7.14	$\bar{e}_0/R$ en fonction de $(\nu^2/(gR^3))^{1/6}$ . . . . .	100
7.15	$\bar{e}_0/R$ en fonction de $Re^{-1/3}$ . . . . .	101
7.16	Schéma de présentation des paramètres des modèles . . . . .	103
7.17	$\bar{e}/\bar{e}_0$ en fonction de $t/\tau_0$ . 1 <sup>er</sup> modèle . . . . .	104
7.18	$\bar{e}/\bar{e}_0$ en fonction de $t/\tau_0$ . 2 <sup>nd</sup> modèle . . . . .	108
8.1	Dispositif expérimental . . . . .	110
8.2	Vue en coupe de la section d'échange . . . . .	110
8.3	Diagramme spatio-temporel . . . . .	111
8.4	Position moyenne de l'interface $z$ en fonction du temps . . . . .	112
8.5	$T_r$ en fonction de $r$ . . . . .	113
8.6	$T_r/T_\infty$ en fonction de $R/r$ . . . . .	114
8.7	Comparaison entre temps de vidange et temps de remplissage . . . . .	115
10.1	Dispositif expérimental. . . . .	122

10.2	Exemple de signal du capteur de pression. . . . .	124
10.3	Exemples de signal du capteur de pression. Tube 2 . . . . .	124
10.4	Période $T_0^v$ en fonction de $z^*$ . tube 1 . . . . .	125
10.5	Période $T_0^v$ en fonction de $z^*$ . tube 2 . . . . .	126
10.6	Période $T_0^v$ en fonction de $z^*$ . tube 3 . . . . .	126
10.7	Période $T_0^v$ en fonction de $z^*$ . influence de $\rho$ . . . . .	127
10.8	Période $T_0^v$ en fonction de $z^*$ . influence de $\nu$ . . . . .	128
10.9	Photographie de l'échange eau-huile . . . . .	129
10.10	Présentation des forces en jeu à l'équilibre . . . . .	130
10.11	Présentation des données du premier modèle. . . . .	131
10.12	$T_{exp}/T_0$ en fonction de $z_{eq}^*$ . tube 1 . . . . .	132
10.13	$T_{exp}/T_0$ en fonction de $z_{eq}^*$ . tube 2 . . . . .	133
10.14	$T_{exp}/T_0$ en fonction de $z_{eq}^*$ . tube 3 . . . . .	133
10.15	$T^* = T/T_0$ en fonction de $z_{eq}^*$ . tube 1 . . . . .	138
10.16	$T^* = T/T_0$ en fonction de $z_{eq}^*$ . tube 2 . . . . .	138
10.17	$T^* = T/T_0$ en fonction de $z_{eq}^*$ . tube 3 . . . . .	139
11.1	Montage expérimental . . . . .	142
11.2	Vue en coupe de la section d'échange . . . . .	142
11.3	Observations expérimentales d'une période . . . . .	144
11.4	Influence de $L$ sur le temps $T_0^r$ . . . . .	145
11.5	Influence de $r$ sur le temps $T_0^r$ . . . . .	146
11.6	Influence de $R$ sur le temps $T_0^r$ . . . . .	147
11.7	Schéma de principe du résonateur de Helmholtz . . . . .	147
11.8	$T_0^r$ en fonction de $z^*$ . Premier modèle . . . . .	150
11.9	$T_0^r$ en fonction de $z^*$ . Second modèle . . . . .	151
A.1	Schéma de principe de l'instabilité de Rayleigh-Taylor dans le cas où $\sigma = 0$ . . .	161
A.2	Schéma de principe de l'instabilité de Rayleigh-Taylor dans le cas où $\sigma \neq 0$ . . .	161
A.3	Schéma de principe de l'instabilité de Rayleigh-Taylor . . . . .	163
A.4	Courbe de dispersion de l'instabilité de Rayleigh-Taylor . . . . .	163
A.5	Instabilité de Rayleigh-Taylor dans un tube de largeur $2R$ . . . . .	164



## LISTE DES TABLEAUX

1.1 Copie du tableau 4 de D. Dumitrescu. Dans la version originale, $K_1$ est noté $\lambda$ . Nous avons rajouté en dernière colonne le nombre de Bond, $Bo$ . . . . .	11
1.2 Copie du tableau 4 de R.M. Davies et S.G. Taylor. La dernière colonne présentant le nombre de Bond a été rajouté par nos soins. . . . .	11
2.1 Définitions du périmètre, de la surface et du rayon équivalent pour les différentes sections de tube utilisées . . . . .	18
2.2 Propriétés physiques des fluides utilisés (à 25°C) . . . . .	20
7.1 Paramètres géométriques des tubes utilisés dans nos expériences de vidange . . .	88
7.2 Dimensions des tubes utilisés pour l'étude du drainage de fluide visqueux . . . .	93
7.3 Estimation de l'incertitude sur la mesure de $M_{liq}(t)$ . . . . .	94
7.4 Comparaison des deux méthodes de mesure de l'épaisseur $\bar{e}_0$ . Mesures effectuées dans le tube 5 . . . . .	96
8.1 Paramètres géométriques des tubes utilisés dans nos expériences de remplissage .	110
8.2 Influence de la hauteur d'eau $h$ : Temps de remplissage $T_r$ en fonction de la hauteur d'eau au dessus du tube $h$ dans le cas du tube 1 pour un rayon d'échange $r = 0,010$ m . . . . .	111
10.1 Paramètres géométriques des tubes utilisés . . . . .	123
10.2 Paramètres physiques des liquides . . . . .	123
11.1 Caractéristiques géométriques des tubes utilisés . . . . .	143
11.2 influence de la hauteur d'eau $h$ : Période des oscillations $T_0^r$ en fonction de la hauteur d'eau au dessus du tube $h$ (m) à mi-remplissage ( $z^* = 0,5$ ), tube 6 : $L = 0,4300$ m, $R = 0,0395$ m et $r = 0,0100$ m . . . . .	144
C.1 Caractéristiques géométriques des tubes cylindriques . . . . .	173
C.2 Caractéristiques géométriques des tubes à base carrée . . . . .	174
C.3 Caractéristiques géométriques des tubes à base triangulaire . . . . .	175
C.4 Caractéristiques géométriques des tubes à base rectangulaire . . . . .	176



# INTRODUCTION

## Origine de la thèse

Le problème industriel à l'origine de cette thèse expérimentale nous a été posé par le Centre Technique des Systèmes Navals (C.T.S.N.) de Toulon. Il concerne la détermination de la loi de remplissage d'un réservoir vertical placé en immersion. Ce réservoir est une chambre d'éjection laissée vide et qu'il convient de remplir d'eau pour rétablir l'équilibre du sous marin. La question posée par le C.T.S.N. est : Au bout de combien de temps doit-on fermer la porte du réservoir pour que la masse d'eau entrée soit égale à la masse éjectée du réservoir à  $t = 0$  ?

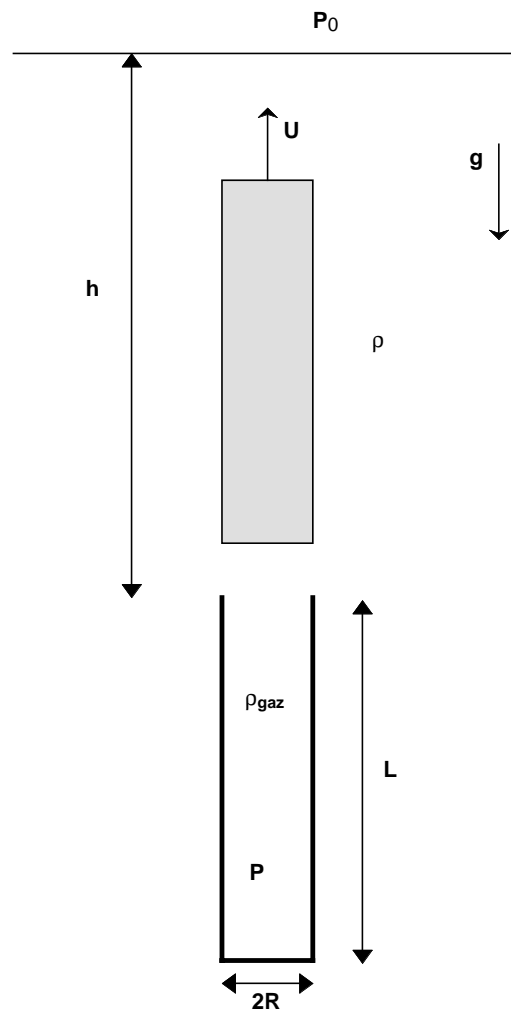


Figure 0.1: Schéma du problème posé par le C.T.S.N.

Une des premières expériences menée par le C.T.S.N. pour répondre à cette question est schématisée sur la figure 0.1. Le réservoir cylindrique de longueur  $L$  et de rayon  $R$  est placé à une



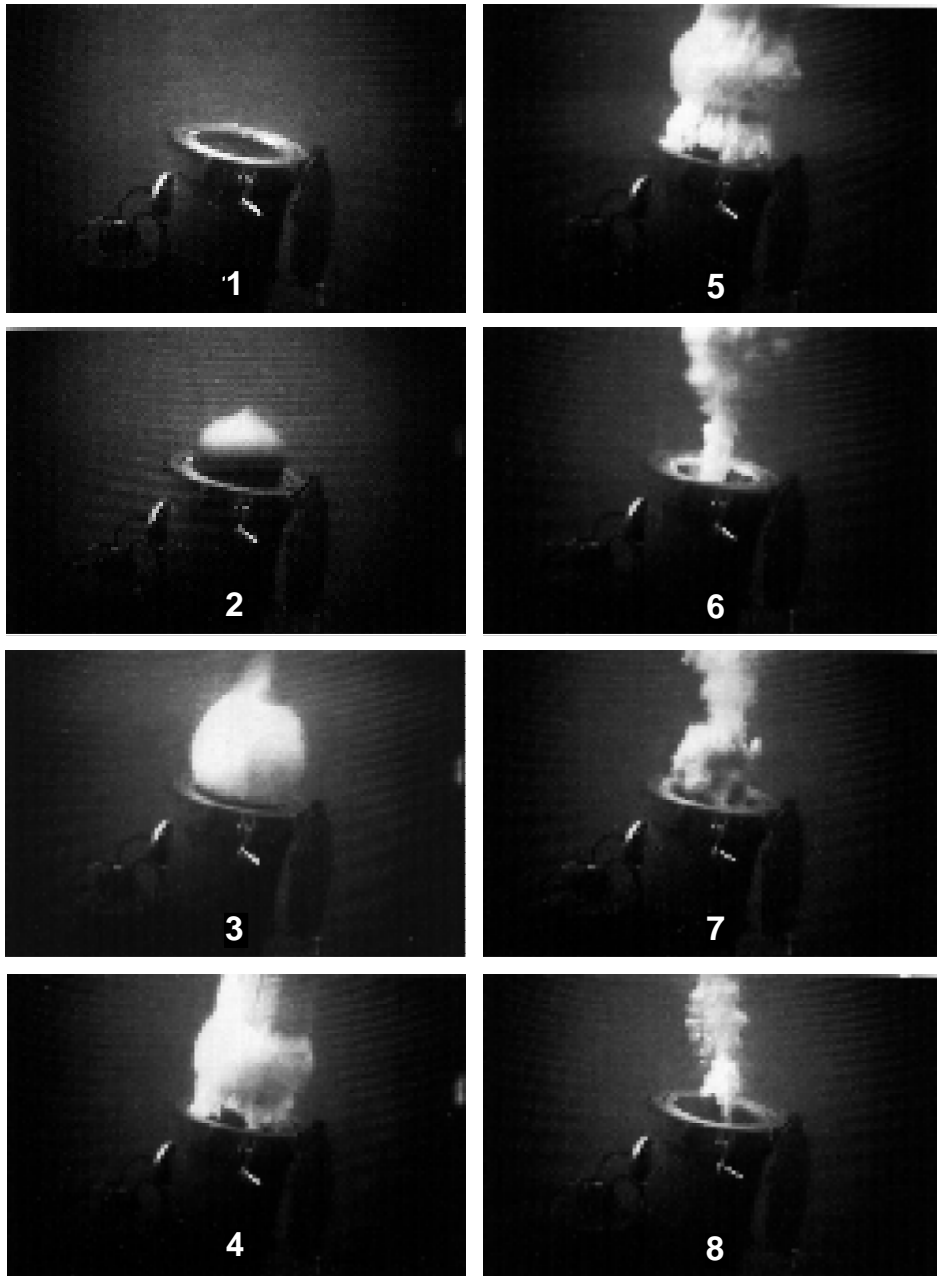


Figure 0.2: Expérience du CTSN : Sortie d'une bulle lors du remplissage du tube .  
 $\Delta t$  entre deux images : 0,2 s.

profondeur  $h$ , sous le niveau de la mer. La pression atmosphérique est notée  $P_0$ ,  $g$  est l'accélération de la gravité et l'eau de mer est caractérisée par sa densité  $\rho$ . A l'instant  $t = 0$ , la masse éjectée laisse à l'intérieur du réservoir un mélange gazeux à la pression  $P = P_0 + \rho gh$  de densité  $\rho_{gaz}$  petite devant  $\rho$ . Cette configuration initiale d'un fluide léger placé sous un fluide plus lourd et soumis à l'accélération de la gravité  $g$  dirigée vers le fluide le plus dense est instable au sens de Rayleigh-Taylor [66], [67] et [76]. Ainsi, le gaz remonte à la surface tandis que l'eau de mer va remplir le réservoir.

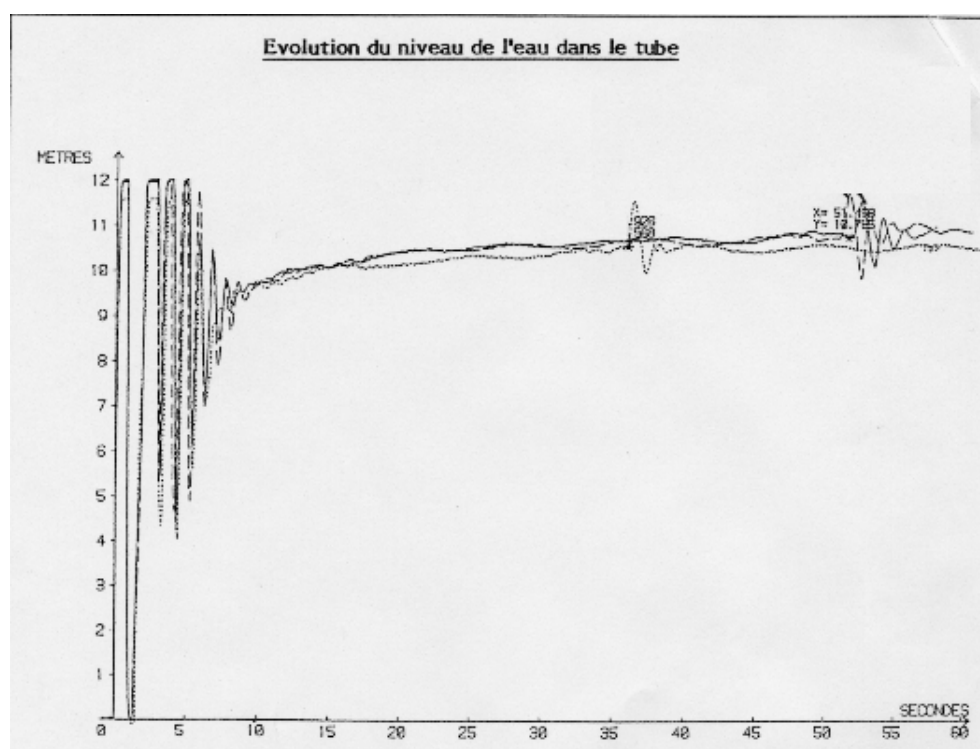


Figure 0.3: Expérience du CTSN : Niveau de l'eau dans le tube en fonction du temps. Les dimensions sont de l'ordre du mètre.

Un exemple d'essai sur une maquette est présenté sur la figure 0.2. Le temps entre deux photographies est de 0,2 s. L'appareillage de visualisation est placé en sortie de tube. L'eau de mer et le gaz s'échangent par un orifice unique, le retour à l'équilibre s'effectue par saccades. On observe l'installation d'un régime périodique de sortie de bulles de gaz et entrée d'eau dans le réservoir. Les photographies de la figure 0.2 montrent la sortie d'une bulle d'air à différents instants sur une période. Sur la première image, la bulle n'est pas sortie et du liquide rentre dans le réservoir. La bulle apparaît sur la seconde image sous une forme sphérique. Sur les images 3, 4 et 5, elle commence sa remontée à la surface en entraînant dans son sillage une multitude de bulles de tailles inférieures. Les images 6, 7 et 8 illustrent la remontée de ces bulles plus petites avant l'apparition d'une nouvelle bulle. Ce cycle dont la durée peut être estimée au vu des images à 1,4 s se répète une dizaine de fois au cours du remplissage du tube.

La figure 0.3 présente l'enregistrement de la différence de pression entre le haut et le bas du tube en fonction du temps. Les capteurs de pression sont placés à l'intérieur du réservoir. De cette différence de pression, le C.T.S.N. déduit le niveau de l'eau dans le tube. Si nous nous limitons à l'analyse des temps, nous observons 6 oscillations durant les 9 premières secondes. Ces oscillations sont dues à la rentrée périodique d'eau et à son impact sur le capteur de fond de tube. La période peut être estimée à  $9/6 = 1,5$  s. Après ces 9 secondes, le tube est rempli à 95 % et fini de dégazer.

## Problème traité et structure de la thèse

Si  $V(t)$  est le volume d'eau contenu dans le réservoir en fonction du temps  $t$ , l'étude de la loi de remplissage consiste à déterminer la loi :

$$V = f(t, \rho, \nu, \sigma, P, L, R, h), \quad (0.1)$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique du liquide et  $\sigma$  sa tension de surface. L'ensemble de l'étude est placé dans la limite  $\rho \gg \rho_{gaz}$  et  $\mu \gg \mu_{gaz}$  où  $\mu$  et  $\mu_{gaz}$  sont les viscosités dynamiques, respectivement du fluide dense et du fluide léger. Cette hypothèse est raisonnable dans le cadre du problème posé où les gaz d'échappement ont une densité 1000 fois plus faible que la densité de l'eau de mer et une viscosité dynamique 100 fois plus faible.

Pour atteindre cet objectif, il est important de décrire les différents phénomènes accompagnant le remplissage : nous observons, tout d'abord, un phénomène associé à une échelle de temps court : l'émission de bulles de gaz de taille comparable au rayon du réservoir sous marin. Ce temps court est, dans l'expérience réalisée par le C.T.S.N., de l'ordre de la seconde. Il y a ensuite un temps long qui est celui du retour à l'équilibre. C'est le temps nécessaire au remplissage du réservoir. Il est de l'ordre d'une dizaine de secondes. Le problème du remplissage présente donc un temps court d'oscillation ( $\sim 1,5$  s dans l'expérience du C.T.S.N.) et un temps long de remplissage ( $\sim 9$  s).

Le fait que ces deux temps aient un ordre de grandeur différent va permettre de séparer les phénomènes physiques : sur l'échelle du temps long, on ne voit pas les oscillations et le remplissage est continu. Au contraire, sur l'échelle du temps court, le niveau moyen ne change pas et l'on oscille autour d'une position moyenne fixe. Pour l'étude du temps long de remplissage, la séparation d'échelle est à l'origine de la symétrie entre le problème du remplissage d'un réservoir sous marin et la vidange dans l'air de ce réservoir initialement rempli de liquide.

L'étude expérimentale de cette seconde configuration de vidange est bien plus aisée dans la mesure où le phénomène est réellement continu, l'interface bien plus facile à repérer et les volumes de fluide mis en jeu bien plus réduits. Ce dernier point va nous permettre d'utiliser des fluides de viscosité et de tension de surface très différents de l'eau et de déterminer par là même l'influence de ces deux paramètres physiques majeurs.

L'étude de la vidange des tubes est reportée dans la partie I. La pertinence de la symétrie remplissage/vidange pour l'étude des temps long est établie dans la partie II. L'étude des temps courts occupe l'ensemble de la partie III.

## Cadre général de l'étude et autres phénomènes impliqués

Nous ramenons le problème posé par le C.T.S.N. à l'étude du retour à l'équilibre de deux fluides immiscibles initialement instable au sens de Rayleigh-Taylor. L'origine physique et l'étude de l'instabilité de Rayleigh-Taylor est rappelée en annexe A.

Si cette instabilité a été initialement étudiée par Lord Rayleigh [67] qui s'intéressait aux mécanismes de production de gouttes et de bulles, elle fait actuellement l'objet d'une littérature abondante due en grande partie à son importance dans le phénomène de fusion induite par confinement inertiel. Cette méthode de mise en œuvre de la fusion nucléaire consiste à irradier par laser la face externe d'une coque contenant un mélange Deutérium-Tritium, l'instabilité apparaît lorsque le fluide léger (les matériaux vaporisés par ablation) pousse le fluide lourd (matériau encore solide). La quantité d'énergie à mettre en œuvre pour initier la fusion dépend très fortement de la symétrie sphérique du front d'ablation par Laser, il est donc devenu important ces vingt dernières années de comprendre le mécanisme de déstabilisation de ce front [57]. Toujours dans le domaine de la fusion nucléaire, on peut citer l'implication de l'instabilité

de Rayleigh-Taylor dans le phénomène d'implosion électromagnétique d'une couche métallique [34]. Cette instabilité intervient aussi dans des phénomènes naturels tels que, par exemple, le renversement de l'extérieur du cœur d'une étoile massive lors de son effondrement [74] ou la formation de jet extrêmement lumineux dans des nuages gazeux en rotation [63].

La première phase de l'instabilité de Rayleigh-Taylor est parfaitement décrite par une théorie linéaire qui est détaillée dans la section A.2. La seconde phase de l'instabilité de Rayleigh-Taylor se caractérise par la fusion des bulles de différentes tailles issues de l'instabilité. La synthèse bibliographique de ces mécanismes de fusion de bulle est présentée dans la section A.3.

Le retour à l'équilibre s'accompagne donc d'un phénomène de déplacement de l'interface entre les fluides sous la forme de bulles. Cette étude s'applique à une multitude de problèmes associés : Dans le domaine de l'ingénierie chimique, cité par J. Magnaudet et I. Eames [53], les interfaces gaz-liquides ont une influence sur le mélange des constituants et sur les échanges de chaleur intervenant dans les réacteurs chimiques. De même, le déplacement d'interface intervient dans la fabrication des alliages, joue sur le bon fonctionnement des échangeurs de chaleur à deux phases et sur les phénomènes d'ébullition-condensation dans les centrales thermiques.

Lors du forage d'un puits de pétrole, les déchets créés par le foret sont aspirés vers la surface le long de l'axe de forage. Cette boue visqueuse peut être parcourue par de longues bulles de gaz qui découpent le liquide en bouchon de haute densité. Ces bouchons, appelés "Slug", créent des forces considérables sur la structure lors des changements de direction ou lors de leur arrivée dans une pompe ou tout autre équipement industriel de forage. A. E. Dukler et J. Fabre [27] présentent une synthèse de l'occurrence de ces écoulements appelés "Slug flow". Un bilan des modélisations menées sur ces écoulements est présenté par J. Fabre et A. Liné [29]. Dans un autre contexte, le refroidissement d'urgence de réacteurs nucléaires nécessite l'intervention de ces "Slug flow", afin d'augmenter les coefficients d'échange thermique. Cet écoulement prend place dans des tubes non-circulaires. C'est un domaine industriel où l'influence de la forme des tubes doit être prise en compte pour la compréhension des déplacements d'interfaces.

L'exemple de la remontée de bulle lors du forage de puits montre qu'il est intéressant de comprendre la propagation d'interface se déroulant dans un environnement visqueux à l'intérieur d'une configuration toroïdale autour de l'axe de forage. De même, le transport du pétrole des profondeurs vers la surface est le cadre de la propagation de bulles de gaz dans un environnement visqueux.

Dans le cadre de la microfluidique, ce sont des effets de tension de surface qui apparaissent. Ces effets peuvent concerner la propagation d'une bulle dans un capillaire sanguin ou dans une seringue, phénomène qu'il est d'important de savoir contrôler (ou éviter tout simplement). De manière moins vitale, les capillaires des imprimantes à jet d'encre peuvent être le siège de propagation de bulles de gaz. Des présentations de différents systèmes microfluidiques sont proposées par P. Gravesen, J. Branbjerg et O. S. Jensen [36], S. Shoji et M. Esachi [73] et I. Mas [55].



**PARTIE I**  
**ÉTUDE DE LA VITESSE DES BULLES INFINIES**



# 1. PROBLÈME POSÉ

## 1.1 Introduction

Les études les plus anciennes sur les bulles infinies semblent venir de l'école allemande du début du siècle autour de L. Prandtl (H. Blasius [12] et Förster [30]). La seconde vague de travaux sur le sujet a été initiée par D. Dumitrescu [28], aussi étudiant de L. Prandtl, en 1943, sept ans avant l'article le plus référencé du sujet de R.M. Davies et S.G. Taylor [25] en 1950. En observant les dates de publication, il est difficile de ne pas relier ces études aux deux guerres mondiales et, plus précisément, au développement des sous-marins.

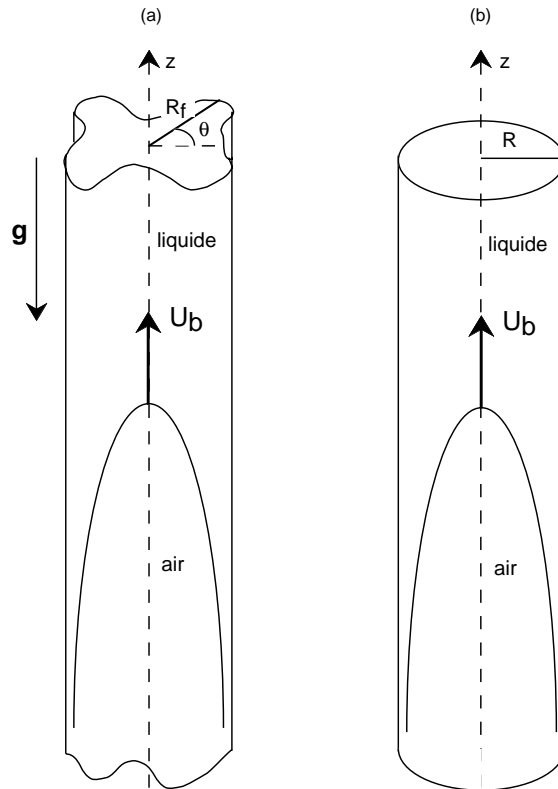


Figure 1.1: Présentation du problème : (a) cas général (b) tube cylindrique

Le problème que nous étudions est illustré sur la figure 1.1-(a) : une longue bulle remonte dans



un tube vertical de section arbitraire, initialement rempli d'un liquide caractérisé par sa densité  $\rho$ , sa viscosité cinématique  $\nu$  et sa tension de surface  $\sigma$ . La dynamique de la remontée est gouvernée par l'accélération de la gravité  $g$  et caractérisée par une vitesse constante  $U_b$ . Si  $R_f$  est une longueur caractérisant la forme du tube, le problème est de déterminer la loi :

$$U_b = f(g, \rho, \nu, \sigma, R_f) \quad (1.1)$$

La photographie présentée sur la figure 1.2 est un exemple de bulle infinie se propageant dans un tube cylindrique vertical. Cette photographie a été prise avec un tube de rayon  $R = 0,040$  m, initialement rempli d'eau. Cette bulle remonte dans le tube à une vitesse  $U_b = 0,305$  m.s<sup>-1</sup>. On remarque que le nez de la bulle est quasi sphérique et qu'il se forme un film de fluide d'épaisseur non nulle entre la bulle et la paroi du tube. L'épaisseur de ce film diminue avec la distance à l'apex.

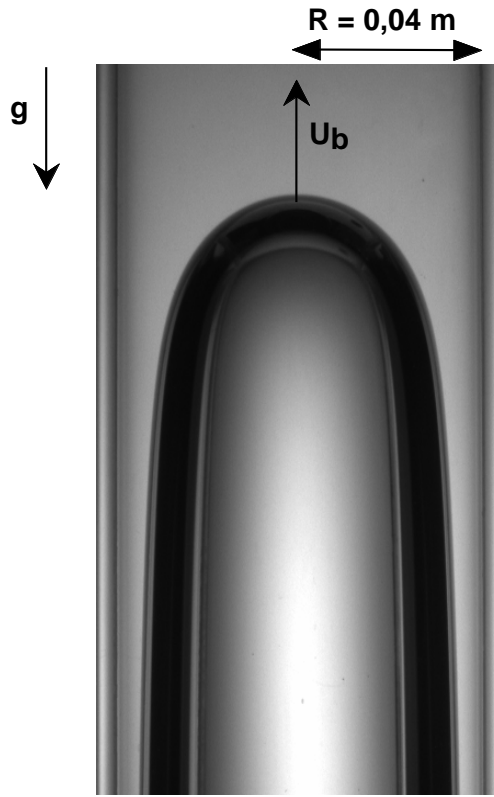


Figure 1.2: Photographie d'une bulle infinie se propageant dans un tube cylindrique de rayon  $R = 0,040$  m rempli d'eau. La vitesse  $U_b$  d'ascension est  $0,305$  m.s<sup>-1</sup>

## 1.2 Résultats de la littérature et paramètres de similitude

Dans le cas des tubes cylindriques,  $R_f = R$  (figure 1.1-(b)), l'étude des bulles infinies a été initiée par D. Dumitrescu [28]. En considérant la limite des grands nombres de Reynolds,  $Re \equiv U_b R / \nu \gg 1$ , D. Dumitrescu a montré, de manière expérimentale et théorique, que la vitesse  $U_b$  varie comme :

$$U_b = K_1 \sqrt{gR} \quad \text{avec} \quad K_1 \approx 0,5. \quad (1.2)$$

Il a aussi étudié l'influence de la courbure de l'interface en observant la propagation de bulles dans des tubes de tailles comparables avec la longueur capillaire  $a \equiv \sqrt{\sigma/(\rho g)}$ . Ses résultats expérimentaux avec des bulles d'air se propageant dans de l'eau sont présentés sur le tableau

1.1. De gauche à droite, il présente le diamètre  $D$  du tube, le rapport des longueurs  $P = D/a$

$D$ (cm)	$P = D/a$	$K_1$	$Bo = (R/a)^2$
0,99	3,70	0,28	3,42
2,00	7,48	0,47	13,99
3,76	14,06	0,49	49,42
7,00	26,18	0,49	171,35

Table 1.1: Copie du tableau 4 de D. Dumitrescu. Dans la version originale,  $K_1$  est noté  $\lambda$ . Nous avons rajouté en dernière colonne le nombre de Bond,  $Bo$

et la valeur mesurée de  $K_1 = U_b/\sqrt{gR}$ . Nous avons rajouté en dernière colonne la valeur du nombre de Bond  $Bo \equiv (R/a)^2$ . De ce tableau, il en déduit que l'équation (1.2) s'applique dans la limite  $D/a > 8$  ce qui correspond à  $Bo > 16$ . En dessous de cette limite,  $K_1$  n'est plus constant mais devient une fonction croissante du rapport  $D/a$ .

Le travail le plus cité sur ce problème des bulles infinies remontant dans des tubes a été écrit par R.M. Davies et S.G. Taylor [25]. Cet article, présenté en deux parties, concerne, dans un premier temps, le problème de la bulle lenticulaire remontant dans un milieu infini et, dans une seconde partie, le problème des bulles infinies dans des tubes. Les résultats obtenus sur les bulles infinies dans de l'eau sont présentés dans le tableau 1.2. R.M. Davies et S.G. Taylor ne

$D$ (cm)	$K_1$	$Re$	$Bo$
1,23	0,40-0,41	600	5
2,16	0,447-0,468	1600	16
7,94	0,466-0,490	12000	211

Table 1.2: Copie du tableau 4 de R.M. Davies et S.G. Taylor. La dernière colonne présentant le nombre de Bond a été rajouté par nos soins.

discutent pas du problème de la courbure mais attribuent plutôt la diminution de  $K_1$  dans les petits tubes à des effets visqueux : *It will be seen that the values of  $U_b/\sqrt{gR}$  are nearly constant but tend to rise slightly with diameter. This is probably an effect of viscosity.*

Expérimentalement, les études les plus complètes de la littérature sur la remontée de bulles infinies dans des tubes cylindriques sont l'œuvre de E. E. Zukoski [87] et E. T. White et R. H. Beardmore [83]. E. E. Zukoski montre que les effets de courbure apparaissent pour  $Bo < 10$  et que les effets visqueux sont négligeables si  $Re > 200$ . A faible nombre de Reynolds,  $Re < 4$ , E. T. White et R. H. Beardmore montrent que :

$$U_b = K_2 \frac{gR^2}{\nu} \quad \text{avec} \quad K_2 \approx 0,038. \quad (1.3)$$

Ils montrent que cette valeur de  $K_2$  est constante si  $Bo > 17,5$ .

L'annexe B présente une synthèse bibliographique plus complète sur le problème de la vitesse des bulles infinies.

### 1.3 Espace des paramètres et plan de l'étude

La discussion précédente nous permet de dessiner le diagramme de phase dans lequel notre étude doit être menée. Ce diagramme est présenté sur la figure 1.3. L'effet de courbure sur la vitesse de remontée est présenté sur l'axe vertical avec le nombre de Bond ( $Bo$ ) et l'influence de

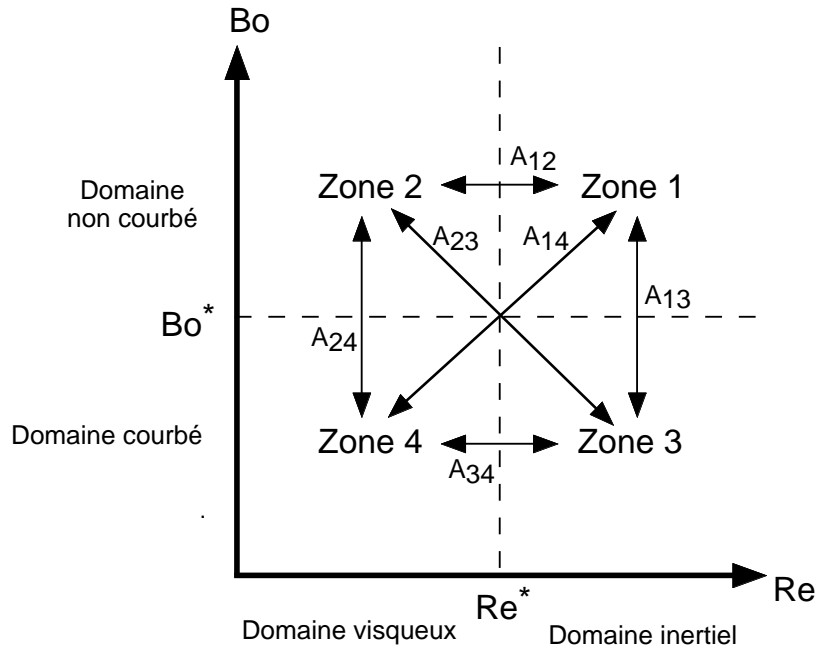


Figure 1.3: Espace des paramètres

la viscosité apparaît sur l'axe horizontal au travers du nombre de Reynolds ( $Re$ ). Les différentes flèches  $A_{ij}$  correspondent aux transitions entre les régions  $i$  et  $j$ . Puisque nous étudions l'effet de la forme du tube, nous devons être prudent sur la définition de  $Re$  et  $Bo$ . Ces définitions seront précisées plus tard. Pour le moment, nous devons juste garder à l'esprit que la courbure et la viscosité sont les effets que nous considérerons en plus de la géométrie du tube. Pour la discussion présente, nous considérons un tube cylindrique de rayon  $R$  pour lequel ces nombres sont définis par  $Re \equiv U_b R / \nu$  et  $Bo \equiv (R/a)^2$ . On distingue 4 régions dans le diagramme 1.3. A faible nombre de Reynolds, l'écoulement est dominé par la viscosité, on parlera de bulles 'visqueuses'. A grand nombre de Reynolds l'écoulement est insensible à la valeur de la viscosité du fluide, on parle alors de bulles 'inertiellles'. De même, à faible nombre de Bond, la dynamique de l'interface est pilotée par la tension de surface tandis qu'à grand nombre de Bond, cette dynamique est indépendante de  $\sigma$ .

Dans la mesure où le moteur de la remontée des bulles est la gravité et les freins sont soit inertiell, soit visqueux, nous utilisons les nombres sans dimensions :

$$\Pi = \frac{\text{Frein}}{\text{Moteur}}. \quad (1.4)$$

Soit :

$$Fr = \frac{\text{Inertie}}{\text{Gravité}} = \frac{\rho U_b^2}{\rho g R} = \frac{U_b^2}{g R} \quad (1.5)$$

et

$$St = \frac{\text{Viscosité}}{\text{Gravité}} = \frac{\mu U_b / R}{\rho g R} = \frac{\nu U_b}{g R^2} \quad (1.6)$$

Dans le régime purement inertiell de la région 1, la vitesse des bulles résulte d'un équilibre gravité-inertiell et l'on observe expérimentalement que le nombre de Froude,  $Fr$ , est constant, i.e.  $U_b = \sqrt{Fr_\infty} \sqrt{gR}$ . De la même façon, dans le régime purement visqueux de la région 2, la vitesse des bulles résulte d'un équilibre gravité-viscosité et l'on observe expérimentalement que le nombre de Stokes,  $St$ , est constant, i.e.  $U_b = St_\infty (gR^2) / \nu$ . Dans le cas des tubes cylindriques, ces deux comportements sont observés avec  $Fr_\infty = 0,25$  et  $St_\infty = 0,038$ .

A la transition entre ces 2 domaines, les deux expressions de la vitesse sont également valides et l'on déduit que la transition doit se produire pour un rayon de tube,  $R_c$ , tel que :

$$\sqrt{Fr_\infty} \sqrt{gR_c} = St_\infty \frac{gR_c^2}{\nu} \quad (1.7)$$

Soit

$$Fr_\infty gR_c = St_\infty^2 \frac{g^2 R_c^4}{\nu^2} \quad (1.8)$$

d'où

$$R_c^3 = \frac{Fr_\infty \nu^2}{St_\infty^2 g} \quad (1.9)$$

Soit encore :

$$R_c = \left( \frac{Fr_\infty}{St_\infty^2} \right)^{1/3} \left( \frac{\nu^2}{g} \right)^{1/3} \quad (1.10)$$

et

$$\frac{R_c}{l_\nu} = \left( \frac{Fr_\infty}{St_\infty^2} \right)^{1/3} \quad (1.11)$$

où  $l_\nu \equiv (\nu^2/g)^{1/3}$  est la longueur visqueuse. Lorsque le rayon  $R$  du tube est grand comparé à  $R_c$ , les effets visqueux sont négligeables devant les effets inertiels. Inversement, dans la gamme  $R < R_c$ , les effets visqueux dominent.

La tradition impose d'évaluer les effets visqueux au travers du nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\text{Inertie}}{\text{Viscosité}} = \frac{\rho U_b^2}{\mu U_b/R} = \frac{U_b R}{\nu} \quad (1.12)$$

Ces trois nombres sont évidemment liés par la relation :

$$\frac{\text{Inertie}}{\text{Viscosité}} = \frac{\text{Inertie}}{\text{Gravité}} \cdot \frac{\text{Gravité}}{\text{Viscosité}} \quad (1.13)$$

$$Re = \frac{Fr}{St} \quad (1.14)$$

Concernant les effets de courbure, nous utilisons le nombre de Bond qui compare les effets de la gravité aux effets de courbure :

$$Bo = \frac{\text{Gravité}}{\text{Courbure}} = \frac{\rho g R}{\sigma/R} = \frac{\rho g R^2}{\sigma} = \left( \frac{R}{a} \right)^2. \quad (1.15)$$

Nous venons de mettre en évidence deux échelles de longueur : la longueur visqueuse  $l_\nu$  et la longueur capillaire  $a$ . Les transitions  $A_{ij}$  entre les différentes régions du diagramme de phase 1.3 vont dépendre de la position relative de l'échelle géométrique vis à vis de ces deux longueurs caractéristiques. Trois cas sont alors envisageables : Sur la figure 1.4-(a), nous présentons la configuration A où la longueur capillaire est plus grande que la longueur visqueuse  $a \gg l_\nu$ . Lorsque le rayon du tube est grand par rapport à  $a$ , la bulle associée appartient à la région 1 : les effets de courbure sont négligeables ainsi que les effets visqueux. En diminuant le rayon  $R$ , on rentre dans la région 3,  $l_\nu < R < a$  : la bulle est inertielle mais les effets de courbure ne peuvent plus être négligés. Finalement, si  $R$  devient inférieur à  $l_\nu$ , la bulle appartient à la région 4 où la bulle est visqueuse et influencée par la courbure et par la viscosité.

Le rapport  $a/l_\nu$  peut s'écrire :

$$\frac{a}{l_\nu} = \left( \frac{\sigma^3}{\rho^3 g \nu^4} \right)^{1/6} \quad (1.16)$$

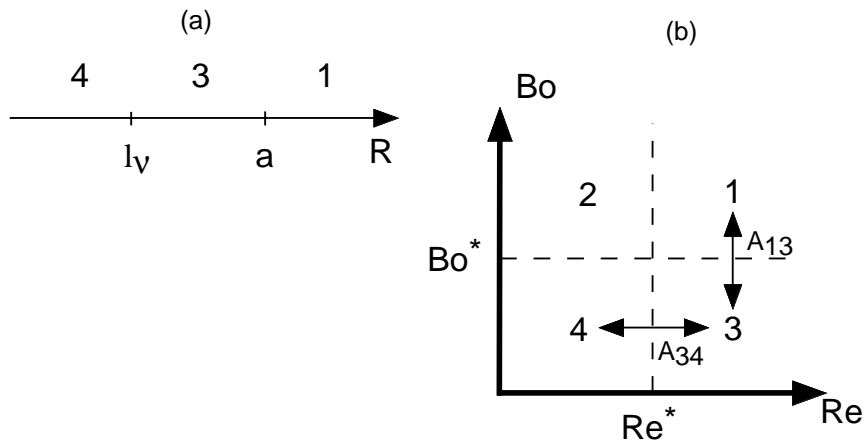


Figure 1.4: Configuration A : la longueur capillaire est supérieure à la longueur visqueuse : (a) position relative des différentes longueurs (b) transitions possibles correspondantes dans le diagramme des phases

Ce nombre sans dimensions est appelé nombre de Morton dans la communauté des bulles suivant l'étude de W. L. Haberman et R. K. Morton [37] publiée en 1954. Cependant, comme il est mentionné par G. D. Fulford [31], P. L. Kapitsa [41] introduit en 1948 la même grandeur adimensionnée dans son étude sur l'écoulement de films minces. Nous allons donc utiliser la dénomination de 'nombre de Kapitsa' pour désigner le rapport des longueurs,  $Ka \equiv a/l_v$ . Dans un champ gravitationnel donné, ce nombre ne dépend que des propriétés physiques du liquide. Par exemple, l'eau dans le champ gravitaire terrestre a un nombre de Kapitsa  $Ka \approx 57$ . Cette valeur, grande devant 1, implique que la longueur capillaire est très grande devant la longueur visqueuse. L'eau peut donc être utilisée pour étudier les transitions  $A_{13}$  et  $A_{34}$  comme présenté sur la figure 1.4-(b). On peut aussi conclure qu'il n'est pas possible d'utiliser de l'eau pour étudier les autres transitions.

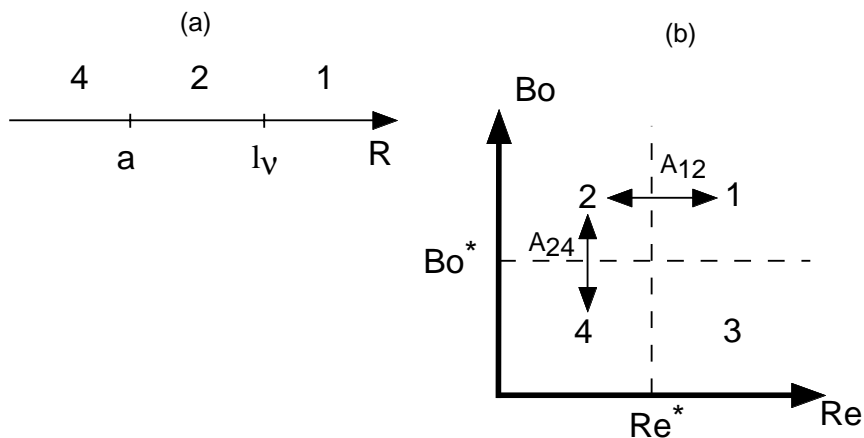


Figure 1.5: Configuration B : la longueur visqueuse est supérieure à la longueur capillaire : (a) position relative des différentes longueurs (b) transitions possibles correspondantes dans le diagramme des phases

Sur la figure 1.5-(a), nous présentons la configuration B où la longueur visqueuse est supérieure à la longueur capillaire  $Ka \ll 1$ . Lorsque  $R$  diminue, les bulles correspondantes appartiennent successivement à la région 1 puis 2 et finalement 4. Les transitions correspondantes,  $A_{12}$  et  $A_{24}$ , sont présentées sur la figure 1.5-(b). L'huile silicone V12500 est, par exemple, caractérisée sur la terre par  $Ka \approx 0,06 \ll 1$ . Cette huile peut donc être utilisée pour étudier les transitions  $A_{12}$  et  $A_{24}$ .

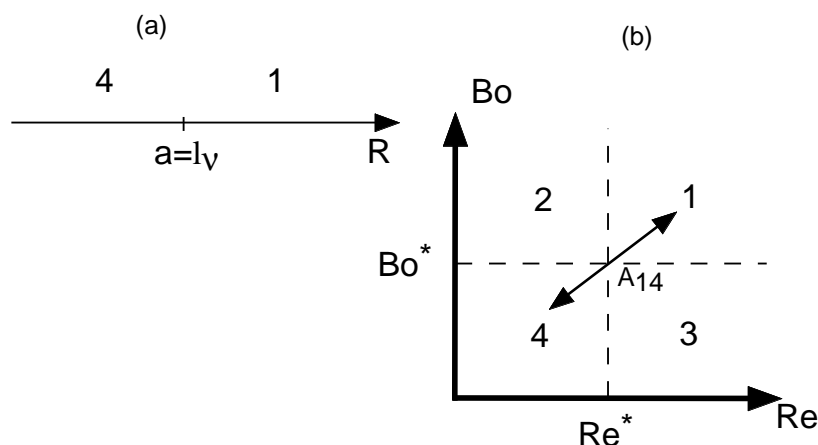


Figure 1.6: Configuration C : la longueur visqueuse est égale à la longueur capillaire : (a) position relative des différentes longueurs (b) transition possible correspondante dans le diagramme des phases

Le cas spécial  $Ka = 1$  où  $a = l_v$  est présenté sur la figure 1.6-(a). Avec ce liquide spécifique, lorsqu'on diminue le rayon  $R$  la bulle passe de la région 1 à la région 4. Ce liquide doit être utilisé pour étudier la transition  $A_{14}$ .

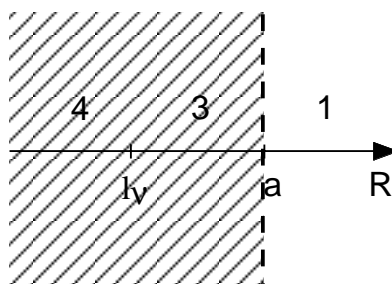


Figure 1.7: Configuration A : le blocage de la bulle pour  $R \sim a$  empêche l'étude de la transition  $A_{34}$

On peut remarquer qu'il existe des transitions impossibles : du fait du blocage des bulles dans les tubes tels que  $R \sim a$ , il est impossible d'observer la transition  $A_{34}$  comme illustré sur la figure 1.7.

La figure 1.8 présente le cas de la transition  $A_{23}$ . On constate qu'il ne peut exister de liquide présentant cette configuration. L'étude de la transition  $A_{23}$  est donc impossible.

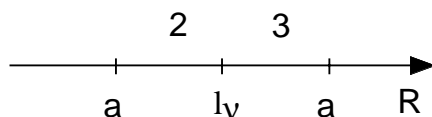


Figure 1.8: Configuration nécessaire à l'étude de la transition  $A_{23}$

Les seules transitions possibles sont présentées sur la figure 1.9.

Cette discussion générale illustre le lien entre le diagramme de phase et les liquides à utiliser pour son étude au travers du rapport des longueurs  $a/l_v$ .

Dans le chapitre 2, nous présentons le montage expérimental utilisé pour l'étude des 4 régions présentées sur la figure 1.3, ainsi que le protocole de mesure de la vitesse des bulles. Le chapitre 3 présente les observations expérimentales pour chacune des régions du diagramme des phases. L'approche analytique mise en place pour modéliser la remontée des bulles infinies est présen-

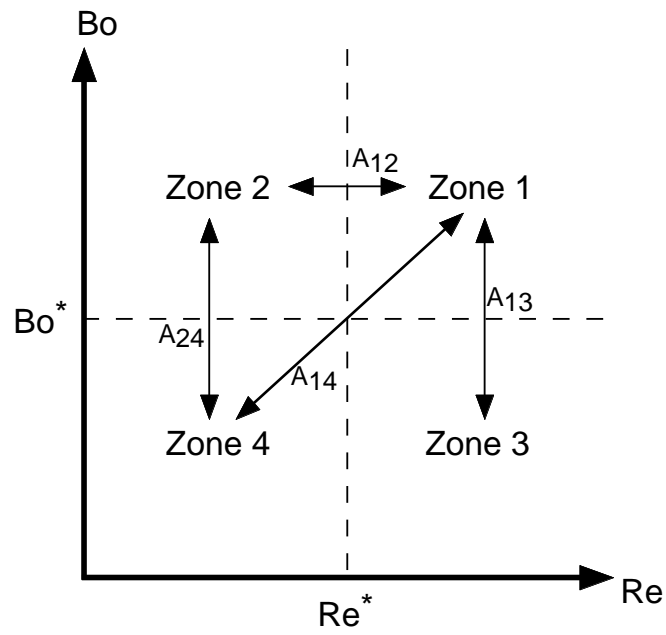


Figure 1.9: Présentation des transitions possibles

tée dans le chapitre 4. Cette méthode générale de détermination de la vitesse  $U_b$  est ensuite confrontée à nos résultats expérimentaux au chapitre 5.

## 2. MONTAGE EXPÉRIMENTAL

### 2.1 Description du montage et du protocole

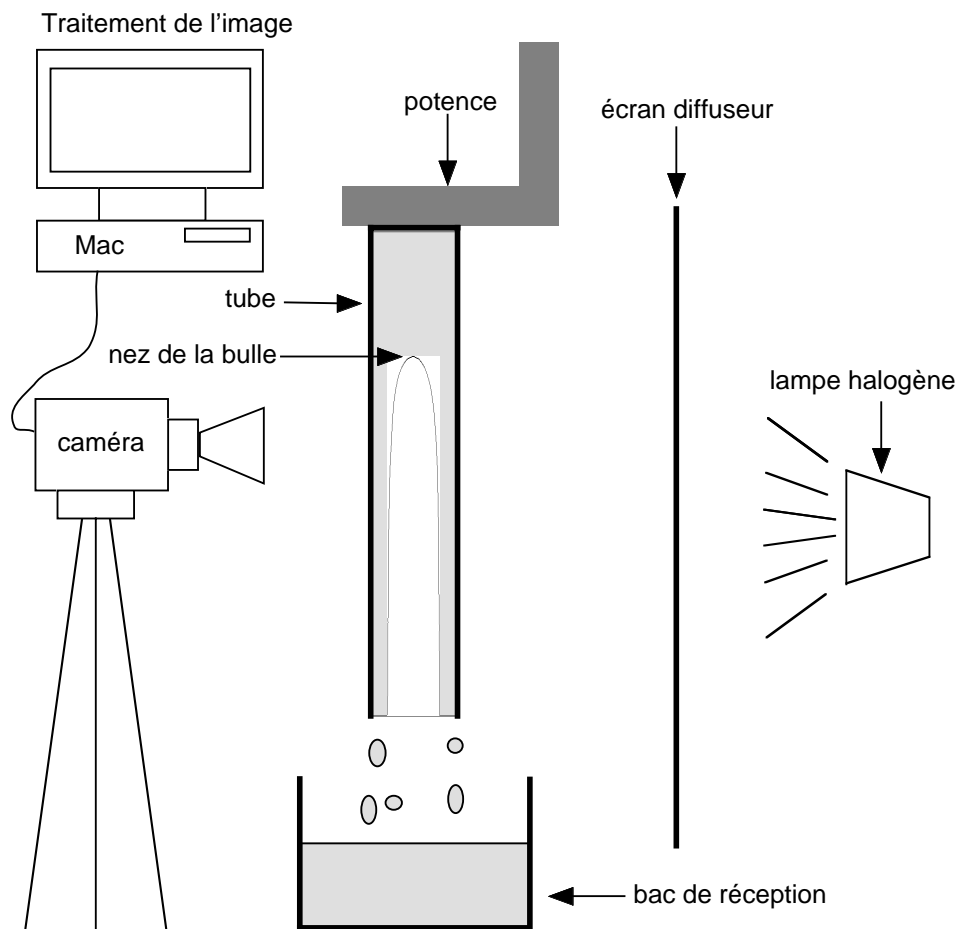


Figure 2.1: Schéma du montage expérimental

Le montage expérimental est schématisé sur la figure 2.1. Un tube, en PVC transparent ou en verre, est maintenu en position verticale sur une potence en aluminium. Il est initialement rempli de liquide et fermé dans sa partie supérieure. Au temps  $t = 0$ , on ouvre la base du tube et l'on filme la remontée de l'interface. Le tube étant transparent, la visualisation de la bulle s'effectue en plaçant un écran diffuseur en PVC translucide derrière le tube et en éclairant cet écran avec une lampe halogène de 1000 W. Ce mode d'éclairage permet d'obtenir des images très contrastées de l'interface air-liquide avec un fond parfaitement uniforme (cf figure 1.2). Une caméra CCD enregistre le mouvement de l'interface à 25 images/seconde. Les images sont récupérées sur un ordinateur et leur traitement informatique nous permet de calculer la vitesse du nez de la bulle  $U_b$ . Il peut être nécessaire de traiter les images pour améliorer le contraste de



manière à mieux repérer la position de l'apex de la bulle.

Une des difficultés expérimentales rencontrées concerne l'ouverture du tube qui doit perturber le moins possible le départ de la bulle. Nous avons donc bouché le tube par une plaque de plastique rigide de poids négligeable (feuille de papier transparent pour rétro-projecteur), ce bouchon a constitué la plus efficace de toutes les solutions testées : il empêche le liquide de s'écouler tout en s'enlevant très facilement d'une simple poussée horizontale en intervenant le moins possible sur les premiers instants de la remontée de la bulle infinie. Lorsque les dimensions des tubes ne permettent plus d'utiliser cette méthode, du fait de la perte de rigidité du plastique sur de grandes longueurs, nous avons utilisé des plaques de bois sur lesquelles est collée de la mousse néoprène de 5 mm d'épaisseur. La mousse néoprène assure l'étanchéité du bouchon et la plaque de bois, sa rigidité. Ce dernier bouchon perturbe notablement l'installation de la bulle ce qui nécessite des tubes de grandes longueurs : de l'ordre de 10 fois le diamètre pour les tubes cylindriques.

La verticalité du tube est un paramètre auquel nous avons été très attentif : l'étude expérimentale de E. E. Zukoski sur l'influence de l'angle montre que la vitesse des bulles infinies augmente très rapidement lorsque le tube s'écarte de la verticale. Pour un tube de rayon  $R = 0,089$  m et un système air-eau, l'écart de vitesse pour un angle de  $2,5^\circ$  par rapport à la verticale est de 2 % et de 20 % pour un écart de  $10^\circ$  (cf figure 5 de [87]).

On peut aussi citer les effets de la température ambiante sur nos résultats d'expériences : la température jouant un rôle non négligeable pour la viscosité des liquides, nous travaillons dans une salle climatisée à  $25^\circ\text{C}$ . De plus, dans le cas des bulles visqueuses, il faut attendre longtemps avant de débiter l'expérience de façon à dégazer le liquide.

Pour les bulles remontant dans des petits tubes, nous avons rencontré avec l'eau des problèmes de mouillabilité des parois. Ces problèmes ont été résolus en utilisant de l'éthanol, de l'éther, de l'hexane ou du pentane à la place de l'eau. Les huiles silicone, du fait de leur faible tension de surface, ne présentent pas de problème de mouillage des parois.

## 2.2 Présentation des tubes

Les tubes étudiés sont de section circulaire, carrée, triangulaire et rectangulaire. Nous avons aussi utilisé un tube de forme toroïdale. Chaque forme de tube possède une longueur caractéristique : le rayon  $R$  pour les tubes cylindriques, les cotés,  $C_c$  et  $C_t$ , pour les carrés et les triangles équilatères. Le cas du tube à section rectangulaire est plus délicat : il possède deux longueurs caractéristiques : la largeur  $l$  et l'épaisseur  $h$ . Nous utiliserons un rayon équivalent pour caractériser les écoulements dans les tubes de forme non cylindrique. Le rayon équivalent est le rayon d'un cercle de même surface que la section. Les résultats expérimentaux seront donc présentés dans un premier temps en fonction de ce rayon équivalent. Les différentes définitions du périmètre, de la surface de la section et du rayon équivalent pour chaque géométrie de tube sont présentées dans le tableau 2.1.

	Cylindrique	Carré	Triangulaire	Rectangulaire
Longueurs	rayon $R$	côté $C_c$	côté $C_t$	largeur $l$ et épaisseur $h$
Surface $S$	$\pi R^2$	$C_c^2$	$(\sqrt{3}/4) C_t^2$	$l.h$
Périmètre $P$	$2\pi R$	$4.C_c$	$3.C_t$	$2(l + h)$
$R_{equ}$	$R$	$\sqrt{C_c^2/\pi}$	$\sqrt{(\sqrt{3}/4) C_t^2/\pi}$	$\sqrt{l.h/\pi}$

Table 2.1: Définitions du périmètre, de la surface et du rayon équivalent pour les différentes sections de tube utilisées

La mesure des dimensions des tubes se fait à l'aide d'un pied à coulisse à affichage digital. Le rayon des tubes cylindriques varie de 0,0017 m jusqu'à 0,0860 m. Les caractéristiques des tubes de géométrie différente varient dans la même gamme. Ces tubes sont détaillés en annexe C. Nous avons étudié la propagation d'une bulle infinie dans une centaine de tubes de formes et de dimensions différentes.

Afin de réaliser des tubes de section carrée et triangulaire de très petites sections, nous avons eu recours à une astuce expérimentale présentée sur la figure 2.2. Nous avons construit un tube

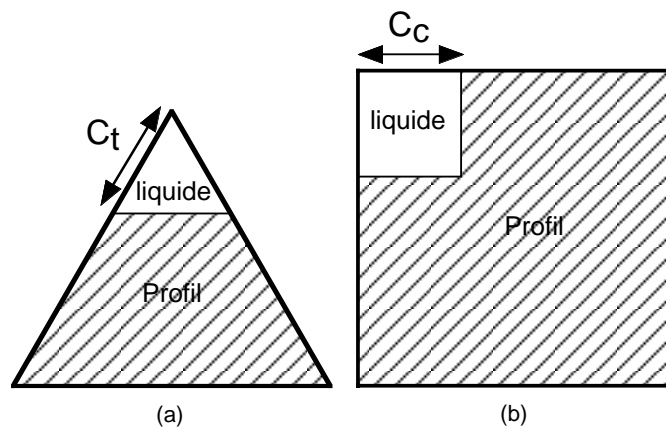


Figure 2.2: Schéma explicatif de la méthode de montage des tubes de petites dimensions. (a) : tube à base triangulaire, (b) : tube à base carrée

de la plus petite dimension possible dans les ateliers du laboratoire tout en s'assurant que les dimensions internes du tube soient homogènes sur toute la longueur. Ce tube a un côté intérieur de 0,010 m dans le cas du carré et de 0,015 m dans le cas triangulaire. Puis, un profil en PVC (cf figure 2.2) a été ajusté dans le tube de manière à le remplir parfaitement. On a ensuite enlevé  $1/10^e$  de millimètre au sommet du profil triangulaire et creusé un carré de  $1/10^e$  de millimètre de côté dans le profil carré pour réaliser notre premier tube. En enlevant  $1/10^e$  de millimètre par  $1/10^e$  de millimètre aux deux profils, on a ainsi fait varier les dimensions de nos tubes carrés et triangulaires de  $1/10^e$  de millimètre jusqu'à des dimensions de l'ordre du centimètre.

L'ajustement du profil au début du processus est l'étape la plus délicate, on verra sur nos résultats expérimentaux qu'il peut y avoir des fuites de liquide dues à un ajustement trop lâche du profil.

Des difficultés sont apparues concernant la visualisation de l'interface dans les tubes de section carrée et triangulaire de petites dimensions. En effet, l'utilisation d'un profil ajusté non transparent ne permet pas de bonne condition de vision de la bulle. Dans ce cas, nous avons profité de la relative lenteur des bulles pour mesurer leur vitesse en chronométrant leur déplacement entre deux marques faites sur le tube.

### 2.3 Présentation des fluides

Le tableau 2.2 présente les fluides utilisés dans nos expériences. De gauche à droite et pour chaque fluide, nous avons reporté la densité  $\rho$  en  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , la viscosité cinématique  $\nu$  en  $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ , la tension de surface  $\sigma$  en  $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ , la longueur capillaire  $a$  en m et le nombre de Kapitza.

Fluide	$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$\nu$ (m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> )	$\sigma$ (N.m <sup>-1</sup> )	$a$ (m)	$Ka$
Eau	993	10 <sup>-6</sup>	0,0700	2,7.10 <sup>-3</sup>	57
Éthanol	785	1,47 10 <sup>-6</sup>	0,0215	1,7.10 <sup>-3</sup>	28
Pentane	623	0,37 10 <sup>-6</sup>	0,0162	1,6.10 <sup>-3</sup>	68
Hexane	653	0,46 10 <sup>-6</sup>	0,0184	1,7.10 <sup>-3</sup>	61
Éther	705	0,32 10 <sup>-6</sup>	0,0173	1,6.10 <sup>-3</sup>	72
Huile V5	913	5 10 <sup>-6</sup>	0,0225	1,6.10 <sup>-3</sup>	12
Huile V20	942	2 10 <sup>-5</sup>	0,0225	1,6.10 <sup>-3</sup>	4,5
Huile V50	948	5 10 <sup>-5</sup>	0,0225	1,6.10 <sup>-3</sup>	2,5
Huile V100	952	10 <sup>-4</sup>	0,0225	1,6.10 <sup>-3</sup>	1,5
Huile V300	952	3 10 <sup>-4</sup>	0,0225	1,6.10 <sup>-3</sup>	0,7
Huile V1000	965	10 <sup>-3</sup>	0,0225	1,5.10 <sup>-3</sup>	0,3
Huile V12500	965	1,25 10 <sup>-2</sup>	0,0225	1,5.10 <sup>-3</sup>	0,06
Huile V100000	965	0,1	0,0225	1,5.10 <sup>-3</sup>	0,02

Table 2.2: Propriétés physiques des fluides utilisés (à 25°C)

La densité est mesurée par simple pesée de 250 cm<sup>3</sup> de liquide. La valeur de la viscosité est obtenue grâce à un viscosimètre capillaire pour les faibles viscosités et de type Couette pour les plus fortes viscosités. L'utilisation des huiles silicone nous permet de faire varier ce paramètre d'un facteur 10<sup>5</sup> : de 10<sup>-6</sup> m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup> pour l'eau à 0,1 m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup> pour l'huile de silicone V100000. La tension de surface des liquides avec l'air est mesurée par stalactométrie : une méthode qui consiste à mesurer le poids d'une goutte accrochée à un aiguille au moment où elle se décroche. Connaissant avec une grande précision les dimensions de l'aiguille (diamètre extérieur), on déduit de la masse de la goutte la valeur de la tension superficielle. Des détails sur cette méthode peuvent être trouvés dans C. Clanet et J. C. Lasheras [18].

En se rapportant à la discussion de la section 1.3, on remarque que les fluides présentant la configuration A,  $Ka \gg 1$  sont l'eau, l'éthanol, le pentane, l'hexane, l'éther et les huiles silicone V5 et V20. Ce groupe de fluide est utilisé pour l'étude de la transition A<sub>13</sub>. Les huiles silicone V1000, V12500 et V100000 présentent la configuration B,  $Ka \ll 1$ . Ce groupe de fluide est utilisé pour l'étude des transitions A<sub>12</sub> et A<sub>24</sub>. L'étude de la transition A<sub>14</sub> nécessite un fluide tel que  $Ka = 1$  (configuration C) : nous n'avons pas mené cette étude.

## 2.4 Estimation des incertitudes de mesures

Les incertitudes sur la mesure de la vitesse des bulles ont été estimées en observant l'écart entre les différentes mesures faites pour une même expérience.

Ainsi, dans le cas d'une bulle se propageant dans de l'eau à l'intérieur d'un cylindre de rayon  $R = 0,010$  m, nous avons mené 40 expériences de mesure de la vitesse de la bulle. La valeur moyenne de ces mesures est 0,150 m.s<sup>-1</sup> et son écart type est de 0,002 m.s<sup>-1</sup>. L'histogramme des résultats de nos expériences est présenté sur la figure 2.3, en abscisse nous présentons l'écart à la moyenne et en ordonnée le nombre  $N$  d'occurrences correspondantes. La loi Gaussienne correspondante est présentée en trait plein sur la figure 2.3. L'incertitude sur la mesure est donc de 1,3 %. On considère que l'incertitude sur la mesure de  $U_b$  dans le cas des cylindres est 2 %. Les écarts relatifs dans les mesures de vitesse dans les rectangles amènent à une estimation identique de l'incertitude sur  $U_b$ .

Par contre, pour les tubes à base carré et triangulaire de petites dimensions, l'incertitude sur la mesure de la vitesse est plus importante. Dans un tube triangulaire de coté  $C_t = 0,0056$  m, la

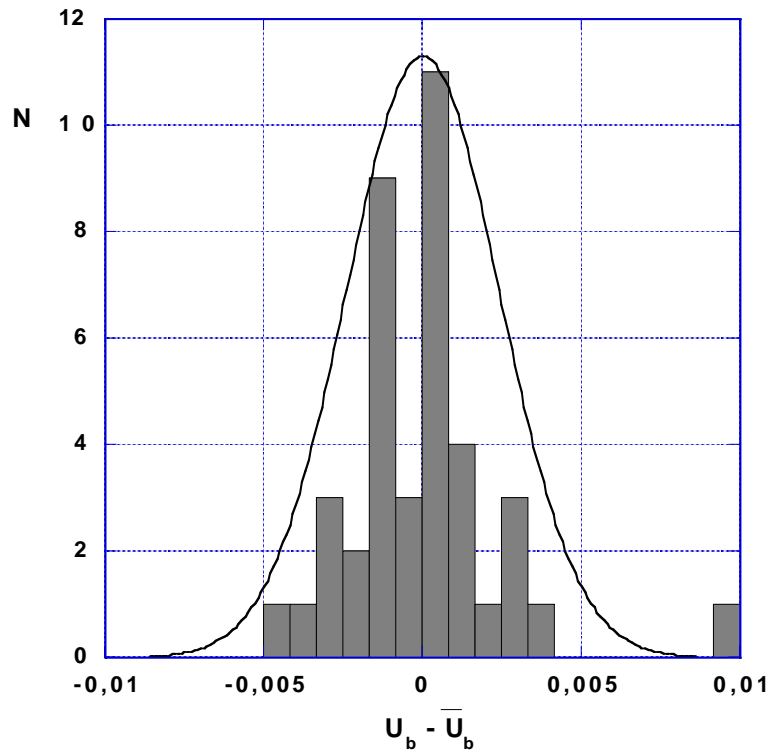


Figure 2.3: Histogramme des résultats de nos mesures de vitesse de bulle dans de l'eau et un tube cylindrique de rayon  $R = 0,001$  m. La valeur moyenne de la vitesse est  $\bar{U}_b = 0,150$  m.s<sup>-1</sup> et son écart type est de 0,002 m.s<sup>-1</sup>. La ligne en trait plein représente la loi Gaussienne correspondante

mesure de la vitesse d'une bulle dans de l'éther donne les résultats suivants :  $U_b^{(1)} = 0,0405$  m.s<sup>-1</sup>,  $U_b^{(2)} = 0,0410$  m.s<sup>-1</sup> et  $U_b^{(3)} = 0,0393$  m.s<sup>-1</sup>. Ces écarts nous permettent d'estimer l'incertitude sur  $U_b$  à 4 % dans le cas des tubes à base carrée et triangulaire. Cette augmentation de l'incertitude peut s'expliquer par l'utilisation de tube en PVC transparent qui ne permettent pas d'obtenir un bon contraste sur l'image de l'apex et par la présence d'un profil opaque due à la méthode de construction des tubes de petites dimensions.

L'utilisation du pied à coulisse pour la mesure des dimensions des tubes permet d'estimer que l'incertitude sur ces dimensions est inférieure à 2 %.

Les valeurs de  $\rho$ ,  $\nu$  et  $\sigma$  mesurées sont en accord avec les données de la littérature à 2 % près.



### 3. OBSERVATIONS

Nous utilisons ici comme longueur commune à toutes les géométries, le rayon équivalent  $R_{equ}$ . Les nombres sans dimension que nous utilisons sont le nombre de Froude :

$$Fr_{equ} = \frac{U_b^2}{g R_{equ}}, \quad (3.1)$$

le nombre de Stokes :

$$St_{equ} = \frac{U_b \nu}{g R_{equ}^2}, \quad (3.2)$$

le nombre de Reynolds :

$$Re_{equ} = \frac{U_b R_{equ}}{\nu}, \quad (3.3)$$

et le nombre de Bond :

$$Bo_{equ} = \left( \frac{R_{equ}}{a} \right)^2. \quad (3.4)$$

#### 3.1 Région 1 : $Re_{equ} \gg Re_{equ}^*$ , $Bo_{equ} \gg Bo_{equ}^*$

Les premiers instants de la remontée de bulles infinies sont présentés sur la figure 3.1 où l'on montre l'évolution temporelle de la position de l'apex  $z$  pour 3 tubes de longueurs  $L = 0,3$  m et de rayons différents :  $R = 0,0080$  m ( $\circ$ ),  $0,0125$  m ( $\blacksquare$ ) et  $0,0250$  m ( $\blacklozenge$ ). On remarque sur cette figure que les bulles atteignent une vitesse de remontée constante après une phase d'accélération qui s'étend sur une distance d'un rayon pour le tube  $R = 0,0080$  m et sur une distance petite devant le rayon du tube pour les deux autres expériences. Les derniers instants de la remontée d'une bulle infinie sont présentés sur la figure 3.3 où l'on montre l'évolution temporelle de la position de l'apex  $z$  pour un tube de rayon :  $R = 0,0125$  m ( $\circ$ ). On remarque sur cette figure que la phase de freinage de la bulle à l'arrivée au fond du tube s'étend sur une distance de  $0,002$  m petite devant le rayon du tube.

La figure 3.2 présente la position de l'apex  $z$  en fonction du temps  $t$  après cette phase d'accélération. On observe que la vitesse des bulles est constante durant la majeure partie de la remontée.

Pour un tube de longueur  $L$  et de rayon  $R$ , ces observations montrent que le régime de vitesse constante existe dans la région  $R < z < L - R$ . La bulle possède donc une vitesse constante sur une majeure partie de la remontée si  $L - R \gg R$ , ce qui aboutit à la condition  $L \gg 2R$ . Ainsi, nous avons travaillé avec des tubes  $L > 10R$ .

Il est important de noter que toutes nos mesures de trajectoire de bulle, quelles que soient la viscosité, la tension de surface du liquide, les dimensions et la forme du tube, ont montrées que la vitesse de la bulle est constante pour  $R > z > L - R$ .

