Etude mathématique et analyse asymptotique de quelques problèmes de lubrification par des fluides incompressibles essentiellement non-Newtoniens avec des conditions de non adhérence aux bords.

Rachid El Mir

Table des matières

Introduction Générale

Dans les écoulements de faible épaisseur entre deux surfaces solides, on approche les équations de Stokes ou de Navier-Stokes par une équation dite de Reynolds :

$$\mathrm{div}(h^3 \nabla p) = \mathrm{div}(S\ h),$$

où h est l'épaisseur de l'écoulement et S un vecteur donné représentant le cisaillement de l'une des deux surfaces solides.

L'une des premières justifications mathématiques rigoureuses de l'équation de Reynolds approchant le système de Stokes est dû à G. Bayada et M. Chambat [5]. Pour les équations de Navier-Stokes ce problème a été étudié par S.A. Nazarov [14] ; A. Assemien [1] ; A. Assemien, G. Bayada et M. Chambat [1]. Lorsqu'on prend en compte le caractère non-Newtonien du fluide, ce problème a été étudié par A. Mikelić et R. Tapiéro [13] ; A. Bourgeat, A. Mikelić, R. Tapiéro [9], et par F. Boughanim [8].

Toutes les études qu'on vient de citer supposent des conditions d'adhérence aux parois. De nouveaux résultats en théorie de lubrification indiquent que l'hypothèse de non glissement du fluide aux parois n'est plus réspectée [10, 11, 12, 15] . En effet, les phénomènes physiques gouvernant le comportement des contacts lubrifiés sont complexes. Ceux-ci dépendent étroitement des réponses couplées des surfaces et du lubrifiant à des sollicitations mécaniques externes variées. Lorsque l'épaisseur des films formés est faible devant la déformation élastique des surfaces solides, on parle de régime élastohydrodynamique (EHD) dominé par le comportement piézo-visqueux du lubrifiant (distribution, roulements à billes, engrenages). Dans des conditions plus sévères de vitesse et de pression, l'effet hydrodynamique n'est plus suffisant pour séparer les surfaces. Le contact fonctionne alors en lubrification limite, où les propriétés des surfaces sont prépondérantes. Pour ces deux régimes de lubrification, l'endurance du tribo-système est entre autres, basée sur la formation de films lubrifiants minces ($< 0,1\mu m$). Le contact liquide-solide peut être modélisé par la loi de frottement de Coulomb ou de Tresca.

L'étude du phénomène de lubrification par des fluides Newtoniens avec glissement a été récemment étudié par G. Bayada et M. Boukrouche [3] lorsque le glissement est donné par la loi de frottement de Tresca, par M. Boukrouche, G. Łukaszewicz [6] lorsque le glissement est donné par la loi de frottement de Coulomb, et par F. Saidi [16] lorsqu'on prend aussi en considération l'effet de température. En réalité, la plupart des fluides utilisée en lubrification tels que les huiles et les graisses sont de nature non-Newtonienne, ce qui justifie l'intérêt de cette thèse.

Nous nous intéressons donc à des écoulements tridimensionnels stationnaires avec glissement des fluides non-Newtoniens (sauf en troisième chapitre où le fluide est supposé Newtonien). Nous rappelons d'abord qu'un fluide Newtonien est un milieu continu dont le tenseur des contraintes σ est donné par

$$\sigma(u,p) = -pI + \mu D(u),$$

où
- u est la vitesse,

- p est la pression,

- I est le tenseur identité,

- μ est la viscosité,

- $D(u) = (d_{ij}(u))_{1\leq i,j\leq 3}$ est le tenseur des taux de déformations, avec

$$d_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

On peut ainsi caractériser les fluides Newtoniens par le fait qu'il y a une relation linéaire entre le tenseur $\tau = \sigma + pI$ et le tenseur des taux de déformations. La dénomination de non-Newtonien est appliquée à tous les autres fluides.

Dans le **premier chapitre**, nous considérons l'écoulement stationnaire isotherme incompressible d'un fluide non-Newtonien dont la viscosité suit la loi de puissance :

$$\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon, p^\varepsilon) = -p^\varepsilon I + 2\mu \mid D(u^\varepsilon) \mid^{\frac{r-2}{2}} D(u^\varepsilon) \quad \text{avec } \ r > 1, \tag{0.0.1}$$

dans un film mince Ω^ε de $\mathbb{R}^3$:

$$\Omega^\varepsilon = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : (x', 0) \in \omega\ , \quad 0 < x_3 < \varepsilon h(x')\},$$

où ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine et $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. La frontière de Ω^ε sera notée $\Gamma^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}^\varepsilon_L \cup \bar{\Gamma}^\varepsilon_1$, avec

- Γ^ε_1 est la frontière supérieure d'équation $x_3 = \varepsilon h(x_1, x_2)$,

- Γ^ε_L est la frontière latérale.

L'écoulement du fluide est gouverné par les équations suivantes

$$(\mathcal{P}_1^\varepsilon)\begin{cases} -2\mu \operatorname{div}\Big(|D(u^\varepsilon)|^{r-2}D(u^\varepsilon)\Big) + \nabla p^\varepsilon = f^\varepsilon \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \\ \operatorname{div}(u^\varepsilon) = 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon, \\ u^\varepsilon = g \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon, \\ u^\varepsilon.n = 0 \text{ sur } \omega, \\ \left.\begin{array}{lllll} \mid \sigma_T^\varepsilon \mid & < & k^\varepsilon & \Rightarrow & u_T^\varepsilon = s \\ \mid \sigma_T^\varepsilon \mid & = & k^\varepsilon & \Rightarrow & \exists\ \lambda \geq 0 \text{ tel que } u_T^\varepsilon = s - \lambda\sigma_T^\varepsilon \end{array}\right\} \; sur\ \omega, \end{cases}$$

où f^ε, g, s, k^ε sont des données du problème, et σ_T^ε est la composante tangentielle du tenseur des contraintes. La fonction vectorielle $g = (g_1, g_2, g_3)$ vérifie les conditions suivantes :

$$\int_{\Gamma_1^\varepsilon} g.nds = 0, \tag{0.0.2}$$

$$g = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon, \tag{0.0.3}$$

$$g_3 = 0 \quad \text{sur } \omega. \tag{0.0.4}$$

On montre d'abord qu'à $\varepsilon > 0$ fixé le problème ci-dessus admet une solution faible unique. Ensuite, nous étudions l'analyse asymptotique du problème en faisant un changement d'échelle, nous ramenons l'étude sur un domaine Ω indépendant de ε, sur lequel nous définissons des nouvelles inconnues concernant la vitesse et la pression notées $\hat{u^\varepsilon}$, $\hat{p^\varepsilon}$ respectivement. Nous obtenons des estimations a priori indépendamment de ε sur la vitesse $\hat{u^\varepsilon}$ et la pression $\hat{p^\varepsilon}$ en utilisant les inégalités de Korn, Poincaré et Young. Grâce à ces estimations, nous obtenons un théorème de convergence, qui nous permet de passer à la limite lorsque ε tend vers zéro. Nous montrons que la pression limite $p^\star$ ne dépend pas de la variable z. Ensuite, nous obtenons le problème limite suivant :

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z})^2\Big)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_i - u_i^\star)dx'dz - \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega p^\star\frac{\partial}{\partial x_i}(\hat{\phi}_i - u_i^\star)dx'dz + \\ + \hat{j}(\hat{\phi}) - \hat{j}(u^\star) \geq \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{f}_i(\hat{\phi}_i - u_i^\star)dx'dz \quad \forall\hat{\phi}\in\Pi(K), \tag{0.0.5}$$

avec $\Pi(K)$ est un convexe de $(W^{1,r}(\Omega))^2$,

$$\left.\begin{array}{l} \mu \mid \tau^\star \mid < \ \hat{k} \ \Rightarrow \ s^\star = s \\ \mu \mid \tau^\star \mid = \ \hat{k} \ \Rightarrow \ \exists \ \lambda \geq 0 \ \text{ tel que } \ s^\star = s + \lambda \tau^\star \end{array}\right\} \text{ p.p } \ \text{ sur } \ \omega, \tag{0.0.6}$$

$$\begin{aligned} &\int_\omega \left(\frac{h^3}{12\mu} \nabla p^\star(x') + \tilde{F} + \int_0^h \int_0^y A^\star(x',\xi) \frac{\partial u^\star}{\partial \xi}(x',\xi) d\xi dy \right) . \nabla \phi(x') dx' \\ &- \int_\omega \frac{h}{2} \left(\int_0^h A^\star(x',\xi) \frac{\partial u^\star}{\partial \xi}(x',\xi) d\xi \right) . \nabla \phi(x') dx' = 0, \quad \forall \phi \in W^{1,r}(\omega), \end{aligned} \tag{0.0.7}$$

où

$$s^\star = u^\star(x',0),$$

$$\tau^\star = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial u^\star}{\partial z}(x',0) \right)^2 \right)^{\frac{r-2}{2}} \frac{\partial u^\star}{\partial z}(x',0),$$

$$A^\star(x',\xi) = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial u_i^\star}{\partial \xi}(x',\xi) \right)^2 \right)^{\frac{r-2}{2}} ,$$

$$\tilde{F}(x') = \frac{1}{\mu} \int_0^h \int_0^y \int_0^\xi \hat{f}(x',t) dt d\xi dy - \frac{h}{2\mu} \int_0^h \int_0^\xi \hat{f}(x',t) dt d\xi,$$

$$\hat{j}(\hat{\phi}) = \int_\omega \hat{k} \mid \hat{\phi} - s \mid dx'.$$

Enfin, nous montrons l'unicité de $(u^\star, p^\star)$ solution du problème limite.

Dans le **deuxième chapitre**, nous supposons que la viscosité du fluide dépend de la température. Nous couplons l'équation de la conservation de la quantité du mouvement avec l'équation de la conservation de l'énergie déduite de la loi de Fourier.

Le problème complet dans le même domaine Ω^ε donnée au chapitre 1 s'écrit

$$
(\mathcal{P}_2^\varepsilon)\left\{\begin{array}{l}
-2\,\mathrm{div}\Big(\mu(T^\varepsilon)|D(u^\varepsilon)|^{r-2}D(u^\varepsilon)\Big)+\nabla p^\varepsilon=f^\varepsilon \text{ dans } \Omega^\varepsilon,\\[2ex]
-\nabla.\big(K^\varepsilon\nabla T^\varepsilon\big)+r^\varepsilon T^\varepsilon=2\mu^\varepsilon(T^\varepsilon)\mid D(u^\varepsilon)\mid^r \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon,\\[2ex]
\mathrm{div}(u^\varepsilon)=0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon,\\[2ex]
u^\varepsilon=0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon,\\[2ex]
u^\varepsilon=g \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon,\\[2ex]
u^\varepsilon.n=0 \text{ sur } \omega,\\[2ex]
\left.\begin{array}{l}
\mid\sigma_T^\varepsilon\mid\;<\;k^\varepsilon\;\Rightarrow\;u_T^\varepsilon\;=\;s\\
\mid\sigma_T^\varepsilon\mid\;=\;k^\varepsilon\;\Rightarrow\;\exists\;\lambda\geq 0\;\text{ tel que }\;u_T^\varepsilon=s-\lambda\sigma_T^\varepsilon
\end{array}\right\}\quad sur\;\omega,\\[2ex]
T^\varepsilon=0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon\cup\Gamma_L^\varepsilon,\\[2ex]
\dfrac{\partial T^\varepsilon}{\partial n}=0 \text{ sur } \omega,
\end{array}\right.
$$

avec K^ε, r^ε sont des données du problème.

Le problème variationnel obtenu est fortement non-linéaire, ce qui rend leur résolution complexe. Pour montrer donc l'existence des solutions faibles nous utilisons un problème auxiliaire paramétré par un scalaire positif δ petit. Grâce au théorème de point fixe de Schauder nous montrons l'existence des solutions faibles du problème auxiliaire. Puis, nous obtenons l'existence des solutions du problème d'origine $(\mathcal{P}_2^\varepsilon)$ en tendant le scalaire δ vers zéro. Ensuite, nous étudions l'analyse asymptotique du problème de la même manière qu'au premier chapitre, la difficulté ici est surtout technique et réside dans l'obtention des estimations a priori indépendamment de ε concernant le gradient de la température. Enfin, nous obtenons le problème limite suivant :

$$
\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\hat{\mu}(T^\star)\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z})^2\right)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_i-u_i^\star)dx'dz-\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega p^\star\frac{\partial}{\partial x_i}(\hat{\phi}_i-u_i^\star)dx'dz
$$
$$
+\hat{j}(\hat{\phi})-\hat{j}(u^\star)\geq\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\hat{f}_i(\hat{\phi}_i-u_i^\star)dx'dz,\quad\forall\hat{\phi}\in\Pi(K) \tag{0.0.8}
$$

$$
\int_\Omega\hat{K}\frac{\partial T^\star}{\partial z}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}dx'dz+\int_\Omega\hat{r}T^\star\hat{\psi}dx'dz=0\;\;\forall\hat{\psi}\in W^{1,q'}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega), \tag{0.0.9}
$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\mu}(\zeta^\star) \mid \tau^\star \mid \; < \; \hat{k} \;\Rightarrow\; s^\star = s \\ \hat{\mu}(\zeta^\star) \mid \tau^\star \mid \; = \; \hat{k} \;\Rightarrow\; \exists\ \lambda \geq 0 \ \text{ tel que } \ s^\star = s + \lambda\tau^\star \end{array}\right\} \ \text{p.p} \quad \text{sur} \quad \omega, \qquad (0.0.10)$$

$$\int_\omega \left(\frac{h^3}{12} \nabla p^\star(x') + \tilde{F} + \int_0^h \int_0^y \hat{\mu}(T^\star(x',\xi)) A^\star(x',\xi) \frac{\partial u^\star}{\partial \xi}(x',\xi) d\xi dy \right) . \nabla \phi(x') dx'$$
$$- \int_\omega \frac{h}{2} \left(\int_0^h \hat{\mu}(T^\star(x',\xi)) A^\star(x',\xi) \frac{\partial u^\star}{\partial \xi}(x',\xi) d\xi \right) . \nabla \phi(x') dx' = 0, \ \forall \phi \in W^{1,r}(\omega), \quad (0.0.11)$$

avec

$$\zeta^\star = T^\star(x',0).$$

Le troisième chapitre sera consacré à l'étude du système de Navier-Stokes avec une condition de non adhérence à la paroi de Tresca dans un film mince $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ n=2,3 :

$$-\mu \Delta u^\varepsilon + \varepsilon^\gamma (u^\varepsilon.\nabla).u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f^\varepsilon \ \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \ \text{avec} \ \ \gamma \in \mathbb{R}, \qquad (0.0.12)$$

$$\text{div}(u^\varepsilon) = 0 \ \text{ dans } \ \Omega^\varepsilon. \qquad (0.0.13)$$

Ici nous supposons que ω est un domaine rectangulaire de $\mathbb{R}^{n-1}$, nous reprenons les mêmes conditions aux limites sur la vitesse u^ε que dans le problème $(\mathcal{P}_1^\varepsilon)$. Nous supposons de plus que la fonction g vérifie

$$\int_{\Gamma_L^\varepsilon} (g)^2 \ g.n \ ds = 0. \qquad (0.0.14)$$

Nous montrons d'abord l'existence des solutions faibles en utilisant un théorème de point fixe de Schauder. Nous prouvons ensuite l'unicité des solutions en utilisant le fait que le domaine Ω^ε est mince. Enfin, nous obtenons le problème limite suivant

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_\Omega \mu \frac{\partial u_i^\star}{\partial z} \frac{\partial(\hat{\phi}_i - u_i^\star)}{\partial z} dx'dz - \sum_{i=1}^{n-1} \int_\Omega p^\star \frac{\partial(\hat{\phi}_i - u_i^\star)}{\partial x_i} dx'dz +$$
$$+ \int_\omega \hat{k}(\mid \hat{\phi} - s \mid - \mid u^\star - s \mid) d\sigma \geq \sum_{i=1}^{n-1} \int_\Omega \hat{f}_i(\hat{\phi}_i - u_i^\star) dx'dz. \ \ \forall \hat{\phi} \in \Pi(V), \qquad (0.0.15)$$

où $\Pi(V)$ est un convexe de $(H^1(\Omega))^2$.

$$\left.\begin{array}{l}\mu \mid \tau^\star \mid \; < \; \hat{k} \;\Rightarrow\; s^\star = s \\ \mu \mid \tau^\star \mid \; = \; \hat{k} \;\Rightarrow\; \exists\ \lambda \geq 0 \ \text{ tel que } \ s^\star = s + \lambda\tau^\star \end{array}\right\} \ \text{p.p} \quad \text{sur} \quad \omega, \qquad (0.0.16)$$

$$\int_\omega (\frac{h^3}{12\mu}\nabla p^\star - \frac{h}{2}s^\star + \tilde{F})\nabla\phi dx' = -\int_{\partial\omega}\phi h\tilde{\hat{G}}.n \ \ \forall\phi \in H^1(\omega), \tag{0.0.17}$$

avec

$$\tilde{\hat{G}} = \frac{1}{h(x')}\int_0^{h(x')}\hat{G}(x',z)dz.$$

Dans **le quatrième chapitre**, nous considérons un fluide de Bingham dans le même domaine Ω^ε donné au chapitre 1 avec des conditions non-linéaires sur le bord. Nous conservons les mêmes conditions aux limites sur la vitesse supposées en premier chapitre sauf sur Γ_1^ε, où nous supposons que

$$\sigma_T^\varepsilon(u^\varepsilon) + l^\varepsilon u^\varepsilon = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_1^\varepsilon, \tag{0.0.18}$$

$$u^\varepsilon.n = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_1^\varepsilon, \tag{0.0.19}$$

avec $l^\varepsilon > 0$ est une donnée du problème.

À ε fixé nous montrons l'existence et l'unicité des solutions faibles de ce problème. Puis, nous utilisons un résultat concernant l'inégalité de Korn obtenu dans [7] pour trouver les estimations a priori sur la vitesse et la pression. Ensuite, nous étudions l'analyse asymptotique du problème de la même manière que dans les chapitres précédents. Lorsque ε tend vers zéro, nous obtenons une inéquation variationnelle limite.

Bibliographie

[1] A. Assemien, Comportement asymptotique des équations de Navier-Stokes pour des écoulements de faible épaisseur. Thèse, Université Claude Bernard, Lyon 1, 1993.

[2] A. Assemien, G. Bayada, M. Chambat, Inertial effects in the asymptotic behavior of a thin film flow. Asymptotic Analysis 9 (1994), 177-208, North-Holland.

[3] G. Bayada, M. Boukrouche, On a free boundary problem for Reynolds equation derived from the Stokes system with Tresca boundary conditions. Journal of Mathematical Analysis and Applications 2003, 282, 212-231.

[4] R.B. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager, Dynamic of polymer liquids. John Wiley, 1987, 2nd edition.

[5] G. Bayada, M. Chambat, The transition between the Stokes equation and the Reynolds equation : a mathematical proof. Journal of Applied Mathematics and Optimisation, vol. 4, 73-93, 1986.

[6] M. Boukrouche, G. Łukaszewicz, Asymptotic analysis of solutions of a thin film lubrication problem with nonlinear boundary conditions. International Journal of Engineering Science 2003 ; 41, 521-537.

[7] M. Boukrouche, G. Łukaszewicz, On a lubrication problem with Fourier and Tresca boundary conditions. Mathematical Models and Methods in Applied Scie nces, 14 (2004), n.o 6, 913-941.

[8] F. Boughanim, Etude des écoulements isothermes et non isothermes des fluides non Newtoniens : Loi de Carreau , loi de puissance. Thèse de mathématiques appliquées, Université Jean Monnet Saint-Etienne (1996).

[9] A. Bourgeat, A. Mikelić, R. Tapiéro, Dérivation des équations moyennées décrivant un écoulement non-Newtonien dans un domaine de faible épaisseur. C.R.A.S, 316, Série I, 965-970, (1993).

[10] B.J. Hamrock, J. Sieh, Film collapse in ehl and micro-ehl. Journal of Tribology, vol 113, 372-377, 1991.

[11] B.O. Jacobson, B.J. Hamrock, Non Newtonian fluid model incorporated into elastohydrodynamic lubrication of rectangular contacts. Journal of Tribology, vol 106, 275-284, 1984.

[12] B.O. Jacobson, At the boundary between lubrication and wear. First world tribology conference, London, 291-298, 1997.

[13] A. Mikelić, R. Tapiéro, Mathematical derivation of the power law describing polymer flow through a thin slab. M^2AN, vol 29, no 1, 3-22, 1995.

[14] S.A. Nazarov, Asymptotic solution of the Navier-Stokes problem on the flow of a thin layer of fluid. Siberian Mathematical Journal, 31, n.o 2, 296-307, (1990).

[15] R. Pit, H. Hervet, L. Léger, Mise en évidence directe d'écoulements à la paroi à diverses interfaces hexadécane - solide. Revue de Métallurgie-CIT, Science et Génie des Matériaux, pp. 169-174, Février 2001.

[16] F. Saidi, Sur quelques problèmes de lubrification par des fluides newtoniens non isothermes et incompressibles avec des conditions aux bords non linéaires. Étude mathématiques et asymptotique. Thèse, Université Jean Monnet Saint-Etienne, 2004.

[17] W.L. Wilkinson, Non Newtonian fluids : Fluid mechanics, mixing and heat transfer. International Series of Monographs on Chemical Engineering, vol. 1. Pergamon Press, (1960).

Chapitre 1

Étude de l'écoulement d'un fluide non-Newtonien dont la viscosité suit la loi de puissance avec une condition de frottement liquide-solide de Tresca : I- cas isotherme

1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre nous nous intéressons à l'étude de l'écoulement isotherme d'un fluide non-Newtonien incompressible en régime stationnaire dont la viscosité suit la loi de puissance dans un domaine de faible épaisseur Ω^{ε} avec la condition de frottement de Tresca sur une partie du bord.

Notre objectif est d'étudier le comportement asymptotique des solutions lorsque ε tend vers zéro. Lorsqu'on néglige les frottements, le problème a été déjà étudié par A. Mikelić et R. Tapiéro [16] lorsque la viscosité du fluide suit la loi de puissance et par F. Boughanim [3] lorsque la viscosité du fluide suit la loi de Carreau.

Nous commençons par introduire les équations qui gouvernent cet écoulement ainsi que les conditions aux limites dans la section 1.2.

Dans la section 1.3, nous donnons la formulation faible du problème. Nous montrons ensuite l'existence et l'unicité des solutions faibles en utilisant un problème auxiliaire.

Dans la section 1.4, nous étudions l'analyse asymptotique du problème, en effectuant un changement d'échelle. Ensuite, nous obtenons une formulation variationnelle faible définie sur un domaine Ω indépendant de ε. Nous obtenons des estimations a priori ainsi que des résultats de convergence faible.

Enfin, dans la section 1.5, nous obtenons le problème limite et nous montrons l'unicité de ces solutions.

1.2 Position du problème

Nous considérons l'écoulement incompressible isotherme visqueux d'un fluide non-Newtonien dans un film mince $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$, où $0 < \varepsilon < 1$ est un réel positif déstiné à tendre vers zéro. La frontière de Ω^ε sera notée $\Gamma^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}^\varepsilon_L \cup \bar{\Gamma}^\varepsilon_1$, avec

• Γ^ε_1 est la frontière supérieure d'équation $x_3 = \varepsilon h(x_1, x_2)$,
• Γ^ε_L est la frontière latérale,
• ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine Ω^ε.

On suppose que h est une fonction de classe C^1 définie sur ω telle que

$$0 < h_{min} \leq h(x') \leq h_{max}, \ \ \forall (x', 0) \in \omega.$$

On note $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Le domaine Ω^ε est donné par :

$$\Omega^\varepsilon = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : (x', 0) \in \omega \ , \quad 0 < x_3 < \varepsilon h(x')\}.$$

On désigne par $\sigma^\varepsilon = (\sigma_{ij})^\varepsilon_{1 \leq i,j \leq 3}$ le tenseur des contraintes et par $D = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ le tenseur des taux de déformations :

$$d_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}), \ \ 1 \leq i, j \leq 3.$$

On suppose que la loi de comportement du fluide suit la loi de puissance [2]

$$\sigma^\varepsilon_{ij} = -p^\varepsilon \delta_{ij} + 2\mu |D(u^\varepsilon)|^{r-2} d_{ij}(u^\varepsilon), \tag{1.2.1}$$

$$\text{avec} \quad | D(u^\varepsilon) | = \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \ d^2_{ij}(u^\varepsilon) \Big)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad 1 < r < \infty,$$

où
- u^ε est la vitesse du fluide,
- p^ε est sa pression,
- μ est sa viscosité,
- δ_{ij} est le symbole de Krönecker.

Dans toute la suite nous utilisons la convention de sommation d'Einstein pour les indices répétés sauf mention contraire, et on se limite à des écoulements stationnaires.

Les équations qui gouvernent l'écoulement isotherme en régime stationnaire d'un fluide non-Newtonien incompressible dont la viscosité suit la loi puissance sans effet d'inertie dans le domaine Ω^ε sont les suivantes :

- L'équation de la conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i^\varepsilon = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.2.2}$$

où $f^\varepsilon = (f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon, f_3^\varepsilon)$ représente une densité massique des forces extérieures.

- L'équation d'incompressibilité

$$\operatorname{div}(u^\varepsilon) = 0 \;\text{ dans }\; \Omega^\varepsilon. \tag{1.2.3}$$

Le vecteur normal extérieur unitaire à Γ^ε sera noté $n = (n_1, n_2, n_3)$. La normale unitaire extérieure à ω est le vecteur $(0, 0, -1)$.

On définit les composantes normales et tangentielles $u_n^\varepsilon \in \mathbb{R}$ et $u_T^\varepsilon = (u_{T_i}^\varepsilon)_{1\le i\le 3} \in \mathbb{R}^3$ de la vitesse par

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon.n = u_i^\varepsilon n_i,$$
$$u_{T_i}^\varepsilon = u_i^\varepsilon - u_n^\varepsilon n_i.$$

Les composantes normales et tangentielles σ_n^ε et $\sigma_T^\varepsilon = (\sigma_{T_i}^\varepsilon)_{1\le i\le 3} \in \mathbb{R}^3$ du tenseur des contraintes sont définies par

$$\sigma_n^\varepsilon = \sigma_{ij}^\varepsilon n_i n_j,$$
$$\sigma_{T_i}^\varepsilon = \sigma_{ij}^\varepsilon n_j - \sigma_n^\varepsilon n_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Afin de donner les conditions aux limites pour la vitesse sur la frontière de Ω^ε, nous allons introduire la fonction vectorielle $g \in (W^{1-\frac{1}{r},1}(\Gamma^\varepsilon))^3$ (l'ensemble des traces de $(W^{1,r}(\Omega^\varepsilon))^3$ sur Γ^ε) telle que :

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} g.n \; ds = 0. \tag{1.2.4}$$

Nous pouvons montrer comme dans [1] que cette condition est équivalente à l'existence d'un relèvement $G^\varepsilon \in (W^{1,r}(\Omega^\varepsilon))^3$ de g sur Ω^ε vérifiant

$$\operatorname{div}(G^\varepsilon) = 0 \;\text{ dans }\; \Omega^\varepsilon, \;\; G^\varepsilon = g \;\text{ sur }\; \Gamma_L^\varepsilon, \;\; G^\varepsilon = 0 \text{ sur } \;\Gamma_1^\varepsilon, \; G^\varepsilon.n = 0 \;\text{ sur }\; \omega. \tag{1.2.5}$$

Nous supposons que la vitesse est connue sur $\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1^\varepsilon, \tag{1.2.6}$$

$$u^\varepsilon = g \quad \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon, \text{ avec } g_3 = 0. \tag{1.2.7}$$

Sur ω la vitesse est supposée inconnue. Nous supposons qu'il n'y a pas de flux sortant à travers ω

$$u^\varepsilon.n = 0 \quad \text{sur} \quad \omega, \tag{1.2.8}$$

cette condition s'appelle condition d'imperméabilité ou de non-pénétration.
Nous supposons aussi l'existence du frottement liquide-solide sur ω, ce frottement est modélisé par une loi non linéaire de type Tresca [7]

$$\left.\begin{array}{l} \mid \sigma_T^\varepsilon \mid \; < \; k^\varepsilon \;\Rightarrow\; u_T^\varepsilon \;=\; s \\ \mid \sigma_T^\varepsilon \mid \; = \; k^\varepsilon \;\Rightarrow\; \exists\ \lambda \geq 0 \ \text{ tel que } \ u_T^\varepsilon = s - \lambda\sigma_T^\varepsilon \end{array}\right\} \text{ sur } \omega, \tag{1.2.9}$$

où $\mid . \mid$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, s la vitesse de cisaillement. Cette loi signifie qu'il existe un seuil de frottement k^ε tel que :

• Lorsqu'il y a égalité, le seuil de frottement est atteint, il y a une réaction au mouvement relative du fluide $-\lambda\sigma_T^\varepsilon$. Le fluide et la surface se déplacent tangentiellement l'une par rapport à l'autre et il y *glissement*.

• Lorsqu'il y a inégalité, il n'y a pas de frottement, donc la vitesse du fluide est égal à la vitesse de cisaillement s.

Remarque 1.2.1. *La troisième composante de la vitesse vérifie*

$$u_3^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\varepsilon. \tag{1.2.10}$$

En effet, d'après les conditions aux limites (1.2.6)-(1.2.7) et le fait que $g_3 = 0$ sur Γ_L^ε, $u_3^\varepsilon = 0$ sur $\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon$. D'autre part, d'après la condition aux limites (1.2.8), on a $u_n^\varepsilon = u_1^\varepsilon n_1 + u_2^\varepsilon n_2 + u_3^\varepsilon n_3 = 0$ sur ω, or $n = (n_1, n_2, n_3) = (0, 0, -1)$ est le vecteur normal unitaire extérieur à ω. Donc $u_3^\varepsilon = 0$ sur ω. $\square$

Le problème complet consiste donc à trouver un champ de vitesse u^ε et une pression p^ε vérifiant les équations et les conditions aux limites suivantes :

$$
(Pb_f^\varepsilon)\quad \begin{cases}
-2\mu \operatorname{div}\Big(|D(u^\varepsilon)|^{r-2}D(u^\varepsilon)\Big) + \nabla p^\varepsilon = f^\varepsilon \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \\[2mm]
\operatorname{div}(u^\varepsilon) = 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \\[2mm]
u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon, \\[2mm]
u^\varepsilon = g \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon, \\[2mm]
u^\varepsilon . n = 0 \text{ sur } \omega, \\[2mm]
\left.\begin{array}{l}
\mid \sigma_T^\varepsilon \mid < \ k^\varepsilon \ \Rightarrow \ u_T^\varepsilon \ = \ s \\
\mid \sigma_T^\varepsilon \mid = \ k^\varepsilon \ \Rightarrow \ \exists\ \lambda \geq 0 \ \text{ tel que } \ u_T^\varepsilon = s - \lambda \sigma_T^\varepsilon
\end{array}\right\} \ \ sur\ \omega
\end{cases}
$$

Afin de donner la formulation variationnelle du problème fort (Pb_f^ε), nous allons établir la remarque suivante :

Remarque 1.2.2. *La condition aux limites de Tresca (1.2.9) est équivalente à la relation ponctuelle suivante*

$$
(u_T^\varepsilon - s).\sigma_T^\varepsilon \ + k^\varepsilon \mid u_T^\varepsilon - s \mid = 0 \ \text{ sur } \ \omega. \tag{1.2.11}
$$

Preuve.

• Supposons que u^ε vérifie la condition aux limites de Tresca.
 ⊳ Si $\mid \sigma^\varepsilon \mid < k^\varepsilon$, alors $u_T^\varepsilon = s$, d'où (1.2.11).

 ⊳ Si $\mid \sigma^\varepsilon \mid = k^\varepsilon$ alors il existe $\lambda \geq 0$ tel que $u_T^\varepsilon = s - \lambda \sigma_T^\varepsilon$, d'où

$$
(u_T^\varepsilon - s).\sigma_T^\varepsilon \ + k^\varepsilon \mid u_T^\varepsilon - s \mid = -\lambda \mid \sigma_T^\varepsilon \mid^2 + \lambda \mid \sigma_T^\varepsilon \mid^2 = 0.
$$

• Réciproquement, on suppose que $(\ u_T^\varepsilon - s).\sigma_T^\varepsilon \ + k^\varepsilon \mid u_T^\varepsilon - s \mid = 0$.

 ⊳ Si $\mid \sigma_T^\varepsilon \mid = k^\varepsilon$, alors de (1.2.11) on a

$$
(u_T^\varepsilon - s).\sigma_T^\varepsilon = - \mid u_T^\varepsilon - s \mid \ \mid \sigma_T^\varepsilon \mid,
$$

d'où l'existence d'un $\lambda \geq 0$ tel que $u_T^\varepsilon - s = -\lambda\, \sigma_T^\varepsilon$.

 ⊳ Si $\mid \sigma_T^\varepsilon \mid < k^\varepsilon$, alors

$$
\begin{aligned}
(u_T^\varepsilon - s).\sigma_T^\varepsilon \ + k^\varepsilon \mid u_T^\varepsilon - s \mid = 0 \quad & \geq \ - \mid u_T^\varepsilon - s \mid\mid \sigma_T^\varepsilon \mid + k^\varepsilon \mid u_T^\varepsilon - s \mid \\
& \geq \ \mid u_T^\varepsilon - s \mid \underbrace{\big(k^\varepsilon - \mid \sigma_T^\varepsilon \mid\big)}_{>0},
\end{aligned}
$$

donc $\mid u_T^\varepsilon - s \mid = 0$, d'où $u_T^\varepsilon = s.\square$

1.3 Formulation variationnelle du problème

Dans cette section nous définissons le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler, et nous obtenons la formulation faible du problème (Pb_f^ε).

Pour l'ouvert Ω^ε on définit les espaces et les ensembles suivants

$$(W^{1,r}(\Omega^\varepsilon))^3 = \{ v \in (L^r(\Omega^\varepsilon))^3 : \ \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x_j} \in L^r(\Omega^\varepsilon) \ \text{pour} \ i,j = 1,..,3 \ \}$$

l'espace de Sobolev muni de la norme

$$\| v \|_{1,r} = \Big(\sum_{1 \leq i \leq 3} \int_{\Omega^\varepsilon} \mid v_i \mid^r \ dx + \sum_{1 \leq i,j \leq 3} \int_{\Omega^\varepsilon} \mid \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mid^r \ dx \Big)^{\frac{1}{r}}.$$

$W_0^{1,r}(\Omega^\varepsilon)$ désigne le sous espace vectoriel des fonctions de $W^{1,r}(\Omega^\varepsilon)$ nulles sur Γ^ε. On note $W^{-1,r'}(\Omega^\varepsilon)$ son dual topologique avec $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r'} = 1$.
Ensuite, nous définissons les convexes fermés non vides de $(W^{1,r}(\Omega^\varepsilon))^3$

$$K^\varepsilon = \{ v \ \in \big(W^{1,r}(\Omega^\varepsilon)\big)^3 \ : \ v = G^\varepsilon \ \text{sur} \ \Gamma_L^\varepsilon, \ v = 0 \ \text{sur} \ \Gamma_1^\varepsilon, \ v.n = 0 \ \text{sur} \ \omega \},$$

$$K_{div}^\varepsilon = \{ \ v \in K^\varepsilon : \ \text{div}(v) = 0 \}.$$

On note $L_0^{r'}(\Omega^\varepsilon)$ le sous espace vectoriel des fonctions de $L^{r'}(\Omega^\varepsilon)$ à moyenne nulle :

$$L_0^{r'}(\Omega^\varepsilon) = \{ \ q \in L^{r'}(\Omega^\varepsilon) \ : \int_{\Omega^\varepsilon} q \, dx \ = 0 \ \}.$$

Enfin nous introduisons les deux sous espaces vectoriels des fonctions de $W^{1,r}(\Omega^\varepsilon)$ nulles respectivement sur Γ_1^ε et sur $\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon$

$$W_{\Gamma_1^\varepsilon}^{1,r}(\Omega^\varepsilon) \ = \{ \psi \in W^{1,r}(\Omega^\varepsilon) \ : \psi = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_1^\varepsilon \},$$

$$W_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}^{1,r}(\Omega^\varepsilon) \ = \{ \psi \in W^{1,r}(\Omega^\varepsilon) \ : \psi = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon \}.$$

Pour simplifier l'écriture, on note :

$$a(u,v) = \int_{\Omega^\varepsilon} 2\mu \ |D(u)|^{r-2} D(u) : D(v) \ dx, \tag{1.3.1}$$

avec

$$D(u):D(v)=d_{ij}(u)d_{ij}(v).$$

On définit l'opérateur non linéaire A par :

$$\begin{array}{rcl} A: \ (W^{1,r}(\Omega^\varepsilon))^3 & \longrightarrow & \big((W^{1,r}(\Omega^\varepsilon))^3\big)' \\ u & \mapsto & A(u) \end{array}$$

tel que

$$(A(u),v)=a(u,v).$$

Pour $v\in(W^{1,r}(\Omega^\varepsilon))^3$, on définit la fonctionnelle j^ε par

$$j^\varepsilon(v)=\int_\omega k^\varepsilon \mid v-s\mid dx', \tag{1.3.2}$$

j^ε est continue et convexe.

Enfin, on note

$$B^\varepsilon(q,v)=-\int_{\Omega^\varepsilon} q\ \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\ dx, \quad \forall (q,v)\in L_0^{r'}(\Omega^\varepsilon)\times(W^{1,r}(\Omega^\varepsilon))^3, \tag{1.3.3}$$

$$(f^\varepsilon,v)=\int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon\, v_i\ dx, \quad \forall v\in(W^{1,r}(\Omega^\varepsilon))^3. \tag{1.3.4}$$

Lemme 1.3.1. *Soient $u^\varepsilon, p^\varepsilon$ des solutions du problème (Pb_f^ε), alors elles vérifient la formulation variationnelle suivante :*

$$Pb_1(\mathrm{K}^\varepsilon)\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \ u^\varepsilon\in K_{div}^\varepsilon, \ \ p^\varepsilon\in L_0^{r'}(\Omega^\varepsilon) \ \text{ tels que} \\ (A(u^\varepsilon),\phi-u^\varepsilon)\ +\ B^\varepsilon(p^\varepsilon,\phi-u^\varepsilon)+j^\varepsilon(\phi)-j^\varepsilon(u^\varepsilon)\geq(f^\varepsilon,\phi-u^\varepsilon),\ \forall\phi\in K^\varepsilon. \end{array}\right.$$

Preuve. On multiplie l'équation (1.2.2) par $\phi-u^\varepsilon$ où $\phi\in K^\varepsilon$, en intégrant et en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega^\varepsilon}\sigma_{ij}^\varepsilon\ \frac{\partial}{\partial x_j}(\phi_i-u_i^\varepsilon)dx-\int_{\Gamma^\varepsilon}\sigma_{ij}^\varepsilon n_j(\phi_i-u_i^\varepsilon)\,ds=\int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon(\phi_i-u_i^\varepsilon)dx. \tag{1.3.5}$$

Les conditions aux limites (1.2.6) et (1.2.7) impliquent que

$$\int_{\Gamma^\varepsilon}\sigma_{ij}^\varepsilon n_j(\phi_i-u_i^\varepsilon)ds=\int_\omega \sigma_{ij}^\varepsilon\ n_j(\phi_i-u_i^\varepsilon)dx'.$$

D'autre part, $\sigma_{ij}^\varepsilon n_j=\sigma_{T_i}^\varepsilon\ +\sigma_n^\varepsilon\, n_i$ et $(\phi_i-u_i^\varepsilon)n_i=0$ sur ω, alors

$$\int_{\Gamma^\varepsilon}\sigma_{ij}^\varepsilon n_j(\phi_i-u_i^\varepsilon)ds=\int_\omega \sigma_T^\varepsilon(\phi-u^\varepsilon)dx'.$$

Donc de (1.3.5), on obtient

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \ \frac{\partial}{\partial x_j}(\phi_i - u_i^\varepsilon)dx - \int_\omega \sigma_T^\varepsilon.(\phi - u^\varepsilon)dx' = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon(\phi_i - u_i^\varepsilon)dx, \qquad (1.3.6)$$

en ajoutant et en retranchant le terme $\int_\omega k^\varepsilon(\mid \phi - s \mid - \mid u^\varepsilon - s \mid)dx' - \int_\omega \sigma_T^\varepsilon.(\phi - u^\varepsilon)dx'$, on a

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \ \frac{\partial}{\partial x_j}(\phi_i - u_i^\varepsilon)dx + \int_\omega k^\varepsilon(\mid \phi - s \mid - \mid u^\varepsilon - s \mid)dx' - \int_\omega \sigma_T^\varepsilon.(\phi - u^\varepsilon)dx'$$
$$- \int_\omega k^\varepsilon(\mid \phi - s \mid - \mid u^\varepsilon - s \mid)dx' = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon(\phi_i - u_i^\varepsilon)dx. \quad (1.3.7)$$

Posons

$$\beta = \int_\omega \sigma_T^\varepsilon.(\phi - u^\varepsilon)dx' + \int_\omega k^\varepsilon(\mid \phi - s \mid - \mid u^\varepsilon - s \mid)dx',$$

en utilisant la remarque 1.2.2, on montre que

$$\beta = \int_\omega (\sigma_T^\varepsilon.(\phi - s) + k^\varepsilon \mid \phi - s \mid)dx',$$

or

$$\sigma_T^\varepsilon.(\phi - s) \geq \mid \sigma_T^\varepsilon \mid . \mid \phi - s \mid \geq -k^\varepsilon \mid \phi - s \mid \quad \text{sur} \ \ \omega,$$

donc β est positif.

En revenant à (1.3.7), on déduit que

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon, p^\varepsilon) \ \frac{\partial}{\partial x_j}(\phi_i - u_i^\varepsilon)dx + \int_\omega k^\varepsilon(\mid \phi - s \mid - \mid u^\varepsilon - s \mid)dx' \geq \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon(\phi_i - u_i^\varepsilon)dx.$$

En remplaçant $\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ par sa valeur, on obtient

$$(A(u^\varepsilon), \phi - u^\varepsilon) \ + \ B^\varepsilon(p^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) + j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon), \quad \forall \phi \in K^\varepsilon, \quad (1.3.8)$$

d'où le lemme $\square$.

Lorsque les fonctions test appartiennent à K_{div}^ε, on obtient le problème variationnel en vitesse :

$$Pb(K_{div}^\varepsilon) \begin{cases} \text{Trouver} \ \ u^\varepsilon \in K_{div}^\varepsilon \ \ \text{tel que} \\ (A(u^\varepsilon), \phi - u^\varepsilon) \ \ + j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon), \quad \forall \phi \in K_{div}^\varepsilon. \end{cases}$$

Ce problème peut s'écrire encore de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver} \quad u^\varepsilon \in K^\varepsilon_{div} \ \text{ tel que} \\ (A(u^\varepsilon), \phi - u^\varepsilon) \ + j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon) + \delta_{K^\varepsilon_{div}}(\phi) - \delta_{K^\varepsilon_{div}}(u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon), \\ \forall \phi \in (W^{1,r}_{\Gamma^\varepsilon_1}(\Omega^\varepsilon))^3. \end{cases}$$

Avec $\delta_{K^\varepsilon_{div}}$ désigne la fonction indicatrice du convexe K^ε_{div} définie par

$$\delta_{K^\varepsilon_{div}} = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad v \in K^\varepsilon_{div} \\ +\infty \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Nous rappelons que la fonction indicatrice d'un convexe fermé est convexe et semi-continue inférieurement.

1.3.1 Résultats d'existence et d'unicité

Soit V un espace de Banach et V' son dual. On désigne par $(\ , \ )$ le produit de dualité dans V.

Définitions 1.3.1. *Soit A un opérateur de $V \to V'$.*

• *A est dit hémicontinu, si et seulement si pour toute suite $(\lambda_n)_n$ convergente vers λ on a*

$$\big(A(u + \lambda_n v), w\big) \to \big(A(u + \lambda v), w\big) \quad \forall (u, v, w) \in V^3.$$

• *A est dit monotone, si et seulement si*

$$\big(A(u) - A(v), u - v\big) \geq 0 \quad \forall (u, v) \in V^2.$$

• *A est dit strictement monotone si et seulement si*

$$\big(A(u) - A(v), u - v\big) > 0 \quad \forall (u, v) \in V^2 \ \text{ tel que } u \neq v.$$

• *A est dit pseudo-monotone si :*
(i) A est borné,
(ii) si $u_j \rightharpoonup u$ faiblement dans V et $\limsup\limits_{j \to +\infty} (A(u_j), u_j - u) \leq 0$ alors

$$\liminf_{j \to +\infty} (A(u_j), u_j - v) \geq (A(u), u - v) \ \ \forall v \in V.$$

Proposition 1.3.1. *Si l'opérateur A est borné, hémiconitnu, et monotone, alors A est pseudo-monotone.*

Preuve. Voir [14].

