# Déformations de métriques Einstein sur des variétés à singularités coniques

## Soutenance de thèse

Grégoire Montcouquiol

Université Paul Sabatier

Mardi 6 Décembre 2005

# Au commencement...

## Théorème (Hodgson-Kerckhoff 98)

*Soit $M$ une cône-variété hyperbolique fermée de dimension 3, dont le lieu singulier forme un entrelacs et dont tous les angles coniques sont strictement plus petits que $2\pi$.*

*Alors $M$ est localement rigide relativement aux angles coniques, i.e. il n'existe pas de déformation hyperbolique préservant les angles.*

*De plus l'ensemble des structures de cônes-variétés hyperboliques est paramétré au voisinage de $M$ par le p-uplet des angles coniques.*

# Résultats principaux

## Théorème A

*Soit $M$ une cône-variété hyperbolique fermée dont le lieu singulier est de codimension 2 et dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à $2\pi$. Alors toute déformation Einstein infinitésimale ne modifiant pas les angles coniques est triviale.*

## Théorème B

*Soit $M$ une cône-variété hyperbolique dont le lieu singulier est de codimension 2 et dont tous les angles coniques $\alpha_1, \dots \alpha_p$ sont strictement inférieurs à $\pi$. Soit $\dot{\alpha} = (\dot{\alpha_1}, \dots \dot{\alpha_p})$ une variation donnée du $p$-uplet des angles coniques. Alors il existe une déformation Einstein infinitésimale $h_{\dot{\alpha}}$ induisant la variation des angles coniques donnée.*

# Motivations

1. Construire des métriques Einstein non homogènes, à courbure sectionnelle négative, sur des variétés fermées.

# Motivations

1. Construire des métriques Einstein non homogènes, à courbure sectionnelle négative, sur des variétés fermées.
2. Donner en dimension supérieure à 3 un analogue du processus de géométrisation, en particulier pour les orbifolds.

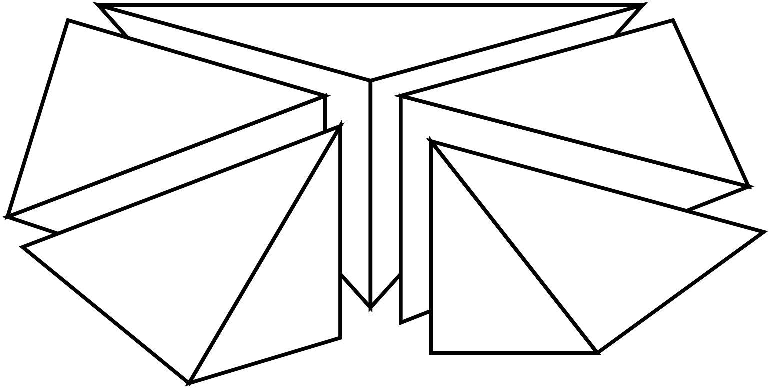
# Motivations

1. Construire des métriques Einstein non homogènes, à courbure sectionnelle négative, sur des variétés fermées.
2. Donner en dimension supérieure à 3 un analogue du processus de géométrisation, en particulier pour les orbifolds.
3. Mieux comprendre les restrictions imposées à la géométrie du lieu singulier.

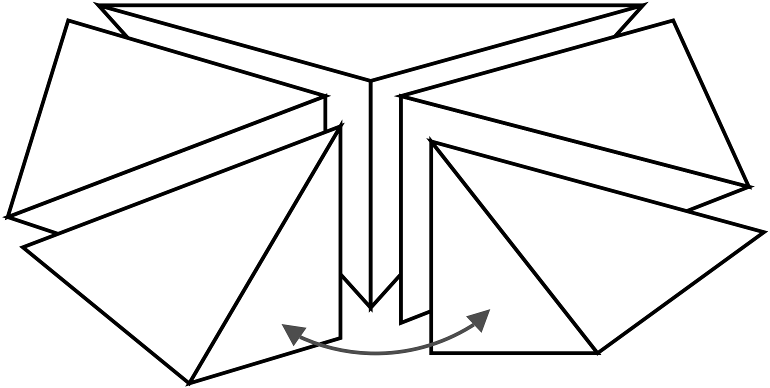
# Plan de l'exposé

1. Introduction aux cônes-variétés et aux métriques Einstein, leurs déformations.
2. Théorie de Hodge $L^2$.
3. Normalisation des déformations infinitésimales par la condition de jauge de Bianchi.
4. Démonstrations des théorèmes principaux : rigidité infinitésimale et constructions de déformations Einstein modifiant les angles coniques.

