



**HAL**  
open science

# Optimisation du compromis débit/distorsion pour la compression géométrique de maillages surfaciques triangulaires

Frédéric Payan

► **To cite this version:**

Frédéric Payan. Optimisation du compromis débit/distorsion pour la compression géométrique de maillages surfaciques triangulaires. Interface homme-machine [cs.HC]. Université Nice Sophia Antipolis, 2004. Français. NNT: . tel-00011445

**HAL Id: tel-00011445**

**<https://theses.hal.science/tel-00011445>**

Submitted on 23 Jan 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Université de Nice - Sophia Antipolis

UFR SCIENCES

École doctorale « Sciences et Technologies de l'Information et de la  
Communication » de Nice - Sophia Antipolis

## THÈSE

pour obtenir le titre de  
**Docteur en Sciences**

Discipline: Automatique, Traitement du Signal et des Images

présentée par

**Frédéric PAYAN**

---

### OPTIMISATION DU COMPROMIS DÉBIT-DISTORSION POUR LA COMPRESSION GÉOMÉTRIQUE DE MAILLAGES SURFACIQUES TRIANGULAIRES

---

Thèse dirigée par Marc ANTONINI

soutenue le 2 décembre 2004 devant le jury composé de

Michel BARLAUD	Professeur à l'Université de Nice - Sophia Antipolis	Président
Riccardo LEONARDI	Professeur à l'Université de Brescia (Italie)	Rapporteur
Rémy PROST	Professeur des Universités à l'INSA à Lyon	Rapporteur
Francis SCHMITT	Professeur à l'ENST à Paris	Rapporteur
Marc ANTONINI	Directeur de Recherche CNRS	Directeur de thèse
Pierre ALLIEZ	Chargé de Recherche INRIA Sophia Antipolis	Examineur



"Une civilisation sans la Science, ce serait aussi absurde qu'un poisson sans bicyclette."

"Gloire à toi, Archimède, qui fus le premier à démontrer que, lorsque l'on plonge un corps dans une baignoire, le téléphone sonne."

Pierre DESPROGES



---

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>xi</b>
<b>Abbréviations</b>	<b>xiii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Compression de maillages surfaciques : notions générales et état de l'art</b>	<b>11</b>
1.1 Notions générales sur les maillages triangulaires . . . . .	11
1.1.1 Représentation d'un objet tridimensionnel . . . . .	11
1.1.2 Maillages surfaciques triangulaires . . . . .	11
1.1.3 Quelques propriétés concernant les maillages . . . . .	12
1.1.4 Les maillages semi-réguliers multirésolutions . . . . .	14
1.1.5 Classification des méthodes de compression de maillages . . . . .	16
1.2 Les méthodes monorésolutions . . . . .	17
1.2.1 Les outils de base des méthodes monorésolutions . . . . .	17
1.2.2 Les principales méthodes monorésolutions . . . . .	18
1.3 Les méthodes progressives basées sur la simplification séquentielle . . . . .	21
1.3.1 Les différents outils des méthodes basées sur la simplification séquentielle . . . . .	21
1.3.2 Les principales méthodes . . . . .	23
1.4 Analyse spectrale . . . . .	24
1.5 L'analyse multirésolution . . . . .	25
1.5.1 Introduction . . . . .	25
1.5.2 Avantages . . . . .	27
1.5.3 Compression et transformée en ondelettes . . . . .	27
1.6 Techniques émergentes . . . . .	34
<b>2 Quel critère de qualité pour les maillages surfaciques polygonaux?</b>	<b>37</b>
2.1 Notations utilisées . . . . .	39
2.1.1 Maillages surfaciques triangulaires . . . . .	39
2.1.2 Maillages semi-réguliers multirésolutions . . . . .	40
2.1.3 Utilisation d'un repère local relatif à la surface . . . . .	41
2.2 Définition de la distance surface-surface . . . . .	41
2.2.1 La distance point-surface . . . . .	42
2.2.2 La distance unilatérale entre deux surfaces . . . . .	42
2.2.3 La distance surface-surface . . . . .	42
2.3 La distance surface-surface comme critère de distorsion . . . . .	43
2.4 Approximation proposée de la distance surface-surface . . . . .	44
2.4.1 Première hypothèse : un remailleur performant. . . . .	44

2.4.2	Deuxième hypothèse: des maillages denses et détaillés . . . . .	45
2.4.3	Troisième hypothèse: un codage optimal. . . . .	48
2.5	Conclusion . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Estimation de l'EQM pour un codeur ondelettes <math>M</math>-canaux</b>	<b>51</b>
3.1	Présentation d'un codeur ondelettes $M$ -canaux . . . . .	52
3.1.1	Principe d'une décomposition sur 1 niveau . . . . .	52
3.1.2	Principe d'une décomposition sur $N$ niveaux . . . . .	53
3.1.3	Définitions et notations . . . . .	53
3.2	EQM du signal reconstruit . . . . .	56
3.2.1	Décomposition sur 1 niveau . . . . .	56
3.2.2	Décomposition sur $N$ niveaux . . . . .	60
3.3	Schéma <i>lifting</i> et transformée en ondelettes à $M$ canaux . . . . .	62
3.3.1	Schéma <i>lifting</i> à $M$ canaux . . . . .	63
3.3.2	Matrice polyphase d'un schéma <i>lifting</i> à $M$ canaux . . . . .	64
3.3.3	Exemple d'un schéma 2-canaux: le filtre quinconce pour les signaux bidimensionnels . . . . .	65
3.3.4	Exemple d'un schéma <i>lifting</i> 4-canaux: le schéma de <i>butterfly</i> pour maillages triangulaires . . . . .	65
3.4	Validation de la méthode: résultats expérimentaux . . . . .	68
3.5	Conclusion . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Algorithme de compression géométrique optimale</b>	<b>77</b>
4.1	Description générale du codeur géométrique . . . . .	78
4.2	Organisation des données géométriques . . . . .	79
4.2.1	Les sous-bandes hautes fréquences . . . . .	81
4.2.2	La sous-bande basse fréquence . . . . .	81
4.3	Critère de distorsion pour la géométrie des maillages semi-réguliers . . . . .	81
4.4	Allocation binaire pour la géométrie des maillages . . . . .	82
4.4.1	Description du problème . . . . .	82
4.4.2	Propriétés statistiques des données . . . . .	82
4.4.3	Modélisation théorique de la distorsion et du débit . . . . .	84
4.4.4	Résolution du problème . . . . .	85
4.4.5	Algorithme basé modèle . . . . .	86
4.4.6	Complexité . . . . .	87
4.5	3D-CBAC: Un codeur arithmétique contextuel pour la géométrie des maillages triangulaires . . . . .	87
4.5.1	Le Codage entropique . . . . .	87
4.5.2	Le codage contextuel par plans de bits ( <i>EBCOT</i> ) . . . . .	88
4.5.3	Un codeur par plans de bits pour les données tridimensionnelles . . . . .	89
4.5.4	Validation expérimentale . . . . .	92
4.6	Conclusion . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Résultats expérimentaux</b>	<b>97</b>
5.1	Critère de qualité . . . . .	97
5.2	Résultats expérimentaux . . . . .	97
5.3	Quelques résultats visuels . . . . .	102
5.4	Conclusion . . . . .	108
<b>6</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>115</b>

<b>Annexes</b>	<b>119</b>
1 Calcul des pondérations pour un schéma <i>lifting</i> à 2 canaux : le filtre quin- conce pour les signaux 2D . . . . .	119
2 Test du $\chi^2$ entre les sous-bandes hautes fréquences et la densité de probabi- lité d'une <i>Gaussienne Généralisée (GG)</i> . . . . .	123
3 Densité de probabilité typique des coordonnées du maillage basse fréquence avec ou sans prédiction géométrique. . . . .	125
4 Efficacité du codeur entropique <i>3D-CBAC</i> pour des maillages semi-réguliers obtenus avec <i>MAPS</i> . . . . .	126
5 Maillages surfaciques triangulaires utilisés dans ce mémoire . . . . .	127
<b>Bibliographie</b>	<b>139</b>
<b>Publications</b>	<b>141</b>





---

## Table des figures

1	Exemple d'objet géométrique tridimensionnel créé à partir d'images fixes pour l'aide au diagnostic. Image extraite de [2]. . . . .	2
2	Création d'objet par CAO. Image extraite de [3]. . . . .	2
3	Personnage de dessins animés. Image propriété de Pixar [6]. . . . .	3
4	Acquisition et modélisation de la statue de Saint-Mathieu (propriété du projet <i>Michelangelo</i> [73]). . . . .	4
5	Schéma classique d'un algorithme de compression dans un espace transformé. . . . .	7
1.1	L'objet DAVID HEAD représenté à l'aide de triangles, de quadrangles ou de polygones (Objet propriété du projet <i>Michelangelo</i> [73], image extraite de [11]). . . . .	12
1.2	Exemple de maillages triangulaires. . . . .	13
1.3	Les différents types de maillage en fonction de leur régularité. . . . .	13
1.4	Un maillage multiéchelle à différents niveaux de résolution. Objet propriété de Headus Inc. [5] (version multiéchelle fournie par I. Guskov). . . . .	14
1.5	Etape intermédiaire de reconstruction selon une méthode monorésolution (en haut) ou une méthode progressive (en bas). Image extraite de [11]. . . . .	15
1.6	Un maillage semi-régulier multirésolution à différents niveaux de résolution. . . . .	15
1.7	La topologie d'un maillage semi-régulier multirésolution est implicite. . . . .	16
1.8	Les principales techniques de prédiction. . . . .	18
1.9	Codage par bandes de triangles généralisées. . . . .	19
1.10	La suppression de sommets. . . . .	22
1.11	La contraction d'arête. . . . .	22
1.12	La décimation de triangle. . . . .	22
1.13	Principe de l'analyse multirésolution. Images extraites de [1]. . . . .	26
1.14	Raffinement d'un octaèdre (image extraite de [78]). . . . .	28
1.15	Obtention du maillage grossier de base par décimation de sommets. Images extraites de [70]. . . . .	30
1.16	Elimination des points les moins importants. . . . .	30
1.17	Paramétrisation du maillage original sur le maillage grossier. Les points noirs correspondent aux sommets éliminés projetés sur le maillage de base. Image extraite de [70]. . . . .	31
1.18	Histogrammes des angles polaires des coefficients d'ondelettes pour le modèle semi-régulier VENUS (obtenu avec MAPS) et calculés dans le repère global (à gauche) et dans le repère local (à droite) (Image extraite de [63]). . . . .	31
1.19	Principe de construction d'un maillage <i>normal</i> . En pointillés, la surface à remailler. Le segment $[v_0, v_1]$ représente le maillage grossier $\mathcal{M}_0$ . . . . .	32

1.20	Histogrammes des angles polaires des coefficients d'ondelettes du modèle <i>normal</i> VENUS obtenus à l'aide de la transformée de <i>Loop</i> (à gauche), et obtenus à l'aide de la <i>transformée de butterfly</i> (à droite) (Image extraite de [62]). . . . .	32
1.21	Schéma du codeur géométrique proposé. . . . .	35
2.1	Deux objets peuvent avoir la même erreur géométrique "sommet à sommet", et pourtant être visuellement très différents (images extraites de [59]). . . . .	38
2.2	BUNNY représenté par un maillage triangulaire selon deux échantillonnages différents. Objet propriété de l'université de Stanford [4] (maillages fournis par Caltech [18]). . . . .	39
2.3	Le maillage $\mathcal{M}_1$ est construit par subdivision quaternaire des triangles du maillage grossier $\mathcal{M}_0$ . La géométrie $\mathcal{V}_1$ est alors définie par l'ensemble des nouveaux sommets "ajoutés" et par la géométrie $\mathcal{V}_0$ du maillage $\mathcal{M}_0$ . . . . .	41
2.4	Le maillage semi-régulier $\mathcal{M}_1$ est représenté par le maillage $\mathcal{M}_0$ et l'ensemble de détails $\mathcal{D}_1$ . . . . .	42
2.5	La distance $\bar{d}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ n'est pas forcément égale à la distance $\bar{d}(\mathcal{M}', \mathcal{M})$ . Localement une mesure de la distance point-surface peut être très différente. . . . .	43
2.6	Comparaison des distances $\bar{d}(\hat{\mathcal{M}}_{sr}, \mathcal{M}_{sr})$ et $\bar{d}(\mathcal{M}_{sr}, \hat{\mathcal{M}}_{sr})$ en fonction du débit total (en bits par sommet irrégulier) pour l'objet RABBIT. . . . .	47
2.7	Distance point-surface $d(\hat{v}_j, \mathcal{M}_{sr})$ . . . . .	48
2.8	Modification de l'origine et de l'orientation d'un repère local due à la quantification de la géométrie du niveau de résolution inférieure. Une mauvaise quantification des sommets du maillage de base ( $v_0$ et $v_1$ ) modifie la position de $b$ l'origine du repère local relatif au sommet $v_2$ (qui devient $b'$ ). Cela modifie aussi l'orientation du repère local dont les axes dépendent de la normale $n$ à la surface (qui devient $n'$ ). . . . .	49
2.9	Une bonne quantification de la géométrie du niveau de résolution inférieure (les sommets $v_0$ et $v_1$ ) modifie très peu la position de $b$ , et l'orientation de la normale $n$ . Par conséquent, $\varepsilon(v_2)$ est quasiment colinéaire à la normale $n$ . . . . .	50
3.1	Principe d'un codeur ondelettes $M$ -canaux. . . . .	52
3.2	Principe d'un codeur ondelettes $M$ -canaux, avec une décomposition sur deux niveaux. . . . .	53
3.3	Représentation polyphase d'un codeur ondelettes $M$ -canaux. . . . .	55
3.4	Analyse du schéma <i>lifting</i> 2 canaux. . . . .	63
3.5	Synthèse d'un schéma <i>lifting</i> classique. . . . .	64
3.6	Synthèse d'un schéma <i>lifting</i> $M$ -canaux, avec $M = 4$ . $p_i$ et $u_i$ représentent les opérateurs de prédiction et de mise à jour associés au sous-signal $i$ . . . . .	64
3.7	Grille d'échantillonnage triangulaire "par arête" bidimensionnelle. . . . .	66
3.8	Sous-échantillonnage relatif à une grille triangulaire. 4 sous-ensembles sont obtenus. . . . .	66
3.9	Opérateurs de prédiction $p_1$ et de mise à jour $u_1$ du schéma de <i>butterfly lifté</i> . . . . .	67
3.10	<i>Butterfly lifté</i> : comparaison de la qualité du maillage reconstruit pour le modèle RABBIT selon l'utilisation des pondérations. . . . .	70
3.11	<i>Butterfly lifté</i> : comparaison de la qualité du maillage reconstruit pour le modèle HORSE selon l'utilisation des pondérations. . . . .	70
3.12	<i>Butterfly lifté</i> : comparaison de la qualité du maillage reconstruit pour le modèle VENUS selon l'utilisation des pondérations. . . . .	71

3.13	<i>Butterfly lifté</i> : comparaison de la qualité du maillage reconstruit pour le modèle BUNNY selon l'utilisation des pondérations. . . . .	71
3.14	<i>Butterfly non lifté</i> : comparaison de la qualité du maillage reconstruit pour le modèle RABBIT selon l'utilisation des pondérations. . . . .	72
3.15	<i>Butterfly non lifté</i> : comparaison de la qualité du maillage reconstruit pour le modèle VENUS selon l'utilisation des pondérations. . . . .	72
3.16	<i>Butterfly non lifté</i> : comparaison de la qualité du maillage reconstruit pour le modèle SKULL selon l'utilisation des pondérations. . . . .	73
3.17	<i>Butterfly non lifté</i> : comparaison de la qualité du maillage reconstruit pour le modèle MOLECULE selon l'utilisation des pondérations. . . . .	73
3.18	Impacte visuelle de la prise en compte de la non-orthogonalité des filtres (en utilisant l' <i>EQM</i> pondérée comme critère de distorsion de l'allocation binaire) sur l'oreille de BUNNY. Le débit total est de 0,4 bits par sommet. . . . .	74
3.19	Impacte visuelle de la prise en compte de la non-orthogonalité des filtres (en utilisant l' <i>EQM</i> pondérée comme critère de distorsion de l'allocation binaire) sur le nez de HORSE. Le débit total est de 1,2 bits par sommet. . . . .	74
4.1	Algorithme de compression de signal dans un espace transformé. . . . .	77
4.2	Schéma complet du codeur proposé. . . . .	79
4.3	Histogrammes de l'angle polaire des coefficients d'ondelettes de VENUS calculés selon différentes configurations (Images extraites de [63] et de [62] . . . . .	80
4.4	Densité de probabilité typique d'une <i>sous-bande tangentielle</i> et d'une <i>sous-bande normale</i> pour l'objet VENUS (obtenus avec le <i>remailleur normal</i> et le schéma de <i>butterfly non lifté</i> ). . . . .	83
4.5	Principe du codage par plan de bits ( <i>EBCOT</i> ). . . . .	89
4.6	Contexte "pixellique" : voisinage d'un bit dans le cas d'une image. . . . .	89
4.7	Voisinage et notations utilisées pour les contextes. . . . .	90
4.8	Contextes utilisés pour encoder les composantes tangentielles. . . . .	91
4.9	Contexte utilisé pour encoder les composantes normales. . . . .	92
4.10	<i>3D-CBAC</i> versus <i>EBCOT</i> sur le maillage <i>normal</i> HORSE. . . . .	93
4.11	<i>3D-CBAC</i> versus <i>EBCOT</i> sur le maillage <i>normal</i> RABBIT. . . . .	93
4.12	<i>3D-CBAC</i> versus <i>EBCOT</i> sur le maillage <i>normal</i> VENUS. . . . .	94
4.13	<i>3D-CBAC</i> versus <i>EBCOT</i> sur le maillage <i>normal</i> SKULL. . . . .	94
5.1	Courbe <i>PSNR</i> en fonction du débit pour le modèle HORSE. La valeur de <i>BB</i> pour cet objet est 0,253. . . . .	99
5.2	Courbe <i>PSNR</i> en fonction du débit pour le modèle RABBIT (version uniforme). La valeur de <i>BB</i> pour cet objet est 0,093. . . . .	99
5.3	Courbe <i>PSNR</i> en fonction du débit pour le modèle MOLECULE (version uniforme). La valeur de <i>BB</i> pour cet objet est 83,121. . . . .	100
5.4	Courbe <i>PSNR</i> en fonction du débit pour le modèle SKULL. La valeur de <i>BB</i> pour cet objet est 240,617. . . . .	100
5.5	Courbe <i>PSNR</i> en fonction du débit pour le modèle VENUS. La valeur de <i>BB</i> pour cet objet est 1,565. . . . .	101
5.6	Courbe <i>PSNR</i> en fonction du débit pour le modèle FELINE (version uniforme). La valeur de <i>BB</i> pour cet objet est 1,888. . . . .	101
5.7	Comparaison avec d'autres techniques. . . . .	104
5.8	Résultats visuels sur l'objet VENUS. . . . .	105
5.9	Résultats visuels sur l'objet SKULL. . . . .	106
5.10	Résultats visuels sur l'objet DINOSAUR. . . . .	107

5.11	Qualité visuelle de l'objet FELINE quantifié avec le <i>codeur proposé</i> et avec le codeur <i>NMC</i> . Le débit est de 0,38 bit/sommet irrégulier. . . . .	109
5.12	Qualité visuelle de l'objet HORSE quantifié avec le <i>codeur proposé</i> et avec le codeur <i>NMC</i> . Le débit est de 0,48 bit/sommet irrégulier. . . . .	110
5.13	Qualité visuelle de l'objet VENUS quantifié avec le <i>codeur proposé</i> et avec le codeur <i>NMC</i> . Le débit est de 0,74 bit/sommet irrégulier. . . . .	111
5.14	Qualité visuelle de l'objet MOLECULE quantifié avec le <i>codeur proposé</i> et avec le codeur <i>NMC</i> . . . . .	112
5.15	Qualité visuelle de l'objet MOLECULE quantifié avec le <i>codeur proposé</i> et avec le codeur <i>EQMC</i> . Le débit est de 0,89 bits/sommet irrégulier. . . . .	113
6.1	Grille d'échantillonnage correspondant à une grille quinconce bidimensionnelle.	119
6.2	Synthèse d'un schéma <i>lifting</i> à 2 canaux. $p_1$ et $u_1$ représentent les opérateurs de prédiction et de mise à jour appliqués entre les sous-bandes $s_0$ et $s_1$ . . . .	120
6.3	Voisinage utilisé pour calculer les coefficients d'ondelettes sur une grille bidimensionnelle quinconce. . . . .	120
6.4	Elements utilisées pour le calcul de la valeur test $\chi_{k-1}^2$ (pour $k = 5$ cellules).	123
6.5	Densités de probabilités typiques des 3 sous-bandes de coordonnées des coefficients basses fréquences de l'objet VENUS obtenu avec le <i>remailleur normal</i> et le schéma de <i>butterfly non lifté</i> . . . . .	125
6.6	Densité de probabilité typique des 3 sous-bandes de coordonnées des coefficients basses fréquences <i>prédits</i> de l'objet VENUS obtenu avec le <i>remailleur normal</i> et le schéma de <i>butterfly non lifté</i> . . . . .	125
6.7	HORSE original. . . . .	127
6.8	VENUS original. . . . .	128
6.9	RABBIT original. . . . .	128
6.10	FELINE original. . . . .	129
6.11	SKULL original. . . . .	129
6.12	MOLECULE original. . . . .	130
6.13	DINOSAUR original. . . . .	130
6.14	BUNNY original. . . . .	131

---

## Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier les membres du jury : Monsieur le Professeur Michel Barlaud, Monsieur le Professeur Riccardo Leonardi, Monsieur le Professeur Rémy Prost, Monsieur le Professeur Francis Schmitt et Monsieur le Docteur Pierre Alliez pour m'avoir fait l'honneur d'évaluer mes travaux de recherche, et pour leurs remarques qui m'ont permis d'améliorer ce document.

Mes sincères remerciements vont ensuite à mon directeur de thèse Marc Antonini pour m'avoir dirigé et soutenu durant ces 4 années, pour m'avoir fait bénéficier de son expérience et de ses compétences, et qui a par ailleurs toujours essayé de répondre à mes questions et à mes attentes.

Je souhaite ensuite remercier Monsieur le Professeur Michel Barlaud qui m'a accueilli au sein de l'équipe *CReATIVE*, et qui m'a donné les moyens techniques pour mener à bien cette aventure.

Je tiens aussi à remercier Monsieur le Professeur Pierre Bernhard et Monsieur le Professeur Jean-Marc Fédou pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire I3S, qu'ils ont successivement dirigé, afin d'y effectuer cette thèse.

Je remercie aussi tous les membres du laboratoire qui m'ont toujours ouvert la porte de leur bureau pour me conseiller ou m'aider (Eric Debreuve, Pierre Mathieu, Philippe Lahire, Daniel Gaffé, Sylvie Icart, Jean Claude Bermond, Cécile Belleudy, Charles André, Hervé Rix...) ainsi que toutes les personnes qui m'ont fait confiance et qui m'ont permis de faire mes premiers pas dans l'enseignement (Marc Antonini, Louis Andréani, Re-Daniel Gaffé, Thierry Pitarque, Raphaël Cornillon, Jean-Luc Rallo et André Ferrari).

Un très grand remerciement à Micheline, la fée du logis-tique, la papesse de la paperasse, la reine du triple exemplaire, la championne toute catégorie de la gymnastique administrative, ainsi que Viviane et toute l'équipe du satellite administratif.

Je voudrais ensuite remercier l'équipe du bureau 126, c'est-à-dire la toujours très jeune Muriel et le toujours moins jeune Fred ("Precioso", pas "Fred, l'autre !"), qui m'ont toujours soutenu, aidé, épaulé et surtout supporté (!) depuis le début. Je n'aurai pas pu en arriver là sans leur aide, leur disponibilité, leurs encouragements dans les moments de doute, leur bonne humeur (presque toujours!). Je les remercie aussi pour tous ces moments partagés dans le bureau, qui sera d'ailleurs classé monument historique dès que nous n'y serons plus (Enfin, il paraît...).

Je remercie ensuite très chaleureusement :

- ⤵ la deuxième génération de thésard: Ariane, Thomas et Marie, ainsi que la toute nouvelle génération Sylvain et Vincent pour leur aide, leur sympathie, et tous les bons moments partagés ;
- ⤵ les thésards qui ont déjà quitté le navire *CReATIVE* : Christophe, Manuela, Annabelle, Lionel, Marco et Stéphanie ;
- ⤵ tous les footeux qui m'ont permis de me blesser plusieurs fois à la cuisse au cours de matchs de très haute qualité...
- ⤵ tous les doctorants "du deuxième" que j'ai croisés régulièrement, au réfectoire, dans les couloirs, ou près de la machine à café ;
- ⤵ les stagiaires que j'ai pu co-encadrer avec Marc, en particulier Sami, Akram et Alberto ;
- ⤵ Philippe, mon collègue de trajet Nice-Sophia durant plus de deux ans.

Je tiens aussi à remercier la Région PACA et la société Opteway qui m'ont financé durant les 3 premières années de recherche.

Bien évidemment, je ne pourrais terminer sans remercier mes parents, ainsi que tous les membres de ma famille qui m'ont toujours soutenu et grâce à qui j'ai pu arriver au bout de cette aventure avec sérénité.

Enfin, mes plus grands remerciements reviennent à une certaine jeune fille qui a toujours été à mes côtés, dès le début de cette aventure, et qui m'a toujours encouragé, épaulé, soutenu, aidé, assisté, et supporté dans les moments difficiles, et ce jusqu'au bout. Je la remercie de tout mon coeur pour ses sacrifices, sa patience et sa compréhension dans les moments de stress ou d'urgence. Merci pour ta joie de vivre et ton enthousiasme, merci mille fois... Sabine.

---

# Abbréviations

## Mesures de qualité

- *EQM* : Erreur Quadratique Moyenne (*MSE* en anglais) ;
- *PSNR* : Peak Signal Noise Ratio (*PRSB* en français - Pic du Rapport Signal à Bruit) exprimé en décibels (*dB*).

$$PSNR = 20 \log_{10} \left( \frac{BB}{d_S} \right),$$

avec *BB* la longueur de la diagonale de la boîte englobante de l'objet, et *d<sub>S</sub>* la *distance surface-surface* entre le maillage d'entrée et le maillage de sortie ;

- *TC* : Taux de Compression. Rapport entre la taille binaire du maillage d'entrée et la taille binaire du maillage compressé.

$$TC = \frac{|\mathcal{V}_{ir}| \cdot 3 \cdot 32 + |\mathcal{T}_{ir}| \cdot 3 \cdot \log_2[|\mathcal{V}_{ir}|]}{\text{taille binaire après compression}};$$

avec respectivement,  $|\mathcal{V}_{ir}|$  et  $|\mathcal{T}_{ir}|$  le nombre de sommets et de triangles du maillage d'entrée. Le nombre 32 correspond au nombre de bits utilisés pour exprimer un flottant.

## Méthodes de référence

- *NMC* : méthode de compression géométrique de Khodakovsky et Guskov, *Normal Mesh Compression* [62] ;
- *EQMC* : méthode de compression géométrique de Lavu *et al.*, *Estimation-Quantization Geometry Coding using Normal Meshes* [69] ;
- *MAPS* : méthode de remaillage de Lee *et al.*, *Multiresolution Adaptive Parameterization of Surfaces* [70] ;
- *PGC* : méthode de compression géométrique de Khodakovsky *et al.*, *Progressive Geometry Compression* [63] ;
- *PLT* : méthode de compression progressive sans pertes de Alliez et Desbrun, *Progressive Compression for Lossless Transmission of Triangle Meshes* [9] ;
- *TG* : méthode de compression monorésolution de Touma et Gotsman, *Triangle Mesh Compression* [118] ;
- *EBCOT* : codeur arithmétique contextuel par plan de bits de Taubman [115, 116, 117] ;





---

# Introduction générale

Avec le développement des réseaux de télécommunications et l'accroissement de leur rapidité, nous assistons à une évolution remarquable de la nature de l'information manipulée. Actuellement, plus de la moitié des données sont créées directement sous forme numérique. Un des domaines les plus prolifiques est le domaine du *multimédia*. Avec l'apparition des techniques d'échantillonnage, de nombreux travaux de recherche ont été effectués sur la manière de représenter mathématiquement et/ou numériquement la réalité quotidienne. Ainsi, nous avons pu tout d'abord représenter informatiquement de manière efficace les sons et les images. Par la suite, l'espace de stockage et les performances des cartes graphiques ont permis le passage à la vidéo.

Plus récemment, le développement croissant de l'infographie et de la vision a permis une modélisation tridimensionnelle du monde dans lequel nous vivons. Le but est de modéliser un objet ou une scène comportant plusieurs objets à l'aide d'une description géométrique en exploitant des primitives géométriques (telles que des points, des polygones, des volumes, etc.) positionnées dans l'espace tridimensionnel euclidien. Un objet tridimensionnel peut alors être représenté par un nuage de points dans l'espace, par un maillage volumique composé de polyèdres, ou par un maillage surfacique composé de polygones plongé dans l'espace.

Ces objets géométriques sont désormais omniprésents comme le prouvent les nombreux domaines dans lesquels ils sont exploités :

- la *médecine* : la modélisation à la fois géométrique et physiologique d'organes permet d'améliorer les diagnostics (voir figure 1), mais aussi de développer des techniques prometteuses telles que la chirurgie à distance et l'apprentissage par chirurgie virtuelle ;
- la *CAO (Conception Assistée par Ordinateur)* : l'intérêt est de représenter des objets complexes à l'aide de primitives simples telles que les polygones, afin d'améliorer la fabrication et de maximiser l'efficacité de ces objets. La CAO est très répandue dans le domaine de l'industrie automobile, aéronautique ou aérospatiale, mais aussi en architecture ou en design de produits (voir figure 2) ;
- la *modélisation de terrains* : à partir d'images fixes satellitaires par exemple, il est possible de représenter précisément la géométrie de la Terre, de planètes ou de tout autre élément géographique. Ces modélisations de terrains sont exploitées en cartographie, géologie, astronomie, etc. ;
- la *simulation* et les *expériences virtuelles* : cela permet d'étudier le comportement et l'évolution d'un phénomène physique (représenté à l'aide de fonctions mathématiques) sur des objets concrets ou un environnement réel (représentés par des modèles géométriques). Cela permet des expériences efficaces à moindre coût ;

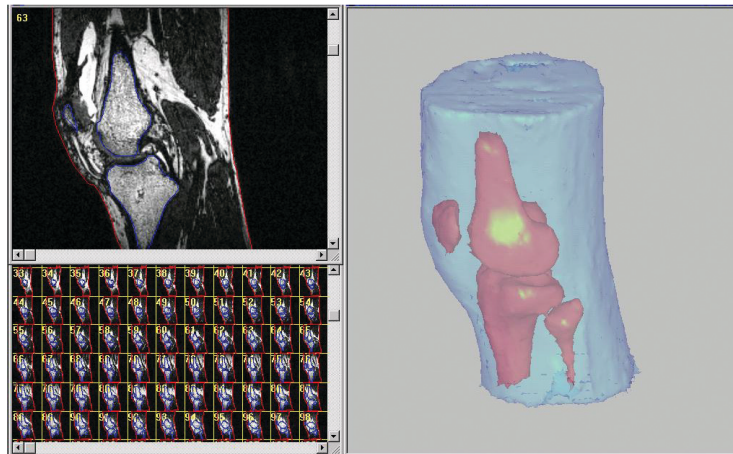


FIG. 1 – Exemple d'objet géométrique tridimensionnel créé à partir d'images fixes pour l'aide au diagnostic. Image extraite de [2].

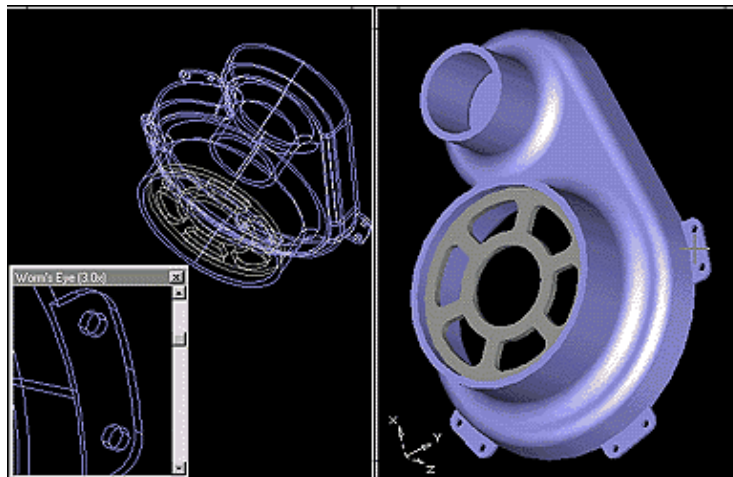


FIG. 2 – Création d'objet par CAO. Image extraite de [3].

- la *réalité augmentée* : cette technique permet de représenter et d'intégrer des modèles géométriques tridimensionnels dans un espace réel. Ainsi, un architecte pourra visualiser un projet directement sur son site de construction, afin d'en étudier l'impact sur l'environnement ;
- les *jeux vidéos* : il s'agit certainement du domaine le plus innovateur dans la modélisation géométrique tridimensionnelle. En effet, c'est un des domaines les plus friants de nouvelles technologies, toujours en quête d'un réalisme optimal ;
- le *cinéma* : les modèles tridimensionnels sont utilisés pour représenter en image de synthèse des décors ou des personnages extrêmement réalistes. Leurs applications vont du cinéma traditionnel dans lequel on inclut des objets virtuels, aux dessins animés entièrement réalisés à l'aide d'images de synthèse (voir figure 3) ;
- les *visites virtuelles* : à la fois culturelles et éducatives, ces visites permettent de se promener dans un musée ou de visualiser un monument à l'autre bout de la terre depuis chez soi.

Parmi les différentes représentations énoncées ci-dessus, les maillages surfaciques sont



FIG. 3 – Personnage de dessins animés. Image propriété de Pixar [6].

en passe de devenir la représentation standard pour modéliser les objets géométriques de par leur simplicité et leur efficacité.

Bien que la taille des disques durs et la vitesse de transmission des réseaux ne cessent d'augmenter, la *compression* reste une technique indispensable pour stocker, manipuler, ou transmettre plus aisément des données numériques de plus en plus volumineuses. Cela est d'autant plus vrai pour les objets géométriques comme les maillages surfaciques.

En effet, ces maillages sont composés à la fois d'une *information géométrique* (des sommets situés dans l'espace euclidien traduisant la forme générale de la surface) mais aussi d'une *information topologique* (traduisant la manière dont sont connectés les sommets).

Cette double nature combinatoire permet de représenter n'importe quelle forme géométrique et fait du maillage surfacique un outil puissant pour modéliser les objets complexes tridimensionnels. Cependant, cela implique aussi une quantité importante d'informations à conserver pour une représentation fine et détaillée. En effet, il est nécessaire de conserver à la fois l'information géométrique et l'information topologique contrairement aux images fixes ou à la vidéo, où seule l'information pixellique est nécessaire (c'est-à-dire la valeur des pixels).

L'exemple le plus parlant est le projet *Michelangelo* [73]. Ce projet a permis l'acquisition et la modélisation surfacique précise de nombreuses statues telles que *David* ou *Saint-Mathieu* de Michelangelo (voir figure 4(a)). Son modèle tridimensionnel final illustré par la figure 4(b), possède plus de 380 millions de triangles (386 488 573 triangles pour être précis). Sa représentation non compressée nécessite un coût de stockage de plusieurs Gigaoctets. Il apparaît donc évident que la compression des maillages représente un enjeu primordial. Des efforts considérables sont d'ailleurs effectués depuis quelques années pour développer des techniques de compression toujours plus efficaces [11].

Dans le domaine de la compression de données multimédia, deux approches sont envisageables :

- la *compression sans perte* : cette approche permet une reconstruction exacte du signal original une fois la compression et la décompression effectuée. Les outils les plus utilisés dans ce domaine sont la prédiction et le codage entropique qui transforment



(a) Statue de Saint-Matthieu.

(b) Modèle tridimensionnel final (plus de 380 millions de triangles!).

FIG. 4 – *Acquisition et modélisation de la statue de Saint-Mathieu (propriété du projet Michelangelo [73]).*

les données en une séquence de bits la plus compacte possible. Depuis les travaux de Huffman en 1952 [49] et ceux de Rissanen durant les années 70 qui proposa le *codage arithmétique* [97], de nombreux codeurs entropiques ont été proposés. Citons par exemple, le codeur de Ziv et Lempel (1977) [129] ou le codeur arithmétique contextuel par plan de bits de Taubman *et al.* pour les images ou la vidéo [115, 116, 117] ;

- la *compression avec pertes* : cela consiste à comprimer le signal en s'autorisant des pertes d'information. Cette approche permet d'atteindre des taux de compression beaucoup plus importants puisque l'on choisit généralement le débit désiré. Plus le signal d'origine sera compressé, plus le signal décodé sera dégradé.

Il paraît clair que cette approche est intéressante uniquement si les pertes sont contrôlées. Pour cela, des transformées sont fréquemment utilisées dans les algorithmes de compression de signaux, comme par exemple la transformée en cosinus discrète (utilisée dans les standards *JPEG* [53], *MPEG* [54], ou *JVT/H.26L* [7]) ou la transformée en ondelettes [42, 80, 81] (utilisée dans le standard *JPEG2000* [55, 56]). Le but d'une transformée est de projeter le signal dans un espace dans lequel il est plus facile à compresser. Après la transformée, le signal se situe dans un domaine fréquentiel (voire spatio-fréquentiel pour les ondelettes), domaine dans lequel certaines fréquences peuvent être fortement réduites ou même éliminées sans que cela soit perceptible. Ces méthodes avec pertes sont donc des méthodes performantes et flexibles qui permettent d'adapter la qualité du signal reconstruit en fonction des contraintes de l'utilisateur en termes de volumes de données à transmettre ou à stocker.

Malheureusement, la représentation complexe des maillages surfaciques (information géométrique et topologique) entraîne que la compression n'est pas aussi simple et évidente que dans le domaine du son, de l'image, ou de la vidéo. La nécessité de conserver l'information topologique pour la reconstruction du maillage vient du fait que l'échantillonnage d'un maillage est irrégulier (tous les sommets n'ont pas forcément le même nombre de voisins) contrairement aux données précédemment citées positionnées selon des grilles régulières. Ainsi, un maillage triangulaire doit être défini à l'aide d'une liste de sommets décrits par leur position dans l'espace tridimensionnel euclidien (3 nombres flottants) et une liste de triangles décrits par les indices des sommets formant le triangle (3 entiers par triangle). Une représentation naïve et brute d'un maillage est donc extrêmement lourde, ce qui implique que la méthode de compression doit prendre en compte la complexité de cette représentation.

Jusqu'à présent, la solution la plus fréquemment utilisée pour compresser efficacement les maillages était de réduire au maximum la redondance présente dans la topologie. Cela s'effectue généralement à l'aide d'un parcours canonique le long des arêtes ou des triangles (encodage de la connectivité), suivi d'une quantification à précision fixe de la position des sommets (encodage de la géométrie) à l'aide d'une technique de prédiction géométrique. Cette technique exploite la corrélation spatiale des sommets parcourus tout au long du codage de la topologie afin de réduire l'entropie de la géométrie. Ces méthodes permettent un codage sans pertes puisque la topologie est totalement conservée et que la géométrie ne subit aucune dégradation (à part la quantification à précision fixe). Cependant, cette approche permet d'atteindre des taux de compression peu élevés puisque l'on se focalise sur l'optimisation du codage de la connectivité et qu'aucune perte n'est possible.

Cependant, de nombreux travaux actuels considèrent le maillage original comme *une*

instance parmi d'autres de la géométrie de la surface. Dans ce cas, on parle généralement de *compression géométrique* et non plus de *compression de maillages* [11]. La *compression géométrique* considère que la géométrie est la composante la plus importante d'un maillage, et que la connectivité peut par conséquent être modifiée pour optimiser l'encodage de la géométrie.

L'étape primordiale des méthodes de *compression géométrique* est l'étape de remaillage qui modifie et réduit à son minimum l'information topologique nécessaire pour la reconstruction de l'objet. Bien évidemment ces méthodes altèrent la topologie initiale et ne sont donc pas intéressantes dans des domaines d'applications où la connectivité est aussi importante que la position des sommets. Cependant, de nombreux domaines ne s'intéressent qu'à la forme géométrique de l'objet, et peu importe la manière dont sont connectés les sommets du moment que l'objet "remaillé" est visuellement identique à l'original.

Les méthodes actuelles de remaillage les plus pertinentes sont des remailleurs qui transforment un maillage triangulaire irrégulier en un maillage *semi-régulier multirésolution* [70, 45]. Un maillage semi-régulier multirésolution est composé d'un maillage de base très simple (version grossière du maillage irrégulier) et de plusieurs ensembles de sommets qui vont permettre une fois ajoutés de manière régulière sur le maillage de base, de retrouver un maillage très fin et visuellement semblable au maillage original.

Cette représentation *multiéchelle* a plusieurs avantages. Le premier est de permettre un codage, une transmission, et un décodage progressif des maillages. En effet, une réduction de l'information à transmettre n'est pas le seul objectif d'une chaîne de compression optimale et le développement des réseaux de communications influe sur la mise au point de méthodes de compression *progressive*. Le volume des maillages actuels et la bande passante limitée des réseaux encouragent le fait que l'on puisse avoir très rapidement au décodage un aperçu grossier du maillage transmis. Ceci est rendu possible avec l'utilisation de maillages multiéchelles tels que les maillages *semi-réguliers multirésolutions*. Ils permettent de transmettre tout d'abord le maillage de base à moindre coût, puis de transmettre les données supplémentaires raffinant l'objet jusqu'à obtention du maillage de plus haute résolution. La grande diversité des réseaux actuels et des supports pouvant envoyer ou recevoir des données multimédia donne aux méthodes progressives un avantage indéniable face aux méthodes monorésolutions.

De plus, en rendant l'échantillonnage "quasi-régulier" on peut appliquer des outils performants d'analyse multirésolution tels que la *transformée en ondelettes*, fréquemment utilisée pour le traitement des images ou de la vidéo. Cela permet d'obtenir des méthodes de compression progressive et multirésolution de maillages surfaciques très performantes [77, 78, 63, 62].

L'idée basique de ces méthodes de compression basées sur l'analyse multirésolution de maillages semi-réguliers est d'optimiser le compromis entre la taille de la trame binaire et la qualité visuelle du maillage reconstruit. Ceci est effectué en contrôlant et en minimisant les pertes dues à la quantification de la géométrie en fonction d'un certain débit ou d'une certaine taille de trame binaire. Ce principe appelé *allocation binaire*, est un outil essentiel pour optimiser les codeurs exploitant l'analyse multirésolution. L'idée est de quantifier finement la géométrie (les coefficients d'ondelettes) qui apportent des détails visuels et de quantifier grossièrement voire même négliger la géométrie qui apporte peu de détails. Bien que l'allocation binaire soit fréquemment utilisée pour la compression de l'image ou de la vidéo, elle est encore peu présente parmi les méthodes de compression de maillages triangulaires [21, 74, 65, 105, 69].

Le but de ce mémoire est donc de proposer un nouvel algorithme de compression pour les maillages denses (contenant beaucoup de sommets) et très détaillés. Les principaux objectifs que nous nous sommes fixés sont les suivants :

- ⤵ l'utilisation d'un outil d'analyse multirésolution performant tel que la transformée en ondelettes ;
- ⤵ la scalabilité lors du décodage et de l'affichage des maillages ;
- ⤵ des taux de compression élevés pour que les maillages puissent être transmis et décodés à une vitesse raisonnable même sur des bandes passantes limitées. Cela implique que la connectivité peut être modifiée et que les pertes d'informations sont autorisées ;
- ⤵ une optimisation de la qualité visuelle des objets reconstruits par rapport au taux de compression désiré ;
- ⤵ un codeur performant et malgré tout peu coûteux en temps et en mémoire.

L'ensemble de ces objectifs peut être satisfait par la conception d'un codeur géométrique inspiré d'un schéma type d'algorithme de compression de signal dans un espace transformé (voir figure 5).

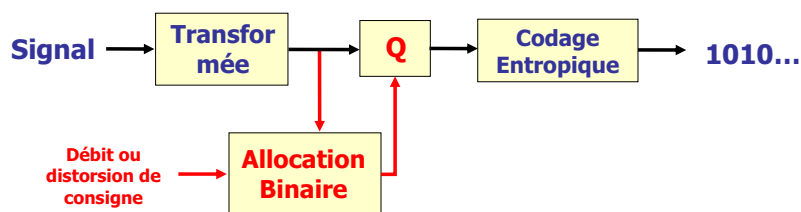


FIG. 5 – Schéma classique d'un algorithme de compression dans un espace transformé.

Les principales étapes d'un schéma type d'algorithme de compression sont :

- ⤵ la *transformation* : la transformée a pour but de projeter le signal dans un espace plus propice à la compression ;
- ⤵ l'*allocation* : cette procédure a pour objectif d'optimiser le compromis débit-distorsion lors du codage en déterminant les meilleurs paramètres de quantification des coefficients en fonction d'un débit ou d'une distorsion cible ;
- ⤵ la *quantification* ( $Q$ ) : scalaire ou vectorielle, cette étape consiste à projeter l'ensemble non dénombrable des coefficients ou des vecteurs de coefficients dans un ensemble dénombrable (fini) de représentants. Ensuite, chaque coefficient (ou vecteur de coefficients) est remplacé par le représentant le plus proche selon une certaine métrique ;
- ⤵ le *codage entropique* : cette étape transforme la suite des représentants obtenus par la quantification en une trame binaire la plus compacte possible.

Notre but étant de compresser des maillages triangulaires denses et très détaillés, nous proposons une étape de remaillage avant la transformation produisant une version semi-régulière du maillage original. Ainsi, nous satisfaisons les trois premiers objectifs : scalabilité, analyse multirésolution, et pertes autorisées [63].

Pour optimiser la qualité visuelle de l'objet reconstruit, il faut pouvoir l'évaluer. Pour cela, il est nécessaire de sélectionner un critère de distorsion pour mesurer l'erreur de reconstruction après quantification de la géométrie. Plusieurs critères de distorsion ont déjà



été exploités parmi les méthodes de compression de maillages irréguliers [65, 59, 79, 106]. Malgré leur efficacité, ces métriques ont l'inconvénient d'être calculées "sommets-à-sommets" et ne peuvent donc pas s'appliquer si la topologie est modifiée durant l'encodage. En ce qui nous concerne, ce type de critère est inapplicable puisque nous avons choisi d'introduire un remaillieur dans notre algorithme modifiant la topologie.

Le critère le plus fréquemment utilisé pour évaluer l'efficacité d'une méthode basée sur le remaillage est la racine carrée de l'Erreur Quadratique Moyenne (*EQM*) entre deux surfaces [22, 14] que nous appellerons par la suite la *distance surface-surface*. Cette mesure, basée sur la distance de *Hausdorff*, traduit la différence géométrique entre deux maillages, et ce indépendamment de l'échantillonnage et de la connectivité. Au lieu de considérer l'erreur visuelle comme une métrique basée sur les sommets, l'erreur visuelle est considérée comme une distance entre deux formes géométriques. On retrouve ici l'idée maîtresse de la *compression géométrique* qui considère que le maillage n'est qu'une instance de la géométrie d'une surface. Cette métrique est d'ailleurs utilisée pour valider l'efficacité des codeurs géométriques les plus récents [63, 62, 105, 69].

Cependant, la *distance surface-surface* est un lourd processus d'un point de vue calculatoire. Une estimation de cette distance est donc préférable si l'on souhaite une allocation peu coûteuse et par conséquent un codeur rapide.

Pour pallier le problème de complexité, nous proposons ici une estimation basée sur l'erreur de quantification des coefficients d'ondelettes. Puis, nous verrons que cette estimation permet l'utilisation de modèles théoriques pour le débit et la distorsion de chaque sous-bande de coefficients d'ondelettes qui dépendent des statistiques des coefficients.

Ainsi, nous pourrions concevoir une allocation binaire performante pour le codage multi-résolution de maillages triangulaires dont l'objectif sera d'obtenir le meilleur quantificateur pour chaque sous-bande de coefficients afin que la qualité visuelle de l'objet reconstruit soit maximisée sous la contrainte d'un débit total fixé. Cela permettra d'optimiser la quantification de la géométrie et d'améliorer la qualité visuelle de l'objet reconstruit. De plus, l'utilisation de modèle théorique nous permettra d'obtenir une allocation basée modèle rapide et de très faible complexité calculatoire.

Expérimentalement, nous montrerons que l'algorithme de compression géométrique proposé dans ce mémoire (incluant l'allocation binaire proposé) donne des résultats meilleurs en terme de *PSNR* que toutes les méthodes actuelles [63, 9, 62, 69]. le codeur proposé apporte un gain pouvant atteindre 7,5 *dB* à bas débits par rapport aux codeurs géométriques les plus efficaces [62, 69].

## Plan du mémoire

Dans un premier chapitre, nous ferons une présentation préalable des notions sur les maillages triangulaires nécessaires pour appréhender le contenu de nos travaux ainsi qu'une classification des différentes méthodes de compression pour maillages triangulaires (section 1.1). Puis, nous présenterons un état de l'art complet des méthodes de compression (section 1.2, 1.3, et 1.4), et plus particulièrement des méthodes basées sur l'analyse multirésolution et la transformée en ondelettes (section 1.5).

Dans le chapitre 2, nous traiterons du choix du critère de qualité qui sera utilisé lors de l'allocation pour évaluer l'erreur de reconstruction sur le maillage reconstruit. Après avoir choisi un critère adapté à nos objectifs, c'est-à-dire la *distance surface-surface* entre le maillage original et le maillage reconstruit, nous montrerons comment sous certaines

hypothèses cette distance peut être estimée à partir de l' $EQM$  calculée sur les sommets du maillage semi-régulier (obtenu à l'aide d'une technique de remaillage).

Puis, après avoir décrit le principe d'un codeur ondelettes  $M$ -canaux (section 3.1), nous montrerons dans un troisième chapitre comment généraliser la formule définissant l' $EQM$  d'un signal multidimensionnel quantifié par un codeur ondelettes  $M$ -canaux, et ce en fonction des erreurs de quantification des coefficients d'ondelettes (section 3.2). Nous mettrons en évidence que l' $EQM$  relative à la géométrie d'un maillage semi-régulier à travers une transformée en ondelettes peut s'exprimer comme une somme pondérée des  $EQM$  des sous-bandes de coefficients (les pondérations introduites sont dues à la non-orthogonalité des filtres de la transformée en ondelettes). Ainsi, nous pourrions estimer la *distance surface-surface* de manière efficace et rapide uniquement à partir des erreurs de quantification des coefficients d'ondelettes. Dans la section 3.3, nous montrerons que la formulation proposée dans ce mémoire pour calculer les pondérations est particulièrement bien adaptée pour une transformée basée sur un schéma *lifting*. Les valeurs de ces pondérations seront ensuite calculées pour les deux principaux schémas *lifting* utilisés pour l'analyse des maillages triangulaires. Enfin, nous validerons l'efficacité de ces pondérations dans la section 3.4.

Dans le chapitre 4, nous présentons tout d'abord l'algorithme complet du codeur géométrique proposé dans ce mémoire (section 4.1). Puis, nous expliquerons la manière dont les coefficients d'ondelettes vont être organisés lors de l'allocation pour un codage pertinent de l'information géométrique (section 4.2). A partir de cette organisation et de la formule de l' $EQM$  définie au chapitre précédent, nous déduirons le critère de distorsion retenu et adapté à la géométrie d'un maillage semi-régulier multirésolution (section 4.3). Ensuite, nous développerons la théorie concernant l'allocation binaire basée modèle qui va permettre de minimiser l'erreur de reconstruction quel que soit le débit imposé (section 4.4). Pour finir, un codeur arithmétique contextuel original ayant pour but d'encoder les coefficients d'ondelettes quantifiés sera présenté, ainsi que des résultats expérimentaux montrant le gain relatif à l'utilisation de ce codeur (section 4.5).

Enfin, dans le chapitre 5, nous vérifierons expérimentalement l'efficacité de l'allocation et du codeur proposé en comparant les résultats obtenus dans ce mémoire avec les méthodes les plus performantes présentées dans l'état de l'art.

Pour conclure, nous résumerons les principales contributions présentées dans ce mémoire et proposerons les principales perspectives pour de futurs travaux.



## Chapitre 1

---

# Compression de maillages surfaciques : notions générales et état de l'art

Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord quelques notions et propriétés sur les maillages triangulaires nécessaires pour appréhender le contenu de nos travaux ainsi qu'une classification des différentes méthodes de compression pour maillages triangulaires (section 1.1). Ensuite, nous faisons un état de l'art complet des méthodes de compression monorésolutions (section 1.2), des méthodes progressives exploitant une simplification séquentielle (section 1.3), des méthodes progressives basées sur la décomposition spectrale (section 1.4), et enfin des méthodes basées sur l'analyse multirésolution et en particulier la transformée en ondelettes (section 1.5).

## 1.1 Notions générales sur les maillages triangulaires

### 1.1.1 Représentation d'un objet tridimensionnel

La représentation d'un objet géométrique tridimensionnel peut se faire de différentes façons. Les structures les plus répandues sont :

- les ensembles de points ;
- les maillages volumiques ;
- les maillages surfaciques.

La représentation volumique est un objet "plein" composé de polyèdres dans un espace tridimensionnel, alors qu'un maillage est une représentation de la surface de l'objet. Ce contour est partitionné en un ensemble d'éléments polygonaux. Les polygones composants le maillage peuvent être des triangles, des quadrangles, des polygones quelconques, etc. (voir figure 1.1). Lors de nos travaux, nous nous sommes focalisés sur les maillages polygonaux, et en particulier les maillages triangulaires.

### 1.1.2 Maillages surfaciques triangulaires

#### 1.1.2.1 Définitions

Un maillage triangulaire est décrit à l'aide d'un ensemble de triangles représentant l'enveloppe de l'objet qu'il représente. Les points des triangles sont appelés *sommets* (ou *noeuds*), et sont reliés entre eux par les *arêtes* (ou *arcs*), qui forment les triangles. Les sommets correspondent à l'*information géométrique* du maillage (la forme générale de l'objet), et les arêtes correspondent à l'*information topologique* (qui traduit la manière dont sont connectés les sommets). Dans de nombreux domaines, d'autres informations peuvent s'ajouter à ces deux principales informations : des textures, des couleurs pour améliorer la

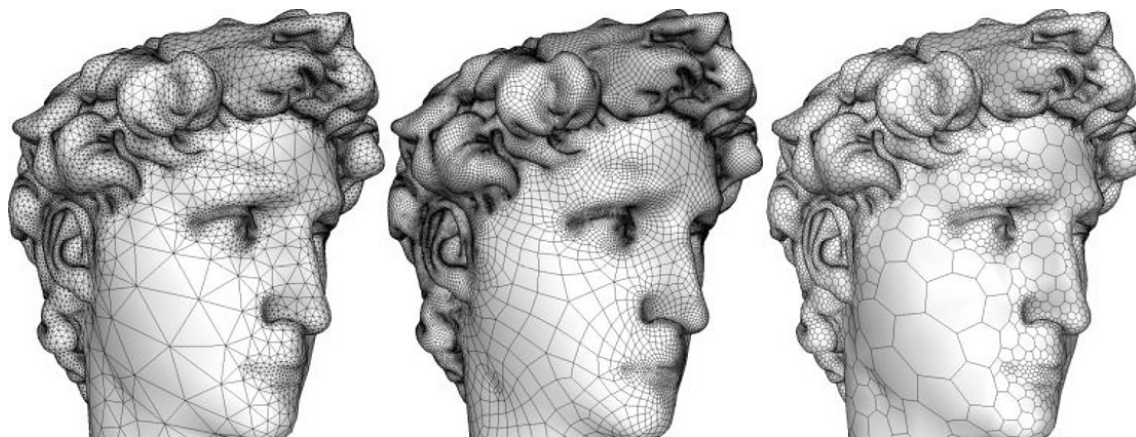


FIG. 1.1 – L'objet DAVID HEAD représenté à l'aide de triangles, de quadrangles ou de polygones (Objet propriété du projet Michelangelo [73], image extraite de [11]).

modélisation et le rendu de l'objet, voire même des informations concernant la normale à la surface ou la courbure en chaque sommet qui peuvent faciliter la visualisation des objets.

Dans ce mémoire, nous nous limiterons à l'étude et à la compression des *attributs géométriques* des maillages triangulaires, c'est à dire les sommets et les triangles. Par la suite, lorsque nous parlerons d'objets tridimensionnels, de maillages triangulaires, ou de maillages surfaciques nous entendrons *maillages surfaciques triangulaires représentant un objet tridimensionnel*.

### 1.1.2.2 Représentation naïve d'un maillage triangulaire

La représentation naïve et intuitive d'un maillage triangulaire est la suivante :

- une liste de sommets définis par leur position dans l'espace euclidien (*information géométrique*) ;
- une liste de triangles définis à l'aide des indices des sommets composant chaque triangle (*information topologique*).

La figure 1.2(a) montre un exemple de maillage triangulaire basique et sa représentation naïve. Les triangles sont très souvent orientés, c'est-à-dire que pour chaque triangle les indices s'énumèrent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (voir figure 1.2(a)).

En général, les coordonnées sont des nombres réels (flottants codés sur 32 bits) qui coûtent  $3 \cdot 32$  bits par sommet. Les triangles nécessitent  $3 \cdot \log_2[V]$  bits par triangle,  $V$  étant le nombre de sommets. Il existe de nombreux formats décrivant les maillages non compressés. Parmi les plus connus :

- le format *IV* [127] ;
- le format *VRML* (Virtual Reality Modeling Language) [114] ;
- le format *SMF* (Simple Model File) [34] ;
- *OFF*, *PLY*, etc.