Théorème 1.3.1. *Soit A un opérateur pseudo-monotone de $V \to V'$, φ une fonction convexe propre semi continue inférieurement. On suppose qu'il existe v_0 tel que*

$$\varphi(v_0) < +\infty \text{ et } \frac{\big(A(u), u - v_0\big) + \varphi(u)}{\| u \|} \to \infty \text{ si } \| u \| \to +\infty.$$

Alors pour f donné dans V', il existe $u \in V$ solution de l'inéquation variationnelle suivante

$$\big(A(u) - f, v - u\big) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0, \quad \forall \varphi \in V.$$

Preuve. Pour la preuve voir [14] pages 251-253.

Théorème 1.3.2. *Supposons que $f^\varepsilon \in (L^{r'}(\Omega^\varepsilon))^3$, $k^\varepsilon \in L^\infty(\omega)$ tel que $k^\varepsilon \geq 0$ presque partout sur ω. Alors le problème $Pb(K^\varepsilon_{div})$ admet une solution unique u^ε.*

Preuve. Cette preuve est basée sur la théorie des opérateurs non-linéaires introduite par Lions dans [14]. D'après le théorème 1.3.1 et la proposition 1.3.1, il suffit de montrer que la fonctionnelle $j^\varepsilon + \delta_{K^\varepsilon_{div}}$ et l'opérateur A vérifient les propriétés suivantes :

i) $j^\varepsilon + \delta_{K^\varepsilon_{div}}$ est convexe semi-continue inférieurement et propre.
ii) A est borné et hemicontinu.
iii) A est strictement monotone.
iv) Il existe $\phi \in (W^{1,r}_{\Gamma^\varepsilon_1}(\Omega^\varepsilon))^3$ telle que

$$(j^\varepsilon + \delta_{K^\varepsilon_{div}})(\phi) < +\infty,$$

et

$$\frac{(A(v), v - \phi) + (j^\varepsilon + \delta_{K^\varepsilon_{div}})(\phi)}{\| v \|_{1,r}} \to +\infty \text{ quand } \| v \|_{1,r} \to +\infty \quad \forall v \in (W^{1,r}_{\Gamma^\varepsilon_1}(\Omega^\varepsilon))^3.$$

i) Il est évident que la fonctionnelle $j^\varepsilon + \delta_{K^\varepsilon_{div}}$ est convexe, semi-continue inférieurement et propre.

ii) Vérifions que A est borné. On note

$$| v |_{1,r} = \Big(\int_{\Omega^\varepsilon} | D(v) |^r \, dx \Big)^{\frac{1}{r}}.$$

C'est facile de remarquer que $| v |_{1,r} \leq \| v \|_{1,r}$, on en tire que l'opérateur A est borné.

Vérifions que A est hemicontinu. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}$ telle que λ_n converge vers λ lorsque n tend vers $+\infty$.
Pour tout $x \in \Omega^\varepsilon$ et $(u, v, w) \in (W^{1,r}_{\Gamma^\varepsilon_1}(\Omega^\varepsilon))^3$, l'application

$$\Lambda : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\lambda \longrightarrow \mid D(u(x)+\lambda v(x)) \mid^{r-2} \quad D(u(x)) : D(w(x)),$$

est continue, donc

$$\mid D(u(x)+\lambda_n v(x)) \mid^{r-2} \ D(u(x)) : D(w(x)) \longrightarrow \mid D(u(x)+\lambda v(x)) \mid^{r-2} \ D(u(x)) : D(w(x))$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\mid D(u+\lambda_n v) \mid^{r-2} &= \Big[\sum_{1 \leq i,j \leq 3} d_{ij}^2(u+\lambda_n v) \ \Big]^{\frac{r-2}{2}} \\
&= \Big[\sum_{1 \leq i,j \leq 3} (d_{ij}^2(u) + \lambda_n^2 d_{ij}^2(v) + 2\lambda_n d_{ij}(u) d_{ij}(v) \ )\Big]^{\frac{r-2}{2}},
\end{aligned}$$

or $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc bornée, on déduit qu'il existe une constante $M>0$ telle que

$$\Big| \mid D(u+\lambda_n v) \mid^{r-2} \ D(u) : D(w) \Big| \leq \ M \, H(u,v) \big| D(u) : D(w) \big|,$$

avec

$$H(u,v) = \Big[\sum_{1 \leq i,j \leq 3} (d_{ij}^2(u) + d_{ij}^2(v) + 2 \mid d_{ij}(u) d_{ij}(v) \mid \ )\Big]^{\frac{r-2}{2}}.$$

Et comme

$$H(u,v) \big| D(u) : D(w) \big| \in L^1(\Omega^\varepsilon),$$

donc d'après le théorème de convergence dominé de Lebesgue

$$(A(u+\lambda_n v), w) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (A(u+\lambda v), w),$$

i.e A est hemicontinu.

iii) Pour montrer que A est strictement monotone, il suffit d'utiliser les deux inégalités suivantes (voir par exemple [19]) :

$$\big(\mid x \mid^{r-2} x - \ \mid y \mid^{r-2} y, \ x-y \big) \ \geq \Big(\frac{1}{2}\Big)^{r-1} \mid x-y \mid^r, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^3 \quad \forall r > 2, \quad (1.3.9)$$

$$\big(\mid x \mid^{r-2} x - \ \mid y \mid^{r-2} y, \ x-y \big) \ \geq (r-1)(\mid x \mid + \mid y \mid)^{r-2} \mid x-y \mid^2 \ \forall x,y \in \mathbb{R}^3 \quad \forall 1 \leq r \leq 2. (1.3.10)$$

iv) Soit $\phi \in K^{\varepsilon}_{div}$ fixé. D'abord de la définition (1.3.2) de j^{ε}, on a

$$(j^{\varepsilon} + \delta_{K^{\varepsilon}_{div}})(\phi) < +\infty.$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}(A(v)\ ,\ \phi) &\leq \ \mid v \mid^{r-1}_{1,r} \mid \phi \mid_{1,r} \\ &\leq \ \parallel v \parallel^{r-1}_{1,r} \parallel \phi \parallel_{1,r} \quad \forall v \in (W^{1,r}_{\Gamma^{\varepsilon}_1}(\Omega^{\varepsilon}))^3,\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Korn [11], il existe $K_1 > 0$ telle que

$$\mid v \mid_{1,r} \geq K_1 \parallel v \parallel_{1,r} \quad \forall v \in (W^{1,r}_{\Gamma^{\varepsilon}_1}(\Omega^{\varepsilon}))^3,$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\big(A(v), v - \phi\big)}{\parallel v \parallel_{1,r}} &\geq \quad K_1 \parallel v \parallel^{r-1}_{1,r} - \parallel v \parallel^{r-2}_{1,r} \parallel \phi \parallel_{1,r} \\ &\geq \quad \parallel v \parallel^{r-1}_{1,r} \big(K_1 - \frac{\parallel \phi \parallel_{1,r}}{\parallel v \parallel_{1,r}}\big) \to +\infty \\ \text{lorsque} &\quad \parallel v \parallel_{1,r} \to +\infty.\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du théorème 1.3.2.□

Afin de prouver l'existence et l'unicité des solutions $(u^{\varepsilon}, p^{\varepsilon})$ du problème $Pb_1(K^{\varepsilon})$, nous allons introduire un problème auxiliaire $Pb_2(K^{\varepsilon})$ défini par :

$$Pb_2(K^{\varepsilon}) \begin{cases} \text{Trouver} \quad u^{\varepsilon} \in K^{\varepsilon}_{div}, \quad p^{\varepsilon} \in L^{r'}_0(\Omega^{\varepsilon}) \ \text{tels que :} \\ \\ (A(u^{\varepsilon}), \phi) \ + \ B^{\varepsilon}(p^{\varepsilon}, \phi) = (f^{\varepsilon}, \phi), \quad \forall \phi \in (W^{1,r}_0(\Omega^{\varepsilon}))^3, \\ \\ u^{\varepsilon} \ \text{vérifie la condition aux limites de Tresca} \ (1.2.9). \end{cases}$$

Nous allons montrer d'abord que les deux problèmes $Pb_1(K^{\varepsilon})$ et $Pb_2(K^{\varepsilon})$ sont équivalents, puis nous montrons l'existence et l'unicité des solutions du problème $Pb_2(K^{\varepsilon})$.

Lemme 1.3.2. *Pour toute solution $(u^{\varepsilon}, p^{\varepsilon})$ du problème $Pb_2(K^{\varepsilon})$, on a l'égalité suivante*

$$\int_{\omega} \sigma^{\varepsilon}_T(u^{\varepsilon}, p^{\varepsilon}).\phi \ dx' \ = (A(u^{\varepsilon}), \phi) - (p^{\varepsilon}, \mathrm{div}(\phi)) - (f^{\varepsilon}, \phi), \tag{1.3.11}$$

$$\forall \phi \in (W^{1,r}_{\Gamma^{\varepsilon}_1 \cup \Gamma^{\varepsilon}_L}(\Omega^{\varepsilon}))^3 \ \text{ tel que } \ \phi.n = 0 \ \text{ sur } \omega.$$

Preuve. Soient u^{ε}, p^{ε} des solutions du problème $Pb_2(K^{\varepsilon})$. En remplaçant $\sigma^{\varepsilon}_T(u^{\varepsilon}, p^{\varepsilon})$ par sa valeur et en utilisant le fait que $\phi.n = 0$ sur ω, il vient que

$$\begin{aligned}\int_{\omega} \sigma^{\varepsilon}_T(u^{\varepsilon}, p^{\varepsilon}).\phi \ dx' \ &= \ \int_{\omega} \sigma^{\varepsilon}_{ij}(u^{\varepsilon}, p^{\varepsilon}) n_j \phi_i \, dx' \ - \int_{\omega} \sigma^{\varepsilon}_n(u^{\varepsilon}, p^{\varepsilon}) n_i \phi_i dx' \\ &= \ \int_{\omega} \sigma^{\varepsilon}_{ij}(u^{\varepsilon}, p^{\varepsilon}) n_j \phi_i \, dx'.\end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Comme $\phi = 0$ sur $\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon$, en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_\omega \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon, p^\varepsilon) n_j \phi_i \, dx' = \langle \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon, p^\varepsilon)\big), \phi_i \rangle + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon, p^\varepsilon) \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} dx, \qquad (1.3.13)$$

et comme u^ε, p^ε sont des solutions du problème $Pb_2(K^\varepsilon)$, on vérifie facilement que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\big(\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon, p^\varepsilon)\big) = -f_i^\varepsilon.$$

En remplaçant $\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ par sa valeur dans le deuxième terme du second membre dans (1.3.13), on déduit donc (1.3.11). $\square$

Théorème 1.3.3. *Sous les hypothèses du théorème 1.3.2, les problèmes $Pb_1(K^\varepsilon)$ et $Pb_2(K^\varepsilon)$ sont équivalents.*

Preuve.
$\triangleright$ Montrons que $Pb_1(K^\varepsilon) \Longrightarrow Pb_2(K^\varepsilon)$.
Soient u^ε, p^ε des solutions du problème $Pb_1(K^\varepsilon)$. Donc

$$(A(u^\varepsilon), \phi - u^\varepsilon) \ + \ B^\varepsilon(p^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) + j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon), \ \ \forall \phi \in K^\varepsilon. \ (1.3.14)$$

On choisit $\phi = u^\varepsilon \pm \psi$ avec $\psi \in ((W_0^{1,r}(\Omega^\varepsilon))^3$, on obtient

$$(A(u^\varepsilon), \psi) \ + \ B^\varepsilon(p^\varepsilon, \psi) = (f^\varepsilon, \psi), \quad \forall \psi \in (W_0^{1,r}(\Omega^\varepsilon))^3. \qquad (1.3.15)$$

Montrons que $u^\varepsilon, p^\varepsilon$ vérifient la condition aux limites de Tresca.
En utilisant la formule de Green dans (1.3.15), il vient que

$$\big\langle -\operatorname{div}\big(2\mu \mid D(u^\varepsilon) \mid^{r-2} D(u^\varepsilon)\big) + \nabla p^\varepsilon - f^\varepsilon, \psi \big\rangle = 0 \ \ \forall \psi \in \big(W_0^{1,r}(\Omega^\varepsilon)\big)^3,$$

donc

$$-\operatorname{div}\big(2\mu \mid D(u^\varepsilon) \mid^{r-2} D(u^\varepsilon)\big) + \nabla p^\varepsilon - f^\varepsilon = 0 \ \text{ dans } \ \big(W^{-1,r'}(\Omega^\varepsilon)\big)^3,$$

et comme $f^\varepsilon \in \big(L^{r'}(\Omega^\varepsilon)\big)^3$, alors

$$-\operatorname{div}\big(2\mu \mid D(u^\varepsilon \mid^{r-2} D(u^\varepsilon)\big) + \nabla p^\varepsilon - f^\varepsilon = 0 \ \text{ dans } \quad \big(L^{r'}(\Omega^\varepsilon)\big)^3. \qquad (1.3.16)$$

Choisissons maintenant dans (1.3.14) $\phi = u^\varepsilon + \psi$ avec $\psi = (\psi_1, \psi_2, 0) \in \big(W^{1,r}_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon)\big)^3$, il vient que

$$a(u^\varepsilon, \psi) - (p^\varepsilon, \operatorname{div}(\psi)) + j^\varepsilon(u^\varepsilon + \psi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \psi)$$
$$\forall \psi = (\psi_1, \psi_2, 0) \in \big(W^{1,r}_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon)\big)^3, \qquad (1.3.17)$$

en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned}
&\Big\langle -\operatorname{div}\big(2\mu \mid D(u^\varepsilon) \mid^{r-2} D(u^\varepsilon)\big) + \nabla p^\varepsilon - f^\varepsilon, \psi\Big\rangle + \\
&\qquad +2\mu \int_\omega \mid D(u^\varepsilon) \mid^{r-2} d_{ij}(u^\varepsilon)\psi_i n_j \, dx' + j^\varepsilon(u^\varepsilon + \psi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon) \;\; \geq 0 \\
&\qquad\qquad\qquad \forall \psi = (\psi_1, \psi_2, 0) \in \big(W^{1,r}_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon)\big)^3.
\end{aligned}$$

En utilisant (1.3.16) et le fait que $n = (0, 0, -1)$ est le vecteur normal extérieur unitaire à ω, on obtient

$$-2\mu \int_\omega \mid D(u^\varepsilon) \mid^{r-2} d_{i3}(u^\varepsilon)\psi_i \, dx' \; + j^\varepsilon(u^\varepsilon + \psi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon) \;\; \geq 0, \tag{1.3.18}$$

cette inégalité peut s'écrire encore,

$$\int_\omega k^\varepsilon(\mid \psi + u^\varepsilon - s \mid - \mid u^\varepsilon - s \mid) dx' \; - \int_\omega \sigma_T^\varepsilon . \psi \;\, dx' \geq 0 \quad \forall \psi \in (W^{1,r}_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon))^2. \tag{1.3.19}$$

Cette inégalité reste valable pour tout $\psi \in (\mathcal{D}(\omega))^2$, et en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\omega)$ dans $L^r(\omega)$, on obtient

$$\int_\omega k^\varepsilon(\mid \psi + u^\varepsilon - s \mid - \mid u^\varepsilon - s \mid) dx' \; - \int_\omega \sigma_T^\varepsilon . \psi \;\, dx' \geq 0 \quad \forall \psi \in (L^r(\omega))^2, \tag{1.3.20}$$

cette inégalité implique (voir par exemple le théorème 4.2 [2]) que u^ε vérifie la condition aux limites de de Tresca (1.2.9).

$\triangleright$ Réciproquement montrons que $Pb_2(K^\varepsilon) \Longrightarrow Pb_1(K^\varepsilon)$.

Soient $u^\varepsilon, p^\varepsilon$ des solutions du problème $Pb_2(K^\varepsilon)$. D'après le lemme 1.3.2, on a pour tout $\phi \in K^\varepsilon$

$$(A(u^\varepsilon), \phi - u^\varepsilon) - (p^\varepsilon, \operatorname{div}(\phi - u^\varepsilon)) - (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) = \int_\omega \sigma_T^\varepsilon . (\phi - u^\varepsilon) dx',$$

en utilisant la remarque 1.2.2, il vient que

$$\begin{aligned}
\int_\omega \sigma_T^\varepsilon . (\phi - u^\varepsilon) dx' \; + j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon) \;\; &= \;\; \int_\omega \sigma_T^\varepsilon . (\phi - s) + k^\varepsilon \mid \phi - s \mid dx' - \\
&- \;\; \underbrace{\int_\omega \sigma_T^\varepsilon . (u^\varepsilon - s) + k^\varepsilon \mid u^\varepsilon - s \mid dx'}_{=0} \\
&= \;\; \int_\omega \sigma_T^\varepsilon . (\phi - s) + k^\varepsilon \mid \phi - s \mid dx' \geq 0 \;\; ,
\end{aligned}$$

ainsi s'achève la démonstration du théorème 1.3.3. $\Box$

Théorème 1.3.4. *Sous les hypothèses du théorème 1.3.2, il existe $u^\varepsilon \in K^\varepsilon_{div}$ unique et il existe $p^\varepsilon \in L^{r'}_0(\Omega^\varepsilon)$ unique (à une constante additive près), solutions du problème $Pb_1(K^\varepsilon)$.*

Preuve. Soit u^ε la solution du problème $Pb(K^\varepsilon_{div})$. On montre comme dans la preuve du théorème 1.3.3 que u^ε est solution du problème suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver} \quad u^\varepsilon \in K^\varepsilon_{div} \ \text{tel que :} \\ (A(u^\varepsilon), \phi) \ = (f^\varepsilon, \phi), \quad \forall \phi \in (W^{1,r}_{0,div}(\Omega^\varepsilon))^3, \\ u^\varepsilon \text{vérifie la condition de Tresca,} \end{cases} \tag{1.3.21}$$

où

$$W^{1,r}_{0,div}(\Omega^\varepsilon) = \{v \in W^{1,r}_0(\Omega^\varepsilon) : \ \operatorname{div}(v) = 0\}.$$

En particulier u^ε vérifie :

$$(A(u^\varepsilon) - f^\varepsilon, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in V = \{v \in D(\Omega^\varepsilon) : \ \operatorname{div}(v) = 0\}. \tag{1.3.22}$$

D'après le théorème 2.8 [1], on déduit qu'il existe $p^\varepsilon \in W^{-1,r'}(\Omega^\varepsilon)$ tel que :

$$A(u^\varepsilon) - f^\varepsilon = \nabla p^\varepsilon \ \ p.p \ \text{ dans } \Omega^\varepsilon. \tag{1.3.23}$$

En intégrant (1.3.23) sur Ω^ε, on montre facilement que $u^\varepsilon, p^\varepsilon$ sont des solutions du problème $Pb_2(K^\varepsilon)$. Et d'après le théorème 1.3.3, on déduit que $u^\varepsilon, p^\varepsilon$ sont également des solutions du problème $Pb_1(K^\varepsilon)$. □

1.4 Analyse asymptotique du problème

1.4.1 Changement du domaine de référence

Pour l'analyse asymptotique du problème nous allons utiliser le changement d'échelle

$$z = \frac{x_3}{\varepsilon}$$

comme dans [2, 4, 5]... Cette méthode consiste à transposer le problème initialement posé dans le domaine Ω^ε dépendant de ε en un problème équivalent posé sur un domaine fixe Ω indépendant de ε.

Le domaine fixe Ω est défini par :

$$\Omega = \{(x', z) \in \mathbb{R}^3 : x' \in \omega \ ; 0 < z < h(x')\}.$$

On note $\Gamma = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_L$ sa frontière. Nous définissons sur Ω des nouvelles inconnues

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u_i^\varepsilon}(x', z) = u_i^\varepsilon(x', x_3), \ i = 1, 2 \\ \hat{u_3^\varepsilon}(x', z) = \varepsilon^{-1} u_3^\varepsilon(x', x_3) \\ \hat{p^\varepsilon}(x', z) = \varepsilon^r p^\varepsilon(x', x_3). \end{array} \right. \tag{1.4.1}$$

Pour les données du problème, on suppose qu'elles dépendent de ε de la manière suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{k} = \varepsilon^{r-1} k^\varepsilon \\ \hat{f}(x', z) = \varepsilon^r f^\varepsilon(x', x_3) \\ \hat{g}(x', z) = g(x', x_3). \end{array} \right. \tag{1.4.2}$$

avec $\hat{k}, \ \hat{f}, \ \hat{g}$ ne dépendent pas de ε

Soit $\hat{G}(x', z) = (\hat{G}_1(x', z), \hat{G}_2(x', z), \hat{G}_3(x', z))$ tel que

$$\operatorname{div}(\hat{G}) = \frac{\partial \hat{G}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{G}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{G}_3}{\partial z} = 0 \text{ dans } \ \Omega, \text{et } \ \hat{G} = \hat{g} \text{ sur } \Gamma.$$

Ainsi on peut définir le relèvement G^ε de g précédemment introduit comme suivant

$$\begin{gathered} G_i^\varepsilon(x', x_3) = \hat{G}_i(x', z) \quad i = 1, 2, \\ G_3^\varepsilon(x', x_3) = \varepsilon \hat{G}_3(x', z). \end{gathered}$$

Ce choix nous permet de maîtriser la dépendence de G^ε en ε d'une façon explicite, ce qui est utile dans la suite pour obtenir des estimations a priori.

1.4.2 Formulation variationnelle sur Ω

Pour la suite, nous avons besoin à définir une classe de fonctions qui vérifie la condition (**D**') donnée par

$$v = (v_1, v_2) \in (L^2(\Omega))^2 \quad \text{tel que :} \quad \int_\Omega (v_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2}) dx' dz = 0, \ \ \forall \theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\omega).$$

On définit maintenant le cadre fonctionnel sur Ω

$$\begin{gathered} L_0^{r'}(\Omega) = \{q \in L^{r'}(\Omega) : \ \int_\Omega q dx' dz = 0\}, \\ K = \{\varphi \in (W^{1,r}(\Omega))^3 : \varphi = \hat{G} \ \text{ sur } \ \ \Gamma_1 \cup \Gamma_L \, ; \varphi.n = 0 \text{ sur } \omega\}, \\ K_{div} = \{\varphi \in K : \ \operatorname{div}(\varphi) = 0\}, \end{gathered}$$

$$\Pi(K) = \{\bar{\varphi} \in (W^{1,r}(\Omega))^2 : \bar{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2),\ \ \varphi_i = \hat{G}_i \ \text{ sur } \ \Gamma_1 \cup \Gamma_L \ \text{ pour } i = 1,2\},$$

$$\tilde{\Pi}(K) = \{\bar{\varphi} \in \Pi(K) : \bar{\varphi} \ \text{ vérifie } \ (\mathbf{D'})\},$$

$$V_z = \{v = (v_1, v_2) \in (L^r(\Omega))^2 : \ \frac{\partial v_i}{\partial z} \in L^r(\Omega),\ \ i = 1,2\ ; v = 0 \ \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

V_z est un espace de Banach muni de la norme

$$\| v \|_{V_z} = (\sum_{i=1}^{2} \| v_i \|^r_{L^r(\Omega)} + \| \frac{\partial v_i}{\partial z} \|^r_{L^r(\Omega)})^{\frac{1}{r}}.$$

$$\tilde{V_z} = \{v \in V_z : \ v \ \text{ vérifie la condition } (\mathbf{D'})\},$$

$\tilde{V_z}$ est un sous espace vectoriel de V_z.

En multipliant l'inégalité (1.3.8) par ε^{r-1}, et en passant au domaine fixe Ω en introduisant les nouvelles inconnues définies par (1.4.1) et les fonctions définies par (1.4.2), on montre que le problème $Pb_1(K^\varepsilon)$ est équivalent au problème $Pb_1(K)$ donné par

Trouver $\hat{u^\varepsilon}$ dans K_{div} et $\hat{p^\varepsilon}$ dans $L_0^{r'}(\Omega)$ tels que

$$\hat{a}(\hat{u^\varepsilon}, \hat{\phi} - \hat{u^\varepsilon}) - (\hat{p^\varepsilon}, \operatorname{div}(\hat{\phi} - \hat{u^\varepsilon})) + \hat{j}(\hat{\phi}) - \hat{j}(\hat{u^\varepsilon}) \geq \sum_{i=1}^{2} (\hat{f}_i, \hat{\phi}_i - \hat{u_i^\varepsilon}) + \varepsilon(\hat{f}_3, \hat{\phi}_3 - \hat{u_3^\varepsilon}) \quad \forall \hat{\phi} \in K, \tag{1.4.3}$$

avec

$$\hat{j}(\hat{\phi}) = \int_\omega \hat{k} \mid \hat{\phi} - s \mid dx',$$

et

$$\hat{a}(\hat{u^\varepsilon}, \hat{\phi} - \hat{u^\varepsilon}) = \mu\varepsilon^2 \sum_{1 \leq i,j \leq 2} \int_\Omega \mid \hat{D}(\hat{u^\varepsilon}) \mid^{r-2} (\frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u_j^\varepsilon}}{\partial x_i}) \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{\phi}_i - \hat{u_i^\varepsilon}) dx' dz$$

$$+\mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \mid \hat{D}(\hat{u^\varepsilon}) \mid^{r-2} (\frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i}) \left(\frac{\partial}{\partial z} (\hat{\phi}_i - \hat{u_i^\varepsilon}) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\phi}_3 - \hat{u_3^\varepsilon}) \right) dx' dz$$

$$+\mu\varepsilon^2 \int_\Omega \mid \hat{D}(\hat{u^\varepsilon}) \mid^{r-2} \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\phi}_3 - \hat{u_3^\varepsilon}) dx' dz,$$

où

$$\mid \hat{D}(\hat{u^\varepsilon}) \mid = \left[\varepsilon^2 \left(\frac{1}{4} \sum_{1 \leq i,j \leq 2} (\frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u_j^\varepsilon}}{\partial x_i})^2 + (\frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z})^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} (\frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i})^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

1.4.3 Estimations a priori

Nous essayons maintenant à chercher des estimations a priori sur $\hat{u^\varepsilon}, \hat{p^\varepsilon}$. Pour cela nous avons besoin d'établir le lemme suivant

Lemme 1.4.1. ***(Inégalité de Poincaré)***
On rappelle que $0 < h(x') \leq h_{max}$ $\forall x' \in \omega$. *On a l'inégalité suivante*

$$\| \hat{u_i^\varepsilon} \|_{L^r(\Omega)} \leq h_{max} \| \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} \|_{L^r(\Omega)}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.4.4}$$

Preuve. Soient $0 < z < h(x')$ et i=1,2,3 fixe, on a

$$\hat{u_i^\varepsilon}(x', z) = -\int_z^{h(x')} \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial \xi}(x', \xi) d\xi + \hat{u_i^\varepsilon}(x', h(x')) = -\int_z^{h(x')} \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial \xi}(x', \xi) d\xi,$$

car $\hat{u_i^\varepsilon}(x', h(x')) = 0$.
En utilisant l'inégalité de Hölder, alors

$$| \hat{u_i^\varepsilon}(x', z) |^r \leq (h_{max})^{\frac{r}{r'}} \int_z^{h(x')} | \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial \xi}(x', \xi) |^r \, dx' d\xi. \tag{1.4.5}$$

Intégrons (1.4.5) par rapport à z de 0 à $h(x')$, on obtient

$$\int_0^{h(x')} | \hat{u_i^\varepsilon}(x', z) |^r \, dz \leq (h_{max})^r \int_0^{h(x')} | \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial \xi}(x', \xi) |^r \, d\xi, \tag{1.4.6}$$

en intégrant cette inégalité sur ω, il vient que

$$\int_\omega \int_0^{h(x')} | \hat{u_i^\varepsilon}(x', z) |^r \, dx' dz \leq (h_{max})^r \int_\omega \int_0^{h(x')} | \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial \xi}(x', \xi) |^r \, dx' d\xi,$$

d'où,

$$\| \hat{u_i^\varepsilon} \|_{L^r(\Omega)} \leq h_{max} \| \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} \|_{L^r(\Omega)} . \ \square$$

Lemme 1.4.2. ***(Inégalité de Korn)***
Pour tout $\varphi \in K^\varepsilon$, *on a*

$$\| \nabla \varphi \|_{L^r(\Omega^\varepsilon)} \leq C \| D(\varphi) \|_{L^r(\Omega^\varepsilon)}, \tag{1.4.7}$$

où C *est une constante positive qui ne dépend ni de* ε *ni de* φ.

Preuve. Soient $\Omega_1 = \omega \times]0, h^\star[$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ indépendant de ε telle que $h^\star > h_{max}$, et φ une fonction de K^ε. Remarquons d'abord que $\Omega^\varepsilon \subset \Omega_1$. Nous définissons $\bar{\varphi}$ dans Ω_1 par :

$$\bar{\varphi} = \begin{cases} \varphi & \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ 0 & \text{dans } \Omega_1/\Omega^\varepsilon. \end{cases}$$

l'inégalité de Korn sur le domaine fixe Ω_1 implique l'existence d'une constante $C > 0$ indépendante de ε telle que

$$\| \nabla \varphi \|_{L^r(\Omega_1)} \leq C \| D(\varphi) \|_{L^r(\Omega_1)} .$$

Or

$$\| \nabla \bar{\varphi} \|_{L^r(\Omega_1)} = \| \nabla \varphi \|_{L^r(\Omega^\varepsilon)},$$
$$\| D(\bar{\varphi}) \|_{L^r(\Omega_1)} = \| D(\varphi) \|_{L^r(\Omega^\varepsilon)},$$

d'où (1.4.7) découle. $\square$

Remarque 1.4.1. *L'inégalité de Korn s'appelle aussi l'inégalité de coercivité. Pour des preuves de cette inégalité lorsque $r = 2$ vous pouvez consulter [12, 13, 18]. Pour le cas général $1 < r < \infty$, il existe plusieurs preuves avec des conditions aux limites plus générales voir [8, 10, 11, 17, 22]. Le cas où $r = 1$ est exclu, grâce au contre exemple de Ornstein (1962) voir [20].*

Théorème 1.4.1. *Sous les hypothèses du théorème 1.3.4, il existe une constante C indépendante de ε telle que*

$$\sum_{1 \leq i,j \leq 2} \| \varepsilon \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j} \|^r_{L^r(\Omega)} + \| \varepsilon \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z} \|^r_{L^r(\Omega)} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \left(\| \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} \|^r_{L^r(\Omega)} + \| \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i} \|^r_{L^r(\Omega)} \right) \leq C, \tag{1.4.8}$$

$$\| \frac{\partial \hat{p^\varepsilon}}{\partial x_i} \|_{W^{-1,r'}(\Omega)} \leq C \quad i = 1, 2, \tag{1.4.9}$$

$$\| \frac{\partial \hat{p^\varepsilon}}{\partial z} \|_{W^{-1,r'}(\Omega)} \leq C.\varepsilon. \tag{1.4.10}$$

Preuve. Soit u^ε la solution du problème $Pb(K^\varepsilon_{div})$. Donc

$$a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq a(u^\varepsilon, \phi) + j^\varepsilon(\phi) + (f^\varepsilon, u^\varepsilon) - (f^\varepsilon, \phi) \quad \forall \phi \in K^\varepsilon_{div}. \tag{1.4.11}$$

En appliquant l'inégalité de Korn [11], il existe une constante C_K indépendante de ε telle que

$$2\mu C_K \| \nabla u^\varepsilon \|^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)} \leq a(u^\varepsilon, u^\varepsilon). \tag{1.4.12}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\| u^{\varepsilon} \|_{L^r(\Omega^\varepsilon)} \leq \varepsilon h_{max} \| \nabla u^{\varepsilon} \|_{L^r(\Omega^\varepsilon)} . \tag{1.4.13}$$

Nous rappelons l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{a^r}{r} + \frac{b^{r'}}{r'} \quad \forall (a,b) \in {\mathbb{R}_+^\star}^2. \tag{1.4.14}$$

En utilisant (1.4.13), il vient que

$$\| f^{\varepsilon} \|_{L^{r'}(\Omega^\varepsilon)} \ . \ \| u^{\varepsilon} \|_{L^r(\Omega^\varepsilon)} \leq \left((\frac{\mu\ r\ C_K}{2})^{\frac{1}{r}} \| \nabla u^{\varepsilon} \|_{L^r(\Omega^\varepsilon)} \right) \left(\frac{\varepsilon h_{max}}{(\frac{\mu\ r\ C_K}{2})^{\frac{1}{r}}} \| f^{\varepsilon} \|_{L^{r'}(\Omega^\varepsilon)} \right),$$

en appliquant l'inégalité de Young pour

$$a = (\frac{\mu\ r\ C_K}{2})^{\frac{1}{r}} \| \nabla u^{\varepsilon} \|_{L^r(\Omega^\varepsilon)},$$

$$b = \frac{\varepsilon h_{max}}{(\frac{\mu\ r\ C_K}{2})^{\frac{1}{r}}} \| f^{\varepsilon} \|_{L^{r'}(\Omega^\varepsilon)},$$

on obtient

$$\| f^{\varepsilon} \|_{L^{r'}(\Omega^\varepsilon)} \ . \ \| u^{\varepsilon} \|_{L^r(\Omega^\varepsilon)} \leq \frac{\mu C_K}{2} \| \nabla u^{\varepsilon} \|^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^{r'} h_{max}^{r'}}{r'(\frac{\mu\ r\ C_K}{2})^{\frac{r'}{r}}} \| f^{\varepsilon} \|^{r'}_{L^{r'}(\Omega^\varepsilon)} . \tag{1.4.15}$$

De même

$$\| f^{\varepsilon} \|_{L^{r'}(\Omega^\varepsilon)} \ . \ \| \phi \|_{L^r(\Omega^\varepsilon)} \leq \frac{\mu C_K}{2} \| \nabla \phi \|^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^{r'} h_{max}^{r'}}{r'(\frac{\mu\ r\ C_K}{2})^{\frac{r'}{r}}} \| f^{\varepsilon} \|^{r'}_{L^{r'}(\Omega^\varepsilon)} . \tag{1.4.16}$$

En utilisant les inégalités de Hölder et de Young, il vient que

$$\begin{aligned}
| a(u^{\varepsilon}, \phi) | &\leq 2\mu \int_{\Omega^\varepsilon} | D(u^{\varepsilon}) |^{r-1} | D(\phi) | \, dx \\
&\leq \int_{\Omega^\varepsilon} \left((\frac{\mu\ r'\ C_K}{2})^{\frac{1}{r'}} | D(u^{\varepsilon}) |^{r-1} \right) \left(\frac{4}{(r'C_K)^{\frac{1}{r'}}} (\frac{\mu}{2})^{\frac{1}{r}} | D(\phi) | \right) dx \\
&\leq \frac{\mu C_K}{2} \int_{\Omega^\varepsilon} | D(u^{\varepsilon}) |^{(r-1)r'} \, dx + \frac{2^{2r-1}\mu}{r(r'C_K)^{\frac{r}{r'}}} \int_{\Omega^\varepsilon} | D(\phi) |^r \, dx,
\end{aligned}$$

d'où

$$a(u^{\varepsilon}, \phi) \leq \frac{\mu C_K}{2} \| \nabla u^{\varepsilon} \|^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)} + \frac{2^{2r-1}\mu}{r(r'C_K)^{\frac{r}{r'}}} \| D(\phi) \|^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)} . \tag{1.4.17}$$

En utilisant (1.4.11)-(1.4.17) et en choisissant $\phi = G^\varepsilon$, on déduit que

$$\mu C_K \parallel \nabla u^\varepsilon \parallel^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)} \leq \left(\frac{2^{2r-1}\mu}{r(r'C_K)^{\frac{r}{r'}}} + \frac{\mu C_K}{2} \right) \parallel \nabla G^\varepsilon \parallel^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)} + \frac{2\varepsilon^{r'} h^{r'}_{max}}{r'(\frac{\mu\, r\, C_K}{2})^{\frac{r'}{r}}} \parallel f^\varepsilon \parallel^{r'}_{L^{r'}(\Omega^\varepsilon)} . \tag{1.4.18}$$

Et comme

$$\varepsilon^{r'} \parallel f^\varepsilon \parallel^{r'}_{L^{r'}(\Omega^\varepsilon)} = \varepsilon^{1-r} \parallel \hat{f} \parallel^{r'}_{L^{r'}(\Omega)},$$

$$\parallel \frac{\partial u^\varepsilon_i}{\partial x_3} \parallel^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)} = \varepsilon^{1-r} \parallel \frac{\partial \hat{u^\varepsilon_i}}{\partial z} \parallel^r_{L^r(\Omega)} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2,$$

en multipliant (1.4.18) par ε^{r-1} on déduit (1.4.8), avec

$$C = (\mu C_K)^{-1} \left[\left(\frac{2^{2r-1}\mu}{r(r'C_K)^{\frac{r}{r'}}} + \frac{\mu C_K}{2} \right) \parallel \nabla \hat{G} \parallel^r_{L^r(\Omega)} + \frac{2 h^{r'}_{max}}{r'(\frac{\mu\, r\, C_K}{2})^{\frac{r'}{r}}} \parallel \hat{f} \parallel^{r'}_{L^{r'}(\Omega)} \right].$$

Pour obtenir les estimations sur la pression (1.4.9)-(1.4.10), on choisit $\phi = u^\varepsilon \pm \psi$ dans (1.3.8) avec $\psi \in (W^{1,r}_0(\Omega^\varepsilon))^3$, on obtient

$$\int_{\Omega^\varepsilon} p^\varepsilon \mathrm{div}(\psi)\, dx = a(u^\varepsilon, \psi) - (f^\varepsilon, \psi) \quad \forall \psi \in (W^{1,r}_0(\Omega^\varepsilon))^3.$$

En utilisant (1.4.16)-(1.4.17), il vient que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega^\varepsilon} p^\varepsilon \mathrm{div}(\psi)\, dx \right| \leq \frac{\mu C_K}{2} \parallel \nabla u^\varepsilon \parallel_{L^r(\Omega^\varepsilon)} + \left(\frac{2^{2r-1}}{r(r'C_K)^{\frac{r}{r'}}} + \frac{\mu C_K}{2} \right) \parallel \nabla \psi \parallel^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)} \\ + \frac{\varepsilon^{r'} h^{r'}_{max}}{r'(\frac{\mu\, r\, C_K}{2})^{\frac{r'}{r}}} \parallel f^\varepsilon \parallel^{r'}_{L^{r'}(\Omega^\varepsilon)} . \end{aligned} \tag{1.4.19}$$

On prend $\psi = (\psi_1, 0, 0)$, $\psi = (0, \psi_2, 0)$, $\psi = (0, 0, \psi_3)$, respectivement dans (1.4.19), et en passant au domaine fixe Ω on obtient (1.4.9)-(1.4.10).□

1.4.4 Résultats de convergence

Théorème 1.4.2. *Sous les hypothèses du théorème 1.4.1, il existe $u_i^\star$ dans $\tilde{V}_z$ $(i = 1, 2)$, et $p^\star$ dans $L^{r'}_0(\Omega)$ tels que pour des sous suites de $\hat{u^\varepsilon}$, $\hat{p^\varepsilon}$ notées encore $\hat{u^\varepsilon}$, $\hat{p^\varepsilon}$ on a les résultats de convergence faible suivants*

$$\hat{u^\varepsilon_i} \rightharpoonup u_i^\star \quad (1 \leq i \leq 2) \quad \textit{faiblement} \quad \textit{dans } \tilde{V}_z, \tag{1.4.20}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u^\varepsilon_i}}{\partial x_j} \rightharpoonup 0 \quad (1 \leq i, j \leq 2) \quad \textit{faiblement} \quad \textit{dans } L^r(\Omega), \tag{1.4.21}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u^\varepsilon_3}}{\partial z} \rightharpoonup 0 \quad \textit{faiblement} \quad \textit{dans} \quad L^r(\Omega), \tag{1.4.22}$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \quad (1 \leq i \leq 2) \quad faiblement \quad dans \quad L^r(\Omega), \tag{1.4.23}$$

$$\varepsilon \hat{u_3^\varepsilon} \rightharpoonup 0 \quad faiblement \quad dans \quad L^r(\Omega), \tag{1.4.24}$$

$$\hat{p^\varepsilon} \rightharpoonup p^\star \quad faiblement \quad dans \quad L_0^{r'}(\Omega). \tag{1.4.25}$$

Preuve. D'après (1.4.8), il existe une constante C indépendante de ε telle que

$$\| \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} \|_{L^r(\Omega)} \leq C \quad (1 \leq i \leq 2),$$

utilisons cette estimation et l'inégalité de Poincaré, on déduit que la suite $(\hat{u_1^\varepsilon}, \hat{u_2^\varepsilon})_\varepsilon$ est bornée dans V_z, et comme cet espace est réflexif on obtient le résultat de convergence faible (1.4.20) dans V_z.
Montrons que $u^\star \in \tilde{V_z}$. En effet, on a $\text{div}(\hat{u^\varepsilon}) = 0$ sur Ω, donc pour tout $q \in \mathcal{C}_0^\infty(\omega)$:

$$\int_\Omega q(x')(\frac{\partial \hat{u_1^\varepsilon}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{u_2^\varepsilon}}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z})dx'dz = -\int_\Omega q(x')(\frac{\partial \hat{u_1^\varepsilon}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{u_2^\varepsilon}}{\partial x_2})dx'dz = 0,$$

car $u^\varepsilon.n = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \omega$. Et comme $\hat{u_i^\varepsilon} \rightharpoonup u_i^\star \quad i = 1,2$ dans V_z, donc $u^\star$ vérifie la condition (**D'**).

$$\int_\Omega q(x')(\frac{\partial u_1^\star}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^\star}{\partial x_2})dx'dz = 0, \quad \forall q \in \mathcal{C}_0^\infty(\omega). \tag{1.4.26}$$

Aussi les convergences (1.4.21)-(1.4.23) découlent à partir de (1.4.8). Pour démontrer (1.4.24), on utilise d'abord l'inégalité de Poincaré, donc il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend pas de ε telle que

$$\varepsilon \| \hat{u_3^\varepsilon} \|_{L^r(\Omega)} \leq \varepsilon h_{max} \| \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z} \|_{L^r(\Omega)} \leq C,$$

et comme $L^r(\Omega)$ est réflexif, alors il existe une fonction $l \in L^r(\Omega)$ telle que

$$\varepsilon \hat{u_3^\varepsilon} \rightharpoonup l \quad \text{sur} \quad L^r(\Omega).$$

Montrons dans un premier temps que cette limite l dépend seulement de x', puis montrons que $l = 0$.
On a $\text{div}(u^\varepsilon) = 0$ dans Ω, donc

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega q(x') \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_i} dx'dz + \int_\Omega q(x') \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z} dx'dz = 0, \ \forall\, q \in D(\Omega). \tag{1.4.27}$$

Utilisons la formule de Green, on obtient

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \varepsilon \hat{u_i^\varepsilon} \frac{\partial q}{\partial x_i} dx'dz + \int_\Omega \varepsilon \hat{u_3^\varepsilon} \frac{\partial q}{\partial z} = 0, \quad \forall q \in D(\Omega),$$

on tend ε vers zéro, et en utilisant (1.4.20), on déduit que

$$\int_\Omega l\frac{\partial q}{\partial z} = 0, \ \forall q \in D(\Omega),$$

d'où

$$\frac{\partial l}{\partial z} = 0, \quad \text{p.p} \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Comme dans [2] par exemple, on choisit $\quad q(x', z) = z\theta(x') - \gamma, \quad \theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\omega) \quad$ avec

$$\gamma = \mid \Omega \mid^{-1} \int_\Omega z\theta dx'dz,$$

en utilisant le fait que div$(\hat{u^\varepsilon})$ dans Ω, on obtient

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega z\theta \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_i} dx'dz + \int_\Omega z\theta \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z} dx'dz = 0.$$

Par la formule de Green, il vient que

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega z\hat{u_i^\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx'dz + \int_\Omega \hat{u_3^\varepsilon}\theta dx'dz = 0,$$

et comme $\hat{u_i^\varepsilon} \rightharpoonup u_i^\star$ pour $i = 1, 2 \quad$ dans $\ V_z$ et $\varepsilon\hat{u_i^\varepsilon} \rightharpoonup 0$ pour $i = 1, 2 \quad$ dans $L^r(\Omega)$, d'où

$$\int_\Omega \theta l dx'dz = \int_\omega lh\theta dx' = 0, \ \forall h\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\omega).$$

Par la densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\omega)$ dans $L^r(\omega)$, on déduit que

$$l = 0 \text{ presque partout dans } \ \Omega.$$

C'est facile de prouver (1.4.25). En effet, d'après (1.4.9)-(1.4.10), il existe une constante $C' > 0$ telle que

$$\parallel \nabla \hat{p^\varepsilon} \parallel_{W^{-1,r'}(\Omega)} \leq C',$$

comme $p^\varepsilon \in L_0^{r'}(\Omega)$, donc il existe une constante $C'' > 0$ telle que (voir par exemple [21]) :

$$\parallel \hat{p^\varepsilon} \parallel_{L^r(\Omega)} \leq C'' \parallel \nabla \hat{p^\varepsilon} \parallel_{W^{-1,r'}(\Omega)} .$$

D'où

$$\parallel \hat{p^\varepsilon} \parallel_{L^r(\Omega)} \leq C'C'',$$

et par conséquent (1.4.25) découle. □

1.5 Étude du problème limite

Lemme 1.5.1. *Sous les mêmes hypothèses du théorème 1.4.1, les solutions limites $u^\star, p^\star$ vérifient les relations suivantes*

$$p^\star(x', z) = p^\star(x') \ \textit{presque partout dans} \ \Omega, \tag{1.5.1}$$

$$\int_\Omega p^\star\left(\frac{\partial u_1^\star}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^\star}{\partial x_2}\right)dx'dz = 0. \tag{1.5.2}$$

Preuve. On choisit $\hat{\phi}$ dans (1.4.3) tel que $\hat{\phi}_i = \hat{u_i^\varepsilon}$ pour $i = 1, 2$, $\hat{\phi}_3 = \hat{u_3^\varepsilon} \pm \varphi$ avec $\varphi \in W_0^{1,r}(\Omega)$, donc

$$\begin{aligned}
(\hat{p^\varepsilon}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}) &= \mu \int_\Omega \left(\varepsilon^2 \mid \hat{D}(\hat{u^\varepsilon}) \mid^{r-2} \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \mid \hat{D}(\hat{u^\varepsilon}) \mid^{r-2} \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx'dz \\
&- \ \varepsilon(\hat{f}_3, \varphi) = \mu A_\varepsilon(\varphi) - \varepsilon(\hat{f}_3, \varphi),
\end{aligned}$$

avec

$$A_\varepsilon(\varphi) = \mu \int_\Omega \left(\varepsilon^2 \mid \hat{D}(\hat{u^\varepsilon}) \mid^{r-2} \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \mid \hat{D}(\hat{u^\varepsilon}) \mid^{r-2} \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx'dz.$$

On a $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon(\hat{f}_3, \varphi) = 0$, nous devons montrer maintenant que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon(\varphi) = 0$.
En effet, on a

$$\mid \varepsilon \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z} \mid \leq \mid \hat{D}\big(\hat{u^\varepsilon}\big) \mid,$$

$$\mid \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i} \mid \leq \mid \hat{D}(\hat{u^\varepsilon}) \mid,$$

en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
\mid A_\varepsilon(\varphi) \mid &\leq \varepsilon\Big(\int_\Omega \mid \hat{D}\big(\hat{u^\varepsilon}\big) \mid^r dx'dz\Big)^{\frac{r-1}{r}} \Big(\int_\Omega \mid \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mid^r dx'dz\Big)^{\frac{1}{r}} + \\
&+ \varepsilon^2\Big(\int_\Omega \mid \hat{D}(\hat{u^\varepsilon}) \mid^r dx'dz\Big)^{\frac{r-1}{r}} \sum_{i=1}^{2} \Big(\int_\Omega \mid \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mid^r dx'dz\Big)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned} \tag{1.5.3}$$

D'autre part, nous savons d'après l'inégalité de Hölder discrète que pour tout $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$,

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \mid a_i \mid\Big)^r \leq n^{\frac{r}{r'}}\Big(\sum_{i=1}^{n} \mid a_i \mid^r\Big) \qquad \forall r > 1,$$

alors il existe une constante $C(r) > 0$ qui dépend seulement de r telle que

$$| \hat{D}(u^\varepsilon) |^r \leq C(r) \left(\sum_{i,j=1}^{2} | \varepsilon \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j} |^r + | \varepsilon \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z} |^r + \sum_{i=1}^{2} (| \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} |^r + | \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i} |^r) \right). \quad (1.5.4)$$

De (1.4.8) il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε telle que

$$\sum_{i,j=1}^{2} \| \varepsilon \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j} \|_{L^r(\Omega)}^r + \| \varepsilon \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z} \|_{L^r(\Omega)}^r +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \left(\| \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} \|_{L^r(\Omega)}^r + \| \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i} \|_{L^r(\Omega)}^r \right) \leq C.$$

En utilisant (1.5.3)-(1.5.4), on déduit que

$$| A_\varepsilon(\varphi) | \leq (C(r)C)^{\frac{r-1}{r}} \left[\varepsilon \| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \|_{L^r(\Omega)} + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{2} \| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \|_{L^r(\Omega)} \right] \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,r}(\Omega),$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon(\varphi) = 0,$$

et par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\hat{p^\varepsilon}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}) = - \lim_{\varepsilon \to 0} (\frac{\partial \hat{p^\varepsilon}}{\partial z}, \varphi) = 0 \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,r}(\Omega).$$

En utilisant de (1.4.25), on déduit (1.5.1).
D'après (1.5.1), $p^\star$ appartient à $L^{r'}(\omega)$. Donc il existe (θ_m) dans $\mathcal{C}_0^\infty(\omega)$ tel que $\theta_m \to p^\star$ dans $L^{r'}(\omega)$, et grâce à (1.4.26) avec $q = \theta_m$, on obtient (1.5.2) lorsque $m \to +\infty$.□

Lemme 1.5.2. ***(Lemme de Minty)*** *On suppose que F et G étant deux fonctions convexes semi continues inférieurement d'un convexe K dans $\mathbb{R}$, F étant Gateaux-différentiable de dérivée F'.*

Alors si $u \in K$, les deux inégalités suivantes sont équivalentes

$$(F'(u), v - u) + G(v) - G(u) \geq 0, \quad \forall v \in K, \quad (1.5.5)$$

$$(F'(v), v - u) + G(v) - G(u) \geq 0, \quad \forall v \in K. \quad (1.5.6)$$

Preuve. F est Gateaux-différentable et convexe, donc F' est monotone et hémicontinue :

$$(F'(v) - F'(u), v - u) \geq 0, \quad \forall v, u \in V, \quad (1.5.7)$$

$$\forall u, v, w \in V, \ \lambda \to (F'(u + \lambda v), w) \text{ est continue de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}. \quad (1.5.8)$$

En sommant (1.5.5) et (3.4.29), on trouve (1.5.6).