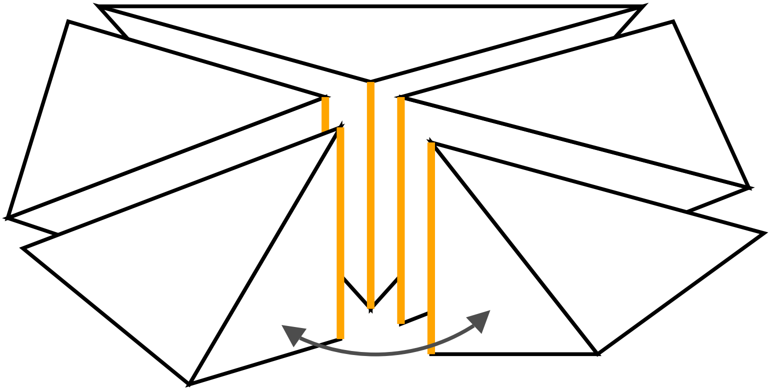
# Premier exemple



# Premier exemple

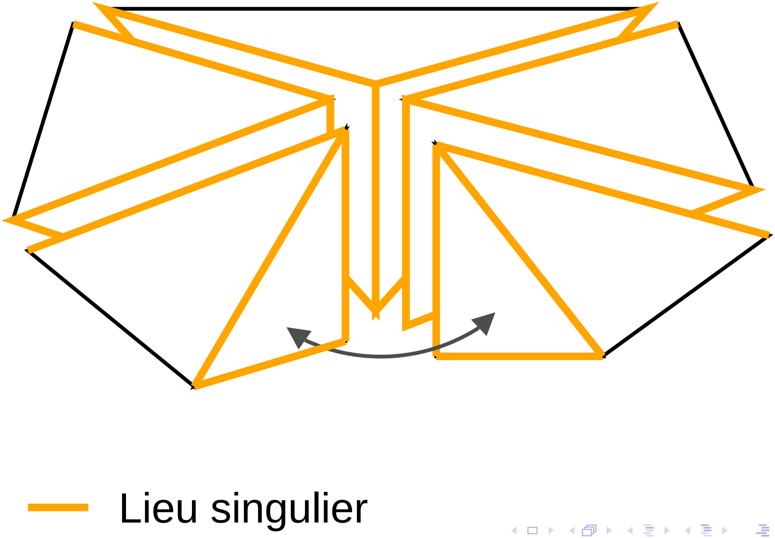


# Premier exemple

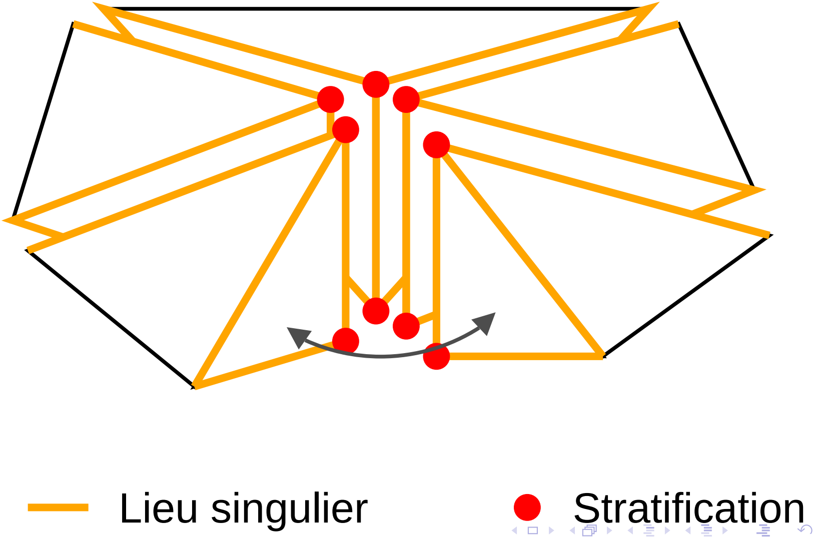


Lieu singulier

# Premier exemple



# Premier exemple



# Définitions et conventions

On se placera pour simplifier dans le cas suivant :

- $\overline{M}$ est une variété fermée,
- le lieu singulier $\Sigma \subset \overline{M}$ est une sous-variété plongée, fermée, de codimension 2, munie d'une métrique riemannienne $g_\Sigma$,
- $M = \overline{M} \setminus \Sigma$ est munie d'une métrique riemannienne $g$ (non complète),
- en coordonnées cylindriques locales au voisinage d'un point de $\Sigma$, on a
$$g = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + g_\Sigma + q.$$
La variable $\theta$ est définie non pas modulo $2\pi$ mais modulo *l'angle conique* $\alpha$. Le tenseur $q$ est un reste, tendant rapidement vers 0 près du lieu singulier.

# Déformations des cônes-variétés

Au voisinage du lieu singulier, toute déformation infinitésimale d'une cône-variété peut se mettre sous une forme standard, i.e. une combinaison linéaire des quatre types de déformations suivants, modifiant :

1. l'angle,
2. la métrique du lieu singulier,
3. le reste,
4. et enfin, la façon de "recoller" la variable d'angle quand on passe d'un système de coordonnées à un autre.

# Déformations des cônes-variétés

Au voisinage du lieu singulier, toute déformation infinitésimale d'une cône-variété peut se mettre sous une forme standard, i.e. une combinaison linéaire des quatre types de déformations suivants, modifiant :

1. l'angle,
2. la métrique du lieu singulier,
3. le reste,
4. et enfin, la façon de "recoller" la variable d'angle quand on passe d'un système de coordonnées à un autre.