La figure 3.2 permet de mesurer les vitesses de propagation des bulles. Ainsi dans le tube de rayon  $R = 0,0080$  m, la vitesse  $U_b$  est égale à  $0,135$  m.s<sup>-1</sup>. De même, dans le tube  $R = 0,0125$  m, on trouve  $U_b = 0,174$  m.s<sup>-1</sup> et pour  $R = 0,0250$  m,  $U_b = 0,238$  m.s<sup>-1</sup>. La vitesse de la bulle est donc une fonction croissante de  $R$  dans cette gamme de rayons. Le liquide étant de l'eau,

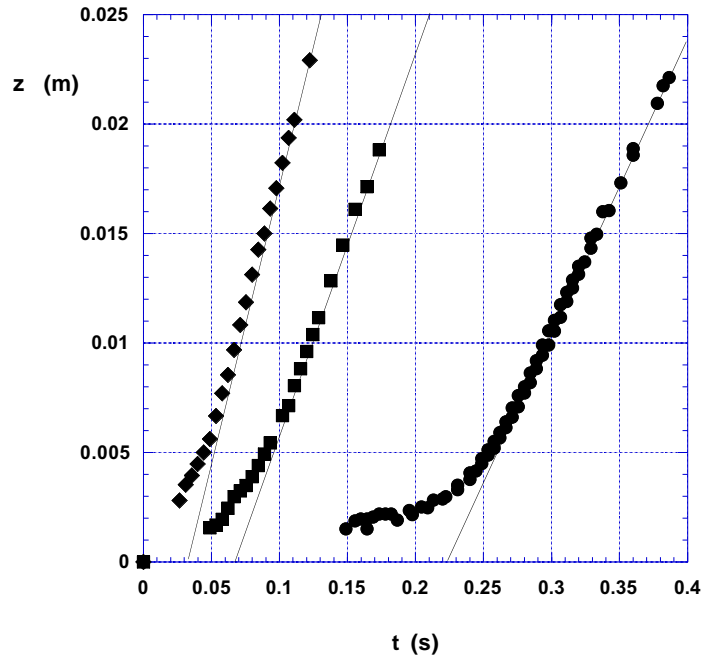


Figure 3.1: Trajectoires de bulles infinies dans les premiers instants de la remontée. Les expériences ont été menées dans de l'eau pour des tubes cylindriques de différents rayons :  $R = 0,0080$  m ( $\circ$ ),  $R = 0,0125$  m ( $\blacksquare$ ) et  $R = 0,0250$  m ( $\blacklozenge$ ). Le temps  $t = 0$  est l'instant où le bouchon est enlevé et  $z = 0$  est situé à la sortie du tube. Les lignes en trait plein présentent les trajectoires lorsque  $z > R$

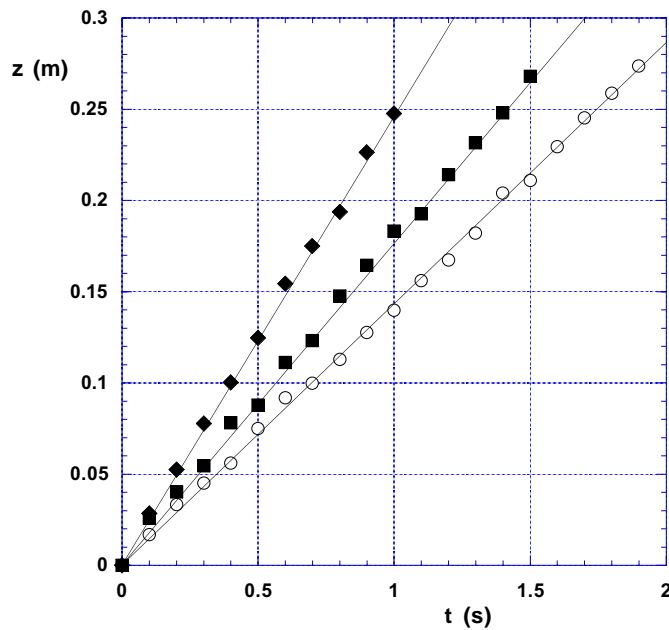


Figure 3.2: Trajectoires de bulles dans de l'eau pour des tubes cylindriques de différents rayons :  $R = 0,0080$  m ( $\circ$ ),  $0,0125$  m ( $\blacksquare$ ) et  $0,0250$  m ( $\blacklozenge$ ). Le temps  $t = 0$  est l'instant où la bulle a parcouru  $2R$  et  $z = 0$  est situé à  $2R$  au dessus de la sortie du tube.

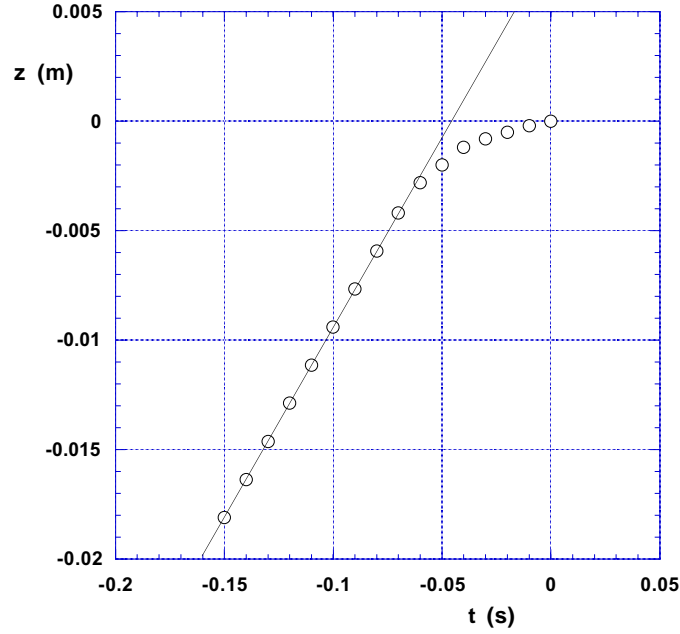


Figure 3.3: Trajectoire d'une bulle infinie dans les derniers instants de la remontée. Expérience réalisée dans de l'eau et un tube cylindrique de rayon  $R = 0,0125$  m ( $\circ$ ). Le temps  $t = 0$  est l'instant où la bulle touche le fond du tube et  $z = 0$  est situé au fond du tube

les valeurs respectives du nombre de Reynolds sont 1080, 2175 et 5950 grands devant la valeur limite de 200 définie par E. E. Zukoski [87]. Le nombre de Bond vaut respectivement 9, 21 et 86 : selon les résultats de E. E. Zukoski, la bulle remontant dans le tube de rayon  $R = 0,0080$  m est soumise à un effet de courbure car son nombre de Bond est inférieur à 10. Le calcul du nombre de Froude montre que pour cette bulle  $Fr_{equ}$  est égal à 0,23, identique au Froude des deux autres bulles : les effets de courbure sont donc encore petits à  $Bo_{equ} = 9$ .

Nous présentons, sur la figure 3.4, l'évolution du carré de la vitesse  $U_b^2$  en fonction de  $g R_{equ}$  dans des tubes cylindriques ( $R_{equ} = R$ ). Les rayons des tubes varient de 0,008 m à 0,086 m. Les points de ce graphe ont été réalisés avec des liquides peu visqueux : eau, hexane, éther tels que le nombre de Kapitza est grand devant 1. Nous nous trouvons donc dans la configuration A : si les dimensions des tubes restent grandes devant  $a$ , les bulles correspondantes sont dans la région 1.

Le nombre de Reynolds varie de 1 000 à 35 000 : nous nous trouvons dans la limite des grands nombres de Reynolds. Le nombre de Bond minimal est égal à 9.

Les barres d'incertitudes de nos mesures sont présentées sur la figure : l'incertitude sur la mesure de la vitesse est, dans ce cas des tubes en verre où l'apex de la bulle est aisé à repérer, estimé à 2 %. L'erreur relative sur  $U_b^2$  est donc de 4 %. L'erreur relative sur  $g R_{equ}$  est inférieure à 2 %. On remarque que  $U_b^2$  varie linéairement avec  $g R_{equ}$  et si l'on applique à la droite obtenue un ajustement linéaire, on trouve :

$$U_b^2 = K_3 g R_{equ} \quad \text{avec } K_3 = 0,23 \pm 0,02. \quad (3.5)$$

La valeur de  $K_3$  estimée ci dessus est la valeur moyenne des mesures de  $K_3$  pour chaque point expérimental de la figure 3.5 et l'incertitude de 0,02 est déterminée par l'écart type de ces mesures.

On constate que l'on est en bon accord avec les résultats expérimentaux de la littérature présentés au chapitre 1 et dans l'annexe B sous la forme du nombre de Froude,  $Fr$ . Ces résultats prédisent une valeur pour  $K_3$  comprise entre 0,21 et 0,26. Dans la limite des grands nombres



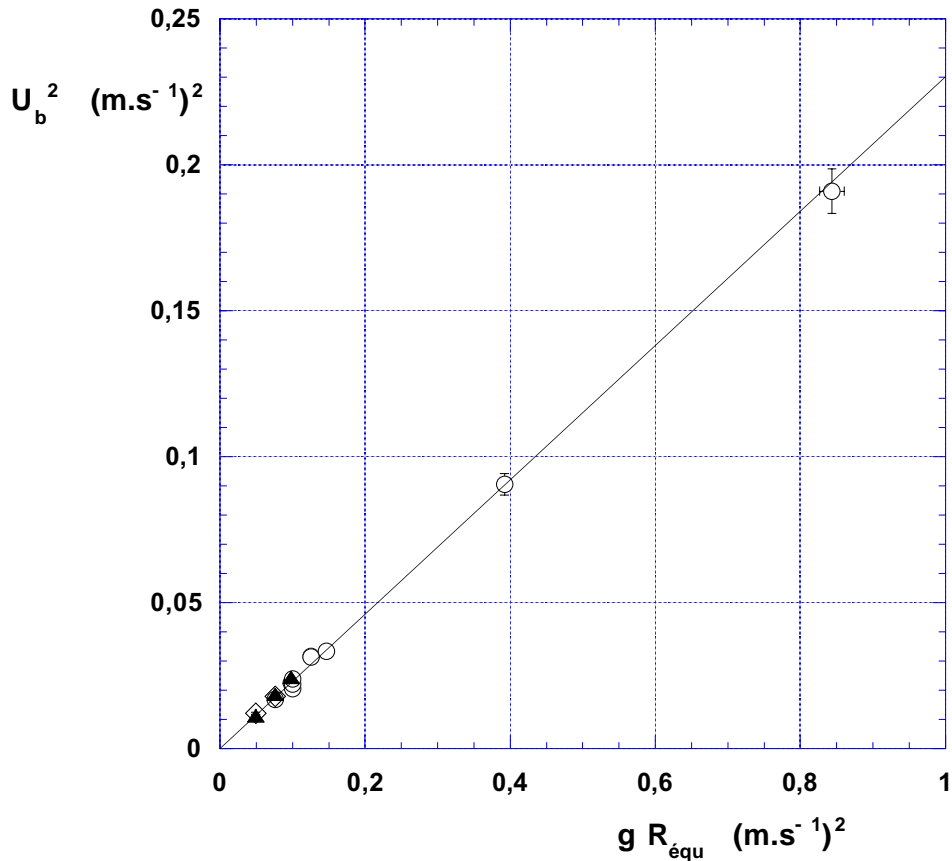


Figure 3.4:  $U_b^2$  en fonction de  $g R_{equ}$  dans des tubes de section circulaire pour  $Re_{equ} \gg Re_{equ}^*$  et  $Bo_{equ} \gg Bo_{equ}^*$ . Les expériences ont été menées avec de l'eau ( $\circ$ ), de l'hexane ( $\blacktriangle$ ) et de l'éther ( $\diamond$ ). La ligne en trait plein représente la loi expérimentale (3.5)

de Reynolds et de Bond, la propagation d'une bulle infinie dans un tube cylindrique est donc caractérisée par un nombre de Froude constant :

$$Fr_{equ} = 0,23 \pm 0,02 \quad (3.6)$$

La figure 3.5 concerne la propagation des bulles infinies dans des tubes rectangulaires. On a représenté  $U_b^2$  en fonction de  $g R_{equ}$ . Les tubes utilisés ont une épaisseur constante  $h = 0,022$  m et une largeur  $l$  variable de 0,020 m à 0,200 m ce qui permet de faire varier le rayon équivalent de 0,012 m à 0,037 m et le rapport largeur/épaisseur  $l/h$  de 1 à 10. Le liquide utilisé est de l'eau. Le nombre de Reynolds minimum est 2000 tandis que le nombre de Bond minimum est égal à 16.

L'erreur relative sur la vitesse est estimée à 2 %. L'erreur sur la mesure des longueurs entraîne une incertitude sur  $g R_{equ}$  que l'on peut estimer à 2 %.

On remarque que l'on n'a pas la dépendance linéaire du carré de la vitesse par rapport à  $g R_{equ}$  lorsque le rapport largeur/épaisseur du tube dépasse 3. La ligne en trait plein représente la loi (3.5) obtenue dans les cylindres. La loi de dépendance de  $U_b^2$  par rapport aux paramètres géométriques dans les tubes rectangulaires de grand rapport largeur/épaisseur est différente de la loi concernant les tubes de forme cylindrique.

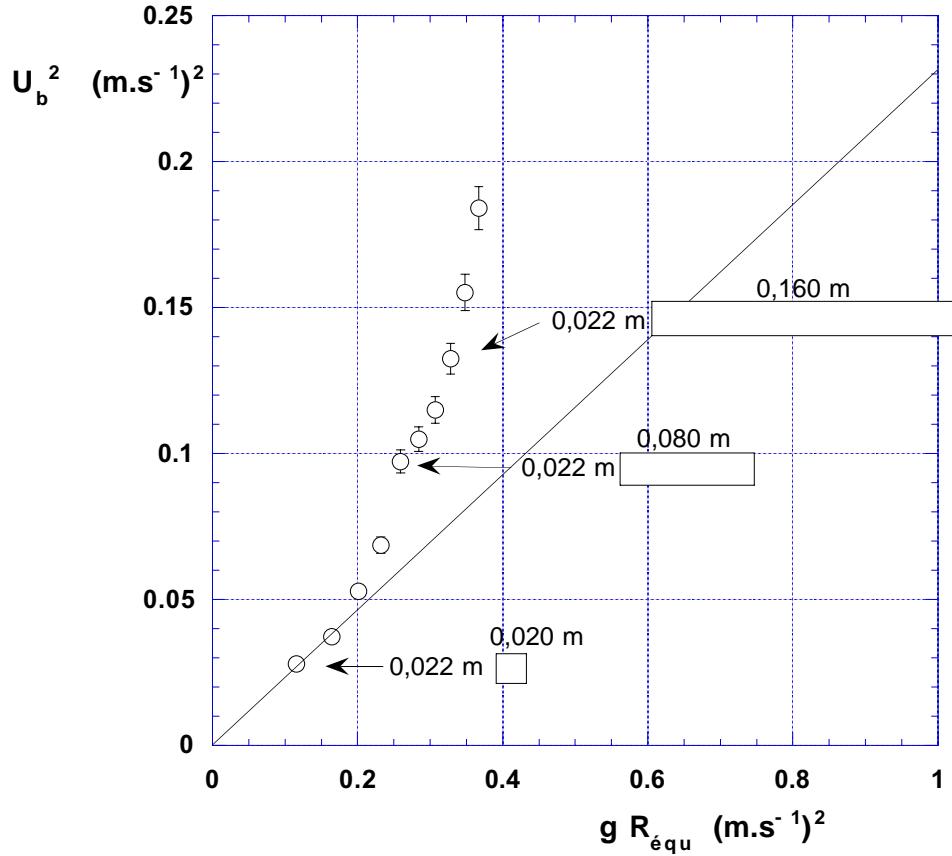


Figure 3.5:  $U_b^2$  en fonction de  $g R_{equ}$  dans des tubes de section rectangulaire pour  $Re_{equ} \gg Re_{equ}^*$  et  $Bo_{equ} \gg Bo_{equ}^*$ . Les expériences ont été menées avec de l'eau. La ligne en trait plein représente la loi expérimentale (3.5)

### 3.2 Région 2 : $Re_{equ} \ll Re_{equ}^*$ , $Bo_{equ} \gg Bo_{equ}^*$

Nous allons, dans cette partie, augmenter la viscosité des liquides dans lesquels remonte la bulle et ainsi diminuer le nombre de Reynolds jusqu'à observer l'influence de la viscosité sur la vitesse  $U_b$ . En utilisant des huiles silicone de viscosités supérieures à  $10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , nous nous trouvons dans la configuration B où le nombre de Kapitza est petit devant 1. La longueur visqueuse  $l_\nu$  est donc plus grande que la longueur capillaire. Pour étudier la région 2, nous devons utiliser des tubes de dimensions inférieures  $l_\nu$  et supérieures à  $a$ .

Les écoulements obtenus sont caractérisés par un  $Re_{equ} \ll Re_{equ}^*$ .

Nous présentons, sur la figure 3.6, la vitesse des bulles infinies en fonction de  $g R_{equ}^2 / \nu$  dans des tubes cylindriques ( $R_{equ} = R$ ). Le nombre de Kapitza des fluides utilisés varie de 0,06 à 0,02. La longueur capillaire de ces huiles silicone est de 0,0015 m, la longueur visqueuse de ces fluides varie donc de 0,025 m à 0,075 m. Les rayons des tubes utilisés varient de 0,005 m à 0,018 m. Les dimensions des tubes sont inférieures à  $l_\nu$ , nous étudions bien la région 2.

Le nombre de Reynolds varie de  $10^{-4}$  à 0,4. Le nombre de Bond minimum est 12.

L'erreur relative sur la mesure de  $U_b$  est estimée à 2 %. L'incertitude relative sur la mesure de  $R_{equ}$  est de 2% et celle sur la valeur de  $\nu$  est de 2 % également. Les incertitudes s'ajoutant les unes aux autres, l'erreur relative sur  $g R_{equ}^2 / \nu$  est estimée à 6 %.

On remarque que  $U_b$  varie linéairement avec  $g R_{equ}^2 / \nu$  et si on applique à la droite obtenue un

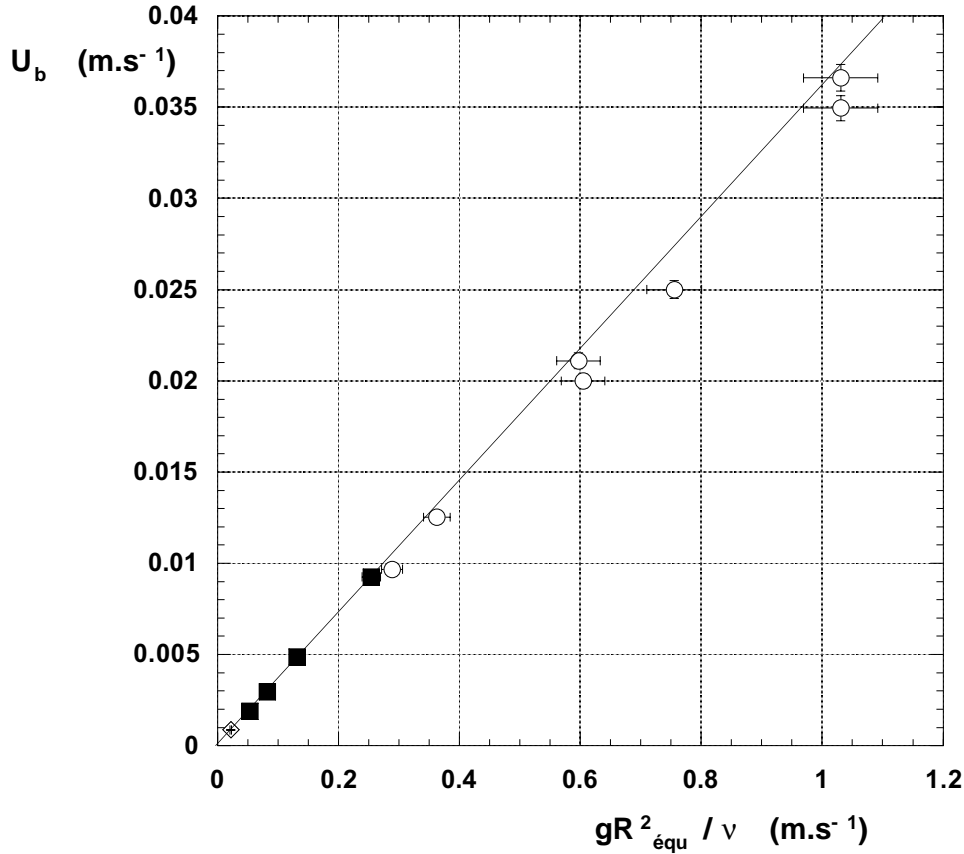


Figure 3.6: Vitesse  $U_b$  de la bulle en fonction de  $gR^2_{\text{équi}}/\nu$  dans des tubes cylindriques pour  $Re_{\text{équi}} \ll Re_{\text{équi}}^*$  et  $Bo_{\text{équi}} \gg Bo_{\text{équi}}^*$ . Les expériences ont été menées avec de l'huile silicone V1000 (○), V12500 (■) et V100000 (◇). La ligne en trait plein représente la loi (3.7)

ajustement linéaire, on obtient :

$$U_b = K_2 \frac{g R^2_{\text{équi}}}{\nu} \quad \text{avec } K_2 = 0,037 \pm 0,002. \quad (3.7)$$

La valeur de  $K_2$  estimée ci dessus est la valeur moyenne des mesures de  $K_2$  pour chaque point expérimental de la figure 3.6 et l'incertitude sur  $K_2$  est déterminée par l'écart type de ces mesures.

Ce résultat est cohérent avec les mesures de vitesse de bulles visqueuses faites par E. T. White et R. H. Beardmore [83]. Ces auteurs ont trouvés une loi identique, leur pente expérimentale est :  $K_2 \approx 0,038$ .

E. E. Zukoski montre expérimentalement (figure 4 de [87]), en utilisant un mélange glycérol-eau et en reprenant les résultats d'expérience de H. L. Goldsmith et S. G. Mason [35], la validité de la loi (3.7) mais ses résultats expérimentaux conduisent à une valeur de  $K_2 \approx 0,025$  inférieure d'un facteur 1,5 à celle issue de nos observations expérimentales et de celles de E. T. White et R. H. Beardmore.

Nous ne nous expliquons pas cette différence dans la valeur expérimentale de  $K_2$ . L'hypothèse d'une erreur expérimentale est écartée du fait de l'utilisation de résultats d'expériences menées 4 ans auparavant qui s'accordent de manière raisonnable avec ses mesures. Des effets de tension de surface ont pu apparaître, E. E. Zukoski les corrigent en utilisant les résultats expérimentaux obtenus sans effet de la tension de surface. Cette correction est peut être à l'origine de la différence entre nos résultats, ceux de E. T. White et R. H. Beardmore et ceux présentés par E. E. Zukoski.

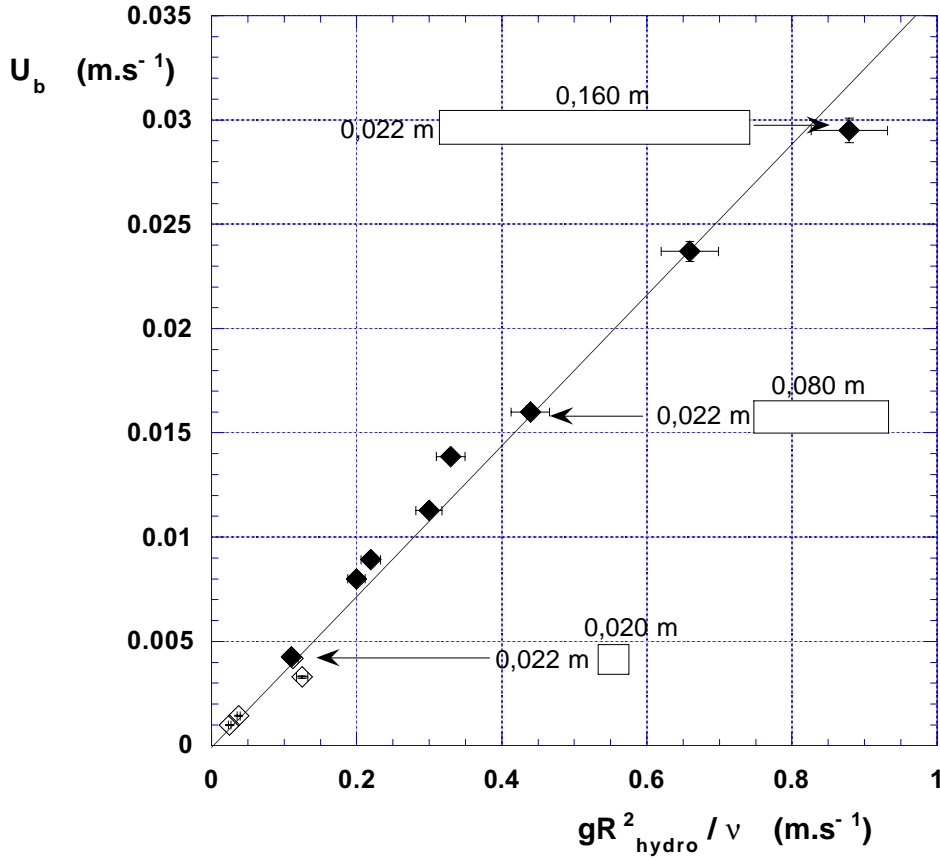


Figure 3.7: Vitesse  $U_b$  de la bulle en fonction de  $gR_{equ}^2/\nu$  dans des tubes rectangulaires pour  $Re_{equ} \ll Re_{equ}^*$  et  $Bo_{equ} \gg Bo_{equ}^*$ . Les expériences ont été menées avec de l'huile V12500 ( $\blacklozenge$ ) et V100000 ( $\diamond$ ). La ligne en trait plein représente la loi (3.7)

On remarque que la loi (3.7) peut s'écrire sous la forme :

$$St_{equ} = 0,037 \pm 0,002. \quad (3.8)$$

Cette loi est l'équivalent visqueux de la loi (3.6). Dans la limite des petits nombres de Reynolds et des grands nombre de Bond, la propagation d'une bulle infinie dans un tube cylindrique est donc caractérisée par un nombre de Stokes constant.

Nous présentons, sur la figure 3.7, la vitesse mesurée de la bulle en fonction de  $gR_{equ}^2/\nu$  dans des tubes rectangulaires. Pour les tubes utilisés, la largeur  $l$  varie de 0,020 m à 0,200 m tandis que l'épaisseur  $h$  varie de 0,020 m à 0,100 m tout en restant, pour chaque tube, inférieure à  $l$ . Le rapport d'aspect évolue donc, pour une même largeur, de 1 à 10. Les fluides sont des huiles silicone de viscosités  $\nu = 12,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  et  $0,1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Le nombre de Reynolds maximum est  $8 \cdot 10^{-2}$ . Les rayons équivalents de tous ces tubes sont grands devant la longueur capillaire : le nombre de Bond varie de 81 à 256.

L'incertitude sur la mesure de la vitesse est de 2%. L'erreur relative sur  $gR_{equ}^2/\nu$  est, de la même manière que pour les cylindres, estimée à 6 %.

On remarque que, comme dans le cas des cylindres, la vitesse de la bulle varie linéairement avec  $gR_{equ}^2/\nu$  selon la loi (3.7), présentée en ligne continue sur la figure 3.7.

En se rappelant la relation entre les nombres de Froude, de Reynolds et de Stokes [équation (1.14)], on peut réécrire cette loi sous la forme d'une relation entre nombres sans dimension :

$$Fr = K_2 \cdot Re \quad (3.9)$$

### 3.3 Transition $A_{12}$ : $Bo_{equ} \gg Bo_{equ}^*$

Cette section concerne la transition entre les deux régions précédentes du diagramme de phase, elle permet entre autre de caractériser le nombre de Reynolds critique  $Re_{equ}^*$  qui détermine le seuil d'apparition des effets visqueux.

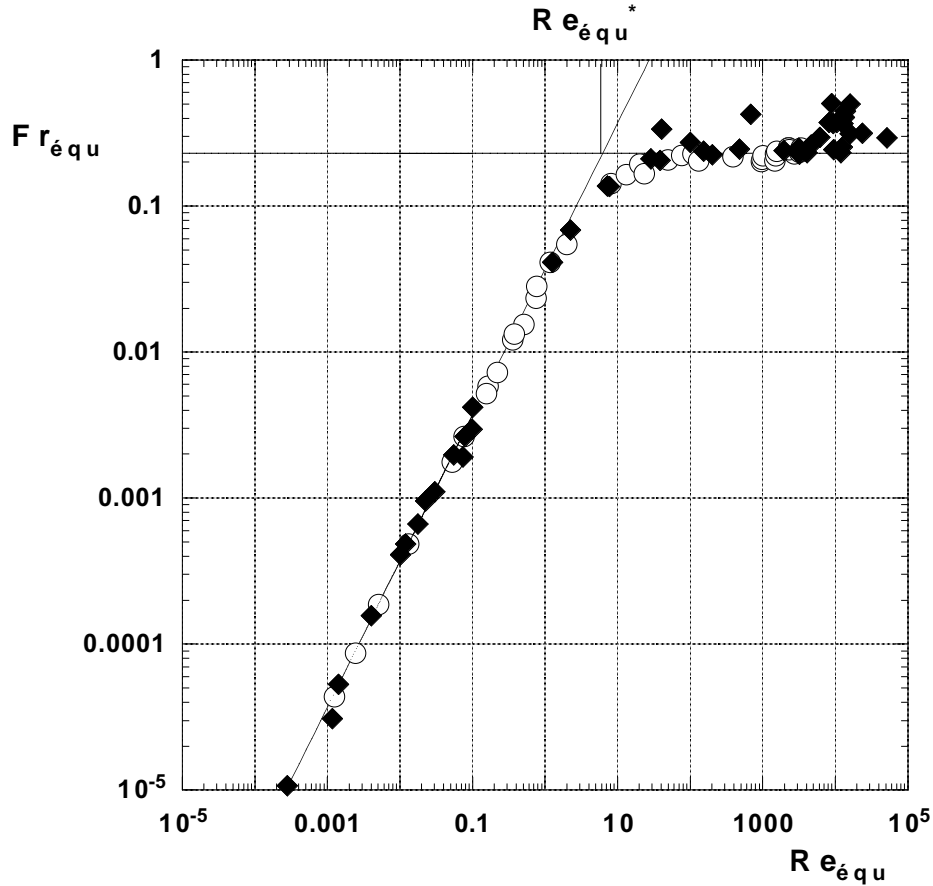


Figure 3.8: Nombre de Froude  $Fr_{equ}$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re_{equ}$  dans des tubes cylindriques ( $\circ$ ) et rectangulaires ( $\blacklozenge$ ) pour  $Bo_{equ} \gg Bo_{equ}^*$ . Les expériences ont été menées avec de l'eau, de l'éthanol, de l'hexane, de l'éther, de l'huile silicone V20, V100, V300, V1000, V12500 et V100000. La ligne oblique représente la loi (3.7) et la ligne horizontale illustre la loi (3.6)

La figure 3.8 présente, en échelle logarithmique, le nombre de Froude en fonction du nombre de Reynolds. Les vitesses de bulle dans les tubes cylindriques ont été mesurées dans les mêmes tubes que ceux de la région 1. Les points dans les tubes rectangulaires ont été obtenus dans des tubes de largeur  $l$  variant de 0,022 m à 0,300 m et d'épaisseur minimale égale à 0,022 m. Le rapport largeur/épaisseur des tubes varie de 1 (tube à base carré) à 10. Les liquides utilisés ont des viscosités variant de  $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  pour l'étude de la région 1 à  $0,1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  pour l'étude de la région 2. Les liquides utilisés pour étudier la transition entre les deux régimes présentent, en accord avec la discussion de la section 1.3, une configuration du type B où la longueur visqueuse est supérieure à la longueur capillaire ( $Ka < 1$ ). Nous utilisons, pour cela, des huiles silicone de viscosités supérieures à  $10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . L'utilisation de ces différents liquides nous a permis de faire varier le nombre de Reynolds de  $10^5$  à  $10^{-4}$ . Le nombre de Bond est toujours supérieur à 12.

En accord avec les différentes discussions sur les incertitudes des sections 3.1 et 3.2, les incertitudes sur le nombre de Froude et sur le nombre de Reynolds sont estimées à 6 %.

On remarque sur la figure 3.8 que, dans la limite des grands nombres de Reynolds ( $Re_{equ} > 30$ ),

le nombre de Froude  $Fr_{equ}$  a une valeur constante sauf dans le cas des tubes rectangulaires comme montré précédemment.

On observe lorsque le nombre de Reynolds diminue que le nombre de Froude s'écarte de cette constante et diminue. On a donc une transition entre une loi  $Fr_{equ} = \text{Constante}$  (région 1) et une autre loi qui fait dépendre le nombre de Froude avec le nombre de Reynolds. Le caractère linéaire de cette dépendance est montré par la droite de pente 1 présentée en ligne continue. On observe ainsi que  $Fr_{equ} \propto Re_{equ}$  si  $Re_{equ} < 3$ .

La transition entre la région 1 et la région 2 s'effectue sur un domaine étroit en Reynolds :  $3 < Re_{equ}^* < 30$ . La figure 3.8 montre que l'on a un nombre de Reynolds critique :

$$Re_{equ}^* \approx 6. \quad (3.10)$$

On mesure la limite supérieure d'apparition des effets de la viscosité à  $Re_{equ} = 30$ . Ce nombre est à comparer au Reynolds limite mesuré par E. E. Zukoski [87] :  $Re_{equ} = 200$  pour des tubes cylindriques. Cette valeur semble exagérée au vu de nos résultats expérimentaux.

### 3.4 Transition $A_{13}$ : $Re_{equ} \gg Re_{equ}^*$

Afin de n'observer que les effets de tension de surface, nous avons adimensionné la vitesse mesurée  $U_b$  par la vitesse obtenue à partir de la loi (3.5) dans le cas d'un écoulement à  $Re_{equ} > 30$  dans les cylindres. On note  $\bar{U}_i$  cette vitesse adimensionnée :

$$\bar{U}_i \equiv \frac{U_b}{\sqrt{K_3 g R_{equ}}}. \quad (3.11)$$

On note que  $\bar{U}_i$  vaut 1 si il n'y a pas d'influence de la tension de surface.

On présente sur la figure 3.9,  $\bar{U}_i$  en fonction du nombre de Bond dans des cylindres pour des nombres de Reynolds supérieurs à 30. Les tubes cylindriques ont des rayons variant entre 0,0015 m et 0,0150 m. Les liquides utilisés sont l'eau, l'éthanol, l'éther, l'hexane et le pentane tels que le nombre de Kapitza est grand devant 1 (configuration A). Cette condition sur  $Ka$  est, en effet, nécessaire à l'étude de la transition  $A_{13}$ . Le nombre de Reynolds minimum est 49. La variation des dimensions des tubes fait passer le nombre de Bond de 1,2 à 67.

Suivant les discussions précédentes sur les incertitudes de nos mesures, l'erreur relative sur  $\bar{U}_i$  est estimée à 7 % tandis que celle sur le nombre de Bond est de 4 %.

On observe, de droite à gauche, sur la figure 3.9 que l'on passe continûment d'un comportement inertiel, où la loi (3.5) s'applique, à une région où la vitesse  $U_i^*$  diminue très rapidement avec le nombre de Bond. La transition entre ces deux comportements se fait à un nombre de Bond critique  $Bo_{equ,i}^* \approx 9$ . La vitesse de propagation de la bulle s'annule pour un nombre de Bond  $\approx 1$ . Les bulles ne se propagent donc pas dans des tubes de rayons inférieurs à la longueur capillaire.

Ces résultats sont à comparer avec ceux de D. Dumitrescu [28] et de E. E. Zukoski [87] qui placent la limite d'apparition des effets de courbure à  $Bo_{equ} = 16$  et  $Bo_{equ} = 10$ . Nos résultats sont donc cohérents avec la littérature.

### 3.5 Transition $A_{24}$ : $Re_{equ} \ll Re_{equ}^*$

Pour ne considérer que l'effet de la tension de surface sur la vitesse d'ascension, nous nous sommes appuyés sur les résultats de la section 3.2. Ainsi nous avons adimensionné la vitesse  $U_b$  par la vitesse dans le cas visqueux obtenue à partir de la loi (3.7). La vitesse adimensionnée  $\bar{U}_\nu$  est égale à :

$$\bar{U}_\nu = \frac{U_b}{K_2 \frac{g R_{equ}^2}{\nu}}, \quad (3.12)$$

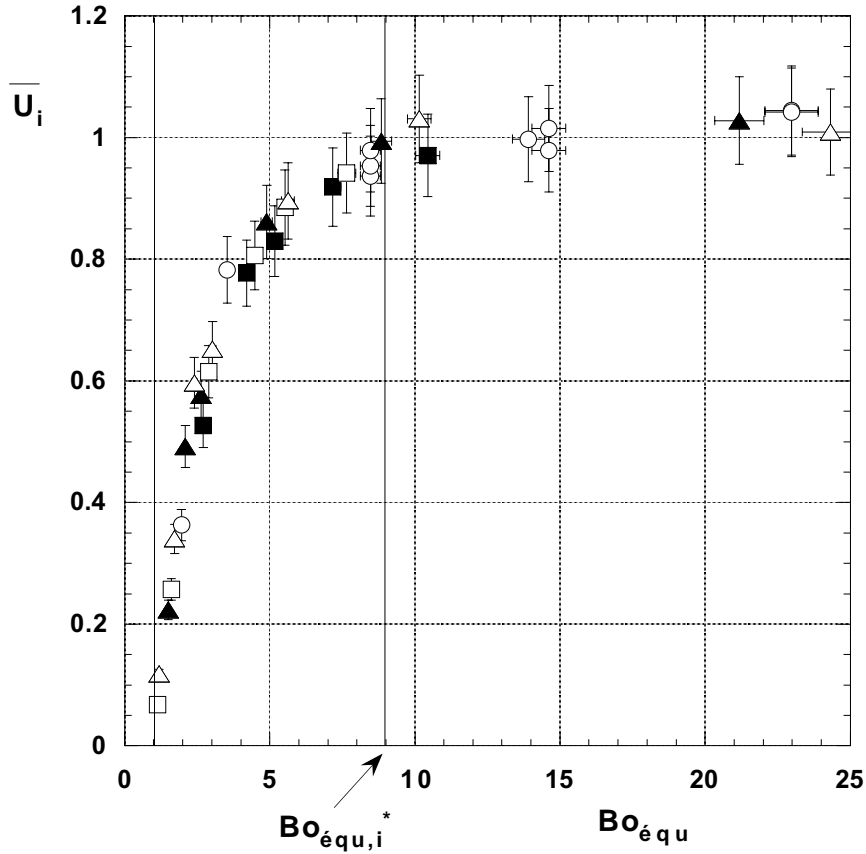


Figure 3.9: Vitesse adimensionnée  $\bar{U}_i$  de la bulle en fonction du nombre de Bond dans des tubes cylindriques pour un écoulement  $Re_{equ} \gg Re_{equ}^*$ . Les expériences ont été menées dans de l'eau (○), de l'éthanol (■), de l'éther (△), de l'hexane (▲) et du pentane (□). Les deux lignes en trait plein représentent respectivement la limite  $Bo_{equ} = 1$  et  $Bo_{equ} = 9$

$\bar{U}_\nu = 1$  signifie que la tension de surface n'intervient pas dans la remontée de la bulle.

La figure 3.10 montre la variation de  $\bar{U}_\nu$  en fonction du nombre de Bond. Les expériences ont été menées dans des cylindres de rayon variant de 0,0015 m à 0,0150 m. La transition A<sub>24</sub> a été étudiée en accord avec la discussion sur le nombre de Kapitza en utilisant des liquides visqueux V300, V1000 et V12500 tels que  $Ka < 1$  (configuration B) et des tubes de rayon inférieur à  $l_\nu$ . Le nombre de Reynolds est inférieur à 0,4 et le nombre de Bond varie de 1 à 49. L'incertitude sur la mesure de  $K_2$  étant de 5 %, celle sur la mesure de  $\bar{U}_\nu$  est estimée à 13 % tandis que l'incertitude sur le nombre de Bond est de 4 %.

On constate qu'il existe un nombre de Bond critique,  $Bo_{equ,\nu}^* \approx 15$ , en dessous duquel il y a une diminution brutale de la vitesse  $U_\nu^*$  due à l'apparition des effets de courbure. Cette vitesse s'annule pour un nombre de Bond d'ordre unité. Cela signifie qu'il n'y a pas de propagation dans les tubes de rayons inférieurs à la longueur capillaire où la tension de surface bloque la remontée de la bulle. Le même comportement a été observé dans le cas des bulles non visqueuses, il n'est donc pas lié à la viscosité du liquide.

Le critère de non propagation de la bulle est estimé expérimentalement par E. T. White et R. H. Beardmore [83] à  $Bo \approx 1$ . Ces auteurs attribuent le blocage de la bulle à des effets d'angle de contact entre le fluide et la paroi du tube cylindrique. Ils soulignent aussi la difficulté de déterminer précisément le critère de blocage en raison de sa sensibilité à la propreté et à la rugosité des parois. Le calcul théorique de F. P. Bretherton [13] l'amène, par des considérations sur la forme de l'apex de la bulle, à ne considérer que les écoulements tels que  $Bo > 0,842$ . Il

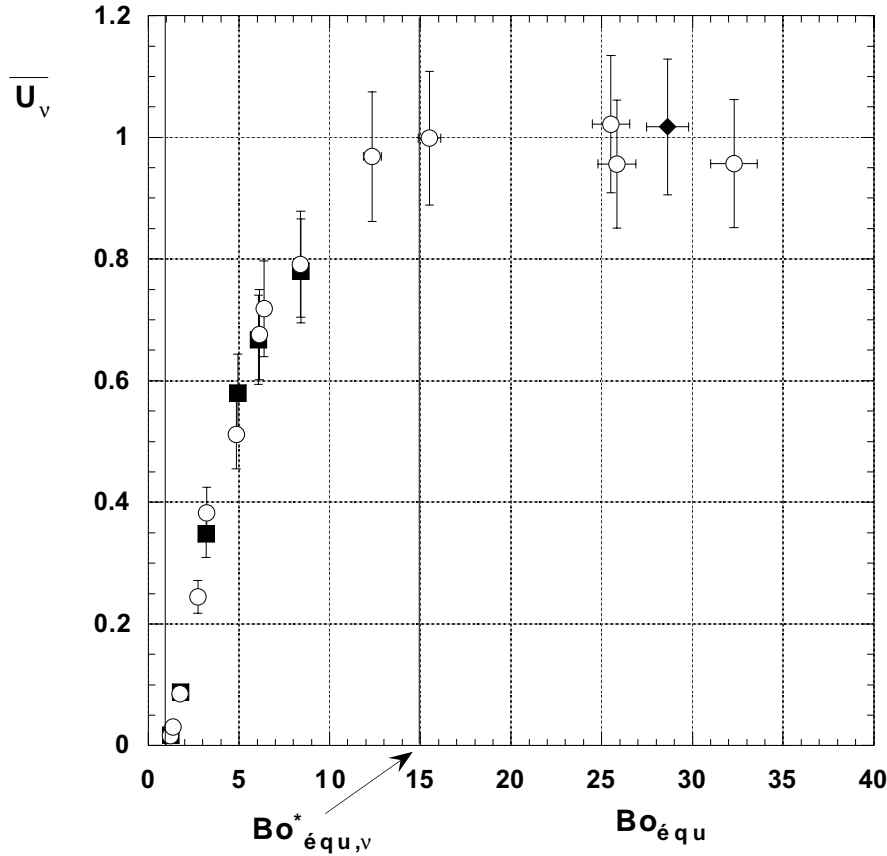


Figure 3.10: Vitesse adimensionnée  $\bar{U}_v$  de la bulle en fonction du nombre de Bond dans des tubes cylindriques pour  $Re_{equ} \ll Re_{equ}^*$ . Les expériences ont été menées dans de l'huile silicone V300 (■), V1000 (○) et V12500 (◆). Les deux lignes en trait plein représentent respectivement la limite  $Bo_{equ} = 1$  et  $Bo_{equ} = 15$

montre ainsi l'existence d'un rayon minimum, de l'ordre de la longueur capillaire, pour lequel l'écoulement change de manière drastique. L'auteur insiste lui aussi sur les difficultés à déterminer expérimentalement le critère de non-propagation. Les travaux numériques de B. Couët et G. S. Strumolo [22] montrent, eux aussi, que la bulle ne se propage pas pour un nombre de Bond d'ordre unité.

### 3.6 Conclusion

Pour conclure sur cette partie consacrée à la présentation des résultats expérimentaux, nous retenons :

- 1. Les bulles infinies ont une vitesse constante durant leur propagation dans des tubes de grands rapports largeur/épaisseur ( $L \gg R$ ), quelles que soient la taille et la forme des tubes et quels que soient les paramètres physiques du liquide dans lequel se déplace la bulle.
- 2. Région 1 : le nombre de Froude  $Fr_{equ}$  est constant et égal à  $0,23 \pm 0,02$  dans le cas des tubes cylindriques. Ceci ne s'applique cependant pas au cas des tubes à base rectangulaire de grands rapports largeur/épaisseur.
- 3. Région 2 : le nombre de Froude varie linéairement avec le nombre de Reynolds même dans le cas des tubes rectangulaires à grand rapport largeur/épaisseur. Ceci se résume en une loi  $St = 0,037 \pm 0,002$ .
- 4. La transition  $A_{12}$  entre les deux régions précédentes s'effectue à une valeur critique du nombre de Reynolds  $Re_{equ}^* = 6$ .



- 5. Pour des tubes cylindriques, on a montré expérimentalement que les effets de courbure ont tendance à ralentir la bulle, le nombre de Bond  $Bo_{equ}^*$  critique d'apparition de ces effets est  $Bo_{equ,i}^* = 9$  si  $Re_{equ} > Re_{equ}^*$  (transition A<sub>13</sub>) et  $Bo_{equ,\nu}^* = 15$  si  $Re_{equ} < Re_{equ}^*$  (transition A<sub>24</sub>). On remarque que, quel que soit le nombre de Reynolds, la bulle ne se propage plus pour  $Bo_{equ} < 1$ .

## 4. APPROCHE ANALYTIQUE

La vitesse de remontée des bulles dans un liquide est habituellement vue comme le résultat de l'équilibre entre la force d'Archimède et la traînée de la bulle. Dans cette approche globale, la facilité du calcul de la force d'Archimède masque souvent la difficulté du calcul de la force de traînée.

Un exemple d'application de cette méthode globale est le travail de J. Hadamard [38] et Rybczynski [70] qui ont étendu le problème de Stokes [75] au cas des bulles sphériques à faible nombre de Reynolds. Ils évaluent ainsi la force de traînée à  $D = 2\pi dU_b\mu$  où  $d$  est le diamètre de la bulle. Le coefficient de traînée  $C_D$ , défini comme le rapport entre la traînée et la force dynamique  $1/2\rho U_b^2(\pi/4)d^2$ , prend la forme :

$$C_D \equiv \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U_b^2 \frac{\pi}{4} d^2} = \frac{16}{Re} \quad \text{où} \quad Re = \frac{U_b d}{\nu} \quad (4.1)$$

La traînée de Stokes pour une sphère solide est 1,5 fois plus élevée et conduit à :

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad (4.2)$$

D. Bhaga et M.E. Weber [9] montrent expérimentalement qu'à faible nombre de Reynolds l'accord est satisfaisant entre leurs mesures de vitesse et la théorie de J. Hadamard [38] et Rybczynski [70] depuis un nombre de Reynolds égal à 0,1 jusqu'à une valeur de l'ordre de l'unité. Les mesures de coefficient de traînée obtenues par T. Maxworthy et al. [56] dans des mélanges eau-glycérol se situent, sur un graphique  $C_D-Re$ , entre la loi (4.1) issue des travaux de J. Hadamard et Rybczynski et la loi de Stokes (4.2) depuis un nombre de Reynolds de 0,01 jusqu'à 3. Les auteurs désignent les impuretés du liquide comme responsables de l'écart entre la loi (4.1) et leurs mesures.

Dans le domaine des nombre de Reynolds élevés, on considère que l'écoulement autour d'une bulle sphérique peut être décrit par l'écoulement potentiel autour d'une sphère et l'on déduit du champ de vitesse l'ordre de grandeur de l'énergie dissipée (G.K. Batchelor [6] p 368). Cette démarche conduit à une force de traînée  $D = 6\pi dU_b\mu$  à partir de laquelle on déduit le coefficient de traînée :

$$C_D = \frac{48}{Re} \quad (4.3)$$

Ces travaux ont été complétés par D.W. Moore [61] en 1963 par la prise en compte de la dissipation dans la couche limite présente à la surface de la bulle et le sillage. Il montre que l'on a alors une relation de la forme :

$$C_D = \frac{48}{Re} \left( 1 - \frac{2.21}{\sqrt{Re}} \right) \quad (4.4)$$

W.L. Haberman et R.K. Morton [37] trouvent expérimentalement un bon accord entre la loi (4.3) et leurs résultats expérimentaux pour un nombre de Reynolds compris entre 20 et 150.

T. Maxworthy et al. [56], pour leur part, place la validité de la loi (4.3) entre 25 et 100 en terme de nombre de Reynolds.

Ces succès théoriques pour les bulles sphériques ne doivent pas masquer les difficultés inhérentes à cette approche, rencontrées pour les bulles déformables, non sphériques, où déduire la forme de l'écoulement devient un exercice difficile.

Nous présentons dans ce chapitre une approche locale basée sur la structure du point d'arrêt de la bulle et sur le raccordement entre des conditions dynamiques à sa surface et l'écoulement loin en amont de l'apex.

Cette approche locale a été proposée et utilisée avec succès dans le domaine des grandes bulles remontant dans un tube par D. Dumitrescu [28] en 1943, R. M. Davies et S.G. Taylor [25] en 1950 puis par D. Layzer [48] en 1955. Le détail de leurs travaux est développé dans l'annexe B.

#### 4.1 Conditions dynamiques à l'interface gaz-liquide

Considérons une bulle de gaz remontant verticalement dans un liquide sous l'action de la gravité  $\underline{g}$  avec une vitesse constante  $U_b$ . L'axe  $\underline{e}_y$  est dirigé selon la gravité  $\underline{g}$ . Dans le référentiel Galiléen remontant avec la même vitesse, la bulle est stationnaire tandis que le liquide ainsi que les parois du tube contenant la bulle descendent à la vitesse  $U_b$ . Soit  $\underline{U}$  le champ de vitesse dans le liquide et  $p$ , le champ de pression. L'écoulement est décrit par l'équation de Navier-Stokes stationnaire :

$$\underline{\underline{\text{grad } U}} \cdot \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \underline{\underline{\text{grad } p}} + \underline{g} + \nu \Delta \underline{U}, \quad (4.5)$$

à laquelle on ajoute la condition d'incompressibilité :

$$\text{div } \underline{U} = 0. \quad (4.6)$$

On peut réécrire l'équation (4.5) en utilisant l'identité  $\underline{\underline{\text{grad } U}} \cdot \underline{U} = 1/2 \underline{\underline{\text{grad } U^2}} - \underline{U} \wedge \underline{\text{rot } U}$  et en projetant l'équation (4.5) sur la surface de la bulle le long de l'élément  $\underline{dl}$  :

$$\frac{1}{2} \rho dU^2 = -dp + \rho g dy + \mu \Delta \underline{U} \cdot \underline{dl}, \quad (4.7)$$

où  $\mu = \nu \cdot \rho$  est la viscosité dynamique.

La variation de pression sur l'interface est donnée par la contrainte visqueuse normale à la bulle  $p = p_0 + (\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}$  où  $\underline{n}$  est le vecteur normal à la surface dirigé vers le liquide,  $\underline{\underline{\tau}}$  est le tenseur des contraintes visqueuses et  $p_0$  est la pression dans le gaz qui est supposée constante. Nous avons négligé dans ce calcul la viscosité du gaz. Avec ces hypothèses, la variation de pression dans le liquide est :

$$dp = d[(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}]. \quad (4.8)$$

Nous n'avons pas considéré, dans cette équation, les effets de courbure. Ceux ci seront discutés dans la section 4.4.

Pour un liquide Newtonien, le tenseur des contraintes visqueuses est relié au gradient de vitesse par la relation :  $\underline{\underline{\tau}} = \mu(\underline{\underline{\text{grad } U}} + {}^t \underline{\underline{\text{grad } U}})$ .

##### 4.1.1 Cas non visqueux

Lorsque la viscosité du liquide peut être négligée, l'équation (4.8) se réduit à  $dp = 0$  et la projection de l'équation de Navier-Stokes sur l'interface, équation (4.7), s'écrit  $dU^2 = 2g dy$ , ce qui peut s'intégrer en :

$$\boxed{U^2 = 2gy.} \quad (4.9)$$

Dans cette équation,  $y$  est la distance au sommet de la bulle où la vitesse du liquide devient nulle. La condition dynamique à la surface de la bulle se résume donc, dans le cas non visqueux et non courbé, à l'augmentation linéaire du carré de la vitesse du liquide avec la distance au sommet de la bulle.

On doit aussi ajouter une condition d'imperméabilité de la bulle :

$$\underline{U} \cdot \underline{n} = 0. \quad (4.10)$$

Cette équation implique que la vitesse est tangente à la surface de la bulle. En d'autres termes, la bulle est une ligne de courant.

#### 4.1.2 Cas visqueux

Dans la limite  $Re \rightarrow 0$ , les termes inertiels sont négligeables devant les termes visqueux et l'équation (4.7) se réduit à :

$$\boxed{d[(\underline{\tau} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}] = \rho g dy + \mu \Delta \underline{U} \cdot d\underline{l}.} \quad (4.11)$$

Dans ce régime, la surface de la bulle doit toujours être une ligne de courant et la projection sur la surface du tenseur des contraintes visqueuses  $\underline{\tau} \cdot \underline{n}$  doit être nulle :

$$(\underline{\tau} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{t} = 0. \quad (4.12)$$

## 4.2 Comportement de la fonction courant autour de l'apex

Dans cette section, nous développons la fonction courant près du point d'arrêt. Ce développement est poussé à des ordres suffisamment élevés pour permettre de satisfaire les conditions dynamiques à l'interface, explicitées dans la section 4.1. Les symétries du champ de vitesse sont utilisées pour simplifier les développements de la fonction courant  $\psi$ .

### 4.2.1 Écoulements 2D plans

Dans le cas d'un écoulement 2D plan, nous utilisons les notations présentées sur la figure 4.1. Comme l'écoulement est invariant dans la direction  $\underline{e}_z$ , le champ de vitesse  $\underline{U}$  d'un fluide incompressible peut être décrit comme  $\underline{U} = \underline{\text{grad}} \psi \wedge \underline{e}_z$ , où  $\psi$  est la fonction courant à déterminer et  $\underline{e}_z$ , le vecteur unitaire de l'axe  $z$ .

#### Développement au premier ordre

Le développement en série de  $\psi$  jusqu'au premier ordre est :

$$\psi = A + Bx + Cy, \quad (4.13)$$

d'où  $u = \partial\psi/\partial y = C$  et  $v = -\partial\psi/\partial x = -B$ . Comme la vitesse est nulle au point d'arrêt, on en déduit que  $C = B = 0$ . En outre, nous définissons  $\psi = 0$  sur la ligne de courant qui passe par le point d'arrêt  $(0,0)$  ce qui nous amène à choisir  $A = 0$ . Le développement de  $\psi$  commence donc au second ordre.

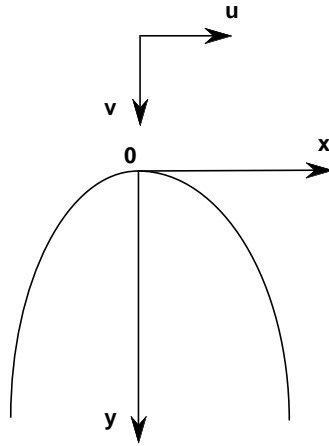


Figure 4.1: Notations utilisées pour l'écoulement 2D plan.

## Développement au second ordre

$$\psi = Dx^2 + Ey^2 + Fxy. \quad (4.14)$$

Soit :

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 2Ey + Fx, \quad (4.15)$$

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -2Dx - Fy. \quad (4.16)$$

La symétrie de l'écoulement impose  $u(-x) = -u(x)$  et  $v(x) = v(-x)$ . Cette condition de symétrie implique que  $E = D = 0$ , d'où :

$$\psi = Fxy. \quad (4.17)$$

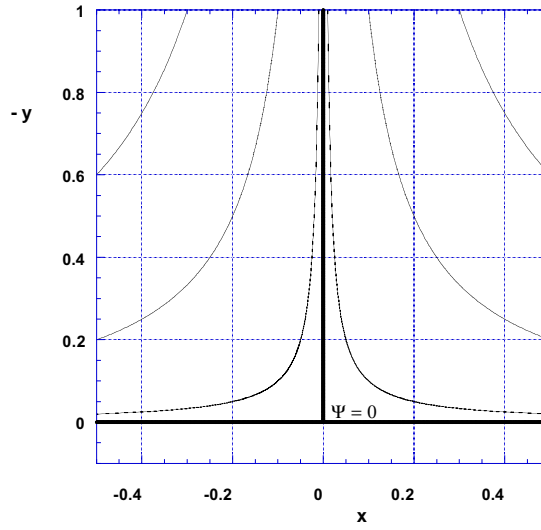
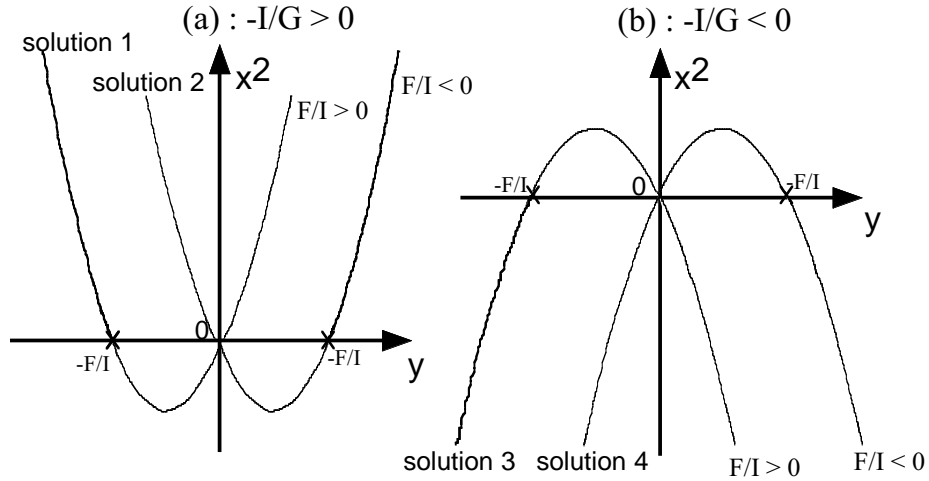
Au second ordre, les lignes de courant  $\psi = Cte$  sont des hyperboles et l'écoulement est irrotationnel :  $\text{rot } \underline{U} = (\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)\underline{e}_z = 0$ . L'écoulement est complètement déterminé par le paramètre  $F$  qui a la dimension de l'inverse d'un temps  $[F] = 1/T$ . De plus, puisque  $v = -Fy$  est positif pour des valeurs négatives de  $y$ ,  $F$  est positif. La ligne de courant  $\psi = 0$  et quelques autres sont présentées sur la figure 4.2. On observe que le liquide ne dépasse jamais le sommet de la bulle. La condition (4.9) ne peut donc pas être vérifiée et nous sommes dans l'obligation de mener le développement de  $\psi$  au troisième ordre.

## Développement au troisième ordre

$$\psi = Fxy + Gx^3 + Hx^2y + Ixy^2 + Jy^3, \quad (4.18)$$

soit :

$$u = Fx + Hx^2 + 2Ixy + 3Jy^2, \quad (4.19)$$

Figure 4.2: Structure de l'écoulement au second ordre du développement de  $\psi$ Figure 4.3: Schéma explicatif de la discussion sur le signe des coefficients de l'équation (4.23) : (a)  $-I/G > 0$  (b)  $-I/G < 0$ 

$$v = -Fy - 3Gx^2 - 2Hxy - Iy^2. \quad (4.20)$$

Les symétries du champ de vitesse imposent ici  $H = J = 0$ . On a donc :

$$\psi = Fxy + Gx^3 + Ixy^2, \quad (4.21)$$

et

$$\text{rot } \underline{U} = -2x(I + 3G). \quad (4.22)$$

L'écoulement est donc complètement défini par trois paramètres  $F, G$  et  $I$  de dimension :

$$[F] = 1/T, \quad [G] = [I] = 1/LT.$$

La ligne de courant  $\psi = 0$  correspond à l'axe de symétrie  $x = 0$  et, lorsque  $x \neq 0$ , à la courbe défini par :

$$Fy + Gx^2 + Iy^2 = 0, \quad (4.23)$$

On a alors :

$$x^2 = -\frac{I}{G}y^2 - \frac{F}{G}y, \quad (4.24)$$

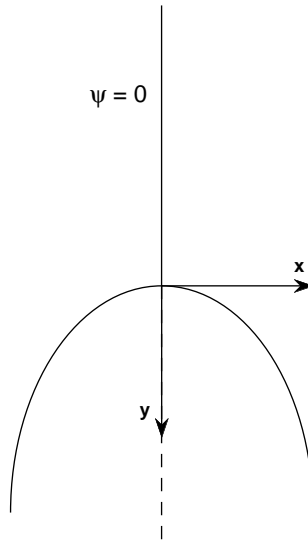


Figure 4.4: Forme de la ligne de courant  $\psi = 0$  au troisième ordre du développement de  $\psi$

Les seules solutions physiquement acceptables sont celles pour lesquelles  $x^2 \geq 0$  pour tout  $y \geq 0$  et  $x$  est une fonction croissante monotone de  $y$ . La condition  $x^2 \geq 0$  s'écrit :

$$-\frac{I}{G}y\left(y + \frac{F}{I}\right) \geq 0. \quad (4.25)$$

La figure 4.3-(a) présente les solutions pour  $-I/G > 0$  : la solution 1 correspond au cas  $F/I > 0$  tandis que la solution 2 est le cas  $F/I < 0$ . Les deux autres cas pour  $-I/G < 0$  sont présentés sur la figure 4.3-(b). On remarque que la première condition,  $x^2 \geq 0$  pour tout  $y \geq 0$ , n'est pas vérifiée par la solution 3 qui est donc éliminée. On peut aussi éliminer la solution 4 qui n'est pas une fonction monotone de  $y$  pour  $x^2 \geq 0$ . De même, la solution 2 n'est pas physiquement valable car  $x^2$  peut alors être négatif pour certaines valeurs de  $y$ . Seule la solution 1 possède une branche  $y \geq 0$  physiquement acceptable. On en déduit que  $-I/G > 0$  et  $F/I > 0$ . De plus, on sait que  $F > 0$ , on a donc  $I > 0$  et  $G < 0$ . La forme de la bulle peut s'écrire :

$$x = \sqrt{\frac{Fy + Iy^2}{-G}}. \quad (4.26)$$

Elle peut donc être développée autour du point d'arrêt en :

$$x = \sqrt{\frac{Fy}{-G}} \left(1 + \frac{Iy}{2F} + \mathcal{O}(y^2)\right). \quad (4.27)$$

Au premier ordre de ce développement, la bulle est, à son sommet, une parabole. La forme de la ligne de courant  $\psi = 0$  est présentée sur la figure 4.4. Celle-ci comprend l'axe  $x = 0$  et la parabole en trait plein qui correspond au cas  $-G/F > 0$ .

Nous avons exprimé la fonction courant de l'écoulement autour du point d'arrêt de la bulle, équation (4.21) et la forme de la bulle, équation (4.23), nous allons donc expliciter la condition dynamique présentée dans la section 4.1.

Dans le cas limite non visqueux, la vitesse doit satisfaire la condition  $U^2 = 2gy$ , où  $U^2 \equiv u^2 + v^2$ . Le champ de vitesse peut être déduit de l'équation (4.23) :

$$u = Fx + 2Ixy, \quad (4.28)$$

$$v = -Fy - 3Gx^2 - Iy^2. \quad (4.29)$$

Puisque  $x \sim \sqrt{y}$  sur la bulle, on en déduit qu'à l'ordre le plus bas  $v \sim y$  et  $u \sim \sqrt{y}$ . Ainsi, à l'ordre dominant,  $U^2 \approx u^2 \approx F^2x^2$  ce qui peut être écrit à l'aide de l'équation (4.26) :

$$U^2 = \frac{F^3}{-G}y + \mathcal{O}(y^2). \quad (4.30)$$

La linéarité de  $U^2$  en  $y$  est bien vérifiée et la condition dynamique, équation (4.9) impose :

$$\boxed{\frac{F^3}{-G} = 2g.} \quad (4.31)$$

Dans le cas d'un écoulement irrotationnel,  $G = -I/3$  et la condition précédente s'écrit aussi  $F^3/I = 2g/3$ .

La condition dynamique dans le cas limite visqueux fait intervenir des dérivées d'ordre supérieur et donc un ordre de plus dans le développement de  $\psi$ .

#### Développement au quatrième ordre

$$\psi = Fxy + Gx^3 + Ixy^2 + Kx^4 + Lx^3y + Mx^2y^2 + Nxy^3 + Oy^4. \quad (4.32)$$

La symétrie de l'écoulement réduit  $\psi$  à :

$$\psi = Fxy + Gx^3 + Ixy^2 + Lx^3y + Nxy^3, \quad (4.33)$$

et le champ de vitesse à :

$$u = Fx + 2Ixy + Lx^3 + 3Nxy^2, \quad (4.34)$$

$$v = -Fy - 3Gx^2 - Iy^2 - 3Lx^2y - Ny^3, \quad (4.35)$$

avec :

$$\text{rot } \underline{U} = -2x[I + 3G + 3y(L + N)]. \quad (4.36)$$

Pour un écoulement irrotationnel, on a donc  $G = -I/3$  et  $N = -L$ . La ligne de courant correspondant à la bulle est définie comme :

$$Fy + Gx^2 + Iy^2 + Lx^2y + Ny^3 = 0, \quad (x \neq 0), \quad (4.37)$$

ce qui permet d'écrire que :

$$x = \sqrt{\frac{Fy + Iy^2 + Ny^3}{-G - Ly}}. \quad (4.38)$$

La forme de la bulle est alors développée au voisinage du sommet sous la forme :

$$x = \sqrt{\frac{Fy}{-G}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{I}{F} - \frac{L}{G} \right) + \mathcal{O}(y^2) \right]. \quad (4.39)$$

A partir des équations (4.34) et (4.35), on calcul les dérivées secondes de  $u$  et  $v$  :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6(L + N)x, \quad (4.40)$$



$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -2(I + 3G) - 6(L + N)y. \quad (4.41)$$

L'élément d'intégration le long de la surface de la bulle est  $\underline{dl} = dx\underline{e}_x + dy\underline{e}_y$ . On peut donc écrire à l'ordre dominant :

$$\Delta \underline{U} \cdot \underline{dl} = -dy \left[ 3 \frac{F}{G} (L + N) + 2(I + 3G) \right]. \quad (4.42)$$

Ce terme est nul pour un écoulement irrotationnel. Ce résultat est général car

$$\Delta \underline{U} = \underline{\text{grad}}(\text{div } \underline{U}) - \underline{\text{rot}}(\underline{\text{rot}}(\underline{U})) = 0 \text{ lorsque } \text{div } \underline{U} = 0 \text{ et } \underline{\text{rot}}(\underline{U}) = 0.$$

En utilisant les équations (4.34) et (4.35), on peut évaluer le terme visqueux :

$$(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n} = -2\mu F + 2\mu y \left( 4G - 6I + 3 \frac{LF}{G} \right) + \mathcal{O}(y^2). \quad (4.43)$$

A l'ordre le plus bas, la pression dans le liquide est donc plus petite que dans le gaz d'une quantité  $2\mu F$ , proportionnelle au produit de la viscosité par le taux de cisaillement.

Pour notre condition dynamique, nous devons exprimer le gradient de pression :

$$d[(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}] = 2\mu dy \left( 4G - 6I + 3 \frac{LF}{G} \right) + \mathcal{O}(y^2). \quad (4.44)$$

La projection du tenseur des contraintes visqueuses sur la tangente à la bulle peut être développée comme :

$$(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{t} = -\mu \sqrt{\frac{-Fy}{G}} (G + I) + \mathcal{O}(y^{3/2}). \quad (4.45)$$

L'annulation de ce terme implique  $G = -I$  ce qui est différent de la condition irrotationnelle  $G = -I/3$ . L'écoulement est donc forcément rotationnel.

La condition dynamique (4.11) se réduit à :

$$\boxed{24G + 9 \frac{FL}{G} + 3 \frac{FN}{G} = \frac{g}{\nu}.} \quad (4.46)$$

Cette condition est l'équivalent visqueux de la condition (4.31).

#### 4.2.2 Écoulements 2D axisymétriques

Dans le cas d'un écoulement 2D axisymétrique, nous utiliserons les notations présentées sur la figure 4.5. Comme le vecteur vitesse  $\underline{U}$  dans le plan défini par  $\theta = Cte$  est tangent à ce plan, on peut exprimer le champ de vitesse d'un fluide incompressible par  $\underline{U} = \underline{e}_\theta / r \wedge \underline{\text{grad}} \psi$ , où  $\psi$  est la fonction courant à déterminer et  $\underline{e}_\theta$ , le vecteur unitaire de l'axe  $\theta$ . On observe que la dimension de la fonction courant est  $[\psi] = L^3/T$  différente de la dimension du cas 2D plan discuté précédemment. Cette remarque est à l'origine des différences dans le développement de  $\psi$  autour du point d'arrêt, entre les cas 2D plan et 2D axisymétrique.

##### Début du développement de $\psi$

On développe  $\psi$  en série de puissances de  $r$  et  $z$ . Jusqu'au second ordre, ce développement s'écrit :

$$\psi = A + Br + Cz + Dr^2 + Erz + Fz^2, \quad (4.47)$$

soit :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{C}{r} + E + 2F \frac{z}{r}, \quad (4.48)$$

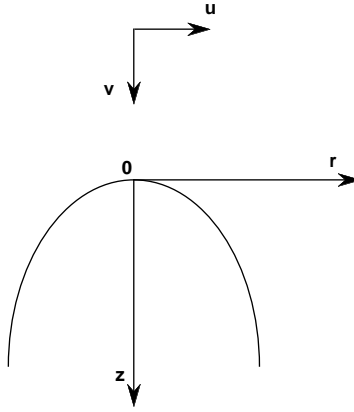


Figure 4.5: Notations utilisées pour l'écoulement 2D axisymétrique.

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{B}{r} + 2D - \frac{Ez}{r}. \quad (4.49)$$

Pour éviter la singularité en  $r = 0$ , nous devons écrire  $B = C = E = F = 0$ . De plus, puisque la vitesse est nulle au sommet de la bulle, on a aussi  $D = 0$ . Enfin, on choisit  $\psi = 0$  pour la ligne de courant passant par le sommet ce qui implique que  $A = 0$ . Le développement de la fonction courant commence donc au troisième ordre.

Développement au troisième ordre

$$\psi = Gr^3 + Hr^2z + Irz^2 + Jz^3, \quad (4.50)$$

soit :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = Hr + 2Iz + \frac{3Jz^2}{r}, \quad (4.51)$$

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -3Gr - 2Hz - \frac{Iz^3}{r}. \quad (4.52)$$

De la même manière que précédemment, afin d'éviter la singularité en  $r = 0$ , on doit avoir  $I = J = 0$ . De plus, les symétries de l'écoulement  $u(r) = -u(-r)$  et  $v(r) = v(-r)$  nous imposent  $I = G = 0$ .  $\psi$  se réduit donc à :

$$\psi = Hr^2z. \quad (4.53)$$

Comme  $v = -2Hz$  est positive pour des valeurs de  $z$  négatives, on en déduit que  $H$  est positif. Les lignes de courant  $\psi = Cte$  sont des hyperboles d'équation  $zr^2 = Cte$ . A cet ordre du développement, l'écoulement est entièrement défini par un paramètre  $H$  qui est de la dimension de l'inverse d'un temps  $[H] = 1/T$ . Si l'on considère la vorticité de l'écoulement, on obtient :

$$\text{rot } \underline{U} = \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) \underline{e}_\theta = 0. \quad (4.54)$$

Proche du sommet de la bulle, l'écoulement est toujours irrotationnel. Si l'on considère la ligne de courant  $\psi = 0$ , on observe que si  $z \neq 0$  alors  $r = 0$  et que si  $r \neq 0$  alors  $z = 0$ . Ce comportement est similaire à celui observé dans le cas 2D au second ordre : l'écoulement ne dépasse jamais le point d'arrêt. Le développement de  $\psi$  doit donc être prolongé à l'ordre suivant.

## Développement au quatrième ordre

$$\psi = Hr^2z + Kr^4 + Lr^3z + Mr^2z^2 + Nrz^3 + Oy^4, \quad (4.55)$$

soit :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = Hr + Lr^2 + 2Mrz + 3Nz^2 + \frac{4Oz^3}{r}, \quad (4.56)$$

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -2Hz - 4Kr^2 - 3Lrz - 2Mz^2 - \frac{Nz^3}{r}. \quad (4.57)$$

Afin d'éviter la singularité en  $r = 0$ , on a  $O = N = 0$ . En outre, les symétries de l'écoulement nous imposent que  $L = N = 0$ , ce qui réduit  $\psi$  à :

$$\psi = Hr^2z + Kr^4 + Mr^2z^2. \quad (4.58)$$

Si l'on calcule le rotationnel du champ de vitesse, on obtient :

$$\underline{\text{rot}}U = \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) \underline{e}_\theta = 2r(M + 4K). \quad (4.59)$$

L'écoulement sur l'axe de symétrie  $r = 0$  est irrotationnel. Pour que l'écoulement dans la région du point d'arrêt soit irrotationnel, on doit avoir  $M + 4K = 0$ .

Si l'on ne s'intéresse qu'à la ligne de courant définie par  $\psi = 0$  (surface de la bulle), on trouve que si  $r \neq 0$ , la surface de la bulle a pour équation :

$$Hz + Kr^2 + Mz^2 = 0, \quad (4.60)$$

La même discussion que pour l'équation (4.23) de la surface de la bulle 2D plan sur le signe des coefficients  $H$ ,  $K$  et  $M$  nous permet d'écrire que  $H$  est positif,  $K < 0$  et  $M > 0$ . L'équation de la surface de la bulle est , à l'ordre dominant :

$$r = \sqrt{\frac{-Hz - Mz^2}{K}}, \quad (4.61)$$

ce qui peut être développé autour du point d'arrêt en :

$$r = \sqrt{\frac{-Hz}{K}} \left( 1 + \frac{Mz}{2H} + \mathcal{O}(z^2) \right). \quad (4.62)$$

Ce comportement parabolique est similaire à celui observé pour un écoulement 2D plan, équation (4.26).

Nous avons exprimé la fonction courant de l'écoulement autour du sommet de la bulle, équation (4.58), et la forme de la bulle, équation (4.62), on peut donc calculer explicitement les conditions présentées dans la section 4.1.