Prenant $v = (1-\lambda)u + \lambda w,\ \lambda \in]0,1[$, en remplaçant dans (1.5.6), on obtient :

$$(F'(1-\lambda)u + \lambda w), \lambda(w-u)) + G((1-\lambda)u + \lambda w) - G(u) \geq 0,$$

avec la convexité de G on a :

$$\lambda(F'(1-\lambda)u + \lambda w), (w-u)) + \lambda(G(w) - G(u)) \geq 0$$

on dévise par λ, puis à l'aide de (1.5.6) on passe à la limite quand $\lambda \to 0$ on obtient (1.5.5). $\square$

Théorème 1.5.1. *Avec les mêmes hypothèses du théorème 1.4.2, $(u^\star, p^\star)$ vérifient*

$$\hat{u_i^\varepsilon} \to u_i^\star \ \textit{fortement} \text{ dans } V_z \quad \textit{pour} \ \ i = 1,2, \quad \forall\, r > 1, \tag{1.5.9}$$

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z})^2\right)^{\frac{r-2}{2}} \frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_i - u_i^\star)dx'dz - \sum_{i=1}^{2}\big(p^\star, \frac{\partial}{\partial x_i}(\hat{\phi}_i - u_i^\star)\big) + \\ + \hat{j}(\hat{\phi}) - \hat{j}(u^\star) \geq \sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_i, \hat{\phi}_i - u_i^\star) \qquad \forall \hat{\phi} \in \Pi(K), \tag{1.5.10}$$

$$p^\star \in W^{1,r'}(\omega), \tag{1.5.11}$$

$$-\mu\frac{\partial}{\partial z}\left((\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z})^2)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\right) + \frac{\partial p^\star}{\partial x_i} = \hat{f}_i, \quad i = 1,2 \quad \textit{dans} \quad L^{r'}(\Omega). \tag{1.5.12}$$

Preuve. Pour la preuve de (1.5.9), on va distinguer deux cas :

1^{er} **cas** $(r \geq 2)$:
Soit u^ε la solution $Pb_{K^\varepsilon_{div}}$. En utilisant l'inégalité suivante

$$(\mid x \mid^{r-2} x - \mid y \mid^{r-2} y\ ,\ x-y) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{r-1} \mid x-y \mid^r \quad \forall r \geq 2 \quad \text{et} \quad x,y \in \mathbb{R}^n, \tag{1.5.13}$$

et en appliquant l'inégalité de Korn, on obtient pour tout $\phi \in K^\varepsilon_{div}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\mu C_K \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega^\varepsilon} \mid \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i^\varepsilon - \phi_i) \mid^r dx + \\ + j^\varepsilon(u^\varepsilon) - j^\varepsilon(\phi) \leq \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon(u^\varepsilon - \phi)dx + a(\phi, \phi - u^\varepsilon).$$

En multipliant l'inégalité précédente par ε^{r-1} et en passant au domaine fixe Ω, on aura

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\mu C_K \sum_{i=1}^{2} \parallel \frac{\partial}{\partial z}(\hat{u_i^\varepsilon} - \hat{\phi}_i) \parallel_{L^r(\Omega)}^r + \hat{j}(\hat{u^\varepsilon}) - \hat{j}(\hat{\phi}) \leq \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{f}_i(\hat{u_i^\varepsilon} - \hat{\phi}_i)dx'dz +$$
$$+\varepsilon \int_\Omega \hat{f}_3(\hat{u_3^\varepsilon} - \hat{\phi}_3)dx'dz + \hat{a}(\hat{\phi}, \hat{\phi} - \hat{u^\varepsilon}).$$

Soit $\bar{u^\varepsilon} = (\hat{u_1^\varepsilon}, \hat{u_2^\varepsilon})$, $\ u^\star = (u_1^\star, u_2^\star)$, et $\bar{\phi} = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2)$, donc $\hat{\phi} \in \tilde{\Pi}(K)$ et

$$\limsup_{\varepsilon \to 0}\{(\frac{1}{2})^{r-1}\mu C_K \parallel \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u^\varepsilon} - \bar{\phi}) \parallel_{L^r(\Omega)}^r + \hat{j}(\bar{u^\varepsilon}) - \hat{j}(\bar{\phi})\} \leq$$
$$\mu \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial z})^2\right)^{\frac{r-2}{2}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}(\bar{\phi} - u^\star)dx'dz + \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{f}_i(u_i^\star - \hat{\phi}_i)dx'dz,$$

par la définition de la limite supérieure, il existe $\varepsilon(\delta) > 0$ tel que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\mu C_K \parallel \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u^\varepsilon} - \bar{\phi}) \parallel_{L^r(\Omega)}^r + \hat{j}(\bar{u^\varepsilon}) - \hat{j}(\bar{\phi}) \leq \mu \int_\Omega (\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial z})^2)^{\frac{r-2}{2}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}(\bar{\phi} - u^\star)dx'dz$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{f}_i(u_i^\star - \hat{\phi}_i)dx'dz + \delta \qquad \forall \varepsilon < \varepsilon(\delta).$$

Utilisons maintenant [4] (lemme 5.3) qui assure la densité de $\tilde{\Pi}(K)$ dans $\tilde{V}_z$ pour la norme de $\tilde{V}_z$. Il existe donc une sous suite $\bar{\phi} \in \tilde{\Pi}(K)$ qui admet $u^\star$ comme limite dans $\tilde{V}_z$, d'où

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\mu C_K \parallel \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u^\varepsilon} - u^\star) \parallel_{L^r(\Omega)}^r + \hat{j}(\bar{u^\varepsilon}) - \hat{j}(u^\star) \leq \delta \qquad \forall \varepsilon < \varepsilon(\delta). \tag{1.5.14}$$

Et comme δ est arbitraire, par la semi-continuité de la fonction $\hat{j}$, on déduit la convergence forte de $\bar{u^\varepsilon}$ vers $u^\star$ dans $\tilde{V}_z$.

$2^{\text{ème}}$ **cas** $(1 < r < 2)$:
La démonstration est la même que dans le premier cas, il suffit juste d'utiliser l'inégalité suivante :

$$(\mid x \mid^{r-2} x - \mid y \mid^{r-2} y, x - y) \geq (r-1)(\mid x \mid + \mid y \mid)^{r-2} \mid x - y \mid^2, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

• Pour montrer l'inégalité variationnelle limite (1.5.10), en utilisant d'abord le lemme 1.5.2 et le fait que $\text{div}(\hat{u^\varepsilon}) = 0$ dans Ω, alors (1.4.3) est équivalente à

$$\hat{a}(\hat{\phi}, \hat{\phi} - \hat{u^\varepsilon}) - \sum_{i=1}^{2}(\hat{p^\varepsilon}, \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x_i}) - (\hat{p^\varepsilon}, \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial z}) + \hat{j}(\hat{\phi}) - \hat{j}(\hat{u^\varepsilon}) \geq$$
$$\geq \sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_i, \hat{\phi}_i - \hat{u_i^\varepsilon}) + \varepsilon(\hat{f}_3, \hat{\phi}_3 - \hat{u_3^\varepsilon}) \quad \forall \hat{\phi} \in K. \tag{1.5.15}$$

En utilisant les résultats de convergence du théorème 1.4.2 et le fait que $\hat{j}$ est convexe et semi-continue inférieurement, on obtient

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z})^2\right)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_i-u_i^\star)dx'dz-\sum_{i=1}^{2}(p^\star,\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial x_i})-(p^\star,\frac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial z})+$$
$$+\hat{j}(\hat{\phi})-\hat{j}(u^\star)\geq\sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_i,\hat{\phi}_i-u_i^\star). \tag{1.5.16}$$

D'autre part, en utilisant (1.5.1) et (1.5.2), l'inéquation variationnelle (1.5.16) devient

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z})^2\right)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_i-u_i^\star)dx'dz-\sum_{i=1}^{2}(p^\star,\frac{\partial}{\partial x_i}(\hat{\phi}_i-u_i^\star))+$$
$$+\hat{j}(\hat{\phi})-\hat{j}(u^\star)\geq\sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_i,\hat{\phi}_i-u_i^\star). \tag{1.5.17}$$

En utilisant le lemme de Minty, on obtient (1.5.10).
• D'après [4] (lemme 5.3), nous pouvons choisir $\hat{\phi}$ dans (1.5.10) tel que

$$\hat{\phi}_i=u_i^\star\pm\varphi_i \quad i=1,2 \quad \forall\varphi_i\in W_0^{1,r}(\Omega) \quad i=1,2,$$

donc

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z})^2\right)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}dx'dz-\sum_{i=1}^{2}(p^\star,\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i})=\sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_i,\varphi_i). \tag{1.5.18}$$

Utilisons maintenant la formule de Green, et en choisissant $\varphi_1=0$ et $\varphi_2\in W_0^{1,r}(\Omega)$, puis $\varphi_1\in W_0^{1,r}(\Omega)$ et $\varphi_2=0$, on obtient

$$-\mu\frac{\partial}{\partial z}\left((\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z})^2)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\right)+\frac{\partial p^\star}{\partial x_i}=\hat{f}_i, \quad \text{pour } i=1,2 \quad \text{dans} \quad W^{-1,r'}(\Omega). \tag{1.5.19}$$

En choisissant φ dans (1.5.18) tel que

$$\varphi_i(x',z)=\theta(x')z(z-h(x')), \quad \text{pour} \quad \text{i=1,2},$$

avec $\theta\in W_0^{1,r}(\omega)$. On a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=-z\frac{\partial h}{\partial x_i}\theta+z(z-h)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}, \quad \text{pour } i=1,2,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=(2z-h)\theta,$$

donc

$$\mu\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z})^2\right)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\theta(2z-h)dx'dz-\int_\Omega p^\star\frac{\partial\theta}{\partial x_i}z(z-h)dx'dz+$$
$$+\int_\Omega p^\star z\frac{\partial h}{\partial x_i}\theta dx'dz=\int_\Omega\hat{f}_i\theta z(z-h)dx'dz. \quad (1.5.20)$$

Comme de (1.5.1) on a $p^\star$ ne dépend pas de z, donc

$$\int_\Omega p^\star\frac{\partial\theta}{\partial x_i}z(z-h)dx'dz=-\frac{1}{6}\int_\omega p^\star h^3\frac{\partial\theta}{\partial x_i}dx',$$

et

$$\int_\Omega p^\star z\frac{\partial h}{\partial x_i}\theta dx'dz=\frac{1}{2}\int_\omega p^\star h^2\frac{\partial h}{\partial x_i}\theta dx'.$$

Or

$$\frac{1}{6}\int_\omega p^\star h^3\frac{\partial\theta}{\partial x_i}dx'+\frac{1}{2}\int_\omega p^\star h^2\frac{\partial h}{\partial x_i}\theta dx'=\frac{1}{6}\int_\omega p^\star\frac{\partial}{\partial x_i}(h^3\theta)dx',$$

il vient que

$$\int_\omega K_i\theta dx'+\frac{1}{6}\int_\omega p^\star\frac{\partial}{\partial x_i}(h^3\theta)dx'=\int_\omega M_i\theta dx',\ \forall\varphi\in W_0^{1,r}(\omega)$$

avec

$$K_i=\mu\int_0^{h(x')}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z})^2\right)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(2z-h)dz,$$

et

$$M_i=\int_0^{h(x')}\hat{f}_iz(z-h)dz.$$

En utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_\omega K_i\theta dx'-\frac{1}{6}\int_\omega h^3\frac{\partial p^\star}{\partial x_i}\theta dx'=\int_\omega M_i\theta dx',\ \forall\varphi\in W_0^{1,r}(\omega), \quad (1.5.21)$$

donc pour $i=1,2$ on a

$$K_i-\frac{1}{6}h^3\frac{\partial p^\star}{\partial x_i}=M_i,\ \text{ dans }\ W^{-1,r'}(\omega). \quad (1.5.22)$$

Comme $\dfrac{\partial u_i^\star}{\partial z}\in L^r(\Omega)$ pour $i=1,2,$ donc $K_i\in L^{r'}(\omega)$. On a aussi $M_i\in L^{r'}(\omega)$ pour $i=1,2$ (car $\hat{f}\in L^{r'}(\Omega)$ et $h\in L^\infty(\omega)$). Donc d'après (1.5.22) on déduit que

$$\frac{\partial p^\star}{\partial x_i}\in L^{r'}(\omega)\text{ pour }i=1,2,$$

d'où (1.5.11) découle, et par conséquent (1.5.19) devient (1.5.12).□

Théorème 1.5.2. *Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, les traces*

$$s^\star = u^\star(x',0) \qquad \tau^\star = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{\partial u^\star}{\partial z}(x',0)\Big)^2\right)^{\frac{r-2}{2}} \frac{\partial u^\star}{\partial z}(x',0),$$

vérifient

$$\int_\omega \hat{k}(\mid \psi + s^\star - s \mid - \mid s^\star - s \mid)dx' - \int_\omega \mu\tau^\star\psi dx' \geq 0 \quad \forall\psi \in (L^r(\omega))^2, \tag{1.5.23}$$

et la condition aux limites de Tresca suivante

$$\left.\begin{array}{l} \mu \mid \tau^\star \mid < \hat{k} \;\Rightarrow\; s^\star = s \\ \mu \mid \tau^\star \mid = \hat{k} \;\Rightarrow\; \exists\ \lambda \geq 0 \ \text{ tel que } \ s^\star = s + \lambda\tau^\star \end{array}\right\} \ \text{p.p} \quad \text{sur} \quad \omega. \tag{1.5.24}$$

Aussi $u^\star, p^\star$ *vérifient l'équation généralisée faible de Reynolds*

$$\begin{aligned} &\int_\omega \left(\frac{h^3}{12\mu}\nabla p^\star(x') + \tilde{F} + \int_0^h \int_0^y A^\star(x',\xi)\frac{\partial u^\star}{\partial \xi}(x',\xi)d\xi dy\right).\nabla\phi(x')dx' \\ &- \int_\omega \frac{h}{2}\left(\int_0^h A^\star(x',\xi)\frac{\partial u^\star}{\partial \xi}(x',\xi)d\xi\right).\nabla\phi(x')dx' = 0, \quad \forall\phi \in W^{1,r}(\omega), \end{aligned} \tag{1.5.25}$$

où

$$A^\star(x',\xi) = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{\partial u_i^\star}{\partial \xi}(x',\xi)\Big)^2\right)^{\frac{r-2}{2}} \quad \text{et} \quad \tilde{F}(x') = \frac{1}{\mu}\int_0^h F(x',y)dy - \frac{h}{2\mu}F(x',h).$$

Preuve. En utilisant le lemme 5.3 du [4], on peut choisir $\hat{\phi}$ dans (1.5.10) tel que $\hat{\phi}_i = u_i^\star + \psi_i$ pour $i = 1, 2$, où $\psi \in (W^{1,r}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega))^2$ avec

$$W^{1,r}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega) = \{\varphi \in W^{1,r}(\Omega) : \quad \varphi = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_1 \cup \Gamma_L\},$$

donc

$$\begin{aligned} \mu\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z})^2\Big)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\frac{\partial \psi_i}{\partial z}dx'dz - \sum_{i=1}^{2}(p^\star, \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}) + \\ + \hat{j}(\psi + s^\star) - \hat{j}(s^\star) \geq \sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_i, \psi_i). \end{aligned}$$

Rappelons que $n = (0, 0, -1)$ est le vecteur normal unitaire extérieur à ω, en utilisant la formule de Green, il vient que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \Big\{ -\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z})^2\Big)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\right) + \frac{\partial p^\star}{\partial x_i}\Big\}\psi_i dx'dz + \\ &+ \int_\omega \hat{k}(\mid \psi + s^\star - s \mid - \mid s^\star - s \mid)dx' - \int_\omega \mu\tau^\star\psi dx' \geq \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{f}_i\psi_i dx'dz. \end{aligned} \tag{1.5.26}$$

En utilisant (1.5.12), on déduit que pour tout $\psi \in \left(W^{1,r}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)\right)^2$

$$\int_\omega \hat{k}(\mid \psi + s^\star - s \mid - \mid s^\star - s \mid)dx' - \int_\omega \mu\tau^\star\psi dx' \geq 0, \tag{1.5.27}$$

cette inégalité reste valable pour tout $\psi \in (\mathcal{D}(\omega))^2$, et par la densité de $\mathcal{D}(\omega)$ dans $L^r(\omega)$ on déduit (1.5.23).

Nous obtenons aussi (1.5.24) comme dans [4] (Théorème 4.2).

Pour prouver (1.5.25), on intègre deux fois (1.5.12) entre 0 et z, on obtient

$$\begin{aligned} -\mu\int_0^z A^\star(x',\xi)\frac{\partial u_i^\star}{\partial\xi}(x',\xi)d\xi + \mu z\tau_i^\star + \frac{z^2}{2}\frac{\partial p^\star}{\partial x_i}(x') = \\ = \int_0^z\int_0^\xi \hat{f}_i(x',y)dyd\xi \ \text{ pour } \ i=1,2, \end{aligned} \tag{1.5.28}$$

en partculier pour $z=h$, donc

$$-\mu\int_0^h A^\star(x',\xi)\frac{\partial u_i^\star}{\partial\xi}(x',\xi)d\xi + \mu h\tau_i^\star + \frac{h^2}{2}\frac{\partial p^\star}{\partial x_i}(x') = \int_0^h\int_0^\xi \hat{f}_i(x',y)dyd\xi \ \text{ pour } \ i=1,2. \tag{1.5.29}$$

Intégrant (1.5.28) entre 0 et h, on obtient

$$\frac{h^3}{6}\nabla p^\star(x') - \mu\int_0^h\int_0^y A^\star(x',\xi)\frac{\partial u^\star}{\partial\xi}(x',\xi)d\xi dy + \frac{\mu h^2}{2}\tau^\star = \int_0^h F(x',y)dy, \tag{1.5.30}$$

avec

$$F_i(x',y) = \int_0^y\int_0^\xi \hat{f}_i(x',t)dtd\xi \ \ i=1,2.$$

De (1.5.29)-(1.5.30), on déduit (1.5.25). $\square$

Théorème 1.5.3. *La solution $(u^\star,p^\star)$ de l'inéquation variationnelle limite (1.5.10) est unique dans $\tilde{V}_z \times \left(L_0^{r'}(\omega)\cap W^{1,r'}(\omega)\right)$.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux solutions (U^1,p^1), (U^2,p^2) de l'inéquation variationnelle (1.5.10), alors

$$\begin{aligned} \mu\sum_{i=1}^2\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^2(\frac{\partial U_i^1}{\partial z})^2\Big)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial U_i^1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_i - U_i^1)dx'dz - \sum_{i=1}^2(p^1,\frac{\partial}{\partial x_i}(\hat{\phi}_i - U_i^1)) + \\ + \hat{j}(\hat{\phi}) - \hat{j}(U^1) \geq \sum_{i=1}^2(\hat{f}_i,\hat{\phi}_i - U_i^1) \qquad \forall\hat{\phi}\in\Pi(K), \end{aligned} \tag{1.5.31}$$

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial U_i^2}{\partial z})^2\Big)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial U_i^2}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_i-U_i^2)dx'dz-\sum_{i=1}^{2}(p^2,\frac{\partial}{\partial x_i}(\hat{\phi}_i-U_i^2))+$$

$$+\hat{j}(\hat{\phi})-\hat{j}(U^2)\geq\sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_i,\hat{\phi}_i-U_i^2)\qquad\forall\hat{\phi}\in\Pi(K).(1.5.32)$$

On prend $\phi=U^2$ dans (1.5.31), puis $\phi=U^1$ dans (1.5.32) et en sommant les deux inéquations, il vient que

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left((\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial U_i^1}{\partial z})^2)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial U_i^1}{\partial z}-(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial U_i^2}{\partial z})^2)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial U_i^2}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial z}(U_i^1-U_i^2)dx'dz\leq 0,$$

utilisons les deux inégalités suivantes

$$(\mid x\mid^{r-2}x-\mid y\mid^{r-2}y\;,\;x-y)\geq(\mid x\mid+\mid y\mid)^{r-2}\mid x-y\mid^2\quad\forall 1<r<2\quad\text{et}\quad x,y\in\mathbb{R}^n,$$

$$(\mid x\mid^{r-2}x-\;\mid y\mid^{r-2}y,\;x-y)\;\geq(\frac{1}{2})^{r-1}\mid x-y\mid^r,\quad\forall x,y\in\mathbb{R}^3\quad\forall r>2,$$

on obtient

$$\|\;\frac{\partial}{\partial z}(U^1-U^2)\;\|_{(L^r(\Omega))^2}=0.$$

Utilisons l'inégalité de Poincaré, on déduit que

$$\|\;U^1-U^2\;\|_{V_z}=0.\tag{1.5.33}$$

L'unicité de $p^\star$ dans $L_0^{r'}(\omega)\cap W^{1,r'}(\omega)$ découle à partir de (1.5.25). En effet, on a

$$\begin{aligned}&\int_\omega\left(\frac{h^3}{12\mu}\nabla p^1(x')+\tilde{F}+\int_0^h\int_0^y A_1(x',\xi)\frac{\partial U^1}{\partial\xi}(x',\xi)d\xi dy\right).\nabla\phi(x')dx'\\&-\int_\omega\frac{h}{2}\left(\int_0^h A_1(x',\xi)\frac{\partial U^1}{\partial\xi}(x',\xi)d\xi\right).\nabla\phi(x')dx'=0,\quad\forall\phi\in W^{1,r}(\omega),\end{aligned}\tag{1.5.34}$$

$$\begin{aligned}&\int_\omega\left(\frac{h^3}{12\mu}\nabla p^2(x')+\tilde{F}+\int_0^h\int_0^y A_2(x',\xi)\frac{\partial U^2}{\partial\xi}(x',\xi)d\xi dy\right).\nabla\phi(x')dx'\\&-\int_\omega\frac{h}{2}\left(\int_0^h A_2(x',\xi)\frac{\partial U^2}{\partial\xi}(x',\xi)d\xi\right).\nabla\phi(x')dx'=0,\quad\forall\phi\in W^{1,r}(\omega),\end{aligned}\tag{1.5.35}$$

où

$$A_j(x',\xi)=\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{\partial U_i^j}{\partial\xi}(x',\xi)\Big)^2\right)^{\frac{r-2}{2}}\quad\text{pour}\;\;j=1,2.$$

en retranchant (1.5.35) du (1.5.34) et en utilisant (1.5.33) on obtient

$$\int_\omega \frac{h^3}{12\mu} \nabla(p^1 - p^2) \nabla\phi \, dx' = 0.$$

En prenant $\phi = p^1 - p^2$, et en appliquant l'inégalité de Poincaré, il vient que

$$\| p^1 - p^2 \|_{L^{r'}(\omega)} = 0. \square$$

Bibliographie

[1] C. Amrouche, V. Girault , Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension. Czechoslovak Mathematical Journal, 44, (1994).

[2] G. Bayada, M. Boukrouche, On a free boundary problem for Reynolds equation derived from the Stokes system with Tresca boundary conditions. Journal of Mathematical Analysis and Applications 2003, 282, 212-231.

[3] R.B. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager, Dynamic of polymer liquids. John Wiley, 1987, 2nd edition.

[4] M. Boukrouche, G. Łukaszewicz, Asymptotic analysis of solutions of a thin film lubrication problem with nonlinear boundary conditions. International Journal of Engineering Science 2003, 41, 521-537.

[5] F. Boughanim, Etude des écoulements isothermes et non isothermes des fluides non Newtoniens : Loi de Carreau , loi de puissance. Thèse de mathématiques appliquées, Université Jean Monnet Saint-Etienne (1996).

[6] G. Duvaut, J.L. Lions, Les inéquations en mécanique des fluides, Dunod, 1969.

[7] I. Ekeland, R. Temam, Analyse convexe et problèmes variationnels. Dunod, Paris, 1974.

[8] M. Fuchs, On stationary incompressible Norton fluids and some extensions of Korn's inequality. Zeitschr. Anal. Anwendungen 13(2), 191-197, (1994).

[9] O. Gipouloux, A. Mikelić, Effective filtration laws for a quasi Newtonian flow in a thin slab. Proceedings of the Conference, Mathematical Modeling of Flow Trough Porous Media, Saint-Etienne, France, 1995.

[10] J. Gobert, Une inéquation fondamentale de la théorie de l'elasticité. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 3-4, 182-191, (1962).

[11] J. Gobert, Sur une inégalité de coercivité. J.Math. Anal. Apll. 36, 518-528.

[12] I. Hlavá*ček*, J. Nečas, On inequalities of Korn's , I. Boundary-value Problems for elliptic systems of PDEs, II. Applications to linear elasticity. Arch. Rat. Mech. Anal. 36, 305-311 (part I), 312-334 (part2), (1970).

[13] V.A. Kondratiev, O.A. Oleinik, On Korn's inequalities. C.R. Acad. Sci. Paris 308, Série I , 483-487, (1989).

[14] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[15] P.P. Mosolov, V.P. Mjasnikov, A proof of Korn's inequality. Dokl, Akad Tom 201 (1971).

[16] A. Mikelić, R. Tapiéro, Mathematical derivation of the power law describing polymer flow through a thin slab. M^2AN, vol 29, no 1, 3-22, 1995.

[17] J. Nečas, Sur les normes équivalentes dans $W^{k,p}(\Omega)$ et sur la coercivité des formes formellement positives. Séminaire Equations aux Dérivées partielles, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal (1966).

[18] J.A. Nitshe, On Korn's second inequality. R.A.I.R.O., Analyse Numerique 15, no. 3, 237-248 (1981).

[19] J.T. Oden, Qualitative methods in nonlinear mechanics. Prentice-Hall, 1986.

[20] D. Ornstein, A non-inequality for differential operators in the L^1 norm. Arch. Rat. Mech. Anal. 11, 40-49, (1962).

[21] R. Temam, Navier-Stokes equations. North-Holland, 1984.

[22] R. Temam, Mathematical problems in plasticity. Gautier Villars, Paris, (1985).

Chapitre 2

Étude de l'écoulement d'un fluide non-Newtonien dont la viscosité suit la loi de puissance avec une condition de frottement liquide-solide de Tresca : II- cas non-isotherme

2.1 Introduction

Dans le premier chapitre nous avons supposé que le fluide est isotherme. Il est plus réaliste de prendre en considération l'effet de la température surtout lorsque le fluide est non-Newtonien. Nous allons donc reprendre l'étude faite dans le premier chapitre en supposant de plus que le fluide est non-isotherme. Ceci nous conduit à un problème variationnel fortement couplé en vitesse-pression-température. Nous montrons d'abord un théorème d'existence des solutions faibles grâce au théorème de point fixe de Schauder. Puis, nous étudions le comportement asymptotique des solutions faibles du problème considéré lorsque l'épaisseur du domaine tend vers zéro et nous obtenons le problème limite. La différence avec le premier chapitre c'est que nous n'avons pas pu confirmer l'unicité des solutions du problème d'origine ni celles du problème limite. D'autres travaux ont été fait dans ce sens, en particulier le travail de F. Saidi [12] lorsque le fluide est supposé Newtonien, en couplant l'équation de la conservation de la quantité du mouvement avec l'équation de la conservation de l'énergie et en tenant compte du frottement sur une partie de la frontière du domaine de travail. Nous citons aussi les travaux sans frottement de F. Boughanim [3] lorsque le fluide est supposé non-Newtonien dont la viscosité suit la loi de puissance et la dépendance en température est donnée par la loi d'Arrhenuis [2].

2.2 Description du problème et équations de base

Dans ce chapitre Ω^ε désignera le même domaine mince considéré en premier chapitre

$$\Omega^\varepsilon = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : (x', 0) \in \omega \ , \quad 0 < x_3 < \varepsilon h(x')\}.$$

Nous rappelons que Γ^ε est sa frontière, avec

$$\Gamma^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_L^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_1^\varepsilon.$$

Nous considérons l'écoulement stationnaire non-isotherme incompressible d'un fluide non-Newtonien dont la viscosité suit la loi de puissance. Pour des forces extérieures f^ε données, nous supposons que l'écoulement du fluide est gouverné par les équations suivantes :

• La loi de la conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i^\varepsilon = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^\varepsilon, \tag{2.2.1}$$

où le tenseur σ^ε est décomposé comme suivant

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = -p^\varepsilon \delta_{ij} + 2\mu^\varepsilon(T^\varepsilon)|D(u^\varepsilon)|^{r-2} d_{ij}(u^\varepsilon). \tag{2.2.2}$$

Avec
- $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon)$ est la vitesse du fluide,
- p^ε est sa pression,
- T^ε est sa température,
- μ^ε est sa viscosité.

• La loi de la conservation de l'energie

$$-\nabla.\big(K^\varepsilon \nabla T^\varepsilon\big) + r^\varepsilon T^\varepsilon = 2\mu^\varepsilon(T^\varepsilon) \mid D(u^\varepsilon) \mid^r \qquad \text{dans} \quad \Omega^\varepsilon, \tag{2.2.3}$$

$K^\varepsilon, r^\varepsilon$ désignent respectivement, la conductivité thermique et l'apport massique de la chaleur.

• Le fluide est supposé incompressible

$$\text{div}(u^\varepsilon) = 0 \ \ \text{dans} \ \ \Omega^\varepsilon. \tag{2.2.4}$$

Afin de décrire les conditions aux limites, on introduit d'abord la fonction $g = (g_1, g_2, g_3)$ telle que

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} g.n \ \ ds = 0. \tag{2.2.5}$$

La vitesse sur le bord est donnée en fonction de g sauf sur ω.

• Sur Γ_1^ε, nous considérons une condition de non glissement

$$u^\varepsilon = g = 0. \tag{2.2.6}$$

• Sur Γ_L^ε, la vitesse est connue et parallèle au plan de ω

$$u^\varepsilon = g \quad avec \;\; g_3 = 0. \tag{2.2.7}$$

• Sur ω, il n'y a pas de flux sortant, donc

$$u_3^\varepsilon = g_3 = 0. \tag{2.2.8}$$

Sur ω la vitesse tangentielle est connue et vérifie loi de Tresca [8], où k^ε est le seuil de frottement

$$\left.\begin{array}{l} \mid \sigma_T^\varepsilon \mid \; < \; k^\varepsilon \;\; \Rightarrow \;\; u_T^\varepsilon \;\; = \; s \\ \mid \sigma_T^\varepsilon \mid \; = \; k^\varepsilon \;\; \Rightarrow \;\; \exists \; \lambda \geq 0 \;\; \text{tel que} \quad u_T^\varepsilon = s - \lambda \sigma_T^\varepsilon \end{array}\right\} \; \text{sur} \quad \omega \tag{2.2.9}$$

où $s = g$ sur ω, $| \, . \, |$ désigne ici la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, $n = (n_1, n_2, n_3)$ est le vecteur normal extérieur à Γ^ε.
On note

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon.n = u_i^\varepsilon n_i \quad ; \quad u_{T_i}^\varepsilon = u_i^\varepsilon - u_n^\varepsilon n_i, \tag{2.2.10}$$

$$\sigma_n^\varepsilon = (\sigma^\varepsilon.n).n = \sigma_{ij}^\varepsilon n_i n_j \quad ; \quad \sigma_{T_i}^\varepsilon = \sigma_{ij}^\varepsilon n_j - \sigma_n^\varepsilon n_i, \tag{2.2.11}$$

respectivement, la vitesse normale, la vitesse tangentielle, la composante normale et tangentielle du tenseur.
Pour la température T^ε nous supposons une condition de Newmann homogène sur ω

$$\frac{\partial T^\varepsilon}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \omega, \tag{2.2.12}$$

et une condition de Dirichlet homogène sur $\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon$

$$T^\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon. \tag{2.2.13}$$

2.3 Problème variationnel et résultat d'existence

Dans cette section nous définissons le problème variatonnel, et nous établissons un résultat d'existence en utilisant le théorème de point fixe de Schauder.

2.3.1 Cadre fonctionnel et problème variationnel

Soient r et q tels que $1 < r < \infty$ et $1 < q < \frac{3}{2}$, et r', q' leurs conjugués respectivement. Afin de donner une formulation faible du problème (2.2.1)-(2.2.13), on introduit d'abord quelques espaces de Sobolev standards :

$$(W^{1,r}(\Omega^\varepsilon))^3 = \{v \in (L^r(\Omega^\varepsilon))^3 : \ \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x_j} \in L^r(\Omega^\varepsilon) \text{ pour } \ i,j = 1,..,3 \ \},$$

$W_0^{1,r}(\Omega^\varepsilon)$ est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega^\varepsilon)$ dans $W^{1,r}(\Omega^\varepsilon)$. L'espace dual de $W_0^{1,r}(\Omega^\varepsilon)$ sera noté par $W^{-1,r'}(\Omega^\varepsilon)$. On suppose que la fonction g introduite dans la section 2.2 appartient à $(W^{1-\frac{1}{r},r}(\Gamma^\varepsilon))^3$, l'espace des traces des fonctions de $(W^{1,r}(\Omega^\varepsilon))^3$ sur Γ^ε. Il est connu d'après [1] (lemme 3.3) que (2.2.4) est équivalente à l'existence d'une fonction G^ε telle que

$$G^\varepsilon \in (W^{1,r}(\Omega^\varepsilon))^3 \ \text{ avec } \operatorname{div}(G^\varepsilon) = 0 \ \text{ dans } \ \Omega^\varepsilon, \ \textit{et} \ \ G^\varepsilon = g \ \text{ sur } \ \Gamma^\varepsilon. \tag{2.3.1}$$

Nous considérons le cadre fonctionnel suivant sur Ω^ε :

$$\begin{gathered}
W^{1,r}_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon) = \{\psi \in W^{1,r}(\Omega^\varepsilon) : \ \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon\}, \\
H^1_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon) = \{\psi \in H^1(\Omega^\varepsilon) : \ \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon\}, \\
K^\varepsilon = \{v \ \in (W^{1,r}(\Omega^\varepsilon)^3 \ : \ v = G^\varepsilon \ \text{ sur } \ \Gamma_L^\varepsilon, \ v = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_1^\varepsilon, \ v.n = 0 \ \text{ sur } \ \omega\}, \\
K^\varepsilon_{div} = \{ \ v \in K^\varepsilon : \ \operatorname{div}(v) = 0\},
\end{gathered}$$

et

$$L_0^{r'}(\Omega^\varepsilon) = \{ \ q \in L^{r'}(\Omega^\varepsilon) \ : \int_{\Omega^\varepsilon} q \, dx = 0\}.$$

La formulation variationnelle du problème (2.2.1)-(2.2.13) s'écrit donc :

$$\text{Trouver } u^\varepsilon \in K^\varepsilon_{div}, \ \ p^\varepsilon \in L_0^{r'}(\Omega^\varepsilon), \ \ T^\varepsilon \in W^{1,q}_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon) \text{ telles que}$$

$$a(T^\varepsilon; u^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) - (p^\varepsilon, \operatorname{div}(\phi)) + j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) \ \ \forall \phi \in K^\varepsilon, \tag{2.3.2}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^\varepsilon} K^\varepsilon \nabla T^\varepsilon \nabla \psi dx + \int_{\Omega^\varepsilon} r^\varepsilon T^\varepsilon \psi dx = 2 \int_{\Omega^\varepsilon} \mu^\varepsilon(T^\varepsilon) \mid D(u^\varepsilon) \mid^r \psi dx \\
\forall \psi \in W^{1,q'}_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon),
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

où

$$a(T^\varepsilon; u^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) = 2 \int_{\Omega^\varepsilon} \mu^\varepsilon(T^\varepsilon) \mid D(u^\varepsilon) \mid^{r-2} D(u^\varepsilon) : D(\phi - u^\varepsilon) dx,$$

avec

$$D(u^\varepsilon) : D(\phi - u^\varepsilon) = \sum_{i,j=1}^{3} d_{ij}(u^\varepsilon) d_{ij}(\phi - u^\varepsilon),$$

$$j^{\varepsilon}(\phi) = \int_{\omega} k^{\varepsilon} \mid \phi - s \mid dx'.$$

Remarquons que $q' = \frac{q}{q-1} > 3$, par les injections de Sobolev ψ est $L^{\infty}(\Omega^{\varepsilon})$. Par conséquent le terme de droite dans (2.3.3) a un sens.

2.3.2 Résultat d'existence

Pour les données de ce problème, nous supposons les hypothèses suivantes :

$$f^{\varepsilon} \in (W^{1,r'}(\Omega^{\varepsilon}))^3, \tag{2.3.4}$$

$$\mu^{\varepsilon}, K^{\varepsilon} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \tag{2.3.5}$$

et il existe des constantes $\mu_{\star}$, $\mu^{\star}$, $K_{\star}^{\varepsilon}$, $K_{\varepsilon}^{\star}$, $r_{\star}^{\varepsilon}$, $r_{\varepsilon}^{\star}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$0 < \mu_{\star} \leq \mu^{\varepsilon} \leq \mu^{\star} \tag{2.3.6}$$

$$0 < K_{\star}^{\varepsilon} \leq K^{\varepsilon} \leq K_{\varepsilon}^{\star}, \tag{2.3.7}$$

$$0 < r_{\star}^{\varepsilon} \leq r^{\varepsilon} \leq r_{\varepsilon}^{\star}. \tag{2.3.8}$$

Les constantes $\mu_{\star}$, $\mu^{\star}$ ne dépendent pas de ε, par contre les constantes $K_{\star}^{\varepsilon}$, $K_{\varepsilon}^{\star}$, $r_{\star}^{\varepsilon}$, $r_{\varepsilon}^{\star}$ dépendent de ε.

Théorème 2.3.1. ***(Théorème de point fixe de Schauder) [10] page 222***
Soit X un espace de Banach et M un ensemble fermé convexe et non vide de X. Soit T une application continue de M dans M telle que $T(M)$ est relativement compact. Alors T a un point fixe.

Lemme 2.3.1. *Soit $\theta \in W^{1,q}_{\Gamma_1^{\varepsilon} \cup \Gamma_L^{\varepsilon}}(\Omega^{\varepsilon})$. Notons $u_{\theta}^{\varepsilon} \in K_{div}^{\varepsilon}$ l'unique solution de l'inéquation variationnelle*

$$a(\theta; u_{\theta}^{\varepsilon}, \phi - u_{\theta}^{\varepsilon}) + j^{\varepsilon}(\phi) - j^{\varepsilon}(u_{\theta}^{\varepsilon}) \geq (f^{\varepsilon}, \phi - u_{\theta}^{\varepsilon}) \quad \forall \phi \in K_{div}^{\varepsilon}.$$

Alors il existe une constante C^{ε} qui ne dépend pas de θ telle que

$$\| \nabla u_{\theta}^{\varepsilon} \|_{L^r(\Omega^{\varepsilon})} \leq C^{\varepsilon}. \tag{2.3.9}$$

Et l'application $\theta \longrightarrow u_{\theta}^{\varepsilon} \in K_{div}^{\varepsilon}$ est continue pour la topologie forte.

