UNIVERSITÉ PARIS 7 – DENIS DIDEROT
ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES

REHSEIS – IMCCE

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Histoire des mathématiques

présentée par Anne ROBADEY

Différentes modalités de travail sur le général dans les recherches de Poincaré sur les systèmes dynamiques

Thèse dirigée par Karine CHEMLA
codirigée par Alain CHENCINER

soutenue le 3 janvier 2006 à l'Observatoire de Paris

Jury

Karine CHEMLA	*Directrice*
Alain CHENCINER	*Codirecteur*
Étienne GHYS	*Rapporteur*
Jesper LÜTZEN	*Rapporteur*
Jacques VIRBEL	
Jean-Christophe YOCCOZ	*Président du jury*

Remerciements

Je remercie d'abord de tout cœur Karine Chemla pour le travail accompli ensemble. Après avoir guidé mes premiers pas à la découverte de l'histoire des mathématiques, elle a accepté de diriger mon DEA puis ma thèse. Par ses relectures détaillées des états successifs de mes recherches, et par les discussions qui les ont suivies, elle m'a permis d'approfondir ma réflexion, et également de progresser sur le plan de la rédaction. Son enthousiasme pour le travail que j'ai mené sur les textes de Poincaré a plus d'une fois dépassé — et ravivé — le mien. Je reste impressionnée par son intérêt sans limites pour l'histoire des sciences à toutes les époques et sur tous les continents. Plus encore peut-être que par la culture encyclopédique qui en résulte, j'ai été très marquée par sa capacité à établir des liens entre divers champs de l'histoire des sciences, en repérant des enjeux méthodologiques, historiographiques ou épistémologiques communs.

Alain Chenciner, après avoir participé au jury de mon DEA, a accepté de codiriger cette thèse. Il a apporté le regard d'un mathématicien grand connaisseur de l'œuvre de Poincaré, et m'a aidée à éclaicir certains points techniques des textes sur lesquels je travaillais. Sa volonté de favoriser les occasions de discuter m'a valu un bureau à l'Observatoire, privilège considérable pour une doctorante en histoire des sciences. Qu'il soit remercié aussi bien pour le but visé par cette mesure — et largement atteint — que pour les moyens mis en œuvre !

Par l'intermédiaire de mes deux directeurs de thèse, j'ai eu la chance d'être accueillie très chaleureusement par deux équipes de recherche qui ont aiguisé ma curiosité en me mettant au contact de chercheurs aux centres d'intérêt très variés. Je ne me hasarderai pas à citer les noms de tous ces collègues, de peur d'en oublier, ni de ceux avec qui j'ai plus particulièrement discuté, parce qu'il est impossible de fixer une limite...

Dans l'équipe Astronomie et systèmes dynamiques de l'Institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides, j'ai pu suivre des développements actuels de questions qui intéressaient déjà Poincaré et sont au centre des textes de cet auteur sur lesquels j'ai travaillé : solutions périodiques du problème des n corps, stabilité. J'y ai trouvé au quotidien l'encouragement et l'émulation qu'apporte le voisinage d'autres chercheurs par rapport au travail solitaire chez soi. La cantine de l'Observatoire a par ailleurs été le cadre de discussions passionnantes. Je tiens à mentionner entre beaucoup d'autres des échanges sur l'enseignement des mathématiques, qui m'ont bien aidée dans mon travail de monitrice à l'UFR de mathématiques de Paris 7.

Autre lieu, autres mœurs : ce sont les restaurants chinois de la dalle des Olympiades qui ont accueilli les agapes en compagnie des collègues du laboratoire de Recherches épistémologiques et historiques sur les sciences exactes et les institutions scientifiques. J'y ai appris l'art des banquets chinois : discipline peu académique peut-être, mais fort conviviale. Les séminaires et réunions d'équipe m'ont également permis de rencontrer une équipe dynamique, riche des nombreuses facettes de l'histoire des sciences cultivées par les uns et les autres. Deux groupes de travail ont été particulièrement importants dans le cours de mes recherches. Je reviendrai plus loin sur ce que je dois au groupe « Histoire des sciences, histoire du texte » du point de vue scientifique. Ceux qui y ont participé savent le plaisir partagé que nous y avons pris : merci à tous, et tout spécialement à Jacques Virbel pour l'intérêt qu'il a porté à nos questions d'historiens des sciences. Le groupe de travail sur le thème de la généralité, constitué plus récemment, a été également le lieu d'échanges nombreux et passionnants touchant à la dimension plus philosophique de mes recherches.

Une mention spéciale pour quelques doctorants avec qui j'ai travaillé et échangé : Christine, Renaud, Igor, Frédéric, Martin.

Merci également aux historiens des maths avec lesquels j'ai eu l'occasion de discuter, à ceux qui m'ont aidée à rassembler les informations dont j'ai eu besoin, à ceux qui m'ont invitée à Oberwolfach et à Milton Keynes et à tous ceux que j'y ai rencontrés. Dans le désordre : Jeremy Gray, Philippe Nabonnand, June Barrow-Green, David Rowe, Tom Archibald, Laurent Rollet, Jean Mawhin... et tous les autres.

Je suis particulièrement reconnaissante à Jesper Lützen qui a accepté d'être l'un des rapporteurs de mon travail, et s'est déplacé depuis Copenhague pour faire partie du jury. Merci également à Bernard Bru qui a suivi avec beaucoup d'enthousiasme la partie de mes recherches touchant à l'histoire des probabilités, et qui m'a apporté une aide précieuse sur ce sujet.

L'intérêt des mathématiciens pour mes préoccupations plus historiques est très stimulant. Merci à Étienne Ghys pour son rapport préliminaire et merci à lui et Jean-Christophe Yoccoz pour leur participation au jury.

Je ne serais peut-être pas arrivée là sans la culture de liberté, de curiosité et d'exigence intellectuelle dans laquelle je suis tombée avec bonheur rue d'Ulm après mes années de prépa. Merci à tous les amis que j'ai rencontrés là, et à ceux que j'ai rencontrés ailleurs. Merci à ceux qui m'ont plus particulièrement accompagnée pendant mon travail de thèse : Hélène, Fabrice, mes parents, s. Marie et la communauté.

Un très grand merci à Michèle Wasse qui allie compétence, amabilité et dévouement pour aider les thésards à traverser les dédales administratifs de l'inscription et de la soutenance de thèse.

Je ne peux manquer d'évoquer ici un dernier personnage, Henri Poincaré. Son œuvre passionnante — dont je n'ai pourtant étudié qu'une petite partie — m'a tellement mobilisée que je n'ai pas eu le temps d'examiner en détail les écrits d'autres auteurs qui étaient pourtant bien présents à mon questionnement initial : Cantor, Borel et Baire en particulier. Faut-il l'en remercier ? Le lecteur sera juge...

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Problématique

> Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Cet énoncé du théorème de Pythagore est formé de deux parties : une hypothèse, et une conclusion qui en découle. De nombreux théorèmes sont construits de cette façon. Des hypothèses délimitent un ensemble de situations pour lesquelles une propriété est vérifiée. Cependant ces hypothèses peuvent être énoncées sous différentes formes, qui ne sont pas toujours interchangeables. Ainsi, on peut bien sûr affirmer :

> Si $a \neq 0$, alors l'équation $ax + b = 0$ admet une unique solution.

Mais on dira volontiers aussi :

> L'équation $ax + b = 0$ admet une unique solution, sauf si $a = 0$.

Au contraire, à moins d'un contexte très spécial, on trouvera incongru l'énoncé suivant :

> Dans le triangle ABC, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$, sauf si ABC n'est pas rectangle en A.

Il y a donc une différence entre les deux conditions « si $a \neq 0$ » et « si ABC est rectangle en A ».

Cette différence se manifeste également d'un point de vue historique. Le théorème de Pythagore a toujours été présenté comme exprimant une propriété des triangles rectangles. En revanche, on n'a pas toujours apporté le même soin à préciser les limites de validité des énoncés comme « l'équation $ax + b = 0$ admet une unique solution. »

À la vue de ces exemples simples, la différence entre les deux types d'hypothèses semble claire. Le cas où $a = 0$ est un *cas particulier*, une *exception* ; *en général*, l'équation $ax + b = 0$ admet une unique solution. Par contraste, le fait pour un triangle de ne pas être rectangle n'a rien d'exceptionnel, au contraire. Il est donc indispensable de préciser dans l'énoncé du théorème de Pythagore que le triangle doit être rectangle. Mais comment les mathématiciens ont-ils reconnu et caractérisé ce qui peut être désigné comme un cas particulier, une exception ? Pourquoi les exceptions sont-elles signalées dans certains textes, et passées sous silence dans d'autres ?

Ces questions sont au centre de mon travail de thèse. Avant de préciser la façon dont je les ai abordées, je voudrais donner un premier aperçu de la diversité de ce à quoi peut renvoyer l'expression *cas particulier*. Ceci me permettra d'introduire quelques éléments de terminologie qui me seront utiles par la suite. Je propose de distinguer, en première analyse, trois genres de *cas particuliers*.

L'équation $ax + b = 0$ fournit une illustration du premier genre : le cas où $a = 0$ apparaît comme une *exception* ; il met en défaut l'existence et l'unicité de la solution. On est donc amené à opposer deux cas pour la résolution de l'équation $ax+b = 0$. Le cas où $a \neq 0$ est « général », non pas au sens où il inclut toutes les situations, mais au sens où celles qui sont exclues sont exceptionnelles. Au contraire, $a = 0$ est un *cas particulier exceptionnel* : la conclusion générale ne s'y applique pas. En ce sens, un cas particulier est dit exceptionnel seulement en référence à un *cas général*, dont il est exclu. Ce *cas général* est supposé regrouper la plupart des cas, en un sens à préciser.

L'équation $5x + 3 = 0$, ou encore $5x + b = 0$, sont d'autres cas particuliers de l'équation générale $ax + b = 0$. Ces équations, qui admettent une unique solution, sont des instanciations du cas général où $a \neq 0$. Je parlerai de *cas particuliers génériques*.

Le théorème dit d'Al-Kashi va nous permettre d'identifier un troisième type de cas particulier. Le théorème peut s'énoncer de la façon suivante :

Dans un triangle ABC, on a $BC^2 = AB^2+AC^2-2AB.AC \cos\widehat{BAC}$.

Dans le cas particulier où l'angle $\widehat{BAC}$ est droit, on retrouve le théorème de Pythagore. Mais ce « cas particulier » n'est pas une exception au théorème d'Al-Kashi. C'est seulement un cas où le théorème d'Al-Kashi prend une forme remarquable. La formule du théorème de Pythagore est, de ce point de vue, « particulière » : elle n'est valable que lorsque le triangle est rectangle. La formule d'Al-Kashi, elle, est « générale » ou « universelle » au sens où elle est valide pour n'importe quel triangle. Je parlerai de *cas particulier remarquable* pour désigner le cas du triangle rectangle en référence à la formule d'Al-Kashi.

Ce problème permet également de voir que la notion de cas particulier est une notion relative. Si l'on s'intéresse seulement aux triangles rectangles, on peut par exemple remarquer que dans le cas particulier — remarquable — où le triangle est rectangle isocèle, on aura $BC^2 = 2AB^2$. Cette dernière formule est une forme particulière de celle de Pythagore. À l'opposé, la formule d'Al-Kashi peut être considérée comme un cas particulier de formule liant les longueurs des côtés et les angles d'un polygone.

Ce qu'on peut désigner comme « remarquable » dépend également fortement du contexte. On pourra trouver remarquable la formule qui lie les côtés des triangles dont l'angle au sommet vaut $60°$: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB.AC$, et pourquoi pas la formule $BC^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{\pi}{2}AB.AC$, valable lorsque l'angle au sommet vaut $\arccos(\frac{\pi}{4})$. Ce dernier cas n'a a priori rien de remarquable géométriquement, mais il est peut-être possible de le distinguer pour une autre raison. Ces quelques exemples laissent deviner que le qualificatif « remarquable » est relatif à un point de vue, à une propriété qui reste implicite. Par exemple, le théorème de Pythagore est remarquable parce qu'il peut être démontré en utilisant seulement des notions géométriques élémentaires : on le trouve ainsi dès le début du premier livre des *Éléments* d'Euclide. Celui d'Al-Kashi met en jeu des notions géométriques plus complexes. Les notions de cas particuliers exceptionnels et génériques sont également relatives, mais la propriété à laquelle on se réfère est plus explicite : c'est la propriété vérifiée dans le *cas général*, à laquelle satisfont les cas particuliers génériques et non les cas particuliers exceptionnels.

Je ne chercherai pas à définir plus précisément ces notions. Mon propos ici vise surtout à fixer quelques termes de vocabulaire que je réemploierai. Un des objectifs de ma thèse est de faire apparaître la multiplicité des usages des cas particuliers dans le travail du mathématicien. Nous verrons combien un même cas particulier peut prendre des visages différents suivant le point de vue.

Ce concept de « cas particulier » m'est apparu problématique alors que j'étudiais un mémoire de Poincaré, *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes*[1] [Poincaré 1905c]. Je vais présenter maintenant quelques éléments qui ont été à l'origine de mon travail et ont guidé le choix de mon corpus.

Poincaré énonce dans cet article que le nombre de géodésiques fermées sans point double sur une surface convexe est impair. Or il existe des surfaces convexes particulières pour lesquelles le résultat, formulé ainsi, n'est pas vrai. Poincaré envisage d'ailleurs une telle surface lorsqu'il étudie la sphère. Toutes les géodésiques sur la sphère sont fermées — ce sont les grands cercles, comme l'équateur. Les géodésiques fermées y sont donc en nombre infini. Dire que leur nombre est impair n'a en ce cas pas de sens, à moins d'adopter une convention spéciale, ce que Poincaré ne fait pas explicitement. De telles surfaces font exception au résultat de Poincaré, et mettent en défaut sa démonstration.

Le mathématicien qui reconnaît ce problème peut réagir de deux façons. La première est celle de Morse. Il analyse le travail de Poincaré dans son ouvrage *Calculus of variations in the large* [Morse 1934, p. 305]. La difficulté que je viens d'esquisser est la première qu'il souligne, et elle l'amène, avec d'autres problèmes, à porter un jugement sévère sur la démonstration de Poincaré. Il propose ensuite une autre voie pour aborder la question des géodésiques fermées sur les surfaces, et abandonne celle de Poincaré. La deuxième attitude consiste à reprendre la démarche de Poincaré pour la rendre rigoureuse. On peut ainsi montrer que le résultat, tel que Poincaré l'énonce, est vrai « génériquement », autrement dit « pour une surface convexe générique », ou encore « pour presque toute surface, au sens de la catégorie de Baire » (on en trouvera une démonstration dans l'annexe B.2). Autrement dit, les surfaces qui ne vérifient pas *stricto sensu* l'énoncé de Poincaré sont exceptionnelles dans un sens bien précis. Mais ce type d'énoncé, aujourd'hui courant, ne l'était pas du tout à l'époque où Poincaré écrivait.

Pour l'historien, la question intrigante est moins celle de la formulation correcte du résultat que la suivante : pourquoi Poincaré ne dit-il rien de ces surfaces particulières, alors qu'il étudie longuement les géodésiques de la sphère ?

Notons bien qu'il ne s'agit pas de demander si Poincaré avait compris que le nombre de géodésiques est fini et impair seulement pour les surfaces convexes génériques. D'abord cette question est beaucoup trop ambigüe pour pouvoir recevoir une réponse satisfaisante. Demande-t-on si Poincaré avait mis en place un formalisme qui lui permet de donner sens au terme « générique » et s'il avait démontré que ce formalisme s'applique au problème considéré ? Demande-t-on

[1] J'abrégerai dorénavant ce titre en *Sur les géodésiques*.

s'il avait vu que le résultat n'est pas toujours vrai et s'il avait remarqué les raisons qui nous font dire et nous permettent de montrer qu'il l'est « génériquement » ? Comment dans ce cas définissons-nous les « raisons qui nous font dire qu'il est vrai génériquement » ? Il y a plus. Interroger les textes de Poincaré de cette façon suppose que la réponse actuelle à la question des géodésiques des surfaces convexes[2] reçoit un statut particulier qui en fait le référent naturel pour juger du contenu des mémoires de Poincaré. Autrement dit, on évalue ce que fait Poincaré en le comparant à la théorie moderne supposée porter sur les mêmes objets.

Une telle approche manquerait d'historicité. De plus, elle serait réductrice, puisqu'elle conduirait à examiner le travail de Poincaré seulement du point de vue des exigences mathématiques actuelles. Or on peut développer un questionnement à mon sens bien plus fécond. Face au silence de Poincaré sur les surfaces particulières qui ne satisfont pas au résultat qu'il énonce, j'ai cherché à comprendre comment il travaille. Pourquoi étudie-t-il les géodésiques de la sphère et des surfaces proches ? Comment procède-t-il dans la partie où il semble négliger les surfaces exceptionnelles ? J'ai par ailleurs cherché à confronter cette démarche de Poincaré avec d'autres textes dans lesquels il oppose — explicitement, cette fois — des cas particuliers exceptionnels à un résultat général. Comment ces cas exceptionnels sont-ils distingués ? Quelle réflexion est menée sur leur caractère exceptionnel ? Quelle place leur est donnée ? Comment, inversement, ce qui est général est-il dégagé ? C'est ainsi que j'ai été amenée à étudier un chapitre de l'histoire du général et des cas particuliers en mathématiques, chapitre dans lequel l'étude des écrits de Poincaré m'est apparue féconde.

Pour aborder ces questions, il ne suffit pas de lire les textes mathématiques de façon à en extraire les résultats. Il est nécessaire de mettre en œuvre une lecture plus minutieuse, qui s'attache également à la façon dont résultats et démonstrations sont exposés : comment l'auteur les formule-t-il ? Quelle portée leur donne-t-il ? Quels rapports établit-il entre différents résultats ? Pour faire apparaître ainsi des modes d'énonciation qui témoignent d'un travail de l'auteur, j'ai construit un corpus d'une forme particulière. Autant qu'il était possible, j'ai rassemblé des textes dans lesquels Poincaré reprend une même question, énonce à nouveau un même théorème dans un cadre différent, applique une même méthode à un nouveau problème. De tels ensembles de textes autorisent des comparaisons très précises, et donnent ainsi une plus grande prise au type de questionnement qui est le mien.

Ce travail me permettra d'apporter des éléments de réponse à la question posée par l'absence de traitement explicite des surfaces exceptionnelles dans l'étude des géodésiques. Nous verrons que Poincaré met en œuvre dans son mémoire sur les géodésiques une méthode qu'il avait développée dans le cadre de la mécanique céleste pour étudier les trajectoires périodiques. Or, dans ces recherches, Poincaré distingue plusieurs cas. Certains sont regroupés pour établir un résultat général. Mais Poincaré explore également des cas particuliers dont il reconnaît et exploite le caractère exceptionnel. Ainsi l'étude des géodésiques

[2]Il est d'ailleurs loin d'être évident qu'il existe *une* réponse actuelle. On peut donner différentes formulations rigoureuses plus ou moins équivalentes d'un résultat proche de celui de Poincaré. Deux mathématiciens différents pourront s'entendre sur le fait que deux énoncés sont rigoureux, sans s'accorder sur la meilleure formulation, ni même sur celle qui correspond le plus au résultat et à la démarche de Poincaré.

s'appuie sur une réflexion antérieure à propos des propriétés qui sont vraies en général mais admettent des exceptions.

Plus largement, nous verrons que, pour les besoins de son travail, Poincaré élabore des modes d'énonciation spécifiques pour présenter des résultats qui sont généraux sans être universels. À côté du mémoire sur les géodésiques où il ne précise pas les limites de l'énoncé général, nous rencontrerons des textes où il explore de telles marges avant de dire qu'il les laisse de côté, et d'autres où il évalue leur taille sans les identifier. Nous verrons ainsi la diversité des approches possibles de l'opposition entre cas général et cas exceptionnels, et les réponses nouvelles apportées par Poincaré.

En étudiant les résultats et les textes qu'il produit à ces occasions, nous nous approcherons du mathématicien Poincaré et nous pourrons cerner des particularités de sa façon de travailler.

1.2 Un corpus en trois dossiers

L'œuvre mathématique de Poincaré est immense, et je n'ai pas essayé de relever tous les endroits où il étudie des cas particuliers, ni même tous les textes où il s'intéresse à un résultat qui souffre des exceptions. Outre le mémoire sur les géodésiques, j'ai choisi deux problèmes à propos desquels Poincaré élabore des outils pour comparer des cas et désigner certains comme exceptionnels : l'étude des points singuliers des équations différentielles, et le théorème de récurrence. À partir de ces trois pôles, j'ai constitué trois dossiers de textes, principalement de Poincaré, mais également d'auteurs auxquels il s'est référé de façon centrale. Ces trois dossiers sont bien sûr unis par la problématique de l'étude des cas particuliers, mais également par une grande homogénéité dans les sujets traités : l'étude des équations différentielles et la mécanique céleste. Il s'ensuit qu'ils se recoupent, et s'éclairent mutuellement, de façon à former un corpus très intéressant.

1.2.1 Un travail de hiérarchisation des cas : la classification des points singuliers des équations différentielles

Je me suis d'abord tournée vers des travaux de Poincaré sur les équations différentielles, en particulier le premier des mémoires *Sur les courbes définies par une équation différentielle*[3] [Poincaré 1881a]. Deux passages ont particulièrement retenu mon attention. Dans le premier, Poincaré établit une liste de « cas » qui donnent lieu à des points singuliers pour les équations différentielles. Cette liste est accompagnée de considérations sur la plus grande particularité de certains d'entre eux par contraste avec d'autres. Le deuxième passage se trouve dans le chapitre suivant. Poincaré y délimite un « cas général » — c'est son expression — à l'aide d'une série d'hypothèses. Ces hypothèses, dont il affirme qu'elles ne « nuisent pas à la généralité », lui permettent d'écarter certains des types de points singuliers précédemment répertoriés. On voit ainsi que Poincaré confronte différent cas, et qu'il évalue leur généralité relative. Mais ces traces

[3] J'abrégerai ce titre en *Sur les courbes.*

d'une réflexion sur les cas particuliers n'en livrent pas immédiatement la nature. Ce travail s'exprime sans être *thématisé* : Poincaré n'explicite pas ce qu'il entend par « cas général », « nuire à la généralité », ni ce qui permet de dire qu'un cas est « plus particulier » qu'un autre. Il ne définit pas, comme on le fait aujourd'hui, un concept mathématique propre à caractériser ce qui peut être dit « plus particulier » ni, *a contrario*, ce que l'on peut considérer comme vérifié « en général ».

Cette absence de thématisation met l'historien devant une question délicate : comment dégager le mode de travail qui mène Poincaré à ces conclusions, sans plaquer une interprétation anachronique ? Un examen détaillé du texte nous permettra de mettre à jour la technique de travail que Poincaré y met en œuvre et qui donne sens aux termes relevés ci-dessus. En effet, elle se traduit par une technique d'écriture spécifique. Plus qu'une simple liste de types de points singuliers, Poincaré construit une énumération fortement hiérarchisée. Il définit l'un après l'autre des cas de plus en plus particuliers. Seuls les premiers sont pris en compte dans le « cas général ». À travers l'étude des conditions par lesquelles il délimite ces cas, nous pourrons faire apparaître les critères qui ont pu lui permettre d'évaluer leur généralité.

Cette première analyse, interne, du texte de 1881, pose de nouvelles questions : ce travail de hiérarchisation est-il un travail ordinaire à l'époque, ou est-il caractéristique de Poincaré ? S'agit-il d'une innovation dans l'histoire des équations différentielles ? Pour y répondre, je me suis intéressée d'abord aux travaux sur lesquels Poincaré s'appuie dans son mémoire *Sur les courbes*. Il s'agit, d'une part, d'un mémoire de Briot et Bouquet [1856b] et, d'autre part, des premières recherches de Poincaré sur les équations différentielles : son tout premier article [Poincaré 1878] et sa thèse [Poincaré 1879]. Dans ces travaux, j'ai examiné les similarités et les différences dans la gestion d'ensembles de cas, ainsi que la terminologie employée pour caractériser ces cas. Je me suis par ailleurs tournée vers un ouvrage d'algèbre, [Serret 1866] pour éclairer une expression que Poincaré utilise à plusieurs reprises lorsqu'il justifie la hiérarchisation qu'il propose. Ces points de comparaison m'ont permis de caractériser plus précisément la démarche de Poincaré et d'en dégager les spécificités, en proposant des éléments de typologie de l'opposition entre ce qui est général et ce qui est particulier. Il apparaît que dès ses premiers travaux de 1878 et 1879, Poincaré commence à hiérarchiser systématiquement les cas qu'il distingue. Briot et Bouquet, de leur côté, organisaient leur travail suivant une autre problématique centrale.

Nous verrons enfin que les principales caractéristiques du travail de hiérarchisation des cas dans le mémoire *Sur les courbes* se retrouvent dans des travaux de mécanique céleste de Poincaré.

1.2.2 L'élaboration d'un énoncé qui porte sur le degré de généralité d'une propriété : autour du théorème de récurrence

On rencontre par ailleurs, dans les recherches de Poincaré en mécanique céleste, un mode de caractérisation de cas particuliers exceptionnels tout à fait différent. Poincaré l'élabore dans son travail sur le théorème aujourd'hui classiquement dénommé « théorème de récurrence »[4]. Pour certains systèmes d'équations différentielles, il montre l'existence de solutions (ou trajectoires) *récurrentes*[5] : pour toute région du domaine étudié, aussi petite soit-elle, il existe des trajectoires qui y reviennent une infinité de fois. Or Poincaré a également étudié des solutions qui n'ont pas cette propriété. Il existe donc des trajectoires récurrentes et d'autres qui ne le sont pas. Poincaré affirme que les premières sont plus générales. Mais dans quel sens ?

Il se trouve que Poincaré précise progressivement sa réponse à cette question au fil d'une série de textes. En étudiant le dossier ainsi composé, nous pourrons suivre la maturation de sa réflexion.

En 1890, dans le deuxième texte de la série, Poincaré ajoute un corollaire au théorème de récurrence. Il façonne un énoncé qui lui permet de donner un sens mathématique précis à la comparaison des degrés de généralité des deux types de trajectoires. Les trajectoires non récurrentes sont « exceptionnelles », et ce terme est défini à l'aide d'un concept forgé à partir de la théorie des probabilités : Poincaré signifie par là que la probabilité est nulle pour qu'une trajectoire prise au hasard ne soit pas récurrente. C'est à ma connaissance le premier énoncé d'une forme qui s'est aujourd'hui largement répandue dans de nombreux domaines des mathématiques. On y affirme qu'une propriété est vraie de « presque tous » les objets envisagés, en un sens précis mathématiquement. Plusieurs caractéristiques d'une telle proposition méritent d'être relevées. D'abord la propriété n'est pas nécessairement vérifiée par tous les objets, elle peut admettre des exceptions. De plus on introduit un outil mathématique pour quantifier ces exceptions et caractériser leur rareté. Enfin on ne cherche pas de critère permettant d'identifier les objets qui font exception. Le théorème de récurrence de Poincaré nous permet d'observer un des premiers cas de fabrication d'un tel énoncé.

Comme dans l'étude des points singuliers, il s'agit d'opposer des comportements exceptionnels à un phénomène général. Mais ici, la réflexion est thématisée : Poincaré indique en quoi les trajectoires non récurrentes sont exceptionnelles. De plus, il donne une démonstration de la propriété par laquelle il traduit cette caractérisation. Comment peut-on rendre compte de cette thématisation ? Pourquoi Poincaré en éprouve-t-il le besoin ? Comment est-elle rendue possible ?

Les circonstances de l'élaboration du corollaire sont tout à fait singulières, et bien documentées. Le texte de 1890 est en effet l'amendement d'un mémoire — dont il existe des copies — qui contenait une erreur importante. C'est précisément à l'occasion de la correction de ce mémoire que Poincaré ajoute le corollaire à l'aide duquel il exprime le caractère exceptionnel des trajectoires non récurrentes. En comparant les deux versions, nous avons accès au contexte dans lequel Poincaré introduit ce type d'énoncé. L'étude du rapport entre l'addition du corollaire et les autres modifications du mémoire permettra de dégager

[4]Poincaré ne lui donne pas lui-même ce nom. Le terme est introduit par Birkhoff pour désigner une propriété légèrement plus forte que celle étudiée par Poincaré (mais très proche). Le nom de « théorème de récurrence de Poincaré » est aujourd'hui classique pour parler du résultat qui nous intéresse. Il serait sans doute plus juste, historiquement, de parler d'un théorème de stabilité ; cependant, comme Poincaré utilise plusieurs notions de stabilité, on aurait une dénomination non seulement inhabituelle aujourd'hui, mais aussi un peu ambigüe. Je préfère donc employer le nom que l'usage a retenu.

[5]Poincaré les voit plutôt comme des trajectoires « stables », ou encore « stables au sens de Poisson ».

les motivations qui rendent nécessaire la réflexion de Poincaré sur la généralité des trajectoires récurrentes.

L'existence de plusieurs textes successifs — le mémoire de 1890 est suivi par deux résumés dans lesquels Poincaré prolonge sa réflexion — nous permettra également de mettre au jour le travail de Poincaré. Les améliorations progressives qu'il apporte nous font voir, en effet, les questions qui l'animent et sur lesquelles il concentre ses efforts. Nous verrons que ce travail porte sur la démonstration du résultat, bien sûr, mais également sur la formulation même de l'énoncé et les moyens qui sont mis en œuvre pour le formuler. En particulier, Poincaré fait évoluer le calcul des probabilités de façon à en faire un outil adapté au problème qu'il rencontre. Pour mettre en évidence cette part du travail de Poincaré, nous étudierons, en parallèle du dossier de textes constitué autour du théorème de récurrence, le cours de probabilités de Poincaré, donné en 1894 à la Sorbonne et publié en 1896. Nous le comparerons à l'ouvrage de Bertrand [1888] dont il s'inspire largement, tout en s'en démarquant, précisément sur des points liés aux recherches sur le théorème de récurrence.

1.2.3 Plusieurs modes d'articulation entre général et particulier : l'article sur les géodésiques

Dans les deux premiers dossiers, nous voyons Poincaré s'intéresser au degré de généralité des propriétés qu'il étudie. Il développe des moyens pour évaluer l'importance des exceptions et se concentrer sur ce qui est vrai « en général ». Dans l'article *Sur les géodésiques*, on retrouve cet intérêt pour ce qui se produit dans la plupart des cas. Mais il se conjugue à d'autres usages de cas particuliers.