Si l'on considère le cas limite non visqueux, la vitesse doit satisfaire la condition  $U^2 = 2gz$ , avec  $U^2 \equiv u^2 + v^2$ . A l'aide des équations (4.56) et (4.57), on peut écrire le champ de vitesse :

$$u = Hr + 2Mrz, \quad (4.63)$$

$$v = -2Hz - 4Kr^2 - 2Mz^2. \quad (4.64)$$

Puisque  $r \sim \sqrt{z}$  sur la bulle, on en déduit qu'à l'ordre dominant  $v \sim z$  et  $u \sim \sqrt{z}$ . Ainsi, à l'ordre dominant,  $U^2 \approx u^2 \approx H^2r^2$  ce qui peut être écrit, en tenant compte de l'équation (4.62) :

$$U^2 \approx \frac{H^3}{-K}z + \mathcal{O}(z^2). \quad (4.65)$$

La linéarité de  $U^2$  en  $z$  est bien respectée et la condition (4.9) nous impose que :

$$\boxed{\frac{H^3}{-K} = 2g.} \quad (4.66)$$

Dans le cas limite visqueux, des dérivées d'ordre supérieur interviennent, on a donc besoin de poursuivre le développement de  $\psi$  au cinquième ordre.

#### Développement au cinquième ordre

$$\psi = Hr^2z + Kr^4 + Mr^2z^2 + Pr^5 + Qr^4z + Rr^3z^2 + Sr^2z^3 + Trz^4 + Uz^5, \quad (4.67)$$

soit :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = Hr + 2Mrz + Qr^3 + 2Rr^2z + 3Sr^2z^2 + 4Tz^3 + \frac{5Uz^4}{r}, \quad (4.68)$$

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -2Hz - 4Kr^2 - 2Mz^2 - 5Pr^3 - 4Qr^2z - 3Rr^2z^2 - 2Sz^3 - \frac{Tz^4}{r}. \quad (4.69)$$

La singularité en  $r = 0$  et les symétries de l'écoulement impliquent que  $U = T = P = R = 0$ . Ceci nous donne une fonction courant de la forme :

$$\psi = Hr^2z + Kr^4 + Mr^2z^2 + Qr^4z + Sr^2z^3. \quad (4.70)$$

Le rotationnel de l'écoulement a pour expression :

$$\underline{\text{rot}} \underline{U} = \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) \underline{e}_\theta = 2r(M + 4K) + 2rz(3S + 4Q). \quad (4.71)$$

La condition pour que l'écoulement autour du point d'arrêt soit irrotationnel devient donc  $M = -4K$  et  $3S = -4Q$ . La ligne de courant  $\psi = 0$  est définie pour  $r = 0$  par l'équation  $Hr^2z + Kr^4 + Mr^2z^2 + Qr^4z + Sr^2z^3 = 0$  ce qui peut être écrit comme  $r$  en fonction de  $z$  :

$$r = \sqrt{\frac{Hz + Mz^2 + Sz^3}{-K - Qz}}, \quad (4.72)$$

ce qui conduit à :

$$r = \sqrt{\frac{Hz}{-K}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{M}{H} - \frac{Q}{K} \right) z + \mathcal{O}(z^2) \right]. \quad (4.73)$$

Le Laplacien de la vitesse dans le cas d'un écoulement axisymétrique en coordonnées cylindrique s'écrit :

$$\Delta \underline{U} = \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \underline{e}_r + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \underline{e}_z. \quad (4.74)$$

On peut, en utilisant l'équation (4.70), écrire ce Laplacien sous la forme :

$$\Delta \underline{U} = [2r(3S + 4Q)] \underline{e}_r + [-4(M + 4K) - 4z(3S + 4Q)] \underline{e}_z. \quad (4.75)$$

Comme  $\underline{dl} = dr \underline{e}_r + dz \underline{e}_z$ , on a sur l'interface :

$$\Delta \underline{U} \cdot \underline{dl} = -dz \left[ \frac{H}{K} (3S + 4Q) + 4(M + 4K) \right]. \quad (4.76)$$

En utilisant l'équation (4.70), on peut évaluer :

$$(\underline{\tau} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{t} = -2\mu \sqrt{\frac{Hz}{-K}} (2K + M) + \mathcal{O}(z^{3/2}). \quad (4.77)$$

La projection tangentielle du vecteur contrainte doit être nulle à l'ordre le plus bas, ce qui nous amène à la condition :  $2K + M = 0$  qui est différente de la condition  $M + 4K = 0$ .

La projection normale s'écrit :

$$(\underline{\tau} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n} = -4\mu H + 8\mu z \left( K - 2M + \frac{HQ}{K} \right) + \mathcal{O}(z^2). \quad (4.78)$$

À l'ordre le plus bas, la pression dans le liquide est inférieure de  $4\mu H$  à la pression dans le gaz. Cette différence est proportionnelle au produit de la viscosité avec le taux de cisaillement.

On peut maintenant évaluer la condition dynamique présentée dans l'équation (4.11) :

$$\boxed{48K + 12 \frac{QH}{K} + 3 \frac{HS}{K} = \frac{g}{\nu}}. \quad (4.79)$$

Cette condition est l'équivalente visqueuse de l'équation (4.66).

On remarque qu'un écoulement de Stokes est décrit en 2D plan par  $\Delta^2 \psi = 0$ . Cependant, notre travail ne concerne que le quatrième ordre et cette condition est toujours satisfaite. Pour des ordres plus élevés du développement, cette condition apportera de nouvelles contraintes.

### 4.3 Raccordement avec l'écoulement en amont de la bulle

La dernière étape de l'approche locale consiste à déterminer les coefficients apparus dans le développement de  $\psi$  en raccordant l'écoulement à l'apex avec l'écoulement en amont de la bulle.

#### 4.3.1 Écoulements 2D plans

Expérimentalement, les écoulements 2D visqueux ne sont pas aisés à obtenir. À cause de la taille réduite dans la direction transverse, les gradients deviennent très importants comme dans le problème de la cellule de Hele-Shaw. Nous ne discuterons donc ici que le cas limite d'un écoulement non visqueux où l'écoulement peut être considéré comme irrotationnel et décrit par un potentiel des vitesses  $\phi$  qui satisfait à l'équation de Laplace :  $\Delta \phi = 0$ . Deux exemples sont présentés, le premier concerne la remontée d'une bulle circulaire de rayon  $R$  dans un milieu infini, figure 4.6 (a) et le second la remontée d'une bulle infinie dans une cellule de largeur  $2R$ , figure 4.6 (b).

#### Bulle circulaire dans un milieu infini

En utilisant les notations présentées sur la figure 4.6, le potentiel des vitesses d'un écoulement autour d'un cercle est de la forme :

$$\phi = U_b r \cos \theta \left[ 1 + \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right]. \quad (4.80)$$

Cet écoulement peut être obtenu en superposant les potentiels correspondant à un écoulement uniforme et celui d'un doublet (source-puits). Il satisfait à la condition amont  $\phi_{(r \rightarrow \infty, \theta = \pi)} \rightarrow -U_b r$ , i.e. la vitesse de l'écoulement est  $U_b$  et est dirigée selon  $z$  loin en amont de la bulle. Cet écoulement satisfait aussi à la condition de point de stagnation en  $(r = R, \theta = \pi)$  et à la condition de vitesse normale nulle à la surface de la bulle. La fonction courant correspondante est :

$$\psi = U_b r \sin \theta \left[ 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right]. \quad (4.81)$$

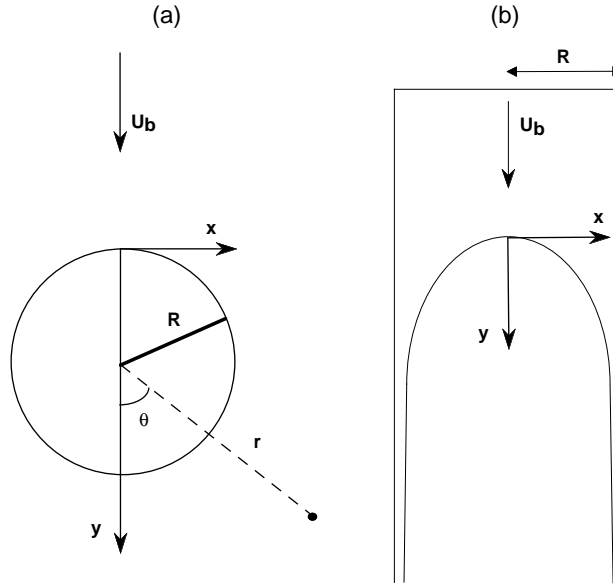


Figure 4.6: Présentation du problème. (a) bulle 2D plane remontant dans un milieu infini, (b) bulle 2D plane remontant dans une cellule de largeur  $2R$

Le développement de cette fonction autour du sommet, dans le système de coordonnées  $(x, y)$ , donne :

$$\psi = 2 \frac{U_b}{r} xy - \frac{U_b}{R^2} x^3 + 3 \frac{U_b}{R^2} xy^2. \quad (4.82)$$

On en déduit que :  $F = 2U_b/R$ ,  $G = -U_b/R^2$  et  $I = 3U_b/R^2$ . La condition  $3G + I = 0$  est satisfaite et l'on vérifie que l'écoulement est irrotationnel. Avec ces valeurs de paramètres, la condition dynamique (4.31) nous permet d'évaluer la vitesse de remontée de la bulle :

$$U_b = \frac{1}{2} \sqrt{gR}. \quad (4.83)$$

#### Bulle infinie dans une cellule de largeur $2R$

L'écoulement 2D plan dans un tube de largeur  $2R$  peut être approché par le potentiel :

$$\phi = U_b y + A e^{ky} \cos kx, \quad (4.84)$$

Ce potentiel vérifie  $\Delta\phi = 0$  et satisfait à la condition amont  $\phi_{y \rightarrow -\infty} = U_b y$ . Les constantes  $A$  et  $k$  doivent être déterminées de façon à satisfaire la condition de point d'arrêt en  $(0,0)$  et de vitesse normale nulle à la paroi. La fonction courant correspondante est :

$$\psi = -(U_b x + A e^{ky} \sin kx), \quad (4.85)$$

et le champ de vitesse est :

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = -Ak e^{ky} \sin kx, \quad (4.86)$$

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = U_b + Ak e^{ky} \cos kx. \quad (4.87)$$

Les conditions  $u(R, y) = 0$  et  $v(0, 0) = 0$  imposent  $k = \pi/R$  et  $Ak = -U_b$ . Le développement de  $\psi$  à l'ordre 3 donne donc :

$$\psi = \frac{\pi U_b}{R} xy + \frac{1}{2} \frac{\pi^2 U_b}{R^2} xy^2 - \frac{1}{6} \frac{\pi^2 U_b}{R^2} x^3. \quad (4.88)$$

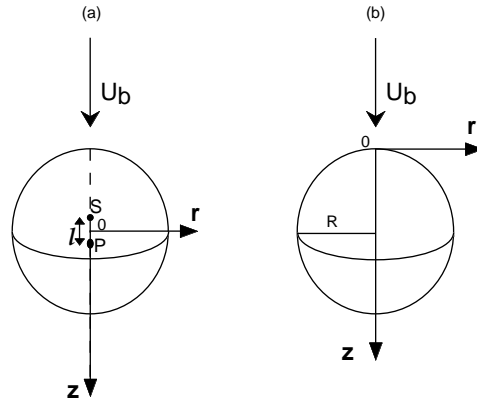


Figure 4.7: Présentation du problème. (a) Bulle 2D axisymétrique remontant dans un milieu infini. (b) Système de coordonnées utilisé pour le développement de  $\psi$

En identifiant avec les coefficients de l'équation (4.21), on trouve  $F = \pi U_b/R$ ,  $G = -\pi^2 U_b/6R^2$  et  $I = \pi^2 U_b/2R^2$ . On vérifie que l'écoulement est irrotationnel :  $-G = I/3$ . La condition dynamique (4.9)  $-F^3/G = 2g$  impose que :

$$U_b = \sqrt{\frac{gR}{3\pi}} \approx 0,326 \sqrt{gR} \quad (4.89)$$

Ce résultat est identique à celui trouvé par D. Layzer [48] et indépendamment par R. Collins [20].

### 4.3.2 Écoulements 2D axisymétriques

Dans cette partie, nous étudions le problème de la bulle sphérique se déplaçant dans un milieu infini. Dans un premier temps, nous nous intéressons au cas non visqueux puis nous abordons le problème de la bulle de Hadamard-Rybczynski.

#### Bulle sphérique dans un milieu infini - Cas non visqueux

Le potentiel des vitesses est obtenu, dans le système de coordonnées présenté sur la figure 4.7-(a), par superposition d'un écoulement uniforme de vitesse  $U_b$  avec un dipôle :

$$\phi = U_b z + \frac{3U_b R^3}{2} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (4.90)$$

La fonction courant correspondante est :

$$\psi = -U_b \frac{r^2}{2} + \frac{U_b R^3}{2} \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (4.91)$$

Cet écoulement respecte la condition amont  $\phi_{(z \rightarrow -\infty)} = U_b z$ . Il possède un point d'arrêt en  $(r = 0, z = -R)$ . Le développement, dans le système de coordonnées centré sur l'apex (figure 4.7-(b)), de la fonction courant, autour de ce point d'arrêt, s'écrit :

$$\psi = -\frac{3}{2} \frac{U_b}{R} r^2 z + \frac{3}{4} \frac{U_b}{R^2} r^4 - 3 \frac{U_b}{R^2} r^2 z^2. \quad (4.92)$$

Si l'on compare ce résultat à l'équation (4.58)  $\psi = Hr^2z + Kr^4 + Mr^2z^2$ , on en déduit que  $H = -3U_b/(2R)$ ,  $K = 3U_b/(4R^2)$  et  $M = -3U_b/R^2$ . La condition  $M+4K = 0$  est alors satisfaite

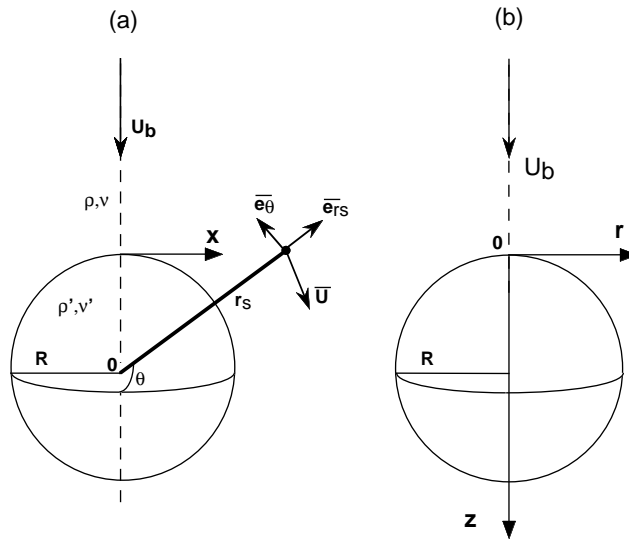


Figure 4.8: Présentation du problème de la bulle de Hadamard-Rybczynski : (a) dans le système de coordonnées sphériques (b) dans le système de coordonnées cylindriques

et on vérifie que l'écoulement est potentiel. La condition dynamique (4.66)  $-H^3/K = 2g$  impose pour la vitesse de la bulle :

$$U_b = \frac{2}{3}\sqrt{gR}. \quad (4.93)$$

Le résultat précédent ne s'applique que dans le cas des bulles à calottes sphériques. Ces bulles possèdent une interface avant qui est lisse, régulière et de forme approximativement sphérique de rayon  $R$  et une partie arrière, approximativement plane et dentelée. La couche limite située sur l'interface se détache de la bulle au niveau de ce bord arrière, cette couche de vorticité garde ensuite une forme sphérique de même rayon  $R$ . Ceci nous permet d'estimer la vitesse du liquide à l'interface comme si la bulle lenticulaire était la partie d'une sphère de rayon  $R$  qui remonte dans un milieu infini non visqueux. On peut alors calculer la vitesse de remontée à partir de la forme de la bulle sans considérer de méchanisme "frein" à la remontée.

On retrouve ici le résultat théorique de R.M. Davies et S.G. Taylor [25] pour des bulles lenticulaires de sommet sphérique se déplaçant dans un milieu infini. Ce résultat est en bon accord avec ses expériences.

Si la bulle est effectivement sphérique, il n'y a pas de décollement de la couche limite et celle ci participe entièrement à la dissipation (D. W. Moore [61]) : le résultat précédent n'est plus valable

#### Bulle de Hadamard-Rybczynski - Cas visqueux

Pour illustrer le cas limite visqueux d'un écoulement axisymétrique, nous avons choisi le problème de Hadamard-Rybczynski. En 1911, J. Hadamard [38] et Rybczynski [70] ont, de manière indépendante, étendu le travail de Stokes [75] sur les sphères rigides tombant dans un milieu liquide infini au cas des sphères liquides de viscosités différentes. Le problème est pr esent e sur la figure 4.8-(a) : une sphère liquide de rayon  $R$ , de densité  $\rho'$  et de viscosité cinématique  $\nu'$  est stationnaire dans un liquide de densité  $\rho$  et de viscosité  $\nu$  se déplaçant en direction de la sphère avec une vitesse constante  $U_b$ .

Dans le cas de la bulle d'air dans l'eau où  $\rho'/\rho \ll 1$  et  $\nu'/\nu \ll 1$ , le champ de vitesse est



décrit par la fonction courant :

$$\psi = \frac{1}{2} U_b r_s^2 \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{R}{r_s} \right), \quad (4.94)$$

En utilisant le système de coordonnées cylindriques centré sur l'apex (figure 4.8-(b)), le développement de la fonction courant autour de l'apex s'écrit :

$$\psi = \frac{1}{2} \frac{U_b}{R} r^2 z - \frac{1}{4} \frac{U_b}{R^2} r^4 + \frac{1}{2} \frac{U_b}{R^2} r^2 z^2 - \frac{3}{4} \frac{U_b}{R^3} r^4 z + \frac{1}{2} \frac{U_b}{R^3} r^2 z^3. \quad (4.95)$$

Comparé au développement (4.70)  $\psi = Hr^2z + Kr^4 + Mr^2z^2 + Qr^4z + Sr^2z^3$  on en déduit que :  $H = U_b/(2R)$ ,  $K = -U_b/(4R^2)$ ,  $M = U_b/(2R^2)$ ,  $Q = -3U_b/(4R^3)$  et  $S = U_b/(2R^3)$ . La condition  $2K + M = 0$  est satisfaite et la condition dynamique (4.79) :  $48K + 12QH/K + 3HS/K = g/\nu$  nous conduit au résultat classique :

$$U_b = \frac{1}{3} \frac{gR^2}{\nu}. \quad (4.96)$$

Pour conclure sur cette section, on peut souligner que la vitesse de remontée de la bulle est la seule pour laquelle l'écoulement au dessus de la bulle s'accorde avec la structure de l'écoulement au point de stagnation qui est déterminé par des conditions dynamiques à l'interface. L'approche locale conduit bien au même résultat que l'approche globale.

En fait, cette approche locale utilise, dans ce cas, des informations sur l'écoulement global visqueux tout autour de la bulle. La fonction courant (4.94) utilisée est, en effet, la solution exacte du problème de l'écoulement de Stokes. Ainsi, la condition visqueuse (4.7) est vérifiée par cet écoulement au voisinage de n'importe quel point de la bulle en particulier autour du point d'arrêt.

Pour une meilleure compréhension de la suite de notre travail dans le cas visqueux, nous allons appliquer l'approximation visco-potentielle au problème de la bulle de Hadamard-Rybczynski. Cette méthode consiste en l'utilisation de la fonction courant d'une bulle dans un milieu infini (4.91) pour évaluer les différentes constantes  $H, K, M, Q$  et  $S$  de la condition dynamique visqueuse (4.79).

En utilisant le système de coordonnées cylindriques présenté sur la figure 4.7-(b), le développement de la fonction courant (4.91) s'écrit :

$$\psi = -\frac{3}{2} \frac{U_b}{R} r^2 z + \frac{3}{4} \frac{U_b}{R^2} r^4 - 3 \frac{U_b}{R^2} r^2 z^2 + \frac{15}{4} \frac{U_b}{R^3} r^4 z - 5 \frac{U_b}{R^3} r^2 z^3. \quad (4.97)$$

Comparé au développement (4.70)  $\psi = Hr^2z + Kr^4 + Mr^2z^2 + Qr^4z + Sr^2z^3$ , on en déduit que :  $H = -3U_b/(2R)$ ,  $K = 3U_b/(4R^2)$ ,  $M = -3U_b/R^2$ ,  $Q = 15U_b/(4R^3)$  et  $S = -5U_b/(R^3)$ . La condition dynamique visqueuse (4.79)  $48K + 12QH/K + 3HS/K = g/\nu$  peut alors être utilisée pour calculer la vitesse  $U_b$  et on trouve :

$$U_b = \frac{1}{24} \frac{gR^2}{\nu}. \quad (4.98)$$

Ce calcul montre que l'approximation visco-potentielle détermine correctement la loi d'échelle de variation de  $U_b$  mais ne nous permet pas d'obtenir le bon coefficient. Nous allons néanmoins utiliser notre approximation pour déterminer la loi d'échelle.

#### 4.4 Effet de la courbure sur la vitesse de la bulle

Nous considérons dans cette section les effets des forces capillaires sur la vitesse d'ascension. Depuis Laplace, on sait que ces forces introduisent un saut de pression à l'interface :

$\Delta p_{Laplace} = \sigma C$  où  $C$  est la courbure de l'interface. La pression dans le liquide est :

$$p = p_0 + (\underline{\tau} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n} - \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (4.99)$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons de courbure principaux de l'interface. Ce terme additionnel modifie la condition dynamique qui doit être satisfaite à la surface de la bulle, nous détaillons ci-dessous ces effets de courbure dans les cas limites non visqueux et visqueux.

#### 4.4.1 Cas non visqueux

Dans la limite non visqueuse, l'équation (4.99) se réduit à :

$$p = p_0 - \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (4.100)$$

#### Écoulements 2D plans

Dans un écoulement 2D plan, l'équation (4.100) s'écrit  $p = p_0 - \sigma/R_1$  ( $R_2 \rightarrow \infty$ ). Au troisième ordre du développement, la forme de la bulle à l'apex est la parabole (4.27), le rayon de courbure peut donc être évalué :

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{x''}{(1+x'^2)^{3/2}} = -\frac{2G}{F} - \frac{12G^2}{F^2}(1-I/G)y + \mathcal{O}(y^2). \quad (4.101)$$

Le rayon de courbure au sommet est  $1/R_0 = 1/R_1(y=0) = -2G/F$ . Puisque  $G/F < 0$ , à l'ordre dominant, la tension de surface diminue la pression dans le liquide par rapport à celle du gaz de  $\sigma/R_0$ .

La condition dynamique (4.7) est donc dans notre cas :

$$\frac{1}{2}\rho dU^2 = -dp + \rho g dz. \quad (4.102)$$

Cette condition peut être évaluée en utilisant les résultats obtenus dans la section 4.2.1 et l'équation (4.101). On obtient  $dp = [12G^2/F^2(1-I/G)]\sigma dy$ . La condition dynamique s'écrit donc :

$$\frac{F^3}{-G} = 2g', \quad (4.103)$$

avec

$$g' \equiv g \left[ 1 - 6 \frac{a^2}{R_0^2} (1 - I/G) \right], \quad (4.104)$$

L'équation (4.103) a la même forme que l'équation (4.31) obtenue sans tenir compte des effets capillaires. Cette remarque nous indique qu'à l'ordre dominant, les effets capillaires diminuent la gravité apparente du problème. Cette influence augmente lorsque le rayon de courbure au sommet  $R_0$  devient petit par rapport à la longueur capillaire  $a$ . Dans la limite  $R_0 \gg a$  la gravité effective  $g'$  se réduit à  $g$  et l'équation (4.103) est identique à l'équation (4.31). Dans la limite opposée  $R_0 \ll a$  on peut remarquer l'existence d'un rayon critique  $R_0^* \equiv a\sqrt{6(1-I/G)}$  pour lequel  $g' = 0$ . La bulle ne devrait pas être capable de se propager dans un tube de rayon inférieur à  $R_0^*$ .

Il est indispensable de noter ici que les effets de courbure n'interviennent que par le gradient de courbure  $dp_{Laplace} = \sigma dC$ . Pour une bulle sphérique de courbure constante  $dp_{Laplace} = 0$  et la vitesse d'ascension n'est pas affectée par la courbure des bulles.

Notre commentaire sur les effets capillaires ne vaut que pour des bulles de courbure décroissante depuis l'apex telles que les bulles infinies.

## Écoulements 2D axisymétriques

Pour un écoulement axisymétrique, l'équation (4.100) s'écrit  $p = p_0 - \sigma/R_1 - \sigma/R_2$  où :

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{r''}{(1+r'^2)^{3/2}} = -\frac{2K}{H} - \frac{12K^2}{H^2}(1-M/K)z + \mathcal{O}(z^2) \quad (4.105)$$

et

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r\sqrt{1+r'^2}} = -\frac{2K}{H} - \frac{4K^2}{H^2}(1-M/K)z + \mathcal{O}(z^2). \quad (4.106)$$

Le rayon de courbure au sommet est  $1/R_0 \equiv -4K/H$  où  $K/H < 0$ . A l'ordre le plus bas, la pression dans le liquide est plus faible que la pression dans le gaz de  $\sigma/R_0$ . A partir de l'équation (4.105) et (4.106) on peut écrire que :  $dp = (1/R_0^2(1-M/K))\sigma dz$ . De cette manière la condition dynamique (4.102) devient :

$$\frac{H^3}{-K} = 2g', \quad (4.107)$$

avec

$$g' \equiv g \left[ 1 - \frac{a^2}{R_0^2}(1-M/K) \right]. \quad (4.108)$$

L'équation (4.107) a la même forme que l'équation (4.66) obtenue sans effets capillaires. De la même manière que pour le cas 2D, les effets capillaires introduisent une gravité effective  $g'$  plus faible que  $g$  et qui est une fonction croissante du rapport  $R_0/a$ . Si  $R_0 \gg a$  la gravité effective  $g'$  sature à la valeur  $g$  et l'équation (4.107) est identique à la condition (4.66). Dans la limite opposée  $R_0 \ll a$  on remarque, comme dans le cas 2D plan, l'existence d'un rayon critique  $R_0^* \equiv a\sqrt{(1-M/K)}$  pour lequel  $g' = 0$ . La bulle de devrait pas être capable de se propager dans un tube de rayon inférieur à  $R_0^*$ .

## 4.4.2 Cas visqueux

Dans la limite visqueuse, l'équation (4.99) s'écrit :

$$dp = d[(\underline{\tau} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}] - \sigma d\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \quad (4.109)$$

L'effet du premier terme a déjà été discuté dans les sections des écoulements visqueux. Nous nous sommes intéressés ici à l'influence du second terme  $dp_{Laplace} \equiv -\sigma d(1/R_1 + 1/R_2)$ .

## Écoulements 2D plans

Pour un écoulement 2D plan, nous avons montré dans la section 4.4.1 que  $dp_{Laplace} = -\sigma/R$ . Au quatrième ordre du développement, la forme du sommet de la bulle est la parabole (4.39). Ainsi :

$$dp_{Laplace} = 12\sigma \frac{G^2}{F^2} \left( 1 - \frac{I}{G} + \frac{FL}{G^2} \right) dy. \quad (4.110)$$

Le rayon de courbure au sommet est  $1/R_0 = -2G/F$ .

La condition dynamique (4.11) est changée en :

$$d[(\underline{\tau} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}] + dp_{Laplace} = \rho g dy + \mu \Delta \underline{U} \cdot d\underline{l}. \quad (4.111)$$

Ce qui peut être exprimé ainsi :

$$\boxed{24G + 9 \frac{FL}{G} + 3 \frac{FN}{G} = \frac{g'}{\nu}} \quad (4.112)$$

avec

$$g' \equiv g \left[ 1 - 3 \frac{a^2}{R_0^2} \left( 2 + \frac{FL}{G^2} - \frac{I}{G} \right) \right]. \quad (4.113)$$

Encore une fois, les effets capillaires introduisent une gravité effective  $g'$  plus faible que  $g$  et un rayon critique  $R_0^* \equiv a\sqrt{3(2 + FL/G^2 - I/G)}$  pour lequel  $g' = 0$ .

### Écoulements 2D axisymétriques

Dans le cas d'un écoulement 2D axisymétrique, l'existence d'une seconde courbure change l'expression de  $dp_{Laplace}$  en :

$$dp_{Laplace} = \sigma \frac{z}{R_0^2} \left( 3 + \frac{HQ}{K^2} \right), \quad (4.114)$$

où  $1/R_0 \equiv -4K/H$ .

La condition dynamique (4.111) est donc changée en :

$$\boxed{48K + 12 \frac{QH}{K} + 3 \frac{HS}{K} = \frac{g'}{\nu}} \quad (4.115)$$

avec

$$g' \equiv g \left[ 1 - \frac{a^2}{R_0^2} \left( 3 + \frac{HQ}{K^2} \right) \right]. \quad (4.116)$$

## 4.5 Conclusion

Nous avons présenté une méthode générale locale pour la détermination de la vitesse d'ascension des bulles dans un liquide.

Cette méthode locale peut être décomposée en trois principales étapes :

- **1. Détermination des conditions dynamiques qui doivent être satisfaites sur la surface de la bulle.**
- **2. Étude de la structure de l'écoulement au sommet qui, à la fois, vérifie ces conditions dynamiques et les symétries de l'écoulement.**
- **3. Évaluation de l'écoulement en amont de la bulle qui satisfait les autres conditions aux limites. La vitesse de remontée  $U_b$  découle du raccordement entre l'écoulement qui satisfait aux conditions aux limites loin de l'apex avec l'écoulement autour de l'apex qui satisfait aux conditions dynamiques sur la surface de la bulle.**

On peut souligner, en particulier, que :

- **1. La structure de l'écoulement en aval du point d'arrêt n'est pas utile au modèle.**
- **2. La forme exacte de la bulle, notamment loin du sommet, n'intervient pas.**
- **3. Nous n'utilisons pas d'équilibre entre une force d'Archimède et une force de traînée pour évaluer la vitesse de remontée mais nous nous concentrons sur l'écoulement autour de l'apex.**
- **4. Cette approche locale ne s'applique qu'aux cas bien précis où il n'est pas nécessaire de connaître la structure de l'écoulement aval. C'est à dire, lorsque le sillage est déterminé par la structure de l'écoulement autour du point d'arrêt et que la dissipation est confinée dans ce sillage.**



## 5. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX ET DISCUSSIONS

Nous présentons dans ce chapitre les résultats expérimentaux du chapitre 3 à la lumière de la théorie développée au chapitre 4. La méthode de détermination de la vitesse  $U_b$  est dans un premier temps appliquée à la remontée d'une bulle dans un tube cylindrique dans la région 1. En adaptant cette méthode aux cas des tubes rectangulaires, nous montrons ensuite qu'il existe une loi unique concernant la vitesse de remontée d'une bulle infinie dans un tube de section quelconque. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de la région 2, nous montrerons également l'existence d'une loi unique pour l'ensemble des formes de tube. Enfin nous concluons en discutant des effets de la tension superficielle sur la remontée de ces bulles infinies, dans les régions 3 et 4.

### 5.1 Région 1 : $Re_{equ} \gg Re_{equ}^*$ , $Bo_{equ} \gg Bo_{equ}^*$

#### 5.1.1 Bulle inertielle dans un tube cylindrique

L'écoulement en amont de la bulle est décrit par l'équation de Laplace  $\Delta\phi = 0$ . Le potentiel des vitesses doit satisfaire la condition à l'infini amont  $\phi = U_b z$  ainsi que les conditions aux limites, point d'arrêt en  $(0,0)$  et vitesse normale nulle à la paroi.

En ne prenant que les premiers termes du développement, la solution de l'équation de Laplace s'écrit :

$$\phi = U_b z + A_0 e^{k_0 z} J_0(k_0 r), \quad (5.1)$$

où  $J_0$  est la fonction de Bessel d'ordre 0. Les deux constantes  $A_0$  et  $k_0$  sont déterminées en utilisant les deux conditions aux limites,  $u(r = R) = 0$  et  $u(0,0) = v(0,0) = 0$ . Comme  $J_0'(r) = -J_1(r)$ , la première condition sur les parois du tube est satisfaite si  $k_0 R = 3.83$ , où 3.83 correspond au premier zéro de la fonction de Bessel  $J_1$ . La seconde condition au point d'arrêt nous conduit à  $A_0 = -U_b/k_0$ . La fonction courant correspondante  $\psi$  est :

$$\psi = \frac{U_b r}{k_0} \left[ e^{k_0 z} J_1(k_0 r) - \frac{1}{2} k_0 r \right]. \quad (5.2)$$

Le développement de cette fonction courant autour du sommet de la bulle est, au quatrième ordre :

$$\psi = \frac{U_b k_0}{2} r^2 z + \frac{U_b k_0^2}{4} r^2 z^2 - \frac{U_b k_0^2}{16} r^4. \quad (5.3)$$

En comparant avec le développement, équation (4.58) :

$$\psi = H r^2 z + K r^4 + M r^2 z^2. \quad (5.4)$$

On identifie  $H = U_b k_0/2$  et  $M = U_b k_0^2/4$ . Puisque l'écoulement est potentiel, on peut écrire que  $K = -M/4$  et la condition dynamique (4.66)  $H^3/-K = 2g$  impose la vitesse de la bulle :

$$U_b^2 = \frac{g}{k_0} = \frac{gR}{3,83} \approx 0,26 gR \quad (5.5)$$

Ce résultat peut être directement comparé aux résultats expérimentaux de la figure 3.4. On a trouvé expérimentalement que le carré de la vitesse varie avec  $gR$  selon la loi :

$$U_b^2 = K_3 gR \quad \text{avec } K_3 = 0,23 \pm 0,02. \quad (5.6)$$

Une dérivation semblable à celle ci est présentée par D. Dumitrescu [28] et D. Layzer [48]. Le résultat le plus proche de la loi (5.5) est celui de D. Layzer qui, en approximant la fonction courant au premier ordre, trouve que  $U_b^2$  varie en  $0,261 gR$ .

S.G. Taylor [25] a une approche différente de résolution du problème puisqu'il ne développe pas la fonction courant autour de l'apex et se contente d'appliquer la condition à la surface de la bulle en un point arbitrairement choisi de cette surface. Son calcul amène à  $U_b^2 = 0,21 gR$ .

La méthode d'analyse théorique de la vitesse de remontée des bulles dans les tubes donne dans le cas des tubes cylindriques de grandes dimensions des résultats satisfaisant, en bon accord avec les expériences et avec les résultats théoriques de la littérature.

### 5.1.2 Bulle inertielle dans un tube rectangulaire

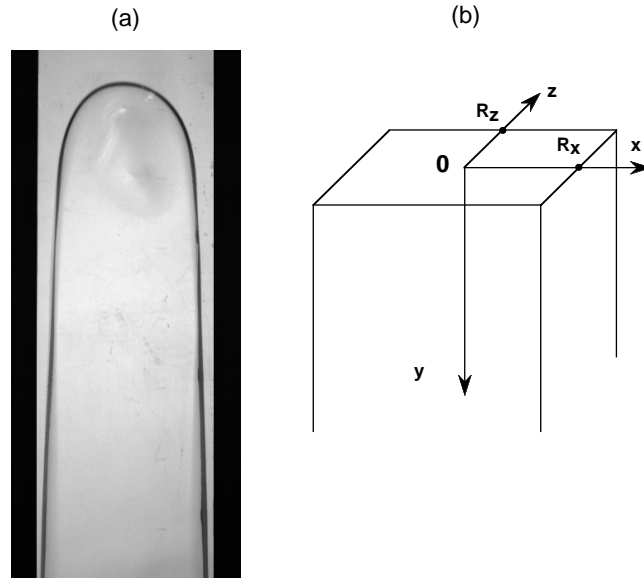


Figure 5.1: (a) Bulle infinie remontant dans un tube rectangulaire de largeur  $2R_x = 0,140$  m et d'épaisseur  $2R_z = 0,022$  m rempli d'eau. (b) Système cartésien de coordonnées associé.

Un exemple de bulle d'air remontant dans un tube rectangulaire est présenté sur la figure 5.1. Le tube a ici une largeur  $2R_x = 0,140$  m et son épaisseur est de  $2R_z = 0,022$  m. Le liquide utilisé est de l'eau. Les deux dimensions  $R_x$  et  $R_z$  sont toutes deux plus grandes que la longueur capillaire  $a$ . La vitesse d'ascension est  $U_b = 0,252$  m.s<sup>-1</sup>.

Comme dans le cas précédent, on va rechercher une solution de l'équation de Laplace  $\Delta\phi = 0$  dans le système de coordonnées cartésien  $(x, y, z)$ , présenté sur la figure 5.1 sous la forme :

$$\phi = U_b y + A(R_x, R_z) e^{ky} \cos kx + B(R_x, R_z) e^{my} \cos mz. \quad (5.7)$$

Cette expression de  $\phi$  est la superposition de deux potentiels du type (4.84) utilisé pour modéliser la bulle 2D plane. Les constantes  $k$  et  $m$  doivent être déterminées de façon à satisfaire les conditions de vitesse normale nulle aux parois. Les constantes  $A$  et  $B$  sont déterminées grâce à la condition de point d'arrêt en  $(0,0)$ , à la structure de l'écoulement autour de ce point et aux symétries de l'écoulement.

Les conditions aux parois :  $u_x(R_x, y, z) = 0$  et  $u_z(x, y, R_z) = 0$  implique que :

$$k = \frac{\pi}{R_x} \text{ et } m = \frac{\pi}{R_z}. \quad (5.8)$$

Au point d'arrêt la vitesse est nulle  $\underline{U}(x, y, z) = 0$ , soit :

$$U_b + Ak + Bm = 0. \quad (5.9)$$

Si l'on développe le champ de vitesse au voisinage du point de stagnation, on obtient :

$$u_x = -Ak^2x, \quad u_y = (Ak^2 + Bm^2)y - \frac{Ak^3x^2}{2} - \frac{Bm^3z^2}{2} \quad \text{et} \quad u_z = -Bm^2z. \quad (5.10)$$

Les lignes de courant sont définies par les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \quad (5.11)$$

En utilisant les équations (5.10), les lignes de courant dans le plan  $(x, z)$  au voisinage du sommet de la bulle s'écrivent :

$$\frac{dx}{Ak^2x} = \frac{dz}{Bm^2z}. \quad (5.12)$$

La loi de puissance de  $x$  par rapport à  $z$  est donc mieux décrite, on a  $x = z^\alpha$  avec  $\alpha = Ak^2/Bm^2$ .

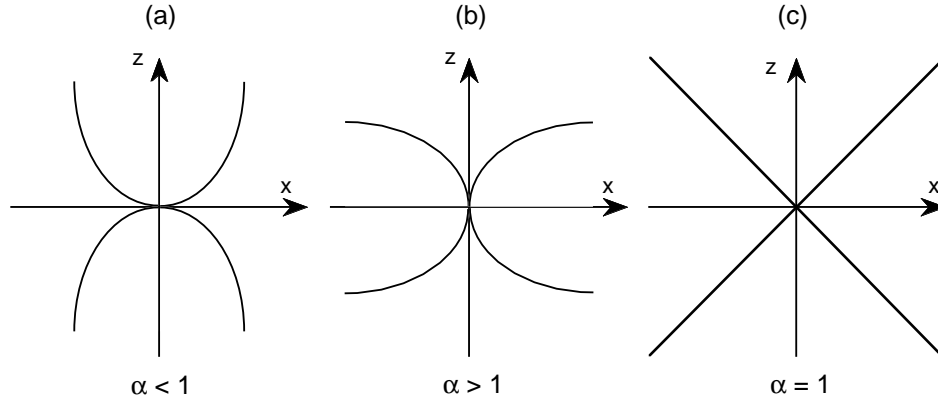


Figure 5.2: Formes des lignes de courant dans le plan  $(x, z)$  : (a)  $\alpha < 1$ , (b)  $\alpha > 1$ , (c)  $\alpha = 1$

Comme  $dx/dz = \alpha z^{\alpha-1}$ , si  $\alpha < 1$  [figure 5.2-(a)] la dérivée  $(dx/dz)_{z=0} = \infty$  ce qui signifie que, dans le plan  $(x, z)$ , l'axe des  $z$  défini par  $x = 0$  ne reçoit pas de liquide. De la même manière, si  $\alpha > 1$  [figure 5.2-(b)], on montre que c'est l'axe des  $z$  qui est privé de passage de liquide. La répartition isotropique du liquide nous oblige à écrire que  $\alpha = 1$  [figure 5.2-(c)].

$$\frac{Ak^2}{Bm^2} = 1. \quad (5.13)$$

En utilisant l'équation (5.9), cette condition isotropique nous amène aux relations :

$$A = -\frac{m}{k^2 + km} U_b \quad \text{et} \quad B = -\frac{k}{m^2 + km} U_b. \quad (5.14)$$



On a donc comme potentiel des vitesses :

$$\phi = U_b \left[ y - \frac{m}{k^2 + km} e^{ky} \cos kx - \frac{k}{m^2 + km} e^{my} \cos mz \right]. \quad (5.15)$$

Si l'on échange  $R_x$  et  $R_z$ ,  $k$  est changé en  $m$  et  $m$  en  $k$ . De même, A se transforme en B et le potentiel reste inchangé. Cette symétrie est importante, puisque faire cette transformation consiste à observer la bulle sur le coté du tube, ce qui ne doit rien changer, ni aux lignes de courant, ni à la vitesse de la bulle.

Pour suivre la méthode présentée au chapitre 4, nous allons maintenant évaluer la forme de la bulle. Dans le plan  $(x, y)$ , les lignes de courant sont solutions de l'équation différentielle  $dx/u_x = dy/u_y$  qui peut être développée dans le voisinage du sommet de la bulle en accord avec les équations (5.10) :

$$\frac{dy}{2y - kx^2/2 - mz^2/2} = -\frac{dx}{x}. \quad (5.16)$$

Si l'on introduit l'angle  $\theta$  entre l'axe des  $z$  et les lignes de courant dans le plan  $(x, z)$ , on a  $z = x/\tan\theta$  et l'équation (5.16) peut être intégrée :

$$x^2 = \frac{8}{k + m/\tan^2\theta} y. \quad (5.17)$$

En utilisant les mêmes arguments, on trouve dans le plan  $(y, z)$  :

$$z^2 = \frac{8}{k \tan^2\theta + m} y. \quad (5.18)$$

On retrouve la structure parabolique du sommet de la bulle déjà observée dans le cas des bulles 2D planes et 2D axisymétriques.

La condition dynamique qui doit être respectée sur la surface de la bulle est :  $U^2 = 2gy$ . Si l'on développe le champ de vitesse (5.10) au voisinage du sommet, on trouve :

$$u_x = -Ak^2x, \quad u_y \approx Ak^2(2y - kx^2/2 - mz^2/2) \quad \text{et} \quad u_z = -Ak^2z. \quad (5.19)$$

On peut donc écrire que  $U^2 \equiv u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \approx u_x^2 + u_z^2 \approx A^2k^4(x^2 + z^2)$ , ce qui nous donne :

$$U^2 = 8A^2k^4y \left[ \frac{1}{k + \frac{m}{\tan^2\theta}} + \frac{1}{k \tan^2\theta + m} \right]. \quad (5.20)$$

On vérifie bien la linéarité de  $U^2$  en  $y$  mais ici  $U^2$  dépend aussi de  $\theta$ . Cette dépendance peut être discutée à partir de considérations physiques : Les deux termes entre crochets représentent respectivement les contributions de  $u_x^2$  et de  $u_z^2$ . Lorsque  $R_z$  tend vers zéro (i.e.  $m$  tend vers  $\infty$ ), on ne devrait avoir que la contribution de  $u_x^2$  et inversement, lorsque  $R_x$  tend vers zéro (i.e.  $k$  tend vers  $\infty$ ), on ne devrait avoir que la contribution de  $u_z^2$ . Ce n'est pas le cas dans l'équation (5.20) sauf pour un angle particulier  $\theta^*$  tel que  $\tan^2\theta^* \equiv m/k$ . On trouve alors :

$$U^2 = 8A^2k^4y \left[ \frac{1}{2k} + \frac{1}{2m} \right]. \quad (5.21)$$

Les deux contributions sont à présent symétriques et l'une peut tendre vers zéro indépendamment de la seconde ce qui est physiquement correct. Le découplage n'est donc obtenu que pour un angle spécial. Ceci est due à la troncature du développement du potentiel des vitesses. Si l'on ajoute des termes supplémentaires dans ce développement, on devrait être capable de vérifier ce découplage pour tous les angles.

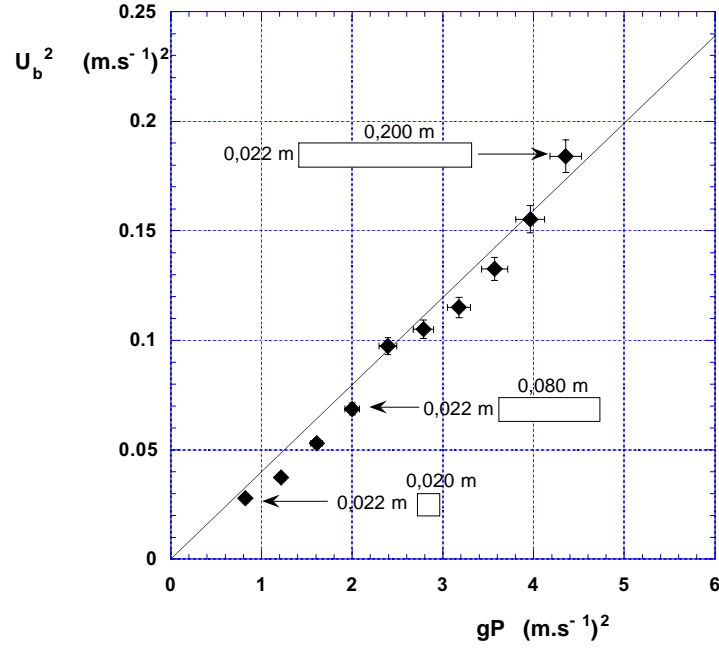


Figure 5.3:  $U_b^2$  en fonction de  $gP$  dans des tubes rectangulaires. Les expériences ont été menées avec de l'eau. La ligne en trait plein représente la loi (5.22)

Les expressions de  $k$  et  $m$  et l'expression de  $A$  nous permettent d'écrire :  $U^2 = 4\pi U_b^2 y / (R_x + R_z)$ . En identifiant avec  $2gy$ , on obtient :

$$U_b^2 = \frac{1}{8\pi} gP \approx 0,0398 gP, \quad (5.22)$$

où  $P = 4(R_x + R_z)$  est le périmètre de la section du tube.

Les résultats expérimentaux que nous avons obtenus pour des bulles d'air dans des tubes rectangulaires rempli initialement d'eau sont présentés sur la figure 5.3. Les losanges noirs proviennent de bulle remontant dans des tubes d'épaisseur 0,022 m et de largeur variant de 0,022 m à 0,200 m. Les périmètres des sections varient de 0,084 m à 0,500 m et le rapport d'aspect de 1 à 10.

L'incertitude sur  $U_b^2$  est de 4 %. L'erreur relative sur la mesure des dimensions étant de 2 %, celle sur  $gP$  est estimée à 4 %.

La ligne en trait plein illustre la loi attendue par la théorie, équation (5.22). La théorie est en bon accord avec les mesures dans un domaine raisonnable de périmètres et de rapports largeur/épaisseur.

### 5.1.3 Bulle inertielle dans un tube de section quelconque

Dans le cas des tubes de section quelconque mais constante tout au long de la propagation, déterminer la vitesse de remontée de bulles infinies revient, dans le cas des grands nombres de Reynolds, à rechercher une longueur. En effet, dans ce régime, la vitesse  $U_b$  est indépendante de la viscosité et comme la gravité est responsable du mouvement de la bulle, nous cherchons une longueur caractéristique  $\mathcal{L}_1$  telle que :

$$U_b^2 \propto g\mathcal{L}_1, \quad (5.23)$$

où  $\mathcal{L}_1$  est une fonction de la géométrie du tube. Dans le cas des tubes cylindriques, on a trouvé dans la section 5.1.1 que  $\mathcal{L}_1$  est le rayon  $R$  du cylindre. Dans les tubes de section rectangulaire,

nous venons de montrer que  $\mathcal{L}_1$  est le périmètre  $P$  du rectangle. On peut faire la remarque que si l'on suppose que  $\mathcal{L}_1$  est toujours le périmètre de la section du tube, on retrouve les résultats de la bulle dans les tubes cylindriques. De manière plus quantitative, si l'on utilise le périmètre  $P = 2\pi R$  d'un tube cylindrique dans l'expression  $U_b^2 \approx 0,0398 gP$  démontrée pour le rectangle, on trouve que  $U_b^2 \approx 0,25 gR$  ce qui est une bonne évaluation de la vitesse des bulles infinies dans des tubes cylindriques (voir la section 5.1.1).

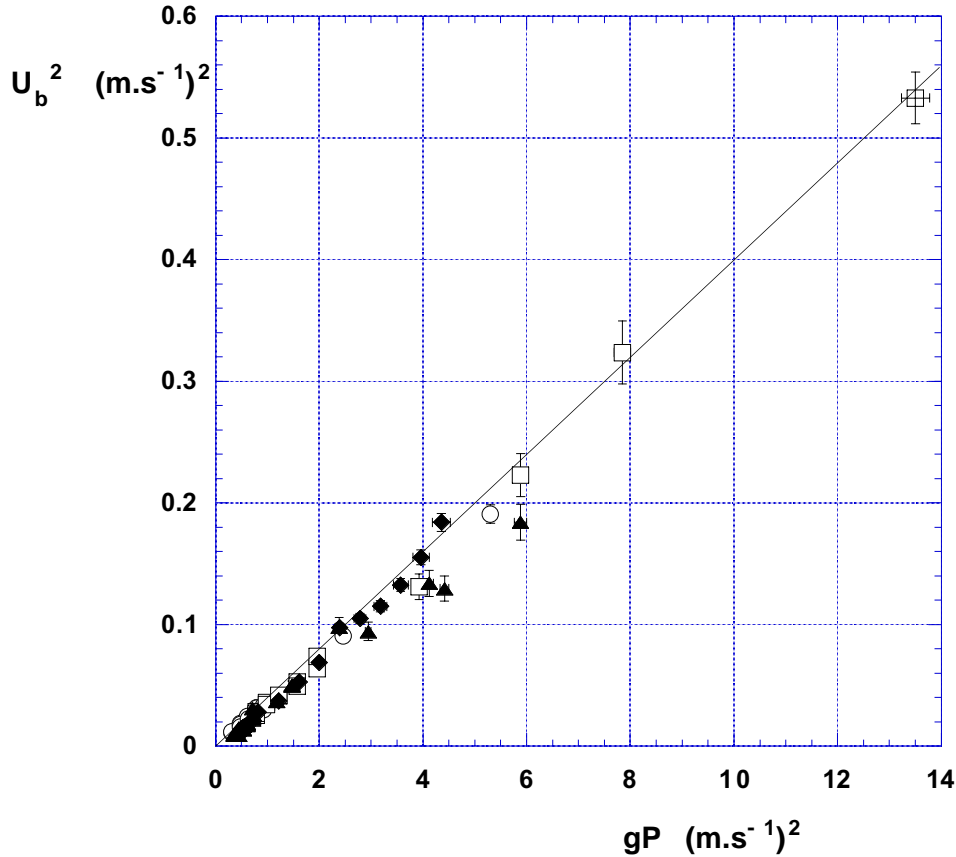


Figure 5.4:  $U_b^2$  remontant dans des tubes cylindriques ( $\circ$ ), à base carrée ( $\square$ ), triangulaire ( $\blacktriangle$ ), rectangulaire ( $\blacklozenge$ ) et toroïdale ( $\boxplus$ ) en fonction de  $gP$ . Les expériences ont été menées dans de l'eau et de l'éthanol. La ligne en trait plein représente la loi (5.22)

La figure 5.4 présente  $U_b^2$  en fonction de  $gP$  pour des tubes de différentes formes. La ligne en trait plein illustre la loi théorique (5.22). Les tubes carrés ont des cotés qui varient de 0,020 m à 0,200 m tandis que les cotés des tubes à base triangulaire évoluent entre 0,012 m et 0,200 m. Les tubes cylindriques et rectangulaires sont ceux utilisés dans les figures 3.4 et 3.5. Les fluides utilisés sont de l'eau et de l'éthanol. Le nombre de Reynolds  $Re_{equ}$  minimum est 90 et le nombre de Bond  $Bo_{equ}$  varie de 12 à 36.

L'incertitude sur  $U_b^2$  est de 4 % dans le cas des tubes cylindriques et rectangulaires tandis qu'elle est de 8 % pour les tubes à base carrée et triangulaire. L'erreur relative sur  $gP$  est de 2 % dans tous les tubes sauf les tubes rectangulaire où cette erreur est estimée à 4 %.

On remarque que contrairement à la figure 3.5, les bulles dans les tubes à base rectangulaire se comportent comme les bulles se propageant dans les autres formes de tubes. On observe que la théorie est en bon accord avec les résultats expérimentaux : le carré de la vitesse des bulles varie linéairement avec le périmètre de la section du tube quelle que soit la forme de cette section. Un ajustement linéaire appliqué à nos résultats expérimentaux nous permet d'écrire

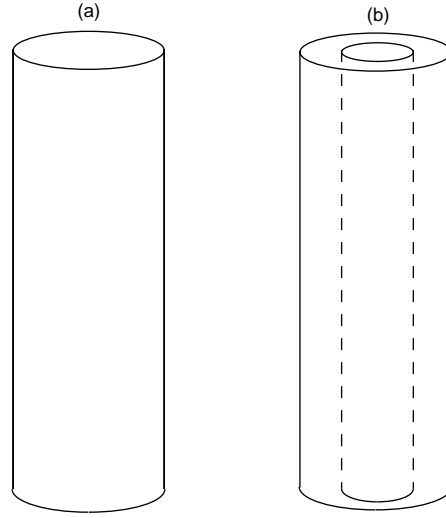


Figure 5.5: (a) Tube cylindrique (b) Tube toroïdal de même diamètre extérieur

que :

$$U_b^2 = K_4 gP \quad \text{avec } K_4 = 0,040 \pm 0,002 \quad (5.24)$$

On peut définir un nombre de Froude caractéristique de ces écoulements non visqueux à partir du périmètre des tubes :

$$Fr_f = \frac{U_b^2}{gP}, \quad (5.25)$$

La vitesse des bulles dans le cas des grands nombres de Reynolds et en l'absence d'effets de tension de surface est donc caractérisée par un nombre de Froude constant quelle que soit la forme du tube. Ce nombre de Froude  $Fr_f$  est égal à 0,040.

Une propriété intéressante de cette relation entre la vitesse et le périmètre est que pour une section de surface donnée, on doit augmenter le périmètre pour augmenter la vitesse de ces bulles. Or le cylindre minimise le périmètre et donc la vitesse des bulles, pour une surface donnée. Un tube toroïdal comme celui présenté sur la figure 5.5-(b) augmente le périmètre d'un facteur presque deux par rapport au cylindre de la figure 5.5-(a). La vitesse d'une bulle infinie devait donc être augmentée d'un facteur  $\sqrt{2}$ . Nous avons testé ceci avec un tube toroïdal de diamètre extérieur 0,23 m et 0,17 m de diamètre intérieur. Trois photographies de la bulle obtenue sont présentées sur la figure 5.6. La première (a) est une vue de face, en (b), on présente une vue de côté et en (c), on a une vue de l'arrière de la bulle. La vitesse  $U_b$  que nous avons mesurée est de  $0,73 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Elle est présentée avec un  $\boxplus$  dans la figure 5.4. Cette vitesse tombe sur la même courbe  $U_b^2 \approx 0,040 gP$  comme pour les tubes cylindriques, carrés, triangulaires et rectangulaires.

Même si nous n'avons démontré l'équation (5.22) que pour les tubes cylindriques et rectangulaires, cette relation semble être plus générale et semble englober toutes les vitesses de bulle dans des tubes de section quelconque dans la limite des écoulements non visqueux et non courbés.

## 5.2 Région 2 : $Re_{equ} \ll Re_{equ}^*, Bo_{equ} \gg Bo_{equ}^*$

La difficulté principale dans l'application de notre méthode à cette région est de décrire correctement l'écoulement en amont de la bulle. En effet, en toute rigueur, l'écoulement n'est plus irrotationnel du fait des effets visqueux et ne satisfait pas à l'équation de Laplace  $\Delta\phi = 0$ . L'écoulement est cependant irrotationnel à l'infini amont, sur l'axe de symétrie du tube et dans

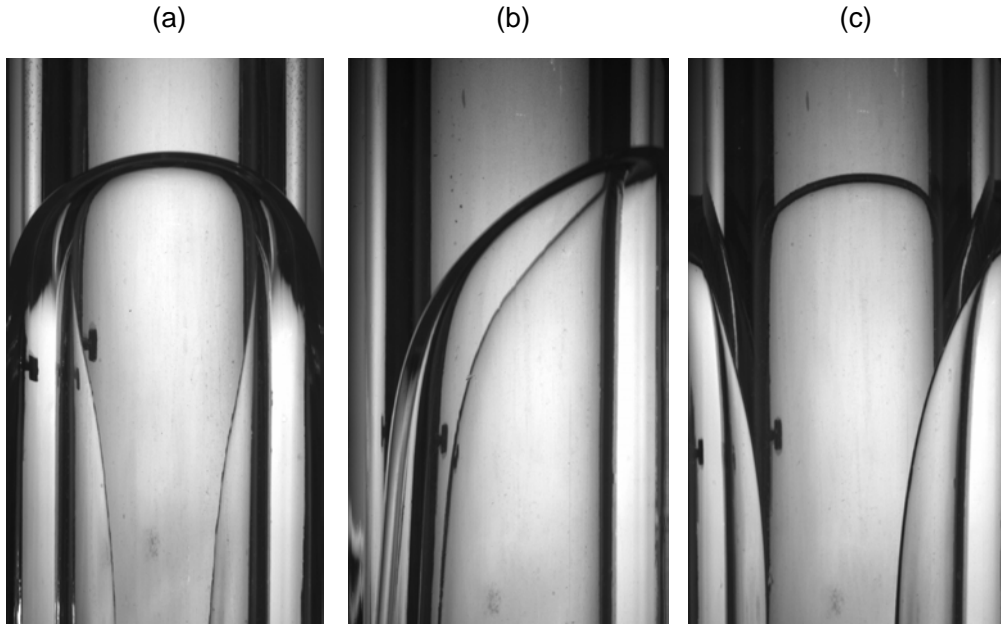


Figure 5.6: Photographies d'une bulle toroïdale dans de l'eau. Le tore a un diamètre interne de 0,17 m et un diamètre externe de 0,23 m. (a) vue de face, (b) vue de coté, (c) vue de l'arrière

une petite région autour du point d'arrêt. Nous utilisons ces remarques pour justifier l'utilisation de la méthode potentielle visqueuse dans l'évaluation de la vitesse d'ascension.

En utilisant cette approche potentielle visqueuse,  $\Delta \underline{U}$  est identiquement nul et les effets visqueux ne sont décrits qu'au travers de l'évaluation du vecteur contrainte ( $\underline{\tau} \cdot \underline{n}$ ) à la surface de la bulle.

On ne peut donc espérer un accord satisfaisant Théorie / Expérience, néanmoins, nous avons montré sur l'exemple du problème d'Hadamard-Rybczynski, section 4.3.2, que l'approche viscopotentielle permet une détermination précise des longueurs caractéristiques impliquées.

Une manière plus élégante de retrouver ces longueurs est de mener un travail d'analyse dimensionnelle. Dans ce problème de la remontée d'une bulle à la vitesse  $U_b$  dans un liquide de viscosité  $\nu$ , l'analyse dimensionnelle du problème se résume à chercher une longueur au carré  $\mathcal{L}^2$  telle que :

$$U_b \propto \frac{g\mathcal{L}^2}{\nu} \quad (5.26)$$

Dans le cas des tubes cylindriques, il existe une seule longueur géométrique, le rayon  $R$  du tube et l'on peut identifier  $\mathcal{L}$  à  $R$ . On a alors la relation :

$$U_b \propto \frac{gR^2}{\nu} \quad (5.27)$$

qui a déjà été montrée expérimentalement par E. T. White et R. H. Beardmore [83].

Pour ce qui est des tubes à section rectangulaires, on a deux longueurs caractéristiques liées à la géométrie : la largeur  $l$  de la section et son épaisseur  $e$ . La dynamique stationnaire de la remontée de la bulle est liée à l'équilibre entre le moteur de la remontée (force d'Archimède) et une force d'origine visqueuse. On a alors, par unité de longueur de bulle :

$$\rho g S \propto \mu \frac{U_b}{x} P \quad (5.28)$$

où  $S$  et  $P$  sont la surface et le périmètre de la section et  $x$  est une échelle de longueur inconnue. Si l'on cherche à s'éloigner de la géométrie cylindrique, on fait tendre le rapport des longueurs

$l/e$  vers l'infini tout en conservant la surface  $S$  de la section. Le périmètre tend alors vers  $2l$  et la relation précédente devient :

$$\rho g S \propto \mu U_b \frac{l}{x} \quad (5.29)$$

On a maintenant deux choix possibles pour  $x$ . Soit elle est proportionnelle à  $e$  et l'on a alors une relation de proportionnalité entre un terme constant et un terme de force visqueuse qui tend vers l'infini, ce qui permet d'écartier cette possibilité. Soit elle est proportionnelle à  $l$  et on obtient une relation d'équilibre entre les forces :

$$\rho g S \propto \mu U_b \quad (5.30)$$

d'où :

$$\boxed{U_b \propto \frac{g S}{\nu}} \quad (5.31)$$

### 5.2.1 Bulle visqueuse dans un tube cylindrique

La fonction courant  $\psi$ , équation (5.2), s'écrit :

$$\psi = \frac{U_b r}{k_0} \left[ e^{k_0 z} J_1(k_0 r) - \frac{1}{2} k_0 r \right], \quad (5.32)$$

La fonction courant doit être développée jusqu'à l'ordre 5 au voisinage du sommet de la bulle :

$$\psi = \frac{1}{2} k_0 U_b r^2 z - \frac{1}{16} k_0^2 U_b r^4 + \frac{1}{4} k_0^2 U_b r^2 z^2 - \frac{1}{16} k_0^3 U_b r^4 z + k_0^3 U_b r^2 z^3. \quad (5.33)$$

En identifiant avec l'équation (4.70), on déduit  $H = k_0 U_b/2$ ,  $K = -k_0^2 U_b/16$ ,  $M = k_0^2 U_b/4$ ,  $Q = -k_0^3 U_b/16$  et  $S = k_0^3 U_b/12$ . La condition dynamique visqueuse (4.79) s'écrit donc :

$$-3 k_0^2 U_b + 6 k_0^2 U_b - 2 k_0^2 U_b = \frac{g}{\nu}. \quad (5.34)$$

ce qui nous amène à :

$$U_b = \frac{g}{k_0^2 \nu} \quad \text{ou} \quad U_b \approx 0,068 \frac{g R^2}{\nu} \quad (5.35)$$

Le coefficient 0,068 est à prendre avec prudence. La fonction courant que nous avons utilisée n'est certainement pas celle qui décrit au mieux l'écoulement. On peut cependant supposer que nous en sommes suffisamment proche pour considérer la linéarité entre  $U_b$  et  $g R^2/\nu$ .

Ce résultat peut être directement comparé aux résultats expérimentaux de la figure 3.6. On a trouvé expérimentalement que  $U_b$  varie avec  $g R^2/\nu$  selon la loi :

$$U_b = K_2 \frac{g R_{equ}^2}{\nu} \quad \text{avec} \quad K_2 = 0,037 \pm 0,002. \quad (5.36)$$

En accord avec le calcul théorique, la vitesse varie linéairement avec  $g R^2/\nu$  avec, ce que nous avons envisagé, un coefficient de linéarité différent de la théorie.

### 5.2.2 Bulle visqueuse dans un tube rectangulaire

Comme dans la section précédente sur des tubes cylindriques, nous utilisons les lignes de courant et la forme de la bulle explicitées dans le cas non visqueux auxquelles nous appliquerons la condition visqueuse (4.11).

Nous considérons donc le potentiel des vitesses, solution de l'équation de Laplace  $\Delta\phi = 0$ , exprimé dans les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  présentées lors du cas non-visqueux (voir section 5.1.2) :

$$\phi = U_b y + A(R_x, R_z) e^{ky} \cos kx + B(R_x, R_z) e^{my} \cos mz, \quad (5.37)$$

où les différents coefficients sont déterminés par les conditions aux limites du problème.

La condition visqueuse (4.11) s'écrit :

$$d[(\underline{\tau} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}] = \rho g dy + \mu \Delta \underline{U} \cdot \underline{dl}. \quad (5.38)$$

L'écoulement étant considéré comme potentiel malgré la viscosité, on a  $\Delta \underline{U} = \Delta \text{grad} \phi = \text{grad} \Delta \phi = 0$  et la détermination des conditions visqueuses à la surface de la bulle revient à calculer la variation de pression  $dp = d[(\underline{\tau} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}]$ .

Pour cela nous devons exprimer la vitesse  $\underline{U}$  de l'écoulement afin de calculer le tenseur des contraintes visqueuses  $\underline{\tau} = \mu (\underline{\text{grad}} \underline{U} + {}^t \underline{\text{grad}} \underline{U})$  et connaître la forme de la bulle pour déterminer le vecteur normal  $\underline{n}$  à la surface.

Les détails du calcul sont reportés en annexe D.

On montre tout d'abord que les trois composantes du vecteur normal unitaire  $\underline{n}$  peuvent être développées autour de l'apex :

$$n_x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{K} k \sqrt{y}, \quad (5.39)$$

$$n_y = -1 + \frac{1}{4} y (k^2 K + m^2 M), \quad (5.40)$$

$$n_z = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M} m \sqrt{y}, \quad (5.41)$$

avec :

$$K = \frac{1}{k + m/\tan^2 \theta} \quad \text{et} \quad M = \frac{1}{m + k \tan^2 \theta}. \quad (5.42)$$

Dans un second temps, nous évaluons le tenseur des contraintes visqueuses sur la bulle dans le voisinage de l'apex :

$$\underline{\underline{\tau}} = 2Ak^2\mu \begin{pmatrix} -1 + k(4kK - 1)y & -2\sqrt{2}\sqrt{K}k\sqrt{y} & 0 \\ -2\sqrt{2}\sqrt{K}k\sqrt{y} & 2 + (k + m - 4k^2K - 4m^2M)y & -2\sqrt{2}m\sqrt{M}\sqrt{y} \\ 0 & -2\sqrt{2}m\sqrt{M}\sqrt{y} & -1 + m(4mM - 1)y \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

La variation de pression  $dp = d[(\underline{\tau} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}]$  à la surface de la bulle peut alors être évaluée :

$$d[(\underline{\tau} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}] = Ak^2\mu [k(2 - 3kK) + m(2 - 3mM)] dy \quad (5.44)$$

On obtient bien la linéarité en  $dy$  mais la variation de pression  $dp = d[(\underline{\tau} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}]$  dépend de  $\theta$  via  $K$  et  $M$ . Cette dépendance peut être discutée à partir de considérations physiques : le premier terme à l'intérieur des crochets de l'équation (5.44) regroupe les termes en  $k$  et  $K$  intervenant dans la composante  $n_x$  et la composante  $u_x$  selon  $x$  de la vitesse  $\underline{U}$  tandis que le second fait intervenir  $m$  et  $M$  issus du calcul de la composante  $n_z$  et de la composante  $u_z$  selon  $z$  de la vitesse  $\underline{U}$ . On peut donc considérer que les deux termes entre crochets représentent les contributions selon  $x$  et  $z$  respectivement. La contribution de  $n_x$  et  $u_x$  doit disparaître si  $R_x$  tend vers zéro (i.e.  $k$  tend vers  $\infty$ ) et inversement, si  $R_z$  tend vers zéro (i.e.  $m$  tend vers  $\infty$ ), la contribution de  $n_z$  et  $u_z$  doit disparaître. Ce n'est pas le cas pour l'équation (5.44) sauf pour le même angle  $\theta^*$  que dans le cas non-visqueux défini par  $\tan^2 \theta^* = m/k$ . On a alors :

$$dp = d[(\underline{\tau} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}] = \frac{1}{2} Ak^2\mu (k + m) dy \quad (5.45)$$

La condition visqueuse 4.11 peut donc s'écrire :

$$\frac{1}{2} Ak^2 \mu (k + m) dy = \rho g dy \quad (5.46)$$

En utilisant les expressions de  $k$  et  $m$  obtenues dans l'équation (5.8) et l'expression de  $A$  de l'équation (5.14), on obtient une expression de  $U_b$  :

$$U_b = \frac{-2}{\pi^2} \frac{gS}{\nu} \quad (5.47)$$

où  $S = R_x R_z$  est la section du tube rectangulaire et  $\nu$  la viscosité cinématique du liquide.

Le coefficient  $-2/\pi^2$  n'est évidemment pas correct. L'hypothèse d'un écoulement irrotationnel est fautive du fait de la présence d'effets visqueux. Le terme visqueux  $\mu \Delta \underline{U}$  ne devrait pas être nul et donner à l'expression de  $U_b$  un coefficient plus physique. Nous avons ici un bon exemple des limites de notre modèle. On peut aussi remarquer que l'on retrouve le même résultat que l'analyse dimensionnelle présentée au début de la section 5.2.

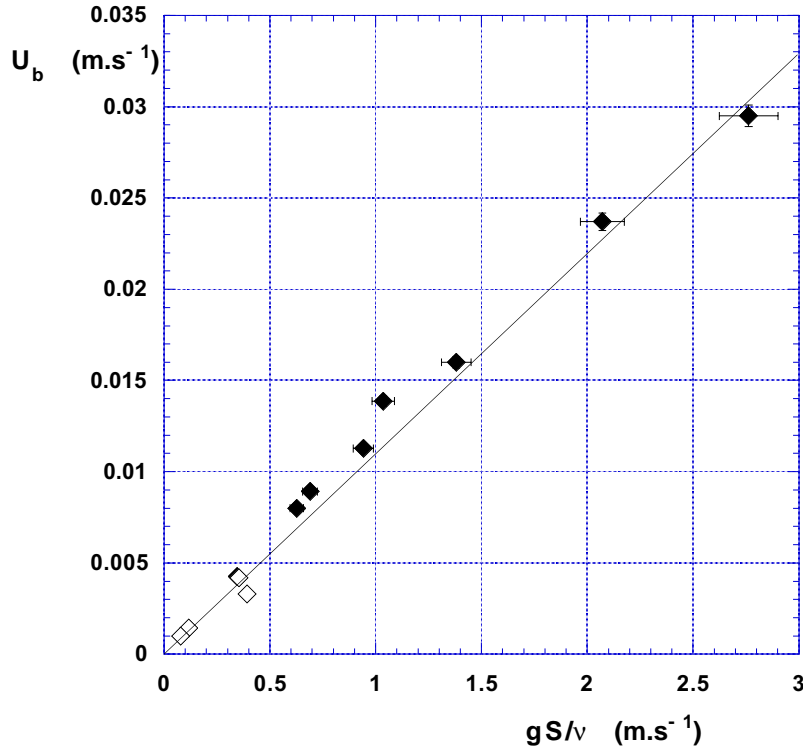


Figure 5.7: Vitesse  $U_b$  de bulle remontant dans des tubes de section rectangulaire en fonction de  $gS/\nu$ . Les expériences ont été menées avec de l'huile silicone V12500 (◆) et V100000 (◇). La ligne en trait plein représente la loi (5.48)

La variation de la vitesse de remontée des bulles en fonction de  $gS/\nu$  dans des tubes rectangulaires est représentée sur la figure 5.7. Les tubes ont des épaisseurs variant de 0,020 m à 0,040 m, tandis que la largeur des tubes varie de 0,020 m à 0,200 m. Les fluides utilisés sont des huiles silicone V100000 et V12500. Le nombre de Reynolds,  $Re_{equ}$ , maximum est de  $8.10^{-2}$ . Les dimensions des tubes sont suffisantes pour négliger les effets de tension de surface : le nombre de Bond,  $Bo_{equ}$ , varie de 82 à 256.

L'estimations de l'incertitude des mesures est identique à celle faite pour la figure 3.7 des observations expérimentales. L'erreur relative de mesure des vitesses est de 2 % et celle sur  $gS/\nu$  est estimée à 6 %.



On constate que la vitesse  $U_b$  augmente linéairement avec  $gS/\nu$ , la théorie et l'analyse dimensionnelle sont donc qualitativement en bon accord avec les résultats expérimentaux. La loi expérimentale mesurée est :

$$U_b = K_5 \frac{gS}{\nu} \quad \text{avec } K_5 = 0,011 \pm 0,001. \quad (5.48)$$

### 5.2.3 Bulle visqueuse dans un tube de section quelconque

Nous venons de montrer que la vitesse des bulles dans des tubes rectangulaires varie linéairement avec  $gS/\nu$ . On peut faire la remarque que cette loi de variation de  $U_b$  est aussi valable dans le cas des tubes cylindrique. En effet, si on utilise la surface de la section circulaire  $S = \pi R^2$  dans la loi (5.48) démontrée pour le rectangle, on trouve une loi  $U_b \approx 0,034 gR^2/\nu$  qui est une bonne évaluation de la vitesse des bulles infinies visqueuses dans des cylindres (cf section 5.2.1).

Ce résultat suggère que la vitesse des bulles varie linéairement avec  $gS/\nu$ .