Preuve. On obtient l'estimation (2.3.9) comme dans le théorème 1.4.1 du premier chapitre. Soit
$(\theta_n)_n$ une suite qui convege fortement vers θ dans $W^{1,q}_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon)$. De (2.3.9) on déduit qu'il existe $u^\varepsilon \in K^\varepsilon$ telle que $u^\varepsilon_{\theta_n} \rightharpoonup u^\varepsilon$, montrons d'abord que $u^\varepsilon = u^\varepsilon_\theta$. En effet, on a

$$a(\theta_n; u^\varepsilon_{\theta_n}, \phi - u^\varepsilon_{\theta_n}) + j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon_{\theta_n}) \geq (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon_{\theta_n}) \quad \forall \phi \in K^\varepsilon_{div},$$

d'après le lemme de Minty cette inégalité est équivalente à

$$a(\theta_n; \phi, \phi - u^\varepsilon_{\theta_n}) + j^\varepsilon(\phi) - (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon_{\theta_n}) \geq j^\varepsilon(u^\varepsilon_{\theta_n}) \quad \forall \phi \in K^\varepsilon_{div},$$

et comme $\theta_n \longrightarrow \theta$ fortement dans $W^{1,q}_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon)$ et $\mu^\varepsilon \in \mathcal{C}^0(\Omega^\varepsilon)$, alors on peut extraire une sous suite θ_n telle que $\mu^\varepsilon(\theta_n) \longrightarrow \mu^\varepsilon(\theta)$ presque partout. En passant à la limite dans l'inéquation précédente, il vient que

$$a(\theta; \phi, \phi - u^\varepsilon) + j^\varepsilon(\phi) - (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) \geq \liminf_{n \to +\infty} j^\varepsilon(u^\varepsilon_{\theta_n}) \geq j^\varepsilon(u^\varepsilon) \quad \forall \phi \in K^\varepsilon_{div}.$$

Appliquons une deuxième fois le lemme de Minty, on obtient

$$a(\theta; u^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) + j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) \quad \forall \phi \in K^\varepsilon_{div},$$

or pour θ fixé cette dernière inéquation variationnelle admet une solution unique, donc $u^\varepsilon = u^\varepsilon_\theta$. D'autre part, on a

$$a(\theta; u^\varepsilon_\theta, u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta) + j^\varepsilon(u^\varepsilon_{\theta_n}) - j^\varepsilon(u^\varepsilon_\theta) \geq (f^\varepsilon, u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta),$$

$$a(\theta_n; u^\varepsilon_{\theta_n}, u^\varepsilon_\theta - u^\varepsilon_{\theta_n}) + j^\varepsilon(u^\varepsilon_\theta) - j^\varepsilon(u^\varepsilon_{\theta_n}) \geq (f^\varepsilon, u^\varepsilon_\theta - u^\varepsilon_{\theta_n}),$$

en sommant les deux inégalités, il vient

$$a(\theta_n; u^\varepsilon_{\theta_n}, u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta) - a(\theta; u^\varepsilon_\theta, u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta) \leq 0,$$

en ajoutant et en retranchant le terme $a(\theta; u^\varepsilon_\theta, u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta)$, on obtient

$$\begin{aligned} a(\theta_n; u^\varepsilon_{\theta_n}, u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta) - a(\theta_n; u^\varepsilon_\theta, u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta) &= a(\theta_n; u^\varepsilon_{\theta_n}, u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta) - a(\theta; u^\varepsilon_\theta, u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta) \\ &\quad + a(\theta; u^\varepsilon_\theta, u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta) - a(\theta_n; u^\varepsilon_\theta, u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta) \\ &\leq a(\theta; u^\varepsilon_\theta, u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta) - a(\theta_n; u^\varepsilon_\theta, u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta) \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Or si $r \geq 2$ on a

$$(| x |^{r-2} x - | y |^{r-2} y, x - y) \geq (\frac{1}{2})^{r-1} | x - y |^r \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

en utilisant cette inégalité, il vient que

$$a(\theta_n; u^\varepsilon_{\theta_n}, u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta) - a(\theta_n; u^\varepsilon_\theta, u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta) \geq \mu_\star(\frac{1}{2})^{r-1} \| D(u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta) \|_{L^r(\Omega^\varepsilon)},$$

avec l'inégalité de Korn et (2.3.10), on déduit que $u^\varepsilon_{\theta_n}$ converge fortement vers u^ε_θ dans K^ε_{div} pour $r \geq 2$.

Si $1 < r < 2$ on a

$$(\mid x \mid^{r-2} x - \mid y \mid^{r-2} y, x - y) \geq (r-1)(\mid x \mid + \mid y \mid)^{r-2} \mid x - y \mid^2 \quad \text{pour tout} \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

en utilisant cette inégalité comme dans [5], on montre que

$$a(\theta_n; u^\varepsilon_{\theta_n}, u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta) - a(\theta_n; u^\varepsilon_\theta, u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta) \geq$$

$$\geq \mu_\star(r-1)\frac{\| D(u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta) \|^2_{L^r(\Omega^\varepsilon)}}{(\| D(u^\varepsilon_{\theta_n}) \|_{L^r(\Omega^\varepsilon)} + \| D(u^\varepsilon_\theta) \|_{L^r(\Omega^\varepsilon)})^{2-r}}$$

or

$$\| D(u^\varepsilon_\theta) \|_{L^r(\Omega^\varepsilon)} \leq \| \nabla(u^\varepsilon_\theta) \|_{L^r(\Omega^\varepsilon)},$$

d'après (2.3.9) on déduit que

$$a(\theta_n; u^\varepsilon_{\theta_n}, u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta) - a(\theta_n; u^\varepsilon_\theta, u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta) \geq \mu_\star(r-1)\frac{1}{(2C^\varepsilon)^{2-r}} \| D(u^\varepsilon_{\theta_n} - u^\varepsilon_\theta) \|^2_{L^r(\Omega^\varepsilon)},$$

la constante C^ε ne dépend pas de n. En utilisant l'inégalité de Korn et (2.3.10), on obtient la convergence forte de $u^\varepsilon_{\theta_n}$ vers u^ε_θ pour la norme de $(W^{1,r}(\Omega^\varepsilon))^3$. $\square$

Théorème 2.3.2. *Pour tout $r > 1$ et sous les hypothèses (2.3.4)-(2.3.8), le problème (2.2.1)-(2.2.13) admet au moins une solution faible $(u^\varepsilon, p^\varepsilon, T^\varepsilon) \in K^\varepsilon_{div} \times L^{r'}_0(\Omega^\varepsilon) \times W^{1,q}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega^\varepsilon)$.*

Preuve. Soit $\delta > 0$. Nous considérons la fonction

$$(\lambda, v) \longrightarrow m_\delta(\lambda, v) = \frac{2\mu^\varepsilon(\lambda) \mid D(v) \mid^r}{1 + 2\delta\mu^\varepsilon(\lambda) \mid D(v) \mid^r} \quad \forall(\lambda, v) \in W^{1,q}_{\Gamma^\varepsilon_1 \cup \Gamma^\varepsilon_L}(\Omega^\varepsilon) \times K^\varepsilon_{div}. \quad (2.3.11)$$

Soient θ fixé dans $W^{1,q}_{\Gamma^\varepsilon_1 \cup \Gamma^\varepsilon_L}(\Omega^\varepsilon)$ et u^ε_θ l'unique solution de l'inéquation variationnelle suivante

$$a(\theta; u^\varepsilon_\theta, \phi - u^\varepsilon_\theta) + j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon_\theta) \geq (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon_\theta) \quad \forall \phi \in K^\varepsilon_{div}. \quad (2.3.12)$$

On a

$$\begin{aligned} \| m_\delta(\theta, u^\varepsilon_\theta) \|_{L^1(\Omega^\varepsilon)} &= \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{2\mu^\varepsilon(\theta) \mid D(u^\varepsilon_\theta) \mid^r}{1 + 2\delta\mu^\varepsilon(\theta) \mid D(u^\varepsilon_\theta) \mid^r} dx \\ &\leq 2\mu^\star \| D(u^\varepsilon_\theta) \|^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)} . \end{aligned}$$

En utilisant (2.3.9) et le fait que

$$\| D(u^\varepsilon_\theta) \|_{L^r(\Omega^\varepsilon)} \leq \| \nabla u^\varepsilon_\theta \|_{L^r(\Omega^\varepsilon)},$$

alors il existe une constante C_1^ε qui ne dépend ni de δ ni de θ ni de u_θ^ε telle que

$$\| m_\delta(\theta, u_\theta^\varepsilon) \|_{L^1(\Omega^\varepsilon)} \leq C_1^\varepsilon. \tag{2.3.13}$$

Considérons alors le problème intermédiaire suivant :

$$\begin{gathered}\text{Trouver } \; T_\delta^\varepsilon \in W^{1,q}_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon) \text{ telle que :}\\ \int_{\Omega^\varepsilon} K^\varepsilon \nabla T_\delta^\varepsilon \nabla \psi + \int_{\Omega^\varepsilon} r^\varepsilon T_\delta^\varepsilon \psi = \int_{\Omega^\varepsilon} m_\delta(\theta, u_\theta^\varepsilon)\psi, \quad \forall \psi \in H^1_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon).\end{gathered} \tag{2.3.14}$$

En appliquant le lemme de Lax-Milgram ce problème admet une solution unique.

Considérons maintenant l'application suivante :

$$\begin{array}{rrcl}\Upsilon : & B(0,\tilde{C}) \cap W^{1,q}_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon) & \longrightarrow & B(0,\tilde{C}) \cap W^{1,q}_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon)\\ & \theta & \longrightarrow & T_\delta^\varepsilon\end{array}$$

où $B(0,\tilde{C})$ est la boule fermée de $W^{1,q}_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon)$ d'origine 0 et de rayon $\tilde{C}$ par rapport à la norme $|\ .\ |_{1,q}$, avec

$$| v |_{1,q} = \Big(\int_{\Omega^\varepsilon} | \nabla v |^q \, dx \Big)^{1/q} \quad \forall v \in W^{1,q}_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon).$$

Cherchons la constante $\tilde{C} > 0$ telle que l'application Υ soit bien définie. On choisit d'abord dans (2.3.14) $\psi = \varphi(T_\delta^\varepsilon)$, où φ est définie par

$$\varphi(t) = \xi \; sign(t) \int_0^{|t|} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{\xi+1}} = sign(t)\big[1 - \frac{1}{(1+ | t |)^\xi}\big], \tag{2.3.15}$$

avec $\xi > 0$. Comme $\varphi'(t) = \dfrac{\xi}{(1+ | t |)^{\xi+1}}$, donc

$$\int_{\Omega^\varepsilon} K^\varepsilon \nabla T_\delta^\varepsilon \nabla(\varphi(T_\delta^\varepsilon))dx = \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{| \nabla T_\delta^\varepsilon |^2}{(1+ | T_\delta^\varepsilon |)^{\xi+1}} dx,$$

d'autre part de (2.3.8) et (2.3.15)

$$\int_{\Omega^\varepsilon} r^\varepsilon T_\delta^\varepsilon \varphi(T_\delta^\varepsilon) dx \geq 0,$$

de (2.3.14) et (2.3.13) on déduit que

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \frac{| \nabla T_\delta^\varepsilon |^2}{(1+ | T_\delta^\varepsilon |)^{\xi+1}} dx \leq \Big(\frac{1}{\xi K_\star^\varepsilon}\Big) \| m_\delta \|_{L^1(\Omega^\varepsilon)} \leq \frac{C_1^\varepsilon}{K_\star^\varepsilon \xi}. \tag{2.3.16}$$

Utilisons l'inégalité de Hölder avec les puissances $\dfrac{2}{q}$ et $\dfrac{2}{(2-q)}$, pour $q < \dfrac{3}{2}$, on obtient

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \mid \nabla T_\delta^\varepsilon \mid^q \leq \Big(\int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\mid \nabla T_\delta^\varepsilon \mid^2}{(1+ \mid T_\delta^\varepsilon \mid)^{\xi+1}} \Big)^{q/2} \Big(\int_{\Omega^\varepsilon} (1+ \mid T_\delta^\varepsilon \mid)^{(\xi+1)q/(2-q)} \Big)^{(2-q)/2},$$

on choisit ξ tel que

$$\frac{(\xi+1)q}{(2-q)} \leq q^\star = \frac{3q}{3-q},$$

en utilisant (2.3.16), il vient que

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \mid \nabla T_\delta^\varepsilon \mid^q \leq \Big(\frac{C_1^\varepsilon}{\xi K_\star^\varepsilon} \Big)^{q/2} \Big(\int_{\Omega^\varepsilon} (1+ \mid T_\delta^\varepsilon \mid)^{q^\star} \Big)^{(2-q)/2}. \tag{2.3.17}$$

Or

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}_\star^+ \;\; \forall p > 1, \tag{2.3.18}$$

donc

$$(1+ \mid T_\delta^\varepsilon \mid)^{q^\star} \leq 2^{q^\star - 1}(1+ \mid T_\delta^\varepsilon \mid^{q^\star}).$$

Et comme

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}_\star^+ \;\; \forall p \in]0,1[, \tag{2.3.19}$$

appliquons cette inégalité pour $p = \dfrac{2-q}{2}$, donc

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \mid \nabla T_\delta^\varepsilon \mid^q \leq 2^{((q^\star-1)(2-q))/2} \Big(\frac{C_1^\varepsilon}{\xi K_\star^\varepsilon} \Big)^{q/2} \Big(\mid \Omega^\varepsilon \mid^{(2-q)/2} + \Big(\int_{\Omega^\varepsilon} \mid T_\delta^\varepsilon \mid^{q^\star} \Big)^{(2-q)/2} \Big). \tag{2.3.20}$$

Utilisons maintenant l'inégalité de Poincaré-Sobolev, puis (2.3.20), il existe une constante $C_\star > 0$ ne dépend pas de ε telle que

$$\begin{aligned} \Big(\int_{\Omega^\varepsilon} \mid T_\delta^\varepsilon \mid^{q^\star} \Big)^{1/q^\star} &\leq C_\star \parallel \nabla T_\delta^\varepsilon \parallel_{L^q(\Omega^\varepsilon)} \\ &\leq 2^{((q^\star-1)(2-q))/2q} \Big(\frac{C_1^\varepsilon}{\xi K_\star^\varepsilon} \Big)^{1/2} C_\star \Big(\mid \Omega^\varepsilon \mid^{(2-q)/2q} + \Big(\int_{\Omega^\varepsilon} \mid T_\delta^\varepsilon \mid^{q^\star} \Big)^{(2-q)/2q} \Big). \end{aligned} \tag{2.3.21}$$

D'autre part, pour tout $a > 0$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $0 < s < t$

$$\text{si} \quad a^t \leq c_1 + c_2\, a^s \;\; \text{alors} \;\; a \leq max\big\{1, (c_1+c_2)^{\frac{1}{t-s}}\big\}, \tag{2.3.22}$$

pour $t_1 = \dfrac{1}{q^\star}$ et $s_1 = \dfrac{2-q}{2q}$, on a bien $0 < s_1 < t_1$, car

$$t_1 - s_1 = \frac{1}{6} > 0,$$

à partir de (2.3.21) et (2.3.22) et du fait que $\dfrac{2-q}{2} > 0$, on déduit que

$$\Big(\int_{\Omega^\varepsilon} \mid T_\delta^\varepsilon \mid^{q^\star}\Big)^{(2-q)/2} \leq A^{(2-q)/2},$$

où

$$\begin{aligned} A &= max\Big\{\Big[2^{((q^\star-1)(2-q))/2q}\Big(\frac{C_1^\varepsilon}{\xi K_\star^\varepsilon}\Big)^{1/2} C_\star\Big(\mid \Omega^\varepsilon \mid^{(2-q)/2q} + 1\Big)\Big]^{(\frac{1}{q^\star}-\frac{2-q}{2q})^{-1}}, \quad 1\Big\} \\ &= max\Big\{\Big[2^{((q^\star-1)(2-q))/2q}\Big(\frac{C_1^\varepsilon}{\xi K_\star^\varepsilon}\Big)^{1/2} C_\star\Big(\mid \Omega^\varepsilon \mid^{(2-q)/2q} + 1\Big)\Big]^{6}, \quad 1\Big\} \end{aligned}$$

A est une constante qui ne dépend pas de δ. Et comme

$$A \geq 1 \text{ et } 0 < (2-q)/2 < 1,$$

donc

$$\Big(\int_{\Omega^\varepsilon} \mid T_\delta^\varepsilon \mid^{q^\star}\Big)^{(2-q)/2} \leq A. \tag{2.3.23}$$

On revient à (2.3.20), on déduit que

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \mid \nabla T_\delta^\varepsilon \mid^q \leq 2^{(q^\star-1)(2-q)/2}\Big(\frac{C_1^\varepsilon}{\xi K_\star^\varepsilon}\Big)^{q/2}\Big(\mid \Omega^\varepsilon \mid^{(2-q)/2} + A\Big), \tag{2.3.24}$$

il suffit de prendre

$$\tilde{C} = \Big\{2^{(q^\star-1)(2-q)/2}\Big(\frac{C_1^\varepsilon}{\xi K_\star^\varepsilon}\Big)^{q/2}\Big(\mid \Omega^\varepsilon \mid^{(2-q)/2} + A\Big)\Big\}^{1/q}.$$

En utilisant le lemme 2.3.1 et en appliquant le théorème du point fixe de Schauder pour l'application Υ, nous obtenons l'existence d'un triplet

$$(u_\delta^\varepsilon, p_\delta^\varepsilon, T_\delta^\varepsilon) \in K_{div}^\varepsilon \times L_0^{r'}(\Omega^\varepsilon) \times W^{1,q}_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon) \cap ; B(0, \tilde{C}).$$

Où $(u_\delta^\varepsilon, p_\delta^\varepsilon)$ résout (2.3.2), avec

$$u_\delta^\varepsilon = u_{T_\delta^\varepsilon}^\varepsilon, \; p_\delta^\varepsilon = p_{T_\delta^\varepsilon}^\varepsilon, \text{ et } T_\delta^\varepsilon \text{ résout (2.3.14) avec } m_\delta = m_\delta(T_\delta^\varepsilon, u_\delta^\varepsilon).$$

Nous obtenons aussi l'estimation suivante sur la pression p_δ^ε comme dans le théorème 1.4.1 du premier chapitre

$$\| \frac{\partial p_\delta^\varepsilon}{\partial x_i} \|_{W^{-1,r'}(\Omega)} \leq C \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.3.25}$$

En utilisant (2.3.9), (2.3.24) et (2.3.25), et en prenant une suite $\delta \longrightarrow 0$, on obtient

$$u_\delta^\varepsilon \rightharpoonup u^\varepsilon \quad \text{faiblement dans} \quad K_{div}^\varepsilon,$$

$$p_\delta^\varepsilon \rightharpoonup p^\varepsilon \;\text{ faiblement dans }\; L^{r'}(\Omega^\varepsilon),$$

$$T_\delta^\varepsilon \rightharpoonup T^\varepsilon \;\text{ faiblement dans } \quad W^{1,q}_{\Gamma_1^\varepsilon\cup\Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon) \;\text{ et } \quad \text{fortement dans } L^q_{\Gamma_1^\varepsilon\cup\Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon).$$

Par le même argument que dans la preuve du lemme 2.3.1 $u_\delta^\varepsilon \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} u^\varepsilon$ fortement dans K_{div}^ε, et par conséquent

$$m_\delta = m_\delta(T_\delta^\varepsilon, u_\delta^\varepsilon) \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 2\mu^\varepsilon(T^\varepsilon) \mid D(u^\varepsilon) \mid^r \quad \text{dans } \; L^1(\Omega^\varepsilon),$$

en passant à la limite terme à terme, on conclut facilement que $(u^\varepsilon, p^\varepsilon, T^\varepsilon)$ résout (2.3.2)-(2.3.3). Ainsi s'achève la preuve du théorème 2.3.2. $\square$

2.4 Analyse asymptotique

2.4.1 Changement du domaine et problème variationnel sur Ω

Pour l'analyse asymptotique du problème, nous utilisons comme dans le premier chapitre un changement d'échèlle en posant $z = \dfrac{x_3}{\varepsilon}$, ainsi le domaine Ω^ε se transforme à un domaine Ω indépendant de ε

$$\Omega = \{(x', z) \in \mathbb{R}^3 \;\text{ tel que }\; (x', 0) \in \omega \;\text{ et }\; 0 < z < h(x')\}.$$

On note $\Gamma = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_L$ sa frontière.
Maintenant, nous définissons de nouvelles fonctions sur Ω :

$$\hat{u_i^\varepsilon}(x', z) = u_i^\varepsilon(x', x_3) \text{ pour } i = 1, 2, \;;\; \hat{u_3^\varepsilon}(x', z) = \varepsilon^{-1} u_3^\varepsilon(x', x_3),$$

$$\hat{p^\varepsilon}(x', z) = \varepsilon^r p^\varepsilon(x', x_3) \;;\; \hat{T^\varepsilon}(x', z) = T^\varepsilon(x', x_3),$$

$$\hat{K}(x', z) = \varepsilon^{-2+r+\alpha} K^\varepsilon(x', x_3) \;,\; \hat{r}(x', x_3) = \varepsilon^{r+\alpha} r^\varepsilon(x', z)$$

$$\hat{\mu} = \mu^\varepsilon \quad ; \quad \hat{g}(x', z) = g(x', z), \tag{2.4.1}$$

avec

$$\alpha = \frac{3(2-q)}{3-q}.$$

On suppose aussi que

$$K_\star \leq \hat{K} \leq K^\star, \tag{2.4.2}$$

cette hypothèse est compatible avec l'hypothèse (2.3.7).
Soit $\hat{G}$ un relèvement de $\hat{g}$ indépendant de ε tel que

$$\mathrm{div}_z(\hat{G}) = \frac{\partial \hat{G}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{G}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{G}_3}{\partial z} = 0,\ \mathit{et}\ \hat{G} = \hat{g} \text{ sur } \partial\Omega.$$

Le vecteur G^ε introduit précédemment sera défini de la manière suivante

$$G_i^\varepsilon(x', x_3) = \hat{G}_i(x', z)\ i = 1, 2\ ;\ G_3^\varepsilon(x', x_3) = \varepsilon \hat{G}_3(x', z).$$

Comme dans [4], on dit que $v = (v_1, v_2) \in (L^r(\Omega))^2$ vérifie la condition (D') si

$$\int_\Omega (v_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2}) dx'dz = 0,\ \ \forall \theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\omega).$$

Nous introduisons maintenant le cadre fonctionnel sur Ω comme ce qui suit

$$L_0^{r'}(\Omega) = \{q \in L^{r'}(\Omega) :\ \int_\Omega q dx'dz = 0\},$$

$$K = \{\varphi \in (W^{1,r}(\Omega))^3 :\ \ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),\ \ \varphi = \hat{G} \ \text{ sur } \ \Gamma_1 \cup \Gamma_L\ ;\ \ \varphi.n = 0 \text{ sur } \omega\},$$
$$K_{div} = \{\varphi \in V :\ \mathrm{div}(\varphi) = 0\},$$
$$\Pi(K) = \{\bar{\varphi} \in (W^{1,r}(\Omega))^2 :\ \ \bar{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2),\ \ \varphi_i = \hat{G}_i \ \text{ sur } \ \Gamma_1 \cup \Gamma_L\ \ i = 1, 2\},$$
$$\tilde{\Pi}(K) = \{\bar{\varphi} \in \Pi(K) :\ \bar{\varphi} \text{ vérifie } (D')\}.$$
$$V_z = \{v = (v_1, v_2) \in (L^r(\Omega))^2 :\ \ \frac{\partial v_i}{\partial z} \in L^r(\Omega),\ \ i = 1, 2\ \ ;\ \ v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$$

V_z est un espace de Banach pour la norme

$$\| v \|_{V_z} = (\sum_{i=1}^{2} \| v_i \|_{L^r(\Omega)}^r + \| \frac{\partial v_i}{\partial z} \|_{L^r(\Omega)}^r)^{\frac{1}{r}},$$

on note $\tilde{V_z}$ le sous espace vectoriel des fonctions de V_z qui vérifient la condition (D').
En introduisant les nouvelles inconnues et les nouvelles fonctions définies par (2.4.1), nous montrons que le problème (2.3.2)-(2.3.3) est équivalent à trouver
$(\hat{u^\varepsilon}, \hat{p^\varepsilon}, \hat{T^\varepsilon}) \in K_{div} \times L_0^{r'}(\Omega) \times W^{1,q}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ tels que :

$$\begin{aligned} \hat{a}(\hat{T^\varepsilon}; \hat{u^\varepsilon}, \hat{\phi} - \hat{u^\varepsilon}) - (\hat{p^\varepsilon}, \mathrm{div}_z(\hat{\phi} - \hat{u^\varepsilon})) + \hat{j}(\hat{\phi}) - \hat{j}(\hat{u^\varepsilon}) \geq \sum_{i=1}^{2} (\hat{f_i}, \hat{\phi_i} - \hat{u_i^\varepsilon}) \\ + \varepsilon(\hat{f_3}, \hat{\phi_3} - \hat{u_3^\varepsilon}) \quad \forall \hat{\phi} \in K, \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

où

$$\hat{j}(\hat{\phi}) = \int_\omega \hat{k} \mid \hat{\phi} - s \mid dx',$$

$$\hat{a}(\hat{T^\varepsilon}; \hat{u^\varepsilon}, \hat{\phi} - \hat{u^\varepsilon}) = \varepsilon^2 \sum_{1 \le i,j \le 2} \int_\Omega \hat{\mu}(\hat{T^\varepsilon}) \mid \hat{D}(\hat{u^\varepsilon}) \mid^{r-2} (\frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u_j^\varepsilon}}{\partial x_i}) \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{\phi}_i - \hat{u_i^\varepsilon}) dx' dz$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{\mu}(\hat{T^\varepsilon}) \mid \hat{D}(\hat{u^\varepsilon}) \mid^{r-2} (\frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i}) \left(\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_i - \hat{u_i^\varepsilon}) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_i}(\hat{\phi}_3 - \hat{u_3^\varepsilon}) \right) dx' dz$$

$$+ \varepsilon^2 \int_\Omega \hat{\mu}(\hat{T^\varepsilon}) \mid \hat{D}(\hat{u^\varepsilon}) \mid^{r-2} \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\phi}_3 - \hat{u_3^\varepsilon}) dx' dz,$$

$$\begin{aligned} \mid \hat{D}(\hat{u^\varepsilon}) \mid &= \left[\varepsilon^2 \left(\frac{1}{4} \sum_{1 \le i,j \le 2} (\frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u_j^\varepsilon}}{\partial x_i})^2 + (\frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z})^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} (\frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \varepsilon \mid D(u^\varepsilon) \mid \end{aligned}$$

et

$$\int_\Omega \varepsilon^2 \hat{K}(\hat{T^\varepsilon}) \ \nabla_\varepsilon \hat{T^\varepsilon} \nabla_\varepsilon \hat{\psi} dx' dz + \int_\Omega \hat{r} \hat{T^\varepsilon} \hat{\psi} = 2 \int_\Omega \varepsilon^\alpha \hat{\mu}(\hat{T^\varepsilon}) \mid \hat{D}(\hat{u^\varepsilon}) \mid^r \hat{\psi} dx' dz$$
$$\forall \hat{\psi} \in W^{1,q'}(\Omega), \tag{2.4.4}$$

avec

$$\nabla_\varepsilon v = (\frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_3}{\partial z})^t.$$

2.4.2 Estimations sur la vitesse et la pression

Lemme 2.4.1. *Sous les hypothèses du théorème (2.3.2), il existe une constante strictement positive C indépendante de ε telle que*

$$\sum_{i,j=1}^{2} \| \varepsilon \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j} \|_{L^r(\Omega)}^r + \| \varepsilon \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z} \|_{L^r(\Omega)}^r + \sum_{i=1}^{2} \left(\| \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} \|_{L^r(\Omega)}^r + \| \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i} \|_{L^r(\Omega)}^r \right) \le C \tag{2.4.5}$$

$$\| \frac{\partial \hat{p^\varepsilon}}{\partial x_i} \|_{W^{-1,r'}(\Omega)} \le C, \ \ i = 1, 2, \tag{2.4.6}$$

$$\| \frac{\partial \hat{p^\varepsilon}}{\partial z} \|_{W^{-1,r'}(\Omega)} \le C.\varepsilon. \tag{2.4.7}$$

Preuve. On a

$$a(T^\varepsilon;u^\varepsilon,u^\varepsilon)\le a(T^\varepsilon;u^\varepsilon,\phi)+j^\varepsilon(\phi)+(f^\varepsilon,u^\varepsilon)-(f^\varepsilon,\phi)\quad\forall\phi\in K^\varepsilon_{div}. \tag{2.4.8}$$

D'après l'inégalité de Korn [11], il existe une constante $C_K>0$ indépendante de ε telle que

$$2\mu_\star C_K\parallel\nabla u^\varepsilon\parallel^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)}\le a(T^\varepsilon;u^\varepsilon,u^\varepsilon). \tag{2.4.9}$$

Utilisons l'inégalité de Poincaré, alors

$$\parallel u^\varepsilon\parallel_{L^r(\Omega^\varepsilon)}\le\varepsilon h_{max}\parallel\nabla u^\varepsilon\parallel_{L^r(\Omega^\varepsilon)}, \tag{2.4.10}$$

par l'inégalité de Young et (2.4.10) on obtient

$$\parallel f^\varepsilon\parallel_{L^{r'}(\Omega^\varepsilon)}\parallel u^\varepsilon\parallel_{L^r(\Omega^\varepsilon)}\le\left(\frac{\varepsilon h_{max}}{(\frac{\mu_\star\, r\, C_K}{2})^{\frac{1}{r}}}\parallel f^\varepsilon\parallel_{L^{r'}(\Omega^\varepsilon)}\right)\left((\frac{\mu_\star\, r\, C_K}{2})^{\frac{1}{r}}\parallel\nabla u^\varepsilon\parallel_{L^r(\Omega^\varepsilon)}\right)$$

$$\le\frac{\mu_\star C_K}{2}\parallel\nabla u^\varepsilon\parallel^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)}+\frac{\varepsilon^{r'}h^{r'}_{max}}{r'(\frac{\mu_\star\, r\, C_K}{2})^{\frac{r'}{r}}}\parallel f^\varepsilon\parallel^{r'}_{L^{r'}(\Omega^\varepsilon)} \tag{2.4.11}$$

de même

$$\parallel f^\varepsilon\parallel_{L^{r'}(\Omega^\varepsilon)}\parallel\phi\parallel_{L^r(\Omega^\varepsilon)}\le\frac{\mu_\star C_K}{2}\parallel\nabla\phi\parallel^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)}+\frac{\varepsilon^{r'}h^{r'}_{max}}{r'(\frac{\mu_\star\, r\, C_K}{2})^{\frac{r'}{r}}}\parallel f^\varepsilon\parallel^{r'}_{L^{r'}(\Omega^\varepsilon)} \tag{2.4.12}$$

d'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder puis celle de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
\mid a(T^\varepsilon;u^\varepsilon,\phi)\mid &\le 2\mu^\star\int_{\Omega^\varepsilon}\mid D(u^\varepsilon)\mid^{r-1}\mid D(\phi)\mid dx\\
&\le\int_{\Omega^\varepsilon}\left((\frac{\mu_\star\, r'\, C_K}{2})^{\frac{1}{r'}}\mid D(u^\varepsilon)\mid^{r-1}\right)\left(\frac{4\mu^\star}{(r'C_K)^{\frac{1}{r'}}}(\frac{\mu_\star}{2})^{\frac{1}{r}}\mid D(\phi)\mid\right)dx\\
&\le\frac{\mu_\star C_K}{2}\int_{\Omega^\varepsilon}\mid D(u^\varepsilon)\mid^{(r-1)r'}dx+\frac{2^{2r-1}\mu_\star.(\mu^\star)^r}{r(r'C_K)^{\frac{r}{r'}}}\int_{\Omega^\varepsilon}\mid D(\phi)\mid^r dx,
\end{aligned}$$

donc

$$a(T^\varepsilon;u^\varepsilon,\phi)\le\frac{\mu_\star C_K}{2}\parallel\nabla u^\varepsilon\parallel^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)}+\frac{2^{2r-1}\mu_\star.(\mu^\star)^r}{r(r'C_K)^{\frac{r}{r'}}}\parallel D(\phi)\parallel^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)}. \tag{2.4.13}$$

En utilisant (2.4.8)-(2.4.13) et en choisissant $\phi=G^\varepsilon$, on déduit que

$$\begin{aligned}
\mu_\star C_K\parallel\nabla u^\varepsilon\parallel^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)}\le&\left(\frac{2^{2r-1}\mu_\star\,.\,(\mu^\star)^r}{r(r'C_K)^{\frac{r}{r'}}}+\frac{\mu_\star C_K}{2}\right)\parallel\nabla(G^\varepsilon)\parallel^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)}+\\
&\frac{2\varepsilon^{r'}h^{r'}_{max}}{r'(\frac{\mu\, r\, C_K}{2})^{\frac{r'}{r}}}\parallel f^\varepsilon\parallel^{r'}_{L^{r'}(\Omega^\varepsilon)}.
\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

et comme

$$\varepsilon^{r'} \parallel f^\varepsilon \parallel^{r'}_{L^{r'}(\Omega^\varepsilon)} = \varepsilon^{1-r} \parallel \hat{f} \parallel^{r'}_{L^{r'}(\Omega)}; \parallel \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_3} \parallel^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)} = \varepsilon^{1-r} \parallel \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} \parallel^r_{L^r(\Omega)} \text{ pour } \quad i = 1, 2,$$

multipliant (2.4.14) par ε^{r-1} on déduit (2.4.5), avec

$$C_1 = (\mu_\star C_K)^{-1} \left[\left(\frac{2^{2r-1}\mu_\star.(\mu^\star)^r}{r(r'C_K)^{\frac{r}{r'}}} + \frac{\mu_\star C_K}{2} \right) \parallel \nabla(\hat{G}) \parallel^r_{L^r(\Omega)} + \frac{2h^{r'}_{max}}{r'(\frac{\mu_\star\, r\, C_K}{2})^{\frac{r'}{r}}} \parallel \hat{f} \parallel^{r'}_{L^{r'}(\Omega)} \right]$$

Puis nous montrons (2.4.6)-(2.4.7) comme dans le théorème 1.4.1.

2.4.3 Estimations sur la température

Dans le lemme suivant on obtient des estimations sur le gradient de la température dans le domaine fixe Ω.

Lemme 2.4.2. *Sous les hypothèses du théorème (2.3.2), et pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ il existe une constante C indépendante de ε, telle que on a les estimations suivantes :*

$$\parallel \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \parallel_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C, \tag{2.4.15}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \parallel \varepsilon \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} \parallel_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C. \tag{2.4.16}$$

Preuve. Pour montrer les estimations (2.4.15)-(2.4.16), nous allons utiliser les mêmes techniques utilisées dans la preuve du théorème 2.3.2, on choisit dans (2.4.4) $\hat{\psi} = \varphi(\hat{T}^\varepsilon)$, avec φ est la fonction définie par (2.3.15), il vient que

$$\int_\Omega \frac{|\nabla_\varepsilon \hat{T}^\varepsilon|^2}{(1+|\hat{T}^\varepsilon|)^{\xi+1}} dx'dz \leq \frac{\mu^\star}{\xi K_\star} \varepsilon^{\alpha-2} \int_\Omega |\hat{D}(\hat{u^\varepsilon})|^r \, dx'dz,$$

d'autre part, il existe une constante $C(r) > 0$ dépend seulement de r

$$\int_\Omega |\hat{D}(\hat{u^\varepsilon})|^r \, dx'dz \leq C(r) \Big[\sum_{1 \leq i,j \leq 2} \parallel \varepsilon \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j} \parallel^r_{L^r(\Omega)} + \parallel \varepsilon \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z} \parallel^r_{L^r(\Omega)}$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \left(\parallel \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} \parallel^r_{L^r(\Omega)} + \parallel \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i} \parallel^r_{L^r(\Omega)} \right) \Big],$$

en utilisant cette inégalité et (2.4.5), on déduit que

$$\int_\Omega \frac{|\nabla_\varepsilon \hat{T}^\varepsilon|^2}{(1+|\hat{T}^\varepsilon|)^{\xi+1}} dx'dz \leq (\frac{C_1\mu^\star}{K_\star \xi}) \varepsilon^{\alpha-2}, \tag{2.4.17}$$

avec C_1 est une constante indépendante de ε. Utilisons encore l'inégalité de Hölder avec les puissances $2/q$ et $2/(2-q)$, pour $q < 3/2$, on obtient

$$\int_\Omega \mid \nabla_\varepsilon \hat{T^\varepsilon} \mid^q \leq \Big(\int_\Omega \frac{\mid \nabla_\varepsilon \hat{T^\varepsilon} \mid^2}{(1+ \mid \hat{T^\varepsilon} \mid)^{\xi+1}} \Big)^{q/2} \Big(\int_\Omega (1+ \mid \hat{T^\varepsilon} \mid)^{(\xi+1)q/(2-q)} \Big)^{(2-q)/2},$$

on choisit ξ tel que $(\xi+1)q/(2-q) \leq q^\star$, et utilisons (2.4.17), il vient que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mid \nabla_\varepsilon \hat{T^\varepsilon} \mid^q &\leq \varepsilon^{-q+\frac{\alpha q}{2}} \Big(\frac{C_1 \mu^\star}{\xi K_\star} \Big)^{q/2} \Big(\int_\Omega (1+ \mid \hat{T^\varepsilon} \mid)^{q^\star} \Big)^{(2-q)/2} \\ &\leq \varepsilon^{-q+\frac{\alpha q}{2}} \; 2^{(q^\star-1)(2-q)/2} \Big(\frac{C_1 \mu^\star}{\xi K_\star} \Big)^{q/2} \Big(\mid \Omega \mid^{(2-q)/2} + \big(\int_\Omega \mid \hat{T^\varepsilon} \mid^{q^\star} \big)^{(2-q)/2} \Big). \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

Utilisons maintenant l'inégalité de Poincaré-Sobolev, il existe une constant $C_\star > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \Big(\int_\Omega \mid \hat{T^\varepsilon} \mid^{q^\star} \Big)^{1/q^\star} &\leq C_\star \parallel \nabla \hat{T^\varepsilon} \parallel_{L^q(\Omega)} \\ &\leq C_\star \parallel \nabla_\varepsilon \hat{T^\varepsilon} \parallel_{L^q(\Omega)} \quad (\text{ car } \varepsilon < 1) \\ &\leq \varepsilon^{-1+\frac{\alpha}{2}} \; 2^{(q^\star-1)(2-q)/2q} \Big(\frac{C_1 \mu^\star}{\xi K_\star} \Big)^{1/2} C_\star \Big(\mid \Omega \mid^{(2-q)/2q} + \big(\int_\Omega \mid \hat{T^\varepsilon} \mid^{q^\star} \big)^{(2-q)/2q} \Big), \end{aligned}$$

utilisons l'inégalité (2.3.22), on aura

$$\Big(\int_{\Omega^\varepsilon} \mid T^\varepsilon \mid^{q^\star} \Big)^{(2-q)/2} \leq \zeta_\varepsilon, \tag{2.4.19}$$

avec

$$\begin{aligned} \zeta_\varepsilon &= max \Big\{ \beta \, \varepsilon^{\left(\frac{2-q}{2}\right)\left(\frac{1}{q^\star} - \frac{(2-q)}{2q}\right)^{-1}\left(-1+\frac{\alpha}{2}\right)}, \; 1 \Big\} \\ &= max \Big\{ \beta \, \varepsilon^{3\left(2-q\right)\left(-1+\frac{\alpha}{2}\right)}, \; 1 \Big\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \beta &= \Big[2^{(q^\star-1)(2-q)/2q} \Big(\frac{C_1 \mu^\star}{\xi K_\star} \Big)^{1/2} C_\star \Big(\mid \Omega \mid^{(2-q)/2q} + 1 \Big) \Big]^{(\frac{1}{q^\star} - \frac{2-q}{2q})^{-1}} \\ &= \Big[2^{(q^\star-1)(2-q)/2q} \Big(\frac{C_1 \mu^\star}{\xi K_\star} \Big)^{1/2} C_\star \Big(\mid \Omega \mid^{(2-q)/2q} + 1 \Big) \Big]^{6} \end{aligned}$$

Nous rappelons que $\alpha = \dfrac{3(2-q)}{3-q}$, donc $3(2-q)(-1+\dfrac{\alpha}{2}) < 0$. D'où, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ avec

$$\varepsilon_0 = \beta^{\left[-3(2-q)(-1+\frac{\alpha}{2})\right]^{-1}},$$

on a

$$\zeta_\varepsilon = \beta\ \varepsilon^{3(2-q)(-1+\frac{\alpha}{2})}.$$

On revient à (2.4.18), nous déduisons que

$$\varepsilon^q \int_\Omega |\ \nabla_\varepsilon \hat{T^\varepsilon}\ |^q \leq \varepsilon^{\frac{\alpha q}{2}}\ \ 2^{(q^\star-1)(2-q)/2}\Big(\frac{C_1\mu^\star}{\xi K_\star}\Big)^{q/2}\Big(\ |\ \Omega\ |^{(2-q)/2} + \beta\ \varepsilon^{3(2-q)(-1+\frac{\alpha}{2})}\Big),$$

par un calcul facile, on vérifie que

$$\frac{\alpha q}{2} + 3(2-q)\big(-1+\frac{\alpha}{2}\big) = 0.$$

D'où

$$\varepsilon^q \int_\Omega |\ \nabla_\varepsilon \hat{T^\varepsilon}\ |^q \leq C, \tag{2.4.20}$$

avec

$$C = 2^{(q^\star-1)(2-q)/2}\Big(\frac{C_1\mu^\star}{\xi K_\star}\Big)^{q/2}\Big(\ |\ \Omega\ |^{(2-q)/2} + \beta\Big).$$

On voit bien que la constante C ne dépend pas de ε. $\square$

Pour la suite, on introduit l'espace fonctionnel suivant

$$V_z^q = \{v \in W^{1,q}(\Omega)\ \ :\ \ \frac{\partial v}{\partial z} \in L^q(\Omega)\}.$$

2.5 Résultats de convergence et problème limite

Grâce aux estimations obtenues dans la section précédente nous obtenons d'abord des résultats de convergence. Puis nous établissons l'équation faible généralisée de Reynolds.

Nous commençons par l'énoncé du théorème de convergence.