### 1.1.3 Quelques propriétés concernant les maillages

#### 1.1.3.1 Régularité des maillages

Une propriété importante des maillages triangulaires est la *régularité* du voisinage. Cette régularité est liée à la *valence* des sommets, c'est-à-dire le nombre d'arêtes incidentes

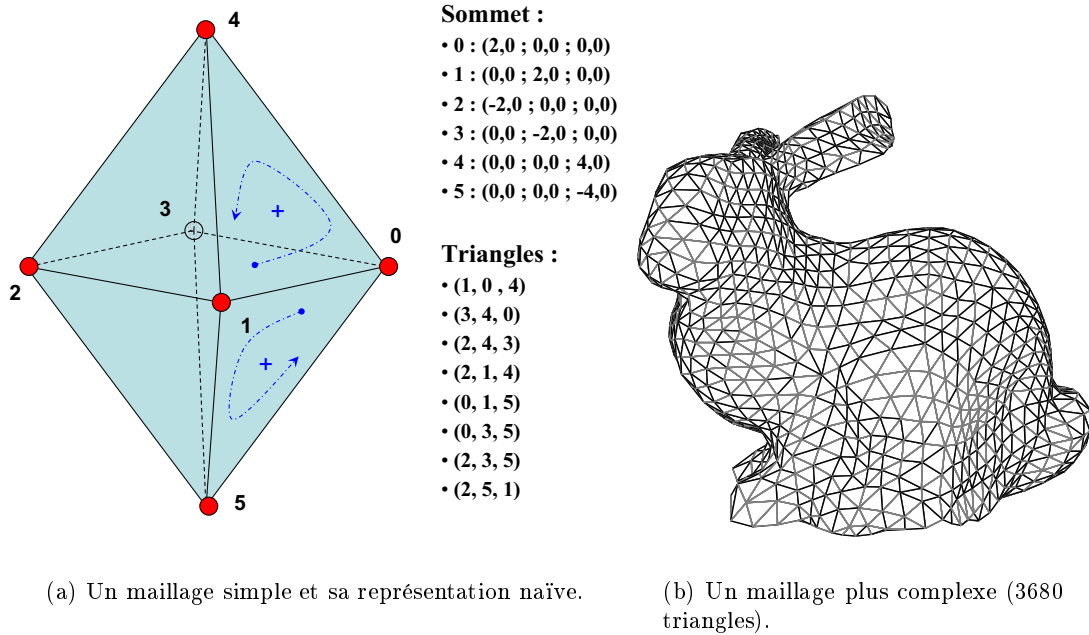


FIG. 1.2 – Exemple de maillages triangulaires.

à chaque sommet (autrement dit le nombre de sommets voisins). Il existe trois types de maillage :

- ⤵ les *maillages irréguliers* : aucune cohérence dans la manière de connecter les sommets. Par conséquent tous les sommets ont une valence différente : voir figure 1.3(a) ;
- ⤵ les *maillages réguliers* : tous les sommets ont la même valence, en général une valence de 6 (six sommets incidents) : voir figure 1.3(b) ;
- ⤵ les *maillages semi-réguliers* : seul un nombre faible de sommets sont irréguliers, les autres ayant tous la même valence (voir figure 1.3(c)).

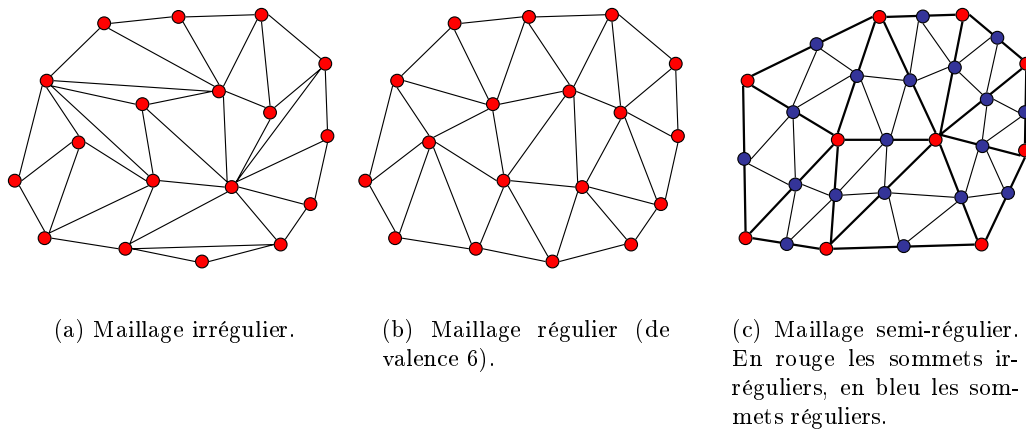


FIG. 1.3 – Les différents types de maillage en fonction de leur régularité.

### 1.1.3.2 Les maillages multiéchelles

Les exemples présentés dans la figure 1.2 sont des maillages *monorésolutions* : le maillage ne peut pas être plus ou moins détaillé et une version globale approximée n'est pas possible. Les maillages *multiéchelles* (on parle aussi de maillages *hiérarchiques* ou *multirésolutions*) résolvent ce problème. Ces maillages ont une structure telle qu'il est possible d'obtenir le maillage original à différentes *résolutions*. Il est donc possible d'afficher un même objet de manière plus ou moins détaillée, comme le montre la figure 1.4.

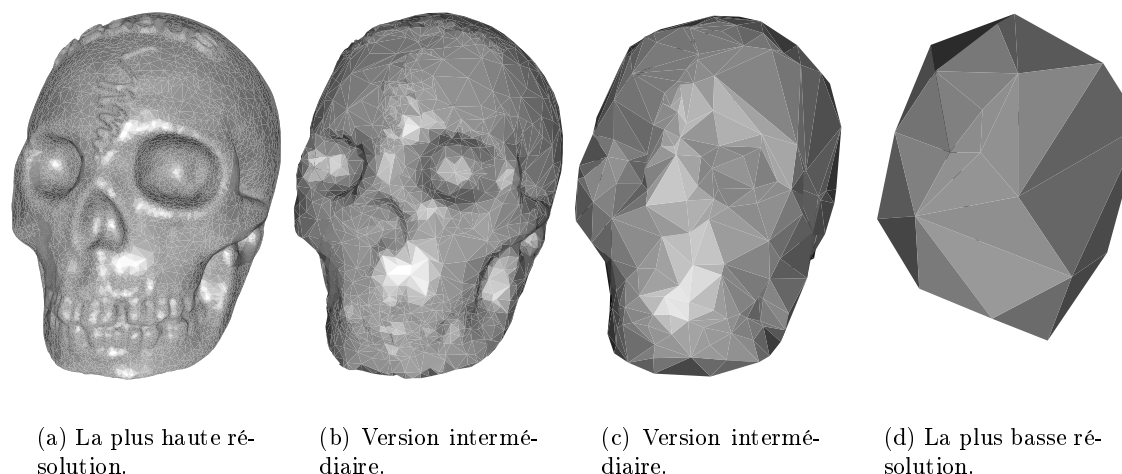


FIG. 1.4 – Un maillage multiéchelle à différents niveaux de résolution. Objet propriété de Headus Inc. [5] (version multiéchelle fournie par I. Guskov).

Un maillage multiéchelle est composé d'un maillage grossier et de plusieurs niveaux d'information permettant de raffiner le maillage grossier jusqu'à sa version finale, la plus fine. Cette représentation multiéchelle des maillages possède plusieurs intérêts :

- la scalabilité des résolutions, permettant la progressivité de l'affichage, de la compression, de la décompression, ou de la transmission ;
- L'adaptation de la résolution en fonction du support concerné ;
- différents niveaux de détails sont possibles, en fonction du zoom effectué sur l'objet ;
- en cas de rupture lors de la compression, de la transmission ou de la décompression des détails, l'objet peut quand même être globalement visualisé, contrairement aux maillages monorésolutions (voir figure 1.5).

### 1.1.4 Les maillages semi-réguliers multirésolutions

Les *maillages semi-réguliers multirésolutions* sont des maillages multiéchelles de plus en plus répandus pour représenter les objets tridimensionnels. Ils sont très utilisés depuis 1998 [70, 63, 45, 62, 69, 105]. Un format leur est d'ailleurs consacré, le format "DAT" [17]. Ils ont les mêmes avantages que les maillages multiéchelles présentés ci-dessus, mais en plus ils ont la particularité de réduire l'information topologique au minimum.

La particularité de cette représentation multirésolution est que l'information topologique nécessaire pour passer d'une résolution à l'autre est implicite : la seule information topologique utile est celle du maillage grossier [17]. Cela est rendu possible en utilisant une technique de *subdivision quaternaire*. Le principe est le suivant : un sommet est ajouté au



FIG. 1.5 – *Etape intermédiaire de reconstruction selon une méthode monorésolution (en haut) ou une méthode progressive (en bas). Image extraite de [11].*

milieu de chaque arête. Ainsi, chaque triangle du maillage grossier est divisé en quatre sous-triangles, et ce plusieurs fois de suite, jusqu'à obtenir le maillage le plus fin (voir figure 1.6).

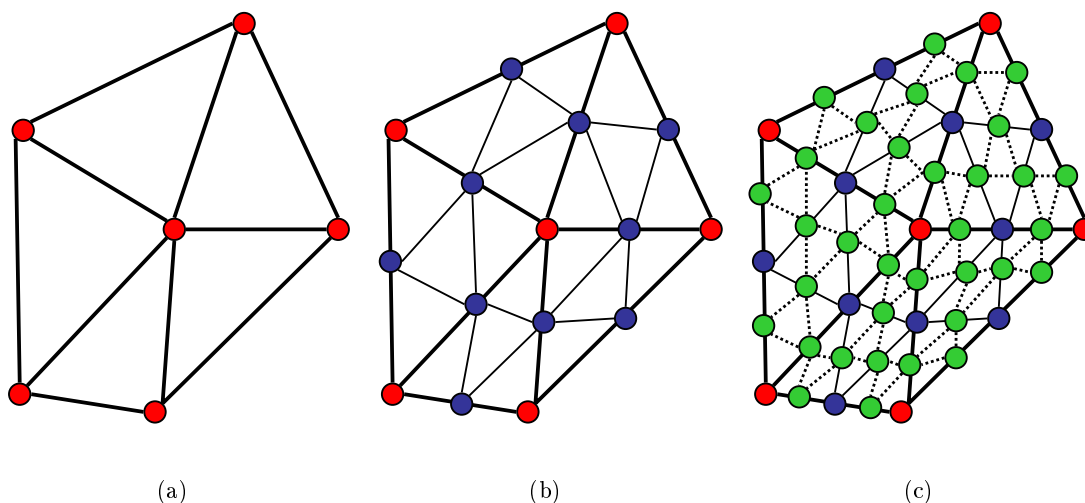
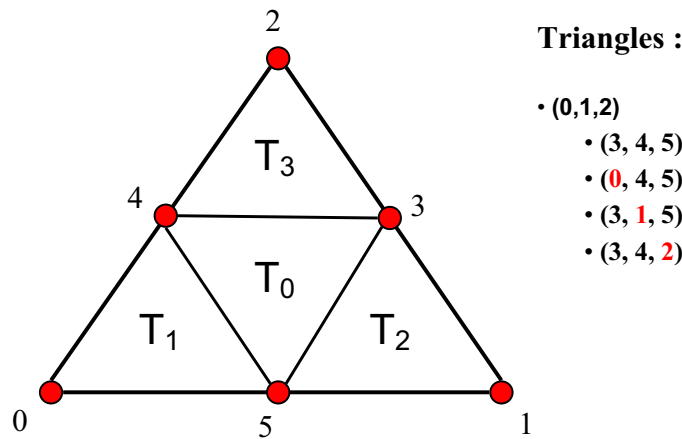
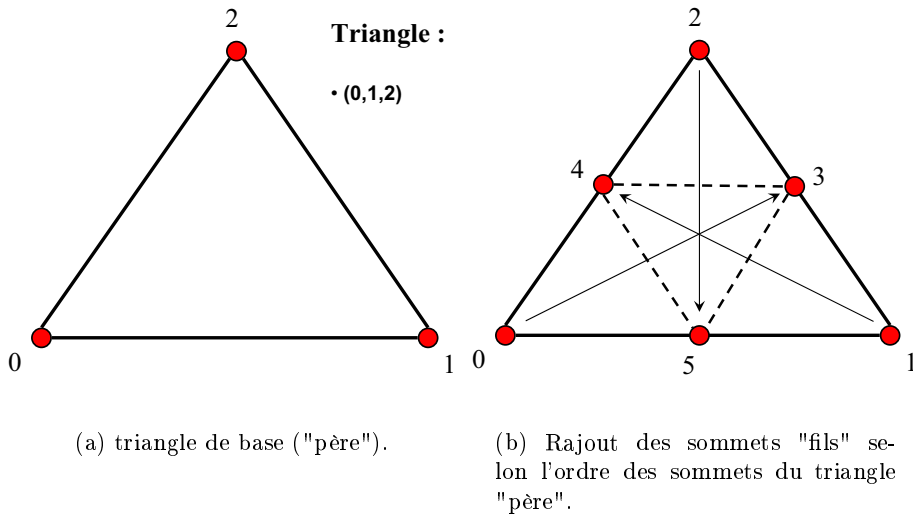


FIG. 1.6 – *Un maillage semi-régulier multirésolution à différents niveaux de résolution.*

La topologie est implicite car pour un triangle "père" (0, 1, 2), les sommets "fils" de résolution supérieure sont ajoutés de manière successive sur les arêtes opposées aux sommets composant le triangle. En d'autres termes, le sommet 3 sera ajouté sur l'arête opposée à son père c'est-à-dire le sommet 0, le sommet 4 sera ajouté à l'opposé du sommet 1, et le sommet 5 sera ajouté à l'opposé du sommet 2 (voir figure 1.7). Il en est de même aux résolutions suivantes. La seule information topologique nécessaire pour la reconstruction totale de l'objet est donc la connectivité du maillage grossier.

En plus de réduire au minimum l'information topologique, ces maillages ont un autre avantage : la "quasi-régularité" de l'échantillonnage permet l'utilisation de techniques d'analyse multirésolution performantes telles que la transformée en ondelettes pour améliorer les méthodes de compression. En effet, l'analyse multirésolution est plus efficace sur des échantillonnages réguliers. Les méthodes de compression basées sur l'analyse multirésolution sont développées dans la section 1.5.





(c) Maillage à la résolution supérieure.

FIG. 1.7 – La topologie d'un maillage semi-régulier multirésolution est implicite.

### 1.1.5 Classification des méthodes de compression de maillages

Parmi les travaux existants sur la compression de maillages, on distingue généralement :

- les méthodes de compression *monorésolution* ou méthodes *non progressives*, qui permettent des compressions sans pertes ;
- les méthodes *progressives* qui permettent une compression et une transmission progressive des différents niveaux de résolution.

Dans ce mémoire, nous allons de plus séparer les méthodes progressives en trois familles :

1. les méthodes progressives exploitant une *simplification séquentielle* ;
2. les méthodes progressives basées sur la *décomposition spectrale* ;
3. les méthodes progressives basées sur l'*analyse multirésolution*.

Dans la section suivante, nous présentons uniquement les méthodes et outils relatifs à la compression *non progressive* (section 1.2). Les méthodes progressives exploitant une

*simplification séquentielle* qui sont souvent des méthodes monorésolutions étendues sont présentées dans la section 1.3. Les méthodes basées sur la *décomposition spectrale* sont ensuite développées dans la section 1.4. Enfin, les méthodes basées sur l'analyse multirésolution sont étudiées dans la section 1.5. Pour une revue complète voir [98, 46, 113] (jusqu'en 2000) et [37, 11] pour les plus récentes (jusqu'en 2003).

## 1.2 Les méthodes monorésolutions

Une méthode monorésolution consiste à encoder le maillage avec un nombre minimum de bits en éliminant la redondance présente dans la représentation originale du graphe de connectivité. La plupart des méthodes non progressives suivent le schéma suivant :

- ⤵ *encodage de la connectivité* à l'aide d'un parcours déterministe ;
- ⤵ *prédiction géométrique* des positions des sommets en exploitant la connectivité précédemment codée ;
- ⤵ *quantification* des vecteurs résiduels obtenus par prédiction, puis codage arithmétique.

Nous allons commencer par étudier ces trois différentes composantes.

### 1.2.1 Les outils de base des méthodes monorésolutions

#### 1.2.1.1 Encodage de la connectivité

A quelques rares exceptions près [68, 72], Les méthodes monorésolutions codent généralement en priorité la topologie : l'ordre d'énumération des sommets du graphe est modifié pour permettre un parcours déterministe de la connectivité. Ces méthodes s'autorise donc à modifier l'ordre initial d'énumération du graphe constituant la topologie du maillage. Comme nous le verrons plus en détails dans la section 1.2.2, les premières méthodes développées décomposent le maillage à l'aide de bandes de triangles [25, 21, 112, 114, 43, 99, 64, 44, 109, 51].

La deuxième approche possible présente de fortes analogies avec les méthodes précédentes. La différence vient de la manière dont est construit la séquence de sommets traduisant la connectivité du maillage. En partant d'une arête ou d'une face, l'encodage de la topologie se propage sommet par sommet avec une approche dite de *conquête d'arêtes*. La plupart de la topologie sera alors représentée uniquement grâce à la valence des sommets, permettant de connecter le sommet traité par rapport à ses voisins [118, 9, 10, 50, 52].

#### 1.2.1.2 Prédiction géométrique

Tout au long de l'encodage topologique, la géométrie doit être elle aussi encodée. Généralement, une technique de prédiction géométrique des positions des sommets parcourus lors du codage de la connectivité est utilisée. En effet, la méthode déterministe utilisée pour parcourir la connectivité assure une certaine proximité entre un sommet et les sommets précédemment parcourus. Ainsi, une méthode de prédiction géométrique est appropriée : en fonction des sommets précédemment codés, on estime la position du sommet suivant à l'aide d'une fonction de prédiction et on code finalement le vecteur d'erreur entre la position estimée et la position réelle.

Il existe plusieurs méthodes de prédiction parmi les méthodes non-progressives :

- ⤵ la prédiction différentielle ;

- ⤵ la prédiction linéaire directe [25, 112, 114] ;
- ⤵ la prédiction par la règle du parallélogramme [118] ;
- ⤵ la prédiction non linéaire [72], par arbres de prédiction [68], ou plus complexe [23]. [68] et [72] sont parmi les rares méthodes où la géométrie est encodée en priorité et guide l'encodage de la topologie.

Les trois schémas de prédiction les plus utilisés sont présentés par la figure 1.8. Le principe est le suivant : au lieu d'encoder naïvement la position du sommet  $i$ , on encode l'erreur de prédiction  $\vec{\varepsilon}_i$ , définie par la différence entre la position réelle du sommet  $i$  et la position du sommet prédit  $i_{\text{prédit}}$ . Le vecteur  $\vec{\varepsilon}_i$  est conservé au lieu de la position du sommet  $i$ .

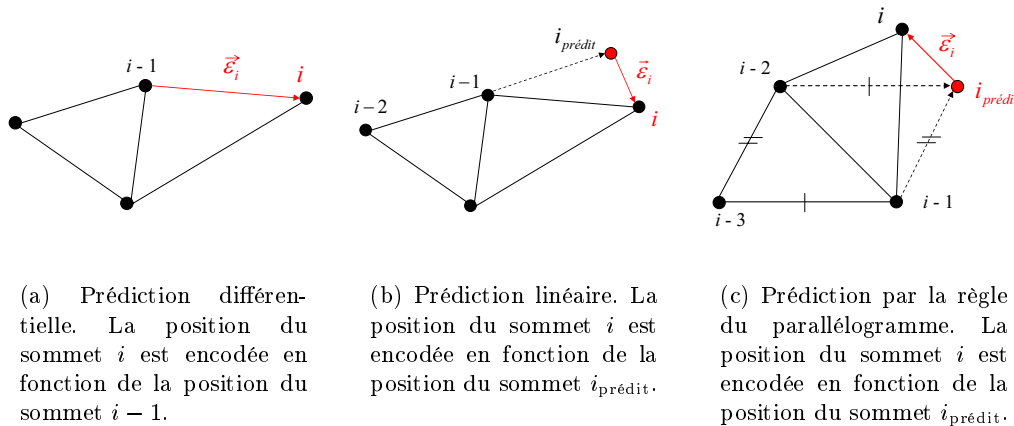


FIG. 1.8 – *Les principales techniques de prédiction.*

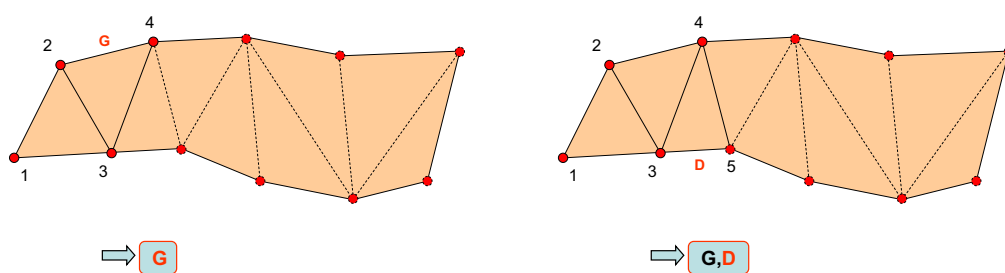
### 1.2.1.3 Quantification

La quantification est un outil indispensable pour le codage de la géométrie. Dans les premiers travaux, elle était appliquée de manière uniforme sur les trois coordonnées séparées des vecteurs d'erreur [25, 112, 114, 118]. Plus récemment, une quantification vectorielle plus poussée a été proposée [71]. Parmi les méthodes progressives, il existe aussi des méthodes proposant une quantification des coefficients dans un espace transformé [59, 60, 106] (voir section 1.4). On trouve aussi une quantification scalaire séparée des composantes tangentielles et normales des coefficients d'ondelettes [63, 9, 62, 69, 95, 96] (voir section 1.5).

## 1.2.2 Les principales méthodes monorésolutions

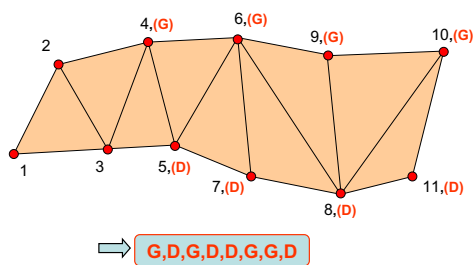
### 1.2.2.1 Bandes de triangles généralisées

Pionnier dans le domaine de la compression non progressive, Deering a introduit les *bandes de triangles généralisées* [25] en 1995. La connectivité de ces bandes est représentée par une séquence de symboles  $G$  et  $D$  selon la manière dont sont connectés les sommets entre eux (voir figure 1.9). Cette séquence est ensuite compressée avec un codeur d'Huffman tandis que la géométrie est uniformément quantifiée à l'aide d'une prédiction linéaire directe. Cette technique visait une transmission plus rapide des objets tridimensionnels aux cartes graphiques : c'est la technique utilisée dans OpenGL [84] ou Java3D [82]. Cette méthode atteint des taux de compression de 8-9 dans les conditions optimales.



(a) la connectivité du sommet 4 par rapport aux sommets 2 et 3 est représentée par  $G$ .

(b) la connectivité du sommet 5 par rapport aux sommets 3 et 4 est représentée par  $D$ .



(c) La bande de triangles est entièrement parcourue.

FIG. 1.9 – Codage par bandes de triangles généralisées.

### 1.2.2.2 Chirurgie topologique

L'évolution majeure après Deering est la méthode de Taubin et Rossignac proposée en 1998 [112]. Cette approche utilise des arbres couvrants pour l'encodage de la topologie et de la géométrie. Un premier *arbre de sommets* traduit la manière dont sont connectés les sommets. L'idée est de séparer chaque arête en deux pour "aplanir" le maillage en un simple polygone. Les sommets sont alors uniformément quantifiés selon une prédiction linéaire. En parallèle, l'*arbre des triangles* traduit la manière dont sont connectés les triangles. Ces deux arbres suffisent pour décrire la connectivité des triangles en fonction de leur ordre d'apparition dans les bandes de l'arbre des triangles. Un codeur arithmétique est ensuite utilisé pour coder la géométrie et la topologie. Des variantes ont été proposées par la suite [43, 16] pour gérer des modèles plus complexes. Cette approche obtient de meilleurs résultats que celle de Deering en atteignant un débit moyen de 6 à 11 bits par triangle. De plus, un décodage spatialement progressif est possible en entrelaçant les deux informations. Par contre, cette méthode perd de son efficacité dans le cas de petits maillages. Elle a été proposée pour le codeur binaire du format *VRML* [114] et incluse dans le standard *MPEG-4* [8].

### 1.2.2.3 Approches basées valence

En 1998, Touma et Gotsman ont proposé en parallèle un algorithme similaire [118]. La principale différence est la manière de se déplacer dans le maillage. Le parcours des arbres part d'une arête et procède par *conquête d'arêtes* : l'algorithme crée un polygone qui contient les triangles déjà codés. Au fur et à mesure du déroulement de l'algorithme, le polygone se répand le long de la ligne polygonale joignant les sommets adjacents codés au fur et à mesure. Des codes de valence sont alors associés à chaque sommet, et à l'aide d'un nombre limité de codes de connexion la topologie est encodée. Les positions des sommets sont codées en parallèle à l'aide de la prédiction par parallélogramme. Le tout est encodé avec un codeur d'Huffman. Cette méthode atteint des débits entre 0,5 et 1 bit par triangle, et atteint 0,1 bit pour des maillages réguliers denses. Le débit moyen pour l'encodage de la géométrie est de 8 à 12 bits par sommet. Cette approche a été depuis améliorée par Alliez et Desbrun en 2001 [10]. Ils ont prouvé que la borne supérieure de leur codeur est de 3,24 bits par sommet pour de larges maillages irréguliers. Isenburg a aussi proposé une variante [52] basée sur un codage *ASCII*.

### 1.2.2.4 *Edgebreaker* et extensions

Une autre méthode basée sur le parcours par conquête d'arêtes a été proposée en 1999 par Rossignac [99]. Cette méthode appelée *Edgebreaker*, utilise un ensemble réduit de 5 symboles pour encoder non pas la valence, mais le triangle suivant. Cette méthode assure un débit maximal de 3,67 bits par sommet pour l'encodage de la connectivité [64]. Ces symboles sont ensuite encodés avec un codeur d'Huffman. Cette méthode n'a d'intérêt que pour les maillages trop irréguliers, c'est-à-dire dans le cas où les codeurs basés valence sont moins efficaces. Une extension pour les maillages réguliers a d'ailleurs été proposée en 2001 atteignant 0,811 bits par triangle pour de larges maillages [109]. Globalement moins efficace que les approches basées valence, cette méthode avait aussi l'inconvénient de nécessiter un décodage complexe : cela a été amélioré depuis [51].

## 1.3 Les méthodes progressives basées sur la simplification séquentielle

Les méthodes progressives reposent sur la création d'un maillage de base (version grossière du maillage original) et d'une séquence de *raffinement* de la topologie et de la géométrie permettant d'obtenir différents niveaux de résolution (du plus grossier au plus fin). Un avantage par rapport aux méthodes monorésolutions est la possibilité d'avoir différentes approximations intermédiaires lors de la transmission et de la reconstruction de l'objet. L'enjeu de ces méthodes est alors d'optimiser le compromis débit-distorsion tout au long de la transmission pour assurer la meilleure représentation possible quel que soit le niveau de reconstruction. Par conséquent, le décodage et la transmission peut s'arrêter à n'importe quel moment : on est certain d'avoir à ce moment là la meilleure représentation possible (voir figure 1.5 page 15). Cette approche progressive permet aussi d'adapter le modèle en fonction des supports de stockage, de transmission, et de visualisation (résolution, vitesse de transmission, taille des disques durs, etc.).

Dans cette section, on ne traite que les méthodes exploitant la *simplification séquentielle*, les autres méthodes progressives étant développées ultérieurement (section 1.4 et 1.5).

### 1.3.1 Les différents outils des méthodes basées sur la simplification séquentielle

Comme pour les méthodes monorésolutions, la plupart de ces méthodes se focalisent sur le codage de la connectivité, le codage de la géométrie étant effectué ensuite en fonction de la simplification topologique. Pour obtenir les différentes approximations jusqu'au maillage grossier de base, ces méthodes utilisent des techniques de décimation. Le codage de la géométrie est basé sur une prédiction géométrique à partir des précédentes approximations du maillage déjà encodées, suivie d'une quantification des vecteurs d'erreur de prédiction.

#### 1.3.1.1 les techniques de décimation

La décimation est le principal outil pour la simplification de surfaces. Cela permet de réduire le nombre de sommets du maillage en altérant la connectivité du modèle (modification des arêtes ou plus généralement des triangles). Pour rester fidèle au maillage original, les sommets non éliminés peuvent être replacés selon un critère minimisant une erreur par rapport à la géométrie du maillage de base (maximale, moindres carrés, etc.). On peut appliquer de manière successive ces techniques de décimation pour obtenir des approximations de plus en plus grossières du maillage original. Il suffit alors de conserver l'information nécessaire pour reconstruire le maillage complet à partir du grossier.

La plupart des techniques de décimation se regroupent en quatre catégories :

- la *suppression de sommets* : on élimine un sommet et ses arêtes incidentes et on effectue une triangulation de ce "trou" polygonal (voir figure 1.10) [70, 24, 9].
- la *contraction d'arêtes* : on élimine une arête en fusionnant les deux sommets constituant cette arête. Par conséquent les deux triangles adjacents à l'arête disparaissent aussi (voir figure 1.11) [85, 33, 110]. Le choix de la position du sommet obtenu lors de la contraction de l'arête dépend d'un critère d'optimisation. Il existe une variante appelée *demi-contraction d'arêtes* qui conserve la position d'un des deux sommets de l'arête contractée comme nouveau sommet [47, 66]. La généralisation de la contraction d'arête est la *fusion de sommets non nécessairement incidents* ;

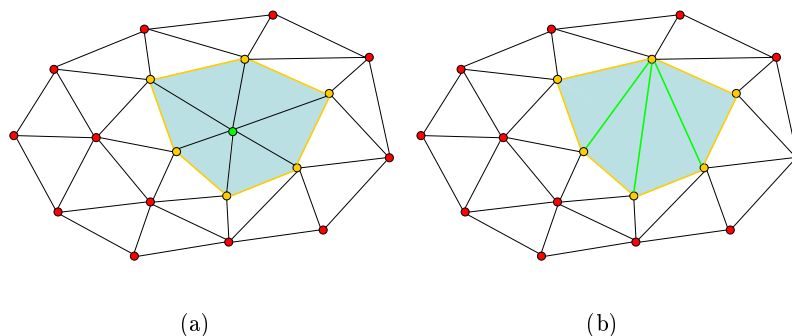


FIG. 1.10 – La suppression de sommets.

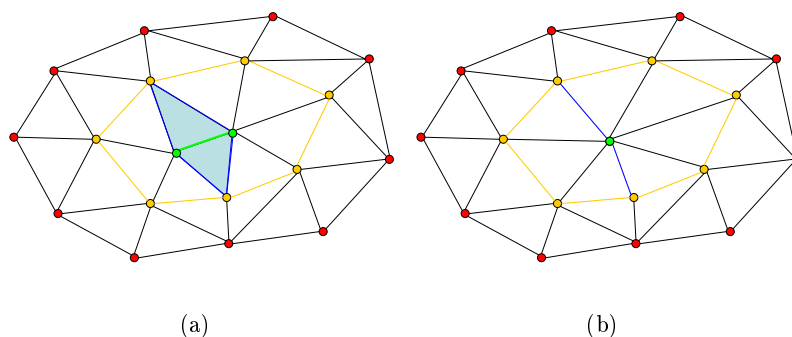


FIG. 1.11 – La contraction d'arête.

⤵ la *décimation de triangles* : on élimine les arêtes d'un triangle et les trois sommets sont fusionnés. Les triangles adjacents aux arêtes du triangle décimé disparaissent (voir figure 1.12) ;

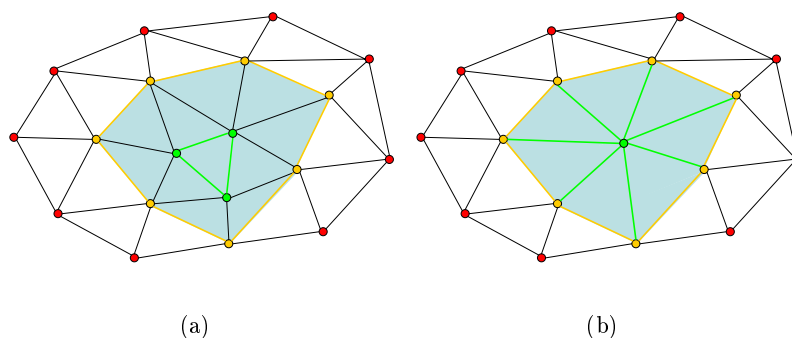


FIG. 1.12 – La décimation de triangle.

⤵ la *décimation d'un ensemble de triangles* : on élimine un regroupement de triangles et une triangulation est alors effectuée pour recouvrir le "trou" [57] ;

Ces techniques de simplification sont particulièrement bien appropriées pour la transmission ou l'affichage progressif puisqu'elles permettent de créer des maillages hiérarchiques. On les retrouve dans de nombreuses méthodes progressives [47, 111, 24, 85, 9, 10, 33] ainsi que dans l'analyse multirésolution [57, 28, 77, 78, 63]. Pour connaître en

détails les techniques de simplification de surfaces ou de remaillage, voir [46, 98, 37].

### 1.3.1.2 Prédiction inter-résolution

Pour calculer et représenter l'information géométrique existante entre deux approximations du maillage lors d'un codage progressif, un schéma de prédiction est généralement utilisé : le maillage de résolution inférieure est exploité pour prédire les positions des sommets de la résolution supérieure qui ont été éliminés lors de l'étape de simplification. Parmi les plus efficaces, notons un schéma de prédiction exploitant le filtre interpolant de *butterfly* [85], ou bien une prédiction barycentrique utilisant un repère local dont le centre est le barycentre du voisinage du point décimé et dont les axes  $x$  et  $y$  sont orientés selon le plan tangent à la surface [9].

## 1.3.2 Les principales méthodes

### 1.3.2.1 Les Maillages Progressifs [47]

La méthode de Hoppe est une des premières méthodes progressives [47]. Un maillage grossier de base est stocké, ainsi qu'une séquence de différents niveaux de détails qui indiquent comment raffiner le maillage grossier pour obtenir exactement le maillage original. Les informations liées aux détails entre deux approximations sont obtenues par contraction d'arêtes au codage, correspondant à des séparations de sommets au décodage. Le principe est le suivant : pour tout sommet on identifie les deux arêtes incidentes dont est issu ce sommet dans le maillage de résolution supérieure. Ensuite, ces arêtes sont dupliquées par séparation de sommet afin de produire une "coupure" dans le maillage et le déplacement spécifique de ce nouveau sommet par rapport à son origine constituera le détail à conserver pour obtenir la résolution supérieure.

Cette méthode utilise aussi une technique d'*optimisation de maillage* créée par Hoppe *et al.* [48] dont le but est de trouver un maillage qui concorde le mieux possible à un ensemble de points de référence tout en possédant moins de points que l'ensemble original. Pour cela, les auteurs utilisent un critère de minimisation basé sur une énergie de distance (qui mesure la distance entre le maillage de base et celui que l'on cherche), une énergie de représentation (qui pénalise le nombre de points dans l'espace) et enfin une énergie de source (qui introduit un terme de régularisation). Cette méthode a le désavantage d'avoir un coût total non linéaire, elle est donc réservée aux maillages peu complexes.

### 1.3.2.2 Utilisation d'ensembles indépendants

Pour obtenir un coût de codage linéaire, la notion d'*ensembles indépendants* a été utilisée dans de nombreux travaux. L'idée est d'ajouter une contrainte lors de la décimation. En d'autres termes, tous les éléments ne peuvent être candidats à la décimation. En 2000 par exemple, Pajarola et Rossignac réduisent le coût de codage et améliorent les taux de compression par rapport à la méthode de Hoppe [85]. Ils choisissent de regrouper les contractions d'arêtes dans des ensembles indépendants qui correspondent aux différents niveaux de résolution. A chaque étape, le nombre de points est réduit d'environ 30%. Le marquage pour le décodage est le suivant : 1 bit de marquage par point pour savoir s'il est le résultat d'une contraction, un code pour dire dans quelle direction on doit "éclater" les arêtes incidentes, et deux résidus pour corriger la position des sommets de l'arête restaurée. Cela entraîne un coût d'environ 8 bits par sommet.

Dans une approche similaire, Cohen-Or *et al.* proposent de regrouper des sommets (plutôt que des arêtes) pour les décimer [24]. Ils utilisent une retriangulation déterministe



des trous formés par la décimation des sommets évitant un coût supplémentaire. Cette méthode atteint des débits de 6 bits par sommet. Dans [9], Alliez et Desbrun proposent en 2001 une adaptation de la méthode non progressive de Touma et Gotsman [118] en observant une propriété liant la valence des sommets décimés à la distribution locale des valences après la retriangulation des trous formés lors de la décimation. Les ensembles indépendants qui forment les différents niveaux de détails sont composés de groupes de triangles centrés sur les sommets à décimer. L'idée est de conserver la plus grande régularité dans la valence des sommets au fur et à mesure des étapes de simplification. Cela est obtenu en alternant la décimation des sommets de valence  $\leq 6$  et de valence 3, et en retriangulant de telle sorte que la dispersion de la valence est minimisée. Le débit moyen obtenu est de 3,7 bits par sommet. En 2002, Karni *et al.* choisissent de regrouper les contractions d'arêtes en construisant une chaîne de sommets parcourant tout le maillage [58]. Le parcours est optimisé en évitant le nombre de "sauts" entre deux sommets non-incidents. Cette méthode atteint des résultats équivalents à la méthode de [9].

### 1.3.2.3 Encodage progressif basé géométrie

Contrairement à toutes les techniques progressives précédemment citées, Gandoin et Devillers ont proposé une méthode qui se concentre plutôt sur l'encodage de la géométrie plutôt que de la topologie [32]. Ils utilisent des *kD-trees* pour décomposer l'espace ce qui permet de transmettre une séquence d'occurrences de points, c'est-à-dire le nombre de points dans chaque cellule. En réitérant la subdivision de l'espace dans chaque cellule obtenue lors de l'étape précédente, ces informations d'occurrences sont suffisantes pour reconstruire de manière progressive et sans pertes un nuage de points. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle est prévue pour le codage de nuages de points et que la topologie n'est pas encodée. Cependant un maillage peut quand même être obtenu lors du décodage à l'aide d'une triangulation. Pour régler ce problème, les auteurs ont proposé en 2002 d'agrémenter cette approche avec un codage de la topologie basé sur la contraction d'arêtes. Cette méthode est la seule méthode progressive à notre connaissance où le codage de la topologie dépend de la géométrie [33].

## 1.4 Analyse spectrale

Dans [59], Karni et Gotsman développent un codage utilisant une décomposition spectrale inspirée du codage par transformée fréquemment utilisée dans le domaine de l'imagerie ou de la vidéo. Ils montrent comment l'analyse de Fourier classique pour les signaux 2D peut être étendue aux maillages surfaciques. La géométrie du maillage est projetée sur une base orthonormale exploitant la topologie du maillage et dépendant des vecteurs propres de la matrice laplacienne. Finalement, cette décomposition spectrale peut être assimilée à une généralisation de la transformée en cosinus sur grille régulière aux maillages surfaciques irréguliers. Cependant, les auteurs ne montrent pas que les vecteurs propres de la matrice laplacienne sont réellement les bases optimales dans le cas de maillages surfaciques. Malgré cela, ils constatent empiriquement qu'une fois projetées les coefficients géométriques sont de plus en plus faibles au fur et à mesure que les fréquences augmentent. La décorrélation géométrique est donc satisfaisante bien que non-optimale. Les auteurs ont par la suite amélioré la technique en proposant l'utilisation de bases fixes [60]. Aussi, le coût calculatoire des vecteurs qui est un inconvénient majeur de cette approche peut être réduit en partitionnant le maillage, mais cela entraîne des distorsions au niveau des frontières. Ce problème a été en partie résolu grâce à une superposition des zones [19].

Par la suite, Ben-Chen et Gotsman [15] ont montré statistiquement à l'aide de la transformée de Karhunen-Loeve (basée sur l'analyse en composantes principales) que pour une classe de maillages de connectivité donnée, les vecteurs propres de la matrice laplacienne sont les bases optimales. Malgré cela, le coût calculatoire de ces vecteurs reste un inconvénient pour cette méthode.

En 2003, Sorkine *et al.* ont proposé une approche similaire à [59]. Leur idée de départ est de permettre une forte quantification de la géométrie sans que cela entraîne de pertes visuelles. Pour cela, les auteurs exploitent l'espace transformé proposé par Karni et Gotsman [59] et montrent que les erreurs de quantification hautes fréquences des sommets projetés sont transformées en erreurs basses fréquences dans l'espace des coordonnées cartésiennes. Contrairement aux erreurs hautes fréquences, ces erreurs basses fréquences sur le modèle reconstruit ont beaucoup moins d'impact visuel. De plus, les auteurs incluent des contraintes spatiales lors du calcul de la matrice laplacienne pour permettre un contrôle sur la forme générale de l'objet et sur l'amplitude des erreurs de quantification basses fréquences.

## 1.5 L'analyse multirésolution

### 1.5.1 Introduction

L'analyse multirésolution est une alternative à la simplification séquentielle et à la décomposition spectrale pour coder les maillages de manière progressive. C'est un outil performant, utilisé depuis longtemps dans le domaine de l'imagerie ou de la vidéo, la technique la plus répandue étant la transformée en ondelettes [42, 80, 81].

L'idée principale de l'analyse multirésolution pour les surfaces est de décomposer un maillage  $\mathcal{M}_i$  en deux ensembles à l'aide de filtres d'analyse : un maillage *basse résolution*  $\mathcal{M}_{i-1}$  plus grossier obtenu à l'aide du filtre passe-bas, et un ensemble de *détails*  $\mathcal{D}_{i-1}$ , calculés dans un espace transformé à l'aide d'un filtre passe-haut. En appliquant cette technique de manière itérative sur le maillage basse résolution obtenu lors de l'itération précédente, on obtient une représentation multirésolution du maillage original. La figure 1.13(a) illustre le principe de l'analyse et la figure 1.13(b) illustre le principe de la synthèse.

La projection de l'information géométrique dans un espace transformé permet d'exploiter non seulement la *corrélation spatiale* comme les méthodes utilisant une simplification séquentielle (section 1.3), mais aussi la *corrélation fréquentielle*. L'information géométrique est donc beaucoup plus concentrée, et cela permet déjà de réduire sans aucun codage particulier l'entropie du signal. De plus l'analyse permet une quantification grossière des coefficients hautes fréquences (détails) sans que cela soit trop perceptible.

En utilisant le formalisme de l'analyse multirésolution, on peut écrire

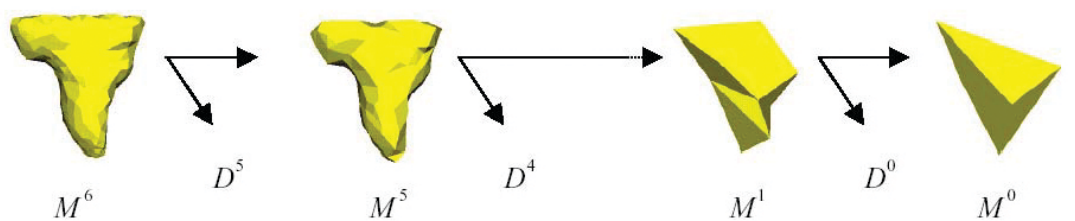
$$\mathcal{M}_j = \mathcal{M}_{j-1} \oplus \mathcal{D}_{j-1},$$

avec  $\mathcal{D}_{j-1}$  l'ensemble des détails nécessaires pour reconstruire le maillage  $\mathcal{M}_j$  de résolution supérieure à partir du maillage  $\mathcal{M}_{j-1}$ , et  $\oplus$  l'opérateur de complément orthogonal.

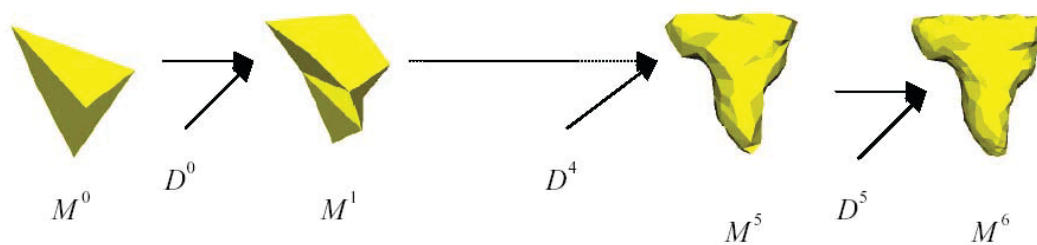
De plus, nous avons la propriété sur la notion d'espaces imbriqués propre à l'analyse multirésolution qui nous permet d'écrire

$$\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \dots \subset \mathcal{M}_N,$$

avec  $\mathcal{M}_0$  le maillage de base (résolution la plus grossière), et  $\mathcal{M}_N$  le maillage original (résolution la plus fine).



(a) Analyse.



(b) Synthèse.

FIG. 1.13 – Principe de l'analyse multirésolution. Images extraites de [1].

### 1.5.2 Avantages

Le principal avantage est de réduire la redondance spatio-fréquentielle présente dans les maillages. De plus, comme pour les méthodes utilisant la simplification séquentielle, ces méthodes tentent d'optimiser le compromis débit-distorsion à tout moment de la compression. Elles permettent aussi la scalabilité en résolution (pratique pour la transmission, le décodage progressif, ou l'affichage adaptatif).

Par contre, la formulation précédente est plus facile à générer en pratique pour des signaux réguliers comme le son, les images ou les vidéos. Dans le cas des maillages, cela sera plus difficile car la plupart d'entre eux sont irréguliers. C'est pourquoi on a vu apparaître des techniques de remaillage [28, 70, 45] produisant des échantillonnages plus réguliers, facilitant et améliorant l'efficacité de l'analyse.

Enfin, il existe la possibilité d'utiliser un outil essentiel souvent lié à l'analyse multirésolution : l'*allocation binaire*. L'intérêt de cette technique est d'optimiser le compromis débit-distorsion relatif au codage des données, en répartissant l'information binaire à travers les différents niveaux de résolution en fonction de l'impact des détails sur la qualité du maillage reconstruit [21, 74, 65, 59, 105, 69].

### 1.5.3 Compression et transformée en ondelettes

La transformée en ondelettes est un des outils les plus utilisés par les méthodes de compression avec pertes d'informations car elle facilite le contrôle des pertes. Elles ont fait leur preuves depuis une décennie dans la compression d'images et la vidéo [12, 88], et ont été intégrées dans la norme *JPEG2000* [56, 56].

Le principe de la transformée en ondelettes est de décomposer par filtrage l'énergie d'un signal à l'aide de deux fonctions de base : les fonctions de base obtenues par moyennage, et les fonctions de détail dont les coefficients affinent progressivement le signal. Ainsi, en appliquant ces fonctions sur un maillage lors d'une analyse, on obtient d'une part un maillage de plus basse résolution sous-échantillonné et donc plus grossier (maillage *basse fréquence*), et d'autre part l'ensemble des coefficients d'ondelettes (détails *hautes fréquences*) permettant de reconstruire le maillage original lors de l'étape de synthèse à partir du maillage de basse résolution.

Notons que contrairement à une transformée pour images fixes ou pour la vidéo où les coefficients d'ondelettes sont des scalaires calculés sur les valeurs pixelliques des échantillons voisins, les coefficients des maillages surfaciques sont des vecteurs tridimensionnels calculés en fonction des positions dans l'espace des échantillons voisins (les sommets).

Depuis les travaux pionniers de Lounsbery [77, 78], de nombreuses études ont démontré l'intérêt et l'efficacité des ondelettes dans le domaine de maillages surfaciques : sur les maillages réguliers [102], semi-réguliers [63, 62] et même sur les maillages irréguliers [121, 124, 122, 123, 120]. Parmi ces travaux, on dénote aussi des transformées en ondelettes dites de "deuxième génération", apparues avec le schéma *lifting* [108, 67]. Elles sont aussi très efficaces dans le domaine de la compression de maillages [131, 63, 62]<sup>1</sup>.

Dans le domaine des maillages triangulaires, les transformées les plus répandues sont :

- ⤵ la *transformée de Loop*, basée sur le filtre de *Loop* prévue à la base pour interpoler des maillages réguliers [75] et étendu au semi-régulier [63] ;
- ⤵ la *transformée de butterfly lifté et non lifté* [108, 67], schéma *lifting* basé sur le filtre interpolant de *butterfly* [27] obtenu à l'aide de la méthode de Kovasevic et Sweldens

---

1. Nous reviendrons plus en détails sur le schéma *lifting* dans la section 3.3 page 62.

[67] pour les maillages réguliers, et adaptée à la semi-régularité [130].

### 1.5.3.1 Les travaux pionniers de Lounsbery

L'analyse multirésolution pour les surfaces de topologie arbitraire a été introduite par Lounsbery *et al.* en 1994. Dans ces travaux, les auteurs présentaient pour la première fois une transformée en ondelettes pour les surfaces qui s'appliquait sur des maillages quasi-réguliers. Pour être certains de la régularité du maillage à coder, les auteurs ont choisi de partir d'un maillage de base très simple (un octaèdre par exemple), et d'appliquer progressivement une technique de raffinement puis une transformée.

Une technique de raffinement permet de rendre un maillage plus détaillé en ajoutant des sommets sur le maillage de manière déterministe. La technique utilisée dans ces travaux est la subdivision quaternaire de triangles qui permet de transformer un triangle en 4 triangles en ajoutant des sommets supplémentaires au milieu des arêtes constituant le triangle (voir section 1.1.4). Les sommets ajoutés par suréchantillonnage sont ensuite déplacés pour que le maillage obtenu soit le plus fidèle possible au maillage à coder (voir figure 1.14). Dans cette

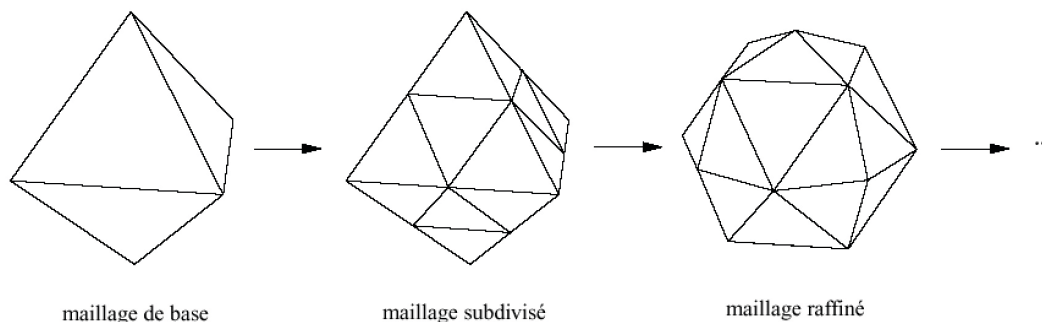


FIG. 1.14 – Raffinement d'un octaèdre (image extraite de [78]).

approche, cette étape est le rôle de la transformée en ondelettes. Les détails permettant de passer de ce maillage suréchantillonné à un maillage plus fidèle au maillage original représenteront les coefficients d'ondelettes. En réitérant ces deux étapes, un maillage quasi régulier indiscernable du maillage original à coder est obtenu.

Pour stocker le maillage ainsi transformé, il suffit de coder le maillage de base et la série de coefficients d'ondelettes à rajouter successivement pour obtenir les différentes résolutions.

Lors de ses travaux, Lounsbery propose plusieurs stratégies envisageables pour la compression des coefficients :

- le *seuillage* : dans ce cas, seuls les coefficients au dessus d'un certain seuil seront préservés ;
- le *raffinement progressif*  $L^2$  : dans certaines applications, il est primordial de reconstruire en priorité les informations les plus importantes et cela se fait en n'utilisant qu'un nombre limité de coefficients ;
- la reconstruction selon l'*erreur maximale*  $L^\infty$  : l'approximation sera obtenue selon une erreur maximale. La technique est d'éliminer les sommets jusqu'à ce que le seuil de tolérance basé sur la norme  $L^\infty$  soit dépassé ;
- la *localisation*, ou compression par zones d'intérêts.

Il faut tout de même remarquer que la nécessité de régularité est très contraignante :

- ⤵ on doit connaître l'allure générale du maillage à traiter pour savoir quel doit être le maillage de base. La méthode nécessite donc la supervision de l'utilisateur ;
- ⤵ le maillage ne doit pas être trop complexe : un tore sera difficilement synthétisé à partir d'un polyèdre par exemple ;
- ⤵ certains maillages de topologie trop complexe risquent de poser de réels problèmes lors du choix du maillage de base.

### 1.5.3.2 Les méthodes de compression géométrique (ou basées remaillage)

Ces méthodes sont la suite logique des travaux de Lounsbery. L'idée est la suivante : au lieu de partir d'un maillage régulier très simple que l'on raffine, il est préférable de partir du maillage original et d'appliquer une simplification séquentielle pour obtenir un maillage de base simple et proche géométriquement de l'original, puis de le raffiner jusqu'à l'obtention d'un maillage détaillé et indistinguable du maillage original. Ainsi les détails ajoutés lors du raffinement à l'aide d'une subdivision séquentielle auront une énergie plus faible que dans le cas où l'on part d'un maillage de base pas forcément adapté au maillage traité. Cette étape est appelé le *remaillage*. Cela permet de régler le problème lié au maillage de base rencontré par la méthode de Lounsbery puisque le maillage de base dépend de la surface à traiter.

Les sommets sont généralement rajoutés de la manière la plus régulière possible pour rendre implicite le maximum d'informations. En effet, un maillage régulier à l'avantage de réduire énormément l'information nécessaire pour représenter un objet tridimensionnel [63]. Le raffinement s'effectue en deux temps. Le maillage de base est tout d'abord subdivisé, puis les sommets sont déplacés pour être le plus fidèle au maillage original. Parmi les nombreux travaux, on rencontre des subdivisions :

- ⤵ quaternaire : chaque triangle est subdivisé en 4 sous-triangles [77, 70, 78, 63, 45, 62] ;
- ⤵ ternaire : un point est ajouté dans le triangle créant ainsi trois sous-triangles [31] ;
- ⤵ adaptative [101].

La technique de raffinement la plus utilisée est la subdivision quaternaire. Elle permet de créer des maillages réguliers ou semi-réguliers selon la régularité du maillage de base. Cependant, un remaillage parfaitement régulier est difficile à obtenir pour des objets de topologie arbitraire. C'est pourquoi un remaillage semi-régulier est la plupart du temps utilisé en amont d'une transformée en ondelettes [63, 62]. Le schéma classique de ce genre de méthodes est alors le suivant :

1. remaillage semi-régulier ;
2. transformée en ondelettes ;
3. codage des coefficients d'ondelettes et en parallèle du maillage grossier.

### 1.5.3.3 Les principaux travaux en compression géométrique

**Progressive Geometry Compression (PGC)** Khodakovsky *et al.* [63] ont proposé en 2000 une méthode exploitant les maillage semi-réguliers obtenus à l'aide d'une technique de remaillage. Cette technique appelée *MAPS* [70], est basée sur une paramétrisation efficace des sommets d'un maillages surfacique. Le maillage irrégulier est transformé en un maillage grossier par une série d'élimination de sommets (voir figure 1.15).

Les sommets éliminés sont les sommets qui apportent le moins de détails selon un critère de sélection qui prend en compte l'information de courbure en un sommet et la

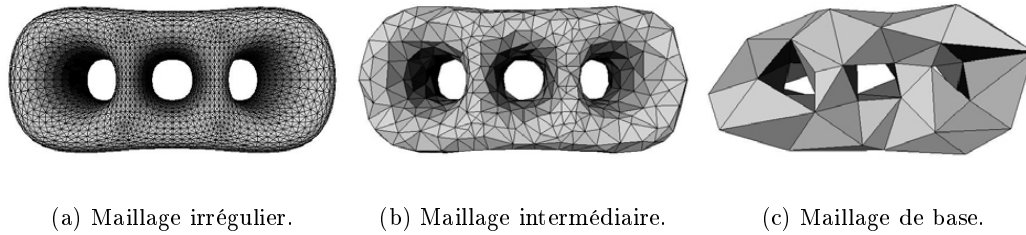


FIG. 1.15 – Obtention du maillage grossier de base par décimation de sommets. Images extraites de [70].

surface du voisinage des sommets. Les sommets éliminés sont alors ceux qui apportent le moins de courbure et qui ont les plus petites surfaces de voisinage (voir figure 1.16). Les

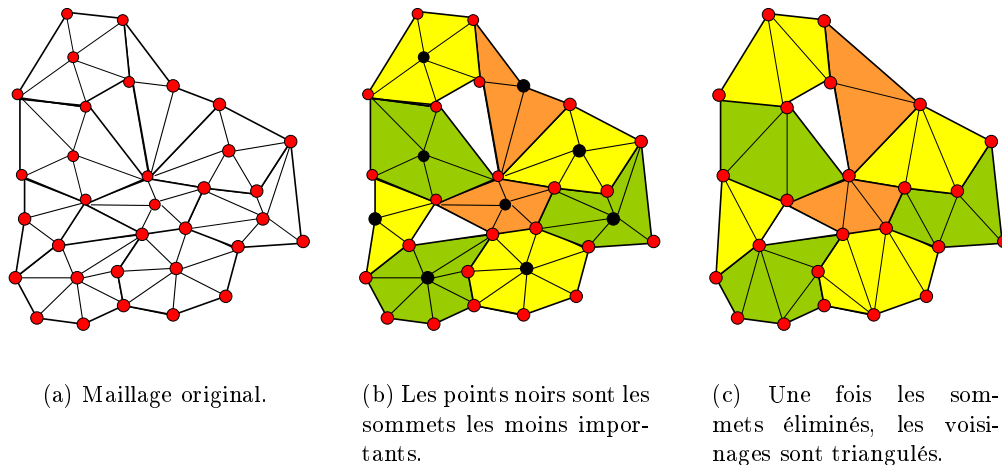


FIG. 1.16 – Elimination des points les moins importants.

sommets éliminés sont ensuite projetés sur le maillage approximé de résolution inférieure. Cette projection permet la paramétrisation du maillage original sur le maillage de base (voir figure 1.17). Cette paramétrisation est inversible ce qui permet de placer de manière précise les nouveaux sommets rajoutés lors du raffinement (voir figure 1.17). Ainsi on obtient un maillage semi-régulier fidèle au maillage original.