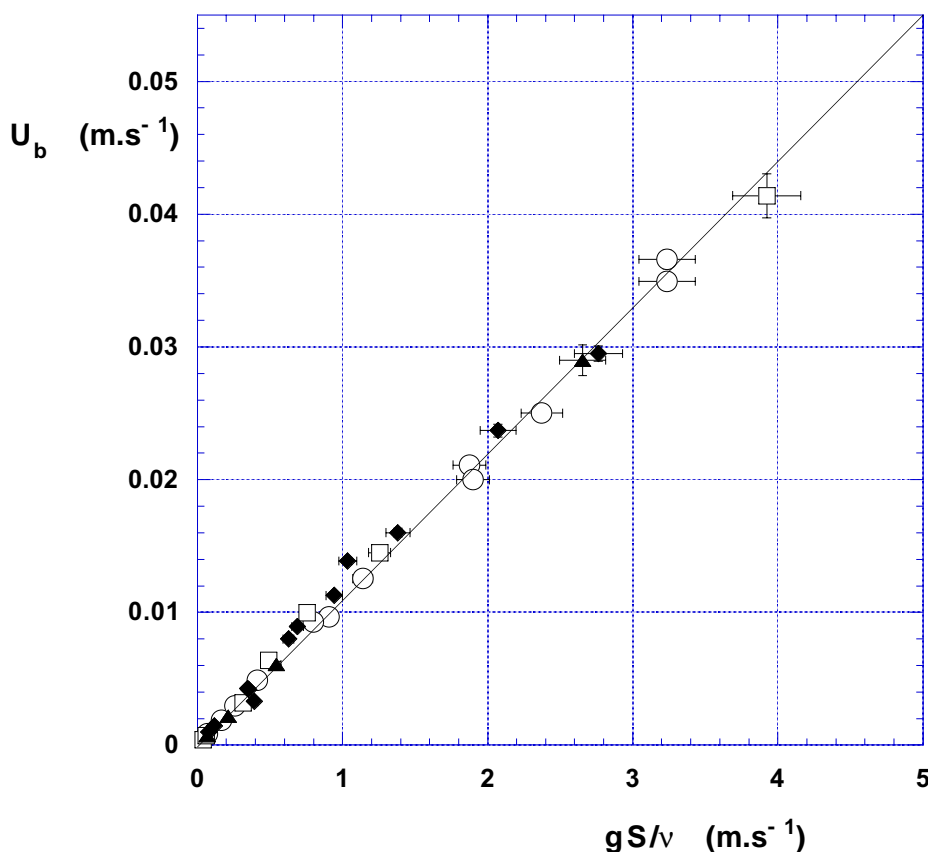


Figure 5.8: Vitesse de bulle remontant dans des tubes de section circulaire (○), carré (□), triangulaire (▲) et rectangulaire (◆) en fonction de  $gS/\nu$ . Les expériences ont été menées dans de l'huile V1000, V12500 et V100000. La ligne en trait plein représente la loi (5.48)

Nous avons représenté sur la figure 5.8, la variation de la vitesse de bulle en fonction de  $gS/\nu$  pour des tubes de section circulaire, carré, triangulaire et rectangulaire. Les dimensions des tubes cylindriques et rectangulaires sont celles des tubes des figures 3.6 et 3.7. Les cotés des tubes carrés vont de 0,020 m à 0,040 m et les tubes triangulaires ont des dimensions variant de 0,025 m à 0,040 m. Le rapport d'aspect des tubes rectangulaires varie lui de 1 à 10. Les huiles silicones utilisées pour ces expériences ont des viscosités qui varient de  $10^{-3} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$  à  $0,1 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ . Le nombre de Reynolds maximum est de 0,4 et le nombre de Bond est toujours supérieur à 10.

L'incertitude sur  $U_b$  est de 2 % dans le cas des tubes cylindriques et rectangulaires tandis qu'elle est de 4 % pour les tubes à base carrée et triangulaire. L'incertitude sur la mesure de la taille des tubes et sur la mesure de  $\nu$  nous amène à estimer l'erreur relative sur  $gS/\nu$  à 6 %.

On observe aisément que la vitesse des bulles varie linéairement en  $gS/\nu$ . La ligne en trait plein représente la loi (5.48) qui constitue la meilleure approximation issue de nos résultats expérimentaux. Cette loi est valable dans le cas où  $Re_{equ} \ll Re_{equ}^*$  quelle que soit la forme du tube, son rapport d'aspect (pour le cas rectangulaire) et la viscosité du liquide drainé hors du tube.

Si l'on définit un nombre de Stokes comme :

$$St_f \equiv \frac{U_b}{\frac{gS}{\nu}}, \quad (5.49)$$

la région 2 du diagramme de phase est caractérisée par un nombre de Stokes  $St_f$  constant, égal à 0,011.

### 5.3 Transition $A_{12} : Bo_{equ} \gg Bo_{equ}^*$

Nous avons montré dans les sections précédentes (5.1.3 et 5.2.3) que, quelle que soit la forme de la section du tube,  $U_b^2$  varie linéairement en  $gP$  dans le cas des grands nombres de Reynolds et  $U_b$  linéairement en  $gS/\nu$  dans le cas des faibles nombres de Reynolds. Une des questions importantes concerne la définition d'un nombre de Reynolds qui ne dépendrait pas directement de la forme du tube comme la précédente définition qui est basée sur le rayon équivalent  $Re_{equ} = U_b R_{equ}/\nu$ .

Afin de tenir compte des résultats précédents, nous avons utilisé un nombre de Reynolds construit sur la longueur  $\mathcal{L}_2 = S/P$ . Cette longueur est le rayon hydraulique habituellement utilisé pour caractériser les tubes de section non circulaire. On utilisera dans la suite la définition suivante du nombre de Reynolds :

$$Re_f = \frac{U_b(S/P)}{\nu}, \quad (5.50)$$

La figure 5.9 illustre la transition entre un comportement non-visqueux où la vitesse de la bulle ne dépend pas de la viscosité du liquide et un domaine visqueux où la vitesse est sensible à ce paramètre. Sur cette figure, nous avons présenté le nombre de Froude,  $Fr_f$ , en fonction du nombre de Reynolds,  $Re_f$ . Les expériences ont été menées sur des tubes de section circulaire, carrée, triangulaire et rectangulaire. Les dimensions des tubes sont celles décrites dans les sections précédentes. Nous avons débuté nos expériences avec des fluides peu visqueux (eau, huile V5) afin de nous placer dans la région 1 (grand nombre de Reynolds). Puis en augmentant la viscosité,  $\nu$ , jusqu'à  $0,1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , on diminue le nombre de Reynolds jusqu'à observer l'apparition d'une influence de la viscosité sur la vitesse de la bulle. Le nombre de Bond,  $Bo_{equ}$ , minimum est de 12.

Les incertitudes sur le nombre de Froude sont estimées à 6 % dans le cas des cylindres et des tubes à base rectangulaire et à 10 % pour les tubes de section carrée et triangulaire. Les incertitudes sur le nombre de Reynolds sont estimées à 8 % dans le cas des cylindres et des tubes à base rectangulaire et à 10 % pour les tubes de section carrée et triangulaire.

On constate que l'on passe continûment d'un comportement conforme à la loi de la région 1 :  $Fr_f = Cte$  à un comportement où le nombre de Froude varie linéairement avec  $Re_f$  ce qui est conforme au résultat de la région 2. En effet, si  $Fr_f \propto Re_f$ , en utilisant les définitions (5.25) et (5.50), on retrouve que  $U_b \propto gS/\nu$ .

La transition entre un comportement visqueux et non visqueux s'effectue sur un domaine étroit en  $Re_f$  :  $1 < Re_f < 10$ . La figure 5.9 montre l'existence d'un nombre de Reynolds critique  $Re_f^* = 3$  qui ne dépend pas directement de la forme du tube. Si  $Re_f > 10$ , il n'y a pas d'influence

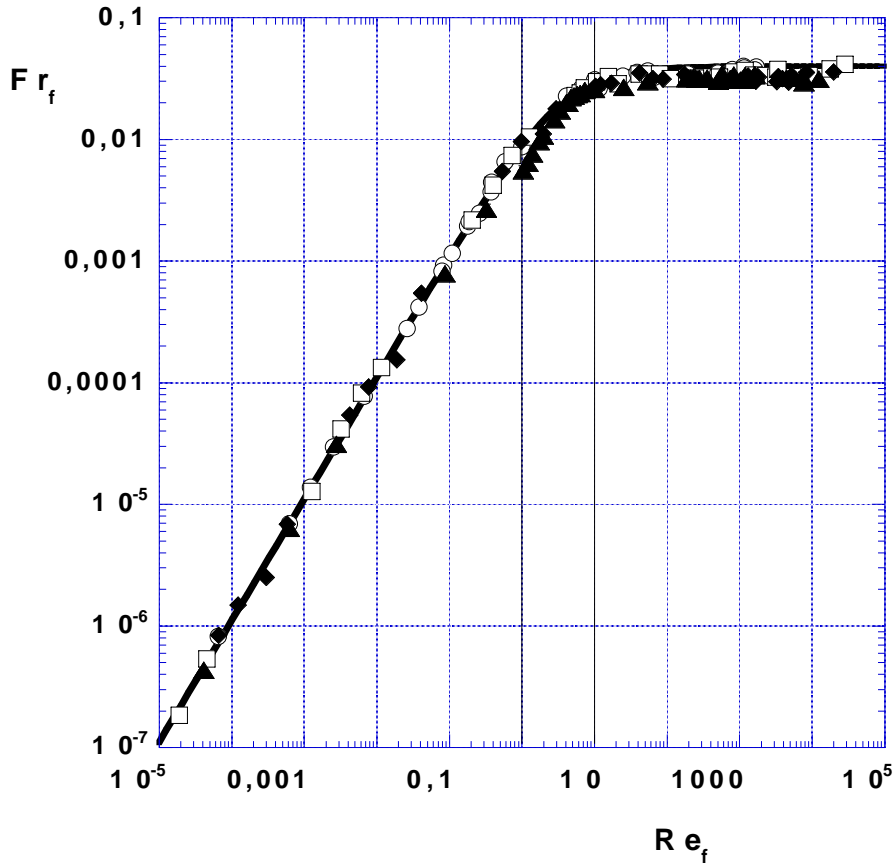


Figure 5.9:  $Fr_f$  en fonction de  $Re_f$  pour des bulles remontant dans des tubes de section circulaire (○), carré (□), triangulaire (▲) et rectangulaire (◆). La courbe en trait plein représente la loi (5.51)

de la viscosité sur la remontée de la bulle et  $Fr_f = Constante$ . Si  $Re_f < 1$ , on entre dans un domaine pleinement visqueux et la vitesse  $U_b$  de la bulle dépend de la viscosité  $\nu$ .

On peut remarquer que l'on ne retrouve pas le résultat de E. E. Zukoski [87] sur la limite en Reynolds de l'apparition des effets visqueux. En effet, notre limite est  $Re_f = 10$  tandis que, pour une même définition du Reynolds, E. E. Zukoski trouve que les effets visqueux ne sont plus négligeables pour  $Re_f < 100$ .

Une loi empirique permettant de modéliser la variation de  $Fr_f$  en fonction de  $Re_f$  a été recherchée. Le caractère abrupte de la transition entre les deux domaines est bien représenté par une loi de la forme :

$$Fr_f = K_4 \left[ \frac{(K_5/K_4) Re_f}{1 + (K_5/K_4) Re_f} \right], \quad \text{avec } K_4 = 0,040 \text{ et } K_5/K_4 = 0,275. \quad (5.51)$$

Ce résultat sera utilisé ultérieurement afin d'adimensionner la vitesse des points expérimentaux situés dans le domaine de transition :  $1 < Re_f < 10$ .

## 5.4 Influence de la courbure sur la vitesse d'ascension des bulles

### 5.4.1 Transition $A_{13}$ , $Re_f \gg Re_f^*$

Afin de n'observer que l'influence de la tension de surface, nous avons adimensionné la vitesse mesurée dans nos expériences par la vitesse issue de la loi (5.24) du cas non-visqueux,  $Re_f > 10$ .

La vitesse adimensionnée est notée  $\bar{U}_{i,f}$  :

$$\bar{U}_{i,f} \equiv \frac{U_b}{\sqrt{K_4 g P}} \quad \text{avec} \quad K_4 = 0,040. \quad (5.52)$$

Dans toutes nos expériences,  $\bar{U}_{i,f} = 1$  signifie que la tension de surface n'influence pas la vitesse d'ascension.

#### Transition A<sub>13</sub> dans les cylindres

Nous avons montré de manière théorique dans le paragraphe 4.4.1 qu'à l'ordre dominant, la tension de surface diminue la gravité apparente, moteur du mouvement de la bulle, ce qui contribue à la ralentir. On montre que cette gravité  $g'_i < g$  doit varier avec le rayon de courbure à l'apex de la bulle selon la loi :

$$g'_i \equiv g \left[ 1 - K_8 \frac{a^2}{R_0^2} \right], \quad (5.53)$$

où  $K_8$  est une constante qui dépend de la fonction courant (donc de la forme des lignes de courant autour du sommet de la bulle) choisie pour modéliser l'écoulement,  $a$  est la longueur capillaire et  $R_0$  le rayon de courbure de la bulle en son sommet.  $R_0$  peut être identifié ici comme le rayon  $R$  du tube.

Dans la région 3, la loi d'évolution de  $U_b^2$  avec les dimensions du tube s'écrit donc :

$$U_b^2 \approx K_4 g'_i P. \quad (5.54)$$

On peut alors écrire à l'aide de la définition (5.53) de  $g'_i$  :

$$1 - \bar{U}_{i,f}^2 = K_8 \left( \frac{a}{R} \right)^2, \quad (5.55)$$

résultat qui peut être réécrit sous la forme :

$$\frac{U_b^2}{K_4 g P} = 1 - K_8 \left( \frac{a}{R} \right)^2. \quad (5.56)$$

Comme  $P = 2\pi R$ , on a la relation :

$$\frac{U_b^2}{gR} = 2\pi K_4 - 2\pi K_4 K_8 \left( \frac{a}{R} \right)^2. \quad (5.57)$$

Ce résultat théorique est à rapprocher des travaux de K. W. Tung et J. Y. Parlange [78] (voir l'annexe B) sur l'influence de la tension de surface sur la vitesse de remontée des bulles. Avec un travail théorique équivalent au notre où leur fonction courant est une somme de trois fonctions de Bessel, ils ont montré, dans le cas des tubes cylindriques de rayon  $R$ , que :

$$\frac{U_b^2}{gR} = 0,272 - 0,472 \left( \frac{a}{R} \right)^2, \quad (5.58)$$

Cette expression de l'influence de  $\sigma$  sur la vitesse  $U_b$  des bulles est équivalente à la loi (5.57) déduite de notre analyse théorique.

Dans le cas des tubes cylindriques, K. W. Tung et J. Y. Parlange ont montré que leur loi est en excellent accord avec les expériences de la littérature, essentiellement celles de E. E. Zukoski [87].

La linéarité entre  $1 - \bar{U}_{i,f}^2$  et  $(a/R)^2$  attendue par notre analyse théorique, loi (5.55), est observée sur la figure 5.10. Sur cette figure, nous avons présenté  $1 - \bar{U}_{i,f}^2$  en fonction de  $(a/R)^2$  pour des

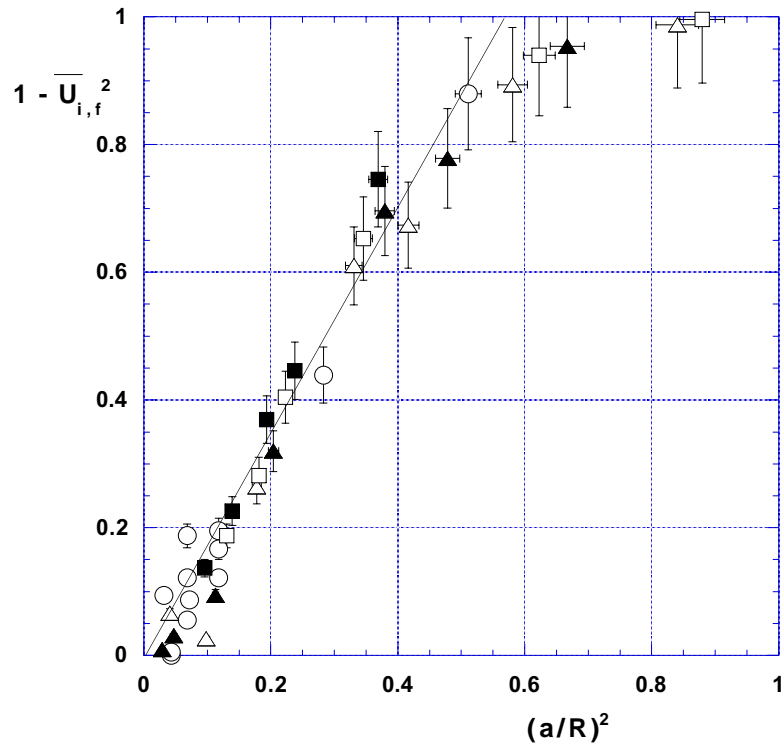


Figure 5.10:  $1 - \bar{U}_{i,f}^2$  en fonction de  $(a/R)^2$  pour des tubes cylindriques. Les expériences ont été menées dans de l'eau ( $\circ$ ), de l'éthanol ( $\blacksquare$ ), de l'éther ( $\triangle$ ), de l'hexane ( $\blacktriangle$ ) et du pentane ( $\square$ ). La ligne en trait plein représente la loi (5.59)

tubes cylindriques. Le rayon des tubes varie de 0,0017 m à 0,0100 m. Les fluides utilisés sont de l'eau ( $\circ$ ), de l'éthanol ( $\blacksquare$ ), de l'éther ( $\triangle$ ), de l'hexane ( $\blacktriangle$ ) et du pentane ( $\square$ ). En accord avec la discussion de la section 1.3, ces liquides ont tous un nombre de Kapitza grand devant 1, condition nécessaire à l'étude de la transition  $A_{13}$ . Le nombre de Reynolds minimum est 10 et le nombre de Bond varie de 1 à 25.

L'erreur relative sur la mesure de la vitesse nous amène à estimer l'erreur sur  $1 - \bar{U}_{i,f}^2$  à 13 %. L'erreur de mesure du rayon du tube nous permet d'estimer l'erreur sur  $(a/R)^2$  à 4 %.

On constate que l'on a une évolution linéaire de  $1 - \bar{U}_{i,f}^2$  en fonction de  $(a/R)^2$  comme prévu par nos résultats théoriques dans la limite  $(a/R)^2 < 0,5$ , i.e.  $Bo_{equ} > 2$ .

Au delà de cette limite, pour les plus petits tubes, la linéarité n'est pas observée et l'on doit probablement considérer les effets de la tension de surface sur la forme de la bulle, effets qui ne sont pas pris en compte par notre modèle.

Dans la limite  $(a/R)^2 < 0,5$ , les mesures expérimentales sont proches de la loi :

$$1 - \bar{U}_{i,f}^2 = K_8 \cdot (a/R)^2 \quad \text{avec} \quad K_8 = 1,75 \pm 0,10, \quad (5.59)$$

qui est présentée en trait plein sur la figure 5.10.

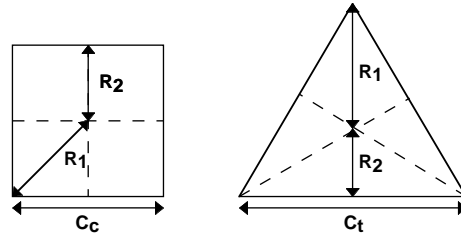
Nous avons déterminé expérimentalement les deux constantes,  $K_4 = 0,040 \pm 0,002$  et  $K_8 = 1,75 \pm 0,10$ , de la relation (5.57). Nous obtenons donc une loi de la même forme que celle de K. W. Tung et J. Y. Parlange :

$$\frac{U_b^2}{gR} = 0,251 (\pm 0,02) - 0,439 (\pm 0,65) \left(\frac{a}{R}\right)^2. \quad (5.60)$$

Cette loi expérimentale est en bon accord quantitatif avec le calcul théorique de K. W. Tung et J. Y. Parlange.

Transition  $A_{13}$  dans les tubes de section carrée et triangulaire

Le nombre de Bond,  $Bo_f$ , caractérise l'effet de la tension de surface, il est basé sur une longueur qui dépend de la forme du tube :  $Bo_f \equiv (R(f)/a)^2$ . La longueur  $R(f)$  doit suivre l'évolution des dimensions du tube et représenter la courbure de la bulle. Pour les tubes cylindriques, le choix est facile car il n'y a qu'une longueur naturelle  $R$  et donc une seule courbure naturelle : l'inverse du rayon. Pour les tubes de section carrée et triangulaire, il existe deux longueurs que nous noterons  $R_1$  et  $R_2$  qui sont respectivement la plus grande longueur et la plus petite longueur inscrite dans la section. Nous avons représenté sur le schéma de la figure 5.11 les définitions de ces deux longueurs pour un carré de côté  $C_c$  et un triangle équilatéral de côté  $C_t$ . Deux choix

Figure 5.11: Schéma explicatif de la définition de  $R_1$  et  $R_2$ 

s'offrent naturellement à nous pour définir la courbure dans un tube de section quelconque à partir de ces deux longueurs : la courbure moyenne qui est définie comme la somme des courbures :

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad (5.61)$$

et la courbure de Gauss (ou courbure totale) définie comme :

$$\frac{1}{R_G} = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}}. \quad (5.62)$$

A partir de ces deux courbures, on définit deux nombres de Bond :

$$Bo_m \equiv \left( \frac{R_m}{a} \right)^2 \quad (5.63)$$

et

$$Bo_G \equiv \left( \frac{R_G}{a} \right)^2. \quad (5.64)$$

Afin de déterminer la courbure la plus pertinente, nous avons comparé les deux définitions du nombre de Bond sur la figure 5.12. La figure 5.12-(a) montre l'évolution de la vitesse adimensionnée  $\bar{U}_{i,f}$  en fonction du nombre de Bond basé sur la courbure moyenne,  $Bo_m$ , tandis que la figure 5.12-(b) concerne l'évolution de la vitesse adimensionnée  $\bar{U}_{i,f}$  en fonction du nombre de Bond basé sur la courbure de Gauss,  $Bo_G$ .

Les tubes utilisés sont à base circulaire ( $\circ$ ), carrée ( $\square$ ) et triangulaire ( $\blacktriangle$ ). Les rayons des tubes cylindriques varient de 0,0017 m à 0,0300 m, les cotés des tubes carrés de 0,0005 m à 0,2000 m et ceux des tubes triangulaires de 0,001 à 0,200 m. Les fluides utilisés pour nos expériences sont l'éthanol, le pentane et l'éther tels que le nombre de Kapitza soit toujours grand devant 1, en accord avec la discussion sur les transitions du diagramme de phase. Le nombre de Reynolds,  $Re_f$ , minimum est dans nos expérience de 10. On doit noter que les mesures faites dans les tubes carrés de côté inférieur à 0,004 m ainsi que celles dans les tubes triangulaires de côté inférieur à 0,005 m ont des nombres de Reynolds inférieurs à 10 : les effets visqueux ne peuvent alors pas être négligés. Ces points expérimentaux ne sont donc pas présentés dans ce graphique.

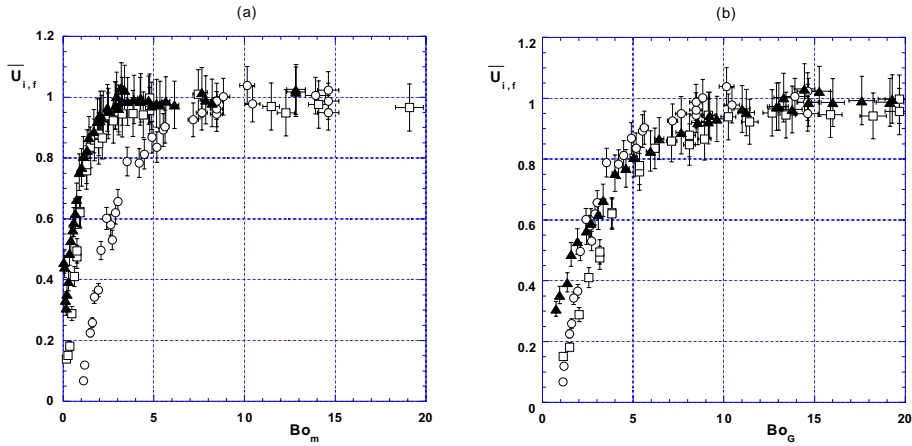


Figure 5.12: (a) Vitesse adimensionnée  $\bar{U}_{i,f}$  en fonction du nombre de Bond  $Bo_m$ . (b) Vitesse adimensionnée  $\bar{U}_{i,f}$  en fonction du nombre de Bond  $Bo_G$ . Les mesures ont été effectuées dans des tubes cylindriques (○), carrés (□) et triangulaires (▲).  $Re_f \gg Re_f^*$

Le nombre de Bond,  $Bo_{equ}$ , varie de 1,12 à 90 pour les tubes cylindriques, de 1,44 à 56 pour les tubes triangulaires et de 2 à 90 pour les tubes à base carrée.

L'incertitude sur  $\bar{U}_{i,f}$  est de 5 % pour les cylindres et de 7 % pour les tubes à base carrée et triangulaire. L'incertitude sur le nombre de Bond est, quelle que soit sa définition, estimée à 4 %.

On remarque que le nombre de Bond basé sur la courbure moyenne ne permet pas de rendre compte d'un comportement cohérent entre les cylindres et les tubes à section carrée et triangulaire. Nous avons donc défini un nombre de Bond caractérisant les effets de courbure à partir de la courbure de Gauss :

$$Bo_f \equiv \left( \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{a} \right)^2 = Bo_g. \quad (5.65)$$

Ce nombre de Bond a été testé sur la figure 5.13. Cette figure montre l'évolution de la vitesse adimensionnée  $\bar{U}_{i,f}$  en fonction du nombre de Bond,  $Bo_f$  pour des tubes cylindriques, à base carrée et à base triangulaire. Il s'agit d'un agrandissement de la figure 5.12-(b).

On observe, lorsque l'on diminue les dimensions des tubes, que la vitesse passe d'un régime inertiel  $\bar{U}_{i,f} = 1$  à un régime où la vitesse  $\bar{U}_{i,f}$  diminue lorsque le nombre de Bond diminue. Cette transition s'effectue pour toutes les formes de tubes à un nombre de Bond critique,  $Bo_{f,i}^* \approx 9$ .

Dans le cas des tubes cylindriques, cette vitesse  $\bar{U}_{i,f}$  s'annule pour un nombre de Bond fini  $\approx 1$ . Cela signifie qu'il y a blocage de la bulle dans les plus petits tubes. Les points où l'on a observé un blocage ne sont pas présentés sur ce graphique. Les expériences dans des tubes de rayons inférieurs à la longueur capillaire ont montrés que l'on a pas de propagation de bulle.

Dans le cas des tubes carrés et triangulaires, nous avons pu mesurer une vitesse de bulle dans des tubes carrés de coté 0,0005 m ( $Bo_f = 0,03$ ) et dans des tubes triangulaires de coté 0,0020 m ( $Bo_f = 0,25$ ). Il y a donc propagation de bulles même pour un nombre de bond inférieur à 1 dans les tubes à base carrée et triangulaire. Cette vitesse d'ascension dépend des effets de la viscosité et de la courbure car le nombre de Reynolds est inférieur à 10 et le nombre de Bond est inférieur à 9.

Nous avons montré, au paragraphe précédent, la pertinence de notre modèle sur l'influence de la courbure dans le cas des tubes cylindriques. Nous allons maintenant discuter de sa validité dans le cas des tubes carrés et triangulaires. En identifiant le rayon de courbure à l'apex de la bulle  $R_0$  comme l'inverse de la courbure de Gauss,  $R_0 = R_G$ , dans l'équation (5.53), on a la

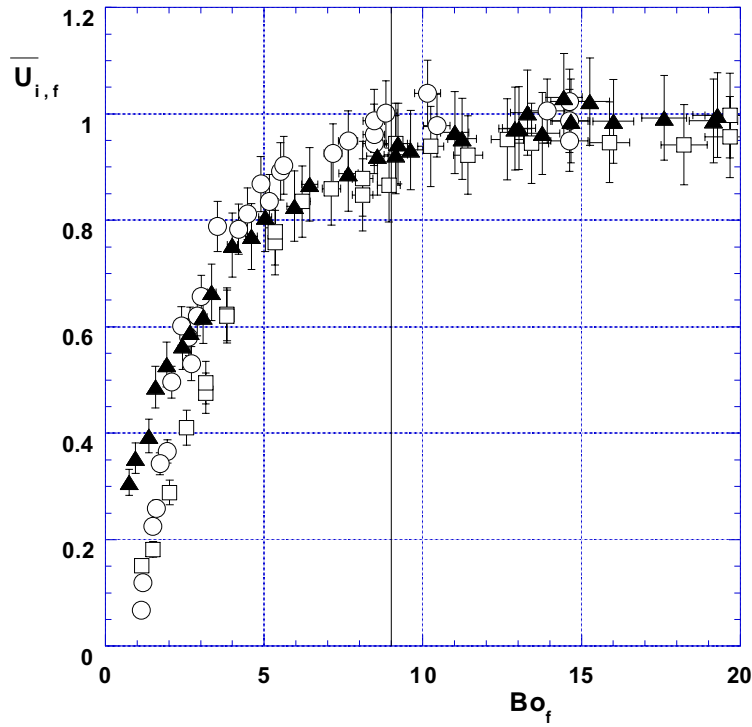


Figure 5.13: Vitesse adimensionnée  $\bar{U}_{i,f}$  en fonction du nombre de Bond,  $Bo_f$ , pour des tubes cylindriques (○), carrés (□) et triangulaires (▲).  $Re_f \gg Re_f^*$

relation :

$$1 - \bar{U}_{i,f}^2 = K_8 \left( \frac{a}{R_G} \right)^2 \quad (5.66)$$

qui est l'équivalente dans le cas des tubes de section quelconque de la relation (5.55) valable dans les cylindres.

Les résultats de la figure 5.14 concernent les mêmes expériences que sur la figure 5.13, seule la présentation des résultats change. On a représenté sur cette figure la variation de  $1 - \bar{U}_{i,f}^2$  en fonction de  $(a/R_G)^2$  afin de vérifier la loi théorique (5.66) à l'aide de nos résultats expérimentaux.

L'incertitude sur  $1 - \bar{U}_{i,f}^2$  est de 10 % dans les tubes cylindriques et de 14 % dans les tubes à base carrée et triangulaire. L'incertitude sur  $(a/R_G)^2$  est de 4 %.

On constate que l'on a une évolution linéaire de  $1 - \bar{U}_{i,f}^2$  en fonction de  $(a/R_G)^2$  pour toute les formes utilisées comme prévu par le modèle. Cette évolution linéaire n'est pas identique dans le cas cylindrique et dans le cas des tubes de section carré et triangulaire : le coefficient de linéarité est différent. Dans le cas cylindrique, les mesures expérimentales sont proches de la loi  $1 - \bar{U}_{i,f}^2 = K_8 \cdot (a/R_G)^2$  avec  $K_8 = 1,75 \pm 0,1$ , représentée en trait plein sur la figure, dans la limite  $(a/R_G)^2 < 0,5$ , i.e.  $Bo_f > 2$ . Pour les tubes à base carrée et triangulaire, les mesures sont proches de la loi  $1 - \bar{U}_{i,f}^2 = K_8 \cdot (a/R_G)^2$  avec  $K_8 = 2,5 \pm 0,1$ , représentée en trait pointillé sur la figure 5.14, dans la limite  $(a/R_G)^2 < 0,3$ , i.e.  $Bo_f > 3,3$ , pour les carrés et dans la limite  $(a/R_G)^2 < 0,2$ , i.e.  $Bo_f > 5$ , dans le cas des triangles.

Ces différences seront discutées section 5.4.3.



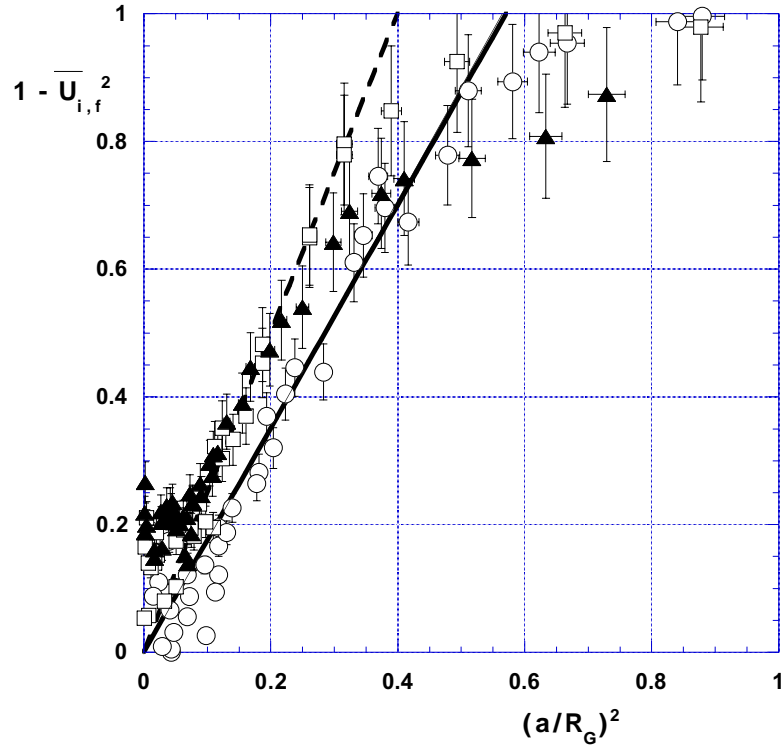


Figure 5.14:  $1 - \bar{U}_{i,f}^2$  en fonction de  $(a/R_G)^2$  pour des tubes cylindriques (○), carrés (□) et triangulaires (▲). La ligne en trait plein présente la loi (5.66) avec  $K_8 = 1,75 \pm 0,10$  et la ligne en trait pointillé présente la même loi pour  $K_8 = 2,5 \pm 0,1$ .  $Re_f > Re_f^*$

#### 5.4.2 Transition A<sub>24</sub>, $Re_f \ll Re_f^*$

Comme dans la section précédente, nous avons utilisé une vitesse adimensionnée  $\bar{U}_{\nu,f}$  qui est le rapport entre la vitesse mesurée dans nos expériences et la vitesse issue de la loi (5.48) valable dans le cas visqueux, quelle que soit la forme du tube :

$$\bar{U}_{\nu,f} = \frac{U_b \nu}{K_5 g S} \quad \text{avec} \quad K_5 = 0,011. \quad (5.67)$$

Ainsi si  $\bar{U}_{\nu,f} = 1$ , cela signifie que la tension de surface n'intervient pas.

#### Transition A<sub>24</sub> dans les cylindres

Nous avons montré de manière théorique dans le paragraphe 4.4.2 qu'à l'ordre dominant, la tension de surface diminue la gravité apparente, moteur du mouvement de la bulle, ce qui contribue à la ralentir. On montre que cette gravité  $g'_\nu < g$  doit varier avec le rayon de courbure de la bulle à l'apex selon la loi :

$$g'_\nu \equiv g \left[ 1 - K_9 \frac{a^2}{R_0^2} \right], \quad (5.68)$$

où  $K_9$  est une constante qui dépend de la fonction courant (donc de la forme des lignes de courant autour du sommet de la bulle) choisie pour modéliser l'écoulement,  $a$  est la longueur capillaire et  $R_0$  le rayon de courbure de la bulle en son sommet.  $R_0$  peut être identifié ici comme le rayon  $R$  du tube.

Dans la région 4, la loi d'évolution de  $U_b$  avec les dimensions du tube s'écrit donc :

$$U_b \approx K_5 \frac{g'_\nu S}{\nu}. \quad (5.69)$$

On peut alors écrire à l'aide de la définition (5.68) de  $g'_\nu$  :

$$1 - \bar{U}_{\nu,f} = K_9 \left( \frac{a}{R} \right)^2, \quad (5.70)$$

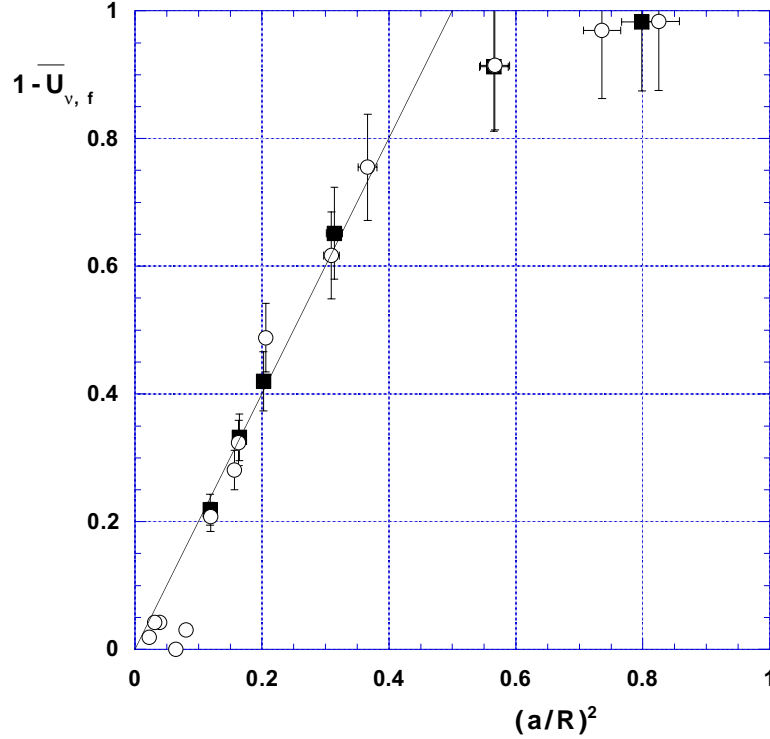


Figure 5.15:  $1 - \bar{U}_{\nu,f}$  en fonction de  $(a/R)^2$  pour des tubes cylindriques. Les expériences ont été menées dans de l'huile silicone V300 (■) et V1000 (○). La ligne en trait plein représente la loi (5.71).  $Re_f \ll Re_f^*$

La figure 5.15 montre la vitesse adimensionnée  $1 - \bar{U}_{\nu,f}$  en fonction de  $(a/R)^2$  dans des cylindres. Les tubes ont un rayon qui varie de 0,0017 m à 0,0180 m et les points de mesure ont été effectués avec de l'huile silicone V300 et V1000. Ces liquides ont un nombre de Kapitza petit devant 1, condition nécessaire à l'étude de la transition  $A_{24}$ . Le nombre de Reynolds maximum dans ces tubes est de 0,2 et le nombre de Bond,  $Bo_f$ , varie de 1,2 à 44.

L'incertitude sur  $1 - \bar{U}_{\nu,f}$  dans les cylindres est estimée à 11 %. L'erreur relative sur  $(a/R)^2$  est de 4 %.

On remarque que l'on a une évolution linéaire de  $1 - \bar{U}_{\nu,f}$  en fonction de  $(a/R)^2$  dans la limite  $(a/R)^2 < 0,4$ , i.e.  $Bo_f > 2,5$ . La théorie permet donc de décrire qualitativement l'influence de la courbure sur la vitesse d'ascension des bulles dans des tubes de forme cylindrique.

Dans la limite de validité de la loi linéaire, le meilleur ajustement linéaire obtenu est

$$1 - \bar{U}_{\nu,f} = K_9 \left( \frac{a}{R} \right)^2 \quad \text{avec} \quad K_9 = 2,0 \pm 0,1 \quad (5.71)$$

Cette loi est présentée en trait plein sur la figure 5.15.

#### Transition $A_{24}$ dans des tubes de section carrée et triangulaire

La figure 5.16 montre l'évolution de la vitesse adimensionnée  $\bar{U}_{\nu,f}$  en fonction du nombre de Bond,  $Bo_f$ , pour des tubes cylindriques, à base carrée et triangulaire. Les tubes cylindriques ont un rayon qui varie de 0,0017 m à 0,018 m et les points de mesure ont été effectués avec de l'huile

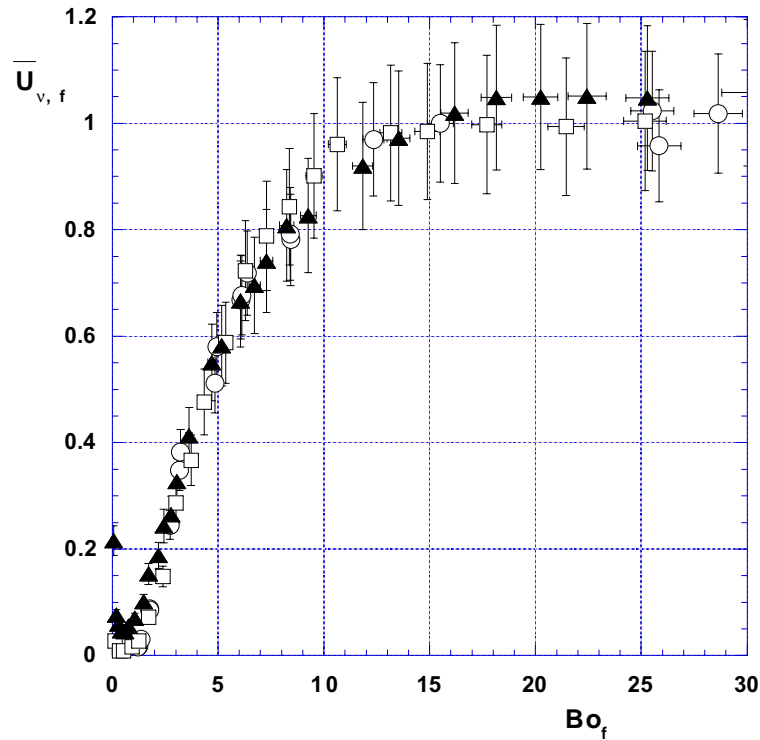


Figure 5.16:  $\bar{U}_{v,f}$  en fonction du nombre de Bo,  $Bo_f$ , pour des tubes cylindriques ( $\circ$ ), carrés ( $\square$ ) et triangulaires ( $\blacktriangle$ ).  $Re_f \ll Re_f^*$

silicone de viscosité supérieure à  $10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  tel que le nombre de Kapitza est petit devant 1. Le nombre de Reynolds maximum dans ces tubes est de 0,2 et le nombre de Bond varie de 1,2 à 44. Les cotés des tubes carrés et triangulaires varient respectivement de 0,0009 m à 0,0130 m et de 0,001 m à 0,020 m. Les points dans ces tubes ont été mesurés dans de l'huile silicone V50 de viscosité  $50 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Le nombre de Kapitza de cette huile n'est pas petit devant 1,  $Ka = 2,5$ . La longueur capillaire de ce liquide est plus grande que la longueur visqueuse. Des effets de courbure peuvent donc intervenir en l'absence d'effets visqueux lorsque l'on diminue les dimensions des tubes. On peut remarquer que c'est effectivement le cas en notant que le nombre de Reynolds varie de  $5 \cdot 10^{-4}$  à 7,4 : une partie de nos points mesurés dans les tubes carrés et triangulaires ont un nombre de Reynolds compris entre 1 et 10, dans la zone de transition décrite dans la section 5.3. Il se pose donc un problème dans l'adimensionnement de la vitesse par la loi (5.48) : cette loi n'est valable que pour un nombre de Reynolds inférieur à 1, i.e. dans la région pleinement visqueuse. Les mesures des vitesses dans les tubes à base carrée et à base triangulaire ont donc été adimensionnées par la loi (5.51) qui décrit le domaine de transition ( $1 < Re_f < 10$ ).

Le nombre de Bond varie de 0,04 à 30.

L'incertitude sur  $\bar{U}_{v,f}$  est de 11 % dans les cylindres et de 13 % dans les tubes carrés et triangulaires. L'incertitude sur  $Bo_f$  est de 4 %.

On remarque tout d'abord que la transition entre le domaine purement visqueux  $\bar{U}_{v,f} = 1$  et le domaine où l'influence de  $\sigma$  se fait sentir s'effectue à un nombre de Bond  $Bo_{f,\nu}^* \approx 15$ . En dessous de ce nombre critique, la vitesse  $\bar{U}_{v,f}$  diminue.

Dans le cas des tubes cylindriques ( $\circ$ ), la vitesse des bulles devient nulle pour un rayon de tube égal à la longueur capillaire ( $Bo_f \approx 1$ ), on a un phénomène de blocage des bulles.

Pour les tubes à base carrée ( $\square$ ) et triangulaire ( $\blacktriangle$ ), la vitesse  $\bar{U}_{v,f}$  n'est jamais nulle même pour les plus petits tubes utilisés. Bien au contraire, elle augmente avec la diminution des dimensions.

On peut cependant noter que la vitesse réelle des bulles, elle, continue à diminuer. Nous avons montré, au paragraphe précédent, la pertinence de notre modèle sur l'influence de la courbure dans le cas des tubes cylindriques. Nous allons maintenant discuter de sa validité dans le cas des tubes carrés et triangulaires. En identifiant le rayon de courbure à l'apex de la bulle  $R_0$  comme l'inverse de la courbure de Gauss  $R_0 = R_G$  dans l'équation (5.68), on a la relation :

$$1 - \bar{U}_{\nu,f} = K_9 \left( \frac{a}{R_G} \right)^2, \quad (5.72)$$

qui est l'équivalente dans le cas des tubes de section quelconque de la relation (5.70) valable dans les cylindres.

La comparaison avec la théorie se fait au travers de l'étude de la courbe de  $1 - \bar{U}_{\nu,f}$  en fonction de  $(a/R_G)^2$ . Cette courbe est représentée sur la figure 5.17.

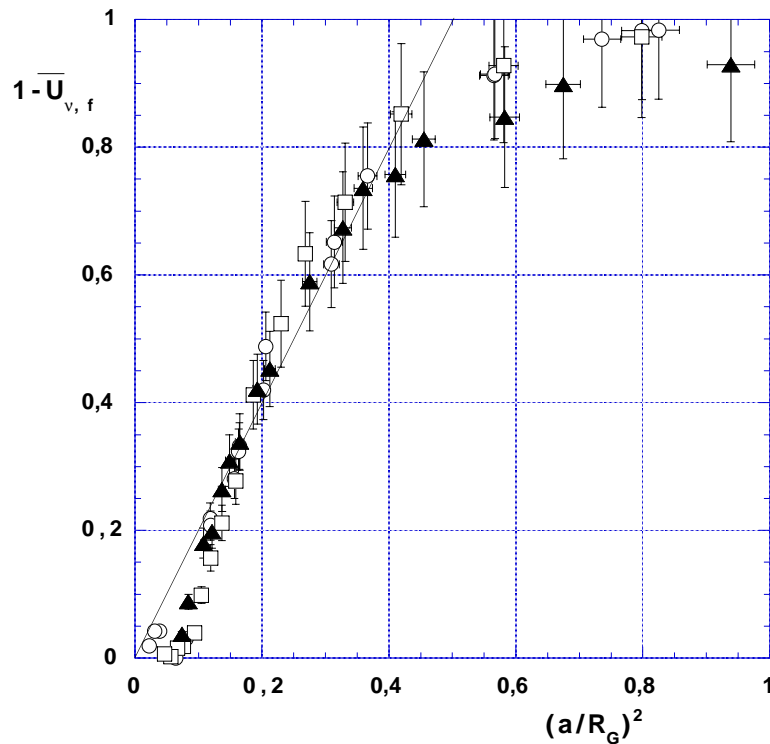


Figure 5.17:  $1 - \bar{U}_{\nu,f}$  en fonction de  $(a/R_G)^2$  pour des tubes cylindriques ( $\circ$ ), carrés ( $\square$ ) et triangulaires ( $\blacktriangle$ ). La ligne en trait plein représente la loi (5.71).  $Re_f \ll Re_f^*$

Les points ronds blancs ( $\circ$ ) concernent les tubes cylindriques tandis que les résultats obtenus dans des tubes à base carrée et triangulaire sont représentés par des points carrés ( $\square$ ) et triangles noirs ( $\blacktriangle$ ) respectivement. Les dimensions des tubes et les fluides utilisés sont les mêmes que ceux de la figure 5.16.

Les incertitudes sur  $1 - \bar{U}_{\nu,f}$  sont identiques à celles de la figure 5.16 sur  $\bar{U}_{\nu,f}$  et l'erreur relative sur  $(a/R_G)^2$  est de 4 %.

On remarque que l'on a une évolution linéaire de  $1 - \bar{U}_{\nu,f}$  en fonction de  $(a/R_G)^2$  dans la limite  $(a/R_G)^2 < 0,4$ , i.e.  $Bo_f > 2,5$  dans le cas des cylindres. La linéarité de  $1 - \bar{U}_{\nu,f}$  en fonction de  $(a/R_G)^2$  dans le cas carré et triangulaire est moins aisée à mettre en évidence. On peut se poser la question de la pertinence de notre modèle pour les tubes à base carrée et triangulaire. La loi (5.71), valable dans les cylindres, est présentée en trait plein sur la figure 5.17.

La théorie permet donc de décrire qualitativement l'influence de la courbure et de la viscosité (région 4) sur la vitesse d'ascension des bulles dans des tubes de forme cylindrique jusqu'à ce

que le nombre de Bond soit égal à 2,5.

### 5.4.3 Discussion des résultats sur l'influence de la courbure

Dans l'étude de la transition  $A_{13}$ , nous avons montré que les effets de courbure influencent la vitesse de la bulle pour un nombre de Bond inférieur à  $Bo_{f,i}^* \approx 9$ , selon la relation

$1 - \bar{U}_{i,f}^2 = K_8(a/R_G)^2$ . La constante  $K_8$  est égale à 1,75 dans les cylindres et à 2,5 dans les tubes à base carrée et triangulaire. L'hypothèse que l'on peut faire pour expliquer cette différence concerne le modèle : la constante  $K_8$  dépend de la forme des lignes de courant autour de l'apex de la bulle. Si l'on suppose que ces lignes de courant n'ont pas la même forme dans des tubes de formes différentes, la constante  $K_8$  n'aura pas la même valeur suivant la forme du tube. Cela induit que la forme de l'apex de la bulle est la même dans des tubes carrés et triangulaires.

Il y a une limite au delà de laquelle la linéarité de  $1 - \bar{U}_{i,f}^2$  en  $(a/R_G)^2$  n'est plus observée. Au delà de cette limite, on doit probablement considérer les effets de la tension de surface sur la forme de la bulle, effets qui ne sont pas pris en compte par notre modèle. Cette limite est différente suivant la forme du tube :  $Bo_f > 2$  pour les cylindres,  $Bo_f > 3,3$  pour les carrés et  $Bo_f > 5$  dans le cas des triangles. Cette remarque est cohérente avec les résultats de W. B. Kolb et R. L. Cerro [46] qui ont montrés que dans un tube à base carrée la bulle reste axisymétrique jusqu'à un nombre capillaire,  $Ca \equiv \rho\nu U_b/\sigma$ , de 0,1 (cf figure 5.18) ce qui correspond dans nos résultats à  $Bo_f > 6$ . Pour un nombre capillaire inférieur à 0,1, il apparaît une "dynamique de coins", la bulle non axisymétrique impose au liquide de se drainer par les coins du tube. Cet écoulement dans les coins des tubes n'est pas pris en compte dans notre modèle, la validité de celui ci est donc limitée en terme de nombre de Bond à  $Bo_f > 6$  dans les cas des tubes non-cylindriques. En dessous de cette limite, l'écoulement du liquide se fait essentiellement dans les coins du tubes et la bulle n'a plus une forme axisymétrique. Notre modèle est donc valable depuis l'apparition des effets de courbure jusqu'à  $Bo_f = 6$ , i.e. pour  $6 < Bo_f < 9$ .

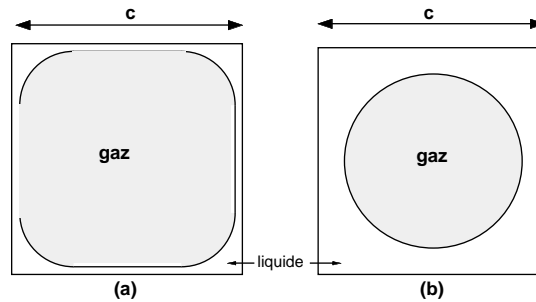


Figure 5.18: Forme de la bulle dans un tube de section carrée : (a) Régime non-axisymétrique  $Ca < 0,1$ , (b) Régime axisymétrique  $Ca > 0,1$ . D'après les résultats de W. B. Kolb et R. L. Cerro [46].

Dans l'étude de la transition  $A_{24}$ , nous avons montré la pertinence de notre modèle sur l'influence des effets de courbure : la loi  $1 - \bar{U}_{\nu,f} = K_9(a/R_G)^2$  est observée dans le cas des cylindres ( $K_9 = 2$ ). Dans le cas des tubes de section carrée et triangulaire, la linéarité de  $1 - \bar{U}_{\nu,f}$  en  $(a/R_G)^2$  est moins évidente, les points de mesure expérimentaux passant de part et d'autre de la loi  $1 - \bar{U}_{\nu,f} = 2(a/R_G)^2$  (cf figure 5.17). Il peut y avoir plusieurs explications à cela : tout d'abord, on peut supposer que la forme des bulles courbées et visqueuses dans les carrés et les triangles est complètement différente de celle dans les cylindres et notre modèle concernant les bulles courbées et visqueuses n'est alors valable que dans le cas cylindrique. De plus, on peut se rappeler les problèmes de fuites de liquide abordés au paragraphe 2.2, conséquences de notre méthode de fabrication des tubes à base carrée et triangulaire. Ces fuites permettent le passage

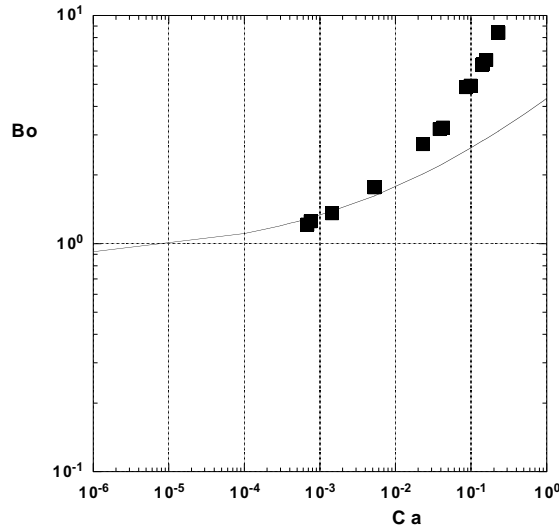


Figure 5.19: Nombre de Bond en fonction du nombre capillaire obtenu dans des tubes cylindriques pour des bulles d'air dans de l'huile silicone de viscosité supérieure à  $300 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . La ligne en trait plein représente la loi (5.73)

du fluide entre le profil ajustable et le tube. Elles ont pour effet d'accélérer les bulles et donc de diminuer artificiellement la mesure de  $1 - \bar{U}_{\nu,f}$ . Ces fuites pourraient expliquer l'écart, observé sur la figure 5.17, entre nos points expérimentaux dans les tubes carrés et triangulaires et la loi valable dans le cas cylindrique pour  $(a/R_G)^2 < 0,2$ .

Ces fuites peuvent aussi expliquer la remontée de la vitesse adimensionnée  $\bar{U}_{\nu,f}$  observé pour un nombre de Bond inférieur à 0,1 sur la figure 5.16. Cette remontée de  $\bar{U}_{\nu,f}$  ne s'observe que dans le cas des tubes à base carrée et triangulaire, il y a donc de grandes chances qu'elle soit liée aux fuites entre le profil ajustable et le tube. On peut noter que la vitesse réelle des bulles, elle, continue à diminuer mais moins vite que la vitesse choisie pour l'adimensionnement.

Il existe, dans la région 4, un travail analytique développé par F. P. Bretherton [13] en 1960. Le modèle de propagation de bulle d'air dans un liquide visqueux à l'intérieur d'un tube de rayon  $R$  proche de la longueur capillaire est basé sur le raccordement asymptotique entre deux régions : une région autour de l'apex de la bulle où la forme de celle-ci est déterminée par un équilibre statique entre les effets de tension de surface et la gravité et une région plus en aval d'épaisseur de film liquide constante où s'applique l'hypothèse de lubrification. Le raccordement de ces deux régions amène à la relation suivante :

$$Bo - 0,842 \simeq 1,25 Ca^{2/9} + 2,24 Ca^{1/3} \quad (5.73)$$

F. P. Bretherton montre que cette relation est valable pour  $0,842 < Bo < 1,04$ .

Sur la figure 5.19, nous présentons, en échelle logarithmique, le nombre de Bond  $Bo$  en fonction du nombre capillaire  $Ca$ . Les points ■ sont obtenus à partir de nos expériences dans des tubes cylindriques. Les liquides utilisés et les dimensions des tubes sont identiques à ceux de la figure 5.15 qui présente nos mesure de vitesse de bulle visqueuse lorsque les effets de courbure sont non négligeable. Nous nous trouvons dans la région 4 du diagramme de phase. La ligne en trait plein présente la loi (5.73).

On remarque que nos points expérimentaux tendent vers la loi (5.73) lorsque le nombre de Bond tend vers 1, i.e. lorsque l'on tend vers son domaine de validité. Nos mesures ne nous permettent pas de vérifier de manière complète la loi de F. P. Bretherton car le nombre de Bond minimal de nos expériences est de 1,2. Toutefois le fait que l'on tende vers cette loi plaide très fortement en sa faveur. Le travail de F. P. Bretherton constitue un exemple très intéressant,

avec une approche différente de la notre, de modélisation de la dynamique d'une bulle capillaire visqueuse.

## 6. CONCLUSIONS

Le modèle théorique nous a permis d'ordonner les résultats expérimentaux et d'établir les lois  $Fr_f = (Re_f, Bo_f)$  s'appliquant à toutes les formes de tube étudiées : cylindrique, carrée, triangulaire et rectangulaire. Ces résultats sont reportés ci dessous en guise de conclusion.

- 1. Dans la région 1, le nombre de Froude est constant :

$$Fr_f = \frac{U_b^2}{gP} = 0,04. \quad (6.1)$$

En terme de vitesse de bulle, on peut écrire que  $U_b = 0,2\sqrt{gP}$  où  $P$  est le périmètre de la section du tube quelle que soit la forme de cette section. On constate un bon accord entre la théorie et l'expérience notamment dans le cas des tubes à base rectangulaire de grand rapport largeur/épaisseur où l'on a montré que le rayon équivalent n'est pas la longueur pertinente du problème.

- 2. Dans la région 2, on montre expérimentalement et théoriquement que le nombre de Stokes est constant :

$$St_f = \frac{U_b}{\frac{gS}{\nu}} = 0,011 \quad (6.2)$$

où  $S$  est la surface de la section du tube et  $\nu$  la viscosité cinématique du liquide à drainer. En terme de vitesse de bulle, la loi :  $U_b = 0,011 gS/\nu$  permet de bien expliquer les résultats de nos expériences.

- 3. Le nombre de Reynolds  $Re_f = Fr_f/St_f$  est défini par :

$$Re_f = \frac{U_b(S/P)}{\nu}. \quad (6.3)$$

La transition entre les deux régimes précédents se fait pour un nombre de Reynolds critique  $Re_f^* = 3$ , transition indépendante de la forme de la section.

- 4. Le nombre de Bond caractérisant les effets superficiels est défini comme :

$$Bo_f = \left(\frac{R_G}{a}\right)^2 \quad (6.4)$$

où  $R_G$  est le rayon de Gauss. Les effets de courbure interviennent lorsque le nombre de Bond atteint une valeur critique  $Bo_{f,i}^* = 9$  dans le cas inertiel et  $Bo_{f,\nu}^* = 15$  dans le cas visqueux.

- 5. L'influence de  $\sigma$  sur la vitesse de remontée de la bulle a été étudiée dans le cas d'un écoulement inertiel et d'un écoulement visqueux. Nous avons montré que l'effet de la tension de surface est de diminuer la gravité apparente ressentie par la bulle.





**PARTIE II**  
**APPLICATION À L'ÉTUDE DES TEMPS DE VIDANGE**  
**ET DE REMPLISSAGE DE RÉSERVOIRS**  
**CYLINDRIQUES**



# 7. ÉTUDE DU TEMPS DE VIDANGE DE RÉSERVOIRS CYLINDRIQUES

## 7.1 Problème posé

Le problème étudié dans ce chapitre concerne la vidange d'un réservoir cylindrique, de longueur  $L$  et de rayon interne  $R$ , entouré d'air et rempli d'un liquide de masse volumique  $\rho$  grande devant celle de l'air et de viscosité cinématique  $\nu$ . Le tube est fermé dans sa partie supérieure et l'échange entre les deux fluides s'effectue au travers d'un trou circulaire de rayon  $r \leq R$ . Le cas où le tube est ouvert dans sa partie supérieure (configuration de type Torricelli) a été étudié par C. Clanet [17]. Les deux photographies de la figure 7.1 présentent la vidange d'un

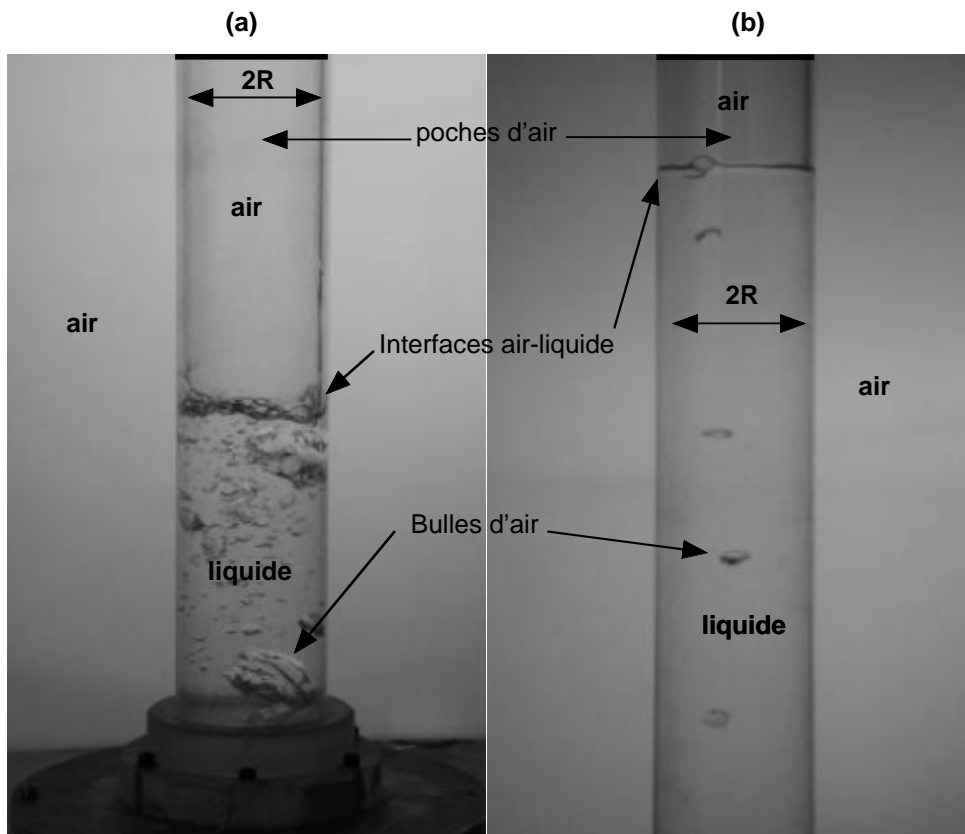


Figure 7.1: Photographies de la vidange de deux tubes cylindriques, remplis d'eau, de longueur  $L = 0,8600$  m, de rayon interne  $R = 0,0395$  m et de rayons d'échange : (a)  $r = 0,0200$  m ; (b)  $r = 0,0050$  m

tube cylindrique de longueur  $L = 0,8600$  m et de rayon  $R = 0,0395$  m initialement rempli d'eau. Le rayon  $r$  d'échange entre les fluides est différent sur les deux images :  $r = 0,0200$  m pour la photographie 7.1-(a) et  $r = 0,0050$  m pour 7.1-(b). Il faut noter que ces deux images ne montrent pas le trou d'échange et qu'on ne peut pas y observer la sortie de l'eau. On y remarque, par contre, une succession de bulles d'air qui remontent périodiquement dans le tube.

Ces bulles sont d'autant plus aisément observables que le rayon d'échange est petit. L'interface supérieure séparant la poche d'air du liquide est, elle aussi, facilement repérable même dans le cas d'un grand rayon d'échange (photographie 7.1-(a)). On peut noter que l'image 7.1-(a) montre la fin de la vidange tandis que l'image 7.1-(b) correspond aux premiers instants de la vidange.

La période d'émission des bulles est de 0,25 s pour les deux tubes présentés sur la figure 7.1. On définit le temps de vidange comme le temps à partir duquel 90% de la masse initialement contenue dans le réservoir a été évacuée. Notre mesure du temps de vidange varie de  $570 \pm 3$  s, lorsque le rayon d'échange est de 0,005 m, à  $15,5 \pm 0,5$  s pour  $r = 0,020$  m. On constate donc que l'on a deux échelles de temps bien distincts : une échelle de temps long de retour à l'équilibre et une échelle de temps court, la période d'émission des bulles d'air dans le réservoir. Ce temps court fait l'objet du chapitre 10.

Le problème étudié dans cette deuxième partie est le temps de vidange d'un réservoir cylindrique vertical, initialement rempli de liquide. On cherche à déterminer la loi :

$$T_v = f(g, \rho, \nu, L, R, r) \quad (7.1)$$

Le cas  $R = r$  est directement relié à la remontée des bulles infinies étudiée dans la partie I et la loi (7.1) est  $T_v = T_b = L/U_b$ .

Dans un premier temps (section 7.2), nous cherchons à déterminer la loi (7.1) lorsque la vidange s'effectue au travers d'un orifice de rayon  $r$  tel que  $r < R$ .

Dans un second temps (section 7.3), nous montrons que la loi  $T_v = T_b$ , du cas  $r = R$ , n'est pas une bonne estimation du temps de vidange pour les fluides visqueux dans la mesure où une part non négligeable de la masse initialement contenue dans le tube est présente après le passage de la bulle. Nous nous concentrons, alors, à décrire correctement la phase de drainage du tube.

## 7.2 Liquides non visqueux, $r < R$

### 7.2.1 Montage expérimental

Pour les tubes peu volumineux, jusqu'à 1 litre, nous avons utilisé le montage de la figure 7.2. Ce montage est similaire à celui présenté dans le chapitre 2. Le tube de PVC est accroché à une potence en aluminium. Après la fixation, dans sa partie inférieure, d'une rondelle percée d'un trou de rayon  $r$ , il est rempli d'eau et fermé par un film de plastique rigide. Pour les réservoirs plus volumineux, le tube est en plexiglas, il est posé sur un socle et fermé par un clapet qui descend verticalement lorsqu'on déclenche l'ouverture du tube. Le montage est détaillé sur la figure 7.3.

A  $t = 0$ , on ouvre la base du tube et l'on récupère avec la caméra la position  $z(t)$  de l'interface air-eau à l'intérieur du tube. Un chronomètre nous permet aussi une mesure directe du temps de vidange  $T_v$ .

Dans les deux montages précédents, la section d'échange entre les deux fluides est présentée sur la figure 7.4. L'angle du biseau est de  $20^\circ$ . L'aiguille pointe vers le liquide afin qu'il ne "voit" qu'une seule longueur : le rayon  $r$ .

Les tubes cylindriques utilisés sont présentés dans le tableau 7.1. De gauche à droite, on présente sur ce tableau le numéro de chacun des tubes utilisés, la longueur  $L$  du tube, le rayon interne  $R$  et le rayon  $r$  d'échange entre les fluides. Les 3 premiers tubes sont les plus volumineux, ce sont ceux qui ont été utilisés avec le montage de la figure 7.3. Les 5 autres ont été montés sur la potence de la figure 7.2. Nous avons fait varier la longueur des tubes d'un facteur 12, de 1,760 m à 0,151 m et le rayon  $R$  d'un facteur 6, de 0,0870 m à 0,0142 m.

Le liquide utilisé pour nos mesures est l'eau de masse volumique  $\rho = 995 \text{ kg.m}^{-3}$ , de viscosité  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$  et de tension de surface  $\sigma = 0,07 \text{ N.m}^{-1}$ .

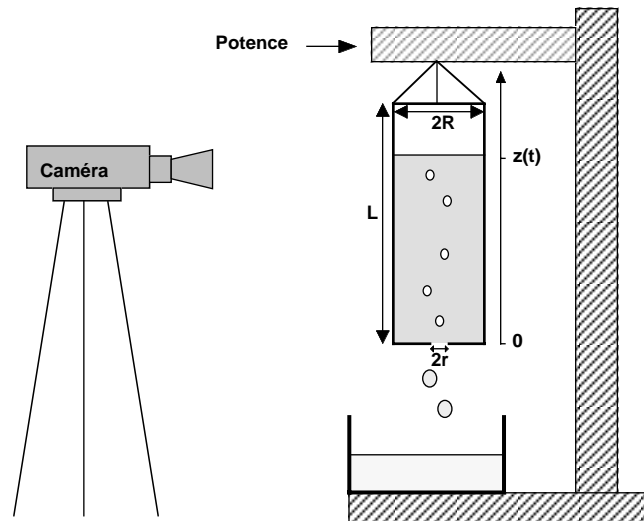


Figure 7.2: Dispositif expérimental n°1

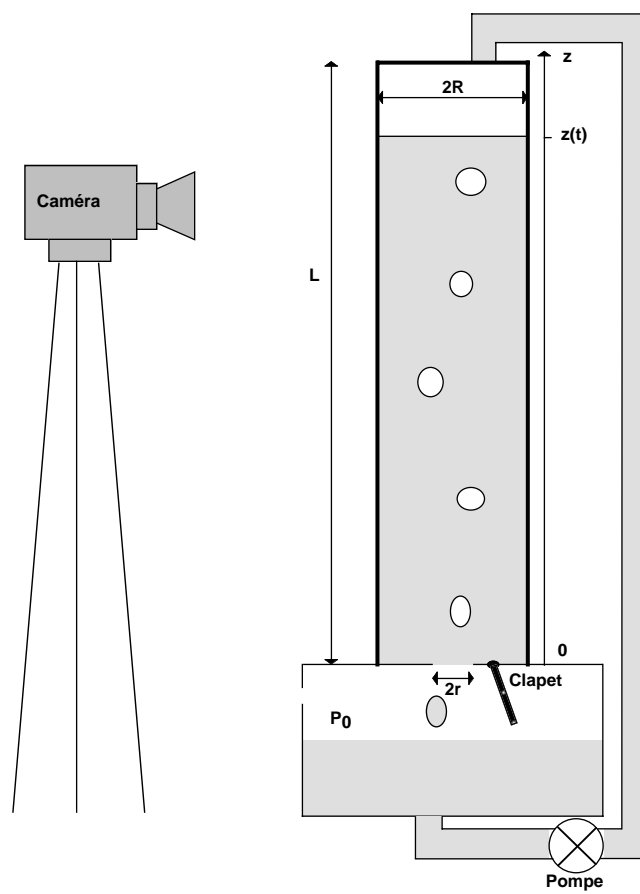


Figure 7.3: Dispositif expérimental n°2

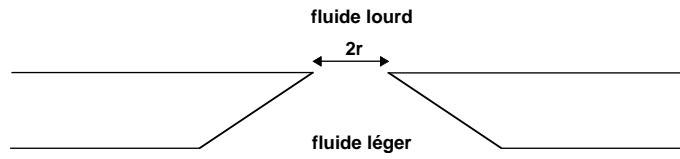


Figure 7.4: Vue en coupe de la section d'échange

n° du tube	$L$ longueur (m)	$R$ rayon intérieur (m)	$r$ rayon du trou d'échange (m)
1	1,7600	0,0870	de 0,0040 à 0,0300
2	0,8600	0,0395	de 0,0050 à 0,0300
3	1,7600	0,0395	de 0,0050 à 0,0300
4	0,5820	0,0180	0,0100 ; 0,0131 ; 0,0150
5	0,2950	0,0142	0,0100 ; 0,0131 ; 0,0142
6	0,2950	0,0180	0,0100 ; 0,0131 ; 0,0150 ; 0,0180
7	0,2950	0,0231	0,0100 ; 0,0131 ; 0,0150 ; 0,0231
8	0,1510	0,0180	0,0100 ; 0,0131 ; 0,0150

Table 7.1: Paramètres géométriques des tubes utilisés dans nos expériences de vidange

Nous allons maintenant estimer l'incertitude sur la mesure du temps  $T_v$  : Dans l'exemple de la vidange du tube 5 au travers d'un trou d'échange de rayon  $r = 0,010$  m, la mesure du temps de vidange obtenue par chronométrage est de 5,8 s, 6,00 s et 5,85 s pour trois expériences menées dans les mêmes conditions. Le résultat de la mesure est donc  $T_v = 5,88 \pm 0,12$  s, on a donc une incertitude sur la mesure de 2 %. De la même manière, la mesure du temps de vidange du tube 1 au travers d'un trou de rayon  $r = 0,0077$  m a été effectuée pour trois expériences. Les résultats sont :  $T_v = 1830$  s, 1810 s et 1826 s ce qui nous amène à la mesure de  $T_v = 1822 \pm 12$  s, l'incertitude sur la mesure est donc inférieure à 1 %.

On peut donc estimer l'erreur relative de mesure du temps de vidange à 2 %.

L'incertitude sur les mesures des dimensions des tubes et sur les paramètres physiques des liquides est estimée à 2 %.

## 7.2.2 Observations expérimentales

### Trajectoire de l'interface

La caméra (cf schéma 7.2 et 7.3) nous permet de suivre la position  $z$  de l'interface air-eau dans le tube au cours du temps. Cette position, adimensionnée par la longueur du tube, est présentée sur la figure 7.5 en fonction du temps dans le cas de la vidange du tube 1 pour trois rayons d'échange différents. On remarque que la vitesse de descente de l'interface est constante. Cette remarque est valable pour tous les autres tubes et tous les rayons d'échange utilisés. On peut donc parler de vitesse de descente de l'interface,  $U_{interface}$ , et l'on utilise la relation :

$$U_{interface} = \frac{L}{T_v}. \quad (7.2)$$

La vitesse de descente de l'interface est de  $0,0139 \text{ m.s}^{-1}$  pour le trou  $r = 0,0226$  m et passe à  $U_{interface} = 0,0017 \text{ m.s}^{-1}$  pour le trou  $r = 0,0100$  m et  $0,0010 \text{ m.s}^{-1}$  pour le trou de rayon  $r = 0,0077$  m. On remarque que la vitesse  $U_{interface}$  et donc le temps de vidange ne sont pas des fonctions linéaires du rayon d'échange  $r$ .  $T_v$  diminue avec  $r$  selon une loi qu'il nous reste à déterminer.