Théorème 2.5.1. *Sous les mêmes hypothèses des lemmes (2.4.1) et (2.4.2), il existe* $u^\star = (u_1^\star, u_2^\star) \in \tilde{V_z}$, $p^\star \in L_0^{r'}(\Omega)$, $T^\star \in V_z^q$, *et une suite* $\varepsilon \to 0$ *tels que*

$$\hat{u_i^\varepsilon} \rightharpoonup u_i{}^\star \quad (1 \leq i \leq 2) \quad faiblement \quad dans\ V_z, \tag{2.5.1}$$

$$\varepsilon\frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j} \rightharpoonup 0 \ \ (1 \leq i,j \leq 2) \ \ faiblement \quad dans \ \ L^r(\Omega), \tag{2.5.2}$$

$$\varepsilon\frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z} \rightharpoonup 0 \ faiblement \quad dans \ \ L^r(\Omega), \tag{2.5.3}$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \ \ (1 \leq i \leq 2) \ \ faiblement \ \ dans \ \ L^r(\Omega), \tag{2.5.4}$$

$$\varepsilon \hat{u_3^\varepsilon} \rightharpoonup 0 \ faiblement \ \ dans \ \ L^r(\Omega), \tag{2.5.5}$$

$$\hat{p^\varepsilon} \rightharpoonup p^\star \ \ faiblement \ \ dans \ \ L^{r'}(\Omega), \tag{2.5.6}$$

$$\hat{T^\varepsilon} \rightharpoonup T^\star \ \ faiblement \ \ dans \ \ V_z^q, \tag{2.5.7}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{T^\varepsilon}}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \ \ faiblement \ dans \ L^q(\Omega), \ \ i = 1, 2. \tag{2.5.8}$$

Preuve. D'après (2.4.5)-(2.4.7) nous obtenons (2.5.1)-(2.5.6) comme dans le théorème 1.4.1 du premier chapitre, (2.5.7)-(2.5.8) s'obtiennent à partir de (2.4.15)-(2.4.16). □

Théorème 2.5.2. *Sous les hypothèses des lemmes (2.4.1)-(2.4.2) et supposons que* $(\hat{K})' \in L^\infty(\mathbb{R})$, *les fonctions limites* $u^\star$, $p^\star$, $T^\star$ *vérifient*

$$\forall r > 1 \qquad \hat{u_i^\varepsilon} \longrightarrow u_i^\star \ \ fortement \ \ dans \ \ V_z, \tag{2.5.9}$$

$$p^\star(x_1, x_2, z) = p^\star(x_1, x_2) \ \ presque \ \ partout \ \ dans \ \ \Omega, \tag{2.5.10}$$

$$p^\star \in W^{1,r'}(\omega), \tag{2.5.11}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{\mu}(T^\star)\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\Big)^2\Big)^{\frac{r-2}{2}} \frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_i - u_i^\star)dx'dz - \sum_{i=1}^{2}\Big(p^\star, \frac{\partial}{\partial x_i}(\hat{\phi}_i - u_i^\star)\Big)$$
$$+ \hat{j}(\hat{\phi}) - \hat{j}(u^\star) \geq \sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_i, \hat{\phi}_i - u_i^\star) \ \ \forall \hat{\phi} \in \Pi(K), \tag{2.5.12}$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\Big(\hat{\mu}(T^\star)\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\Big)^2\Big)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\Big) + \frac{\partial p^\star}{\partial x_i} = \hat{f}_i, \quad i = 1, 2 \quad dans \quad L^{r'}(\Omega), \tag{2.5.13}$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\Big(\hat{K}\frac{\partial T^\star}{\partial z}\Big) + \hat{r}T^\star = 0 \ \text{ dans } \ \ L^q(\Omega). \tag{2.5.14}$$

Preuve. On montre (2.5.9) comme dans (1.5.9) du théorème 1.5.1.
D'autre part, en utilisant le lemme de Minty et le fait que $\operatorname{div}(\hat{u^\varepsilon}) = 0$, alors l'inégalité (2.4.3) est équivalente à

$$\hat{a}(\hat{T^\varepsilon}; \hat{\phi}, \hat{\phi} - \hat{u^\varepsilon}) - (\hat{p^\varepsilon}, \operatorname{div}(\hat{\phi})) + \hat{j}(\hat{\phi}) - \hat{j}(\hat{u^\varepsilon}) \geq \sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_i, \hat{\phi}_i - \hat{u_i^\varepsilon})$$
$$+\varepsilon(\hat{f}_3, \hat{\phi}_3 - \hat{u_3^\varepsilon}) \quad \forall \hat{\phi} \in K. \tag{2.5.15}$$

D'après (2.4.15)-(2.4.16), il existe une sous suite $\hat{T^\varepsilon}$ qui converge presque partout vers $T^\star$, donc $\hat{\mu}(\hat{T^\varepsilon})$ converge presque partout vers $\hat{\mu}(T^\star)$ puisque $\hat{\mu}$ est continue. En passant à la limite dans (2.5.15), en tenant compte des résultats de convergence du théorème 2.5.1 et le fait que $\hat{j}$ est faiblement semi continue inférieurement, on obtient

$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{\mu}(T^\star)\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z})^2\right)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_i-u_i^\star)dx'dz-\sum_{i=1}^{2}(p^\star,\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial x_i})-(p^\star,\frac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial z})$$
$$+\hat{j}(\hat{\phi})-\hat{j}(u^\star)\geq\sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_i,\hat{\phi}_i-u_i^\star),\ \ \forall\hat{\phi}\in\Pi(K). \tag{2.5.16}$$

Comme dans le lemme 1.5.1, on a

$$\int_\Omega p^\star\Big(\frac{\partial u_1^\star}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2^\star}{\partial x_2}\Big)dx'\,dz=0,$$

donc

$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{\mu}(T^\star)\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z})^2\right)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_i-u_i^\star)dx'dz-\sum_{i=1}^{2}(p^\star,\frac{\partial}{\partial x_i}(\hat{\phi}_i-u_i^\star))$$
$$+\hat{j}(\hat{\phi})-\hat{j}(u^\star)\geq\sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_i,\hat{\phi}_i-u_i^\star),\ \ \forall\hat{\phi}\in\Pi(K). \tag{2.5.17}$$

Utilisons à nouveau le lemme de Minty, donc l'inéquation (2.5.17) donne (2.5.12).
D'autre part, en utilisant le lemme 5.3 [4], on peut choisir $\hat{\phi}$ dans (2.5.12) tel que

$$\hat{\phi}_i=u_i^\star\pm\varphi_i\quad i=1,2\quad\forall\varphi_i\in W_0^{1,r}(\Omega)\quad i=1,2,$$

donc

$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{\mu}(T^\star)\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z})^2\right)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}dx'dz-\sum_{i=1}^{2}(p^\star,\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i})=\sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_i,\varphi_i), \tag{2.5.18}$$

utilisons maintenant la formule de Green, en choisissant $\varphi_1=0$ et $\varphi_2\in W_0^{1,r}(\Omega)$, puis $\varphi_1\in W_0^{1,r}(\Omega)$ et $\varphi_2=0$, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-\hat{\mu}(T^\star)\big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z})^2\big)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\right)+\frac{\partial p^\star}{\partial x_i}=\hat{f}_i\quad i=1,2\quad\text{dans}\quad W^{-1,r'}(\Omega). \tag{2.5.19}$$

On choisit φ dans (2.5.18) tel que

$$\varphi_i(x',z)=\theta(x')z(z-h(x')),\quad\text{pour}\quad \text{i=1,2},$$

avec $\theta \in W_0^{1,r}(\omega)$, on obtient

$$\int_\Omega \hat{\mu}(T^\star)\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z})^2\right)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\theta(2z-h)dx'dz - \int_\Omega p^\star\frac{\partial\theta}{\partial x_i}z(z-h)dx'dz$$
$$+\int_\Omega p^\star z\frac{\partial h}{\partial x_i}\theta dx'dz = \int_\Omega \hat{f}_i\theta z(z-h)dx'dz, \quad (2.5.20)$$

donc

$$\int_\omega K_i\theta dx' + \frac{1}{6}\int_\omega p^\star\frac{\partial}{\partial x_i}(h^3\theta)dx' = \int_\omega M_i\theta dx',$$

où

$$K_i = \int_0^h \hat{\mu}(T^\star)\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z})^2\right)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(2z-h)dz,$$

$$M_i = \int_0^h \hat{f}_i z(z-h)dz.$$

Utilisons la formule de Green on obtient

$$K_i - \frac{1}{6}h^3\frac{\partial p^\star}{\partial x_i} = M_i, \text{ pour } i=1,2 \text{ dans } W^{-1,r'}(\omega), \quad (2.5.21)$$

comme $\dfrac{\partial u_i^\star}{\partial z} \in L^r(\Omega) \quad i=1,2,$ donc $K_i \in L^{r'}(\omega)$, et on a aussi $M_i \in L^{r'}(\omega)$ (puisque $\hat{f} \in L^{r'}(\Omega)$ et $h \in L^\infty(\omega)$). De (2.5.19) on déduit que

$$\frac{\partial p^\star}{\partial x_i} \in L^{r'}(\omega) \quad i=1,2,$$

d'où (2.5.11) découle, et par conséquent (2.5.19) devient (2.5.13).
D'autre part, en passant à la limite dans (2.4.4), on obtient

$$\int_\Omega \hat{K}\frac{\partial T^\star}{\partial z}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}dx'dz + \int_\Omega \hat{r}T^\star\hat{\psi}dx'dz = 0 \ \ \forall\hat{\psi} \in W^{1,q'}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega),$$

en particulier cette égalité reste vraie pour toute $\hat{\psi} \in W_0^{1,q'}(\Omega)$, en utilisant la formule de Green, il vient que

$$-\frac{\partial}{\partial z}(\hat{K}\frac{\partial T^\star}{\partial z}) + \hat{r}T^\star = 0 \text{ dans } W^{-1,q}(\Omega), \quad (2.5.22)$$

or $\hat{K} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tel que $(\hat{K})' \in L^\infty(\mathbb{R})$, donc $\dfrac{\partial^2 T^\star}{\partial z^2} \in L^q(\Omega)$, d'où

$$-\frac{\partial}{\partial z}(\hat{K}\frac{\partial T^\star}{\partial z}) + \hat{r}T^\star = 0 \text{ dans } L^q(\Omega). \quad (2.5.23)$$

Théorème 2.5.3. *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 2.5.2, les traces*

$$s^\star = u^\star(x',0)\ ;\ \tau^\star = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial u^\star}{\partial z}(x',0))^2\right)^{\frac{r-2}{2}} \frac{\partial u^\star}{\partial z}(x',0)\ ;\ \zeta^\star = T^\star(x',0)$$

vérifient

$$\int_\omega \hat{k}(\mid \psi + s^\star - s \mid - \mid s^\star - s \mid)dx' - \int_\omega \hat{\mu}(\zeta^\star)\tau^\star\psi dx' \geq 0 \quad \forall\psi \in (L^r(\omega))^2, \quad (2.5.24)$$

et la condition de Tresca limite sur ω

$$\left.\begin{array}{l} \hat{\mu}(\zeta^\star) \mid \tau^\star \mid \ < \ \hat{k} \ \Rightarrow \ s^\star = s \\ \hat{\mu}(\zeta^\star) \mid \tau^\star \mid \ = \ \hat{k} \ \Rightarrow \ \exists\ \lambda \geq 0 \ \text{ tel que } \quad s^\star = s + \lambda\tau^\star \end{array}\right\} \ \text{p.p} \quad \text{sur} \quad \omega, \quad (2.5.25)$$

et $u^\star, p^\star$ *vérifient l'équation limite de Reynolds :*

$$\int_\omega \left(\frac{h^3}{12}\nabla p^\star(x') + \tilde{F} + \int_0^h \int_0^y \hat{\mu}(T^\star(x',\xi))A^\star(x',\xi)\frac{\partial u^\star}{\partial \xi}(x',\xi)d\xi dy\right).\nabla\phi(x')dx'$$
$$- \int_\omega \frac{h}{2}\left(\int_0^h \hat{\mu}(T^\star(x',\xi))A^\star(x',\xi)\frac{\partial u^\star}{\partial \xi}(x',\xi)d\xi\right).\nabla\phi(x')dx' = 0,\ \forall\phi \in W^{1,r}(\omega) \quad (2.5.26)$$

où

$$A^\star(x',\xi) = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial u_i^\star}{\partial \xi}(x',\xi))^2\right)^{\frac{r-2}{2}},$$

$$\tilde{F}(x') = \frac{1}{\mu}\int_0^h \int_0^y \int_0^\xi \hat{f}(x',t)dtd\xi dy - \frac{h}{2\mu}\int_0^h \int_0^\xi \hat{f}(x',t)dtd\xi.$$

Preuve. La preuve est semblable à celle du théorème 1.5.2 du premier chapitre. □

Bibliographie

[1] C. Amrouche, V. Girault, Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension. Czechoslovak Mathematical Journal, 44, (1994).

[2] R.B. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager, Dynamics of polymeric liquids. Second edition, Vol1, Fluid Mecanics, J.Wiley and Sons, New York, 1987.

[3] F. Boughanim, Etude des ecoulements isothermes et non isothermes des fluides non Newtoniens : Loi de Carreau , loi de puissance. Thèse de mathématiques appliquées, Université Jean Monnet Saint-Etienne (1996).

[4] M. Boukrouche, G. Lukaszewicz, On a lubrication problem with Fourier and Tresca boundary conditions. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 282 (2003), no. 1, 212-231.

[5] M. Boukrouche, G. Lukaszewicz, The stationary Stefan problem with convection Governed by a non-linear Darcy's law. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 22, 536-585 (1999).

[6] M. Boukrouche, R. El Mir, Asymptotic analysis of non-Newtonian fluid in a thin domain with Tresca law. Nonlinear analysis, Theory Methods and Applications, 59 (2004), 85-105.

[7] L. Consiglieri, J.F. Rodrigues, On stationay flows with energy dependent nonlocal viscosities. Zap Nauchn. Sem S-Petersburg Otdel Mat.Inst Steklov (POMI) (2003).

[8] G. Duvaut, J.L. Lions, Les Inéquations en mécanique des fluides. Dunod, 1969.

[9] R.P. Gilbert, M. Fang, Nonlinear systems arising from nonisothermal, non-Newtonian Hele-Shaw flows in the presence of body forces and sources. Mathematical and Computer Modelling, 2002.

[10] D. Gilbarg N.S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second Order. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1977.

[11] P.P. Mosolov, V.P. Mjasnikov, A proof of Korn's inequality. Dokl, Akad Tom 201 (1971).

[12] F. Saidi, Sur quelques problèmes de lubrification par des fluides Newtoniens non isothermes et incompressibles avec des conditions aux bords non linéaires. Étude mathématique et numérique. Thèse de mathématiques appliquées, Université Jean Monnet Saint-Etienne (2004).

Chapitre 3

On the Navier-Stokes system in a thin film flow with Tresca free boundary condition and its asymptotic behavior

3.1 Introduction

In [1] the authors studied the influence of the Reynolds number with respect to the thin film ratio parameter ε in the justification of the well known equation of the lubrication theory, which was the basic Reynolds equation. They considered the widely assumed no-slip boundary conditions. This widely assumed no-slip boundary conditions when the fluid has the same velocity as surrounding solid boundary is not respected any more since the shear rate becomes too high [2], [6] , [3].

We are interested here to generalize the results obtained in [1] to the case taking into account this phenomenon described by the Tresca free boundary conditions.

For ε small but fixed, we study first the influence of the Reynolds number with respect to the thin film thickness to obtain the existence and uniqueness of velocity and pressure solutions of our problem. Then we study the rigorous justification of the limit problem when $\varepsilon \to 0$.

The plan of this chapter is as follows, we present in section 3.2 the basic equations and assumptions, in section 3.3 we give the weak formulation of the problem, in section 3.4 we give the main results on existence result, the needed estimates on velocity and pressure then the uniqueness result, in section 3.5 we study the limit problem by the asymptotic analysis.

3.2 Basic equations and assumptions

Let ω be a rectangular domain in $\mathbb{R}^{n-1}$

$$\omega = \prod_{i=1}^{n-1}]0, a_i[\times \{0\}$$

$n = 2$ or 3 and $a_i > 0$ for $i = 1, .., n-1$. We denote $x' = (x_1, .., x_{n-1})$ and $x = (x', x_n)$. We suppose that the domain ω is the bottom of the gap whose the top Γ_1^ε is defined by $x_n = H(x') = \varepsilon h(x')$ where $(0 < \varepsilon < 1)$ is a small parameter that will tend to zero and h is a function such that $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ and $0 < h_{min} \leq h(x') \leq h_{max} \quad \forall (x', 0) \in \omega$. We denote by Ω^ε the domain of the flow,

$$\Omega^\varepsilon = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n \ : (x', 0) \in \omega \ , \quad 0 < x_n < \varepsilon h(x)\}.$$

Let Γ^ε be the boundary of Ω^ε. We have $\Gamma^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_L^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_1^\varepsilon$ where Γ_L^ε is the lateral boundary. For a given body forces $f^\varepsilon = (f_1^\varepsilon, .., f_n^\varepsilon)$ the motion of the fluid is described by :

• The incompressibility equation

$$\operatorname{div}(u^\varepsilon) = u_{i,i}^\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_i} = 0 \quad in \quad \Omega^\varepsilon. \tag{3.2.1}$$

• The law of conservation of momentum, with the Reynolds number ε^γ

$$\varepsilon^\gamma u_j^\varepsilon u_{i,j}^\varepsilon = f_i + \sigma_{ij,j}^\varepsilon \quad in \quad \Omega^\varepsilon, \quad \gamma \in \mathbb{R} \tag{3.2.2}$$

where the stress tensor σ^ε is decomposed as follows

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = -p^\varepsilon \delta_{ij} + 2\mu d_{ij}(u^\varepsilon), \tag{3.2.3}$$

where $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, .., u_n^\varepsilon)$ is the velocity field, p^ε is the pressure, and δ_{ij} is the Krönecker symbol. The components of the symmetric deformation velocity tensor is given by

$$d_{ij}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\varepsilon \ + \ u_{j,i}^\varepsilon). \tag{3.2.4}$$

To describe the boundary conditions, we introduce first a vector function $g = (g_1, .., g_n)$ such that

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} g.\mathbf{n} \ ds = 0, \tag{3.2.5}$$

and

$$\int_{\Gamma_L^\varepsilon} (g)^2 \ g.\mathbf{n} \, ds = 0. \tag{3.2.6}$$

The actual velocities on the boundary, except for the components of the tangential velocity on ω, are given in terms of g.

• On Γ_1^ε, no slip condition is given. The upper surface being assumed to be fixed so

$$u^\varepsilon = g = 0. \tag{3.2.7}$$

• On Γ_L^ε, the velocity is known and parallel to the ω-plane

$$u^\varepsilon = \varepsilon^\beta g \quad with \;\; g_n = 0 \;\; and \; \beta \in \mathbb{R}. \tag{3.2.8}$$

• On ω, there is no flux condition across ω so that

$$u_n^\varepsilon = g_n = 0. \tag{3.2.9}$$

The tangential velocity on ω is unknown and satisfies the Tresca friction law [7] at ω with k^ε upper limit for stress

$$\left.\begin{array}{l} \mid \sigma_T^\varepsilon \mid \; < \;\; k^\varepsilon \;\; \Rightarrow \;\; u_T^\varepsilon \;\; = \varepsilon^\beta s \\ \mid \sigma_T^\varepsilon \mid \; = \;\; k^\varepsilon \;\; \Rightarrow \;\; \exists \; \lambda \geq 0 \;\; \text{such that} \;\; u_T^\varepsilon = \varepsilon^\beta s - \lambda \sigma_T^\varepsilon \end{array}\right\} \;\; \text{on} \quad \omega, \tag{3.2.10}$$

where $s = g$ on ω, $\mid . \mid$ is the euclidean norm in $\mathbb{R}^{n-1}$, $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, .., \mathbf{n}_n)$ is the unit outward normal to Γ^ε. Using Einstein's summations we have

$$u_{\mathbf{n}}^\varepsilon = u^\varepsilon.\mathbf{n} = u_i^\varepsilon \mathbf{n}_i \quad ; \quad u_{T_i}^\varepsilon = u_i^\varepsilon - u_{\mathbf{n}}^\varepsilon \mathbf{n}_i, \tag{3.2.11}$$

$$\sigma_{\mathbf{n}}^\varepsilon = (\sigma^\varepsilon.\mathbf{n}).\mathbf{n} = \sigma_{ij}^\varepsilon \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \quad ; \quad \sigma_{T_i}^\varepsilon = \sigma_{ij}^\varepsilon \mathbf{n}_j - \sigma_{\mathbf{n}}^\varepsilon \mathbf{n}_i, \tag{3.2.12}$$

which are respectively, the normal and the tangential velocity on ω, and the components of the normal and the tangential stress tensor on ω.

3.3 Weak formulation

We denote $H^1(\Omega^\varepsilon)$ the Sobolev space and $H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ the closure of $\mathcal{D}(\Omega^\varepsilon)$ in $H^1(\Omega^\varepsilon)$. The dual space of $H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ is denoted by $H^{-1}(\Omega^\varepsilon)$. We assume that the function g is in $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\varepsilon))^n$, the space of traces on Γ^ε of functions from $(H^1(\Omega^\varepsilon))^n$. Due to (3.2.5) it is well known [8] (lemma 2.2) that there exists a function $\tilde{G}^\varepsilon$ such that

$$\tilde{G}^\varepsilon \in (H^1(\Omega^\varepsilon))^n \;\; \text{with} \; \operatorname{div}(\tilde{G}^\varepsilon) = 0 \; \text{in} \quad \Omega^\varepsilon, \; and \quad \tilde{G}^\varepsilon = g \; \text{on} \; \Gamma^\varepsilon. \tag{3.3.1}$$

We denote

$$G^\varepsilon = \varepsilon^\beta \tilde{G}^\varepsilon. \tag{3.3.2}$$

We consider the functional framework on Ω^ε

$$H^1_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon) = \{\psi \in H^1(\Omega^\varepsilon) : \; \psi = 0 \text{ on } \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon\},$$

$$V^\varepsilon = \{v \; \in (H^1(\Omega^\varepsilon))^n \; : \; v = G^\varepsilon \;\text{ on }\; \Gamma_L^\varepsilon, \; v = 0 \;\text{ on }\; \Gamma_1^\varepsilon, \; v.n = 0 \;\text{ on }\; \omega\},$$

$$V_{div}^\varepsilon = \{\, v \in V^\varepsilon : \; \operatorname{div}(v) = 0\},$$

$$L_0^2(\Omega^\varepsilon) = \{\, q \in L^2(\Omega^\varepsilon) \; : \int_{\Omega^\varepsilon} q \, dx = 0\}.$$

Using the following notations :

$$a:\ V^{\varepsilon}\times V^{\varepsilon}\rightarrow \mathbb{R}$$
$$(u,v)\rightarrow a(u,v)=\int_{\Omega^{\varepsilon}} d_{ij}(u)d_{ij}(v)dx'dx_n$$
$$b:\ V^{\varepsilon}\times V^{\varepsilon}\times V^{\varepsilon}\rightarrow \mathbb{R}$$
$$(u,v,w)\rightarrow b(u,v,w)=\int_{\Omega^{\varepsilon}} u_i v_{j,i} w_j dx'dx_n$$
$$j^{\varepsilon}:\ V^{\varepsilon}\rightarrow \mathbb{R}^{+}$$
$$v\rightarrow j^{\varepsilon}(v)=\int_{\omega} k^{\varepsilon}\mid v-\varepsilon^{\beta}s\mid d\sigma.$$

A formal application of (3.2.1)-(3.2.10) leads to the following variational problem as in [7] :

Problem 1. *Find* $u^{\varepsilon}\in V^{\varepsilon}_{div}$, $p^{\varepsilon}\in L^2_0(\Omega^{\varepsilon})$, such that

$$2\mu a(u^{\varepsilon},\phi-u^{\varepsilon})+\varepsilon^{\gamma}b(u^{\varepsilon},u^{\varepsilon},\phi-u^{\varepsilon})-(p^{\varepsilon},\operatorname{div}(\phi))+j^{\varepsilon}(\phi)-j^{\varepsilon}(u^{\varepsilon})$$
$$\geq (f^{\varepsilon},\phi-u^{\varepsilon})\ \ \forall\phi\in V^{\varepsilon}, \tag{3.3.3}$$

we remark that a, b and j^{ε} satisfy the following properties :

i) a is a bilinear form

- continuous

$$\mid a(u,v)\mid\leq\parallel u\parallel_{(H^1(\Omega^{\varepsilon}))^n}\parallel v\parallel_{(H^1(\Omega^{\varepsilon}))^n}.$$

- coercive, by Korn's and Poincaré's inequalities $\exists\alpha>0$ such that :

$$a(v,v)\geq\alpha\parallel v\parallel^2_{(H^1(\Omega^{\varepsilon}))^n}\quad \forall v\in(H^1(\Omega^{\varepsilon}))^n \text{ such that } v=0 \text{ on } \Gamma_1^{\varepsilon}$$

ii) b is a trilinear form

- continuous : $\exists K_1>0$ such that :

$$\mid b(u,v,w)\mid\leq K_1\parallel u\parallel_{(H^1(\Omega^{\varepsilon}))^n}\parallel v\parallel_{(H^1(\Omega^{\varepsilon}))^n}\parallel w\parallel_{(H^1(\Omega^{\varepsilon}))^n},$$

- from (3.2.6) b is antisymmetric so

$$b(u,v,w)+b(u,w,v)=0,\ \ \forall(u,v,w)\in(V^{\varepsilon})^3.$$

iii) j^{ε} is convex continuous but non differentiable in $(H^1(\Omega^{\varepsilon}))^n$.

The constants K_1 and α do not depend on ε. We introduce the change of scale $z=\dfrac{x_n}{\varepsilon}$.

We get a fixed domain Ω :

$$\Omega=\{(x',x_n)\in\mathbb{R}^n:\ (x',0)\in\omega,\ 0<x_n<h(x')\},$$

and we denote by $\Gamma = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_L$ its boundary, then we define the following functions in Ω :

$$u_i^\varepsilon(x', x_n) = \varepsilon^\beta \hat{u}_i^\varepsilon(x', z) \text{ for } i = 1, .., n-1; \; u_n^\varepsilon(x', x_n) = \varepsilon^{\beta+1} \hat{u}_n^\varepsilon(x', z);$$
$$p^\varepsilon(x', x_n) = \varepsilon^{-2+\beta} \hat{p}^\varepsilon(x', z).$$

For the data we suppose that depend on ε in the following way :

$$f^\varepsilon(x', x_n) = \varepsilon^{-2+\beta} \hat{f}(x', z); \quad k^\varepsilon = \varepsilon^{-1+\beta} \hat{k}$$

$$G_i^\varepsilon(x', x_n) = \varepsilon^\beta \hat{G}_i(x', x_n) \text{ pour } i = 1, .., n-1 \; ; \; G_n^\varepsilon(x', x_n) = \varepsilon^{\beta+1} \hat{G}_i(x', x_n).$$

We define the functional framework on Ω by :

$$H^1_{\Gamma_1}(\Omega) = \{\psi \in H^1(\Omega) : \; \psi = 0 \text{ on } \Gamma_1\},$$

$$V = \{v \in (H^1(\Omega)^n \; : \; v = \hat{G} \text{ on } \Gamma_L, \; v = 0 \text{ on } \Gamma_1, \; v.n = 0 \text{ on } \omega\},$$
$$V_{div} = \{ v \in V : \; \text{div}(v) = 0\},$$
$$L_0^2(\Omega) = \{ q \in L^2(\Omega) \; : \int_\Omega q \, dx = 0\}.$$

3.4 Existence and uniqueness results

3.4.1 Existence

Theorem 3.4.1. *There exists μ_0 such that for $\mu > \mu_0$, the problem (3.3.3) has at least one solution $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$, under the condition $\beta = \frac{1}{2} - \gamma$.*

Proof. Here we will apply the Schauder fixed point theorem. At the beginning we look for a constant $C > 0$ such that the following application will be well defined

$$\Lambda \quad : B(0, C) \cap V_{div}^\varepsilon \rightarrow \; B(0, C) \cap V_{div}^\varepsilon$$
$$\xi \rightarrow u^\varepsilon$$

where $B(0, C)$ is the $(H^1(\Omega^\varepsilon))^n$ closed ball of radius C, u^ε is the unique solution of the following variational inequality :

$$\begin{aligned} 2\mu a(u^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) + \varepsilon^\gamma b(\xi, u^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) + j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon) \\ \geq (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) \;\; \forall \phi \in V_{div}^\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

In particular for $\phi = G^\varepsilon$, as $G^\varepsilon = \varepsilon^\beta s$ on ω and from (3.2.6) $b(\xi, u^\varepsilon, u^\varepsilon) = 0$, we get

$$2\mu a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq 2\mu a(u^\varepsilon, G^\varepsilon) + \varepsilon^\gamma b(\xi, u^\varepsilon, G^\varepsilon) + (f^\varepsilon, G^\varepsilon - u^\varepsilon). \tag{3.4.2}$$

In the other hand using Poincaré's and Young's inequalities, we obtain

$$2\mu a(u^\varepsilon, G^\varepsilon) \leq \frac{\mu}{2} a(u^\varepsilon\, u^\varepsilon) + 2\mu a(G^\varepsilon, G^\varepsilon) \leq \frac{\mu}{2} a(u^\varepsilon\, u^\varepsilon) + 2\mu \parallel \nabla G^\varepsilon \parallel^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^{n^2}}, \quad (3.4.3)$$

and

$$\begin{aligned}
&\parallel f^\varepsilon \parallel_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^n} \parallel u^\varepsilon \parallel_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^n} \leq \\
&\leq h_{max}\varepsilon \parallel \nabla u^\varepsilon \parallel_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^{n^2}} \parallel f^\varepsilon \parallel_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^n} \\
&\leq \frac{\alpha\mu}{4} \parallel u^\varepsilon \parallel^2_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} + \frac{\varepsilon^2 h^2_{max}}{\alpha\mu} \parallel f^\varepsilon \parallel^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^n},
\end{aligned} \quad (3.4.4)$$

$$\begin{aligned}
&\parallel f^\varepsilon \parallel_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^n} \parallel G^\varepsilon \parallel_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^n} \leq \\
&\leq \frac{\alpha\mu}{4} \parallel \nabla G^\varepsilon \parallel^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^{n^2}} + \frac{\varepsilon^2 h^2_{max}}{\alpha\mu} \parallel f^\varepsilon \parallel^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} .
\end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Also using the continuity of b, Young's inequality then Poincaré's inequality, and taking into account that $0 < \varepsilon < 1$, we obtain

$$\begin{aligned}
&| \varepsilon^\gamma b(\xi, u^\varepsilon, G^\varepsilon) | \leq K_1 \varepsilon^\gamma \parallel \xi \parallel_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} \parallel u^\varepsilon \parallel_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} \parallel G^\varepsilon \parallel_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} \\
&\leq K_1 \varepsilon^\gamma C \parallel u^\varepsilon \parallel_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} \parallel G^\varepsilon \parallel_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} \\
&\leq 2K_1\varepsilon^\gamma C \Big[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha\mu}{K_1 C}} \parallel u^\varepsilon \parallel_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} \Big] \Big[\sqrt{\frac{K_1 C}{\alpha\mu}} \varepsilon^\gamma \parallel G^\varepsilon \parallel_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} \Big] \\
&\leq K_1 C \Big(\frac{\alpha\mu}{4K_1 C} \parallel u^\varepsilon \parallel^2_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} + \frac{K_1 C \varepsilon^{2\gamma}}{\alpha\mu} \parallel G^\varepsilon \parallel^2_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} \Big) \\
&\leq K_1 C \Big\{ \frac{\alpha\mu}{4K_1 C} \parallel u^\varepsilon \parallel^2_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} + \\
&\qquad + \frac{K_1 C \varepsilon^{2\gamma}(1 + h^2_{max})\varepsilon^2}{\alpha\mu} \parallel \nabla G^\varepsilon \parallel^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^{n^2}} \Big\} \\
&\leq K_1 C \Big\{ \frac{\alpha\mu}{4K_1 C} \parallel u^\varepsilon \parallel^2_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} + \\
&\qquad + \frac{K_1 C \varepsilon^{2\gamma}(1 + h^2_{max})}{\alpha\mu} \parallel \nabla G^\varepsilon \parallel^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^{n^2}} \Big\}.
\end{aligned}$$

Using (3.4.2), we deduce

$$\begin{aligned}
\alpha\mu \parallel u^\varepsilon \parallel^2_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} \quad &\leq \quad \Big(\frac{(K_1 C)^2 \varepsilon^{2\gamma}(1 + h^2_{max})}{\alpha\mu} + \frac{\alpha\mu}{4} \Big) \parallel \nabla G^\varepsilon \parallel^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^{n^2}} + \\
&+ \quad \frac{2\varepsilon^2 h^2_{max}}{\alpha\mu} \parallel f^\varepsilon \parallel^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^n} .
\end{aligned} \quad (3.4.6)$$

To have $\| u^\varepsilon \|_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} \leq C$, it is enough to set

$$\Big(\frac{(K_1 C)^2 \varepsilon^{2\gamma}(1+h_{max}^2)}{(\alpha\mu)^2} + \frac{1}{4}\Big) \| \nabla G^\varepsilon \|^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^{n^2}} + \\ + \frac{2\varepsilon^2 h_{max}^2}{(\alpha\mu)^2} \| f^\varepsilon \|^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^n} \leq C^2 \tag{3.4.7}$$

i.e.

$$\frac{1}{4} \| \nabla G^\varepsilon \|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{n^2}} + \frac{2\varepsilon^2 h_{max}^2}{(\alpha\mu)^2} \| f^\varepsilon \|^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^n} \leq \\ \leq C^2 \Big\{ 1 - \frac{(K_1)^2 \varepsilon^{2\gamma}(1+h_{max}^2)}{(\alpha\mu)^2} \| \nabla G^\varepsilon \|^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^{n^2}} \Big\}. \tag{3.4.8}$$

But from (3.3.2) we have :

$$\| \nabla G^\varepsilon \|^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^{n^2}} \leq \varepsilon^{2\beta-1} \| \nabla \hat{G} \|^2_{(L^2(\Omega))^{n^2}} \quad \forall\, \varepsilon \in]0,1],$$

to give a meaning to (3.4.8), and then to obtain $\| u^\varepsilon \|_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} \leq C$, it's enough to have

$$\beta = \frac{1}{2} - \gamma \quad \text{and} \quad \mu > \mu_0 = \frac{K_1\sqrt{1+h_{max}^2}}{\alpha} \| \nabla \hat{G} \|^2_{(L^2(\Omega))^{n^2}} .$$

• Let us show that Λ is Lipschitzian on $B(0,C) \cap V^\varepsilon_{div}$. Indeed, let u_1^ε and u_2^ε two solutions of (3.4.1) such that $u_1^\varepsilon = \Lambda(\xi_1)$ and $u_2^\varepsilon = \Lambda(\xi_2)$. Then

$$2\mu a(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon - u_1^\varepsilon) + \varepsilon^\gamma b(\xi_1, u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon - u_1^\varepsilon) + j^\varepsilon(u_2^\varepsilon) - j^\varepsilon(u_1^\varepsilon) - (f^\varepsilon, u_2^\varepsilon - u_1^\varepsilon) \geq 0,$$

$$2\mu a(u_2^\varepsilon, u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon) + \varepsilon^\gamma b(\xi_2, u_2^\varepsilon, u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon) + j^\varepsilon(u_1^\varepsilon) - j^\varepsilon(u_2^\varepsilon) - (f^\varepsilon, u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon) \geq 0.$$

By adding both inequalities, we get

$$-2\mu a(u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon, u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon) + \varepsilon^\gamma b(\xi_1, u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon - u_1^\varepsilon) + \varepsilon^\gamma b(\xi_2, u_2^\varepsilon, u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon) \geq 0,$$

using that a is coercive, we obtain

$$\begin{aligned} 2\mu\alpha \| u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon \|^2_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} &\leq 2\mu a(u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon, u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon) \\ &\leq \varepsilon^\gamma b(\xi_1 - \xi_2, u_1^\varepsilon, u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon) + \varepsilon^\gamma b(\xi_2, u_1^\varepsilon, u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon) - \\ &- \varepsilon^\gamma b(\xi_2, u_2^\varepsilon, u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon), \end{aligned}$$

as

$$\varepsilon^\gamma b(\xi_2, u_1^\varepsilon, u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon) - \varepsilon^\gamma b(\xi_2, u_2^\varepsilon, u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon) = \varepsilon^\gamma b(\xi_2, u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon, u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon) = 0,$$

by Sobolev embeddings, we get

$$\mu\alpha \| u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon \|^2_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} \leq \\ \leq K_1 \varepsilon^\gamma \| u^\varepsilon \|_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} \| u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon \|_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} \| \xi_1 - \xi_2 \|_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} \\ \leq K_1 C \varepsilon^\gamma \| u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon \|_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} \| \xi_1 - \xi_2 \|_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n}, \tag{3.4.9}$$

whence

$$\| \Lambda(\xi_1) - \Lambda(\xi_2) \|_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} \leq \frac{K_1 C \varepsilon^\gamma}{2\mu\alpha} \| \xi_1 - \xi_2 \|_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^n} . \tag{3.4.10}$$

Thus by Schauder fixed point theorem, there exists at least one solution u^ε for the following variational inequality :

$$\begin{aligned} 2\mu a(u^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) + \varepsilon^\gamma b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) + j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq \\ \geq (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) \ \ \forall \phi \in V^\varepsilon_{div}. \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

We can prove the existence of the pressure as in theorem 3.2 [5].

3.4.2 Some needed estimates

Before showing the uniqueness of the weak solutions to the problem 1, we need to establish some estimates on the gradient of the velocities field. These estimates with others on the pressure, will be useful to study the limit problem in section 3.5. First, we introduce two technical lemmas which will be used to obtain the needed estimates.

Lemma 3.4.1. *For all $\phi \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ we have the following estimates :*
For $n = 3$, we have

$$\| \phi \|_{L^6(\Omega)} \leq 4 \| \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \|^{\frac{1}{3}}_{L^2(\Omega)} \| \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \|^{\frac{1}{3}}_{L^2(\Omega)} \| \frac{\partial \phi}{\partial z} \|^{\frac{1}{3}}_{L^2(\Omega)} . \tag{3.4.12}$$

$$\| \phi \|_{L^4(\Omega)} \leq 4 h^{\frac{1}{4}}_{max} \| \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\Omega)} \| \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\Omega)} \| \frac{\partial \phi}{\partial z} \|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}, \tag{3.4.13}$$

For $n = 2$, we have

$$\| \phi \|_{L^4(\Omega)} \leq \sqrt{2 h_{max}} \| \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\Omega)} \| \frac{\partial \phi}{\partial z} \|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\Omega)} . \tag{3.4.14}$$

Proof. Let $\phi \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$. We extend ϕ by 0 in $B =]0, a_1[\times]0, a_2[\times]0, h_{max}[$, we obtain

$$\begin{aligned} \| \phi \|^6_{L^6(\Omega)} = \| \phi \|^6_{L^6(B)} &\leq \int_B \sup_{x_1} \phi^2 \sup_{x_2} \phi^2 \sup_z \phi^2 dx_1 dx_2 dz \\ &= \int_{]0,a_2[\times]0,h_{max}[} \sup_{x_1} \phi^2 \Big(\int_{]0,a_1[} \sup_{x_2} \phi^2 \sup_z \phi^2 dx_1 \Big) dx_2 dz. \end{aligned}$$

Using Cauchy-Schwarz inequality, we get

$$\begin{aligned} \| \phi \|^6_{L^6(\Omega)} \leq \Big(\int_{]0,a_2[\times]0,h_{max}[} \sup_{x_1} \phi^4 dx_2 dz \Big)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \Big(\int_{]0,a_2[\times]0,h_{max}[} \big(\int_{]0,a_1[} \sup_{x_2} \phi^2 \sup_z \phi^2 dx_1 \big)^2 dx_2 dz \Big)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

using for the second times Cauchy-Schwarz inequality

$$\Big(\int_{]0,a_1[} \sup_{x_2} \phi^2 \sup_{z} \phi^2 dx_1\Big)^2 \leq \int_{]0,a_1[} \sup_{x_2} \phi^4 dx_1 \int_{]0,a_1[} \sup_{z} \phi^4 dx_1,$$

we return at (3.4.15) and using Fubini's theorem, we deduce

$$\begin{aligned} \| \phi \|^6_{L^6(\Omega)} \leq \Big(\int_{]0,a_2[\times]0,h_{max}[} \sup_{x_1} \phi^4 dx_2 dz\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{]0,a_1[\times]0,h_{max}[} \sup_{x_2} \phi^4 dx_2 dz\Big)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \Big(\int_{]0,a_1[\times]0,a_2[} \sup_{z} \phi^4 dx_1 dx_2\Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

However ϕ vanishes for $z = h_{max}$, then

$$\phi^4(x_1, x_2, z) = -4 \int_z^{h_{max}} \phi^3(x_1, x_2, t) \frac{\partial \phi}{\partial z}(x_1, x_2, t) dt, \tag{3.4.17}$$

$$\Big(\int_{]0,a_1[\times]0,a_2[} \sup_{z} \phi^4 dx_1 dx_2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq 2\Big[\int_B \mid \phi^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \mid dx\Big]^{\frac{1}{2}} \leq 2 \| \phi \|^{\frac{3}{2}}_{L^6(\Omega)} \| \frac{\partial \phi}{\partial z} \|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} . \tag{3.4.18}$$

We have also as in (3.4.18)

$$\Big(\int_{]0,a_2[\times]0,h_{max}[} \sup_{x_1} \phi^4 dx_2 dz\Big)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \| \phi \|^{\frac{3}{2}}_{L^6(\Omega)} \| \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}, \tag{3.4.19}$$

$$\Big(\int_{]0,a_1[\times]0,h_{max}[} \sup_{x_2} \phi^4 dx_1 dx_2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \| \phi \|^{\frac{3}{2}}_{L^6(\Omega)} \| \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} . \tag{3.4.20}$$

Multiplying (3.4.18), (3.4.19) and (3.4.20), we get

$$\| \phi \|^6_{L^6(\Omega)} \leq 2^3 \| \phi \|^{\frac{9}{2}}_{L^6(\Omega)} \| \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} \| \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} \| \frac{\partial \phi}{\partial z} \|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}, \tag{3.4.21}$$

then we deduce (3.4.12).
In the other hand from (3.4.17), we have

$$\| \phi \|^4_{L^4(\Omega)} \leq 4h_{max} \int_B \mid \phi^3 \| \frac{\partial \phi}{\partial z} \mid dx \leq 4h_{max} \| \phi \|^3_{L^6(\Omega)} \| \frac{\partial \phi}{\partial z} \|_{L^2(\Omega)} \tag{3.4.22}$$

then using (3.4.12) we get (3.4.13).

• When $n = 2$ we have $B =]0, a_1[\times]0, h_{max}[$. To obtain (3.4.14), we use first Fubini's theorem, we get

$$\int_B \phi^4 dx \leq \Big(\int_0^{a_1} \sup_{z} \phi^2 dx_1\Big)\Big(\int_0^{h_{max}} \sup_{x_1} \phi^2 dz\Big) \tag{3.4.23}$$

as ϕ is vanishes for $z = h_{max}$, we have

$$\phi^2(x_1, z) = -2\int_z^{h_{max}} \phi\frac{\partial \phi}{\partial z}(x_1, t)dt,$$

then

$$\int_0^{a_1} \sup_z \phi^2 dx_1 \leq 2 \parallel \phi \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel \frac{\partial \phi}{\partial z} \parallel_{L^2(\Omega)} .$$

In the same way

$$\int_0^{h_{max}} \sup_{x_1} \phi^2 dz \leq 2 \parallel \phi \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \parallel_{L^2(\Omega)},$$

therefore

$$\parallel \phi \parallel^4_{L^2(\Omega)} \leq 4 \parallel \phi \parallel^2_{L^2(\Omega)} \parallel \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel \frac{\partial \phi}{\partial z} \parallel_{L^2(\Omega)} .$$

Using Poincaré's inequality, we get

$$\parallel \phi \parallel_{L^2(\Omega)} \leq h_{max} \parallel \frac{\partial \phi}{\partial z} \parallel_{L^2(\Omega)}$$

whence (3.4.14) holds.

Lemma 3.4.2. *$\forall \phi \in H^1(\Omega)$ such that : $\phi = \hat{G}$ on Γ_L and $\phi = 0$ on Γ_1, we have*

for $n = 3$,

$$\parallel \phi \parallel_{L^4(\Omega)} \leq C(\Omega, \hat{G})\Big[\parallel \frac{\partial \phi}{\partial z} \parallel^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} \big(max\{ \parallel \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \parallel_{L^2(\Omega)}, \parallel \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \parallel_{L^2(\Omega)} \}\big)^{\frac{1}{2}} + \\ + \parallel \frac{\partial \phi}{\partial z} \parallel^{\frac{1}{3}}_{L^2(\Omega)} \Big], \tag{3.4.24}$$

for $n = 2$,

$$\parallel \phi \parallel_{L^4(\Omega)} \leq C(\Omega, \hat{G})\Big(\parallel \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \parallel^{\frac{1}{4}}_{L^2(\Omega)} \parallel \frac{\partial \phi}{\partial z} \parallel^{\frac{3}{4}}_{L^2(\Omega)} + \parallel \frac{\partial \phi}{\partial z} \parallel^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} \Big). \tag{3.4.25}$$

Proof. See [1].