Les auteurs proposent ensuite d'appliquer une transformée en ondelettes basée sur le filtre interpolant de *Loop* [75]. Cette transformée a la particularité d'être calculée pour chaque sommet dans un repère local tangent à la surface [131]. Les auteurs introduisent une notion très importante pour les maillages multirésolutions qui est la séparation de l'information géométrique en deux composantes indépendantes : l'*information tangentielle* et l'*information normale*. L'*information normale* décrit le déplacement du sommet selon la normale à la surface et l'*information tangentielle* décrit le déplacement dans le plan tangent à la surface. Ainsi, en utilisant un repère local, la transformée concentre la plupart de l'information géométrique dans les composantes normales. En d'autres termes les coefficients se retrouvent le long de l'axe  $z$  (voir figure 1.18).

De plus, les auteurs montrent expérimentalement que d'un point de vue distorsion les déplacements des sommets selon la normale sont beaucoup plus pénalisants que des

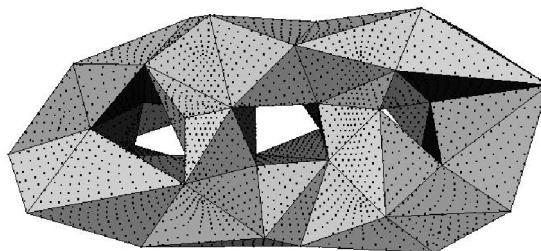


FIG. 1.17 – Paramétrisation du maillage original sur le maillage grossier. Les points noirs correspondent aux sommets éliminés projetés sur le maillage de base. Image extraite de [70].

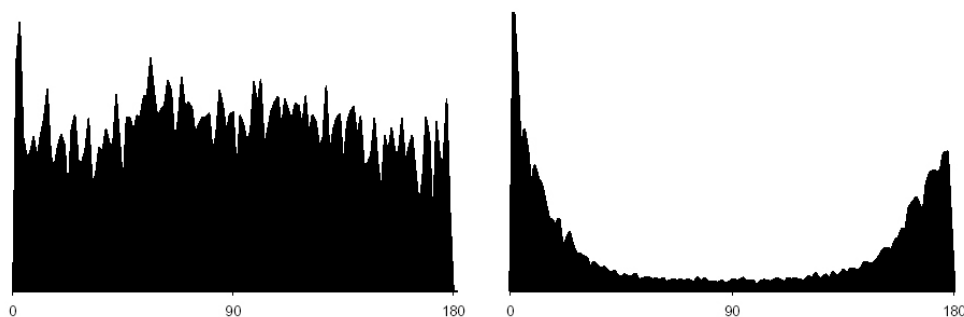


FIG. 1.18 – Histogrammes des angles polaires des coefficients d'ondelettes pour le modèle semi-régulier VENUS (obtenu avec MAPS) et calculés dans le repère global (à gauche) et dans le repère local (à droite) (Image extraite de [63]).

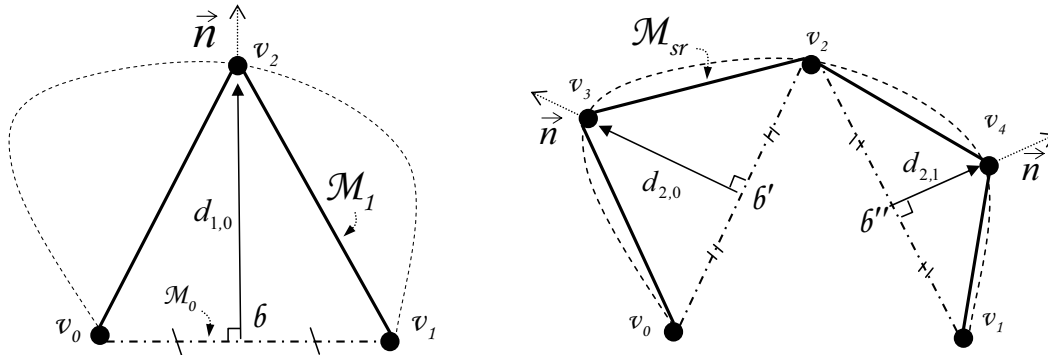
déplacements dans le plan tangent. Les composantes *normales*, c'est-à-dire les coordonnées  $z$  des coefficients, sont donc quantifiées plus finement que les coordonnées *tangentes*  $x$  et  $y$ . Les coefficients sont ensuite codés à l'aide d'un codage par *zerotree* étendu aux maillages surfaciques multirésolutions en utilisant comme racine les arêtes du maillage de base. Le *zerotree*, initialement proposé pour les images fixes [100, 104], a déjà été utilisé pour les maillages dans [41]. Les *zerotrees* exploitent le fait que l'amplitude des coefficients diminue au fur et à mesure que l'on monte dans les niveaux de résolution. Cette méthode permet d'atteindre des taux de compression beaucoup plus importants que tous les autres codeurs progressifs.

**Normal Mesh Compression (NMC)** Une approche similaire a été proposée par Khodakovsky et Guskov en 2002 [62]. La différence vient de la méthode de remaillage et de la transformée utilisées. La méthode de remaillage utilisée transforme les maillages irréguliers en *maillages normaux* développés par Guskov [45].

Ce remaillageur appelé par la suite *remaillageur normal*, n'utilise pas une paramétrisation de la surface sur le maillage grossier mais une technique d'interpolation associée à une méthode de "perforation". L'idée est la suivante : une fois le maillage grossier obtenu par simplification de surfaces, le raffinement s'effectue en deux étapes. La première étape est d'ajouter des sommets par interpolation à l'aide d'un schéma de *butterfly* [130]. En chaque sommet interpolé  $b$ , la normale à la surface est calculée. L'intersection de cette normale avec



le maillage original va déterminer la position du nouveau sommet régulier ajouté  $p$ . Ainsi, la seule information nécessaire pour reconstruire le maillage semi-régulier est la distance  $\|\vec{bp}\|$  entre le sommet interpolé et le nouveau sommet "perforant" le maillage original (voir figure 1.19).



(a) Un maillage plus fin  $\mathcal{M}_1$  est obtenu à partir du maillage grossier  $\mathcal{M}_0$  et du détail  $d_{1,0}$ .

(b) Le maillage  $\mathcal{M}_{sr}$  est obtenu à partir de  $\mathcal{M}_1$  et des détails  $d_{2,0}$  et  $d_{2,1}$ .

FIG. 1.19 – Principe de construction d'un maillage normal. En pointillés, la surface à remailler. Le segment  $[v_0, v_1]$  représente le maillage grossier  $\mathcal{M}_0$ .

L'information minimale pour représenter ce remaillage est donc de 1 flottant par sommet contrairement à la technique *MAPS* [70] utilisée dans *PGC* [63] qui nécessite 3 flottants par sommet. Cela fait du *remailleur normal* le remailleur qui produit les maillages semi-réguliers les plus compacts.

En d'autres termes, le *remailleur normal* concentre toute l'information géométrique dans les composantes *normales*. Il existe cependant une faible proportion de sommets qui lors du remaillage ne peuvent pas être calculés uniquement à partir de la normale : dans ce cas, des vecteurs tridimensionnels sont utilisés pour traduire le raffinement comme dans *MAPS*.

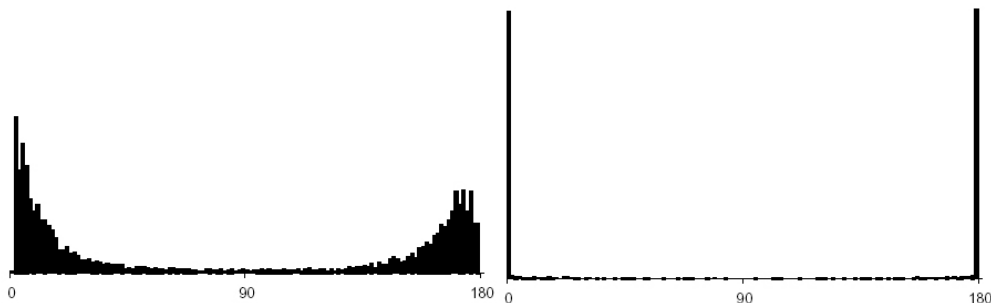


FIG. 1.20 – Histogrammes des angles polaires des coefficients d'ondelettes du modèle normal VENUS obtenus à l'aide de la transformée de Loop (à gauche), et obtenus à l'aide de la transformée de butterfly (à droite) (Image extraite de [62]).

Une fois le maillage *normal* construit, la *transformée de butterfly non lifté* est appli-

quée pour obtenir les coefficients d'ondelettes. Les auteurs ont choisi cette transformée car l'opérateur de prédiction utilisé dans ce schéma *lifting* (voir section 3.3) n'est autre que le filtre de *butterfly* utilisé lors du remaillage. Ainsi, on est sûr que la quasi-totalité de l'information géométrique sera concentrée dans les composantes normales des coefficients d'ondelettes. Par conséquent la plupart des coefficients d'ondelettes ont des composantes tangentielles de valeur nulle [62]. La figure 1.20 montre d'ailleurs la supériorité de la *transformée de butterfly* sur la transformée de *Loop* en cas de maillages *normaux*. Un codage par *zerotree* est ensuite appliqué comme pour *PGC* [63]. La supériorité du *remailleur normal* sur *MAPS* fait du codeur *NMC* un des codeurs les plus efficaces actuellement.

Par la suite, une variante de ce codeur optimisant le compromis débit-distorsion a été proposée par J.Y. Sim *et al.* [105]. Dans ces travaux, les auteurs choisissent de partitionner les maillages *normaux* en plusieurs segments et de les encoder indépendamment. Un segment correspond donc à une racine du *zerotree*, c'est-à-dire une arête du maillage de base. Un débit est alors calculé pour chaque segment à l'aide d'une optimisation du compromis débit-distorsion. L'idée principale est de trouver le point de troncature optimal de la trame binaire associée à chaque segment en fonction du débit et d'un critère de distorsion basé sur une *EQM* pondérée relative à la quantification des coefficients d'ondelettes. Cette allocation binaire permet d'obtenir de meilleurs résultats que la méthode de Khodakovsky et Guskov [62] grâce à une réduction de la taille de la trame binaire.

Plus récemment, Lavu *et al.* ont proposé une méthode de codage pour maillages *normaux* [69]. Cette méthode propose un algorithme basé sur l'Estimation-Quantification (*EQ*) développé à l'origine pour les images fixes [76]. En supposant que les coefficients d'ondelettes des maillages *normaux* sont localement corrélés, les auteurs proposent d'estimer et de quantifier un coefficient d'ondelettes en fonction des coefficients voisins précédemment codés. L'étape d'estimation permet de connaître les statistiques des coefficients voisins précédemment codés et d'estimer les statistiques du coefficient à traiter. Le quantificateur optimal pour le coefficient à traiter est ensuite calculé à partir de ses statistiques. Ce quantificateur est celui qui optimise le compromis débit-distorsion en fonction de la connaissance de ses statistiques. Cette méthode apporte un gain de 0,5 à 1 *dB* par rapport à la méthode de Khodakovsky et Guskov [62] sur certains objets. Par contre, cette méthode est relativement lourde d'un point de vue calculatoire puisqu'un quantificateur est calculé pour chaque coefficient. De plus, le gain en *PSNR* dépend des objets traités et cette méthode n'améliore pas toujours la qualité des objets reconstruits par rapport à la méthode de Khodakovsky et Guskov (en terme de *PSNR*).

## 1.6 Techniques émergentes

L'état de l'art complet des méthodes de compression nous a permis de déterminer l'approche la plus pertinente par rapport à notre objectif. Pour mémoire, nous souhaitons concevoir un codeur de maillages triangulaires basé sur l'analyse multirésolution, permettant d'atteindre des taux de compression élevés (pour pallier le problème de bande passante limitée de certains réseaux), une transmission et une décompression progressive, et enfin un contrôle de la qualité pour optimiser le compromis entre débit et qualité visuelle quel que soit le débit imposé. Pour cela, un algorithme basé sur une technique de remaillage et une transformée en ondelettes tel que *PGC* ou *NMC* semble être l'approche la plus intéressante. De plus, pour contrôler les pertes et optimiser le compromis entre qualité visuelle du maillage reconstruit et débit désiré, une allocation binaire semble être la technique la mieux adaptée.

L'allocation binaire est peu utilisée en compression de maillages. L'intérêt de cette technique est d'optimiser le compromis débit-distorsion relatif au codage des données. Dans le cadre des maillages surfaciques, cette méthode permet généralement de minimiser la perte de données liée au codage de l'information géométrique [21, 74, 65, 59, 105, 69] sous la contrainte d'un débit. Une allocation permet donc d'obtenir quel que soit le débit ou la taille de la trame binaire imposée, la qualité optimale pour le maillage obtenu selon un critère donné.

Alors que la plupart des méthodes actuelles quantifient les données géométriques avec une précision finie souvent imposée par l'utilisateur, plusieurs méthodes ont pu améliorer le codage de la géométrie en quantifiant la géométrie de différentes régions de l'objet avec une précision dépendant du niveau de détails présent dans chacune des régions [21, 74].

Plus récemment, Karni et Gotsman ont optimisé la quantification des coefficients "spectraux", en contrôlant les dégradations visuelles en fonction d'une valeur seuil imposée [59].

Parmi les méthodes de codage de maillages *normaux*, deux méthodes utilisent l'allocation binaire. La méthode [69] optimise le compromis débit-distorsion en calculant le pas de quantification optimal de chaque composante normale à l'aide d'une technique d'estimation-quantification. Les auteurs de [105] ont quant à eux proposé une optimisation du compromis débit-distorsion en arrêtant la trame binaire à partir du moment où les plans de bits ajoutés n'apportent plus assez de détails par rapport à la qualité désirée.

Une approche originale de King et Rossignac a été de proposer une allocation qui permet d'optimiser le compromis entre la réduction du nombre de sommets par simplification de surfaces, la réduction de la précision lors de la quantification des sommets, et la taille de la trame binaire.

Dans ce mémoire, nous allons donc nous focaliser sur la conception d'un codeur géométrique (voir figure 1.21) incluant une étape de remaillage (produisant une version semi-régulière du maillage), une transformée en ondelettes (permettant d'obtenir différentes sous-bandes de coefficients), et surtout une allocation binaire influant sur la quantification des différentes sous-bandes de coefficients. Le but de l'allocation sera d'obtenir le meilleur quantificateur pour chaque sous-bande de coefficients pour que la qualité visuelle de l'objet reconstruit soit maximisée sous la contrainte d'un débit total fixé.

Comme technique de remaillage, nous avons choisi une technique existante, le *remailleur normal* [45] qui est l'algorithme le plus efficace actuellement de par sa représentation compacte. Comme transformée en ondelettes nous avons choisi la *transformée de butterfly non*

*lifté* [108, 102] qui est la transformée optimale pour les maillages *normaux* [62].

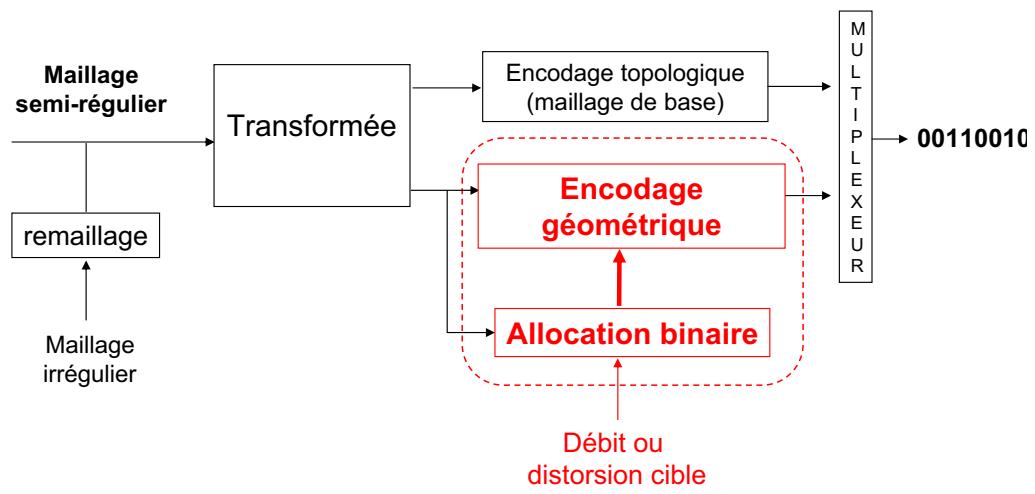


FIG. 1.21 – Schéma du codeur géométrique proposé.



## Chapitre 2

---

# Quel critère de qualité pour les maillages surfaciques polygonaux ?

Le principal objectif de nos travaux est de concevoir un algorithme de compression avec pertes pour maillages triangulaires intégrant une allocation binaire. Cette allocation doit contrôler la qualité visuelle du maillage reconstruit lors de l’encodage de la géométrie afin d’optimiser le compromis débit-distorsion quel que soit le taux de compression désiré.

Si l’on veut contrôler la qualité visuelle du maillage reconstruit durant l’allocation binaire, une métrique est nécessaire. Cette métrique servira à évaluer les dégradations visuelles (provoquées par la quantification des données géométriques) entre le maillage initial et le maillage reconstruit après quantification. Le problème est évidemment de savoir quelle métrique choisir pour bien contrôler ces dégradations.

Dans le domaine de l’image ou de la vidéo, de nombreuses mesures de distorsion ont été proposées pour estimer la qualité des signaux reconstruits : de l’Erreur Quadratique Moyenne (*EQM*) mesurée à partir des échantillons quantifiés à des méthodes plus complexes basées sur la perception visuelle humaine. Dans ces domaines, l’*EQM* est souvent le critère de qualité choisi pour mesurer l’efficacité car il est adapté aux données traitées, et traduit finalement relativement bien la qualité visuelle à faible taux de compression.

Pour les objets tridimensionnels, le problème est plus complexe car une métrique ne peut pas s’appliquer uniquement sur la géométrie des échantillons (les sommets) composant le maillage. En effet, la qualité visuelle d’un objet tridimensionnel dépend de la géométrie mais aussi de la topologie, de la courbure de l’objet, du lissage, etc. La figure 2.1 illustre ce propos. Les figures 2.1(b) et 2.1(c) ont la même *EQM* calculée sommet à sommet, par rapport à l’original de la figure 2.1(a) ( $\|\mathcal{V} - \hat{\mathcal{V}}\| \simeq 0.10$ , avec  $\mathcal{V}$  et  $\hat{\mathcal{V}}$  respectivement l’ensemble des sommets du maillage original et du maillage quantifié). Pourtant la figure 2.1(c) est visuellement bien plus proche de l’original (figure 2.1(a)).

Quelques travaux se sont donc efforcés de trouver une métrique traduisant mieux la qualité visuelle qu’une simple *EQM* sur les sommets [65, 59, 79]. Le problème est encore plus complexe lorsque l’on exploite l’analyse multirésolution, ce qui est le cas dans ce mémoire, puisque la géométrie est projetée dans un espace transformé. Parmi les différents travaux, on peut noter les travaux sur la décomposition spectrale de Karni et Gostman [59] qui ont proposé en 2000 une métrique visuelle contrôlant la déformation géométrique et le lissage de l’objet, propriété à laquelle l’œil humain est sensible. Cette métrique est utilisée pour contrôler les pertes visuelles entre deux niveaux de résolution pendant leur compression progressive. Elle correspond à une combinaison linéaire de l’*EQM* des coefficients dans l’espace transformé (mesurant la déformation géométrique), et d’un critère basé sur la valeur de l’opérateur laplacien en chaque sommet (qui capture la notion de lissage local de

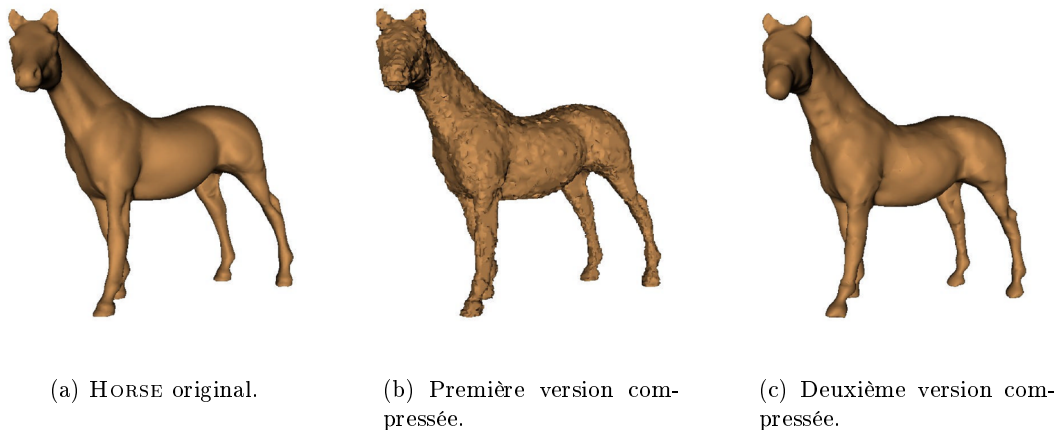


FIG. 2.1 – Deux objets peuvent avoir la même erreur géométrique "sommet à sommet", et pourtant être visuellement très différents (images extraites de [59]).

la surface).

En 2003, Sorkine *et al.* ont proposé une méthode de codage dont l'approche est similaire à celle de Karni et Gotsman [106]. Alors que Karni et Gotsman donnent autant d'importance à l'*EQM* des coefficients spectraux qu'à l'information de lissage local, Sorkine *et al.* montrent expérimentalement que les objets reconstruits ont une meilleure apparence visuelle lorsque l'on donne plus de poids au critère relatif au lissage plutôt qu'à l'*EQM* des coefficients.

Malgré son efficacité réelle, cette métrique a l'inconvénient de ne pouvoir s'appliquer que si la topologie n'est pas modifiée durant l'encodage puisque c'est une métrique calculée "sommet-à-sommet". Or, les méthodes de compression géométrique utilisant des maillages semi-réguliers exploitent des techniques de remaillage qui modifient l'échantillonnage du maillage original.

La métrique de [59] ne peut donc être utilisée pour évaluer l'efficacité de codeurs géométriques tels que *PGC* [63] et *NMC* [62] qui exploitent une technique de remaillage. Ces derniers utilisent ce que nous appelons la *distance surface-surface* [22, 14] pour évaluer l'efficacité de leur méthode. Cette mesure basée sur la distance de *Hausdorff* [22] traduit la différence géométrique entre deux maillages, et ce indépendamment de la topologie. Au lieu de considérer l'erreur visuelle comme une métrique basée sur les sommets, ces travaux considèrent l'erreur visuelle comme une distance entre deux formes géométriques. L'idée principale est que deux objets peuvent être rigoureusement identiques visuellement et avoir cependant un échantillonnage complètement différent. La figure 2.2 illustre ce propos en montrant l'objet *BUNNY* représenté par un maillage triangulaire selon deux échantillonnages différents : à gauche le maillage triangulaire possède un échantillonnage irrégulier, à droite le maillage triangulaire possède un échantillonnage semi-régulier. Il n'y a pourtant aucune différence visuelle entre ces deux versions<sup>1</sup>.

Malgré l'intérêt et l'efficacité en pratique de ces deux métriques, les auteurs de ces

---

1. Il en est de même avec des maillages qui n'ont pas le même type de polygones : triangulaire, quadrangulaire, polygonal, etc. (figure 1.1 page 12). Cette distance est donc aussi plus appropriée pour évaluer l'efficacité de méthodes de compression comme [72] par exemple, qui produit des maillages "hybrides" composés à la fois de facettes triangulaires et de facettes quadrangulaires.

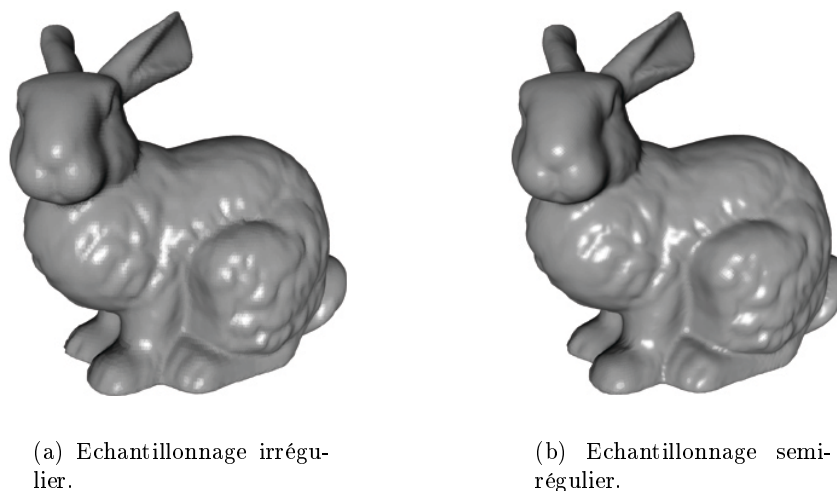


FIG. 2.2 – BUNNY représenté par un maillage triangulaire selon deux échantillonnages différents. Objet propriété de l'université de Stanford [4] (maillages fournis par Caltech [18]).

travaux s'accordent à dire que leur critère n'est pas une métrique "idéale" pour évaluer la qualité visuelle et cela reste un problème ouvert. La métrique "idéale" serait une métrique basée sur une distance géométrique indépendante de la topologie (comme la distance surface-surface), et prenant en compte des propriétés sémantiques et visuelles telles que la courbure ou le lissage de l'objet comme la métrique de [59].

Dans nos travaux, la métrique choisie servira à contrôler les dégradations visuelles introduites par l'encodage de la géométrie du maillage semi-régulier obtenu par remaillage. Notre choix se porte logiquement sur la *distance surface-surface* puisque le maillage d'entrée et le maillage reconstruit n'auront pas la même connectivité. Cependant, cette mesure demande un lourd processus d'un point de vue calculatoire. Une approximation de cette distance est donc préférable si l'on veut un codeur rapide.

Ce chapitre se présente de la manière suivante. Après avoir introduit les notations propres aux maillages (section 2.1), nous allons définir la distance surface-surface (section 2.2), et la mesure de distorsion utilisée dans ce mémoire (section 2.3). Puis, pour éviter le lourd processus calculatoire relatif à son calcul, nous proposons une approximation de la distance surface-surface (section 2.4).

## 2.1 Notations utilisées

### 2.1.1 Maillages surfaciques triangulaires

Notons  $\mathcal{M}$  un maillage surfacique triangulaire. Ce maillage  $\mathcal{M}$  peut alors être défini par une paire

$$\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{T}),$$

avec :

$\succ$   $\mathcal{V}$  étant l'ensemble des sommets défini par

$$\mathcal{V} = \{v_i = (v_i^x, v_i^y, v_i^z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq i < |\mathcal{V}|\},$$



avec  $|\mathcal{V}|$  le nombre d'éléments de l'ensemble  $\mathcal{V}$ , c'est-à-dire le nombre de sommets du maillage ;

- ⤵  $\mathcal{T}$  l'ensemble de simplexes qui contient la *topologie* de l'objet représenté, *i.e.*, toutes les relations d'incidence des sommets. Puisque nous traitons des maillages triangulaires, l'ensemble  $\mathcal{T}$  est un ensemble de facettes triangulaires (simplexes de dimension 2), défini par

$$\mathcal{T} = \{T_i = j,k,l \in \mathbb{Z}^3 / 0 \leq i < |\mathcal{T}|\},$$

où  $j, k$  et  $l$  sont les indexes des sommets formant le triangle  $T_i$  et  $|\mathcal{T}|$  le nombre de triangles du maillage.

La surface du maillage  $\mathcal{M}$  sera notée  $|\mathcal{M}|$  et la surface d'un triangle  $T_i$  sera notée  $|T_i|$ . Un maillage triangulaire  $\mathcal{M}$  est une surface linéaire par morceaux et peut donc être considéré comme une surface continue.

Définissons maintenant  $\mathcal{P}$  l'ensemble des points  $p \in \mathbb{R}^3$  appartenant à la surface définie par le maillage triangulaire  $\mathcal{M}$ , *i.e.*:

$$\mathcal{P} = \{p \in |\mathcal{M}| \text{ si } p \in \mathcal{V} \text{ ou si } \exists T_i \in \mathcal{T} / p \in |T_i|\}.$$

Ainsi, un point  $p$  pourra être soit un sommet du maillage, soit un point appartenant à une facette triangulaire du maillage.

### 2.1.2 Maillages semi-réguliers multirésolutions

Notons  $\mathcal{M}_{sr}$  un maillage triangulaire semi-régulier multirésolution défini à l'aide d'une paire  $(\mathcal{V}_{sr}, \mathcal{T}_{sr})$ . Ce maillage est obtenu par subdivisions quaternaires successives d'un maillage grossier  $\mathcal{M}_0 = (\mathcal{V}_0, \mathcal{T}_0)$ , produisant des maillages de résolution intermédiaire ( $\mathcal{M}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{T}_1)$ ,  $\mathcal{M}_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{T}_2)$ , etc.), et ce jusqu'au maillage final  $\mathcal{M}_{sr} = (\mathcal{V}_{sr}, \mathcal{T}_{sr})$ . Nous avons alors la propriété  $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \dots \subset \mathcal{V}_{sr}$ , avec  $\mathcal{V}_0$  l'ensemble des sommets du maillage de base,  $\mathcal{V}_1$  l'ensemble des sommets du niveau de résolution supérieure, etc. Ces sommets sont localisés dans l'espace tridimensionnel défini par un repère global (voir figure 2.3).

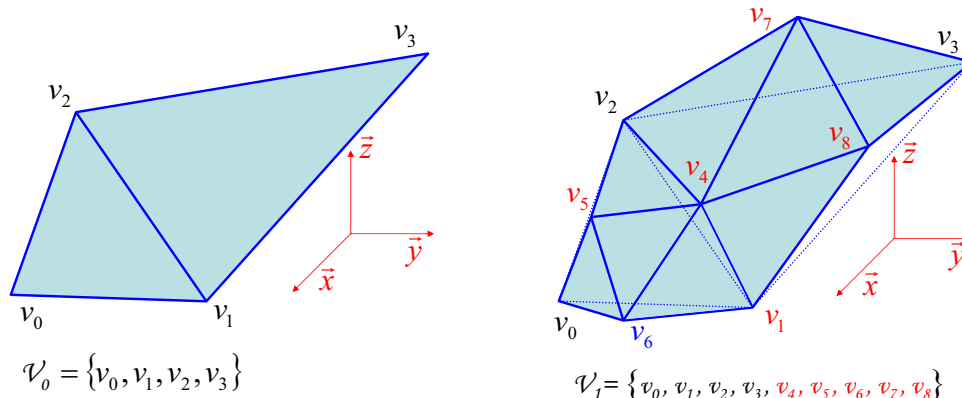
Un maillage semi-régulier  $\mathcal{M}_{sr}$  est généralement représenté de manière plus compacte à l'aide du maillage grossier  $\mathcal{M}_0$  et de plusieurs ensembles de vecteurs "détails"  $\mathcal{D}_i$  ( $i$  est l'indice du niveau de résolution). Ces ensembles de détails sont définis par

$$\mathcal{D}_i = \{d_{i,j} = (d_{i,j}^x, d_{i,j}^y, d_{i,j}^z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq j < |\mathcal{D}_i|\},$$

avec  $|\mathcal{D}_i|$  le nombre de coefficients ajoutés à ce niveau.

Un ensemble de détails  $\mathcal{D}_i$  contient les déformations entre le maillage  $\mathcal{M}_{i-1}$  et le maillage  $\mathcal{M}_i$ . Le principe est le suivant. Après la subdivision quaternaire des triangles du maillage  $\mathcal{M}_{i-1}$ , les nouveaux sommets "ajoutés" sur chaque arête du maillage de résolution précédente sont déplacés : chaque détail traduit ce déplacement. Le détail est donc calculé à partir du point ajouté sur chaque arête du maillage  $\mathcal{M}_{i-1}$ . La figure 2.4 illustre ce propos : la géométrie  $\mathcal{V}_1$  du maillage  $\mathcal{M}_1$  est définie par l'ensemble des sommets  $\mathcal{V}_0 = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$  plus l'ensemble de détails  $\mathcal{D}_1 = \{d_{1,0}, d_{1,1}, d_{1,2}, d_{1,3}, d_{1,4}\}$ . Cette représentation a l'avantage de réduire fortement l'entropie de la géométrie nécessaire pour représenter le maillage à différents niveaux de résolution.

**Remarque 1.** *Pour les maillages normaux [45], l'origine du repère n'est pas exactement sur l'arête puisque l'ajout du nouveau sommet se fait à l'aide du filtre interpolant de butterfly. Cependant, par souci de simplicité et de généralisation nous considérons le sommet "ajouté" comme étant sur l'arête.*



(a) Maillage grossier  $\mathcal{M}_0$ . La géométrie contient 4 sommets.

(b) Maillage semi-régulier  $\mathcal{M}_1$  de résolution supérieure. La géométrie contient 9 sommets, dont 4 appartiennent déjà au maillage grossier.

FIG. 2.3 – Le maillage  $\mathcal{M}_1$  est construit par subdivision quaternaire des triangles du maillage grossier  $\mathcal{M}_0$ . La géométrie  $\mathcal{V}_1$  est alors définie par l'ensemble des nouveaux sommets "ajoutés" et par la géométrie  $\mathcal{V}_0$  du maillage  $\mathcal{M}_0$ .

### 2.1.3 Utilisation d'un repère local relatif à la surface

Les ensembles de détails  $\mathcal{D}_i$  définis ci-dessus sont tous calculés dans un repère global. Cependant, ils peuvent aussi être représentés dans des repères locaux dépendant de l'orientation de la surface en chaque sommet. Dans ce cas, pour chaque détail l'origine du repère est le nouveau sommet "ajouté" par subdivision quaternaire sur l'arête, et l'orientation du repère dépend de la normale à la surface en ce point. Les axes  $x$  et  $y$  de chaque repère sont définis dans le plan tangent à la surface. L'axe  $z$  du repère est défini par la normale à la surface.

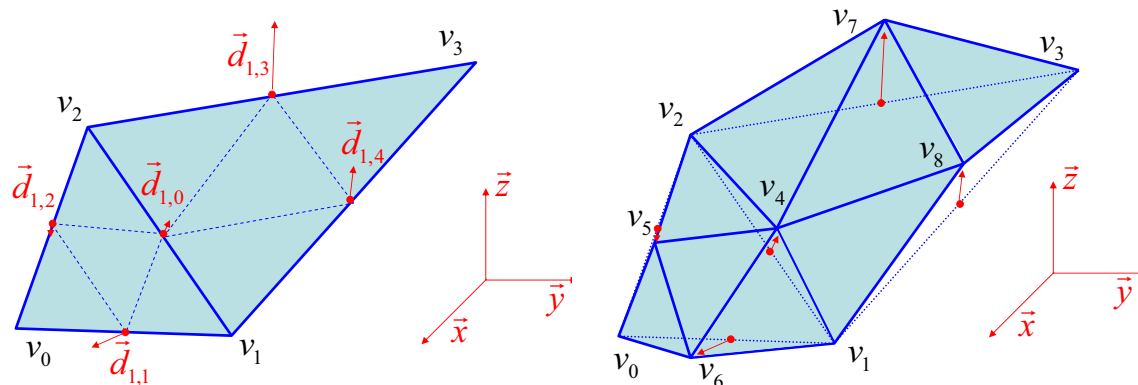
L'utilisation d'un repère local pour chaque sommet introduit une notion primordiale : *L'information géométrique d'un maillage semi-régulier multirésolution contient deux composantes distinctes : la composante tangentielle et la composante normale. la composante tangentielle traduit le déplacement d'un sommet selon le plan tangent en ce sommet. La composante normale traduit le déplacement d'un sommet le long de sa normale* [63].

Ainsi, dans le reste de ce manuscrit, un détail  $d_{i,j}$  calculé dans son repère local sera défini selon deux composantes :

- une *composante tangentielle* dépendant des coordonnées  $d_{i,j}^x$  et  $d_{i,j}^y$  calculées dans le repère local ;
- une *composante normale* qui sera la coordonnée en  $z$  dans le repère local.

## 2.2 Définition de la distance surface-surface

De par sa définition, la distance surface-surface dépend de deux autres métriques que nous appellerons la distance *point-surface* et la distance *unilatérale* entre deux surfaces [22]. Nous allons commencer par définir ces métriques.



(a) Les détails  $\mathcal{D}_1$  sont calculés à partir des nouveaux points "ajoutés" sur chaque arête de  $\mathcal{M}_0$ .

(b) La géométrie du maillage  $\mathcal{M}_1$  est donc définie par l'ensemble des sommets  $\mathcal{V}_0$  du maillage grossier, et des détails  $\mathcal{D}_1$ .

FIG. 2.4 – Le maillage semi-régulier  $\mathcal{M}_1$  est représenté par le maillage  $\mathcal{M}_0$  et l'ensemble de détails  $\mathcal{D}_1$ .

### 2.2.1 La distance point-surface

la distance *point-surface*  $d(p, \mathcal{M}')$  entre un point  $p$  appartenant à un maillage  $\mathcal{M}$  et une surface représentée par un maillage  $\mathcal{M}'$  correspond la distance entre  $p$  et le plus proche point  $p'$  de  $\mathcal{M}'$  [22]. Sa formule est donc donnée par :

$$d(p, \mathcal{M}') = \min_{p' \in \mathcal{M}'} \|p - p'\|_2, \quad (2.1)$$

où  $\|\cdot\|_2$  dénote la norme euclidienne  $L_2$ .

### 2.2.2 La distance unilatérale entre deux surfaces

La distance *unilatérale*  $\bar{d}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$  entre deux surfaces déterminées par des maillages  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  est l'équivalent de la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne relative à la distance point-surface [22]. Elle est donnée par la formule :

$$\bar{d}(\mathcal{M}, \mathcal{M}') = \left( \frac{1}{|\mathcal{M}|} \iint_{p \in |\mathcal{M}|} d(p, \mathcal{M}')^2 d\mathcal{M} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2)$$

où  $|\mathcal{M}|$  représente la surface du maillage  $\mathcal{M}$ .

On appelle cette métrique distance unilatérale car la distance  $\bar{d}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$  entre  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  n'est pas forcément égale à la distance  $\bar{d}(\mathcal{M}', \mathcal{M})$  entre  $\mathcal{M}'$  et  $\mathcal{M}$  comme l'illustre l'exemple très simple de la figure 2.5 [14] : la distance entre le point  $A$  de la surface  $\mathcal{M}'$  et la surface  $\mathcal{M}$  est beaucoup plus grande que la distance entre  $B$  et  $\mathcal{M}'$ . Ainsi, la distance unilatérale  $\bar{d}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$  sera faible alors que la distorsion réelle entre les deux surfaces visible à l'oeil nu est beaucoup plus importante. Cette distance unilatérale n'est donc pas suffisante pour traduire la déformation d'une surface.

### 2.2.3 La distance surface-surface

Pour résoudre le problème d'"assymétrie" de la distance unilatérale, la mesure de la distance entre deux maillages se fait généralement en prenant la valeur maximale entre

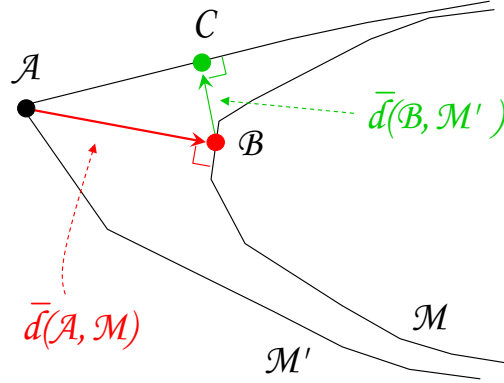


FIG. 2.5 – La distance  $\bar{d}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$  n'est pas forcément égale à la distance  $\bar{d}(\mathcal{M}', \mathcal{M})$ . Localement une mesure de la distance point-surface peut être très différente.

$\bar{d}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$  et  $\bar{d}(\mathcal{M}', \mathcal{M})$  [22]. Dans ce mémoire, nous appelons cette distance la *distance surface-surface*<sup>2</sup>. Elle est définie par :

$$d_S(\mathcal{M}, \mathcal{M}') = \max[\bar{d}(\mathcal{M}, \mathcal{M}'); \bar{d}(\mathcal{M}', \mathcal{M})]. \quad (2.3)$$

Comme cela a été mentionné dans l'introduction de ce chapitre, cette distance intéressante pour évaluer la qualité d'un codeur de maillages puisqu'elle est indépendante de la topologie des maillages. On peut d'ailleurs remarquer que les trois équations (2.1), (2.2) et (2.3) définies ci-dessus ne dépendent que des points  $p$  appartenant à la surface du maillage.

### 2.3 La distance surface-surface comme critère de distorsion

L'algorithme proposé dans cette thèse inclut une technique de remaillage et une transformée en ondelettes. Le maillage d'entrée irrégulier noté

$$\mathcal{M}_{ir} = (\mathcal{V}_{ir}, \mathcal{T}_{ir}),$$

est donc remaillé en un maillage semi-régulier multirésolution noté

$$\mathcal{M}_{sr} = (\mathcal{V}_{sr}, \mathcal{T}_{sr}).$$

Ce maillage est ensuite quantifié et codé. En sortie du décodeur, le maillage obtenu après reconstruction est noté

$$\hat{\mathcal{M}}_{sr} = (\hat{\mathcal{V}}_{sr}, \mathcal{T}_{sr}),$$

où  $\hat{\mathcal{V}}_{sr}$  représente l'ensemble des sommets dont les coordonnées ont été quantifiées avec pertes lors de l'étape de quantification  $Q$  :

$$\hat{\mathcal{V}}_{sr} = Q(\mathcal{V}_{sr}).$$

Le critère de distorsion choisi  $D_T$  est donc l'énergie de la distance surface-surface entre le maillage d'entrée irrégulier  $\mathcal{M}_{ir}$  et le maillage semi-régulier reconstruit  $\hat{\mathcal{M}}_{sr}$  :

$$\boxed{D_T = d_S(\mathcal{M}_{ir}, \hat{\mathcal{M}}_{sr})^2} \quad (2.4)$$

2. Dans [22, 14], les auteurs appellent cette métrique la *distance symétrique* entre deux surfaces.

Cependant, Le calcul réel et exact de la distance surface-surface représente un processus très lourd en temps et en mémoire. Une approximation de cette distance est donc préférable si l'on veut un codeur rapide. C'est pourquoi nous proposons dans la section suivante une approximation de la distance surface-surface.

## 2.4 Approximation proposée de la distance surface-surface

Pour obtenir une bonne approximation de la distance surface-surface, nous avons retenu trois hypothèses.

### 2.4.1 Première hypothèse : un remailleur performant.

La première étape du codeur proposé dans ce manuscrit est le remaillage dont le but est d'obtenir une version semi-régulière multirésolution du maillage d'entrée. La version semi-régulière doit être la plus fidèle possible au maillage d'entrée [70, 45]. La figure 2.2 page 39 montre un exemple d'objet remaillé : à gauche, le maillage original (irrégulier), et à droite une version remaillée (maillage semi-régulier). On observe qu'il n'y a effectivement aucune différence visuelle entre ces deux versions.

Pour évaluer l'erreur relative à l'utilisation du *remailleur normal* [45] dans l'algorithme proposé, nous avons calculé la distance surface-surface entre le maillage irrégulier  $\mathcal{M}_{ir}$  et sa version semi-régulière  $\mathcal{M}_{sr}$  pour différents objets (avec le logiciel MESH [14]). Les résultats sont donnés dans le tableau 2.1.

Modèle	$ \mathcal{V}_{ir} $	$ \mathcal{T}_{ir} $	$d_S(\mathcal{M}_{ir}, \mathcal{M}_{sr})/BB$
FELINE	49919	99732	0,009 %
HORSE	48485	96966	0,0036 %
RABBIT	67039	134073	0,0042 %
SKULL	20002	40000	0,0157 %
VENUS	50002	100000	0,0058 %

TAB. 2.1 – Erreur de remaillage relative au remailleur normal (distance surface-surface par rapport à la longueur de la diagonale de la boîte englobante (BB) en %).

Nous constatons que l'erreur de remaillage, c'est-à-dire la distance surface-surface normalisée par la longueur de la diagonale de la boîte englobante ( $BB$ ) est toujours très faible : moins de 1% pour tous les modèles, sauf pour le modèle SKULL qui atteint une erreur de 1,57%. Cependant, cela reste faible et nous pouvons donc faire l'hypothèse suivante :

$$\bar{d}(\mathcal{M}_{ir}, \mathcal{M}_{sr}) = \epsilon, \text{ avec } \epsilon \rightarrow 0.$$

On en déduit que la distance surface-surface entre le maillage d'entrée irrégulier et le maillage semi-régulier reconstruit est équivalente à la distance surface-surface entre le maillage semi-régulier et le maillage semi-régulier reconstruit :

$$d_S(\mathcal{M}_{ir}, \hat{\mathcal{M}}_{sr}) \simeq d_S(\mathcal{M}_{sr}, \hat{\mathcal{M}}_{sr}). \quad (2.5)$$

Ainsi, en utilisant la condition (2.5), la formule (2.4) de la distorsion devient

$$D_T \simeq d_S(\mathcal{M}_{sr}, \hat{\mathcal{M}}_{sr})^2. \quad (2.6)$$

A l'aide de la définition (2.3) de la distance surface-surface, le critère de distorsion peut être approximé par

$$D_T \simeq \max[\bar{d}(\mathcal{M}_{sr}, \hat{\mathcal{M}}_{sr})^2; \bar{d}(\hat{\mathcal{M}}_{sr}, \mathcal{M}_{sr})^2]. \quad (2.7)$$

### 2.4.2 Deuxième hypothèse : des maillages denses et détaillés

On suppose que les maillages originaux sont très détaillés et par conséquent que les maillages semi-réguliers sont fortement échantillonnés. En effet, pour atteindre la même précision que le maillage irrégulier, les maillages semi-réguliers doivent générer beaucoup plus de triangles (voir le tableau 6.5 de l'annexe 5 page 127). Cette hypothèse est valide puisque le remaillage n'est de toute façon d'aucun intérêt pour des maillages contenant peu de points et peu détaillés [63] (Dans ce cas, une approche basée sur un encodage topologique performant est plus adaptée).

Par définition, la distance surface-surface est calculée de manière symétrique. Dans l'équation (2.7) par exemple, pour obtenir la distance surface-surface, la distance unilatérale est calculée du maillage semi-régulier vers sa version quantifiée, puis de la version quantifiée vers le maillage semi-régulier. Il est vrai qu'entre deux maillages de connectivité et d'échantillonnage différents, la différence de "symétrie" peut être importante (voir figure 2.5 page 43 ). Dans l'équation (2.7), les deux maillages considérés  $\mathcal{M}_{sr}$  et  $\hat{\mathcal{M}}_{sr}$  ont forcément la même connectivité et le même échantillonnage, la seule différence entre les deux maillages étant la quantification de la géométrie. On peut donc supposer que la différence de symétrie est moins "prononcée".

Pour vérifier cela, nous avons calculé les distances  $\bar{d}(\mathcal{M}_{sr}, \hat{\mathcal{M}}_{sr})$  et  $\bar{d}(\hat{\mathcal{M}}_{sr}, \mathcal{M}_{sr})$  pour différents objets encodés avec le codeur proposé au chapitre 4. Nous avons quantifié le maillage à différents débits afin d'évaluer l'impact du taux de compression sur l'asymétrie de la distance unilatérale. Les résultats sont indiqués dans le tableau 2.2.

En calculant l'erreur relative entre ces deux distances (dernière colonne), nous constatons que ces distances sont très proches en particulier à moyens et forts débits. L'erreur devient relativement importante à bas débits (près de 4,278% sur l'objet HORSE à un débit de moins de 0,25 bits par sommet irrégulier).

Cependant, cette différence reste faible. Nous pouvons donc faire l'hypothèse que *la différence de symétrie de la distance surface-surface entre un maillage semi-régulier et sa version quantifiée est très faible*, et nous faisons l'approximation de symétrie suivante :

$$\bar{d}(\mathcal{M}_{sr}, \hat{\mathcal{M}}_{sr}) \simeq \bar{d}(\hat{\mathcal{M}}_{sr}, \mathcal{M}_{sr}). \quad (2.8)$$

Par conséquent, une simple distance unilatérale sera suffisante pour approximer correctement la distance surface-surface. L'équation de distorsion (2.7) devient alors

$$D_T \simeq \bar{d}(\mathcal{M}_{sr}, \hat{\mathcal{M}}_{sr})^2 \simeq \bar{d}(\hat{\mathcal{M}}_{sr}, \mathcal{M}_{sr})^2. \quad (2.9)$$

En choisissant la distance  $\bar{d}(\hat{\mathcal{M}}_{sr}, \mathcal{M}_{sr})$  qui est statistiquement plus grande que la distance  $\bar{d}(\mathcal{M}_{sr}, \hat{\mathcal{M}}_{sr})$  en particulier à moyens et forts débits, nous proposons

$$D_T \simeq \bar{d}(\hat{\mathcal{M}}_{sr}, \mathcal{M}_{sr})^2. \quad (2.10)$$

En choisissant cette distance unilatérale, nous sommes alors certains que la distance surface-surface sera approximée de manière correcte dans la gamme des débits moyens à forts, et suffisamment bien approximée à bas débit. Pour preuve, la figure 2.6 représente la courbe des deux distances unilatérales  $\bar{d}(\hat{\mathcal{M}}_{sr}, \mathcal{M}_{sr})$  et  $\bar{d}(\mathcal{M}_{sr}, \hat{\mathcal{M}}_{sr})$  (normalisées par

Modèle	débit	$\bar{d}(\mathcal{M}_{sr}, \hat{\mathcal{M}}_{sr})/BB$	$\bar{d}(\hat{\mathcal{M}}_{sr}, \mathcal{M}_{sr})/BB$	Erreur relative %
RABBIT	12,00	2,65e-4	<b>2,65e-4</b>	0,048
	9,21	5,77e-4	<b>5,78e-4</b>	0,068
	6,37	1,30e-3	<b>1,30e-3</b>	0,140
	3,09	3,18e-3	<b>3,19e-3</b>	0,206
	1,29	<b>6,86e-3</b>	6,78e-3	1,116
	0,32	<b>2,37e-02</b>	2,40e-02	1,203
	0,07	<b>1,22e-01</b>	1,19e-01	2,393
	VENUS	13,42	7,49e-4	<b>7,49e-4</b>
9,05		1,77e-3	<b>1,77e-3</b>	0,162
4,27		4,67e-3	<b>4,68e-3</b>	0,166
1,76		<b>1,09e-2</b>	1,08e-2	0,649
0,91		<b>2,03e-2</b>	2,01e-2	0,968
0,45		<b>3,81e-02</b>	3,68e-02	3,412
0,10		<b>1,34e-01</b>	1,29e-01	3,791
HORSE		10,28	1,97e-3	<b>1,98e-3</b>
	3,84	4,36e-3	<b>4,39e-3</b>	0,614
	1,97	7,37e-3	<b>7,4e-3</b>	0,381
	1,05	<b>1,11e-2</b>	1,10e-2	0,817
	0,25	<b>5,77e-2</b>	5,52e-2	4,278
	SKULL	12,46	<b>3,36e-04</b>	3,35e-04
10,98		6,05e-04	<b>6,06e-04</b>	0,023
8,93		1,27e-03	<b>1,28e-03</b>	0,263
5,94		3,72e-03	<b>3,74e-03</b>	0,771
2,89		1,29e-02	<b>1,29e-02</b>	0,233
1,52		<b>2,72e-02</b>	2,62e-02	3,906

TAB. 2.2 – Comparaison des valeurs de  $\bar{d}(\mathcal{M}_{sr}, \hat{\mathcal{M}}_{sr})$  et de  $\bar{d}(\hat{\mathcal{M}}_{sr}, \mathcal{M}_{sr})$  normalisées par BB pour différents maillages normaux [45]. Le débit est donné en bits par sommet irrégulier.

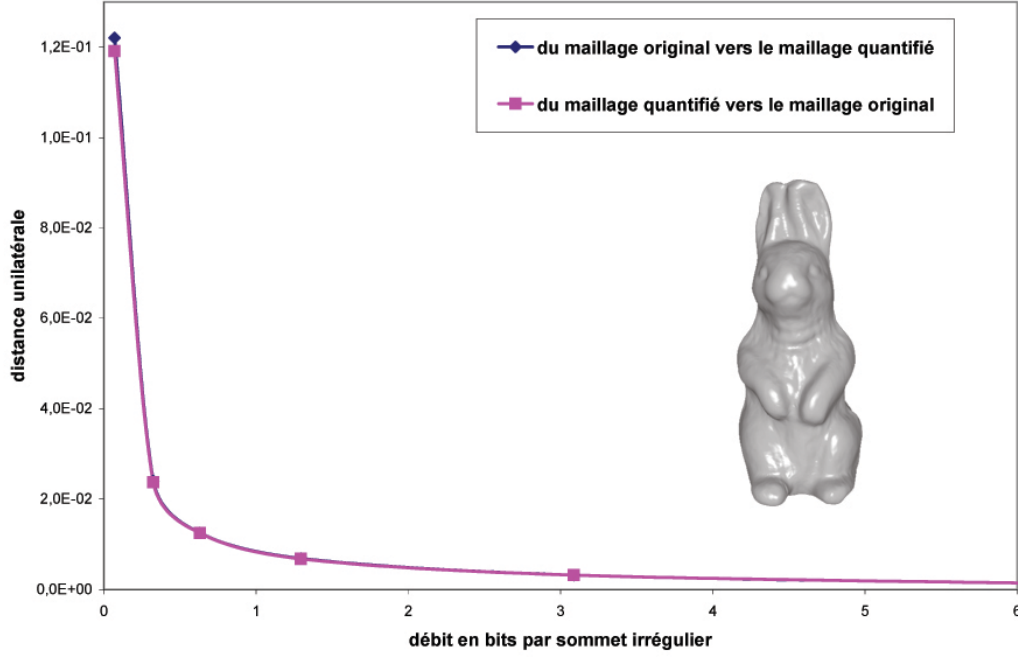


FIG. 2.6 – Comparaison des distances  $\bar{d}(\hat{\mathcal{M}}_{sr}, \mathcal{M}_{sr})$  et  $\bar{d}(\mathcal{M}_{sr}, \hat{\mathcal{M}}_{sr})$  en fonction du débit total (en bits par sommet irrégulier) pour l'objet RABBIT.

$BB$ ) en fonction du débit total pour l'objet RABBIT (Les courbes ont été obtenus avec le codeur proposé dans le chapitre 4. On constate que les deux courbes sont superposées : la différence de symétrie est donc négligeable.

En utilisant la définition de la distance unilatérale (2.2), l'équation (2.10) se développe en

$$D_T \simeq \frac{1}{|\hat{\mathcal{M}}_{sr}|} \iint_{p \in |\hat{\mathcal{M}}_{sr}|} d(p, \mathcal{M}_{sr})^2 d\hat{\mathcal{M}}_{sr}, \quad (2.11)$$

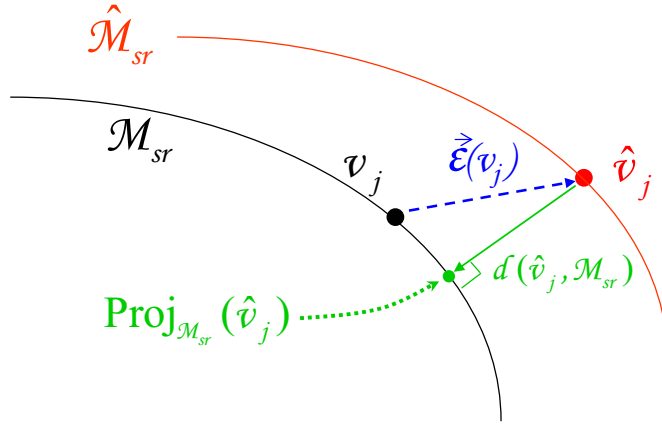
avec  $|\hat{\mathcal{M}}_{sr}|$  la surface du maillage  $\hat{\mathcal{M}}_{sr}$ . Dans cette équation, la distorsion  $D_T$  peut être approximée en calculant de manière analytique  $d(p, \mathcal{M}_{sr})$  en tout point  $p \in |\hat{\mathcal{M}}_{sr}|$ . Cependant, les maillages traités ayant un échantillonnage très dense, le nombre de sommets est très important et la surface de chaque triangle très petite par rapport à la surface totale. On peut donc supposer une répartition uniforme de ces sommets sur la surface du maillage. L'uniformité de la grille d'échantillonnage entraîne que l'intégrale de l'équation précédente peut être remplacée par une somme discrète sur les échantillons [35]. Ainsi, à partir de la formule (2.11), la distorsion peut être approximée numériquement à l'aide de la formule suivante

$$D_T \simeq \frac{1}{|\hat{\mathcal{V}}_{sr}|} \sum_{j=0}^{|\hat{\mathcal{V}}_{sr}|-1} d(\hat{v}_j, \mathcal{M}_{sr})^2. \quad (2.12)$$

avec  $\hat{v}_j$  la version quantifiée de  $v_j$  ( $\hat{v}_j = Q(v_j)$ ), et  $|\hat{\mathcal{V}}_{sr}|$  le nombre de sommets du maillage semi-régulier quantifié. L'équation (2.12) montre que la distance point-surface  $d(p, \mathcal{M}_{sr})$  de l'équation (2.11) ne sera pas calculée de manière analytique en tout point  $p$  de la surface continue mais uniquement à partir des sommets quantifiés du maillage  $\hat{\mathcal{M}}_{sr}$ .