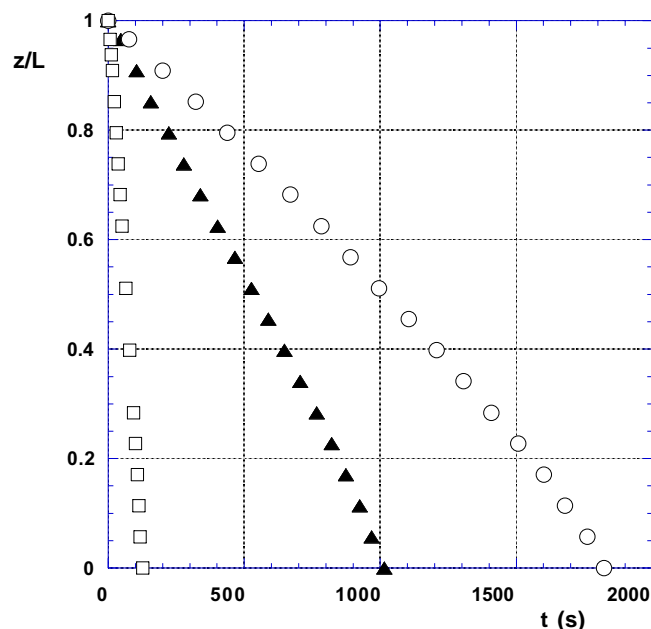


Figure 7.5: Trajectoires  $z/L(t)$  de l'interface dans le tube 1 pour trois rayons d'échange différents. (○)  $r = 0,0077$  m, (▲)  $r = 0,0100$  m et (□) :  $r = 0,0226$  m. Les expériences ont été réalisées dans de l'eau

### Influence des paramètres géométriques

La figure 7.6 présente, sur une échelle logarithmique, les temps de vidange  $T_v$  en fonction de  $r$  mesurés pour les tubes 1, 2 et 3. Les rayons d'échange varient de 0,004 m à 0,030 m.

L'incertitude sur le temps  $T_v$  est de 2 % et celle sur le rayon d'échange est estimée à 2 %.

La première observation est que pour tous les tubes, le temps de vidange est une fonction décroissante de  $r$ . Nous avons représenté en trait plein une droite de pente - 2,6 qui illustre notre meilleur ajustement sur une loi de la forme :  $T_v \sim r^\alpha$ . On observe donc que le temps de vidange est une fonction décroissante de  $r$  selon la loi expérimentale :  $T_v \sim r^{-2,6}$ .

Le tube 2 (■) et le tube 3 (○) ont le même rayon intérieur,  $R = 0,0395$  m, et une longueur  $L$  différente :  $L = 0,860$  m et  $L = 1,760$  m respectivement. Les points ■ et ○ nous permettent donc d'observer la dépendance de  $T_v$  en  $L$ . On remarque aisément que à  $R$  et  $r$  égaux, le temps de vidange augmente avec la longueur du tube. Par exemple, pour deux tubes de rayon  $R = 0,0395$  m et de rayon d'échange  $r = 0,010$  m, le temps de vidange passe de 104 s à 254 s lorsque la longueur passe de  $L = 0,860$  m à  $L = 1,760$  m.

Le tube 1 (□) et le tube 3 (○) ont la même longueur,  $L = 1,7600$  m, et un rayon intérieur différent :  $R = 0,0870$  m et  $R = 0,0395$  m respectivement. L'analyse de ces points de mesure montre que le temps de vidange est une fonction croissante du rayon du tube. En effet, pour une longueur de tube  $L = 1,760$  m et un rayon d'échange  $r = 0,010$  m, le temps de vidange passe de 254 s à 1016 s lorsque le rayon  $R$  passe de 0,0395 m (○) à 0,0870 m (□).

$T_v$  varie, donc, avec  $r$  selon une loi  $T_v \sim r^{-2,6}$ . On observe, de plus, que le temps de vidange est une fonction croissante de  $L$  et  $R$ .



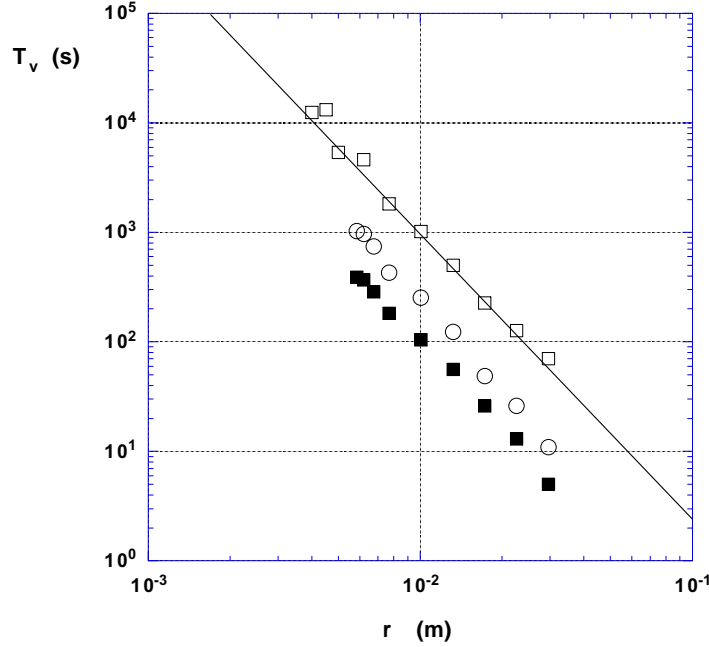


Figure 7.6:  $T_v$  en fonction de  $r$  pour les tubes 1 ( $\square$ ), 2 ( $\blacksquare$ ) et 3 ( $\circ$ ). La ligne en trait plein représente la loi  $T_v \sim r^{-2,6}$

### 7.2.3 Modèle

Sur l'échelle du temps long de vidange, on ne voit pas les oscillations liées à la période de rentrée des bulles mais un phénomène continu de rentrée d'air. Sur cette échelle des temps longs, on modélise donc l'échange eau/air par l'ascension d'une bulle unique de taille  $r$ . Ces bulles ont été étudiées dans la partie I et leur vitesse est  $U_b = 0,2\sqrt{gP}$ . Comme  $P = 2\pi r$ , on obtient  $U_b = 0,5\sqrt{gr}$ .

Par conservation du volume, on obtient :

$$\frac{U_b}{U_{interface}} = \left(\frac{R}{r}\right)^2. \quad (7.3)$$

A partir des expressions précédentes de  $U_{interface}$ , équation (7.2), et de  $U_b$ , on déduit :

$$\boxed{T_v = \frac{L}{0,5\sqrt{gR}} \left(\frac{R}{r}\right)^{5/2}}. \quad (7.4)$$

On retrouve bien nos observations expérimentales :  $T_v$  est une fonction croissante de  $L$  et de  $R$ . Ce modèle d'échange continu conduit à une dépendance de  $T_v$  en  $r^{-5/2}$  proche de la mesure expérimentale :  $r^{-2,6}$ .

Soit  $T_\infty$  le temps que met une bulle infinie cylindrique de rayon  $R$  pour parcourir la distance  $L$  :

$$T_\infty = \frac{L}{0,5\sqrt{gR}}. \quad (7.5)$$

La loi (7.4) s'écrit alors sous une forme adimensionnée :

$$\frac{T_v}{T_\infty} = \left( \frac{R}{r} \right)^{\frac{5}{2}}. \quad (7.6)$$

## 7.2.4 Résultats expérimentaux et discussions

Temps de vidange  $T_v$

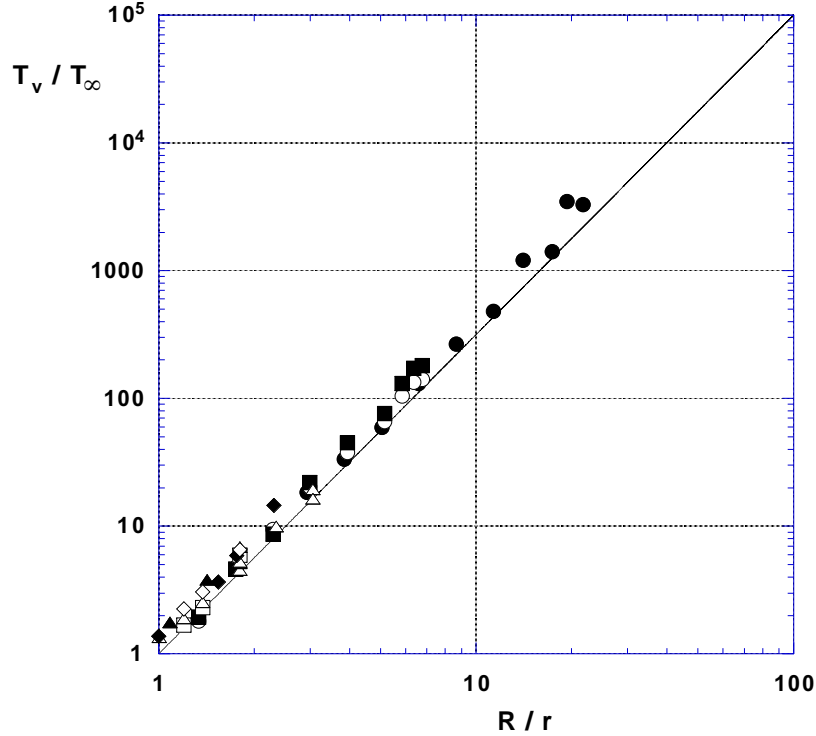


Figure 7.7:  $T_v/T_\infty$ , temps de vidange adimensionné en fonction de  $R/r$  pour le tube 1(●), le tube 2 (○), le tube 3 (■), le tube 4 (□), le tube 5 (▲), le tube 6 (△), le tube 7 (◆) et le tube 8 (◇). Les expériences ont été menées dans de l'eau. La ligne en trait plein représente la loi (7.6)

Sur la figure 7.7, nous avons représenté, en échelle logarithmique, le temps de vidange adimensionné  $T_v/T_\infty$  en fonction de  $R/r$ . Les points expérimentaux ont été obtenus dans les tubes 1 à 8 présentés dans le tableau 7.1. Le liquide utilisé pour les expériences est l'eau. L'incertitude sur la mesure du temps de vidange étant de 2 %, l'erreur relative sur le temps de vidange adimensionné est estimée à 5 %. L'erreur relative sur le rapport  $r/R$  est estimée à 4 %.

On constate que les différents tubes se concentrent sur une courbe unique. On observe que cette courbe unique est en bon accord avec la loi (7.6), présentée en trait plein continu, dans la gamme de taille de tube étudiée.

### Discussion sur les effets capillaires et visqueux

Nous avons vu, section 5.4.1 de la partie I, que dans les tubes cylindriques les bulles infinies ressentent les effets de courbure lorsque le nombre de Bond,  $Bo \equiv (r/a)^2$ , devient inférieur à 9. Dans notre cas, on s'attend donc à ce que les effets de courbure n'interviennent que lorsque le rayon d'échange devient plus petit que 3 fois la longueur capillaire. Dans le cas de l'eau, la longueur capillaire est de 2,7 mm environ. On devrait donc ressentir les effets de courbure sur le temps de vidange en dessous d'un rayon  $r = 8$  mm. Or nous ne les avons pas observé

dans nos résultats. Il existe deux raisons principales pour expliquer cela : Les effets de tension superficielle, dans l'eau, restent faibles jusqu'à  $r = 5$  mm, i.e.  $Bo = 4$ , qui est la limite des rayons  $r$  utilisés. De plus il existe une poche d'air en haut du tube qui, par sa différence de pression avec le milieu ambiant, entraîne l'apparition d'une force de rappel, identique à celle d'un ressort, non négligeable sur le volume d'eau dans le tube. Cette force de rappel introduit une nouvelle accélération sur l'interface soumise à l'instabilité de Rayleigh-Taylor et donc augmente le caractère instable de l'interface.

Nous avons vu, section 5.3, que les bulles infinies deviennent sensibles à la viscosité si le nombre de Reynolds,  $Re \equiv U_b(S/P)/\nu$ , est inférieur à 3. Ainsi pour le cas de l'eau de viscosité  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ , le nombre de Reynolds devient inférieur à 3 si le rayon d'échange devient inférieur à 0,25 mm, rayon où les effets de courbure empêchent tout échange de fluide. Nos expériences sont donc dans la bonne gamme de validité de la loi  $U_b = 0,5\sqrt{gr}$  : il n'y a pas d'effets de courbure et pas d'effets visqueux puisque le nombre de Reynolds est toujours supérieur à 3.

Avec de l'huile de silicone V100 ( $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ ), le rayon d'apparition des effets visqueux est de 5 mm. Il faut donc, pour observer des effets de la viscosité sur le temps de vidange au travers d'un rayon d'échange supérieur à 5 mm, utiliser des liquides de viscosités dynamiques supérieures à  $10^{-4} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ . Par exemple, pour des huiles silicone V1000 ( $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ ), le rayon inférieur d'apparition des effets de la viscosité sur le temps de vidange est de 25 mm ; rayon suffisamment grand pour pouvoir négliger les effets de  $\sigma$ .

### 7.3 Liquides visqueux, $r = R$

Nous nous intéressons ici à la vidange de tubes cylindriques initialement rempli de fluide visqueux. Ces tubes ont une longueur  $L$ , un rayon  $R$  et ils sont pleinement ouverts à la base. La partie I a été consacrée à la remontée de la bulle infinie qui se propage après l'ouverture de la base du tube. Cette bulle a une vitesse constante  $U_b$  et on peut alors évaluer le temps de vidange comme  $T_b = L/U_b$ . Afin de comparer cette loi aux résultats expérimentaux, nous avons monté une expérience de mesure de la masse de liquide restant dans le tube. Ce montage expérimental nous permet, tout d'abord, de montrer que la loi  $T_b = L/U_b$  n'est pas une bonne estimation du temps de vidange dans le cas des liquides visqueux. Il nous permet, ensuite, d'étudier l'épaisseur moyenne,  $\bar{e}_0$ , du film de liquide laissé à la paroi après le passage de la bulle puis la loi de drainage de ce film liquide jusqu'à la vidange complète du tube.

#### 7.3.1 Montage expérimental et protocole de mesure

La figure 7.8 présente le montage expérimental utilisé pour étudier l'évolution de la masse de liquide restant dans le tube lors de sa vidange.

Ce montage expérimental est constitué d'un tube cylindrique, de rayon et de longueur variables. Ce tube est suspendu à un capteur qui permet d'en mesurer la masse. Ce capteur fabriqué par SCAIME est un capteur de force à jauges de contraintes. Les mesures se font en flexion. Le capteur est relié à un ordinateur équipé d'une carte d'acquisition analogique qui récupère l'évolution de la masse totale du système (tube + liquide) en fonction du temps.

Le tube est fermé en haut et est rempli initialement d'un liquide. Au temps  $t = 0$ , on ouvre le bas du tube et l'on observe la vidange. Le capteur de force nous permet de mesurer la masse  $M(t)$ . L'arrivée de la bulle en haut du tube est repérée grâce à un dispositif optique. Ce dispositif est composé d'une diode laser qui, le faisceau lumineux traversant le tube, vient exciter une photodiode dont on récupère le signal. La coupure par la bulle de ce rayon laser, nous indique l'arrivée de la bulle à une distance faible, connue, de l'extrémité fermée du tube. L'instant d'arrivée  $t_b$  de la bulle au fond du tube est ensuite facilement calculé, avec une bonne

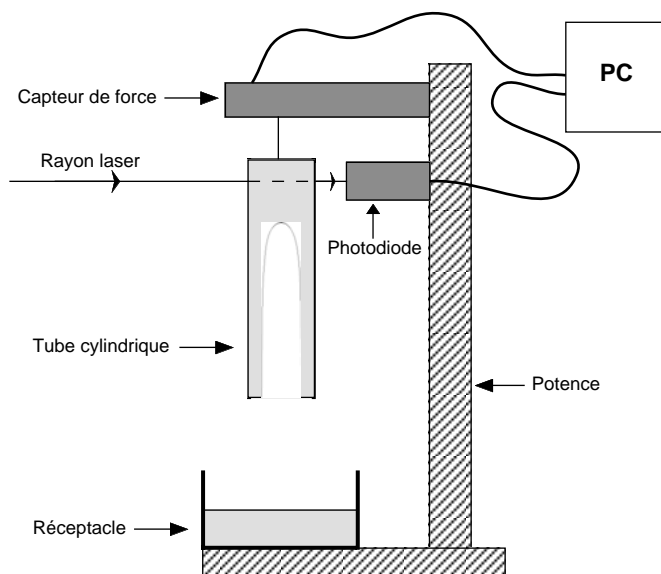


Figure 7.8: Schéma du montage de pesée utilisé pour la mesure de l'épaisseur du film

n° du tube	Longueur $L$ (m)	Rayon $R$ (m)
1	0,2950	0,0050
2	0,2950	0,0085
3	0,2950	0,0102
4	0,2950	0,0143
5	0,2950	0,0180
6	0,2950	0,0231
7	0,5800	0,0180
8	0,1500	0,0180

Table 7.2: Dimensions des tubes utilisés pour l'étude du drainage de fluide visqueux

précision car la vitesse de la bulle est également connue. Cet instant d'arrivée marque la fin de la première étape de la vidange et le début de la seconde phase de drainage du film laissé à la paroi après le passage de la bulle.

Le tableau 7.2 présente la gamme de tubes utilisés dans nos expériences. Ce sont des tubes en PVC transparent. Le rayon  $R$  des tubes varie d'un facteur 5, de 0,0050 m pour le tube 1 jusqu'à 0,0231 m pour le tube 6. La longueur  $L$  des tubes peut être multipliée par 4 entre le tube 7 et le tube 8 pour un même rayon de 0,0180 m.

Les fluides utilisés dans nos expériences sont l'eau et les huiles silicone présentées sur le tableau 2.2 de la partie I. Nous faisons varier la viscosité du fluide d'un facteur  $10^5$ . Les densités  $\rho$  des différentes huiles silicone ainsi que leurs tensions de surface  $\sigma$  sont sensiblement identiques.

Le capteur permet une mesure extrêmement précise de la masse, l'erreur relative annoncée par le fabricant est 0,033 %. A cette erreur interne au capteur, nous devons ajouter les erreurs liées à l'expérience : la perturbation due à l'ouverture du tube qui amène une erreur sur la mesure du temps  $t_0$  ; la présence de gouttes d'huile silicone sur la paroi externe des tubes, gouttes qu'il est délicat d'enlever ; l'erreur sur la mesure de  $t_b$  par le signal de la photodiode (erreur que l'on

	$M_0$ (g) masse à $t = t_0$	$M_{10}$ (g) masse à $t = t_0 + 10$ s	$M_{30}$ (g) masse à $t = t_0 + 30$ s
Expérience 1	284,75	45,40	23,70
Expérience 2	284,50	45,15	23,45
Expérience 3	284,75	45,40	24,40
Expérience 4	287,75	46,40	24,15
Valeurs moyennes	285,40	45,59	23,92
Incertitudes	0,8 %	1,7 %	2%

Table 7.3: Estimation de l'incertitude sur la mesure de  $M_{liq}(t)$ 

peut estimer à 0,1 s) ... etc

Nous avons estimé les erreurs sur la mesure de la masse en recommençant plusieurs fois la même expérience de vidange et observant les écarts entre les différentes mesures. Ainsi, pour la vidange du tube 5 rempli d'huile silicone V 1000, les résultats de quatre expérience de pesée sont reportés sur le tableau 7.3. La masse  $M_0$  correspond à la masse de liquide présente dans le tube à  $t = t_0$ . Les différentes mesures de  $M_0$  sont présentées dans la seconde colonne. Les mesures de la masse de liquide présente dans le tube à l'instant  $t = t_0 + 10$  s,  $M_{10}$ , sont présentées dans la troisième colonne et la dernière colonne correspond aux mesures de la masse de liquide à  $t = t_0 + 30$  s,  $M_{30}$ . Nous avons reporté sur ce tableau les valeurs moyennes pour chacune des masses précédentes et les différentes incertitudes sur la mesure de la masse déduites des écarts de mesure. On observe que l'incertitude sur la mesure de la masse varie de 0,7 % à 2 %. Cette valeur de 2 % nous semble être une estimation raisonnable de l'erreur relative de mesure de la masse de liquide restant dans un tube.

L'erreur relative de mesure des longueurs et des paramètres physiques des liquides est, comme précédemment, estimée à 2 %.

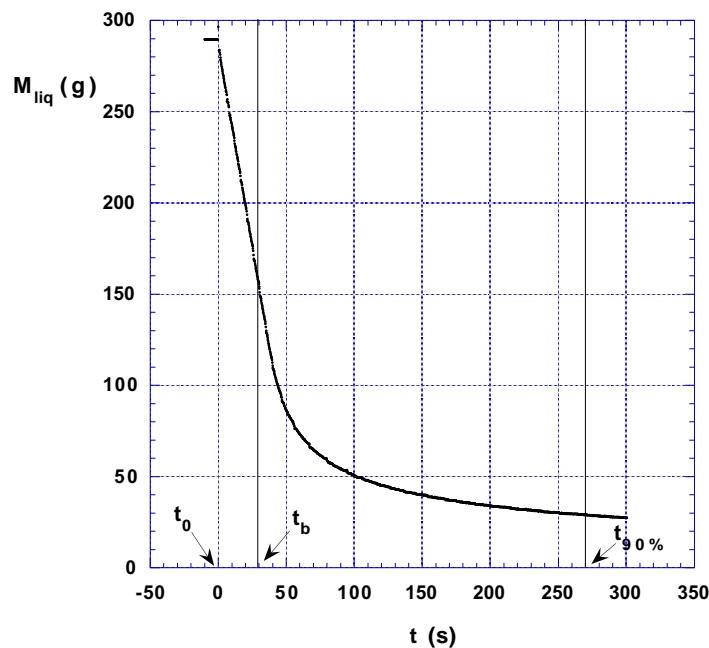


Figure 7.9: Exemple de signal de pesage  $M(t)$ . Vidange du tube 5 initialement rempli d'huile silicone V12500. L'instant  $t_0 = 0$  est l'instant de l'ouverture du tube. La bulle infinie arrive à l'extrémité fermée à  $t = t_b$ . La vidange du tube est atteinte à  $t = t_{90\%}$

La figure 7.9 présente un exemple de signal de masse en fonction du temps obtenu pour le tube 5 ( $L = 0,295$  m et  $R = 0,018$  m) et une viscosité de  $12\,500 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  (huile silicone V12500). Seule la masse de liquide est présentée sur cette figure, la masse du tube ayant été retranchée. La masse initiale de liquide dans le tube est de 290 g. A  $t_0 = 0$ , on ouvre le tube. On observe la remontée d'une bulle jusqu'au temps  $t_b = 27,5 \pm 0,1$  s où la bulle arrive en haut du tube. Pour  $t = t_b$ , comme le montre la figure 7.9, il reste encore  $158,9 \pm 0,7$  g de liquide dans le tube, soit plus de 50% de la masse initiale. Nous observons aussi sur cette figure que la diminution de la masse de liquide est rapide durant la phase de remontée de la bulle puis s'effectue sur une échelle de temps plus longue dans la deuxième phase de drainage. Outre les échelles de temps différentes, les lois de vidange sont aussi différentes dans les deux régimes, linéaire dans la première phase de la remontée de bulle et présentant une courbure dans la phase de drainage.

### 7.3.2 Étude de l'épaisseur moyenne $\bar{e}_0$ du film : $t < t_b$

Nous nous intéressons dans un premier temps à l'épaisseur moyenne,  $\bar{e}_0$ , du film de liquide laissé à la paroi après le passage de la bulle entre  $t_0$  et  $t_b$ . Cette épaisseur constitue la condition initiale de la loi de drainage qui intervient pour  $t > t_b$  et il convient à ce titre de comprendre les mécanismes qui la gouvernent.

#### Méthode de mesure de l'épaisseur $\bar{e}_0$

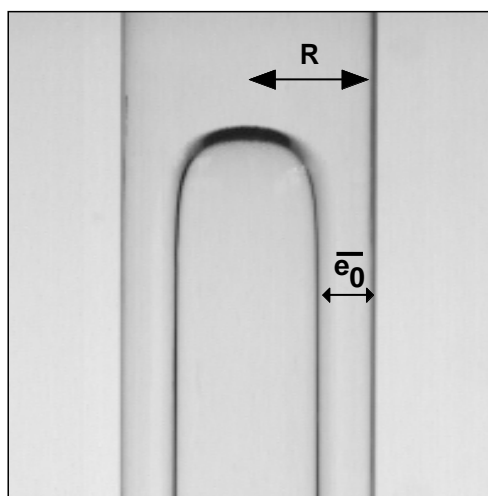


Figure 7.10: Bulle infinie dans un tube cylindrique de longueur  $L = 0,295$  m et de rayon  $R = 0,0102$  m remontant dans de l'huile silicone de forte viscosité  $\nu = 0,1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .  $U_b = 0,0004 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $Re = 1,8 \cdot 10^{-5}$

Une méthode simple pour obtenir l'épaisseur  $\bar{e}_0$  du film est la méthode optique : on photographie la bulle lors de sa remontée et l'on mesure à l'écran l'épaisseur de film liquide  $\bar{e}_0$ . La figure 7.10 montre une photographie instantanée obtenue avec une huile silicone de forte viscosité. Si le film est trop fin ou si la bulle est trop rapide, cette méthode se révèle très peu précise. De plus la géométrie cylindrique du tube réfracte les rayons lumineux et l'épaisseur apparente du film n'est pas exactement son épaisseur réelle. Ces limitations justifient l'utilisation du montage de pesée.

La seconde méthode, issue de l'étude du signal  $M(t)$ , revient à écrire l'équation d'évolution de la masse de liquide  $M_{liq}$  en fonction du temps, et de la comparer au signal obtenu. Si l'on suppose que la bulle est un cylindre de rayon  $R - \bar{e}_0$  qui remonte dans le tube à une vitesse  $U_b$  constante, on peut écrire :

$$M_{liq}(t) = M_0 - \rho\pi(R - \bar{e}_0)^2 U_b t. \quad (7.7)$$

Fluide utilisé	$\bar{e}_0$ ( $\cdot 10^{-3}$ m) méthode optique	$\bar{e}_0$ ( $\cdot 10^{-3}$ m) ajustement sur la loi (7.7)
V 100	3	3,15
V1000	5	4,92
V1000	5	5
V1000	5,1	4,86
V1000	5	4,87
V12500	5,4	5,39

Table 7.4: Comparaison des deux méthodes de mesure de l'épaisseur  $\bar{e}_0$ . Mesures effectuées dans le tube 5

La densité  $\rho$  du liquide est connue, ainsi que le rayon  $R$  du tube et  $U_b$  peut être calculée à partir des résultats de la partie I. Un ajustement de cette équation sur le signal mesuré  $M_{liq}(t)$  nous donne accès à l'épaisseur moyenne  $\bar{e}_0$  recherchée.

Le tableau 7.4 présente la comparaison entre la méthode issue du pesage et la mesure optique. Les mesures ont été faites dans le tube 5. La première colonne présente le fluide utilisé, la seconde colonne le résultat obtenu par mesure optique et la dernière colonne correspond à la mesure issue de l'étude du signal  $M_{liq}(t)$ . Cette comparaison a été effectuée pour des épaisseurs  $\bar{e}_0$ , variant de  $3 \cdot 10^{-3}$  m à  $5,5 \cdot 10^{-3}$  m. La méthode de l'ajustement donne des résultats s'écartant à moins de 5 % de ceux de la méthode optique que l'on suppose être précise dans cette gamme d'épaisseur. Nous utilisons donc dans le reste de l'étude, la méthode de l'ajustement du signal  $M_{liq}(t)$  pour la mesure de l'épaisseur  $\bar{e}_0$ .

L'incertitude sur la mesure de  $\bar{e}_0$  peut être estimée en observant les différents résultats de mesure de  $\bar{e}_0$  dans le tube 5 avec de l'huile silicone V1000, présentés sur le tableau 7.4 : l'épaisseur  $\bar{e}_0$  a une valeur moyenne de  $4,91 \cdot 10^{-3}$  m pour un écart maximal de  $0,09 \cdot 10^{-3}$  m. L'incertitude sur la mesure de  $\bar{e}_0$  est donc de 2 %.

#### Observations expérimentales

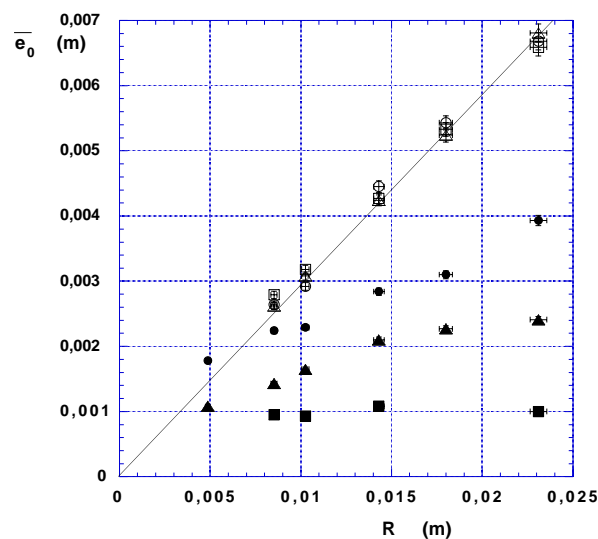


Figure 7.11: Epaisseur  $\bar{e}_0$  du film de fluide en fonction du rayon  $R$  du tube pour différentes viscosités. ■ : huile V5; ▲ : huile V20; ● : huile V100; □ : huile V1000; △ : huile V12500; ○ : huile V100000. Les mesures ont été effectuées dans les tubes 1 à 6. La ligne en trait plein représente la loi  $\bar{e}_0 = 0,3 R$

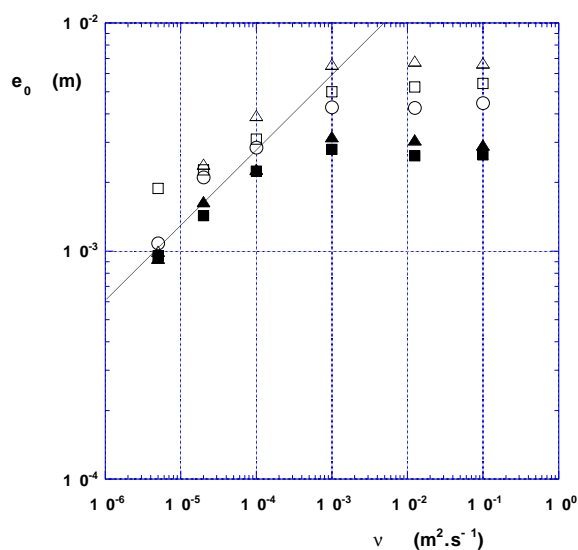


Figure 7.12: Epaisseur  $\bar{e}_0$  du film de fluide en fonction de la viscosité pour différents rayons du tube. ■ : tube 2; ▲ : tube 3; ○ : tube 4; □ : tube 5; △ : tube 6

L'influence du rayon  $R$  du tube sur l'épaisseur  $\bar{e}_0$  est présentée sur la figure 7.11. Sur cette figure, on présente l'épaisseur  $\bar{e}_0$  en fonction de  $R$ . Les mesures d'épaisseur ont été menées dans des tubes de même longueur  $L = 0,295$  m et de rayon  $R$  différents (tubes de 1 à 6). Les liquides utilisés sont des huiles silicone de viscosité variant de  $5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  à  $0,1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Pour chacune des viscosités choisies, on constate que  $\bar{e}_0$  augmente avec le rayon  $R$  du tube sauf pour la plus petite viscosité (huile V5) où l'épaisseur est constante. La loi d'évolution  $\bar{e}_0(R)$  n'est pas la même selon que l'on se situe dans le domaine des bulles visqueuses ( $Re < 1$ ) ou que l'on soit dans le domaine des bulles inertielles ( $Re > 10$ ).

Dans le cas des bulles visqueuses, c'est à dire des huiles V1000, V12500 et V100000 (symboles vides), la variation de  $\bar{e}_0$  avec  $R$  est linéaire et la mesure de la pente donne 0,30. De plus, on observe que  $\bar{e}_0$  est indépendante de  $\nu$ .

Pour des viscosités inférieures (symboles pleins), la loi de variation de  $\bar{e}_0$  avec  $R$  est croissante. Dans ce régime, l'épaisseur augmente avec  $\nu$  puisqu'elle passe de 0,001 m à 0,004 m entre les points de mesure dans l'huile V5 et ceux dans l'huile V100 pour  $R = 0,0231$  m. L'épaisseur augmente aussi avec  $R$  : dans de l'huile V100, elle passe de 0,0018 m pour  $R = 0,005$  m à 0,0040 m pour  $R = 0,0231$  m.

La figure 7.12 confirme l'existence de deux comportements différents de l'épaisseur  $\bar{e}_0$  suivant la viscosité. Sur cette figure nous avons représenté en échelle logarithmique, pour différents rayons de tube, l'épaisseur  $\bar{e}_0$  en fonction de la viscosité  $\nu$ . Les 5 tubes utilisés ont la même longueur  $L = 0,295$  m et un rayon intérieur  $R$  qui varie de 0,0085 m pour le tube 2 jusqu'à 0,0231 m pour le tube 6. On remarque que pour des viscosités inférieures à  $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , l'épaisseur du film,  $\bar{e}_0$ , augmente avec la viscosité  $\nu$  suivant une loi de puissance  $\bar{e}_0 \sim \nu^\alpha$  commune à tout les tubes. Cette loi est présentée en trait plein sur la figure 7.12. Une régression sur nos mesures montre que  $\alpha \simeq 0,3$ .

Pour des viscosité supérieures à  $10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\bar{e}_0$  atteint un plateau et devient indépendante de  $\nu$ . Le plateau atteint est d'autant plus élevé que le rayon du tube est grand, ainsi pour une viscosité de  $0,1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , l'épaisseur atteinte passe de 0,0026 m pour le tube 2 ( $R = 0,0085$  m) à 0,0068 m pour le tube 6 ( $R = 0,0231$  m).



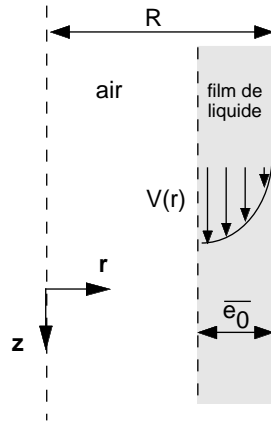


Figure 7.13: Schéma de principe du modèle

## Analyse théorique

Nous allons tout d'abord déterminer la vitesse  $u$ , vitesse moyenne du liquide dans l'épaisseur  $\bar{e}_0$ .

Le modèle est schématisé sur la figure 7.13. Le champ de vitesse dans le film, noté  $V(r)$ , est supposé stationnaire et indépendant de  $z$  dans ce premier modèle. On supposera que  $\bar{e}_0$  est petit devant  $R$  : l'ordre de grandeur de  $\bar{e}_0/R$  peut être évalué à partir de la figure 7.11. Pour un rayon  $R = 0,0231$  m, l'épaisseur moyenne  $\bar{e}_0$  varie de 0,0010 m pour un liquide de faible viscosité (huile silicone V5) à 0,0068 m pour de l'huile V100 000. Ainsi le rapport  $\bar{e}_0/R$  varie de 0,04 à 0,15 au maximum. Ceci montre que notre hypothèse,  $\bar{e}_0$  petit devant  $R$ , est acceptable. Nous faisons, de plus, l'hypothèse que l'écoulement dans le film est régit par un équilibre viscosité-gravité. Cette hypothèse réduit l'équation de Navier-Stokes à l'équation de lubrification :

$$\nu \frac{d^2 V}{dr^2} = g, \quad (7.8)$$

qui doit être résolue avec les conditions aux limites :

si  $r = R - \bar{e}_0$ ,

$$\frac{dV}{dr} = 0, \quad (7.9)$$

et si  $r = R$ ,

$$V = 0. \quad (7.10)$$

Ces hypothèses conduisent à un profil d'écoulement de type Poiseuille. En intégrant l'équation (7.8) à l'aide des conditions aux limites (7.9) et (7.10), on obtient le résultat suivant pour  $R - \bar{e}_0 < r < R$  :

$$V(r) = \frac{g r^2}{2\nu} \left[ 1 - 2 \frac{R - \bar{e}_0}{r} + \frac{R^2}{r^2} \left( 1 - 2 \frac{\bar{e}_0}{R} \right) \right] \quad (7.11)$$

Soit  $u$  la vitesse moyenne dans l'écoulement,  $u$  est définie par :

$$[\pi R^2 - \pi(R - \bar{e}_0)^2]u = 2\pi \int_{R-\bar{e}_0}^R r V(r) dr. \quad (7.12)$$

Cette nouvelle intégration donne comme résultat :

$$u = \frac{1}{3} \frac{g \bar{e}_0^2}{\nu} \left( \frac{1 - \frac{5}{8} \frac{\bar{e}_0}{R}}{1 - \frac{1}{2} \frac{\bar{e}_0}{R}} \right). \quad (7.13)$$

La discussion précédente sur l'ordre de grandeur de  $\bar{e}_0/R$  nous permet d'évaluer le terme entre parenthèse de l'équation (7.13) à 1 :

$$u \approx \frac{1}{3} \frac{g\bar{e}_0^2}{\nu}. \quad (7.14)$$

Connaissant la vitesse moyenne dans le film liquide, nous pouvons entreprendre le calcul de  $\bar{e}_0$ . Si  $\bar{e}_0$  est petit devant  $R$ , on peut écrire la loi de conservation de la masse lors de la remontée de la bulle sous la forme :

$$2\pi R \bar{e}_0 u = \pi R^2 U_b, \quad (7.15)$$

Si l'on introduit l'équation (7.14) pour éliminer l'inconnue  $u$ , on obtient une loi de variation de  $\bar{e}_0$  en fonction de  $R$  et  $\nu$  :

$$\boxed{\frac{\bar{e}_0}{R} = \left( \frac{3 U_b \nu}{2 g R^2} \right)^{\frac{1}{3}}}. \quad (7.16)$$

Ce calcul peut être retrouvé dans le livre de G. K. Batchelor [6] sur la dynamique des fluides datant de 1967.

### Résultats expérimentaux et discussions

La loi (7.16) est valable quelle que soit la valeur pour  $U_b$ . Si le nombre de Reynolds est supérieur à 10, on a une bulle inertielle et sa vitesse d'ascension est  $U_b = 0,5 \sqrt{gR}$ . Ainsi la loi (7.16) devient :

$$\frac{\bar{e}_0}{R} = \left( \frac{3}{2} 0,5 \frac{\sqrt{gR}\nu}{gR^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (7.17)$$

Soit

$$\frac{\bar{e}_0}{R} \simeq \left( \frac{3}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{\nu^2}{gR^3} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (7.18)$$

La figure 7.14 présente l'épaisseur moyenne mesurée  $\bar{e}_0$  adimensionnée par  $R$  en fonction de  $(\nu^2/(gR^3))^{1/6}$  pour des bulles remontant dans les 6 premiers tubes du tableau 7.2. Le rayon  $R$  varie donc de 0,0050 m à 0,0231 m pour une même longueur de tube  $L = 0,295$  m. Les liquides sont de faible viscosité : ■ : huile silicone V5, ▲ : V20 et ○ : V100. Le nombre de Reynolds minimal est 11.

L'incertitude expérimentale sur  $\bar{e}_0/R$  est estimée à 4 % et celle sur  $(\nu^2/(gR^3))^{1/6}$  est estimée à 3 %.

On constate sur la figure 7.14 que nos résultats expérimentaux sont proches de la loi (7.18) présentée en trait plein sur la figure. Cela implique que  $\bar{e}_0$  varie en  $\nu^{1/3}$  proche de la loi expérimentale  $\nu^{0,3}$  issue de nos observations expérimentales, section 7.3.2.

On observe néanmoins un écart, allant jusqu'à 11 % pour les plus grand rapports  $\bar{e}_0/R$ , entre nos résultats expérimentaux et la loi (7.18). Cet écart n'est pas expliqué par nos erreurs expérimentales. L'explication la plus plausible est que notre hypothèse  $\bar{e}_0/R \ll 1$  n'est plus valable pour un rapport  $\bar{e}_0/R > 0,15$ . Si  $\bar{e}_0/R = 0,15$ , le terme entre parenthèse de l'équation (7.13) vaut 0,9 et notre modèle apporte une erreur de 10 % sur l'estimation de  $\bar{e}_0/R$  ce qui est suffisant pour expliquer l'écart entre la loi (7.16) et nos résultats expérimentaux.

Si le nombre de Reynolds est inférieur à 1, on a une bulle visqueuse et sa vitesse d'ascension est  $U_b = 0,035 \frac{gR^2}{\nu}$ . On a donc :

$$\frac{\bar{e}_0}{R} = \left( \frac{3}{2} 0,035 \frac{gR^2\nu}{gR^2\nu} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (7.19)$$

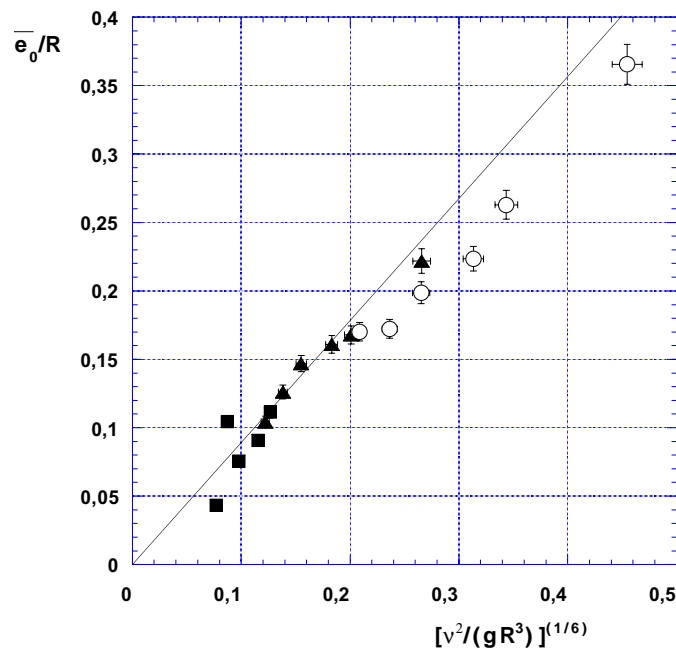


Figure 7.14:  $\bar{e}_0/R$  en fonction de  $(\nu^2/(gR^3))^{1/6}$  dans des tubes de longueur  $L = 0,295$  m et de rayon  $R$  variant de 0,0050 m à 0,0231 m. ■ : huile V5; ▲ : huile V20; ○ : huile V100. La ligne en trait plein représente la loi (7.18)

Soit

$$\frac{\bar{e}_0}{R} = \left(\frac{3}{2} 0,035\right)^{\frac{1}{3}} = 0,37. \quad (7.20)$$

On retrouve bien nos résultats expérimentaux pour des liquides visqueux : l'épaisseur  $\bar{e}_0$  est indépendante de la viscosité  $\nu$  et varie de manière linéaire en  $R$ . La loi (7.20) s'écrit  $\bar{e}_0 = 0,37 R$ , elle est relativement proche de la loi expérimentale observée sur la figure 7.11 :  $\bar{e}_0 = 0,30 R$  compte tenu des erreurs de mesure et de la validité de l'hypothèse d'une épaisseur petite devant  $R$ , notamment dans le cas des bulles visqueuses.

L'épaisseur du film de liquide en fin de remontée de bulle étant non négligeable, le temps de vidange d'un tube rempli de liquide visqueux (par exemple des huiles de silicones V1000, V12500 et V100000) ne correspond pas au temps de remontée de cette bulle. L'étude du temps de drainage d'un tube est présentée dans la section suivante.

### 7.3.3 Drainage d'un film de liquide visqueux : $t > t_b$

#### Montage expérimental

Le montage expérimental est le même que celui utilisé pour étudier l'épaisseur du film laissé par la bulle lors de sa remontée. Seules les échelles de temps changent : le temps  $t_0$  d'ouverture du tube est l'origine des temps pour la première étude. Ici, l'origine des temps est le temps  $t_b$  donné par le signal de la photodiode qui repère l'arrivée de la bulle au sommet du tube. L'acquisition du signal  $M_{liq}(t)$  a duré jusqu'à plusieurs heures pour les plus gros tubes et l'huile la plus visqueuse, l'arrêt de cette acquisition est décidé lorsque plus de 90% de la masse initiale a été drainée hors du tube.

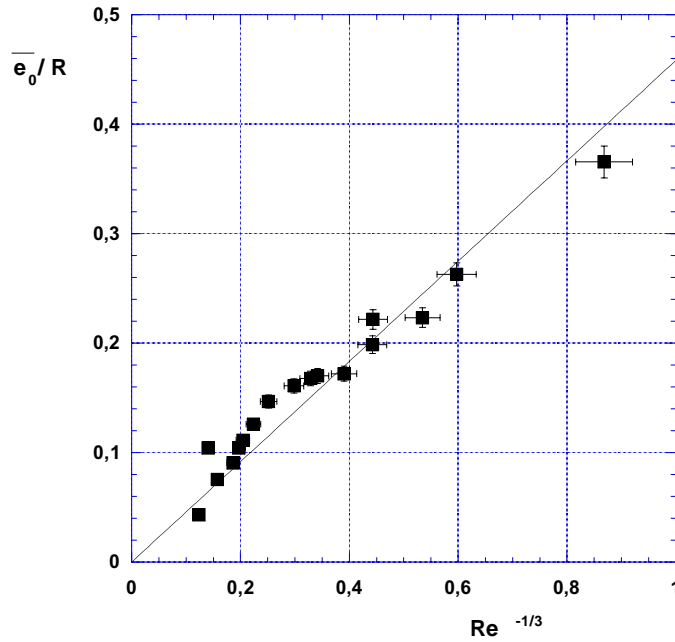


Figure 7.15:  $\bar{e}_0/R$  en fonction de  $Re^{-1/3}$  dans les tubes de 1 à 6 pour des bulles remontant dans des liquides de faible viscosité :  $Re > 10$ . La ligne en trait plein représente la loi (7.25) avec  $K_{10} = 0,46$

#### Observations expérimentales

On a montré dans l'étude précédente que l'épaisseur moyenne du film laissée aux parois par la bulle varie comme :

$$\frac{\bar{e}_0}{R} \sim \left( \frac{U_b \nu}{gR^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (7.21)$$

et le nombre de Reynolds varie selon la loi :

$$Re \sim \frac{U_b R}{\nu} \text{ d'où : } \nu \sim \frac{U_b R}{Re} \quad (7.22)$$

Si le nombre de Reynolds est supérieur à 10, la vitesse  $U_b$  de la bulle est  $U_b \sim \sqrt{gR}$ , on en déduit que :

$$\frac{\bar{e}_0}{R} \sim \left( \frac{\sqrt{gR} \sqrt{gR} R}{Re g R^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (7.23)$$

Ce qui se réduit à :

$$\frac{\bar{e}_0}{R} \sim \frac{1}{Re^{1/3}}. \quad (7.24)$$

On a donc :

$$\frac{\bar{e}_0}{R} = \frac{K_{10}}{Re^{1/3}}. \quad (7.25)$$

La figure 7.15 présente l'épaisseur adimensionnée par le rayon  $\bar{e}_0/R$  en fonction de  $Re^{-1/3}$  dans les tubes 1 à 6 :  $L = 0,295$  m et  $R$  variant de 0,0050 m à 0,0231 m, avec des liquides de faibles viscosités : huiles V5, v20, V100 tels que  $Re > 10$ .

L'incertitude sur  $Re^{-1/3}$  est estimée à 3 %.

Ce graphique nous permet de mesurer le coefficient  $K_{10}$  de l'équation (7.25). L'ajustement linéaire sur nos points de mesure montre que  $K_{10} = 0,46$ .

On peut maintenant estimer le rapport entre la masse de liquide dans le film après le passage de la bulle sur la masse initiale en terme de nombre de Reynolds. En effet, la masse de liquide

contenue dans le film est  $M_{film} \simeq \rho 2\pi R L \bar{e}_0$  et la masse initiale de liquide est  $M_0 \simeq \rho \pi R^2 L$ . Le rapport des masses est donc égal à :

$$\frac{M_{film}}{M_0} \simeq 2 \frac{\bar{e}_0}{R}. \quad (7.26)$$

A l'aide de l'équation (7.25), on peut écrire que :

$$\frac{M_{film}}{M_0} \simeq 2 \frac{K_{10}}{Re^{1/3}}. \quad (7.27)$$

90% de la masse initiale a été drainée à l'arrivée de la bulle si  $M_{film}/M_0$  est inférieur à 0,1 ; c'est à dire, si l'on suit le résultat de l'équation (7.27) avec  $K_{10} = 0,46$ , lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à 780.

On peut donc conclure de nos résultats que si le nombre de Reynolds est inférieur à 780, le temps long de vidange du tube ne peut plus être modélisé par un temps de remontée de bulle. Il apparaît donc indispensable d'étudier le drainage du film de liquide laissé par le passage de la bulle.

### Présentation du modèle

Le schéma de principe du modèle est présenté sur la figure 7.16. Le tube a un rayon  $R$  et une longueur  $L$ . A  $t = 0$ , l'épaisseur du film liquide est  $e_0$ . L'épaisseur est notée  $e$  et sa moyenne  $\bar{e}$ . L'axe des  $z$  est représenté sur le schéma : le fond du tube se situe à  $z = 0$  tandis que la sortie est en  $z = L$ .

### Premier modèle

Le premier modèle de l'évolution de l'épaisseur  $\bar{e}$  lors de la phase de drainage suppose que cette épaisseur de film est variable dans le temps mais ne dépend pas de la hauteur  $z$ .

Notre modèle est basé sur une hypothèse quasi statique : à chaque instant, le film a une épaisseur moyenne  $\bar{e}$  et la variation de volume du film pendant  $dt$  est égale au débit volumique de liquide drainé dans le film avec la vitesse moyenne  $u$  définie par l'équation (7.14).

Si l'épaisseur  $\bar{e}$  du film est petite devant le rayon  $R$  du tube, la surface concernée par le film est  $S = 2\pi R \bar{e}$  et le volume du film est  $V = LS$ . La variation du volume sur le temps  $dt$  est de :

$$\dot{V} = -L\dot{S} = -L2\pi R\dot{\bar{e}}. \quad (7.28)$$

Or on peut aussi écrire que

$$\dot{V} = S u, \quad (7.29)$$

En utilisant l'équation (7.14), on obtient une équation différentielle pour l'évolution de  $\bar{e}$  :

$$-\frac{d\bar{e}}{dt} = \frac{1}{3} \frac{g}{\nu L} \bar{e}^3, \quad (7.30)$$

qui peut s'écrire :

$$-\frac{d\bar{e}}{\bar{e}^3} = \frac{1}{3} \frac{g}{\nu L} dt. \quad (7.31)$$

Si on suppose qu'à  $t = 0$ , on a  $\bar{e} = \bar{e}_0$ , l'intégration, entre  $t = 0$  et  $t$ , de l'équation (7.31) nous permet d'écrire que :

$$\boxed{\left(\frac{\bar{e}}{\bar{e}_0}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{t}{\tau}}}, \quad (7.32)$$

où  $\tau$  a la dimension d'un temps et est égal à :

$$\tau = 1,5 \frac{\nu L}{g \bar{e}_0^2}. \quad (7.33)$$

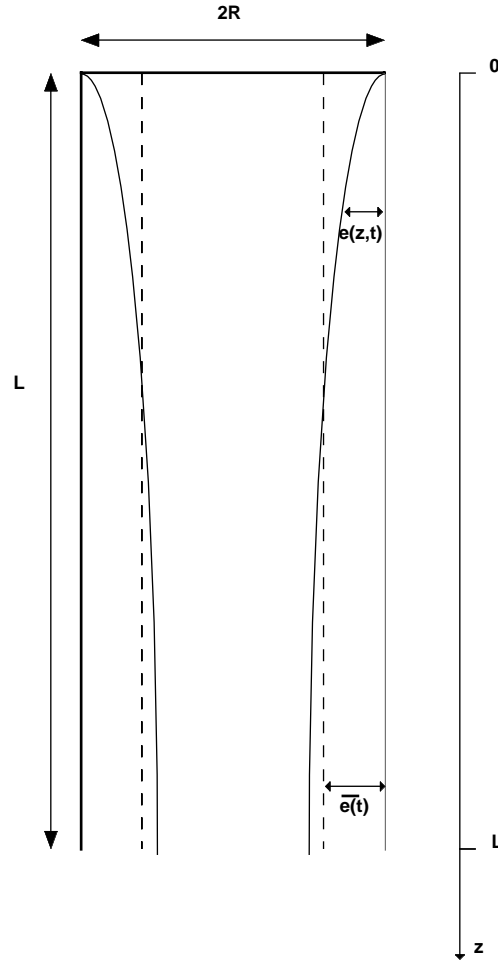


Figure 7.16: Schéma de présentation des paramètres des modèles

### Comparaison modèle-expérience

Avant de comparer ce modèle à nos résultats expérimentaux, il convient de vérifier que notre connaissance de la masse de liquide  $M_{liq}$  en fonction du temps nous permet bien de mesurer l'épaisseur moyenne du film. On suppose que l'origine des temps est l'instant où la bulle arrive en haut du tube et que à cet instant :  $t = 0$  et  $\bar{e} = \bar{e}_0$ . La masse restant dans le tube à l'instant  $t$  est donc :

$$M_{liq}(t) = \rho L (\pi R^2 - \pi (R - \bar{e})^2), \quad (7.34)$$

$$M_{liq}(t) = 2\pi\rho RL\bar{e} \left(1 - \frac{\bar{e}}{2R}\right) \quad (7.35)$$

et

$$M_{liq}(t = 0) = M_0 = 2\pi\rho RL\bar{e}_0 \left(1 - \frac{\bar{e}_0}{2R}\right). \quad (7.36)$$

On a donc :

$$\frac{M_{liq}}{M_0} = \frac{\bar{e}}{\bar{e}_0} \left( \frac{1 - \frac{\bar{e}}{2R}}{1 - \frac{\bar{e}_0}{2R}} \right) \quad (7.37)$$

et le calcul de  $\bar{e}/\bar{e}_0$  est immédiat :

$$\frac{\bar{e}}{\bar{e}_0} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \frac{\bar{e}_0}{2R} (1 - \frac{\bar{e}_0}{2R}) \frac{M_{liq}}{M_0}}}{2 \frac{\bar{e}_0}{2R}} \quad (7.38)$$

A partir du signal de masse de liquide restant dans le tube, on peut donc remonter à la mesure du rapport de l'épaisseur moyenne sur l'épaisseur de film initiale. La figure 7.17 présente le rapport des épaisseurs mesurées à partir du signal de masse en fonction de  $t/\tau_0$  où  $\tau_0$  est le temps caractéristique défini comme suit :

$$\tau_0 = \frac{\nu L}{g \bar{e}_0^2}. \quad (7.39)$$

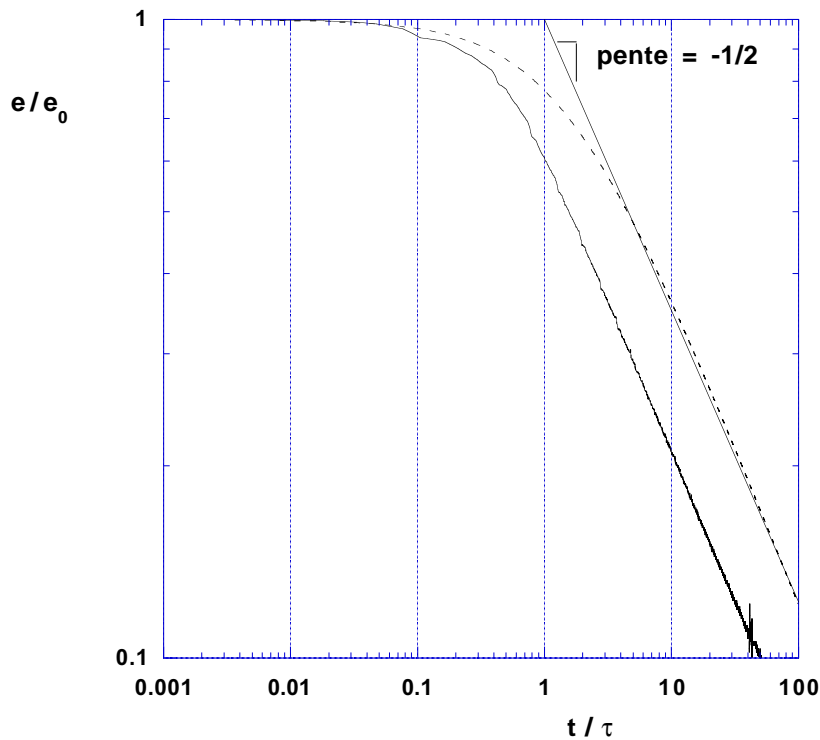


Figure 7.17: Rapport des épaisseurs  $\bar{e}/\bar{e}_0$  en fonction du temps adimensionné par  $\tau_0$ , équation (7.39), pour le tube 5 et de l'huile de Silicone V12500. Ligne pleine : résultats expérimentaux ; Ligne pointillé : premier modèle

Les résultats expérimentaux en trait plein ont été obtenus avec de l'huile silicone V12500 durant le drainage du tube 5 présenté sur le tableau 7.2. Le trait pointillé représente la loi (7.32) issue du premier modèle.

On remarque que le modèle retrouve le bon comportement de  $\bar{e}/\bar{e}_0$  en fonction de temps pour les temps longs :  $\bar{e}/\bar{e}_0$  varie en  $1/\sqrt{t}$ . Par contre, ce modèle surestime le temps caractéristique d'établissement du régime des temps longs, la valeur de  $\tau$  est inférieure à celle prévue par le premier modèle. Il est donc nécessaire de construire un second modèle. Pour cela nous allons abandonner notre hypothèse d'une épaisseur indépendante de la hauteur et considérer un profil de film non uniforme.

#### Second modèle

Le second modèle suppose que  $e$  dépend de la hauteur  $z$  et du temps :  $e(z, t)$ . La surface  $S$  concernée par le film de liquide est  $S = 2\pi R e$ . Elle dépend elle aussi de la hauteur  $z$ . Un petit

élément de volume de ce film de liquide s'écrit  $\delta V = S dz = 2\pi R e dz$ . Dans ce volume  $\delta V$ , il y a une masse  $\delta M$  de liquide :  $\delta M = \rho 2\pi R e dz$ . La variation de cette masse au cours du temps s'écrit :

$$\frac{d\delta M}{dt} = \rho 2\pi R \dot{e} dz. \quad (7.40)$$

Cette variation de la masse dans le volume  $\delta V$  est égale à la différence des débits massiques entre  $z$  et  $z + dz$  :

$$\frac{d\delta M}{dt} = Q(z) - Q(z + dz) = -dz \frac{dQ}{dz}. \quad (7.41)$$

On a donc, pour une épaisseur  $e(z, t)$ , exprimé la variation du débit massique en fonction de  $z$  :

$$\frac{dQ}{dz} = \rho 2\pi R \dot{e}. \quad (7.42)$$

On peut aussi exprimer le débit massique dans le film en fonction de la vitesse moyenne du liquide :

$$Q(e(z, t)) = \rho 2\pi R e u, \quad (7.43)$$

où  $u$  est définie par l'équation (7.14) :

$$u \approx \frac{1}{3} \frac{g e^2}{\nu}. \quad (7.44)$$

On a alors une expression de  $Q$  qui vaut :

$$Q = \frac{2}{3} \pi R \rho \frac{g e^3}{\nu} \quad (7.45)$$

et le calcul de la variation de  $Q$  avec la hauteur  $z$  est immédiat :

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{2}{3} \pi \rho \frac{g R}{\nu} \frac{\partial e^3}{\partial z}. \quad (7.46)$$

De l'égalité des relations 7.42 et 7.46, on déduit une équation d'évolution de  $e$  :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{g}{3\nu} \frac{\partial e^3}{\partial z} = 0. \quad (7.47)$$

La résolution de cette équation permet d'exprimer la forme de la variation de l'épaisseur  $e$ . Dans la suite du calcul, les longueurs et les temps sont adimensionnés par une longueur  $\mathcal{L}_3$  et un temps  $\tau$  tels que  $\mathcal{L}_3 \tau (g/\nu) = 1$ . Les grandeurs adimensionnées sont notées dans la suite avec une  $\tilde{\phantom{x}}$ .

L'équation (7.47) devient donc :

$$\frac{\partial \tilde{e}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{e}^3}{\partial \tilde{z}} = 0. \quad (7.48)$$

Si l'on applique la méthode de séparation des variables, on suppose que  $\tilde{e}(\tilde{z}, \tilde{t}) = f(\tilde{t}) \cdot h(\tilde{z})$  :

$$h f' + \frac{1}{3} f^3 \frac{dh^3}{d\tilde{z}} = 0. \quad (7.49)$$

$$\frac{f'}{f^3} + \frac{1}{3} \frac{1}{h} \frac{dh^3}{d\tilde{z}} = 0. \quad (7.50)$$

Cette équation est vérifiée si :

$$\frac{f'}{f^3} = -\frac{\lambda}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} \frac{1}{h} \frac{dh^3}{d\tilde{z}} = \frac{\lambda}{2} \quad (7.51)$$



ce qui permet de déterminer  $f(\tilde{t})$  et  $h(\tilde{z})$  :

$$f(\tilde{t}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda\tilde{t} + C_t}} \quad \text{et} \quad h(\tilde{z}) = \sqrt{\lambda\tilde{z} + C_z}. \quad (7.52)$$

La solution générale pour  $\tilde{e}(\tilde{z}, \tilde{t})$  peut être mise sous la forme d'une somme de terme du type :

$$\tilde{e}(\tilde{z}, \tilde{t}) = \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda\tilde{z} + C_z}{\lambda\tilde{t} + C_t}}. \quad (7.53)$$

On prendra pour la suite  $\lambda = 1$  : on ne considère qu'un terme de la somme définissant  $e$ ,  $C_z = 0$  : l'épaisseur est nulle à  $z = 0$ , pour tout  $t$ , et  $C_t = 1$  afin d'éviter la singularité en  $\tilde{t} = 0$ . On a donc, sous la forme adimensionnée :

$$\tilde{e}(\tilde{z}, \tilde{t}) = \sqrt{\frac{\tilde{z}}{\tilde{t} + 1}}. \quad (7.54)$$

On remarque que le profil du film,  $\tilde{e}(\tilde{z}, \tilde{t})$ , varie, à  $\tilde{t} = 0$ , en racine carré de la hauteur  $\tilde{z}$  :  $\tilde{e}_0 = \sqrt{\tilde{z}}$ .

On va chercher maintenant à déterminer la grandeur  $\mathcal{L}_3$  d'adimensionnement des longueurs. Pour cela nous allons calculer le volume  $V$  de liquide présent dans le film à l'instant  $t$  :

$$V = 2\pi R \int_0^L e(z, t) dz, \quad (7.55)$$

ce qui sous une forme adimensionnée s'écrit :

$$\frac{V}{2\pi R \mathcal{L}_3^2} = \int_0^{\tilde{L}} \tilde{e}(\tilde{z}, \tilde{t}) d\tilde{z}, \quad (7.56)$$

où  $\tilde{L} = L/\mathcal{L}_3$ . L'expression de  $\tilde{e}(\tilde{z}, \tilde{t})$  obtenue précédemment, équation (7.54), nous permet d'écrire que :

$$\frac{V}{2\pi R \mathcal{L}_3^2} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{\tilde{t} + 1}} \tilde{L}^{3/2}. \quad (7.57)$$

A  $t=0$ , le volume est  $V_0$  :

$$\frac{V_0}{2\pi R \mathcal{L}_3^2} = \frac{2}{3} \tilde{L}^{3/2}, \quad (7.58)$$

d'où, en utilisant la définition de  $\tilde{L}$ , on peut tirer une expression du volume initial :

$$V_0 = \frac{2}{3} 2\pi R L \sqrt{L \mathcal{L}_3}. \quad (7.59)$$

Or on écrit plus simplement le volume initial de liquide dans le film sous la forme :

$$V_0 = 2\pi R L \bar{e}_0, \quad (7.60)$$

où  $\bar{e}_0$  est l'épaisseur moyenne du film de liquide à l'instant initial. De l'égalité des relations (7.59) et (7.60), on sort la relation suivante :

$$\bar{e}_0 = \frac{2}{3} \sqrt{L \mathcal{L}_3}, \quad (7.61)$$

d'où l'on extrait la définition de la longueur d'adimensionnement du problème :

$$\mathcal{L}_3 = \frac{9}{4} \frac{\bar{e}_0^2}{L}. \quad (7.62)$$

et celle du temps  $\tau$  d'adimensionnement du temps :

$$\tau = \frac{4 \nu L}{9 g \bar{e}_0^2}. \quad (7.63)$$

On peut maintenant reprendre l'équation (7.47) d'évolution de l'épaisseur du film et l'intégrer sur  $L$  de façon à avoir une équation d'évolution pour  $\bar{e}$ , épaisseur moyenne du film définie comme :

$$\bar{e}(t) = \frac{1}{L} \int_0^L e(z, t) dz \quad (7.64)$$

On a donc :

$$\int_0^L \frac{\partial e}{\partial t} dz + \frac{1}{3} \frac{g}{\nu} \int_0^L \frac{\partial e^3}{\partial z} dz = 0, \quad (7.65)$$

$$\frac{d\bar{e}}{dt} + \frac{1}{3} \frac{g}{\nu L} [e^3(z=L) - e^3(z=0)] = 0. \quad (7.66)$$

Or  $e^3(z=0) = 0$  et :

$$e^3(z=L) = \left( \mathcal{L}_3 \sqrt{\frac{L/\mathcal{L}_3}{1+t}} \right)^3 \quad (7.67)$$

On va exprimer  $e^3(z=L)$  en fonction de  $\bar{e}$ , pour faire cela nous devons revenir à la définition de  $\bar{e}$ , équation (7.64), et en prolonger le calcul connaissant l'expression de  $e(z, t)$ , équation (7.54), on a, en adimensionnant les longueurs par  $\mathcal{L}_3$  :

$$\bar{e}(t) = \frac{\mathcal{L}_3^2}{L} \int_0^{\tilde{L}} \tilde{e}(\tilde{z}, \tilde{t}) d\tilde{z}, \quad (7.68)$$

$$\bar{e}(t) = \frac{\mathcal{L}_3^2}{L} \frac{1}{\sqrt{1+t}} \frac{2}{3} \tilde{L}^{3/2}, \quad (7.69)$$

$$\bar{e}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} \frac{2}{3} \sqrt{L \mathcal{L}_3}. \quad (7.70)$$

A partir des équations (7.67) et (7.70), on peut exprimer  $e^3(z=L)$  en fonction de l'épaisseur moyenne du film liquide :

$$e^3(z=L) = \frac{27}{8} \bar{e}^3(t). \quad (7.71)$$

L'équation (7.66) d'évolution de l'épaisseur moyenne s'écrit donc :

$$\frac{d\bar{e}}{dt} + \frac{1}{3} \frac{27}{8} \frac{g}{\nu L} \bar{e}^3 = 0, \quad (7.72)$$

elle a pour solution, si à  $t=0$  on note  $\bar{e} = \bar{e}_0$  :

$$\boxed{\left( \frac{\bar{e}}{\bar{e}_0} \right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{t}{\tau}}}, \quad (7.73)$$

où  $\tau$  a la dimension d'un temps et est égal à :

$$\tau = 0,44 \frac{\nu L}{g \bar{e}_0^2}. \quad (7.74)$$

La différence entre les deux modèles se situe donc dans la valeur du temps caractéristique  $\tau$ .

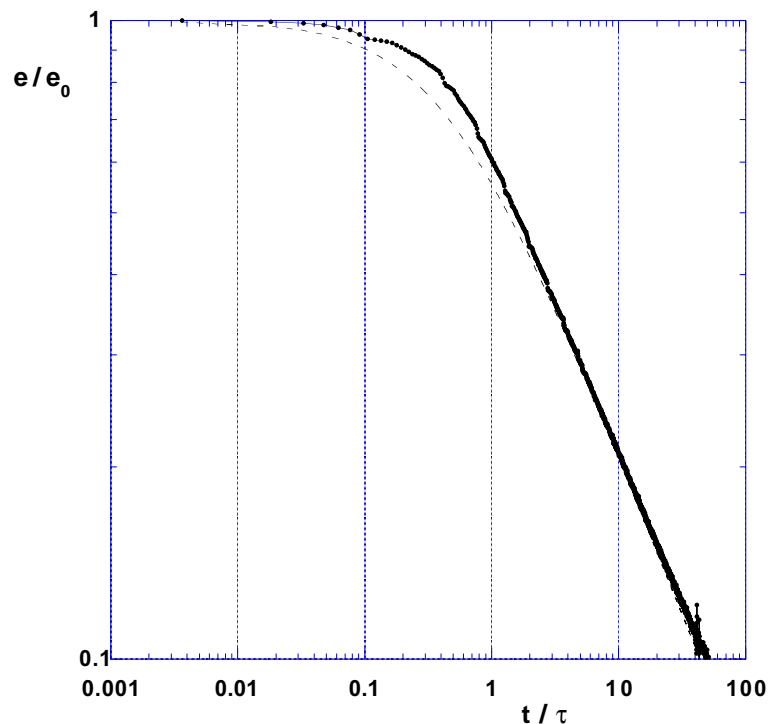


Figure 7.18: Rapport des épaisseurs  $\bar{e}/\bar{e}_0$  en fonction du temps adimensionné par  $\tau_0$ , équation (7.39), pour le tube 5 et de l'huile silicone V12500. Ligne pleine : résultats expérimentaux ; Ligne pointillé : second modèle

#### Résultats expérimentaux et discussions

Ce modèle est comparé aux résultats expérimentaux sur la figure 7.18 où nous présentons, en trait plein, l'épaisseur adimensionnée, mesurée à partir du signal de masse, et, en trait pointillé, l'épaisseur adimensionnée, calculée à partir de ce second modèle, équation (7.73), en fonction de  $t/\tau_0$ .

Les résultats expérimentaux présentés sur cette figure ont été obtenus avec de l'huile silicone V12500 durant le drainage du tube 5.

On constate que le second modèle obtient de meilleurs résultats que le premier : Il corrige l'erreur de ce dernier sur le temps caractéristique d'établissement du régime en  $1/\sqrt{t}$  aux temps longs. Par contre l'accord avec l'expérience n'est pas satisfaisant dans la zone de transition entre une épaisseur constante dans le temps et une épaisseur qui varie en  $1/\sqrt{t}$ . Cette zone de transition correspond au temps d'établissement du profil de l'épaisseur en  $\sqrt{z}$  après l'arrivée de la bulle en haut du tube à  $t = 0$ .

L'accord du second modèle avec les résultats de nos expériences est excellent pour les tubes dont le rayon est supérieur à 0,014 m (tubes 4, 5, 6, 7 et 8) et pour des liquides de viscosité supérieure à  $10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

L'existence d'un rayon de tube limite pour la validité de notre modèle n'est pas étonnant car une des hypothèses de notre modèle est que l'épaisseur du film de liquide est petite devant le rayon du tube. De plus, l'équation (7.40) sous entend que l'on néglige la géométrie cylindrique du problème. Ces deux hypothèses ne sont plus vérifiées lorsque l'on diminue le rayon des tubes.

# 8. ÉTUDE DU TEMPS DE REMPLISSAGE DE RÉSERVOIRS CYLINDRIQUES

## 8.1 Problème posé

Le problème que nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre est présenté sur la figure 8.1. Il concerne le temps de remplissage d'un réservoir cylindrique de longueur  $L$  et de rayon intérieur  $R$ , rempli d'air et immergé dans une cuve remplie d'un liquide de masse volumique  $\rho$  grande devant celle de l'air. L'échange entre les deux fluides se déroule au travers d'un trou de rayon  $r \leq R$ . Le niveau de liquide au dessus du trou est noté  $h$ .

Notre but ici est de déterminer la loi d'évolution du temps de remplissage de ce réservoir :

$$T_r = f(L, R, r, h, \rho) \quad (8.1)$$

L'influence de la viscosité  $\nu$  du liquide et de la tension de surface avec l'air sont discutée à la fin du chapitre.

## 8.2 Montage expérimental

Le dispositif expérimental, présenté sur la figure 8.1, est composé d'une cuve de 1 m x 1 m x 1,5 m en Plexiglas qui contient de l'eau à 25°C. Le réservoir cylindrique, de longueur  $L$  et de rayon intérieur  $R$ , possède un trou circulaire de rayon  $r$  dans sa partie supérieure. La section d'échange entre les deux fluides est biseautée (figure 8.2). L'angle du biseau est de 20°. L'aiguille pointe vers le fluide le plus lourd afin qu'il ne "voit" qu'une seule longueur : le rayon  $r$ . Le tube est situé à une profondeur  $h$  sous le niveau de l'eau. Il est initialement bouché par un film de plastique rigide qui s'enlève aisément et perturbe peu l'écoulement. Le tube, vide initialement, est immergé et fixé au sol de la cuve par des poids. A  $t = 0$ , on enlève le film plastique et on déclenche le chronomètre afin de mesurer  $T_r$ . On observe grâce à une caméra la remontée de l'interface eau-air dans le tube, les images du tube sont prises à intervalle de 125 ms et stockées dans l'ordinateur sous la forme de matrice (256x256) de niveaux de gris. Le caractère turbulent de l'interface air-eau dans le tube empêche une lecture précise de sa position  $z$ . Nous avons donc mis en place une technique de traitement automatisé des données qui permet de mesurer plus facilement la trajectoire  $z(t)$  de l'interface. Ce système est présenté sur la figure 8.3. Pour chaque image, on récupère grâce à un programme développé sous Matlab les niveaux de gris d'une colonne de pixel et l'on construit une nouvelle image en mettant côte à côte ces colonnes. On construit ainsi un diagramme spatio-temporel qui nous permet de mesurer la position moyenne  $z(t)$  de l'interface au cours du temps et donc de calculer la vitesse de remontée de cette interface.