Theorem 3.4.2. *For any solution $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ to (3.3.3), there exists a constant $C > 0$ (which does not depend on ε) and ε_1 such that for $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, we have*

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} \parallel \varepsilon\frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j} \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \parallel \varepsilon\frac{\partial \hat{u_n^\varepsilon}}{\partial z} \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} \Big(\parallel \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \parallel \varepsilon^2\frac{\partial \hat{u_n^\varepsilon}}{\partial x_i} \parallel^2_{L^2(\Omega)} \Big) \leq C. \tag{3.4.26}$$

$$\| \frac{\partial \hat{p^\varepsilon}}{\partial x_i} \|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C, \quad i = 1, .., n-1, \tag{3.4.27}$$

$$\| \frac{\partial \hat{p^\varepsilon}}{\partial z} \|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C\varepsilon. \tag{3.4.28}$$

Proof. From (3.4.11) with the choice $\phi = G^\varepsilon$, and as $b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, u^\varepsilon) = 0$ and $j^\varepsilon(G^\varepsilon) = 0$, we get

$$2\mu a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq 2\mu a(u^\varepsilon, G^\varepsilon) + \varepsilon^\gamma b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, G^\varepsilon) + (f^\varepsilon, u^\varepsilon - G^\varepsilon). \tag{3.4.29}$$

By Korn's inequality, there exists a constant C_K which does not depend on ε such that

$$a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \geq C_K \| \nabla u^\varepsilon \|_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^{n^2}} . \tag{3.4.30}$$

Using Poincaré's inequality, we get

$$\| u^\varepsilon \|_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^n} \leq h_{max} \ \varepsilon \ \| \nabla u^\varepsilon \|_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^{n^2}},$$

and using Young's inequality, we obtain

$$\| f^\varepsilon \|_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^n} \| u^\varepsilon \|_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^n} \leq \frac{\mu C_K}{2} \| \nabla u^\varepsilon \|^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^{n^2}} + \frac{\varepsilon^2 h^2_{max}}{2\mu C_K} \| f^\varepsilon \|^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^n} .$$

In the same way we have

$$\| f^\varepsilon \|_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^n} \| G^\varepsilon \|_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^n} \leq \frac{\mu C_K}{2} \| \nabla G^\varepsilon \|^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^{n^2}} + \frac{\varepsilon^2 h^2_{max}}{2\mu C_K} \| f^\varepsilon \|^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^n} .$$

Using Cauchy-Schwarz inequality then Young's inequality, we obtain

$$\begin{aligned}
| 2\mu a(u^\varepsilon, G^\varepsilon) | &\leq 2\mu \int_{\Omega^\varepsilon} | D(u^\varepsilon) || D(G^\varepsilon) | \, dx \\
&\leq \int_{\Omega^\varepsilon} \big(\sqrt{\mu C_K} \, | D(u^\varepsilon) | \big) \big(2\sqrt{\frac{\mu}{C_K}} \, | D(G^\varepsilon) | \big) dx \\
&\leq \frac{\mu C_K}{2} \int_{\Omega^\varepsilon} | D(u^\varepsilon) |^2 \, dx + \frac{2\mu}{C_K} \int_{\Omega^\varepsilon} | D(G^\varepsilon) |^2 \, dx.
\end{aligned}$$

As $\| D(v) \|_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^{n^2}} \leq \| \nabla v \|_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^{n^2}} \quad \forall v \in V^\varepsilon$, we deduce

$$2\mu a(u^\varepsilon, G^\varepsilon) \leq \frac{\mu C_K}{2} \| \nabla u^\varepsilon \|^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^{n^2}} + \frac{2\mu}{C_K} \| \nabla G^\varepsilon \|^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^{n^2}} .$$

From (3.4.29), we deduce

$$\begin{aligned}
\mu C_K \| \nabla u^\varepsilon \|^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^{n^2}} \leq \big(\frac{\mu C_K}{2} + \frac{2\mu}{C_K}\big) \| \nabla G^\varepsilon \|^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^{n^2}} + \\
+ \frac{\varepsilon^2 h^2_{max}}{\mu C_K} \| f^\varepsilon \|^2_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^n} + \varepsilon^\gamma b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, G^\varepsilon).
\end{aligned} \tag{3.4.31}$$

By dividing by ε and passing to the fixed domain Ω, we get

$$\mu C_K \varepsilon^{2\beta}\Big\{\sum_{i,j=1}^{n-1} \| \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j} \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \frac{\partial \hat{u_n^\varepsilon}}{\partial z} \|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\Big(\| \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\varepsilon \partial z} \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \varepsilon \frac{\partial \hat{u_n^\varepsilon}}{\partial x_i} \|^2_{L^2(\Omega)} \Big)\Big\} \leq \frac{K}{\varepsilon^2}\varepsilon^{2\beta} + \varepsilon^\gamma \frac{b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, G^\varepsilon)}{\varepsilon}, \qquad (3.4.32)$$

where

$$K = \frac{h^2_{max}}{\mu C_K} \| \hat{f} \|^2_{(L^2(\Omega))^n} + \Big(\frac{\mu C_K}{2} + \frac{\mu}{2C_K}\Big) \| \nabla \hat{G} \|^2_{(L^2(\Omega))^{n^2}} .$$

Now, we define I^ε, J^ε by :

$$I^\varepsilon = \max\Big(\max_{\substack{1\leq i\leq n-1\\ 1\leq j\leq n-1}} \| \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j} \|_{L^2(\Omega)} \ ; \ \max_{1\leq j\leq n-1} \| \frac{\varepsilon \partial \hat{u_n^\varepsilon}}{\partial x_j} \|_{L^2(\Omega)} \Big), \qquad (3.4.33)$$

$$J^\varepsilon = \max\Big(\| \frac{\varepsilon \partial \hat{u_n^\varepsilon}}{\partial z} \|_{L^2(\Omega)} \ ; \ \max_{1\leq i\leq n-1} \| \frac{\varepsilon \partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} \|_{L^2(\Omega)} \Big). \qquad (3.4.34)$$

Thus

$$\mu C_K \varepsilon^{2\beta}\Big((\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon})^2 + (I^\varepsilon)^2 \Big) \leq \frac{K}{\varepsilon^2}\varepsilon^{2\beta} + \varepsilon^\gamma \frac{b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, G^\varepsilon)}{\varepsilon}. \qquad (3.4.35)$$

• In the other hand, if n=2, we have

$$b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, G^\varepsilon) = \varepsilon^{3\beta+1}\int_\Omega \hat{u_1^\varepsilon}\frac{\partial \hat{u_1^\varepsilon}}{\partial x_1}\hat{G}_1 dx'dz + \varepsilon^{3\beta+1}\int_\Omega \hat{u_2^\varepsilon}\frac{\partial \hat{u_1^\varepsilon}}{\partial z}\hat{G}_1 dx'dz +$$
$$+\varepsilon^{3\beta+3}\int_\Omega \hat{u_1^\varepsilon}\frac{\partial \hat{u_2^\varepsilon}}{\partial x_1}\hat{G}_2 dx'dz + \varepsilon^{3\beta+3}\int_\Omega \hat{u_2^\varepsilon}\frac{\partial \hat{u_2^\varepsilon}}{\partial z}\hat{G}_2 dx'dz,$$

by Hölder inequality we can estimate any term of b in the preceding formula, as follows :

$$\int_\Omega \hat{u_1^\varepsilon}\frac{\partial \hat{u_1^\varepsilon}}{\partial x_1}\hat{G}_1 dx'dz \leq \| \hat{u_1^\varepsilon} \|_{L^4(\Omega)} \| \frac{\partial \hat{u_1^\varepsilon}}{\partial x_1} \|_{L^2(\Omega)} \| \hat{G}_1 \|_{L^4(\Omega)} .$$

Using lemma 3.4.2, we get

$$\begin{aligned} \| \hat{u_1^\varepsilon} \|_{L^4(\Omega)} &\leq C(\Omega,\hat{G})\Big(\| \frac{\partial \hat{u_1^\varepsilon}}{\partial x_1} \|^{\frac14}_{L^2(\Omega)} \| \frac{\partial \hat{u_1^\varepsilon}}{\partial z} \|^{\frac34}_{L^2(\Omega)} + \| \frac{\partial \hat{u_1^\varepsilon}}{\partial z} \|^{\frac12}_{L^2(\Omega)} \Big) \\ &\leq C(\Omega,\hat{G})\Big(I^{\varepsilon\frac14} J^{\varepsilon\frac34} + J^{\varepsilon\frac12} \Big), \end{aligned}$$

in the same way

$$\begin{aligned} \| \varepsilon\hat{u_2^\varepsilon} \|_{L^4(\Omega)} &\leq C(\Omega,\hat{G})\Big(\| \varepsilon\frac{\partial \hat{u_2^\varepsilon}}{\partial x_1} \|^{\frac14}_{L^2(\Omega)} \| \varepsilon\frac{\partial \hat{u_2^\varepsilon}}{\partial z} \|^{\frac34}_{L^2(\Omega)} + \| \varepsilon\frac{\partial \hat{u_2^\varepsilon}}{\partial z} \|^{\frac12}_{L^2(\Omega)} \Big) \\ &\leq C(\Omega,\hat{G})\Big(I^{\varepsilon\frac14} J^{\varepsilon\frac34} + J^{\varepsilon\frac12} \Big). \end{aligned}$$

Consequently

$$\begin{aligned}
\mid b(u^\varepsilon,u^\varepsilon,G^\varepsilon)\mid &\leq C\varepsilon^{3\beta}\big(\varepsilon I^\varepsilon + J^\varepsilon\big)\big(I^{\varepsilon\frac{1}{4}}J^{\varepsilon\frac{3}{4}} + J^{\varepsilon\frac{1}{2}}\big)\\
&\leq C\varepsilon^{3\beta}\Big\{\varepsilon^{\frac{7}{4}}\Big(I^{\varepsilon\frac{5}{4}}(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon})^{\frac{3}{4}} + I^{\varepsilon\frac{1}{4}}(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon})^{\frac{7}{4}}\Big) +\\
&+ \varepsilon^{\frac{3}{2}}\Big(I^\varepsilon(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon})^{\frac{1}{2}} + (\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon})^{\frac{3}{2}}\Big)\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.4.36}$$

Using Young's inequality in (3.4.36) successively for

$$\Big(I^{\varepsilon\frac{5}{4}},\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^{\frac{3}{4}}\Big)\Big(\frac{8}{5},\frac{8}{3}\Big)\ ;\ \Big(I^{\varepsilon\frac{1}{4}},\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^{\frac{7}{4}}\Big)\Big(8,\frac{8}{7}\Big)$$

$$\Big(I^\varepsilon,\Big(\frac{J^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)\Big(2,2\Big)\ ;\ \Big(\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon},\Big)^{\frac{3}{2}},1\Big)\Big(\frac{4}{3},4\Big),$$

as $\beta = \frac{1}{2} - \gamma$, then we obtain

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon^\gamma b(u^\varepsilon,u^\varepsilon,G^\varepsilon)}{\varepsilon} &\leq \varepsilon^{2\beta}\Big\{C\varepsilon^{\frac{5}{4}}\Big[\frac{5}{8}I^{\varepsilon 2} + \frac{3}{8}\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^2 + \frac{1}{8}I^{\varepsilon 2} + \frac{7}{8}\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^2\Big] +\\
&+ C\varepsilon^{\frac{3}{4}}\Big[\frac{1}{2}I^{\varepsilon 2} + \frac{1}{2}\frac{J^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\Big] + C\varepsilon\Big[\frac{3}{4}\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^2 + \frac{1}{4}\Big]\Big\}\\
&\leq \varepsilon^{2\beta}\Big\{C\varepsilon^{\frac{3}{4}}\Big[\frac{5}{4}I^{\varepsilon 2} + \frac{5}{4}\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^2\Big] + C\varepsilon^{\frac{3}{4}} +\\
&+ \frac{1}{2}C\varepsilon^{\frac{5}{4}}\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{3}{4}C\varepsilon^{\frac{3}{4}}\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^2\Big\},\ \text{(because } \varepsilon < 1\text{)}.
\end{aligned}$$

We return at (3.4.35) and dividing by $\varepsilon^{2\beta}$, we get

$$\begin{aligned}
&\Big(\mu C_K - \frac{5}{4}C\varepsilon^{\frac{3}{4}}\Big)I^{\varepsilon 2} + \Big(\frac{\mu C_K}{2} - 2C\varepsilon^{\frac{3}{4}}\Big)\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^2 +\\
&\qquad + \Big\{\frac{\mu C_K}{2}\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^2 - \frac{1}{2}C\varepsilon^{\frac{5}{4}}\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big\} \leq \frac{K'}{\varepsilon^2},
\end{aligned} \tag{3.4.37}$$

whence

$$\begin{aligned}
&\Big(\mu C_K - \frac{5}{4}C\varepsilon^{\frac{3}{4}}\Big)I^{\varepsilon 2} + \Big(\frac{\mu C_K}{2} - 2C\varepsilon^{\frac{3}{4}}\Big)\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^2 +\\
&\qquad + \frac{\mu C_K}{2}\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{C}{2\mu C_K}\varepsilon^{\frac{5}{4}}\Big)^2 \leq \frac{K''}{\varepsilon^2}.
\end{aligned} \tag{3.4.38}$$

To obtain estimate (3.4.26), the left side of (3.4.38) must be strictly positive, which induce the choice $\varepsilon < \varepsilon_{0,2}$, where $\varepsilon_{0,2}^{\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{4}\dfrac{\mu C_K}{C}$.

• When $n = 3$, we obtain in the same way

$$\begin{aligned} | b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, G^\varepsilon) | &\leq C\varepsilon^{3\beta}\big(\varepsilon I^\varepsilon + J^\varepsilon\big)\big(I^{\varepsilon\frac{1}{2}} J^{\varepsilon\frac{1}{2}} + J^{\varepsilon\frac{1}{3}}\big) \\ &\leq C\varepsilon^{3\beta}\Big\{\varepsilon^{\frac{3}{2}}\Big(I^{\varepsilon\frac{3}{2}}(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon})^{\frac{1}{2}} + I^\varepsilon(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon})^{\frac{3}{2}}\Big) + \\ &+\varepsilon^{\frac{4}{3}}\Big(I^\varepsilon(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon})^{\frac{1}{2}} + (\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon})^{\frac{3}{2}}\Big)\Big\}, \end{aligned} \tag{3.4.39}$$

thus

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^\gamma b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, G^\varepsilon)}{\varepsilon} &\leq \varepsilon^{2\beta}\Big\{C\varepsilon\Big[I^{\varepsilon\frac{3}{2}}\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^{\frac{1}{2}} + I^{\varepsilon\frac{1}{2}}\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big] + \\ &+ C\varepsilon^{\frac{5}{6}}\Big[I^\varepsilon\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^{\frac{1}{3}} + \Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^{\frac{4}{3}}\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{3.4.40}$$

Using Young's inequality successively for

$$\Big(I^{\varepsilon\frac{3}{2}}, \Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)\Big(\frac{4}{3}, 4\Big) \;\; ; \;\; \Big(I^{\varepsilon\frac{1}{2}}, \Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big)\Big(4, \frac{4}{3}\Big)$$

$$\Big(I^\varepsilon, \Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^{\frac{1}{3}}, 1\Big)\Big(2, 3, 6\Big) \;\; ; \;\; \Big(\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}, \Big)^{\frac{4}{3}}, 1\Big)\Big(\frac{3}{2}, 3\Big),$$

thus

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^\gamma b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, G^\varepsilon)}{\varepsilon} &\leq \varepsilon^{2\beta}\Big\{C\varepsilon\Big[\frac{3}{4}I^{\varepsilon 2} + \frac{1}{4}\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^2 + \frac{1}{4}I^{\varepsilon 2} + \frac{3}{4}\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^2\Big] + \\ &+ C\varepsilon^{\frac{5}{6}}\Big[\frac{1}{2}I^{\varepsilon 2} + \frac{1}{3}\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big]\Big\} \\ &\leq \varepsilon^{2\beta}\Big\{C\varepsilon^{\frac{5}{6}}\Big[\frac{3}{2}I^{\varepsilon 2} + \frac{5}{3}\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^2 + \frac{1}{3}\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big) + \frac{1}{2}\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{3.4.41}$$

We return at (3.4.32) and by dividing by $\varepsilon^{2\beta}$, we get

$$\begin{aligned} &\Big(\mu C_K - \frac{3}{2}C\varepsilon^{\frac{5}{6}}\Big)I^{\varepsilon 2} + \Big(\frac{\mu C_K}{2} - \frac{5}{3}C\varepsilon^{\frac{5}{6}}\Big)\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^2 + \\ &+\Big(\frac{\mu C_K}{2}\Big(\frac{J^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^2 - \frac{C\varepsilon^{\frac{5}{6}}}{3\mu C_K}\Big)^2 \leq \frac{K}{\varepsilon^2}. \end{aligned} \tag{3.4.42}$$

To obtain estimate (3.4.26), it is enough that any term of the left of (3.4.38) must be strictly positive, which induce the choice $\varepsilon < \varepsilon_{0,3}$, where $\varepsilon_{0,3}^{\frac{5}{6}} = \dfrac{3}{10}\dfrac{\mu C_K}{C}$.

We put $\varepsilon_1 = min(\varepsilon_{0,2}, \varepsilon_{0,3})$, the estimate (3.4.26) is valid in both cases $n = 2$ and $n = 3$, when $\varepsilon < \varepsilon_1$.

• To prove (3.4.27) and (3.4.28), we choose $\varphi = u^\varepsilon \pm \psi$ with $\psi \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ in (3.3.3). We obtain

$$\int_{\Omega^\varepsilon} p^\varepsilon \mathrm{div}\psi dx' dx_n = a(u^\varepsilon, \psi) + \varepsilon^\gamma b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, \psi) - (f^\varepsilon, \psi).$$

Using (3.4.26), and the following Sobolev imbedding

$$\| v \|_{L^4(\Omega^\varepsilon)} \leq C \| v \|_{H^1(\Omega^\varepsilon)},$$

so passing to the fixed domain Ω, we obtain the estimates (3.4.27) and (3.4.28).

3.4.3 Uniqueness

Theorem 3.4.3. *With the same assumptions as in theorems 3.4.1 and 3.4.2, there exists ε_1' such that for $\varepsilon \leq \varepsilon_1'$, then $\hat{u^\varepsilon}$, such that $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ is a solution of (3.3.3), is unique.*

Proof. Let $(u^{1,\varepsilon}, p^{1,\varepsilon})$, $(u^{2,\varepsilon}, p^{2,\varepsilon})$ be two different solutions for (3.3.3). We choose $\phi = u^{2,\varepsilon}$ then $\phi = u^{1,\varepsilon}$ in (3.3.3) when the solutions are respectively $(u^{1,\varepsilon}, p^{1,\varepsilon})$ and $(u^{2,\varepsilon}, p^{2,\varepsilon})$. Then

$$2\mu a(u^{1,\varepsilon}, u^{2,\varepsilon} - u^{1,\varepsilon}) + \varepsilon^\gamma b(u^{1,\varepsilon}, u^{1,\varepsilon}, u^{2,\varepsilon} - u^{1,\varepsilon}) + j^\varepsilon(u^{2,\varepsilon}) - j^\varepsilon(u^{1,\varepsilon}) \geq (f^\varepsilon, u^{2,\varepsilon} - u^{1,\varepsilon}),$$
$$2\mu a(u^{2,\varepsilon}, u^{1,\varepsilon} - u^{2,\varepsilon}) + \varepsilon^\gamma b(u^{2,\varepsilon}, u^{2,\varepsilon}, u^{1,\varepsilon} - u^{2,\varepsilon}) + j^\varepsilon(u^{1,\varepsilon}) - j^\varepsilon(u^{2,\varepsilon}) \geq (f^\varepsilon, u^{1,\varepsilon} - u^{2,\varepsilon}).$$

Adding both inequalities, we get

$$-2\mu a(u^{1,\varepsilon} - u^{2,\varepsilon}, u^{1,\varepsilon} - u^{2,\varepsilon}) +$$
$$+\varepsilon^\gamma \Big(b(u^{2,\varepsilon}, u^{2,\varepsilon}, u^{1,\varepsilon} - u^{2,\varepsilon}) - b(u^{1,\varepsilon}, u^{1,\varepsilon}, u^{1,\varepsilon} - u^{2,\varepsilon}) \Big) \geq 0.$$

Let $v^\varepsilon = u^{1,\varepsilon} - u^{2,\varepsilon}$. We have

$$\begin{aligned} b(u^{1,\varepsilon}, u^{1,\varepsilon}, v^\varepsilon) - b(v^\varepsilon, u^{1,\varepsilon}, v^\varepsilon) &= b(u^{2,\varepsilon}, u^{1,\varepsilon}, v^\varepsilon) \\ &= b(u^{2,\varepsilon}, v^\varepsilon, v^\varepsilon) + b(u^{2,\varepsilon}, u^{2,\varepsilon}, v^\varepsilon) \\ &= b(u^{2,\varepsilon}, u^{2,\varepsilon}, v^\varepsilon,) \end{aligned}$$

from (3.2.6) $b(u^{2,\varepsilon}, v^\varepsilon, v^\varepsilon) = 0$, thus

$$2\mu a(v^\varepsilon, v^\varepsilon) + \varepsilon^\gamma b(v^\varepsilon, u^{1,\varepsilon}, v^\varepsilon) \leq 0. \tag{3.4.43}$$

Using Korn's inequality, we obtain

$$2\mu C_K \| \nabla v^\varepsilon \|_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^n} + \varepsilon^\gamma b(v^\varepsilon, u^{1,\varepsilon}, v^\varepsilon) \leq 0. \tag{3.4.44}$$

As

$$b(v^\varepsilon, u^{1,\varepsilon}, v^\varepsilon) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \int_{\Omega^\varepsilon} v_i^\varepsilon \frac{\partial u_j^{1,\varepsilon}}{\partial x_i} v_j^\varepsilon dx' dx_n =$$
$$= \varepsilon^{3\beta} \Big\{ \varepsilon \sum_{1 \leq i,j \leq n-1} \int_\Omega \hat{v}_i^\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_j^{1,\varepsilon}}{\partial x_i} \hat{v}_j^\varepsilon dx' dz + \varepsilon \sum_{1 \leq j \leq n-1} \int_\Omega \hat{v}_n^\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_j^{1,\varepsilon}}{\partial z} \hat{v}_j^\varepsilon dx' dz +$$
$$+\varepsilon^3 \sum_{1 \leq i \leq n-1} \int_\Omega \hat{v}_i^\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_n^{1,\varepsilon}}{\partial x_i} \hat{v}_n^\varepsilon dx' dz + \varepsilon^3 \int_\Omega (\hat{v}_n^\varepsilon)^2 \frac{\partial \hat{u}_n^{1,\varepsilon}}{\partial z} dx' dz \Big\}, \tag{3.4.45}$$

multiplying inequality (3.4.44) by $\varepsilon^{1-2\beta}$ and passing to the fixed domain, and taking into account that $\gamma+\beta=\frac{1}{2}$, we obtain

$$\begin{aligned}
&2\mu C_K\Big\{\sum_{i,j=1}^{n-1}\|\ \varepsilon\frac{\partial\hat{v_i^\varepsilon}}{\partial x_j}\ \|^2_{L^2(\Omega)}+\|\ \varepsilon\frac{\partial\hat{v_n^\varepsilon}}{\partial z}\ \|^2_{L^2(\Omega)}+\\
&+\sum_{i=1}^{n-1}\Big(\|\ \frac{\partial\hat{v_i^\varepsilon}}{\partial z}\ \|^2_{L^2(\Omega)}+\|\ \varepsilon^2\frac{\partial\hat{v_n^\varepsilon}}{\partial x_i}\ \|^2_{L^2(\Omega)}\Big)\Big\}+\\
&+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\Big\{\varepsilon^2\sum_{1\le i,j\le n-1}\int_\Omega\hat{v_i^\varepsilon}\frac{\partial\hat{u}_j^{1,\varepsilon}}{\partial x_i}\hat{v_j^\varepsilon}dx'dz+\varepsilon^2\sum_{1\le j\le n-1}\int_\Omega\hat{v_n^\varepsilon}\frac{\partial\hat{u}_j^{1,\varepsilon}}{\partial z}\hat{v_j^\varepsilon}dx'dz+\\
&+\varepsilon^4\sum_{1\le i\le n-1}\int_\Omega\hat{v_i^\varepsilon}\frac{\partial\hat{u}_n^{1,\varepsilon}}{\partial x_i}\hat{v_n^\varepsilon}dx'dz+\varepsilon^4\int_\Omega(\hat{v_n^\varepsilon})^2\frac{\partial\hat{u}_n^{1,\varepsilon}}{\partial z}dx'dz\Big\}\le 0.
\end{aligned}\tag{3.4.46}$$

Now we want to estimate all the terms which come from the trilinear form b. We have $\hat{v^\varepsilon}\in H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$, so we can apply lemma 3.4.1. Computation is very similar for all terms, for instance, for $n=2$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{\frac{5}{2}}\int_\Omega(\hat{v_1^\varepsilon})^2\frac{\partial\hat{u}_1^{1,\varepsilon}}{\partial x_1}dx'dz\le\\
&\le 2h_{max}\varepsilon^{\frac{5}{2}}\|\ \frac{\partial\hat{u}_1^{1,\varepsilon}}{\partial x_1}\ \|_{L^2(\Omega)}\|\ \frac{\partial\hat{v}_1^\varepsilon}{\partial x_1}\ \|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|\ \frac{\partial\hat{v}_1^\varepsilon}{\partial z}\ \|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\Omega)}\\
&\le\frac{3}{2}h_{max}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\ \varepsilon\frac{\partial\hat{u}_1^{1,\varepsilon}}{\partial x_1}\ \|_{L^2(\Omega)}\Big(\|\ \varepsilon\frac{\partial\hat{v}_1^\varepsilon}{\partial x_1}\ \|^2_{L^2(\Omega)}+\|\ \frac{\partial\hat{v}_1^\varepsilon}{\partial z}\ \|^2_{L^2(\Omega)}\Big)\\
&\le\frac{3}{2}h_{max}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\ \varepsilon\frac{\partial\hat{u}_1^{1,\varepsilon}}{\partial x_1}\ \|_{L^2(\Omega)}\Big\{\|\ \varepsilon\frac{\partial\hat{v}_1^\varepsilon}{\partial x_1}\ \|^2_{L^2(\Omega)}+\|\ \frac{\partial\hat{v}_1^\varepsilon}{\partial z}\ \|^2_{L^2(\Omega)}+\\
&+\|\ \varepsilon^2\frac{\partial\hat{v}_2^\varepsilon}{\partial x_1}\ \|^2_{L^2(\Omega)}+\|\ \varepsilon\frac{\partial\hat{v}_2^\varepsilon}{\partial z}\ \|^2_{L^2(\Omega)}\Big\}.
\end{aligned}$$

We add all the terms of b and using estimate (3.4.26), then we return to (3.4.46), we deduce

$$\begin{aligned}
&\Big(2\mu C_K-\frac{3}{2}h_{max}C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\Big)\Big\{\|\ \varepsilon\frac{\partial\hat{v}_1^\varepsilon}{\partial x_1}\ \|^2_{L^2(\Omega)}+\|\ \frac{\partial\hat{v}_1^\varepsilon}{\partial z}\ \|^2_{L^2(\Omega)}+\\
&+\|\ \varepsilon^2\frac{\partial\hat{v}_2^\varepsilon}{\partial x_1}\ \|^2_{L^2(\Omega)}+\|\ \varepsilon\frac{\partial\hat{v}_2^\varepsilon}{\partial z}\ \|^2_{L^2(\Omega)}\Big\}\le 0.
\end{aligned}\tag{3.4.47}$$

When $\varepsilon\le\varepsilon_{1,2}$ with $\varepsilon_{1,2}$ defined by

$$\varepsilon_{1,2}^{\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}\frac{\mu C_K}{Ch_{max}},$$

the first term in (3.4.47) is positive, thus $\hat{v^\varepsilon}=0$ in Ω, what implies that $v^\varepsilon=0$ in Ω^ε.

When $n = 3$, a similar computation leads to

$$\varepsilon^{\frac{5}{2}} \int_\Omega (\hat{v_n^\varepsilon})^2 \frac{\partial \hat{u}_1^{1,\varepsilon}}{\partial x_1} dx'dz \leq 16 h_{max}^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{5}{2}} \Big\{ \parallel \frac{\partial \hat{u}_1^{1,\varepsilon}}{\partial x_1} \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel \frac{\partial \hat{v}_1^\varepsilon}{\partial x_1} \parallel_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \cdot$$
$$\cdot \parallel \frac{\partial \hat{v}_1^\varepsilon}{\partial x_2} \parallel_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \parallel \frac{\partial \hat{v}_1^\varepsilon}{\partial z} \parallel_{L^2(\Omega)} \Big\}$$
$$\leq 8 h_{max}^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \parallel \frac{\partial \hat{u}_1^{1,\varepsilon}}{\partial x_1} \parallel_{L^2(\Omega)} \Big\{ \parallel \varepsilon \frac{\partial \hat{v}_1^\varepsilon}{\partial x_1} \parallel_{L^2(\Omega)}^2 +$$
$$+ \parallel \varepsilon \frac{\partial \hat{v}_1^\varepsilon}{\partial x_2} \parallel_{L^2(\Omega)}^2 + \parallel \frac{\partial \hat{v}_1^\varepsilon}{\partial z} \parallel_{L^2(\Omega)}^2 \Big\}$$
$$\leq 8 h_{max}^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \parallel \frac{\partial \hat{u}_1^{1,\varepsilon}}{\partial x_1} \parallel_{L^2(\Omega)} \Big\{ \sum_{i,j=1}^{2} \parallel \varepsilon \frac{\partial \hat{v_i^\varepsilon}}{\partial x_j} \parallel_{L^2(\Omega)}^2 + \parallel \varepsilon \frac{\partial \hat{v_3^\varepsilon}}{\partial z} \parallel_{L^2(\Omega)}^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \Big(\parallel \frac{\partial \hat{v_i^\varepsilon}}{\partial z} \parallel_{L^2(\Omega)}^2 + \parallel \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{v_3^\varepsilon}}{\partial x_i} \parallel_{L^2(\Omega)}^2 \Big) \Big\}. \tag{3.4.48}$$

Then we obtain in the same way

$$\big(2\mu C_K - 8 h_{max}\big) C \varepsilon^{\frac{1}{2}} \Big) \Big\{ \sum_{i,j=1}^{2} \parallel \varepsilon \frac{\partial \hat{v_i^\varepsilon}}{\partial x_j} \parallel_{L^2(\Omega)}^2 + \parallel \varepsilon \frac{\partial \hat{v_3^\varepsilon}}{\partial z} \parallel_{L^2(\Omega)}^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \Big(\parallel \frac{\partial \hat{v_i^\varepsilon}}{\partial z} \parallel_{L^2(\Omega)}^2 + \parallel \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{v_3^\varepsilon}}{\partial x_i} \parallel_{L^2(\Omega)}^2 \Big) \Big\} \leq 0. \tag{3.4.49}$$

The first term in (3.4.49) is positive when $\varepsilon \leq \varepsilon_{1,3}$, where

$$\varepsilon_{1,3}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \frac{\mu C_K}{C h_{max}}.$$

For $\varepsilon \leq \varepsilon_1' = \min\{\varepsilon_1 \ , \ \varepsilon_{1,3}\}$, the proof of uniqueness of $\hat{u^\varepsilon}$ is complete. $\square$

3.5 Limit problem

We multiply variational inequality (3.3.3) by $\varepsilon^{1-2\beta}$, and passing to the fixed domain Ω, we obtain

$$\sum_{i,j=1}^{n-1}\int_\Omega \Big[\varepsilon^2\mu\Big(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}\Big)-\hat{p}^\varepsilon\delta_{i,j}\Big]\frac{\partial}{\partial x_j}(\hat{\phi}_i-\hat{u}_i^\varepsilon)dx'dz+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\int_\Omega \mu\Big(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_n^\varepsilon}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_i-\hat{u}_i^\varepsilon)dx'dz+$$

$$+\int_\Omega (2\mu\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_n^\varepsilon}{\partial z}-\hat{p}^\varepsilon)\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_n-\hat{u}_n^\varepsilon)dx'dz+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\int_\Omega \varepsilon^2\mu(\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_n^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z})\frac{\partial}{\partial x_j}(\hat{\phi}_n-\hat{u}_n^\varepsilon)dx'dz+$$

$$+\varepsilon^{\frac{5}{2}}\sum_{i,j=1}^{n-1}\int_\Omega \hat{u}_i^\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}(\hat{\phi}_j-\hat{u}_j^\varepsilon)dx'dz+\varepsilon^{\frac{9}{2}}\sum_{i=1}^{n-1}\int_\Omega \hat{u}_i^\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_n^\varepsilon}{\partial x_i}(\hat{\phi}_n-\hat{u}_n^\varepsilon)dx'dz+$$

$$+\varepsilon^{\frac{5}{2}}\sum_{j=1}^{n-1}\int_\Omega \hat{u}_n^\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z}(\hat{\phi}_j-\hat{u}_j^\varepsilon)dx'dz+\varepsilon^{\frac{9}{2}}\int_\Omega \hat{u}_n^\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_n^\varepsilon}{\partial z}(\hat{\phi}_n-\hat{u}_n)dx'dz\geq$$

$$\geq\sum_{i=1}^{n-1}\int_\Omega \hat{f}_i(\hat{\phi}_i-\hat{u}_i^\varepsilon)dx'dz+\int_\Omega \varepsilon\hat{f}_n(\hat{\phi}_n-\hat{u}_n^\varepsilon)dx'dz+$$

$$+\int_\omega \hat{k}\Big(\mid\hat{\phi}-s\mid-\mid\hat{u}^\varepsilon-s\mid\Big)d\sigma \tag{3.5.1}$$

Let now

$$V_z=\{v\in(L^2(\Omega))^{n-1}:\ \text{such that}\ \frac{\partial v_i}{\partial z}\in L^2(\Omega),\ \ i=1,..,n-1\ \ \text{and}\ \ v=0\ \text{on}\ \Gamma_1\}$$

be the Banach space with the norm

$$\parallel v\parallel_{V_z}=\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\parallel v_i\parallel^2_{L^2(\Omega)}+\parallel\frac{\partial v_i}{\partial z}\parallel^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Following [4], we say that $v=(v_1,..,v_{n-1})\in(L^2(\Omega))^{n-1}$ satisfies the condition (D') if,

$$\int_\Omega\sum_{i=1}^{n-1}v_i\frac{\partial\theta}{\partial x_i}dx'dz=0.\quad\forall\theta\in\mathcal{C}_0^\infty(\omega)$$

Let

$$\tilde{V_z}=\{v\in V_z:\ \ \text{such that}\ v\ \text{satisfies the condition}\ (D')\}$$

be a subspace of V_z.
And

$$\Pi(V)=\{\bar{\phi}\in(H^1(\Omega))^{n-1}:\ \ \bar{\phi}=(\hat{\phi}_1,..,\hat{\phi}_{n-1})\quad\hat{\phi}_i=\hat{G}_i\ \text{on}\ \Gamma_1\cup\Gamma_L\}.$$

Theorem 3.5.1. *Under the same assumptions as in theorem 3.4.3, for any solution* $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$*, after extraction of a subsequence, there exist* $u^\star = (u_1^\star, .., u_{n-1}^\star) \in \tilde{V}_z$ *and* $p^\star \in L_0^2(\Omega)$ *such that*

$$\hat{u_i^\varepsilon} \rightharpoonup u_i^\star \quad (1 \leq i \leq n-1) \quad \textit{weakly} \quad \textit{in } V_z, \tag{3.5.2}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j} \rightharpoonup 0 \quad (1 \leq i, j \leq n-1) \quad \textit{weakly} \quad \textit{in } L^2(\Omega), \tag{3.5.3}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u_n^\varepsilon}}{\partial z} \rightharpoonup 0 \quad \textit{weakly} \quad \textit{in} \quad L^2(\Omega), \tag{3.5.4}$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_n^\varepsilon}}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \quad \textit{weakly} \quad \textit{in} \quad L^2(\Omega), \tag{3.5.5}$$

$$\varepsilon \hat{u_n^\varepsilon} \rightharpoonup 0 \quad \textit{weakly in} \quad L^2(\Omega), \tag{3.5.6}$$

$$\hat{p^\varepsilon} \rightharpoonup p^\star \quad \textit{weakly in } L_0^2(\Omega). \tag{3.5.7}$$

Proof. From (3.4.26) there exists a fixed constant $C > 0$ which does not depend on ε such that

$$\| \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} \|_{L^2(\Omega)} \leq C \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

using this estimate and Poincaré's inequality in the domain Ω, we deduce (3.5.2).
We have $\operatorname{div}(\hat{u^\varepsilon}) = 0$ in Ω, we obtain for $q \in \mathcal{C}_0^\infty(\omega)$:

$$\int_\Omega q(x') \Big(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{u_n^\varepsilon}}{\partial z} \Big) dx'dz = \int_\Omega q(x') \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_i} dx'dz = 0.$$

As $\hat{u_i^\varepsilon} \rightharpoonup u_i^\star$ $i = 1, .., n-1$, thus $u^\star$ satisfies condition (D') :

$$\int_\Omega q(x') \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial u_i^\star}{\partial x_i} dx'dz = 0 \quad \forall q \in \mathcal{C}_0^\infty(\omega).$$

Also (3.5.3)-(3.5.5) follows from (3.4.26). We prove (3.5.6)-(3.5.7) as in theorem 4.2 [5].
□

Theorem 3.5.2. *Under the same assumptions as in the theorem 3.4.3,* $(u^\star, p^\star)$ *satisfy*

$$p^\star \in H^1(\omega), \tag{3.5.8}$$

$$-\mu \frac{\partial^2 u_i^\star}{\partial z^2} + \frac{\partial p^\star}{\partial x_i} = \hat{f}_i \text{ for } \quad (i = 1, .., n-1) \text{ in } L^2(\Omega). \tag{3.5.9}$$

Proof. Choosing in (3.5.1) $\hat{\phi}_i = \hat{u_i^\varepsilon}$ for $i = 1, .., n-1$, $\hat{\phi}_n = \hat{u_n^\varepsilon} \pm \psi$ with ψ in $H_0^1(\Omega)$, we deduce

$$\sum_{j=1}^{n-1} \int_\Omega \varepsilon^2 \mu (\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_n^\varepsilon}}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u_j^\varepsilon}}{\partial z}) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx' dz + \int_\Omega \Big(2\mu \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_n^\varepsilon}}{\partial z} - \hat{p^\varepsilon} \Big) \frac{\partial \psi}{\partial z} dx' dz +$$
$$+ \varepsilon^{\frac{9}{2}} \sum_{i=1}^{n-1} \int_\Omega \hat{u_i^\varepsilon} \frac{\partial \hat{u_n^\varepsilon}}{\partial x_i} \psi dx' dz + \varepsilon^{\frac{9}{2}} \int_\Omega \hat{u_n^\varepsilon} \frac{\partial \hat{u_n^\varepsilon}}{\partial z} \psi dx' dz = \int_\Omega \varepsilon \hat{f}_n \psi dx' dz,$$

Using the results of convergence (3.5.2)-(3.5.7), we obtain

$$\int_\Omega p^\star \frac{\partial \psi}{\partial z} dx' dz = 0, \ \ \forall \psi \in H_0^1(\Omega), \tag{3.5.10}$$

then

$$\frac{\partial p^\star}{\partial z} = 0 \ \text{ in } \ H^{-1}(\Omega). \tag{3.5.11}$$

Choosing now $\phi_i = \hat{u_i^\varepsilon} \pm \psi_i$ (for $i = 1, .., n-1$) with ψ_i in $H_0^1(\Omega)$ and $\phi_n = \hat{u_n^\varepsilon}$, in (3.5.1), we obtain

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} \int_\Omega \Big[\varepsilon^2 \mu \Big(\frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u_j^\varepsilon}}{\partial x_i} \Big) - \hat{p^\varepsilon} \delta_{i,j} \Big] \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \ dx' dz +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \int_\Omega \mu \Big(\frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_n^\varepsilon}}{\partial x_i} \Big) \frac{\partial \psi_i}{\partial z} dx' dz + \varepsilon^{\frac{5}{2}} \sum_{i,j=1}^{n-1} \int_\Omega \hat{u_i^\varepsilon} \frac{\partial \hat{u_j^\varepsilon}}{\partial x_i} \psi_j dx' dz +$$
$$+ \varepsilon^{\frac{5}{2}} \sum_{j=1}^{n-1} \int_\Omega \hat{u_n^\varepsilon} \frac{\partial \hat{u_j^\varepsilon}}{\partial z} \psi_j dx' dz = \sum_{i=1}^{n-1} \int_\Omega \hat{f}_i \psi_i dx' dz. \tag{3.5.12}$$

Using (3.5.2)-(3.5.7), and choosing $\psi_1 \in H_0^1(\Omega)$ when $n = 2$, and $\psi_1 = 0$ and $\psi_2 \in H_0^1(\Omega)$ then $\psi_1 \in H_0^1(\Omega)$ and $\psi_2 = 0$ when $n = 3$, then we obtain the following equality :

$$- \sum_{i=1}^{n-1} \int_\Omega p^\star \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} dx' dz + \sum_{i=1}^{n-1} \int_\Omega \frac{\partial u_i^\star}{\partial z} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} = \sum_{i=1}^{n-1} \int_\Omega \hat{f}_i \psi_i dx' dz, \tag{3.5.13}$$

using the Green formula, we obtain

$$-\mu \frac{\partial^2 u_i^\star}{\partial z^2} + \frac{\partial p^\star}{\partial x_i} = \hat{f}_i \ \text{ for } \ (i = 1, .., n-1) \ \text{ in } \ H^{-1}(\Omega). \tag{3.5.14}$$

To prove that $p^\star$ is in $H^1(\omega)$, let us recall that $p^\star$ does not depend on z from (3.5.11), then following [4] we choose ψ_i in (3.5.13) such that $\psi_i(x', z) = z(z - h(x'))\theta(x')$ with θ in $H_0^1(\omega)$, and using the Green formula we deduce

$$\frac{1}{6} \int_\omega p^\star \frac{\partial (h^3 \theta)}{\partial x_i} dx' - 2\mu \int_\omega h \tilde{u_i^\star} \theta dx' = \int_\omega \tilde{f}_i \theta dx',$$

where

$$\tilde{u_i^\star} = \frac{1}{h(x')}\int_0^{h(x')} u_i^\star(x',z)dz \ \text{ and } \ \tilde{f}_i = \int_0^{h(x')} z(z-h(x'))\hat{f}_i(x',z)dz.$$

Whence

$$2\mu h\tilde{u_i^\star} - \frac{1}{6}h^3\frac{\partial p^\star}{\partial x_i} = \tilde{f}_i \ \ (i=1,..,n-1) \ \text{ in } \ H^{-1}(\omega). \tag{3.5.15}$$

As $\hat{f}_i$ is in $L^2(\Omega)$, $u_i^\star$ in V_z, in particular in $L^2(\omega)$, therefore $\tilde{u_i^\star}$ and $\tilde{f}_i$ are in $L^2(\omega)$. Then from (3.5.15) we get (3.5.8) follows. As $\hat{f}_i$ in $L^2(\omega)$, from (3.5.15) we have $\dfrac{\partial^2 u_i^\star}{\partial z^2}$ in $L^2(\Omega)$, whence (3.5.9) holds.

Remark 3.5.1. *All the terms of the trilinear form b disappear when ε tends to zero, because of the great power of ε in (3.5.1) ($\frac{5}{2}$ and $\frac{9}{2}$).*

Now we define the traces $(s^\star, \tau^\star)$ by :

$$s^\star = u^\star(x',0) \ \ ; \ \ \tau^\star = \frac{\partial u^\star}{\partial z}(x',0).$$

Theorem 3.5.3. *Under the same assumptions as in theorem 3.4.3, $(u^\star, p^\star)$ satisfy the following limit inequality*

$$\sum_{i=1}^{n-1}\int_\Omega \mu\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\frac{\partial(\hat{\phi}_i - u_i^\star)}{\partial z}dx'dz - \sum_{i=1}^{n-1}\int_\Omega p^\star\frac{\partial(\hat{\phi}_i - u_i^\star)}{\partial x_i}dx'dz +$$

$$+\int_\omega \hat{k}(\mid \hat{\phi} - s\mid - \mid u^\star - s\mid)d\sigma \geq \sum_{i=1}^{n-1}\int_\Omega \hat{f}_i(\hat{\phi}_i - u_i^\star)dx'dz. \quad \forall\hat{\phi}\in\Pi(V) \tag{3.5.16}$$

Also $(s^\star, \tau^\star)$ satisfy the following inequality

$$\int_\omega \hat{k}(\mid \psi + s^\star - s\mid - \mid s^\star - s\mid)d\sigma - \int_\omega \mu\tau^\star\psi d\sigma \geq 0, \ \ \forall\psi\in(L^2(\omega))^{n-1}, \tag{3.5.17}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mu\mid\tau^\star\mid < \hat{k} \ \Rightarrow \ s^\star = s \\ \mu\mid\tau^\star\mid = \hat{k} \ \Rightarrow \ \exists\,\lambda\geq 0 \ \text{ such that } \ s^\star = s + \lambda\tau^\star \end{array}\right\} \ \text{a.e on } \omega. \tag{3.5.18}$$

Proof. Using theorem 3.5.2 we can pass to the limit in (3.5.1), then using (3.5.8) to obtain (3.5.16).

Choosing $\hat{\phi}$ such that $\hat{\phi}_i = \hat{u_i^\varepsilon} + \psi_i$ (for $i = 1, .., n-1$) and $\psi_i \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}$ in (3.5.1) and $\hat{\phi}_n = \hat{u_n^\varepsilon}$, where $H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L} = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_L\}$. We obtain

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} \int_\Omega \Big[\varepsilon^2 \mu \Big(\frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u_j^\varepsilon}}{\partial x_i}\Big) - \hat{p^\varepsilon} \delta_{i,j}\Big] \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\ dx'dz +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \int_\Omega \mu \Big(\frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_n^\varepsilon}}{\partial x_i}\Big) \frac{\partial}{\partial z} \psi_i dx'dz +$$
$$+ \varepsilon^{\frac{5}{2}} \sum_{i,j=1}^{n-1} \int_\Omega \hat{u_i^\varepsilon} \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j} \psi_j dx'dz + \varepsilon^{\frac{9}{2}} \sum_{j=1}^{n-1} \int_\Omega \hat{u_n^\varepsilon} \frac{\partial \hat{u_n^\varepsilon}}{\partial x_j} \psi_j dx'dz +$$
$$+ \int_\omega \hat{k}(\mid \psi + \hat{u^\varepsilon} - s \mid - \mid \hat{u^\varepsilon} - s \mid) d\sigma \geq \sum_{i=1}^{n-1} \int_\Omega \hat{f}_i \psi_i dx'dz. \tag{3.5.19}$$

Using theorem 3.5.1, we can pass to the limit in (3.5.19), we obtain

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_\Omega -p^\star \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} dx'dz + \sum_{i=1}^{n-1} \int_\Omega \mu \frac{\partial u_i^\star}{\partial z} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} dx'dz + \int_\omega \hat{k}(\mid \psi + s^\star - s \mid - \mid s^\star - s \mid) d\sigma$$
$$\geq \sum_{i=1}^{n-1} \int_\Omega \hat{f}_i \psi_i dx'dz. \tag{3.5.20}$$

using now the Green formula, equation (3.5.9), and the fact that $\psi_i = 0$ on $\Gamma_1 \cup \Gamma_L$ and $cos(n, x_i') = 0$ on ω, we deduce

$$\int_\omega \hat{k}(\mid \psi + s^\star - s \mid - \mid s^\star - s \mid) d\sigma - \int_\omega \mu \tau^\star \psi d\sigma \geq 0, \quad \forall \psi \in (H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L})^{n-1}. \tag{3.5.21}$$

This inequality remains valid for any $\psi \in (D(\omega))^{n-1}$, and by density of $D(\omega)$ in $L^2(\omega)$, it remains also valid for any $\psi \in (L^2(\omega))^{n-1}$. Whence (3.5.17) follows.