**Remarque 2.** Le nombre de sommets étant considéré comme grand et la surface des triangles comme petite, cette approximation de la distorsion  $D_T$  reste asymptotique. Elle



FIG. 2.7 – Distance point-surface  $d(\hat{v}_j, \mathcal{M}_{sr})$ .

donne cependant une bonne estimation de la distance unilatérale.

Le problème qui nous reste à résoudre est l'estimation de la distance  $d(\hat{v}_j, \mathcal{M}_{sr})$  présente dans l'équation (2.12). Cette distance correspond à la distance *minimale* entre un point et une surface (équation (2.1) page 42). Autrement dit, il s'agit de la distance entre un point et sa projection orthogonale sur la surface (figure 2.7). La définition (2.1) de la distance point-surface peut donc être reformulée en :

$$d(p, \mathcal{M}') = \min_{p' \in \mathcal{M}'} \|p - p'\|_2 = \|p - \text{Proj}_{\mathcal{M}'}(p)\|_2, \quad (2.13)$$

avec  $\text{Proj}_{\mathcal{M}'}(p)$  le projeté orthogonal de  $p$  sur le maillage  $\mathcal{M}'$ . En utilisant cette nouvelle formulation (2.13), la distance  $d(\hat{v}_j, \mathcal{M}_{sr})$  devient

$$d(\hat{v}_j, \mathcal{M}_{sr}) = \|\hat{v}_j - \text{Proj}_{\mathcal{M}_{sr}}(\hat{v}_j)\|_2. \quad (2.14)$$

Pour approximer la distance point-surface  $d(\hat{v}_j, \mathcal{M}_{sr})$  donnée par la formule (2.14), nous avons besoin d'introduire la notion d'erreur de quantification. Ce vecteur est défini entre la position du sommet  $v_j$  et la position de sa version quantifiée  $\hat{v}_j = Q(v_j)$  :

$$\varepsilon(v_j) = (\hat{v}_j - v_j).$$

### 2.4.3 Troisième hypothèse : un codage optimal.

La suite du raisonnement se fait sous l'*hypothèse d'un codage optimal*. En effet, si on se situe dans le domaine des débits correspondant à un codage optimal, la géométrie sera quantifiée de manière suffisamment fine pour que le maillage quantifié ne soit pas trop dégradé. En particulier, les sous-bandes de coefficients de plus basse résolution contenant plus d'informations que les sous-bandes de plus haute résolution seront préservées et quantifiées de manière asymptotique, c'est-à-dire quasiment sans pertes. Dans ce cas, puisque les repères locaux relatifs au niveau de résolution  $i$  dépendent des sommets de la résolution inférieure ( $i - 1$ ), leur position et leur orientation ne seront pas modifiées de manière trop conséquente. Une mauvaise quantification de la sous-bande de niveau de résolution ( $i - 1$ ) entraînerait une modification de la position de l'origine et de l'orientation des repères locaux. La figure 2.8 illustre ce propos. Par conséquent, *sous l'hypothèse d'un codage optimal on peut considérer que les repères locaux ne sont pas modifiés de manière conséquente par*

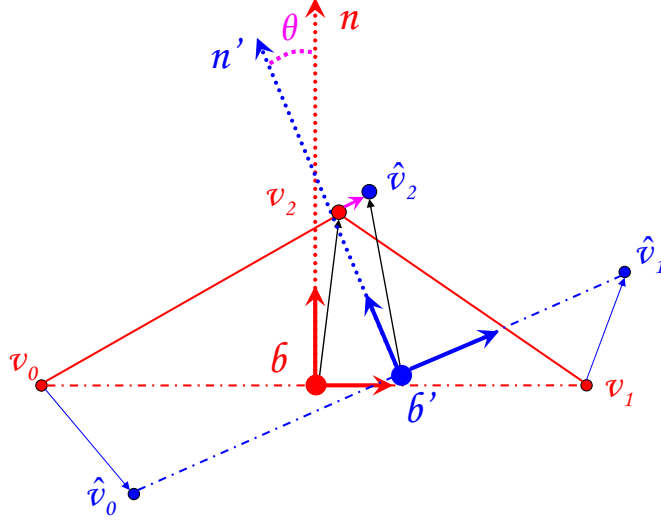


FIG. 2.8 – *Modification de l'origine et de l'orientation d'un repère local due à la quantification de la géométrie du niveau de résolution inférieure. Une mauvaise quantification des sommets du maillage de base ( $v_0$  et  $v_1$ ) modifie la position de  $b$  l'origine du repère local relatif au sommet  $v_2$  (qui devient  $b'$ ). Cela modifie aussi l'orientation du repère local dont les axes dépendent de la normale  $n$  à la surface (qui devient  $n'$ ).*

la quantification de la géométrie des niveaux de résolution inférieure (voir figure 2.9).

Sous cette hypothèse, et puisque nous utilisons un *remailleur normal*, la plupart des vecteurs d'erreur de quantification  $\varepsilon(v_j)$  se situent le long de la normale à la surface définie par le maillage  $\mathcal{M}_{sr}$ , en  $v_j$  (voir figure 2.9) ce qui n'est pas le cas lorsque une quantification grossière est effectuée sur la géométrie de résolution inférieure (voir l'orientation du vecteur d'erreur  $\varepsilon(v_2)$  par rapport à la normale  $n$  sur la figure 2.8).

C'est pourquoi, lors du calcul de  $d(\hat{v}_j, \mathcal{M}_{sr}) = \|\hat{v}_j - \text{Proj}_{\mathcal{M}_{sr}}(\hat{v}_j)\|_2$ , la projection de  $\hat{v}_j$  sur le maillage  $\mathcal{M}_{sr}$  sera très proche de  $v_j$  :

$$\text{Proj}_{\mathcal{M}_{sr}}(\hat{v}_j) \simeq v_j.$$

Finalement, sous hypothèse d'un codage optimal, on déduit que

$$d(\hat{v}_j, \mathcal{M}_{sr}) = \|\hat{v}_j - \text{Proj}_{\mathcal{M}_{sr}}(\hat{v}_j)\|_2 \simeq \|\hat{v}_j - v_j\|_2 = \|Q(v_j) - v_j\|_2. \quad (2.15)$$

En exploitant l'équation (2.15), la formule (2.12) devient

$$D_T \simeq \frac{1}{|\mathcal{V}_{sr}|} \sum_{j=0}^{|\mathcal{V}_{sr}|-1} \|Q(v_j) - v_j\|_2^2. \quad (2.16)$$

On constate que la partie droite de cette formule n'est autre que l'erreur de quantification sur la géométrie du maillage semi-régulier  $\mathcal{V}_{sr}$ . Autrement dit l'*EQM* relative à la quantification des sommets  $\mathcal{V}_{sr}$  du maillage semi-régulier.

On en déduit *que sous l'hypothèse d'un codage optimal, l'énergie de la distance surface-surface entre un maillage d'entrée (dense et très détaillé) et sa version semi-régulière (ob-*

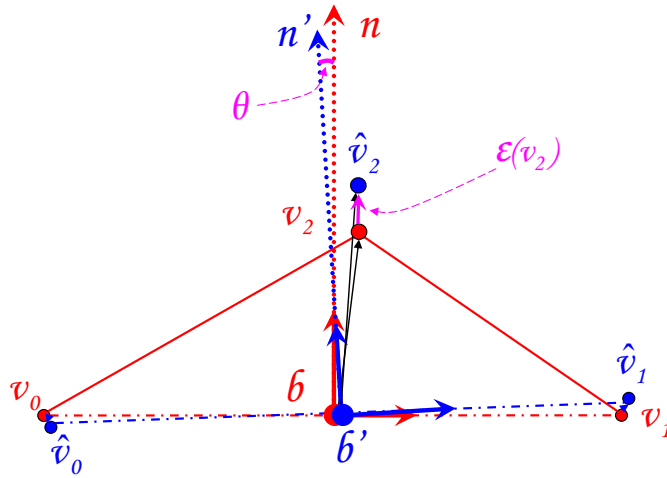


FIG. 2.9 – Une bonne quantification de la géométrie du niveau de résolution inférieure (les sommets  $v_0$  et  $v_1$ ) modifie très peu la position de  $b$ , et l'orientation de la normale  $n$ . Par conséquent,  $\varepsilon(v_2)$  est quasiment colinéaire à la normale  $n$ .

tenue à l'aide du remaillage normal) peut être approximée par l'EQM relative à la quantification de la géométrie du maillage normal. On peut finalement écrire :

$$\boxed{D_T = d_S(\mathcal{M}_{ir}, \hat{\mathcal{M}}_{sr})^2 \simeq \sigma_{Qsr}^2,} \quad (2.17)$$

avec  $\sigma_{Qsr}^2$  l'EQM relative à la quantification des sommets  $\mathcal{V}_{sr}$  du maillage semi-régulier.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous souhaitons obtenir une approximation de la distance surface-surface entre le maillage d'entrée irrégulier et le maillage semi-régulier quantifié afin d'évaluer l'erreur de reconstruction d'un codeur géométrique à moindre coût. Nous venons de montrer que sous certaines hypothèses validées (remaillage performant, et maillages denses et détaillés), l'EQM sur les sommets du maillage semi-régulier peut être une bonne approximation de la distance surface-surface entre le maillage irrégulier et la version semi-régulière quantifiée, en particulier à haut débit (hypothèse de codage optimal).

Utiliser cette approximation permet d'éviter le lourd processus du calcul exact de la distance surface-surface. Cependant, pour que l'approximation de la distance surface-surface soit intéressante pour des codeurs ondelettes, il faut que l'on puisse l'exprimer en fonction des coefficients d'ondelettes et non pas en fonction des positions des sommets dans l'espace euclidien. Sinon, cela signifie qu'à chaque fois que l'on aura besoin d'évaluer la qualité durant l'encodage de la géométrie (ce qui arrivera plusieurs fois) il faudra appliquer la transformée inverse avant de pouvoir approximer la distance surface-surface à partir de l'EQM. Une formulation dans l'espace des ondelettes serait donc plus pertinente, et permettrait d'avoir un codeur plus rapide.

Pour cela, nous montrons dans le prochain chapitre que l'EQM et par conséquent la distance surface-surface peut être approximée à partir des sous-bandes de coefficients d'ondelettes quantifiés.

## Chapitre 3

---

# Estimation de l'EQM pour un codeur ondelettes $M$ -canaux

Le but de ce manuscrit est de proposer un codeur qui contrôle l'erreur de reconstruction introduite par la quantification de la géométrie quel que soit le débit visé<sup>1</sup>. Dans le chapitre précédent, nous avons proposé d'utiliser la distance surface-surface [22] comme métrique pour évaluer les dégradations visuelles dues à la quantification de la géométrie. Le calcul exact de cette distance étant un lourd processus calculatoire, nous avons proposé d'estimer la distance surface-surface. Nous avons alors montré que si les maillages d'origine sont denses et si le *remaillage normal* est utilisé pour obtenir la version semi-régulière du maillage original, la distance surface-surface peut être estimée à l'aide de l'EQM calculée sur les sommets du maillage semi-régulier (voir chapitre 2).

Durant nos travaux, nous avons opté pour une approche basée sur l'analyse multirésolution en utilisant une transformée en ondelettes. Cette transformée permet de réduire la redondance spatio-fréquentielle présente dans les maillages et concentre l'énergie de la géométrie du maillage.

Plus précisément, le codeur proposé dans ce mémoire exploite une transformée en ondelettes dite de "deuxième génération" proposé par Sweldens sous le nom de schéma *lifting* [107, 108]. Cet outil permet de créer des transformées en ondelettes dont l'implémentation et l'utilisation sont beaucoup plus simples et rapides que les ondelettes dites de "première génération" [42, 80, 81]. Ainsi, ce type d'ondelettes permet de décomposer efficacement le maillage semi-régulier en sous-bandes de coefficients d'ondelettes.

Pour que l'approximation de la distance surface-surface proposée dans le chapitre précédent soit exploitable plus aisément par l'allocation binaire lors de l'encodage géométrique, il faudrait pouvoir l'exprimer en fonction des coefficients d'ondelettes et non pas en fonction des positions des sommets dans l'espace euclidien. Sinon, à chaque évaluation de la distance surface-surface pour contrôler la qualité du maillage reconstruit, il faudrait appliquer la transformée inverse pour obtenir le maillage semi-régulier reconstruit. Nous proposons donc ici *d'évaluer la distance surface-surface directement dans l'espace transformé. Pour cela, il faut exprimer l'EQM propre à la géométrie du maillage semi-régulier en fonction de l'erreur de quantification des sous-bandes de coefficients.*

Cette relation entre EQM et coefficients d'ondelettes quantifiés a été mise en évidence lors de précédents travaux [128, 20, 89, 90, 83, 119]. Ces travaux ont montré que

---

1. On aurait pu aussi contrôler le débit en fonction de l'erreur de reconstruction introduite par la quantification.

l'EQM d'un signal reconstruit peut être formulée comme une somme pondérée des EQM des sous-bandes de coefficients d'ondelettes. Les pondérations introduites sont dues à la non-orthogonalité des bancs de filtres de la transformée en ondelettes. Usevitch [119] par exemple a montré qu'en cas de transformée dyadique, l'EQM d'une image peut être formulée comme une somme pondérée des EQM des 4 sous-bandes de coefficients d'ondelettes. De manière plus générale, Park et Haddad [89, 90] ont défini cette formulation pour des signaux multidimensionnels encodés à l'aide de codeur ondelettes  $M$ -canaux. Tous ces travaux ont montré que les pondérations dues à la non-orthogonalité des filtres de synthèse dépendent des coefficients des filtres transverses de synthèse.

Dans ce chapitre, nous proposons une approche originale pour généraliser la formule de l'EQM d'un signal multidimensionnel quantifié par un codeur ondelettes  $M$ -canaux en fonction des erreurs de quantification des coefficients d'ondelettes [30]. Cette approche nous permet d'obtenir une formulation originale pour les pondérations qui diffère de celle proposée par Park et Haddad [89, 90].

Nous verrons que cette nouvelle formule est plus appropriée que la formule proposée lors des précédents travaux pour calculer les pondérations relatives à un schéma *lifting* qui est le type de transformée en ondelettes utilisée par le codeur proposé ici.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Après avoir décrit le principe d'un codeur ondelettes  $M$ -canaux (section 3.1), nous développerons la formule de l'EQM relative à un codeur ondelettes  $M$ -canaux, et les pondérations associées à l'aide d'une approche déterministe (section 3.2). Nous montrerons que les pondérations ne dépendent que des composantes polyphases du banc de filtre de synthèse. Puis, nous verrons dans la section 3.3 que cette nouvelle approche permet de calculer de manière simple et rapide les pondérations d'un schéma *lifting*. Les valeurs de ces pondérations seront ensuite calculées pour les deux principaux schémas *lifting* utilisés pour l'analyse des maillages triangulaires. Enfin, nous étudierons l'efficacité de ces pondérations dans la section 3.4.

## 3.1 Présentation d'un codeur ondelettes $M$ -canaux

### 3.1.1 Principe d'une décomposition sur 1 niveau

Le schéma de la figure 3.1 montre le principe d'un codeur ondelettes  $M$ -canaux, avec une décomposition sur 1 niveau.

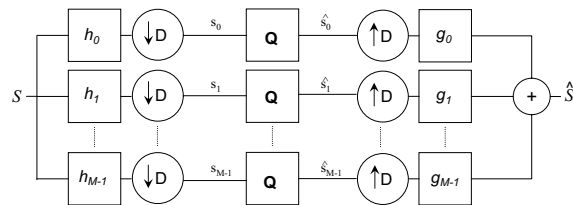


FIG. 3.1 – Principe d'un codeur ondelettes  $M$ -canaux.

Un signal d'entrée  $s$  est transformé en  $M$  sous-bandes  $\{s_i, i = 0, \dots, M - 1\}$  grâce à une transformée en ondelettes composée de  $M$  filtres d'analyse  $\{h_i, i = 0, \dots, M - 1\}$ , suivie d'un sous-échantillonnage noté  $\downarrow D$ . La sous-bande  $s_0$  est appelée la *sous-bande basse fréquence* (version grossière du signal original), les  $(M - 1)$  autres sous-bandes étant des ensembles

de *détails hautes fréquences*, appelés *coefficients d'ondelettes*. Les sous-bandes sont ensuite quantifiées à l'aide d'un quantificateur  $Q$ , défini par :

$$Q(s_i) = \hat{s}_i,$$

avec  $\hat{s}_i$  la version quantifiée de la  $i^{\text{ème}}$  sous-bande.

L'erreur de quantification  $\varepsilon_i$  relative à la  $i^{\text{ème}}$  sous-bande est considérée comme un "bruit additif" [36] à la  $i^{\text{ème}}$  sous-bande d'origine :

$$\varepsilon_i = (s_i - \hat{s}_i). \quad (3.1)$$

Nous avons choisi le modèle de "bruit additif" pour représenter l'erreur de quantification car sa définition et les hypothèses faites sur ce modèle sont généralement plus valides que celles du modèle de quantification "gain plus bruit" [40] utilisé par exemple par la méthode proposée par Park et Haddad [89, 90].

Au décodage, un sur-échantillonnage noté  $\uparrow D$  suivi d'une transformée inverse composée de  $M$  filtres de synthèse  $\{g_i, i = 0, \dots, M-1\}$  permet de reconstruire le signal quantifié  $\hat{s}$ .

### 3.1.2 Principe d'une décomposition sur $N$ niveaux

Les codeurs ondelettes exploitent en général plusieurs niveaux de décomposition. Après une première décomposition donnant les  $M$  sous-bandes à partir du signal  $s$ , une seconde décomposition est appliquée sur la sous-bande basse fréquence  $s_0$ . On obtient alors une sous-bande basse fréquence et  $2(M-1)$  sous-bandes de coefficients hautes fréquences réparties sur 2 niveaux de résolution. Le schéma de la figure 3.2 illustre une décomposition sur 2 niveaux.

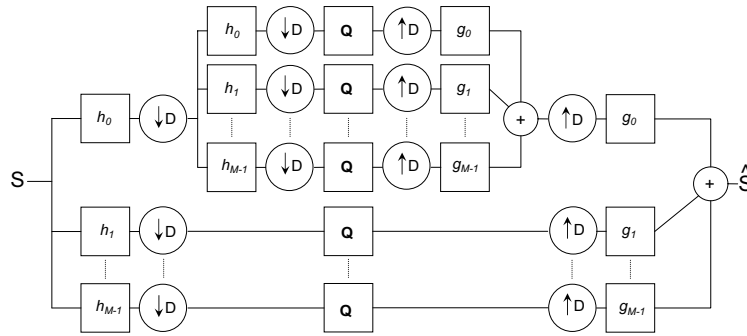


FIG. 3.2 – Principe d'un codeur ondelettes  $M$ -canaux, avec une décomposition sur deux niveaux.

En appliquant  $(N-1)$  fois la même décomposition sur la sous-bande basse fréquence obtenue à la décomposition précédente, on obtient une décomposition sur  $N$  niveaux (la sous-bande basse fréquence et  $N(M-1)$  sous-bandes de détails hautes fréquences).

### 3.1.3 Définitions et notations

#### 3.1.3.1 Signal échantillonné

Nous définissons un *signal échantillonné*  $s$  comme une séquence de nombres réels, indexée par un ensemble fini  $\mathcal{K}$  [67] :

$$s = \{s(\mathbf{k}) \in \mathbb{R} \mid \mathbf{k} \in \mathcal{K}\} \quad (3.2)$$

avec  $\mathcal{K} \in \mathbb{Z}^d$  la *grille d'échantillonnage* du signal  $s$ . Elle est définie par

$$\mathcal{K} = \Gamma \mathbb{Z}^d,$$

avec  $\Gamma$  une matrice inversible de dimension  $d \times d$  qui permet d'obtenir un signal échantillonné sur une grille différente de la grille canonique  $\mathbb{Z}^d$ . Par exemple, la grille d'échantillonnage triangulaire utilisée pour les maillages triangulaires est obtenue grâce à la matrice

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Cependant dans le reste de ce mémoire, nous supposons que la matrice  $\Gamma$  est une matrice identité. En effet, elle n'influence en rien la théorie que nous allons développer par la suite, sa seule influence étant le choix du voisinage pour les bancs de filtres [67].

Une *sous-grille d'échantillonnage* de  $\mathcal{K}$  peut être obtenue en utilisant l'opération  $D\mathbb{Z}^d$ ,  $D$  étant une matrice inversible de dimension  $d \times d$ , appelée *matrice de dilatation*. Le déterminant de  $D$  est un entier  $M \in \mathbb{Z}$ , qui déterminera le nombre de canaux de la transformée en ondelettes :

$$M = \det(D).$$

La grille d'échantillonnage  $\mathbb{Z}^d$  peut alors être formulée comme une somme de sous-grilles d'échantillonnage grâce à la formule :

$$\mathbb{Z}^d = \bigcup_{j=0}^{M-1} (D\mathbb{Z}^d + \mathbf{t}_j), \quad (3.4)$$

avec  $\mathbf{t}_j \in \mathbb{Z}^d$  un vecteur de *décalage* associé à la  $j^{\text{ème}}$  sous-grille d'échantillonnage, correspondant à la  $j^{\text{ème}}$  sous-bande.

La définition d'une sous-grille permet d'introduire la notion de *sous-bande* du signal d'entrée  $s_j$  définie par

$$s_j = \{s(D\mathbf{k} + \mathbf{t}_j) \in \mathbb{R} \mid \mathbf{k} \in \mathcal{K}\}. \quad (3.5)$$

Avant d'introduire quelques notions sur les filtres utiles pour la compréhension de la théorie proposée dans ce chapitre, nous allons donner quelques notions sur le principe de la transformée en  $z$  dans un espace multidimensionnel.

### 3.1.3.2 La transformée en $z$ multidimensionnelle

Dans un espace de dimension  $d$ , le paramètre  $\mathbf{z}$  de l'espace des transformées en  $z$  est un vecteur de dimension  $d$ , défini par

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_d).$$

L'opération  $\mathbf{z}^{\mathbf{t}}$ , avec  $\mathbf{t}$  un vecteur colonne de dimension  $d$ , défini par  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_d)^T$ , est alors donnée par la formule

$$\mathbf{z}^{\mathbf{t}} = \prod_{n=1}^d z_n^{t_n}. \quad (3.6)$$

L'opération  $\mathbf{z}^A$ , où  $A$  est une matrice de dimension  $d \times d$ , s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{z}^A = \{\mathbf{z}^{\mathbf{a}_1}, \mathbf{z}^{\mathbf{a}_2}, \dots, \mathbf{z}^{\mathbf{a}_d}\}, \quad (3.7)$$

avec  $\mathbf{a}_j$  le  $j^{\text{ème}}$  vecteur colonne de la matrice  $A$ . L'opérateur  $\mathbf{z}^{\mathbf{a}_i}$  est défini par

$$\mathbf{z}^{\mathbf{a}_j} = \prod_{n=1}^d z_n^{a_j(n)}. \quad (3.8)$$

### 3.1.3.3 Filtres et composantes polyphases

Soit un filtre  $F$  un opérateur linéaire invariant dans le temps. Un filtrage correspond à une convolution avec la séquence de réponses impulsionnelles  $\{f(\mathbf{k}) \in \mathbb{R} \mid \mathbf{k} \in \mathcal{K}\}$ . Dans l'espace des transformées en  $z$ , une séquence de réponses impulsionnelles est donnée par un polynôme de Laurent

$$F(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}} f(\mathbf{k}) \mathbf{z}^{-\mathbf{k}}.$$

Dans ce manuscrit, tous les filtres sont des filtres à réponse impulsionnelle finie (filtres FIR).

Dans l'espace des transformées en  $z$ , un codeur ondelettes  $M$ -canaux peut être représenté sous sa forme *polyphase*, dépendant des matrices  $H$  et  $G$  appelées respectivement *matrice polyphase d'analyse et de synthèse* [67, 126]. Cette représentation est montrée par la figure 3.3.

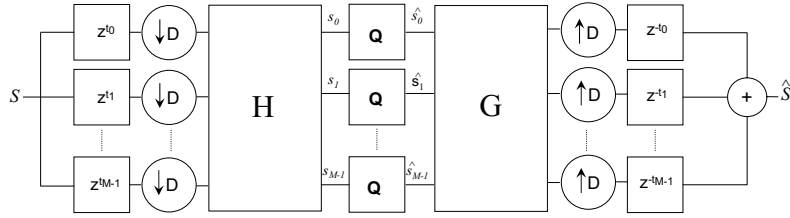


FIG. 3.3 – Représentation polyphase d'un codeur ondelettes  $M$ -canaux.

De cette représentation, on peut déduire l'ensemble des transformées en  $z$   $\{G_i(\mathbf{z})\}$  des  $M$  filtres de synthèse  $\{g_i\}$  en fonction des composantes polyphases [126] :

$$G_i(\mathbf{z}) = \sum_{j=0}^{M-1} \mathbf{z}^{-\mathbf{t}_j} G_{i,j}(\mathbf{z}^D) \quad \text{avec } i \in \{0, \dots, M-1\}, \quad (3.9)$$

où :

$\succ \mathbf{z}^D$  représente l'opérateur de suréchantillonnage relatif à la matrice de dilatation  $D$ , défini par

$$\mathbf{z}^D = \{\mathbf{z}^{\mathbf{d}_1}, \mathbf{z}^{\mathbf{d}_2}, \dots, \mathbf{z}^{\mathbf{d}_d}\}. \quad (3.10)$$

$\mathbf{d}_j$  étant le  $j^{\text{ème}}$  vecteur colonne de la matrice  $D$ .  $\mathbf{z}^{\mathbf{d}_j}$  est donné par

$$\mathbf{z}^{\mathbf{d}_j} = \prod_{n=1}^d z_n^{d_j(n)}; \quad (3.11)$$

$\succ \mathbf{z}^{-\mathbf{t}_j}$  représente l'opérateur de décalage associé à la  $j^{\text{ème}}$  sous-bande défini par

$$\mathbf{z}^{-\mathbf{t}_j} = \prod_{n=1}^d z_n^{-t_j(n)}; \quad (3.12)$$



$\succ$   $G_{i,j}(\mathbf{z})$  représente la composante polyphase  $(i,j)$  du banc de filtres de synthèse  $\{g_i\}$  définie par [67, 126] :

$$G_{i,j}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} g_i(D\mathbf{k} + \mathbf{t}_j) \mathbf{z}^{-\mathbf{k}}. \quad (3.13)$$

## 3.2 EQM du signal reconstruit

Le but de cette section est d'obtenir une expression de l'EQM d'un signal multidimensionnel reconstruit à partir des  $M$  sous-bandes de coefficients d'ondelettes, et ce lors d'une décomposition sur 1 niveau de résolution puis sur  $N$  niveaux. Cela nous permettra par la suite de déterminer l'EQM relative à la quantification des sommets du maillage semi-régulier en fonction des erreurs de quantification relative aux sous-bandes de coefficients d'ondelettes.

### 3.2.1 Décomposition sur 1 niveau

L'idée est de définir l'EQM du signal  $s$  en fonction des  $M$  sous-bandes  $\{\hat{s}_i\}$  quantifiées. Pour cela, nous allons traduire mathématiquement l'influence des filtres de synthèse sur les sous-bandes quantifiées, et donc sur le signal reconstruit après la synthèse.

Afin de simplifier la théorie, nous considérons le signal d'entrée  $s$  comme une réalisation d'un processus aléatoire stationnaire et ergodique. Ainsi, l'erreur de quantification  $\varepsilon$  peut être considérée comme une quantité déterministe. Nous supposons également que les éléments d'une même sous-bande sont non corrélés.

L'erreur de reconstruction  $\varepsilon$  peut être définie comme une séquence de nombres réels :

$$\varepsilon = \{\varepsilon(\mathbf{k}) = (s(\mathbf{k}) - \hat{s}(\mathbf{k})) \in \mathbb{R} \mid \mathbf{k} \in \mathcal{K}\}.$$

avec  $s(\mathbf{k})$  et  $\hat{s}(\mathbf{k})$  respectivement le  $k^{\text{ième}}$  échantillon du signal  $s$  et du signal  $\hat{s}$ .

En utilisant la fonction d'autocorrélation  $r_\varepsilon(\mathbf{t})$  de l'erreur de reconstruction  $\varepsilon$  d'un signal multidimensionnel, l'EQM entre le signal d'origine et le signal reconstruit peut s'écrire

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{N_s} [r_\varepsilon(\mathbf{0})], \quad (3.14)$$

avec  $\mathbf{0}$  le vecteur nul de dimension  $d$ , et  $N_s$  le nombre d'échantillons du signal traité.  $r_\varepsilon(\mathbf{0})$  est appelé l'énergie du signal  $\varepsilon$ .

Pour exprimer l'EQM du signal reconstruit (3.14) en fonction de l'erreur de quantification de chaque sous-bande  $s_i$  et des filtres de synthèse  $\{g_i\}$ , l'expression  $r_\varepsilon(\mathbf{0})$  doit être développée. Nous utilisons pour cela la transformée en  $z$  de la fonction d'autocorrélation  $r_\varepsilon(\mathbf{t})$  définie par

$$R_{\mathcal{E}}(\mathbf{z}) = \mathcal{E}(\mathbf{z}) \mathcal{E}(\mathbf{z}^{-1}), \quad (3.15)$$

où  $\mathcal{E}(\mathbf{z})$  est la transformée en  $z$  de l'erreur de reconstruction  $\varepsilon$ . En exploitant la représentation polyphase d'un codeur ondelettes  $M$ -canaux (voir figure 3.3), la transformée en  $z$  de l'erreur de reconstruction  $\mathcal{E}(\mathbf{z})$  peut être définie en fonction de l'erreur de quantification de chaque sous-bande  $s_i$  [126] :

$$\mathcal{E}(\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{M-1} G_i(\mathbf{z}) \mathcal{E}_i(\mathbf{z}^D). \quad (3.16)$$

Le signal  $\mathcal{E}_i(\mathbf{z})$  correspond à la transformée en  $z$  de l'erreur de quantification  $\varepsilon_i$  associée à la sous-bande  $i$ .

En supposant les erreurs  $\varepsilon_i(\mathbf{k})$  et  $\varepsilon_i(\mathbf{k}')$  mutuellement d'écarrélées ( $\forall \mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$ ) [36], nous pouvons écrire

$$\mathcal{E}_i(\mathbf{z}^D)\mathcal{E}_j(\mathbf{z}^{-D}) = \delta_{i,j}R_{\mathcal{E}_i}(\mathbf{z}^D), \quad (3.17)$$

avec  $R_{\mathcal{E}_i}(\mathbf{z})$  la transformée en  $z$  de la fonction d'autocorrélation de l'erreur de reconstruction  $\varepsilon_i$ , et  $\delta_{i,j}$  le symbole de Kröonecker défini par

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Sous cette hypothèse et en utilisant la formule (3.16), la formule (3.15) devient

$$R_{\mathcal{E}}(\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{M-1} R_{G_i}(\mathbf{z}) R_{\mathcal{E}_i}(\mathbf{z}^D). \quad (3.18)$$

En appliquant la transformée en  $z$  inverse sur (3.18), on obtient la formulation de la fonction d'autocorrélation de l'erreur de reconstruction :

$$r_{\varepsilon}(\mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{\tau} r_{g_i}(\tau) r_{\varepsilon_i}(D\mathbf{t} - \tau), \quad (3.19)$$

avec  $\tau$  un vecteur de dimension  $d$  traduisant un décalage temporel. En posant  $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ , cette équation permet alors d'obtenir l'énergie  $r_{\varepsilon}(\mathbf{0})$  du signal  $\varepsilon$  :

$$r_{\varepsilon}(\mathbf{0}) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{\tau} r_{g_i}(\tau) r_{\varepsilon_i}(-\tau). \quad (3.20)$$

En supposant les échantillons des erreurs de quantification  $\varepsilon_i$  d'écarrélés, nous avons

$$r_{\varepsilon_i}(-\tau) = 0 \text{ si } \tau \neq \mathbf{0}.$$

L'équation (3.20) devient alors

$$r_{\varepsilon}(\mathbf{0}) = \sum_{i=0}^{M-1} r_{g_i}(\mathbf{0}) r_{\varepsilon_i}(\mathbf{0}). \quad (3.21)$$

L'EQM du signal reconstruit, donnée par la formule (3.14), peut alors s'écrire :

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{N_s} \left[ \sum_{i=0}^{M-1} r_{g_i}(\mathbf{0}) r_{\varepsilon_i}(\mathbf{0}) \right]. \quad (3.22)$$

Il nous faut maintenant développer les fonctions d'autocorrélation  $r_{g_i}(\mathbf{0})$  et  $r_{\varepsilon_i}(\mathbf{0})$  pour avoir une formule plus simple de l'EQM donnée par l'équation (3.22).

### 3.2.1.1 Énergie des filtres de synthèse

L'énergie des filtres de synthèse  $r_{g_i}(\mathbf{0})$  est donnée par la formule

$$r_{g_i}(\mathbf{0}) = \frac{1}{2\pi^j} \oint_{\Gamma} G_i(\mathbf{z}) G_i(\mathbf{z}^{-1}) \mathbf{z}^{-1} d\mathbf{z}. \quad (3.23)$$

En utilisant la notation polyphase des filtres de synthèse (3.9), la formule (3.23) peut être développée en

$$r_{g_i}(\mathbf{0}) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{M-1} \oint_{\Gamma} G_{i,u}(\mathbf{z}^D) G_{i,v}(\mathbf{z}^{-D}) \mathbf{z}^{(-\mathbf{t}_u + \mathbf{t}_v - 1)} d\mathbf{z}. \quad (3.24)$$

En écrivant les fonctions  $G_{i,u}(\mathbf{z}^D)$  et  $G_{i,v}(\mathbf{z}^{-D})$  relatives aux éléments de la matrice polyphase sous la forme de polynômes de Laurent, nous obtenons les formules suivantes :

$$G_{i,u}(\mathbf{z}^D) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} g_i(D\mathbf{k} + \mathbf{t}_u) \mathbf{z}^{-D\mathbf{k}}, \quad (3.25)$$

$$G_{i,v}(\mathbf{z}^{-D}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} g_i(D\mathbf{k} + \mathbf{t}_v) \mathbf{z}^{D\mathbf{k}}. \quad (3.26)$$

Grâce aux formules (3.25) et (3.26), l'équation (3.24) devient :

$$r_{g_i}(\mathbf{0}) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{M-1} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\mathbf{k}' \in \mathbb{Z}^d} g_i(D\mathbf{k} + \mathbf{t}_u) g_i(D\mathbf{k}' + \mathbf{t}_v) \oint_{\Gamma} \mathbf{z}^{(-D\mathbf{k} + D\mathbf{k}' - \mathbf{t}_u + \mathbf{t}_v - 1)} d\mathbf{z}. \quad (3.27)$$

Cette équation peut être simplifiée en utilisant le théorème de Cauchy. Ce théorème permet d'écrire la propriété suivante :

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \mathbf{z}^{\mathbf{l}-1} d\mathbf{z} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{l} = \mathbf{0}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc pour que l'intégrale de Cauchy présente dans l'équation précédente (3.27) ne soit pas nulle, il faut vérifier la condition suivante :

$$-D\mathbf{k} + D\mathbf{k}' - \mathbf{t}_u + \mathbf{t}_v = \mathbf{0}. \quad (3.28)$$

La matrice de dilatation  $D$  étant inversible [67], la condition (3.28) devient

$$(-\mathbf{k} + \mathbf{k}') - (D^{-1}\mathbf{t}_u - D^{-1}\mathbf{t}_v) = \mathbf{0} \quad (3.29)$$

D'après [67], nous savons que  $D^{-1}\mathbf{t}_j$  est restreint à l'hypercube unité, c'est-à-dire  $[0,1]^d$ . D'autre part, nous savons que  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ . Ces deux remarques nous permettent alors d'écrire

$$\begin{cases} (-\mathbf{k} + \mathbf{k}') \in \mathbb{Z}^d, \\ (D^{-1}\mathbf{t}_u - D^{-1}\mathbf{t}_v) \in ]-1,1[^d. \end{cases} \quad (3.30)$$

Le domaine de validité de  $(-\mathbf{k} + \mathbf{k}')$  est donc  $\mathbb{Z}^d$ , alors que celui de  $(D^{-1}\mathbf{t}_u - D^{-1}\mathbf{t}_v)$  est  $] - 1,1[^d$ . Ces deux domaines n'ont qu'un seul élément en commun :

$$\mathbb{Z}^d \cap ] - 1,1[^d = \mathbf{0}.$$

Si l'on veut que la condition (3.29) soit vérifiée, il faut alors résoudre séparément

$$(-\mathbf{k} + \mathbf{k}') = \mathbf{0}, \quad (3.31)$$

et

$$(D^{-1}\mathbf{t}_u - D^{-1}\mathbf{t}_v) = \mathbf{0}. \quad (3.32)$$

L'ensemble des solutions de l'équation (3.31) est

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}', \quad (3.33)$$

et l'ensemble des solutions de l'équation (3.32) est

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}. \quad (3.34)$$

En utilisant ces solutions qui satisfont la condition de Cauchy dans la formule (3.27), nous obtenons finalement l'énergie des filtres de synthèse  $r_{g_i}(\mathbf{0})$  :

$$r_{g_i}(\mathbf{0}) = \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} g_i^2(D\mathbf{k} + \mathbf{t}_j), \quad (3.35)$$

avec  $g_i(D\mathbf{k} + \mathbf{t}_j) = g_{i,j}(\mathbf{k})$  le coefficient  $k$  de la  $j^{\text{ième}}$  composante polyphase du filtre de synthèse  $g_i$ .

### 3.2.1.2 Énergie de l'erreur de quantification

Pour reformuler l'équation (3.21), nous développons maintenant la formule de l'énergie de l'erreur de quantification  $r_{\varepsilon_i}(\mathbf{0})$ . En supposant que les échantillons des sous-bandes sont décorrélés [36], cette énergie peut s'écrire :

$$r_{\varepsilon_i}(\mathbf{0}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \varepsilon_i^2(\mathbf{k}) = N_{s_i} \sigma_{\varepsilon_i}^2, \quad (3.36)$$

où  $\sigma_{\varepsilon_i}^2$  est la variance de l'erreur de quantification, approximée par l'EQM de la sous-bande  $s_i$ , et  $N_{s_i}$  la dimension de la sous-bande  $s_i$ , c'est-à-dire le nombre d'échantillons de la sous-bande.

### 3.2.1.3 Solution

En remplaçant les formules (3.35) et (3.36) dans l'équation (3.21), puis dans l'équation (3.14), nous obtenons l'expression de l'EQM relative au signal reconstruit :

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \sum_{i=0}^{M-1} \left[ \frac{N_{s_i}}{N_s} \sigma_{\varepsilon_i}^2 \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} g_{i,j}(\mathbf{k})^2 \right]. \quad (3.37)$$

Finalement, l'EQM relative à un signal multidimensionnel sera donnée par la formule :

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{N_{s_i}}{N_s} w_i \sigma_{\varepsilon_i}^2 \quad \text{avec} \quad w_i = \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} g_{i,j}(\mathbf{k})^2. \quad (3.38)$$

$g_{i,j}(\mathbf{k})$  représente le coefficient  $k$  de la  $j^{\text{ième}}$  composante polyphase du banc de filtres de synthèse  $\{g_i\}$ . Il est défini par

$$g_{i,j}(\mathbf{k}) = g_i(D\mathbf{k} + \mathbf{t}_j).$$

Cette formule permet de calculer l'EQM de reconstruction d'un signal multidimensionnel à travers un codeur ondelettes  $M$ -canaux en fonction de l'EQM due à la quantification de chaque sous-bande. On vérifie bien que l'EQM du signal reconstruit dépend bien de pondérations  $w_i$  liées aux filtres de synthèse.

Par contre, la formulation proposée dans ce mémoire montrent que *ces pondérations ne dépendent que des composantes de la matrice polyphase du banc de filtres de synthèse, contrairement aux formulations proposées dans les travaux précédents*. Ces pondérations peuvent être calculées pour des signaux multidimensionnels quels que soient la dimension  $d$ , la grille d'échantillonnage  $\mathcal{K}$ , et le sous-échantillonnage (défini par la matrice de dilatation  $D$  et les décalages  $\{t_j\}$ ).

De plus, cette nouvelle formulation est particulièrement intéressante dans le cas de transformées en ondelettes basées sur un schéma *lifting* [108]. Avec la formule proposée lors des précédents travaux, il est en effet nécessaire de reconstituer les filtres transverses de synthèse à partir des opérateurs de prédiction et de mise à jour avant de pouvoir calculer les pondérations. Avec la formule proposée ici, le calcul peut se faire directement à partir des opérateurs de prédiction et de mise à jour puisque les composantes polyphases dépendent uniquement d'eux.

**Remarque 3.** *Dans un cas d'ondelettes orthogonales, la fonction d'autocorrélation des filtres est définie par*

$$r_{g_i}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{if } \tau = \mathbf{0}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*A partir de cette formule et de l'équation (3.35), nous obtenons*

$$w_i = 1 \quad \forall i.$$

*On constate que les pondérations ne sont d'aucun effet dans le cas de filtres orthogonaux, ce qui est en adéquation avec le fait que ces pondérations sont dues à la non-orthogonalité des filtres. En utilisant la formule (3.38) et en posant  $w_i = 1$ , la formule de l'EQM pour un codeur utilisant un schéma d'ondelettes orthogonales est donnée par*

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{N_{s_i}}{N_s} \sigma_{\varepsilon_i}^2. \quad (3.39)$$

*En cas d'échantillonnage dyadique ( $D = 2$  et  $\frac{N_{s_i}}{N_s} = \frac{1}{2}$ ) pour un signal monodimensionnel ( $d = 1$ ), la formulation de l'EQM est donnée par*

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sum_{i=0}^1 \frac{1}{2} \sigma_{\varepsilon_i}^2, \quad (3.40)$$

*ce qui vérifie le résultat proposé par Usevitch dans son article [119].*

### 3.2.2 Décomposition sur $N$ niveaux

En général un codeur exploite plusieurs niveaux de décomposition. On obtient cette décomposition sur  $N$  niveaux en appliquant la transformée en ondelettes de manière successive sur la sous-bande *basse fréquence* (indexée par la valeur 0).

### 3.2.2.1 Exemple d'une décomposition sur deux niveaux

Le schéma de la figure 3.2 (page 53) montre le principe d'un codeur utilisant une décomposition en ondelettes sur 2 niveaux. Après une première décomposition donnant les  $M$  sous-bandes, une seconde décomposition est appliquée sur la sous-bande 0. On obtient alors deux niveaux de résolution en plus de la sous-bande basse fréquence. La transformée en  $z$  de l'erreur de reconstruction  $\varepsilon$  associée à cette décomposition sur deux niveaux est formulée de la manière suivante :

$$\mathcal{E}(\mathbf{z}) = G_0(\mathbf{z}) \cdot \sum_{l=0}^{M-1} G_l(\mathbf{z}^D) \mathcal{E}_{1,l}(\mathbf{z}^{D^2}) + \sum_{l=1}^{M-1} G_l(\mathbf{z}) \mathcal{E}_{0,l}(\mathbf{z}^{D^2}), \quad (3.41)$$

où  $\mathcal{E}_{i,j}(\mathbf{z})$  représente la transformée en  $z$  de l'erreur de quantification relative à la sous-bande  $(i,j)$ , avec  $i$  le niveau de décomposition et  $j$  l'indice du canal.

En utilisant la formule trouvée pour la décomposition sur un seul niveau présentée dans la section 3.2.1, nous allons développer la formule de l'EQM pour une décomposition sur deux niveaux. En considérant uniquement les signaux du premier niveau  $\sigma_{\varepsilon_{0,i}}^2$ , l'EQM du signal reconstruit peut s'écrire :

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sum_{l=0}^{M-1} \frac{N_{s_{0,l}}}{N_s} w_l \sigma_{\varepsilon_{0,l}}^2, \quad (3.42)$$

avec  $N_{s_{0,l}}$  la dimension de la sous-bande  $(0,l)$ . La sous-bande  $(0,0)$  étant elle aussi décomposée en  $M$  sous-bandes, l'EQM  $\sigma_{\varepsilon_{0,0}}^2$  peut s'écrire

$$\sigma_{\varepsilon_{0,0}}^2 = \sum_{l'=0}^{M-1} \frac{N_{s_{1,l' }}}{N_{s_{0,0}}} w_{l'} \sigma_{\varepsilon_{1,l' }}^2,$$

avec  $N_{s_{1,l'}}$  la dimension de la sous-bande  $(1,l')$ . En introduisant cette formule dans l'équation (3.42), on obtient

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{N_{s_{0,0}}}{N_s} w_0 \cdot \left( \sum_{l'=0}^{M-1} \frac{N_{s_{1,l' }}}{N_{s_{0,0}}} w_{l'} \sigma_{\varepsilon_{1,l' }}^2 \right) + \sum_{l=1}^{M-1} \frac{N_{s_{0,l}}}{N_s} w_l \sigma_{\varepsilon_{0,l}}^2. \quad (3.43)$$

Finalement, l'EQM d'un signal reconstruit décomposé sur deux niveaux peut s'écrire

$$\sigma_\varepsilon^2 = w_0 \cdot \left( \sum_{l'=0}^{M-1} \frac{N_{s_{1,l' }}}{N_s} w_{l'} \sigma_{\varepsilon_{1,l' }}^2 \right) + \sum_{l=1}^{M-1} \frac{N_{s_{0,l}}}{N_s} w_l \sigma_{\varepsilon_{0,l}}^2, \quad (3.44)$$

ou encore

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{N_{s_{1,0}}}{N_s} w_0^2 \sigma_{\varepsilon_{1,0}}^2 + \sum_{i=0}^1 \sum_{l=1}^{M-1} \frac{N_{s_{i,l}}}{N_s} w_0^i w_l \sigma_{\varepsilon_{i,l}}^2, \quad (3.45)$$

avec  $N_{s_{i,j}}$  le nombre d'échantillons de la sous-bande  $(i,j)$ .

### 3.2.2.2 Généralisation de la formule pour $N$ niveaux de décomposition

En partant de l'équation (3.45), et en répétant le raisonnement effectué dans la section 3.2.2.1, on obtient l'équation de l'EQM pour une décomposition sur  $N$  niveaux. Cette équation est la suivante :

$$\sigma_\varepsilon^2 = W_{N-1,0} \sigma_{\varepsilon_{N-1,0}}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{l=1}^{M-1} W_{i,l} \sigma_{\varepsilon_{i,l}}^2 \quad (3.46)$$

avec  $W_{i,l}$  les pondérations dues à la non-orthogonalité des filtres définies par :

$$W_{i,l} = \frac{N_{s_{i,l}}}{N_s} (w_0)^i w_l. \quad (3.47)$$

Comme dans le cas d'une décomposition sur 1 niveau (développé dans la section 3.2.1), nous remarquons que dans le cas d'une décomposition sur  $N$  niveaux les pondérations  $\{W_{i,l}\}$  dues à la non-orthogonalité des filtres sont uniquement dépendantes des composantes polyphases des filtres de synthèse ce qui est particulièrement intéressant dans le cas de transformées en ondelettes basées sur un schéma *lifting*. De plus, les pondérations peuvent être déterminées quel que soit la dimension, la grille d'échantillonnage, et le sous-échantillonnage des signaux (autrement, dit quels que soient la matrice de dilatation et les décalages).

Nous allons voir dans la prochaine section que la formulation proposée permet effectivement de calculer aisément les pondérations dans le cas d'un schéma *lifting*.

### 3.3 Schéma *lifting* et transformée en ondelettes à $M$ canaux

Nous nous sommes focalisés sur le schéma *lifting* car le codeur proposé dans ce mémoire inclut ce type de transformée en ondelettes. Le schéma *lifting* est une transformée en ondelettes de "deuxième" génération introduite par Sweldens [107, 108]. Ce dernier s'est inspiré entre autres des travaux de Donoho [26] sur les filtres interpolants et les ondelettes, et des travaux de Vetterli et Herley sur la construction de bancs de filtres [125].

Il est considéré comme un outil simple et performant pour construire et implémenter une transformée en ondelettes. Cet outil présente plusieurs avantages par rapport aux ondelettes dite de "première génération" :

- la construction des ondelettes est possible de manière simple et rapide sans utilisation d'une analyse de Fourier ;
- il permet la construction d'ondelettes en prenant en compte un certain nombre de propriétés désirées ;
- l'étape de synthèse est facilement obtenu par simple "inversion" des signes et de l'ordre des équations des filtres d'analyse.

Le schéma de *butterfly lifté* [102] est une des transformées en ondelettes les plus répandues dans le domaine des maillages triangulaires [62, 63, 105, 69, 94, 93, 95, 96]. Cette transformée présente deux avantages par rapport à la transformée basée sur le masque de Loop [75] utilisée dans [63, 91, 92] :

- une *faible complexité calculatoire* : le nombre d'opérations pour le calcul des sous-signaux avec un schéma *lifting* est généralement plus faible que pour les ondelettes classiques ;
- Une *synthèse rapide* : la synthèse se fait simplement en inversant le signe et l'ordre des opérateurs par rapport à l'analyse (voir figures 3.4 et 3.5), contrairement à la transformée de Loop qui nécessite pour la synthèse la résolution de systèmes.

Avant d'aborder le schéma *lifting* à  $M$  canaux, nous allons décrire au préalable un schéma *lifting* à 2 canaux dont le fonctionnement est plus connu, et l'utilisation plus fréquente.

### 3.3.0.3 Principe du schéma *lifting*

Comme pour toute transformée en ondelettes, le principe est d'exploiter la corrélation spatiale et fréquentielle présente dans les signaux afin de réduire l'entropie du signal. Le principe d'un schéma *lifting* 2 canaux est décrit par la figure 3.4.

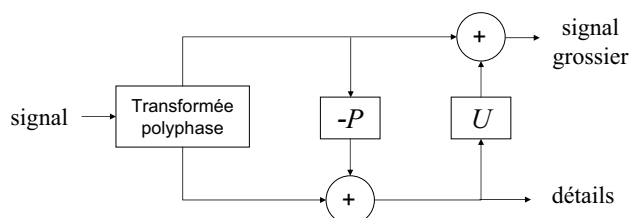


FIG. 3.4 – Analyse du schéma lifting 2 canaux.

L'idée générale est de décomposer un signal en deux sous-signaux, le premier étant une version grossière de l'original et le second l'ensemble des détails nécessaires pour reconstituer le signal original à partir du grossier.

Le schéma *lifting* se décompose en trois étapes :

1. la *transformée polyphase* : ceci est une opération basique qui partitionne le signal original en plusieurs composantes polyphases (dans le cas du schéma deux canaux, on obtient les échantillons *pairs* et *impairs*) ;
2. la *prédiction* : cette étape exploite la corrélation à la fois spatiale et fréquentielle présente dans les signaux. Durant cette étape, les éléments de la première composante (les éléments *pairs*) sont utilisés pour prédire les éléments de la seconde composante (les éléments *impairs*). La différence entre un élément impair prédit et un élément impair réel sera le *détail*. Cette étape est équivalente à l'application d'un filtre passe-haut et d'un sous-échantillonnage qui ne conservera que l'information haute fréquence ;
3. la *mise à jour* : à ce stade, les composantes paires représentent uniquement un sous-échantillonnage du signal original. Pour que ces composantes paires soient vraiment les basses fréquences du signal original, un filtre passe-bas est censé être appliqué sur ces composantes pour éviter le recouvrement spectral [107, 108] et ainsi respecter la théorie de Shannon [103]. Pour un schéma *lifting*, ce recouvrement peut être évité en utilisant une étape de mise à jour dont le but est d'obtenir une représentation fiable en tentant de conserver certaines propriétés du signal original.

La synthèse s'obtient facilement en "inversant" les signes et l'ordre d'applications des équations des filtres d'analyse (voir figure 3.5).

Une étape supplémentaire est généralement ajoutée une fois les sous-bandes obtenues. Cette étape est la multiplication des deux sous-signaux par un *gain*. Ceci permet de satisfaire la condition de normalisation [107, 108] qui n'est pas obligatoirement respectée par les filtres de prédiction et de mise à jour.

### 3.3.1 Schéma *lifting* à $M$ canaux

Un schéma à  $M$  canaux transforme un signal en  $M$  sous-signaux. Le premier sous-signal est la version grossière du signal original. Les autres sous-signaux représentent  $(M - 1)$  ensembles de détails. Il y a donc logiquement  $(M - 1)$  opérateurs de prédiction et de mise à jour. La figure 3.6 montre le principe d'une synthèse de schéma *lifting* à 4 canaux.



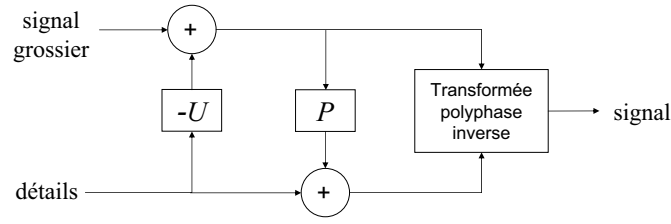
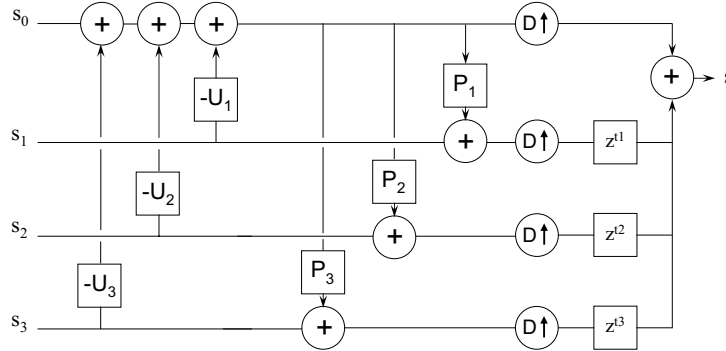


FIG. 3.5 – Synthèse d'un schéma lifting classique.

FIG. 3.6 – Synthèse d'un schéma lifting  $M$ -canaux, avec  $M = 4$ .  $p_i$  et  $u_i$  représentent les opérateurs de prédiction et de mise à jour associés au sous-signal  $i$ .

### 3.3.2 Matrice polyphase d'un schéma *lifting* à $M$ canaux

Comme nous l'avons montré dans la section 3.2, seuls les composants de la matrice polyphase sont utiles pour le calcul des pondérations dues à la non-orthogonalité des filtres. Dans le cas d'un schéma *lifting* à  $M$  canaux, la matrice polyphase s'exprime de la manière suivante [67] :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_2 & \dots & p_{M-1} \\ -u_1 & 1 - u_1 p_1 & -u_1 p_2 & \dots & -u_1 p_{M-1} \\ -u_2 & -u_2 p_1 & 1 - u_2 p_2 & \dots & -u_2 p_{M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -u_{M-1} & -u_{M-1} p_1 & -u_{M-1} p_2 & \dots & 1 - u_{M-1} p_{M-1} \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

avec  $p_i$  et  $u_i$  les opérateurs de prédiction et de mise à jour associés à la sous-bande  $i$ .

On remarque alors que pour calculer les pondérations  $w_i$  d'un schéma *lifting*, il suffit d'identifier chaque cellule de la matrice polyphase (3.48) avec les opérateurs  $p_i$  et  $u_i$  associés, et ensuite d'appliquer la formule (3.38) de la page 59.

Par ailleurs, les gains  $K_i$  introduits par le schéma *lifting* pour satisfaire la condition de normalisation [107] doivent donc être pris en compte lors du calcul des pondérations. Ainsi, les formules définies en (3.38) sont substituées par la formule :

$$w_i = \frac{1}{K_i} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{\mathbf{k} \in D\mathbb{Z}^d} g_{i,j}(\mathbf{k})^2. \quad (3.49)$$

Dans la prochaine section, nous donnons plusieurs exemples de pondérations calculées à l'aide de la formule proposée. Le premier exemple concerne le filtre non séparable quinconce

qui est un schéma *lifting* à 2 canaux. Les pondérations associées à ce filtre ayant déjà été calculées par d'autres travaux [39], on va pouvoir vérifier si notre formule est correcte et ainsi valider notre approche.