Nous reviendrons plus en détail dans le corps du texte sur la construction de la démonstration par laquelle Poincaré établit l'imparité du nombre des géodésiques fermées sans point double sur une surface convexe. Très schématiquement, l'étude se déroule en deux temps. Poincaré envisage d'abord une très petite perturbation de la sphère, et montre que le nombre de géodésiques fermées sans point double qui subsistent au cours de cette déformation est impair. Il considère ensuite une déformation continue qui conduit d'une surface obtenue ainsi, dont les géodésiques fermées sans point double sont en nombre impair, jusqu'à une surface convexe quelconque. Au cours de la déformation, les géodésiques fermées apparaissent et disparaissent par couples, si bien que leur parité ne change pas. La surface convexe quelconque à laquelle on aboutit possède donc un nombre impair de géodésiques fermées sans point double. Tout au long de ce raisonnement, Poincaré laisse implicitement de côté certaines surfaces singulières, qui possèdent des familles infinies de géodésiques fermées sans point double. Pour éclairer l'attitude de Poincaré vis-à-vis de ces surfaces singulières, et saisir ce que recouvre son silence intriguant à leur sujet, nous verrons qu'il faut dégager le contexte dans lequel cette étude est menée. Ceci nous conduira à étudier les liens qu'elle entretient avec les travaux de Poincaré en mécanique céleste. Nous constaterons par ce biais que la méthode employée par Poincaré ici s'appuie sur une hiérarchisation des cas similaire à celle étudiée dans le premier dossier. Il s'intéresse donc de façon privilégiée à ce qui se passe dans l'essentiel des cas.

Mais il étudie par ailleurs, dans la première partie de sa démonstration, les géodésiques de la sphère et des surfaces obtenues par une toute petite perturbation. Or la sphère est une surface éminemment singulière, dont toutes les géodésiques sont fermées. Ce travail de Poincaré pose donc une deuxième question : à quoi sert l'étude de la sphère, et comment s'articule-t-elle au reste de l'analyse ? Il s'avère que c'est sur ce cas exceptionnel, pour lequel le théorème n'est pas valable, que Poincaré fait reposer le résultat général. Cette circonstance paradoxale fait apparaître la richesse des rapports que le mathématicien peut établir entre un cas particulier exceptionnel et ce qui se passe en général.

Elle conduit de plus à découvrir un nouveau niveau d'articulation entre particulier et général qui est à l'œuvre dans ce mémoire de Poincaré. Il apparaît en effet que Poincaré n'avait pas besoin de recourir à la déformation de la sphère pour montrer que les géodésiques sont en nombre impair — et il le savait. Pourquoi ce choix paradoxal de s'appuyer sur le cas exceptionnel de la sphère ? Il nous conduira à reconnaître que la portée de cette démonstration de Poincaré dépasse la seule question des géodésiques des surfaces convexes. Ce problème est exploité comme un *paradigme*[6], à l'aide duquel Poincaré développe une méthode plus générale. Il utilise ainsi un mode d'expression spécifique. Comment le lecteur peut-il reconnaître la portée des recherches présentées de cette façon ? Nous verrons qu'ici encore, l'identification des liens que cette démonstration entretient avec les travaux de mécanique céleste est un élément capital pour saisir toute l'ampleur que Poincaré lui donne.

La question qui se pose alors est de comprendre les raisons qui ont conduit Poincaré à opter pour ce mode d'écriture. Je montrerai que Poincaré l'exploite en articulant habilement les particularités du paradigme et la généralité de la méthode qu'il veut exposer. La fécondité qu'il donne ainsi à son choix d'exposition en révèle sans doute une motivation centrale.

Nous verrons ainsi que cohabitent dans ce mémoire deux attitudes en face des cas particuliers. La première consiste à reconnaître ce qui est exceptionnel pour se concentrer sur ce qui est général. Elle se manifeste dans le silence sur les surfaces singulières qui présentent des familles infinies de géodésiques, mais aussi dans le choix d'étudier la sphère pour montrer que les géodésiques sont en nombre impair sur les surfaces convexes. En effet, il existe un moyen plus simple, mais ce moyen ne pourrait pas être utilisé dans un problème plus général que celui des géodésiques. La deuxième attitude est l'étude du particulier pour en tirer des enseignements sur ce qui est général. L'utilisation d'un paradigme en est une expression. L'emploi du cas exceptionnel de la sphère pour fonder le résultat général en constitue une autre illustration, sur un plan différent.

1.3 Un outil de travail : l'analyse textuelle

Ces recherches m'ont conduite à examiner des textes mathématiques d'une façon spécifique. Ainsi, en m'intéressant au travail sur la généralité en mathématiques, et au traitement réservé aux cas particuliers, mon attention a été attirée par les indications données par Poincaré sur le caractère « exceptionnel » des trajectoires non récurrentes, dont il démontre qu'elles sont de « probabilité nulle ». Quel sens donne-t-il à ces expressions ? Quel travail a-t-il engagé pour obtenir

[6]Le terme de paradigme est employé ici non au sens de Kuhn, mais dans un sens inspiré des travaux des grammairiens. Ils présentent par exemple la conjugaison des verbes du premier groupe à l'aide du verbe « chanter ». Le « paradigme » est pour eux la suite des formes « je chante, tu chantes, ... ». Je désignerai plutôt ici par ce terme le verbe « chanter » lui-même, dans la fonction qu'il prend à cette occasion, où il *tient lieu* de n'importe quel autre verbe du premier groupe.

ces résultats ? Il s'agit de questions complexes, et une argumentation précise est nécessaire pour *établir* que l'introduction de cet énoncé se fait en plusieurs étapes au fil des mémoires successifs de Poincaré. Cette argumentation s'appuie naturellement sur une lecture mathématique, attachée aux résultats et aux raisonnements mis en œuvre. Mais cette lecture ne permet pas de faire apparaître toute la richesse du corpus que j'ai constitué. Il s'est avéré fructueux de la mettre en lien avec trois autres aspects. Il apparaît d'abord que Poincaré met en place des termes techniques, et les emploie d'une façon qui évolue dans le temps. Par ailleurs, les réécritures successives sont l'occasion de réorganisations du texte. La place du théorème de récurrence dans l'étude du problème des trois corps se modifie de façon corrélée avec l'élaboration du corollaire assurant que les trajectoires non récurrentes sont exceptionnelles. Enfin, les échos que l'on peut relever entre la terminologie employée dans ces travaux et celle qu'on trouve ensuite dans le cours de calcul des probabilités permettent d'établir une chronologie de la réflexion de Poincaré sur le calcul des probabilités et les évènements de probabilité nulle. Plus l'analyse de ces aspects et de leurs relations est précise, plus elle permet de faire apparaître de façon argumentée l'évolution diachronique, ainsi que les corrélations entre les transformations de différentes sortes.

Dans ce dossier, je considère le travail d'un auteur précisément pendant la phase de thématisation d'une notion. Dans le mémoire *Sur les courbes*, il s'agit de recherches non thématisées. Il m'a donc fallu d'abord établir que notre auteur développe une réflexion sur le degré de généralité de différentes circonstances possibles, puis l'étudier. De même, dans l'article *Sur les géodésiques*, Poincaré n'indique pas qu'il utilise un paradigme. Une lecture appropriée est requise pour montrer qu'il convient de lire ainsi le mémoire.

Ainsi, chacun à sa façon, les textes que j'ai rassemblés ne répondent pas explicitement aux questions que je veux leur adresser. S'ils permettent de les aborder malgré tout, c'est au prix d'un travail spécifique, qui exploite toutes leurs dimensions. J'ai été amenée en particulier à accorder une importance plus grande que d'ordinaire à des caractéristiques matérielles des textes. À la lecture d'un texte mathématique, nous sommes naturellement attentifs à comprendre les résultats exposés et à suivre les raisonnements. Mais les aspects textuels sur lesquels je voudrais attirer l'attention nous sont tellement familiers que nous ne les voyons souvent plus en eux-mêmes. Ce sont, de ce fait, les traces du travail de l'auteur que nous risquons le plus de manquer. Or leur étude s'est révélée très féconde pour mon propos. Cette part de mes recherches a particulièrement bénéficié du travail mené dans le cadre du séminaire *Histoire des sciences, histoire du texte* organisé par K. Chemla et J. Virbel. Nous nous y sommes familiarisés avec diverses théories linguistiques, et nous avons appris ensemble à examiner à l'aide de ces outils les textes scientifiques sur lesquels nous travaillons. Nous avons ainsi développé une sensibilité accrue aux caractéristiques matérielles de nos textes, tout en réfléchissant aux façons d'en tirer profit pour l'histoire des sciences.

Je souhaiterais examiner de plus près, selon trois grands axes, les traits des textes que j'ai été amenée à examiner.

1.3.1 Repérer l'élaboration d'une terminologie spécifique et la création d'un type d'énoncé

Un premier aspect des textes en tant que tels qui s'est révélé pertinent dans mon travail touche à l'utilisation du vocabulaire et de la langue. Pour l'historien, il pose un problème de repérage et d'interprétation.

Comment, par exemple, établir que Poincaré développe une réflexion sur le degré de généralité des différents cas qu'il considère dans son étude des points singuliers ? Un argument consiste à montrer que Poincaré élabore une terminologie technique, et que ceci différencie sa démarche de celle de ses prédécesseurs immédiats, Briot et Bouquet.

Cependant, mettre en évidence l'usage d'un vocabulaire spécial n'est pas aussi facile dans ce cas et dans l'énoncé du théorème de récurrence. Lorsqu'il introduit ce dernier théorème, Poincaré définit le terme « exceptionnel », et insiste sur le sens spécifique qu'il lui donne. On s'accorde alors à reconnaître l'introduction d'un vocabulaire technique. Mais il n'en va pas de même dans le mémoire *Sur les courbes*. Là, Poincaré ne fait aucun commentaire sur les termes qu'il emploie. Des indices peuvent cependant faire apparaître un usage particulier de certaines expressions. Ils permettent ainsi à l'historien de démontrer qu'il s'agit d'une terminologie spécifique, et de l'interpréter de façon rigoureuse.

Un premier critère est la récurrence du vocabulaire. En effet, lorsqu'il touche à un même ordre de phénomènes, un auteur peut choisir d'employer systématiquement un unique terme. Il peut également utiliser indifféremment les mots d'une collection de synonymes, par exemple « particulier », « exceptionnel », « rare », ou encore, en tournant la phrase autrement, « en général », « plus général », « le plus souvent ».

Mais ce critère ne suffit pas. La même expression employée à plusieurs reprises dans un même texte peut être simplement une expression courante, employée dans des contextes et avec des sens divers. C'est le cas de l'expression « en général » dans le mémoire de Briot et Bouquet [1856b]. Ils ne mettent aucun accent sur cette locution, qui apparaît comme une remarque accessoire. À l'inverse, l'expression « cas particulier » ou « plus particulier » n'apparaît pas un grand nombre de fois dans le mémoire de Poincaré *Sur les courbes*. Mais toutes les occurrences surviennent dans le même contexte. De plus elles sont accompagnées d'autres remarques qui en soulignent l'importance. Les mêmes termes sont repris par Poincaré dans des passages de ses travaux de mécanique céleste, où il met en œuvre la même forme de réflexion sur la généralité de plusieurs cas. Ces points permettent de reconnaître qu'il s'agit d'une terminologie spécifique chez Poincaré, et non chez Briot et Bouquet.

Cet exemple montre combien il est nécessaire d'*établir* s'il y a spécialisation du vocabulaire ou non, et plus largement d'étudier précisément la façon dont un auteur utilise un vocabulaire donné. Ce travail est rendu délicat dans les textes qui nous intéressent par le fait que les énoncés génériques, au sens des probabilités ou de la topologie, se sont largement répandus dans les mathématiques actuelles. Il en résulte que c'est souvent l'interprétation qui vient la première à l'esprit à la lecture, par exemple, de l'expression « en général ». Nous donnons alors à cette expression un sens précis et technique. Or elle peut aussi renvoyer à d'autres formes de généralité, comme nous le constaterons en étudiant le texte de Briot et Bouquet.

Ce que nous venons de voir à l'échelle des mots se retrouve à l'échelle des énoncés ; c'est un aspect de la dimension pragmatique du texte ou du discours. Un texte est inséparable d'une culture par référence à laquelle il fait sens. En mathématiques, les types d'énoncés que les mathématiciens utilisent habituellement à une époque ou dans un domaine donné forment une part importante du fond sur lequel un texte nouveau s'appuie. Ces types d'énoncés se sont constitués progressivement. Ainsi le travail mathématique ne donne pas seulement naissance à des résultats désincarnés, mais il comprend également l'élaboration de terminologies et de formes textuelles qui permettent d'énoncer ces résultats. L'historien doit prendre en compte cet aspect dans l'interprétation des textes pour plusieurs raisons.

D'abord il éclaire certaines spécificités des textes. Ainsi la tradition d'étude des trajectoires de la mécanique céleste à l'aide de développements en séries trigonométriques est encore très présente dans le travail de Poincaré, alors même qu'il emploie de nouvelles méthodes. Or la comparaison entre les résultats qu'il obtient et certaines caractéristiques de ces développements est un des points qui évoluent corrélativement aux réécritures du théorème de récurrence. Nous verrons qu'il est fructueux de prendre en compte cet aspect pour construire une interprétation argumentée de ces textes.

D'autre part, une lecture adaptée est nécessaire. Isoler un théorème de la tradition dans laquelle il a été énoncé et établi, c'est risquer d'en donner une interprétation anachronique. Le danger est grand de projeter une compréhension moderne des phénomènes étudiés sur un énoncé qui nous semble s'en rapprocher : c'est un phénomène semblable que j'ai décrit plus haut à propos de l'expression « en général ».

Enfin, ignorer le travail d'élaboration d'un type d'énoncé reviendrait à restreindre sans raison le champ de notre étude de l'activité mathématique. Or le cas du théorème de récurrence nous permet justement d'observer la création d'un nouveau type d'énoncé. Ce processus de création se laisse appréhender principalement au fil des changements de formulation dans les textes successifs, et ce sont donc ces modifications textuelles que je chercherai à dégager. Ceci me permettra de montrer comment elles s'articulent avec l'évolution du résultat mathématique démontré par Poincaré. Nous aurons ainsi un double éclairage, mathématique et textuel, du travail sous-jacent de notre auteur.

J'ai limité mon étude aux mémoires de Poincaré. Il serait intéressant d'observer de la même façon l'apparition des énoncés modernes correspondants, à savoir l'ensemble des énoncés faisant intervenir l'expression « presque tout X » ou une locution semblable. On peut aussi s'interroger sur la façon dont cette forme d'énoncé s'est répandue, les symbolismes graphiques qui ont été élaborés pour la traduire de façon encore plus compacte et précise, etc.

1.3.2 Organisation locale des textes

Un deuxième axe d'étude des textes s'est imposé à moi pour traiter certaines questions. On l'oublie facilement, tant on y est habitué : les textes mathématiques ne sont pas homogènes, ils sont constitués de passages contrastés. Chacun de ces passages contribue de façon spécifique à l'expression des résultats exposés. Un commentaire historique, une démonstration et un théorème ne sont pas à lire sur le même plan.

Ces différents passages des textes peuvent, ou non, être identifiés par leur mise en forme matérielle dans le texte. Ainsi certains paragraphes sont marqués par la typographie : italique, retrait, espacement avant et après, etc. Ils peuvent recevoir en outre une dénomination qui indique leur catégorie : lemme, théorème, corollaire, remarque, exemple, démonstration, etc. J'appellerai *rubriques* ces espèces particulières de titres. De tels indicateurs introduisent des relations, et parfois une hiérarchie, entre différents énoncés.

Mon étude du théorème de récurrence m'a conduite à noter l'importance de ces rubriques sous un premier rapport. Je me suis intéressée en effet à la place du théorème de récurrence dans les mémoires successifs sur le problème des trois corps, pour montrer qu'elle évolue de façon corrélative avec l'étude des trajectoires non récurrentes. La seule présence d'un énoncé dans un texte donné est, à cet égard, une information très insuffisante. Un résultat qui apparaît au détour d'une « remarque » ne peut pas être interprété comme s'il constituait l'unique « théorème » identifié comme tel dans le texte. Lorsque deux résultats sont tels que l'un permet de démontrer l'autre, leur relation peut elle aussi être présentée de diverses façons. Il n'est pas indifférent d'appeler l'un « lemme » et l'autre « théorème », ou de désigner le premier comme « théorème » et le deuxième comme « corollaire ». Ces indications donnent des renseignements précieux sur la façon dont l'auteur considère ces propriétés, la place qu'il donne à chacune, et les résultats qu'il place au centre de son travail.

En outre, la façon dont Poincaré utilise ces rubriques m'est apparue comme une des caractéristiques de sa façon de travailler. À ce titre, une catégorie de passages me semble particulièrement importante dans le corpus que j'ai étudié. Il s'agit de l'« interprétation géométrique ». Dans l'un des textes [Poincaré 1879], elle apparaît comme une rubrique au même titre que « remarque » ou « hypothèse ». Or il s'agit d'une rubrique très particulière : elle n'est pas purement fonctionnelle comme « théorème », « hypothèse », « remarque », ou « démonstration ». Ces dernières indications ne portent que sur la fonction du passage qu'ils désignent dans le texte, tandis qu'en intitulant une section du texte « interprétation géométrique », on indique également sa teneur. L'interprétation *géométrique*, de préférence à toute autre forme d'interprétation, semble ainsi occuper une place de choix dans ce mémoire de Poincaré. Or, s'il ne reprend pas systématiquement ce type de marques, on peut également identifier dans d'autres textes, en particulier le mémoire *Sur les géodésiques*, des passages d'interprétation géométrique. Nous verrons que cette caractéristique de l'organisation des textes renvoie à un mode de travail important chez le mathématicien Poincaré.

Je reviendrai par ailleurs en conclusion sur la façon dont Poincaré choisit les résultats qu'il intitule « théorèmes » : non les résultats les plus forts qu'il obtient, mais ceux qui sont le plus illustratifs de ce qu'il veut mettre en évidence. Sur ce point également, je montrerai qu'il s'agit d'un phénomène récurrent dans le corpus étudié, qui nous informe de la façon dont Poincaré travaille.

Une autre forme de structuration des textes s'est révélée capitale dans mes recherches, en particulier pour l'étude du mémoire *Sur les courbes* : la structure énumérative. C'est en effet sous la forme d'une énumération que Poincaré distingue différents cas dans son étude des points singuliers, et qu'il donne des indications sur leurs degrés de généralité respectifs. Comme il n'explicite pas les critères à l'aide desquels il évalue ainsi leur généralité, la seule ressource à notre disposition est le texte même dans lequel il énumère les différents cas. On pourrait désespérer d'arriver avec si peu de moyens à déceler les raisons qui pouvaient conduire Poincaré à affirmer qu'un cas est « plus particulier » qu'un autre. Mais le fait que ce passage soit très fortement structuré sous forme d'énumération donne accès à des informations précieuses sur sa démarche.

À première vue, une énumération semble être un objet simple : une liste d'items, éventuellement numérotés. De fait, les linguistes qui s'y sont intéressés se sont rendus compte de la diversité qu'on peut rencontrer en étudiant ce type de textes[7]. Ils ont relevé plusieurs éléments par lesquels des énumérations peuvent se distinguer, et qui constituent donc des caractéristiques importantes d'une énumération donnée. Certains m'ont été utiles pour étudier le texte de Poincaré.

Ainsi, le *classifieur* utilisé par Poincaré s'est révélé important. Par ce terme, les linguistes désignent la nature des objets énumérés : dans l'énumération qui nous intéresse, le classifieur est le cas, puisque Poincaré considère un premier cas, un deuxième cas, etc. Je montrerai qu'il n'est pas indifférent de recenser des « cas » plutôt que des « sortes » — ou genres, types, classes, etc. — de points singuliers : le classifieur employé par Poincaré souligne la démarche qui préside à l'énumération.

Nous verrons par ailleurs qu'elle s'organise en énumérations emboîtées. L'examen de la structure arborescente qui apparaît ainsi met en évidence une première forme de hiérarchisation entre les différents cas.

Plus largement, les linguistes ont observé que bien souvent les différents items d'une énumération ne sont pas — ou pas tous — traités de façon identique ou *parallèle* : soit au point de vue de leur syntaxe, soit au point de vue de leur disposition visuelle, soit encore au point de vue de leur contenu. Nous verrons que l'étude du parallélisme et des défauts de parallélisme entre les cas de même niveau dans l'arborescence fait ressortir certains éléments par lesquels les cas se différencient, corrélativement aux indications de généralité données par Poincaré. De la sorte, l'étude de la structure de l'énumération donne des indices précieux en vue de mettre au jour les critères utilisés par Poincaré pour déterminer le degré de généralité des différents cas.

Ces éléments textuels, considérés en lien avec la façon dont Poincaré analyse chaque cas, nous donneront ainsi accès au travail mathématique qui a présidé à l'élaboration de l'énumération.

1.3.3 Organisation globale

Les éléments de structuration des textes que je viens de présenter jouent essentiellement à l'échelle de petites portions de textes, en deçà du chapitre ou de la section. J'ai eu recours également, en particulier pour étudier la place du théorème de récurrence dans les mémoires de Poincaré, à l'examen de moyens de structuration assez similaires, mais à l'échelle de textes entiers, voire entre différents textes de notre auteur.

[7] Voir par exemple [Luc et al. 2000] et [Luc 2001].

Une première modalité selon laquelle des parties, éventuellement éloignées, d'un même mémoire se trouvent liées est le renvoi à des résultats établis précédemment. Le théorème de récurrence est-il employé pour démontrer d'autres résultats ? Est-il présenté comme conséquence d'un autre théorème ? L'étude de ces questions permet de mieux cerner les rôles différents que Poincaré assigne au théorème de récurrence dans les mémoires successifs où il l'énonce. Or la formulation de ce résultat se transforme de façon corrélée à l'évolution de la place que Poincaré lui donne. L'analyse de cette corrélation met au jour des motivations qui le conduisent à ajouter le corollaire selon lequel les trajectoires non récurrentes sont exceptionnelles.

Cependant, le repérage des liens établis avec d'autres résultats n'est qu'un premier pas. Lorsqu'un théorème n'est pas utilisé dans les pages qui suivent, sa présence peut indiquer que l'auteur lui a trouvé un intérêt propre. Mais le même résultat peut aussi être présenté plutôt comme une illustration de l'intérêt de la méthode qui sert à l'établir, ou de la puissance d'un autre résultat dont il est déduit. Inversement, un énoncé qui sert à la démonstration d'un autre peut être orienté vers ce deuxième résultat, et être ainsi moins valorisé pour lui-même. Ou il peut être suivi d'une série de conséquences qui montrent sa fécondité.

Il faut donc encore élucider la nature des rapports entre les résultats qui découlent l'un de l'autre. La formulation de ces liens est une première source d'indices que nous utiliserons dans ce but.

Nous examinerons également la structure proprement dite du texte. Par là en effet, l'auteur propose une organisation des résultats qu'il présente. Elle se manifeste en particulier dans le découpage en chapitres et en sections. Ainsi, le statut d'un énoncé peut changer suivant qu'il apparaît dans une partie de préliminaires ou dans la partie principale d'un mémoire.

Par ailleurs, l'auteur propose souvent dans l'introduction une lecture structurée du mémoire ou de ses parties. Ces indications peuvent compléter la structure offerte par le découpage en sections et par leurs titres. Un éclairage du même ordre se présente lorsqu'un mémoire, ou une partie, se termine par une reprise des résultats, une conclusion, etc. L'introduction, ou la conclusion peuvent de plus faire ressortir certains énoncés, les désigner comme éléments de réponse à une question donnée, et dégager des liens entre certains d'entre eux.

Cependant, l'organisation des résultats ainsi proposée ne se superpose pas toujours exactement à la structure matérielle du texte. Ainsi, dans un de ses mémoires, Poincaré met l'accent en introduction sur le théorème de récurrence, qui apparaît, de fait, seulement comme un résultat parmi d'autres dans une section de la partie préliminaire. Nous verrons que ce décalage témoigne d'un processus de réorganisation des résultats au cours duquel le théorème de récurrence change de place. Le mémoire étudié est publié alors que ce processus est tout juste engagé, sans avoir été mené jusqu'au bout.

De même que plus haut, ces phénomènes qui peuvent se produire à l'intérieur d'un mémoire se manifestent également entre divers textes de Poincaré. Ainsi, il avait l'habitude de soumettre les résultats de ses recherches d'abord sous forme d'une courte *Note*, sans démonstration, aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Souvent l'année suivante paraissait un mémoire reprenant le même problème de façon plus détaillée. Nous disposons alors de deux textes portant sur le même sujet, qui peuvent présenter des variations non seulement par la formulation des résultats, mais également par l'ordre dans lequel ils sont exposés, et par la place qui leur est donnée. Elles peuvent être mises au compte de l'évolution de la réflexion dans le laps de temps entre les deux publications. Mais elle peuvent également relever, comme les nuances entre introduction et corps du texte, d'un écart entre le chemin qui permet de démontrer un résultat, et la façon dont ce résultat est appréhendé, la place qui lui est donnée dans un édifice théorique. Nous en verrons un exemple en comparant le mémoire *Sur les courbes* et la *Note* qui l'a précédé.

Le dossier formé autour du théorème de récurrence contient deux résumés du mémoire principal, écrits à l'attention de publics moins spécialistes, dont les démonstrations sont absentes. Eux aussi proposent une organisation des résultats, que l'on peut comparer à celle du mémoire dont ils dérivent. Les transformations que l'on peut relever entre ces textes et le mémoire principal sont des éléments décisifs pour décrire précisément l'évolution de la réflexion de Poincaré sur le théorème de récurrence.

Un dernier texte, écrit par Poincaré en 1901, permet un travail de comparaison semblable. À la demande de Mittag-Leffler, l'éditeur de *Acta mathematica*, l'un des grands journaux mathématiques de l'époque, Poincaré y propose une analyse synthétique de toutes les recherches qu'il a publiées avant 1901. Ce texte donne donc à voir comment Poincaré envisage, quelques années plus tard, ce qu'il a écrit, comment il articule entre eux les différents mémoires qu'il a publiés, et comment il les répartit entre différents domaines. Nous y aurons recours en particulier dans le chapitre 2.

Ainsi, en cherchant à comprendre comment Poincaré distingue des cas particuliers, et comment il évalue leur degré de généralité, nous serons amenés à étudier sa façon de travailler comme mathématicien. Ceci passe par l'étude des textes qu'il a produits. Ils sont d'abord le support de communication des résultats obtenus par Poincaré. Mais ils constituent également, en tant que textes, des fruits de sa réflexion mathématique : on y trouve les formes d'expression que Poincaré a élaborées pour traduire ses recherches et en saisir les objets. Ils sont spécialement les traces de son travail visant à évaluer la généralité de différents cas, et à caractériser les cas particuliers exceptionnels.

Chapitre 2

Un travail sur le degré de généralité qui se révèle dans l'organisation des énumérations

Ce chapitre vise à dégager et à étudier une démarche qui émerge dans les premiers textes de Poincaré sur les équations différentielles. Au cours de ces recherches, Poincaré écarte des cas qu'il dit « plus particuliers », en argüant du fait qu'ils « ne se produisent pas si les polynômes [définissant l'équation différentielle étudiée] sont les plus généraux de leur degré ». Je me propose de montrer qu'on peut y lire la marque d'une réflexion menée sur le degré de généralité des phénomènes étudiés. Cette réflexion est associée à un choix délibéré de Poincaré d'étudier ce qui se passe dans *l'essentiel* des cas, plutôt que dans tous les cas. Nous verrons que cette orientation de son travail vers l'essentiel continue à se manifester dans ses travaux ultérieurs en mécanique céleste.

Cependant, dans ce mémoire, la réflexion de Poincaré sur la généralité n'est pas thématisée. Elle ne débouche pas sur la *définition* d'un degré de généralité, ni sur l'explicitation d'un *critère* qui permettrait de caractériser ce qui est plus général. Il s'agit plutôt d'une démarche qui procède en distinguant différents cas et en les explorant par ordre décroissant de généralité. De la sorte, les derniers cas envisagés sont reconnus comme très particuliers, et non essentiels à la compréhension du problème étudié. Cette technique de travail, dont je montrerai que Poincaré la mobilise de façon récurrente, se traduit par une technique d'écriture spécifique, et c'est par les traces qu'elle laisse ainsi dans les textes que nous pourrons l'étudier.

2.1 Textes et contexte

Poincaré inscrit ses travaux sur les équations différentielles dans la suite des travaux de Cauchy [1842a, b, c, d, 1843], ainsi que de Briot et Bouquet [1856].

Cauchy s'est attaché à démontrer l'existence de solutions analytiques pour les équations différentielles — ou les systèmes d'équations différentielles — de la forme[1] $\mathrm{D}_t x = X(x,t)$, où X est une fonction analytique de x et t [Cauchy 1842 c,d]. Il montre que si la valeur de la solution correspondant à une valeur t_0 fixée de la variable t est donnée, cette solution est déterminée par une série convergente au voisinage de t_0. Il applique ensuite la même méthode pour montrer l'existence des solutions d'équations aux dérivées partielles lorsqu'on fixe les conditions initiales [Cauchy 1842a, b, 1843].

Briot et Bouquet reprennent en 1856 ces recherches de Cauchy pour les prolonger. Je m'intéresserai surtout au deuxième de trois mémoires publiés ensemble.

Le premier, *Étude des fonctions d'une variable imaginaire*, sert d'introduction aux deux autres. Briot et Bouquet entendent y présenter les éléments fondamentaux de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Ils précisent en particulier les conditions pour qu'une fonction de variable complexe soit développable en série entière. Dans le troisième, *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques*, ils montrent qu'on peut, sous des hypothèses précises, exprimer la solution des équations différentielles d'une certaine classe à l'aide de fonctions connues, fractions rationnelles, fonctions monodromes[2] simplement ou doublement périodiques.

Dans le mémoire qui nous intéresse, le deuxième [Briot et Bouquet 1856b], les auteurs étudient les équations différentielles de la forme $\frac{du}{dz} = f(u,z)$. Ils commencent par donner une nouvelle démonstration, plus simple, du théorème de Cauchy : « si le coefficient différentiel $f(u,z)$ est une fonction finie, continue, monodrome et monogène[3] pour les valeurs de u et de z voisines de u_0 et de z_0, la fonction intégrale u [admettant la valeur u_0 pour $z = z_0$] est elle-même finie, continue, monodrome et monogène pour les valeurs de z voisines de z_0. »

Il s'intéressent ensuite à ce que devient une solution de l'équation différentielle au voisinage d'un point où la fonction $f(u,z)$ devient infinie, se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, ou cesse d'être monodrome. Autrement dit, ils étudient les solutions de l'équation différentielle au voisinage de points qu'on peut qualifier de « points singuliers », selon la terminologie qu'emploiera Poincaré.

Plusieurs textes de Poincaré seront utiles à mon analyse. Son tout premier article, [Poincaré 1878], vise à préciser les résultats obtenus par Briot et Bouquet dans le cas où le coefficient différentiel se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Il donne des développements en série de certaines solutions non holomorphes dont Briot et Bouquet avaient seulement montré l'existence.