To prove (3.5.18), we take $\psi = \pm(s^\star - s)$, in (3.5.17), and we obtain

$$\int_\omega (\hat{k} \mid s^\star - s \mid - \mu \tau^\star (s^\star - s)) d\sigma = 0, \tag{3.5.22}$$

we take $\psi = \varphi - (s^\star - s)$ with $\varphi \in (L^2(\omega))^{n-1}$, in (3.5.17), we get

$$\int_\omega (\hat{k} \mid \varphi \mid - \mu \tau^\star \varphi) d\sigma \geq \int_\omega (\hat{k} \mid s^\star - s \mid - \mu \tau^\star (s^\star - s)) d\sigma. \tag{3.5.23}$$

from equality (3.5.22), we deduce

$$\int_\omega (\hat{k} \mid \varphi \mid - \mu \tau^\star \varphi) d\sigma \geq 0, \quad \forall \varphi \in (L^2(\omega))^{n-1}, \tag{3.5.24}$$

taking first $\varphi = (\varphi_1, .., \varphi_{n-1})$ such that $\varphi_i \geq 0, \;\; i = 1, .., n-1$, in (3.5.24), we obtain

$$\int_\omega (\hat{k} \mid \varphi \mid -\mu \mid \tau^\star \mid cos(\tau^\star, \varphi)) \mid \varphi \mid d\sigma =$$

$$= \int_\omega (\hat{k} - \mu \mid \tau^\star \mid cos(\tau^\star, \varphi)) \mid \varphi \mid \geq 0, \tag{3.5.25}$$

then

$$\mu \mid \tau^\star \mid cos(\tau^\star, \varphi) \leq \hat{k} \;\text{ a.e on }\; \omega. \tag{3.5.26}$$

taking now $-\varphi$, with $\varphi_i \geq 0$ for $i = 1, .., n-1$, and (3.5.24), we obtain

$$\int_\omega (\hat{k} \mid \varphi \mid +\mu \mid \tau^\star \mid cos(\tau^\star, \varphi) \mid \varphi \mid) d\sigma = \int_\omega (\hat{k} + \mu \mid \tau^\star \mid cos(\tau^\star, \varphi)) \mid \varphi \mid \geq 0,$$

whence

$$\mu \mid \tau^\star \mid cos(\tau^\star, \varphi) \leq -\hat{k} \;\text{ a.e on }\; \omega. \tag{3.5.27}$$

From (3.5.26)-(3.5.27) we obtain

$$\mu \mid \tau^\star \mid \leq \hat{k} \;\text{ a.e on }\; \omega, \tag{3.5.28}$$

then

$$\hat{k} \mid s^\star - s \mid \geq \mu \mid \tau^\star \mid . \mid s^\star - s \mid \geq \mu\tau^\star.(s^\star - s) \;\text{ a.e on }\; \omega,$$
$$\hat{k} \mid s^\star - s \mid -\mu\tau^\star.(s^\star - s) \geq 0 \;\text{ a.e on }\; \omega,$$

from (3.5.22) we deduce

$$\hat{k} \mid s^\star - s \mid -\mu\tau^\star.(s^\star - s) = 0. \tag{3.5.29}$$

If $\mu \mid \tau^\star \mid = \hat{k}$, then from (3.5.29) we have

$$\mu \mid \tau^\star \mid . \mid s^\star - s \mid = \mu\tau^\star.(s^\star - s) = 0 \text{ a.e on }\; \omega,$$

then $cos(s^\star - s, \mu\tau^\star) = 1$, which implies existence of $\lambda \geq 0$ such that $s^\star - s = \lambda\mu\tau^\star$.

If $\mu \mid \tau^\star \mid < \hat{k}$, from (3.5.29) we have

$$\hat{k} \mid s^\star - s \mid -\mu\tau^\star.(s^\star - s) = 0 \geq (\hat{k} - \mid \mu\tau^\star \mid) \mid s^\star - s \mid \text{ a.e on } \omega,$$

whence $s^\star - s = 0$ a.e on ω, then (3.5.18) follows. $\square$

Theorem 3.5.4. *The pair* $(u^\star, p^\star)$ *in theorem 3.5.1 satisfies the following weak form of the Reynolds equation*

$$\int_\omega \Big(\frac{h^3}{12\mu}\nabla p^\star - \frac{h}{2}s^\star + \tilde{F}\Big)\nabla\phi dx' = -\int_{\partial\omega} \phi h\tilde{\hat{G}}.n \;\; \forall\phi \in H^1(\omega), \tag{3.5.30}$$

where $\tilde{F}(x') = (\tilde{F}_1(x'), \tilde{F}_2(x'))$ *with*

$$\tilde{F}_i(x') = \frac{1}{\mu}\int_0^{h(x')} F_i(x', z)dz - \frac{h}{2\mu}F_i(x', h(x'))$$

$$F_i(x', z) = \int_0^z \int_0^\eta \hat{f}_i(x', t)dtd\eta \;\; ; \;\; \tilde{\hat{G}} = \frac{1}{h(x')}\int_0^{h(x')} \hat{G}(x', z)dz.$$

Proof. Integrate twice (3.5.9) between 0 and z, we obtain

$$\mu u^\star(x', z) = \frac{z^2}{2}\nabla p^\star(x') + \mu s^\star(x') + \mu z\tau^\star(x') - F(x', z), \tag{3.5.31}$$

As $u^\star(x', h(x')) = 0$, in particular

$$\frac{h^2}{2}\nabla p^\star(x') + \mu s^\star(x') + \mu h(x')\tau^\star(x') - F(x', h(x')) = 0. \tag{3.5.32}$$

Integrate equation (3.5.31) with respect to z, in the interval $(0, h(x'))$, we obtain

$$h\mu\tilde{u^\star}(x') = \frac{h^3}{6}\nabla p^\star(x') + \mu h s^\star(x') + \mu\frac{h^2}{2}\tau^\star(x') - h\tilde{F}(x'), \tag{3.5.33}$$

where for any function ψ, we set

$$\tilde{\psi}(x') = \frac{1}{h(x')}\int_0^{h(x')} \psi(x', z)dz, \;\; \forall x' \in \omega.$$

In the other hand, for all $\phi \in H^1(\omega)$, we have

$$\int_\Omega \phi \operatorname{div}(\hat{u^\varepsilon})dx'dz = 0 = \int_\omega \phi(x')\int_0^{h(x')} \Big(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_i} + \frac{\partial\hat{u_n^\varepsilon}}{\partial z}\Big)dx'dz$$

$$= \int_\omega \phi(x')\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial(h\tilde{\hat{u_i^\varepsilon}})}{\partial x_i} + \hat{u_n^\varepsilon}(x', h(x')) - \hat{u_n^\varepsilon}(x', 0)\Big)dx'$$

as $\hat{u_n^\varepsilon}(x', 0) = 0$ on $\partial\Omega = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_L$, we obtain

$$\int_\omega \phi(x')\int_0^{h(x')}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial(h\tilde{\hat{u_i^\varepsilon}})}{\partial x_i}dx' = 0.$$

Using Green formula, we get

$$\sum_{i=1}^{n-1}\int_{\omega} h\tilde{\hat{u}}_i^{\varepsilon}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}dx' = \sum_{i=1}^{n-1}\int_{\partial\omega} h\tilde{\hat{u}}_i^{\varepsilon}\phi.cos(n,x_i') = \sum_{i=1}^{n-1}\int_{\partial\omega} h\tilde{\hat{G}}_i\phi.cos(n,x_i').$$

As $\hat{u_i^{\varepsilon}} \rightharpoonup u_i^{\star}$ in V_z consequently in $L^2(\omega)$, therefore $\tilde{\hat{u_i^{\varepsilon}}} \rightharpoonup u_i^{\star}$ in $L^2(\omega)$, and as $\partial\omega \in \partial\Omega$, we deduce

$$\sum_{i=1}^{n-1}\int_{\omega} h\tilde{u_i^{\star}}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}dx' = \sum_{i=1}^{n-1}\int_{\partial\omega} \phi h\tilde{\hat{G}}_i.cos(n,x_i') \;\; \forall \phi \in H^1(\omega). \tag{3.5.34}$$

Now, multiplying (3.5.33) by $\nabla\phi$, then integrate it in ω, using (3.5.34), we obtain

$$\int_{\omega}\Big(\frac{h^3}{6\mu}\nabla p^{\star} + hs^{\star} + \frac{h^2}{2}\tau^{\star} - \frac{h}{\mu}\tilde{F}\Big)\nabla\phi dx' = \int_{\partial\omega}\phi h\tilde{\hat{G}}.n. \tag{3.5.35}$$

Using (3.5.32) to eliminate the term containing $\tau^{\star}$ from (3.5.35), the weak form of the Reynolds (3.5.30) follows. □

Theorem 3.5.5. *Under the same hypothesis of theorem 3.4.3, there exists a unique solution* $(u^{\star}, p^{\star})$ *in* $\tilde{V_z} \times \big(L_0^2(\omega) \cap H^1(\omega)\big)$ *of inequality (3.5.16).*

Proof. Let (U^1, p^1), (U^2, p^2) two solutions of (3.5.16). Taking $\hat{\phi} = U^2$ and $\hat{\phi} = U^1$ respectively, as test function in (3.5.16). Using lemma 5.1 [5], we get

$$\mu\int_{\Omega} \mid \frac{\partial(U^1 - U^2)}{\partial z} \mid^2 dx'dz \leq 0. \tag{3.5.36}$$

Using Poincaré's inequality, we deduce

$$\parallel U^1 - U^2 \parallel_{V_z} = 0. \tag{3.5.37}$$

The uniqueness of $p^{\star}$ in $L_0^2(\omega) \cap H^1(\omega)$ follows then from (3.5.30). Indeed from (3.5.37) $s^{\star}$ is unique in (3.5.30), then we get

$$\int_{\omega}\frac{h^3}{12\mu}\nabla(p^1 - p^2)\nabla\phi dx' = 0,$$

taking $\phi = p^1 - p^2$, and by Poincaré's inequality we deduce $\parallel p^1 - p^2 \parallel_{L^2(\omega)} = 0$. □

Bibliographie

[1] A. Assemien, G. Bayada, M. Chambat, *Inertial effects in the asymptotic behavior of a thin film flow.* Asymptotic Analysis 9 (1994) 177-208 North-Holland.

[2] R. Pit, H. Hervet, L. Léger, 2001, *Direct experimental evidences for flow with slip at hexadecane solid interfaces. La revue de Métallurgie-CIT/Science.*

[3] G. Bayada, M. Boukrouche, *On a free boundary problem for Reynolds equation derived from the Stokes system with Tresca boundary conditions.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 2003, 282, 212-231.

[4] M. Boukrouche, G. Łukaszewicz, *Asymptotic analysis of solutions of a thin film lubrication problem with nonlinear boundary conditions.* International Journal of Engineering Science 2003 ; 41, 521-537.

[5] M. Boukrouche, R. El Mir, *Asymptotic analysis of a non-Newtonian fluid in a thin domain with Tresca law.* Nonlinear Analysis, Theory methods and Applications, 59 (2004), 85-105.

[6] G. Duvaut, 1980, *Équilibre d'un Solide Élastique avec Contact Unilatéral et Frottement de Coulomb. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* 290, pp. 263–265.

[7] G. Duvaut, J.L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique des Fluides*, Dunod, 1969.

[8] V.Girault, P.A Raviart, *Finite Element Approximation of the Navier Stokes Equations*, Springer-Verlag, 1979.

Chapitre 4

Comportement asymptotique d'un fluide de Bingham dans un film mince avec des conditions non-linéaires sur le bord

4.1 Introduction

Un fluide de Bingham est un milieu visco-plastique, vérifiant les lois générales de la mécanique des milieux continus et ayant une loi de comportement non-linéaire particulière. Un exemple courant de fluides de Bingham est la pâte dentifrice, celle-ci ne peut sortir du tube sous l'effet de son propre poids, il faut lui appliquer une contrainte suffisante pour qu'elle s'écoule. Ce fluide rentre dans la catégorie des fluides non-Newtoniens et a une loi de comportement

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \breve{g}\frac{d_{ij}}{(D_{II})^{1/2}} + 2\mu d_{ij}, \tag{4.1.1}$$

où

$$D_{II} = \frac{1}{2}d_{ij}d_{ij}, \tag{4.1.2}$$

et les scalaires positifs $\breve{g}$ et μ sont respectivement le seuil de plasticité et la viscosité. L'expression (4.1.1) n'a de sens que si $D_{II} \neq 0$.

Si $D_{II} = 0$, alors le tenseur des contraintes est indéterminé, ce qui revient à dire que le déviateur des contraintes σ^D est indéterminé car

$$\sigma = -p\ I + \sigma^D. \tag{4.1.3}$$

Nous résumons les lois de comportement du fluide de Bingham par (voir [5] pages 276-279) :

$$\begin{cases} \sigma_{II}^{1/2} < \breve{g} \Leftrightarrow d_{ij} = 0 \\ \sigma_{II}^{1/2} \geq \breve{g} \Leftrightarrow d_{ij} = \frac{1}{2\mu}(1 - \frac{\breve{g}}{\sigma_{II}^{1/2}})\sigma_{ij}^{D}. \end{cases} \tag{4.1.4}$$

où

$$\sigma_{II} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}^{D}\sigma_{ij}^{D}. \tag{4.1.5}$$

Les travaux qui traitent l'étude théorique et numérique d'un fluide de Bingham abondent dans la littérature par exemple [4, 5, 7, 8, 9]. L'inégalité variationnelle donnant l'existence et l'unicité de la vitesse et la pression a été formulé par Duvaut et Lions [5]. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude asymptotique d'un fluide de Bingham dans un film mince, avec des conditions non-linéaires sur le bord. Dans [2] R. Bunoui et S. Kesavan ont étudié un problème semblable, mais avec seulement des conditions au bord de Dirichlet.

4.2 Position du problème

Nous considérons le domaine mince Ω^ε comme dans le premier chapitre. Nous supposons ici que la fonction h est telle que :

$$h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}). \tag{4.2.1}$$

Nous considérons la loi de comportement (4.1.1) sous la forme

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = -p^\varepsilon \delta_{ij} + \varepsilon^{-1}\breve{g}\frac{d_{ij}(u^\varepsilon)}{(D_{II}(u^\varepsilon))^{1/2}} + 2\mu d_{ij}(u^\varepsilon), \tag{4.2.2}$$

et

$$\begin{cases} (\sigma_{II}^\varepsilon)^{1/2} < \breve{g}\varepsilon^{-1} \Leftrightarrow d_{ij}(u^\varepsilon) = 0 \\ (\sigma_{II}^\varepsilon)^{1/2} \geq \breve{g}\varepsilon^{-1} \Leftrightarrow d_{ij}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2\mu}(1 - \frac{\breve{g}\varepsilon^{-1}}{(\sigma_{II}^\varepsilon)^{1/2}})\sigma_{ij}^{D,\varepsilon}. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Pour des forces extérieures $f^\varepsilon = (f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon, f_3^\varepsilon)$, l'écoulement du fluide est gouverné par l'équation de la conservation de la quantité de mouvement en négligeant le terme d'inertie :

$$-\mathrm{div}(\sigma^\varepsilon) = f^\varepsilon. \tag{4.2.4}$$

Nous supposons aussi que le fluide est incompressible

$$\mathrm{div}(u^\varepsilon) = 0. \tag{4.2.5}$$

Nous supposons les mêmes conditions aux limites sur la vitesse qu'au premier chapitre, sauf sur la frontière de haut Γ_1^ε où nous supposons que :

$$\sigma_T^\varepsilon(u^\varepsilon) + l^\varepsilon u^\varepsilon = 0, \ \text{ sur } \ \Gamma_1^\varepsilon, \tag{4.2.6}$$

$$u^\varepsilon.n = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_1^\varepsilon, \tag{4.2.7}$$

avec $l^\varepsilon > 0$ donnée.

4.3 Problème variationnel

On considère l'espace de Sobolev $H^1(\Omega^\varepsilon)$. On note $\| \ . \ \|_{1,\Omega^\varepsilon}$ sa norme, $\| \ . \ \|_{0,\Omega^\varepsilon}$ la norme de $L^2(\Omega^\varepsilon)$, et $H^{-1}(\Omega^\varepsilon)$ le dual topologique de $H_0^1(\Omega^\varepsilon)$.

On définit les ensembles suivants :

$$K^\varepsilon = \{\phi \in (H^1(\Omega^\varepsilon))^3 : \ \phi = G^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon, \ \phi.n = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \omega\},$$

$$K_{div}^\varepsilon = \{\phi \in K^\varepsilon : \ \text{div}(\phi) = 0\},$$

$$L_0^2(\Omega^\varepsilon) = \{q \in L^2(\Omega^\varepsilon) : \ \int_{\Omega^\varepsilon} q dx = 0\},$$

où G^ε est tel que

$$G^\varepsilon \in (H^1(\Omega^\varepsilon))^3 \text{ avec } \text{div}(G^\varepsilon) = 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \ G^\varepsilon = g \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon, \ G^\varepsilon.n = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \omega. \tag{4.3.1}$$

Proposition 4.3.1. *La formulation variationnelle du problème s'écrit*

$$\text{Trouver } \ u^\varepsilon \in K_{div}^\varepsilon, \ \ p^\varepsilon \in L_0^{r'}(\Omega^\varepsilon) \ \text{ tels que}$$

$$\begin{aligned} a(u^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) - (p^\varepsilon, \text{div}\phi) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon(\phi - u^\varepsilon) d\tau + \\ + j(\phi) - j(u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon), \quad \forall \phi \in K^\varepsilon \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

où

$$a(u^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) = 2\mu \int_{\Omega^\varepsilon} d_{ij}(u^\varepsilon) d_{ij}(\phi - u^\varepsilon) dx, \tag{4.3.3}$$

$$(p^\varepsilon, \text{div } \phi) = \int_{\Omega^\varepsilon} p^\varepsilon \text{ div } \phi \ dx, \tag{4.3.4}$$

$$j(\phi) = \int_\omega k^\varepsilon \mid \phi - s \mid dx' + \sqrt{2}\breve{g}\varepsilon^{-1} \int_{\Omega^\varepsilon} \mid D(\phi) \mid dx. \tag{4.3.5}$$

Preuve. Soient $\sigma^\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon)$ $1 \leq i,j \leq 3$ les composantes du tenseur de contraintes associées au champ de vitesse u^ε par les lois de comportement (4.2.2)-(4.2.3). Pour tout $\phi \in K^\varepsilon$, on a :

$$-\int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial \sigma^\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon)}{\partial x_j}(\phi_i - u^\varepsilon_i)dx = (f^\varepsilon_i, \phi_i - u^\varepsilon_i). \tag{4.3.6}$$

Par intégration par parties, il vient que

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon)\frac{\partial(\phi_i - u^\varepsilon_i)}{\partial x_j}dx - \int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon)n_j(\phi_i - u^\varepsilon_i) = (f^\varepsilon_i, \phi_i - u^\varepsilon_i). \tag{4.3.7}$$

En utilisant la symétrie de σ^ε, on a

$$\sigma^\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon)d_{ij}(\psi) = \frac{1}{2}\sigma^\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon)(\psi_{i,j} + \psi_{j,i}) = \frac{1}{2}\sigma^\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon)\psi_{i,j} + \frac{1}{2}\sigma^\varepsilon_{ji}(u^\varepsilon)\psi_{j,i} = \sigma^\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon)\psi_{i,j}. \tag{4.3.8}$$

En utilisant (4.3.8) et l'expression du tenseur de contraintes donnée par (4.2.2), on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon)\frac{\partial(\phi_i - u^\varepsilon_i)}{\partial x_j}dx = a(u^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) + \breve{g}\varepsilon^{-1}\int_{\Omega^\varepsilon} D_{II}(u^\varepsilon)^{-1/2}d_{ij}(u^\varepsilon)d_{ij}(\phi - u^\varepsilon)dx - \\ - \int_{\Omega^\varepsilon} p^\varepsilon \mathrm{div}(\phi - u^\varepsilon)dx.\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète, il vient que

$$d_{ij}(u^\varepsilon)d_{ij}(\phi) \leq 2D^{1/2}_{II}(u^\varepsilon)D^{1/2}_{II}(\phi),$$

donc le deuxième terme du membre de droite dans (4.3.9) peut être majorer par

$$2\breve{g}\varepsilon^{-1}\int_{\Omega^\varepsilon}(D^{1/2}_{II}(\phi) - D^{1/2}_{II}(u^\varepsilon))dx = \sqrt{2}\breve{g}\varepsilon^{-1}\int_{\Omega^\varepsilon}(\mid D(\phi)\mid - \mid D(u^\varepsilon)\mid)dx. \tag{4.3.10}$$

Le deuxième terme du membre de gauche dans (4.3.7) sera divisé en trois parties, vu que $\Gamma^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}^\varepsilon_1 \cup \bar{\Gamma}^\varepsilon_L$. D'abord l'intégration sur ω avec la condition de Tresca donne

$$\int_\omega k^\varepsilon(\mid \phi - s \mid - \mid u^\varepsilon - s \mid)dx' \geq -\int_\omega \sigma^\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon)n_j(\phi_i - u^\varepsilon_i)dx'. \tag{4.3.11}$$

Sur Γ^ε_1, on a

$$\begin{aligned}-\int_{\Gamma^\varepsilon_1}\sigma^\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon)n_j(\phi_i - u^\varepsilon_i)d\tau &= -\int_{\Gamma^\varepsilon_1}[\sigma^\varepsilon_T(u^\varepsilon) + (\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon).n).n.n_i](\phi_i - u^\varepsilon_i)]d\tau \\ &= -\int_{\Gamma^\varepsilon_1}[-l^\varepsilon u^\varepsilon_i + (\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon).n).n.n_i](\phi_i - u^\varepsilon_i)]d\tau \\ &= l^\varepsilon\int_{\Gamma^\varepsilon_1} u^\varepsilon(\phi - u^\varepsilon)d\tau,\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

car $n.(\phi - u^\varepsilon) = 0$ sur Γ_1^ε.
Enfin sur Γ_L^ε, on a

$$-\int_{\Gamma_L^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) n_j (\phi_i - u_i^\varepsilon) d\tau = 0, \tag{4.3.13}$$

car $\phi = u^\varepsilon = G^\varepsilon$ sur Γ_L^ε.
De (4.3.7)-(4.3.13), on obtient l'inéquation variationnelle suivante

$$a(u^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) - (p^\varepsilon, \text{div } \phi) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon(\phi - u^\varepsilon) d\tau + j(\phi) - j(u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon),$$

avec la fonctionnelle j est déja définie dans (4.3.5). $\square$

Remarque 4.3.1. *Sur K^ε la forme bilinéaire a n'est pas forcément coercive, pour éviter cette difficulté nous effectuons le changement de variable classique $u^\varepsilon = v^\varepsilon + G^\varepsilon$, avec $v^\varepsilon \in V^\varepsilon$, où*

$$V^\varepsilon = \{\phi \in (H^1(\Omega^\varepsilon))^3 : \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon \text{ et } \ \phi.n = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \omega\}.$$

On note

$$V_{div}^\varepsilon = \{\phi \in V^\varepsilon : \ \text{div } \phi = 0 \text{ dans } \ \Omega^\varepsilon\}.$$

La formulation variationnelle (4.3.2) devient

$$\begin{gathered}
\text{Trouver } \ v^\varepsilon \in V_{div}^\varepsilon, \ \ p^\varepsilon \in L_0^{r'}(\Omega^\varepsilon) \ \text{ tels que} \\
a(v^\varepsilon, \phi - v^\varepsilon) - (p^\varepsilon, \text{div}(\phi)) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} v^\varepsilon(\phi - v^\varepsilon) d\tau + \breve{j}(\phi) - \breve{j}(v^\varepsilon) \geq \\
\geq (f^\varepsilon, \phi - v^\varepsilon) - a(G^\varepsilon, \phi - v^\varepsilon) - l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} G^\varepsilon(\phi - v^\varepsilon) d\tau \ \ \forall \phi \in V^\varepsilon,
\end{gathered} \tag{4.3.14}$$

où

$$\breve{j}(\phi) = \int_\omega k^\varepsilon \mid \phi \mid dx' + \sqrt{2}\breve{g}\varepsilon^{-1} \int_{\Omega^\varepsilon} \mid D(\phi + G^\varepsilon) \mid dx \ \ \forall \phi \in V^\varepsilon.$$

Théorème 4.3.1. *Sous les hypothèses $f^\varepsilon \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^3$, $k^\varepsilon \in L_+^\infty(\omega)$, et G^ε vérifient (4.3.1), alors le problème variationnel (4.3.2) admet une solution unique $u^\varepsilon \in K_{div}^\varepsilon$ et $p^\varepsilon \in L_0^{r'}(\Omega^\varepsilon)$ (unique à une constante additive près).*

Preuve. Lorsque les fonctions test appartiennent à V_{div}^ε, l'inéquation variationnelle (4.3.14) devient

$$\breve{a}(v^\varepsilon, \phi - v^\varepsilon) + \breve{j}(\phi) - \breve{j}(v^\varepsilon) \geq l(\phi - v^\varepsilon) \ \ \forall \phi \in V_{div}^\varepsilon, \tag{4.3.15}$$

avec

$$\breve{a}(v,\phi) = a(v,\phi) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} v^\varepsilon \phi \, d\tau \quad \forall (v,\phi) \in (V_{div}^\varepsilon)^2,$$

$$l(\phi) = (f^\varepsilon, \phi) - a(G^\varepsilon, \phi) - l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} G^\varepsilon \phi \, d\tau \quad \forall \phi \in V_{div}^\varepsilon.$$

• La forme bilinéaire $\breve{a}(.,.)$ est coercive sur $V_{div}^\varepsilon \times V_{div}^\varepsilon$. En effet, d'après l'inégalité de Korn, il existe une constante $C_K > 0$ tel que

$$\breve{a}(\psi,\psi) = a(\psi,\psi) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \psi^2 d\tau \geq 2\mu C_K \parallel \psi \parallel_{1,\Omega^\varepsilon}^2 \quad \forall \psi \in V_{div}^\varepsilon.$$

• La forme bilinéaire $\breve{a}(.,.)$ est continue sur $V_{div}^\varepsilon \times V_{div}^\varepsilon$. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la continuité de l'application trace définie de $H^1(\Omega^\varepsilon)$ dans $L^2(\Gamma_1^\varepsilon)$, il existe une constante $C(\Omega^\varepsilon) > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \mid \breve{a}(\phi,\psi) \mid &\leq 2\mu \parallel \phi \parallel_{1,\Omega^\varepsilon} \parallel \psi \parallel_{1,\Omega^\varepsilon} + l^\varepsilon C(\Omega^\varepsilon) \parallel \phi \parallel_{1,\Omega^\varepsilon} \parallel \psi \parallel_{1,\Omega^\varepsilon} \\ &\leq \Big(2\mu + l^\varepsilon C(\Omega^\varepsilon)\Big) \parallel \phi \parallel_{1,\Omega^\varepsilon} \parallel \psi \parallel_{1,\Omega^\varepsilon} \quad \forall (\phi,\psi) \in (V_{div}^\varepsilon)^2. \end{aligned}$$

• La fonctionnelle $\breve{j}$ est convexe, semi-continue inférieurement et propre sur V_{div}^ε. En effet, soient ϕ et ψ deux éléments de V_{div}^ε. On a

$$\begin{aligned} \mid \breve{j}(\phi) - \breve{j}(\psi) \mid &\leq \left| \int_\omega k^\varepsilon (\mid \phi \mid - \mid \psi \mid) dx' \right| + \sqrt{2}\breve{g}\varepsilon^{-1} \left| \int_{\Omega^\varepsilon} \Big(\mid D(\phi + G^\varepsilon) \mid - \mid D(\psi + G^\varepsilon) \mid \Big) dx \right| \\ &\leq \int_\omega k^\varepsilon \mid \phi - \psi \mid dx' + \sqrt{2}\breve{g}\varepsilon^{-1} \int_{\Omega^\varepsilon} \mid D(\phi) - D(\psi) \mid dx \\ &\leq \mid \omega \mid^{\frac{1}{2}} \parallel k^\varepsilon \parallel_{\infty,\omega} \parallel \phi - \psi \parallel_{0,\omega} + \sqrt{2}\breve{g}\varepsilon^{-1} \parallel \phi - \psi \parallel_{1,\Omega^\varepsilon}, \end{aligned}$$

où $\mid \omega \mid$ est la mesure de ω. Comme l'application trace sur ω est continue de $H^1(\Omega^\varepsilon)$ dans $L^2(\omega)$, alors il existe une constante positive $C(\Omega^\varepsilon)$ telle que

$$\mid \breve{j}(\phi) - \breve{j}(\psi) \mid \leq \Big(\mid \omega \mid^{\frac{1}{2}} \parallel k^\varepsilon \parallel_{\infty,\omega} C(\Omega^\varepsilon) + \sqrt{2}\breve{g}\varepsilon^{-1} \Big) \parallel \phi - \psi \parallel_{1,\Omega^\varepsilon} .$$

Nous déduisons que la fonctionnelle $\breve{j}$ est Lipschitzienne, donc a fortiori semi-continue inférieurement sur V_{div}^ε.

• Il ne nous reste qu'à montrer que la forme linéaire l est continue. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la continuité de l'application trace définie de $H^1(\Omega^\varepsilon)$ dans $L^2(\Gamma_1^\varepsilon)$, il existe une constante $C(\Omega^\varepsilon) > 0$ telle que

$$\mid l(\phi) \mid \leq \Big(\parallel f^\varepsilon \parallel_{0,\Omega^\varepsilon} + \big(1 + l^\varepsilon C(\Omega^\varepsilon)\big) \parallel G^\varepsilon \parallel_{1,\Omega^\varepsilon} \Big) \parallel \phi \parallel_{1,\Omega^\varepsilon} \quad \forall \phi \in V_{div}^\varepsilon.$$

D'après la théorie des inéquations variationnelles (voir par exemple [6]), l'inéquation variationnelle (4.3.15) admet une solution unique v^ε.

Par conséquent, comme dans [3], il existe $p^\varepsilon \in L^2_0(\Omega^\varepsilon)$ déterminée de manière unique à une constante additive près telle que $(u^\varepsilon = v^\varepsilon + G^\varepsilon, p^\varepsilon)$ satisfaisant l'inéquation variationnelle en vitesse-pression (4.3.2). $\square$

Lemme 4.3.1. *(Inégalité de Poincaré) On a*

$$\int_{\Omega^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 dx \leq 2h_{max}\, \varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 d\tau + 2(h_{max})^2 \varepsilon^2 \int_{\Omega^\varepsilon} \left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3}\right|^2 dx. \tag{4.3.16}$$

Preuve. Soient $x' = (x_1, x_2) \in \omega$ et ξ tel que $0 \leq \xi \leq h^\varepsilon(x')$, on a

$$u^\varepsilon(x', \xi) = u^\varepsilon(x', h^\varepsilon(x')) - \int_\xi^{h^\varepsilon(x')} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial z}(x', z) dz,$$

donc

$$|u^\varepsilon(x', \xi)|^2 \leq 2|u^\varepsilon(x', h^\varepsilon(x'))|^2 + 2h^\varepsilon(x') \int_0^{h^\varepsilon(x')} |\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial z}(x', z)|^2 dz.$$

Intégrons par rapport à ξ sur $[0, h^\varepsilon(x')]$ on obtient

$$\int_0^{h^\varepsilon(x')} |u^\varepsilon(x', \xi)|^2 d\xi \leq 2h^\varepsilon(x')|u^\varepsilon(x', h^\varepsilon(x'))|^2 + 2\big(h^\varepsilon(x')\big)^2 \int_0^{h^\varepsilon(x')} |\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial z}(x', z)|^2 dz,$$

en intérgant maintenant par rapport à x' sur ω, on obtient (4.3.16). $\square$

Lemme 4.3.2. *La solution u^ε de l'inéquation variationnelle (4.3.2) vérifie l'estimation suivante*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \sqrt{2}\breve{g}\varepsilon^{-1} \int_{\Omega^\varepsilon} |D(u^\varepsilon)| dx + \frac{l^\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 d\tau + \int_\omega k^\varepsilon |u^\varepsilon - s| dx' \leq \\
&\quad \leq \frac{33\mu}{32} \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla G^\varepsilon|^2 dx + \frac{5l^\varepsilon}{4} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |G^\varepsilon|^2 d\tau + \sqrt{2}\breve{g}\varepsilon^{-1} \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla G^\varepsilon| dx + \\
&\quad + \frac{\mu}{32} \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx + \Big(\frac{32 h^2_{max} \varepsilon^2}{\mu} + \frac{4h_{max}\, \varepsilon}{l^\varepsilon}\Big) \parallel f^\varepsilon \parallel^2_{0,\Omega^\varepsilon} .
\end{aligned} \tag{4.3.17}$$

Preuve. On choisit $\phi = G^\varepsilon$ dans (4.3.2), comme $div(G^\varepsilon) = 0$ dans Ω^ε et $G^\varepsilon = s$ sur ω, il vient que

$$\begin{aligned}
&a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \sqrt{2}\breve{g}\varepsilon^{-1} \int_{\Omega^\varepsilon} |D(u^\varepsilon)| dx + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 d\tau + \int_\omega k^\varepsilon |u^\varepsilon - s| dx' \leq \\
&\leq a(u^\varepsilon, G^\varepsilon) + \sqrt{2}\breve{g}\varepsilon^{-1} \int_{\Omega^\varepsilon} |D(G^\varepsilon)| dx + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon G^\varepsilon d\tau + (f^\varepsilon, u^\varepsilon - G^\varepsilon).
\end{aligned} \tag{4.3.18}$$

Nous rappelons l'inégalité de Young

$$ab \leq \eta^2 \frac{a^2}{2} + \eta^{-2} \frac{b^2}{2}, \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \ \eta > 0, \tag{4.3.19}$$

en utilisant cette inégalité avec $\eta = 1$, on a

$$ab \leq \big(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\big) \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,$$

donc

$$\begin{aligned} a(u^\varepsilon, G^\varepsilon) &\leq \frac{1}{2} a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \frac{1}{2} a(G^\varepsilon, G^\varepsilon) \\ &\leq \frac{1}{2} a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \mu \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla G^\varepsilon|^2 dx. \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

En utilisant l'inégalité de Young (4.3.19) pour $\eta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, il vient que

$$\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon G^\varepsilon d\tau \leq \frac{l^\varepsilon}{4} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 d\tau + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |G^\varepsilon|^2 d\tau. \tag{4.3.21}$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$(f^\varepsilon, u^\varepsilon - G^\varepsilon) \leq \| f^\varepsilon \|_{0,\Omega^\varepsilon} \| u^\varepsilon \|_{0,\Omega^\varepsilon} + \| f^\varepsilon \|_{0,\Omega^\varepsilon} \| G^\varepsilon \|_{0,\Omega^\varepsilon} .$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré (4.3.16), on obtient

$$\begin{aligned} \| f^\varepsilon \|_{0,\Omega^\varepsilon} \| u^\varepsilon \|_{0,\Omega^\varepsilon} \leq \sqrt{2}\, h_{max}\, \varepsilon \| f^\varepsilon \|_{0,\Omega^\varepsilon} \Big(\int_{\Omega^\varepsilon} | \nabla u^\varepsilon |^2 \, dx \Big)^{1/2} + \\ + \big(2 h_{max}\, \varepsilon\big)^{1/2} \| f^\varepsilon \|_{0,\Omega^\varepsilon} \Big(\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 d\tau \Big)^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

On applique l'inégalité de Young (4.3.19) pour

$$a = \Big(\int_{\Omega^\varepsilon} | \nabla u^\varepsilon |^2 \, dx \Big)^{1/2}$$

$$b = \sqrt{2} h_{max}\, \varepsilon \| f^\varepsilon \|_{0,\Omega^\varepsilon}$$

$$\eta = \sqrt{\mu/16}$$

donc

$$\begin{aligned} \sqrt{2} h_{max}\, \varepsilon \| f^\varepsilon \|_{0,\Omega^\varepsilon} \Big(\int_{\Omega^\varepsilon} | \nabla u^\varepsilon |^2 \, dx \Big)^{1/2} \leq \\ \leq \frac{\mu}{32} \int_{\Omega^\varepsilon} | \nabla u^\varepsilon |^2 \, dx + \frac{16 h_{\max}^2 \varepsilon^2}{\mu} \| f^\varepsilon \|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 . \end{aligned} \tag{4.3.23}$$

On applique maintenant l'inégalité de Young pour

$$a = \sqrt{l^\varepsilon}\Big(\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 d\tau\Big)^{1/2}$$

$$b = \sqrt{2h_{max}\ \frac{\varepsilon}{l^\varepsilon}}\ \parallel f^\varepsilon \parallel_{0,\Omega^\varepsilon}$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\big(2h_{max}\,\varepsilon\big)^{1/2} \parallel f^\varepsilon \parallel_{0,\Omega^\varepsilon} \Big(\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 d\tau\Big)^{1/2} \leq \\ \leq \frac{l^\varepsilon}{4}\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 d\tau + \frac{2h_{max}\,\varepsilon}{l^\varepsilon} \parallel f^\varepsilon \parallel_{0,\Omega^\varepsilon}^2 .\end{aligned} \tag{4.3.24}$$

D'où de (4.3.22), (4.3.23) et (4.3.24)

$$\begin{aligned}\parallel f^\varepsilon \parallel_{0,\Omega^\varepsilon} \parallel u^\varepsilon \parallel_{0,\Omega^\varepsilon} \leq \frac{\mu}{32}\int_{\Omega^\varepsilon} \mid \nabla u^\varepsilon \mid^2 dx\ +\ \frac{16h_{\max}^2\varepsilon^2}{\mu} \parallel f^\varepsilon \parallel_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \\ + \frac{l^\varepsilon}{4}\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 d\tau + \frac{2h_{max}\,\varepsilon}{l^\varepsilon} \parallel f^\varepsilon \parallel_{0,\Omega^\varepsilon}^2 .\end{aligned} \tag{4.3.25}$$

De même

$$\begin{aligned}\parallel f^\varepsilon \parallel_{0,\Omega^\varepsilon} \parallel G^\varepsilon \parallel_{0,\Omega^\varepsilon} \leq \frac{\mu}{32}\int_{\Omega^\varepsilon} \mid \nabla G^\varepsilon \mid^2 dx\ +\ \frac{16h_{\max}^2\varepsilon^2}{\mu} \parallel f^\varepsilon \parallel_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \\ + \frac{l^\varepsilon}{4}\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |G^\varepsilon|^2 d\tau + \frac{2h_{max}\,\varepsilon}{l^\varepsilon} \parallel f^\varepsilon \parallel_{0,\Omega^\varepsilon}^2 .\end{aligned} \tag{4.3.26}$$

En utilisant (4.3.20)-(4.3.26) dans (4.3.18), on obtient (4.3.17). □

Lemme 4.3.3. *(Inégalité de Korn) On a*

$$\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla(u^\varepsilon - G^\varepsilon)|^2 dx \leq \frac{1}{\mu} a(u^\varepsilon - G^\varepsilon, u^\varepsilon - G^\varepsilon) + C(\Gamma_1^\varepsilon)\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon - G^\varepsilon|^2 d\tau, \tag{4.3.27}$$

où

$$C(\Gamma_1^\varepsilon) = 2 \parallel D_2 h^\varepsilon \parallel_{\mathcal{C}(\bar\omega)} \big(1 + \parallel D_1 h^\varepsilon \parallel_{\mathcal{C}(\bar\omega)}^2 \big). \tag{4.3.28}$$

Preuve. [1] On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}a(v,v) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega^\varepsilon}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\Big)^2 dx \\
&= \int_{\Omega^\varepsilon}|\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega^\varepsilon}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}dx \\
&= \int_{\Omega^\varepsilon}|\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega^\varepsilon}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_i}v_k dx + \int_{\partial\Omega^\varepsilon}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}v_k n_i \\
&= \int_{\Omega^\varepsilon}|\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega^\varepsilon}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}dx - \int_{\partial\Omega^\varepsilon}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}v_k n_k + \int_{\partial\Omega^\varepsilon}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}v_k n_i.
\end{aligned}$$

Si $\mathrm{div}(v) = 0$, alors

$$\int_{\Omega^\varepsilon}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}dx = 0,$$

donc

$$\int_{\Omega^\varepsilon}|\nabla v|^2 dx = \frac{1}{\mu}a(v,v) + \int_{\partial\Omega^\varepsilon}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}v_k n_k - \int_{\partial\Omega^\varepsilon}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}v_k n_i. \tag{4.3.29}$$

Pour $v = u^\varepsilon - G^\varepsilon$, on a $(u^\varepsilon - G^\varepsilon).n = 0$ sur $\partial\Omega^\varepsilon$, donc

$$\int_{\partial\Omega^\varepsilon}\frac{\partial(u_i^\varepsilon - G_i^\varepsilon)}{\partial x_i}v_k n_k = 0, \tag{4.3.30}$$

d'autre part, $u^\varepsilon - G^\varepsilon = 0$ sur Γ_L^ε, donc

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega^\varepsilon}\frac{\partial(u_i^\varepsilon - G_i^\varepsilon)}{\partial x_k}(u_k^\varepsilon - G_k^\varepsilon)n_i &= \int_{\Gamma_1^\varepsilon\cup\omega}\frac{\partial(u_i^\varepsilon - G_i^\varepsilon)}{\partial x_k}(u_k^\varepsilon - G_k^\varepsilon)n_i \\
&= \int_{\Gamma_1^\varepsilon\cup\omega}(u_k^\varepsilon - G_k^\varepsilon)\frac{\partial(u_i^\varepsilon - G_i^\varepsilon)}{\partial x_k}n_i.
\end{aligned}$$

Notre but maintenant est d'estimer cette dernière intégrale. On a

$$(u^\varepsilon - G^\varepsilon).n = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \omega,$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\big((u^\varepsilon - G^\varepsilon).n\big) = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \omega,$$

ce qui implique que

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(u_i^\varepsilon - G_i^\varepsilon)}{\partial x_k}n_i = -\sum_{i=1}^{3}(u_i^\varepsilon - G_i^\varepsilon)n_{i,k}. \tag{4.3.31}$$

Or $n_{i,k} = 0$ sur ω, donc de (4.3.31), on a

$$\left|\int_{\Gamma_1^\varepsilon}(u_k^\varepsilon - G_k^\varepsilon)\frac{\partial(u_i^\varepsilon - G_i^\varepsilon)}{\partial x_k}n_i d\tau\right| \leq \mathcal{K}(\Gamma_1^\varepsilon)\int_{\Gamma_1^\varepsilon}|u^\varepsilon - G^\varepsilon|^2 d\tau, \tag{4.3.32}$$

où

$$\mathcal{K}(\Gamma_1^\varepsilon) \leq 2 \max_{\tau\in\Gamma_1^\varepsilon} |n_{i,k}(\tau)|.$$

Comme

$$\Gamma_1^\varepsilon = \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 :\ x_3 - h^\varepsilon(x_1,x_2) = 0\},$$

donc le vecteur normal unitaire extérieur à Γ_1^ε s'écrit

$$n(\eta) = \frac{\big(-\frac{\partial h^\varepsilon}{\partial x_1}(x_1,x_2), -\frac{\partial h^\varepsilon}{\partial x_2}(x_1,x_2), 1\big)}{\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x')|^2}} = n(x_1,x_2).$$

Pour $i = 1, 2$, on a

$$n_{3,i}(x_1,x_2) = \frac{\partial n_3}{\partial x_i}(x_1,x_2) = -(1+|\nabla h^\varepsilon|^2)^{-\frac{3}{2}}\big(\frac{\partial h^\varepsilon}{\partial x_1}\frac{\partial^2 h^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_1} + \frac{\partial h^\varepsilon}{\partial x_2}\frac{\partial^2 h^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_2}\big)$$

donc

$$|n_{3,i}(x_1,x_2)| \leq 2|D_1 h^\varepsilon|.|D_2 h^\varepsilon| \leq |D_2 h^\varepsilon|(1+|D_1 h^\varepsilon|^2).$$

Par un calcul similaire, on a pour $i = 1,..,3$ et $j = 1, 2$

$$|n_{j,i}(x_1,x_2)| \leq 2|D_1 h^\varepsilon|.|D_2 h^\varepsilon| \leq |D_2 h^\varepsilon|(1+|D_1 h^\varepsilon|^2).$$

D'où $\mathcal{K}(\Gamma_1^\varepsilon) \leq C(\Gamma_1^\varepsilon)$, où la constante $C(\Gamma_1^\varepsilon)$ est déjà définie dans (4.3.28). En utilisant (4.3.29) et (4.3.32), on obtient (4.3.27). $\square$

Lemme 4.3.4. *On a*

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx &\leq \frac{4}{\mu} a(u^\varepsilon,u^\varepsilon) + 10\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla G^\varepsilon| + \\ &+ 4C(\Gamma_1^\varepsilon)\left\{\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 d\tau + \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |G^\varepsilon|^2 d\tau\right\}. \qquad (4.3.33)\end{aligned}$$

Preuve. D'après (4.3.27), on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx &\leq 2\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla(u^\varepsilon - G^\varepsilon)|^2 dx + 2\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla G^\varepsilon|^2 dx \\ &\leq \frac{2}{\mu} a(u^\varepsilon - G^\varepsilon, u^\varepsilon - G^\varepsilon) + 2C(\Gamma_1^\varepsilon)\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon - G^\varepsilon|^2 d\tau + 2\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla G^\varepsilon|^2 dx.\end{aligned}$$

(4.3.34)

Or

$$\begin{aligned}a(u^\varepsilon - G^\varepsilon, u^\varepsilon - G^\varepsilon) &= a(u^\varepsilon,u^\varepsilon) + a(G^\varepsilon,G^\varepsilon) - 2a(u^\varepsilon,G^\varepsilon) \\ &\leq 2a(u^\varepsilon,u^\varepsilon) + 2a(G^\varepsilon,G^\varepsilon) \\ &\leq 2a(u^\varepsilon,u^\varepsilon) + 4\mu\int_{\Omega^\varepsilon} \mid \nabla G^\varepsilon \mid^2 dx. \qquad (4.3.35)\end{aligned}$$

En combinant (4.3.34) et (4.3.35), on obtient

$$\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \leq \frac{4}{\mu} a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + 10 \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla G^\varepsilon|^2 dx + 2C(\Gamma_1^\varepsilon) \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon - G^\varepsilon|^2 d\tau$$

$$\leq \frac{4}{\mu} a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + 10 \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla G^\varepsilon|^2 dx + 4C(\Gamma_1^\varepsilon) \left\{ \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 d\tau + \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |G^\varepsilon|^2 d\tau \right\}. \quad (4.3.36)$$

Remarque 4.3.2. *On a* $\mathcal{C}(\Gamma_1^\varepsilon) = O(\frac{1}{\varepsilon})$. *Si nous supposons que*

$$l^\varepsilon = \hat{l}\varepsilon^{-1}, \quad (4.3.37)$$

alors

$$\frac{\mathcal{C}(\Gamma_1^\varepsilon)}{l^\varepsilon} = O(1).$$

Nous supposons dans la suite la condition (4.3.37) et que la fonction h *est telle que*

$$\frac{\mathcal{C}(\Gamma_1^\varepsilon)}{l^\varepsilon} \leq \frac{1}{\mu}. \quad (4.3.38)$$

Lemme 4.3.5. *Sous l'hypothèse (4.3.38), on a*

$$\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \leq 53 \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla G^\varepsilon|^2 dx + 48 \, \frac{l^\varepsilon}{\mu} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |G^\varepsilon|^2 d\tau +$$

$$+ 32\sqrt{2} \, \frac{\breve{g}\varepsilon^{-1}}{\mu} \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla G^\varepsilon| dx + \Big(\frac{512 \, h_{max}^2 \, \varepsilon^2}{\mu^2} + \frac{64 h_{max} \, \varepsilon}{\mu l^\varepsilon} \Big) \parallel f^\varepsilon \parallel_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \quad (4.3.39)$$

Preuve. Nous majorons dans (4.3.33) $a(u^\varepsilon, u^\varepsilon)$ et $\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 d\tau$ à l'aide de (4.3.17), il vient que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \quad &\leq \quad \frac{33}{4} \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla G^\varepsilon|^2 dx + \frac{10 l^\varepsilon}{\mu} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |G^\varepsilon|^2 d\tau + 8\sqrt{2} \, \frac{\breve{g}\varepsilon^{-1}}{\mu} \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla G^\varepsilon| dx + \\
&+ \quad \frac{1}{4} \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx + \Big(\frac{256 \, h_{max}^2 \, \varepsilon^2}{\mu^2} + \frac{32 h_{max} \, \varepsilon}{\mu l^\varepsilon} \Big) \parallel f^\varepsilon \parallel_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \\
&+ \quad 10 \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla G^\varepsilon|^2 dx + +4C(\Gamma_1^\varepsilon) \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |G^\varepsilon|^2 d\tau + \frac{33}{4} \frac{C(\Gamma_1^\varepsilon)\mu}{l^\varepsilon} \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla G^\varepsilon|^2 dx + \\
&+ \quad 10 C(\Gamma_1^\varepsilon) \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |G^\varepsilon|^2 d\tau + 8\sqrt{2} \breve{g}\varepsilon^{-1} \frac{C(\Gamma_1^\varepsilon)}{l^\varepsilon} \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla G^\varepsilon| dx + \\
&+ \quad \frac{\mu C(\Gamma_1^\varepsilon)}{4 l^\varepsilon} \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx + \Big(\frac{256 \, h_{max}^2 C(\Gamma_1^\varepsilon) \, \varepsilon^2}{\mu l^\varepsilon} + \frac{32 h_{max} C(\Gamma_1^\varepsilon) \, \varepsilon}{(l^\varepsilon)^2} \Big) \parallel f^\varepsilon \parallel_{0,\Omega^\varepsilon}^2,
\end{aligned}$$

(4.3.40)

en utilisant (4.3.38), on trouve (4.3.39).