### 3.3.3 Exemple d'un schéma 2-canaux : le filtre quinconce pour les signaux bidimensionnels

Proposé pour le traitement d'images fixes, le schéma *lifting* quinconce est associée à une grille d'échantillonnage bidimensionnelle non séparable ( $d = 2$ ). Une des matrices de dilatation possibles est donnée par

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Le calcul du déterminant de cette matrice permet de vérifier que le schéma *lifting* associé à une grille d'échantillonnage quinconce est un schéma à 2 canaux :

$$M = \det(D) = 2.$$

Il existe plusieurs versions pour ce filtre dépendant du niveau de voisinage utilisé. Nous avons choisi d'étudier les pondérations pour le filtre (4,2) et le filtre (6,2) [39]. Les pondérations peuvent être calculées grâce à la formule (3.49). Le développement du calcul pour ces 2 filtres est proposé en annexe (voir annexe 1 page 119). Nous obtenons les résultats suivants :

⤵ les pondérations relatives aux filtres (4,2) sont les suivantes :

$$\begin{cases} w_0 = 1,375976562, \\ w_1 = 3,219863892. \end{cases} \quad (3.51)$$

⤵ les pondérations relatives aux filtres (6,2) sont les suivantes :

$$\begin{cases} w_0 = 1,448065042, \\ w_1 = 3,140608683. \end{cases} \quad (3.52)$$

Nous obtenons bien les mêmes résultats que [39] et notre méthode est donc valide. Remarquons que nous n'avons pas eu besoin de reconstituer le banc de filtres de synthèse entier, ni de prendre en compte le sous-échantillonnage et le décalage utilisé pour reconstruire le signal, contrairement à la méthode de Gouze *et al.* [39] où l'on doit calculer les filtres transverses de synthèse à partir des filtres de prédiction et de mise à jour, mais aussi de la matrice de dilatation et des opérateurs de décalage. Notre méthode a donc l'avantage d'être plus simple puisque l'on a juste besoin de l'opérateur de prédiction  $p_1$  et de l'opérateur de mise à jour  $u_1$ .

Maintenant que nous avons validé l'approche proposée, nous allons calculer les pondérations relatives au schéma de *butterfly lifté*, qui est un schéma 4 canaux.

### 3.3.4 Exemple d'un schéma *lifting* 4-canaux : le schéma de *butterfly* pour maillages triangulaires

Le schéma *lifting* sur un maillage triangulaire est basé sur une grille d'échantillonnage triangulaire "par arête". On l'appelle ainsi pour préciser que les coefficients seront ajoutés selon le principe de subdivision quaternaire (voir section 1.1.4 du chapitre 1, page 14).

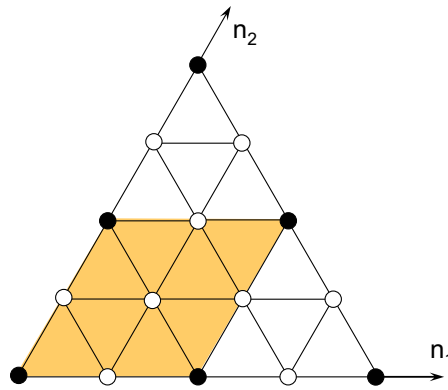


FIG. 3.7 – Grille d'échantillonnage triangulaire "par arête" bidimensionnelle.

La grille d'échantillonnage est bidimensionnelle ( $d = 2$ ) puisque le maillage bien que situé dans un espace tridimensionnel, est un maillage surfacique (voir figure 3.7). La matrice de dilatation associée est la suivante [67] :

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

Le calcul du déterminant de cette matrice permet de vérifier que le schéma *lifting* associé à une grille triangulaire est un schéma à 4 canaux :

$$M = \det(D) = 4.$$

Le maillage triangulaire d'entrée est donc séparé en 4 sous-bandes. La synthèse du schéma *lifting* correspondant est présentée par la figure 3.6 page 64.

La figure 3.8 montre la grille d'échantillonnage de base ainsi que les 4 sous-bandes correspondantes. Les points noirs  $s_0$  représentent la sous-bande basse fréquence. Les points jaunes, verts, et rouges représentent les trois sous-ensembles d'échantillons  $s_1$ ,  $s_2$ , et  $s_3$  (c'est-à-dire les trois sous-bandes de coefficients hautes fréquences).

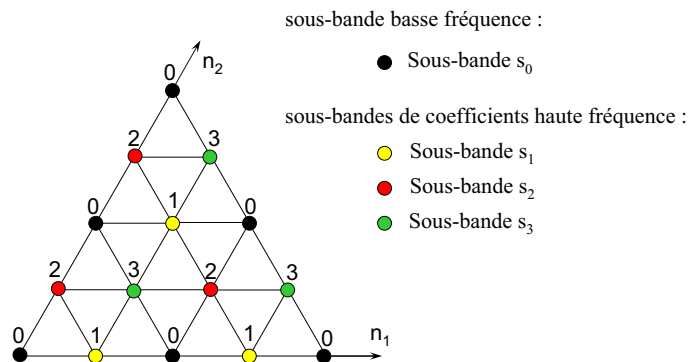


FIG. 3.8 – Sous-échantillonnage relatif à une grille triangulaire. 4 sous-ensembles sont obtenus.

La matrice polyphase associée à un schéma à 4 canaux est déduit de la matrice (3.48) :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_2 & p_3 \\ -u_1 & 1 - u_1 p_1 & -u_1 p_2 & -u_1 p_3 \\ -u_2 & -u_2 p_1 & 1 - u_2 p_2 & -u_2 p_3 \\ -u_3 & -u_3 p_1 & -u_3 p_2 & 1 - u_3 p_3 \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Le schéma de *butterfly* est le schéma *lifting* le plus répandu dans le domaine des maillages surfaciques [62, 63, 105, 69, 94, 93, 95, 96]. En pratique, deux versions de ce schéma sont connues :

- le schéma de *butterfly lifté*, qui est composé des deux étapes classiques, à savoir l'étape de prédiction et l'étape de mise à jour;
- le schéma de *butterfly non lifté*, qui n'est composé que de l'étape de prédiction sans mise à jour.

### 3.3.4.1 Le *butterfly lifté*

Les masques de voisinage correspondant aux opérateurs de prédiction  $p_1$  et de mise à jour  $u_1$  pour le *butterfly lifté* sont présentés par la figure 3.9.

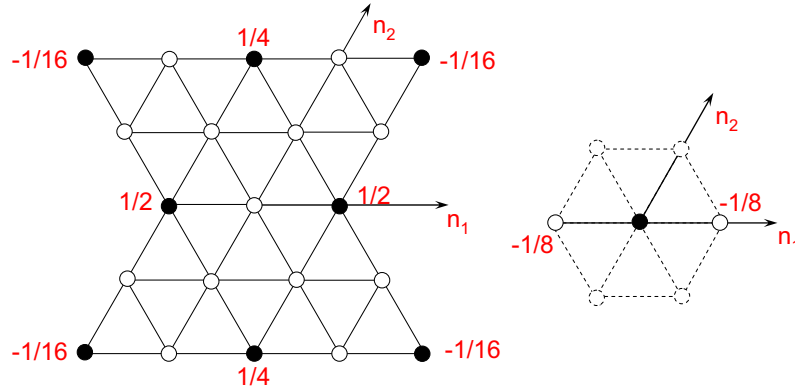


FIG. 3.9 – Opérateurs de prédiction  $p_1$  et de mise à jour  $u_1$  du schéma de *butterfly lifté*.

Les opérateurs relatifs aux sous-ensembles de coefficients  $s_2$  et  $s_3$  sont obtenus en utilisant les mêmes masques de voisinage, mais tournés en fonction de l'orientation du sous-ensemble concerné.

Dans l'espace de la transformée en  $z$ , les opérateurs de prédiction du *butterfly lifté* sont formulés de la manière suivante [102] :

$$\begin{cases} p_1(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \left( z_1 + \frac{1}{z_1} \right) + \frac{1}{8} \left( \frac{z_2^2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2^2} \right) - \frac{1}{16} \left( z_1 z_2^2 + \frac{z_1^3}{z_2^2} + \frac{1}{z_1 z_2^2} + \frac{z_2^2}{z_1^3} \right), \\ p_2(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z_2} + z_2 \right) + \frac{1}{8} \left( \frac{z_1^2}{z_2} + \frac{z_2}{z_1^2} \right) - \frac{1}{16} \left( z_2 z_1^2 + \frac{z_2^3}{z_1^2} + \frac{1}{z_2 z_1^2} + \frac{z_1^2}{z_2^3} \right), \\ p_3(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2} \right) + \frac{1}{8} \left( z_1 z_2 + \frac{1}{z_1 z_2} \right) - \frac{1}{16} \left( \frac{z_1^3}{z_2} + \frac{z_2^3}{z_1} + \frac{z_1}{z_2^3} + \frac{z_2}{z_1^3} \right). \end{cases} \quad (3.55)$$

En parallèle, les opérateurs de mise à jour du *butterfly lifté* sont formulés de la manière suivante [94] :

$$\begin{cases} u_1(z_1, z_2) = \frac{1}{8} \frac{1}{z_1} + \frac{1}{8} z_1, \\ u_2(z_1, z_2) = \frac{1}{8} \frac{1}{z_2} + \frac{1}{8} z_2, \\ u_3(z_1, z_2) = \frac{1}{8} \frac{1}{z_1 z_2} + \frac{1}{8} z_1 z_2. \end{cases} \quad (3.56)$$

De plus, les gains  $K_0 = 2$  et  $K_1 = K_2 = K_3 = 1$  sont introduits pour respecter la condition de normalisation.

En substituant (3.55) et (3.56) dans chaque élément de la matrice polyphase (3.54), et en utilisant la formule (3.49), on obtient les valeurs des pondérations correspondant au *butterfly lifté* [94, 30] :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0 = \frac{169}{256} = 0,66015625, \\ w_1 = \frac{1727}{2048} \simeq 0,843261715, \\ w_2 = \frac{1727}{2048} \simeq 0,843261715, \\ w_3 = \frac{1727}{2048} \simeq 0,843261715. \end{array} \right. \quad (3.57)$$

### 3.3.4.2 Le *butterfly non lifté*

Cette fois-ci il n'y a qu'une étape de prédiction, sans mise à jour. Ce schéma est logiquement moins efficace puisque la théorie de Shannon n'est pas respectée [103]. Cependant, le schéma est plus intéressant que sa version liftée lorsque le remaillage utilisé avant la transformée est le *remailleur normal* (voir chapitre 1 page 31) [62].

L'opérateur de prédiction est formulé de la même manière que pour le schéma lifté (3.56). Par contre, les opérateurs de mise à jour sont nuls, *i.e.*,  $u_i = 0 \forall i$ . Les gains sont les mêmes que pour la version liftée. Les pondérations sont alors données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0 = \frac{169}{256} = 0,66015625 \\ w_1 = 1 \\ w_2 = 1 \\ w_3 = 1. \end{array} \right. \quad (3.58)$$

**Remarque 4.** *On constate que les pondérations sont les mêmes pour les trois sous-ensembles  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$ . Ceci est un résultat logique. En effet, en pratique il n'y jamais de distinction entre les trois sous-ensembles de coefficients hautes fréquences puisque ce sont exactement les mêmes filtres qui sont appliqués sur les trois sous-ensembles pour obtenir les coefficients. D'ailleurs, dans le chapitre 4 où l'on présente le codeur et l'allocation binaire proposée, on parlera lors d'une décomposition sur 1 niveau d'une sous-bande basse fréquence, et d'une sous-bande de coefficients hautes fréquences réunissant les trois signaux  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$ .*

## 3.4 Validation de la méthode : résultats expérimentaux

Pour montrer l'intérêt d'utiliser la formule de l'EQM pondérée plutôt que l'EQM classique pour évaluer l'erreur de reconstruction d'un signal multidimensionnel et en particulier d'un maillage compressé, nous allons évaluer le gain en qualité conséquent à son utilisation comme critère de distorsion dans une allocation binaire relative au codage de maillages triangulaires. Pour cela, nous utilisons le codeur proposé dans ce mémoire (voir chapitre 4) et nous considérons deux cas :

1. la formule de l'EQM pondérée (3.46) est utilisée comme critère de distorsion lors de l'allocation binaire. Les pondérations utilisées sont celles calculées dans la section 3.3.4 ;

2. une *EQM* non pondérée est utilisée comme critère de distorsion pour l'allocation binaire. Dans ce cas, les pondérations sont définies par  $w_i = 1 \forall i$ , ce qui correspond aux pondérations des filtres orthogonaux. Ainsi, la non-orthogonalité des filtres n'est pas prise en compte.

Les figures 3.10, 3.11, 3.12 et 3.13 comparent les courbes débit-*PSNR*<sup>2</sup> obtenues pour différents objets codés avec la méthode proposée dans ce mémoire selon les deux cas précédemment énoncés ci-dessus, lorsque le schéma de *butterfly lifté* est utilisée sur des maillages semi-réguliers issus du remailleur *MAPS* [70]. Dans ce cas, les pondérations utilisées sont données par les équations (3.57).

Globalement, on observe que la prise en compte de la non-orthogonalité des filtres par l'utilisation de l'*EQM* pondérée entraîne un gain en *PSNR* considérable, quels que soient l'objet traité et le débit. En particulier, on peut noter un gain sur l'objet BUNNY allant jusqu'à plus de +3 *dB* à bas débit.

Ce résultat est d'autant plus remarquable que les hypothèses faites sur l'erreur de quantification lors du développement de la formule de l'*EQM* pondérée dans la section 3.2 ne sont théoriquement valides qu'à hauts débits (modèle du "bruit additif") [36]. Nous devrions donc observer un gain moins important à bas débit comme cela est le cas en compression d'images par exemple. Malgré tout, l'*EQM* pondérée améliore de manière tout à fait remarquable la quantification de la géométrie des maillages triangulaires, quel que soit le débit.

Les figures 3.14, 3.15, 3.16 et 3.17 comparent les courbes débit-*PSNR* obtenues pour différents objets codés avec la méthode proposée dans ce mémoire selon les deux cas précédemment énoncés ci-dessus, lorsque le schéma de *butterfly non lifté* est utilisé sur des maillages semi-réguliers issus du *remailleur normal* [45]. Dans ce cas, les pondérations utilisées sont données par les équations (3.58). On observe des résultats analogues, avec un gain atteignant les +3,5 *dB* sur l'objet SKULL à bas débit.

Par ailleurs, la figure 3.18 montre la différence visuelle entre le modèle BUNNY original (figure 3.18(a)), la version quantifiée lorsque l'*EQM* pondérée n'est pas utilisée par l'allocation binaire (figure 3.18(b)) et la version quantifiée lorsque une *EQM* non pondérée est utilisée par l'allocation binaire (voir figure 3.18(c)). Le débit total est de 0,4 bits par sommet. Nous observons que le maillage est mieux reconstruit lorsque l'*EQM* pondérée est utilisée par l'allocation binaire. La figure 3.19 montre des résultats similaires pour le modèle HORSE compressé à 1,2 bits par sommet.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle approche pour généraliser la formule de l'*EQM* d'un signal multidimensionnel à travers un codeur ondelettes *M*-canaux. Nous avons montré que quels que soient la dimension du signal, le nombre de canaux *M*, la grille d'échantillonnage et le sous-échantillonnage appliqué, les pondérations peuvent toujours être calculées uniquement à partir des composantes polyphases du banc de filtres de synthèse. Cette formulation particulière est avantageuse par rapport à la formulation proposée dans [89, 90], en particulier pour les transformées par schéma *lifting*. Dans ce cas

---

2. La formule du *PSNR* (définie page 97) dépend de la distance surface-surface calculée à l'aide du logiciel MESH [14] entre le maillage original et le maillage semi-régulier reconstruit.

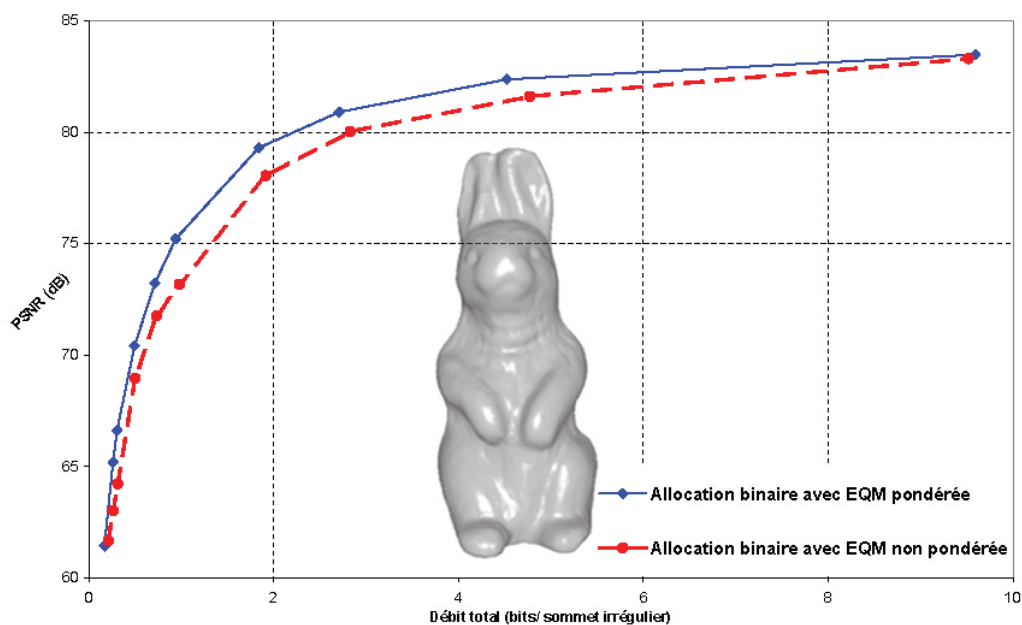


FIG. 3.10 – Butterfly lifté : comparaison de la qualité du maillage reconstruit pour le modèle RABBIT selon l'utilisation des pondérations.

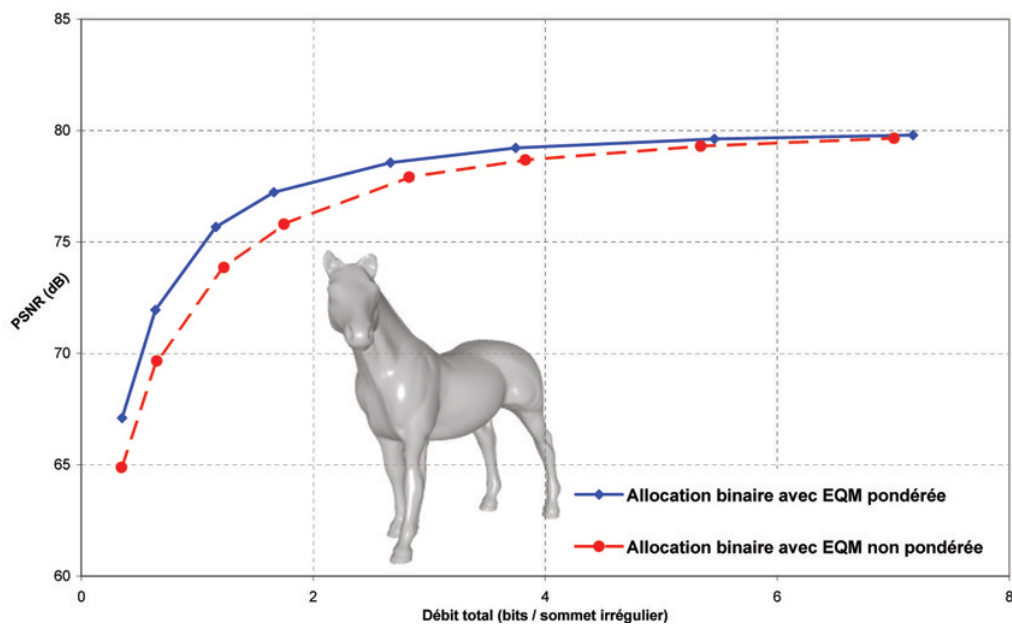


FIG. 3.11 – Butterfly lifté : comparaison de la qualité du maillage reconstruit pour le modèle HORSE selon l'utilisation des pondérations.

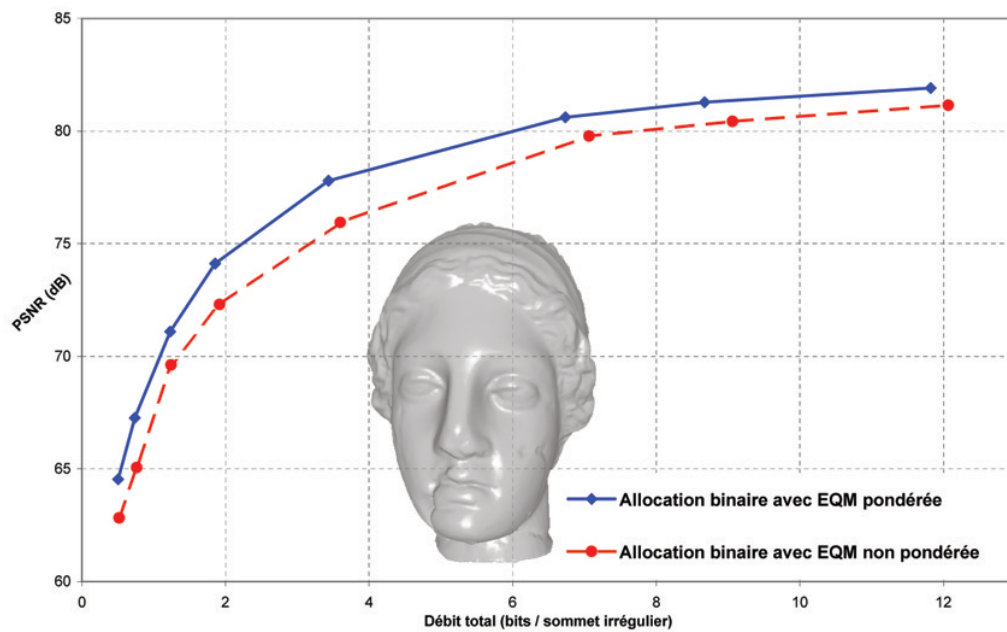


FIG. 3.12 – Butterfly lifté : comparaison de la qualité du maillage reconstruit pour le modèle VENUS selon l'utilisation des pondérations.

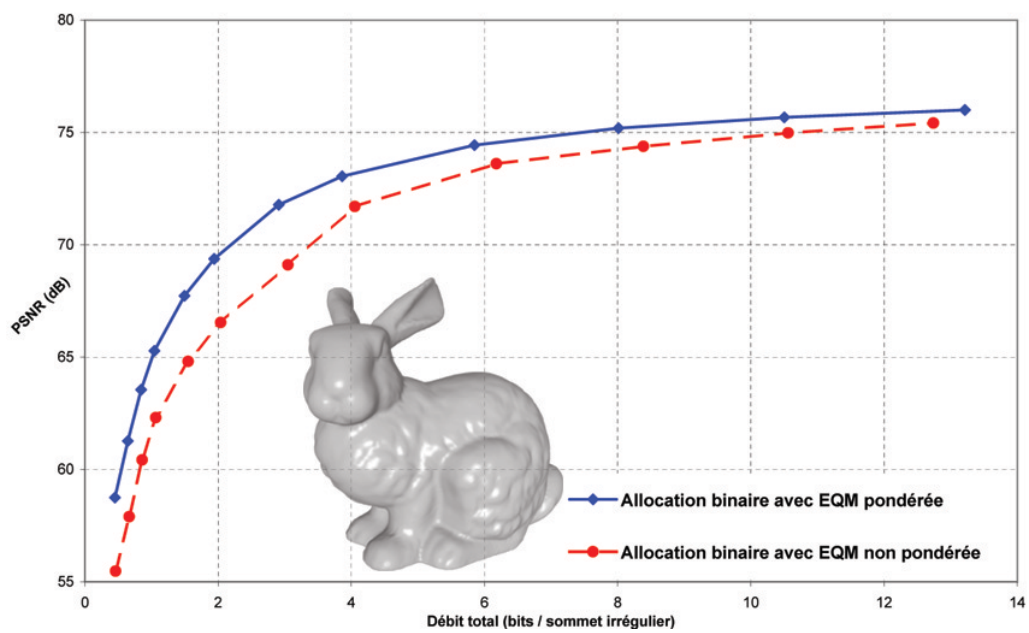


FIG. 3.13 – Butterfly lifté : comparaison de la qualité du maillage reconstruit pour le modèle BUNNY selon l'utilisation des pondérations.



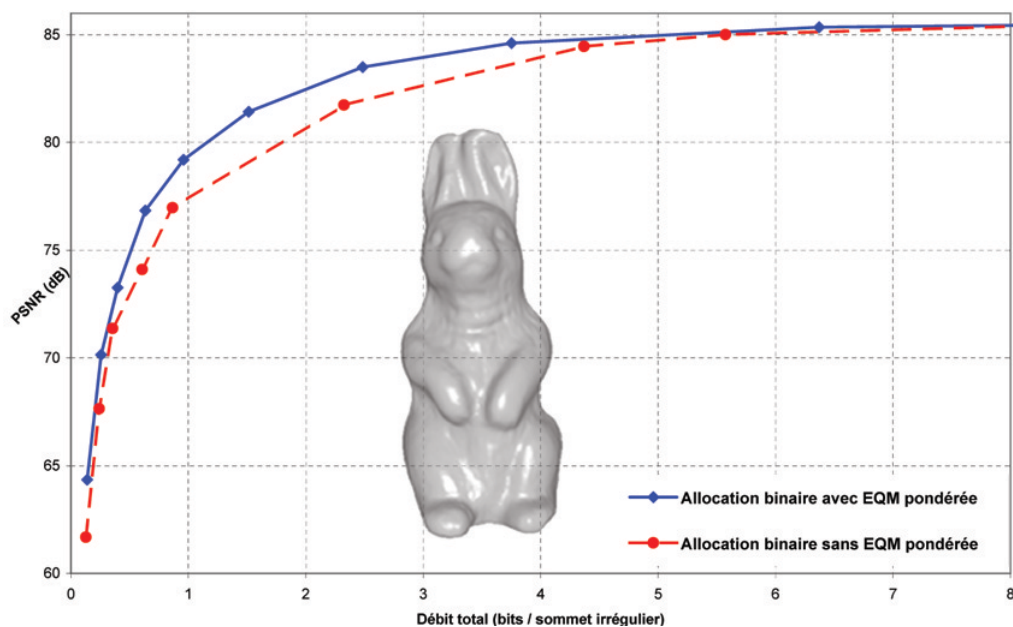


FIG. 3.14 – Butterfly non lifté : comparaison de la qualité du maillage reconstruit pour le modèle RABBIT selon l'utilisation des pondérations.

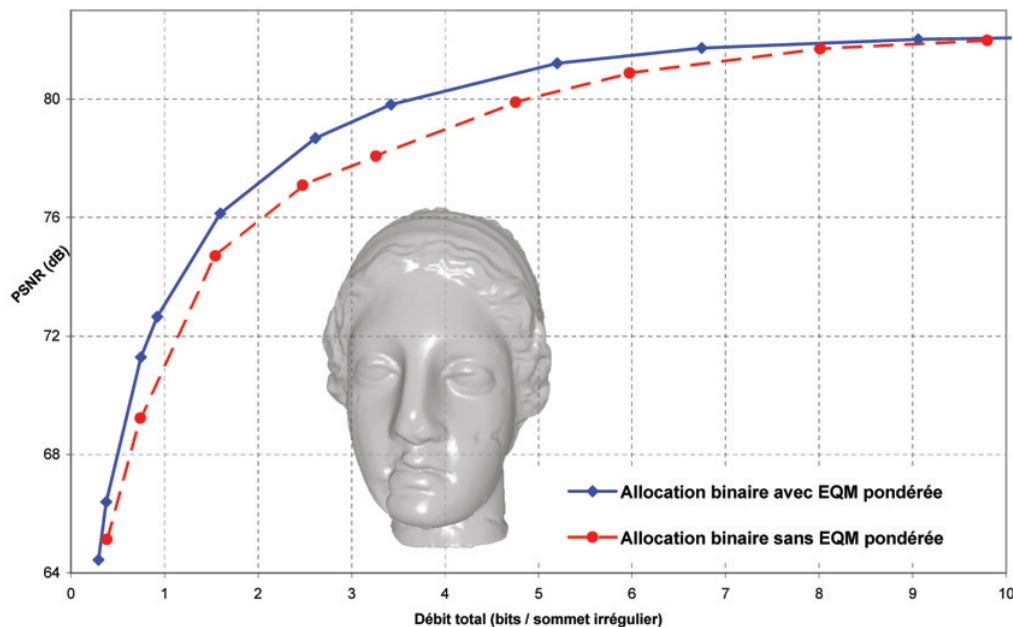


FIG. 3.15 – Butterfly non lifté : comparaison de la qualité du maillage reconstruit pour le modèle VENUS selon l'utilisation des pondérations.

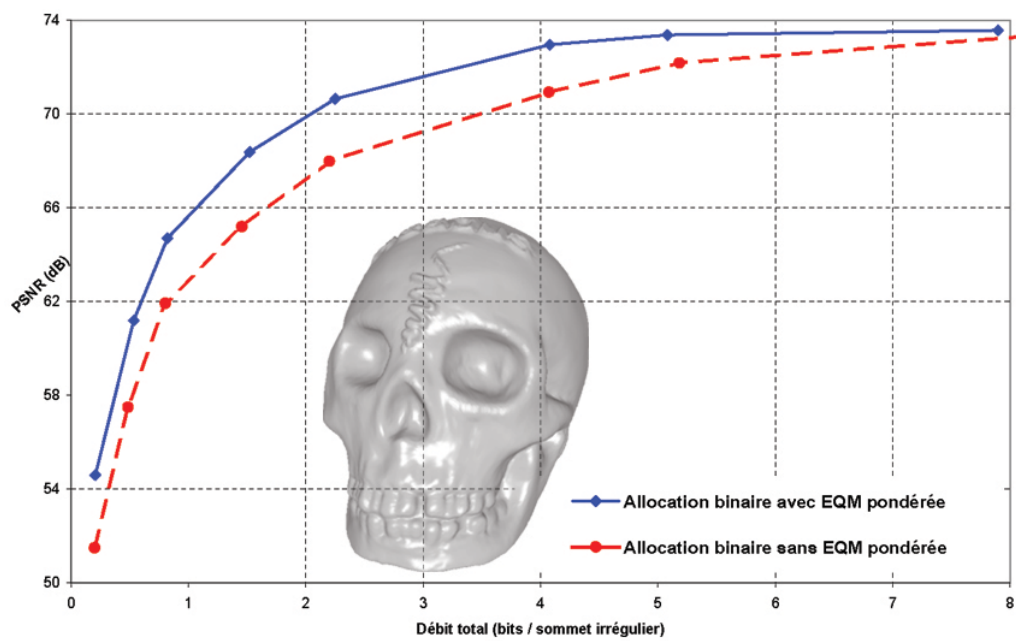


FIG. 3.16 – Butterfly non lifté : comparaison de la qualité du maillage reconstruit pour le modèle SKULL selon l'utilisation des pondérations.

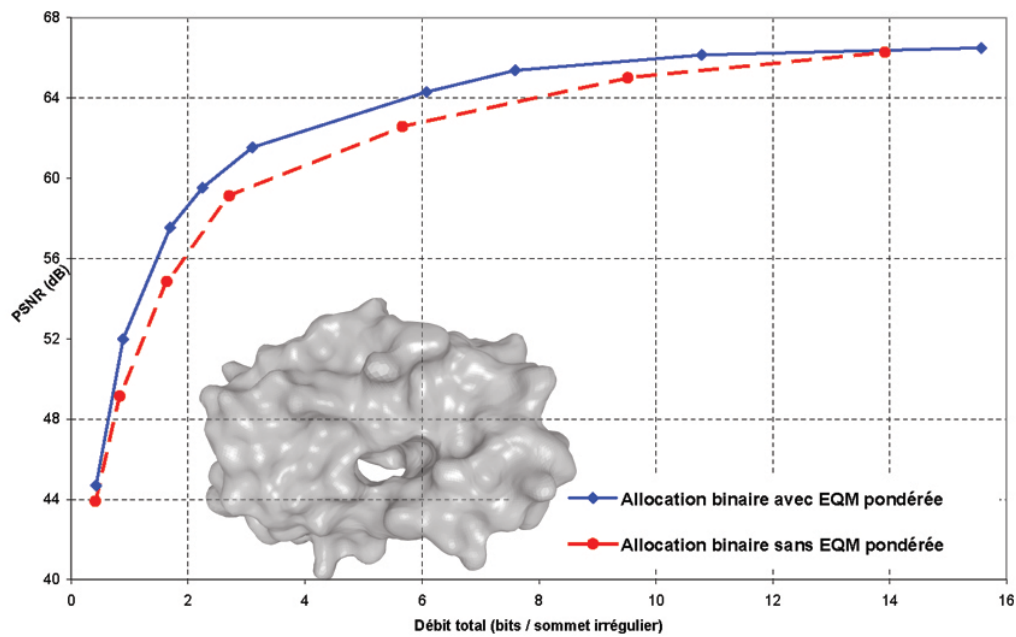


FIG. 3.17 – Butterfly non lifté : comparaison de la qualité du maillage reconstruit pour le modèle MOLECULE selon l'utilisation des pondérations.

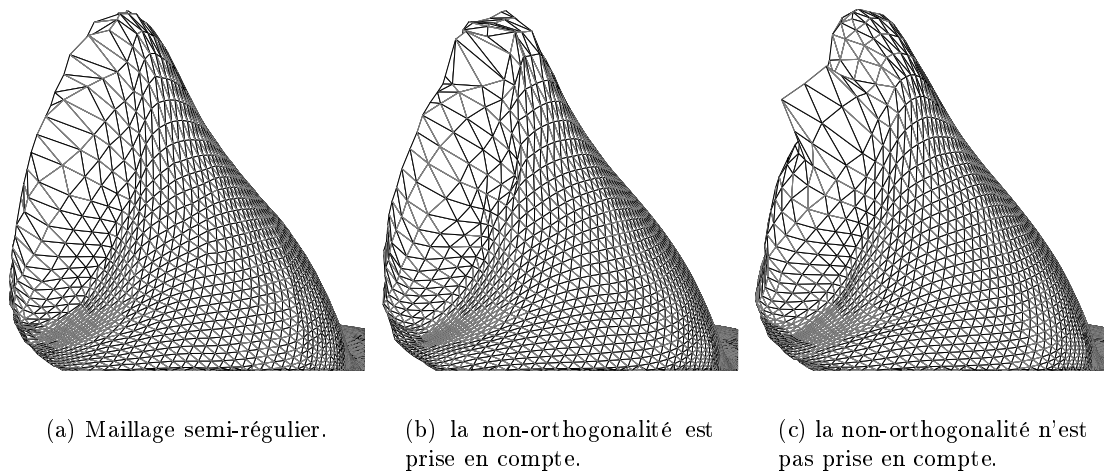


FIG. 3.18 – *Impacte visuelle de la prise en compte de la non-orthogonalité des filtres (en utilisant l'EQM pondérée comme critère de distorsion de l'allocation binaire) sur l'oreille de BUNNY. Le débit total est de 0,4 bits par sommet.*

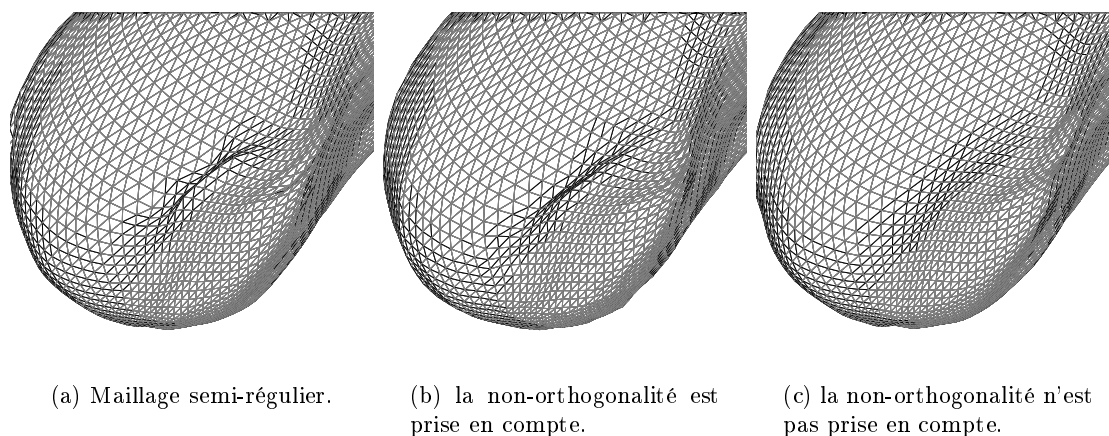


FIG. 3.19 – *Impacte visuelle de la prise en compte de la non-orthogonalité des filtres (en utilisant l'EQM pondérée comme critère de distorsion de l'allocation binaire) sur le nez de HORSE. Le débit total est de 1,2 bits par sommet.*

de figure, seules les opérateurs de prédiction et de mise à jour sont nécessaires pour calculer les pondérations de non-orthogonalité alors qu’avec les autres méthodes, il faudrait calculer les  $M$  filtres transerves de synthèse avant de pouvoir calculer les pondérations.

Nous avons ainsi pu calculer les pondérations pour le schéma de *butterfly* qui est la transformée utilisée par le codeur proposé, afin d’évaluer correctement l’erreur de reconstruction en fonction de l’ $EQM$  de chaque sous-bande de coefficients d’ondelettes durant l’allocation binaire. Nous avons d’ailleurs montré numériquement et visuellement que la prise en compte de la non-orthogonalité des filtres permettait d’améliorer considérablement la qualité des maillages reconstruits quel que soit le débit.

Nous pouvons maintenant nous atteler dans le chapitre suivant à la description de l’allocation binaire proposée pour les maillages triangulaires, et le codeur qui en découle.



## Chapitre 4

# Algorithme de compression géométrique optimale

Ce chapitre présente en détails le codeur de maillages triangulaires proposé, et en particulier l'allocation binaire qui va permettre d'optimiser la quantification de la géométrie en fonction du débit. Cette allocation utilise comme critère de distorsion l'expression de l'*EQM* d'un signal reconstruit à travers un codeur ondelettes *M*-canaux présentée dans le chapitre précédent. Cette formule de l'*EQM* appliquée à la géométrie quantifiée du maillage semi-régulier va nous permettre d'approximer la distance surface-surface entre le maillage d'origine et le maillage reconstruit, et ce dans le but de maximiser la qualité du maillage reconstruit quel que soit le débit.

Le codeur proposé suit un schéma type d'algorithme de compression de signal dans un espace transformé incluant une allocation binaire (voir figure 4.1).

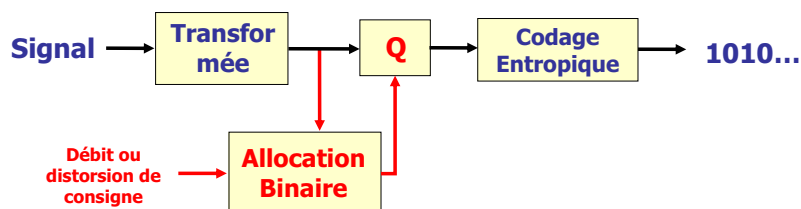


FIG. 4.1 – Algorithme de compression de signal dans un espace transformé.

Deux composantes ont été introduites dans ce schéma pour s'adapter aux maillages denses et détaillés : une technique de remaillage permettant d'obtenir une version semi-régulière du maillage original (rendant la transformée plus performante) et un codeur topologique monorésolution qui encodera la seule information topologique des maillages semi-réguliers, c'est à dire la connectivité du maillage grossier.

Un point important abordé dans ce chapitre est la manière dont va être organisée et codée la géométrie pour la quantification. En effet, la géométrie est composée de coefficients d'ondelettes géométriques tridimensionnels. Plusieurs possibilités se présentent donc à nous pour la quantification de ces coefficients : la quantification vectorielle appliquée sur chaque coefficient, ou la quantification scalaire appliquée sur chaque coordonnée des coefficients.

De plus, le choix de la méthode doit prendre en compte la distinction importante entre l'*information tangentielle* et l'*information normale* lors de la structuration des données géométriques, l'aspect visuel d'un maillage étant plus sensible à une mauvaise quantifica-

tion de l'information normale [63]. Par ailleurs, cette structuration particulière doit aussi nous permettre de développer une allocation binaire rapide et peu complexe, en exploitant éventuellement des modèles théoriques.

Le but de l'allocation binaire sera de répartir les bits à travers les différentes sous-bandes de coefficients d'ondelettes. Cette répartition dépendra de la pertinence de l'information géométrique présente dans chaque sous-bande par rapport à la qualité global du maillage, et ce en fonction du débit désiré. Ainsi, l'allocation binaire permettra d'optimiser le compromis entre qualité visuelle du maillage reconstruit et débit total.

Outre la structuration spécifique des données et l'allocation binaire basée modèle pour optimiser l'encodage de la géométrie, une troisième contribution de ce chapitre est la conception d'un codeur arithmétique par plan de bits spécialement adapté aux données géométriques des maillages semi-réguliers. Pour cela, nous avons adapté le codeur contextuel *EBCOT* [115] (initialement utilisé pour les images) aux coefficients d'ondelettes géométriques tridimensionnelles.

Cette section est organisée de la manière suivante. Après une description globale du codeur de maillages proposé (section 4.1), nous allons discuter de la manière dont les coefficients d'ondelettes vont être organisés pour un traitement et un codage pertinent (sous-section 4.2). De cette organisation nous déduirons le critère de distorsion choisi pour contrôler la quantification de la géométrie des maillages triangulaires (sous-section 4.3), critère dépendant de la formule de l'*EQM* d'un signal reconstruit à travers un codeur ondelettes *M*-canaux. Ensuite, nous développerons la théorie concernant l'allocation binaire qui permettra de minimiser l'erreur de reconstruction quel que soit le débit imposé (section 4.4). Enfin, le codeur arithmétique contextuel adapté à la géométrie des maillages semi-réguliers sera présenté (section 4.5).

## 4.1 Description générale du codeur géométrique

La figure 4.2 montre le schéma détaillé du codeur proposé, qui contient 4 composantes principales : remaillage, transformée en ondelettes, codage de la topologie, et codage de la géométrie. Les différentes étapes de l'algorithme sont :

1. le **remaillage** : cette étape permet d'obtenir une version semi-régulière du maillage d'entrée irrégulier. Outre le fait que cette étape améliore l'analyse multirésolution, cette étape réduit aussi l'information topologique à son minimum. La partie primordiale de notre schéma de compression est donc l'encodage de la géométrie puisque la connectivité a maintenant un poids dérisoire par rapport à la géométrie<sup>1</sup> (voir section 1.1.4 page 14). La technique de remaillage choisie est le *remailleur normal* [45] ;
2. la **transformée en ondelettes** : une décomposition sur  $N$  niveaux permet d'obtenir le maillage basse fréquence et  $N$  sous-bandes de coefficients tridimensionnels hautes fréquences<sup>2</sup>. La technique retenue est le *schéma de butterfly non lifté* car elle représente la transformée optimale lorsque le *remailleur normal* est utilisé [62] ;
3. l'**encodage de la connectivité** du maillage grossier : n'importe quel codeur topologique peut être utilisé. Nous avons choisi le codeur de Touma et Gotsman [118],

---

1. Pour preuve, avec l'algorithme proposé, la connectivité représente en moyenne 0,005% (à forts débits) à 10% (à très bas débits) de la taille de la trame binaire obtenue.

2. Les trois sous-bandes de coefficients hautes fréquences d'un maillage triangulaire décrites en théorie dans le cadre des transformées en ondelettes à 4 canaux sont généralement regroupées en une seule sous-bande de coefficients hautes fréquences pour les maillages triangulaires.

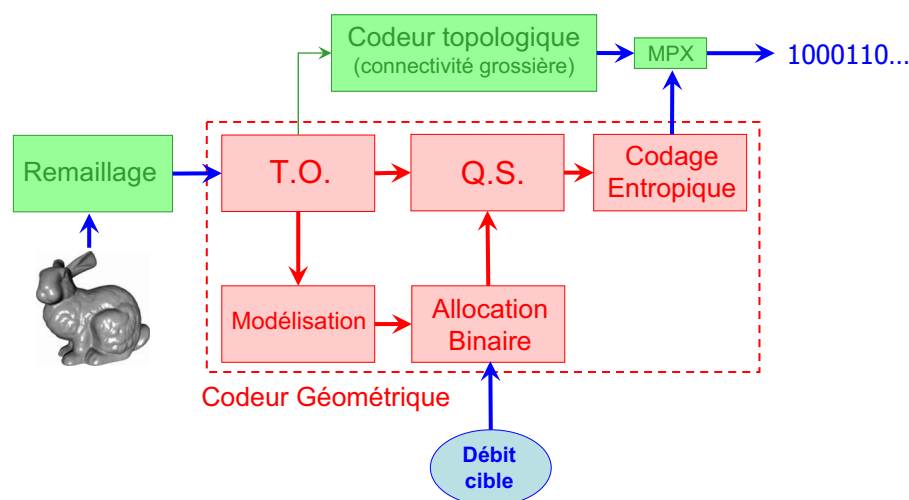


FIG. 4.2 – Schéma complet du codeur proposé.

simple, rapide et efficace ;

#### 4. l'encodage géométrique :

- (a) **structuration et modélisation** des données géométriques : pour quantifier les données géométriques, nous utilisons un quantificateur scalaire. Les données géométriques étant tridimensionnelles, une restructuration particulière est proposée dans la section 4.2 qui permettra une modélisation théorique de la distorsion et du débit ;
- (b) **allocation binaire** : c'est un point crucial de notre algorithme. Il permet de calculer les pas de quantification optimaux qui minimisent l'erreur de reconstruction lors du codage en fonction d'un débit de consigne. Lors de ce processus, nous utilisons l'approximation de la distance surface-surface (présentée dans le chapitre 2) et évaluée à partir des erreurs de quantification des sous-bandes de coefficients d'ondelettes à partir de la formule (3.46) page 61 ;
- (c) **quantification** : les données géométriques sont quantifiées avec les pas calculés lors de l'allocation binaire. Nous avons choisi un quantificateur scalaire uniforme ;
- (d) **codage entropique** : un codage entropique des sous-bandes de coefficients quantifiés permet finalement d'obtenir la trame binaire. Le codeur proposé est un codeur arithmétique contextuel par plans de bits qui exploite la corrélation spatiale *intra* et *inter*-résolution des coefficients d'ondelettes tridimensionnelles à l'aide de contextes originaux adaptés à la géométrie des maillages [93].

La section suivante présente la manière dont les sous-bandes de coefficients d'ondelettes vont être organisées et traitées.

## 4.2 Organisation des données géométriques

A quelques rares exceptions près [71], la technique de quantification généralement retenue lors de l'encodage géométrique est la quantification scalaire, que ce soit dans l'espace euclidien ou dans un espace transformé. Puisque les sommets ou les coefficients sont tridimensionnels, une quantification scalaire séparée des trois coordonnées est la plupart du



temps proposée.

Les travaux les plus récents sur les maillages multirésolutions proposent de traiter indépendamment les composantes tangentielles et les composantes normales [63, 9, 62, 69].

Pour mémoire, les coefficients d'ondelettes sont généralement calculés pour chaque sommet selon un repère local relatif au plan tangent et à la normale à la surface [28]. Ainsi, l'information géométrique est divisée en deux composantes : l'*information tangentielle* et l'*information normale*.

L'information tangentielle représentée par les coordonnées en  $x$  et  $y$  des coefficients d'ondelettes, traduit le déplacement du sommet par rapport au plan tangent à la surface tandis que l'information normale représentée par les coordonnées en  $z$ , traduit le déplacement du sommet le long de la normale à la surface [63].

Il existe une différence importante entre ces composantes conséquente aux techniques de remaillage semi-régulier [63, 45] : *la plus grande partie de l'information géométrique est concentrée dans les composantes normales*.

Ce fait est illustré par la figure 4.3 qui présente les histogrammes de l'angle polaire des coefficients d'ondelettes de VENUS calculés selon différentes configurations.

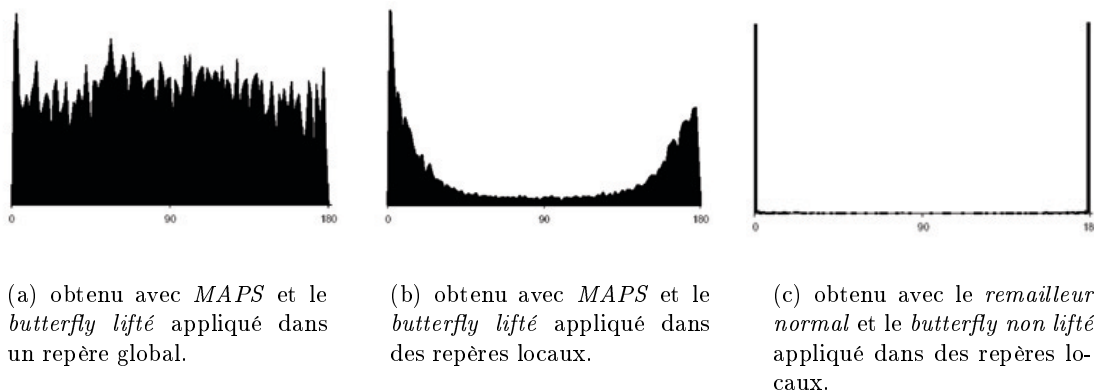


FIG. 4.3 – Histogrammes de l'angle polaire des coefficients d'ondelettes de VENUS calculés selon différentes configurations (Images extraites de [63] et de [62]).

La figure 4.3(a) représente l'histogramme de l'angle polaire des coefficients obtenus avec *MAPS*, le *butterfly lifté*, et calculés dans un repère global. La figure 4.3(b) représente l'histogramme de l'angle polaire des coefficients obtenus avec *MAPS*, le *butterfly lifté*, et calculés dans des repères locaux. On constate que lors de l'utilisation de repères locaux, l'angle polaire est la plupart du temps proche de 0 ou de 180 degrés, c'est-à-dire le long de l'axe  $z$ .

Cette concentration de l'information géométrique le long de l'axe  $z$  est encore plus importante pour les coefficients obtenus avec le *remaillage normal*, le *butterfly non lifté*, et calculés dans des repères locaux (voir figure 4.3(c)).

Cette concentration autour de l'axe  $z$  implique une variance beaucoup plus importante pour les composantes normales que pour les composantes tangentielles. Pour exploiter cette différence de variance et privilégier le codage des composantes normales par rapport aux

composantes tangentielles, nous choisissons donc de traiter et de coder séparément ces composantes, et ce à l'aide d'une quantification scalaire.

#### 4.2.1 Les sous-bandes hautes fréquences

Chaque sous-bande de coefficients hautes fréquences est séparée en deux ensembles scalaires :

- ⤵ la *sous-bande de composantes tangentielles*, contenant les valeurs des coordonnées en  $x$  et  $y$  des coefficients d'ondelettes ;
- ⤵ la *sous-bande de composantes normales*, contenant les valeurs des coordonnées en  $z$  des coefficients d'ondelettes.

La formule de l'*EQM*  $\sigma_{Q_i}^2$  relative à la quantification d'une sous-bande de coefficients hautes fréquences d'un maillage multirésolution est alors la somme des *EQM* relatives aux erreurs de quantification de ces deux sous-bandes :

$$\sigma_{Q_i}^2 = \sum_{j \in J_i} \sigma_{Q_i,j}^2, \quad (4.1)$$

avec  $i$  l'indice de résolution de la sous-bande ( $i \neq N$ ,  $N$  étant l'indice de résolution de la sous-bande basse fréquence).  $J_i$  représente un ensemble d'indices défini par  $J_i = \{1,2\}$  qui permet d'introduire  $\sigma_{Q_i,1}^2$  et  $\sigma_{Q_i,2}^2$ , respectivement les *EQM* relatives aux composantes tangentielles et normales de la  $i^{\text{ième}}$  sous-bande.

#### 4.2.2 La sous-bande basse fréquence

La sous-bande basse fréquence ne présente en revanche aucune propriété statistique spécifique puisqu'elle représente la géométrie du maillage grossier. Nous avons donc choisi de séparer la sous-bande basse fréquence en trois ensembles scalaires<sup>3</sup>.

Ainsi l'*EQM* correspondant à cette sous-bande  $\sigma_{Q_N}^2$  sera la somme des trois *EQM* relatives à la quantification de chaque ensemble de coordonnées :

$$\sigma_{Q_N}^2 = \sum_{j \in J_N} \sigma_{Q_N,j}^2. \quad (4.2)$$

$J_N$  représente l'ensemble d'indices défini par  $J_N = \{1,2,3\}$ , et  $\sigma_{Q_N,j}^2$  représente l'*EQM* relative au  $j^{\text{ième}}$  ensemble de coordonnées de la sous-bande basse fréquence.

### 4.3 Critère de distorsion pour la géométrie des maillages semi-réguliers

Nous venons de décrire la manière dont vont être traitées les différentes sous-bandes de coefficients. La formulation de l'*EQM* à travers un codeur ondelettes  $M$ -canaux définie par l'équation (3.46) du chapitre précédent (page 61) est donc reformulée en fonction de cette organisation.

---

3. Une quantification vectorielle des coefficients basse fréquence est envisageable, comme dans [71]. C'est une des perspectives de ces travaux.

En introduisant les équations (4.1) et (4.2) que l'on vient de définir dans l'équation (3.46), l'EQM  $\sigma_{Qsr}^2$  relative à la géométrie du maillage encodé par un codeur d'ondelettes (exploitant une décomposition sur  $N$  niveaux) est finalement donnée par la formule :

$$\sigma_{Qsr}^2 = \sum_{i=0}^N W_i \sum_{j \in J_i} \sigma_{Q^{i,j}}^2, \quad (4.3)$$

avec  $J_i$  l'ensemble d'indices permettant de distinguer les différentes sous-bandes du niveau de résolution  $i$ , et  $\{W_i\}$  les pondérations de non-orthogonalité de la transformée en ondelettes utilisée données par la formule :

$$\begin{cases} W_N = \frac{|\mathcal{D}_i|}{|\mathcal{V}_{sr}|} (w_0)^N, \\ W_i = \frac{|\mathcal{D}_i|}{|\mathcal{V}_{sr}|} (w_0)^i w_1. \end{cases} \quad (4.4)$$

$|\mathcal{D}_i|$  et  $|\mathcal{V}_{sr}|$  sont respectivement le nombre de coefficients de la sous-bande  $i$  et du maillage semi-régulier.  $w_0$  et  $w_1$  sont les poids dépendants de la transformée utilisée dont les valeurs pour le schéma de *butterfly* sont calculées dans la sous-section 3.3.4 page 67.

Cette équation est finalement le critère de distorsion utilisée lors de l'allocation binaire pour permettre le contrôle de la qualité du maillage reconstruit.

## 4.4 Allocation binaire pour la géométrie des maillages

### 4.4.1 Description du problème

L'idée est d'optimiser le compromis débit-distorsion en répartissant les bits entre les différentes sous-bandes de coefficients. Dans nos travaux, le but du processus est d'obtenir le codage le plus efficace possible d'un point de vue visuel de la géométrie des maillages, c'est-à-dire des coefficients d'ondelettes.

Le propos général de notre processus d'allocation binaire est de *déterminer l'ensemble des pas de quantification  $\{q_{i,j}\}$  qui minimise l'erreur de reconstruction  $D_T$  du maillage reconstruit pour un débit cible  $R_{cible}$  donné.*  $q_{i,j}$  est le pas de quantification de la sous-bande  $(i,j)$ . Ce problème peut être formulé de la manière suivante :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{minimiser} & D_T(\{q_{i,j}\}) \simeq \sigma_{Qsr}^2(\{q_{i,j}\}), \\ \text{sous la contrainte} & R_T(\{q_{i,j}\}) = R_{cible}. \end{cases} \quad (4.5)$$

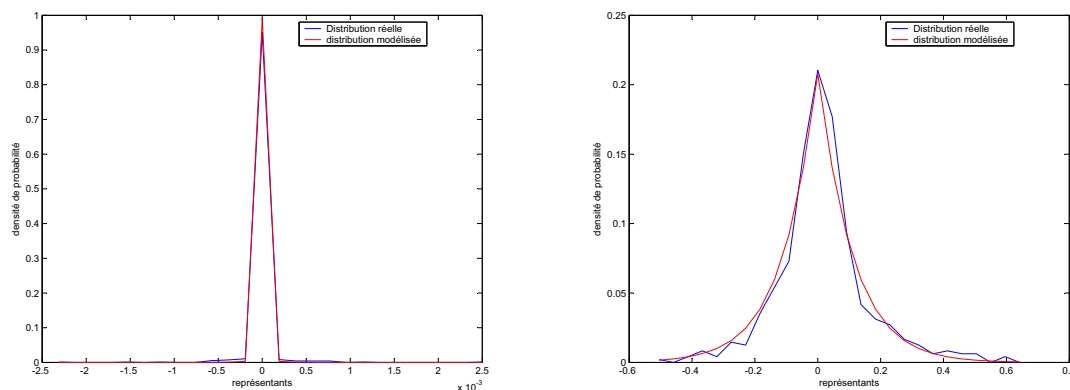
$D_T$  est la distorsion totale relative à l'erreur de reconstruction qui dépend des pas de quantification  $\{q_{i,j}\}$  et évaluée à l'aide de  $\sigma_{Qsr}^2(\{q_{i,j}\})$ , c'est-à-dire l'EQM relative à la géométrie du maillage semi-régulier donnée par l'équation (4.3).  $R_T$  représente le débit total, qui dépend aussi des pas de quantification.

### 4.4.2 Propriétés statistiques des données

Une des priorités de notre codeur est la rapidité. Pour permettre une allocation rapide, il est nécessaire d'utiliser une approche basée sur des modèles théoriques pour éviter de trop nombreuses quantifications inutiles avant d'obtenir la quantification optimale. Ces modèles sont basés sur des particularités statistiques des données traitées. Nous allons donc maintenant étudier les propriétés statistiques des sous-bandes définies ci-dessus.

### 4.4.2.1 Modélisation des densités de probabilité

**Sous-bandes hautes fréquences** La figure 4.4 montre la densité de probabilité typique d'une *sous-bande normale* et d'une *sous-bande tangentielle*. Les coefficients d'ondelettes sont obtenus avec le *remailleur normal* et le *butterfly non lifté* sur l'objet VENUS.