L'année suivante, Poincaré soutient sa thèse devant un jury composé de Bouquet, Bonnet et Darboux, sous le titre : *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux dérivées partielles* [Poincaré 1879]. Il présente son

[1] $D_t x$ désigne la dérivée de x par rapport à t. Les deux variables x et t sont imaginaires.

[2] Les « fonctions » considérées à l'époque peuvent avoir plusieurs déterminations associées à la même valeur de la variable, ainsi par exemple $f(z) = \sqrt[n]{z}$. Une fonction de variable complexe est dite par Cauchy, et à sa suite par Briot et Bouquet, *monodrome* dans une certaine portion du plan complexe si elle prend toujours la même valeur au même point, quel que soit le chemin suivi pour y arriver sans sortir de la portion du plan considérée.

[3] Une fonction est dite *monogène* lorsqu'elle admet une dérivée dans $\mathbb{C}$. On dit aujourd'hui qu'elle est *holomorphe* (AR).

travail comme le pendant, pour les équations aux dérivées partielles, de l'étude menée par Briot et Bouquet pour les équations différentielles ordinaires : il s'agit, dans ce nouveau cadre, de considérer les cas où le théorème de Cauchy ne s'applique plus.

En 1880, Poincaré dépose à l'Académie des Sciences un mémoire *Sur les courbes définies par une équation différentielle.* Ce mémoire est annoncé par une *Note* aux CRAS [Poincaré 1880a]. Il est retiré de l'Académie sans que la commission désignée ait fait son rapport, et publié en deux parties dans le *Journal de Liouville* [Poincaré 1881a, 1882]. Deux parties supplémentaires sont ensuite publiées dans le même journal peu de temps après [Poincaré 1885, 1886]. Des résultats de ces deux dernières parties sont annoncés dans des notes aux CRAS en 1881, 1882 et 1884 (voir [Gilain 1977, p. 37 et 53]).

Je m'intéresserai surtout à la première partie du mémoire, composée des chapitres I à IV, et parue en 1881. Poincaré part du théorème de Cauchy et des résultats sur le comportement des solutions au voisinage de points singuliers obtenus par Briot, Bouquet, et par lui-même. Tous ces travaux étudient les fonctions définies par les équations différentielles principalement « *dans le voisinage d'un des points du plan* » [Poincaré 1881a, p. 3]. Poincaré se propose quant à lui de les étudier « *dans toute l'étendue du plan* ». Le changement de perspective signifié par « toute l'étendue du plan » est double. D'une part Poincaré s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle sur tout leur intervalle de définition, et non plus seulement au voisinage d'un point. D'autre part, il considère l'ensemble de toutes les solutions, plutôt qu'*une* solution définie par une condition initiale. Sur un autre plan, il s'intéresse aux solutions *réelles*, qui peuvent être représentées par des courbes, et en donne une étude qualitative. À partir de l'étude des solutions au voisinage des points singuliers, pour laquelle il mobilise les résultats de Briot et Bouquet d'une part, et de sa thèse d'autre part, il démontre une formule qui lie les nombres de points singuliers de différentes sortes. Il obtient ensuite des résultats sur les formes géométriques globales que peuvent avoir les courbes solutions.

Ces recherches menées par Cauchy, Briot et Bouquet et enfin Poincaré peuvent être étudiées selon divers angles.

La thèse de C. Gilain explore un premier aspect : le passage, avec les mémoires de Poincaré *Sur les courbes*, d'une problématique analytique et locale à une étude globale qui fait appel à la géométrie [Gilain 1977, p. 35, 115]. L'étude de ce changement de problématique, capital pour l'histoire de l'étude des équations différentielles, a conduit C. Gilain à mettre particulièrement en évidence la nouveauté du travail présenté à partir de 1880 dans la *Note* et le mémoire *Sur les courbes*. De ce point de vue, en revanche, l'article de 1878 ainsi que la thèse de 1879 relèvent encore de l'étude analytique et locale. Revenant sur ces textes en examinant la façon dont les auteurs travaillent vis-à-vis de la généralité, j'ai été conduite à proposer une périodisation différente. Par plusieurs traits en effet, les travaux de Poincaré se distinguent de ceux de ses prédécesseurs, dès 1878 et non pas seulement après 1880 dans le mémoire *Sur les courbes*.

Mon travail sera centré sur un deuxième aspect des recherches de Briot, Bouquet et Poincaré : le traitement des cas particuliers.

Avant d'entrer dans l'analyse de cette dimension, je voudrais dégager une caractéristique commune à ces travaux de nos quatre auteurs, quoiqu'elle se manifeste d'une façon un peu différente chez Poincaré. En effet, cette remarque me permettra de souligner un trait du travail de Poincaré dans le mémoire *Sur les courbes*, qui aura de l'importance pour mon analyse.

Tous les travaux que nous avons présentés relèvent de ce que C. Gilain appelle l'« étude générale des équations différentielles », à laquelle il restreint son analyse — j'en ferai autant. Cette démarche consiste à étudier directement sur l'équation les propriétés des solutions, plutôt qu'à tenter d'exprimer les solutions à l'aide de fonctions connues. Elle est exposée et motivée dès les premières lignes du mémoire de Briot et Bouquet[4] :

> Les cas où l'on peut intégrer une équation différentielle sont extrêmement rares et doivent être regardés comme des exceptions. Mais on peut considérer une équation différentielle comme définissant une fonction, et se proposer d'étudier les propriétés de cette fonction sur l'équation différentielle elle-même. [Briot et Bouquet 1856b, p.133]

Cette attitude s'inscrit dans la suite des recherches de Cauchy qui, lui-même, ne revendiquait pas cette approche comme originale :

> Depuis longtemps les géomètres, en supposant, sans le démontrer, que toute équation différentielle ou aux dérivées partielles admet une intégrale générale, ont regardé la formule de Taylor comme un moyen de développer cette intégrale comme une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières d'un accroissement i attribué à une variable indépendante t, qui peut être sensée représenter le temps. [Cauchy 1882–1974, s. 1, t. 6, p. 462]

Ici le développement en série est présenté comme un moyen d'étudier dans un même mouvement « toute équation différentielle », et non seulement celles qu'on sait intégrer par des expressions algébriques, ou à l'aide de quadratures. Cauchy s'attache à combler un défaut des recherches antérieures : on n'a pas démontré l'existence des solutions, mais on s'est contenté de chercher des développements en série des solutions supposées exister, sans toujours s'assurer de la convergence de ces séries. Cauchy démontre cette convergence à partir de l'équation différentielle elle-même, ce qui assure, d'après des travaux précédents, que les fonctions ainsi définies sont solutions.

Poincaré exprime au début de l'introduction du premier mémoire *Sur les courbes* le même intérêt pour l'étude générale des équations différentielles. Il en donne la même motivation que Briot et Bouquet :

> Malheureusement, il est évident que, dans la grande généralité des cas qui se présentent, on ne peut intégrer [les équations différentielles] à l'aide des fonctions déjà connues, par exemple à l'aide des fonctions définies par les quadratures. Si l'on voulait donc se restreindre aux cas que l'on peut étudier avec des intégrales définies ou indéfinies, le champ de nos recherches serait singulièrement diminué, et l'immense majorité des questions qui se présentent dans les applications demeureraient insolubles.

[4] Je m'intéresserai presque exclusivement dans tout mon travail au deuxième mémoire de ces auteurs, [Briot et Bouquet 1856b]. C'est donc de celui-là qu'il sera question en l'absence de précision supplémentaire.

> Il est donc nécessaire d'étudier les fonctions définies par des équations différentielles en elles-mêmes et sans chercher à les ramener à des fonctions plus simples. [Poincaré 1881a, p. 3]

Cette problématique de l'étude générale des équations différentielles, par opposition à la recherche de conditions sous lesquelles on peut intégrer ces équations, est donc motivée par une recherche de généralité commune à nos auteurs. Elle me paraît relever d'un mouvement qui reste à étudier en tant que tel dans l'histoire de l'analyse au XIX^{e} siècle[5]. Ce mouvement, illustré de façons diverses par Cauchy, Briot et Bouquet ainsi que Poincaré, semble par exemple partager de grandes similarités, du point de vue de la recherche de généralité, avec un tournant de l'étude des fonctions développables en série de Fourier. Riemann adopte dans son mémoire d'habilitation de 1854 un nouveau point de vue qui était esquissé à la fin d'un article de Dirichlet [1829]. Il le présente ainsi :

> Les travaux que nous avons signalés sur cette question avaient pour but de démontrer la série de Fourier pour les fonctions que l'on rencontre en Physique mathématique [...]. Dans notre problème, la seule condition que nous imposerons aux fonctions, c'est de pouvoir être représentées par une série trigonométrique ; nous chercherons donc les conditions nécessaires et suffisantes pour un tel mode de développement des fonctions. Tandis que les travaux antérieurs établissaient des propositions de ce genre : « si une fonction jouit de telle et telle propriété, elle peut être développée en série de Fourier », nous nous proposerons la question inverse : « si une fonction est développable en une série de Fourier, que résulte-t-il de là sur la marche de cette fonction, sur la variation de sa valeur, quand l'argument varie de manière continue ? » [Riemann 1854, p. 246–247][6]

Il s'agit donc pour Riemann d'étudier une fonction directement à partir de l'hypothèse qu'elle est développable en série de Fourier, bien qu'une telle définition ne consiste pas en une formule finie et explicite. De même l'étude générale des équations différentielles se propose d'examiner les fonctions définies par les équations différentielles directement à partir des équations, sans chercher à les exprimer sous une autre forme. Dans les deux cas, l'étude directe des fonctions à partir de la façon dont elles sont définies répond à une recherche de généralité. Riemann veut étudier *toutes* les fonctions qui peuvent être représentées par une série de Fourier, et pas seulement le développement en série de Fourier de certaines classes de fonctions. De même l'étude générale des équations différentielles vise à étudier les solutions de *toutes* les équations différentielles, sans se limiter aux équations dont les solutions sont exprimables sous une forme particulière.

Le cas des équations différentielles permet de mettre en évidence deux modalités possibles de cette recherche de généralité. La volonté de ne pas se borner aux équations exceptionnelles que l'on peut intégrer explicitement conduit Briot et Bouquet à étudier les équations différentielles sous une forme très générale, sans

[5] Un premier pas dans ce sens a été fait dans le cadre du séminaire organisé par l'équipe REHSEIS sur la généralité, avec, en particulier, un exposé de R. Chorlay.

[6] Cité par R. Chorlay.

hypothèses restrictives. Cauchy considère également « toute équation différentielle ou aux dérivées partielles ». C'est encore en termes d'absence de restriction que Riemann caractérise son approche dans la citation ci-dessus.

Poincaré commence, dans son mémoire *Sur les courbes*, par rappeler la même exigence : ne pas « se restreindre aux cas que l'on peut étudier avec des intégrales définies ou indéfinies ». Mais le programme de travail qu'il définit s'appuie plutôt sur une reformulation de cette exigence. Briot et Bouquet donnaient déjà cette deuxième formulation : « étudier les fonctions définies par les équations différentielles « en elles-mêmes » ». Mais ils ne la mettaient pas au centre de leur démarche. Ils étaient plutôt attentifs à écrire les équations sous la forme la plus générale possible pour éviter toute restriction inutile. Poincaré de son côté ne prétend pas étudier l'équation la plus générale, ni même une équation très générale. Il affirme au contraire : « je me suis restreint à un cas très particulier, celui qui se présente d'abord tout naturellement, c'est-à-dire l'étude des équations différentielles du premier ordre et du premier degré » [Poincaré 1881a, p. 5]. De fait, c'est déjà le cadre dans lequel travaillaient Cauchy, Briot et Bouquet ; mais ils ne le présentaient pas comme un cas très particulier. Poincaré restreint encore l'ensemble des équations qu'il considère : il s'intéresse aux courbes définies par une équation de la forme $\frac{dx}{\mathrm{X}} = \frac{dy}{Y}$ « où X et Y sont deux polynomes entiers en x et y » [Poincaré 1881a, p. 5]. Là où Cauchy, Briot et Bouquet faisaient seulement une hypothèse d'analyticité sur la fonction définissant l'équation différentielle, Poincaré se borne aux équations définies par deux polynômes.

Dans le mémoire *Sur les courbes*, cette restriction est exploitée de façon centrale par Poincaré. Elle lui permet en effet — nous y reviendrons bientôt — de travailler dans le plan projectif. Mais dès sa thèse, il formulait une hypothèse semblable, sans qu'elle soit rendue nécessaire par la démarche adoptée :

> Nous nous proposons d'étudier les propriétés d'une fonction z de n variables x_1, x_2, ..., x_n qui est liée à ses dérivées partielles du premier ordre, que nous appellerons
>
> $$p_1 = \frac{dz}{dx_1}, \qquad p_2 = \frac{dz}{dx_2}, \qquad \ldots, \qquad p_n = \frac{dz}{dx_n},$$
>
> par une relation de la forme
>
> $$\mathrm{F}(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0.$$
>
> Nous supposerons, pour simplifier, que F est un polynome entier par rapport à z, aux p et aux x. [Poincaré 1879, p. LXV]

Ainsi, dès ce moment, il s'écartait de la façon de travailler de ses prédécesseurs, et ne se souciait pas de travailler sur une équation aussi générale que possible.

Nous reviendrons sur ce choix de Poincaré de travailler avec des polynômes, plutôt qu'avec des fonctions analytiques par exemple. Cette remarque met en évidence deux façons de présenter l'étude générale des équations différentielles, ou plus largement l'étude d'un objet dans sa généralité. On peut travailler directement sur un objet aussi général que possible. Mais on peut également chercher à développer sur une classe d'objets éventuellement très restreinte une méthode d'étude — ici l'étude de la solution *sur l'équation différentielle elle-même* — appropriée à la généralité en vue. Nous retrouverons une démarche analogue dans le troisième chapitre de mon travail, à propos du mémoire *Sur les lignes géodésiques* [Poincaré 1905c].

2.2 La classification des points singuliers : un travail sur le degré de généralité des cas envisagés

Le mémoire *Sur les courbes* [Poincaré 1881a] vise donc à étudier les courbes définies par une équation différentielle de la forme $\frac{dx}{\mathrm{X}} = \frac{dy}{\mathrm{Y}}$, où X et Y sont des polynômes en x et y. Poincaré appelle ces courbes des « *caractéristiques* »[7]. Plutôt que de les étudier dans le plan (x, y), où l'étude des branches infinies peut introduire des difficultés, Poincaré les projette sur une sphère (voir figure 2.1) : à chaque point (x, y) du plan, il fait correspondre les deux points $(x, y, 1)$ et $(x, y, 2)$ en lesquels la droite passant par le point (x, y) et le centre de la sphère coupe cette dernière. Les points de l'équateur de la sphère correspondent aux points à l'infini du plan. Autrement dit, Poincaré étudie l'équation considérée dans le plan projectif, vu comme la sphère dont on identifie les points opposés. Le fait que l'équation soit définie par des polynômes permet, par un simple changement de coordonnées, d'étudier les *caractéristiques* au voisinage des points de l'équateur : l'équation dans les nouvelles coordonnées est de la même forme que l'équation initiale.

À plusieurs reprises, nous verrons Poincaré utiliser ainsi des concepts et des méthodes issus de la géométrie projective. Je ne chercherai pas à analyser ce phénomène. Il pourrait sans doute faire l'objet d'un travail spécifique, sur un corpus plus large que les seules recherches de Poincaré, pour étudier les modalités d'introduction de la géométrie projective dans le champ de l'analyse.

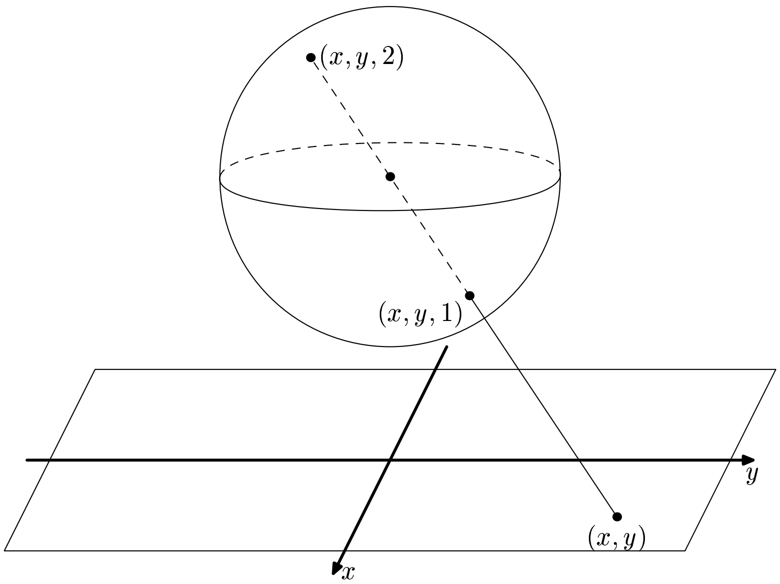

FIG. 2.1 – Projection du plan sur la sphère.

[7]Poincaré utilise l'italique seulement au moment où il introduit cette terminologie. Pour ma part, je conserverai l'italique aussi souvent qu'il permettra d'éviter au lecteur l'ambigüité entre le sens mathématique donné par Poincaré à ce terme, et le sens courant que j'utiliserai régulièrement dans le cours de mon analyse.

Le premier chapitre du mémoire est consacré à des définitions et à des propriétés générales des *caractéristiques* et des courbes tracées sur la sphère.

C'est au deuxième chapitre que nous allons nous intéresser maintenant en détail. On trouvera p. 99 un tableau récapitulant le contenu de ce chapitre. Poincaré y étudie les *caractéristiques* dans le voisinage d'un point de la sphère, en particulier au voisinage des points singuliers. Mon objectif est de montrer que la façon dont Poincaré dresse la liste des types de points singuliers reflète une réflexion sur le degré de généralité des cas qu'il est amené à distinguer. De plus, l'étude de la construction de cette liste permet de dégager des lignes directrices de cette réflexion, les moyens par lesquels Poincaré évalue le degré de généralité des différents cas. Comme je l'ai indiqué en introduction, il nous faudra pour cela examiner avec beaucoup de précision les différents éléments de structuration de cette liste. Ayant ainsi dégagé le mode de travail de Poincaré qui se laisse lire dans ce texte, nous pourrons examiner comment il s'appuie sur des recherches antérieures ou s'en distingue.

2.2.1 Le découpage du texte en sections

Le chapitre que nous avons en vue, intitulé « étude des caractéristiques dans le voisinage d'un point de la sphère », se compose d'une section d'introduction suivie de huit sections chacune munie d'un titre en italique :

Premier cas. — [...]
Deuxième cas. — [...]
Premier cas subordonné. — [...]
Deuxième cas subordonné. — [...]
Troisième cas subordonné. — [...]
Quatrième cas subordonné. — [...]
Cas particuliers laissés de côté. — [...]
Points situés sur l'équateur. — [...]

La liste de ces sections appelle plusieurs remarques.

Du point de vue de la mise en forme matérielle du texte, de la typographie[8], les huit sections se présentent de la même façon, au même niveau. En revanche, la teneur des titres fait apparaître une arborescence en au moins deux niveaux de profondeur : les « *cas subordonnés* » sont visiblement des subdivisions du « *Deuxième cas* ». Les six premières sections sont ainsi clairement positionnées par le texte de leur titre dans cette arborescence. Il n'en va pas de même des deux dernières. Il faut prendre en considération le contenu des sections pour reconnaître que la septième, *Cas particuliers laissés de côté*, se situe — du moins en première approximation, nous y reviendrons — au même niveau que les quatre qui la précèdent, c'est-à-dire à l'intérieur du *Deuxième cas*. La dernière section, quant à elle, fait pendant à une hypothèse formulée avant même la distinction entre le *premier* et le *deuxième cas*. Nous avons donc affaire en réalité à trois niveaux de hiérarchie :

[8] L'édition des Œuvres est fidèle sur ce point à la typographie du mémoire original. La seule différence réside dans le positionnement des sauts de page.

[Points non situés sur l'équateur]
    Premier cas. — [...]
    Deuxième cas. — [...]
        Premier cas subordonné. — [...]
        Deuxième cas subordonné. — [...]
        Troisième cas subordonné. — [...]
        Quatrième cas subordonné. — [...]
        Cas particuliers laissés de côté. — [...]
Points situés sur l'équateur. — [...]

Le niveau le plus extérieur, qui correspond en particulier à la dernière section, nous intéresse moins ici. On peut d'ailleurs remarquer que le titre de cette dernière section est un peu différent des autres : il renvoie à des « points » tandis que les autres sections annoncent des « cas ». Mathématiquement, Poincaré montre d'abord comment étudier les caractéristiques au voisinage d'un point non situé sur l'équateur. Il est conduit à distinguer plusieurs cas, présentés dans les sept premières sections. Dans la dernière section, il donne le changement de variables à effectuer pour ramener l'étude au voisinage d'un point sur l'équateur au problème précédent[9]. Il ne s'agit donc pas d'un « cas » différent, mais simplement d'une manipulation préliminaire qui conduit à la même liste de cas. Je laisserai de côté ce niveau de hiérarchie, et je ne m'intéresserai plus, dans la suite, qu'aux sept premières sections.

Cette élucidation de la hiérarchie des énumérations nous conduit directement à une deuxième remarque. Avant même d'entrer dans le détail mathématique du texte de Poincaré, nous voyons que l'énumération qu'il produit respecte d'abord un parallélisme parfait entre les items, mais que ce parallélisme disparaît à la fin de l'énumération. En particulier, les quatre premières subdivisions du *Deuxième cas* ont des titres tous formés de la même manière : un nombre cardinal et le classifieur[10] « cas subordonné ». Le titre de la dernière subdivision est tout à fait différent. Il reprend le classifieur « cas », mais au pluriel. Ainsi, les différents items, les différents cas subordonnés ne sont pas mis sur le même plan : après quatre cas subordonnés dont le traitement est, du moins si l'on en croit les titres de sections, similaire, un ensemble d'autres cas est regroupé et distingué par le qualificatif « particuliers ». Ce phénomène textuel, qui apparaît dès la simple observation des titres de sections, s'accompagne de plusieurs autres, comme nous le verrons bientôt. Ainsi Poincaré réserve un traitement spécifique aux derniers cas qu'il envisage. Ceci soulève deux ensembles de questions auxquelles nous chercherons à répondre. Le premier concerne son interprétation : en quoi ces cas sont-ils « particuliers » ? En quoi se distinguent-ils des autres ? Le deuxième renvoie au travail de Poincaré qui a produit cette énumération : comment et pourquoi est-il amené à souligner la particularité de ces cas ? Pourquoi les regrouper alors que les cas subordonnés étaient examinés un à un ?

Une dernière remarque se dégage de l'examen des titres de sections. Elle concerne le classifieur des deux énumérations emboîtées auxquelles nous nous intéressons. À première vue on pourrait penser que les titres que nous examinons

[9] Comme je l'ai indiqué en commençant, ceci est possible parce que l'équation est définie par deux polynômes.

[10] Voir p. 22.

— en réservant le septième — sont purement fonctionnels. Ils indiqueraient seulement la position dans l'arborescence, et pourraient être remplacés par une numérotation convenable : 1 – 2 – 2.1 – 2.2 – 2.3 – 2.4. Or il me semble que le terme « cas » qui apparaît dans ces titres n'est pas un mot vide de sens, exigé par la grammaire pour supporter les ordinaux « premier », « deuxième », etc. Il ne désigne pas non plus des sections du *texte*, mais renvoie à une réalité mathématique.

En effet, Poincaré renvoie à plusieurs reprises aux « cas » qu'il a étudiés, et il en fait ainsi des objets de son travail. À propos des points situés sur l'équateur, il écrit non pas qu'on est ramené à l'étude précédente, mais bien « aux cas étudiés dans le commencement du Chapitre ». Ailleurs, Poincaré affirme que « [le quatrième] cas est plus particulier que les précédents et [qu']il ne se présentera pas si X et Y sont *les polynomes les plus généraux de leur degré* » [Poincaré 1881a, p. 17][11]. Il entre ainsi dans des considérations d'ordre mathématique à propos de ce « cas ». Les différents « cas » ne sont donc pas de simples sections du texte : leur définition fait partie du travail mathématique par lequel Poincaré étudie les points singuliers.

L'importance à donner aux « cas » est renforcée par l'existence d'un autre classifieur qui joue un rôle différent : les « sortes » de points singuliers. Au milieu de la section sur les « *Cas particuliers laissés de côté* », Poincaré fait un bilan intermédiaire où il introduit la classe des « *points singuliers de première espèce* ». Je reviendrai plus loin sur cette classe ; je m'intéresse pour l'instant à ce qu'il dit de cette classe : « on a vu qu'il y a quatre sortes de pareils points : les nœuds, les cols, les foyers et les centres. » Or cette énumération ne correspond pas du tout aux sections de l'étude. Dans le premier cas subordonné, on obtient un noeud ; dans le deuxième, un col ; dans le troisième, un foyer ; dans le quatrième, un foyer ou un centre ; le premier des cas particuliers laissés de côté, quant à lui, donne un noeud. Ainsi, certaines « sortes » de points singuliers se rencontrent dans deux « cas » différents, et le quatrième « cas » conduit à deux « sortes » différentes. Il est donc nécessaire de distinguer les « cas » et les « sortes de points singuliers ». Qu'est-ce qui les oppose ? Les « sortes » forment le *résultat* de l'analyse : nous verrons que dans chaque section, Poincaré étudie d'abord le comportement des solutions. Il donne le nom de la sorte de point singulier à laquelle il a affaire seulement à la fin de l'étude, juste avant de donner un exemple illustratif. Les « cas », à l'inverse, *organisent* l'ensemble de l'étude, et corrélativement, ils apparaissent dans les titres des sections. Poincaré montre que pour étudier les caractéristiques au voisinage d'un point, on peut distinguer plusieurs « cas », à partir des données du problème. Dans chaque « cas », il propose un traitement approprié.

Or c'est essentiellement au niveau de la distinction des « cas » que s'exprime la réflexion de Poincaré sur le degré de particularité des phénomènes étudiés. Il parle de « cas particuliers » et de « cas plus particulier ». C'est d'abord d'un « cas » qu'il affirme qu'il ne se présente pas « si X et Y sont *les polynomes les plus généraux de leur degré* » [Poincaré 1881a, p. 17]. C'est donc le processus de distinction de ces cas et la façon dont ils sont étudiés qu'il nous faut analyser pour répondre aux questions posées ci-dessus et comprendre la nature de la particularité de certains cas, ainsi que la façon dont Poincaré l'exprime, l'établit

[11] Ici comme dans toute la suite sauf mention contraire, je conserve l'italique des auteurs cités.

et l'exploite.

2.2.2 Les points singuliers et les outils employés pour les classer

L'introduction du chapitre que nous étudions s'ouvre par une notice bibliographique où Poincaré inscrit ses travaux dans la suite de ceux de Cauchy [Cauchy 1842a, 1842c, 1842d, 1843] d'une part, de Briot et Bouquet [1856] d'autre part. Il renvoie également à ses travaux antérieurs [Poincaré 1878, 1879]. Nous reviendrons sur ces recherches de Cauchy, Briot et Bouquet, et Poincaré respectivement dans la partie 2.3. Nous pourrons ainsi comprendre comment le travail de hiérarchisation des cas que nous allons étudier maintenant s'articule avec les recherches des prédécesseurs de Poincaré, ainsi qu'avec ses premiers travaux sur les équations différentielles.

Après ces préliminaires, Poincaré suppose qu'on cherche à étudier les *caractéristiques* au voisinage d'un point de coordonnées (α, β), et il met en place les notations dont il se servira ensuite pour distinguer différents cas. Il introduit ainsi a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 et b_2 qui sont les coefficients des termes de degré 0 et 1 en x et y dans les polynômes X et Y développés autour du point (α, β) :

$$\mathrm{X} = a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(y-\beta) + \dots,$$

$$\mathrm{Y} = b_0 + b_1(x-\alpha) + b_2(y-\beta) + \dots.$$

Les notations étant ainsi précisées, le *premier cas* est déterminé par la condition que a_0 et b_0 ne sont pas nuls à la fois. C'est alors le théorème démontré par Cauchy [Cauchy 1842a] qui permet de conclure que par le point considéré passe une caractéristique et une seule. Le *deuxième cas* est également caractérisé par une condition sur les coefficients a_i et b_i : « $a_0 = b_0 = 0$. Mais a_1, a_2, b_1 et b_2 ne sont pas nuls à la fois. »

Ceci met déjà en évidence deux formes complémentaires de conditions. Les unes sont données par des égalités (le plus souvent, l'annulation d'un ou plusieurs paramètres), d'autres par des inégalités (non-nullité). Nous reviendrons sur cette différence.

Après avoir caractérisé le *deuxième cas*, Poincaré commente en disant que le point considéré est alors un « point singulier ordinaire », puis il énonce aussitôt un théorème démontré dans sa thèse. J'y renverrai dans la suite comme « théorème de Poincaré »[12]. Voici comment il le formule ici :

> *Si l'équation*
>
> $$(a_1-\lambda)(b_2-\lambda) - b_1 a_2 = 0 \tag{2.1}$$
>
> *a deux racines différentes,* λ_1 *et* λ_2 *;*
>
> *Si le rapport de ces racines est positif ou imaginaire, l'intégrale générale de l'équation*
>
> $$\frac{dx}{\mathrm{X}} = \frac{dy}{\mathrm{Y}}$$

[12] Poincaré indique dans sa thèse que l'énoncé lui a été suggéré par Darboux.

est de la forme

$$z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} = \text{const}.,$$

où z_1 *et* z_2 *sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de* $x-\alpha$, $y-\beta$ *et s'annulant pour*

$$x = \alpha, \qquad y = \beta.$$

[Poincaré 1881a, p. 14]

Dans cet énoncé, Poincaré oublie une hypothèse qui figurait dans sa thèse — et qui est nécessaire pour que le théorème soit valide. Il faudrait encore s'assurer que les racines λ_1 et λ_2 ne sont pas liées par une relation à coefficients entiers $p\lambda_1 + q\lambda_2 = 0$, dite aujourd'hui *résonance*. Je vais d'abord étudier ce que fait Poincaré sans tenir compte de cette hypothèse supplémentaire. Ceci nous donnera à voir comment Poincaré procède dans son analyse des points singuliers. Les conclusions auxquelles nous parviendrons permettront de rendre compte de façon très satisfaisante de l'oubli de la dernière hypothèse.