4.4 Changement de domaine et estimations a priori

Dans cette section nous effectuons un changement de domaine et nous obtenons des estimations a priori. On pose $z = \frac{x_3}{\varepsilon}$, le domaine Ω^ε se transforme à un domaine fixe Ω ne dépend pas de ε. On note $\Gamma = \bar{\Gamma}_L \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\omega}$ la frontière de Ω. Nous définissons des nouvelles variables pour la vitesse et la pression comme suivant

$$\hat{u_i^\varepsilon}(x', z) = u_i^\varepsilon(x', z) \; ; \; \hat{u_3^\varepsilon}(x', z) = \varepsilon^{-1} u_3^\varepsilon(x', x_3)$$

$$\hat{p}(x', z) = \varepsilon^2 p^\varepsilon(x', x_3).$$

Pour les données, on suppose qu'elles dépendent de ε de la façon suivante :

$$\hat{g}(x', z) = g(x', x_3) \;\; ; \hat{f}(x', z) = \varepsilon^2 f^\varepsilon(x', x_3)$$

$$\hat{l} = \varepsilon l^\varepsilon, \;\; \hat{k} = \varepsilon k^\varepsilon.$$

On définit maintenant un relèvement $\hat{G}(x', z) = (\hat{G}_1(x', z), \hat{G}_2(x', z), \hat{G}_3(x', z))$ de $\hat{g}$, tel que

$$\hat{G}_i(x', z) = \hat{g}_i(x', x_3) \;\text{ pour i=1,2 et }\; \hat{G}_3(x', z) = \varepsilon^{-1} \hat{g}_3(x', x_3)$$

et

$$\operatorname{div}(\hat{G}) = \frac{\partial \hat{G}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{G}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{G}_2}{\partial z} = 0 \;\; ; \;\; \hat{G}.n = 0 \;\text{ sur } \Gamma_1 \cup \omega,$$

on choisit le vecteur G^ε défini précédement tel que

$$\hat{G}_i(x', z) = G_i^\varepsilon(x', x_3) \;\text{ pour i=1,2 }\; \hat{G}_3(x', z) = \varepsilon^{-1} G_3^\varepsilon(x', x_3).$$

Soit

$$K = \{\hat{\phi} \in (H^1(\Omega))^3 : \;\hat{\phi} = \hat{G} \text{ sur } \Gamma_L, \;\hat{\phi}.n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \omega\}.$$

Lorsque nous passons au domaine fixe Ω en introduisant les nouvelles variables dans l'inéquation variationnelle (4.3.2) et après la multiplication par ε, nous obtenons

$$
\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}\Big[\varepsilon^2\mu\Big(\frac{\partial\hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u_j^\varepsilon}}{\partial x_i}\Big)-\hat{p^\varepsilon}\delta_{i,j}\Big]\frac{\partial}{\partial x_j}(\hat{\phi}_i-\hat{u_i^\varepsilon})dx'dz+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\mu\Big(\frac{\partial\hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_i-\hat{u_i^\varepsilon})dx'dz+
$$

$$
+\int_{\Omega}(2\mu\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z}-\hat{p^\varepsilon})\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_3-\hat{u_3^\varepsilon})dx'dz+
$$

$$
+\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega}\varepsilon^2\mu(\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u_j^\varepsilon}}{\partial z})\frac{\partial}{\partial x_j}(\hat{\phi}_3-\hat{u_3^\varepsilon})dx'dz+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{2}\int_{\omega}\hat{l}\hat{u_i^\varepsilon}(x',h(x'))\Big(\hat{\phi}_i(x',h(x'))-\hat{u_i^\varepsilon}(x',h(x'))\Big)\sqrt{1+\mid\nabla h^\varepsilon(x')\mid^2}dx'+
$$

$$
\int_{\omega}\hat{l}\varepsilon^2\hat{u_3^\varepsilon}(x',h(x'))\Big(\hat{\phi}_3(x',h(x'))-\hat{u_3^\varepsilon}(x',h(x'))\Big)\sqrt{1+\mid\nabla h^\varepsilon(x')\mid^2}dx'+
$$

$$
+\int_{\omega}\hat{k}\Big(\mid\hat{\phi}-s\mid-\mid\hat{u^\varepsilon}-s\mid\Big)dx'+\sqrt{2}\breve{g}\int_{\Omega}\mid\tilde{D}(\hat{\phi})\mid dx'dz-
$$

$$
-\sqrt{2}\breve{g}\int_{\Omega}\mid\tilde{D}(\hat{u^\varepsilon})\mid dx'dz\geq\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{f}_i(\hat{\phi}_i-\hat{u_i^\varepsilon})dx'dz+\int_{\Omega}\varepsilon\hat{f}_3(\hat{\phi}_3-\hat{u_3^\varepsilon})dx'dz
$$

$$
\forall\hat{\phi}\in K,\qquad(4.4.1)
$$

où

$$
\mid\tilde{D}(v)\mid=\Big[\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{2}\varepsilon^2\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial v_3}{\partial x_i}\Big)^2+\varepsilon^2\Big(\frac{\partial v_3}{\partial z}\Big)^2\Big]^{1/2}\ \forall v\in K(4.4.2)
$$

Notre but maintenant est d'obtenir des estimations a priori sur la vitesse $\hat{u^\varepsilon}$ et la pression $\hat{p^\varepsilon}$ dans le domaine fixe Ω. Avant cela, on introduit deux lemmes utiles pour la suite.

Lemme 4.4.1. *On a*

$$
\int_{\Omega^\varepsilon}\mid\nabla G^\varepsilon\mid^2dx'dz\leq\varepsilon^{-1}\int_{\Omega}\mid\nabla\hat{G}\mid^2dx'dz\quad\forall\varepsilon\in]0,1],\qquad(4.4.3)
$$

$$
\int_{\Omega^\varepsilon}\mid\nabla G^\varepsilon\mid dx'dz\leq\int_{\Omega}\mid\nabla\hat{G}\mid dx'dz\quad\forall\varepsilon\in]0,1].\qquad(4.4.4)
$$

Preuve. Ces deux résultats sont immédiats en faisant un changement de domaine et en utilisant le fait que $\varepsilon \in]0,1]$.

Lemme 4.4.2. *On a*

$$\int_{\Gamma_1^\varepsilon} \mid G^\varepsilon \mid^2 d\tau \leq \tilde{C}(\Omega, h) \int_\Omega (\mid \hat{G} \mid^2 + \mid \nabla \hat{G} \mid^2) dx'dz \quad \forall \varepsilon \in]0,1], \tag{4.4.5}$$

où $\tilde{C}(\Omega, h)$ *est une constante indépendante de* ε.

Preuve. Pour $i = 1, 2$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \mid G_i^\varepsilon \mid^2 d\tau &= \int_\omega \mid G_i^\varepsilon(x', h^\varepsilon(x')) \mid^2 \sqrt{1 + \mid \nabla h^\varepsilon(x') \mid^2} dx' \\ &\leq \int_\omega \mid \hat{G}_i(x', h(x')) \mid^2 \sqrt{1 + \mid \nabla h^\varepsilon(x') \mid^2} dx' = \int_{\Gamma_1} \mid \hat{G}_i \mid^2 d\tau', \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

(car par définition $G_i^\varepsilon(x', h^\varepsilon(x')) = \hat{G}_i(x', h(x'))$), et

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \mid G_3^\varepsilon \mid^2 d\tau &= \int_\omega \mid G_3^\varepsilon(x', h^\varepsilon(x')) \mid^2 \sqrt{1 + \mid \nabla h^\varepsilon(x') \mid^2}\, dx' \\ &\leq \varepsilon^2 \int_\omega \mid \hat{G}_3(x', h(x')) \mid^2 \sqrt{1 + \mid \nabla h(x') \mid^2}\ \frac{\sqrt{1 + \mid \nabla h^\varepsilon(x') \mid^2}}{\sqrt{1 + \mid \nabla h(x') \mid^2}}\, dx' \\ &\leq \varepsilon^2 \max_{x' \in \omega} \sqrt{1 + \mid \nabla h^\varepsilon(x') \mid^2} \int_{\Gamma_1} \mid \hat{G}_3 \mid^2 d\tau'. \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

De (4.4.6) et (4.4.7), on déduit que

$$\int_{\Gamma_1^\varepsilon} \mid G^\varepsilon \mid^2 d\tau \leq \max_{x' \in \omega} \sqrt{1 + \mid \nabla h(x') \mid^2} \int_{\Gamma_1} \mid \hat{G} \mid^2 d\tau' \quad \forall \varepsilon \in]0,1]. \tag{4.4.8}$$

D'autre part, d'après la continuité de l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma_1)$, on a

$$\int_{\Gamma_1} \mid \hat{G} \mid^2 d\tau' \leq C(\Omega) \int_\Omega (\mid \hat{G} \mid^2 + \mid \nabla \hat{G} \mid^2), \tag{4.4.9}$$

où la constante $C(\Omega)$ dépend seulement de Ω, les estimations (4.4.7) et (4.4.9) donnent (4.4.5).

Théorème 4.4.1. *Sous les hypothèses du théorème (4.3.1) ainsi que (4.3.37)-(4.3.38), on a les estimations suivantes*

$$\varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{2} \| \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j} \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2} \| \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} \|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+\varepsilon^2 \| \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z} \|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^4 \sum_{i=1}^{2} \| \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i} \|^2_{L^2(\Omega)} \leq C, \tag{4.4.10}$$

$$\| \hat{u_i^\varepsilon} \|_{0,\Omega} \leq C \ \text{ pour } \ i = 1, 2, \tag{4.4.11}$$

$$\| \varepsilon \hat{u_3^\varepsilon} \|_{0,\Omega} \leq C, \tag{4.4.12}$$

$$\| \frac{\partial \hat{p^\varepsilon}}{\partial x_i} \|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \ \text{ pour } \ i = 1, 2, \tag{4.4.13}$$

$$\| \frac{\partial \hat{p^\varepsilon}}{\partial z} \|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C\varepsilon. \tag{4.4.14}$$

Preuve. En passant au domaine fixe Ω, on a

$$\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} | \nabla u^\varepsilon |^2 \, dx' dx_3 = \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{2} \| \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j} \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2} \| \frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z} \|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+\varepsilon^2 \| \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z} \|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^4 \sum_{i=1}^{2} \| \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i} \|^2_{L^2(\Omega)} . \tag{4.4.15}$$

En passant au domaine fixe Ω dans le membre de droite dans l'inégalité (4.3.39), puis en utilisant (4.4.3)-(4.4.5), alors

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} | \nabla u^\varepsilon |^2 \, dx' dx_3 \ & \leq \ \big(53 + 48 \frac{\hat{l}\tilde{C}(\Omega, h)}{\mu}\big) \int_\Omega | \nabla \hat{G} |^2 \, dx' dz + \\ & + \ 48 \frac{\hat{l}\tilde{C}(\Omega, h)}{\mu} \int_\Omega | \hat{G} |^2 \, dx' dz + 32\sqrt{2} \, \frac{\breve{g}}{\mu} \int_\Omega |\nabla \hat{G}| dx' dz \\ & + \ \Big(\frac{512 \, h^2_{max}}{\mu^2} + \frac{64 h_{max}}{\mu \hat{l}}\Big) \| \hat{f} \|^2_{0,\Omega}, \end{aligned} \tag{4.4.16}$$

d'où (4.4.10) découle.

• Pour obtenir (4.4.11)-(4.4.12), il suffit d'appliquer l'inégalité de Poincaré (4.3.16) dans le domaine Ω :

$$\int_{\Omega} |\hat{u_i^\varepsilon}|^2 dx \leq 2h_{max} \int_{\Gamma_1} |\hat{u_i^\varepsilon}|^2 d\tau' + 2(h_{max})^2 \int_{\Omega} |\frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z}|^2 dx'dz \quad \text{pour } \ i = 1,2,3. \tag{4.4.17}$$

Grâce à (4.4.10), on peut majorer les termes

$$2(h_{max})^2 \int_{\Omega} |\frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z}|^2 dx'dz \text{ pour } i = 1,2$$

par une constante indépendante de ε, et pour $i = 3$ on a

$$2(h_{max})^2 \int_{\Omega} |\frac{\partial \hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z}|^2 dx'dz \leq \frac{C}{\varepsilon^2}$$

.

Il ne nous reste donc qu'à estimer les termes

$$\int_{\Gamma_1} |\hat{u_i^\varepsilon}|^2 d\tau' \ \ i = 1,2,3.$$

On a, pour $i = 1,2$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} |\ \hat{u_i^\varepsilon}\ |^2\ d\tau' &= \int_{\omega} |\ \hat{u_i^\varepsilon}(x', h(x'))\ |^2\ \sqrt{1+ |\ \nabla h(x')\ |^2}\ dx' \\
&= \int_{\omega} |\ u_i^\varepsilon(x', h(x'))\ |^2\ \sqrt{1+ |\ \nabla h^\varepsilon(x')\ |^2}\ \ \frac{\sqrt{1+ |\ \nabla h(x')\ |^2}}{\sqrt{1+ |\ \nabla h^\varepsilon(x')\ |^2}}\ dx' \\
&\leq \max_{x' \in \omega}\ \sqrt{1+ |\ \nabla h(x')\ |^2} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |\ u_i^\varepsilon\ |^2\ d\tau,
\end{aligned} \tag{4.4.18}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} |\ \hat{u_3^\varepsilon}\ |^2\ d\tau' &= \int_{\omega} |\ \hat{u_3^\varepsilon}(x', h(x'))\ |^2\ \sqrt{1+ |\ \nabla h(x')\ |^2}\ dx' \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\omega} |\ u_3^\varepsilon(x', h(x'))\ |^2\ \sqrt{1+ |\ \nabla h^\varepsilon(x')\ |^2}\ \ \frac{\sqrt{1+ |\ \nabla h(x')\ |^2}}{\sqrt{1+ |\ \nabla h^\varepsilon(x')\ |^2}}\ dx' \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \max_{x' \in \omega} \sqrt{1+ |\ \nabla h(x')\ |^2} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |\ u_3^\varepsilon\ |^2\ d\tau.
\end{aligned} \tag{4.4.19}$$

D'autre part, d'après (4.3.17) et (4.4.10), on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 d\tau &\leq \frac{33\mu}{16\hat{l}} \int_{\Omega} |\nabla \hat{G}|^2 dx + \frac{5}{2} \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |G^\varepsilon|^2 d\tau + +2\sqrt{2}\frac{\breve{g}}{\hat{l}} \int_{\Omega} |\nabla \hat{G}| dx + \\
&+ \frac{\mu C}{16\hat{l}} + \Big(\frac{64 h_{max}^2}{\mu \hat{l}} + \frac{8 h_{max}}{(\hat{l})^2}\Big) \parallel \hat{f} \parallel_{0,\Omega}^2,
\end{aligned} \tag{4.4.20}$$

or

$$\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |G^\varepsilon|^2 d\tau \leq C(\Omega) \int_\Omega (\mid \hat{G} \mid^2 + \mid \nabla \hat{G} \mid^2) dx' dz,$$

donc

$$\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 d\tau \leq C(\Omega, \mu, \hat{l}, \hat{G}, \hat{f}, h). \tag{4.4.21}$$

D'où (4.4.11)-(4.4.12) découlent à partir de (4.4.17), (4.4.18), (4.4.19) et (4.4.21).

• Pour obtenir la première estimation sur la pression (4.4.13), on choisit dans (4.4.1) $\hat{\phi} = (\hat{u_1^\varepsilon} + \psi, \hat{u_2^\varepsilon}, \hat{u_3^\varepsilon})$. En utilisant les deux inégalités suivantes

$$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2,$$

il vient que

$$\mid \tilde{D}(\hat{\phi}) \mid \leq \sqrt{2} \mid \tilde{D}(\hat{u^\varepsilon}) \mid + \sqrt{2} \mid \tilde{D}(\psi) \mid .$$

En remplaçant dans (4.4.1) $\hat{\phi}$ par sa valeur donnée précédemment, et en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial \hat{p^\varepsilon}}{\partial x_1} \psi dx' dz \quad &\leq \quad \sum_{j=1}^{2} \int_\Omega \varepsilon^2 \mu \Big(\frac{\partial \hat{u_1^\varepsilon}}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u_j^\varepsilon}}{\partial x_1} \Big) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx' dz + \\
&+ \quad \int_\Omega \mu \Big(\frac{\partial \hat{u_1^\varepsilon}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_1} \Big) \frac{\partial \psi}{\partial z} dx' dz + \\
&+ \quad \int_\omega \hat{l} \hat{u_1^\varepsilon}(x', h(x')) \psi(x', h(x')) \sqrt{1 + \mid \nabla h^\varepsilon \mid^2} dx' + \\
&+ \quad 2\breve{g} \int_\Omega \mid \tilde{D}(\psi) \mid dx' dz + (2 - \sqrt{2}) \breve{g} \int_\Omega \mid \tilde{D}(\hat{u^\varepsilon}) \mid dx' dz - \int_\Omega \hat{f} \psi dx' dz,
\end{aligned} \tag{4.4.22}$$

or

$$\begin{aligned}
&\int_\omega \hat{l} \hat{u_1^\varepsilon}(x', h(x')) \psi(x', h(x')) \sqrt{1 + \mid \nabla h^\varepsilon \mid^2} dx' \leq \\
&\leq \hat{l} \Big\{ \Big(\int_\omega \mid \hat{u_1^\varepsilon}(x', h(x')) \mid^2 \sqrt{1 + \mid \nabla h^\varepsilon \mid^2} dx' \Big)^{1/2} \\
&\qquad \Big(\int_\omega \mid \psi(x', h(x')) \mid^2 \sqrt{1 + \mid \nabla h^\varepsilon \mid^2} dx' \Big)^{1/2} \Big\} \\
&\leq \hat{l} \max_{x' \in \omega} \sqrt{1 + \mid \nabla h^\varepsilon \mid^2} \ \Big\{ \Big(\int_\omega \mid \hat{u_1^\varepsilon}(x', h(x')) \mid^2 \sqrt{1 + \mid \nabla h \mid^2} dx' \Big)^{1/2} \\
&\qquad \Big(\int_\omega \mid \psi(x', h(x')) \mid^2 \sqrt{1 + \mid \nabla h \mid^2} dx' \Big)^{1/2} \Big\} \\
&\leq \hat{l} \max_{x' \in \omega} \sqrt{1 + \mid \nabla h \mid^2} \ \Big(\int_{\Gamma_1} \mid \hat{u_1^\varepsilon} \mid^2 d\tau' \Big)^{1/2} \Big(\int_{\Gamma_1} \mid \psi \mid^2 d\tau' \Big)^{1/2},
\end{aligned} \tag{4.4.23}$$

et comme

$$\Big(\int_{\Gamma_1} \mid \hat{u_1^\varepsilon} \mid^2 d\tau'\Big)^{1/2} \leq C', \tag{4.4.24}$$

et d'après la continuité de l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma_1)$, il existe une constante C'' indépendante de ε telle que

$$\Big(\int_{\Gamma_1} \mid \psi \mid^2 d\tau'\Big)^{1/2} \leq C'' \parallel \psi \parallel_{1,\Omega}, \tag{4.4.25}$$

d'où

$$\int_\omega \hat{l}\hat{u_1^\varepsilon}(x', h(x'))\psi(x', h(x'))\sqrt{1+ \mid \nabla h^\varepsilon \mid^2} dx' \leq C_\star \parallel \psi \parallel_{1,\Omega}, \tag{4.4.26}$$

avec

$$C_\star = C'C''\hat{l} \max_{x' \in \omega} \sqrt{1+ \mid \nabla h \mid^2}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial \hat{p^\varepsilon}}{\partial x_1}\psi dx'dz \quad \leq \quad & \sum_{j=1}^2 \int_\Omega \mu\varepsilon^2\big(\parallel \frac{\partial \hat{u_1^\varepsilon}}{\partial x_j} \parallel_{0,\Omega} + \parallel \frac{\partial \hat{u_j^\varepsilon}}{\partial x_1} \parallel_{0,\Omega} \big) \parallel \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \parallel_{0,\Omega} \; + \\ + \quad & \mu\big(\parallel \frac{\partial \hat{u_1^\varepsilon}}{\partial z} \parallel_{0,\Omega} + \varepsilon^2 \parallel \frac{\partial \hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_1} \parallel_{0,\Omega} \big) \parallel \frac{\partial \psi}{\partial z} \parallel_{0,\Omega} + C_\star \parallel \psi \parallel_{1,\Omega} + \\ + \quad & (2-\sqrt{2})\breve{g}\sqrt{\mid \Omega \mid}\big(\int_\Omega \mid \tilde{D}(\hat{u^\varepsilon}) \mid^2 dx'dz\big)^{1/2} + \\ + \quad & 2\breve{g}\sqrt{\mid \Omega \mid}\big(\int_\Omega \mid \tilde{D}(\psi) \mid^2 dx'dz\big)^{1/2} + \parallel \hat{f} \parallel_{0,\Omega} \parallel \psi \parallel_{0,\Omega} . \end{aligned} \tag{4.4.27}$$

Or

$$\big(\int_\Omega \mid \tilde{D}(\psi) \mid^2 dx'dz\big)^{1/2} \leq \parallel \psi \parallel_{1,\Omega} \quad \forall \varepsilon \in]0,1], \tag{4.4.28}$$

donc d'après (4.4.10), il existe une constante C ne dépend pas de ε telle que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial \hat{p^\varepsilon}}{\partial x_1}\psi dx'dz \quad \leq \quad & \mu C\big(\sum_{j=1}^2 \parallel \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \parallel_{0,\Omega} + \parallel \frac{\partial \psi}{\partial z} \parallel_{0,\Omega} \big) + C_\star \parallel \psi \parallel_{1,\Omega} + \\ + \quad & (2-\sqrt{2})\breve{g}\sqrt{\mid \Omega \mid}\, C + 2\breve{g}\sqrt{\mid \Omega \mid} \parallel \psi \parallel_{1,\Omega} . \end{aligned} \tag{4.4.29}$$

De même si on choisit $\hat{\phi} = (\hat{u_1^\varepsilon} - \psi, \hat{u_2^\varepsilon}, \hat{u_3^\varepsilon})$, on a

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \frac{\partial \hat{p^\varepsilon}}{\partial x_1}\psi dx'dz \quad \leq \quad & \mu C\big(\sum_{j=1}^2 \parallel \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \parallel_{0,\Omega} + \parallel \frac{\partial \psi}{\partial z} \parallel_{0,\Omega} \big) + C_\star \parallel \psi \parallel_{1,\Omega} + \\ + \quad & (2-\sqrt{2})\breve{g}\sqrt{\mid \Omega \mid}\, C + 2\breve{g}\sqrt{\mid \Omega \mid} \parallel \psi \parallel_{1,\Omega}, \end{aligned} \tag{4.4.30}$$

de (4.4.29)-(4.4.30), on déduit que

$$\begin{aligned}
\mid \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{p^{\varepsilon}}}{\partial x_1} \psi dx' dz \mid \quad & \leq \quad \mu C \big(\sum_{j=1}^{2} \parallel \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \parallel_{0,\Omega} + \parallel \frac{\partial \psi}{\partial z} \parallel_{0,\Omega} \big) + C_{\star} \parallel \psi \parallel_{1,\Omega} + \\
& + \quad (2-\sqrt{2}) \breve{g} \sqrt{\mid \Omega \mid}\, C + 2 \breve{g} \sqrt{\mid \Omega \mid} \parallel \psi \parallel_{1,\Omega} + \\
& + \quad C_p \parallel \hat{f} \parallel_{0,\Omega} \parallel \psi \parallel_{1,\Omega}, \qquad (4.4.31)
\end{aligned}$$

d'où (4.4.13) découle pour $i = 1$.

Lorsque $i = 2$, il suffit de choisir $\hat{\phi} = (\hat{u_1^{\varepsilon}}, \hat{u_2^{\varepsilon}} \pm \psi, \hat{u_3^{\varepsilon}})$. Pour obtenir (4.4.14), on prend $\hat{\phi} = (\hat{u_1^{\varepsilon}}, \hat{u_2^{\varepsilon}}, \hat{u_3^{\varepsilon}} \pm \psi)$.

Théorème 4.4.2. *Sous les mêmes hypothèses du théorème 4.4.1, il existe* $u^{\star} = ({u_1}^{\star}, {u_2}^{\star}) \in \tilde{V}_z$*, et* $p^{\star} \in L_0^2(\Omega)$ *tels que*

$$\hat{u_i^{\varepsilon}} \rightharpoonup {u_i}^{\star} \quad (1 \leq i \leq 2) \quad faiblement \quad dans \ V_z, \qquad (4.4.32)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u_i^{\varepsilon}}}{\partial x_j} \rightharpoonup 0 \quad (1 \leq i, j \leq 2) \quad faiblement \quad dans \ L^2(\Omega), \qquad (4.4.33)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u_3^{\varepsilon}}}{\partial z} \rightharpoonup 0 \ faiblement \quad dans \quad L^2(\Omega), \qquad (4.4.34)$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u_3^{\varepsilon}}}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \quad (1 \leq i \leq 2) \quad faiblement \quad dans \quad L^2(\Omega), \qquad (4.4.35)$$

$$\hat{p^{\varepsilon}} \rightharpoonup p^{\star} \quad faiblement \quad dans \ L^2(\Omega), \ p^{\star} \text{ dépend } seulement \ de \ x'. \qquad (4.4.36)$$

$$\varepsilon \hat{u_3^{\varepsilon}} \rightharpoonup 0 \ faiblement \quad dans \quad L^2(\Omega), \qquad (4.4.37)$$

Preuve. De (4.4.10) et (4.4.11), on obtient (4.4.32). De (4.4.10) et (4.4.32), on obtient (4.4.33). De (4.4.33), et du fait que $\mathrm{div}(\hat{u^{\varepsilon}}) = 0$, on obtient (4.4.34). De (4.4.12) et (4.4.10), on obtient (4.4.35). De (4.4.13) et (4.4.14), on obtient (4.4.36). De (4.4.12), $\mathrm{div}(\hat{u^{\varepsilon}}) = 0$, et avec un choix particulier du fonction test on obtient (4.4.37).

4.5 Inéquation variationnelle limite

Théorème 4.5.1. *Les limites $u^\star$, $p^\star$ vérifient l'inéquation variationnelle limite suivante*

$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\frac{\partial(\hat\phi_i - u_i^\star)}{\partial z}dx'dz - \int_\Omega p^\star(x')\Big(\frac{\partial\hat\phi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\hat\phi_2}{\partial x_2}\Big)dx'dz -$$
$$-\int_\omega p^\star(x')\Big[\hat\phi_1(x',h(x'))\frac{\partial h}{\partial x_1}(x')+\hat\phi_2(x',h(x'))\frac{\partial h}{\partial x_2}(x')\Big]dx' +$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\hat l\int_\omega u_i^\star(x',h(x'))\big(\hat\phi_i(x',h(x')) - u_i^\star(x',h(x'))\big)dx' +$$
$$+\int_\omega \hat k\big(\mid\hat\phi - s\mid - \mid u^\star - s\mid\big)dx' + \sqrt{2}\breve g\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial\hat\phi_i}{\partial z})^2\Big)^{\frac12}dx'dz -$$
$$-\sqrt{2}\breve g\int_\Omega\Big(\frac12\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z})^2\Big)^{\frac12}dx'dz \geq \sum_{i=1}^{2}(\hat f_i, \hat\phi_i - u_i^\star)\ \ \forall\hat\phi\in\Pi(K) \tag{4.5.1}$$

où

$$\Pi(K) = \{\bar\phi = (\hat\phi_1,\hat\phi_2)\in(H^1(\Omega))^2 : \exists\hat\phi_3\in H^1(\Omega),\ \text{tel que } \hat\phi = (\hat\phi_1,\hat\phi_2,\hat\phi_3)\in K\}.$$

Preuve. En passant tous les termes non linéaires à droite et les termes linéaires à gauche dans l'inéquation variationnelle 4.5.1, on obtient

$$\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}\varepsilon^2\mu\Big(\frac{\partial\hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u_j^\varepsilon}}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial\hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j}dx'dz+\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\mu\Big(\frac{\partial\hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial\hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z}dx'dz+$$

$$+\int_{\Omega}2\mu\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z}\frac{\partial\hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z}dx'dz+\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega}\varepsilon^2\mu(\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u_j^\varepsilon}}{\partial z})\frac{\partial\hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_j}dx'dz+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_{\omega}\hat{l}\hat{u_i^\varepsilon}(x',h(x'))\hat{u_i^\varepsilon}(x',h(x'))\sqrt{1+\mid\nabla h^\varepsilon(x')\mid^2}dx'dz+$$

$$+\int_{\omega}\hat{l}\varepsilon^2\hat{u_3^\varepsilon}(x',h(x'))\hat{u_3^\varepsilon}(x',h(x'))\sqrt{1+\mid\nabla h^\varepsilon(x')\mid^2}dx'+$$

$$+\int_{\omega}\hat{k}\mid\hat{u^\varepsilon}-s\mid dx'+\sqrt{2}\breve{g}\int_{\Omega}\mid\tilde{D}(\hat{u^\varepsilon})\mid dx'dz\le$$

$$\le\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}\varepsilon^2\mu\Big(\frac{\partial\hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u_j^\varepsilon}}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial x_j}dx'dz+\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\mu\Big(\frac{\partial\hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z}dx'dz+$$

$$+\int_{\Omega}2\mu\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z}\frac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial z}dx'dz+\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega}\varepsilon^2\mu(\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u_j^\varepsilon}}{\partial z})\frac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial x_j}dx'dz+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_{\omega}\hat{l}\hat{u_i^\varepsilon}(x',h(x'))\hat{\phi}_i(x',h(x'))\sqrt{1+\mid\nabla h^\varepsilon(x')\mid^2}dx'dz+$$

$$+\int_{\omega}\hat{l}\varepsilon^2\hat{u_3^\varepsilon}(x',h(x'))\hat{\phi}_3(x',h(x'))\sqrt{1+\mid\nabla h^\varepsilon(x')\mid^2}dx'+$$

$$+\int_{\omega}\hat{k}\mid\hat{\phi}-s\mid dx'+\sqrt{2}\breve{g}\int_{\Omega}\mid\tilde{D}(\hat{\phi})\mid dx'dz+\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{p^\varepsilon}\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial x_i}dx'dz+$$

$$+\int_{\Omega}\hat{p^\varepsilon}\frac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial z}dx'dz+\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{f}_i(\hat{u_i^\varepsilon}-\hat{\phi}_i)dx'dz+\int_{\Omega}\varepsilon\hat{f}_3(\hat{u_3^\varepsilon}-\hat{\phi}_3)dx'dz. \qquad (4.5.2)$$

Le terme

$$\int_{\omega}\hat{l}\varepsilon^2\hat{u_3^\varepsilon}(x',h(x'))\hat{u_3^\varepsilon}(x',h(x'))\sqrt{1+\mid\nabla h^\varepsilon(x')\mid^2}dx',$$

est positif, donc on peut le négliger dans le membre de gauche dans (4.5.2). Puis, on applique la $\liminf\limits_{\varepsilon\to 0}$ à gauche et la $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$ à droite dans (4.5.2). D'après les résultats de convergence du théorème 4.4.2, on déduit que

$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}dx'dz+\sum_{i=1}^{2}\hat{l}\int_\omega u_i^\star(x',h(x'))u_i^\star(x',h(x'))dx'+$$

$$+\int_\omega \hat{k}\mid u^\star-s\mid dx'+\sqrt{2}\breve{g}\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\big(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z})^2\Big)^{\frac{1}{2}}dx'dz\leq$$

$$\leq \liminf_{\varepsilon\to 0}\Big\{\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega \varepsilon^2\mu\Big(\frac{\partial\hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u_j^\varepsilon}}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial\hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j}dx'dz+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\mu\Big(\frac{\partial\hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial\hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z}dx'dz+\int_\Omega 2\mu\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z}\frac{\partial\hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z}dx'dz+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\int_\Omega\varepsilon^2\mu(\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u_j^\varepsilon}}{\partial z})\frac{\partial\hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_j}dx'dz+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_\omega\hat{l}\hat{u_i^\varepsilon}(x',h(x'))\hat{u_i^\varepsilon}(x',h(x'))\sqrt{1+\mid\nabla h^\varepsilon(x')\mid^2}dx'dz$$

$$+\int_\omega\hat{k}\mid\hat{u^\varepsilon}-s\mid dx'+\sqrt{2}\breve{g}\int_\Omega\mid\tilde{D}(\hat{u^\varepsilon})\mid dx'dz\Big\},\tag{4.5.3}$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega\varepsilon^2\mu\Big(\frac{\partial\hat{u_i^\varepsilon}}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u_j^\varepsilon}}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial x_j}dx'dz+\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\mu\Big(\frac{\partial\hat{u_i^\varepsilon}}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z}dx'dz+$$

$$+\int_\Omega 2\mu\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u_3^\varepsilon}}{\partial z}\frac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial z}dx'dz+\sum_{j=1}^{2}\int_\Omega\varepsilon^2\mu(\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u_3^\varepsilon}}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u_j^\varepsilon}}{\partial z})\frac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial x_j}dx'dz+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_\omega\hat{l}\hat{u_i^\varepsilon}(x',h(x'))\hat{\phi}_i(x',h(x'))\sqrt{1+\mid\nabla h^\varepsilon(x')\mid^2}dx'dz+$$

$$+\int_\omega\hat{k}\mid\hat{\phi}-s\mid dx'+\sqrt{2}\breve{g}\int_\Omega\mid\tilde{D}(\hat{\phi})\mid dx'dz+\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\hat{p^\varepsilon}\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial x_i}dx'dz+$$

$$+\int_\Omega\hat{p^\varepsilon}\frac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial z}dx'dz+\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\hat{f}_i(\hat{u_i^\varepsilon}-\hat{\phi}_i)dx'dz+\int_\Omega\varepsilon\hat{f}_3(\hat{u_3^\varepsilon}-\hat{\phi}_3)dx'dz\Big\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z}dx'dz+\sum_{i=1}^{2}\hat{l}\int_\omega u_i^\star(x',h(x'))\hat{\phi}_i(x',h(x'))dx'+$$

$$+\int_\omega\hat{k}\mid\hat{\phi}-s\mid dx'+\sqrt{2}\breve{g}\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\big(\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z})^2\Big)^{\frac{1}{2}}dx'dz+\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\hat{f}_i(u_i^\star-\hat{\phi}_i)dx'dz+$$

$$+\int_\Omega p^\star(x')\Big(\frac{\partial\hat{\phi}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\hat{\phi}_2}{\partial x_2}\Big)dx'dz+\int_\Omega p^\star(x')\frac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial z}dx'dz.\tag{4.5.4}$$

Or

$$\int_\Omega p^\star(x')\frac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial z}dx'dz=\int_\omega\int_0^{h(x')}p^\star(x')\frac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial z}dx'dz=\int_\omega p^\star(x')\hat{\phi}_3(x',h(x'))dx',$$

car $\hat{\phi}_3(x',0)=0$. Comme $\hat{\phi}_1n_1+\hat{\phi}_2n_2+\hat{\phi}_3n_3=0$ sur Γ_1, alors

$$\hat{\phi}_3=\frac{-1}{n_3}(\hat{\phi}_1n_1+\hat{\phi}_2n_2)=\sqrt{1+\mid\nabla h(x')\mid^2}(\hat{\phi}_1n_1+\hat{\phi}_2n_2)=\hat{\phi}_1\frac{\partial h}{\partial x_1}+\hat{\phi}_2\frac{\partial h}{\partial x_2},$$

donc

$$\int_\Omega p^\star(x')\frac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial z}dx'dz=\int_\omega p^\star(x')\Big(\sum_{i=1}^2\hat{\phi}_i(x',h(x'))\frac{\partial h}{\partial x_i}(x')\Big)dx'. \tag{4.5.5}$$

De (4.5.3)-(4.5.5), on déduit (4.5.1).

Remarque 4.5.1. *[1] On a*

$$\Pi(K)=\{\bar{\phi}=(\hat{\phi}_1,\hat{\phi}_2)\in(H^1(\Omega))^2:\bar{\phi}=\bar{G}=(\hat{G}_1,\hat{G}_2)\}.$$

Lemme 4.5.1. *[1] Soit $\bar{\phi}=(\hat{\phi}_1,\hat{\phi}_2)\in\Pi(K)$ telle que $\bar{\phi}$ vérifie la condition $(\mathbf{D}')$ suivante*

$$\int_\Omega\Big(\hat{\phi}_1(x',z)\frac{\partial\theta}{\partial x_1}(x')+\hat{\phi}_2(x',z)\frac{\partial\theta}{\partial x_2}(x')\Big)dx'dz=0\ \forall\theta\in\mathcal{C}_0^1(\omega).$$

Alors

$$\begin{aligned}&\int_\Omega p^\star(x')\Big(\frac{\partial\hat{\phi}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\hat{\phi}_2}{\partial x_2}\Big)dx'dz+\\&+\int_\omega p^\star(x')\Big(\hat{\phi}_1(x',h(x'))\frac{\partial h}{\partial x_1}+\hat{\phi}_2(x',h(x'))\frac{\partial h}{\partial x_2}\Big)dx'=0.\end{aligned} \tag{4.5.6}$$

Remarque 4.5.2. *Le lemme 4.5.1 implique que*

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^2\int_\Omega\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\frac{\partial(\hat{\phi}_i-u_i^\star)}{\partial z}dx'dz+\\&+\sum_{i=1}^2\hat{l}\int_\omega u_i^\star(x',h(x'))\big(\hat{\phi}_i(x',h(x'))-u_i^\star(x',h(x'))\big)dx'+\\&+\int_\omega\hat{k}\big(\mid\hat{\phi}-s\mid-\mid u^\star-s\mid\big)dx'+\sqrt{2}\breve{g}\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^2\big(\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z}\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}}dx'dz-\\&-\sqrt{2}\breve{g}\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^2\big(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}}dx'dz\geq\sum_{i=1}^2(\hat{f}_i,\hat{\phi}_i-u_i^\star)\ \ \forall\hat{\phi}\in\Sigma(K),\end{aligned} \tag{4.5.7}$$

où

$$\Sigma(K)=\{\bar{\phi}\in\Pi(K):\ \bar{\phi}\text{ vérifie }\textit{la condition }(\mathbf{D}')\}.$$

Remarque 4.5.3. *Dans [2] R. Bunoui et S. Kesavan ont obtenu le modèle limite suivant :*

$$-\frac{\partial}{\partial z}\Big[\mu\frac{\partial u^\star}{\partial z}(x',z)+\breve{g}\;\frac{\frac{\partial u^\star}{\partial z}}{|\frac{\partial u^\star}{\partial z}|}(x',z)\Big]=\hat{f_{x'}}(x',z)-\nabla_{x'}p^\star(x'),\tag{4.5.8}$$

lorsque

$$\big|\frac{\partial u^\star}{\partial z}(x',z)\big|\neq 0,$$

avec $\hat{f_{x'}}=(\hat{f}_1,\hat{f}_2)$.
Nous prévoyons dans la suite de nos travaux de chercher un modèle limite du même type que (4.5.8) afin de compléter l'inéquation variationnelle limite (4.5.1) par une autre équation du type Reynolds, pour pouvoir étudier l'unicité des solutions du problème limite. La difficulté qu'on a rencontrée jusqu'à maintenant réside dans le fait qu'on a moins de liberté dans le choix des fonctions test à cause des conditions aux limites que nous nous sommes imposées.

Bibliographie

[1] M. Boukrouche, G. Łukaszewicz, On a lubrication problem with Fourier and Tresca boundary conditions. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 14 (2004), n.o 6, 913-941.

[2] R. Bunoui, S. Kesavan, Asymptotic behaviour of a Bingham fluid in thin layers. J. Math. Anal. Appl. 293 (2004), no. 2, 405–418.

[3] L. Consiglieri, Stationary solutions for a Bingham flow with nonlocal friction. Mathematical topics in fluid mechanics (Lisbon, 1991), 237-243, Pitman Res. Notes Math. Ser., 274, Longman Sci. Tech., Harlow, 1992.

[4] P.L. Dai, J.Z. Dai, The Galerkin finite element method for Bingham fluid. Numer. Math. J. Chinese Univ 24 (2002), no 1, 31-36.

[5] G. Duvaut, J.L. Lions, Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod (1972).

[6] R. Glowinski, Théorie générale, premières applications. Paris, Dunod, 1976.

[7] I.R. Ionescu, M. Sofonea, A variational formulation of a boundary value problem in the study of the Bingham fluid. Rev. Roumaine Sci.Tech. Sér.Méc.Appl. 30 (1985), no 4, 357-363.

[8] J.L. Lions, E. Sanchez-Palencia, Écoulement d'un fluide viscoplastique de Bingham dans un milieux poreux. J.Math.Pures Appl (9) 60 (1981), no 3, 341-360.

[9] M. Selmani, B. Merouani, L. Selmani, Analysis of a class of frictional contact problems for the Bingham fluid. Mediterr.J.Math 21(2005), no. 1, 113-124.