(a) *sous-bande tangentielle* (niveau 2), de variance égale à  $2,56e^{-8}$ .

(b) *sous-bande normale* (niveau 2), de variance égale à  $2,12e^{-2}$ .

FIG. 4.4 – Densité de probabilité typique d'une sous-bande tangentielle et d'une sous-bande normale pour l'objet VENUS (obtenus avec le remailleur normal et le schéma de butterfly non lifté).

La distribution de ces deux sous-bandes est de moyenne nulle et concentrée autour de zéro. Notons l'importante différence de dynamique des représentants entre ces deux distributions (en abscisse) qui justifie le traitement séparé des composantes tangentielles et normales.

Dans le domaine du traitement d'images, il a été prouvé que la densité de probabilité d'une sous-bande de coefficients d'ondelettes d'une image peut être approchée par une *Gaussienne Généralisée centrée* en zéro [12]. Cela a été prouvé pour des coefficients relatifs à des intensités lumineuses, mais cela n'a jamais été prouvé (à notre connaissance) pour les composantes des coefficients d'ondelettes géométriques.

Etant donné l'allure générale de la densité de probabilité de chaque sous-bande de la figure 4.4, on peut supposer que la densité de probabilité des composantes tangentielles et normales peut être aussi approchée par une *Gaussienne Généralisée (GG)* centrée en zéro [91, 92, 94, 93, 95, 96].

Pour valider cette hypothèse, un test du  $\chi^2$  a été effectué entre les éléments des sous-bandes et la densité de probabilité d'une *GG*, dont la formule est :

$$p(x) = ae^{-|bx|^\alpha}, \quad (4.6)$$

avec  $b = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\Gamma(3/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)}}$  and  $a = \frac{b\alpha}{2\Gamma(1/\alpha)}$ . Nous avons choisi de calculer le paramètre  $\alpha$  à l'aide de la variance et du moment d'ordre 4 de chaque sous-bande [61, 87].

Le résultat du test dont le calcul se trouve en annexe 2 (page 123), montre que la répartition réelle des coefficients peut être modélisée par une  $GG$ , avec une fiabilité de 99%. Les figures 4.4(a) et 4.4(b) montrent d'ailleurs les modélisations théoriques obtenues avec une  $GG$  (en rouge) par rapport aux distributions réelles des sous-bandes (en bleu). On constate que les répartition réelles et les répartition modélisées par une  $GG$  sont semblables.

### Sous-bandes basses fréquences

Les 3 sous-bandes de coordonnées basses fréquences ne possèdent pas de particularité statistique. La densité de probabilité est quelconque et probablement multimodale. Cela est du au fait que les coefficients de la sous-bande basse fréquence représentent la géométrie d'une version grossière du maillage original.

Pour éviter une modélisation multimodale qui serait un processus long et complexe, nous proposons l'utilisation d'un codage prédictif. Ce type de codage est utilisé par la plupart des codeurs monorésolutions, afin de réduire l'entropie de l'information géométrique. L'idée proposée est la suivante : au lieu de coder directement les éléments des sous-bandes, on code les erreurs de prédiction (voir section 1.2 page 17). Pour notre codeur, nous choisissons la prédiction la plus basique possible, c'est-à-dire le codage différentiel : au lieu de coder les coordonnées, on va coder les différences entre les coordonnées selon l'ordre d'indexation.

Il est vrai que l'ordre d'indexation des sommets d'un maillage grossier n'est pas forcément le parcours optimal d'un point de vue entropique puisqu'il ne tient pas spécialement compte de la localisation géométrique des sommets. Cependant, le codeur de Touma-Gotsman [118] utilisé pour encoder l'information topologique du maillage grossier assure une certaine corrélation géométrique entre coefficients d'indices "voisins". Nous avons d'ailleurs testé des prédictions plus complexes (la méthode du parallélogramme par exemple, utilisée dans [118]), mais cela n'apporte qu'un gain infime d'un point de vue compression ou qualité par rapport à la relative complexité de ce schéma de prédiction. Finalement, nous préférons le codage différentiel, méthode rapide et d'une complexité minimale.

Un test du  $\chi^2$  développé dans l'annexe 3 page 125 montre que le codage différentiel permet effectivement de concentrer l'énergie autour de zéro et qu'une  $GG$  peut donc être utilisée pour modéliser les densités de probabilités des sous-bandes basses fréquences.

### 4.4.3 Modélisation théorique de la distorsion et du débit

Lors de l'allocation binaire, des valeurs numériques de la distorsion et du débit seront nécessaires. Le fait que les éléments des différentes sous-bandes à traiter ont des distributions modélisables par une  $GG$  entraîne que l'on va pouvoir utiliser des modèles théoriques pour estimer la distorsion (l' $EQM$ ) et le débit.

#### 4.4.3.1 Modélisation de l' $EQM$

Pariset a montré dans sa thèse [86] que pour une densité de probabilité modélisée par une  $GG$ , l' $EQM$  de quantification uniforme simplifiée d'une sous-bande scalaire est égale à la variance  $\sigma^2$  multipliée par une fonction qui ne dépend que du paramètre  $\alpha$  et du pas de quantification normalisée par l'écart-type de la sous-bande :

$$\sigma_{Q_{i,j}}^2 = \sigma_{i,j}^2 D \left( \alpha_{i,j}, \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}} \right), \quad (4.7)$$

avec  $D$  une fonction (de classe  $C^\infty$  pour  $q > 0$ ) définie par :

$$D\left(\alpha_{i,j}, \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}}\right) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \left(m \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}}\right)^2 f_{0,m}\left(\alpha_{i,j}, \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}}\right) - 4 \sum_{m=1}^{+\infty} m \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}} f_{1,m}\left(\alpha_{i,j}, \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}}\right), \quad (4.8)$$

où  $f_{n,m}\left(\alpha_{i,j}, \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}}\right)$  sont des fonctions définies par

$$f_{n,m}\left(\alpha_{i,j}, \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}}\right) = \int_{\frac{1}{2} \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}} + (m-1) \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}}}^{\frac{1}{2} \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}} + m \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}}} x^n p_{1,\alpha_{i,j}}(x) dx \quad (4.9)$$

#### 4.4.3.2 Modélisation du débit

Pour estimer le débit d'une sous-bande après décodage, on utilise généralement l'entropie des éléments quantifiés. Parisot a aussi montré qu'un débit  $R$  associé à une  $GG$  peut être reformulé en [86] :

$$R\left(\alpha_{i,j}, \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}}\right) = -f_{0,0}\left(\alpha_{i,j}, \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}}\right) \log_2 f_{0,0}\left(\alpha_{i,j}, \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}}\right) - 2 \sum_{m=1}^{+\infty} f_{0,m}\left(\alpha_{i,j}, \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}}\right) \log_2 f_{0,m}\left(\alpha_{i,j}, \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}}\right), \quad (4.10)$$

avec les fonctions  $f_{n,m}\left(\alpha_{i,j}, \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}}\right)$  définies par (4.9).

Maintenant que nous avons défini le modèle théorique pour le débit et la distorsion d'une sous-bande, nous pouvons développer la théorie de l'allocation binaire basée sur ces modèles.

#### 4.4.4 Résolution du problème

Pour résoudre le problème d'optimisation énoncé dans la section 4.4.1, nous utilisons la technique basée sur des modèles théoriques mis au point par Parisot [86]. L'idée est de résoudre le problème d'optimisation avec une approche lagrangienne. En utilisant la formule de distorsion totale (4.3), et la formule (4.7) proposée par Parisot, le critère devient :

$$J_\lambda(\{q_{i,j}\}) = \sum_{i=0}^N W_i \sum_{j \in J_i} \sigma_{i,j}^2 D\left(\alpha_{i,j}, \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}}\right) + \lambda \left( \sum_{i=0}^N \sum_{j \in J_i} a_{i,j} R\left(\alpha_{i,j}, \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}}\right) - R_{cible} \right), \quad (4.11)$$

avec :

- ⋈  $\lambda$  l'opérateur lagrangien ;
- ⋈  $\sigma_{i,j}^2$  la variance de la sous-bande  $(i,j)$  ;
- ⋈  $D(q_{i,j})$  le modèle théorique relatif à l' $EQM$  de la sous-bande  $(i,j)$  donnée par l'équation (4.7) ;
- ⋈  $R\left(\alpha_{i,j}, \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}}\right)$  le modèle théorique du débit de la sous-bande  $\{i,j\}$  défini par l'équation (4.10) ;
- ⋈  $a_{i,j}$  le poids de cette sous-bande dans le débit total  $R_T$ . Ce poids dépendant du sous-échantillonnage, est le rapport entre la taille de la sous-bande  $(i,j)$  et le nombre total d'échantillons du signal donnée par  $(3 \times |\mathcal{V}_{sr}|)$  ;
- ⋈  $W_i$  la pondération du niveau de résolution  $i$  dépendant de la non-orthogonalité des filtres et définie par (4.4).

Ce problème d'allocation sous contrainte est résolu en calculant les conditions du premier ordre du critère (4.11), en fonction des pas de quantification normalisés  $\{\tilde{q}_{i,j} = \frac{q_{i,j}}{\sigma_{i,j}}\}$  et de l'opérateur  $\lambda$ . Cela revient à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial J_\lambda(\{\tilde{q}_{i,j}\})}{\partial \tilde{q}_{i,j}} = 0 \\ \frac{\partial J_\lambda(\{\tilde{q}_{i,j}\})}{\partial \lambda} = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Les solutions optimales  $\{\tilde{q}_{i,j}\}$  de ce système sont alors données par la résolution des  $(3 + (2 \times N) + 1)$  équations suivantes :

$$h(\alpha_{i,j}, \tilde{q}_{i,j}) = \frac{\frac{\partial D(\alpha_{i,j}, \tilde{q}_{i,j})}{\partial \tilde{q}_{i,j}}}{\frac{\partial R_{i,j}(\alpha_{i,j}, \tilde{q}_{i,j})}{\partial \tilde{q}_{i,j}}} = -\lambda \frac{a_{i,j}}{W_i \sigma_{i,j}^2}, \quad (4.13a)$$

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j \in J_i} a_{i,j} R_{i,j}(\alpha_{i,j}, \tilde{q}_{i,j}) = R_{cible}. \quad (4.13b)$$

avec  $h(\alpha_{i,j}, \tilde{q}_{i,j})$  la fonction définie par

$$h(\alpha_{i,j}, \tilde{q}_{i,j}) = \frac{\sum_{m=1}^{+\infty} m \left[ 2f_{1,m}(\alpha_{i,j}, \tilde{q}_{i,j}) - 2m\tilde{q}_{i,j}f_{0,m}(\alpha_{i,j}, \tilde{q}_{i,j}) - m\tilde{q}_{i,j}^2 \frac{df_{0,m}}{d\tilde{q}_{i,j}}(\alpha_{i,j}, \tilde{q}_{i,j}) + 2\tilde{q}_{i,j} \frac{df_{1,m}}{d\tilde{q}_{i,j}}(\alpha_{i,j}, \tilde{q}_{i,j}) \right]}{\frac{p_{1,\alpha_{i,j}}(\tilde{q}_{i,j}/2)}{2} [\ln f_{0,0}(\alpha_{i,j}, \tilde{q}_{i,j}) + 1] + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{df_{0,m}}{d\tilde{q}_{i,j}}(\alpha_{i,j}, \tilde{q}_{i,j}) [\ln f_{0,m}(\alpha_{i,j}, \tilde{q}_{i,j}) + 1]} \ln 2. \quad (4.14)$$

#### 4.4.5 Algorithme basé modèle

Pour résoudre le système (4.13) de manière rapide, Parisot *et al.* [88] ont proposé d'utiliser des fonctions analytiques dépendantes des modèles théoriques de distorsion et de débit sous forme de courbes paramétriques précalculées et tabulées. Les courbes paramétriques utilisées sont les suivantes :

- $[R; \ln(-h)]$ , qui permet de vérifier la contrainte (4.13b) sur le débit ;
- $[q; \ln(-h)]$ , qui permet de calculer les pas de quantification optimaux qui résolvent l'équation (4.13a).

La fonction  $h$  est donnée par (4.14). En utilisant les courbes paramétriques précalculées et tabulées, l'algorithme de résolution est très simple :

1. calculer la variance  $\sigma_{i,j}^2$  et le paramètre  $\alpha_{i,j}$  pour chaque sous-bande  $(i,j)$  ;
2. une valeur de  $\lambda$  est donné. Pour chaque sous-bande  $(i,j)$ , calculer le débit correspondant  $R_{i,j}$  à l'aide des courbes précalculées de  $[R; \ln(-h)]$  ;
3. Tant que la condition (4.13b) n'est pas vérifiée, calculer un nouveau  $\lambda$  par dichotomie et retourner à l'étape 2 ;
4. pour chaque sous-bande  $(i,j)$ , calculer le pas de quantification optimal  $q_{i,j}$  à l'aide des courbes précalculées de  $[q; \ln(-h)]$ .

La convergence de cet algorithme se fait en quelques itérations (moins de 10), ce qui permet un processus d'allocation binaire rapide et peu complexe.

#### 4.4.6 Complexité

L'étape 1 correspond au calcul de la variance  $\sigma^2$  et du paramètre  $\alpha$  de chaque sous-bande. Le paramètre  $\alpha$  est calculé en fonction de la variance et du moment d'ordre 4 [61]. Cette étape se fait en 4 opérations par échantillon.

Durant l'étape 2, les courbes précalculées et tabulées de  $[R; \ln(-h)]$  sont utilisées pour calculer le pas de quantification en fonction d'un  $\lambda$  et d'un  $\sigma^2$  donnés. Après le calcul de  $\ln(-h)$  en fonction de  $\lambda$ ,  $\sigma^2$  et de (4.13a), l'ensemble des débits  $\{R_{i,j}\}$  est obtenu en utilisant les tabulations de  $[R; \ln(-h)]$  à moindre coût.

L'étape 3 consiste à calculer une simple somme pondérée des débits estimés durant l'étape 2 (2 opérations arithmétiques par échantillon). Cette étape permet de vérifier la contrainte sur le débit global. Le calcul d'un nouveau  $\lambda$  est fait par simple dichotomie.

A l'étape 4, l'ensemble des pas de quantification  $\{q_{i,j}\}$  est calculé en utilisant les courbes précalculées et tabulées de  $[q; \ln(-h)]$  à moindre coût.

La convergence de l'algorithme d'allocation étant atteinte après quelques itérations (moins de 10), l'étape 1 représente finalement le plus grand coût calculatoire de l'algorithme, avec 4 opérations par échantillon. Par conséquent, la complexité est d'approximativement 12 opérations par sommet semi-régulier. On peut donc affirmer que l'allocation binaire peut s'effectuer de manière instantanée.

Expérimentalement, les pas de quantification sont toujours obtenus en moins de 0,4 seconde sur un Pentium III 1GHz avec 512 Mo de RAM.

### 4.5 3D-CBAC : Un codeur arithmétique contextuel pour la géométrie des maillages triangulaires

Nous présentons dans cette section un codeur arithmétique original pour l'encodage des coefficients d'ondelettes tridimensionnels : le codeur 3D-CBAC (*3D Context-Based Arithmetic Coder*). Après un rappel général sur les différents codeurs entropiques dont le codeur arithmétique contextuel par plans de bits *EBCOT* inclus dans *JPEG2000* [55], nous décrivons les contextes proposés dans cette thèse, adaptés pour l'encodage des coefficients tridimensionnels. Nous avons en effet désigné de nouveaux contextes prenant en compte non seulement la corrélation entre coefficients voisins de même résolution mais aussi la corrélation inter-résolution (contrairement à *EBCOT*).

#### 4.5.1 Le Codage entropique

L'objectif d'un codeur entropique est de transformer les symboles issus de la quantification en flux binaire. Ce flux doit être le plus compact possible. Pour cela, le but est d'atteindre au moins le nombre minimum de bits nécessaires pour représenter l'ensemble des symboles. Cette information est désignée par la notion d'*entropie*, introduite dans la *théorie de l'information* par Shannon [103], et dont la formule est donnée par

$$H = - \sum_i p_i \cdot \log_2 p_i \text{ bits par symbole,} \quad (4.15)$$



avec  $p_i$  la probabilité d'apparition du symbole  $i$ . L'idée générale est d'associer chaque symbole à une séquence de bits appelée *mot de code*. La longueur d'un mot dépend de la fréquence d'apparition du symbole associé. Le principe est d'utiliser des mots les plus courts possibles pour les symboles apparaissant fréquemment et des mots longs pour les symboles de faible fréquence d'apparition. Cette approche était déjà utilisée au  $XIX^{\text{ième}}$  siècle avec le principe du *Morse*. Les lettres les plus utilisées dans le langage anglais ('e' et le 't') sont en effet représentées respectivement par un simple point '.' et par un simple tiret '-'.

**Codage d'Huffman** La première technique de codage entropique apparue en 1958 est le codage d'*Huffman*. Ce dernier a automatisé l'obtention des mots de code en fonction des fréquences d'apparition des symboles [49]. Ceci implique la connaissance *a priori* des statistiques de ces symboles. Ce type de codage a été utilisée dans des méthodes de compression d'images ou de vidéos, devenues des normes telles que *JPEG* [53] ou *MPEG* [54]. L'inconvénient majeur de cette méthode est la longueur entière des mots de code. Ceci empêche la plupart du temps d'obtenir réellement l'entropie du signal puisque le mot de code minimal est de 1 bit.

**Codage arithmétique** La seconde approche de codage entropique apparue au cours des années 70, est le *codage arithmétique* qui utilise une subdivision récursive de l'intervalle  $[0..1]$  en sous-intervalles de longueur proportionnelle à la probabilité des symboles [97]. L'avantage du codeur arithmétique est qu'il permet d'atteindre une longueur moyenne des mots de code égale à l'entropie des symboles. Malgré sa plus grande complexité comparée au codage d'Huffman, ce type de codage est fréquemment utilisé. Par exemple dans la norme *JPEG2000* [56, 55] pour le codage d'images, ou dans la norme *JVT/H.26L* [7] pour la vidéo. Dans le domaine des maillages, il est aussi très largement utilisé pour compresser au maximum la géométrie quantifiée ou la chaîne de symboles utilisées pour coder la connectivité.

#### 4.5.2 Le codage contextuel par plans de bits (*EBCOT*)

Un des codeurs entropiques inclus dans *JPEG2000* [55] a la particularité d'associer un codeur arithmétique binaire à un *codeur par plans de bits*. Proposé par Taubman [115], ce codeur appelé *EBCOT* peut être avec ou sans pertes. Le principe est de permettre un codage progressif des symboles, en codant tout d'abord les bits de poids le plus fort, puis les différents plans de bits jusqu'au plan de bits de poids le plus faible.

Chaque plan de bits est codé en trois passes successives, une passe de *propagation significative*, une passe de *raffinement de l'amplitude*, et enfin une passe de *nettoyage* (voir figure 4.5). Ces trois passes permettent une transmission progressive des détails de chaque sous-bande et ainsi progressivement améliorer la qualité. Cette méthode peut être arrêtée à la fin de chaque passe. Cela autorise un codage adaptatif avec une allocation binaire qui arrêtera le codage lorsque le débit désiré est obtenu (codage avec pertes). Si toutes les passes sont effectuées sur tous les plans de bit, le codage sera alors sans pertes.

Les séquences de bits obtenues lors de chaque passe sont codées bit par bit avec un codeur arithmétique binaire contextuel. Les contextes d'un bit dépendent de l'importance (la *signification*) et du signe des bits voisins. Ce contexte détermine la manière dont il va être codé. A chaque bit est associé une certaine valeur de contexte. A chaque valeur de contexte est associée des probabilités d'apparition. Le codeur arithmétique déduit alors en fonction des probabilités associées à ce contexte si le bit le plus probable est un '1' ou

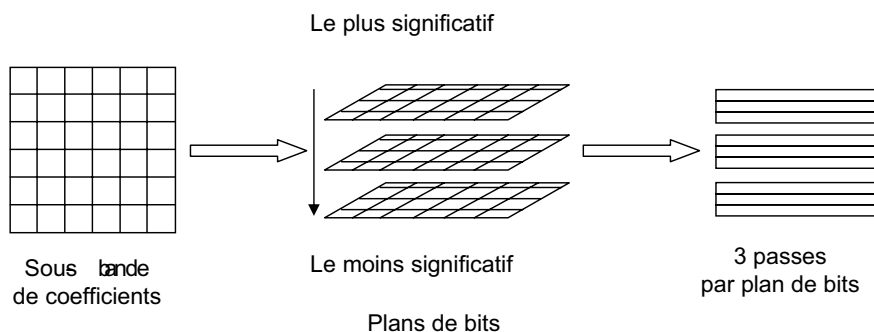


FIG. 4.5 – Principe du codage par plan de bits (EBCOT).

un '0'. Cela permet de prédire le mieux possible la valeur du bit traité et de réduire au maximum la taille de la trame.

Pour une image, le contexte d'un pixel est déduit des pixels voisins à partir de 3 informations : l'information relative aux bits des pixels voisins horizontaux ( $H = \sum_i H_i$ ), l'information relative aux bits des pixels voisins verticaux ( $V = \sum_i V_i$ ), et l'information relative aux bits des pixels voisins diagonaux ( $D = \sum_i D_i$ ) (voir figure 4.6) [55].

$D_0$	$V_0$	$D_1$
$H_0$	X	$H_1$
$D_2$	$V_1$	$D_3$

FIG. 4.6 – Contexte "pixellique" : voisinage d'un bit dans le cas d'une image.

A travers ces contextes, *EBCOT* exploite la corrélation des pixels voisins pour améliorer le codage arithmétique. Pour une description détaillée de cet algorithme, voir [116, 117].

### 4.5.3 Un codeur par plans de bits pour les données tridimensionnelles

L'efficacité d'*EBCOT* a provoqué un engouement pour les codeurs entropiques par plans de bits au détriment des codeurs par zerotree tels que *SPIHT* [100, 104]. Ce type de codeur a en effet l'avantage de permettre un codage plus efficace tout en permettant une transmission et un décodage progressif simple et adaptatif. En effet, il permet un décodage partiel à la fois en terme de sous-bandes et en terme de plans de bits.

Un des objectifs que nous nous sommes fixés dans cette thèse est la possibilité de transmettre de manière progressive les données. Le codage contextuel par plan de bits semble donc être approprié car cette approche permet à la fois un décodage partiel en plans de bits et en niveau de résolution.

Pour qu'un codage contextuel soit efficace, il faut que les contextes soient adaptés aux données traitées. Il nous a fallu donc créer des contextes spécifiques à la géométrie des maillages semi-réguliers, prenant en compte les particularités de ces maillages.

Dans cette section, nous décrivons donc les contextes proposés pour le codage de sous-bandes de coefficients de maillages semi-réguliers. Nous utilisons 3 informations contextuelles différentes que nous appelons  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ .  $I_1$  et  $I_2$  sont les informations qui ont le plus de poids. Une combinaison de ces 3 valeurs obtenues selon des règles déterministes [116, 117] donnent la valeur du contexte associé au bit traité.

#### 4.5.3.1 Problématique

Les contextes proposés ont été choisis selon plusieurs faits :

- séparation des composantes tangentielle et normale dans chaque sous-bande de coefficients lors de la quantification et de l'allocation ;
- corrélation spatiale entre coefficients géométriquement voisins et de même résolution ;
- relation étroite entre les composantes tangentielles ( $x$  et  $y$ ) des coefficients géométriquement voisins ;
- la plupart de l'information pertinente se situe dans les sous-bandes normales ;
- les coefficients d'une sous-bande sont corrélés avec les coefficients de la sous-bande de résolution inférieure (corrélation inter-résolution).

A partir de ces faits et constats, nous avons déterminé nos propres contextes dont les principales caractéristiques sont :

- des contextes distincts pour l'information tangentielle et l'information normale ;
- des contextes intra-résolutions pour l'information tangentielle ;
- des contextes intra et inter-résolutions pour l'information normale.

La figure 4.7 illustre le voisinage utilisé et les notations : les sommets  $P_i(v)$  représentent les voisins "parents" (de résolution inférieure) du sommet  $v$ . Les sommets  $N_i(v)$  représentent les voisins directs de  $v$ , c'est-à-dire de même résolution.

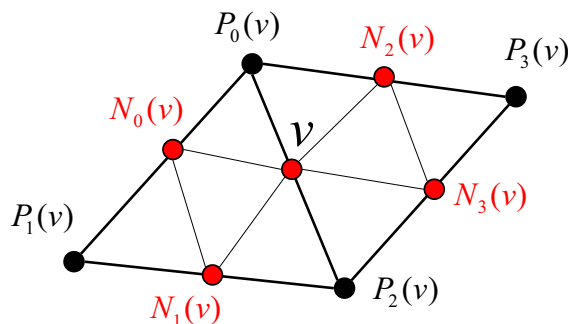


FIG. 4.7 – Voisinage et notations utilisées pour les contextes.

Puisque nous séparons les composantes tangentielles et normales lors de la quantification, nous avons proposé deux contextes différents pour ces composantes : un contexte *tangentiel* (pour les coordonnées en  $x$  et  $y$ ) et un contexte *normal* (pour les coordonnées en  $z$ ).

#### 4.5.3.2 Contextes tangentiels

Deux coefficients dont la localisation des sommets est proche dans le maillage sont fortement corrélés. Par conséquent, les composantes tangentielles  $\hat{v}_i^x$  et  $\hat{v}_i^y$  du coefficient

quantifié  $\hat{v}_i = (\hat{v}_i^x, \hat{v}_i^y, \hat{v}_i^z)$  sont aussi corrélées avec les composantes tangentielles des coefficients géométriquement voisins.

Pour une coordonnée  $\hat{v}_i^x$  (respectivement une coordonnée  $\hat{v}_i^y$ ), nous avons donc choisi d'exploiter les coordonnées en  $x$  des sommets voisins de même résolution (respectivement en  $y$ ) comme informations principales :

$$I_1(\hat{v}_i^x) = N_0(\hat{v}_i^x) + N_3(\hat{v}_i^x),$$

et

$$I_2(\hat{v}_i^x) = N_1(\hat{v}_i^x) + N_2(\hat{v}_i^x)$$

(resp.  $I_1(\hat{v}_i^y) = N_0(\hat{v}_i^y) + N_3(\hat{v}_i^y)$ , et  $I_2(\hat{v}_i^y) = N_1(\hat{v}_i^y) + N_2(\hat{v}_i^y)$ ).

Pour une coordonnée  $\hat{v}_i^x$  (respectivement une coordonnée  $\hat{v}_i^y$ ), l'information secondaire sera les coordonnées en  $y$  (respectivement en  $x$ ) de l'ensemble des sommets voisins de même résolution :

$$I_3(\hat{v}_i^x) = \sum_{j=0}^3 N_j(\hat{v}_i^y).$$

La figure 4.8 illustre les contextes utilisés pour ces composantes : en rouge et en bleu les éléments relatifs aux informations principales  $I_1$  et  $I_2$ , et en vert les éléments relatifs à l'information secondaire  $I_3$ .

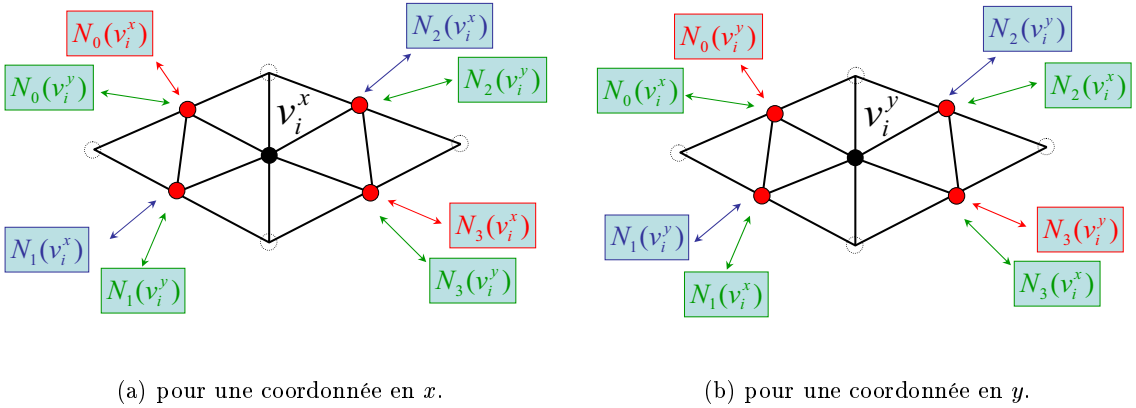


FIG. 4.8 – Contextes utilisés pour encoder les composantes tangentielles.

### 4.5.3.3 Contexte normal

Pour les composantes normales, nous avons choisi d'exploiter en premier lieu la corrélation existante entre des coefficients dont la localisation spatiale des sommets associés est proche. La principale information utilisée pour prédire un élément quantifié  $\hat{v}_i^z$  est donc l'ensemble des coordonnées en  $z$  de ses voisins de même résolution  $\{N_k(\hat{v}_i)\}$  :

$$I_1(\hat{v}_i^z) = N_0(\hat{v}_i^z) + N_3(\hat{v}_i^z)$$

et

$$I_2(\hat{v}_i^z) = N_1(\hat{v}_i^z) + N_2(\hat{v}_i^z).$$

Nous avons ensuite choisi d'exploiter la corrélation inter-résolution comme information secondaire. En effet, lors d'une transformée en ondelettes il existe une dépendance entre un coefficient et les coefficients de résolution inférieure. Pour exploiter cette dépendance, nous utilisons les coordonnées en  $z$  des coefficients "parents"  $\{P_k(\hat{v}_i)\}$  pour prédire  $\hat{v}_i^z$ , c'est-à-dire :

$$I_3(\hat{v}_i^z) = \sum_{j=0}^3 P_j(\hat{v}_i^z).$$

La figure 4.9 illustre le contexte utilisé pour les coordonnées en  $z$  : en rouge et en bleu les éléments relatifs aux informations principales  $I_1$  et  $I_2$ , et en vert les éléments relatifs à l'information secondaire  $I_3$ .

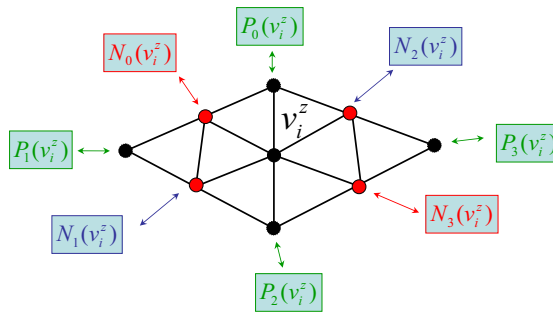


FIG. 4.9 – Contexte utilisé pour encoder les composantes normales.

**Remarque 5.** En parallèle de nos travaux, une approche similaire a été effectuée par Aspert dans [13]. L'auteur a proposé de simplifier le codeur en réduisant le nombre de contextes potentiels et en les adaptant en fonction des spécificités statistiques des coefficients. Par contre, ces contextes ne prennent pas en compte la corrélation inter-résolution présente entre les coefficients contrairement à ceux proposés ici.

#### 4.5.4 Validation expérimentale

Pour vérifier l'efficacité des contextes proposés, nous comparons la taille de la trame obtenue avec le codeur proposé *3D-CBAC* et celle obtenue avec le codeur arithmétique de référence *EBCOT* utilisant des contextes adaptés aux images<sup>4</sup>. (voir histogrammes 4.10, 4.11, 4.12 et 4.13). Les gains en débit associés sont reportés dans les tableaux 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4.

Globalement, on observe que la trame obtenue avec *3D-CBAC* est toujours plus compacte que celle obtenue avec *EBCOT*. Ce gain en bits peut atteindre 7,2% à certains débits (pour l'objet SKULL).

**Remarque 6.** Lors de travaux antérieurs, nous avons appliqué ce codeur arithmétique sur des maillages obtenus avec MAPS [93]. Dans ce cadre, le gain atteint 6,95% à un certain débit (pour l'objet HORSE). Les résultats complets pour les objets HORSE, BUNNY et FELINE sont donnés dans l'annexe 4 page 126.

4. les sous-bandes sont considérées dans ce cas comme des images. C'est donc le voisinage "pixellique" et non pas spatial qui est exploité [115].

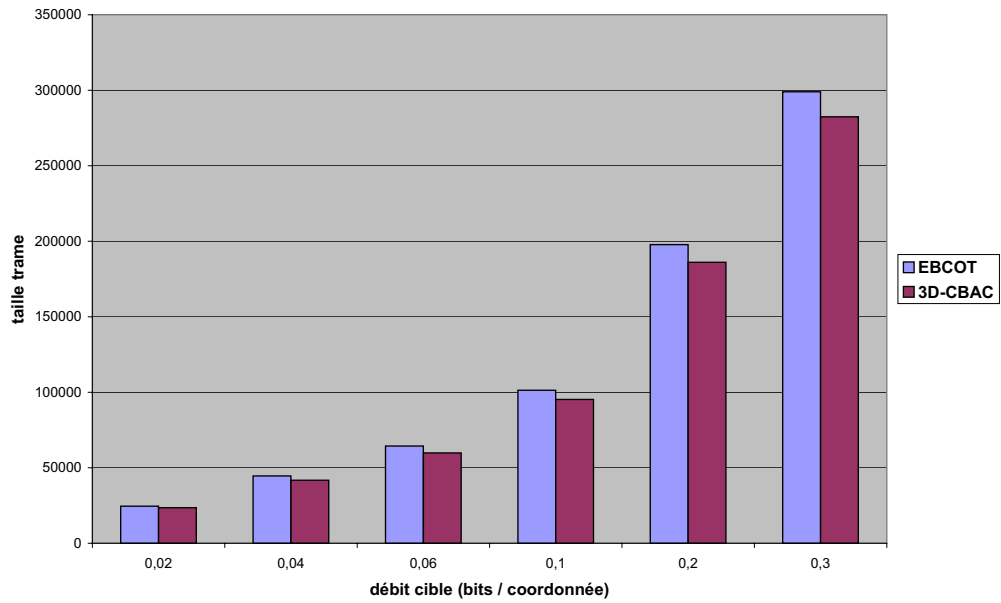


FIG. 4.10 – 3D-CBAC *versus* EBCOT sur le maillage normal HORSE.

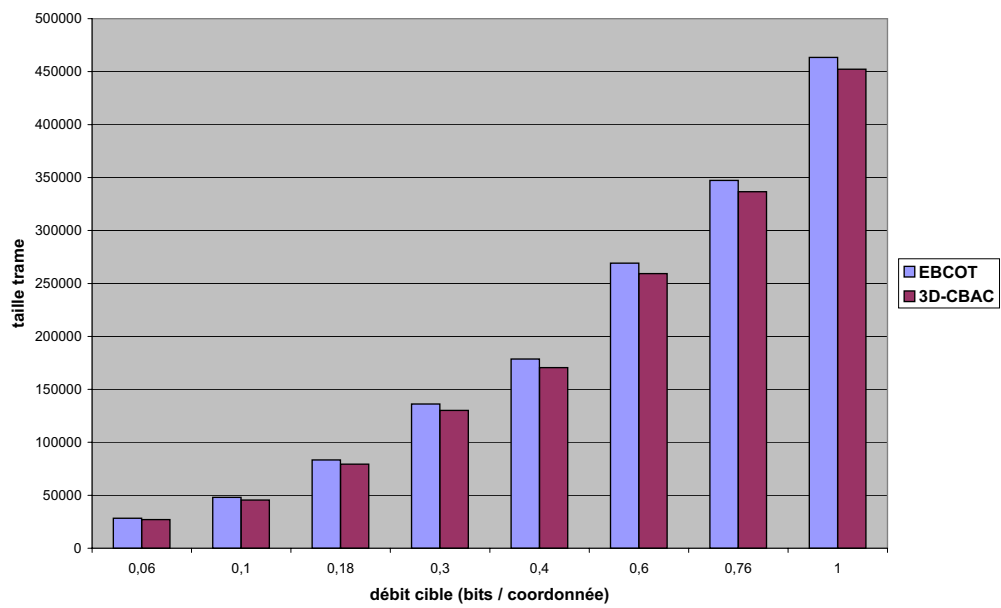


FIG. 4.11 – 3D-CBAC *versus* EBCOT sur le maillage normal RABBIT.

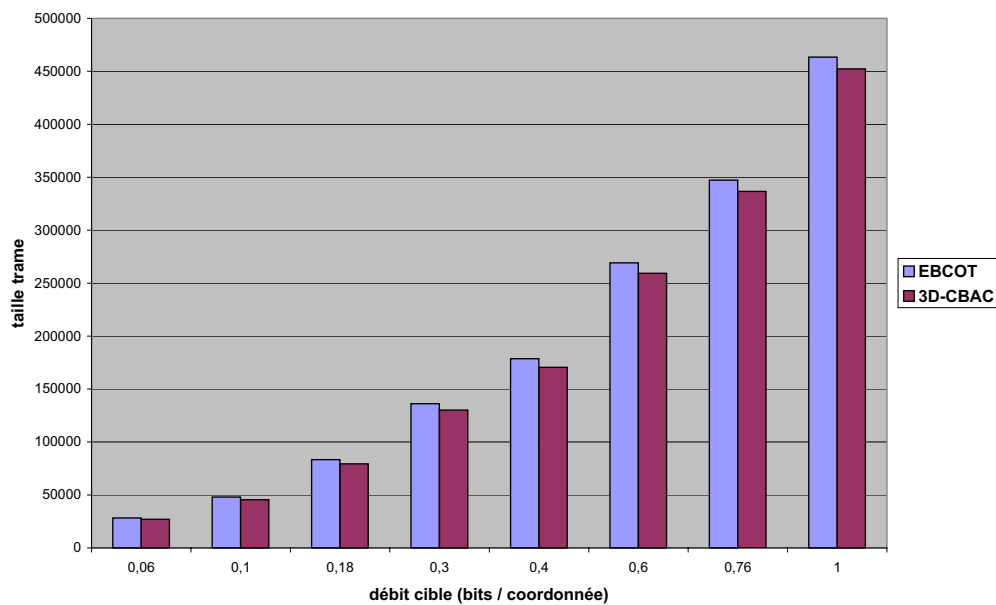


FIG. 4.12 – 3D-CBAC versus EBCOT sur le maillage normal VENUS.

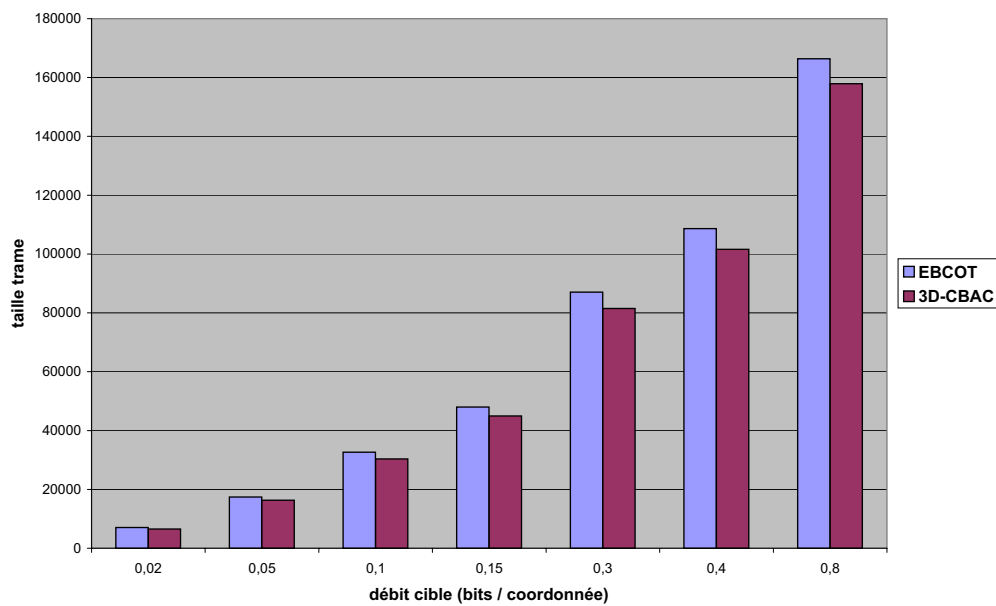


FIG. 4.13 – 3D-CBAC versus EBCOT sur le maillage normal SKULL.

$R_{cible}$ bits/élément	Taille trame (bits)		
	<i>EBCOT</i>	<i>3D-CBAC</i>	Gain %
0,02	24570	23543	<b>6,45</b>
0,04	44586	41720	<b>6,43</b>
0,06	64396	59826	<b>7,1</b>
0,1	101325	95251	<b>6,00</b>
0,2	197778	186064	<b>5,93</b>
0,3	298986	282458	<b>5,53</b>

TAB. 4.1 – 3D-CBAC *versus* EBCOT sur le maillage normal HORSE.

$R_{cible}$ bits/élément	Taille trame (bits)		
	<i>EBCOT</i>	<i>3D-CBAC</i>	Gain %
0,02	9577	9009	<b>5,93</b>
0,04	18212	17078	<b>6,23</b>
0,06	27813	26466	<b>4,84</b>
0,1	44473	42259	<b>4,98</b>
0,15	66859	64070	<b>4,17</b>
0,4	171094	166318	<b>2,79</b>
1	434353	426860	<b>1,73</b>

TAB. 4.2 – 3D-CBAC *versus* EBCOT sur le maillage normal RABBIT.

$R_{cible}$ bits/élément	Taille trame (bits)		
	<i>EBCOT</i>	<i>3D-CBAC</i>	Gain %
0,06	28390	27081	<b>4,61</b>
0,1	48063	45557	<b>5,21</b>
0,18	83362	79328	<b>4,94</b>
0,3	136198	130146	<b>4,44</b>
0,4	178598	170572	<b>4,50</b>
0,6	269120	259382	<b>3,62</b>
0,76	347289	336606	<b>3,07</b>
1	463441	452351	<b>2,40</b>

TAB. 4.3 – 3D-CBAC *versus* EBCOT sur le maillage normal VENUS.

$R_{cible}$ bits/élément	Taille trame (bits)		
	<i>EBCOT</i>	<i>3D-CBAC</i>	Gain %
0,02	7062	6554	<b>7,20</b>
0,05	17405	16337	<b>6,13</b>
0,1	32645	30341	<b>7,06</b>
0,15	47999	44934	<b>6,39</b>
0,3	87034	81481	<b>6,38</b>
0,4	108629	101569	<b>6,50</b>
0,8	166383	157868	<b>5,12</b>

TAB. 4.4 – 3D-CBAC *versus* EBCOT sur le maillage normal SKULL.



## 4.6 Conclusion

Ce chapitre était destiné à la description détaillée du codeur géométrique proposé et à la manière dont les données sont organisées pour permettre un codage pertinent.

Les maillages semi-réguliers étant de nature assez complexe, la première étape a été d'étudier les particularités statistiques des sous-bandes de coefficients. La différence de variance entre les composantes tangentielles et les composantes normales étant très importante, nous avons choisi de les traiter séparément dans deux sous-bandes indépendantes, et de les coder à l'aide d'un quantificateur scalaire.

Ensuite, nous avons montré qu'une  $GG$  centrée en zéro peut être utilisée pour modéliser les densités de probabilité des composantes. Ainsi nous avons pu proposer une allocation binaire basée sur des modèles théoriques de débit et de distorsion pour chaque sous-bande (tangentielle et normale). Ainsi, l'allocation binaire proposée est rapide et peu complexe. Sa complexité étant de seulement 12 opérations par sommet semi-régulier, les paramètres de quantification optimaux peuvent être calculés de manière instantanée.

Le but de l'allocation binaire proposée est d'optimiser la quantification de la géométrie du maillage en minimisant l'erreur de reconstruction. Pour évaluer l'erreur de reconstruction lors de l'allocation binaire, nous avons proposé un critère de distorsion basé sur la formule de l' $EQM$  pondérée d'un signal multidimensionnel proposée au chapitre 3 et adapté aux particularités des sous-bandes de coefficients des maillages normaux. Nous verrons dans le chapitre suivant si cette allocation binaire permet d'améliorer la qualité des maillages reconstruits.

Enfin, dans la dernière section de ce chapitre, nous avons présenté un codeur arithmétique contextuel par plans de bits original pour maillages semi-réguliers. En s'inspirant des travaux de Taubman [115, 116, 117], nous avons proposé de nouveaux contextes adaptés aux composantes tangentielles et normales des coefficients des maillages normaux.

L'idée de base lors de la conception de ces contextes était d'exploiter non seulement la corrélation des coefficients voisins, mais aussi la corrélation inter-résolution des coefficients, contrairement à  $EBCOT$  qui n'exploite que la corrélation entre pixels de même résolution. L'utilisation de ces contextes originaux à la place des contextes de base de  $EBCOT$  permet une réduction de la trame binaire pouvant aller jusqu'à plus de 7%.

Le prochain chapitre est consacré aux résultats expérimentaux relatifs à l'algorithme de compression géométrique proposé, que nous comparons aux méthodes de référence du domaine.

## Chapitre 5

---

# Résultats expérimentaux

Ce chapitre présente les résultats expérimentaux de l'algorithme de compression présenté dans ce mémoire.

### 5.1 Critère de qualité

*PSNR* : le critère utilisé pour évaluer la qualité des maillages compressés à partir des différentes méthodes est le critère *PSNR* relatif à la distance surface-surface  $d_S$  calculée entre le maillage irrégulier d'entrée et le maillage reconstruit et normalisée par la longueur de la diagonale de la boîte englobante ( $BB$ ). Sa formule est la suivante :

$$PSNR = 20 \log_{10} \left( \frac{BB}{d_S} \right).$$

*TC* : nous utilisons aussi le Taux de Compression (*TC*) qui est le rapport entre la taille binaire du maillage irrégulier d'entrée et la taille binaire du maillage compressé. Sa formule est la suivante :

$$TC = \frac{|\mathcal{V}_{ir}| \cdot 3 \cdot 32 + |\mathcal{T}_{ir}| \cdot 3 \cdot \log_2[|\mathcal{V}_{ir}|]}{\text{taille trame de sortie}},$$

avec respectivement,  $|\mathcal{V}_{ir}|$  et  $|\mathcal{T}_{ir}|$  le nombre de sommets et de triangles du maillage d'entrée. Le nombre 32 correspond au nombre de bits utilisés pour exprimer un flottant.

### 5.2 Résultats expérimentaux

Nous avons testé le *codeur proposé* à différents débits en faisant varier le débit cible imposé, permettant ainsi de tracer les courbes du *PSNR* en fonction du débit total. Le débit total est exprimé en bits par sommet irrégulier (noté bits/ sommet irrégulier) et le *PSNR* est exprimé en décibels (*dB*).

Dans un premier temps, nous avons comparé les résultats du *codeur proposé* avec les méthodes de compression géométrique suivantes :

- le codeur *NMC* [62], qui propose l'utilisation d'un codeur zerotree sur des maillages semi-réguliers obtenus à l'aide du *remailleur normal* [45] ;
- le codeur *EQMC* qui exploite un algorithme d'estimation-quantification sur des maillages semi-réguliers obtenus à l'aide du *remailleur normal* [69] ;

➤ le codeur *PGC* [63] qui propose l'utilisation d'un codeur zerotree sur des maillages semi-réguliers obtenus à l'aide du remaillleur *MAPS* [70].

Comme l'algorithme proposé, ces trois méthodes exploitent le codeur topologique [118] de Touma et Gotsman pour encoder la connectivité du maillage grossier.

Les deux premières méthodes (*NMC* et *EQMC*) sont les deux méthodes de référence actuelles pour les maillages *normaux*. Comme le *codeur proposé*, elles utilisent la transformée de *butterfly non lifté*. La seule composante de l'algorithme proposé qui diffère de ces deux méthodes est donc l'encodage des coefficients d'ondelettes. Ainsi, nous pourrions évaluer précisément le gain conséquent à l'utilisation du *codeur proposé* (allocation binaire, quantification scalaire séparée des composantes, et codeur entropique contextuel).

Nous avons aussi tracé la borne asymptotique due à l'erreur de remaillage du *remaillleur normal* qui correspond à la distance surface-surface entre le maillage irrégulier d'entrée et la version semi-régulière. Cette limite est donc la qualité maximale que peuvent atteindre le *codeur proposé*, et les codeurs *NMC* et *EQMC*.

**Remarque 7.** *Certains maillages normaux (fournis par leur auteur) sont des maillages semi-réguliers adaptatifs [62]. Notre algorithme ne fonctionnant actuellement que pour des maillages semi-réguliers uniformes, nous avons éliminé le ou les niveaux de subdivision adaptative des modèles RABBIT, FELINE et MOLECULE. Ainsi, toutes les simulations du codeur proposé, de NMC, et de EQMC ont été effectuées sur ces versions uniformes.*

Les figures 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 et 5.6 montrent respectivement la courbe débit-*PSNR* des objets HORSE, RABBIT, MOLECULE, SKULL, VENUS et FELINE<sup>1</sup>.

D'une manière générale, le *codeur proposé* dans ce mémoire donne des résultats en terme de *PSNR* toujours meilleurs que le codeurs *NMC*, et des résultats meilleurs (ou au pire identiques) que le codeur *EQMC*. Le *codeur proposé* est aussi beaucoup plus efficace que le codeur *PGC* qui est une méthode de référence puisqu'elle a été intégrée récemment dans la norme *MPEG-4* [8]<sup>2</sup>.

Si on se compare uniquement aux codeurs de maillages *normaux*, le codeur proposé apporte un gain par rapport à *NMC* pouvant aller jusqu'à +7,5dB (pour l'objet FELINE), et un gain par rapport à *EQMC* pouvant aller jusqu'à plus de +2,5dB (pour l'objet SKULL). Le tableau 5.1 présente tous les résultats par rapport au codeur *NMC*.

Par ailleurs, on observe que le *codeur proposé* est particulièrement plus performant que le codeur *NMC* à bas débits. On constate notamment un gain de +7,5 dB sur FELINE à un débit de 0,24 bits/sommet irrégulier, et un gain de +3,85 dB sur MOLECULE à un débit de 0,25 bits/sommet irrégulier. Ces résultats sont d'autant plus remarquables que le modèle de "bruit additif" [36, 40] utilisé pour représenter l'erreur de quantification lors de la formulation de l'*EQM* pondérée n'est théoriquement valide que pour un codage optimal,

---

1. La courbe du codeur *PGC* n'apparaît pas pour ce modèle. Ayant utilisé une version uniforme simplifiée du maillage *normal* (voir remarque 7) la courbe du codeur *PGC* se situerait au-dessus de la courbe du codeur *NMC* alors que dans son article de référence le codeur *NMC* est meilleur que le codeur *PGC* [62]. Pour éviter toute ambiguïté, nous n'avons choisi de ne pas la tracer. La courbe du codeur *EQMC* n'apparaît pas non plus pour ce modèle car l'exécutable (fourni par son auteur) ne fonctionne pas avec cet objet.

2. Cette forte différence est en partie due à la technique de remaillage *MAPS* utilisée dans *PGC* qui est moins efficace que le *remaillleur normal* utilisée dans le *codeur proposé*, *NMC*, et *EQMC*.

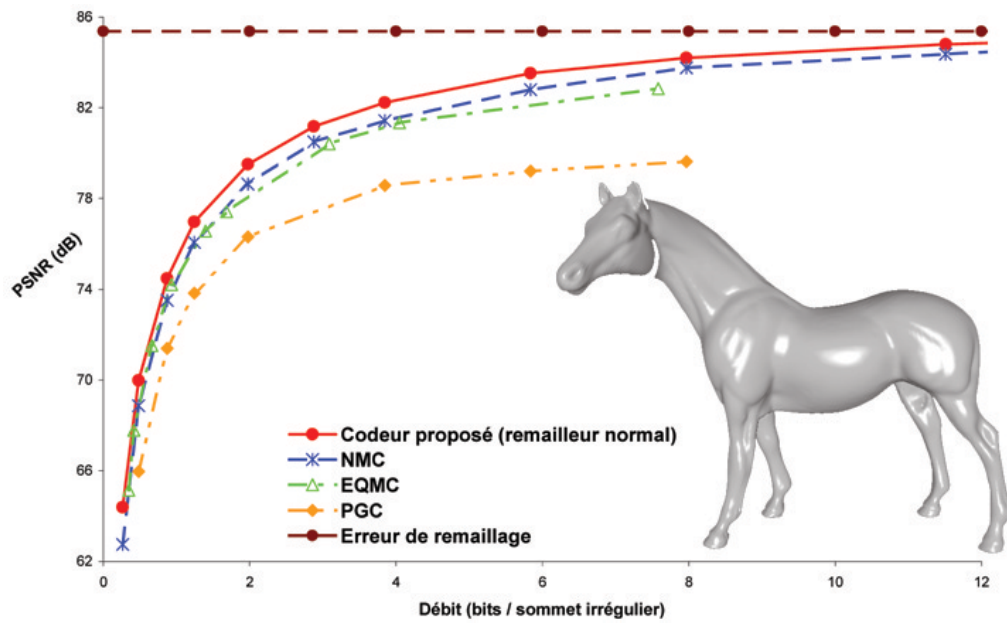


FIG. 5.1 – Courbe PSNR en fonction du débit pour le modèle HORSE. La valeur de BB pour cet objet est 0,253.

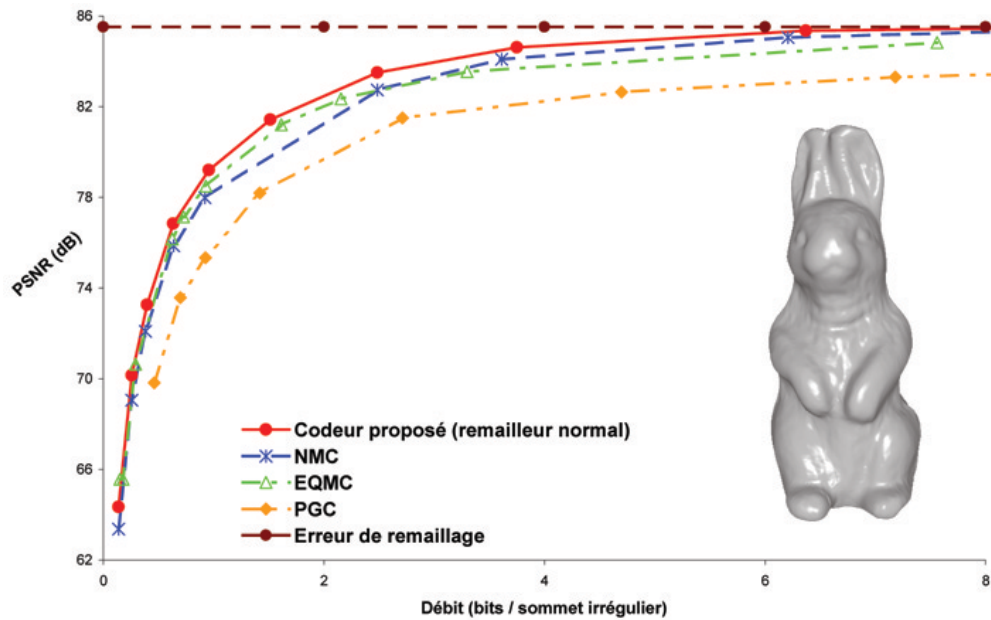


FIG. 5.2 – Courbe PSNR en fonction du débit pour le modèle RABBIT (version uniforme). La valeur de BB pour cet objet est 0,093.

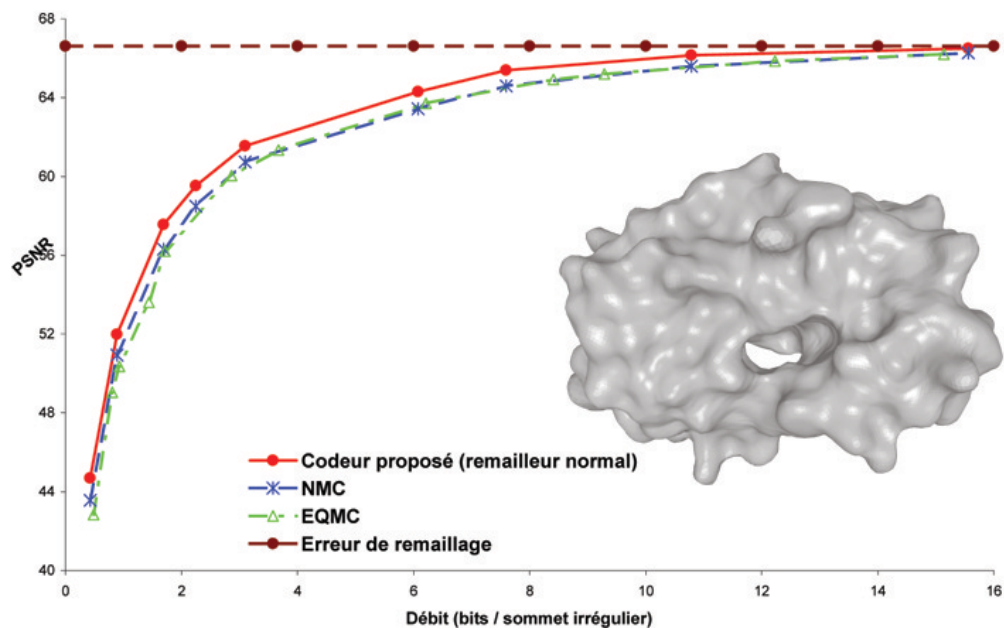


FIG. 5.3 – Courbe PSNR en fonction du débit pour le modèle MOLECULE (version uniforme). La valeur de BB pour cet objet est 83,121.