Ces déformations sont toutes $L^2$, mais seules les trois dernières sont à dérivée covariante $L^2$.

# Métriques Einstein

## Définition

*Une variété riemannienne (M,g) est* Einstein *si sa courbure de Ricci est proportionnelle à la métrique, i.e. si la métrique g vérifie* $ric(g) = cg$ *pour une certaine constante* $c$.

# Métriques Einstein

## Définition

*Une variété riemannienne (M,g) est* Einstein *si sa courbure de Ricci est proportionnelle à la métrique, i.e. si la métrique g vérifie* $ric(g) = cg$ *pour une certaine constante* $c$.

**Remarques :**

# Métriques Einstein

## Définition

*Une variété riemannienne (M,g) est* Einstein *si sa courbure de Ricci est proportionnelle à la métrique, i.e. si la métrique g vérifie* $ric(g) = cg$ *pour une certaine constante c.*

**Remarques :**

1. En dimension 2 et 3, les variétés Einstein sont exactement les variétés à courbure (sectionelle) constante.

# Métriques Einstein

## Définition

*Une variété riemannienne (M,g) est* Einstein *si sa courbure de Ricci est proportionnelle à la métrique, i.e. si la métrique g vérifie* $ric(g) = cg$ *pour une certaine constante c.*

**Remarques :**

1. En dimension 2 et 3, les variétés Einstein sont exactement les variétés à courbure (sectionelle) constante.
2. La valeur précise de la constante $c$ n'est pas importante géométriquement, seul compte son signe.

# Métriques Einstein

## Définition

*Une variété riemannienne (M,g) est* Einstein *si sa courbure de Ricci est proportionnelle à la métrique, i.e. si la métrique g vérifie* $ric(g) = cg$ *pour une certaine constante* $c$.

**Remarques :**

1. En dimension 2 et 3, les variétés Einstein sont exactement les variétés à courbure (sectionelle) constante.
2. La valeur précise de la constante $c$ n'est pas importante géométriquement, seul compte son signe.