Nous voyons d'abord que les conditions sur les a_i et b_i grâce auxquelles Poincaré caractérise le premier et le deuxième cas sont immédiatement utilisées pour énoncer des théorèmes. En effet, c'est seulement lorsque a_0 ou b_0 est non nul qu'on peut appliquer le théorème de Cauchy. Les conditions sur les a_i et les b_i qui caractérisent le *deuxième cas* sont également liées par Poincaré à l'énoncé de son théorème. Aussitôt après les avoir traduites en disant que « le point (α, β) est alors un point singulier ordinaire », il présente son théorème comme « un théorème relatif à *ces* points singuliers » (je souligne).

De plus, ce théorème conduit directement à l'énumération des cas subordonnés. Ces derniers sont en effet distingués par la valeur réelle ou complexe des λ_i et par leurs signes, qui apparaissent dans l'énoncé du théorème pour en déterminer les conditions d'application[13] :

- Premier cas subordonné : λ_1 et λ_2 réels, de rapport positif.
  Le théorème de Poincaré s'applique.
- Deuxième cas subordonné : λ_1 et λ_2 réels, de rapport négatif.
  Le théorème de Poincaré ne s'applique pas, mais les travaux de Briot et Bouquet permettent de conclure.
- Troisième cas subordonné : λ_1 et λ_2 complexes, de rapport imaginaire.
  Le théorème de Poincaré s'applique.
- Quatrième cas subordonné : λ_1 et λ_2 complexes, de rapport -1.
  Le théorème de Poincaré ne s'applique pas.

Ainsi, l'organisation de la liste de cas formée par Poincaré repose sur les hypothèses des théorèmes qu'il va employer. Ceci s'accorde avec l'utilisation du classifieur « cas ». Il s'agit d'établir qu'un problème ne présente qu'un ensemble de cas et de les décrire en appliquant divers théorèmes suivant les données, plutôt que d'énumérer des résultats. Dit autrement, Poincaré ne cherche pas les conditions sous lesquelles on a tel type de point singulier, mais il examine ce qu'on peut dire du point singulier en fonction des paramètres significatifs, ceux qui apparaissent dans les hypothèses des théorèmes disponibles. Le texte que nous étudions s'apparente ainsi à une procédure à plusieurs alternatives plutôt qu'à une liste de conclusions.

[13] Voir le tableau récapitulant l'ensemble des cas distingués par Poincaré et les points principaux de leur étude p. 99.

On peut aller plus loin en remarquant que les différents théorèmes dont il est fait mention n'ont pas la même importance. Le théorème de Cauchy est rappelé pour traiter le *premier cas*, celui des points non singuliers. Ce *premier cas* est seulement rappelé au début, mais Poincaré ne s'y attarde pas, et passe tout de suite à la question des points singuliers. Il renvoie aux travaux de Briot et Bouquet là où il en a besoin, mais c'est très nettement le théorème de Poincaré qui est au cœur de la classification. C'est lui qui est énoncé en ouverture du *deuxième cas*, et après quelques considérations géométriques sur lesquelles nous reviendrons dans un instant, Poincaré conclut : « Maintenant nous pouvons diviser le deuxième cas en quatre cas subordonnés principaux. » C'est donc explicitement le théorème de Poincaré, ainsi que les considérations géométriques qui l'accompagnent, qui sert à la répartition des points singuliers en quatre cas subordonnés.

Même pour les deux cas subordonnés où le théorème de Poincaré ne s'applique pas — le deuxième et le quatrième —, notre auteur ne se contente pas de montrer comment on va conclure quant à l'allure des caractéristiques. Il commence par signaler que son théorème ne s'applique pas. De plus l'expression de l'intégrale sous la forme $z_1^{\lambda_1} z_2^{-\lambda_2} =$ const. donnée par ce théorème reste la forme privilégiée pour indiquer la forme des solutions, y compris dans les cas où le théorème ne s'applique pas. Ainsi lorsque Poincaré traite l'exemple de l'équation $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$ pour illustrer le *deuxième cas subordonné*, il écrit l'intégrale générale sous la forme $xy =$ const. Or cette écriture est très éloignée de la façon dont Briot et Bouquet travaillaient : ils auraient plutôt écrit l'équation $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, et l'intégrale générale $y = \frac{\text{const}}{x}$. On observe un phénomène semblable à propos du *quatrième cas subordonné*, dans lequel $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1$. Poincaré écrit qu'on obtient un *centre* « quand le théorème que nous énoncions au début est applicable, malgré la valeur négative de $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. » Ceci ne signifie pas que Poincaré a démontré ce théorème dans certains cas où le rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est négatif. Lorsqu'il écrit ici « le théorème est applicable », il indique que le résultat du théorème tient encore, quoique ce ne soit pas en vertu de la preuve du théorème : dans un système de coordonnées (z_1, z_2) convenable, l'intégrale générale de l'équation est de la forme $z_1^{\lambda_1} z_2^{-\lambda_2} =$ const, soit ici $z_1 z_2 =$ A. Cette formulation montre toutefois l'importance que joue l'énoncé du théorème dans la recherche de l'allure des caractéristiques : même lorsqu'il ne permet pas de conclure l'étude, il reste la référence quant à la forme sous laquelle on obtient les solutions.

Plus encore, dans une occurrence, Poincaré fait référence à son théorème par l'expression « le théorème général » (p. 16) plutôt que « le théorème que nous avons rappelé en commençant » (p. 14), « le théorème dont nous avons parlé » (p. 15), etc. Ceci montre l'importance que Poincaré donne à ce théorème et à la forme privilégiée sous laquelle il exprime l'intégrale de l'équation.

Si les cas subordonnés sont distingués par les signes des racines λ_1 et λ_2, comme nous l'avons vu, là n'est pourtant pas la première chose que Poincaré mentionne dans leur description. Les cas subordonnés sont d'abord caractérisés par des propriétés géométriques — même si Poincaré souligne qu'elles sont directement liées aux valeurs des λ_i. En langage moderne, les λ_i sont les valeurs propres de l'équation linéarisée au voisinage du point singulier (α, β) considéré ; mais c'est la condition correspondante sur les directions propres de cette équation que Poincaré donne en premier.

Poincaré fait ici encore appel à des concepts de géométrie projective pour faire apparaître ce que nous appelons directions propres, et qu'il nomme « droites doubles du faisceau homographique ». À une direction définie par son coefficient angulaire (coefficient directeur) μ, Poincaré associe la direction limite de la tangente aux caractéristiques lorsqu'on se rapproche du point singulier suivant la direction μ, donnée par la formule $\frac{b_1+b_2\mu}{a_1+a_2\mu}$. Autrement dit, il associe à une direction son image par l'application linéaire qui définit l'équation différentielle linéarisée. La formule ci-dessus étant celle d'une homographie, Poincaré conclut[14] :

> Donc la limite de la droite qui joint les points (x, y) et (α, β) et la limite de la tangente à la caractéristique au point (x, y) forment un faisceau homographique. [Poincaré 1881a, p. 14]

Ayant donné la formule de l'homographie, Poincaré en déduit l'équation des droites doubles : $\mu(a_1 + a_2\mu) = b_1 + b_2\mu$, où μ est le coefficient directeur. Cette équation admet deux racines μ_1 et μ_2 à propos desquelles Poincaré ajoute : « on calculera aisément λ_1 et λ_2 en fonctions rationnelles de a_1, a_2, b_1, b_2, μ_1 et μ_2. » Ceci fait apparaître le lien entre les racines λ_1 et λ_2 qui interviennent dans les hypothèses du théorème d'une part, et les droites doubles qui ont une signification géométrique d'autre part. Poincaré propose de déduire les λ_i des μ_i, et c'est effectivement dans cet ordre qu'il donne les caractérisations de chacun des cas subordonnés : la condition géométrique sur les droites doubles du faisceau homographique d'abord, la condition sur les λ_i ensuite. Ainsi pour le premier cas subordonné — les autres de présentent de la même façon :

> *Premier cas subordonné.* — Les droites doubles du faisceau homographique sont réelles, et deux droites conjuguées quelconques du faisceau sont ou toutes deux dans l'angle aigu formé par les deux droites doubles, ou toutes deux dans l'angle obtus.
>
> Dans ce cas, λ_1 et λ_2 sont réels et leur rapport est positif. [Poincaré 1881a, p. 14]

La caractérisation géométrique qui est ainsi mise en avant par Poincaré n'est pas une simple illustration, un commentaire surajouté. Elle fait partie des moyens mis en œuvre pour comprendre la forme des solutions de l'équation différentielle. Poincaré y fait appel directement dans son étude du quatrième cas subordonné, lorsqu'il remarque : « il est impossible qu'une branche de caractéristique vienne passer par le point (α, β), puisque sa tangente devrait être

[14]Chasles définit dans son *Traité de géométrie supérieure* les faisceaux homographiques : « Quand deux faisceaux dont les droites se correspondent une à une sont tels que quatre droites quelconques du premier aient leur rapport anharmonique égal à celui des quatre droites correspondantes du second, nous dirons que les deux faisceaux sont ***homographiques***. » [Chasles 1880, p. 64] Un cas particulier est celui où les deux faisceaux homographiques ont le même centre. Chasles montre qu'il existe alors deux droites particulières « dont chacune, considérée comme appartenant au premier faisceau, est elle-même son homologue dans le second ». Il les appelle « ***rayons doubles*** » [Chasles 1880, p. 115]. Le problème considéré par Poincaré appartient à ce cas particulier : les deux faisceaux sont composés des mêmes droites, ce qui conduit Poincaré à parler, au singulier, d'« un faisceau homographique » et des « droites doubles du faisceau homographique ». Le « faisceau homographique » de Poincaré associe donc à chaque droite passant par le point (α, β) une deuxième droite passant par le même point, de telle façon que quatre droites quelconques passant par (α, β) ont le même rapport anharmonique que les quatre droites qu'on leur associe. En termes modernes, il s'agit simplement d'une application linéaire. Poincaré parle ensuite de « deux droites conjuguées » pour désigner une droite et son image par l'application linéaire.

précisément l'une des droites doubles de l'involution qui sont imaginaires. » Les deux caractérisations, par les droites doubles du faisceau homographique et par les valeurs des λ_i, sont donc exploitées conjointement par Poincaré, sans que l'une des deux apparaisse comme subordonnée à l'autre. Les conditions sur les λ_i tirent leur importance du caractère central du théorème de Poincaré pour l'étude des cas subordonnés. Mais la mise en avant des conditions géométriques relève de la spécificité des mémoires de Poincaré *sur les courbes* étudiée par C. Gilain dans sa thèse : la démarche de Poincaré tranche avec celle de ses prédécesseurs par son choix affirmé d'étudier les « courbes » définies par des équations différentielles, plutôt que les « fonctions ».

Par ailleurs, lorsque Poincaré définit le faisceau homographique et ses droites doubles, il présente ces objets géométriques en les liant à la fois à l'allure géométrique des solutions et aux conditions analytiques d'application de son théorème. D'une part en effet, le faisceau homographique est défini à partir des tangentes aux courbes solutions près du point singulier. D'autre part, Poincaré indique le lien entre les solutions de l'équation donnant les droites doubles et les racines λ_i. C'est donc sans doute en tant qu'elle fournit un intermédiaire entre la géométrie des solutions et les conditions d'application du théorème que la caractérisation géométrique des différents cas subordonnés vient en premier dans la description des cas subordonnés.

2.2.3 Plusieurs modes de hiérarchisation

Du point de vue de l'arborescence logique, le *premier cas* et le *deuxième cas* apparaissent de même niveau. De même pour les quatre *cas subordonnés*. Mais le contenu des sections fait voir que ces différents cas, et encore plus les *cas particuliers laissés de côté*, ne sont pas traités de façon semblable.

Points singuliers

Poincaré n'insiste pas sur la différence entre le premier cas et le deuxième. Dans le texte de 1881, la seule gradation est dans le nom qu'il donne aux points correspondant au deuxième cas : « points singuliers ordinaires ». Le terme « singulier » est cependant explicite : le deuxième cas correspond à une situation singulière par rapport au premier. L'opposition est plus explicite encore dans le résumé publié l'année précédente aux *Comptes rendus* :

> On voit ainsi : 1° que, par tous les points de la sphère, sauf par certains points singuliers, passe une caractéristique et une seule ; 2° que, par certains points singuliers, passent deux caractéristiques ; 3° que, par d'autres points singuliers, passent une infinité de caractéristiques ; 4° enfin, qu'une troisième sorte de points singuliers est telle, que les caractéristiques voisines tournent comme des spirales autour de ces points sans qu'aucune d'elles aille y passer. J'appelle ces trois sortes de points singuliers les *cols*, les *nœuds* et les *foyers* de l'équation donnée. [Poincaré 1880a, p. 1]

Les trois sortes de points singuliers listés ici, nous l'établirons, correspondent aux trois premiers cas subordonnés. La numérotation les met sur le même plan que les points relevant du premier cas, mentionnés d'abord. Mais ils en sont distingués de plusieurs façons. Leur dénomination de points « singuliers » vient renforcer ce qui est déjà marqué dans la présentation du premier type de comportement : « par tous les points [...] sauf [...] ». Ce premier comportement n'est pas un parmi d'autres, c'est celui de « tous », avant que ne soient mentionnées des exceptions. On voit ainsi se superposer, aussi bien dans la *Note* que dans le *Mémoire*, une énumération qui met côte à côte le premier et le deuxième cas, et une gradation qui oppose les points « singuliers » aux autres.

Nous verrons qu'un phénomène semblable était déjà présent chez Briot et Bouquet. Mais ce qui est nouveau chez Poincaré, c'est qu'on le retrouve au niveau suivant, entre les points singuliers eux-mêmes. L'existence d'une gradation entre les différents types de points singuliers est déjà suggérée par l'expression « points singuliers ordinaires ». Si certains points singuliers peuvent être dits ordinaires, c'est que tous ne le sont pas : les points pour lesquels $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$ ne rentrent pas dans la catégorie des points singuliers ordinaires. Plus encore, nous allons voir que Poincaré relève des degrés de généralité différents parmi les points singuliers ordinaires eux-mêmes.

Cas plus particuliers, qui ne se présentent pas si X et Y sont les polynômes les plus généraux de leur degré

On voit apparaître une démarcation, au point de vue de la généralité, dès le quatrième cas subordonné. Les trois premiers cas subordonnés sont traités de façon tout à fait parallèle selon le schéma suivant :

- Énoncé d'une condition sur les droites doubles du faisceau homographique.
- Traduction en condition sur les valeurs de λ_1 et λ_2.
- Conséquence quant à l'applicabilité du théorème de Poincaré. Dans le premier et le troisième cas subordonnés, il s'applique et fournit la forme de l'intégrale générale de l'équation. Dans le deuxième, il ne s'applique pas et c'est le travail de Briot et Bouquet qui permet de déterminer la forme des solutions.
- Conclusion : allure des caractéristiques au voisinage du point considéré.
- Nom donné au point singulier obtenu.
- Exemple.

Le traitement du quatrième cas subordonné débute de façon semblable à celui des cas précédents : Poincaré en donne d'abord une caractérisation géométrique en termes des droites doubles du faisceau homographique, qui sont imaginaires et en involution. La condition analytique correspondante est que λ_1 et λ_2 sont imaginaires conjuguées, de rapport -1. De cette condition, Poincaré déduit — comme il l'avait fait dans le deuxième cas subordonné — que son théorème ne s'applique pas[15].

Ensuite, le parallélisme s'estompe. Plutôt que de chercher à résoudre complètement ce cas, Poincaré commence par le distinguer des cas précédents du point de vue du degré de généralité :

> Ce cas est plus particulier que les précédents et il ne se présentera pas si X et Y sont *les polynomes les plus généraux de leur degré*. Bornons-nous donc à quelques remarques. [Poincaré 1881a, p. 17][16]

[15]Précisément, il affirme : « Le théorème que nous avons rappelé au début n'est donc pas applicable en général ». J'ai indiqué p. 37 ce que Poincaré entend ici par les cas où le théorème sera applicable malgré la valeur négative du rapport de λ_1 et λ_2.

[16]L'usage de l'italique dans les citations est toujours conforme à celui des auteurs cités.

Trois points sont à relever dans cette citation. D'abord Poincaré note que ce cas est « plus particulier ». Il nous faudra élucider les éléments d'analyse qui le conduisent à cette remarque, ainsi que ce qu'il entend par « polynomes les plus généraux de leur degré ». Nous y reviendrons. Le deuxième point est la conséquence qu'il tire de cette remarque. Poincaré conclut en effet qu'il n'est pas nécessaire d'étudier en détail ce quatrième cas. Il énonce simplement les résultats dont il dispose : d'abord que, les droites doubles de l'involution étant imaginaires, aucune branche de caractéristique ne pourra passer par le point singulier considéré ; ensuite, que les caractéristiques au voisinage du point ne peuvent être que des spirales ou des cycles, si bien que le point singulier est soit un *foyer*, soit un *cycle*. Ces deux résultats ne sont pas obtenus par un raisonnement spécifique visant à étudier le quatrième cas subordonné. Le premier est commun avec le troisième cas subordonné et résulte de la condition que les droites doubles du faisceau homographique sont imaginaires. Le second est explicitement une anticipation sur les résultats qui seront démontrés plus loin dans le mémoire. Ainsi, Poincaré se contente de rappeler à cet endroit ce qu'il sait de ce quatrième cas subordonné, mais il ne cherche pas à préciser. Le troisième point qui me semble important dans ce passage est le lien logique établi par Poincaré entre les deux premiers points. Le choix de ne pas étudier spécifiquement le quatrième cas subordonné est expressément justifié par le fait que ce cas est « plus particulier » et « ne se présentera pas si X et Y sont *les polynomes les plus généraux de leur degré* ». Une telle remarque ne vient donc pas comme un commentaire, un élément d'information complémentaire sur les rapports entre les différentes sortes de points singuliers. Poincaré en fait un élément de hiérarchisation, qui légitime une démarche particulière dans l'étude des points singuliers : tous les cas n'ont pas la même importance et il faut savoir où faire porter les efforts d'élucidation plutôt que d'étudier au même titre tous les cas, y compris ceux qui sont très particuliers.

Nous avons donc observé trois phénomènes, liés, par lesquels le quatrième cas subordonné se distingue des trois premiers. D'abord Poincaré commente le degré de généralité de ce cas. Cette remarque le conduit ensuite à en donner un traitement différent, moins approfondi. Et ceci se traduit d'un point de vue textuel par un changement dans la construction de cette section. Ces trois éléments se retrouvent, encore accentués, dans la section suivante, sur les « cas particuliers laissés de côté ».

La rupture de parallélisme avec les sections précédentes est évidente dès le titre de la dernière section, qui ne désigne plus un cinquième « cas subordonné ». Les cas qui y sont envisagés sont d'emblée qualifiés de « particuliers ». Ils sont ensuite caractérisés seulement par les conditions sur les λ_i qui leur correspondent, et qui les rangent en deux classes : $\lambda_1 = \lambda_2$ d'une part, $\lambda_1 = 0$ d'autre part. La caractérisation géométrique a disparu. Enfin, dès les premières lignes de la section, Poincaré souligne, comme il l'avait fait pour le quatrième cas subordonné, que ces cas « ne se présenteront pas si X et Y sont *les polynomes les plus généraux de leur degré.* » [Poincaré 1881a, p. 18]

Nous voyons ainsi apparaître une première façon de distinguer différentes sortes de points singuliers : les trois premiers cas subordonnés regroupent les points singuliers qui se présentent de façon habituelle, tandis que le quatrième cas subordonné et les cas particuliers traités dans la dernière section ne se présentent pas si les polynômes sont « les plus généraux de leur degré ». C'est cette opposition qui est adoptée dans la note annonçant les résultat du mémoire *Sur les courbes*, publiée l'année précédente aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [Poincaré 1880a]. Comme le montre la citation reproduite p. 39, Poincaré ne mentionnait alors que trois sortes de points singuliers :

- ceux par lesquels passent deux caractéristiques, c'est-à-dire les *cols* obtenus dans le deuxième cas subordonné ;
- ceux par lesquels passent une infinité de caractéristiques, les *nœuds* du premier cas subordonné ;
- ceux autour desquels les caractéristiques tournent comme des spirales, les *foyers*.

On peut noter l'absence, dans cette liste, des *centres*, autour desquels les caractéristiques forment des courbes fermées concentriques, et qui apparaissent dans le quatrième cas subordonné. Cette circonstance montre que Poincaré ne considère dans cette énumération que les points singuliers relevant des trois premiers cas subordonnés. Les centres, et plus généralement tous les points singuliers relevant du quatrième cas subordonné ou des cas particuliers laissés de côté, sont évoqués seulement dans les trois dernières lignes de la *Note* :

> Les résultats qui sont rapportés dans ce résumé se rapportent au cas le plus général ; mais j'ai dû examiner, dans le Mémoire, différents cas exceptionnels, sans pouvoir pourtant envisager tous ceux qui se présentent. [Poincaré 1880a, p. 2]

La liste initiale, elle, les passe tout à fait sous silence. Se dégage ainsi une deuxième conséquence, dans la démarche de Poincaré, du caractère « exceptionnel » reconnu à ces types de points singuliers. Nous avons vu plus haut que Poincaré jugeait légitime de ne pas analyser en détail le quatrième cas subordonné, « plus particulier ». Nous voyons ici que le caractère exceptionnel de ces points justifie même de les ignorer, du moins dans un premier temps.

Cas particuliers laissés de côté

Nous venons de mettre en évidence une séparation entre les trois premiers cas subordonnés d'une part, le quatrième et les cas particuliers laissés de côté d'autres part. Poincaré introduit ensuite explicitement une dichotomie entre les « *points singuliers de première espèce* » et les « *points singuliers de seconde espèce* ». La frontière ainsi tracée passe à l'intérieur de la section sur les *cas particuliers laissés de côté.* Les « *points singuliers de première espèce* » regroupent en effet les quatre cas subordonnés et le cas où $\lambda_1 = \lambda_2$ qui ouvre la dernière section. Nous reviendrons bientôt sur cette division. Nous avons ainsi deux modes de regroupements des cas : la séparation entre les deux ensembles s'établit soit au niveau du quatrième cas subordonné, soit à l'intérieur de la dernière section :

<table>
<tr><td colspan="2">1^{er} cas subordonné</td><td rowspan="3"></td><td rowspan="5">points singuliers de première espèce</td></tr>
<tr><td colspan="2">2^e cas subordonné</td></tr>
<tr><td colspan="2">3^e cas subordonné</td></tr>
<tr><td colspan="2">4^e cas subordonné</td><td rowspan="3">ne se présentent pas si X et Y sont les plus généraux de leur degré</td></tr>
<tr><td rowspan="2">cas particuliers laissés de côté</td><td>$\lambda_1 = \lambda_2$</td></tr>
<tr><td>$\lambda_1 = 0$</td><td>points singuliers de seconde espèce</td></tr>
</table>

Cette analyse laisse inexpliqué un phénomène textuel pourtant net : la division en sections et les titres donnés à ces sections semble introduire un troisième mode de groupement, qui distingue les quatre cas subordonnés, d'une part, des *cas particuliers laissés de côté* $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\lambda_1 = 0$, d'autre part. Ce fait invite à examiner les éléments par lesquels le quatrième cas subordonné se rapproche des trois premiers et se distingue de ceux qui sont étudiés dans la dernière section. En effet, le parallélisme que nous avons déjà remarqué dans l'étude des trois premiers cas subordonnés ne disparaît pas d'un seul coup ; il s'estompe progressivement lorsqu'on arrive au quatrième cas subordonné puis aux cas particuliers laissés de côté. Les éléments qui disparaissent ou sont modifiés à chaque étape sont des indices précieux pour comprendre comment les différents cas étudiés sont ordonnés et hiérarchisés.

De fait, dès les premières lignes de la section sur les *cas particuliers laissés de côté*, on remarque une différence notoire avec les quatre cas subordonnés. La caractérisation des cas étudiés dans cette section est donnée immédiatement sous la forme de conditions sur les λ_i, sans référence au faisceau homographique et à ses droites doubles. De plus, Poincaré ne mentionne plus son théorème. Pour le cas $\lambda_1 = \lambda_2$, il renvoie directement à un résultat de Briot et Bouquet. Au contraire, dans le deuxième comme dans le quatrième cas subordonné, il commençait par signaler que son théorème ne s'appliquait pas avant de se tourner vers d'autres moyens d'investigation : les travaux de Briot et Bouquet pour le deuxième cas subordonné, des remarques basées sur la géométrie et sur ses résultats ultérieurs pour le quatrième. Enfin, il reformule la condition $\lambda_1 = \lambda_2$ en fonction des a_i et b_i seulement.

Les deux derniers points, l'absence de référence au théorème de Poincaré et la reformulation des conditions en fonction des a_i et b_i, sont manifestement liés. Nous avons vu en effet que Poincaré définit les λ_i dans l'énoncé de son théorème, au début du *deuxième cas*. La corrélation entre une moindre importance donnée aux paramètres λ_1 et λ_2 pour la caractérisation du cas, et l'absence de mention du théorème est donc assez naturelle. Les deux points semblent indiquer que ce théorème n'est plus perçu par Poincaré, lorsqu'il arrive aux *cas particuliers laissés de côté*, comme un élément organisateur central. Cependant, il est difficile de donner une interprétation solide selon laquelle le deuxième et le quatrième cas subordonnés seraient plus profondément liés au théorème que le premier des *cas particuliers laissés de côté*. Le théorème de Poincaré ne s'applique en effet dans aucun de ces cas. Au vu du seul mémoire *Sur les courbes*, on peut argüer que l'énoncé du théorème contient deux conditions, la première pouvant être vue comme un prérequis, tandis que la seconde est plus spécifiquement la condition de validité du résultat :

> *Si l'équation*
>
> $$(a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - b_1 a_2 = 0$$
>
> *a deux racines différentes,* λ_1 *et* λ_2 *;*
>
> *Si le rapport de ces racines est positif ou imaginaire, [...]*
>
> [Poincaré 1881a, p. 13]

La disposition du texte met en exergue la première condition, tandis que la condition sur le signe du rapport des racines ouvre le paragraphe qui énonce le résultat sur la forme de l'intégrale générale. De ce point de vue, les quatre cas subordonnés vérifient le prérequis de deux racines λ_1 et λ_2 distinctes. On peut alors poser la question de la satisfaction de la seconde hypothèse, sur le signe du rapport des racines, et distinguer ainsi les cas où le théorème s'applique — le premier et le troisième — de ceux où il ne s'applique pas — le deuxième et le quatrième. Au contraire, les *cas particuliers laissés de côté* ne satisfont pas au prérequis : dans le premier cas, $\lambda_1 = \lambda_2$, et dans le second, $\lambda_1 = 0$ ce qui ne permet pas de considérer le rapport des deux racines.

La faiblesse de cette interprétation réside dans le fait que les deux hypothèses que nous mettons sur des plans différents au vu de la présentation du texte de 1881 apparaissent de façon tout à fait parallèle dans la *Thèse* de Poincaré[17] d'où est tiré le théorème :

> *Hypothèse I* — L'équation (16) n'a pas de racines multiples.
>
> *Hypothèse II* — Si l'on représente les parties réelles et imaginaires des λ par les coordonnées de n points dans un plan, ces n points sont d'un même côté d'une certaine droite passant par l'origine.
>
> [Poincaré 1879, p. CVI]

Il n'est pas nécessaire d'entrer ici dans les détails de la formulation de 1879, où Poincaré traite le cas d'équations aux dérivées partielles complexes et à n variables. Il suffit d'indiquer que « l'équation (16) » correspond dans ce cadre à l'équation qui définit λ_1 et λ_2 dans le mémoire *Sur les courbes*, et la condition sur la position des points représentant les λ dans le plan se traduit par le fait que le rapport de λ_1 et λ_2 soit positif ou imaginaire.

Ainsi, le théorème, tel que Poincaré l'emprunte à sa thèse, ne permet pas de rendre compte de façon satisfaisante de la séparation entre les quatre cas subordonnés et les cas particuliers laissés de côté. En revanche, il me semble que la caractérisation par le faisceau homographique associée par Poincaré, en 1881, à l'énoncé de son théorème fait apparaître un élément discriminant entre ces deux ensembles de cas.

Lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$, en effet, le « faisceau homographique », autrement dit l'application linéaire obtenue en linéarisant l'équation différentielle, n'a plus *deux* droites doubles, ou directions propres. Selon les cas, soit elle en possède une seule, soit elle laisse toutes les droites invariantes. Lorsque $\lambda_1 = 0$ d'autre part, toutes les droites ont la même image par l'application linéaire, ce qui signifie qu'on n'a plus de faisceau homographique. En effet, si les images de quatre droites données sont toutes identiques, leur rapport anharmonique n'est pas défini, et il n'est donc pas égal, *a fortiori*, à celui des droites de départ. L'équation des droites doubles telle que l'écrit Poincaré admet une unique solution : l'unique droite qui est image de toutes les droites est naturellement sa propre image, ce qui rapproche le cas $\lambda_1 = 0$ de celui où $\lambda_1 = \lambda_2$. Dans tous les *cas particuliers laissés de côté*, on peut donc relever une dégénérescence du « faisceau homographique » qui servait à Poincaré à caractériser les quatre cas subordonnés. Corrélativement, ces considérations géométriques disparaissent dans cette dernière section. Cette remarque fournit une interprétation possible de l'opposition entre les quatre *cas subordonnés* et les *cas particuliers laissés de côté*, ainsi que du regroupement des cas $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\lambda_1 = 0$ dans la dernière section.

[17] Comme je l'ai déjà indiqué, Poincaré mentionne dans sa *Thèse* une troisième hypothèse qu'il semble oublier en 1881.

Cette hypothèse est renforcée par le fait que la caractérisation géométrique vient en tête de chacun des cas subordonnés. De plus, Poincaré la présentait juste avant l'annonce de ces quatre cas : « Maintenant on peut diviser le deuxième cas en quatre cas subordonnés principaux. » La description du faisceau homographique n'apparaît donc pas seulement comme une illustration des conditions analytiques par lesquelles Poincaré distingue différents cas. Elle joue un rôle capital pour identifier la dégénérescence[18] des *cas particuliers laissés de côté*. Elle est ainsi utilisée pour hiérarchiser les cas que l'analyse conduit à distinguer.

Points singuliers de première et de seconde espèce

Après l'étude du cas $\lambda_1 = \lambda_2$, et avant d'examiner les cas où $\lambda_1 = 0$, Poincaré s'interrompt pour récapituler les résultats obtenus jusque là, et introduire une nouvelle façon de grouper les points singuliers :

> Les cinq cas précédents comprennent tous les points singuliers α, β, tels que les deux courbes
>
> $$\mathrm{X} = 0, \qquad \mathrm{Y} = 0$$
>
> s'y coupent en un seul point et non en plusieurs points confondus. Ces points singuliers s'appelleront *points singuliers de première espèce*, et l'on a vu qu'il y avait quatre sortes de pareils points : les nœuds, les cols, les foyers et les centres. [Poincaré 1881a, p. 18]

Les cinq cas mentionnés ici sont les quatre cas subordonnés traités dans les sections précédentes, auxquels s'ajoute le cas $\lambda_1 = \lambda_2$. Le point singulier est un nœud dans le premier cas subordonné, un col dans le deuxième cas subordonné, un foyer dans le troisième, un foyer ou un centre dans le quatrième, et un nœud lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$. Comme nous l'avons vu plus haut (p. 34), cette liste est une synthèse des résultats obtenus, qui ne suit pas l'organisation de l'étude en « cas ».