Les tubes sont présentés dans le tableau 8.1. De gauche à droite, la première colonne présente le numéro des tubes, la seconde colonne, la longueur  $L$  et la troisième colonne, le rayon interne  $R$ . La dernière colonne présente la gamme de variation du rayon  $r$  pour chaque tube.

Du fait du grand volume de liquide utilisé dans ces expériences de remplissage, l'ensemble des mesures est obtenu avec de l'eau.

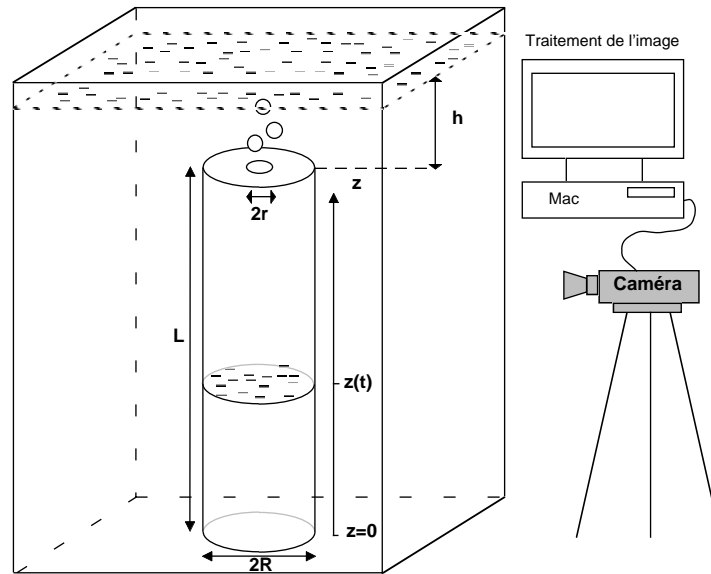


Figure 8.1: Dispositif expérimental

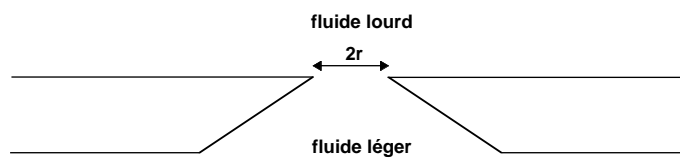


Figure 8.2: Vue en coupe de la section d'échange

n° du tube	$L$ longueur (m)	$R$ rayon intérieur (m)	$r$ rayon du trou d'échange (m)
1	0,430	0,0395	de 0,0075 à 0,0395
2	0,860	0,0395	de 0,0075 à 0,0225
3	0,860	0,0800	de 0,0100 à 0,0172
4	0,295	0,0142	de 0,0075 à 0,0142
5	0,295	0,0180	de 0,0075 à 0,0180
6	0,295	0,0231	de 0,0075 à 0,0231

Table 8.1: Paramètres géométriques des tubes utilisés dans nos expériences de remplissage

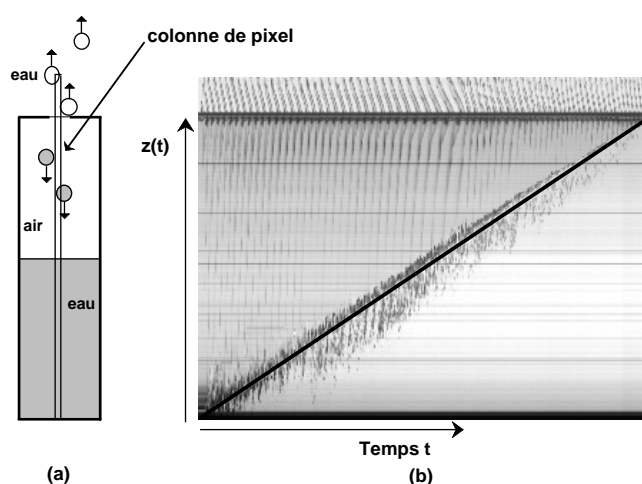


Figure 8.3: Diagramme spatio-temporel dans le cas du remplissage du tube 5 pour un rayon d'échange  $r = 0,0075$  m

### 8.3 Observations expérimentales

#### 8.3.1 Exemple de remplissage

La figure 8.3-(a) présente la colonne de pixel considérée pour la construction du diagramme spatio-temporel et la figure 8.3-(b), le diagramme spatio-temporel sur lequel on a tracé en trait noir la position moyenne de l'interface qui remonte dans le tube. Dans cette colonne de pixel, on constate qu'il y a des informations qui intéressent l'étude du temps court lié au remplissage. On observe, ainsi, le passage des bulles d'air au dessus du trou d'échange qui sortent du tube de manière périodique et la chute de l'eau dans le tube sous la forme de traits verticaux sur le diagramme. Ces phénomènes se déroulent sur une échelle de temps courte par rapport au phénomène de remplissage du tube. La position  $z(t)$  de l'interface oscille autour d'une valeur moyenne qui évolue dans le temps. Nous avons présenté en trait noir, sur la figure 8.3-(b), cette position moyenne de l'interface en fonction du temps. Connaissant l'intervalle de temps entre deux images et la largeur de la colonne de pixel prélevée sur chaque image, on déduit du diagramme 8.3-(b) la courbe  $z(t)$ , présentée sur la figure 8.4. On remarque que la remontée de l'interface se fait à vitesse constante, les variations à la loi linéaire que l'on observe sont dues à l'agitation de l'interface par l'eau qui tombe du trou d'échange. La vitesse  $U_{interface}$  de remontée de l'interface est donc constante tout au long du remplissage. Dans l'exemple du tube de longueur  $L = 0,2950$  m, de rayon  $R = 0,0180$  m et de rayon d'échange  $r = 0,0075$  m, présenté sur la figure 8.4, cette vitesse est de  $0,0116$  m.s<sup>-1</sup>.

#### 8.3.2 Influence de la hauteur d'eau $h$

n° de l'expérience	hauteur $h$ (mm)	$T_r$ (s)
1	600	84
2	200	85
3	60	83

Table 8.2: Influence de la hauteur d'eau  $h$  : Temps de remplissage  $T_r$  en fonction de la hauteur d'eau au dessus du tube  $h$  dans le cas du tube 1 pour un rayon d'échange  $r = 0,010$  m

La hauteur  $h$  est la hauteur d'eau présente au dessus du tube. Afin de déterminer si cette hau-

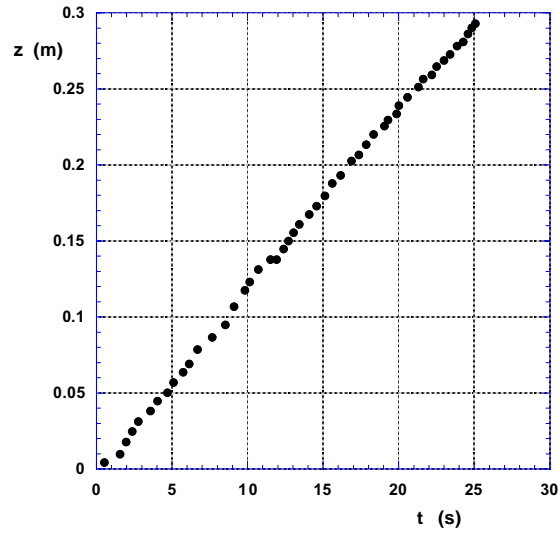


Figure 8.4: Position moyenne de l'interface  $z$  en fonction du temps dans le cas du remplissage du tube 5 pour un rayon d'échange  $r = 0,0075$  m

teur a une influence sur  $T_r$ , nous avons mesuré le temps de remplissage du tube 1 ( $L = 0,4300$  m et  $R = 0,0395$  m) avec un rayon d'échange  $r = 0,010$  m pour trois hauteurs d'eau différentes :  $h = 60r$ ,  $20r$  et  $6r$ . Les résultats sont présentés sur le tableau 8.2. Les temps de remplissage mesurés sont respectivement de 84, 85 et 83 secondes. Le temps de remplissage ne varie donc pas avec la hauteur  $h$  dans la gamme des hauteurs étudiées.

On peut supposer que si  $h$  devient de l'ordre de  $r$ , les bulles d'air qui sortent du tube ne sont plus gênées par l'eau dans leur remontée et le temps de remplissage  $T_r$  diminue. Nous n'avons pas observé un tel comportement pour  $h > 6r$ . Pour la suite de notre étude, la hauteur  $h$  est toujours supérieure à  $6r$  quels que soient les paramètres géométriques du tube.

### 8.3.3 Influence des paramètres géométriques

La figure 8.5 présente en échelle logarithmique le temps de remplissage  $T_r$  en fonction du rayon  $r$  pour trois tubes de longueur  $L$  et de rayon  $R$  différents. Les points carrés transparents ( $\square$ ) concernent le tube 1, les carrés noirs ( $\blacksquare$ ) représentent le tube 2 et les cercles ( $\circ$ ), le tube 3. On constate que dans les trois tubes le temps  $T_r$  diminue lorsque  $r$  augmente suivant une loi de puissance. La mesure expérimentale de cette puissance est :  $T_r \sim r^{-2,6}$ . Cette loi est reportée en trait plein sur la figure 8.5.

Si  $L$  augmente à  $R$  et  $r$  constants, par exemple entre les points  $\blacksquare$  :  $L = 0,430$  m et  $\square$  :  $L = 0,860$  m, on remarque que  $T_r$  augmente. Pour un rayon d'échange  $r = 0,010$  m,  $T_r$  varie de 83 s à 153 s entre les deux tubes.

De même, lorsque  $R$  augmente à  $L$  et  $r$  constants,  $T_r$  augmente aussi. cela se remarque en comparant les temps de vidange  $\blacksquare$  :  $R = 0,0395$  m et  $\circ$  :  $R = 0,0800$  m : pour un rayon d'échange de 0,010 m, le temps de remplissage passe de 153 s à 517 s.

Le temps de remplissage  $T_r$  augmente donc avec  $L$  et  $R$  et diminue suivant une loi de puissance en  $r^{-2,6}$ . La hauteur  $h$  d'eau au dessus du tube n'est pas un paramètre pertinent de notre étude. Ces conclusions sont identiques à celles obtenues dans le cas de la vidange, section 7.2.

## 8.4 Modèle

Le modèle est similaire à celui de la vidange d'un réservoir : sur l'échelle du temps long de remplissage, on ne voit pas les oscillations liées à la sortie périodique des bulles, mais un

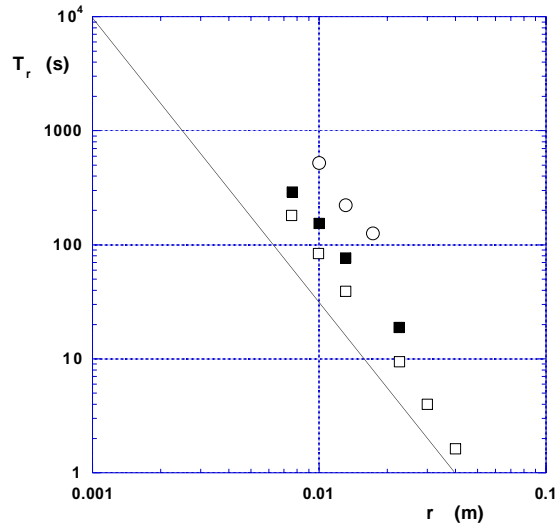


Figure 8.5: Temps de remplissage  $T_r$  en fonction du rayon  $r$  du trou d'échange pour les tubes 1 ( $\square$ ), 2 ( $\blacksquare$ ) et 3 ( $\circ$ ). La ligne en trait plein représente la loi  $T_r \sim r^{-2,6}$

phénomène continu d'entrée d'eau et sortie d'air. Sur cette échelle de temps, on modélise donc l'échange eau-air par l'ascension d'une bulle unique de rayon  $r$ . Ces bulles ont été étudiées dans la partie I et leur vitesse est :  $U_b = 0,5 \sqrt{gr}$ . De la même manière que dans la section 7.2.3, on calcule le temps de remplissage :

$$T_r = \frac{L}{0,5 \sqrt{gR}} \left( \frac{R}{r} \right)^{\frac{5}{2}}. \quad (8.2)$$

Ce modèle d'échange continu conduit à une dépendance du temps de remplissage en  $r^{-5/2}$  proche de la mesure expérimentale  $r^{-2,6}$ . Il prédit aussi une augmentation de  $T_r$  avec  $L$  et  $R$ , ce qui est conforme à nos observations.

On peut introduire ici le temps  $T_\infty$  correspondant au temps que met une bulle infinie cylindrique de rayon  $R$  pour parcourir la distance  $L$  :

$$T_\infty = \frac{L}{0,5 \sqrt{gR}}. \quad (8.3)$$

La loi 8.2 s'écrit alors sous une forme adimensionnée :

$$\frac{T_r}{T_\infty} = \left( \frac{R}{r} \right)^{\frac{5}{2}}. \quad (8.4)$$

## 8.5 Résultats expérimentaux et discussions

### 8.5.1 Temps de remplissage $T_r$

Nous avons reporté en échelle logarithmique, sur la figure 8.6, le temps de remplissage  $T_r$  adimensionné par le temps  $T_\infty$  en fonction du rapport  $R/r$  des rayons pour les expériences de remplissage des tubes 1 à 6. La ligne en trait plein représente la loi (8.4).

On constate que les points se regroupent sur une courbe unique de pente identique à celle de la loi (8.4).  $T_r/T_\infty$  varie donc bien en  $(R/r)^{5/2}$  comme prévue par le modèle. On observe, de plus, que les points expérimentaux se regroupent au dessus de la courbe théorique, le modèle retrouve donc les résultats expérimentaux à un facteur multiplicatif près.



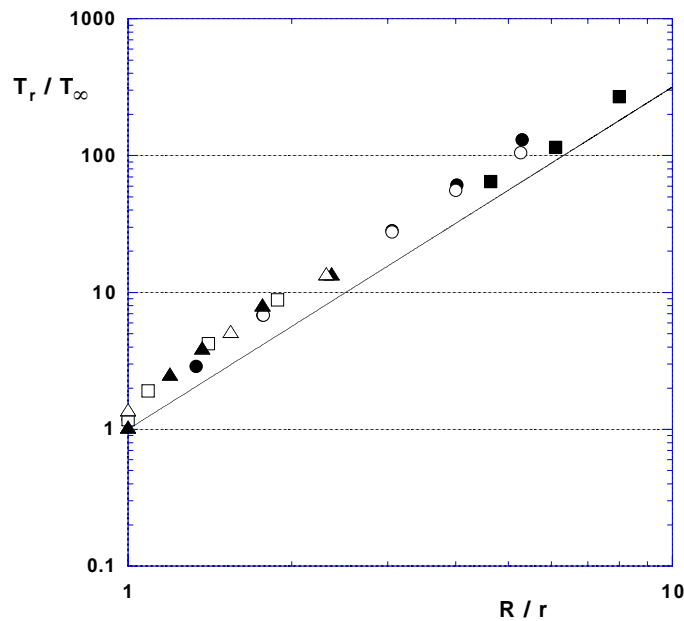


Figure 8.6:  $T_r/T_\infty$ , temps de remplissage adimensionné en fonction de  $R/r$  pour le tube 1 (●), le tube 2 (○), le tube 3 (■), le tube 4 (□), le tube 5 (▲) et le tube 6 (△). Les expériences ont été menées dans de l'eau. La ligne en trait plein représente la loi (8.4)

### 8.5.2 Discussion sur les effets de courbure et visqueux

De la même manière que pour la vidange de réservoirs cylindriques, section 7.2.4, les effets de courbure n'interviennent dans l'eau que lorsque le rayon d'échange est inférieur à 8 mm. Le plus petit rayon  $r$  utilisé est de 7,5 mm et nous y avons observé un effet de la tension de surface : Le remplissage s'est arrêté dans 2 des 5 expériences que nous avons faites, pour ensuite reprendre. La mesure a donc abouti dans 40% de nos expériences à un temps de remplissage sensiblement supérieur, ces expériences ne sont pas reproductibles dans le sens que seules les expériences où il n'y a pas d'arrêt du remplissage donnent le même temps  $T_r$  à 3% près. Toujours avec de l'eau, pour un rayon de 6,5 mm, les expériences sont devenues totalement non reproductibles avec des temps de remplissage sensiblement différents à chaque expérience et pour un rayon  $r$  de 5,5 mm, le remplissage est devenu impossible, l'interface air-eau au niveau du trou étant stabilisée par la tension de surface. Les effets de la tension superficielle semblent donc être beaucoup plus importants que dans le cas de la vidange. Ceci peut s'expliquer par l'absence d'une poche d'air fermée au dessus du liquide qui dans le cas de la vidange apporte une accélération supplémentaire à l'interface et aide à sa déstabilisation.

La discussion sur les effets visqueux est identique au cas de la vidange. Par exemple, pour observer des effets de la viscosité pour des rayons  $r < 25$  mm, il faut utiliser de l'huile de silicone V1000 ce que nous n'avons pas réalisé, reculant devant les difficultés de manier 1 m<sup>3</sup> d'huile silicone.

## 8.6 Comparaison entre vidange et remplissage

Une comparaison des résultats des temps de vidange et de remplissage est présentée sur la figure 8.7. Nous reportons en ordonnée les temps longs de remplissage  $T_r$  (□) et de vidange  $T_v$  (■) adimensionnés par le temps  $T_\infty$  en fonction du rapport des rayons  $R/r$ . On observe que les points de mesure, que ce soit dans le cas de la vidange ou du remplissage, se regroupent sur une courbe unique. Les deux configurations de retour à l'équilibre sont donc identiques pour ce

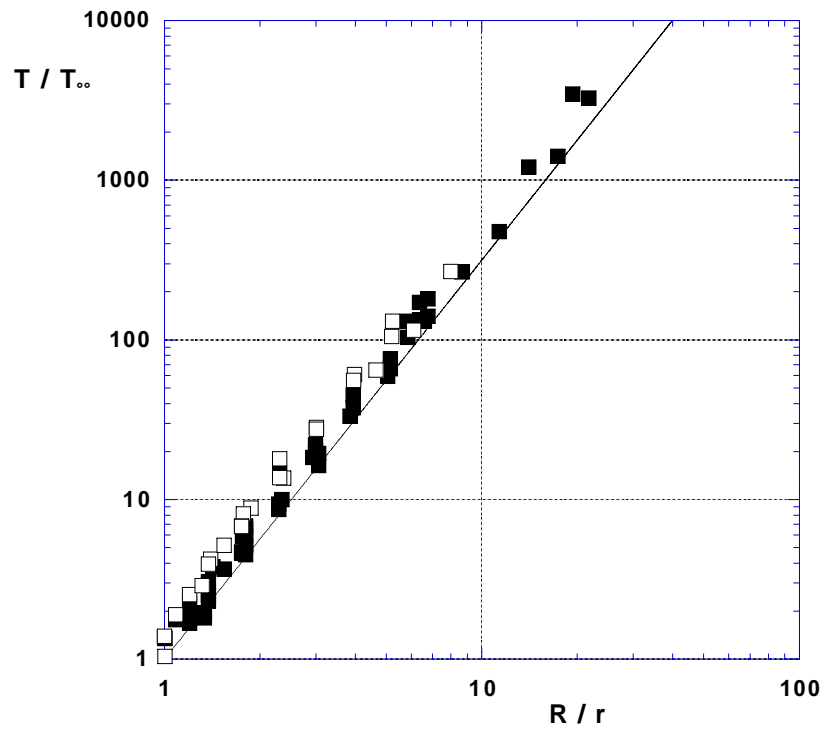


Figure 8.7:  $T/T_{\infty}$ , temps de remplissage ( $\square$ ) et de vidange ( $\blacksquare$ ) adimensionné en fonction de  $R/r$  pour les tubes 1 à 8 du tableau 7.1 et les tubes 1 à 6 du tableau 8.1. Les expériences ont été menées dans de l'eau. La ligne en trait plein représente la loi (8.4)

qui concerne les temps longs, elles suivent la même loi de variation en fonction des paramètres géométriques du réservoir. Cette symétrie des deux configurations est, ici, mise en évidence en l'absence d'effets visqueux et de courbure.



## 9. CONCLUSION SUR LES TEMPS LONGS

Cette partie II a pour objet la détermination de la loi de retour à l'équilibre pour deux fluides immiscibles de densités différentes initialement instable au sens de Rayleigh-Taylor.

La première configuration étudiée, section 7.2, est celle de la vidange d'un tube cylindrique vertical de rayon  $R$  et de longueur  $L$ , fermé dans sa partie supérieure et ouvert à la base d'un trou circulaire de rayon  $r < R$ . Ce tube est initialement rempli d'un liquide peu visqueux et l'on observe le retour à l'équilibre après ouverture du trou d'échange. La première observation est que l'interface air-liquide dans le tube descend avec une vitesse constante. Un modèle de retour à l'équilibre continu est proposé. Il suppose que la rentrée des bulles d'air s'effectue sous la forme d'une bulle infinie de rayon  $r$  et qu'à chaque instant, le volume d'air qui rentre dans le tube est égal au volume d'eau qui sort. Ce modèle conduit à la loi de vidange :

$$T_v = \frac{L}{0,5\sqrt{gR}} \left(\frac{R}{r}\right)^{5/2}. \quad (9.1)$$

Ce modèle est en bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus lorsque les effets visqueux et superficiels peuvent être négligés. Les limites d'apparition de ces effets sont discutées au paragraphe 7.2.4.

Dans le cas où  $r = R$ , le phénomène de vidange est totalement différent : on observe alors la remontée d'une bulle unique qui laisse derrière elle un film de liquide qui met un certain temps à se drainer. On définit le temps de vidange comme le temps nécessaire pour que 90% de la masse initiale soit drainée. On a montré que la vidange n'est pas achevée lorsque la bulle unique arrive en haut du tube sauf si le nombre de Reynolds de la bulle est supérieur à 780. Il est donc indispensable d'étudier l'épaisseur du film de liquide et son évolution après le passage de la bulle.

Notre étude s'est concentrée, dans un premier temps, sur l'épaisseur moyenne  $\bar{e}_0$  du film de liquide qui reste sur la paroi après le passage de la bulle, juste avant que le drainage ne commence. Cette épaisseur  $\bar{e}_0$  est déduite du signal de la masse restante en fonction du temps  $M(t)$ , obtenue grâce au montage expérimental décrit au paragraphe 7.3.1. Un modèle simple de l'écoulement, basé sur une hypothèse de lubrification, donne une expression de  $\bar{e}_0$  en fonction de la viscosité,  $\nu$ , le rayon du tube,  $R$ , la gravité,  $g$  et la vitesse de la bulle  $U_b$ . Nous avons montré qu'il y a un bon accord entre les points expérimentaux et le modèle, à la fois pour le régime visqueux à faible nombre de Reynolds et pour le régime inertiel à grand nombre de Reynolds.

Dans un second temps, nous avons étudié le drainage de ce film de liquide. Nous avons montré qu'un modèle quasi statique basé sur une hypothèse de lubrification donne une expression de l'évolution de l'épaisseur  $\bar{e}$  moyenne en fonction du temps :

$$\left(\frac{\bar{e}}{\bar{e}_0}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{t}{\tau}}, \quad (9.2)$$

avec

$$\tau = \frac{4}{9} \frac{\nu L}{g\bar{e}_0^2}. \quad (9.3)$$

Cette évolution se révèle être fonction de la viscosité  $\nu$ , de la longueur du tube  $L$  et de l'épaisseur initiale du film  $\bar{e}_0$ . On montre que l'on a un bon accord entre ce modèle et les résultats de nos

expériences pour des tubes de rayon  $R$  supérieur à 14 mm et des viscosités supérieures à  $10^{-4}m^2.s^{-1}$  ce qui est cohérent avec les approximations du modèle. Par contre, ce modèle est moins bon pour ce qui est des premiers instants du drainage lorsque le profil du film de liquide se met en place après l'arrivée de la bulle en haut du tube.

Le second chapitre concerne l'étude de la loi de remplissage d'un réservoir cylindrique initialement rempli d'air et immergé dans de l'eau. Ce remplissage se déroule au travers d'un trou circulaire de rayon  $r \leq R$  du tube. Après avoir remarqué que le remplissage se déroule à vitesse constante, nous avons étudié le temps  $T_r$  de remplissage du tube qui caractérise le retour à l'équilibre. Nous avons observé que  $T_r$  varie avec les paramètres géométriques  $L$ ,  $R$  et  $r$ . Un modèle identique dans ses hypothèses et ses conclusions, équation (9.1), avec celui de la vidange d'un tube cylindrique a été mis en place, il est en bon accord avec les résultats expérimentaux. Nous avons discutés dans le paragraphe 8.5.2 des limites d'apparition des effets de la viscosité et de la tension de surface en terme de dimensions de trou d'échange et de viscosité du liquide utilisé.

Enfin nous avons montré que la vidange et le remplissage de tubes cylindriques sont deux phénomènes similaires : le déplacement de l'interface à l'intérieur du tube s'effectue dans les deux configurations à une vitesse  $U_{interface}$  constante qui ne dépend que du rayon  $R$  du tube et du rayon  $r$  d'échange entre les deux fluides.

**PARTIE III**  
**TEMPS COURTS ET OSCILLATEURS ASSOCIÉS À LA**  
**VIDANGE ET AU REMPLISSAGE DE TUBES**  
**CYLINDRIQUES**



# 10. ÉTUDE DU TEMPS COURT LIÉ À LA VIDANGE D'UN RÉSERVOIR

## 10.1 Problème posé

Lors de nos expériences sur la vidange de tubes cylindriques de rayon  $R$ , nous avons observé deux comportements : si le rayon  $r$  d'échange est égal à  $R$ , on observe la remontée d'une bulle unique dont la dynamique a été étudiée dans la partie I. Par contre, si ce rayon  $r$  est inférieur à  $R$ , l'expérience commune de la vidange dans l'air ambiant d'une bouteille verticale, remplie de liquide et soumise à la gravité montre que le liquide s'écoule de la bouteille au travers d'une succession d'émission de jets liquides et de rentrée de bulles d'air. Ce retour à l'équilibre oscillant est caractérisé par la période des oscillations  $T_0^v$ . Ce mode oscillant débute à l'ouverture de la bouteille et continue jusqu'à la fin de la vidange.

Afin de comprendre les phénomènes physiques gouvernant ces oscillations, nous avons étudié la vidange d'un tube cylindrique vertical de longueur  $L$  et de rayon  $R$ . ce tube est fermé dans sa partie supérieure et ouvert en bas au travers d'un trou circulaire de rayon  $r$  pratiqué sur l'axe du cylindre. Le tube est initialement rempli d'un liquide de densité  $\rho$ , de viscosité  $\nu$  et de tension de surface  $\sigma$ .

Nous étudions la période d'émission des bulles en fonction des paramètres géométriques du tube et de la densité  $\rho$  du liquide :

$$T_0^v = f(L, R, r, \rho) \quad (10.1)$$

Les effets de la viscosité  $\nu$  du liquide et de la tension de surface  $\sigma$  entre les deux fluides sont discutés section 10.3.2.

## 10.2 Montage expérimental

Le montage expérimental est reporté sur la figure 10.1. Un tube cylindrique de rayon intérieur  $R$  et de longueur  $L$  est rempli d'un liquide de masse volumique  $\rho$ . Ce tube est fermé dans sa partie supérieure et un trou circulaire de rayon  $r$  est pratiqué dans sa partie inférieure. Le tube est placé sur un socle et le trou de rayon  $r$  est bouché par un clapet s'ouvrant sur l'extérieur. Un capteur piézo-électrique de pression, du type Kistler 7261, est placé au niveau de la partie supérieure du tube, il permet de mesurer les variations de pression dans la poche d'air qui se forme en haut du tube.

A l'instant initial, on ouvre le clapet et l'eau s'écoule hors du tube. Le tube étant fermé dans sa partie supérieure, le retour à l'équilibre ne se fait pas de manière continue : on observe un phénomène périodique de rentrée de bulle d'air dans le tube et sortie de liquide. Ces bulles d'air remontent dans le tube jusqu'à former une poche d'air en contact avec le capteur de pression. Ce capteur transforme les variations de pression en courants induits qui sont récupérés sur un PC par l'intermédiaire d'un programme développé sous Labview 4.0. On peut ainsi aisément mesurer la période, grâce à un programme de FFT, en fonction du temps.



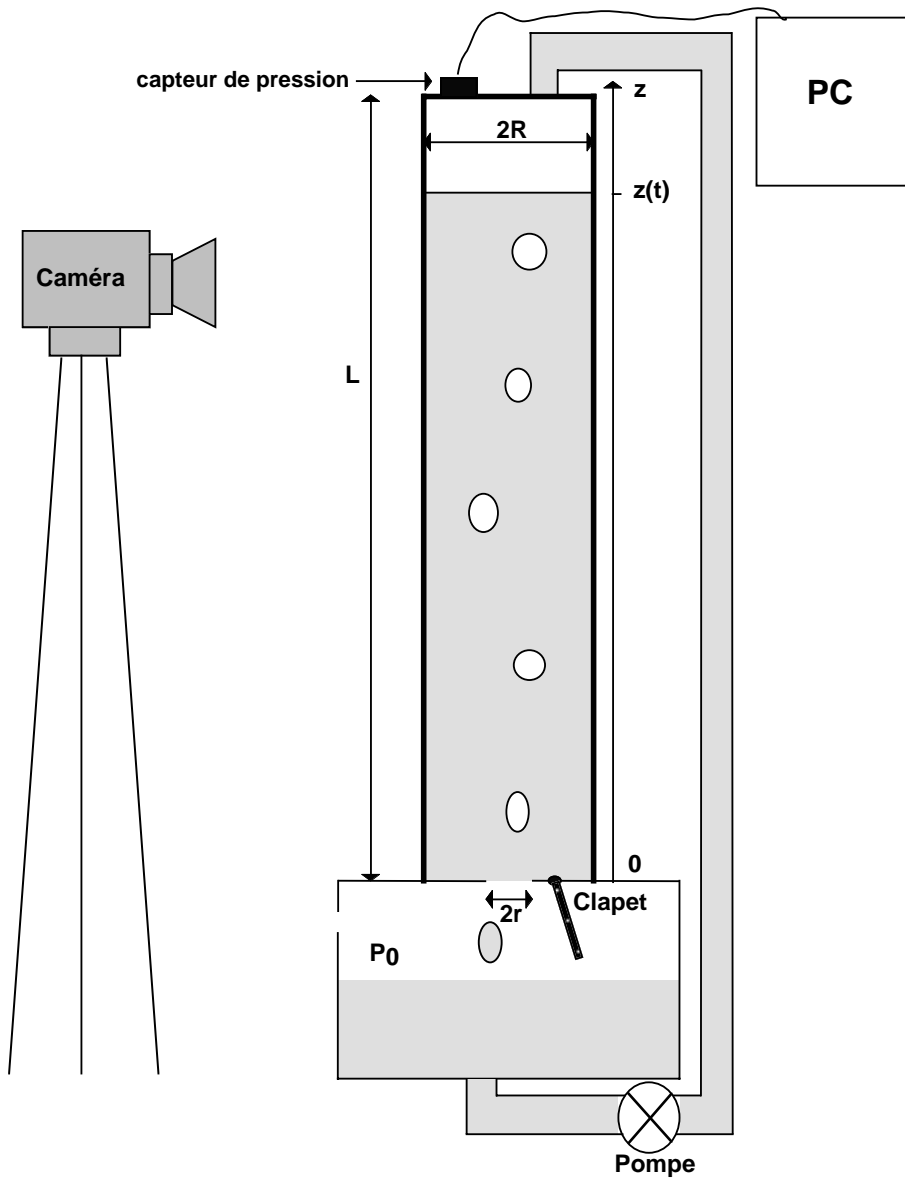


Figure 10.1: Dispositif expérimental.

n° du tube	longueur $L$ (m)	rayon $R$ (m)	rayon $r$ (m)
1	1,7600	0,0870	de 0,0040 à 0,0175
2	0,8600	0,0395	de 0,0040 à 0,0175
3	1,7600	0,0395	de 0,0040 à 0,0175

Table 10.1: Paramètres géométriques des tubes utilisés

fluide	$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$\nu$ (m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> )	$\sigma$ (N.m <sup>-1</sup> )
eau (25°C)	995	10 <sup>-6</sup>	0,070
éthanol	810	1,47 10 <sup>-6</sup>	0,022
eau + glycérol	995	4 10 <sup>-6</sup>	0,070

Table 10.2: Paramètres physiques des liquides

Une caméra JVC-3CCD récupère les images de la position de l'interface dans le tube et nous permet, comme dans le cas de la mesure du temps long, de mesurer la position  $z$  de l'interface en fonction du temps.

Les tubes utilisés pour nos expériences sont décrits dans le tableau 10.1. La première colonne désigne le numéro du tube, la deuxième concerne la longueur  $L$ , la troisième, le rayon intérieur  $R$  et le rayon  $r$  ( $r < R$ ) d'échange entre les fluides est présenté en dernière colonne. Ce rayon  $r$  varie pour chaque tube de 0,0040 m à 0,0175 m.

Les paramètres physiques des liquides sont présentés sur le tableau 10.2. Nous avons utilisé trois liquides : de l'eau, de l'éthanol et un mélange d'eau et de glycérol qui nous permettent de faire varier la tension de surface  $\sigma$  d'un facteur 3 et la viscosité  $\nu$  d'un facteur 4 de façon quasi-indépendante.

### 10.3 Observations expérimentales

Un exemple de signal issu du capteur de pression est présenté sur la figure 10.2 dans le cas de la vidange du tube 2 avec un rayon d'échange  $r = 0,0047$  m. Sur cette figure, on a représenté en ordonnée la variation de pression en unités arbitraires (u.a.) en fonction du temps. On remarque que la période des oscillations de pression et le temps long de vidange du tube ont des échelles de temps séparées par plusieurs ordre de grandeurs. Afin d'observer les fluctuations périodiques de pression, on doit se placer sur une échelle de temps de l'ordre de la seconde (figure 10.3 (a) et (b)).

La figure 10.3 (a) présente le début du signal de pression exposé sur la figure 10.2. Cette figure montre que la variation  $dP$  de pression dans la poche d'air est centrée autour d'une valeur moyenne nulle et est de type sinusoïdal au début du retour à l'équilibre. La période mesurée est 0,22 s.

La figure 10.3 (b) présente le même signal de pression en fin de vidange : le signal est toujours périodique mais une non-linéarité est apparue qui a altéré son caractère sinusoïdal. La période est ici égale à 0,37 s.

Le retour à l'équilibre du tube se déroule donc à une vitesse constante par l'intermédiaire d'un phénomène périodique de rentrée d'air et sortie de liquide. On observe que cette période, de l'ordre de 0,3 s, évolue au cours de la vidange.

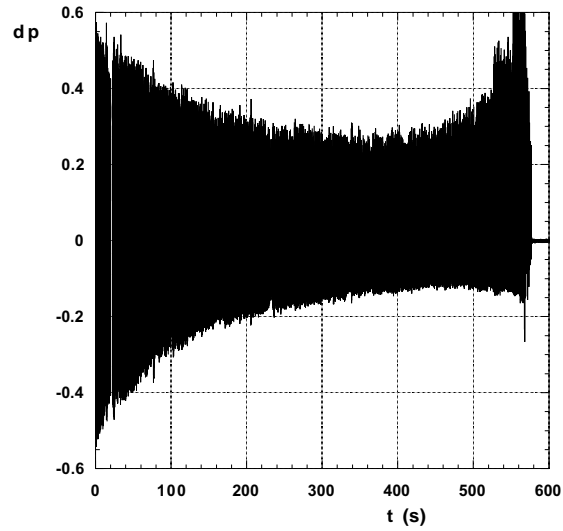


Figure 10.2: Exemple de signal du capteur de pression. Tube 2 :  $L = 0,8600$  m,  $R = 0,0395$  m et  $r = 0,0047$  m. Le liquide utilisé est de l'eau

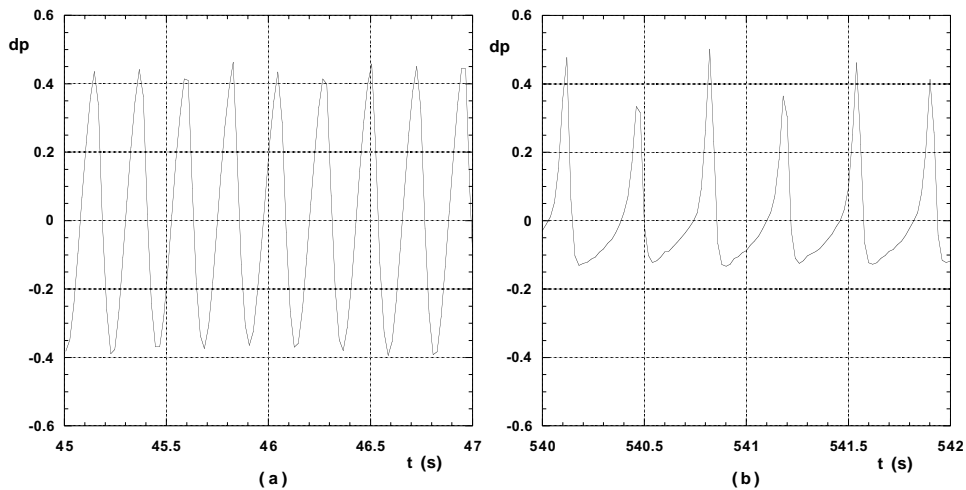


Figure 10.3: Exemples de signal du capteur de pression. Tube 2 :  $L = 0,8600$  m,  $R = 0,0395$  m et  $r = 0,0047$  m. Le liquide utilisé est de l'eau. (a) début de la vidange. (b) fin de la vidange

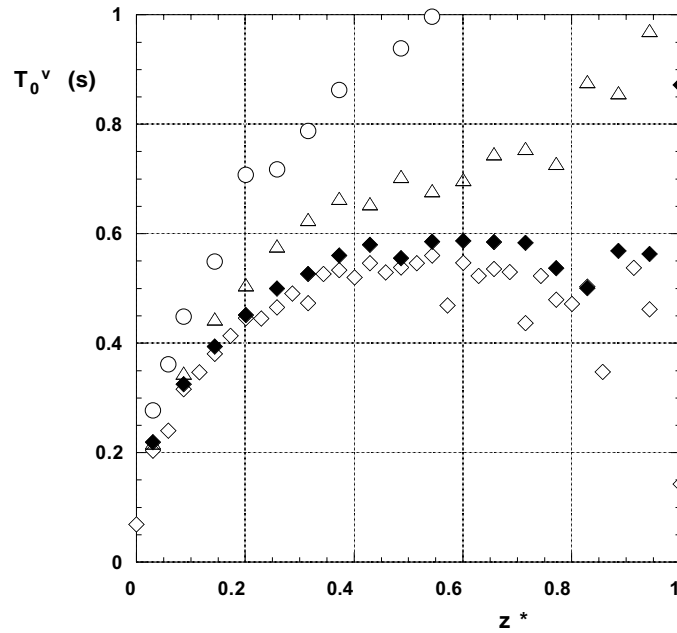


Figure 10.4: Période  $T_0^v$  des oscillations en fonction de la position relative  $z^*$  de l'interface pour le tube 1.  $\circ$  :  $r = 0,0050$  m ;  $\triangle$  :  $r = 0,0075$  m ;  $\blacklozenge$  :  $r = 0,0132$  m ;  $\diamond$  :  $r = 0,0175$  m. Le liquide utilisé est de l'eau

### 10.3.1 Influence des paramètres géométriques

L'évolution de la période des oscillations est présentée en fonction de la position relative de l'interface  $z^* \equiv z/L$  sur la figure 10.4. Les points de mesure sont obtenus avec le tube 1, initialement rempli d'eau. Avec nos conventions,  $z^* = 0$  correspond au tube plein et  $z^* = 1$  au tube vide. Différents rayons d'échange ont été utilisés :  $\circ$  :  $r = 0,0050$  m ;  $\triangle$  :  $r = 0,0075$  m,  $\blacklozenge$  :  $r = 0,0132$  m et  $\diamond$  :  $r = 0,0175$  m.

On remarque sur cette figure que la période des oscillations n'est pas constante tout au long de la vidange. De plus, quel que soit le rayon  $r$ , la période est de 0,1 s en début de vidange ( $z^* \approx 0$ ). Si la vidange se poursuit, on constate que plus le rayon  $r$  est grand, plus la période est courte quelle que soit la position  $z^*$  de l'interface. Par exemple, pour les points  $\diamond$  :  $r = 0,0175$  m et  $\circ$  :  $r = 0,0050$  m, à  $z^* = 0,5$ , la période est respectivement de 0,55 s et 1 s. En fin de vidange, les plus petits rayons  $r$  voient leurs périodes augmenter fortement, jusqu'à 1,5 s pour  $r = 0,0050$  m, tandis que les plus grands atteignent un plateau autour de 0,55 s en milieu de vidange. Le plus grand des rayons d'échange  $r = 0,0175$  m a une période de fin de vidange qui se rapproche de celle du début :  $T_0^v = 0,1$  s.

La figure 10.5 présente l'évolution de la période des oscillations  $T_0^v$  en fonction de la position relative de l'interface  $z^*$  dans le tube 2 rempli d'eau. Les différents rayons d'échange sont les suivants :  $\blacksquare$  :  $r = 0,0040$  m,  $\circ$  :  $r = 0,0059$  m,  $\blacktriangle$  :  $r = 0,0068$  m,  $\triangle$  :  $r = 0,0075$  m et  $\blacklozenge$  :  $r = 0,0175$  m.

Qualitativement les résultats sont semblables à ceux obtenus dans le tube 1 ,figure 10.4 : la période est de 0,1 s en début de vidange quel que soit le rayon d'échange  $r$ . Ensuite, pour  $r = 0,0175$  m, elle augmente jusqu'à 0,25 s pour atteindre un maximum en milieu de vidange et ensuite diminuer jusqu'à atteindre la valeur de départ. La période mesurée avec un rayon  $r = 0,0075$  m atteint, elle, une valeur plateau de 0,25 s en milieu de vidange pour ensuite rester constante. Pour des rayons  $r$  plus petits, la période augmente constamment jusqu'à 0,45 s pour le rayon  $r = 0,0040$  m en fin de vidange.

La variation de la période  $T_0^v$  au cours de la vidange du tube 3 est présentée sur la figure

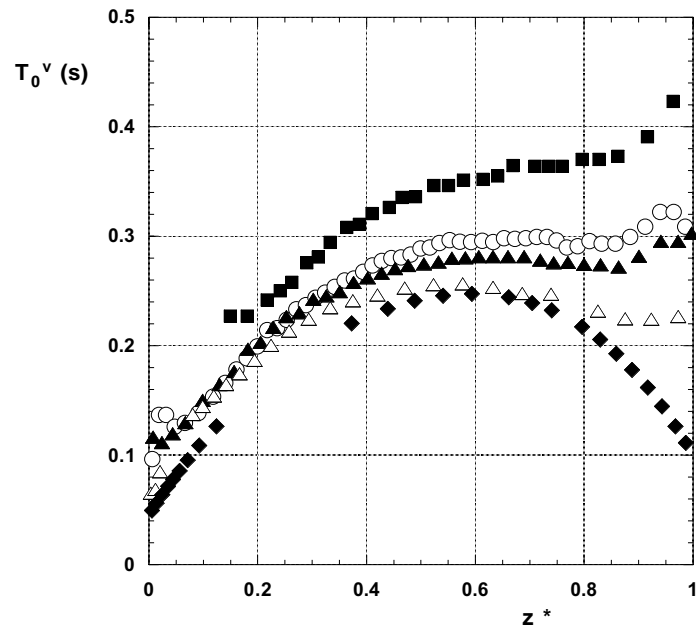


Figure 10.5: Période  $T_0^v$  des oscillations en fonction de la position relative  $z^*$  de l'interface pour le tube 2. ■ :  $r = 0,0040$  m ; ○ :  $r = 0,0059$  m ; ▲ :  $r = 0,0068$  m ; △ :  $r = 0,0075$  m ; ◆ :  $r = 0,0175$  m. Le liquide utilisé est de l'eau

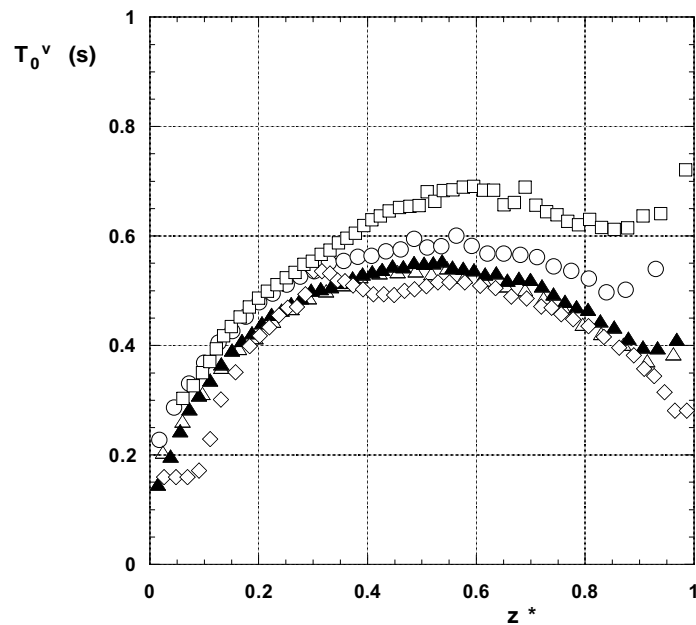


Figure 10.6: Période  $T_0^v$  des oscillations en fonction de la position relative  $z^*$  de l'interface pour le tube 3. □ :  $r = 0,0047$  m ; ○ :  $r = 0,0050$  m ; ▲ :  $r = 0,0068$  m ; △ :  $r = 0,0075$  m ; ◇ :  $r = 0,0175$  m. Le liquide utilisé est de l'eau

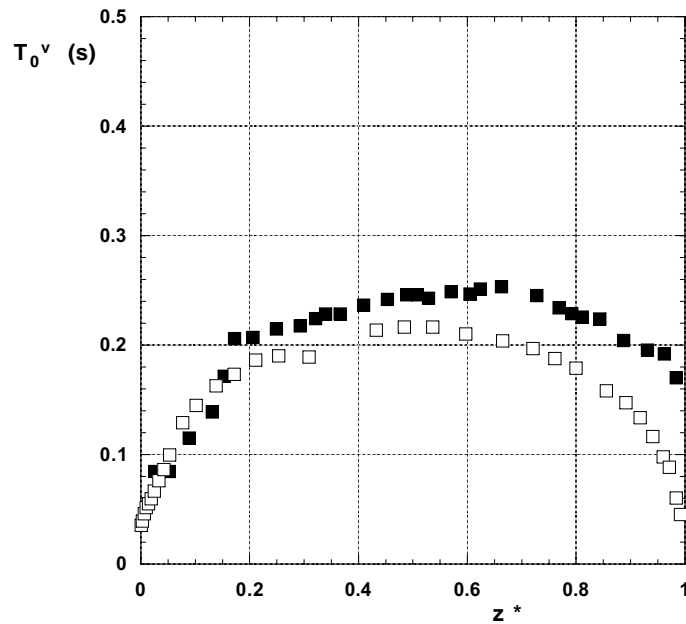


Figure 10.7: Période  $T_0^v$  des oscillations en fonction de la position relative  $z^*$  de l'interface dans le tube 2 avec  $r = 0,0175$  m. ■ : Eau, □ : Éthanol

10.6. Les différents rayons d'échange sont les suivants : □ :  $r = 0,0047$  m, ○ :  $r = 0,0050$  m, ▲ :  $r = 0,0068$  m, △ :  $r = 0,0075$  m, ◇ :  $r = 0,0175$  m.

On peut faire les mêmes remarques sur la dépendance de la période par rapport à  $r$ . Les différences sont d'ordre quantitatives : la valeur du maximum est située autour de 0,55 s proche de celle du tube 1 mais double par rapport au tube 2. Les périodes après avoir atteint ce maximum diminuent toutes, même dans le cas  $r = 0,0047$  m, pour ensuite augmenter en fin de vidange sauf dans le cas des grands rayons d'échange.

En étudiant les figures 10.4 et 10.6, on analyse la dépendance de la période  $T_0^v$  en fonction du rayon intérieur  $R$ . Dans ces deux tubes, la longueur  $L$  est identique et le rayon intérieur  $R$  du tube 1 est le double du rayon du tube 3. Pour des rayons  $r$  équivalents, on constate que la période est identique dans les deux tubes. Le rayon  $R$  des tubes n'a donc pas d'influence sur la période des oscillations.

L'influence de la longueur  $L$  sur la période  $T_0^v$  est étudiée en observant les deux figures 10.5 et 10.6. En effet, la longueur  $L$  du tube 3 (figure 10.6) étant le double de celle du tube 2 (figure 10.5), le fait que, à rayon  $R$  et  $r$  équivalents, la période mesurée dans le tube 3 soit proche du double de celle mesurée dans le tube 2 montre que la période des oscillations augmente avec la longueur  $L$  du tube.

En conclusion de ces observations expérimentales, on peut revenir sur les remarques communes aux trois tubes concernant la période des oscillations : tout d'abord, la période diminue lorsque le rayon  $r$  augmente. En début de vidange, la période est de 0,1 s pour les trois tubes puis elle augmente jusqu'à atteindre un plateau dont la valeur dépend du tube. La période a ensuite tendance à diminuer pour les plus grandes valeurs de  $r$  et à augmenter dans le cas des petits rayons d'échange. On peut remarquer qu'à  $r$  fixé la période d'émission des bulles augmente avec la longueur  $L$  du tube et ne semble pas varier avec  $R$ .

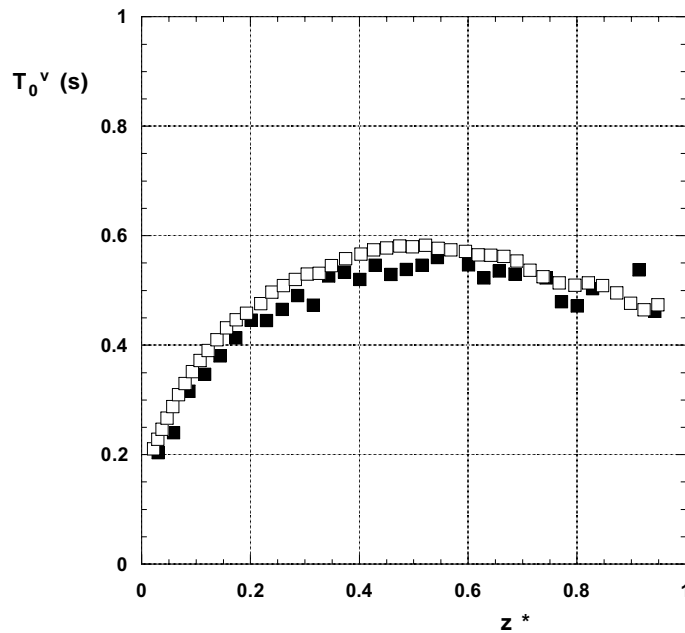


Figure 10.8: Période  $T_0^v$  des oscillations en fonction de la position relative  $z^*$  de l'interface dans le tube 3 avec  $r = 0,0175$  m. ■ : Eau, □ : Eau+Glycérol

### 10.3.2 Influence des paramètres physiques

L'influence de la masse volumique du liquide sur le temps court  $T_0^v$  a été étudiée dans le tube 2. La figure 10.7 montre la période mesurée dans le tube 2 avec un rayon  $r = 0,0175$  m pour un tube rempli d'eau (■) et d'éthanol (□). Nous avons donc fait varier la masse volumique de manière sensible et l'on constate une différence dans les mesures, l'eau de masse volumique plus élevée induit lors de sa vidange une émission de bulle de période plus grande. La tension de surface ne joue pas de rôle dans ces expériences car le rayon  $r$  est très grand devant les longueurs capillaires de l'eau et de l'éthanol : respectivement 0,0027 m et 0,0018 m.

L'eau et le mélange eau-Glycérol ont une masse volumique et une tension de surface avec l'air semblables mais la viscosité est augmentée d'un facteur 4 entre les deux liquides. Nous avons comparé les périodes mesurées lors de la vidange du tube 1 pour chacun de ces liquides. La figure 10.8 reprend les résultats de nos expériences dans le tube 1 avec un rayon d'échange  $r = 0,0175$  m. On constate que la variation d'un facteur 4 de la viscosité ne fait pas évoluer la période de manière sensible.

Concernant les effets capillaires, l'étude de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, présentée en annexe A, montre que la tension de surface a un effet stabilisateur. En particulier, il existe une longueur critique  $\mathcal{L}_c$ , équation (A.10), en dessous de laquelle l'interface est stable. Pour une interface entre de l'air et de l'eau accélérée par la gravité  $g$ , cette longueur est de 0,017 m. Avec de l'éthanol, la longueur critique est de 0,011 m. Expérimentalement, en utilisant de l'eau, nous avons observé une déstabilisation de l'interface et un phénomène de vidange pour des diamètres d'échange inférieurs à 0,017 m : il a été possible de déstabiliser ces interfaces air-eau en plaçant au départ de la vidange une poche d'air en haut du tube. Cette poche d'air initiale apporte au système une accélération supplémentaire et déstabilise l'interface pour des rayons allant jusqu'à 0,004 m pour l'eau. En dessous de ce rayon critique, le phénomène de production de bulle au niveau de l'interface n'est plus périodique, il peut même s'arrêter pour reprendre quelques instants plus tard : les expériences ne sont plus reproductibles. Avec l'éthanol, ce rayon critique est de 0,0025 m.

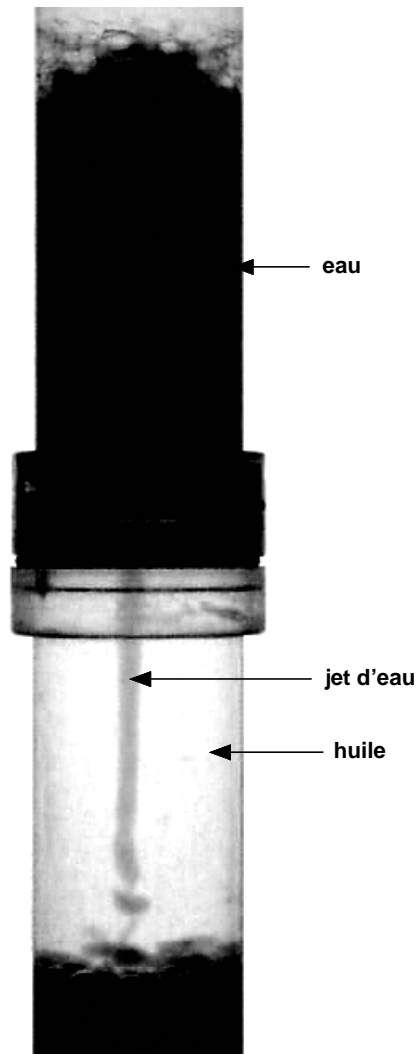


Figure 10.9: Photographie du retour à l'équilibre d'un réservoir d'eau, colorée en noir, initialement placé au-dessus d'un réservoir rempli d'huile de tournesol. Les deux réservoirs, de rayon  $R = 0,034$  m, sont fermés à leurs extrémités et l'échange s'effectue au travers d'un orifice circulaire de rayon  $r = 0,020$  m

## 10.4 Modèles

### 10.4.1 Analogie mécanique : modèle masse-ressort

Au début d'un cycle rentrée de bulle d'air-sortie de liquide, le liquide s'écoule sous l'action de la gravité. Le volume de la poche d'air en haut du tube augmente et la pression diminue jusqu'à ce que la différence de pression entre l'air ambiant et la poche soit suffisante pour compenser la gravité. La poche d'air joue un rôle analogue à celui d'un ressort : la diminution de la pression permet à la pression atmosphérique extérieure de retenir le liquide dans le tube. Cette pression de poche, inférieure à la pression extérieure, "tire" le liquide vers le haut (en fait il s'agit de la pression atmosphérique qui "pousse" le liquide à l'intérieur du tube) et force l'admission d'une bulle d'air dans le tube. Au moment où une bulle arrive dans la poche d'air en haut du tube, la pression de gaz augmente dans la poche, la différence de pression avec l'extérieur diminue et l'effet de la gravité redevient prédominant. On est alors revenu dans la configuration du début du cycle, l'eau peut s'écouler à nouveau.

Afin de confirmer ce rôle de ressort de la poche d'air, nous avons observé la vidange d'un tube



cylindrique rempli d'eau dans un tube de taille identique rempli d'huile de tournesol, fluide incompressible, de densité inférieure à l'eau. Cette expérience est illustrée sur la photographie 10.9. Sur cette image, l'eau est colorée en noir. Les deux réservoirs cylindriques ont un rayon  $R = 0,034$  m et l'échange entre les deux fluides s'effectue par un orifice circulaire de rayon  $r = 0,020$  m. On remarque que l'échange se déroule par l'intermédiaire d'un jet continu d'eau qui tombe dans le réservoir d'huile. Il existe un jet continu d'huile remontant dans l'eau qui n'est pas visible sur cette photographie. Le phénomène oscillant n'existe donc plus, les deux fluides se partageant la section d'échange. On a donc vérifié que le moteur du phénomène périodique de "Glouglou" est la compressibilité de la poche d'air présente en haut du tube.

On peut aussi mettre en évidence le rôle de la poche de gaz de manière simple (et ludique) lors de la vidange d'une bouteille de vin (ou d'eau minérale pour être politiquement correct). En imprimant un mouvement de rotation à la bouteille autour de son axe principal, le liquide va se mettre en mouvement de rotation à son tour et un tourbillon apparaît qui laisse passer en son centre un filet d'air, le gaz entrant dans la bouteille est alors en contact permanent avec la poche de gaz, il n'y a plus de différence de pression et le liquide est seulement soumis à la gravité et à la force centrifuge : il n'y a plus de force de rappel et donc plus de phénomènes périodiques.

Notre premier modèle reprend ces observations expérimentales sur le rôle de la poche d'air. Ce modèle est une analogie mécanique avec le problème masse-ressort classique. Il ne tient pas compte du caractère fluide des masses mises en jeu. On considère l'eau comme un corps rigide et de masse constante sur une période. On va chercher à calculer les oscillations de cette masse autour de l'équilibre, la période  $T_0^v$  étant petite devant le temps de vidange  $T_v$ .

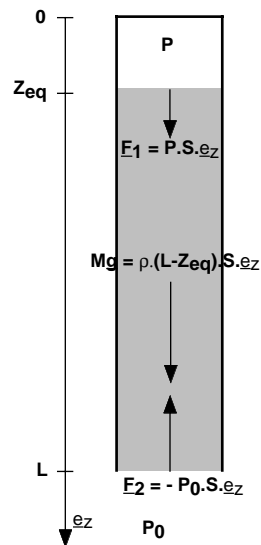


Figure 10.10: Présentation des forces en jeu à l'équilibre.  $S$  est la surface de la section du tube.

Le schéma de principe de ce modèle est présenté sur les figures 10.10 et 10.11.

Le liquide est soumis à trois forces extérieures verticales : son poids  $\underline{P} = Mg$ , la force de pression sur l'interface à l'intérieur du tube  $\underline{F}_1 = PS e_z$  et la force de pression en bas  $\underline{F}_2 = -P_0S e_z$ .  $P$  et  $P_0$  sont les pressions de l'air, respectivement dans la poche d'air en haut du tube et de l'air ambiant.  $S$  est la surface de la section du tube,  $M$  la masse d'eau supposée constante sur une période et  $e_z$  le vecteur unitaire sur l'axe  $z$ .

A l'équilibre, on a une pression  $P_{eq}$  d'équilibre dans la poche d'air (l'air ambiant est à  $P_0 > P_{eq}$ ) et la masse de liquide est  $M = S \rho(L - z_{eq})$  où  $z_{eq}$  est la position d'équilibre de l'interface. La relation fondamentale de la dynamique donne à l'équilibre :

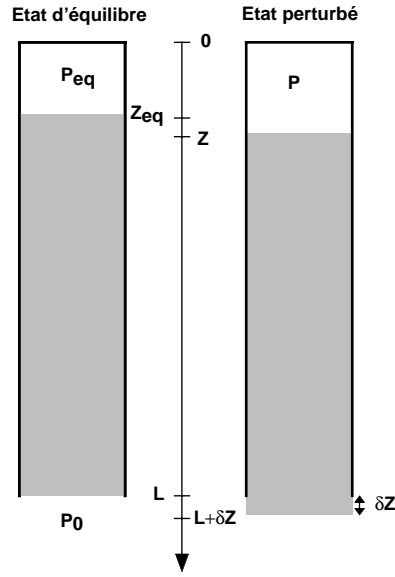


Figure 10.11: Présentation des données du premier modèle.

$$P_{eq} = P_0 - \rho g(L - z_{eq}). \quad (10.2)$$

Si l'on perturbe cet équilibre, la relation précédente devient :

$$\rho(L - z_{eq}) \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = (P - P_0) + \rho g(L - z_{eq}), \quad (10.3)$$

où  $\delta z$  est la perturbation de position de l'interface et  $P$  la nouvelle pression dans la poche d'air. En introduisant la pression d'équilibre exprimée dans l'équation (10.2), on obtient :

$$\rho(L - z_{eq}) \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = (P - P_{eq}) \quad (10.4)$$

et

$$\rho(L - z_{eq}) \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = \delta P. \quad (10.5)$$

On doit donc exprimer  $\delta P$ , variation de pression dans la poche, en fonction de  $\delta z$  afin d'obtenir une équation différentielle en  $z$ . Si l'on suppose que la transformation est adiabatique, on a la relation :

$$\frac{\delta P}{P_{eq}} = -\gamma \frac{\delta z}{z_{eq}}, \quad \text{avec } \gamma = 1,4. \quad (10.6)$$

On peut donc écrire que :

$$\delta P = -\gamma \frac{P_{eq}}{z_{eq}} \delta z. \quad (10.7)$$

L'équation (10.5) s'écrit alors :

$$\rho(L - z_{eq}) \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = -\gamma \frac{P_{eq}}{z_{eq}} \delta z. \quad (10.8)$$

On a donc une équation différentielle du type :

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} + \omega_0^2 \delta z = 0. \quad (10.9)$$

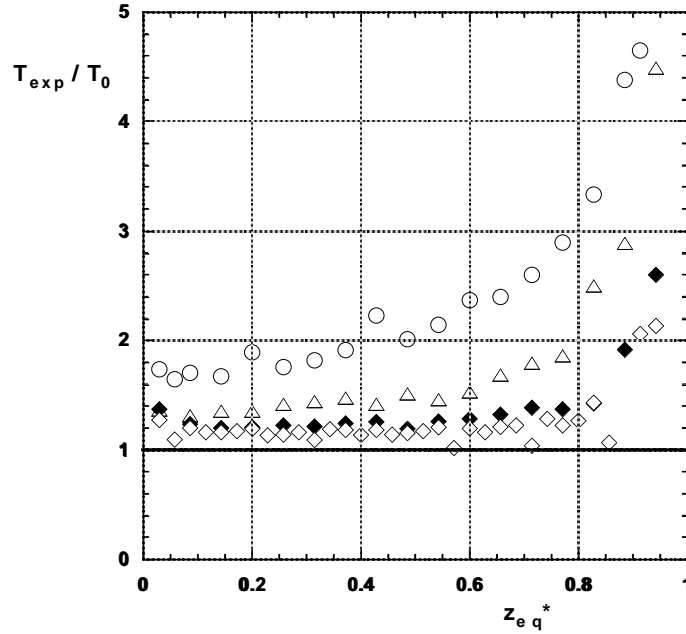


Figure 10.12: Rapport  $T_{exp}/T_0$  de la période mesurée sur la période issue du calcul de l'analogie mécanique en fonction de la position relative de l'interface  $z_{eq}^*$  pour le tube 1 et des rayons d'échange différents.  $\circ$  :  $r = 0,0050$  m ;  $\triangle$  :  $r = 0,0075$  m ;  $\blacklozenge$  :  $r = 0,0132$  m ;  $\diamond$  :  $r = 0,0175$  m. Le fluide utilisé est l'eau. La ligne en trait plein représente l'analogie mécanique

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0$  où :

$$\omega_0 = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho}} \sqrt{\frac{1 - \delta(1 - z_{eq}^*)}{z_{eq}^*(1 - z_{eq}^*)}}, \quad (10.10)$$

où  $z_{eq}^* \equiv z_{eq}/L$  et  $\delta = \rho g L / P_0$  dépendent des paramètres géométriques du tube et de la masse volumique du liquide. Pour tous les liquides utilisés et dans tous nos tubes le paramètre  $\delta$  est de l'ordre de 0,1 et  $z_{eq}^*$  est, par définition, compris entre 0 et 1 ; on peut alors écrire que  $\sqrt{1 - \delta(1 - z_{eq}^*)} \sim 1$  et on a une période des oscillations de la forme :

$$T_0 \approx 2\pi L \sqrt{\frac{\rho}{\gamma P_0}} \sqrt{z_{eq}^*(1 - z_{eq}^*)} \quad (10.11)$$

Le modèle prévoit une dépendance croissante de la période en  $L$  et  $\rho$  ce que nous avons précédemment observé. Le modèle prévoit aussi l'indépendance de la période en  $R$  ce qui est conforme à nos observations expérimentales. Le comportement "en forme de cloche" de la période en fonction de  $z_{eq}^*$  est bien modélisé par l'équation (10.11). Cependant, on doit noter que cette période théorique ne dépend pas du rayon  $r$  d'échange entre les deux fluides alors que nous avons montré expérimentalement que ce paramètre influence la période d'émission des bulles. Notre modèle n'est donc pas en bon accord avec l'expérience, nous allons vérifier qu'il donne malgré tout le bon ordre de grandeur pour la période  $T_0^v$ .

Nous avons choisi pour cela de montrer les résultats sous la forme du rapport  $T_{exp}/T_0$  de la période mesurée expérimentalement sur la période théorique  $T_0$  issue de l'analogie mécanique, équation (10.11).

Les figures 10.12, 10.13 et 10.14 montrent que le modèle donne un ordre de grandeur correct pour la période des oscillations. Ces courbes sont issues des expériences réalisées sur les tubes

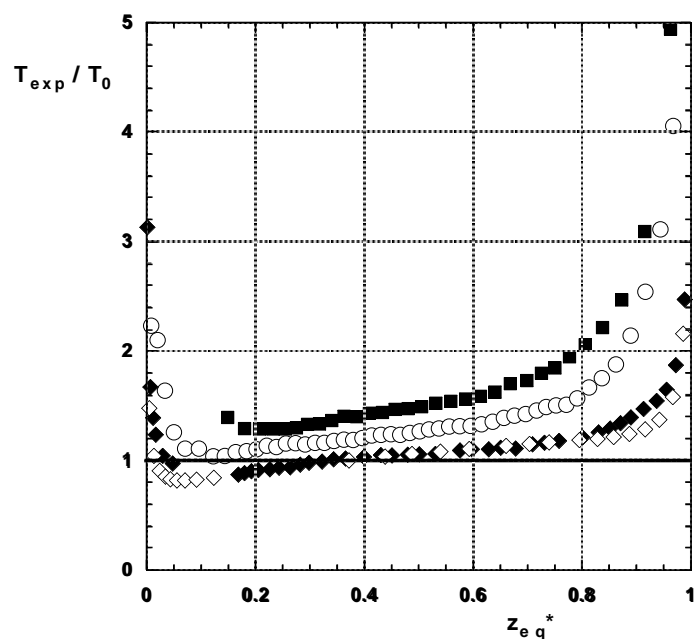


Figure 10.13: Rapport  $T_{exp}/T_0$  de la période mesurée sur la période issue du calcul de l'analogie mécanique en fonction de la position relative de l'interface  $z_{eq}^*$  pour le tube 2 et des rayons d'échange différents. ■ :  $r = 0,0040$  m ; ○ :  $r = 0,0059$  m ; ◆ :  $r = 0,0132$  m ; ◇ :  $r = 0,0175$  m. Le fluide utilisé est l'eau. La ligne en trait plein représente l'analogie mécanique

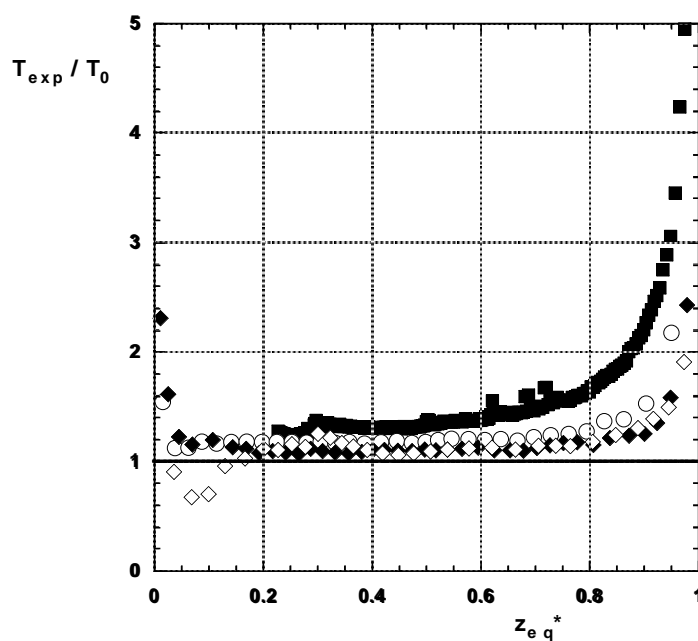


Figure 10.14: Rapport  $T_{exp}/T_0$  de la période mesurée sur la période issue du calcul de l'analogie mécanique en fonction de la position relative de l'interface  $z_{eq}^*$  pour le tube 3 et des rayons d'échange différents. ■ :  $r = 0,0040$  m ; ○ :  $r = 0,0059$  m ; ◆ :  $r = 0,0132$  m ; ◇ :  $r = 0,0175$  m. Le fluide utilisé est l'eau. La ligne en trait plein représente l'analogie mécanique

1, 2 et 3 et pour des rayons  $r$  variant de 0,0040 m à 0,0175 m. On remarque que les résultats sont cohérents avec le modèle sauf pour les plus petits rayons  $r$  et notamment dans le tube 1 où le rapport  $R/r$  atteint ses valeurs les plus élevées,  $R/r = 17,4$  pour  $r = 0,0050$  m. Cette divergence avec les résultats expérimentaux est d'autant plus importante que  $z_{eq}^*$  est proche de 1 : la période issue du modèle mécanique est inférieure à celle obtenue dans nos expériences.

L'analogie mécanique n'est donc plus valable lorsque  $z_{eq}^* \approx 1$ . Ceci peut s'expliquer en remarquant que, en fin de vidange, la variation de la hauteur de l'interface à la fin d'un cycle ne peut plus être négligée devant la hauteur d'eau restant dans le tube. De plus, l'analogie mécanique suppose que le tube est pleinement ouvert en bas ce qui est d'autant moins réaliste que le rapport des rayons  $R/r$  est élevé. Ceci permet d'expliquer la divergence entre le modèle et l'expérience pour les expériences où le rapport  $R/r$  est le plus grand.

Il est donc nécessaire de construire un nouveau modèle qui prenne en compte le caractère non rigide de la masse de liquide et notamment le fait que la vitesse du liquide au niveau de la sortie de rayon  $r$  est supérieure à la vitesse du liquide plus haut dans le tube de rayon  $R$ . En somme, il nous faut tenir compte des lois de la mécanique des fluides.

#### 10.4.2 Prise en compte des effets non-linéaires

On suppose tout d'abord que le liquide est un fluide parfait, incompressible ce qui ne doit pas choquer le lecteur au vu des résultats de la section 10.3.2 où l'on a montré que la viscosité ne joue pas de rôle dans le phénomène périodique d'émission de bulle. Pour simplifier les calculs, on suppose que le champ de vitesse dans le liquide ne dépend que du temps et de la hauteur  $z$  et est dirigé suivant l'axe ( $Oz$ ) :

$$\underline{U}(x, y, z, t) = U(z, t)\underline{e}_z \quad (10.12)$$

Cette hypothèse est à remettre en question pour la portion de liquide se trouvant au niveau du trou de sortie puisque à cet endroit le champ de vitesse possède des composantes radiales que l'on ne peut plus négliger. Ces composantes sont d'autant plus importantes que le rapport des rayons  $R/r$  est élevé. Loin du rayon d'échange, cette hypothèse se justifie en observant que l'interface reste horizontale tout au long de la vidange.

On va décomposer une période en deux phases : Tout d'abord un temps où le liquide est expulsé hors du tube puis un temps où la bulle d'air entre dans le tube.