On s'intéressera exclusivement aux variétés Einstein *négatives*, dont la métrique $g$ vérifie $E(g) = ric(g) + (n-1)g = 0$.

# Déformations Einstein infinitésimales

On appelle *déformation Einstein infinitésimale* tout 2-tenseur symétrique, solution de l'équation $E_g'(h) = 0$, où

$$E_g'(h) = \nabla_g^* \nabla_g h - 2\mathring{R}_g(h) - \delta_g^*(2\delta_g h + d\,\mathrm{tr}_g h)$$

# Déformations Einstein infinitésimales

On appelle *déformation Einstein infinitésimale* tout 2-tenseur symétrique, solution de l'équation $E'_g(h) = 0$, où

$$E'_g(h) = \nabla_g^* \nabla_g h - 2\mathring{R}_g(h) - \delta_g^*(2\delta_g h + d\operatorname{tr}_g h)$$

On appelle *déformation triviale* tout 2-tenseur symétrique appartenant à l'image de l'opérateur $\delta_g^*$.

# Formule de Stokes

## Proposition 1

*Soient $u \in \mathcal{C}^\infty(T^{(r,s)}M)$, $v \in \mathcal{C}^\infty(T^{(r+1,s)}M)$ tels que $u$, $\nabla u$, $v$, $\nabla^* v$ soient dans $L^2$. Alors*

$$\int_M g(u, \nabla^* v)\, dv_g = \int_M g(\nabla u, v)\, dv_g.$$

# Formule de Stokes

## Proposition 1

*Soient $u \in \mathcal{C}^\infty(T^{(r,s)}M)$, $v \in \mathcal{C}^\infty(T^{(r+1,s)}M)$ tels que $u$, $\nabla u$, $v$, $\nabla^* v$ soient dans $L^2$. Alors*

$$\int_M g(u, \nabla^* v)\, dv_g = \int_M g(\nabla u, v)\, dv_g.$$

## Corollaire 2

*Soit $u$ un tenseur $L^2$, à dérivée covariante distributionnelle $L^2$. Alors il existe une suite $u_n$ de sections $C^\infty$ à support compact, telle qu'en norme $L^2$, $u_n$ converge vers $u$ et $\nabla u_n$ vers $\nabla u$.*

# Formule de Stokes

## Proposition 1

*Soient $u \in \mathcal{C}^\infty(T^{(r,s)}M)$, $v \in \mathcal{C}^\infty(T^{(r+1,s)}M)$ tels que $u$, $\nabla u$, $v$, $\nabla^* v$ soient dans $L^2$. Alors*

$$\int_M g(u, \nabla^* v)\, dv_g = \int_M g(\nabla u, v)\, dv_g.$$

## Corollaire 2

*Soit $u$ un tenseur $L^2$, à dérivée covariante distributionnelle $L^2$. Alors il existe une suite $u_n$ de sections $C^\infty$ à support compact, telle qu'en norme $L^2$, $u_n$ converge vers $u$ et $\nabla u_n$ vers $\nabla u$.*

## Corollaire 3

*L'image de l'opérateur $\nabla : L^{1,2}(T^{(r,s)}M) \to L^2(T^{(r+1,s)}M)$ est fermé.*

# Condition de jauge

On cherche à imposer la *condition de jauge de Bianchi*, i.e. on ne veut considérer que des déformations vérifiant

$$\beta_g h = \delta_g h + \frac{1}{2} d\,\mathrm{tr}_g h = 0.$$

# Déformations Einstein infinitésimales

On appelle *déformation Einstein infinitésimale* tout 2-tenseur symétrique, solution de l'équation $E'_g(h) = 0$, où

$$E'_g(h) = \nabla_g^* \nabla_g h - 2\mathring{R}_g(h) - \delta_g^*(2\delta_g h + d\mathrm{tr}_g h)$$

On appelle *déformation triviale* tout 2-tenseur symétrique appartenant à l'image de l'opérateur $\delta_g^*$.