Elle attire par ailleurs l'attention sur une différence importante entre les points singuliers de première espèce, et ceux de seconde espèce. Poincaré élucide l'allure géométrique des *caractéristiques* au voisinage des points singuliers de première espèce dans tous les cas — quoique de façon moins précise dans les deux derniers cas —, et il associe des noms à ces différents comportements. Pour les points singuliers de seconde espèce, il ne donne aucune indication sur la forme des *caractéristiques*.

Il se contente d'affirmer « qu'ils pourront toujours être considérés comme la limite d'un système de plusieurs points singuliers de première espèce confondus ensemble. » [Poincaré 1881a, p. 19] Poincaré justifie cette affirmation à l'aide d'une nouvelle forme d'interprétation géométrique : la géométrie des courbes $\mathrm{X} = 0$ et $\mathrm{Y} = 0$. Les considérations sur le faisceau homographique en un point singulier étaient directement liées à l'allure des *caractéristiques* au voisinage de ce point. Poincaré notait par exemple qu'il ne peut exister de solution passant par le point singulier que si le faisceau homographique présente une droite double réelle, qui sera la tangente à la courbe solution. La considération des courbes

[18] Ce terme n'est pas beaucoup employé par Poincaré, mais il n'est pas absent de son vocabulaire. On le trouve par exemple dans ses travaux sur le problème des trois corps [Poincaré 1890, p. 360 et 363].

algébriques $\mathrm{X} = 0$ et $\mathrm{Y} = 0$ s'écarte des propriétés géométriques des *caractéristiques*. Mais cette nouvelle interprétation géométrique va guider la distinction de plusieurs cas parmi les points singuliers de seconde espèce.

Après avoir clos avec le cas $\lambda_1 = \lambda_2$ l'étude des points singuliers de première espèce, Poincaré déploie en effet le cas $\lambda_1 = 0$ en trois sous-cas :

- $\lambda_1 = 0$,
- $a_1 = a_2 = 0$,
- $b_1 = b_2 = 0$.

Ces sous-cas sont définis par des égalités entre coefficients. Mais Poincaré utilise le langage géométrico-algébrique qu'il vient d'introduire pour les caractériser. C'est ce qui permet de comprendre pourquoi il envisage précisément ces égalités-là. Ces trois sous-cas correspondent en effet aux trois façons différentes dont les courbes $\mathrm{X} = 0$ et $\mathrm{Y} = 0$ peuvent se couper « en plusieurs points confondus au point (α, β) ». Poincaré l'explicite immédiatement, en renversant l'ordre dans lequel il liste les trois sous-cas — nous y reviendrons :

> En effet, dire que $a_1 = a_2 = 0$, c'est dire que $\mathrm{X} = 0$ offre un point multiple en (α, β).
>
> Dire que $b_1 = b_2 = 0$, c'est dire que $\mathrm{Y} = 0$ offre un point multiple en (α, β).
>
> Dire que $\lambda_1 = 0$, c'est dire que $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, c'est-à-dire que les courbes $\mathrm{X} = 0$, $\mathrm{Y} = 0$ sont tangentes au point (α, β). [Poincaré 1881a, p. 18–19]

La formulation de ces sous-cas présente une particularité intéressante, qui me semble caractéristique de la façon dont Poincaré dégage progressivement, dans tout ce chapitre, des cas de plus en plus particuliers.

Ces trois sous-cas sont en effet d'abord subsumés sous la caractérisation $\lambda_1 = 0$. De fait, si $a_1 = a_2 = 0$, on a $\lambda_1 = 0$. Mais au moment où Poincaré déplie le cas $\lambda_1 = 0$ en trois sous-cas, il réutilise l'égalité $\lambda_1 = 0$ pour caractériser le premier sous-cas. Il semble donc mettre au même niveau d'énumération le cas $\lambda_1 = 0$ et deux sous-cas. À cet endroit, $\lambda_1 = 0$ doit donc, selon toute évidence, être lu comme représentant les cas où $\lambda_1 = 0$ *à l'exclusion* de ceux qui vérifient $a_1 = a_2 = 0$ ou $b_1 = b_2 = 0$. D'ailleurs, Poincaré change l'ordre dans lequel il les évoque au moment de donner leur interprétation géométrique, ce qui lui permet de les lister dans un ordre logiquement plus naturel. Mais l'ordre employé d'abord semble souligner que $\lambda_1 = 0$ désigne de façon privilégiée les cas où $\lambda_1 = 0$ *sans que* $a_1 = a_2 = 0$ *ni* $b_1 = b_2 = 0$. Ces deux derniers sous-cas apparaissent ainsi comme des cas particuliers à l'intérieur du cas $\lambda_1 = 0$. Je reviendrai sur ce point en faisant le bilan de l'étude de ce chapitre du mémoire de Poincaré. Je pourrai ainsi le mettre en parallèle avec d'autres phénomènes semblables dans la façon dont Poincaré introduit les cas plus particuliers.

Fin de l'énumération

Une dernière question va nous permettre de mieux cerner la démarche suivie par Poincaré dans ce travail sur les points singuliers : l'énumération que nous venons d'étudier est-elle exhaustive ?

J'ai proposé, en commençant, une façon de rétablir l'arborescence des sections de ce chapitre du mémoire de Poincaré. Elle consiste à voir les quatre cas subordonnés, ainsi que les cas particuliers laissés de côté, comme des sous-parties du *deuxième cas*. Deux raisons justifient cette proposition.

D'abord Poincaré introduit les cas subordonnés en disant : « on peut diviser le deuxième cas en quatre cas subordonnés principaux ». Il en ressort évidemment que les cas subordonnés sont des sous-parties du *deuxième cas*, mais aussi que ce *deuxième cas* n'est pas épuisé par les quatre cas subordonnés. Ces derniers sont dits en constituer les « principales » sous-parties, ce qui laisse entendre que le *deuxième cas* contient encore d'autres cas complémentaires.

De plus, les *cas particuliers laissés de côté* semblent bien faire partie du *deuxième cas*. C'est du moins assez clair lorsqu'ils sont exprimés par les conditions $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\lambda_1 = 0$. Les λ_i sont en effet définis par une équation définie par les coefficients a_1, a_2, b_1 et b_2. Il faut que ces quatre coefficients ne soient pas tous nuls pour qu'ils définissent une équation et permettent de déterminer les λ_i. Or le *deuxième cas* est précisément caractérisé par le fait que les a_i et b_i ne sont pas tous nuls.

Si l'on accepte cette arborescence, il en résulte que Poincaré délaisse tout à fait les cas où ces quatre coefficients seraient nuls. Il ne s'intéresserait qu'aux « points singuliers ordinaires ».

On peut proposer une autre interprétation. Nous avons vu que Poincaré n'indique l'arborescence des sections de son chapitre que dans leurs titres. On peut supposer qu'il a tiré parti de l'absence de marquage typographique pour donner à la dernière section un statut particulier par rapport à l'arborescence des sections précédentes. Elle regrouperait dans cette hypothèse ainsi aussi bien les sous-cas du *deuxième cas* non encore traités, que les cas exclus par la définition de ce *deuxième cas*, les points singuliers non « ordinaires ».

Ces derniers pourraient être inclus dans les points singuliers de seconde espèce. Le fait que les dernières conditions, $a_1 = a_2 = 0$ et $b_1 = b_2 = 0$, soient formulées en fonction des a_i et des b_i, plutôt que des λ_i, rend cette hypothèse assez plausible. Les points singuliers non ordinaires sont de fait des points d'intersection multiple des courbes $\mathrm{X} = 0$ et $\mathrm{Y} = 0$, et ils peuvent être considérés comme la limite de plusieurs points singuliers de première espèce confondus.

Cette interprétation permettrait également de rendre compte de la dernière remarque de Poincaré, selon laquelle « de pareils points ne peuvent exister si X et Y sont les polynomes les plus généraux de leur degré » [Poincaré 1881a, p. 19]. En effet, si cette remarque s'applique seulement aux points singuliers de seconde espèce qui sont également des points singuliers ordinaires, elle est redondante avec la remarque similaire au début de la section, qui porte sur les cas particuliers $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\lambda_1 = 0$. Mais si l'on estime que dans la fin de la section, Poincaré ne se restreint plus aux cas où a_1, a_2, b_1 et b_2 ne sont pas tous nuls, elle contient une information nouvelle, à savoir que les points singuliers de seconde espèce, *dans lesquels on inclut* les points singuliers non ordinaires, ne se présentent pas lorsque X et Y sont les plus généraux de leur degré.

2.2.4 Un intérêt marqué pour ce qui est essentiel

Nous venons de voir que Poincaré introduit dans son étude des points singuliers des équations différentielles plusieurs formes de gradation des différents cas qu'il étudie. Toutes conduisent à marquer certains cas comme « singuliers »,

« plus particuliers », « exceptionnels », « de seconde espèce » par rapport à d'autres.

Cette gradation est corrélée à un aspect important de la démarche de Poincaré. Il recherche ce qui est essentiel pour y concentrer ses efforts plutôt qu'il ne cherche à présenter une étude aussi exhaustive que possible. Plusieurs signes contribuent à mettre en évidence la priorité qu'il donne ainsi à l'étude des cas les plus généraux.

Cette procédure de Poincaré se manifeste d'abord dans la façon dont il présente les cas qu'il va traiter. À plusieurs occasions, il annonce dans un premier temps seulement les cas principaux, même s'il étudie ou signale ensuite des cas supplémentaires.

Ainsi lorsqu'il introduit l'étude des cas subordonnés, il mentionne seulement « quatre cas subordonnés principaux » entre lesquels le deuxième cas se divise. Les autres cas sont ensuite appelés, de façon significative, « cas particuliers laissés de côté ».

Nous avons vu un phénomène semblable dans la *Note* aux CRAS. Poincaré mentionne d'abord seulement trois sortes de points singuliers : les *cols*, les *foyers* et les *nœuds*. Ces trois sortes correspondent aux trois premiers cas subordonnés. Tous les autres types de points singuliers, plus particuliers, sont ignorés jusqu'au dernier paragraphe de la *Note* où Poincaré signale l'existence de « cas exceptionnels ».

Le flou que nous avons souligné quant à la portée de la dernière section est du même ordre. Nous ne pouvons pas savoir s'il voyait sa liste de points singuliers comme exhaustive ou non, mais il est du moins clair qu'il n'en souligne pas explicitement l'exhaustivité. L'existence de cas résiduels qu'il n'aurait pas traités ne semble pas l'inquiéter, du moment qu'il a établi qu'il s'agit de cas plus particuliers.

Corrélativement, l'ordre choisi par Poincaré pour examiner les différents cas consiste à rejeter systématiquement à la fin les cas les plus particuliers. De la sorte, les cas principaux apparaissent toujours en premier, et l'ordre de traitement des cas se conforme simultanément à toutes les gradations que Poincaré introduit entre des groupes de cas.

Ainsi, tous les cas à propos desquels Poincaré souligne qu'ils ne se produisent pas pour les polynômes les plus généraux de leur degré sont réunis à partir du quatrième cas subordonné. Parmi eux, les points singuliers de seconde espèce sont traités en dernier, et à l'intérieur de ceux-ci, les cas où $a_1 = a_2 = 0$ et $b_1 = b_2 = 0$ sont mentionnés en dernier.

Ceci se traduit par un phénomène textuel spécifique qu'on retrouve à plusieurs reprises. Les sous-cas particuliers, comme $a_1 = a_2 = 0$ par rapport à $\lambda_1 = 0$, ou encore comme $\lambda_1 = \lambda_2$ par rapport au cas où les racines sont réelles et de même signe, sont systématiquement répertoriés et étudiés *après* les cas auxquels ils appartiennent au niveau supérieur de l'arborescence. Or le cas $\lambda_1 = \lambda_2$ requiert un traitement spécial, différent du cas où les racines sont réelles et de même signe — dont il est un sous-cas. Le cas d'égalité est exclu par les hypothèses du théorème de Poincaré, mais ceci n'est pas rappelé au moment d'étudier le premier cas subordonné, où les deux racines sont réelles et de même signe. De même, lorsque Poincaré liste les trois cas $\lambda_1 = 0$, $a_1 = a_2 = 0$ et

$b_1 = b_2 = 0$, nous avons vu qu'il faut comprendre que les deux sous-cas particuliers $a_1 = a_2 = 0$ et $b_1 = b_2 = 0$ sont exclus du cas $\lambda_1 = 0$, quoique rien ne l'indique au moment où on lit $\lambda_1 = 0$: le lecteur doit avoir en vue toute la hiérarchie pour interpréter correctement la caractérisation $\lambda_1 = 0$.

Ce phénomène se manifeste de deux façons dans la *Note* [Poincaré 1880a]. On le rencontre à l'échelle d'une phrase lorsque Poincaré présente les différents comportements des caractéristiques au voisinage d'un point. Il présente le premier cas, lorsque le point n'est pas singulier, par ces mots : « par tous les points, sauf par certains points singuliers, passe une caractéristique et une seule ». Les points ordinaires dont il parle ici sont d'abord désignés comme « tous les points » — et non « la plupart des points » ou une expression semblable —, et les points « singuliers » qui échappent à cette règle sont signalés et étudiés seulement ensuite. Le même procédé d'exposition se retrouve à l'échelle de la note entière : Poincaré la rédige comme si les trois sortes de points singuliers qu'il a inventoriés d'abord étaient les seules. Il signale seulement à la fin qu'il peut se produire d'autres cas, exceptionnels.

Poincaré adopte donc dans ces travaux une démarche spécifique qui consiste à étudier les cas possibles en commençant par le plus général avant d'envisager des cas de plus en plus particuliers. Ces derniers sont au départ supposés exclus, mais ceci reste parfois implicite.

Nous venons de repérer deux éléments dans la *forme* du discours, par lesquels Poincaré marque un intérêt pour les cas les plus généraux. Le premier est une insistance explicite sur les cas principaux. Le second est un procédé classique d'organisation du texte. Il consiste à faire apparaître en premier ce qui est essentiel. Le même intérêt est marqué également au niveau du *contenu* de l'étude.

Lorsqu'il déploie progressivement les cas particuliers d'abord écartés, Poincaré en donne en effet un traitement de plus en plus succinct. L'économie de moyens employés à traiter les cas plus particuliers est justifiée explicitement par leur moindre importance. Nous avons vu ainsi que Poincaré se contente de « quelques remarques » à propos du quatrième cas subordonné. Le cas $\lambda_1 = \lambda_2$ est lui aussi étudié plus rapidement, sans distinguer deux cas, comme le faisaient Briot et Bouquet, et comme on le fait encore aujourd'hui[19]. Enfin pour les points singuliers de seconde espèce, Poincaré se contente de dire qu'ils peuvent être obtenus comme la limite de plusieurs points singuliers de première espèce qui viennent à se confondre.

2.2.5 Un oubli significatif

Cette analyse permet de rendre compte d'un oubli important de Poincaré. Je vais montrer que cette circonstance vient conforter la conclusion selon laquelle notre auteur s'intéresse surtout à ce qui est essentiel.

J'ai signalé en énonçant le théorème de Poincaré que ce dernier « oublie » une hypothèse lorsqu'il rappelle, dans son mémoire *Sur les courbes*, le théorème démontré dans sa thèse. Il faut en effet s'assurer que l'une des racines λ_1 et λ_2 n'est pas un multiple entier de l'autre pour pouvoir conclure comme le fait

[19]En termes modernes, ces deux cas sont celui où la matrice de l'équation linéarisée est diagonalisable et celui où elle ne l'est pas.

Poincaré. Cette condition figure dans la thèse de 1878, mais Poincaré omet de la mentionner en 1881.

On peut sans aucun doute écarter l'hypothèse d'une omission malhonnête. Poincaré n'a pas de raison de cacher ces cas particuliers qu'on appelle aujourd'hui « résonnants ». En effet, exactement au même titre que le cas de deux racines égales, ils ne se présentent pas si les polynômes sont les plus généraux de leur degré. Poincaré aurait pu les traiter de la même façon.

Mais, du fait que ces exceptions au théorème de Poincaré sont plus particulières, il me semble vraisemblable que Poincaré a simplement oublié l'hypothèse correspondante au moment de redonner l'énoncé de son théorème. Sans doute n'a-t-il pas relu sa thèse. Il énonce le résultat qu'il y a obtenu tel qu'il l'a en mémoire. Or l'hypothèse vraiment déterminante est celle qui se traduit, dans le cas de deux variables, par le fait que λ_1 et λ_2 doivent être de même signe ou imaginaires. Cette hypothèse est véritablement restrictive : elle écarte tous les points singuliers pour lesquels le rapport des deux racines est négatif. L'hypothèse de non-résonance, de son côté, écarte seulement des cas plus particuliers. D'ailleurs, lorsque Poincaré rappelle les résultats de sa thèse dans l'*Analyse de ses travaux scientifiques* [Poincaré 1921], il mentionne seulement l'hypothèse qui correspond au signe du rapport λ_1/λ_2. Il omet l'hypothèse de non-résonance aussi bien que celle qui impose aux racines d'être distinctes. Ceci concorde avec la conclusion à laquelle nous a conduit l'analyse du travail de 1881 : Poincaré va à l'essentiel.

Pourquoi alors oublie-t-il l'hypothèse de non résonance, mais pas celle qui stipule que les racines doivent être distinctes ? Il me semble qu'on peut donner une réponse satisfaisante en remarquant l'importance occupée, dans la discussion de Poincaré, par les équations linaires. Le théorème de Poincaré assure, sous les hypothèses convenables — au nombre desquelles devrait figurer la non-résonance —, qu'on peut linéariser l'équation en faisant un changement de variable analytique. La classification des points singuliers qui suit l'énoncé du théorème suit la classification des équations linéaires. De fait, tous les exemples que donne Poincaré sont des exemples d'équations linéaires. Ainsi, Poincaré semble s'intéresser à la description qualitative, dans le domaine réel, des solutions des équations linéaires dans les différents cas, plus qu'au processus de linéarisation lui-même. Or les résonances qui se produisent lorsque les racines sont multiples l'une de l'autre n'ont pas de conséquences sur le comportement des solutions de l'équation linéarisée. Elles entraînent seulement des obstructions pour la linéarisation. De plus, dans le domaine réel, les équations — non linéaires — résonnantes ont un comportement semblable à celui de leurs linéarisées. Ainsi, seul le cas où les deux racines sont égales est qualitativement remarquable, et se manifeste comme tel au niveau de l'étude de l'équation linéarisée. Ceci peut expliquer que Poincaré oublie l'hypothèse de non-résonance, mais non celle qui impose que les racines soient distinctes. Cette dernière lui est rappelée par l'étude des équations linéaires, à laquelle son théorème ramène le problème général. L'hypothèse de non-résonance, au contraire, était sans doute d'emblée reconnue par Poincaré comme une hypothèse mineure puisqu'elle n'exclut que des cas qu'il dirait « plus particuliers ». En conséquence, elle était vraisemblablement moins présente à sa mémoire, au point qu'il a pu l'oublier.

2.2.6 Critères de gradation

L'analyse que nous avons faite des diverses gradations par lesquelles Poincaré hiérarchise les cas qu'il étudie nous permet également d'avancer des hypothèses sur les critères qu'il utilise pour évaluer l'importance des différents cas. Il me semble que Poincaré articule deux types d'indications pour définir et hiérarchiser les cas.

Nous avons déjà remarqué le rôle joué par les *conditions d'égalité* et d'inégalité entre les coefficients définissant l'équation différentielle — ou entre les λ_i qui en sont déduits. Les égalités définissent des cas plus particuliers, tandis que les inégalités n'influent pas sur le degré de généralité des cas qu'elles délimitent.

Ainsi le deuxième cas, qui regroupe les points singuliers ordinaires, se distingue du premier par les conditions sur a_0 et b_0. On est dans le premier cas lorsque a_0 et b_0 ne sont pas tous les deux nuls, tandis qu'on arrive au deuxième cas lorsque $a_0 = b_0 = 0$. Les points singuliers *ordinaires* sont caractérisés par la condition supplémentaire — d'inégalité — que a_1, a_2, b_1 et b_2 ne sont pas tous nuls. Poincaré n'est pas très explicite, mais il est assez clair que le point singulier *n*'est *plus ordinaire* lorsque ces quatre coefficients sont nuls.

Les trois premiers cas subordonnés sont ensuite définis seulement par des inégalités[20]. Le quatrième cas subordonné, qui est dit « plus particulier », est caractérisé par une égalité jointe à une inégalité : λ_1 et λ_2 sont supposés imaginaires, et leur rapport est *égal* à -1.

Les trois cas entre lesquels Poincaré partage les points singuliers de seconde espèce sont également caractérisés par des égalités. Plus précisément, le premier, $\lambda_1 = 0$, est défini par *une* égalité, et les deux suivants par *deux* égalités. Or nous avons vu comment les deux derniers constituent en fait des sous-cas, déployés seulement au moment d'étudier les points singuliers de deuxième espèce.

On observe donc une corrélation entre le nombre d'égalités définissant un cas et son identification comme plus particulier.

Mais ces conditions ne sont pas les seuls éléments utilisés pour caractériser les différents cas. Elles sont presque toujours associées à des *conditions géométriques*. Dans un premier temps, il s'agit de conditions géométriques portant sur les propriétés du faisceau homographique associé au point singulier. Dans un deuxième temps, lorsqu'il n'y a plus de tel faisceau homographique, Poincaré interprète les conditions sur les coefficients en les rapportant aux propriétés géométriques de l'intersection des courbes $\mathrm{X} = 0$ et $\mathrm{Y} = 0$.

Ces conditions géométriques ne sont pas de simples illustrations des conditions analytiques sur les coefficients. Conjointement avec les hypothèses des théorèmes disponibles dans la première partie de l'étude, et seules dans la deuxième partie, elles indiquent les égalités et inégalités pertinentes pour distinguer des cas. C'est particulièrement net pour les points singuliers de seconde espèce, où seule l'interprétation en termes d'intersection de $\mathrm{X} = 0$ et $\mathrm{Y} = 0$ justifie de mettre à part les cas $a_1 = a_2 = 0$ et $b_1 = b_2 = 0$, plutôt que n'importe quelle autre égalité entre les coefficients. Dans la première partie de l'étude, il est manifeste que la séparation des différents cas subordonnés est relative aux

[20] La distinction entre les cas où les λ_i sont réels et ceux où ils sont imaginaires s'apparente, algébriquement, à une inégalité : elle dépend du signe du déterminant de l'équation (2.1) du second degré qui définit ces racines.

hypothèses du théorème de Poincaré. Mais notre auteur met en avant l'interprétation géométrique des conditions ainsi définies. Le fait de donner une telle place à l'interprétation géométrique pour distinguer les cas explique peut-être en partie l'oubli de l'hypothèse de non-résonance : cette dernière ne correspond à rien géométriquement.

Par ailleurs, nous avons vu que la géométrie semble jouer un rôle également pour la gradation des cas. Telle est l'interprétation qui paraît la plus propre à expliquer la distinction entre les cas subordonnés et les cas particuliers laissés de côté. La frontière entre les points singuliers de première espèce et ceux de seconde espèce est quant à elle explicitement définie géométriquement : les cinq cas regroupés sous l'appellation « points singuliers de première espèce » sont réunis par la propriété que « les courbes X = 0 et Y = 0 s'y coupent en un seul point et non en plusieurs points confondus ». Les points singuliers de seconde espèce se trouvent ensuite caractérisés par la propriété que $\lambda_1 = 0$. Mais cette propriété, en tant que condition d'égalité, ne justifie pas de les voir comme secondaires par rapport à ceux de première espèce. Parmi ceux-ci, on compte en effet les points relevant du quatrième cas subordonné, ainsi que du cas $\lambda_1 = \lambda_2$, tous deux définis par une égalité s'ajoutant à $a_0 = b_0 = 0$. Le rapport entre les points singuliers de première et ceux de seconde espèce consiste en ce que les derniers peuvent être considérés comme « la limite de plusieurs points singuliers de première espèce confondus ensemble ». Cette propriété est liée par Poincaré à la caractérisation géométrique des points de seconde espèce par l'emploi de la même expression : « points confondus ». C'est donc bien la caractérisation géométrique qui joue un rôle clé pour distinguer — et articuler — points singuliers de première et seconde espèce.

L'importance des considérations géométriques ne diminue pas le rôle de la caractérisation par les conditions sur les coefficients. Ces dernières assurent en effet l'unité et la cohérence de la définition de l'ensemble des cas, par delà l'utilisation de deux interprétations géométriques différentes. Elles permettent ainsi de construire une arborescence qui inclut les différents cas dégagés par Poincaré. L'importance de ces conditions sur les coefficients est peut-être particulièrement nette à propos du cas $\lambda_1 = \lambda_2$: cette caractérisation permet de réunir deux dégénérescences différentes du faisceau homographique (une seule droite double / toutes les droites invariantes). Poincaré ne cherche pas à les distinguer, mais se contente de remarquer qu'on a toujours une infinité de caractéristiques passant par le point singulier considéré, qui est donc un *nœud*.

Conclusion

Ainsi Poincaré mobilise des approches variées pour définir des cas et les hiérarchiser de façon très complexe. Cette hiérarchie est l'expression d'un travail important sur le degré de particularité des cas considérés. Poincaré ne se contente pas d'opposer un cas général et des cas particuliers, mais il met en place des moyens de différenciation entre les cas particuliers. Cette réflexion n'est pas *thématisée*. Les critères utilisés pour mettre en évidence la particularité de certains cas paraissent variés. Ils ne sont pas explicités autrement que par leur mise en œuvre : Poincaré ne définit pas une notion mathématique propre à mesurer la particularité d'un cas, et encore moins à mesurer uniformément les différents cas qu'il distingue. Malgré cela, l'échelonnement obtenu par Poincaré est d'une finesse tout à fait frappante.

Dans les chapitres suivants de son mémoire, sur lesquels nous reviendrons, nous verrons Poincaré utiliser cette hiérarchisation pour définir un « cas général », dans lequel les points singuliers n'appartiennent qu'aux trois premiers cas subordonnés. La gradation des cas particuliers élaborée au début du mémoire joue ainsi un rôle très important pour la suite de l'étude. Or le travail sur les équations différentielles que Poincaré y développe ouvre un nouveau chapitre dans l'histoire de ce domaine : l'étude qualitative globale des équations différentielles. Pour analyser le rôle joué par l'étude des cas particuliers et leur hiérarchisation dans la mise en place de ce nouveau chapitre, il est donc nécessaire de comprendre comment l'élaboration de cette gradation s'inscrit par rapport aux travaux des prédécesseurs de Poincaré. S'agit-il d'un mode de travail partagé ? Est-ce une spécificité de l'approche de Poincaré ? Les réponses que nous donnerons à ces questions nous aideront à cerner plus précisément les liens entre la méthode d'exploration et de hiérarchisation des cas élaborée par Poincaré et sa nouvelle approche, qualitative et globale, des équations différentielles.

2.3 L'examen du degré de généralité de chaque comportement envisagé : une question originale posée par Poincaré

Nous avons vu que Poincaré utilise des résultats de Cauchy ainsi que de Briot et Bouquet. C. Gilain a mis en évidence dans sa thèse les points principaux par lesquels les mémoires de Poincaré *sur les courbes définies par les équations différentielles* se démarquent de la problématique majeure dans la théorie des équations différentielles ordinaires à partir de Cauchy. Écrivant après une période marquée par un lien très fort entre l'étude des équations différentielles et la théorie des fonctions de variable complexe, où domine l'étude locale des solutions, Poincaré s'intéresse à l'étude globale des solutions réelles des équations, et utilise la Géométrie pour résoudre des problèmes d'Analyse [Gilain 1977, p. 35, 115].

Nous examinerons plus particulièrement les travaux de Briot et Bouquet. Nous verrons ainsi que la gradation des cas particuliers que nous avons dégagée ci-dessus est un point supplémentaire qui distingue l'approche de Poincaré de la leur. Mais l'examen de la façon dont différents cas sont définis et articulés selon les auteurs conduit à une remarque assez surprenante. La différence que nous allons montrer dans la façon dont ils s'intéressent au degré de généralité des cas envisagés fait apparaître, comme je l'ai déjà annoncé, une périodisation différente de celle de l'étude qualitative. La priorité donnée par Poincaré aux cas principaux, et le choix de travailler en établissant des listes ordonnées de cas, sont en effet déjà sensibles dans ses premiers travaux, sur les équations différentielles [Poincaré 1878] et sur les équations aux dérivées partielles [Poincaré 1879], où il affirme poursuivre les recherches de Briot et Bouquet. De fait, ces deux premiers mémoires de Poincaré s'inscrivent dans la problématique d'étude locale des solutions complexes des équations différentielles. Mais le rapport sous lequel les cas particuliers sont envisagés est déjà propre à Poincaré et annonce le travail élaboré de hiérarchisation des points singuliers qui ouvre les mémoires *Sur les courbes*.

Pour pouvoir analyser le traitement des cas dans le mémoire de Briot et Bouquet, nous aurons besoin d'en avoir une vision globale. Cette étape est nécessaire en particulier pour saisir la façon dont Briot et Bouquet entendent étudier les solutions des équations différentielles et le projet qu'ils poursuivent. Ce cadre étant posé, nous pourrons examiner la façon dont ils présentent les différents cas qu'ils sont amenés à envisager, ainsi que l'utilisation qu'ils font du champ lexical du général et du particulier. Ceci nous permettra de caractériser le type de généralité qu'ils ont en vue et de comparer leur approche à celle de Poincaré, afin de mieux cerner les spécificités de cette dernière.

2.3.1 Le mémoire de Briot et Bouquet

Dans le mémoire qui nous intéresse, *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles* [1856b], Briot et Bouquet étudient les propriétés des solutions d'une équation différentielle $\frac{du}{dz} = f(u, z)$ à partir de l'équation elle-même.