#### Émission du liquide hors du tube

L'équation d'Euler est le point de départ de notre calcul :

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + (\underline{U} \cdot \text{grad}) \underline{U} \right) = - \text{grad} p + \rho \underline{g}. \quad (10.13)$$

Si l'on projette cette équation sur l'axe ( $Oz$ ), on obtient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g. \quad (10.14)$$

Intégrons cette équation le long d'une ligne de courant :

$$\int_{z(t)}^L \left( \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \right) dz = 0, \quad (10.15)$$

soit :

$$\int_{z(t)}^L \frac{\partial U}{\partial t} dz + \left[ \frac{U^2(z)}{2} + \frac{p(z)}{\rho} - gz \right]_z^L = 0. \quad (10.16)$$

Le premier terme peut être calculé de la manière suivante :

$$\int_{z(t)}^L \frac{\partial U(\alpha)}{\partial t} d\alpha = \int_{z_{eq}}^L \frac{\partial U(\alpha)}{\partial t} d\alpha + \int_{z(t)}^{z_{eq}} \frac{\partial U(\alpha)}{\partial t} d\alpha. \quad (10.17)$$

Les bornes de la première intégrale sont constantes et, en tenant compte de l'incompressibilité du fluide, on peut écrire que :

$$\int_{z_{eq}}^L \frac{\partial U(\alpha)}{\partial t} d\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_{eq}}^L U(\alpha) d\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_{eq}}^L U(z) \frac{S(z)}{S(\alpha)} d\alpha = (L - z_{eq}) \frac{d^2 \delta z}{dt^2}. \quad (10.18)$$

La deuxième intégrale est approximée à l'ordre 1 comme suit :

$$\int_{z(t)}^{z_{eq}} \frac{\partial U(\alpha)}{\partial t} d\alpha = (z_{eq} - z(t)) \frac{\partial U(z)}{\partial t} = -\delta z \frac{d^2 \delta z}{dt^2}. \quad (10.19)$$

Finalement, on a :

$$\int_{z(t)}^L \frac{\partial U(\alpha)}{\partial t} d\alpha = (L - z_{eq} - \delta z) \frac{d^2 \delta z}{dt^2}. \quad (10.20)$$

Le calcul du second terme donne :

$$\left[ \frac{U^2(z)}{2} + \frac{p(z)}{\rho} - gz \right]_{z(t)}^L = \frac{U^2(z)}{2} \left( \left( \frac{S(z)}{S(L)} \right)^2 - 1 \right) + \frac{P(L) - P(z)}{\rho} - g(L - z), \quad (10.21)$$

où  $S(z)$  et  $S(L) = s$  sont respectivement les surfaces au niveau de l'interface en haut du tube et au niveau du trou de sortie. Si on approxime la pression en sortie de tube en la supposant égale à la pression atmosphérique,  $P(L) = P_0$ , on a :

$$\frac{P(L) - P(z)}{\rho} - g(L - z) = \frac{P_0 - P(z_{eq}) + P(z_{eq}) - P(z)}{\rho} - g(L - z_{eq} + z_{eq} - z). \quad (10.22)$$

On a défini  $\delta P = P - P_{eq}$  et  $\delta z = z - z_{eq}$ , en utilisant la relation d'équilibre (10.2) :  $P_{eq} = P_0 - \rho g(L - z_{eq})$ , on simplifie l'équation (10.22) en :

$$\frac{P(L) - P(z)}{\rho} - g(L - z) = -\frac{\delta P}{\rho} + g(\delta z). \quad (10.23)$$

Afin d'obtenir une équation différentielle en  $\delta z$ , il convient de relier  $\delta z$  et  $\delta P$  à l'aide de la relation 10.7 :

$$(L - z_{eq}) \frac{d^2 \delta z}{dt^2} + \delta z \frac{d^2 \delta z}{dt^2} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{S}{s} \right)^2 - 1 \right) \left( \frac{d\delta z}{dt} \right)^2 + \left( \frac{\gamma P_{eq}}{\rho z_{eq}} + g \right) \delta z = 0 \quad (10.24)$$

Des simplifications s'imposent afin de pouvoir interpréter physiquement ce résultat. Ainsi nous négligeons les termes du second ordre sauf le terme en  $(S/s)^2$  qui, lorsque  $S/s$  est élevé, peut devenir non négligeable. On néglige aussi  $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$  devant le terme  $P_{eq}/(\rho z_{eq})$ , dix fois plus important. On obtient donc lors de la première phase de sortie de liquide, i.e. de descente de l'interface, l'équation suivante :

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} + \frac{\left( \frac{S}{s} \right)^2}{2L(1 - z_{eq}^*)} \left( \frac{d\delta z}{dt} \right)^2 + \frac{\gamma P_0}{\rho L^2} \frac{1 - \delta(1 - z_{eq}^*)}{z_{eq}^*(1 - z_{eq}^*)} \delta z = 0. \quad (10.25)$$

Cette équation peut s'écrire :

$$\boxed{\frac{d^2\delta z}{dt^2} + \frac{\left(\frac{R}{r}\right)^4}{2L(1-z_{eq}^*)} \left(\frac{d\delta z}{dt}\right)^2 + \omega_0^2 \delta z = 0} \quad (10.26)$$

On retrouve une équation proche de celle obtenue par l'analogie mécanique, il y a en plus un terme non linéaire qui devient important lorsque  $z_{eq}^*$  est proche de 1 et lorsque le rapport des rayons  $R/r$  est élevé ce qui correspond à nos observations sur le précédent modèle.

Il reste maintenant à modéliser la deuxième phase du cycle : la rentrée de la bulle d'air.

### Entrée de la bulle dans le tube

Lors de la première phase, le liquide sort du tube, l'interface descend et la pression dans la poche d'air diminue jusqu'à ce que la différence de pression entre l'extérieur et la poche d'air soit suffisante pour contrer la gravité et l'inertie du liquide. On entre alors dans la deuxième partie du cycle. La poche d'air joue le rôle d'un ressort et agit sur le liquide comme une force de rappel. L'interface va alors remonter. Comme le fluide est incompressible, on devrait supposer que la vitesse de l'interface du haut du tube est la même que celle du bas (cf premier modèle section 10.4.1) or nos observations expérimentales montrent que la vitesse du fluide en bas du tube, après avoir été supérieure à celle de l'interface du haut, est nulle dans cette partie du cycle. Une bulle d'air va donc rentrer dans le tube et compenser en volume la remontée de l'interface du haut.

Si on fait un calcul analogue à celui de la première partie, on a :

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + (\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}) \underline{U} \right) = - \underline{\text{grad}} p + \rho \underline{g}, \quad (10.27)$$

que l'on projette de la même manière suivant (Oz) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g, \quad (10.28)$$

et en intégrant le long d'une ligne de courant, on a :

$$\int_{z(t)}^L \frac{\partial U}{\partial t} dz + \left[ \frac{U^2(z)}{2} + \frac{p(z)}{\rho} - gz \right]_{z(t)}^L = 0. \quad (10.29)$$

Le premier terme vaut toujours :

$$\int_{z(t)}^L \frac{\partial U(\alpha)}{\partial t} d\alpha = (L - z_{eq} - \delta z) \frac{d^2\delta z}{dt^2}. \quad (10.30)$$

Le calcul du second terme est légèrement différent puisque maintenant  $U(L) = 0$  :

$$\left[ \frac{U^2(z)}{2} + \frac{p(z)}{\rho} - gz \right]_{z(t)}^L = - \frac{U^2(z)}{2} + \frac{P(L) - P(z)}{\rho} - g(L - z), \quad (10.31)$$

$$\left[ \frac{U^2(z)}{2} + \frac{p(z)}{\rho} - gz \right]_{z(t)}^L = - \frac{U^2(z)}{2} - \frac{\delta P}{\rho} - g\delta z, \quad (10.32)$$

$$\left[ \frac{U^2(z)}{2} + \frac{p(z)}{\rho} - gz \right]_{z(t)}^L = - \frac{1}{2} \left( \frac{d\delta z}{dt} \right)^2 + \left( \frac{\gamma P_{eq}}{\rho z_{eq}} + g \right) \delta z. \quad (10.33)$$

L'équation du mouvement devient donc :

$$(L - z_{eq}) \frac{d^2 \delta z}{dt^2} - \delta z \frac{d^2 \delta z}{dt^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{d\delta z}{dt} \right)^2 + \left( \frac{\gamma P_{eq}}{\rho z_{eq}} + g \right) \delta z = 0. \quad (10.34)$$

Les mêmes simplifications que pour la première phase nous amène à :

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} + \frac{\gamma P_0}{\rho L^2} \frac{1 - \delta(1 - z_{eq}^*)}{z_{eq}^*(1 - z_{eq}^*)} \delta z = 0. \quad (10.35)$$

Cette équation peut s'écrire :

$$\boxed{\frac{d^2 \delta z}{dt^2} + \omega_0^2 \delta z = 0} \quad (10.36)$$

On retrouve donc l'équation (10.9) de l'oscillateur harmonique de même pulsation, indépendante par rapport aux rayons  $R$  et  $r$ , intervenant dans l'analogie mécanique.

### Calcul de $T_0^v$

Le calcul de la période en fonction de la position de l'interface  $z_{eq}^*$  a été effectué par intégration numérique. On débute le calcul à  $z_{eq}^* = 0, 1$  et on suppose que la première période est égale à  $T_0$ , période intervenant dans l'analogie mécanique. Pour chaque  $z_{eq}^*$ , on intègre numériquement l'équation (10.26) de la première partie du cycle. On suppose que le  $\delta z$  initial est tel que l'amplitude des oscillations de l'interface correspond à un volume de l'ordre du volume de la bulle entrée lors du cycle précédent. La vitesse initiale de descente de l'interface  $d\delta z/dt$  est supposée nulle. Quand cette vitesse de descente s'annule, on change de phase de cycle et on intègre l'équation (10.36) correspondante. Lorsque la vitesse s'annule à nouveau, on recommence le calcul pour une nouvelle hauteur  $z_{eq}^*$  d'équilibre.

## 10.5 Résultats expérimentaux et discussions

La pertinence du second modèle est testée sur les figures 10.15, 10.16 et 10.17. Nous présentons en ordonnée la période expérimentale et la période issue du calcul numérique du second modèle adimensionnées par la période provenant de l'analogie mécanique. Ces périodes adimensionnées sont présentées en fonction de la position relative de l'interface  $z_{eq}^*$ . Les points expérimentaux sont présentés sous la forme de points et les résultats du calcul numérique du second modèle sont présentés en trait plein.

Sur ces 3 figures, on constate que, excepté pour  $z_{eq}^*$  petit devant 1, le modèle est en bon accord avec les expériences pour les deux rayons d'échange présentés. On ne remarque plus les écarts observés entre le premier modèle et les résultats expérimentaux pour  $z_{eq}^* \approx 1$  même lorsque le rapport  $R/r$  est élevé comme dans le tube 1 (figure 10.15).

On constate néanmoins qu'il existe un écart entre le modèle et les points expérimentaux pour  $z_{eq}^* \approx 0$ . Cet écart est plus important sur la figure 10.15 qui concerne le tube 1 que sur les autres figures concernant les tubes 2 et 3. Cet écart s'explique en remarquant que notre méthode de calcul numérique du second modèle suppose que la période initiale est  $T_0$ , période issue du premier modèle. Or nous avons montré que ce premier modèle n'est plus pertinent pour des rapports  $R/r$  élevés, notamment dans le tube 1 où ce rapport atteint la valeur de 17,4 pour  $r = 0,005$  m.



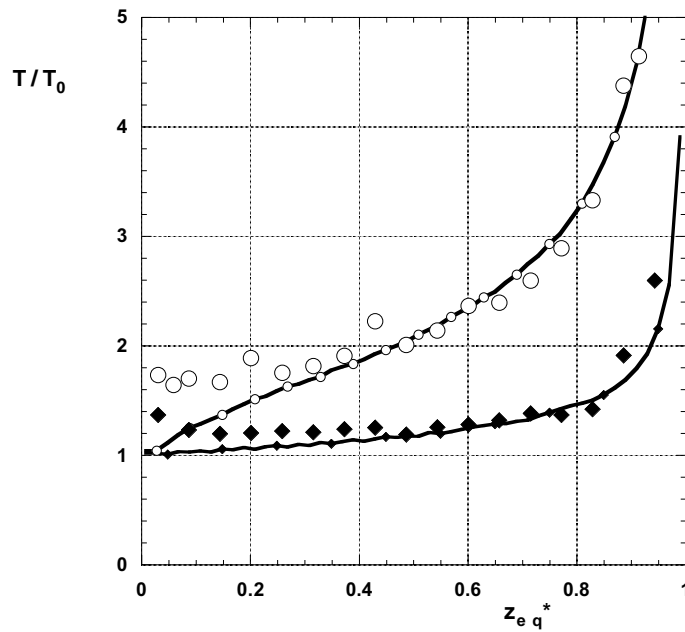


Figure 10.15: Période adimensionnée  $T^* = T/T_0$  par la période issue du calcul de l'analogie mécanique en fonction de la position relative de l'interface  $z_{eq}^*$  pour le tube 1 et des rayons d'échange différents.  $\circ$  :  $r = 0,0050$  m ;  $\blacklozenge$  :  $r = 0,0132$  m. Le fluide utilisé est l'eau. Les courbes en traits pleins correspondantes sont issues du calcul numérique du second modèle

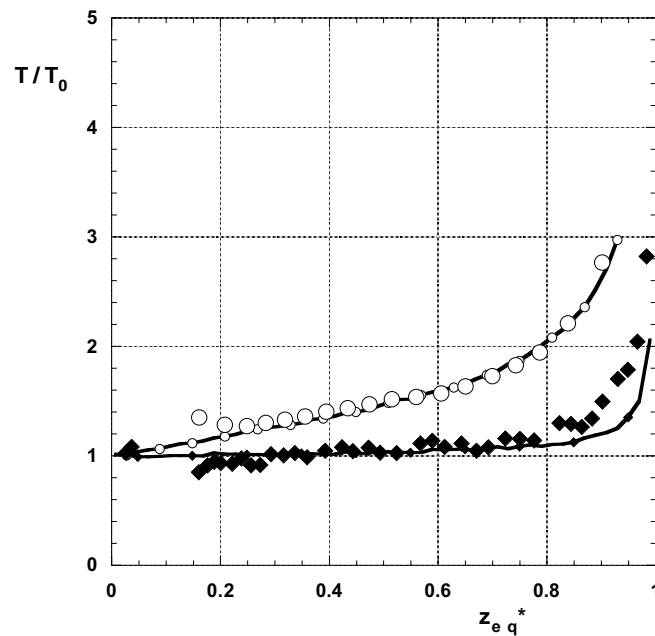


Figure 10.16: Période adimensionnée  $T^* = T/T_0$  par la période issue du calcul de l'analogie mécanique en fonction de la position relative de l'interface  $z_{eq}^*$  pour le tube 2 et des rayons d'échange différents.  $\circ$  :  $r = 0,0040$  m ;  $\blacklozenge$  :  $r = 0,0132$  m. Le fluide utilisé est l'eau. Les courbes en traits pleins correspondantes sont issues du calcul numérique du second modèle

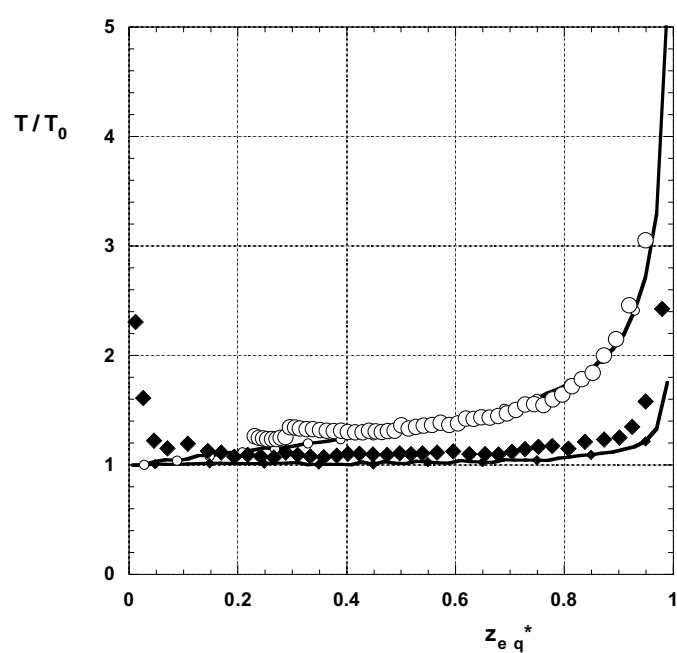


Figure 10.17: Période adimensionnée  $T^* = T/T_0$  par la période issue du calcul de l'analogie mécanique en fonction de la position relative de l'interface  $z_{eq}^*$  pour le tube 3 et des rayons d'échange différents.  $\circ$  :  $r = 0,0040$  m ;  $\blacklozenge$  :  $r = 0,0132$  m. Le fluide utilisé est l'eau. Les courbes en traits pleins correspondantes sont issues du calcul numérique du second modèle



# 11. ÉTUDE DU TEMPS COURT LIÉ AU REMPLISSAGE D'UN RÉSERVOIR

## 11.1 Problème posé

Nous avons étudié le remplissage d'un tube cylindrique vertical de longueur  $L$  et de rayon  $R$ . Ce tube est ouvert dans sa partie supérieure au moyen d'un trou circulaire de rayon  $r \leq R$  pratiqué sur l'axe du cylindre. Le tube est initialement vide et plongé dans une cuve remplie d'un liquide de densité  $\rho$ , de viscosité  $\nu$  et de tension de surface  $\sigma$ .

Lors de nos expériences, nous avons observé que le remplissage se déroule de manière discontinue. Ce remplissage s'effectuant au travers d'un orifice unique, on observe une succession de sortie de bulles d'air du réservoir et de rentrée du liquide sous la forme de jets liquides. Ce retour à l'équilibre oscillant est caractérisé par la période des oscillations  $T_0^r$ . Ce mode oscillant débute à l'ouverture du réservoir et continue jusqu'au remplissage.

Dans l'exemple du tube cylindrique de longueur  $L = 0,2950$  m, de rayon  $R = 0,0180$  m, de rayon d'échange  $r = 0,0075$  m et immergé dans de l'eau, le remplissage dure 25 secondes et la période d'émission des bulles varie entre 0,5 et 0,1 seconde.

Nous étudions la période d'émission des bulles en fonction des paramètres géométriques du tube et de la densité  $\rho$  du liquide :

$$T_0^r = f(L, R, r, \rho) \quad (11.1)$$

Les effets de la viscosité  $\nu$  du liquide et de la tension de surface  $\sigma$  entre les deux fluides ne sont pas discutés.

## 11.2 Montage expérimental

Le montage expérimental est présenté sur la figure 11.1. La cuve est un réservoir de base carrée métrique et de hauteur 1,5 m. Son volume,  $1,5 \text{ m}^3$ , nous a imposé l'utilisation de l'eau comme fluide de plus forte densité et nous n'avons pas abordé le problème de l'influence de la viscosité du fluide lourd ou de la tension de surface entre les deux fluides. Dans cette cuve, nous avons immergé un tube cylindrique de longueur  $L$  et de rayon  $R$ . Ce tube est initialement rempli d'air. La hauteur d'eau  $h$  au dessus du tube est l'un des paramètres dont nous étudions l'influence. Ce tube est connecté à l'extérieur par un trou de rayon  $r$  ( $r \leq R$ ) situé dans sa partie supérieure. Ce rayon d'échange est au minimum de 0,0075 m, taille de trou en dessous de laquelle il n'y a plus d'échange du fait de la stabilisation de l'interface par la tension de surface (voir annexe A). A  $t = 0$ , on retire la feuille de plastique rigide placée sur le trou d'échange. Un phénomène de sortie de bulle d'air du tube est alors observé. Le passage des bulles à la sortie du réservoir est quantifié à l'aide d'une caméra numérique rapide Kodak HS4540. La fréquence d'acquisition des images est de 125 images par seconde avec une résolution spatiale de 256x256 pixels. Un programme de traitement d'images développé sous Matlab repère la sortie des bulles et calcule la période de passage de ces bulles en fonction du temps.

Il est important de remarquer que nous utilisons ici un système local de mesure de passage de bulle. Il ne mesure pas directement la masse d'eau entrée en fonction du temps (loi de

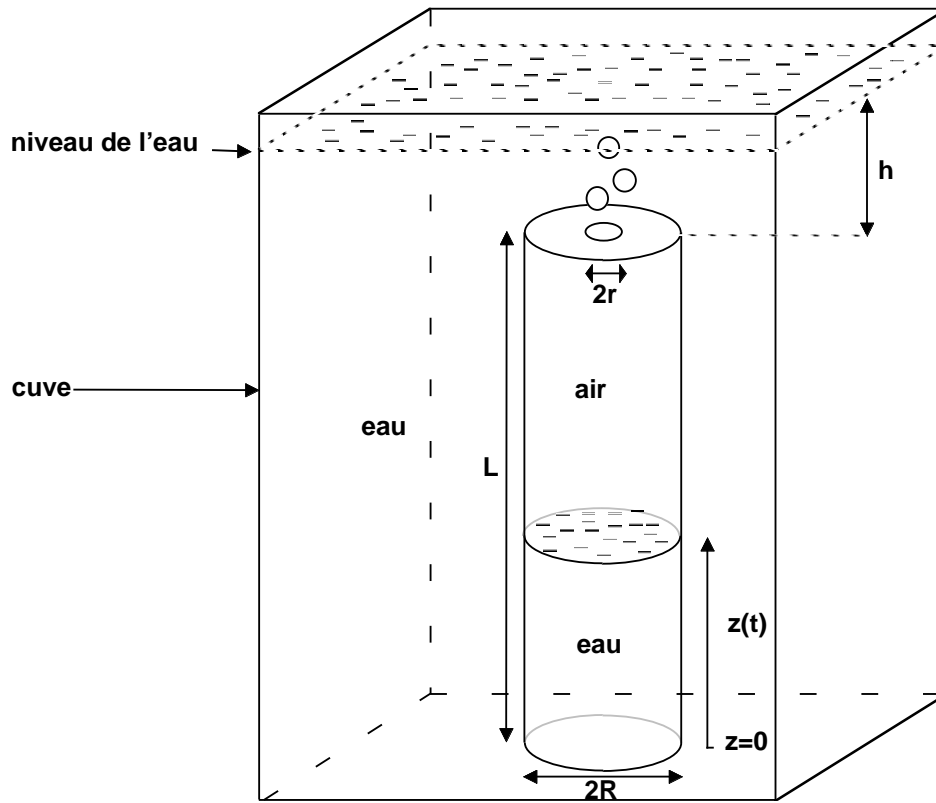


Figure 11.1: Montage expérimental

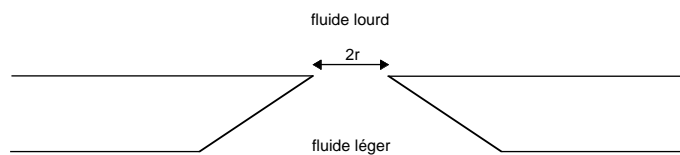


Figure 11.2: Vue en coupe de la section d'échange

remplissage). Ce système non intrusif qui s'adapte aussi bien au problème de la vidange que du remplissage est cependant sensible à d'autres phénomènes qui limitent son utilisation : le sillage laissé par les bulles qui remontent à la surface peut influencer la sortie de la bulle suivante ou provoquer une coalescence de deux bulles et ainsi fausser la mesure de la période. De façon à éviter ce biais, Il a été décidé de limiter notre étude à des rayons d'échange inférieurs à 0,0175 m. Dans la gamme  $r \in [0,0075 \text{ m}; 0,0175 \text{ m}]$  l'émission de bulles est très régulière et les phénomènes de sillage/coalescence ne sont pas observés.

La position moyenne  $z$  (cf. figure 11.1) de l'interface air-eau dans le tube est mesurée en fonction du temps grâce à une caméra JVC-3CCD Ky-25E reliée à un magnétoscope Panasonic AG-7355. Afin que le fluide le plus lourd ne ressente l'influence que d'une seule longueur, le rayon  $r$ , lors du passage au travers de la section d'échange, celle ci est biseautée (cf. figure 11.2). L'angle du biseau est  $20^\circ$  avec l'aiguille pointant vers le fluide le plus lourd.

n° du tube	Longueur $L$ (m)	rayon $R$ (m)	rayon $r$ (m)
1	0,8600	0,0800	0,0100
2	0,8600	0,0800	0,0130
3	0,8600	0,0800	0,0175
4	0,8600	0,0395	0,0100
5	0,8600	0,0231	0,0100
6	0,4300	0,0395	0,0100

Table 11.1: Caractéristiques géométriques des tubes utilisés

Les caractéristiques géométriques des tubes utilisés sont présentées dans le tableau 11.1. Ces tubes sont en Plexiglas, ce qui permet d'observer aisément l'interface air-eau à l'intérieur du tube. On remarque que la hauteur  $L$  des tubes varie de 0,8600 m à 0,4300 m et le rayon  $R$  de 0,0800 m à 0,0231 m.

## 11.3 Observations expérimentales

### 11.3.1 Premières observations

La figure 11.3 présente une série d'images de bulle prises durant une période  $T_0^r$  à intervalle régulier de  $1/50^e$  s. Sur la première photo, on observe l'apparition d'une bulle au niveau du trou ainsi que la bulle précédente qui remonte à la surface. Sur les quatre photos suivantes, cette bulle grossie et se détache entre les images 5 et 6. On constate sur les photos suivantes que la sortie de la bulle 2 n'est pas immédiate : durant quatre nouvelles photos, il y a entrée de l'eau dans le tube (ce phénomène n'est pas visible ici) avant l'apparition de la bulle suivante sur la photo 10 (on peut deviner sa naissance sur la photo 9).

### 11.3.2 Influence de la hauteur d'eau $h$

Le tableau de résultat 11.2 s'organise comme suit : La première colonne représente le numéro de l'expérience, la deuxième colonne est la hauteur d'eau  $h$  au dessus du trou exprimée en m et la troisième colonne montre la période  $T_0^r$  de l'émission de bulle mesurée à la moitié du remplissage ( $z^* = 0,5$ ). On constate sur ce tableau que la période  $T_0^r$  ne varie pas de manière significative avec  $h$ .

Nous nous sommes placés dans tout le reste de l'étude à  $h$  supérieur à 6 fois le rayon  $r$  du trou. Intuitivement, on peut penser que des problèmes vont apparaître lorsque la hauteur  $h$  d'eau au dessus du tube est de l'ordre de  $r$ .

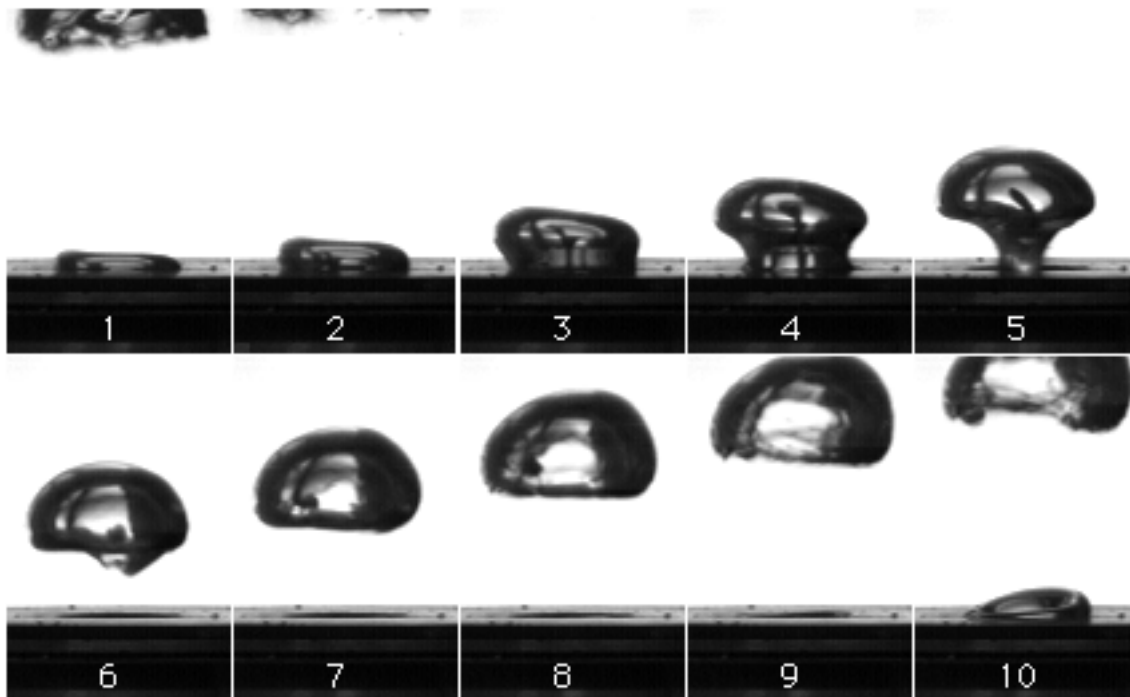


Figure 11.3: Observations expérimentales d'une période. tube 4 :  $L = 0,8600$  m,  $R = 0,0395$  m et  $r = 0,0100$  m. écart entre deux photos :  $1/50^e$  s

n° de l'expérience	hauteur $h$ (m)	période $T_0^r$ (s)
1	0,600	0,132
2	0,200	0,133
3	0,060	0,133

Table 11.2: influence de la hauteur d'eau  $h$  : Période des oscillations  $T_0^r$  en fonction de la hauteur d'eau au dessus du tube  $h$  (m) à mi-remplissage ( $z^* = 0,5$ ), tube 6 :  $L = 0,4300$  m,  $R = 0,0395$  m et  $r = 0,0100$  m

### 11.3.3 Influence de la longueur $L$

La figure 11.4 montre l'évolution de la période  $T_0^r$  en fonction du niveau de remplissage des tubes  $z^*$  pour le tube 4 ( $\blacklozenge$ ) et le tube 6 ( $\blacktriangle$ ). Ces deux tubes ont des longueurs  $L$  différentes mais le même rayon  $R$  et la même section d'échange de rayon  $r$ .

On peut remarquer que la période  $T_0^r$  est mesurée initialement en fonction du temps et non en fonction de  $z^*$ . La présentation de  $T_0^r$  en fonction de  $z^*$  se justifie car, comme nous l'avons montré au paragraphe 8.3.1, le niveau  $z$  de l'eau dans le tube est une fonction linéaire du temps. On peut alors présenter  $T_0^r$  en fonction de la hauteur  $z$  de l'interface air-eau dans le tube adimensionné par la longueur  $L$  du tube.  $z^*$  représente alors le niveau de remplissage du tube (à  $z^* = 0$  le tube est vide et il est plein lorsque  $z^* = 1$ ).

On observe que la période  $T_0^r$  diminue continûment avec  $z^*$  pour atteindre une valeur de 0,1 s à la fin du remplissage. Cette remarque est commune à toutes nos expériences.

On constate aussi que  $T_0^r$  varie peu avec  $L$  et ce d'autant moins que le tube est rempli ( $z^* \approx 1$ ). Pour  $z^*$  supérieur à 0,9, on n'observe plus sur nos mesures de variation de  $T_0^r$  avec  $L$ .

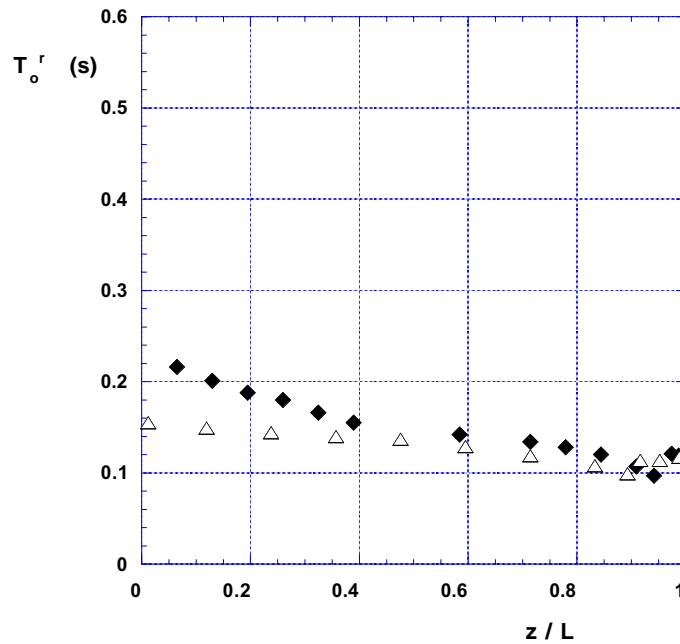


Figure 11.4: Influence de  $L$  :  $T_0^r$  en fonction de  $z^*$  pour  $L = 0,8600$  m (◆) et  $L = 0,4300$  m (△),  $R = 0,0395$  m et  $r = 0,0100$  m

#### 11.3.4 Influence du rayon d'échange $r$

Sur la figure 11.5, on a reporté la période  $T_0^r$  mesurée en fonction de  $z^*$  pour trois tubes de même longueur  $L = 0,8600$  m, de même rayon intérieur  $R = 0,0800$  m et de rayon  $r$  différents :  $r = 0,0100$  m (tube 1),  $r = 0,0130$  m (tube 2) et  $r = 0,0175$  m (tube 3). On observe, comme sur le graphe précédent, que  $T_0^r$  diminue au fur et à mesure que le tube se remplit. La période  $T_0^r$  augmente de manière sensible lorsque le rayon du trou  $r$  diminue. La valeur de  $T_0^r$  converge vers 0,1 s en fin de remplissage pour toutes les valeurs de  $L$ ,  $R$  et  $r$  considérées.

#### 11.3.5 Influence du rayon $R$

L'influence du rayon du tube sur la période d'émission des bulles est mis en évidence sur la figure 11.6. Sur ce graphe, on a représenté la période  $T_0^r$  en fonction de  $z^*$  pour trois tubes de rayons intérieurs  $R$  différents :  $R = 0,0800$  m (tube 1),  $R = 0,0395$  m (tube 4) et  $R = 0,0231$  m (tube 5). Comme précédemment, on constate que  $T_0^r$  diminue lorsque le tube se remplit jusqu'à atteindre la valeur de 0,1 s pour  $z^*$  proche de 1.

On peut voir que la période  $T_0^r$  varie fortement avec le rayon du tube. La période initiale augmente d'un facteur proche de trois lorsque  $R$  passe de 0,0395 m à 0,0800 m. Cependant, on remarque que l'influence de  $R$  sur  $T_0^r$  n'est pas constante durant tout le remplissage et la période  $T_0^r$  devient même indépendante de  $R$  lorsque  $z^*$  est proche de 1.

Le rayon du tube semble ainsi être le paramètre le plus important influençant la valeur de la période  $T_0^r$  d'émission des bulles.

Dans la section suivante, nous allons présenter un modèle d'échange, liquide-gaz, qui cherche à expliquer le comportement du temps court en fonction de  $L$ ,  $R$  et  $r$  et du niveau de remplissage du tube  $z^*$ .



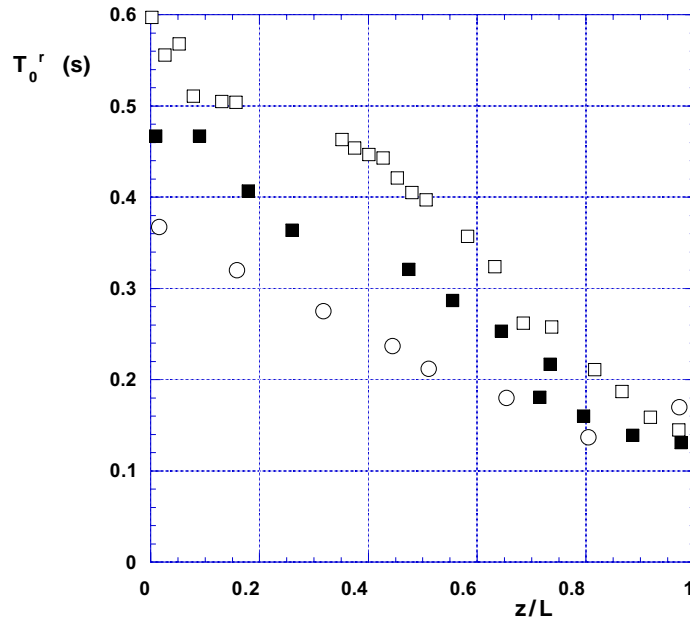


Figure 11.5: influence de  $r$  :  $T_0^r$  en fonction de  $z^*$  pour  $L = 0,8600$  m,  $R = 0,0800$  m et  $r = 0,0100$  m ( $\square$ ),  $r = 0,0130$  m ( $\blacksquare$ ) et  $r = 0,0175$  m ( $\circ$ )

## 11.4 Modèles

Notre modèle de la période de remplissage est issu d'un raisonnement analogue à celui mené pour la vidange d'un réservoir. Nous introduisons une analogie mécanique du type résonateur de Helmholtz où une masse  $m$  de volume  $v$  rentre en résonance avec un volume  $V > v$  de gaz. Ce type d'oscillateur est plus adapté à l'étude du remplissage que le système masse-ressort introduit pour modéliser le temps court de vidange. En effet, dans le cas du remplissage, nous observons la présence d'une poche d'air de rayon  $R$  et de longueur  $L - z$  connectée par un trou de rayon  $r < R$  à une masse d'eau présente au dessus du trou, dans la cuve.

On suppose donc que la sortie de bulle, de période  $T_s$ , est générée par un phénomène oscillatoire de type résonateur de Helmholtz

### 11.4.1 Analogie mécanique : le résonateur de Helmholtz

Le schéma de principe du résonateur de Helmholtz est présenté sur la figure 11.7. On cherche à déterminer la fréquence de résonance d'une masse  $m$  (de volume  $v$ ) dans un tube de section  $s$  connecté avec un réservoir de volume  $V$  grand devant  $v$ . Nous travaillons dans l'approximation où la période  $T_s$  est très grande par rapport au temps acoustique  $L/c$ ,  $c$  étant la vitesse du son dans l'air. Dans cette approximation, il n'y a pas de gradient spatial de pression dans le réservoir.

Une petite variation  $\delta x$  de la position de la masse  $m$  entraîne une variation  $\delta P$  de la pression dans le réservoir, on peut alors écrire le principe fondamental de la dynamique :

$$m \frac{d^2(\delta x)}{dt^2} = \delta P s \quad (11.2)$$

Si l'on suppose que la transformation est adiabatique, on peut écrire que :

$$PV^\gamma = \text{Cste} \quad (\text{avec } \gamma = 1,4), \quad (11.3)$$

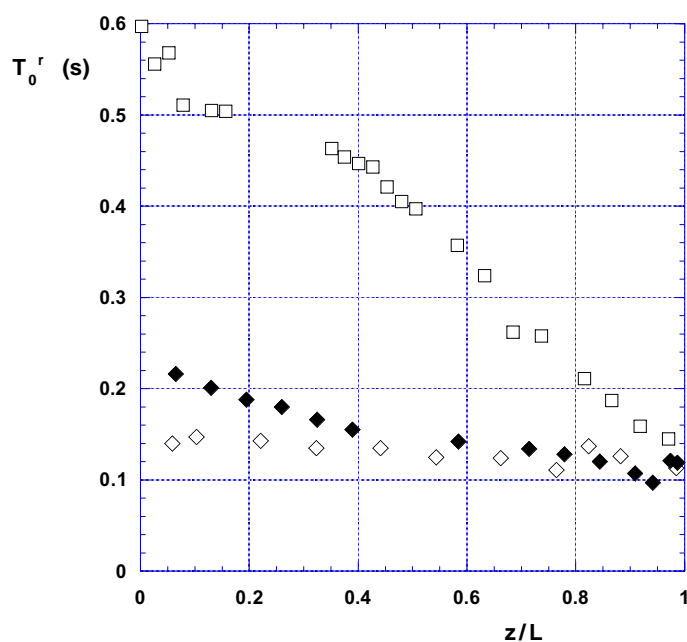


Figure 11.6: influence de  $R$  :  $T_0^r$  en fonction de  $z^*$  pour  $L = 0,8600$  m ,  $R = 0,0231$  m ( $\diamond$ ),  $R = 0,0395$  m ( $\blacklozenge$ ),  $R = 0,0800$  m ( $\square$ ) et  $r = 0,0100$  m

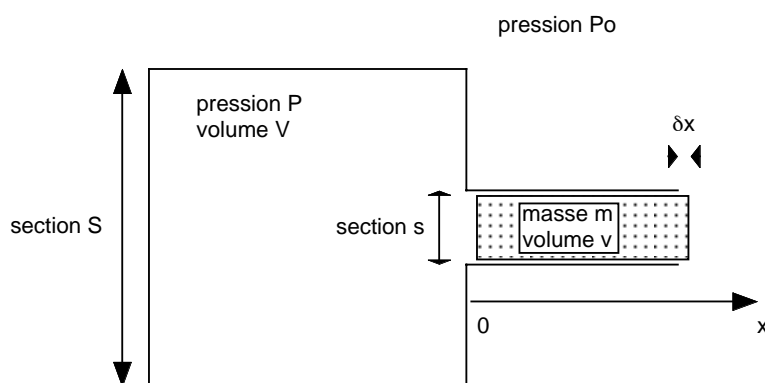


Figure 11.7: Schéma de principe du résonateur de Helmholtz

ce qui nous donne :

$$\frac{\delta P}{P} = -\gamma \frac{\delta V}{V}. \quad (11.4)$$

On a ainsi :

$$\delta P = -\gamma \frac{P}{V} \delta V. \quad (11.5)$$

Or par conservation du volume :

$$\delta V = \delta x s. \quad (11.6)$$

L'équation (11.2) s'écrit donc :

$$m \frac{d^2(\delta x)}{dt^2} + \frac{\gamma P s^2}{V} \delta x = 0. \quad (11.7)$$

C'est l'équation d'un oscillateur de fréquence  $\omega_0^2$  avec :  $\omega_0^2 = \gamma P s^2 / m V$  et de solution :

$$\delta x = X_{max} \cos(\omega_0 t + \phi). \quad (11.8)$$

La période des oscillations s'écrit alors :

$$T_s = 2\pi \sqrt{\frac{mV}{\gamma P s^2}}. \quad (11.9)$$

Dans notre cas (cf figure 11.1), le volume du résonateur est le volume de la poche d'air présente dans le tube, ce volume varie au cours du remplissage, on a donc :

$$V = S(L - z) = SL(1 - z^*) \quad (11.10)$$

La période  $T_s$  s'écrit alors :

$$T_s = 2\pi \sqrt{L} \sqrt{\frac{mS}{\gamma P s^2}} \sqrt{1 - z^*}. \quad (11.11)$$

Cette expression de la période des oscillations de remplissage peut être comparée à celle obtenue dans le cas de la vidange :

$$T_0 \approx 2\pi L \sqrt{\frac{\rho}{\gamma P_0}} \sqrt{z^*(1 - z^*)} \quad (11.12)$$

Ces deux expressions de la période sont issues d'un raisonnement analogue basé sur la modélisation d'un oscillateur mécanique. Leur structure est identique mais elles possèdent quelques différences majeures.

On peut remarquer que l'on ne retrouve pas dans l'équation (11.11) le comportement "en forme de cloche" de la période en fonction de  $z^*$  de l'équation (11.12). Cette modélisation d'un résonateur prédit une variation monotone en  $\sqrt{1 - z^*}$  de la période, comportement conforme à nos observations expérimentale.

La dépendance de la période en fonction de  $L$  est différente dans les deux modèles, la longueur du tube intervient directement dans l'expression de la période de vidange tandis que la période des oscillations de remplissage varie, selon (11.11), en  $\sqrt{L}$ .

On remarque aussi que la pression  $P$  dans le gaz intervient dans le modèle du résonateur alors que l'équation (11.12) issue de l'analogie masse ressort fait apparaître l'influence de la pression atmosphérique.

Les dépendances en  $R$  et  $r$  sont délicates à discuter à ce stade du calcul de  $T_0^r$  puisque ces paramètres interviennent dans l'expression de  $S$ ,  $s$  et  $m$ .

La section  $s$  de contact entre les deux fluides, correspond à la surface d'échange de rayon  $r$  :

$$s = \pi r^2. \quad (11.13)$$

La masse d'eau à mettre en mouvement est, elle, plus délicate à définir. Elle va varier avec  $X_{max}$  qui est le déplacement maximal de la masse  $m$ , de plus elle se situe au dessus du trou d'échange de surface  $s$ , équation (11.13). On peut ainsi supposer que la masse  $m$  s'écrit :

$$m = \beta \rho s X_{max}, \quad (11.14)$$

où  $\beta$  est un paramètre qui tient compte de notre incertitude sur la masse  $m$  que le résonateur doit mettre en mouvement.

11.4.2 Remarque sur le calcul de  $X_{max}$ 

Nous avons observé que la période  $T_0^r$  évolue durant le remplissage (cf figures 11.4, 11.5 et 11.6), néanmoins, nous pouvons écrire que le nombre de bulles émises dans un intervalle de temps  $\Delta T$  est égal à  $\Delta T/T_0^r$ . Le volume d'une bulle est donné par  $V_{bulle} = X_{max}s$ . Le volume de gaz sortant en un temps  $\Delta T$  est donc égal à :

$$\Delta V = X_{max}s \frac{\Delta T}{T_0^r}. \quad (11.15)$$

La vitesse  $U_{interface}$  de remplissage du tube est constante. Si la section du tube est notée par  $S$ , nous pouvons écrire l'égalité entre le volume de gaz sortant et le volume de liquide entrant en un temps  $\Delta T$  :

$$X_{max}s \frac{\Delta T}{T_0^r} = U_{interface} S \Delta T, \quad (11.16)$$

ainsi :

$$X_{max}s = U_{interface} S T_0^r. \quad (11.17)$$

Or  $U_{interface} S = U_b s$ , où  $U_b = 0,5 \sqrt{g \cdot r}$  est la vitesse d'ascension d'une bulle infinie de rayon  $r$ . On obtient alors :

$$X_{max} = U_b T_0^r. \quad (11.18)$$

En remplaçant, dans l'équation (11.9),  $m$ ,  $V$  et  $s$  par leurs expressions obtenues précédemment, équations (11.10), (11.13) et (11.14), on obtient :

$$T_s = 2\pi \sqrt{\beta} \sqrt{\frac{\rho U_b L T_0^r}{\gamma P} \frac{R}{r} \sqrt{1 - z^*}}. \quad (11.19)$$

Si on suppose que la période  $T_0^r$  est entièrement modélisée par ce temps  $T_s$  de sortie de bulle, on obtient :

$$T_0^r = T_s = \left( 2\pi \sqrt{\beta} \sqrt{L} \sqrt{\frac{\rho U_b}{\gamma P} \frac{R}{r} \sqrt{1 - z^*}} \right)^2. \quad (11.20)$$

Ce modèle est testé sur la figure 11.8, qui présente sur le même graphe le modèle et les points expérimentaux. Sur cette figure, la période  $T_0^r$  est présentée en ordonnée en fonction de  $z^*$  pour différentes valeurs de  $L$ ,  $R$  et  $r$ . Les points représentent les résultats expérimentaux et les lignes en trait plein illustrent les résultats issus du modèle, équation (11.20). Ces résultats théoriques ont été calculés en ajustant le paramètre  $\beta = 0,25$ .

La figure 11.8 montre que l'ordre de grandeur de la période prévue par ce modèle est correct. Par contre celui-ci prévoit un temps de sortie de bulle nulle à la fin du remplissage ce qui n'est pas compatible avec nos observations expérimentales. Nous avons, en effet, remarqué que la période tend vers une valeur de 0,1 s lorsque  $z^*$  tend vers 1. Comme dans le cas de la vidange, l'analogie mécanique ne permet pas de modéliser la fin du retour à l'équilibre.

Dans cette modélisation, on remarque que nous n'avons pas tenu compte du phénomène de rentrée de l'eau qui se déroule consécutivement à la sortie des bulles, comme observé sur la séquence 11.3.

Le temps d'entrée de l'eau est celui nécessaire pour qu'un volume d'eau équivalent à celui de la bulle d'air sortie rentre dans le tube sous l'action de la gravité. On peut supposer que, lorsque  $z^* \approx 1$ , le temps  $T_s$  calculé précédemment devient négligeable devant le temps que met l'eau à tomber dans le réservoir. Il est donc nécessaire de développer un second modèle qui tient compte de nos observations expérimentales.

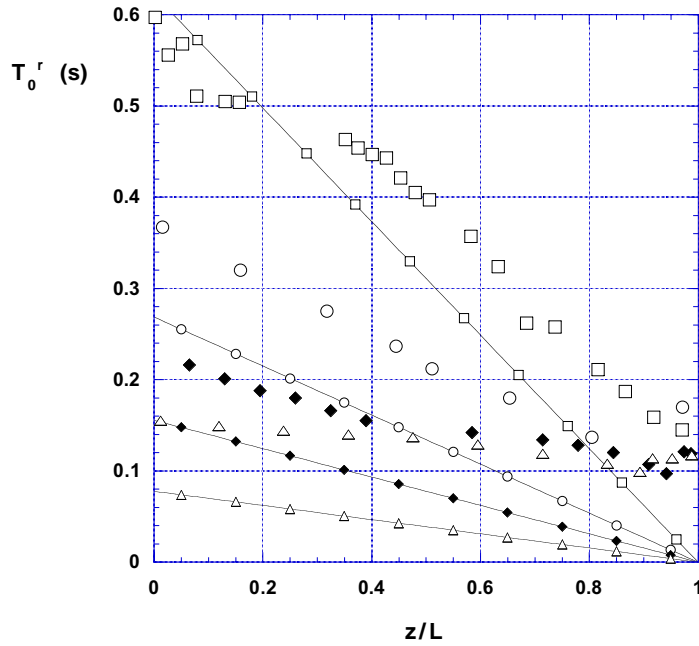


Figure 11.8: Présentation du premier modèle :  $T_0^r$  en fonction de  $z^*$  pour différentes valeurs de  $L$ ,  $R$  et  $r$  : tube 1 ( $\square$ ); tube 3 ( $\circ$ ); tube 4 ( $\blacklozenge$ ); tube 6 ( $\triangle$ ) avec  $\beta = 0,25$

#### 11.4.3 Modèle pour le temps d'entrée de l'eau

On suppose que le temps  $T_e$  d'entrée de l'eau dans le tube est le temps de chute libre nécessaire pour que l'eau atteigne  $X_{max}$ . La vitesse de chute libre est indépendante de la masse :  $v_e = \sqrt{2gz}$ , on a donc :

$$v_e = \frac{dz}{dt} = \sqrt{2g} \sqrt{z}, \quad (11.21)$$

d'où :

$$T_e = \int_0^{T_e} dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{X_{max}} \frac{dz}{\sqrt{z}}. \quad (11.22)$$

De la même manière que pour la détermination de  $T_s$ , on a une incertitude sur le volume d'eau entrant. Notre modèle en tient compte en introduisant un paramètre  $\alpha$  que l'on suppose aussi d'ordre unité.

$$T_e = \alpha \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{X_{max}}, \quad (11.23)$$

et, avec l'aide de l'équation (11.18) :

$$\boxed{T_e = \alpha \sqrt{\frac{2U_b T_0^r}{g}}}. \quad (11.24)$$

#### 11.4.4 Modèle de remplissage

La période  $T_0^r$  recherchée est le temps entre deux sorties de bulle, c'est à dire  $T_0^r = T_e + T_s$ . On a alors, d'après les équations (11.19) et (11.24) :

$$T_0^r = \alpha \sqrt{\frac{2U_b}{g}} \sqrt{T_0^r} + 2\pi \sqrt{\frac{\beta \rho U_b L T_0^r}{P}} \frac{R}{r} \sqrt{1 - z^*}, \quad (11.25)$$

d'où :

$$T_0^r = \left( \alpha \sqrt{2} \sqrt{\frac{U_b}{g}} + 2\pi \sqrt{\beta} \sqrt{\frac{\rho U_b L}{\gamma P}} \frac{R}{r} \sqrt{1 - z^*} \right)^2. \quad (11.26)$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres libres qui nous permettent d'ajuster notre modèle.

## 11.5 Résultats expérimentaux et discussions

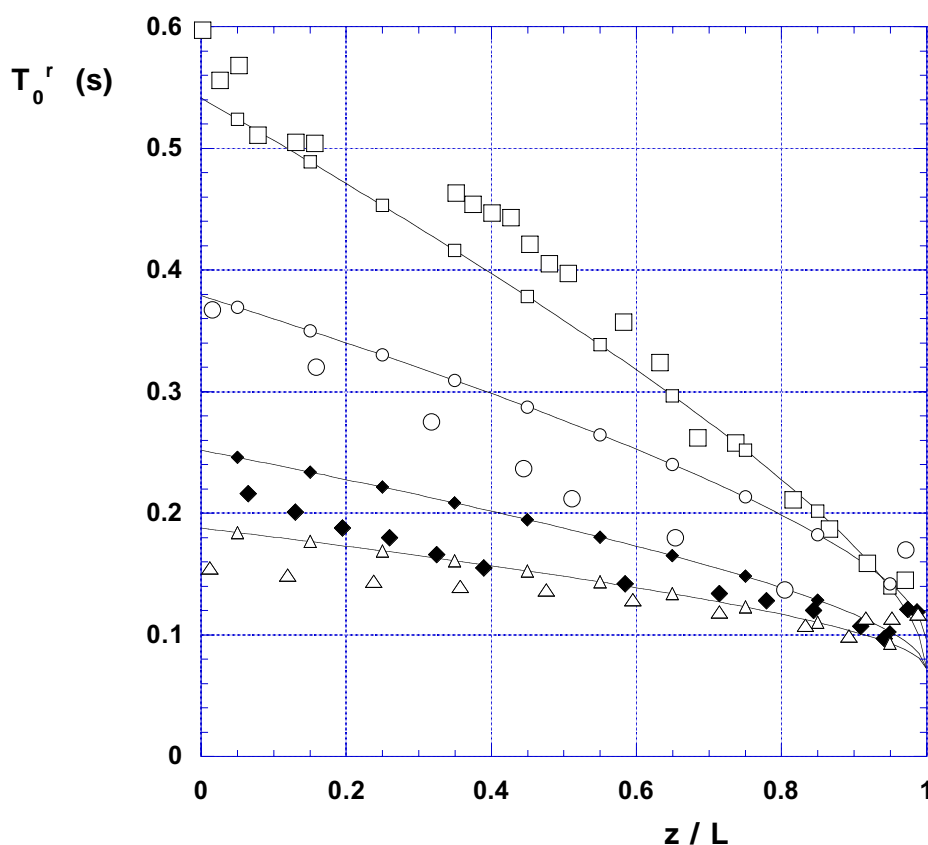


Figure 11.9: Présentation du second modèle :  $T_0^r$  en fonction de  $z^*$  pour différentes valeurs de  $L$ ,  $R$  et  $r$  : tube 1 ( $\square$ ); tube 3 ( $\circ$ ); tube 4 ( $\blacklozenge$ ); tube 6 ( $\triangle$ ) avec  $\alpha = 1,58$  et  $\beta = 0,10$

L'expression de  $T_0^r$  obtenue, équation (11.26) est composée de deux parties distinctes : une expression indépendante du niveau  $z^*$  de remplissage, de la longueur  $L$  et du rayon  $R$  du tube et une autre dépendante de  $z^*$  et des paramètres géométriques du réservoir.

Ce modèle est testé sur la figure 11.9, qui présente sur le même graphe le modèle et les points expérimentaux. Sur cette figure, la période  $T_0^r$  est représentée en ordonnée en fonction de  $z^*$  pour différentes valeurs de  $L$ ,  $R$  et  $r$ . Les points représentent les résultats expérimentaux et les lignes en trait plein illustrent les résultats issus du modèle. Ces résultats théoriques ont été calculés en ajustant les paramètres  $\alpha$  ( $\alpha = 1,58$ ) et  $\beta$  ( $\beta = 0,10$ ).

On remarque que le modèle tient compte de nos observations sur le comportement de  $T_0^r$  par rapport aux paramètres géométriques du problème. Ainsi il prédit une diminution de  $T_0^r$  avec le niveau de remplissage  $z^*$ , ce que l'on retrouve sur nos résultats.

Le modèle rend compte des résultats expérimentaux avec un écart maximal de 10 % en milieu de remplissage ( $z^* = 0,5$ ) pour les tubes 1 ( $\square$ ) et 4 ( $\blacklozenge$ ). On remarque une déviation plus importante de notre modèle pour le tube 3 ( $\circ$ ), ceci s'explique par l'apparition du phénomène

de sillage entre bulle décrit au paragraphe 11.2 et non pris en compte par notre modèle. En effet, à ce rayon de 0,0175 m, les bulles sorties du tube développent un sillage qui attire la bulle suivante et contribue à diminuer le temps entre deux sortie de bulle.

L'influence de  $L$  est bien représentée par notre modèle, si  $L$  augmente alors  $T_0^r$  augmente. De même, on retrouve bien l'influence de  $r$  :  $T$  augmente si  $r$  diminue et celle, plus importante, du rayon  $R$  du tube décrite au paragraphe 11.3.5. On remarque que ces variations de  $T_0^r$  avec les paramètres géométriques du tube s'estompent au fur et à mesure que le tube se remplit jusqu'à disparaître pour  $z^*$  proche de 1.

Le modèle rend aussi compte des observations faites aux paragraphes 11.3.3 et 11.3.5 : la période d'émission des bulles tend vers une limite unique ( $T_0^r = 0,1$  s) en fin de remplissage ( $z^* \approx 1$ ).

## 12. CONCLUSION SUR LES TEMPS COURTS D'ÉMISSION DE BULLES

Ce chapitre est consacré à l'étude de la période d'émission des bulles liée au retour à l'équilibre de deux fluides immiscibles de densités différentes initialement instable au sens de Rayleigh-Taylor : le plus lourd (liquide) placés au dessus du plus léger. Ce retour à l'équilibre concerne la vidange ou le remplissage de tubes cylindriques de rayon  $R$ , de longueur  $L$  et connectés avec l'extérieur par un trou circulaire de rayon  $r \leq R$ .

On a vu dans la partie I de cette thèse que lorsque  $r = R$ , dans le cas de la vidange dans l'air d'un tube initialement rempli de liquide, il n'y a pas de phénomène discontinu d'émission de bulle et rentrée d'eau : l'échange se fait sous la forme d'une bulle infinie qui remonte dans le tube pendant que le liquide se draine sous la forme de film le long des parois.

La première configuration étudiée est donc celle d'un tube cylindrique rempli de liquide que l'on vidange au travers d'un trou de rayon  $r < R$ . Le phénomène périodique d'émission de bulle que l'on observe est la cause du bruit de "Glouglou " observé lors de la vidange d'une bouteille. Les expériences ont montrées que la période d'émission des bulles  $T_0^v$  n'est pas constante durant la vidange : elle débute autour du  $1/10^e$  de seconde pour tout les tubes étudiés pour augmenter ensuite. Si le rapport  $R/r$  est élevé, on a remarqué que  $T_0^v$  augmente fortement en fin de vidange. Par contre, si le rayon  $r$  d'échange est de l'ordre du rayon  $R$  du tube, la période d'émission des bulles diminue après le milieu de la vidange pour revenir à une valeur de l'ordre du  $1/10^e$  de seconde. L'influence des paramètres géométriques sur cette période a été étudiée expérimentalement et un modèle simple basé sur une analogie mécanique masse-ressort a été mis en place. Ce modèle suppose que la masse de liquide à vidanger est une masse rigide et que la poche d'air située en haut du tube joue le rôle d'un ressort. Ce modèle donne les bons ordres de grandeurs pour la période des oscillations mais ne permet pas de modéliser l'évolution de la période en fin de vidange. Il est de plus moins pertinent lorsque le rapport  $R/r$  des rayons augmente. La comparaison avec l'expérience montre qu'il est nécessaire de raffiner ce modèle en prenant en compte des non-linéarités liées à la mécanique des fluides.

Pour ce second modèle, on suppose, conformément à nos observations expérimentales, qu'une période est composée de deux phases : une phase de sortie de l'eau et une phase d'entrée de la bulle. Les hypothèses du second modèle aboutissent à deux équations différentielles différentes suivant la phase du phénomène périodique. L'intégration numérique de ces deux équations montre un bon accord entre ce modèle non-linéaire et les résultats expérimentaux, même pour un rapport  $R/r$  élevé, pour toute la gamme des paramètres géométriques étudiée.

La seconde partie de cette étude des temps courts liés au retour à l'équilibre concerne le problème du remplissage de tube cylindrique vertical de rayon  $R$  et de longueur  $L$  au travers d'un trou circulaire de rayon  $r \leq R$  pratiqué au sommet du tube. Le tube est initialement rempli d'air et est immergé dans un liquide. Du fait de l'importance des volumes de liquides nécessaire pour nos expériences, nous n'avons pas pu étudier expérimentalement l'influence des paramètres physiques des fluides.

Nos expériences ont montré que la période  $T_0^r$  diminue tout au long du remplissage pour atteindre en fin de retour à l'équilibre la valeur de 0,1 seconde quels que soient les paramètres



géométriques des tubes. Nous avons, de plus, observé que  $T_0^r$  est peu sensible à la longueur  $L$  du tube et au rayon  $r$  d'échange entre les fluides. Par contre, le rayon  $R$  du tube est un paramètre important de variation de la période.

Notre modèle analytique est basé sur l'idée issue de l'observations expérimentale qu'il existe deux temps distincts par période : un temps de sortie de la bulle, lié à la résonance du réservoir puis un temps d'entrée de l'eau sous l'influence de la gravité.

On a un bon accord qualitatif entre les expériences et le modèle. Celui ci rend bien compte de l'influence respective des différents paramètres géométriques de l'étude.

## CONCLUSION

### Résumé des principaux résultats expérimentaux et analytiques

Dans cette étude, nous apportons des résultats expérimentaux et théoriques nouveaux sur le retour à l'équilibre de deux fluides immiscibles initialement instables au sens de Rayleigh-Taylor. Ce retour à l'équilibre a été étudié en configuration de vidange et de remplissage. Dans la première, le liquide est contenu dans un réservoir ouvert à la base. Dans la seconde configuration, le réservoir est rempli de gaz, ouvert dans sa partie supérieure et immergé dans une cuve rempli de liquide.

La partie I présente l'étude expérimentale et théorique de la vidange d'un tube pleinement ouvert à la base. On observe alors que le retour à l'équilibre se fait par l'intermédiaire d'une bulle unique infinie qui remonte dans le tube à une vitesse constante. Le temps de vidange est donc caractérisé par la vitesse de bulle, notée  $U_b$ . Les paramètres de notre étude sont la forme de la section du tube et les paramètres physiques, la viscosité  $\nu$  et la tension de surface  $\sigma$ , du liquide. Les sections étudiées sont circulaires, carrées, triangulaires ou rectangulaires.

Le moteur de la dynamique de cette bulle est la gravité. Les freins s'opposant à la remontée sont liés à l'inertie du liquide à déplacer, à la viscosité de ce liquide et aux effets de courbure. L'influence de l'inertie est caractérisée par le nombre de Froude,  $Fr_f \equiv U_b^2/(gP)$ , où  $P$  est le périmètre de la section du tube et les effets visqueux par le nombre de Stokes,  $St_f \equiv \nu U_b/(gS)$  ou par le nombre de Reynolds,  $Re_f \equiv U_b(S/P)/\nu$  où  $S$  est la surface de la section du tube et  $\nu$  est la viscosité cinématique du liquide. Les effets de courbure sont caractérisés par le nombre de Bond,  $Bo_f \equiv R_G/a$  où  $R_G$  est la longueur de Gauss et  $a$  la longueur capillaire du liquide. L'espace des paramètres dans lequel se déroule notre étude est l'espace de phase  $(Re_f; Bo_f)$ , nous y distinguons 4 régions :

La région 1 est celle où les effets inertiels sont prédominants. Nous montrons expérimentalement et analytiquement que cette région est caractérisée par un nombre de Froude constant :  $Fr_f = 0,04$ . En terme de vitesse de bulle, nous avons la loi :  $U_b = 0,2\sqrt{gP}$ .

La région 2 est celle où les effets visqueux sont prédominants. Nous montrons expérimentalement et analytiquement que le nombre de Stokes est constant dans cette région de l'espace de phase :  $St_f = 0,011$ . En terme de vitesse de bulle, nous avons la loi :  $U_b = 0,011gS/\nu$ .

On montre expérimentalement que la transition entre la région 1 et 2, s'effectue pour un nombre de Reynolds critique :  $Re_f^* = 3$ .

Dans la région 3 de l'espace de phase, la bulle infinie est inertielle et est influencée par les effets de courbure. Nous montrons expérimentalement que l'apparition de ces effets de courbure s'effectue à un nombre de Bond critique :  $Bo_{f,i}^* \approx 9$ . Notre modèle analytique prédit correctement les résultats expérimentaux jusqu'à  $Bo_f \approx 2$ .

De même, dans la région 4, la bulle est visqueuse et est influencée par les effets de courbure qui apparaissent pour un nombre de Bond critique :  $Bo_{f,\nu}^* \approx 15$ . Notre modèle analytique prédit correctement les résultats expérimentaux jusqu'à  $Bo_f \approx 2,5$  dans le cas du cylindre.

La partie II est consacrée à l'étude du temps de retour à l'équilibre dans les deux configurations : vidange et remplissage. Nous généralisons, tout d'abord, le travail de la partie I au cas de la vidange d'un tube cylindrique au travers d'un orifice circulaire de rayon  $r \leq R$ .

Le cas  $r = R$  étant connu, nous menons des expériences de vidange avec des liquides peu visqueux dans le cas  $r < R$  et pour des rayons d'échanges  $r \gg a$  grands devant la longueur capillaire. Notre modèle est basé sur l'hypothèse que la rentrée de l'air dans le tube est similaire au cas  $r = R$ . Il permet d'obtenir un bon accord avec les résultats expérimentaux. Le temps de vidange d'un tube cylindrique de longueur  $L$ , de rayon  $R$ , au travers d'un orifice de rayon  $r$  varie comme :

$$T_v = \frac{L}{0,5 \sqrt{gR}} \left( \frac{R}{r} \right)^{5/2}. \quad (12.1)$$

Dans le cas où  $r = R$  et pour des liquides visqueux, la vidange du réservoir n'est pas achevée à l'arrivée de la bulle infinie en haut du tube. Nous présentons donc une étude, à la fois expérimentale et théorique, du drainage du film de liquide qui reste sur les parois du tube.

La configuration du remplissage de réservoir est étudiée. Étant donné les volumes de liquide mis en jeu, les expériences de remplissage se déroulent dans de l'eau. Nous observons que l'interface entre les deux fluides monte dans le tube avec une vitesse  $U_{interface}$  constante comme pour la vidange. Les résultats expérimentaux sur les temps de remplissage sont en bon accord avec le modèle mis en place pour la vidange, équation (12.1).

La comparaison entre la vidange et le remplissage permet de confirmer les similitudes que nous avons soupçonnées entre les deux configurations : la dynamique de l'échelle de temps long, i.e. le retour à l'équilibre, est identique dans le cas de la vidange et du remplissage de réservoir.

La partie III de notre étude concerne l'échelle de temps court, i.e. la période d'émission des bulles, intervenant durant le retour à l'équilibre.

Dans le cas de la vidange, nous avons vu que si  $r = R$ , on n'observe pas d'émission de bulle, le retour à l'équilibre est continu. Par contre si  $r < R$ , on a un phénomène périodique de rentrée de bulle d'air dans le tube et sortie de liquide; c'est le fameux Glou Glou de la bouteille. On montre que le responsable de la période d'apparition des bulles est la compressibilité de la poche d'air présente au fond du tube. Le modèle construit sur cette observation amène à l'équation d'un oscillateur harmonique qui prédit de manière correcte les périodes d'émission de bulle. Des corrections à ce modèle prennent en compte le caractère non-linéaire des équations de la mécanique des fluides et permettent un bon accord entre ce modèle et nos résultats expérimentaux.

Lors du remplissage d'un tube, quel que soit  $r$ , nous observons un phénomène périodique de sortie de bulle d'air et de rentrée d'eau. Notre modèle est lié à un oscillateur mécanique de nature différente de celui de la vidange. Il retrouve d'une manière correcte la variation de la période en fonction des dimensions du tube.

### Application au problème industriel posé

Nous concluons ce travail en revenant sur le problème posé par le CTSN, le remplissage d'un réservoir sous marin vertical. Ce réservoir est un tube cylindrique de longueur  $L$  et de rayon  $R$  muni à son sommet d'une écoutille permettant l'ouverture du tube. Les dimensions exactes du tube et la profondeur d'essai sont des données classées confidentielles défense, nous ne les communiquerons donc pas dans ce travail. Nous avons présenté dans l'introduction, les résultats expérimentaux d'une expérience de remplissage de ce tube placé à une profondeur  $h$ . Nous avons vu sur les photographies de la figure 0.2 que le remplissage du tube est accompagné par un phénomène alterné de sortie de bulle de gaz et entrée de l'eau dans le tube. Cette observation est confirmée à la lecture de la figure 0.3, la différence de pression entre le haut et le bas du tube varie de manière périodique au gré des sorties de bulles. On remarque que ce régime prend fin

à  $t = T_r \approx 9$  s où le remplissage est achevé à plus de 90 %. La différence de pression ne varie plus que très lentement, essentiellement à cause de la sortie de bulles de rayons plus petits que  $R$ , i.e. on a un dégazage du tube que nous n'avons pas étudié dans cette thèse.

Selon nos résultats, le remplissage d'un réservoir au travers d'un trou circulaire de rayon  $r$  se déroule sur un temps  $T_r$  qui varie avec les paramètres géométriques du réservoir selon une loi :

$$T_r = \frac{L}{0,5 \sqrt{gR}} \left( \frac{R}{r} \right)^{\frac{5}{2}}. \quad (12.2)$$

Dans l'expérience du C.T.S.N., le remplissage se déroule dans un réservoir pleinement ouvert :  $r = R$ . Le temps de remplissage est donc :

$$T_r = \frac{L}{0,5 \sqrt{gR}}. \quad (12.3)$$

L'application numérique de cette relation avec les données fournies par le C.T.S.N. conduit à un temps de remplissage :

$$T_r = 7.7 \text{ s} \quad (12.4)$$

La mesure du temps de remplissage débute à l'ouverture de l'écouille, lorsque l'engin commence à sortir du tube et se termine lorsque toutes les bulles principales, de rayon comparable à  $R$ , sont sorties du réservoir. On a mesuré un temps de remplissage de 9 secondes. De ce temps, on doit retrancher le temps de sortie de la masse éjectée qui est de 0,8 s. On a donc un temps mesuré de remplissage du tube de 8,2 secondes, le temps  $T_r$  prédit par la relation (12.3) est en bon accord avec le résultat expérimental obtenu par le C.T.S.N.

De la même manière, on peut vérifier nos résultats pour le temps court d'émission des bulles. Nous avons montré que la période d'émission de ces bulles varie selon le niveau de remplissage  $z/L$  du réservoir, ses paramètres géométriques  $L$  et  $R$ , la densité  $\rho$  du liquide de remplissage et la pression  $P$  du gaz présent initialement dans le réservoir. Cette variation de la période est exprimée par la relation :

$$T_0^r = \left( \alpha \sqrt{2} \sqrt{\frac{U_b}{g}} + 2\pi \sqrt{\beta} \sqrt{\frac{\rho U_b L}{\gamma P}} \sqrt{1 - \frac{z}{L}} \right)^2 \quad \text{où } U_b = 0,5 \sqrt{gr}. \quad (12.5)$$

On cherche à estimer la période à mi-remplissage, on prend donc  $z/L = 0,5$ . Les dimensions du réservoir ont été rappelées plus haut et les valeurs des coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  ont été définies section 11.5. L'application numérique de l'équation (12.5) nous permet de calculer la période d'émission de bulle en milieu de remplissage :  $T_0^r = 1,3$  s.

Les variations de différence de pression de la figure 0.3 nous renseignent sur le nombre de bulles sorties du tube pendant le remplissage du réservoir "Cachalot". On compte 6 bulles (ou pics de différence de pression) durant les 8,2 s du remplissage. La période moyenne d'émission des bulles est donc estimée à 1,37 s.

La période des oscillations prédite par notre modèle est donc en bon accord avec les observations expérimentales du C.T.S.N. à l'origine de ce travail.



# ANNEXE



# A. ORIGINE DU RETOUR À L'ÉQUILIBRE

## A.1 Origine physique de l'instabilité

L'instabilité de Rayleigh-Taylor est l'instabilité d'une interface entre deux fluides de densités différentes accélérée dans une direction perpendiculaire au plan de cette interface. Cette accélération  $\gamma_0$  est, dans le cas qui nous intéresse, dirigée du fluide le plus léger vers le fluide le plus lourd.

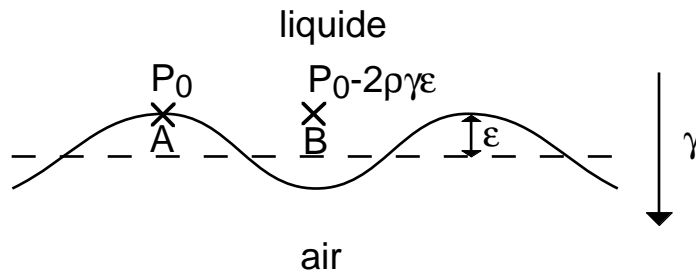


Figure A.1: Schéma de principe de l'instabilité de Rayleigh-Taylor dans le cas où  $\sigma = 0$

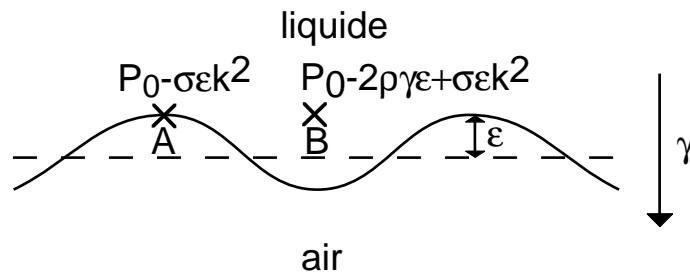


Figure A.2: Schéma de principe de l'instabilité de Rayleigh-Taylor dans le cas où  $\sigma \neq 0$

Un raisonnement de statique des fluides nous permet de bien appréhender le mécanisme physique de déstabilisation de l'interface. Dans un premier temps, nous ne tenons pas compte de la tension de surface. On suppose que l'interface entre le liquide de densité  $\rho$  et l'air est perturbée. Ce raisonnement est schématisé sur la figure A.1. On considère un point A au sommet de ce que l'on appellera une "bosse" et un point B présent au dessus d'un "creux" de l'interface. Si la pres-



sion statique dans le fluide est  $P_A = P_0$  au point A, la pression au point B est  $P_B = P_0 - 2\rho\gamma_0\epsilon$  où  $\epsilon$  est l'amplitude de la perturbation. La pression statique en B est donc inférieure à celle en A. Le liquide va donc avoir tendance à se déplacer de A vers B ce qui augmente la perturbation initiale quelle qu'elle soit.