# Condition de jauge

On cherche à imposer la *condition de jauge de Bianchi*, i.e. on ne veut considérer que des déformations vérifiant

$$\beta_g h = \delta_g h + \frac{1}{2} d \operatorname{tr}_g h = 0.$$

Normaliser une déformation infinitésimale $h_0$ consiste à trouver une déformation triviale $\delta^* \eta$ telle que la déformation $h = h_0 - \delta^* \eta$ vérifie la condition de jauge de Bianchi.
Cela revient à résoudre l'équation de normalisation $\beta(\delta^* \eta) = \beta h_0$, qui se met sous la forme

$$\nabla^* \nabla \eta + (n-1)\eta = 2\beta h_0.$$

# Normalisation des déformations

## Proposition 4

*Soit $M$ une cône-variété Einstein à courbure négative. Alors*

$$L^2(S^2M) = \ker \beta \oplus \mathrm{Im}\, \delta^*.$$

# Normalisation des déformations

## Proposition 4

*Soit $M$ une cône-variété Einstein à courbure négative. Alors*

$$L^2(S^2M) = \ker\beta \oplus \mathrm{Im}\,\delta^*.$$

## Proposition 5

*Soit $M$ une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont inférieurs à $\pi$. Alors l'opérateur $\nabla^*\nabla + (n-1)Id$ est un isomorphisme de $L^{2,2}(T^*M)$ dans $L^2(T^*M)$.*

# Normalisation des déformations

## Proposition 4

*Soit $M$ une cône-variété Einstein à courbure négative. Alors*

$$L^2(S^2M) = \ker\beta \oplus \mathrm{Im}\,\delta^*.$$

## Proposition 5

*Soit $M$ une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont inférieurs à $\pi$. Alors l'opérateur $\nabla^*\nabla + (n-1)Id$ est un isomorphisme de $L^{2,2}(T^*M)$ dans $L^2(T^*M)$.*

## Proposition 6

*Soit $M$ une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont inférieurs à $2\pi$. Soit $\phi$ une 1-forme $L^2$. Alors il existe une unique forme $\eta \in \Omega^1 M$ vérifiant :*

$$\beta \circ \delta^*\eta = \phi,$$

*telle que $\eta$, $\nabla\eta$, $d\delta\eta$, et $\nabla d\eta$ soient dans $L^2$.*

# Rigidité infinitésimale

## Théorème A

*Soit $M$ une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont inférieurs à $2\pi$. Soit $h_0$ une déformation Einstein infinitésimale (i.e. vérifiant l'équation $E_g'(h_0) = 0$) ne déformant pas les angles coniques. Alors la déformation $h_0$ est triviale.*

# Rigidité infinitésimale

## Théorème A

*Soit $M$ une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont inférieurs à $2\pi$. Soit $h_0$ une déformation Einstein infinitésimale (i.e. vérifiant l'équation $E'_g(h_0) = 0$) ne déformant pas les angles coniques. Alors la déformation $h_0$ est triviale.*

## Démonstration

# Rigidité infinitésimale

## Théorème A

*Soit $M$ une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont inférieurs à $2\pi$. Soit $h_0$ une déformation Einstein infinitésimale (i.e. vérifiant l'équation $E'_g(h_0) = 0$) ne déformant pas les angles coniques. Alors la déformation $h_0$ est triviale.*

## Démonstration

1. Normalisation : $h = h_0 - \delta^*\eta$ vérifie $\beta h = 0$ et $\nabla^*\nabla h - 2\mathring{R}h = 0$.

# Rigidité infinitésimale

## Théorème A

*Soit $M$ une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont inférieurs à $2\pi$. Soit $h_0$ une déformation Einstein infinitésimale (i.e. vérifiant l'équation $E'_g(h_0) = 0$) ne déformant pas les angles coniques. Alors la déformation $h_0$ est triviale.*

## Démonstration

1. Normalisation : $h = h_0 - \delta^*\eta$ vérifie $\beta h = 0$ et $\nabla^*\nabla h - 2\mathring{R}h = 0$.
2. On prend la trace : $\Delta \mathrm{tr}\, h + 2(n-1)\mathrm{tr}\, h = 0$. En intégrant par partie, on trouve $\mathrm{tr}\, h = 0$, $\delta h = 0$, et $\nabla^*\nabla h - 2\mathring{R}h = 0$.