Étude des points singuliers

Leur travail s'inscrit dans la continuité de celui de Cauchy. La principale préoccupation de ce dernier dans ce domaine avait été de démontrer l'existence de solutions de l'équation différentielle pour des conditions initiales données. Cherchant ces solutions sous forme de séries, il s'intéressait aux conditions de convergence de ces séries : évaluation du rayon de convergence à partir de l'équation différentielle, majoration des restes, etc. Briot et Bouquet reprennent le cadre de la théorie des fonctions de variable imaginaire, et procèdent eux aussi à une étude locale des solutions[21]. Leur travail est divisé en quatre parties. Dans la première, ils donnent une nouvelle démonstration, plus simple, du théorème de Cauchy qui assure l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différen-

[21] Briot et Bouquet commencent à s'intéresser à l'étude globale des solutions, en particulier lorsqu'ils justifient l'étude du comportement des solutions au voisinage des points singuliers. Ils soulignent en effet que les propriétés « spéciales » d'une fonction solution de l'équation au voisinage d'un tel point se répercutent sur son comportement « dans toute l'étendue du plan ».

Mais de fait, les résultats ne sont formulés en référence à cette vision globale que dans la deuxième et la dernière partie. On lit par exemple : « *Lorsque pour un système de valeurs [...] le coefficient différentiel devient infini [...] la fonction intégrale u prend m valeurs qui se permutent les unes dans les autres circulairement[...]* » [Briot et Bouquet 1856b, p. 148]. Dans la troisième partie, au contraire, les résultats sont présentés comme portant sur l'existence, l'unicité locale et les propriétés de l'intégrale lorsque les conditions initiales sont fixées, exactement dans la continuité des résultats de Cauchy. Ainsi le théorème XVIII s'énonce : « *L'équation différentielle* $z\frac{du}{dz} = au + bz + \ldots$, *dans laquelle le coefficient a n'est pas entier positif, admet une intégrale monodrome s'évanouissant avec z.* »

Remarquons que Cauchy, dans le rapport qu'il fait à l'Académie sur le mémoire de Briot et Bouquet [Cauchy 1855] ne semble pas avoir relevé la perspective d'étude globale d'une solution donnée qui affleure à certains endroits du mémoire de Briot et Bouquet. Il s'intéresse surtout à la troisième partie du mémoire, et même lorsqu'il présente rapidement les résultats des autres parties, il les reformule comme des résultats locaux sur les propriétés de l'intégrale s'évanouissant avec la variable.

Nous avons vu par ailleurs qu'il y a deux façons d'adopter un point de vue global sur les solutions. Briot et Bouquet suggèrent ici de chercher à prolonger *une* solution à tout le plan. Poincaré de son côté étudie *l'ensemble* des courbes solutions. Cette différence dépasse largement le cadre de ma problématique. Le travail de R. Chorlay sur le couple local/global apportera sans doute des pistes sur ce point.

tielle lorsque les conditions initiales sont données en un point que l'on qualifie aujourd'hui de point régulier.

Les trois parties suivantes trouvent leur motivation dans le mémoire précédent de Briot et Bouquet [1856a]. Ils y présentaient les éléments fondamentaux de la théorie des fonctions d'une variable complexe, et concluaient :

> Les plus importantes des fonctions sont les fonctions monodromes et monogènes. Les trois premières catégories des fonctions monodromes comprennent les fonctions rationnelles, les fonctions simplement périodiques et les fonctions doublement périodiques. Toute fonction monodrome, qui ne peut être rangée dans l'une de ces trois catégories, constitue une transcendante nouvelle. Les transcendantes se distinguent les unes des autres par la loi de distribution de leurs infinis. [Briot et Bouquet 1856a, p. 131]

Ainsi, Briot et Bouquet remarquent que les fonctions de variable complexe sont caractérisées par leur comportement en certains points spéciaux, en particulier les points où elles tendent vers l'infini. Ceci les conduit à examiner, dans le mémoire suivant, les solutions des équations différentielles au voisinage des points non réguliers :

> [La] variable z s'éloignant de l'origine z_0 suivant un chemin quelconque, tant que le coefficient différentiel jouit des propriétés énoncées plus haut [*i.e.* satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy, AR], la fonction intégrale u reste finie, continue et monodrome[22] ; mais si l'on arrive à un point z_1 pour lequel le coefficient différentiel devienne infini, se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, ou cesse d'être monodrome, la fonction intégrale éprouve autour de ce point des modifications, et acquiert des propriétés spéciales qui se transmettent ensuite dans toute l'étendue du plan. Nous nous sommes proposés d'étudier ces circonstances, qui caractérisent les diverses fonctions et les classent en catégories. [Briot et Bouquet 1856b, p. 133–134]

C'est cette attention portée par Briot et Bouquet aux points singuliers des équations différentielles qui fait l'intérêt de leur mémoire pour nous. J'emprunte ici la terminologie « points singuliers » à Poincaré, mais on trouve déjà chez Briot et Bouquet une opposition nette entre les points où le théorème de Cauchy s'applique et les autres, qui font l'objet des trois dernières parties de leur mémoire. Le passage ci-dessus, où il est question des « propriétés spéciales » qu'acquiert la fonction autour de tels points, en est une première marque.

Dans la deuxième partie, Briot et Bouquet étudient ce qui se passe aux points où le coefficient différentiel devient infini. Ils appliquent à une série d'exemples les résultats qu'ils obtiennent. La méthode d'étude consiste dans un premier temps à rechercher les valeurs de la variable pour lesquelles le coefficient différentiel devient infini, puis à étudier le comportement de la fonction au voisinage de chacune de ces valeurs. Autrement dit, il s'agit d'abord de chercher les points singuliers. Briot et Bouquet utilisent à trois reprises un terme spécifique pour désigner les « propriétés spéciales » de la fonction solution : ils parlent des « particularités » qui se produisent en ces points. On lit ainsi : « il ne peut arriver de particularités que lorsque, pour une valeur finie z_1 de la variable z, u devient infinie » (p. 150). Et encore : « Dans l'étude de la fonction u, les particularités

[22] Voir note 2, p. 26.

ne peuvent survenir que lorsque [...] la fonction u devient égale à -1, ce qui rend infini le coefficient différentiel » (p. 153). Ainsi certains points jouent un rôle particulier dans l'étude des équations différentielles.

On retrouve cette opposition entre des points particuliers, et l'ensemble des points en lesquels le théorème de Cauchy s'applique, à la fin de l'introduction. Le cas où le théorème de Cauchy s'applique est qualifié de « cas général », tandis que Briot et Bouquet vont centrer leur étude sur les autres cas.

Il me semble donc qu'on peut bien reconnaître chez Briot et Bouquet une distinction claire entre les points réguliers de l'équation différentielle, et des points particuliers, auxquels ils s'intéressent de façon privilégiée. Ces derniers correspondent, quoique dans un champ d'étude plus vaste, aux points singuliers étudiés par Poincaré. Ainsi, les trois dernières parties du mémoire de Briot et Bouquet, comme le chapitre de Poincaré que nous venons d'étudier en détail, consistent en une exploration de diverses sortes de points particuliers des équations différentielles. C'est à la façon dont est menée cette exploration que nous allons nous intéresser maintenant. Nous verrons que le travail de Briot et Bouquet est marqué par une quête d'exhaustivité : ils cherchent visiblement à proposer une étude aussi complète que possible des particularités que peuvent présenter les équations différentielles. Cet objectif se traduit dans la façon dont Briot et Bouquet délimitent, définissent et ordonnent différents cas qui exigent des traitements adaptés.

Cette étude du mémoire de Briot et Bouquet fera apparaître, par contraste, la spécificité du travail de hiérarchisation des points singuliers mené par Poincaré.

Une recherche qui vise à l'exhaustivité

Briot et Bouquet envisagent dans les deuxième, troisième et quatrième parties de leur mémoire trois types de circonstances où les hypothèses du théorème de Cauchy ne sont pas vérifiées.

La deuxième partie porte sur les points où le coefficient différentiel devient infini. Cette question n'a pas d'écho dans le travail de Poincaré sur les courbes définies par les équations différentielles. Poincaré fait en effet jouer des rôles symétriques aux deux variables réelles x et y qui correspondent aux variables complexes z et u de Briot et Bouquet. Il écrit l'équation différentielle sous la forme $\frac{dx}{\mathrm{X}} = \frac{dy}{\mathrm{Y}}$, et étudie les solutions comme des courbes dans le plan (x, y). Dans ce cadre, les points où le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ devient infini ne sont pas plus particuliers que ceux où il est nul — ou, de façon équivalente, où $\frac{dx}{dy}$ est infini.

La troisième partie du mémoire de Briot et Bouquet concerne les cas où le coefficient différentiel $\frac{du}{dz} = f(u, z)$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, ou plus précisément : $\frac{du}{dz} = \frac{\varphi(u,z)}{\psi(u,z)}$, où φ et ψ s'annulent ensemble pour des valeurs u_1 et z_1 de u et z. C'est ce cadre que Poincaré reprend lorsqu'il envisage des équations de la forme $\frac{dx}{\mathrm{X}} = \frac{dy}{\mathrm{Y}}$, et étudie leur points singuliers, *i.e.* les points où $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = 0$.

Dans la quatrième partie de leur mémoire, Briot et Bouquet s'intéressent à une dernière forme de singularité que peut présenter le coefficient différentiel : lorsqu'il est donné par une fonction qui n'est plus monodrome. Ceci se produit lorsqu'il devient racine multiple d'une fonction de u et z, ou plus généralement, racine multiple d'une équation implicite. Briot et Bouquet sont ainsi amenés, pour compléter leur exploration des « propriétés spéciales » des solutions d'équations différentielles, à introduire une nouvelle forme d'équation. Le coefficient différentiel $U = \frac{du}{dz}$ y est donné comme une fonction implicite de u et z : $F(z, u, U) = 0$. Cette forme inclut comme des cas particuliers les types de singularités déjà examinés. En particulier, l'équation $\frac{du}{dz} = \frac{\varphi(u,z)}{\psi(u,z)}$ était écrite par Briot et Bouquet sous la forme $\psi(u, z)\frac{du}{dz} - \varphi(u, z) = 0$, et ils montraient ensuite comment se ramener à une équation de la forme $t^m \frac{d\zeta}{dt} = f(\zeta, t)$, qui est également une équation implicite. Dans la quatrième partie, ils étudient les singularités non encore envisagées qui proviennent spécifiquement de la forme implicite de l'équation. Le mouvement qui se dégage ainsi de la progression entre les trois dernières parties conduit à traiter l'équation différentielle la plus générale possible, sans faire de restriction sur le membre de droite de l'équation $\frac{du}{dz} = f(u, z)$, qui peut tendre vers l'infini, prendre une forme indéterminée $\frac{0}{0}$, ou cesser d'être monodrome.

Je voudrais maintenant entrer dans quelques détails à propos de la méthode proposée par Briot et Bouquet dans la troisième partie de leur étude, c'est-à-dire dans le cas où le coefficient différentiel se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. C'est d'une part la plus grosse partie de leur travail — elle occupe presque la moitié de l'article —, et d'autre part celle qui correspond au cadre adopté par Poincaré. Ce sont ses résultats que Poincaré exploite pour résoudre le deuxième cas subordonné, ainsi que celui où $\lambda_1 = \lambda_2$. Il me semble que la façon dont Briot et Bouquet indiquent comment étudier les points singuliers de cette sorte est caractéristique de leur problématique dominée par l'exhaustivité.

En prenant comme origine le point auquel on s'intéresse, le problème de cette troisième partie consiste à étudier l'équation $\frac{du}{dz} = \frac{\varphi(u,z)}{\psi(u,z)}$ lorsque u et z sont proches de 0. Briot et Bouquet commencent par développer φ et ψ « en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières croissantes » de u et z. L'équation différentielle à étudier devient :

$$(A' u^{\alpha'} z^{\beta'} + \dots)\frac{du}{dz} - (A u^{\alpha} z^{\beta} + \dots) = 0.$$

Briot et Bouquet indiquent comment former de toutes les façons possibles le groupe des termes du degré le moins élevé dans cette équation. Chaque groupement conduit à un changement de variables qui permet de renormaliser l'équation. Dans chaque cas, les conditions initiales qui correspondent à $(u = 0, z = 0)$ sont données par une équation algébrique. Chaque condition initiale conduit à résoudre une équation de la forme

$$t\frac{d\zeta}{dt} = f(\zeta, t) \qquad \text{ou parfois} \qquad t^m \frac{d\zeta}{dt} = f(\zeta, t).$$

Briot et Bouquet étudient ces équations auxquelles ils ont ramené le traitement de toutes les autres.

Dans ce processus, nos auteurs ne font aucune hypothèse sur les valeurs des plus petites puissances α et β qui peuvent apparaître. De cette façon, ils partent d'une équation sous la forme la plus générale possible : non pas au sens de la généricité, mais au sens où toutes les équations envisagées peuvent être mises sous cette forme, aussi dégénérées soient-elles. C'est là ce que j'entends par « exhaustivité ».

La diversité des singularités que peuvent présenter les solutions d'équations différentielles

Dès le début de l'introduction, après avoir énoncé le théorème de Cauchy, Briot et Bouquet annoncent leur but : étudier les « diverses fonctions » que définissent les équations différentielles. Ce thème est repris à la fin de l'introduction, comme justification d'un choix d'exposition qui donne une large part à l'étude d'exemples :

> Nous avons appliqué à de nombreux exemples la théorie dont nous venons d'esquisser les principaux traits, afin de mettre en lumière les propriétés si variées des fonctions définies par les équations différentielles. Nous citerons spécialement des équations différentielles définissant des fonctions doublement périodiques de plusieurs sortes, les unes monodromes dans toute l'étendue du plan, les autres qui changent de valeurs quand on tourne autour de certains points. [Briot et Bouquet 1856b, p. 136]

Cet intérêt pour la diversité, la variété des propriétés des fonctions définies par les équations différentielles rejoint la caractéristique que nous avons relevée d'abord dans le mémoire de Briot et Bouquet : il s'agit encore de ne rien laisser de côté, d'explorer et d'illustrer par des exemples autant de comportements différents des solutions d'équations différentielles qu'il est possible.

Dans ce programme de recherche, le résultat de Cauchy joue un rôle particulier : la variété des comportements des solutions au voisinage de points singuliers est mise en regard du résultat d'existence et d'unicité d'une solution monodrome de l'équation en un point régulier.

La référence au théorème de Cauchy est particulièrement nette dans l'introduction du mémoire, lorsque Briot et Bouquet annoncent les résultats qu'ils vont démontrer : les comportements des solutions au voisinage des différents types de singularités sont décrits comme des irrégularités par rapport au comportement décrit par Cauchy, qui « cesse » d'être respecté. Ainsi lorsque le coefficient différentiel devient infini, « la fonction intégrale u cesse d'être monodrome » [Briot et Bouquet 1856b, p. 134]. De même à propos de la dernière partie, pour l'équation implicite $F(z, u, U)$, Briot et Bouquet concluent : « Si U devient racine multiple d'ordre n, la fonction u cesse, en général, d'être monodrome, et admet n valeurs distinctes qui se permutent en série circulaire. » [Briot et Bouquet 1856b, p. 136]

Dans cette dernière citation, on voit apparaître l'expression « en général », qui est employée à plusieurs reprises par Briot et Bouquet. Comment peut-on l'interpréter ? Pour apporter des éléments de réponse, je voudrais analyser particulièrement deux passages.

Le premier se situe dans l'introduction, lorsque Briot et Bouquet synthétisent les résultats obtenus lorsque le coefficient différentiel prend la forme $\frac{0}{0}$. J'ai indiqué ci-dessus comment ils ramènent ce problème à la résolution d'équations auxiliaires de deux formes. Ils étudient principalement la suivante :

$$(\beta) \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{a\zeta + bt + c\zeta^2 + \dots}{t}.$$

Les propriétés de cette équation dépendent du coefficient a : s'il n'est pas entier positif, (β) admet une intégrale monodrome s'annulant avec t. Si a est de partie réelle positive, à cette intégrale monodrome s'ajoutent une infinité d'autres intégrales non monodromes. Lorsque a est entier positif, on peut se ramener au cas où $a = 1$ et le résultat dépend alors de la valeur du coefficient b : si b est non nul, l'équation n'admet pas d'intégrale monodrome, mais une infinité d'intégrales non monodromes. Si $a = 1$ et $b = 0$, enfin, l'équation admet une infinité d'intégrales monodromes.

Briot et Bouquet concluent :

> Il résulte de ce qui précède une conséquence assez remarquable, c'est qu'une fonction peut ne pas être complètement définie, lorsqu'on l'assujettit à vérifier une équation différentielle du premier ordre et à admettre une valeur initiale donnée u_1 pour $z = z_1$. Cela arrive, en général, lorsque le coefficient différentiel se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ pour $z = z_1$ et $u = u_1$; car nous avons vu que, dans ce cas, l'équation différentielle admet, en général, plusieurs intégrales se réduisant à $u = u_1$ pour $z = z_1$. Elle en admet même souvent une infinité, et alors il s'introduit une constante arbitraire dans l'intégration, quoiqu'on donne la valeur initiale. [Briot et Bouquet 1856b, p. 135]

Comme pour les autres types de singularités, nous voyons que Briot et Bouquet relèvent d'abord la différence remarquable que cette étude fait apparaître avec le résultat de Cauchy : une solution d'une équation différentielle n'est plus déterminée par ses conditions initiales. Au contraire, on peut avoir plusieurs solutions partageant la même valeur initiale, lorsque l'équation de départ conduit à examiner plusieurs équations de la forme (β), chacune ayant un coefficient a de partie réelle négative. Dans les cas où l'une des équations (β) à étudier possède un coefficient a de partie réelle positive, on obtient même une infinité de solutions pour la même condition initiale. Il me semble que c'est cette diversité des résultats possibles qui est marquée par l'expression « en général ». Cette variété s'oppose au résultat uniforme obtenu par Cauchy pour les points réguliers, en lesquels il existe toujours une unique solution. Briot et Bouquet la mettent en évidence en étudiant, je l'ai montré, la forme la plus générale que peut prendre l'équation.

Mathématiquement, on peut également lire « en général » comme une indication de généricité, qui opposerait les cas où la solution est déterminée par les conditions initiales, plus rares, aux cas où l'équation admet plusieurs intégrales. Mais le texte de Briot et Bouquet ne me semble pas favoriser une telle lecture. Lorsqu'ils expliquent comment obtenir les équations de la forme (β), de même que lorsqu'ils en rendent compte dans l'introduction, ils ne font aucun commentaire sur le nombre d'équations qu'on sera amené à envisager. Rien ne permet donc de dire que *le plus souvent*, il faut étudier plusieurs équations (β), qui fournissent plusieurs solutions. Briot et Bouquet proposent plutôt une méthode qui vise à aborder toute la diversité des équations. Or le nombre d'équations auxiliaires à considérer dépend de l'équation de départ, et la méthode, pour être générale, doit le laisser ouvert.

Le deuxième passage que je propose d'examiner se trouve à la fin de la troisième partie. Briot et Bouquet utilisent la même expression, « en général », mais dans un contexte tout à fait différent. À cet endroit, ils s'intéressent à la deuxième forme que peut prendre l'équation auxiliaire :

$$t^m \frac{d\xi}{dt} = a\xi + bt + \dots.$$

Pour ce type d'équation, Briot et Bouquet présentent le résultat suivant :

> *L'équation différentielle (28)* [$t^m \frac{d\xi}{dt} = a\xi + bt + \dots$, AR]*, à laquelle on est conduit de la sorte, n'admet pas en général d'intégrale monodrome.* Pour mettre en évidence cette proposition d'une manière simple, il suffit de considérer l'équation linéaire
>
> $$\begin{cases} t^2 \frac{d\xi}{dt} &= a\xi + \varphi(t), \\ \varphi(t) &= bt + b_1 t^2 + b_2 t^3 + \dots \end{cases}$$
>
> [Briot et Bouquet 1856b, p.182]

La démonstration proposée éclaire le sens à donner à l'expression « en général » : l'étude d'une forme particulière de l'équation suffit à montrer qu'il n'y a pas, « en général », d'intégrale monodrome. La preuve consiste en l'exhibition d'un contre-exemple[23] au théorème de Cauchy pour ces équations. Ce qui serait vrai « en général » est donc ce qui serait vrai sans exception : le contexte invite à lire ici « général » avec le sens d'« universel ».

Les deux passages que nous venons d'examiner contiennent la même expression « en général » dans des contextes de travail très différents. Il semble bien, par conséquent, que Briot et Bouquet ne cherchent pas à faire référence à une notion précise de généralité, mais qu'ils emploient cette expression plutôt dans un sens commun assez vague.

En revanche, nous avons vu dans chacun de ces deux passages que le théorème de Cauchy fournit à leur travail un horizon par référence auquel ils formulent leurs résultats.

On le reconnaît également dans la façon dont ils distinguent différents cas. Ainsi dans leur étude de l'équation (β), Briot et Bouquet démontrent d'abord que cette équation admet une intégrale monodrome s'annulant avec z dès que le coefficient a n'est pas un nombre entier positif, puis qu'elle ne peut alors admettre qu'une seule intégrale de cette forme. On retrouve donc en partie le résultat de Cauchy. C'est seulement ensuite qu'ils distinguent les cas où la partie réelle de a est positive de ceux où elle est négative, pour montrer que dans le premier cas, une infinité d'autres intégrales, non monodromes, s'ajoute à l'intégrale monodrome, tandis qu'il n'y a pas d'autre intégrale si la partie réelle de a est négative. Il est d'ailleurs remarquable que, lorsque Briot et Bouquet résument ces résultats dans l'introduction, ils n'isolent pas un « cas » où la partie réelle de a est négative. Ils énoncent d'abord le résultat d'existence d'une intégrale monodrome dans tous les cas où a n'est pas entier positif, quelque soit

[23] La preuve donnée par Briot et Bouquet peut facilement être transposée au cas des équations de la forme $t^m \frac{d\xi}{dt} = a\xi + \varphi(t)$. Mais elle utilise de façon centrale la forme particulière du second membre. En supposant l'existence d'une intégrale $\xi = A_1 t + A_2 t^2 + \dots$, Briot et Bouquet montrent que les b_i doivent vérifier une certaine relation. Si on ajoute dans le second membre de l'équation différentielle un terme en ξ^n ou $\xi^n t^p$, le procédé de démonstration ne peut pas être généralisé directement.

le signe de sa partie réelle. Ils mentionnent ensuite seulement le cas où a a sa partie réelle positive, pour lequel le résultat diffère de celui de Cauchy.

On peut rendre compte de façon semblable d'un renversement dans l'ordre d'exposition entre l'introduction et le corps du mémoire. Il s'agit des résultats concernant l'équation (β) dans le cas où $a = 1$:

$$t\frac{d\zeta}{dt} = \zeta + bt + c\zeta^2 + d\zeta t + et^2 + \dots .$$

Dans le corps du texte, Briot et Bouquet montrent, dans l'ordre :

- « *lorsque* [...] *le coefficient b est différent de zéro, l'équation n'admet aucune intégrale monodrome* » (p. 176) ;
- « *lorsque* [...] *le coefficient b est égal à zéro, l'équation admet une infinité d'intégrales monodromes* » (p. 177) ;
- « *lorsque* [...] *le coefficient b est différent de zéro, l'équation différentielle n'admet aucune intégrale monodrome ; mais elle admet une infinité d'intégrales non monodromes* » (p. 177).

Dans l'introduction, ils regroupent ce qui concerne le cas b non nul avant d'énoncer le résultat lorsque $b = 0$.

Il est possible que l'ordre choisi pour l'introduction vise à indiquer d'abord ce qui concerne le cas le plus fréquent, selon un schéma que reprendra Poincaré, très systématiquement comme nous l'avons vu. Mais dans le fil du travail, il semble bien que Briot et Bouquet soient plutôt guidés par la recherche d'intégrales monodromes, conformément au résultat de Cauchy. Ceci les amène à remarquer d'abord : « En général, cette équation n'admet pas d'intégrale monodrome. » (p. 176). Le raisonnement par l'absurde qui permet d'établir cette affirmation donne une condition nécessaire pour l'existence d'une intégrale monodrome : b doit être nul. Ceci fournit le premier énoncé : « *lorsque* [...] *le coefficient b est différent de zéro, l'équation n'admet aucune intégrale monodrome* », et conduit à examiner en premier lieu le cas $b = 0$ qui seul peut donner une intégrale monodrome.

Notons au passage qu'on peut ici comprendre de deux façons l'affirmation « en général, cette équation n'admet pas d'intégrale monodrome ». Le lecteur moderne est tenté d'y voir une indication de la plus grande généralité du cas où il n'y a pas d'intégrale monodrome, puisqu'il se produit pour toutes les valeurs de b, à l'exception du cas particulier $b = 0$. Mais on peut aussi y lire, comme dans les passages étudiés plus haut, la simple remarque que le résultat de Cauchy, l'existence d'une intégrale monodrome, n'est pas valable pour cette forme d'équation.

On voit donc que l'objectif de Briot et Bouquet consiste surtout à explorer toute la diversité des singularités que peuvent présenter les équations différentielles. Ils cherchent à identifier toutes les variations qu'on peut observer par rapport au résultat de Cauchy pour les points réguliers. Dans ce but, ils travaillent sur l'équation la plus générale possible.

2.3.2 Les spécificités du travail de Poincaré

Cette analyse du mémoire de Briot et Bouquet met en lumière la spécificité de la démarche de Poincaré, qui diffère de celle de ses prédécesseurs par plusieurs traits.

Classification des points singuliers

Poincaré procède à une partition systématique des points singuliers ordinaires en différents cas. Cette division est bien sûr guidée par les théorèmes disponibles, et donc par les résultats quant au comportement des solutions dans chacun des cas. Mais elle est opérée en amont du travail, et l'étude de chaque cas est ensuite traitée séparément. L'organisation du texte de Briot et Bouquet témoigne plutôt, quant à elle, de la recherche des conditions sous lesquelles tel ou tel résultat de Cauchy subsiste ou au contraire cesse d'être vrai.

Dans le travail de Poincaré, la répartition des points singuliers entre les cas se fait presque directement à partir de l'équation de départ : une fois qu'un point singulier est donné, un simple changement d'origine met l'équation sous une forme qui permet de voir à quel cas on a affaire. La volonté que nous avons dégagée chez Briot et Bouquet de proposer une méthode aussi générale que possible les mène sur une autre voie. Ils commencent par enchaîner les transformations de l'équation initiale pour la ramener à la résolution d'équations auxiliaires. Il faut alors étudier chacune d'elles, puis remonter à l'équation de départ, ce qui ne peut se faire de façon effective que pour une équation fixée. Il en résulte que Briot et Bouquet proposent une méthode d'étude des points singuliers, tandis que Poincaré présente une véritable classification.

Évaluation du degré de généralité

Nous avons vu que Poincaré donne explicitement des indications concernant le degré de généralité des cas étudiés. Il attire l'attention du lecteur sur cet aspect de son analyse.

On peut relever des mentions similaires dans le texte de Briot et Bouquet. Par exemple Briot et Bouquet montrent comment, dans le cas où le coefficient différentiel prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, on peut ramener l'équation à la forme

$$(\beta) \qquad t\frac{d\zeta}{dt} = a\zeta + bt + c\zeta^2 + d\zeta t + et^2 + \cdots = f(\zeta, t)$$

mentionnée ci-dessus. Il faut en réalité faire des hypothèses supplémentaires pour obtenir cette forme d'équation, et nos auteurs traitent un peu plus loin le cas où l'on obtient une forme plus compliquée

$$t^m \frac{d\zeta}{dt} = a\zeta + bt + \dots .$$

Ayant donc montré que, sous l'hypothèse qu'une certaine équation admet une racine simple, l'équation différentielle se met sous la forme (β), ils commentent :

> Telle est en général la forme simple à laquelle on peut ramener l'équation différentielle lorsque le coefficient différentiel se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. [Briot et Bouquet 1856b, p. 164]

Ici, il est assez clair que « en général » marque la conscience d'une asymétrie entre les divers cas envisagés. Cependant, il ne s'agit là que d'une remarque au fil du texte, qui n'est pas particulièrement soulignée par Briot et Bouquet. Le vocabulaire employé n'est pas spécifique, puisque nous avons vu que la locution « en général » est employée par ces auteurs dans des contextes très variés, pas toujours avec le même sens. Rien, dans le reste du texte, ne vient préciser le sens à lui donner.

Poincaré, de son côté, introduit un vocabulaire spécialisé pour marquer les degrés de généralité des divers cas considérés : « Ce cas est plus particulier », « il ne se produit pas si X et Y sont les polynômes les plus généraux de leur degré ». Cette dernière expression, tout particulièrement, réapparaît à plusieurs reprises, à l'identique, et elle y est soulignée par l'usage de l'italique. Poincaré marque donc qu'il l'emploie à chaque fois dans le même sens. Nous aurons à revenir sur son interprétation précise. Mais le contexte d'énumération hiérarchisée, et l'insistance sur la plus grande particularité de certains cas, ne laisse pas de doute sur le fait que Poincaré l'utilise pour argumenter sur le degré de généralité des différents cas.

Exploitation de la hiérarchisation

Les indications données ainsi par Poincaré sur la plus grande particularité de certains cas ne sont pas du tout anecdotiques, surajoutées. Il les exploite de deux façons : en ordonnant systématiquement les cas en fonction de leur degré de généralité, et pour justifier des choix d'exposition. Il accorde en effet, nous l'avons vu, une importance plus grande aux cas principaux, qu'il traite avec davantage de détail. Plus encore, nous verrons dans la partie 2.5 qu'il délimite, en fonction des cas principaux dégagés lors de l'étude des points singuliers, le cadre dans lequel il mènera l'étude globale des solutions dans toute l'étendue du plan.

Chez Briot et Bouquet, on peut reconnaître des indications du même genre dans certains emplois de l'expression « en général ». Mais elles ne sont pas utilisées dans le raisonnement, et elles ne semblent pas influencer les choix d'exposition.

Ainsi, nous avons vu que l'ordre dans lequel sont examinés différents cas paraît surtout guidé par la recherche des conditions dans lesquelles le résultat de Cauchy peut être étendu.

Le choix des exemples, quant à lui, semble viser à illustrer la diversité des comportements possibles, bien plus que le comportement générique.

Ceci se manifeste d'abord pour les exemples de la troisième partie. Briot et Bouquet donnent trois exemples. Les deux premières équations étudiées sont de la forme de l'équation auxiliaire (β). La dernière permet à Briot et Bouquet de montrer comment mettre en œuvre la méthode générale : ils étudient l'équation de Riccati et montrent qu'on peut la ramener à l'étude de l'équation

$$\frac{dv}{dz} = \frac{-bv^2 - az^m}{z^m},$$

qu'ils étudient en détail pour les différentes valeurs possible de m. Or on voit que la partie linéaire de cette équation est dégénérée, même lorsque $m = 1$: il s'agit, dans la terminologie de Poincaré, d'un point singulier de seconde espèce.