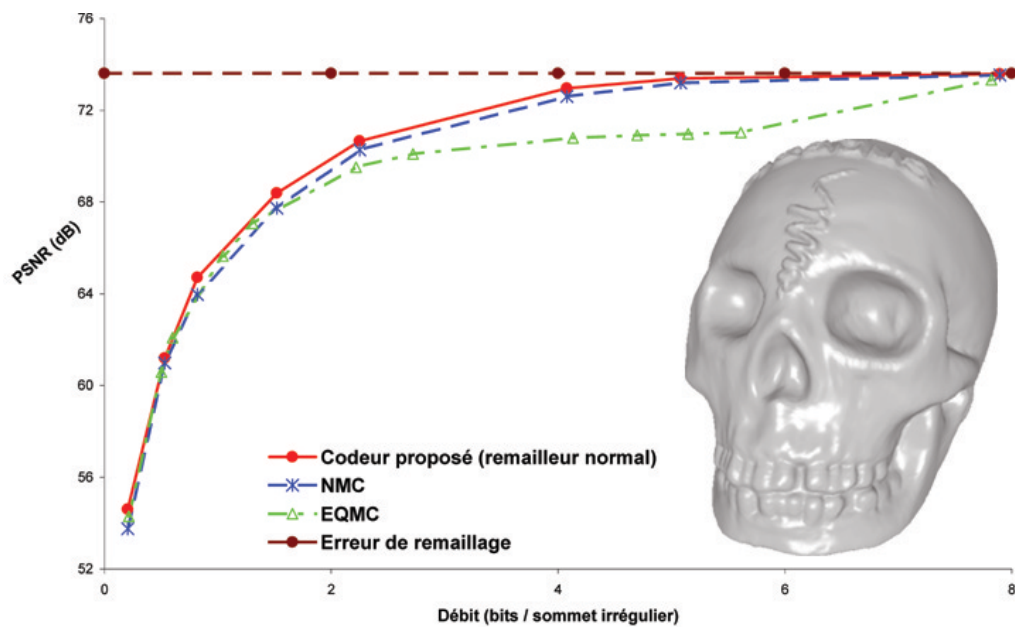


FIG. 5.4 – Courbe PSNR en fonction du débit pour le modèle SKULL. La valeur de BB pour cet objet est 240,617.

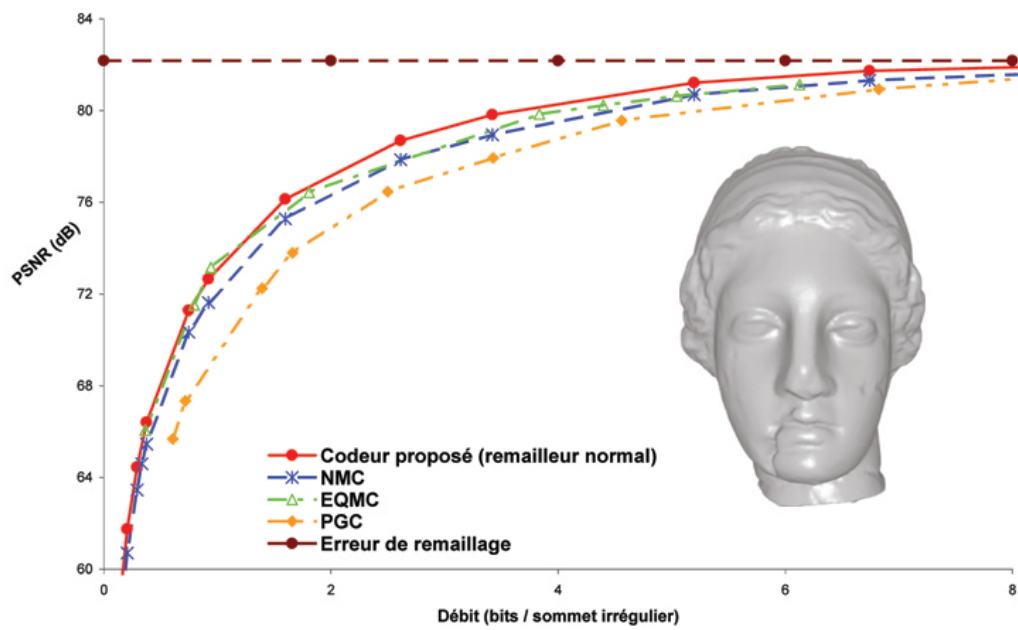


FIG. 5.5 – Courbe PSNR en fonction du débit pour le modèle VENUS. La valeur de BB pour cet objet est 1,565.

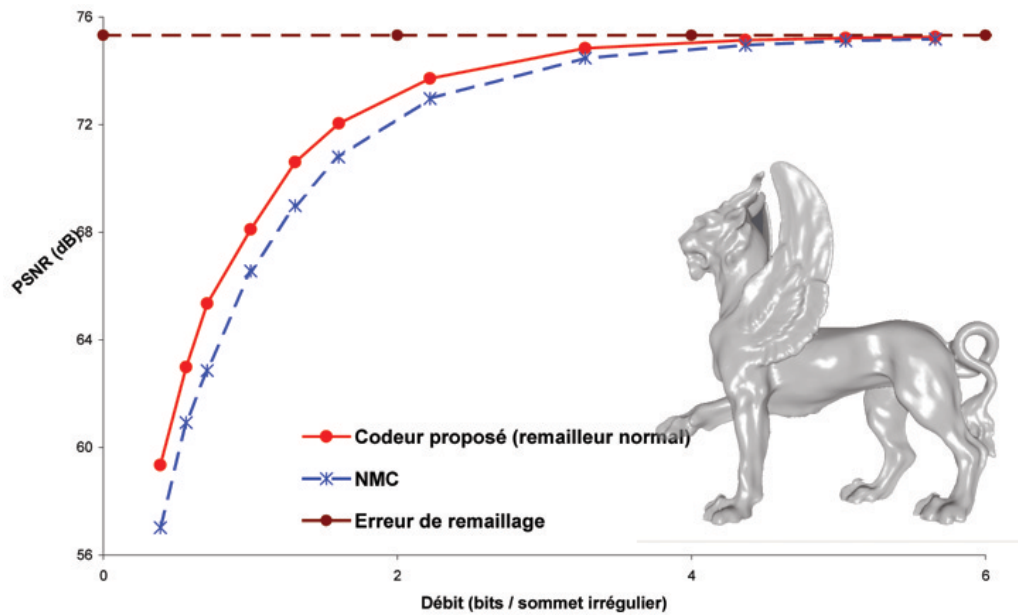


FIG. 5.6 – Courbe PSNR en fonction du débit pour le modèle FELINE (version uniforme). La valeur de BB pour cet objet est 1,888.

c'est-à-dire à forts débits (voir section 3.1 page 53). Il en est de même pour l'approximation de la distance surface-surface par l'*EQM* sur les sommets du maillage semi-régulier (voir section 2.4.3 page 48). Cela vient du fait que notre algorithme code les coefficients de la sous-bande basse fréquence à l'aide d'une méthode différentielle qui réduit fortement l'entropie de ces coefficients (voir section 4.4 page 82), tandis que le codeur *NMC* quantifie ces coefficients de manière uniforme et sans prédiction [62]. A bas débits, le codeur *NMC* attribue la plupart des bits pour le codage de la sous-bande basse fréquence alors que la méthode de codage différentiel permet de transmettre plus de détails hautes fréquences qui raffine le maillage reconstruit.

En revanche, le gain en *PSNR* du *codeur proposé* par rapport au codeur *EQMC* est plus élevé à moyens et hauts débits qu'à bas débits. Pour preuve, le seul débit où le codeur *EQMC* est légèrement supérieur en *PSNR* à notre codeur se situe dans les bas-débits, aux alentours de 1 bit/sommet irrégulier (voir figure 5.5). Cela vient du fait que le *codeur proposé* attribue un seul pas de quantification quel que soit le sous-ensemble (tangential ou normal) alors que le codeur *EQMC* attribue un pas de quantification par coefficient pour les sous-ensembles normaux [69]. Cela permet donc une meilleure répartition "intra-sous-bande" de l'information binaire. Malgré cela, le *codeur proposé* donne toujours des résultats meilleurs voire équivalents en terme de *PSNR* que le codeur *EQMC*.

La figure 5.7 permet de situer les performances du *codeur proposé* par rapport à diverses méthodes de référence. Ainsi, sur cette figure on se compare également aux méthodes suivantes :

- le codeur non progressif de référence *TG* de Touma et Gotsman [118]. Les différents débits sont obtenus en faisant varier le nombre de bits utilisés pour quantifier la géométrie (de 8 à 12 bits) ;
- le codeur progressif sans pertes *PLT* de Alliez et Desbrun [9] qui est une extension de la méthode non progressive de Touma et Gotsman ;
- le codeur que nous avons proposé lors de travaux précédents [91, 92, 94, 93]<sup>3</sup>. Il est indiqué sous le nom de "Codeur proposé (remailleur *MAPS*)".

On observe qu'en terme de *PSNR* la méthode proposée se situe au dessus de toutes les autres méthodes. Soulignons néanmoins que la méthode *TG* devient meilleure que toutes les autres méthodes à très forts débits, c'est-à-dire lorsque le codeur *TG* utilise 12 bits pour quantifier la géométrie. Cela vient du fait que les méthodes basées sur un remaillage sont asymptotiquement limitées par l'erreur de remaillage. Ainsi, même au débit maximum le *codeur proposé* (mais aussi *NMC* et *EQMC*) ne pourra dépasser la valeur du *PSNR* correspondant à la distance surface-surface entre le maillage irrégulier et le maillage semi-régulier obtenu avec le *remailleur normal* (tracée sur les figures de 5.1 à 5.6). Cependant, l'erreur de remaillage étant très faible, il n'existe à ce débit aucune différence visuelle entre le maillage reconstruit avec *TG* et le maillage quantifié avec le *codeur proposé* ou *NMC*.

### 5.3 Quelques résultats visuels

Les figures 5.8, 5.9 et 5.10 montrent la qualité visuelle des objets VENUS, SKULL, et DINOSAUR quantifiés à différents débits avec le *codeur proposé*. Les taux de compression correspondants sont indiqués dans la légende.

---

3. Ce codeur est une variante du *codeur proposé* dans ce mémoire. Les principales différences sont : l'utilisation du remailleur *MAPS* [70], et l'utilisation de la transformée de *butterfly lifté*.

HORSE									
Débit	0,18	0,26	0,87	1,24	1,97	2,88	3,85	5,84	11,51
<i>Codeur proposé</i>	60,34	64,39	74,47	76,97	79,51	81,18	82,22	83,52	84,79
<i>NMC</i>	58,54	62,75	73,51	76,06	78,63	80,50	81,43	82,80	84,36
Gain	<b>1,80</b>	<b>1,64</b>	<b>0,96</b>	<b>0,91</b>	<b>0,88</b>	<b>0,68</b>	<b>0,79</b>	<b>0,72</b>	<b>0,43</b>

VENUS									
Débit	0,11	0,20	0,34	0,92	1,60	3,42	5,20	6,74	9,06
<i>Codeur proposé</i>	57,30	61,75	65,64	72,56	76,14	79,82	81,21	81,73	82,02
<i>NMC</i>	56,10	60,71	64,59	71,63	75,29	78,95	80,69	81,31	81,77
Gain	<b>1,2</b>	<b>1,04</b>	<b>1,05</b>	<b>1,02</b>	<b>0,86</b>	<b>0,87</b>	<b>0,52</b>	<b>0,42</b>	<b>0,25</b>

FELINE									
Débit	0,08	0,24	0,39	0,71	1,00	1,30	2,22	3,28	4,37
<i>Codeur proposé</i>	45,06	55,65	59,34	65,35	68,10	70,60	73,72	74,84	75,14
<i>NMC</i>	37,59	51,95	57,03	62,86	66,57	68,99	72,99	74,47	74,96
Gain	<b>7,5</b>	<b>3,5</b>	<b>2,32</b>	<b>2,49</b>	<b>1,53</b>	<b>1,62</b>	<b>0,75</b>	<b>0,36</b>	<b>0,18</b>

SKULL									
Débit	0,15	0,21	0,53	0,82	1,52	2,25	4,08	5,08	7,90
<i>Codeur proposé</i>	51,34	54,60	61,19	64,70	68,38	70,65	72,96	73,38	73,58
<i>NMC</i>	50,73	53,75	60,98	63,96	67,73	70,27	72,60	73,19	73,54
Gain	<b>0,6</b>	<b>0,85</b>	<b>0,21</b>	<b>0,74</b>	<b>0,66</b>	<b>0,39</b>	<b>0,36</b>	<b>0,19</b>	<b>0,04</b>

MOLEULE									
Débit	0,25	0,43	0,89	1,69	2,25	3,10	6,08	7,60	10,79
<i>Codeur proposé</i>	41,08	44,69	52,00	57,55	59,53	61,54	64,30	65,38	66,15
<i>NMC</i>	37,23	43,57	50,93	56,30	58,48	60,73	63,43	64,59	65,59
Gain	<b>3,85</b>	<b>1,12</b>	<b>1,07</b>	<b>1,24</b>	<b>1,05</b>	<b>0,81</b>	<b>0,87</b>	<b>0,79</b>	<b>0,55</b>

RABBIT									
Débit	0,07	0,14	0,26	0,38	0,95	2,48	3,61	6,20	9,03
<i>Codeur proposé</i>	58,20	64,35	70,15	73,26	79,20	83,50	84,61	85,35	85,50
<i>NMC</i>	56,32	63,38	69,04	72,09	78,34	82,74	84,08	85,05	85,42
Gain	<b>1,85</b>	<b>0,97</b>	<b>1,11</b>	<b>1,17</b>	<b>0,86</b>	<b>0,76</b>	<b>0,53</b>	<b>0,30</b>	<b>0,07</b>

TAB. 5.1 – Codeur proposé versus NMC pour les différents objets. Le gain est la différence de PSNR en dB. Le débit est en bits/sommet irrégulier.



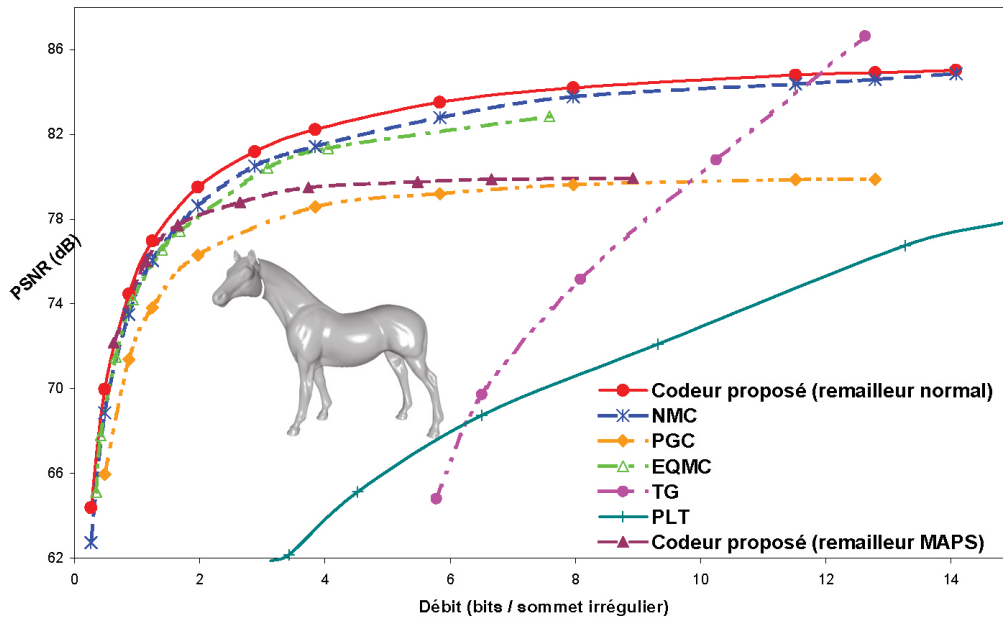


FIG. 5.7 – Comparaison avec d'autres techniques.

On constate que les dégradations visuelles sont très faibles pour des taux de compression pouvant aller jusqu'à 200 ou plus selon le nombre de sommets du maillage semi-régulier. Par exemple, il y a peu de dégradations entre le modèle DINOSAUR original de la figure 5.10(a) quantifié à un débit de 4,2 bits/sommet irrégulier et celui de la figure 5.10(c) quantifié à un débit de 0,63 bits (équivalent à un taux de compression de 304).

Nous comparons maintenant la qualité visuelle des maillages quantifiés à l'aide du *codeur proposé* et celle des maillages issus du codeur *NMC*. Pour que les différences visuelles soient plus perceptibles, nous nous sommes placés à bas débits.

La figure 5.11 présente le maillage irrégulier original de la tête de FELINE, le maillage *normal*, la version quantifiée à 0,38 bits/sommet irrégulier issue du *codeur proposé*, et celle issue de *NMC* au même débit.

La figure 5.12 présente le maillage irrégulier original des oreilles de HORSE, le maillage *normal*, la version quantifiée à 0,48 bits/sommet irrégulier issue du *codeur proposé*, et celle issue de *NMC* au même débit.

La figure 5.13 présente le maillage irrégulier original des cheveux de VENUS, le maillage *normal*, la version quantifiée à 0,74 bits/sommet irrégulier issue du *codeur proposé*, et celle issue de *NMC* au même débit.

La figure 5.14 présente l'objet MOLECULE, la version issue du *codeur proposé* et celle issue de *NMC* quantifiées à 0,89 bits/sommet irrégulier, ainsi que celle quantifiées à 0,42 bits/sommet irrégulier.

D'une manière générale, on observe qu'à bas débits les maillages quantifiés issus du *codeur proposé* sont visuellement plus proches de l'original que ceux issus du codeur *NMC* confirmant la différence en terme de *PSNR* entre les deux méthodes. Cela est particulièrement visible sur la tête de l'objet FELINE ou sur les cheveux de VENUS, où le maillage issu du *codeur proposé* conserve plus de relief.

Nous comparons maintenant la qualité visuelle des maillages quantifiés à l'aide du



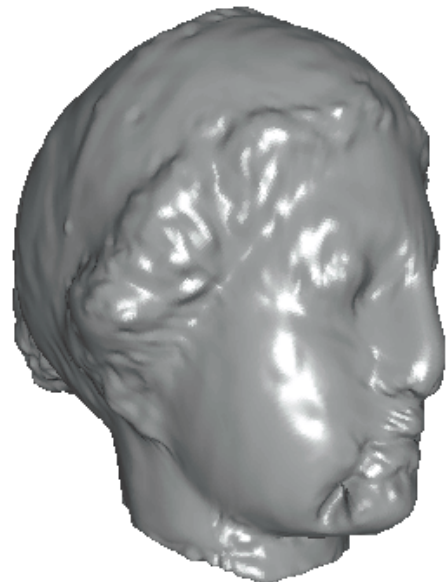
(a) Objet original.



(b) Maillage compressé à 2,6 bits/sommet irrégulier ( $TC=74$ )

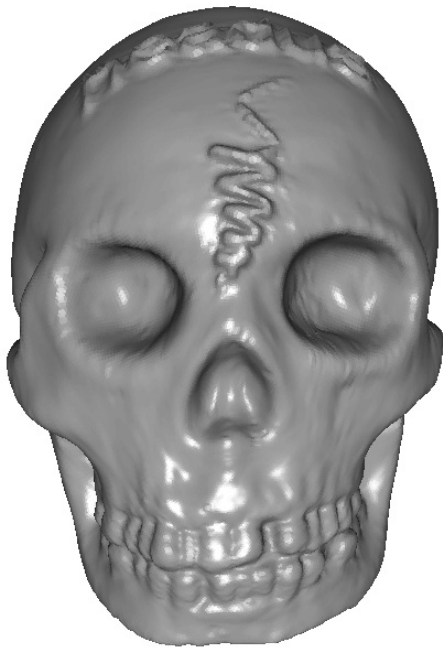


(c) Maillage compressé à 0,7 bit/sommet irrégulier ( $TC=256$ ).



(d) Maillage compressé à 0,3 bit/sommet irrégulier ( $TC=651$ ).

FIG. 5.8 – Résultats visuels sur l'objet VENUS.



(a) Objet original.

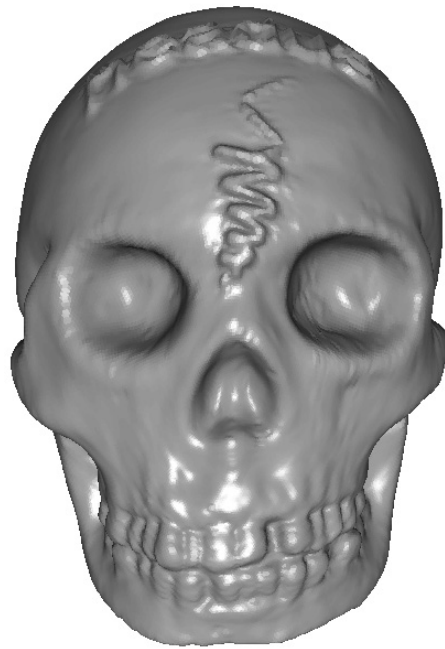
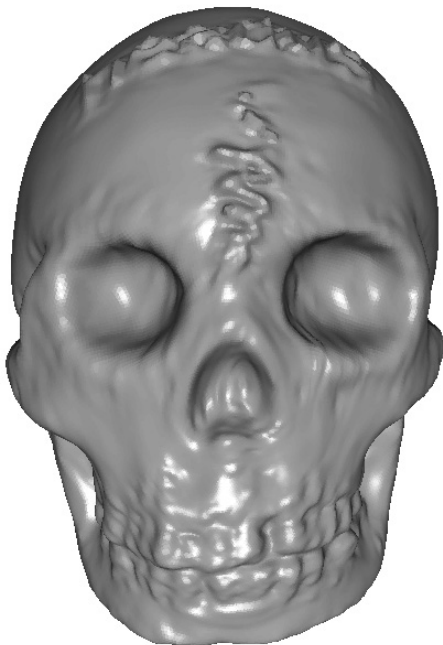
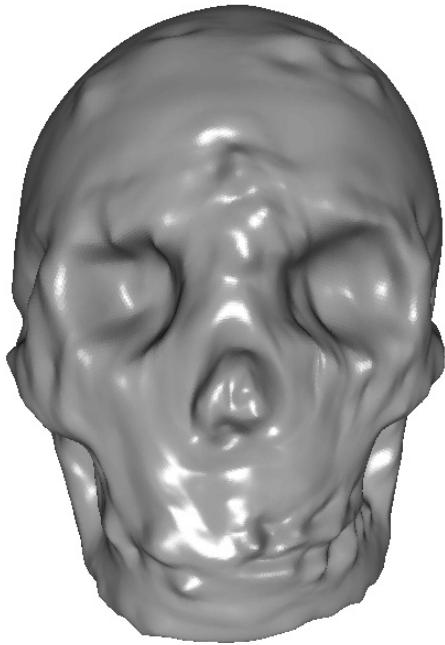
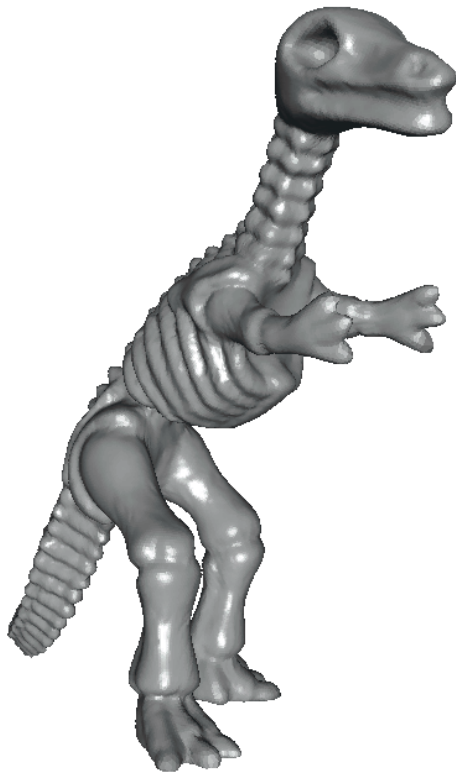
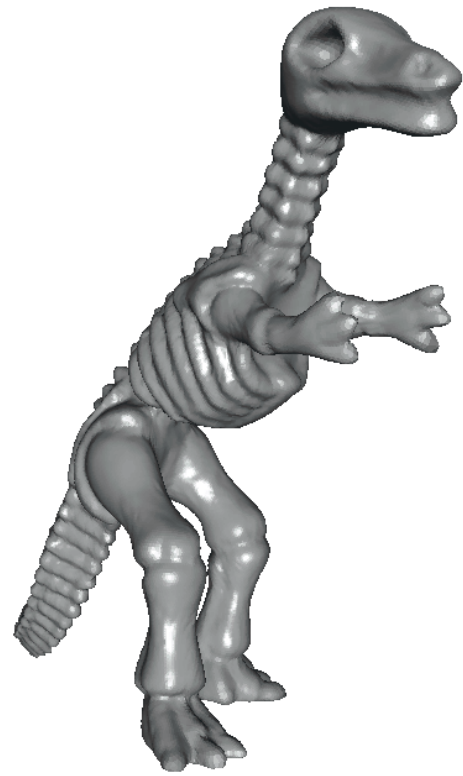
(b) Maillage compressé à 2,2 bits/sommet irrégulier ( $TC=83$ ).(c) Maillage compressé à 0,82 bit/sommet irrégulier ( $TC=226$ ).(d) Maillage compressé à 0,2 bit/sommet irrégulier ( $TC=900$ ).

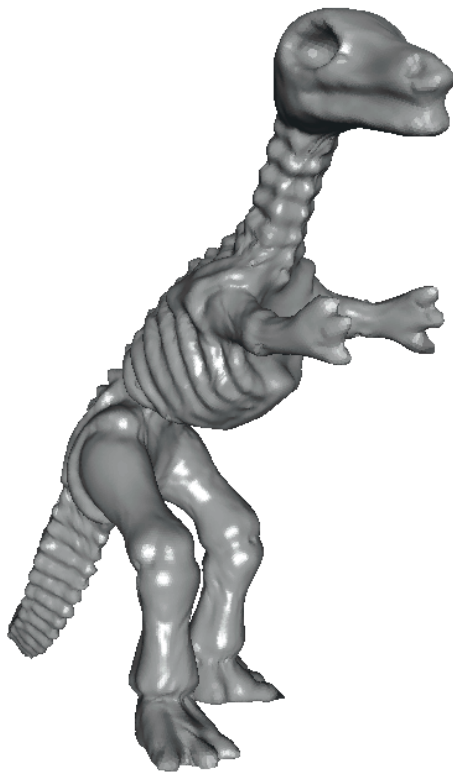
FIG. 5.9 – Résultats visuels sur l'objet SKULL.



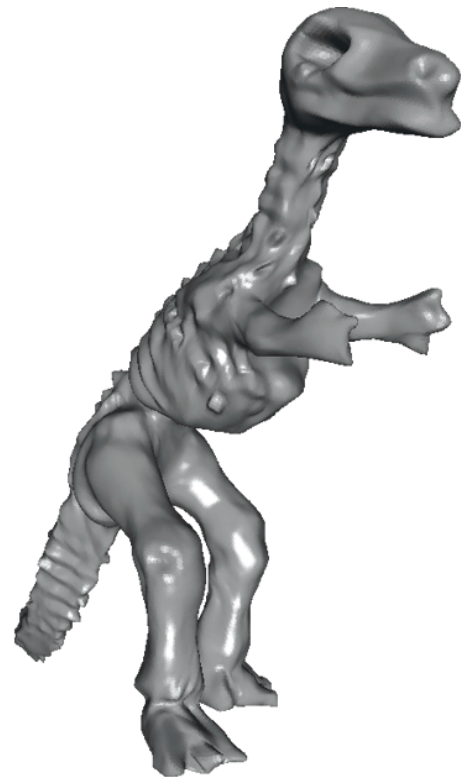
(a) Objet original.



(b) Maillage compressé à 2,8 bits/sommet irrégulier ( $TC=69$ ).



(c) Maillage compressé à 0,63 bit/sommet irrégulier ( $TC=304$ ).



(d) Maillage compressé à 0,2 bit/sommet irrégulier ( $TC=901$ ).

FIG. 5.10 – Résultats visuels sur l'objet DINOSAUR.

*codeur proposé* et celle des maillages issus du codeur *EQMC*. La figure 5.15 présente le maillage semi-régulier original<sup>4</sup> MOLECULE, la version quantifiée à 0,9 bits/sommet irrégulier issue du *codeur proposé*, et celle issue de *EQMC* au même débit. On constate là aussi que le maillage issu du *codeur proposé* conserve mieux les détails que le codeur *EQMC* qui a tendance à plus lisser l'objet.

## 5.4 Conclusion

Le but de ce chapitre était de comparer le *codeur proposé* dans cette thèse avec différentes méthodes de compression afin de mettre en évidence la supériorité d'un algorithme de compression géométrique qui exploite une allocation binaire basée modèle (pour optimiser la quantification des sous-bandes de coefficients de maillages semi-réguliers).

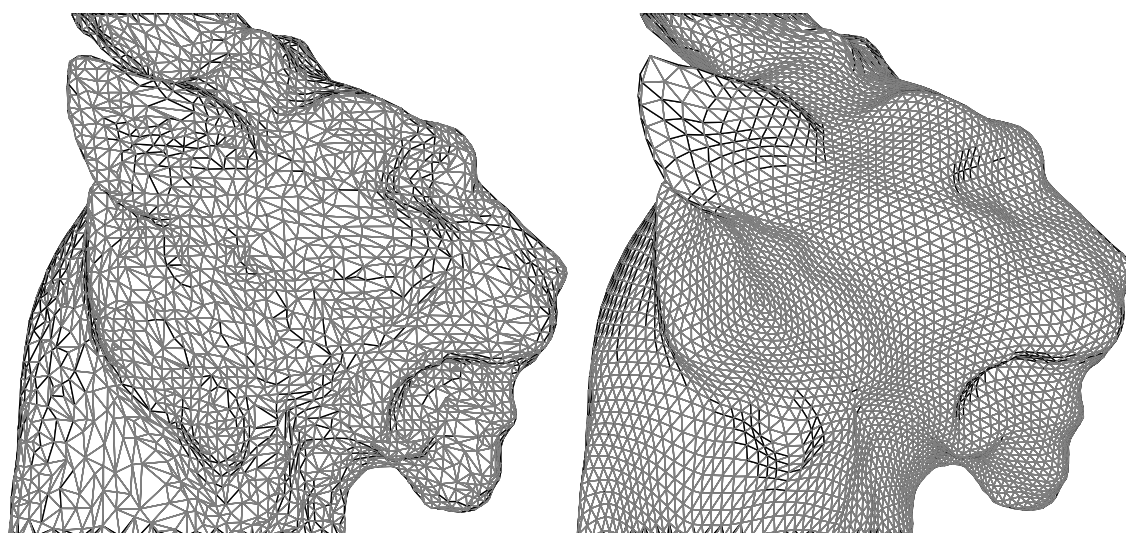
En terme de *PSNR* relatif à la distance surface-surface, nous avons constaté que le *codeur proposé* obtient des résultats meilleurs que tous les autres codeurs (progressif ou monorésolution) quel que soit le modèle, et ce même à bas débits malgré l'hypothèse de codage optimal faite dans la section 2.4 du chapitre 2 et dans la section 3.1 du chapitre 3.

En particulier, le *codeur proposé* obtient de meilleurs résultats que les codeurs de maillages *normaux* *NMC* et *EQMC* qui sont à ma connaissance les codeurs les plus efficaces actuellement. On relève un gain maximal de +7,5 *dB* sur l'objet FELINE à bas débit par rapport à *NMC*.

Nous avons aussi montré à travers plusieurs résultats visuels que la méthode proposée produit des maillages quantifiés plus détaillés et visuellement plus proches du maillage original que les maillages issus de *NMC* ou de *EQMC* qui ont tendance à plus lisser les objets. Ceci confirme la supériorité de nos résultats en terme de *PSNR*.

---

4. Nous nous comparons seulement au maillage *normal* car nous possédons le maillage irrégulier sous un format incompatible avec notre visualiseur.



(a) Maillage original irrégulier.

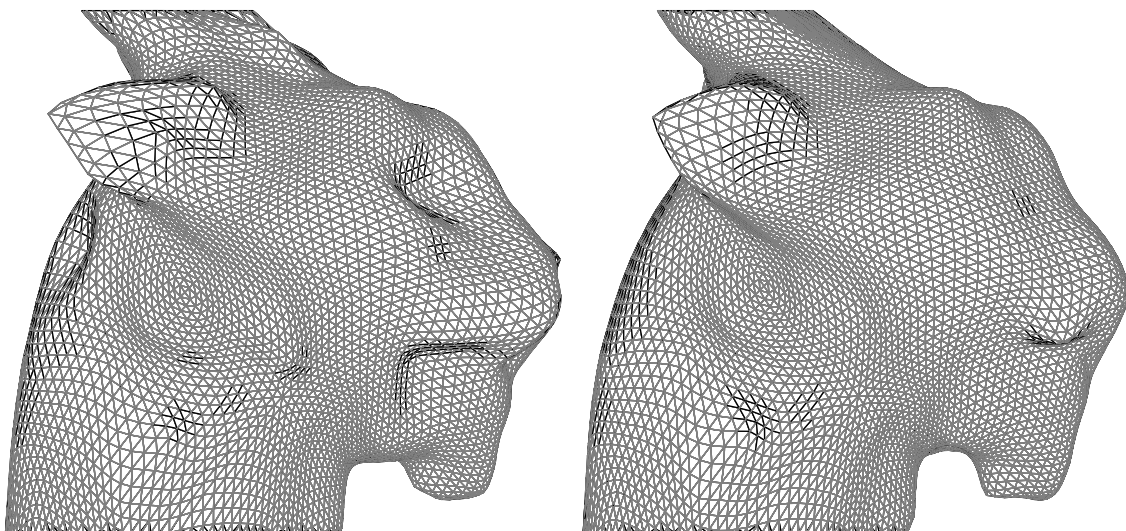
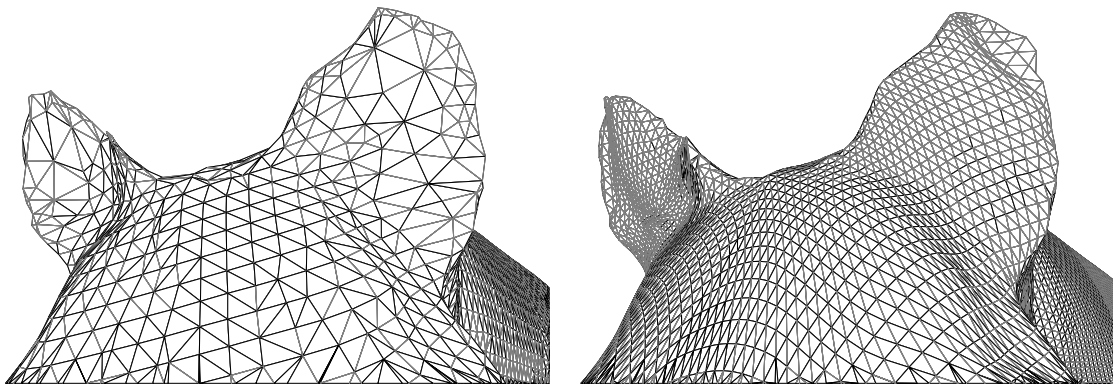
(b) Maillage *normal*.(c) Codeur proposé.  $PSNR = 59,34dB$ .(d) Codeur *NMC*.  $PSNR = 57,03dB$ .

FIG. 5.11 – Qualité visuelle de l'objet FELINE quantifié avec le codeur proposé et avec le codeur *NMC*. Le débit est de 0,38 bit/sommet irrégulier.



(a) Maillage original irrégulier.

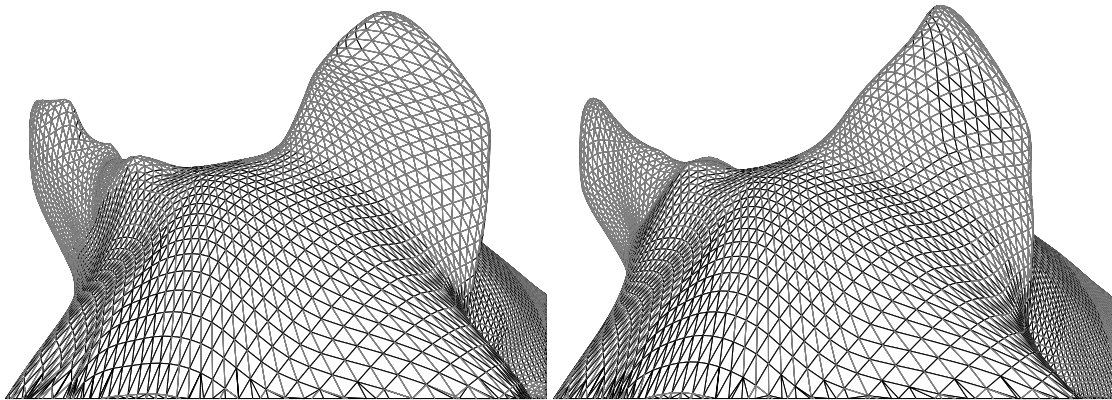
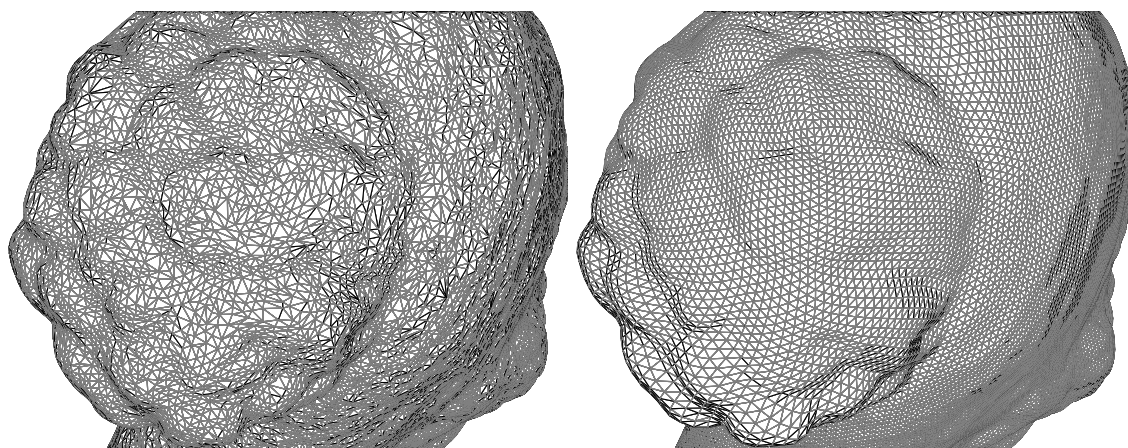
(b) Maillage *normal*.(c) Codeur proposé.  $PSNR = 44,69dB$ .(d) Codeur *NMC*.  $PSNR = 43,57dB$ .

FIG. 5.12 – Qualité visuelle de l'objet HORSE quantifié avec le codeur proposé et avec le codeur *NMC*. Le débit est de 0,48 bit/sommet irrégulier.



(a) Maillage original semi-régulier.

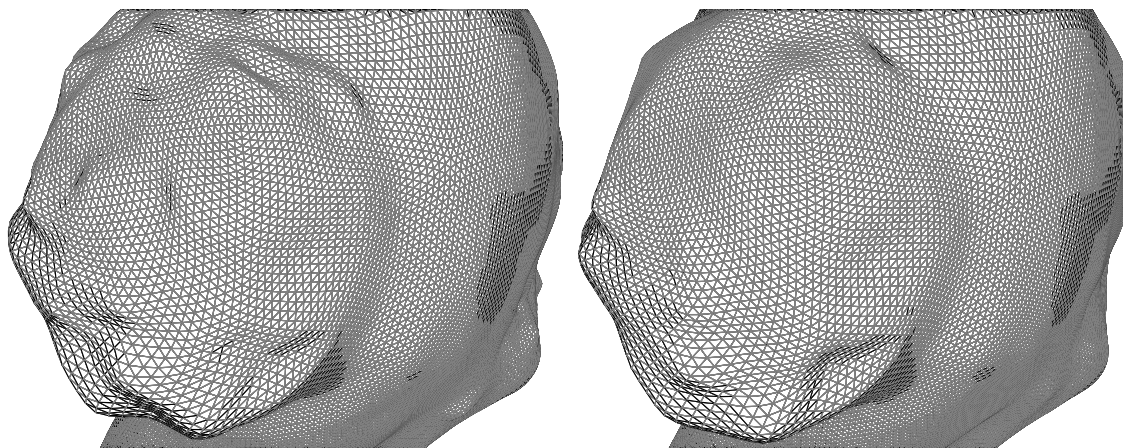
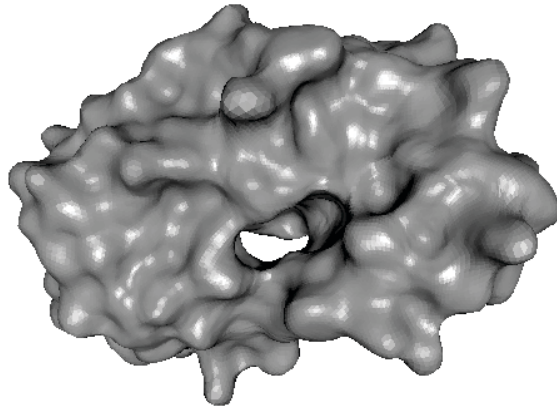
(b) Maillage *normal*.(c) Codeur proposé.  $PSNR = 71,29dB$ .(d) Codeur *NMC*.  $PSNR = 70,34dB$ .

FIG. 5.13 – Qualité visuelle de l'objet VENUS quantifié avec le codeur proposé et avec le codeur *NMC*. Le débit est de 0,74 bit/sommet irrégulier.





(a) Objet original.

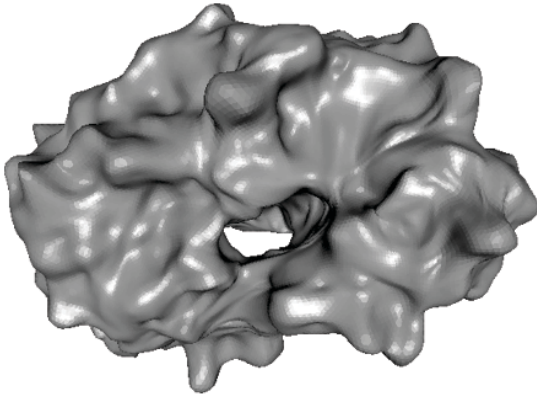
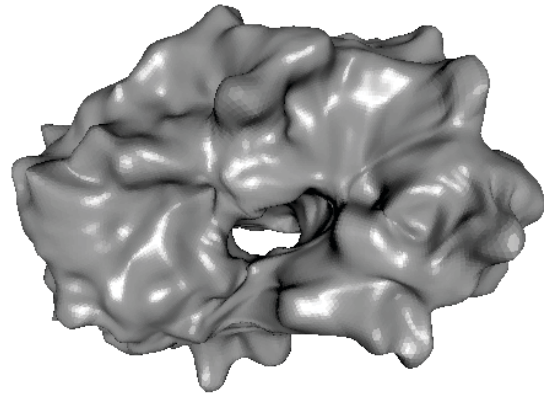
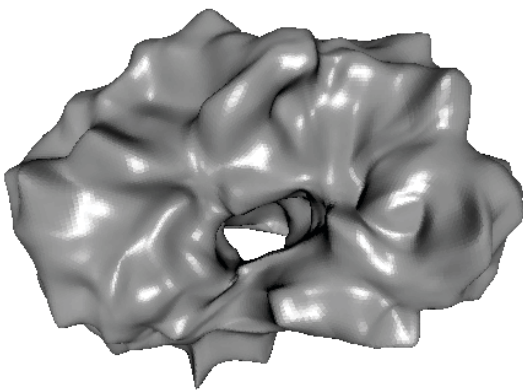
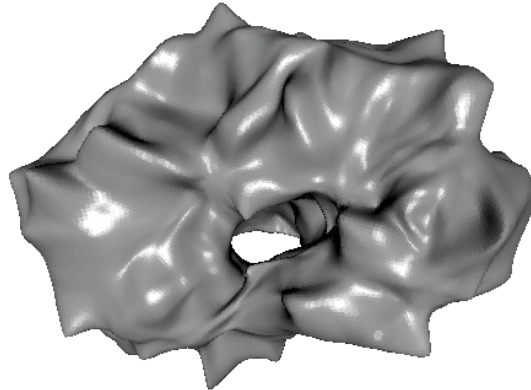
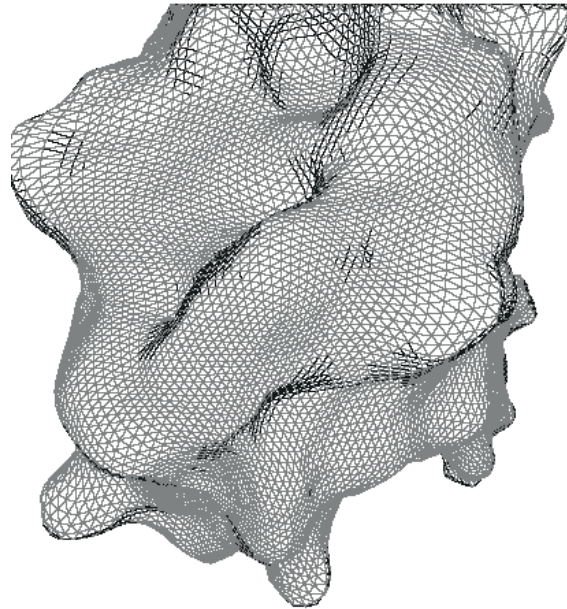
(b) Codeur proposé à 0,89 bit/sommet irrégulier.  $PSNR = 51,99dB$ .(c) Codeur NMC à 0,89 bit/sommet irrégulier.  $PSNR = 50,92dB$ .(d) Codeur proposé à 0,42 bit/sommet irrégulier.  $PSNR = 44,69dB$ .(e) Codeur NMC à 0,42 bit/sommet irrégulier.  $PSNR = 43,57dB$ .

FIG. 5.14 – Qualité visuelle de l'objet MOLECULE quantifié avec le codeur proposé et avec le codeur NMC.



(a) Maillage original semi-régulier.

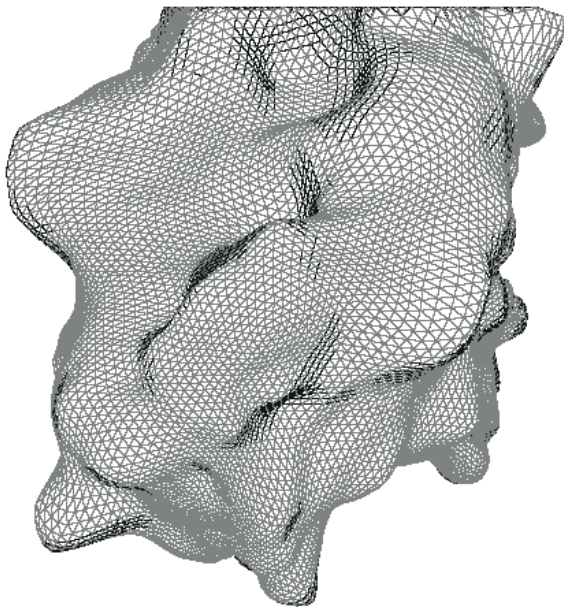
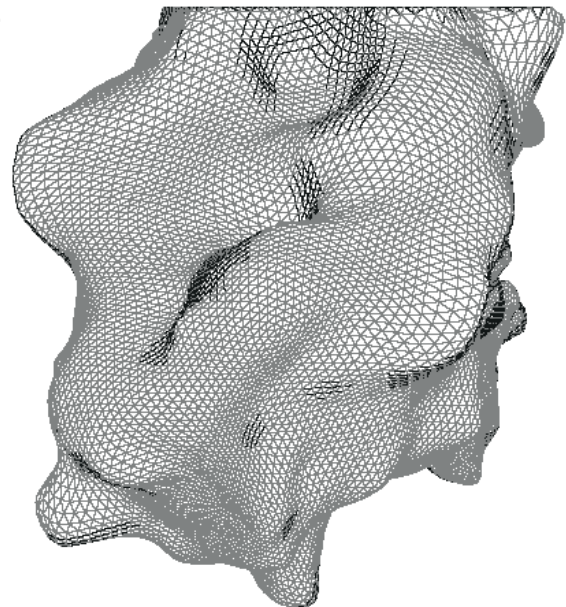
(b) Codeur proposé.  $PSNR = 51,99dB$ .(c) Codeur EQMC.  $PSNR = 50,35dB$ .

FIG. 5.15 – Qualité visuelle de l'objet MOLECULE quantifié avec le codeur proposé et avec le codeur EQMC. Le débit est de 0,89 bits/sommet irrégulier.



## Chapitre 6

---

# Conclusion et perspectives

## Conclusion

L'objectif de cette thèse est d'aborder la compression des maillages triangulaires denses et très détaillés du point de vue de l'optimisation du compromis débit-distorsion. Plus précisément, nous souhaitons concevoir un codeur de maillages triangulaires basé sur l'analyse multirésolution, permettant d'atteindre des taux de compression élevés (pour pallier le problème de bande passante limitée de certains réseaux), une transmission et une décompression progressive, et enfin un contrôle de la qualité pour optimiser le compromis entre débit et qualité visuelle, quel que soit le débit imposé.

Pour satisfaire les objectifs que nous nous sommes fixés, nous nous sommes inspirés des schémas types de compression avec pertes fréquemment utilisés pour le codage de données multimédia. Ces algorithmes comprennent généralement une transformée en ondelettes, une allocation binaire (qui optimise l'encodage des données), une quantification des coefficients, et un codage entropique.

A ce schéma typique de compression, nous avons choisi d'ajouter une étape de remaillage. Le remaillage est une technique essentielle de la *compression géométrique* qui permet d'obtenir une version semi-régulière du maillage d'entrée. Cette représentation semi-régulière a un double avantage. L'information topologique est réduite à son minimum et son échantillonnage "quasi-régulier" permet une analyse multirésolution performante grâce à l'application d'une transformée en ondelettes. Dans cette thèse, nous avons choisi le *remailleur normal* et la transformée de *butterfly non lifté*.

L'allocation binaire proposée ici a pour but de contrôler la qualité visuelle du maillage reconstruit quel que soit le débit désiré, en agissant sur la quantification des données. Son objectif est de minimiser l'erreur de reconstruction du maillage quantifié sous la contrainte d'un débit imposé. Nous avons donc eu besoin d'une mesure de distorsion pour évaluer l'erreur de reconstruction. Durant nos travaux, nous avons considéré l'erreur de reconstruction comme la distance géométrique entre les deux surfaces représentées par le maillage d'entrée et le maillage quantifié (d'où le terme de *distance surface-surface* utilisé dans ce mémoire). Cependant, cette mesure demande un lourd processus d'un point de vue calculatoire et une estimation de cette distance est préférable si l'on souhaite une allocation rapide.

La première contribution de cette thèse est d'avoir montré sous certaines hypothèses et en particulier si l'on utilise le *remailleur normal* comme technique de remaillage, que la *distance surface-surface* peut être approximée par l'*EQM* relative à la géométrie quantifiée du maillage semi-régulier [95, 96].

La deuxième contribution de thèse est d'avoir montré que cette *EQM* peut être efficacement approximée par une somme pondérée des *EQM* relatives aux sous-bandes de coefficients d'ondelettes. Les pondérations introduites sont dues à la non-orthogonalité de la transformée en ondelettes utilisée.

Cette relation entre erreur de reconstruction et erreur de quantification des sous-bandes a été étudiée au cours de nombreux travaux. Pour notre part, nous avons proposé une approche déterministe originale qui a abouti à une nouvelle formulation des pondérations. Nous avons montré que les pondérations dépendent uniquement des composantes polyphases des filtres de synthèse, contrairement aux travaux précédents qui proposaient une formulation en fonction des coefficients des filtres transerves. Cette formule permet de calculer les pondérations de tout signal (quels que soient sa dimension, sa grille d'échantillonnage et son sous-échantillonnage) quantifié à l'aide de tout codeur ondelettes (quels que soient le nombre  $M$  de canaux et le nombre  $N$  de niveaux de décomposition de la transformée en ondelettes) [30].

De plus, la formulation proposée est particulièrement avantageuse pour les transformées basées sur un schéma *lifting*. En effet, en utilisant la formulation proposée, seules les opérateurs de prédiction et de mise à jour sont nécessaires pour calculer les pondérations de non-orthogonalité alors qu'avec les autres méthodes il nous faudrait calculer les  $M$  filtres transerves de synthèse avant de pouvoir calculer les pondérations. Ainsi, nous avons pu calculer les pondérations pour le schéma de *butterfly*, transformée utilisée par le codeur proposé afin d'évaluer correctement l'erreur de reconstruction en fonction de l'*EQM* de chaque sous-bande de coefficients.

Expérimentalement, nous avons montré que la prise en compte de la non-orthogonalité des filtres lors de l'évaluation de l'erreur de reconstruction entraînait un gain considérable en terme de *PSNR*, ainsi qu'une amélioration visuelle des maillages reconstruits.

La troisième contribution de cette thèse est d'utiliser des modèles théoriques dépendant des statistiques des coefficients d'ondelettes pour évaluer le débit et la distorsion des différentes sous-bandes de coefficients lors de l'allocation [91, 92, 94, 93, 95, 96, 30]. Nous avons en effet montré que les densités de probabilité des composantes tangentielle et normale des sous-bandes de coefficients d'ondelettes de maillages semi-réguliers peuvent être modélisées par des Gaussiennes Généralisées. Par conséquent, nous avons choisi de traiter séparément les composantes tangentielle et normale, et ce à l'aide d'une quantification scalaire. Nous avons pu ainsi proposer une allocation rapide et de très faible complexité calculatoire qui minimise l'erreur de reconstruction des maillages quantifiés à partir des statistiques des sous-bandes de coefficients. La faible complexité (due à l'utilisation des modèles théoriques mais aussi de courbes paramétriques précalculées et tabulées) est de 12 opérations par sommet semi-régulier, ce qui entraîne que le calcul des paramètres de quantification se fait de manière quasiment instantanée.

Pour compléter le schéma de compression, il nous fallait intégrer un codage entropique performant. Nous avons choisi d'utiliser un codeur arithmétique contextuel par plan de bits de type *EBCOT* pour encoder les sous-bandes de coefficients d'ondelettes quantifiés. Ces codeurs traitent les coefficients quantifiés plan de bits par plan de bits, du plus significatif au moins significatif. Ils permettent ainsi une transmission progressive efficace en résolution et en plan de bits. Leur efficacité provient du fait qu'ils exploitent la corrélation *intra* sous-bande entre les coefficients d'ondelettes voisins spatialement. Cependant, ils n'exploitent pas la corrélation qui existent entre deux sous-bandes consécutives. La dernière contribution de cette thèse est donc la conception de contextes originaux adaptés à la géométrie des

maillages semi-réguliers [93]. Pour cela, nous avons élaboré deux types de contextes : les contextes pour composantes tangentiels, et les contextes pour composantes normales.

Les contextes tangentiels prennent en compte la corrélation existante entre les coordonnées des coefficients géométriquement voisins, mais aussi l'inter-corrélation entre les coordonnées  $x$  et  $y$  des coefficients géométriquement voisins. Les contextes normaux exploitent quant à eux la corrélation existante entre les coordonnées en  $z$  des coefficients géométriquement voisins, mais aussi la corrélation entre une coordonnée en  $z$  d'un coefficient et les coordonnées en  $z$  des coefficients "parents" de la résolution inférieure (corrélation inter-résolution). L'utilisation de ces contextes permet de réduire jusqu'à plus de 7% la taille de la trame binaire des maillages semi-réguliers compressés.

Expérimentalement, le *codeur proposé* dans cette thèse permet d'obtenir des résultats (en terme de *PSNR* relatif à la distance surface-surface) supérieurs aux résultats de toutes les méthodes de l'état de l'art. En particulier, nous obtenons des gains pouvant aller jusqu'à  $+7,5$  *dB* à bas débit par rapport à la méthode de référence *NMC* qui utilise aussi le *remailleur normal*, mais qui exploite un codeur par zerotree pour la quantification et l'encodage des coefficients.

Cette supériorité en terme de *PSNR* est confirmée par les résultats visuels. Le *codeur proposé* a tendance à produire des maillages quantifiés plus détaillés et visuellement plus proches du maillage original que les codeurs *NMC* ou *EQMC* qui ont tendance à lisser les objets.

## Perspectives

Cette recherche présente plusieurs perspectives, donc deux particulièrement prometteuses. La première est l'utilisation et/ou le développement de nouvelles métriques comme critère de distorsion de l'allocation binaire proposée. La validation d'une métrique fiable pour évaluer la qualité visuelle d'un maillage quantifié reste en effet un problème ouvert.

Durant nos travaux, la distance surface-surface a été choisie pour évaluer l'impact de la quantification sur la qualité du maillage reconstruit. Notre choix a été motivé par le fait que cette métrique traduit une distance géométrique entre deux surfaces, quelle que soit la connectivité des maillages qui représentent les surfaces.

Cependant, l'oeil humain est sensible à d'autres caractéristiques que la géométrie des maillages. Karni et Gotsman ont par exemple montré que contrôler à la fois l'*EQM* relative à la quantification de coefficients "spectraux" et le lissage du maillage reconstruit permet d'améliorer la qualité visuelle de ce maillage [59].

La première perspective de nos travaux est d'utiliser comme critère de distorsion pour l'allocation binaire non seulement l'*EQM* pondérée relative aux coefficients d'ondelettes pour contrôler globalement la distance surface-surface, mais aussi une métrique évaluant le lissage du maillage reconstruit après quantification. Ainsi, on peut espérer optimiser la qualité visuelle des maillages reconstruits, et éviter l'apparition de petits artefacts locaux comme cela arrive parfois avec les codeurs ondelettes ne prenant en compte qu'une distance géométrique globale.