Introduisons, maintenant, une tension de surface  $\sigma$  à l'interface entre les deux fluides (cf figure A.2). Dans la limite des petites perturbations, on a, en A, une pression statique  $P_A = P_0 - \sigma\epsilon k^2$  où  $k = 2\pi/\lambda$  est le nombre d'onde de la perturbation ( $\lambda$  est la longueur d'onde). De la même manière, en B, on a la pression statique  $P_B = P_0 - 2\rho\gamma_0\epsilon + \sigma\epsilon k^2$ . La différence de pression entre les deux points peut être positive ou négative suivant les valeurs des paramètres. Le critère de stabilité de l'interface est donc :

$$P_0 - \sigma\epsilon k^2 < P_0 - 2\rho\gamma_0\epsilon + \sigma\epsilon k^2 \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma k^2 > \rho\gamma_0 \quad (\text{A.2})$$

On définit la longueur capillaire entre les deux fluides comme :

$$a_{\gamma_0} \equiv \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\gamma_0}}. \quad (\text{A.3})$$

On peut alors écrire le critère de stabilité sous la forme :

$$(ak)^2 > 1 \quad (\text{A.4})$$

et

$$\lambda < a.\alpha \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante.} \quad (\text{A.5})$$

On en déduit donc que l'interface est stable aux perturbations de longueurs d'onde inférieures à  $a$ . La tension de surface a un effet stabilisant sur les petites longueurs d'onde. Par contre, si  $\lambda \gg a$ , le critère de stabilité, équation (A.1), n'est pas vérifié et l'interface est instable.

## A.2 Analyse linéaire de stabilité de l'interface

L'étude de l'instabilité d'un fluide lourd placé au dessus d'un fluide léger a été initiée par Lord Rayleigh au 19<sup>e</sup> siècle [67]. Plus près de nous, le premier calcul de stabilité d'une interface entre deux fluides de densités différentes accélérée perpendiculairement au plan de cette interface a été publié par S.G. Taylor en 1950 [76], ce calcul ne prend pas en compte la tension de surface entre les deux fluides. Ces résultats ne concernent que la toute première phase de développement de l'instabilité.

Le calcul d'analyse linéaire de l'instabilité de Rayleigh-Taylor est détaillé dans le livre de Chandrasekhar [15] sur les instabilités hydrodynamiques, nous en présentons ici un résumé simplifié. La configuration est celle de la figure A.3, les deux fluides ont une hauteur infinie et on néglige les effets de bord. On suppose les fluides non visqueux, incompressibles et de densités uniformes différentes. La tension de surface entre les deux est noté  $\sigma$ . Le fluide le plus lourd est placé au dessus du plus léger (noté par un indice 2). On suppose, dans nos calculs, que  $\rho_1 = \rho \gg \rho_2$ .

A  $t = 0$ , on impose une perturbation à l'interface de la forme  $z = A(t) \cos kx$  où  $A(t)$  est l'amplitude de la perturbation et  $k$ , son nombre d'onde ( $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  est la longueur d'onde de la perturbation infinitésimale). En utilisant l'équation de la quantité de mouvement et le caractère incompressible des deux fluides, on montre aisément que l'amplitude  $A(t)$  est déterminée par l'équation :

$$\ddot{A}(t) = \omega^2 A(t), \quad (\text{A.6})$$

avec  $A(t) = A_0 \cosh \omega t$  et :

$$\omega^2 = gk - \frac{\sigma}{\rho} k^3, \quad (\text{A.7})$$

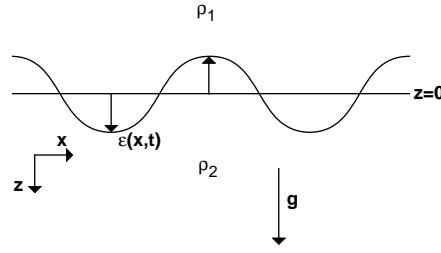


Figure A.3: Schéma de principe de l'instabilité de Rayleigh-Taylor

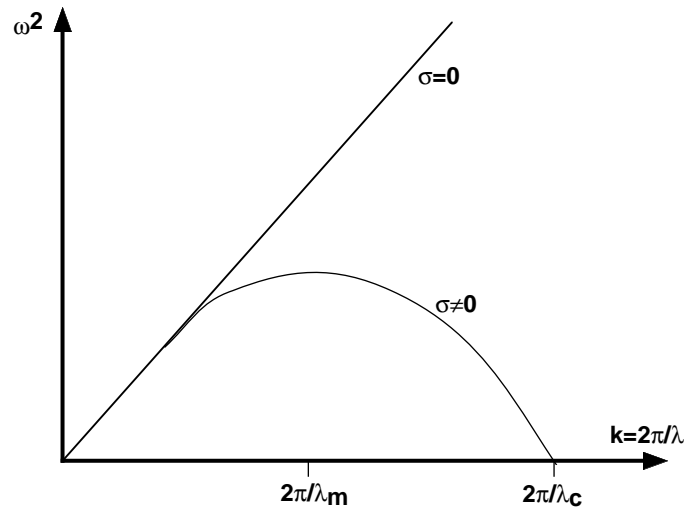


Figure A.4: Courbe de dispersion de l'instabilité de Rayleigh-Taylor

où  $\sigma$  est la tension de surface entre les deux fluides et  $\rho$  est la densité du fluide le plus lourd.

Si  $\sigma$  est nul, l'équation (A.7) devient  $\omega^2 = gk$ ,  $\omega$  est alors réel quel que soit  $k$  et l'interface est instable pour toutes les longueurs d'ondes.

Si on suppose que les effets stabilisants de la tension de surface ne sont pas nuls,  $\omega$  peut être imaginaire. Il existe donc des longueurs d'ondes stables ; inférieures à une longueur d'onde critique  $\lambda_c$  de la forme :

$$\lambda_c = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}. \quad (\text{A.8})$$

Si on limite l'étendue de l'interface à une largeur  $2R$  finie (cf figure A.5), le nombre d'onde  $k$  est de la forme :

$$k = n \frac{2\pi}{2R}. \quad (\text{A.9})$$

Le seuil de stabilité est obtenu pour la plus petite valeur de  $k$  ( $n = 1$ ). La taille critique  $\mathcal{L}_c$  de l'interface au-dessus de laquelle celle-ci est instable est donc :

$$\mathcal{L}_c = \lambda_c = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}. \quad (\text{A.10})$$

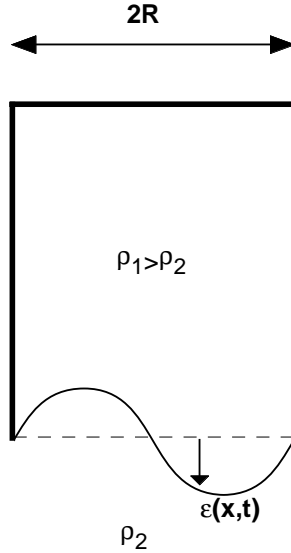


Figure A.5: Instabilité de Rayleigh-Taylor dans un tube de largeur  $2R$

Une application numérique pour une interface air-eau donne comme longueur critique :

$$\mathcal{L}_c = 2\pi \sqrt{\frac{70 \cdot 10^{-3}}{1000 \times 9.81}} = 17 \cdot 10^{-3} \text{ m.} \quad (\text{A.11})$$

L'analyse de la courbe de dispersion (cf figure A.4) montre qu'il existe une longueur d'onde  $\lambda_m$  plus instable que les autres :

$$\lambda_m = \sqrt{3} \cdot \lambda_c. \quad (\text{A.12})$$

Il existe dans la littérature de nombreuses publications qui généralisent le calcul 2D précédent sur la première phase de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Le calcul linéaire de stabilité 3D s'effectue en superposant les perturbations de formes harmoniques du cas 2D dans les deux directions  $x$  et  $y$ . Ceci est présenté dans le livre de Chandrasekhar [15], de même que l'effet de la viscosité des fluides sur l'analyse de la stabilité de l'interface. Cet effet de la viscosité est détaillé par différents auteurs ([58], [59], [60]).

Il existe différentes études qui complètent ce calcul linéaire, notamment sur l'influence de la compressibilité des fluides, d'une accélération non uniforme, d'un gradient de densité ou d'une géométrie particulière sur l'analyse linéaire de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Pour toutes ces références, on se reportera à celles citées par D. H. Sharp [72] page 7.

### A.3 Sélection d'une longueur - Mécanisme de fusion entre bulles

Durant la première étape de l'instabilité, l'amplitude de la perturbation initiale augmente exponentiellement jusqu'à une taille de l'ordre de  $0,1\lambda$  où des écarts à la théorie linéaire commencent à être observés [72].

La deuxième étape du développement de l'instabilité est caractérisée par une augmentation non-linéaire ([40], [1], [64]) de l'amplitude des perturbations jusqu'à atteindre une taille de l'ordre de

$\lambda$ . Durant cette seconde phase, un système de bulles pénétrants dans le fluide dense se met en place tandis que celui ci est drainé sous la forme de jets apparaissant entre les bulles et le long des parois du tube. Ces bulles, apparues lors de la première phase, vont fusionner entre elles. Lors de la vidange d'un tube cylindrique vertical de rayon  $R$  grand devant la longueur critique  $\mathcal{L}_c$ , on observe l'apparition de plusieurs bulles de rayon inférieur à  $R$  dans les premiers instants de l'ouverture du tube, puis, après un rayon de tube, il y a eu compétition entre les bulles et il n'en reste plus qu'une, d'un rayon proche de  $R$ , qui remonte dans le tube.

Ces trois phases de l'instabilité de Rayleigh-Taylor - augmentation exponentielle de l'amplitude de la perturbation initiale puis fusion entre bulles et enfin remontée d'une bulle unique axisymétrique - ont été observées par D. J. Lewis [50] qui place la limite de l'analyse linéaire à une amplitude de  $0,4 \lambda$  et la fin de la seconde phase à  $0,75 \lambda$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la perturbation initiale.

La mesure de l'accélération de l'interface lors de la phase de fusion des bulles issues de l'instabilité de Rayleigh-Taylor a été effectuée par K. I. Read [68]. L'auteur a accéléré l'interface entre les deux fluides de 25 g à 75 g. Il montre expérimentalement que l'accélération du front de bulle est constante et est égale à  $\alpha g$  avec  $\alpha$  compris entre 0,066 et 0,077.

Nous avons distingué deux types de travaux théoriques sur la fusion de bulle : tout d'abord ceux qui modélisent la remontée de deux ou trois bulles au moyen d'un écoulement potentiel et observe la fusion entre les bulles puis ceux qui modélisent les mécanismes de fusion à partir de loi statistiques.

L'article de D. Layzer [48] propose un début d'explication pour la fusion entre bulles bien développées dans un tube 2D. Il montre tout d'abord, à partir d'un modèle potentiel, que plus une bulle se propage dans un grand espace, plus sa vitesse est élevée. Il fait ensuite le raisonnement simple suivant : si une bulle est légèrement dépassée par ses deux voisines, l'écoulement associé à cette bulle est compressé au niveau de son sommet, elle a moins de place que les deux autres pour se propager, elle va donc ralentir et perdre encore plus "d'espace vital" jusqu'à sa disparition. Ainsi le nombre de bulle par unité de longueur diminue continuellement jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'une. Cette explication, basée sur un modèle d'écoulement potentiel, est proposé suite aux observations expérimentales de D. J. Lewis [50] qui suivent les travaux théorique de S.G. Taylor [76] sur la phase de croissance linéaire de l'instabilité.

On peut aussi citer l'article de J. Hecht et al. [39] qui généralise le travail de D. Layzer [48] en présentant un modèle d'écoulement potentiel à plusieurs bulles. Ce modèle est appliqué à l'évolution de deux bulles 2D de vitesses initiales différentes de 10%. Les deux bulles se comportent tout d'abord de manière indépendante puis il apparaît la phase d'accélération de la plus rapide tandis que l'autre disparaît puis intervient la phase de saturation de la bulle "gagnante". Les auteurs étudient aussi l'évolution d'une bulle issue de l'instabilité de Rayleigh-Taylor dans une configuration rectangulaire.

A. J. Zufiria [86] a complété ces résultats en construisant un modèle de propagation de bulle en 2D entre deux murs basé sur la superposition du potentiel complexe des vitesses d'une source et d'un écoulement permanent. La modélisation d'une bulle par la superposition de deux écoulements a été tout d'abord proposé par H. J. Kull [47]. En appliquant, entre autre, l'équation de Bernoulli au sommet des bulles, il obtient un système de 4 équations différentielles du premier ordre qui tend vers une solution d'équilibre. Le calcul de la fonction courant du système à plusieurs bulles ( $N_{bulle} = 20$ ) montre que les plus petites sont mangées par les plus grosses parce que ces dernières vont plus vite et, étant au dessus des autres, occupent plus d'espace libre. Le calcul numérique montre que la position du sommet des bulles "gagnantes" varie en  $\alpha g t^2$ , i.e. l'accélération des bulles est constante durant cette phase de fusion de bulle. Au final, il ne reste plus qu'une bulle qui n'est plus soumise à une accélération constante mais qui remonte à vitesse constante. La valeur de l'accélération  $\alpha$  calculée par A. J. Zufiria [86] est comprise dans la gamme 0,049-0,055 est en bon accord avec les résultats expérimentaux de Read [68]

( $\alpha = 0,066-0,077$ ) et avec ceux, numériques, obtenus par D. Youngs [84] ( $\alpha = 0,04-0,05$ ) et U. Alon et al. [3] ( $\alpha = 0,051$ ) à partir d'un modèle statistique de fusion des bulles.

En parallèle, des auteurs ont cherché à mettre en place des modèles statistiques afin de modéliser les mécanismes de fusion entre bulles.

Le premier modèle statistique de la fusion des bulles proposé par J. A. Wheeler et D. H. Sharp [72] suppose que deux bulles voisines fusionnent si la différence de hauteur entre les deux est supérieure au rayon de la plus petite. La conservation de la surface de la section de la bulle et de la masse donne accès à la taille et à la hauteur de la nouvelle bulle. Puisque les plus petites bulles sont avalées par les grosses, le rayon  $R$  et donc la vitesse moyenne des bulles augmente avec le temps. Une seconde prédiction de ce modèle est qu'une bulle de rayon initialement supérieur à la moyenne finira par l'emporter sur toutes les autres. L'auteur propose plusieurs explications qu'il avoue ne pas pouvoir distinguer : Soit il y a toujours une bulle qui l'emporte quel que soit la distribution initiale de taille de bulle, soit l'apparition de cette bulle unique dépend du "degré d'anomalie" dans la distribution statistique initiale ou bien encore une distribution statistique en taille et en hauteur de bulle est presque toujours atteinte, les bulles uniques étant des "accidents statistiques".

L'article de C. L. Gardner et al. [33] entreprend une étude numérique plus quantitative du modèle statistique précédent, il montre que la fusion des bulles s'accompagne tout d'abord d'une phase d'augmentation exponentielle de la taille des bulles, puis d'une phase où les fusions de bulles sont plus nombreuses et où l'accélération moyenne du front de bulles est constante dans le temps. La transition est causée par le développement des interactions entre bulles voisines.

U. Alon et al. [2] propose un modèle statistique simple de la fusion des bulles. A partir de différentes lois de fusion, il montre qu'il existe des distributions en taille de bulle qui sont stables pour certaines lois tandis que d'autres lois de fusion amènent en un temps fini à une bulle unique. Il propose un critère de sélection de la loi de fusion qui permet de sélectionner celle qui entraîne l'apparition des bulles uniques et montre que l'accélération de l'interface (i.e. front de bulle), déduite de ces lois de fusion entre bulles, est constante.

X. L. Li ([51] et [52]) intègre numériquement l'équation d'Euler dans le cas de l'instabilité de Rayleigh-Taylor pour des fluides compressibles. Cette étude confirme le fait que, lors de la fusion, les bulles sont soumises à une accélération constante. L'auteur suppose que la cause du phénomène de fusion de bulle est la présence d'une instabilité secondaire du front de bulle issue de l'instabilité primaire de Rayleigh-Taylor. Il existe de nombreuses études numériques directes ([64], [51], [52], [77], [85] et [16]) de l'évolution de l'instabilité.

La fusion entre bulle lors de la seconde phase du développement de l'instabilité de Rayleigh-Taylor est donc le résultat de la compétition entre bulles voisines : celle qui a le plus grand rayon est plus rapide que la plus petite, elle passe donc devant cette dernière et, ayant plus d'espace libre, elle augmente encore son rayon et ainsi de suite jusqu'à la disparition de la bulle la plus petite. Les plus petites structures sont donc "avalées" par les plus grosses. Tous les résultats de la littérature montrent que le front de bulle se déplace avec une accélération constante avant que la vitesse ne sature lorsqu'il ne reste plus que quelques bulles. La fusion des bulles est la cause de la transition entre une accélération constante et une vitesse constante pour les bulles issues de l'instabilité de Rayleigh-Taylor.

## B. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES BULLES INFINIES

### B.1 Bulles infinies dans les tubes cylindriques

Les résultats expérimentaux concernant la vitesse des bulles dans des tubes de grandes dimensions remplis de liquides de faible viscosité sont nombreux. Dans ces tubes, l'équilibre entre l'inertie du liquide et la force d'Archimède est caractérisé par un nombre sans dimension, le nombre de Froude, défini par :

$$Fr = \frac{U_b^2}{gR}, \quad (\text{B.1})$$

où  $U_b$  est la vitesse de remontée de la bulle,  $R$ , le rayon du tube et  $g$ , l'accélération de la gravité. Les premiers travaux expérimentaux que l'on peut citer sont ceux de

D. Dumitrescu [28], cet auteur a mesuré la vitesse de propagation des bulles infinies dans de l'eau dans 4 tubes cylindriques de rayons intérieurs  $R = 0,005$  m,  $0,010$  m,  $0,019$  m et  $0,035$  m. Les mesures de vitesse montrent que le nombre de Froude est constant,  $Fr = 0,24$ , durant la vidange des tubes cylindriques pour les tubes de rayon supérieur à 10 mm.

Les travaux de S.G. Taylor [25] concernent la remontée de bulles dans des tubes en verre de  $0,005$  m,  $0,010$  m et  $0,040$  m de rayon. La base, pleinement ouverte, du tube est placée dans une cuve pleine du liquide expérimental puis en aspirant le liquide par le haut du tube, celui ci se remplit. L'apparition de la bulle est provoquée par la chute brutale de la cuve qui déclenche la vidange du tube. La bulle est chronométrée entre deux marques imprimées sur le tube ce qui permet de mesurer la vitesse  $U_b$  de la bulle. Le nombre de Froude mesuré est constant et compris entre 0,22 et 0,24.

E. T. White et R. H. Beardmore [83] utilisent dans leurs expériences des tubes en verre de la même gamme de taille que ceux de S.G. Taylor. Les tubes sont initialement remplis du liquide de mesure et l'air est contenue dans un tuyau en caoutchouc placé en bas des tubes et fermé par des pinces. L'ouverture de la pince la plus haute provoque le départ d'une bulle dont on peut contrôler le volume. Le passage du sommet de la bulle devant deux marques distantes de  $0,600$  m permet d'en mesurer sa vitesse. La répétition des expériences permet de limiter les erreurs de mesure (les auteurs nous semblent par ailleurs optimiste qui estiment leurs erreurs de mesure à moins de 1 %). Ils déduisent de leurs mesures et de celles de précédents auteurs que  $Fr = 0,238$  lorsque les effets de la viscosité et de la tension de surface peuvent être négligés c'est à dire lorsque l'on utilise des tubes de grandes dimensions et des liquides de faible viscosité.

L'étude expérimentale de la remontée des bulles infinies de E. E. Zukoski [87] est un des articles de référence de cette étude. L'auteur y détaille les différents effets qui contribuent à la détermination de la vitesse de remontée des bulles infinies. Il isole les effets de la viscosité du liquide et de la tension de surface entre les deux fluides. Son étude couvre tout le domaine des paramètres excepté la forme des tubes : il s'est concentré sur la vidange de tubes cylindriques. Les résultats concernant les tubes de grands diamètres et les liquides de faible viscosité montrent que  $Fr = 0,23$ . Les tubes utilisés ont un rayon qui varie de  $0,010$  m à  $0,090$  m, ils sont en verre et font 1 m de longueur. Des tubes en Plexiglas ont été utilisés pour vérifier qu'il n'y avait pas

d'influence du matériau. L'auteur montre que cette influence est négligeable si le rayon du tube dépasse 0,010 m. La mesure du diamètre du tube est obtenue par mesure du volume de liquide pour une hauteur donnée. Deux techniques de mesures de la vitesse des bulles ont été mises en œuvre. La première technique est celle développée par S.G. Taylor. La seconde technique est utilisée dans les plus grands tubes, c'est celle de E. T. White et R. H. Beardmore.

Les différentes contributions expérimentales situent la valeur du nombre de Froude entre 0,22 et 0,26 ([35], [62], [19] et [54]).

Les travaux expérimentaux de S. Polonsky et al. [65] et R. Van Hout et al. [79] utilisent la technique de vélocimétrie par images de particule (P.I.V.) pour mesurer le champ de vitesse induit par la remontée d'une bulle infinie. Les mesures ont été effectuées au niveau du sommet de la bulle et dans le film de liquide qui s'écoule le long des parois. Elles montrent que l'influence de la bulle sur l'écoulement amont devient négligeable après une distance d'un diamètre.

Le premier modèle de remontée d'une bulle infinie dans un tube cylindrique est l'œuvre de D. Dumitrescu [28] en 1943. Ce modèle sera repris en partie par S.G. Taylor [25] en 1950. Ces auteurs supposent que l'écoulement autour de la bulle est incompressible et non visqueux, ils définissent une fonction courant  $\psi$  et, en appliquant l'équation de Bernoulli sur la surface de la bulle, obtiennent une condition simple sur le champ de vitesse à la surface de la bulle.

S.G. Taylor mène une description potentielle de l'écoulement qui ne satisfait à cette condition de pression qu'en un point de la surface arbitrairement choisi pour donner une solution satisfaisante. Malgré cette hypothèse restrictive, il obtient un nombre de Froude constant et égal à 0,215. Cette relation est en bon accord avec ses résultats expérimentaux.

D. Dumitrescu développe la fonction courant autour du sommet de la bulle et garde les trois premiers termes (S.G. Taylor n'en garde qu'un) ce qui lui permet d'appliquer la condition de pression autour du sommet. Il trouve que le nombre de Froude a une valeur constante égale à 0,246.

D. Layzer [48] propose dans son modèle d'appliquer l'équation de Bernoulli sur la surface de la bulle au voisinage du sommet de la bulle en utilisant une approximation au premier ordre autour du sommet de la fonction courant. Il trouve théoriquement que  $Fr = 0,261$  pour un écoulement 2D axisymétrique et que  $Fr = 0,106$  dans le cas 2D plan ( $R$  est alors la moitié de la largeur du tube).

J. A. Zufria [86] modélise la bulle infinie 2D plan par la superposition de deux potentiels des vitesses : une source et un écoulement uniforme. L'auteur applique, notamment, l'équation de Bernoulli à la surface de la bulle qu'il suppose parabolique et obtient un système de 4 équations différentielles du premier ordre avec 4 inconnues (le débit de la source, la position de la source, le rayon de courbure de la bulle supposé variable dans le temps et la longueur de la bulle). La résolution numérique de ce système montre qu'il tend vers un état d'équilibre qui correspond à une bulle remontant à vitesse constante dans le tube 2D. Cette solution du système ne dépend pas des conditions initiales et conduit à  $Fr = 0,098$  (bulle 2D plane).

Le problème de la bulle 2D plan a été formulé de manière rigoureuse par G. Birkhoff et al. [11] et par P. R. Garabedian [32] en 1957. Les modèles mathématiques de ces deux auteurs s'appuient sur des équations intégrodifférentielles dont la solution est complexe à dériver. G. Birkhoff déduit de ses calculs que  $Fr = 0,106$  tandis que P. R. Garabedian montre analytiquement qu'il existe une solution en terme de vitesse et de forme de bulle pour toutes les valeurs de  $Fr$  possibles inférieures à  $Fr = 0,116$ . En utilisant un argument énergétique, il suggère que la seule solution physique est celle pour laquelle  $Fr = 0,116$ .

J. M. Vanden-Broeck [80] confirme numériquement l'existence d'une solution pour chaque nombre de Froude  $Fr < 0,116$  mais est en contradiction avec les résultats précédents puisqu'il trouve  $Fr = 0,259$  pour une configuration 2D plane.

R. Collins [20] reprend les travaux de S.G. Taylor et de D. Dumitrescu en changeant d'expression pour le potentiel des vitesses pour un écoulement 2D plan. Il retrouve le résultat

de D. Layzer [48] sur la vitesse d'une bulle infinie plane dans un tube de demi-largeur  $R$  :  $Fr = 0,106$  pour une bulle de longueur infinie. Le même auteur [21] propose une autre fonction courant pour modéliser la remontée de la bulle. Il reprend un travail de H. Lamb (1926) qui exprime la fonction courant pour un écoulement uniforme perturbé par une source située sur l'axe d'un tube cylindrique. Cette expression du potentiel des vitesses lui permet d'étudier la transition entre une bulle dans un milieu infini et une bulle infinie dans un tube plan. K. W. Tung et J. Y. Parlange [78] affirment que les deux formes de représentation de l'écoulement sont équivalentes. R. Collins montre que si la longueur de la bulle est grande devant la courbure du sommet de la bulle et le rayon du tube, on a une bulle infinie dans un tube et on retrouve le résultat de D. Layzer [48].

En ce qui concernent les études numériques sur ce sujet, on peut citer l'article de M. Z. Podowski et al. [4] qui étudie la remontée d'un train de bulle dans un tube cylindrique par la méthode des volumes de fluide (V. O. F.) qui permet la modélisation d'un saut de densité et qui est utilisée ici pour modéliser l'interface. Le système d'équations obtenu est résolu avec un code commercial. Les résultats sur la forme des bulles sont en bon accord avec l'expérience de même que la vitesse des bulles qui est mesurée numériquement :  $Fr = 0,245$ .

La partie numérique de l'article de Z. Mao et A. E. Dukler [54] reprend un schéma de simulation identique et y intègre un modèle de turbulence afin de modéliser l'écoulement dans le film de liquide le long des parois. Ces auteurs sélectionnent la solution pour laquelle la variation de la courbure de l'interface est nulle au sommet de la bulle. Si la viscosité est faible, ils obtiennent  $Fr = 0,239$ .

J. D. Bugg et al. [14] intègrent numériquement un modèle similaire en y ajoutant un terme de tension de surface et la viscosité du liquide. Les résultats obtenus sont conformes aux résultats expérimentaux de E. T. White et R. H. Beardmore [83].

D. A. Kessler et al. [43] et H. Levine et al. [49] construisent un modèle d'écoulement potentiel en 3 dimensions. La fonction courant ne vérifiant pas l'équation de Laplace dans ce cas, les auteurs ont exprimés cette fonction courant en terme de fonctions de Green et obtiennent une équation intégrodifférentielle qu'ils ont intégrée numériquement. Dans le cas où la tension de surface tend vers zéro, ils montrent que  $Fr = 0,24$ .

Il existe peu de travaux numériques récents sur la remontée d'une bulle infinie, on peut citer par exemple la thèse de A. Benkenida [8] qui s'intéresse à la modélisation numérique des écoulements diphasiques et applique sa méthode de suivi d'une interface à l'étude de la bulle infinie. La différence avec les travaux de Z. Mao et A. E. Dukler [54] est que la bulle se déplace dans un maillage fixe sans condition quant à sa forme. Le résultat obtenu est que la bulle remonte à vitesse constante avec  $Fr = 0,231$ .

La conclusion de tout ces travaux est qu'une bulle infinie, issue de la vidange d'un tube cylindrique pleinement ouvert à sa base, remonte avec une vitesse telle que le nombre de Froude est constant :

$$Fr = \text{Constante comprise entre } 0,21 \text{ et } 0,26. \quad (\text{B.2})$$

En raison de ses applications industrielles, plusieurs études ont été menées sur la propagation de bulles infinies et plus particulièrement sur les "slug-flow". De tels écoulements apparaissent dans les écoulements diphasiques, ils sont composés de longues bulles de gaz entrecoupées d'une phase liquide plus dense. Ces écoulements sont le siège de fluctuations violentes de vitesse et de pression. Un état de l'art sur l'étude de ces "slug-flow" est proposé par A. E. Dukler et J. Fabre [27] et J. Fabre et A. Liné [29]. La plupart des études présentées relient la vitesse  $U_b$  des bulles dans un tube cylindrique de rayon  $R$  à la relation  $U_b = C \cdot \sqrt{gR}$  et étudient le comportement du coefficient  $C$  avec la longueur de la bulle, l'inclinaison du tube, le débit de chaque phase, la nature des fluides . . .



## B.2 Influence de la viscosité et de la tension de surface sur la vitesse de remontée d'une bulle infinie

La première étude de l'influence des paramètres physiques du liquide à drainer sur la vitesse de remontée d'une bulle infinie semble être celle de G. Barr [5]. Le premier résultat important est que la longueur de la bulle n'a aucune influence sur sa vitesse tant qu'elle est supérieure au diamètre du tube. L'analyse dimensionnelle du problème conduit alors à la relation :

$$U_b = \frac{gR^2}{\nu} \cdot f\left(\frac{g\rho R^2}{\sigma}\right). \quad (\text{B.3})$$

G. Barr montre expérimentalement que la vitesse de la bulle est proportionnelle à  $R^2$  et que la viscosité diminue cette vitesse. C'est aussi dans cet article que l'on discute pour la première fois des effets de  $\sigma$ .

Un travail expérimental de référence sur l'influence de la viscosité et de la tension de surface sur la vitesse de la bulle dans un tube cylindrique a été mené par E. T. White et R. H. Beardmore [83].

Ils montrent expérimentalement que si  $Bo > 17,5$ , le liquide faiblement visqueux se comporte comme un fluide idéal avec un nombre de Froude constant et égal à 0,23 comme prévu théoriquement par D. Dumitrescu et S.G. Taylor. L'apparition des effets de la tension de surface conduit à une diminution de la vitesse  $U_b$  et donc du nombre de Froude pour  $Bo < 17,5$ . La bulle est même bloquée dans le tube si le nombre de Bond est égal à 1. i.e. si le rayon du tube est égal à la longueur capillaire.

E. T. White et R. H. Beardmore [83] montrent expérimentalement que lorsque l'on peut négliger les effets de la tension de surface et que l'on utilise des fluides visqueux, l'effet dominant qui ralentit la vitesse de la bulle est la viscosité. Les auteurs ne sont pas très clairs sur le nombre sans dimensions caractérisant l'apparition de l'influence de la viscosité mais ils montrent que, dans le domaine de prédominance de cet effet, la vitesse de la bulle suit la loi :

$$U_b = 0.0384 \frac{gR^2}{\nu}. \quad (\text{B.4})$$

E. E. Zukoski a aussi étudié expérimentalement l'influence de  $\sigma$  et de  $\nu$  sur la remontée de la bulle. Afin de découpler les deux effets, il montre que l'influence de la tension de surface intervient pour  $Bo < 10$ . En utilisant ce résultat, il découple dans son étude les effets de la viscosité de ceux de la tension de surface et montre que la vitesse de propagation est indépendante de  $\nu$  si le nombre de Reynolds est supérieur à 200.

Au niveau des travaux théoriques sur l'influence de la viscosité sur la vitesse des bulles infinies, on peut citer l'article de H. L. Goldsmith et S. G. Mason [35] qui pose des bases théoriques à cette étude mais n'apporte pas de réponse sur la vitesse de la bulle. L'article de D. A. Reinelt [69] tente d'apporter une réponse à ce problème de l'influence de la viscosité sur la remontée d'une bulle infinie. Il reprend la méthode de calcul de F. P. Bretherton [13] sur la propagation d'une bulle dans un tube capillaire. Alors que ce dernier s'applique à exprimer l'influence de la viscosité dans le cas d'un nombre capillaire  $Ca = \mu U_b / \sigma \ll 1$ , D. A. Reinelt déduit de son calcul numérique une relation entre ce nombre capillaire et le nombre de Bond pour des nombres capillaires plus élevés. Il montre que pour un nombre capillaire supérieur à 0.02, i.e. si les effets visqueux l'emportent sur les effets de courbure, le nombre de Bond varie linéairement avec le nombre capillaire, on a alors la relation :

$$\frac{\rho g R^2}{\sigma} = K_2' \frac{\mu U_b}{\sigma} \quad \text{d'où} \quad U_b = K_2 \frac{g R^2}{\nu}, \quad (\text{B.5})$$

où  $\mu = \nu \cdot \rho$  est la viscosité dynamique du liquide.

Nous constatons un manque dans la littérature de travaux théoriques permettant de déduire la loi B.5 autrement que par l'analyse dimensionnelle ou les résultats de simulations numériques. A notre connaissance rien n'a encore été publié à ce sujet.

De nombreux auteurs ont mené des études théoriques prenant en compte la tension de surface dans la remontée d'une bulle infinie. La première analyse théorique de la littérature est celle de K. W. Tung et J. Y. Parlange [78] qui étend le travail de D. Dumitrescu, S.G. Taylor et D. Layzer en ajoutant un terme de tension superficielle à la condition de pression à l'interface. Il montre que la diminution du nombre de Froude (définition B.1) par la tension de surface est prédite par la loi :

$$Fr = 0.272 - 0.472 \frac{1}{Bo} \quad (\text{B.6})$$

Cette loi est en excellent accord avec les résultats expérimentaux pour un nombre de Reynolds supérieur à 200 (i.e. pas d'influence de la viscosité). K. H. Bendiksen [7] reprend lui aussi l'analyse théorique de D. Dumitrescu en ajoutant des termes supplémentaires pour le développement de la fonction courant au sommet de la bulle et un terme de tension de surface à la condition de pression à la surface de la bulle. Il obtient une loi de variation de la vitesse de la bulle en fonction du nombre de Bond plus complexe que la loi B.6 sans en améliorer l'accord avec les résultats expérimentaux.

J. M. Vanden-Broeck [81] reprend les calculs rigoureux de G. Birhoff et al. [11] et

P. R. Garabedian [32] sur la bulle 2D remontant dans un tube de largeur  $2R$ . Il rajoute un terme de tension de surface à l'équation de Bernoulli applicable sur la surface de la bulle. La prise en compte des effets de tension superficielle entraîne l'existence d'une infinité de solutions avec chacune un nombre de Froude différent. Tandis que, lorsque la tension de surface tend vers zéro, toutes les solutions tendent vers une valeur unique du nombre de Froude  $Fr = 0,106$  en accord avec les résultats expérimentaux de R. Collins [20] pour une bulle plane.

B. Couët et G. S. Strumolo [22] reprennent l'étude précédente et la généralise en prenant en compte l'inclinaison du tube. Dans le cas du tube vertical, l'accord de leurs résultats sur l'évolution du nombre de Froude en fonction de  $Bo$  avec les résultats expérimentaux de E. E. Zukoski est remarquable bien que leur calcul numérique soit 2D plan.

D. A. Kessler et H. Levine [43] introduisent une méthode différente de résolution du problème de la tension de surface et expriment la fonction courant en terme de fonction de Green permettant de prendre en compte des conditions aux limites du problème. La résolution numérique du système integrodifférentiel obtenu donne des résultats similaire à ceux de J. M. Vanden-Broeck [80].

Une étude semblable a été menée par H. Levine et Y. Yang [49] en coordonnées cylindriques pour le cas d'un problème 2D axisymétrique. Les résultats numériques présentent un écart de moins de 10% avec les expériences de E. E. Zukoski.

### B.3 Bulles infinies dans les tubes non-cylindriques

Le cas des tubes de grandes dimensions de section rectangulaire et triangulaire a été étudié expérimentalement par M. Sadatomi et al. [71]. Ces auteurs ont mesuré la vitesse de remontée de bulles infinies dans de l'eau et dans des tubes de grandes dimensions où la gravité et l'inertie du liquide sont les paramètres importants. Ils montrent que le nombre de Froude basé sur le périmètre de la section du tube :

$$Fr_p = \frac{U_b}{\sqrt{g(P/\pi)}}, \quad (\text{B.7})$$

est constant quelle que soit la géométrie du tube.  $P$  est le périmètre de la section. Ces auteurs proposent le périmètre sans explications physiques. Leurs travaux concernent 10 tubes rectan-

gulaires de rapports largeur/épaisseur différents et 1 tube triangulaire isocèle de hauteur égale à 0,055 m (angle au sommet = 20°).

Nous n'avons pas relevé d'autres travaux traitant de la remontée de bulles dans des tubes de section non circulaire, tant au niveau expérimental que théorique.

Si la littérature sur les bulles se propageant dans des tubes capillaires non circulaires est abondante, elle se concentre sur l'étude du film liquide entre la bulle et le tube carré et sur l'écoulement dans les coins des tubes.

F. P. Bretherton [13] introduit un modèle pour une bulle se propageant dans un tube capillaire. Il suppose que seules les forces visqueuses et interfaciales ne sont pas négligeables dans le problème et utilise l'hypothèse de lubrification pour le film de liquide autour de l'interface. Ses travaux sont une contribution intéressante pour la description de la forme de la bulle dans un tube capillaire qui sera utilisée plus tard par W. B. Kolb et R. L. Cerro [46] pour en déduire la forme de la bulle dans un tube carré. Ces auteurs se servent de leur analyse théorique du champ de vitesse entre une bulle circulaire et un tube carré [45]. Ils ont de même mené une étude expérimentale [44] de visualisation de la forme de la bulle se propageant dans un tube carré. Ils montrent que si le nombre capillaire  $Ca = \mu U_b / \sigma$  est inférieur à 0.1, la bulle n'est pas axisymétrique et l'écoulement se fait majoritairement dans les coins.

On peut aussi citer l'étude expérimentale de M. Dong et I. Chatzis [26] qui répondent à la question : comment peut on mouiller les coins de tubes capillaires non circulaire en poussant un liquide à l'intérieur ? Et le travail numérique de M. M. Weislogel et S. Lichter [82] sur la structure de l'écoulement et la remontée d'un liquide par capillarité dans les coins.

La remontée de bulles dans des capillaires triangulaires et rectangulaires sous l'action de la gravité a été étudiée expérimentalement par Q. C. Bi et T. S. Zhao [10], leur principale conclusion est qu'il y a une vitesse de bulle non nulle pour des tubes de dimensions inférieures à la longueur capillaire.

L'étude de la propagation des bulles infinies dans des tubes toroïdaux a fait l'objet d'un intérêt grandissant ces dernières années du fait de l'importance de cette géométrie dans les situations accidentelles de l'industrie nucléaire ou pendant le forage d'un puit pour l'industrie pétrolière. [71] ont menés des études expérimentales sur la propagation d'une bulle infinie dans un tube toroïdal. Ils vérifient que leur loi (B.7) empirique s'applique bien au cas des tores.

[23] mènent une analyse théorique de la forme des bulles se propageant dans un tore. Ils modélisent le nez de la bulle par un écoulement potentiel autour d'une ellipse. Plus récemment, les expériences de [24] sur la forme de ces bulles ont permis de vérifier les travaux théoriques précédents. La vitesse de bulle calculée numériquement par [23] à partir de leur analyse est en bon accord avec les résultats expérimentaux de [71] et [42]. Le nombre de Froude construit par [23] pour caractériser la vitesse d'ascension des bulles infinies dans un tore est très proche de la loi (B.7) :

$$Fr_t = \frac{U_b}{\sqrt{g(D_1 + D_2)}} = 0,323, \quad (\text{B.8})$$

où  $D_1$  et  $D_2$  sont les diamètres intérieur et extérieur du tore.

## C. PRÉSENTATION DES TUBES POUR L'ÉTUDE DES BULLES INFINIES

Les caractéristiques des tubes sont présentées sur les tableaux C.1 à C.4. Le tableau C.1 concerne les tubes de section circulaire. De gauche à droite, nous présentons le rayon des tubes puis le périmètre et la surface de la section des tubes. Les 2 tableaux suivant concernent respectivement les tubes à base carrée et triangulaire. La quatrième colonne de ces tableaux présente le rayon équivalent de chaque tube. Les dimensions des tubes rectangulaires sont présentées sur le tableau C.4. La première colonne désigne la largeur  $l$  de la section du tube rectangulaire puis nous avons reporté l'épaisseur  $h$  de cette section, le périmètre et la surface de la section et enfin le rayon équivalent  $R_{equ}$ .

Rayon $R$ ( $\cdot 10^{-3}$ m)	Périmètre $P$ ( $\cdot 10^{-3}$ m)	Surface $S$ ( $\cdot 10^{-6}$ m <sup>2</sup> )
1,7	10,7	9,1
1,8	11,3	10,2
2,0	12,6	12,6
2,5	15,7	19,6
2,7	17,0	22,9
3,4	21,4	36,3
3,8	23,9	45,4
3,9	24,5	47,8
4,5	28,3	63,6
5,0	31,4	78,5
5,4	33,9	91,6
6,1	38,3	116,9
7,8	49,0	191,1
8,0	50,2	201,0
8,8	55,3	243,3
10,0	62,8	314,16
10,2	64,1	326,8
12,8	80,4	514,7
12,9	81,1	522,8
15,0	94,2	706,9
18,0	113,1	1 017,9
40,0	251,3	50 26,5
86,0	540,3	23 235,0

Table C.1: Caractéristiques géométriques des tubes cylindriques

Coté $C_c$ ( $\cdot 10^{-3}$ m)	Périmètre $P$ ( $\cdot 10^{-3}$ m)	Surface $S$ ( $\cdot 10^{-6}$ m <sup>2</sup> )	Rayon équivalent $R_{equ}$ ( $\cdot 10^{-3}$ m)
0,5	2,0	0,25	0,3
0,9	3,6	0,8	0,5
1,5	6,0	2,2	0,8
1,9	7,6	3,6	1,1
2,5	10,0	6,2	1,4
2,9	11,6	8,4	1,6
3,0	12	9,0	1,7
3,4	13,6	11,6	1,9
4,0	16,0	16,0	2,3
4,5	18,0	20,2	2,5
5,0	20,0	25,0	2,8
5,4	21,6	29,2	3,0
5,5	22,0	30,2	3,1
6,0	24,0	36,0	3,4
6,5	26,0	42,2	3,7
7,0	28,0	49,0	3,9
7,5	30,0	56,2	4,2
8,0	32,0	64,0	4,5
8,4	33,6	70,6	4,7
8,5	34,0	72,2	4,8
9,0	36,0	81,0	5,0
9,5	38,0	90,2	5,4
10,0	40,0	100,0	5,6
10,3	41,2	106,1	5,8
10,9	43,6	118,8	6,1
11,2	44,8	125,4	6,3
12,0	48,0	144,0	6,8
13,0	52,0	169,0	7,3
20,0	80,0	400,0	11,3
25,0	100,0	625,0	14,1
31,0	124,0	961,0	17,5
40,0	160,0	1 600,0	22,6
50,0	200,0	2 500,0	28,2
100,0	400,0	10 000,0	56,4
150,0	600,0	22 500,0	84,6
200,0	800,0	40 000,0	112,8

Table C.2: Caractéristiques géométriques des tubes à base carrée

Coté $C_t$ ( $\cdot 10^{-3}$ m)	Périmètre $P$ ( $\cdot 10^{-3}$ m)	Surface $S$ ( $\cdot 10^{-6}$ m <sup>2</sup> )	Rayon équivalent $R_{equ}$ ( $\cdot 10^{-3}$ m)
1,0	3,0	0,9	0,5
1,6	4,8	2,2	0,8
2,0	6,0	3,5	1,0
2,5	7,5	5,4	1,3
2,9	8,7	7,3	1,5
3,3	9,9	9,4	1,7
4,0	12,0	13,9	2,1
4,6	13,8	18,3	2,4
5,1	15,3	22,5	2,7
5,6	16,8	27,1	2,9
6,3	18,9	34,4	3,3
6,7	20,1	38,9	3,5
7,5	22,5	48,7	3,9
8,2	24,6	58,2	4,3
8,8	26,4	67,0	4,6
9,3	27,9	74,9	4,9
10,0	30,0	86,6	5,2
10,2	30,6	90,1	5,4
10,8	32,4	101,0	5,7
11,5	34,5	114,5	6,0
12,0	36,0	124,7	6,3
12,4	37,2	133,1	6,5
13,0	39,0	146,4	6,8
13,9	41,7	167,3	7,3
14,8	44,4	189,7	7,8
15,2	45,6	200,1	8,0
15,7	47,1	213,5	8,2
16,1	48,3	224,5	8,5
16,4	49,2	232,9	8,6
17,0	51,0	250,3	8,9
17,2	51,6	256,2	9,0
17,9	53,7	277,5	9,4
18,2	54,6	286,9	9,6
18,9	56,7	309,3	9,9
19,0	57,0	312,6	10,0
19,7	59,1	336,1	10,3
20,4	61,2	360,4	10,7
20,7	62,1	371,1	10,9
24,4	73,2	515,6	12,8
25,0	75,0	541,3	13,1
40,0	120,0	1 385,6	21,0
50,0	150,0	2 165,1	26,3
81,0	243,0	5 682,0	42,5
100,0	300,0	8 660,3	52,5
140,0	420,0	16 974,0	73,5
150,0	450,0	19 486,0	78,7
200,0	600,0	34 641,0	105,0

Table C.3: Caractéristiques géométriques des tubes à base triangulaire

largeur $l$ ( $\cdot 10^{-3}$ m)	épaisseur $h$ ( $\cdot 10^{-3}$ m)	Périmètre $P$ ( $\cdot 10^{-3}$ m)	Surface $S$ ( $\cdot 10^{-6}$ m <sup>2</sup> )	Rayon équivalent $R_{equ}$ ( $\cdot 10^{-3}$ m)
300	100	800	30 000	97,7
200	50	500	10 000	56,4
200	30	460	6 000	43,7
200	22	444	4 400	37,4
200	20	440	4 000	35,7
200	10	420	2 000	25,2
180	22	404	3 960	35,5
160	22	364	3 520	33,5
140	22	324	3 080	31,3
120	22	284	2 640	29,0
100	50	300	5 000	39,9
100	22	244	2 200	26,5
90	40	260	3 600	33,9
80	22	204	1 760	23,7
60	22	164	1 320	20,5
40	30	140	1 200	19,5
40	22	124	880	16,7
40	20	120	800	16,0
20	22	84	440	11,8

Table C.4: Caractéristiques géométriques des tubes à base rectangulaire

## D. DÉTAILS COMPLÉMENTAIRES DE CALCUL POUR L'ÉTUDE DE LA BULLE VISQUEUSE DANS UN TUBE DE SECTION RECTANGULAIRE

Nous détaillons les calculs présentés section 5.2.2.

Nous considérons donc le potentiel des vitesses, solution de l'équation de Laplace  $\Delta\phi = 0$ , exprimé dans les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  présentées lors du cas non-visqueux (voir section 5.1.2) :

$$\phi = U_b y + A(R_x, R_z) e^{ky} \cos kx + B(R_x, R_z) e^{my} \cos mz, \quad (\text{D.1})$$

où les différents coefficients sont déterminés par les conditions aux limites du problème.

La condition visqueuse (4.11) s'écrit :

$$d[(\underline{\tau} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}] = \rho g dy + \mu \Delta \underline{U} \cdot d\underline{l}. \quad (\text{D.2})$$

L'écoulement étant considéré comme potentiel malgré la viscosité, on a  $\Delta \underline{U} = \Delta \underline{\text{grad}} \phi = \underline{\text{grad}} \Delta \phi = 0$  et la détermination des conditions visqueuses à la surface de la bulle revient à calculer la variation de pression  $dp = d[(\underline{\tau} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}]$ .

Pour cela nous devons exprimer la vitesse  $\underline{U}$  de l'écoulement afin de calculer le tenseur des contraintes visqueuses  $\underline{\tau} = \mu (\underline{\text{grad}} \underline{U} + {}^t \underline{\text{grad}} \underline{U})$  et connaître la forme de la bulle pour déterminer le vecteur normal  $\underline{n}$  à la surface.

On rappelle la forme de la bulle issue de l'étude de la section 5.1.2 :

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{8}{k+m/\tan^2\theta}} \sqrt{y} = f(\theta, y) \\ y = y = g(\theta, y) \\ z = \sqrt{\frac{8}{k\tan^2\theta+m}} \sqrt{y} = h(\theta, y) \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

où  $\theta$  est l'angle entre l'axe des  $z$  et les lignes de courant dans le plan  $(x, z)$ . La surface est donc une nappe paramétrée par  $(\theta, y)$  de la forme :

$$\begin{cases} x = f(\theta, y) \\ y = g(\theta, y) \\ z = h(\theta, y) \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

On défini donc des vecteurs directeurs du plan tangent a la bulle en  $(x, y, z)$ , i.e. en  $(\theta, y)$  :

$$\underline{t}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (\text{D.5})$$

et

$$\underline{t}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{D.6})$$



Un vecteur perpendiculaire à la surface de la bulle est défini comme  $\underline{n}^* = \underline{t}_1 \wedge \underline{t}_2$  :

$$\underline{n}^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{D.7})$$

Or  $g(\theta, y) = y$ , d'où :  $\partial g / \partial \theta = 0$  et  $\partial g / \partial y = 1$ . On peut alors écrire :

$$\underline{n}^* = \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial \theta} \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (\text{D.8})$$

Les composantes de  $\underline{n}^*$  sont :

$$n_x^* = \sqrt{8y} k \frac{1}{(m + k \tan^2 \theta)^{3/2}} \frac{\tan \theta}{\cos^2 \theta}, \quad (\text{D.9})$$

$$n_y^* = -4 \frac{1}{m + k \tan^2 \theta} \frac{\tan \theta}{\cos \theta \sin \theta}, \quad (\text{D.10})$$

$$n_z^* = \sqrt{8y} m \frac{1}{(k + m / \tan^2 \theta)^{3/2}} \frac{1}{\tan \theta} \frac{1}{\sin^2 \theta}. \quad (\text{D.11})$$

Le vecteur normal à la surface de la bulle est  $\underline{n} = \underline{n}^* / \|\underline{n}^*\|$ , on doit donc calculer  $\|\underline{n}^*\|$ , norme du vecteur  $\underline{n}^*$  :

$$\|\underline{n}^*\| = \sqrt{(n_x^*)^2 + (n_y^*)^2 + (n_z^*)^2}. \quad (\text{D.12})$$

En remplaçant les expressions des composantes, équations (D.9), (D.10) et (D.11) de  $\underline{n}^*$  dans l'équation (D.12), on obtient :

$$\|\underline{n}^*\| = \frac{\sqrt{8}}{m + k \tan^2 \theta} \frac{1}{\cos^2 \theta} \sqrt{2 + y \left( \frac{k^2}{k + m / \tan^2 \theta} + \frac{m^2}{m + k \tan^2 \theta} \right)}. \quad (\text{D.13})$$

La composante de  $\underline{n}$  selon  $x$  est  $n_x = n_x^* / \|\underline{n}^*\|$  :

$$n_x = \frac{k \sqrt{y}}{\sqrt{2(k + m / \tan^2 \theta) + y(k^2 + m^2 / \tan^2 \theta)}}, \quad (\text{D.14})$$

de même :

$$n_y = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2 + y \left( \frac{k^2}{k + m / \tan^2 \theta} + \frac{m^2}{m + k \tan^2 \theta} \right)}} \quad (\text{D.15})$$

et

$$n_z = \frac{m \sqrt{y}}{\sqrt{2(m + k \tan^2 \theta) + y(m^2 + k^2 \tan^2 \theta)}}. \quad (\text{D.16})$$

Pour la suite du calcul, on pose :

$$K = \frac{1}{k + m / \tan^2 \theta} \quad (\text{D.17})$$

et

$$M = \frac{1}{m + k \tan^2 \theta}. \quad (\text{D.18})$$

On développe ensuite le vecteur  $\underline{n}$  au premier ordre autour du sommet de la bulle :

$$n_x = \frac{k \sqrt{y}}{\sqrt{2/K + y} (k^2 + m^2/\tan^2 \theta)} \quad (\text{D.19})$$

D'où :

$$n_x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{K} k \sqrt{y}. \quad (\text{D.20})$$

De la même manière, on a :

$$n_y = -1 + \frac{1}{4} y (k^2 K + m^2 M) \quad (\text{D.21})$$

$$n_z = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M} m \sqrt{y}. \quad (\text{D.22})$$

Nous nous concentrons maintenant sur le calcul du tenseur des contraintes visqueuses  $\underline{\underline{\tau}} = \mu(\underline{\underline{\text{grad}}} U + {}^t \underline{\underline{\text{grad}}} U)$ .

$$\underline{\underline{\text{grad}}} U = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{D.23})$$

On a donc une expression pour le tenseur des contraintes visqueuses  $\underline{\underline{\tau}}$  :

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} & 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{D.24})$$

Les composantes du vecteur vitesse sont issues de la définition du potentiel des vitesses :

$\underline{U} = \underline{\underline{\text{grad}}} \phi(x, y, z)$ , on a donc :

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -Ak e^{ky} \sin kx \\ u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = U_b + Ak e^{ky} \cos kx + Bm e^{my} \cos mz \\ u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -Bm e^{my} \sin mz \end{cases} \quad (\text{D.25})$$

Comme  $x \sim \sqrt{y}$  et  $z \sim \sqrt{y}$ , pour pouvoir développer le tenseur des contraintes visqueuses à l'ordre 1 en  $y$  autour du sommet de la bulle, il faut développer ces composantes de la vitesse à l'ordre 3 en  $x$  et  $z$  et à l'ordre 2 en  $y$ . En rappelant que  $U_b + Ak + Bm = 0$ , équation (5.13) toujours valable dans ce cas, on obtient :

$$\begin{cases} u_x = -Ak^2 x - Ak^3 xy + \frac{1}{6} Ak^4 x^3 \\ u_y = (Ak^2 + Bm^2) y - \frac{1}{2} (Ak^4 x^2 + Bm^4 z^2) y + \frac{1}{2} (Ak^3 + Bm^3) y^2 - \frac{1}{2} Ak^3 x^2 - \frac{1}{2} Bm^3 z^2 \\ u_z = -Bm^2 z - Bm^3 yz + \frac{1}{6} Bm^4 z^3 \end{cases} \quad (\text{D.26})$$

Comme  $Ak^2 = Bm^2$ , équation (5.9), le calcul du tenseur des contraintes visqueuses conduit à :

$$\underline{\underline{\tau}} = Ak^2 \mu \begin{pmatrix} -2 + k^2 x^2 - 2ky & -2kx & 0 \\ -2kx & 4 - k^2 x^2 - m^2 z^2 + 2(k+m)y & -2mz \\ 0 & -2mz & -2 + m^2 z^2 - 2my \end{pmatrix} \quad (\text{D.27})$$

En réécrivant les expressions de  $x$  et  $z$  en fonction de  $\sqrt{y}$ , équations (D.3), avec la définitions de  $K$  et  $M$ , équations (D.17) et (D.17), on a :

$$x^2 = 8K y, \quad (\text{D.28})$$

$$z^2 = 8M y, \quad (\text{D.29})$$

et on obtient :

$$\underline{\underline{\tau}} = 2Ak^2\mu \begin{pmatrix} -1 + k(4kK - 1)y & -2\sqrt{2}\sqrt{K}k\sqrt{y} & 0 \\ -2\sqrt{2}\sqrt{K}k\sqrt{y} & 2 + (k + m - 4k^2K - 4m^2M)y & -2\sqrt{2}m\sqrt{M}\sqrt{y} \\ 0 & -2\sqrt{2}m\sqrt{M}\sqrt{y} & -1 + m(4mM - 1)y \end{pmatrix} \quad (\text{D.30})$$

La détermination de  $(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{n}}$ , après quelques calculs fastidieux, offre le résultat suivant :

$$(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{n}} = 4Ak^2\mu + \mu Ak^2(2k - 3k^2K + 2m - 3m^2M) y \quad (\text{D.31})$$

La variation de pression  $dp = d[(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{n}}]$  à la surface de la bulle est alors de :

$$d[(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{n}}] = Ak^2\mu [k(2 - 3kK) + m(2 - 3mM)] dy \quad (\text{D.32})$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABARZHI S. I. (1999) Nonlinear three dimensional Rayleigh-Taylor instability. *Physical Review E*, **59**(2), 1729–1735.
- [2] ALON U., SHVARTS D. & MUKAMEL D. (1993) Scale invariant regime in Rayleigh-Taylor bubble-front dynamics. *Phys. Rev. E*, **48**(2), 1008.
- [3] ALON U., HECHT J., MUKAMEL D. & SHVARTS D. (1994) Scale invariant mixing rate of hydrodynamically unstable interfaces. *Phys. Rev. Letters*, **72**(18), 2867.
- [4] ANGLART H. & PODOWSKI M. Z. (2002) Fluid mechanics of Taylor bubbles and slug flows in vertical channels. *Nuclear Science and engineering*, **140**, 165–171.
- [5] BARR G. (1926) The air-bubble viscosimeter. *Phil. Mag.*, **1**(7), 395.
- [6] BATCHELOR G. K. (1967) *An introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
- [7] BENDIKSEN K. H. (1985) On the motion of long bubbles in vertical tubes. *Int. J. Multiphase flow*, **11**(6), 797–812.
- [8] BENKENIDA A. (1999) *Developpement et validation d'une méthode de simulation d'écoulement diphasiques sans reconstruction d'interfaces. Application à la bulle de Taylor*. Ph.D. thesis, Institut national polytechnique de Toulouse.
- [9] BHAGA D. & WEBER M. E. (1981) Bubbles in viscous liquids : shapes, wakes and velocities. *J. Fluid Mech.*, **105**, 61–85.
- [10] BI Q. C. & ZHAO T. (2001) Taylor bubbles in miniaturized circular and non circular channels. *International Journal of Multiphase Flow*, **27**, 561–570.
- [11] BIRKHOFF G. & CARTER D. (1957) Rising plane bubbles. *J. Math. Mech.*, **6**, 769.
- [12] BLASIUS H. (1910) Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik. *Z. Math. u Phys.*, **58**, 90.
- [13] BRETHERTON F. P. (1961) The motion of long bubbles in tubes. *J. Fluid Mech.*, **10**, 166–188.
- [14] BUGG J. D., MACK K. & REZKALLAH K. S. (1998) A numerical model of Taylor Bubbles rising through stagnant liquids in vertical tubes. *Int. J. Multiphase flow*, **24**(2), 271–281.
- [15] CHANDRASEKHAR. (1981) *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Dover.
- [16] CHERNIAVSKI V. M. & SHTEMLER Y. M. (1994) The non-linear asymptotic stage of the Rayleigh-Taylor instability with wide bubbles and narrowing spikes. Dans : *Geophysical Monograph 83*. International Union of Geodesy and geophysics.
- [17] CLANET C. (2000) Clepsydrae, from Galilei to Torricelli. *Physics of Fluids*, **12**(11), 2743.
- [18] CLANET C. & LASHERAS J. C. (1999) Transition from Dripping to Jetting. *J. Fluid Mech.*, **383**, 307–326.
- [19] CLIFT R., GRACE J. R. & WEBER M. E. (1978) *Bubbles, drops and particles*. Academic Press N.Y.
- [20] COLLINS R. (1965) A simple model of the plane bubble in a finite liquid. *J. Fluid Mech.*, **22**(4), 763–771.

- [21] COLLINS R. (1967) The effect of a containing cylindrical boundary on the velocity of a large gas bubble in a liquid. *J. Fluid Mech.*, **28**(1), 97–112.
- [22] COUËT B. & STRUMOLO G. S. (1987) The effects of surface tension and tube inclination on a two dimensionnal rising bubble. *J. Fluid Mech.*, **184**, 1–14.
- [23] DAS G., DAS P. K., PUROHIT N. K. & MITRA A. K. (1998) Rise velocity of a Taylor bubble through concentric annulus. *chemical Engineering Science*, **53**(5), 977–993.
- [24] DAS G., PUROHIT N. K., MITRA A. K. & DAS P. K. (2002) Geometry of Taylor bubbles rising through liquid filled annuli. *A.I.Ch.E. Journal*, **48**(2), 411.
- [25] DAVIES R. M. & TAYLOR S. G. (1950) The mechanics of large bubbles rising through extended liquids and through liquids in tubes. *Proceedings of the Royal Society*, **200**(A), 375–90.
- [26] DONG M. & CHATZIS I. (1995) The imbibition and flow of a wetting liquid along the corners of a square capillary tube. *J. Colloid Interface Sci.*, **172**, 278–288.
- [27] DUKLER A. E. & FABRE J. (1994) Gas-liquid slugflow knots and loose ends. *Multiphase Science and Technology*, **8**, 355.
- [28] DUMITRESCU D. (1943) Strömung an einer luftblase im senkrechten rohr. *Z. Angew. Math. Mech.*, **23**, 139–149.
- [29] FABRE J. & LINÉ A. (1992) Modelling of two phase slug flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **24**, 21.
- [30] FÖRSTER. (1912) Über Flüssikeitsstrahlen, deren formen dreehunskörper sind. *Z. Math. u Phys.*, **62**, 319.
- [31] FULFORD G. D. (1964) The flow of liquids in thin films. *Adv. Chem. Eng.*, **5**, 151.
- [32] GARABEDIAN P. R. (1957) On steady-state bubbles produced by Taylor instability. *Proceedings of the Royal Society*, **241**(A), 423.
- [33] GARDNER C. L., GLIMM J., MCBRYAN O., MENIKOFF R., SHARP D. H. & ZHANG Q. (1988) The dynamics of growth for Rayleigh-Taylor unstable interfaces. *Phys. fluids*, **31**(3), 447.
- [34] GERWIN R. A. & MALONE R. C. (1979) *Nuclear Fusion*, **19**, 155.
- [35] GOLDSMITH H. L. & MASON S. G. (1962) The motion of single large bubbles in closed vertical tubes. *J. Fluid Mech.*, **14**, 42–58.
- [36] GRAVESEN P., BRANEBJERG J. & JENSEN O. S. (1993) Microfluidic-a review. *Journal of Micromechanic and Microengineering*, **3**, 168.
- [37] HABERMAN W. L. & MORTON R. K. (1954) An experimental study of bubbles moving in liquids. *Proc. ASCE*, **387**, 227–252.
- [38] HADAMARD J. (1911) *Comptes rendus*, **152**, 1735.
- [39] HECHT J., ALON U. & SHVARTS D. (1994) Potential flow models of Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov bubble fronts. *Physics of fluids*, **6**(12), 4019–4030.
- [40] JACOBS J. W. & CATTON I. (1988) Three dimensional Rayleigh-Taylor instability. Part 1 : Weakly nonlinear theory. *J. Fluid Mech.*, **187**, 339–352.
- [41] KAPITSA P. L. (1948) Wave flow of thin layers of a viscous fluid. *Zh. Eksperim. i Teor. Fiz.*, **18**, 3 (in russian).
- [42] KELESSIDIS V. C. & DUCKLER A. E. (1990) Motion of large gas bubbles through liquids in vertical concentric and eccentric annuli. *Int. J. Multiphase Flow*, **16**(3), 375.
- [43] KESSLER D. A. & LEVINE H. (1989) Velocity selection for Taylor bubbles. *Physical Review A*, **39**(10), 5462.

- 
- [44] KOLB W. B. & CERRO R. L. (1991) Coating the inside of a capillary of square cross section. *Chemical Engineering Science*, **46**(9), 2181–2195.
- [45] KOLB W. B. & CERRO R. L. (1993) Film flow in the space between a circular bubble and a square tube. *Journal of colloid and interface science*, **159**, 302–311.
- [46] KOLB W. B. & CERRO R. L. (1995) The motion of long bubbles in tubes of square cross section. *Phys. Fluids A* **5**, **7**, 1549.
- [47] KULL H. J. (1986) Nonlinear free-surface Rayleigh-Taylor instability. *Phys. Rev. A*, **33**(3), 1957.
- [48] LAYZER D. (1955) On the instability of superposed fluids in a gravitational field. *The astrophysical journal*, **122**(1), 1–12.
- [49] LEVINE H. & YANG Y. (1990) A rising bubble in a tube. *Phys. fluids A* **2**, **4**, 542.
- [50] LEWIS D. J. (1950) The instability of liquid surface when accelerated in a direction perpendicular to their planes. II. *Proceeding of the Royal Society*, **202**(A), 81–96.
- [51] LI X. L. (1993) Study of three dimensional Rayleigh-Taylor instability in compressible fluids through level set method and parallel computation. *Physics of fluids A*, **5**(8), 1904–1913.
- [52] LI X. L. (1996) A numerical study of three-dimensionnal bubble merger in the Rayleigh-Taylor instability. *Phys. fluids*, **8**(2), 336.
- [53] MAGNAUDET J. & EAMES I. (2000) The motion of high-Reynolds-number bubbles in inhomogeneous flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **32**, 659–708.
- [54] MAO Z. & DUKLER A. E. (1991) The motion of Taylor bubbles in vertical tubes -part2 : Experimental data and simulations for laminar and turbulent flow. *chem. Eng. Science*, **46**(8), 2055–2064.
- [55] MAS I. (1998) *Etude des écoulements incompressibles dans les microsystèmes à fluides*. Ph.D. thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse.
- [56] MAXWORTHY T., GNANN C., KÜRTE M. & DURST F. (1996) Experiments on the rise of air bubbles in clean viscous liquids. *J.Fluid Mech.*, **321**, 421–441.
- [57] MCCRORY R. L., MONTIERTH L., MORSE R. L. & VERDON C. P. (1981) Nonlinear evolution of ablation-driven Rayleigh-Taylor instability. *Phys. Rev. Letters*, **46**(5), 336.
- [58] MENIKOFF R., MJOLSNESS R. C., SHARP D. H. & ZEMACH C. (1977) Unstable normal mode for Rayleigh-Taylor instability in viscous fluids. *Phys. Fluids*, **20**(12), 2000.
- [59] MENIKOFF R., MJOLSNESS R. C., SHARP D. H., ZEMACH C. & DOYLE B. J. (1978) Initial value problem for Rayleigh-Taylor instability of viscous fluids. *Phys. Fluids*, **21**(10), 1674.
- [60] MIKAELIAN K. O. (1993) Effect of viscosity on Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities. *Phys.rev. E*, **47**, 375.
- [61] MOORE D. W. (1963) The boundary layer on a spherical gas bubble. *J.Fluid Mech.*, **16**, 161.
- [62] NICKLIN D. J., WILKES J. O. & DAVIDSON J. F. (1962) Two-phase flow in vertical tubes. *Trans. Inst. Chem. Eng.*, **40**, 61–68.
- [63] NORMAN M. L., SMARR L., WILSON J. R. & SMITH M. D. (1981) *Ap. J.*, **247**, 52.
- [64] OPARIN A. & ABARZHI S. (1999) Three-dimensionnal bubbles in Rayleigh-Taylor instability. *Phys. Fluids*, **11**(11), 3306.
- [65] POLONSKY S., SHEMER L. & BARNEA D. (1999) The relation between the Taylor bubble motion and the velocity field ahead of it. *Int. J. Multiphase Flow*, **25**, 957–975.

- [66] RAYLEIGH L. (1883) Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. *Proceeding of the London Mathematical Society*, **14**, 170.
- [67] RAYLEIGH L. (1900) *Scientific Papers, II*. Cambridge Univ. Press.
- [68] READ K. I. (1984) Experimental investigation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability. *Physica D*, **12**, 45.
- [69] REINELT D. A. (1987) The rate at which a long bubble rises in a vertical tube. *J. Fluid Mech.*, **175**, 557–565.
- [70] RYBCZYNSKI. (1911) *Bull. Acad. des Sciences de Cracovie*, 40.
- [71] SADATOMI M. & SATO Y. (1982) Two-phase flow in vertical noncircular channels. *Int. J. Multiphase Flow*, **8**(6), 641–655.
- [72] SHARP D. H. (1984) An overview of Rayleigh-Taylor instability. *Physica D*, **12**, 3–18.
- [73] SHOJI S. & ESASHI M. (1994) Microflow devices and systems. *Journal of Micromechanic and Microengineering*, **4**, 157.
- [74] SMARR L., WILSON J. R., BARTON R. T. & BOWERS R. L. (1981) *Ap. J.*, **246**, 515.
- [75] STOKES. (1845) On the theories of the internal friction of fluids in motion. *Camb. Trans.*, **7**(287), i.75.
- [76] TAYLOR S. G. (1950) The instability of liquid surface when accelerated in a direction perpendicular to their planes. *Proceeding of the Royal Society*, **201**(A), 192–196.
- [77] TRYGGVASON G. & UNVERDI S. O. (1990) Computations of three-dimensional Rayleigh-Taylor instability. *Phys. Fluids A*, **2**(5), 656.
- [78] TUNG K. W. & PARLANGE J. Y. (1976) Note on the motion of long bubbles in closed tubes - influence of surface tension. *Acta Mechanica*, **24**, 313–317.
- [79] VAN HOUT R., GULITSKI A., BARNEA D. & SHEMER L. (2002) Experimental investigation of the velocity field induced by a Taylor bubble rising in stagnant water. *Int. J. Multiphase Flow*, **28**, 579–596.
- [80] VANDEN-BROEK J. M. (May 1984) Bubbles rising in a tube and jets falling from a nozzle. *Phys. Fluids*, **27**(5), 1090.
- [81] VANDEN-BROEK J. M. (Nov. 1984) Rising bubbles in a two dimensionnal tube with surface tension. *Phys. Fluids*, **27**(11), 2604.
- [82] WEISLOGEL M. M. & LICHTER S. (1998) capillary flow in an interior corner. *J. Fluid Mech.*, **373**, 349–378.
- [83] WHITE E. T. & BEARDMORE R. H. (1962) The velocity of rise of single cylindrical air bubbles through liquids contained in vertical tubes. *J. Fluid Mech.*, **25**(4), 821–837.
- [84] YOUNGS D. L. (1984) Numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability. *Physica D*, **12**, 32.
- [85] YOUNGS D. L. (1991) Three-dimensional numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability. *Phys. Fluids A*, **3**, 1312.
- [86] ZUFIRIA A. J. (1988) Bubble competition in Rayleigh-Taylor instability. *Phys. Fluids*, **31**(3), 440.
- [87] ZUKOSKI E. E. (1966) Influence of viscosity, surface tension and inclination angle on motion of long bubbles in closed tubes. *J. Fluid Mech.*, **25**(4), 821–837.

## RÉSUMÉ

L'objet de cette thèse est d'étudier expérimentalement et théoriquement les régimes permanents et oscillants observés lors de la vidange et du remplissage de réservoirs.

La première partie concerne l'étude de la vidange continue d'un tube par l'intermédiaire d'une bulle infinie (bulle de Dumitrescu-Taylor). L'étude expérimentale de la dynamique de ces bulles est menée en fonction de la forme de la section du tube, de la viscosité et de la tension de surface. Dans le domaine des grands nombres de Reynolds, la longueur pertinente pour l'étude de la dynamique s'avère être le périmètre mouillé tandis qu'à faible nombre de Reynolds, c'est la surface de la section qui pilote la dynamique.

La seconde partie est consacrée à l'étude aux temps longs (régime permanent) du remplissage et de la vidange de réservoirs cylindriques. On montre expérimentalement que les bulles infinies jouent un rôle central dans les processus de vidange et de remplissage de réservoirs.

Le temps court des oscillations, i.e. la période d'apparition des bulles d'air, est ensuite étudié dans les deux configurations vidange-remplissage. Dans le cas de la vidange, le rôle de la poche d'air compressible présente au fond du tube est mis en évidence ; ce phénomène s'apparente au "glouglou" de la bouteille que l'on vide. Dans le cas du remplissage, on montre la présence d'un oscillateur de nature différente.

---

TITLE : Dynamics of large bubbles in tubes : application to emptying and filling tanks

---

## ABSTRACT

The object of this thesis is a theoretical and experimental study of filling and draining process of tanks.

The first part deals with the experimental study of the draining of vertical tubes of different cross sections by long bubbles. Several scaling laws for the dynamic of this bubble are found : in the high-Reynolds number domain, the perimeter of the normal cross section is shown to be the relevant length for bubble dynamic. In the low-Reynolds number range, the relevant square length is the area of the normal cross section. Theoretically, a local approach, based on the structure of the flow at the stagnation point does account for the behaviors observed.

The second part is dedicated to the study of filling and draining time to reach the equilibrium state. We show experimentally that long bubble dynamic is the relevant phenomenon for this two configurations.

Periodic emission of bubbles which occurs during filling and draining process is studied in the third part. In case of draining process, the importance of the compressibility of the air pocket in the tank is shown : this phenomenon is similar to the "Gluglug" of a draining bottle. In the filling case, Physical laws describing periodic emission of bubbles shows significant differences exist between the two configurations.

---

FORMATION DOCTORALE : Mécanique, Physique et Modélisation

---

MOTS-CLES : Instabilité de Rayleigh-Taylor, dynamique d'interface, bulle infinie, tube rectangulaire, influence de la forme, vidange, remplissage

---

Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors-Equilibre  
Technopôle de Château-Gombert  
49, rue F. Joliot-Curie  
BP 146 13384 Marseille Cedex 13