Même dans la dernière partie, où ils notent que « en général » on obtient un certain comportement, l'exemple qu'ils choisissent comme illustration de cette partie ne relève pas de ce cas « général ». Ils montrent en effet que :

> *lorsqu'au point z_0 le coefficient différentiel U devient racine d'ordre n de multiplicité, la fonction intégrale u cesse, en général, d'être monodrome et acquiert n valeurs distinctes, quand la variable z tourne autour du point z_0.* » [Briot et Bouquet 1856b, p. 193]

Ils donnent ensuite un seul exemple d'équation où U est donné de façon implicite, en un point où U est racine multiple. Or l'équation qu'ils choisissent conduit à une fonction intégrale qui reste monodrome, contrairement au résultat général. L'exemple proposé ne vient donc pas illustrer le résultat établi. Il semble plutôt présenter une situation qui n'avait pas été rencontrée dans l'analyse théorique et permettre ainsi de couvrir un champ plus vaste de cas possibles.

2.3.3 La réflexion de Poincaré sur la généralité : une approche nouvelle qui est déjà en cours d'élaboration dans les premiers travaux sur les équations différentielles

Par contraste avec les auteurs dont il poursuit les recherches, il apparaît donc que Poincaré introduit une façon spécifique de diviser un problème en plusieurs cas, ordonnés suivant leur degré de généralité.

J'ai dégagé ce mode de travail nouveau à partir du mémoire *Sur les courbes*. Plusieurs raisons motivaient ce choix. Tout d'abord, c'est dans ce texte que Poincaré élabore son approche personnelle des équations différentielles, marquée par l'intérêt porté à l'étude qualitative des solutions réelles. De plus, il fait plusieurs fois référence à ce mémoire dans ses travaux de mécanique céleste. Il s'agit donc d'un texte central pour comprendre comment Poincaré travaille sur les équations différentielles. Par ailleurs, le chapitre sur les points singuliers des équations différentielles constitue un témoin particulièrement remarquable du travail de classification que je cherchais à étudier : du fait du grand nombre de cas envisagés, il fournit un matériau plus abondant pour l'analyse. Ainsi, ce texte me semble donner des clés pour comprendre des allusions plus rapides aux degrés de généralités de différents cas à d'autres endroits de l'œuvre de Poincaré.

Mais les travaux de Poincaré sur les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles commencent, avant le mémoire de 1881 *Sur les courbes*, par une Note publiée en 1878 et sa thèse soutenue en 1879. Ces deux textes relèvent, par contraste avec le mémoire de 1881, de la problématique analytique et locale héritée de Cauchy, Briot et Bouquet. Et, de fait, Poincaré y établit des résultats qui s'inscrivent dans la continuité des recherches de ces auteurs. Or certains aspects du mode de travail spécifique que nous venons de mettre en évidence dans le mémoire *Sur les courbes* y sont déjà présents. Pour le montrer, je vais entrer dans quelques détails de ces textes. Toutefois, le plus souvent, nous n'aurons pas besoin de comprendre toute la démarche de Poincaré : il nous suffira de regarder la forme des énumérations qu'il y présente.

L'introduction de la *Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles* [Poincaré 1878] est particulièrement significative à cet égard. Poincaré y résume les résultats de Briot et Bouquet en ces termes :

> MM. Briot et Bouquet ont étudié les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles. Ils ont démontré que, quand le coefficient différentiel est fonction holomorphe de y et de x, l'équation admet une intégrale y fonction holomorphe de x. Ils ont examiné ce qui se passe quand le coefficient différentiel cesse d'être fonction holomorphe de x et de y, et ils ont fait voir qu'il pouvait se présenter deux cas :

> 1° y est fonction holomorphe de x ou de $x^{\frac{1}{n}}$, n étant un nombre entier quelconque ;
>
> 2° y est une fonction présentant des singularités plus complexes. Dans ce cas, l'équation différentielle peut se ramener à l'une des trois formes
>
> $$\begin{array}{llll} x\frac{dy}{dx} = f(x,y), & \frac{df}{dy} \gtrless 0, & \text{pour} & x=0, \quad y=0, \\ x\frac{dy}{dx} = f(x,y), & \frac{df}{dy} = 0, & \text{"} & x=0, \quad y=0, \\ \ldots, & \ldots, & \text{"} & \ldots, \quad \ldots, \\ x^m\frac{dy}{dx} = f(x,y), & & & \end{array}$$
>
> où $f(x,y)$ est holomorphe en x et y. C'est la première de ces formes qui se présentera si l'équation différentielle donnée, étant algébrique, est la plus générale *de son degré*.
>
> C'est celle aussi que MM. Briot et Bouquet ont étudiée plus particulièrement, et c'est à elle que se bornera la présente étude. [Poincaré 1878, p. XXXVI–XXXVII]

D'un point de vue purement textuel, nous voyons déjà que ce texte de Poincaré est fortement structuré par une énumération à deux niveaux. Le premier est marqué par la numérotation des deux cas que Poincaré tire des travaux de Briot et Bouquet, et le deuxième niveau est mis en évidence par la disposition en tableau des trois formes d'équations correspondant au deuxième cas.

D'un point de vue mathématique, le cas 1° se rapporte à la deuxième partie de l'étude de Briot et Bouquet : il s'agit du cas où le coefficient différentiel devient infini. Nous avons déjà noté que ce cas disparaît dans le cadre du mémoire de 1881, puisque Poincaré fait jouer le même rôle aux deux variables x et y correspondant aux quantités z et u de Briot et Bouquet. De fait, dans les exemples, Briot et Bouquet intervertissaient eux-mêmes volontiers les rôles de u et z au cours du calcul, cherchant d'abord z fonction de u. Cependant, ils traduisaient ensuite toujours le résultat de façon à donner les propriétés de u vu comme fonction de z.

Le cas 2° , quant à lui, correspond aux valeurs indéterminées $\frac{0}{0}$ du coefficient différentiel. Briot et Bouquet se contentaient de remarquer que l'équation se ramène, « en général », à l'étude d'équations de la forme (β) : $t\frac{d\xi}{dt} = f(\xi,t)$. Ce commentaire est assez vague — nous avons vu que Briot et Bouquet emploient l'expression « en général » avec des sens divers. Poincaré, de son côté, distingue dès ce moment deux cas pour la même forme $x\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, suivant que $\frac{df}{dy}$ s'annule, ou non, en $(0,0)$. De plus, il souligne beaucoup plus explicitement la plus grande généralité de la première forme, où $\frac{df}{dy}$ est non nul, par rapport aux autres. Il introduit à cet effet l'expression « la plus générale de son degré » que l'on retrouve dans les mémoires *Sur les courbes*. Autrement dit, dès 1878, Poincaré attire l'attention sur les différences de degré de généralité des cas en présence, et introduit une terminologie spécifique à ce questionnement. La remarque peu précise de Briot et Bouquet montre, en comparaison, qu'ils avaient vraisemblablement conscience d'une différence, du point de vue de la généralité, entre les deux alternatives, mais que cette différence n'était pas un point capital de leur analyse.

L'écart entre l'attitude de Briot et Bouquet et celle de Poincaré se manifeste encore par la suite donnée à cette remarque. Briot et Bouquet ne reviennent pas sur cette appréciation de la généralité lorsqu'ils examinent les autres alternatives. Comme Poincaré le relève, ils ne traitent pas en détail l'équation $t^m \frac{d\xi}{dt} = a\xi + bt + \dots$, plus complexe que l'équation (β). Ils se contentent en effet, nous l'avons vu, de montrer qu'une telle équation n'admet pas toujours une intégrale monodrome, en étudiant le cas particulier de l'équation $t^2 \frac{d\xi}{dt} = a\xi + \varphi(t)$. Mais ils ne soulignent pas du tout le caractère incomplet de cette étude. Poincaré, au contraire, annonce dès l'introduction qu'il focalise son attention sur la première forme, et relie ce choix au fait que c'est celle qui se présente lorsque l'équation est « la plus générale de son degré ». Ainsi, l'affirmation de la plus grande généralité de la première forme motive explicitement, chez Poincaré, d'y restreindre l'étude — et non pas seulement de lui accorder une attention plus grande.

Après cette introduction, l'analyse de Poincaré procède de façon tout à fait similaire au mémoire de Briot et Bouquet. Il étudie les intégrales non holomorphes dont ses prédécesseurs ont démontré l'existence sans en déterminer la forme précise. Il montre qu'elles sont holomorphes en x et x^λ si $\lambda = \frac{df}{dy}(0,0)$ n'est pas entier, en x et $x \log x$ si λ est entier. La technique de démonstration est celle employée par Briot et Bouquet, à l'aide de séries majorantes.

La thèse soutenue l'année suivante par Poincaré [1879] est particulièrement remarquable pour sa structuration très forte par des séries d'énumérations de cas, qui annonce le mémoire de 1881.

Dès le moment où Poincaré aborde le cœur de sa thèse, après une série de lemmes préliminaires, une première liste de cas gouverne le découpage de l'étude qui suit en deux parties. Poincaré considère une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\mathrm{F}(z, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0,$$

où F est un polynôme en les z, p et x et où $p_i = \frac{dz}{dx_i}$. Il définit

$$\mathrm{Z} = \frac{d\,\mathrm{F}}{dz}, \quad \mathrm{X}_i = \frac{d\,\mathrm{F}}{dx_i}, \quad \mathrm{P}_i = \frac{d\,\mathrm{F}}{dp_i}.$$

Cauchy s'était intéressé dans [Cauchy 1841] au cas où l'on peut, au voisinage du point considéré, résoudre l'équation par rapport au dernier coefficient différentiel, c'est-à-dire la mettre sous la forme (dans les notations de Poincaré) :

$$\frac{dz}{dx_n} = g(x_1, \dots, x_n, z, \frac{dz}{dx_1}, \dots, \frac{dz}{dx_{n-1}}).$$

L'équation peut s'écrire ainsi lorsque la quantité P_n est non nulle. La méthode proposée par Cauchy permet de définir une fonction susceptible de représenter l'intégrale de l'équation. Cette fonction conviendra effectivement si certaines fonctions[24] $J_1, \dots, J_{n-1}$ sont identiquement nulles. Dans [Cauchy 1841], leur nullité est démontrée sous l'hypothèse que l'équation est résoluble par rapport au dernier coefficient différentiel, c'est-à-dire que P_n est non nul. Poincaré reprend la question et fait la liste des différents cas pour lesquels les J_i sont toujours nulles [Poincaré 1879, p. LXXI] — c'est surtout la forme des conditions qui nous intéresse ici, leur signification n'est pas centrale pour notre propos :

[24] Je continue à utiliser les notations de Poincaré. Dans son mémoire de 1841, Cauchy traite d'abord le cas de deux variables, ce qui conduit à une seule fonction J_i notée I, puis le cas de trois variables pour lequel il faut étudier deux fonctions I et J.

– « $P_n \gtrless 0$ » ;
– « $P_n = 0$, mais [...] P_i par exemple [n'est] pas nul » ;
– « $P_1 = P_2 = \cdots = P_n = 0$, mais [...] $X_i + p_i Z \gtrless 0$ ».

Ceci le conduit à partager son étude en deux parties : la première partie est consacrée aux « cas où l'on n'a pas à la fois $P_1 = P_2 = \cdots = P_n = 0$, $X_1 + p_1 Z = X_2 + p_2 Z = \cdots = X_n + p_n Z = 0$ », la seconde aux cas où toutes ces égalités sont vérifiées. C'est seulement sous la deuxième hypothèse qu'il faudra se préoccuper des conditions sur les fonctions J_i.

Dans l'introduction, Poincaré opposait différemment ces deux parties :

> Ces cas [les cas exceptionnels où le théorème de Cauchy ne s'applique plus, AR] sont de deux sortes : ou bien la difficulté provient, non de la forme même de l'équation proposée, mais de la manière dont est définie l'intégrale particulière que l'on étudie ; ou bien elle est due à la forme de l'équation proposée. De là la division naturelle de ce travail en deux Parties. [Poincaré 1879, p. LI]

Mais ce sont les conditions algébriques que Poincaré donne comme titres aux deux parties de son mémoire, alors même qu'il dispose d'une autre façon de les caractériser. Notons que ces deux parties correspondent, pour le cas des équations différentielles, aux deux parties centrales du mémoire de Briot et Bouquet : le cas où le coefficient différentiel devient infini d'une part, celui où il prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ d'autre part. Ces deux problèmes étaient donc traités part Briot et Bouquet au même niveau. Poincaré, lui, y voit des problèmes de types bien différents. D'abord ils sont définis, l'un par une inégalité, l'autre par une égalité, et la gradation entre ces deux conditions est d'autant plus apparente qu'elle vient comme prolonger une liste de conditions mettant en jeu un nombre de plus en plus grand d'égalités. Poincaré ne souligne pas explicitement la différence, du point de vue du degré de généralité, qui résulte de la forme de ces conditions. Mais l'interprétation qu'il donne des deux parties de son mémoire dans l'introduction fait apparaître une différence de nature entre les deux cas. Dans le premier, la difficulté est décrite comme accidentelle, due seulement à la façon dont est exprimée l'intégrale cherchée. Au contraire, dans le second, elle provient de la forme même de l'équation étudiée. Poincaré souligne donc la singularité plus intrinsèque des points de la deuxième sorte. Ici, son commentaire ne porte pas exactement sur le degré de généralité, mais il s'agit bien de confronter les propriétés respectives des deux cas, de comparer les circonstances qu'ils définissent. Nous voyons donc qu'ici déjà, Poincaré cherche à comparer les cas qu'il définit, et ne se contente pas de les lister mécaniquement.

Tout au long de la thèse de Poincaré, de telles conditions algébriques, toujours ordonnées de la condition la moins restrictive à celle qui met en jeu le plus grand nombre d'égalités, jouent un rôle important de structuration[25]. Seule la dernière énumération de cas, introduite p. CXX, semble ne pas suivre cet ordre.

[25] Un deuxième mode de structuration résulte de la méthode d'étude introduite par Cauchy : cette méthode consiste à ramener l'étude d'une équation non linéaire à celle d'une équation linéaire avec un plus grand nombre de variables (voir par exemple [Cauchy 1842c], p. 18–19 dans l'édition des *Œuvres*). La division de la deuxième partie du texte de Poincaré en trois sections relève de cette logique : Poincaré examine d'abord le cas d'une équation linéaire d'une forme particulière, puis le cas d'une équation linéaire quelconque, et enfin le cas d'une équation non linéaire, en ramenant les deux derniers cas au premier. La méthode indiquée aux p. LXXXIII et suivantes pour calculer plus rapidement les coefficients de l'équation définissant l'intégrale est exposée suivant le même schéma. C'est encore la considération successive du

Poincaré examine successivement les cas suivants — ici encore, c'est seulement la forme des conditions qui nous intéresse :

1º $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{n-1} = 0$, $\mu_n = \infty$;
2º $\mu_n = 0$; mais on n'a pas à la fois $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{n-1} = 0$;
3º μ_n est fini et de plus $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{n-1} = 0$.

En fait, après avoir donné cette liste des cas en fonction des valeurs des μ_i, Poincaré revient au problème à résoudre. Ceci lui permet de donner une interprétation de la condition qui définit le premier cas. L'intégrale de l'équation aux dérivées partielles a été obtenue sous la forme d'équations implicites de la forme $T_i = 0$ desquelles on peut tirer z en fonction des x_i. Poincaré montre que les T_i satisfont eux-mêmes à des équations implicites

$$T_i^m + A_{m-1}^{(i)} \mu_n^{\lambda_i} T_i^{m-1} + \cdots + A_1^{(i)} \mu_n^{(m-1)\lambda_i} T_i + A_0^{(i)} \mu_n^{m\lambda_i} = 0.$$

Il commente ces équations en faisant remarquer que les cas 2º et 3º conduisent à une dégénérescence de ces équations, qui ne permettent plus de déterminer les solutions :

> Il est clair que, si l'on annule μ_n ou si l'on annule les $n-1$ premiers μ sans rendre μ_n infini, on annule les T, et par conséquent z, les x et les p.

C'est après avoir souligné cette dégénérescence des cas 2º et 3º qu'il propose de commencer par étudier le premier cas :

> Nous allons d'abord supposer que μ_n tende vers l'infini en même temps que les autres μ tendent vers zéro. [Poincaré 1879, p. CXXI]

Ainsi, avant de se lancer dans l'étude successive des trois cas qu'il vient de distinguer, Poincaré commente la situation d'une façon qui fait apparaître le premier cas décrit comme un cas privilégié, non dégénéré.

Il n'entre pas dans mon propos de présenter une analyse exhaustive des énumérations que contient la thèse de Poincaré. J'ai présenté celles qui appelaient un commentaire particulier pour la question qui m'occupe. Qu'il me suffise de dire que Poincaré semble adopter comme un mode de travail privilégié la constitution, pour étudier un problème donné, d'une liste de cas caractérisés par des égalités et inégalités entre les coefficients des équations étudiées. Ces cas sont ordonnés de façon à placer les cas plus généraux avant les cas plus particuliers. C'est ensuite cas par cas qu'il étudie le problème qui l'intéresse. Une illustration caractéristique est la liste de cas qui commence ainsi [Poincaré 1879, p. LXXXVII–XCII] :

– Premier cas $\quad \Delta\beta \gtrless 0$ (et sous-entendu : $\Delta\theta = 0, \quad \Delta^2\theta \gtrless 0$)
– Deuxième cas $\quad \Delta\beta \gtrless 0, \quad \Delta\theta = \Delta^2\theta = 0, \quad \Delta^3\theta \gtrless 0$
– Troisième cas $\quad \Delta\beta = \Delta\theta = 0, \quad \Delta^2\beta \gtrless 0, \quad \Delta^2\theta \gtrless 0$
– Quatrième cas $\quad \Delta\beta = \Delta\theta = \Delta^2\theta = 0, \quad \Delta^3\theta \gtrless 0$.

On observe donc la permanence de cette façon de travailler par énumérations ordonnées dans tous les travaux de Poincaré sur les équations différentielles.

---

cas linéaire puis du cas non linéaire qui conduit à distinguer le deuxième et le troisième cas p. LXXVI et LXXVII.

Par ailleurs, Poincaré donne à plusieurs reprises une interprétation géométrique des conditions algébriques qu'il introduit. Nous l'avons vu dans son mémoire *Sur les courbes*, mais cette caractéristique de son travail est présente dès sa thèse. Donnons-en un exemple, sans entrer dans le détail mathématique. Dans une section intitulée « premier cas », Poincaré démontre un théorème sous l'hypothèse

$$\sum_i \mathrm{P}_i \frac{d\theta}{dx_i} \gtrless 0. \tag{9}$$

Après la démonstration, et avant de passer à l'étude des cas suivants, il insère le commentaire suivant :

> *Interprétation géométrique.* — Supposons que l'on n'ait que deux variables indépendantes x et y ; l'intégrale
>
> $$z = f(x, y)$$
>
> peut alors être considérée comme représentant une surface S.
>
> Il est facile, dans ce cas, de trouver une interprétation géométrique de la condition $[\sum \mathrm{P}_i \frac{d\theta}{dx_i} \gtrless 0]$.
>
> [...] Dire que
>
> $$\sum_i \mathrm{P}_i \frac{d\theta}{dx_i} \gtrless 0,$$
>
> c'est dire que T n'est pas sur le cône C. [...]
>
> [Poincaré 1879, p. LXXV–LXXVI]

Dès la définition du deuxième cas, il reprend cette interprétation géométrique :

> DEUXIÈME CAS
>
> $y_1, y_2, \ldots, y_n$ restent finis, mais la condition (9) n'est pas remplie.
>
> Géométriquement, c'est dire que le plan P ne passe pas par l'axe des z, mais que T est sur le cône C.
>
> [Poincaré 1879, p. LXXVI]

Cette interprétation géométrique dans le cas de deux variables revient ensuite régulièrement au long de l'étude. Comme dans le mémoire de 1881, nous voyons donc que Poincaré interprète, en termes géométriques, les conditions algébriques qu'il manipule.

Par ailleurs, on voit émerger dans ce texte de Poincaré une terminologie spécialisée qu'il reprend en 1881. À côté de l'expression « en général » qui est utilisée dans plusieurs sens différents, comme chez Briot et Bouquet, Poincaré emploie à deux reprises [Poincaré 1879, p. L et CXIX] l'expression « le cas le plus général », toujours pour opposer un cas plus général à d'autres cas plus particuliers. Il qualifie également le cas où une certaine équation $\varphi(z) = 0$ a des racines multiples de « cas d'exception » [Poincaré 1879, p. LIX], une expression que nous retrouverons dans ses travaux de mécanique céleste.

Ceci montre bien que les premiers travaux de Poincaré, tout en s'inscrivant dans une grande continuité avec ceux de Cauchy, Briot et Bouquet, contiennent plusieurs éléments qui lui sont propres et que l'on retrouve en 1881 lorsqu'il élabore sa nouvelle approche des équations différentielles. Aussi bien dans la

Note de 1878 que dans la thèse, l'établissement de listes hiérarchisées de cas constitue un élément important du travail mathématique. Poincaré commence également à mettre en place une terminologie propre pour comparer des cas du point de vue de leur degré de généralité. De plus, dans la Note de 1878, nous voyons que la classification des cas est exploitée pour focaliser l'étude sur le cas le plus général. Enfin, il s'intéresse dès sa thèse à l'interprétation géométrique qu'il peut donner des conditions qu'il est amené à formuler. Nous verrons que ces caractéristiques sont constitutives de la nouvelle méthode d'étude des équations différentielles qu'il propose en 1881.

2.4 *Raisonnement générique* et hiérarchisation des cas

Nous avons pu voir dans la partie 2.2 que Poincaré emploie, dans son analyse des points singuliers des équations différentielles, des notions provenant de l'algèbre. Ceci est favorisé par le choix d'étudier des équations différentielles d'une forme spéciale, définies par la donnée de deux polynômes X et Y. Ainsi Poincaré peut interpréter les conditions sous lesquelles on obtient certains types de points singuliers en faisant référence aux courbes algébriques $\mathrm{X} = 0$ et $\mathrm{Y} = 0$, et à leurs intersections. La référence à ces courbes et leur utilisation pour la formulation des hypothèses que Poincaré adopte sont encore plus importantes dans la suite du mémoire. Par ailleurs, Poincaré souligne le caractère « plus particulier » de certains types de points singuliers en affirmant qu'ils ne se présentent pas si X et Y sont « les polynômes les plus généraux de leur degré ». Cette expression semble également être empruntée au langage de l'algèbre. On la trouve en effet dans le chapitre consacré à la théorie de l'élimination dans le *Cours d'algèbre* de Serret [1866].

Or Poincaré ne commente pas l'expression « polynômes les plus généraux de leur degré », qu'il emploie à quelques reprises dans son mémoire. Il en résulte qu'il est difficile, à la seule vue de ce mémoire, d'en donner une interprétation certaine. Mais cette même expression est au cœur d'un travail spécifique de Serret qui porte, je vais le montrer, sur une forme d'opposition entre général et particulier. L'examen du texte de Serret nous permettra de dégager précisément la signification que ce dernier donne à cette expression. Munis de ce point de comparaison, nous pourrons déterminer les éléments par lesquels la démarche de Poincaré se rapproche, ou au contraire se distingue, de celle de Serret. Je proposerai alors une interprétation de l'expression « polynômes les plus généraux de leur degré » dans le texte de Poincaré.

Au delà de l'intérêt qu'elle présente pour discuter du sens de cette expression, l'étude du travail de Serret permet, par différenciation, de décrire plus précisément comment Poincaré articule les cas qu'il considère et comment il oppose cas général et cas plus particuliers. À ce titre, le choix du texte de Serret peut paraître arbitraire, et il l'est dans une certaine mesure. Mais pour une première analyse, il se présente de façon très naturelle. C'était en effet un ouvrage de référence en algèbre à l'époque où écrit Poincaré, si bien que Poincaré le connaissait probablement. Soit directement, soit indirectement, il est vraisemblable que les « polynômes les plus généraux de leur degré » fassent écho à la terminologie de Serret.

À l'aide des recherches de T. Hawkins sur le développement de la théorie spectrale des matrices, je montrerai par ailleurs la diversité des modes de travail sur un « cas général », à l'exclusion de « cas particuliers », à cette époque. Ceci me permettra de proposer des éléments de typologie du travail sur le général et le particulier. Ils nous serviront pour ébaucher une caractérisation des démarches de Serret et Poincaré — travail qui restera à approfondir.

2.4.1 Les « polynômes les plus généraux de leur degré » dans le *Cours d'algèbre* de Serret

C'est au chapitre IV de l'ouvrage de Serret [1866] que nous nous intéresserons ici. Serret y traite des équations simultanées et de la théorie de l'élimination. Cette dernière concerne des systèmes d'« équations algébriques », c'est-à-dire d'équations de la forme $\mathrm{V} = 0$ où V est un polynôme en plusieurs variables. Lorsqu'un système de n telles équations en n variables est donné, la théorie de l'élimination vise à trouver une « équation finale » obtenue à partir des n équations de départ en éliminant toutes les variables sauf une.

Serret traite de la théorie de l'élimination d'abord sous l'hypothèse que les équations (algébriques) entre lesquelles on cherche à éliminer les variables ont « la plus grande généralité possible » [Serret 1866, par ex. p. 151]. Il dit aussi à d'autres endroits : « lorsque [les équations] sont complètes et que leurs coefficients demeurent indéterminés » [par ex. p. 156]. Je chercherai à bien préciser le sens qu'ont ces formules ainsi que la façon dont Serret travaille effectivement sur des systèmes d'équations supposés satisfaire à ces hypothèses. Je présenterai ensuite les paragraphes suivants de l'ouvrage de Serret, où il donne des indications pour des cas de dégénérescence[26]. Nous verrons ainsi comment Serret articule cas particuliers et cas général, et ce que signifie la terminologie correspondante dans son ouvrage.

Serret commence par calculer le nombre de termes que contient une fonction entière (autrement dit, un polynôme à plusieurs variables) lorsqu'elle est « la plus générale de son degré » :

> Considérons d'abord une fonction homogène et entière des $n+1$ variables
>
> $$z_1,\, z_2,\, z_3, \ldots,\, z_n,\, z_{n+1},$$
>
> et du degré m. Si cette fonction est la plus générale de son degré, elle renfermera tous les termes qui, abstraction faite d'un coefficient constant, seront de la forme
>
> $$z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \ldots z_n^{\alpha_n} z_{n+1}^{\alpha_{n+1}},$$
>
> la somme des exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ étant égale à m. [Serret 1866, p. 142]

Suivent une dizaine de pages consacrées au dénombrement des termes de différentes sortes dans une telle fonction.

Ces calculs sont ensuite employés dans les démonstrations de la suite du chapitre de la façon suivante. On se ramène à un problème qui consiste à égaler

[26] Serret n'emploie pas ce terme. Nous y reviendrons.

deux polynômes en jouant sur des constantes arbitraires entrant dans les coefficients de l'un d'eux. Donnons un exemple pour fixer les idées. On cherche à égaler deux polynômes de la forme

$$A_0 + A_1x + A_2y + A_3x^2 + A_4xy + A_5y^2 + \cdots + A_lx^\alpha y^\beta$$
$$\text{et} \quad a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + \cdots + a_lx^\alpha y^\beta,$$

où les A_i sont des expressions contenant des constantes arbitraires $u_1, u_2, \ldots, u_h$. Pour que les polynômes soient égaux, il faudra trouver des valeurs des u_i telles que toutes les équations $A_j(u_1, u_2, \ldots, u_h) = a_j$ soient vérifiées. On obtient donc un système d'équations en nombre égal au nombre l de monômes distincts présents dans les polynômes considérés. Les variables, ou inconnues, u_i sont les constantes arbitraires sur lesquelles on peut jouer. De fait, les systèmes d'équations dans les problèmes considérés sont toujours, dans ce chapitre de l'ouvrage de Serret, des systèmes linéaires (à second membre). L'argument consiste alors à affirmer qu'on peut trouver des valeurs convenables des constantes arbitraires à condition que le nombre des variables soit au moins égal au nombre des équations, c'est-à-dire si $h \geqslant l$. Pour le problème de départ, cette condition se traduit par une inégalité entre le nombre de constantes arbitraires et le nombre de termes à égaler entre les polynômes considérés.

Pour le lecteur moderne, l'égalité entre le nombre de variables et le nombre d'équations ne suffit pas, et il faut encore vérifier qu'il n'y a pas d'incompatibilité entre les équations. On dirait que l'argument est correct à condition que le déterminant du système ne soit pas nul. Cette condition porte sur les coefficients des équations du système. Serret est conscient de cette contrainte, et c'est la façon dont il s'assure qu'elle est satisfaite qui nous intéresse particulièrement.

Le premier raisonnement de ce type, apparaît au n°69. Serret considère k équations algébriques

$$\mathrm{V}_1 = 0, \quad \mathrm{V}_2 = 0, \quad \ldots, \quad \mathrm{V}_k = 0 \tag{2.2}$$

en n variables z_1, z_2, …, z_n, de degrés respectifs m_1, m_2, …, m_k. Une fonction entière S, de degré m, de ces n variables étant donnée, Serret veut montrer qu'on peut, à l'aide des équations (2.2), faire disparaître de l'expression de S tous les termes contenant l'un des z_i avec $i \leqslant k$ à une puissance supérieure à m_i.

Si par exemple $k = 2$, $n = 3$, $m_1 = 2$ et $m_2 = 1$, on considère deux équations $V_1 = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^3 + a_4xy + a_5yz + a_6xz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10} = 0$ et $V_2 = b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0$. Dans un polynôme S en x, y et z, on cherche à faire disparaître les termes contenant x^2 ou y en facteur à l'aide de ces deux équations. Dans cet exemple, c'est très simple : la première équation donne $x^2 = \frac{1}{a_1}[\ldots]$, et la seconde $y = \frac{1}{b_2}[\ldots]$. Il suffit de substituer successivement ces expressions à x^2 et y. Mais si par exemple V_2 est de degré 2, le même procédé ne fonctionne pas. Il faut utiliser les deux équations simultanément.

Serret reformule le problème sous la forme suivante : chercher des polynômes T_i de degrés $m - m_i$ tels que

$$S' = S + \mathrm{T}_1\,\mathrm{V}_1 + \cdots + \mathrm{T}_k\,\mathrm{V}_k$$

ne contient plus de termes ayant en facteur $z_i^{m_i}$. Les coefficients des T_i sont les constantes arbitraires (les u_i ci-dessus) sur lesquelles on peut jouer, Serret détermine leur nombre (h). Il calcule également le nombre de termes à faire disparaître dans l'expression de S' (l), qui donne le nombre d'équations du système qui détermine les T_i, et montre qu'il y a plus de constantes arbitraires que d'équations à satisfaire ($h \geqslant l$).

Serret souligne pour justifier la validité de son raisonnement que les coefficients des équations $\mathrm{V}_i = 0$ sont supposés indéterminés, ce qu'il formule encore en disant que les équations $\mathrm{V}_i = 0$ ont la plus grande généralité possible. Or les coefficients des V_i sont exactement les coefficients du système qui détermine les T_i. Ce dernier est donc un système linéaire à coefficients indéterminés, ce qui semble suffire à Serret pour assurer qu'il ne contient pas d'équations incompatibles.