Une deuxième évolution possible du codeur proposé dans ce mémoire serait d'adapter l'algorithme de compression géométrique aux maillages dits "de très grande dimension" [51]. Actuellement, certains domaines d'applications exploitent des maillages pouvant atteindre le milliard de sommets, ce qui rend la manipulation et la compression de

ces maillages particulièrement délicates.

Récemment une transformée en ondelettes appliquée *au fil de l'eau* a permis de réduire considérablement les coûts de stockage et la complexité de l'algorithme permettant de calculer les coefficients d'ondelettes géométriques [29].

La deuxième perspective est d'intégrer cette transformée *au fil de l'eau* dans l'algorithme de compression proposé, et d'adapter l'allocation binaire proposée pour permettre un encodage géométrique optimal régulé au fil de l'eau [86]. Nous proposerions ainsi un *codeur ondelettes au fil de l'eau* optimal pour les maillages "de très grande dimension".

D'autres perspectives à ces travaux de recherche sont envisageables. On peut par exemple imaginer un codage ondelettes avec allocation binaire *par zones d'intérêts*. Le maillage semi-régulier serait décomposé en sous-maillages selon une règle déterministe dépendant par exemple de la courbure locale. Une allocation binaire pourrait alors être appliquée en parallèle sur les différents sous-maillages, et ainsi favoriser spatialement les zones fortement détaillées au détriment des zones homogènes.

---

# Annexes

## 1 Calcul des pondérations pour un schéma *lifting* à 2 canaux : le filtre quinconce pour les signaux 2D

Les pondérations associées au filtre quinconce ont déjà été calculées en parallèle lors de précédents travaux [39]. On peut donc vérifier en comparant les résultats, si notre approche est correcte.

Ce filtre proposé pour les images fixes, est associé à une grille d'échantillonnage bidimensionnelle non séparable ( $d = 2$ ). La figure 6.1 montre le sous-échantillonnage correspondant. Deux sous-bandes sont obtenues : la sous-bande *basse fréquence*  $s_0$  et la sous-bande *haute fréquence*  $s_1$ .

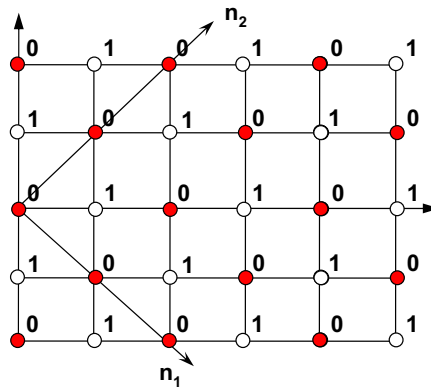


FIG. 6.1 – Grille d'échantillonnage correspondant à une grille quinconce bidimensionnelle.

Une des matrices de dilatation possibles est donnée par

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Le calcul du déterminant de cette matrice permet de vérifier que le schéma *lifting* associé à une grille d'échantillonnage quinconce est bien un schéma à 2 canaux :

$$M = \det(D) = 2.$$

La figure 6.2 montre le schéma de la synthèse d'un schéma *lifting* à 2 canaux dans l'espace de la transformée en  $z$ . A partir de la matrice polyphase donnée par (3.48), on obtient aisément la matrice polyphase pour un schéma à 2 canaux :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ -u_1 & 1 - u_1 p_1 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$



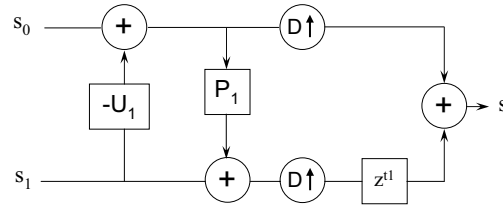


FIG. 6.2 – Synthèse d'un schéma lifting à 2 canaux.  $p_1$  et  $u_1$  représentent les opérateurs de prédiction et de mise à jour appliqués entre les sous-bandes  $s_0$  et  $s_1$ .

Il nous faut maintenant développer les opérateurs  $p_1$  et  $u_1$  dans la matrice 6.2 avec les formules propres au schéma *lifting* quinconce. La figure 6.3 montre le masque de voisinage utilisé pour calculer les coefficients d'ondelettes.

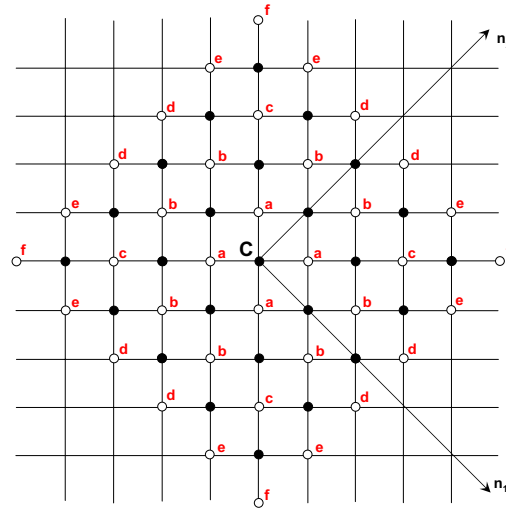


FIG. 6.3 – Voisinage utilisé pour calculer les coefficients d'ondelettes sur une grille bidimensionnelle quinconce.

A partir de ce schéma, on peut déduire la transformée en  $z$  du masque de voisinage du filtre quinconce bidimensionnel donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
 f(z_1, z_2) = & a \left( z_1 z_2 + \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{1}{z_1 z_2} \right) \\
 & + b \left( z_1^3 z_2 + \frac{z_1^3}{z_2} + z_1 z_2^3 + \frac{z_1}{z_2^3} + \frac{z_2^3}{z_1} + \frac{1}{z_1 z_2^3} + \frac{z_2}{z_1^3} + \frac{1}{z_1^3 z_2} \right) \\
 & + c \left( z_1^3 z_2^3 + \frac{z_1^3}{z_2^3} + \frac{z_2^3}{z_1^3} + \frac{1}{z_1^3 z_2^3} \right) \\
 & + d \left( z_1^5 z_2 + \frac{z_1^5}{z_2} + z_1 z_2^5 + \frac{z_1}{z_2^5} + \frac{z_2^5}{z_1} + \frac{1}{z_1 z_2^5} + \frac{z_2}{z_1^5} + \frac{1}{z_1^5 z_2} \right) \\
 & + e \left( z_1^5 z_2^3 + \frac{z_1^5}{z_2^3} + z_1^3 z_2^5 + \frac{z_1^3}{z_2^5} + \frac{z_2^5}{z_1^3} + \frac{1}{z_1^3 z_2^5} + \frac{z_2^3}{z_1^5} + \frac{1}{z_1^5 z_2^3} \right) \\
 & + f \left( z_1^5 z_2^5 + \frac{z_1^5}{z_2^5} + \frac{z_2^5}{z_1^5} + \frac{1}{z_1^5 z_2^5} \right). \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

1. Calcul des pondérations pour un schéma lifting à 2 canaux : le filtre quinconce pour les signaux 2D121

avec  $a, b, c, d, e$  et  $f$  les coefficients appliqués par les opérateurs de prédiction et de mise à jour sur les éléments voisins (pour calculer les coefficients d'ondelettes).

Dans ce manuscrit, nous nous sommes focalisés sur les filtres quinconces (4,2) et (6,2). Le terme  $(n,m)$  décrit la taille du voisinage utilisé par l'opérateur de prédiction ( $n$ ), et par l'opérateur de mise à jour ( $m$ ) pour calculer les coefficients. Ainsi, le filtre (4,2) exploite le 4-voisinage (correspondant aux coefficients  $a, b$  et  $c$ ) pour l'opérateur de prédiction, et le 2-voisinage (correspondant aux coefficients  $a$ ) pour l'opérateur de mise à jour.

Les valeurs des coefficients des opérateurs de prédiction et de mise à jour pour ces deux filtres sont données par le tableau 6.1 [38].

filtre	SL(4,2)	SL(6,2)
p	$a = 39/2^7$	$a = 675/2^{11}$
	$b = -3/2^7$	$b = -165/2^{12}$
	$c = -1/2^7$	$c = -85/2^{13}$
		$d = 15/2^{12}$
		$e = 15/2^{13}$
		$f = 3/2^{13}$
u	$a = 1/8$	$a = 1/8$

TAB. 6.1 – Valeurs des coefficients des opérateurs de prédiction et de mise à jour relatifs aux filtres quinconces bidimensionnels.

A l'aide de la formule (6.3) et des valeurs données par ce tableau, on obtient les formules des opérateurs de prédiction et de mise à jour pour les deux filtres. Pour le filtre (4,2), les transformées en  $z$  des opérateurs de prédiction  $p_1$  et de mise à jour  $u_1$  sont données par

$$\begin{aligned}
 p_1(z_1, z_2) = & \frac{39}{2^7} \left( z_1 z_2 + \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{1}{z_1 z_2} \right) \\
 & - \frac{3}{2^7} \left( z_1^3 z_2 + \frac{z_1^3}{z_2} + z_1 z_2^3 + \frac{z_1}{z_2^3} + \frac{z_2^3}{z_1} + \frac{1}{z_1 z_2^3} + \frac{z_2}{z_1^3} + \frac{1}{z_1^3 z_2} \right) \\
 & - \frac{1}{2^7} \left( z_1^3 z_2^3 + \frac{z_1^3}{z_2^3} + \frac{z_2^3}{z_1^3} + \frac{1}{z_1^3 z_2^3} \right), \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

et

$$u_1(z_1, z_2) = \frac{1}{8} \left( z_1 z_2 + \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{1}{z_1 z_2} \right). \quad (6.5)$$

Pour le filtre (6,2), les transformées en  $z$  des opérateurs de prédiction  $p_1$  et de mise à jour

$u_1$  sont données par

$$\begin{aligned}
p_1(z_1, z_2) = & \frac{675}{2^{11}} \left( z_1 z_2 + \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{1}{z_1 z_2} \right) \\
& - \frac{165}{2^{12}} \left( z_1^3 z_2 + \frac{z_1^3}{z_2} + z_1 z_2^3 + \frac{z_1}{z_2^3} + \frac{z_2^3}{z_1} + \frac{1}{z_1 z_2^3} + \frac{z_2}{z_1^3} + \frac{1}{z_1^3 z_2} \right) \\
& - \frac{85}{2^{13}} \left( z_1^3 z_2^3 + \frac{z_1^3}{z_2^3} + \frac{z_2^3}{z_1^3} + \frac{1}{z_1^3 z_2^3} \right) \\
& + \frac{15}{2^{12}} \left( z_1^5 z_2 + \frac{z_1^5}{z_2} + z_1 z_2^5 + \frac{z_1}{z_2^5} + \frac{z_2^5}{z_1} + \frac{1}{z_1 z_2^5} + \frac{z_2}{z_1^5} + \frac{1}{z_1^5 z_2} \right) \\
& + \frac{15}{2^{13}} \left( z_1^5 z_2^3 + \frac{z_1^5}{z_2^3} + z_1^3 z_2^5 + \frac{z_1^3}{z_2^5} + \frac{z_2^5}{z_1^3} + \frac{1}{z_1^3 z_2^5} + \frac{z_2^3}{z_1^5} + \frac{1}{z_1^5 z_2^3} \right) \\
& + \frac{3}{2^{13}} \left( z_1^5 z_2^5 + \frac{z_1^5}{z_2^5} + \frac{z_2^5}{z_1^5} + \frac{1}{z_1^5 z_2^5} \right), \quad (6.6)
\end{aligned}$$

et

$$u_1(z_1, z_2) = \frac{1}{8} \left( z_1 z_2 + \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{1}{z_1 z_2} \right). \quad (6.7)$$

Pour satisfaire la condition de normalisation, Les gains relatifs à ce schéma sont  $K_0 = 1$  et  $K_1 = 1/2$ . En remplaçant les formules énoncées ci-dessus dans les composantes de la matrice polyphase (6.2), les pondérations peuvent être calculées grâce à la formule (3.49).

Les pondérations relatives aux filtres (4,2) sont données par

$$\begin{cases} w_0 = 1,375976562, \\ w_1 = 3,219863892. \end{cases} \quad (6.8)$$

Les pondérations relatives aux filtres (6,2) sont données par

$$\begin{cases} w_0 = 1,448065042, \\ w_1 = 3,140608683. \end{cases} \quad (6.9)$$

Nous obtenons bien les mêmes résultats que [39] sans avoir à passer par la conception des filtres transerves.

## 2 Test du $\chi^2$ entre les sous-bandes hautes fréquences et la densité de probabilité d'une *Gaussienne Généralisée (GG)*

Ce test permet de vérifier la nature d'une répartition. Dans notre cas, cela permet de vérifier si la répartition d'une  $GG^1$  peut modéliser la répartition réelle de nos sous-bandes hautes fréquences. La valeur test à calculer est :

$$\chi_{k-1}^2 = \sum_{v=1}^k \frac{(n_v - np_v)^2}{np_v},$$

avec

- ⤵  $k$  le nombre de cellules (généralement compris entre 6 et 30) ;
- ⤵  $n_v$  la fréquence d'apparition de  $x_v$ , valeur médiane de la cellule  $v$  ;
- ⤵  $n$  le nombre d'échantillons réels présents dans la cellule  $v$  ;
- ⤵  $p_v$  la fréquence théorique espérée (dans notre cas  $p(x_v) = ae^{-|bx_v|^\alpha}$ ).

La figure 6.4 décrit les différents éléments utilisés pour ce test. Une fois calculée, cette va-

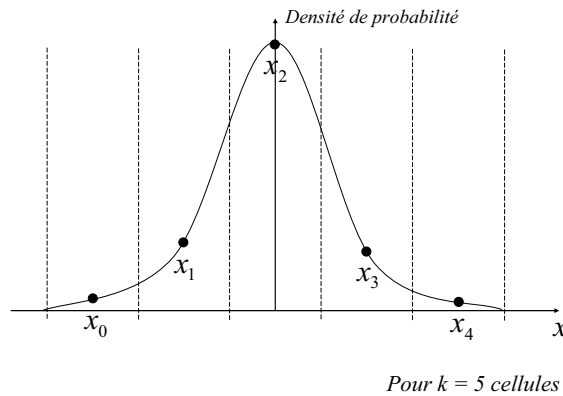


FIG. 6.4 – *Elements utilisées pour le calcul de la valeur test  $\chi_{k-1}^2$  (pour  $k = 5$  cellules).*

leur est comparée à un ensemble de valeurs  $\chi_{k-1,\beta}^2$  (donné par une table non fournie dans ce mémoire).  $\beta$  représente le seuil de tolérance. si  $\chi_{k-1}^2 > \chi_{k-1,\beta}^2$ , alors l'hypothèse d'avoir effectivement à faire à la répartition théorique est à rejeter avec une probabilité d'erreur d'au plus  $\beta$ . En d'autres termes, la densité modélisée est fiable à plus de  $(100 \times \beta)\%$ .

Prenons l'exemple des densités de probabilité typiques d'une *sous-bande normale* et d'une *sous-bande tangentielle* données par la figure 4.4 page 83 (Les coefficients d'ondelettes sont obtenus avec le *remailleur normal* et le *butterfly non lifté* sur l'objet VENUS). En posant  $k = 26$ , les résultats sont les suivants :

- ⤵ pour la *sous-bande tangentielle* :  $\chi_{25}^2 = 1,5621 > \chi_{25,0,99}^2$ ,
- ⤵ pour la *sous-bande normale* :  $\chi_{25}^2 = 0,1289 > \chi_{25,0,99}^2$ .

---

1. dont la formule de la densité de probabilité est

$$p(x) = ae^{-|bx|^\alpha}, \tag{6.10}$$

avec  $b = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\Gamma(3/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)}}$  and  $a = \frac{b\alpha}{2\Gamma(1/\alpha)}$ .

Pour l'objet RABBIT, les résultats sur le même niveau de résolution sont les suivants :

- ⤵ pour la *sous-bande tangentielle* :  $\chi_{25}^2 = 0,0083 > \chi_{25,0.99}^2$ ,
- ⤵ pour la *sous-bande normale* :  $\chi_{25}^2 = 3,5280 > \chi_{25,0.99}^2$ .

Cela signifie qu'un modèle de GG est fiable à plus de 99% pour ces sous-bandes. Les figures 4.4 de la page 83 montrent d'ailleurs le résultat de la modélisation obtenue avec une GG (en rouge) par rapport aux distributions réelles des sous-bandes (en bleu). On constate que la répartition réelle et la répartition modélisée par une GG sont vraiment très proches.

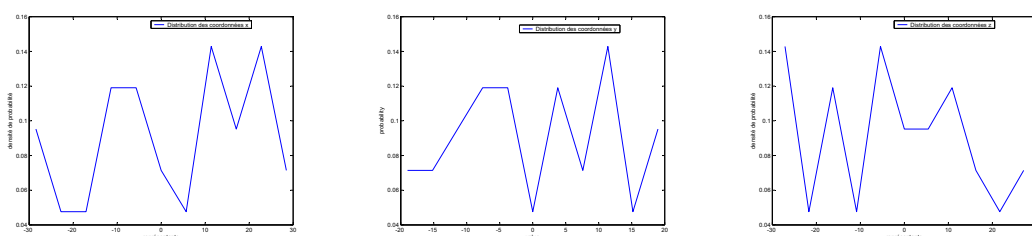
**Remarque 8.** *Lors de nos travaux nous avons aussi étudié le remailleur MAPS associé au schéma de butterfly lifté [91, 92, 94, 93]. Dans ce cas, les résultats sont analogues :*

- ⤵ pour la sous-bande tangentielle,  $\chi_{25}^2 = 3,0085 > \chi_{25,0.99}^2$  ;
- ⤵ pour la sous-bande normale,  $\chi_{25}^2 = 3,5254 > \chi_{25,0.99}^2$ .

Cela signifie que la GG est aussi bien appropriée pour modéliser la répartition réelle des sous-bandes hautes fréquences d'un maillage semi-régulier obtenu avec MAPS.

### 3 Densité de probabilité typique des coordonnées du maillage basse fréquence avec ou sans prédiction géométrique.

Les 3 sous-ensembles de coordonnées basses fréquences ne possèdent pas de particularité statistique (voir figure 6.5). La densité de probabilité des coefficients prédits est représenté



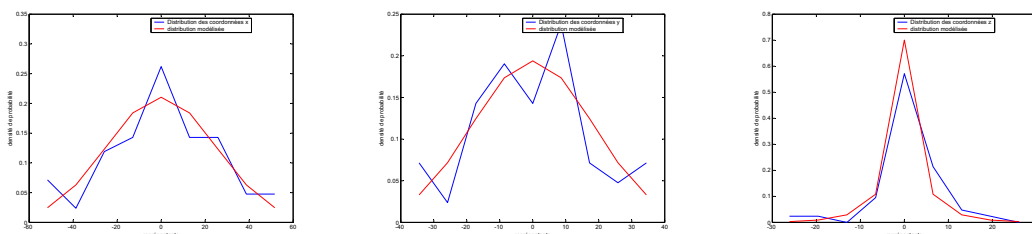
(a) Sous-bande des coordonnées en  $x$ .

(b) Sous-bande des coordonnées en  $y$ .

(c) Sous-bande des coordonnées en  $z$ .

FIG. 6.5 – Densités de probabilités typiques des 3 sous-bandes de coordonnées des coefficients basses fréquences de l'objet VENUS obtenu avec le remailleur normal et le schéma de butterfly non lifté.

par les courbes bleus des figures 6.6(a), 6.6(b) et 6.6(c). On observe que cette technique permet de concentrer l'énergie autour de zéro : on va donc maintenant vérifier si une  $GG$  peut être utilisée pour modéliser ces répartitions.



(a) Sous-bande des coordonnées en  $x$

(b) Sous-bande des coordonnées en  $y$ .

(c) Sous-bande des coordonnées en  $z$ .

FIG. 6.6 – Densité de probabilité typique des 3 sous-bandes de coordonnées des coefficients basses fréquences prédits de l'objet VENUS obtenu avec le remailleur normal et le schéma de butterfly non lifté.

#### Test du $\chi^2$ :

- ⋃ Pour le sous-ensemble de coordonnées en  $x$ ,  $\chi_5^2 = 0,0592 < \chi_{5,0.99}^2$ ,
- ⋃ Pour le sous-ensemble de coordonnées en  $y$ ,  $\chi_5^2 = 0,0829 < \chi_{5,0.99}^2$ ,
- ⋃ Pour le sous-ensemble de coordonnées en  $z$ ,  $\chi_5^2 = 0,5453 < \chi_{5,0.99}^2$ .

La  $GG$  peut donc être utilisée pour modéliser la densité de probabilité des sous-ensembles de coordonnées des coefficients BF.

## 4 Efficacité du codeur entropique *3D-CBAC* pour des maillages semi-réguliers obtenus avec *MAPS*

Lors de travaux antérieurs, nous avons appliqué le codeur arithmétique proposé dans ce mémoire (*3D-CBAC*) sur des maillages obtenus avec le remaillieur *MAPS* [93]. Pour vérifier l'efficacité des contextes proposés sur ces maillages, on compare la taille de la trame obtenue à l'aide de *3D-CBAC* avec celle obtenue avec le codeur arithmétique basique *EBCOT* utilisant des contextes adaptés aux images (les sous-ensembles sont considérés dans ce cas comme des images et exploite donc le voisinage "pixellique" et non pas spatial) [115]. Les tableaux 6.2, 6.3 et 6.4 donnent les résultats pour les objets HORSE, BUNNY et FELINE. Dans ce cadre, le gain atteint 6,95% à un certain débit pour l'objet HORSE.

Débit cible (bits/sommet)	Taille trame (bits)		
	<i>3D-CBAC</i>	<i>EBCOT</i>	<b>Gain %</b>
0,18	19823	20900	<b>5,1</b>
0,3	31067	33300	<b>6,7</b>
0,6	57002	61264	<b>6,95</b>
1,2	110467	117684	<b>6,13</b>
1,8	171731	181300	<b>5,28</b>
3,0	310615	322053	<b>3,55</b>

TAB. 6.2 – *3D-CBAC versus EBCOT pour l'objet HORSE remaillé avec MAPS.*

Débit cible (bits/sommet)	Taille trame (bits)		
	<i>3D-CBAC</i>	<i>EBCOT</i>	<b>Gain %</b>
0,18	21761	22546	<b>3,48</b>
0,3	35450	36947	<b>4,05</b>
0,6	67905	71438	<b>4,95</b>
1,2	135555	142433	<b>4,83</b>
1,8	211517	221154	<b>4,36</b>
3,0	389622	402779	<b>3,27</b>

TAB. 6.3 – *3D-CBAC versus EBCOT pour l'objet BUNNY remaillé avec MAPS.*

Débit cible (bits/sommet)	Taille trame (bits)		
	<i>3D-CBAC</i>	<i>EBCOT</i>	<b>Gain %</b>
0,18	44875	46754	<b>4,02</b>
0,3	71981	75075	<b>4,12</b>
0,6	140537	147598	<b>4,78</b>
1,2	296240	310233	<b>4,51</b>
1,8	405035	425739	<b>4,86</b>
3,0	561063	590844	<b>5,04</b>

TAB. 6.4 – *3D-CBAC versus EBCOT pour l'objet FELINE remaillé avec MAPS.*

## 5 Maillages surfaciques triangulaires utilisés dans ce mémoire

Objet	$BB^b$	Maillage irrégulier		Maillage <i>Normal</i> <sup>a</sup>		Maillage <i>MAPS</i>	
		Sommets	Triangles	Sommets	Triangles	Sommets	Triangles
HORSE	0,25	48485	96966	450562	901120	112642	225280
VENUS	1,56	50002	100000	163842	327680	198658	397312
RABBIT	0,09	67039	134073	155650	311296	107522	215040
FELINE	1.88	49919	99732	64510	129024	258046	516096
SKULL	240,62	20002	40000	131074	262144	-	-
MOLECULE	83,12	10028	20056	54272	108544	-	-
DINOSAUR	156,52	56194	112384	129026	258048	-	-
BUNNY	0,25	34835	69472	-	-	118206	235520

TAB. 6.5 – *Caractéristiques des objets utilisés.*

<sup>a</sup> Les données concernant les maillages *normaux* RABBIT, FELINE, et MOLECULE correspondent à la version uniforme.

<sup>b</sup>  $BB$ : longueur de la diagonale de la boîte englobante.

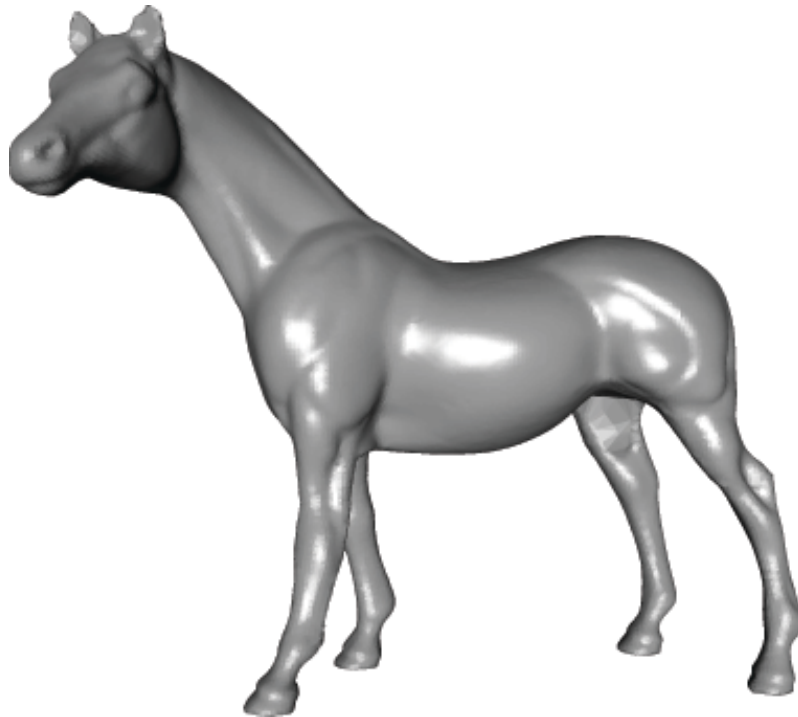


FIG. 6.7 – HORSE *original*.





FIG. 6.8 – VENUS *original*.



FIG. 6.9 – RABBIT *original*.



FIG. 6.10 – FELINE *original*.



FIG. 6.11 – SKULL *original*.

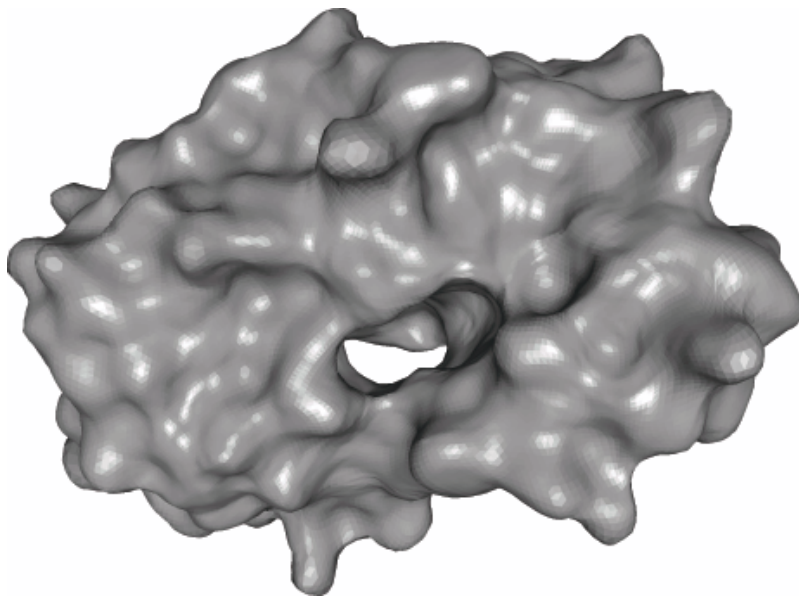


FIG. 6.12 – MOLECULE *original*.



FIG. 6.13 – DINOSAUR *original*.



FIG. 6.14 – BUNNY *original*.



---

## Bibliographie

- [1] <http://www-creatis.insa-lyon.fr/menu/ivolumique/>.
- [2] <http://www.ablesw.com/3d-doctor/surface.html>.
- [3] <http://www.gamasutraexchange.com/>.
- [4] <http://www.gvu.gatech.edu/people/faculty/greg.turk/bunny/bunny.html>.
- [5] <http://www.headus.com/au/>.
- [6] <http://www.pixar.com/>.
- [7] Joint video team (jvt) of iso/iec mpeg and itu-t vceg. joint video team coding (jvt) video coding. draft iso/iec 14496-10. Document JVT-B118r7.
- [8] ISO/IEC 14496-2:1999/Amd 1:2000: Visual extensions, 2000.
- [9] Pierre ALLIEZ et Mathieu DESBRUN. Progressive compression for lossless transmission of triangle meshes. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'01*, pages 195–202, 2001.
- [10] Pierre ALLIEZ et Mathieu DESBRUN. Valence-driven connectivity encoding for 3D meshes. *Computer graphics forum*, 3(20):480–489, Septembre 2001. Presented at EUROGRAPHICS, Manchester, UK.
- [11] Pierre ALLIEZ et Craig GOTSMAN. Recent advances in compression of 3D meshes. Dans *Proceedings of the Symposium on Multiresolution in Geometric Modeling*, 2003.
- [12] M. ANTONINI, M. BARLAUD, P. MATHIEU, et I. DAUBECHIES. Image coding using wavelet transform. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1(2):205–220, April 1992.
- [13] N. ASPERT. *Non-linear subdivision of univariate signals and discrete surfaces*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2003.
- [14] N. ASPERT, D. SANTA-CRUZ, et T. EBRAHIMI. Mesh: Measuring errors between surfaces using the hausdorff distance. Dans *Proceedings of the IEEE International Conference on Multimedia and Expo*, volume I, pages 705 – 708, 2002.
- [15] M. BEN-CHEN et C. GOTSMAN. On the optimality of the laplacian spectral basis for mesh geometry coding. preprint.
- [16] F. BOSSEN. On the art of compressing three-dimensional polygon meshes and their associated properties. *PhD Thesis - Ecole polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse*, (2012), 1999.
- [17] CALTECH. <http://www.multires.caltech.edu/software/pgc/datfile.pdf>.
- [18] CALTECH. <http://www.multires.caltech.edu/software/software.htm>.
- [19] F. CAYRE, P. RONDÃO ALFACE, F. SCHMITT, et H. MAÎTRE. Compression and watermarking of 3D triangle mesh geometry using spectral decomposition. *SPIE 47<sup>th</sup> Annual meeting*, 2002.

- [20] C.K. CHEONG, K. AIZAWA, T. SAITO, et M. HATORI. Subband image coding with biorthogonal wavelets. *IEICE Trans. Fundamentals*, E75-A(7), july 1992.
- [21] M. CHOW. Optimized geometry compression for real-time rendering. Dans *Proceedings of the 8th conference on Visualization '97*, pages 347–ff. IEEE Computer Society Press, 1997.
- [22] P. CIGNONI, C. ROCCHINI, et R. SCOPIGNO. Metro: Measuring error on simplified surfaces. *Computer graphics Forum*, 2(17):167–174, 1998.
- [23] R. COHEN, D. COHEN-OR, et T. IRONI. Multi-way geometry encoding. Rapport technique, Technical report, 2002.
- [24] D. COHEN-OR, D. LEVIN, et O. REMEZ. Progressive compression of arbitrary triangular meshes. In *IEEE Visualization 99 Conference Proceedings*, pages 67–72, 1999.
- [25] M. DEERING. Geometry compression. *Proceedings SIGGRAPH'95*, 1995.
- [26] D.L. DONOHO. Interpolating wavelet transform. Preprint, Department of Statistics, Stanford University, 1992.
- [27] N. DYN, D. LEVIN, et J.A. GREGORY. A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control. *ACM Transactions on Graphics*, 9,2:160–169, 1990.
- [28] M. ECK, T. DEROSE, T. DUCHAMP, H. HOPPE, M. LOUNSBERY, et W. STUETZLE. Multiresolution analysis of arbitrary meshes. *Computer Graphics, SIGGRAPH95 Proceedings*, pages 173–182, 1995.
- [29] A. ELKEFI, M. ANTONINI, et C. Ben AMAR. 3D scan-based wavelet transform for multiresolution meshes. Dans *EUSIPCO 2004, XII European Signal Processing Conference*, Vienne, Autriche, 3-6 septembre 2004.
- [30] F. Payan et M. ANTONINI. Mean square error for biorthogonal m-channel wavelet coder. Rapport de recherche n°I3S/RR-2005-04-FR, Laboratoire I3S, France, 2005.
- [31] L. De FLORIANI, G. Nagy B. FALCIDIENO, et C. PIENOVI. A hierarchical structure for surface approximation. *Computers and Graphics*, 2(8):183–193, 1984.
- [32] P.M GANDOIN et O. DEVILLERS. Geometric compression for interactive transmission. Dans *Visualization Conference Proceedings*, pages 319–326, 2000.
- [33] P.M GANDOIN et O. DEVILLERS. Progressive lossless compression of arbitral simplicial complexes. Dans *ACM Transactions on Graphics*, 21, pages 372–379. ACM Siggraph Conference Proceedings, 2002.
- [34] M. GARLAND. Simple model file format. <http://graphics.cs.uiuc.edu/garland/class/realtime/dist/SMF.txt>.
- [35] A. GERSHO. Asymptotically optimal block quantization. *IEEE Transactions on Image Theory*, (25):373–380, 1979.
- [36] A. GERSHO et R.M. GRAY. Vector quantization and signal compression. *Norwell, Massachusetts: Kluwer Academic Publishers*, 1992.
- [37] C. GOTSMAN, S. GUMHOLD, et L. KOBBELT. Simplification and compression of 3D meshes. Dans M. Floater A. ISKE, E. Quak, éditeur, *In Tutorials on Multiresolution in Geometric Modelling (Munich Summer School Lecture Notes)*, 2002.
- [38] A. GOUZE, M. ANTONINI, et M. BARLAUD. Quincunx lifting scheme for lossy image coding. *Proceedings of IEEE International Conference in Image Processing (ICIP)*, September 2000.
- [39] A. GOUZE, C. PARISOT, M. ANTONINI, et M. BARLAUD. Optimal weighted model-based bit allocation for quincunx sampled images. *Proceedings of IEEE International Conference in Image Processing (ICIP)*, September 2003.

- [40] R.M. GRAY et T.G. STOCKHAM. Dithered quantizers. *IEEE trans. on Information theory*, 39(3), may 93.
- [41] M.H. GROSS, O.G. STAADT, et R. GATTI. Efficient triangular surface approximations using wavelets and quadtree data structures. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 2, 2, 1996.
- [42] A. GROSSMANN et J. MORLET. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. of Math. An.*, 15:723–736, 1984.
- [43] A. GUÉZIEC, G. TAUBIN, F. LAZARUS, et W. HORN. Converting sets of polygon to manifold surfaces by cutting and stitching. *IEEE Visualization 98 Conference Proceedings*, pages 383–390 and 553, 1998.
- [44] S. GUMHOLD, S. GUTHE, et W. STRASSER. Tetrahedral mesh compression with the cut-border machine. *IEEE Visualization'99*, october 1999.
- [45] Igor GUSKOV, Kiril VIDIMCE, Wim SWELDENS, et Peter SCHRÖDER. Normal meshes. Dans Kurt AKELEY, éditeur, *Siggraph 2000, Computer Graphics Proceedings*, pages 95–102. ACM Press / ACM SIGGRAPH / Addison Wesley Longman, 2000.
- [46] P.S HECKBERT et M. GARLAND. Survey of polygonal surface simplification algorithms. *Multiresolution Surface Modeling Course, SIGGRAPH'97*, 1997.
- [47] H. HOPPE. Progressive meshes. *Proceedings ACM SIGGRAPH'96*, pages 99–108, August 1996.
- [48] Hugues HOPPE, Tony DEROSE, Tom DUCHAMP, John McDONALD, et Werner STUETZLE. Mesh optimization. *Computer Graphics*, 27(Annual Conference Series):19–26, 1993.
- [49] D.A. HUFFMAN. A method for the construction of minimum-redundancy codes. *Proceedings of IRE*, 40:1098–1101, 1952.
- [50] M. ISENBURG et J. SNOEYINK. Mesh collapse compression. Dans *In Proceedings of SIBGRAPI'99*, pages 27–28, 1999. Campinas, Brazil.
- [51] M. ISENBURG et J. SNOEYINK. Spirale-reversi: reverse decoding of the edgebreaker encoding. *Computational Geometry*, 2001.
- [52] M. ISENBURG et J. SNOEYINK. Coding with ascii: compact, yet text-based 3d content. Dans *First International Symposium on 3D Data Processing Visualization and Transmission*, pages 609–616, 2002.
- [53] ISO AND CCITT. Digital compression and coding of continuous-tone still images. ISO/IEC 10918-1,2,3 Information Technology.
- [54] ISO/IEC JTC1/SC2/WG11. Coding of moving pictures and associated audio for digital storage media at up to about 1.5 Mbps. ISO/IEC 11172.
- [55] Information technology – JPEG 2000 image coding system – part 1: Core coding system. ISO/IEC 15444-1:2000.
- [56] Jpeg2000 part 1 final draft international standard. ISO/IEC/ JTC1/SC29 WG1. <http://www.jpeg.org>.
- [57] A. KALVIN et R.H. TAYLOR. Superfaces: Polyhedral approximation with bounded error. Rapport technique RC 19135, IBM Research, 1993.
- [58] Z. KARNI, A. BOGOMJAKOV, et C. GOTSMAN. Efficient compression and rendering of multi-resolution meshes. Dans *IEEE Visualization Conference Proceedings*, 2002.
- [59] Z. KARNI et C. GOTSMAN. Spectral compression of mesh geometry. *In ACM SIGGRAPH Conference Proceedings*, pages 279–286, 2000.
- [60] Z. KARNI et C. GOTSMAN. 3d mesh compression using fixed spectral basis. *Graphics interface Conference Proceedings*, pages 1–8, 2001.



- [61] J.H. KASNER, M.W. MARCELLIN, et B.R. HUNT. Universal trellis coded quantization. *IEEE Transactions on Image Processing*, 8(12):1677–1687, Décembre 1999.
- [62] A. KHODAKOVSKY et I. GUSKOV. Normal mesh compression. *Geometric Modeling for Scientific Visualization*, Springer-Verlag, 2002.
- [63] A. KHODAKOVSKY, P. SCHRÖDER, et W. SWELDENS. Progressive geometry compression. *Proceedings of SIGGRAPH*, 2000.
- [64] D. KING et J. ROSSIGNAC. Guaranteed 3.67v bit encoding of planar triangle graphs. *Proceedings of the 11th Canadian Conference on Computational Geometry*, 1-5:146–149, 1999.
- [65] D. KING et J. ROSSIGNAC. Optimal bit allocation in 3d compression. *Journal of Computational Geometry, Theory and Applications*, 1999.
- [66] L. KOBBELT, S.CAMPAGNA, et H.P. SEIDEL. A general framework for mesh decimation. *In SIGGRAPH 98, Conference Proc.*, 1998.
- [67] J. KOVACEVIC et W. SWELDENS. Wavelet families of increasing order in arbitrary dimensions. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1999.
- [68] B. KRONROD et C. GOTSMAN. Optimized triangle mesh compression using prediction trees. Dans *Proceedings of 8th Pacific Graphics 2000 Conference*, 2000.
- [69] S. LAVU, H. CHOI, et R. BARANIUK. Geometry compression of normal meshes using rate-distortion algorithms. Dans *Proceedings of the Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing*, 2003.
- [70] A.W.F LEE, W. SWELDENS, P. SCHRÖDER, P. COWSAR, et D. DOBKIN. MAPS: Multiresolution adaptive parametrization of surfaces. *SIGGRAPH*, 1998.
- [71] E. LEE et H. KO. Vertex data compression for triangular meshes. Dans *In Proceedings of Pacific Graphics*, pages 225–234, 2000.
- [72] H. LEE, P. ALLIEZ, et M. DESBRUN. Angle-analyzer: A triangle-quad mesh codec, 2002.
- [73] M. LEVOY. The digital michelangelo project. Dans *Proceedings of the 2nd International Conference on 3D Digital Imaging and Modeling*, October 1999.
- [74] Jiankun LI, Jin LI, et C. C. Jay KUO. Progressive compression of 3d graphic models. Dans *International Conference on Multimedia Computing and Systems*, pages 135–142, 1997.
- [75] C. LOOP. Smooth subdivision surfaces based on triangles. Mémoire de D.E.A., University of Utah, Department of Mathematics, 1987.
- [76] S.M. LOPRESTO, K. RAMCHANDRAN, et M.T. ORCHARD. Image coding based on mixture modeling of wavelet coefficients and a fast estimation-quantization framework. Dans *Proceedings DCC'97 (IEEE Data Compression Conference)*, pages 221–226, 1997. Snowbird, Utah.
- [77] M. LOUNSBERY, T. DEROSE, et J. WARREN. Multiresolution analysis for surfaces of arbitrary topological type. *Transactions on Graphics* 16,1, 99, 1997.
- [78] M. LOUNSBERY, T. DEROSE, et J. WARREN. Multiresolution analysis for surfaces of arbitrary topological type. *Trans. on Graphics* 16,1, 99, 1999.
- [79] D. LUEBCKE et B. HALLE. Perceptually driven simplification for interactive rendering. Dans *Proceedings of the 12th Eurographics Workshop on Rendering Techniques*, 2001.
- [80] S. MALLAT. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7):674–693, Juillet 1989.

- [81] Yves MEYER. *Ondelettes et opérateurs. I.* Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics]. Hermann, Paris, 1990. Ondelettes. [Wavelets].
- [82] Sun MICROSYSTEMS. The java 3d api specification, version 1.2. Palo Alto, CA, USA. <http://java.sun.com/products/java-media/3D/>.
- [83] P. MOULIN. A multiscale relaxation algorithm for snr maximization in nonorthogonal subband coding. *IEEE Trans. on Image Processing*, 4(9), 1995.
- [84] J. NEIDER, T. DAVIS, et M. WOO. OpenGL programming guide. Addison-Wesley, 1993.
- [85] R. PAJAROLA et J. ROSSIGNAC. Compressed progressive meshes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 1(6):79–93, 2000.
- [86] C. PARISOT. *Allocations basées modèles et transformée en ondelettes au fil de l'eau pour le codage d'images et de vidéos.* Thèse de doctorat, Université de Nice-sophia Antipolis, 2003.
- [87] C. PARISOT, M. ANTONINI, et M. BARLAUD. High performance coding using a model-based bit allocation with ebcot. *Proceedings of EUSIPCO*, september 2002.
- [88] C. PARISOT, M. ANTONINI, et M. BARLAUD. 3D scan based wavelet transform and quality control for video coding. *EURASIP journal on Applied Signal Processing, Special issue on multimedia Signal Processing*, January 2003.
- [89] K. PARK et R. A. HADDAD. Modeling and optimal compensation of quantization in multidimensional m-band filter bank. Dans *Proc. IEEE Acoustics, Speech, and Signal Processing, Conf. ICASSP-94*, April 1994.
- [90] K. PARK et R. A. HADDAD. Modeling, analysis, and optimum design of quantized m-band filter banks. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 43(11), november 1995.
- [91] F. PAYAN et M. ANTONINI. 3D mesh wavelet coding using efficient model-based bit allocation. Dans *Proceedings of IEEE International Symposium on 3D Data Processing Visualization and Transmission (3DPVT)*, pages 391–394, Padova, Italy, june 2002.
- [92] F. PAYAN et M. ANTONINI. Multiresolution 3D mesh compression. Dans *Proceedings of IEEE International Conference in Image Processing (ICIP)*, Rochester, USA, september 2002.
- [93] F. PAYAN et M. ANTONINI. 3D multiresolution context-based coding for geometry compression. Dans *Proceedings of IEEE International Conference in Image Processing (ICIP)*, Barcelona, Spain, september 2003.
- [94] F. PAYAN et M. ANTONINI. Weighted bit allocation for multiresolution 3D mesh geometry compression. Dans *Proceedings of SPIE Visual Communications and Image Processing (VCIP) Conference*, Lugano, Switzerland, july 2003.
- [95] F. PAYAN et M. ANTONINI. Model-based bit allocation for normal mesh compression. Dans *Proceedings of IEEE international workshop on MultiMedia Signal Processing*, Siena, Italy, september 2004.
- [96] F. PAYAN et M. ANTONINI. An efficient bit allocation for compressing normal meshes with an error-driven quantization. *Computer Aided Geometric Design*, 2005. To appear in the special issue Geometric Mesh Processing.
- [97] J. RISSANEN et G.G. LANGDON. Arithmetic coding. *IBM J. Res. Devel.*, 23(2):149–162, Mars 1979.
- [98] J. ROSSIGNAC. Geometric simplification and compression. *SIGGRAPH 97*, 1997.
- [99] J. ROSSIGNAC. Edgebreaker: Connectivity compression for triangle meshes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 5(1):47–61, January-March 1999.

- [100] A. SAID et W.A. PEARLMAN. A new and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees. *IEEE Transactions on CSVT*, 6, june 1992.
- [101] L. SCARLATOS et T. PAVLIDIS. Hierarchical triangulation using cartographic coherence. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 2(54):147–161, March 1992.
- [102] P. SCHRÖDER et W. SWELDENS. Spherical wavelets: Efficiently representing functions on the sphere. *Proceedings of SIGGRAPH 95*, pages 161–172, 1995.
- [103] C.E. SHANNON. A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Tech. J.*, 27:379–423, 623–656, 1948.
- [104] J. SHAPIRO. Embedded image-coding using zerotrees of wavelet coefficients. *IEEE Transactions on Signal Processing* 41, 12:3445–3462, 1993.
- [105] J.Y. SIM, C.S. KIM, C.C. JAY KUO, et Sang-Uk LEE. Normal mesh compression based on rate-distortion optimization. Dans *Proceedings of the international Workshop on MultiMedia Signal Processing*, 2002.
- [106] Olga SORKINE, Daniel COHEN-OR, et Sivan TOLEDO. High-pass quantization for mesh encoding. Dans *Proceedings of the Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing*, pages 42–51. Eurographics Association, 2003.
- [107] W. SWELDENS. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 3(2):186–200, 1996.
- [108] Wim SWELDENS. The lifting scheme: A construction of second generation wavelets. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 29(2):511–546, 1998.
- [109] A. SZYMCZAK, D. KING, et J. ROSSIGNAC. An edgebreaker-based efficient compression scheme for regular meshes. *Computational Geometry*, 1-5(20):53–68, 2001.
- [110] A. SZYMCZAK, D. KING, et J. ROSSIGNAC. Piecewise regular meshes. *To appear in Graphical Models*, 2003.
- [111] .G. TAUBIN, A. GUÉZIEC, W. HORN, et F. LAZARUS. Progressive forest split compression. *Siggraph 98 Conference Proceedings*, pages 123–132, 1998.
- [112] G. TAUBIN et J. ROSSIGNAC. Geometric compression through topological surgery. *ACM Transactions on Graphics*, April 1998.
- [113] G. TAUBIN et J. ROSSIGNAC. 3D geometry compression. *Course notes of ACM SIGGRAPH'99*, (21), 1999.
- [114] G. TAUBIN, J. ROSSIGNAC, F. LAZARUS, et W. HORN. Geometry coding and vrml. *Proceedings of the IEEE Special Issue on Multimedia Signal Processing*, July 1998.
- [115] D. TAUBMAN. High performance scalable image compression with EBCOT. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(7):1151–1170, August 1999.
- [116] D. TAUBMAN, E. ORDENTLICH, M. WEINBERGER, et G. SEROUSSI. Embedded block coding in jpeg 2000. *Signal Processing: Image Communication*, 2002.
- [117] D.S. TAUBMAN et M. W. MARCELLIN. Jpeg2000: image compression fundamentals, standards and practice. *Kluwer Academic Publishers*, 2002.
- [118] C. TOUMA et C. GOTSMAN. Triangle mesh compression. *Graphics Interface'98*, pages 26–34, 1998.
- [119] B. USEVITCH. Optimal bit allocation for biorthogonal wavelet coding. *IEEE Data Compression Conference*, April 1996.
- [120] S. VALETTE, A. GOUAILLARD, et R. PROST. Compression of 3d triangular meshes with progressive precision. *Computer Graphics*, 28(1):35–42, Février 2004.
- [121] S. VALETTE, Y.S. KIM, H.Y. JUNG, I. MAGNIN, et R. PROST. A multiresolution wavelet scheme for irregularly subdivided 3D triangular mesh. *IEEE ICIP'99*, 1:171–174, October 1999.

- [122] S. VALETTE et R. PROST. Wavelet based multiresolution analysis of irregular surface meshes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 10(2), mars/avril 2004.
- [123] S. VALETTE et R. PROST. A wavelet-based progressive compression scheme for triangle meshes: Wavemesh. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 10(2), mars/avril 2004.
- [124] S. VALETTE, J. ROSSIGNAC, et R. PROST. An efficient subdivision inversion for wavemesh-based progressive compression of 3d triangle meshes. Dans *Proceedings of IEEE International Conference in Image Processing*, pages 777 – 780, 2003.
- [125] M. VETTERLI et C. HERLEY. Wavelet and filter banks: theory and design. *IEEE transactions on Acoustic Speech Signal Processing*, 40(9):2207–2232, 1992.
- [126] M. VETTERLI et J. KOVACEVIC. *Wavelets and Subband coding*. Prentice Hall PTR, Engelwood Cliffs, New Jersey 07632, 1995.
- [127] J. WERNECKE. The inventor mentor: Programming object-oriented 3d graphics with open inventor, release 2. Rapport technique, Addison Wesley, 1994.
- [128] J.W. WOODS et T. NAVEEN. A filter based bit allocation scheme for subband compression of hdtv. *IEEE Trans. Image Processing*, 1992.
- [129] J. ZIV et A. LEMPEL. A universal algorithm for sequential data compression. *IEEE Transactions on Information Theory*, 23(3):337–343, 1977.
- [130] D. ZORIN, P. SCHRODER, et W. SWELDENS. Interpolating subdivision for meshes with arbitrary topology. Dans *Proceedings of SIGGRAPH 96*, pages 189–192, 1996.
- [131] Denis ZORIN, Peter SCHRÖDER, et Wim SWELDENS. Interactive multiresolution mesh editing. *Computer Graphics*, 31(Annual Conference Series):259–268, 1997.



---

# Publications

## Publication internationale avec comité de lecture

- Frédéric PAYAN et Marc ANTONINI "An Efficient Bit Allocation for Compressing Normal Meshes with an Error-driven Quantization", *special issue Geometric Mesh Processing of Computer Aided Geometric Design*, Guest Editors: Craig Gotsman, Leif Kobbelt, Edition Elsevier, à paraître en 2005.

## Conférences internationales avec comité de lecture

- Frédéric PAYAN et Marc ANTONINI "Model-based bit allocation for normal mesh compression", *IEEE Workshop on MultiMedia Signal Processing (MMSP)*, Sienna (Italie), 29 septembre-1 octobre 2004.  
url = [www.i3s.unice.fr/~fpayan/Payan\\_MMSP2004.pdf](http://www.i3s.unice.fr/~fpayan/Payan_MMSP2004.pdf)
- Frédéric PAYAN et Marc ANTONINI "3D Multiresolution Context-based Coding for Geometry Compression", *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP) 2003*, Barcelone (Espagne), 14-17 septembre 2003.  
url = [www.i3s.unice.fr/~fpayan/Payan\\_ICIP2003.pdf](http://www.i3s.unice.fr/~fpayan/Payan_ICIP2003.pdf)
- Frédéric PAYAN et Marc ANTONINI "Weighted Bit Allocation for Multiresolution 3D Mesh Geometry Compression", *SPIE Visual Communications and Image Processing (VCIP) 2003*, Lugano (Suisse), 8-11 juillet 2003.  
url = [www.i3s.unice.fr/~fpayan/VCIP03\\_Article\\_final.pdf](http://www.i3s.unice.fr/~fpayan/VCIP03_Article_final.pdf)
- Frédéric PAYAN et Marc ANTONINI "Multiresolution 3D Mesh Compression", *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP) 2002*, Rochester (Etats-Unis), 22-25 septembre 2002.  
url = [http://www.i3s.unice.fr/~fpayan/Icip2002\\_Payan.pdf](http://www.i3s.unice.fr/~fpayan/Icip2002_Payan.pdf)
- Frédéric PAYAN et Marc ANTONINI "3D Mesh Wavelet Coding Using Efficient Model-based Bit Allocation", *IEEE 3D Data Processing Visualization Transmission (3DPVT) 2002*, Padoue (Italie), 19-21 juin 2002.  
url: [www.i3s.unice.fr/~fpayan/3DPVT2002\\_Payan.pdf](http://www.i3s.unice.fr/~fpayan/3DPVT2002_Payan.pdf).

## Conférences sans comité de lecture

- Frédéric PAYAN et Marc ANTONINI "A Wavelet Geometry Coder including Normal Field Control", *WORKSHOP on Geometry Compression*, Sophia Antipolis, 6-7

novembre 2003.

## Rapports de contrat et internes

- Frédéric PAYAN et Marc ANTONINI "Mean Square Error for Biorthogonal M-Channel Wavelet Coder", *Rapport de Recherche n° I3S/RR-2005-04-FR*, Laboratoire I3S, France, janvier 2005.  
url : [www.i3s.unice.fr/~mh/RR/2005/RR-05.04-F.PAYAN.pdf](http://www.i3s.unice.fr/~mh/RR/2005/RR-05.04-F.PAYAN.pdf)
- Frédéric PAYAN et Marc ANTONINI, Rapport de fin de contrat dans le cadre du RNTS PATHNET, octobre 2004.
- Alberto CASADO GONZALES, Frédéric PAYAN et Marc ANTONINI "Surface adapted bit allocation for multiresolution 3D meshes including control of quantization error polar angle", *Rapport de Recherche*, octobre 2003.
- Frédéric PAYAN et Marc ANTONINI "Présentation d'un nouveau format TPF pour la représentation d'objets tridimensionnels", rapport effectué pour l'entreprise Opteway en janvier 2003.
- Frédéric PAYAN et Marc ANTONINI "Multiresolution 3D Mesh Compression: présentation d'un codeur/décodeur de maillages triangulaires surfaciques", rapport effectué pour l'entreprise Opteway en juillet 2002.
- Frédéric PAYAN et Marc ANTONINI "Etat de l'art sur la représentation et les méthodes de compression d'objets 3D", rapport pour l'entreprise Opteway, partenaire cofinanceur de bourse régional en juillet 2001.





# OPTIMISATION DU COMPROMIS DÉBIT-DISTORSION POUR LA COMPRESSION GÉOMÉTRIQUE DE MAILLAGES SURFACIQUES TRIANGULAIRES

**Résumé :** les travaux développés dans cette thèse portent sur l'optimisation du compromis débit-distorsion pour des maillages triangulaires quantifiés par un codeur géométrique. De nombreux travaux considèrent que la *géométrie* est la composante la plus importante d'un maillage polygonal. Les codeurs issus de ces travaux appelés *codeurs géométriques*, incluent une étape de remaillage et une transformée en ondelettes qui permet une analyse multirésolution efficace. L'objectif de nos travaux est de proposer un codeur géométrique incluant une allocation binaire qui optimise la qualité visuelle du maillage reconstruit en fonction du débit. Le but de l'allocation est de minimiser la *distance surface-surface* entre le maillage d'entrée et le maillage quantifié en fonction d'un débit de consigne. Cette distance qui traduit la différence géométrique entre deux maillages demande un lourd processus d'un point de vue calculatoire. Utiliser une approximation de cette mesure comme critère de distorsion est donc préférable si l'on souhaite une allocation rapide. Nous avons alors montré que sous certaines hypothèses cette mesure pouvait être estimée par une somme pondérée des erreurs de quantification des coefficients d'ondelettes. De plus, les particularités statistiques des coefficients d'ondelettes géométriques permettent l'utilisation de modèles théoriques pour le débit et la distorsion des sous-bandes de coefficients. Finalement, nous proposons un codeur géométrique incluant une allocation rapide et performante qui optimise la quantification des coefficients pour que la qualité visuelle de l'objet reconstruit soit maximisée sous la contrainte d'un débit total fixé. Expérimentalement, l'algorithme proposé donne de meilleurs résultats que toutes les méthodes de l'état de l'art.

**Mots-clefs :** Compression géométrique, maillages triangulaires, transformée en ondelettes, allocation binaire, distance géométrique entre deux surfaces, remaillage.

---

## RATE-DISTORTION OPTIMIZATION FOR GEOMETRY COMPRESSION OF TRIANGULAR MESHES

**Abstract:** the context of this thesis is the rate-distortion optimization for triangular meshes quantized by a geometry coder. Some works consider that *geometry* is the most important component of polygonal meshes. *Geometry coders* include a remeshing technique and a wavelet transform providing an efficient multiresolution analysis. The goal of our works is to propose a geometry coder including a bit allocation process. This process would optimize the visual quality of reconstructed meshes for a specific bitrate. The bit allocation aims to minimize a *surface-to-surface distance* between the input mesh and the quantized one according to a target bitrate. This distance which captures the geometric differences between two surfaces is a computationally intensive process. An approximation is thus a good way to allow a fast allocation. Therefore we have shown that under some assumptions, this distance can be approximated by a weighted sum of quantization errors related to the wavelet coefficients. Moreover, the statistical properties of the wavelet coefficients allow to use theoretical models for the bitrate and the distortion. Finally, we propose an efficient geometry coder including a fast bit allocation optimizing the quantization of the coefficients. This allocation improves the visual quality of the reconstructed object according to a user-given bitrate. Experimentally, the proposed coder provides better results than state-of-the-art methods.

**Keywords:** geometry compression, triangular meshes, wavelet transform, bit allocation, geometric distance between surfaces, remeshing.