# Rigidité infinitésimale

## Théorème A

*Soit $M$ une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont inférieurs à $2\pi$. Soit $h_0$ une déformation Einstein infinitésimale (i.e. vérifiant l'équation $E_g'(h_0) = 0$) ne déformant pas les angles coniques. Alors la déformation $h_0$ est triviale.*

## Démonstration

1. Normalisation : $h = h_0 - \delta^*\eta$ vérifie $\beta h = 0$ et $\nabla^*\nabla h - 2\mathring{R}h = 0$.
2. On prend la trace : $\Delta \mathrm{tr}\, h + 2(n-1)\mathrm{tr}\, h = 0$. En intégrant par partie, on trouve $\mathrm{tr}\, h = 0$, $\delta h = 0$, et $\nabla^*\nabla h - 2\mathring{R}h = 0$.
3. On utilise la formule de Weitzenböck $\nabla^*\nabla h = (\delta^\nabla d^\nabla + d^\nabla \delta^\nabla)h + n\, h - (\mathrm{tr}\, h)g$. On obtient $\delta^\nabla d^\nabla h + (n-2)h = 0$ et on conclue par intégration par partie.

# Constructions de déformations Einstein

## Théorème B

*Soit $M$ une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ sont strictement inférieurs à $\pi$. Soit $\dot\alpha = (\dot{\alpha_1}, \ldots \dot{\alpha_p})$ une variation donnée du p-uplet des angles coniques. Alors il existe une déformation Einstein infinitésimale $h_{\dot\alpha}$ induisant la variation des angles coniques donnée.*

# Constructions de déformations Einstein

## Théorème B

*Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques* $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ *sont strictement inférieurs à* $\pi$. *Soit* $\dot{\alpha} = (\dot{\alpha_1}, \ldots \dot{\alpha_p})$ *une variation donnée du p-uplet des angles coniques. Alors il existe une déformation Einstein infinitésimale* $h_{\dot{\alpha}}$ *induisant la variation des angles coniques donnée.*

## Démonstration

# Constructions de déformations Einstein

## Théorème B

*Soit $M$ une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques $\alpha_1, \dots \alpha_p$ sont strictement inférieurs à $\pi$. Soit $\dot\alpha = (\dot\alpha_1, \dots \dot\alpha_p)$ une variation donnée du p-uplet des angles coniques. Alors il existe une déformation Einstein infinitésimale $h_{\dot\alpha}$ induisant la variation des angles coniques donnée.*

## Démonstration

1. La déformation infinitésimale $h_0 = \mathrm{sh}(r)^2 d\theta^2$ modifie les angles et est Einstein près du lieu singulier.

# Constructions de déformations Einstein

## Théorème B

*Soit $M$ une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ sont strictement inférieurs à $\pi$. Soit $\dot\alpha = (\dot\alpha_1, \ldots \dot\alpha_p)$ une variation donnée du p-uplet des angles coniques. Alors il existe une déformation Einstein infinitésimale $h_{\dot\alpha}$ induisant la variation des angles coniques donnée.*

## Démonstration

1. La déformation infinitésimale $h_0 = \mathrm{sh}(r)^2 d\theta^2$ modifie les angles et est Einstein près du lieu singulier.
2. On cherche $h \in L^{1,2}$ tel que $E'(h_0 - h) = 0$. Mais l'équation $E'(h) = E'(h_0)$ n'a pas un bon comportement.

# Constructions de déformations Einstein

## Théorème B

*Soit $M$ une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques $\alpha_1, \dots \alpha_p$ sont strictement inférieurs à $\pi$. Soit $\dot\alpha = (\dot\alpha_1, \dots \dot\alpha_p)$ une variation donnée du p-uplet des angles coniques. Alors il existe une déformation Einstein infinitésimale $h_{\dot\alpha}$ induisant la variation des angles coniques donnée.*

## Démonstration

1. La déformation infinitésimale $h_0 = \mathrm{sh}(r)^2 d\theta^2$ modifie les angles et est Einstein près du lieu singulier.
2. On cherche $h \in L^{1,2}$ tel que $E'(h_0 - h) = 0$. Mais l'équation $E'(h) = E'(h_0)$ n'a pas un bon comportement.
3. On résout alors $\begin{cases} \nabla^*\nabla h - 2\mathring{R}h = E'(h_0) \\ \beta h = 0. \end{cases}$

# Normalisation des déformations

## Proposition 4

*Soit $M$ une cône-variété Einstein à courbure négative. Alors*

$$L^2(S^2M) = \ker \beta \oplus \mathrm{Im}\, \delta^*.$$

## Proposition 5

*Soit $M$ une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont inférieurs à $\pi$. Alors l'opérateur $\nabla^*\nabla + (n-1)Id$ est un isomorphisme de $L^{2,2}(T^*M)$ dans $L^2(T^*M)$.*

## Proposition 6

*Soit $M$ une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont inférieurs à $2\pi$. Soit $\phi$ une 1-forme $L^2$. Alors il existe une unique forme $\eta \in \Omega^1 M$ vérifiant :*

$$\beta \circ \delta^* \eta = \phi,$$

*telle que $\eta$, $\nabla\eta$, $d\delta\eta$, et $\nabla d\eta$ soient dans $L^2$.*

# Fin de la démonstration

## Proposition 7

*Soit $M$ une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont inférieurs à $2\pi/3$. Alors l'opérateur $\nabla^*\nabla - 2\mathring{R}$ est un isomorphisme de $L^{2,2}(S^2M)$ dans $L^2(S^2M)$.*

# Fin de la démonstration

## Proposition 7

*Soit $M$ une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont inférieurs à $2\pi/3$. Alors l'opérateur $\nabla^*\nabla - 2\mathring{R}$ est un isomorphisme de $L^{2,2}(S^2M)$ dans $L^2(S^2M)$.*

## Proposition 8

*Soit $M$ une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont inférieurs à $\pi$. Soit $\phi$ un 2-tenseur symétrique $L^2$, appartenant à* $\ker \beta$*. Alors l'équation $\nabla^*\nabla h - 2\mathring{R}h = \phi$ admet une seule solution appartenant à* $\ker \beta \cap L^{1,2}$.

# Prolongements

1. Généraliser au cas où la cône-variété de départ est Einstein à courbure sectionnelle négative.

# Prolongements

1. Généraliser au cas où la cône-variété de départ est Einstein à courbure sectionnelle négative.
2. Réaliser les déformations modifiant les angles.

# Prolongements

1. Généraliser au cas où la cône-variété de départ est Einstein à courbure sectionnelle négative.
2. Réaliser les déformations modifiant les angles.
3. Que se passe-t-il si le lieu singulier est plus compliqué et/ou les angles plus grands que $2\pi$ ?

# Prolongements

1. Généraliser au cas où la cône-variété de départ est Einstein à courbure sectionnelle négative.
2. Réaliser les déformations modifiant les angles.
3. Que se passe-t-il si le lieu singulier est plus compliqué et/ou les angles plus grands que $2\pi$ ?
4. Cas non compact, asymptotiquement hyperbolique.

# Prolongements

1. Généraliser au cas où la cône-variété de départ est Einstein à courbure sectionnelle négative.
2. Réaliser les déformations modifiant les angles.
3. Que se passe-t-il si le lieu singulier est plus compliqué et/ou les angles plus grands que $2\pi$ ?
4. Cas non compact, asymptotiquement hyperbolique.
5. Rigidité globale en dimension 4.

# Déformations de métriques Einstein sur des variétés à singularités coniques

## Soutenance de thèse

Grégoire Montcouquiol

Université Paul Sabatier

Mardi 6 Décembre 2005