Cette interprétation est confirmée par la lecture du paragraphe suivant, où Serret juge nécessaire d'argumenter pour montrer qu'il n'y a pas d'incompatibilité entre les équations.

Le raisonnement y est du même type. Mais cette fois, les coefficients du système linéaire qui doit permettre de fixer les constantes arbitraires dont on dispose sont formés de façon plus complexe à partir des coefficients des équations de départ.

Commençons par donner quelques détails sur le problème étudié. Les hypothèses de départ sont les suivantes :

> Soient
>
> $$\mathrm{V}_1 = 0, \quad \mathrm{V}_2 = 0, \quad \ldots, \quad \mathrm{V}_n = 0$$
>
> n équations algébriques des degrés $m_1, m_2, \ldots, m_n$ respectivement et contenant n inconnues
>
> $$z_1, z_2, \ldots, z_n;$$
>
> nous supposerons, comme au n°69, que chacune des équations proposées est la plus générale possible, et qu'il n'existe aucune relation entre les coefficients. [Serret 1866, p. 153]

Le problème consiste à éliminer $n-1$ inconnues entre ces n équations, de façon à se ramener à une seule équation à une inconnue, dite « équation finale ». La méthode exposée par Serret permet de démontrer le théorème de Bezout, qu'il énonce de la façon suivante :

> *Le degré de l'équation finale qui résulte de l'élimination de $n-1$ inconnues entre n équations à n inconnues est égal au produit des degrés de ces équations, lorsque celles-ci sont complètes et que leurs coefficients demeurent indéterminés.* [Serret 1866, p. 155–156]

Serret montre comment déterminer une équation du degré $m = m_1 m_2 \ldots m_n$, qui devra être satisfaite par z_n. Il considère un polynôme complet T_n de degré $m - m_n$, dont tous les coefficients sont des constantes arbitraires. Pour que les équations algébriques initiales soient vérifiées, il faut avoir en particulier $\mathrm{T}_n \mathrm{V}_n = 0$, quels que soient les coefficients de T_n. Si donc on parvient à choisir les coefficients de T_n de façon à ce que ne subsistent dans le polynôme $\mathrm{T}_n \mathrm{V}_n$ que les monômes contenant seulement l'inconnue z_n, l'équation $\mathrm{T}_n \mathrm{V}_n = 0$ fournira l'équation finale cherchée. Reste à vérifier qu'on peut choisir les coefficients de T_n de façon convenable. Serret détermine le nombre de constantes arbitraires dont on peut ainsi disposer, ainsi que le nombre de monômes à faire disparaître dans l'expression $\mathrm{T}_n \mathrm{V}_n$, en tenant compte du fait que les $n-1$ premières équations $\mathrm{V}_i = 0$ permettent déjà, conformément au résultat démontré dans le paragraphe précédent, de faire disparaître les monômes contenant $z_i^{m_i}$ en facteur. Le nombre d'équations se révèle égal à celui des constantes arbitraires. Mais cette fois, les coefficients du système d'équations à résoudre sont des fonctions parfois compliquées des coefficients de T_n. Serret remarque que ceci pourrait conduire à une incompatibilité :

> La démonstration que nous venons de présenter repose sur ce fait, que les coefficients arbitraires du polynôme T_n sont complètement déterminés par les équations du premier degré auxquelles ils doivent satisfaire. Or, bien que le nombre de ces équations soit égal à celui des arbitraires, et que les équations proposées aient la plus grande généralité possible, on pourrait craindre de se trouver ici dans l'un des cas d'incompatibilité dont l'existence est bien connue ; il est facile de montrer qu'il n'en peut être ainsi. [Serret 1866, p. 156]

Pour vérifier qu'il n'en est rien, Serret examine en détail un cas particulier. Lorsque les équations algébriques desquelles on part ont la forme

$$z_1^{m_1} - a = 0, \quad z_2^{m_2} - z_1 = 0, \quad \ldots, \quad z_n^{m_n} - z_{n-1} = 0,$$

on reconnaît *a priori* l'équation finale qui sera $z_n^m - a = 0$, où m est le produit des m_i. Alors si $m' = m/m_n$, le polynôme

$$\mathrm{T}_n = z_n^{(m'-1)m_n} + z_{n-1} z_n^{(m'-2)m_n} + \cdots + z_{n-1}^{m'-1},$$

vérifie $\mathrm{T}_n \mathrm{V}_n = \mathrm{T}_n(z_n^{m_n} - z_{n-1}) = 0$, en tenant compte des $n-1$ premières équations, et satisfait donc aux équations qui déterminent les coefficients de T_n. Serret conclut :

> Il est évident que si l'on applique à ce cas particulier la méthode générale du n°70, on obtiendra cette même valeur de T_n que nous venons de former ; il en résulte que les équations qui déterminent T_n ne peuvent offrir d'impossibilité en général, puisqu'elles n'en présentent pas quand on donne certaines valeurs particulières aux coefficients des équations proposées. [Serret 1866, p. 157]

L'étude de ce cas particulier permet également à Serret de montrer que le degré de l'équation finale donné par le théorème de Bezout est le plus petit possible « tant qu'il s'agit d'équations générales » :

> [...] dans l'exemple que nous venons de considérer, on reconnaît *a priori* que l'équation finale est $z_n^m - a = 0$, et son degré est égal au produit des degrés des proposées. Or, ces dernières sont comprises dans les équations générales du n°70 ; donc l'équation finale qui en résulte est nécessairement comprise dans l'équation finale qui se rapporte au cas général. [Serret 1866, p. 157]

Serret donne ensuite un autre exemple de systèmes d'équations algébriques pour lequel l'équation finale est évidente. Il exprime à nouveau la même conclusion dans des termes un peu différents[27] :

[27] Le même genre de raisonnement se retrouve à plusieurs reprises dans la suite du chapitre.

> Dans les deux cas que nous venons de citer, il est évidemment impossible de tirer des équations proposées une équation en z_n, $\varphi(z_n) = 0$, dont le degré soit inférieur à m ; donc la même chose est également impossible dans le cas des équations générales. [Serret 1866, p. 158]

De l'ensemble de ces passages, il ressort que le « cas des équations générales » n'est pas, pour Serret, de même nature que les « équations particulières ». Il oppose un « cas général » où tous les coefficients sont indéterminés, à des « cas particuliers » dans lesquels ces coefficients — ou certains d'entre eux — reçoivent des valeurs déterminées, ou entretiennent des rapports déterminés entre eux. Dit en langage moderne, le « cas général » considéré par Serret correspond à un calcul formel, mené avec des coefficients indéterminés. Un cas est « particulier », au contraire, lorsque tout ou partie des coefficients des équations considérées ont été fixés, ou lorsque ces coefficients sont liés par des relations déterminées[28].

Dans ce cadre, un cas particulier peut suffire à assurer que la résolution formelle ne rencontre pas d'obstacle : si un système d'équations formelles est tel que pour certaines valeurs des coefficients, il admet une solution, il ne peut pas contenir d'équations contradictoires au niveau formel. En termes modernes : le déterminant d'un système d'équations formelles est une expression en les coefficients des équations. S'il est non nul lorsqu'on donne à ces coefficients certaines valeurs, il ne peut pas être identiquement nul.

Entre l'étude d'un nombre quelconque n d'équations générales de degrés quelconques à n inconnues, et l'examen de ce qui se produit lorsque « les coefficients ont des valeurs particulières déterminées », Serret traite en détail l'« exemple » de trois équations du deuxième degré à trois inconnues. Il commence par donner les calculs auxquels conduit la méthode qu'il vient d'exposer « dans le cas de trois équations générales du deuxième degré entre les trois inconnues x, y, z » [Serret 1866, n°79–80]. Il obtient ainsi une équation finale qu'il écrit $\Theta = 0$. La « discussion des cas particuliers de ce problème » vient seulement dans un deuxième temps, dans un paragraphe séparé. Elle est introduite par ces mots : « Les coefficients des équations proposées ne seront plus dans ce qui va suivre des constantes indéterminées, et nous examinerons les cas principaux dans lesquels la fonction Θ se réduit identiquement à zéro. » [Serret 1866, n°80]

L'inventaire qui suit est particulièrement intéressant, pour la similarité qu'il présente avec ce que nous avons mis en évidence chez Poincaré. Serret examine successivement des cas définis par un nombre croissant de relations entre les coefficients des équations étudiées. Il suffit de considérer les hypothèses successives formulées par Serret pour voir se dégager cette structure — nous n'avons pas besoin d'en savoir plus sur les quantités qui interviennent, X, R, etc.

---

[28] Ainsi, dans le cas où les équations ont la forme

$$z_1^{m_1} - a = 0, \quad z_2^{m_2} - z_1 = 0, \quad \ldots, \quad z_n^{m_n} - z_{n-1} = 0,$$

tous les coefficients ont été fixés sauf a qui demeure arbitraire. L'autre « cas particulier » envisagé est celui où chaque V_i est un produit de m_i facteurs linéaires. Les coefficients de chacun des facteurs linéaires restent indéterminés, mais dès que $n \geqslant 2$, le nombre de tels coefficients arbitraires est inférieur au nombre de coefficients d'une équation générale de degré m_i. Autrement dit, la condition que la fonction V_i se factorise en facteurs linéaires se traduit par des relations entre ses coefficients. V_i n'est donc plus une fonction générale de son degré.

> **81.** [...] Supposons d'abord qu'il n'existe entre les coefficients aucune relation autre que celles qui sont nécessaires pour la réalisation de l'hypothèse où nous nous plaçons. Dans ce cas, la fonction X ne se réduit pas à zéro [...]
>
> **82.** Supposons maintenant que les coefficients des équations proposées soient tels que l'on ait identiquement, non seulement $\Theta = 0$, mais encore $X = 0$; comme au numéro précédent, nous exclurons toute relation inutile pour la réalisation de nos hypothèses. [...] Le cas où les trois fonctions R, R′, R″ se réduisent à zéro sera examiné plus tard, et nous l'excluons en ce moment. [...]
>
> **84.** Considérons enfin le cas où l'on a identiquement $R = 0$, $R' = 0$, $R'' = 0$. [...] [Serret 1866]

La formulation de ces hypothèses, en particulier l'accent sur l'absence de relations supplémentaires entre les coefficients, rappelle la façon dont Serret caractérise le cas « général » par rapport aux équations particulières, au sens qui est le sien. Ainsi par exemple les hypothèses formulées au début du n°69 : « Nous supposerons non seulement que ces équations sont complètes, mais encore que les coefficients de chacune d'elles demeurent indéterminés, en sorte qu'il ne puisse exister entre eux aucune relation. » Il est manifeste que Serret est bien conscient d'introduire des cas qui font intervenir un nombre croissant de conditions. Mais il n'utilise pas les termes « général » et « particulier » dans ce contexte. Ces mots semblent être réservés pour caractériser le niveau formel d'une part, et les problèmes où les coefficients sont spécifiés d'autre part.

De plus, chaque équation particulière est considérée par Serret dans son rapport à l'équation générale plutôt que par rapport à d'autres équations particulières. C'est ce qu'on voit dans le passage suivant. Après avoir étudié les systèmes de trois équations à trois inconnues, Serret revient au cas des systèmes de plusieurs équations avec le même nombre d'inconnues. Il n'a étudié jusque là que le cas général, autrement dit : formel, et s'intéresse maintenant aux « équations simultanées dans lesquelles les coefficients ont des valeurs particulières déterminées. » Il écrit :

> Les systèmes formés de plusieurs équations simultanées entre un pareil nombre d'inconnues peuvent être distingués en deux genres, suivant qu'ils admettent un nombre limité ou un nombre illimité de solutions. Dans le premier cas, l'équation finale relative aux équations proposées doit évidemment être comprise dans l'équation finale qui se rapporte au système composé d'équations générales, en même nombre que les proposées, et respectivement de mêmes degrés que celles-ci. Dans le deuxième cas, il n'y a plus, à proprement parler, d'équation finale [...] [Serret 1866, n°85]

On voit ici que les deux genres entre lesquels Serret propose de répartir les systèmes d'équations sont caractérisés essentiellement par le rapport qu'entretiennent les systèmes étudiés avec le système d'équations générales. Lorsqu'il résume les résultats qu'il obtient au sujet des équations particulières, on observe à nouveau le même phénomène. Les équations particulières sont étudiées en référence aux équations générales du même degré, et non les unes par rapport aux autres :

Le degré de l'équation finale qui résulte de l'élimination de $n-1$ inconnues entre n équations algébriques quelconques à n inconnues est au plus égal au produit des degrés de ces équations.

Dans le passage d'un système d'équations générales à un système d'équations particulières respectivement de mêmes degrés, le degré de l'équation finale peut s'abaisser, soit par l'évanouissement de quelques termes, soit par la suppression d'un facteur. [Serret 1866, n°88]

On retrouve encore la même référence privilégiée au cas général, *i.e.* formel, dans l'étude du passage aux équations particulières. Un point me semble particulièrement intéressant à rapporter, parce qu'il fait intervenir un processus de perturbation et de passage à la limite comparable à ce que nous avons rencontré chez Poincaré. Serret s'intéresse au cas d'un système d'équations particulières pour lesquelles l'équation finale obtenue par le calcul formel est identiquement nulle. Il propose de le remplacer par un système perturbé dans lequel chaque coefficient A, B, etc. des équations de départ est augmenté d'un multiple de ε. Serret souligne que le système perturbé est « un système d'équation générales ». C'est cette propriété qu'il mettra à profit pour l'étude du système de départ :

87. Supposons maintenant que la fonction[29] $f(z_n)$ se réduise identiquement à zéro quand on fait $A = A^{(0)}$, $B = B^{(0)}$, ... Nous poserons

$$A = A^{(0)} + \varepsilon A^{(1)}, \quad B = B^{(0)} + \varepsilon B^{(1)}, \quad C = C^{(0)} + \varepsilon C^{(1)}, \ldots;$$

$A^{(1)}$, $B^{(1)}$, $C^{(1)}$, ... étant, ainsi que ε, des constantes indéterminées, en sorte que la généralité des équations [...] ne sera point altérée. [Serret 1866, n°87]

La généralité des équations dans lesquelles les coefficients $A, \ldots$ sont remplacés par $A^{(0)} + \varepsilon A^{(1)}, \ldots$ est bien mise en relation directe avec le fait que les constantes ε, $A^{(1)}, \ldots$ sont indéterminées, et peuvent donc être traitées de la même façon que les coefficients $A, \ldots$ des équations générales pour lesquelles Serret avait d'abord donné la méthode d'élimination. Le système perturbé n'est donc pas vu ici comme un système particulier qui possède des propriétés différentes du système particulier de départ, mais bien comme un système général dont les coefficients sont indéterminés.

Ainsi, ici encore, nous voyons que Serret met en rapport un système d'équations particulières avec le système d'équations générales des mêmes degrés, plutôt qu'il ne s'intéresse aux relations entre différents systèmes d'équations particulières du même degré.

2.4.2 *Raisonnement générique* d'après Hawkins

Dans une série d'articles [Hawkins 1975a, 1975b, 1977a, 1977b][30], Hawkins s'intéresse à la théorie des matrices au XIX^e^ siècle. Il en étudie plusieurs aspects,

[29] Serret a défini un peu plus haut les notations qu'il emploie. $f(z_n) = 0$ est l'équation finale obtenue en éliminant z_1, z_2, ..., z_{n-1} entre n équations générales de degrés donnés, dont les coefficients sont notés A, B, ...

[30] Merci à Frédéric Brechenmacher qui a attiré mon attention sur ces travaux.

parmi lesquels un surtout retiendra notre attention : l'attitude des protagonistes vis-à-vis de l'extension de la validité de leurs résultats. Hawkins confronte ce qu'il nomme *raisonnement générique* (« *generic reasoning* ») à la « vraie généralité » poursuivie par Weierstrass et ses élèves à Berlin. Une citation de Kronecker illustre bien cette opposition :

> Il est commun — en particulier dans les questions algébriques — de rencontrer des difficultés tout à fait nouvelles lorsqu'on veut s'affranchir de la restriction aux cas qui sont usuellement désignés comme généraux. Dès qu'on quitte la surface de la prétendue généralité, qui exclut toutes les particularités, pour plonger dans la vraie généralité, qui comprend toutes les singularités, on trouve habituellement d'abord les véritables difficultés du problème, mais également, dans le même temps, la richesse des nouveaux points de vue et des phénomènes qu'il contient en ses profondeurs. [Kronecker 1874, p. 405][31]

Une des thèses de Hawkins est que cet objectif de Weierstrass et de ses élèves, qu'il met sur le compte de la « rigueur », joue un rôle moteur dans le développement de la théorie des matrices, en poussant les Berlinois à forger de nouvelles méthodes de travail.

De fait, les indications données par Hawkins montrent que ce qu'il appelle *raisonnement générique* regroupe des façons de travailler substantiellement différentes. Les tentatives pour dépasser l'imprécision qui accompagne souvent ce mode de raisonnement sont également diverses. De la sorte, Hawkins balise, au fil de son étude de l'histoire des matrices, un champ de travail passionnant qui appelle une analyse plus fine des types de raisonnement sur le « général » et des critiques qui leur sont adressées. Je ne me suis pas lancée dans cette analyse des textes primaires. Mais le compte-rendu qu'en donne Hawkins permet déjà de mettre en évidence différentes pratiques et d'ébaucher une typologie.

La théorie des matrices pourrait sembler n'avoir guère de rapports avec les recherches de Poincaré auxquelles je m'intéresse principalement. La distance est moins grande qu'il n'y paraît. Ceci tient à deux raisons conjuguées. D'une part les recherches sur la théorie spectrale des matrices se sont développées d'abord à propos de divers problèmes provenant de contextes physiques [Hawkins 1977b, p. 158]. Une partie des travaux examinés par Hawkins sont ainsi orientés vers l'étude de systèmes d'équations différentielles linéaires. Or c'est justement l'horizon principal de la classification des points singuliers de Poincaré, qui repose sur l'étude des valeurs propres du système. D'autre part, Poincaré s'est intéressé, en même temps qu'il travaillait sur les points singuliers des équations différentielles, à la théorie des formes cubiques et quaternaires [Poincaré 1880b, 1881b]. Cette théorie s'est constituée au cours du XIX^{e} siècle en rassemblant des recherches provenant de divers domaines, entre autres de la physique, de la théorie des

[31] « Denn man ist es gewohnt — zumal in algebraischen Fragen — wesentlich neue Schwierigkeiten anzutreffen, wenn man sich von der Beschränkung auf diejenigen Fälle losmachen will, welche man als die allgemeinen zu bezeichnen pflegt. Sobald man von der Oberfläche der sogenannten, jede Besonderheit ausschliessenden Allgemeinheit in das Innere der wahren Allgemeinheit eindringt, welche alle Singularitäten mit umfasst, findet man in der Regel erst die eigentlichen Schwierigkeiten der Untersuchung, zugleich aber auch die Fülle neuer Gesichtspunkte und Erscheinungen, welche sie in ihren Tiefen enthält. » Cité par Hawkins [1977b, p. 139].

nombres, questions peu à peu reconnues comme relevant d'un même questionnement. C'est principalement dans ce cadre que sont formulés les apports de Weierstrass et Kronecker à la théorie spectrale, apports dont Hawkins dégage l'importance historique. L'approche explicitement matricielle, montre-t-il, s'est vraiment répandue seulement plus tard, en intégrant les résultats de la théorie des formes cubiques et quaternaires. Ainsi le corpus constitué par Hawkins est propre à fournir des éléments de comparaison significatifs pour notre étude du travail de Poincaré.

Hawkins caractérise le « raisonnement générique » par deux propriétés : le caractère formel des opérations, menées sur des coefficients indéterminés, et l'imprécision au sujet des conditions sous lesquelles ces raisonnements sont valides. Il écrit ainsi :

> Cayley's reasoning is an example of the generic reasoning, as I shall call it, that was common in the 18th and early 19th centuries. It was a by-product of the method of symbolical Analysis pioneered by Vieta and Descartes and applied with extraordinary success by 18th-century continental mathematicians. One of the virtues of the method was its great generality : the reasoning proceeds by formal operations on symbols which are not assigned specific values but are regarded as representing magnitudes in general. The method of analysis brought with it a tendency to gloss over possible specific values of the symbols for which the reasoning fails. It was usually never clear under exactly what conditions theorems established by such "general", i.e. generic, reasoning were valid. Attention was focused upon the "general" case. [Hawkins 1977a, p. 94]

Chacune de ces deux caractéristiques appelle une analyse plus précise des différents auteurs évoqués par Hawkins. Il est presque évident que Viète et Cayley ne travaillent pas de la même façon. Même si tous deux effectuent, avec des coefficients indéterminés, des manipulations que nous interprétons comme formelles, leurs contextes de travail sont bien différents. Quelques pistes se présentent d'emblée.

D'abord les recherches étudiées par Hawkins se rapprochent tantôt de l'algèbre, tantôt de l'analyse. Cayley est héritier de l'école algébrique anglaise, qui a élaboré toute une réflexion sur le calcul symbolique. À l'opposé, Hawkins évoque par exemple la préface du *Cours d'analyse* de Cauchy [1821]. Ce dernier y insiste sur le fait qu'il s'est gardé de « recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre », qui « tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment ». Entre ces deux extrêmes, on pourrait sans doute distinguer divers cadres de travail, suivant les domaines des mathématiques en relation avec lesquels la recherche est menée.

Outre les différences de contexte, les façons de travailler avec des coefficients indéterminés peuvent être très variées. Hawkins note la nouveauté des problèmes rencontrés par Lagrange et Laplace. Jusque là, on s'était surtout intéressé à des systèmes d'équations différentielles simples, dont la plupart des coefficients étaient nuls. On disposait alors de moyens spéciaux pour étudier les valeurs propres. Mais, affirme Hawkins, « the work of Lagrange and Laplace led to the consideration of differential equations and eigenvalue problems of a much more general nature — *i.e.*, the coefficients were not specific numbers » [Hawkins 1975b, p. 563]. Qu'entend-il par là ? S'agit-il de traiter plusieurs cas à la fois en utilisant des lettres pour représenter diverses valeurs numériques possibles ? S'agit-il de traiter tous les cas à la fois ? Ou s'agit-il d'un véritable calcul formel ? Les équations aux coefficients indéterminés envisagées par Serret dans les travaux que nous avons examinés ci-dessus ne représentent pas du tout un ensemble d'équations numériques traitées d'un même mouvement grâce à la notation symbolique. Il s'agit d'un calcul formel distingué de ses instantiations possibles. Serret, nous l'avons vu, va jusqu'à utiliser les résultats connus dans certains cas particuliers pour en déduire des propriétés du problème formel correspondant. Mais tel n'est certainement pas le cas de tous les travaux étudiés par Hawkins : il faudrait mener une enquête plus précise pour déterminer ce que représentent les coefficients indéterminés chez chacun des auteurs étudiés.

La deuxième caractéristique donnée par Hawkins pour indiquer ce qu'il entend par « raisonnement générique » recouvre également des pratiques multiples. De fait, Hawkins évoque différentes modalités selon lesquelles un auteur laisse imprécisées les limites de validité du théorème qu'il établit. L'existence d'exceptions peut être signalée ou non. Certains auteurs se contentent d'avertir de leur existence ; d'autres cherchent à déterminer les cas dans lesquels le raisonnement proposé ne tient pas. Dans les travaux que Hawkins identifie comme procédant par « raisonnement générique », il note que les auteurs font preuve, au long de la période étudiée, de précautions croissantes.

Il s'intéresse en particulier au traitement par Sylvester du théorème de Cayley. Selon ce théorème, si l'on considère des matrices à n lignes et n colonnes, toute matrice N qui commute avec une matrice donnée M est de la forme $N = f(M)$, où f est un polynôme de degré au plus $n - 1$. Sylvester note que le raisonnement qu'il propose ne tient pas si l'une des matrices possède deux valeurs propres égales. Cet exemple permet à Hawkins de montrer un deuxième niveau où ce qu'il appelle toujours « raisonnement générique » induit une ambigüité sur les limites de validité des théorèmes qui sont établis de cette façon. Il note : « it is usually unclear whether or not the theorem is true in the singular cases for which the generic argument fails ». Il montre ensuite la prise de conscience progressive par Sylvester des différences entre les limites de validité de la preuve qu'il propose, et celles du théorème, qui reste vrai dans certains cas, mais pas toujours [Hawkins 1977a, p. 103–108].

Hawkins met en scène diverses réactions des auteurs qui sont conscients des limites du « raisonnement générique » et des exceptions qui peuvent se produire.

Certains se contentent de noter que les exceptions ne se produisent pas « en général », ou « tant que les coefficients sont indéterminés » [Hawkins 1977b, p. 126, 142].

L'exemple de Sylvester que je viens d'évoquer montre une recherche plus systématique des conditions de validité du théorème auquel il s'intéresse. C'est également en ces termes que Hawkins exprime d'abord la motivation des travaux de Weierstrass :

> Whereas other mathematicians limited their treatment to the 'general' (i.e. generic) case of distinct characteristic roots, sometimes

> without expicitly recognizing any limitation to their work, Weierstrass sought an exact, rigorous formulation of the theory based upon a careful analysis of what happens when multiple roots occur.
> [Hawkins 1977b, p. 97]

Hawkins évoque plusieurs moyens mis en œuvre pour étudier les cas exceptionnels. L'idée de procéder par limite à partir du résultat général revient à plusieurs reprises dans les travaux qu'il étudie. Dans un de ses mémoires, Lagrange étudie un système d'équations différentielles linéaires. Il se demande ce que devient la solution qu'il a trouvée — par un « raisonnement générique » — dans le cas où deux racines de l'équation caractéristique sont égales. Il suppose que les deux racines sont de la forme ρ_1 et $\rho_2 = \rho_1 + w$, où w est une quantité évanescente ([Hawkins 1977b, p. 123-124]). Ceci lui permet d'obtenir, en faisant tendre w vers 0, la forme des solutions dans le cas[32] où $\rho_2 = \rho_1$. Cauchy emploie un raisonnement semblable dans son étude de la transformation des formes quadratiques (voir [Hawkins 1977b, p. 124–127] et [Cauchy 1829]). Hermite fait de même pour compléter une démonstration qu'il avait d'abord donnée sans se soucier des exceptions :

> He examined the cases not covered by his generic proof and sought to show that the several exceptional cases followed, by various ways, from the generic solution. One exceptional case followed, for example, from the generic formula by letting some of the parameters become infinite. [Hawkins 1977b, p. 97]

Une analyse plus fine de ces travaux montrerait peut-être des variations dans la façon de procéder au passage à la limite et de relier le résultat dans les cas exceptionnels au résultat général.

Dans les travaux de Sylvester que j'ai évoqués plus haut, Hawkins relève par ailleurs tout un travail mené sur les exceptions. Sylvester introduit le concept de matrice « dérogatoire » ou « privilégiée » pour explorer les limites de validité du théorème qui l'intéresse. Il semble donc mettre en place une réflexion centrée sur une classe exceptionnelle de matrices.

Enfin, Hawkins met l'accent sur une dernière forme de réponse à l'ambigüité du « raisonnement générique » : celle de Weierstrass et ses élèves. Ils cherchent à élaborer de nouvelles bases pour les démonstrations, qui permettent de traiter uniformément tous les cas, sans avoir à explorer les diverses exceptions possibles. C'est ce qu'exprime Weierstrass dans le passage suivant :

> Il ne semble pas qu'une attention particulière ait été donnée aux circonstances particulières qui se produisent, lorsque les racines de l'équation $f(s) = 0$ ne sont pas toutes distinctes, ni que les difficultés qui se présentent alors aient déjà été parfaitement éclaircies. Je pensais également d'abord que ceci ne serait pas possible sans une longue discussion, vu le grand nombre des cas différents qui peuvent se produire. J'ai été d'autant plus heureux de découvrir que la solution du problème proposée par les mathématiciens cités [Cauchy et Jacobi entre autres] peut être modifiée d'une façon telle qu'il est tout à fait indifférent que certaines des quantités $s_1, s_2, \ldots, s_n$ soient

[32] En réalité, ce raisonnement par limite est lui-même « générique ». Il est mis en défaut dans certains cas particuliers.

identiques. [Weierstrass 1858, p. 234][33] (cité par Hawkins [1977b, p. 129])

Par delà la diversité des modes de travail vis-à-vis des cas exceptionnels chez les auteurs qu'il étudie, Hawkins propose de distinguer ce qu'il englobe dans l'expression de « raisonnement générique » d'une part, et la généralité poursuivie par Weierstrass et Kronecker d'autre part. Le raisonnement générique donne une place prépondérante au résultat obtenu par des manipulations algébriques « formelles », quel que soit le statut qui leur est donné. Les exceptions peuvent être mentionnées ou non, étudiées ou non. Pour certains problèmes, on peut chercher à démontrer que le résultat général est encore vrai, quoique le raisonnement qui permet de l'établir ne soit plus applicable. Mais dans tous les cas, le résultat obtenu dans le cas général est le centre par rapport auquel s'organise le travail. Au contraire, Weierstrass et Kronecker cherchent à reformuler les problèmes de façon à donner un traitement uniforme de tous les cas, et une formulation uniforme des résultats.

En ce sens très large, on peut rapprocher le travail de Serret, ainsi que celui de Poincaré, du « raisonnement générique ». Mais ils constituent deux réponses élaborées aux imprécisions, relevées par Hawkins, de ce mode de raisonnement.

2.4.3 La synthèse opérée par Poincaré

Serret distingue très nettement le niveau formel, dit « général », de son utilisation pour traiter des cas particuliers. En insistant sur le caractère formel du traitement du cas « général », il écarte la question des limites de validité de ce raisonnement « général ». Ce dernier ne concerne pas un ensemble de cas possibles, parmi lesquels il faudrait distinguer ceux pour lesquels il est pertinent de ceux auxquels il ne s'applique pas. C'est un raisonnement purement formel, qui ne tient que pour lui-même. Son exploitation pour étudier des cas particuliers est un problème séparé, dans lequel Serret montre d'ailleurs une grande habileté.

Poincaré procède tout autrement. Chaque discussion de cas est menée dans le cadre de contraintes explicites sur les coefficients des équations considérées. Les différentes valeurs que peuvent prendre les coefficients sont ainsi groupées en cas, et dans chaque cas, Poincaré traite non pas un problème purement formel, mais bien l'ensemble des points singuliers qui satisfont à la condition donnée.

Il se démarque par ailleurs du raisonnement générique en délimitant précisément les cas qu'il examine tour à tour. Poincaré ne commence pas par développer un raisonnement « général » qui laisserait de côté quelques exceptions, quitte à les étudier ensuite. C'est à l'intérieur de cas aux limites bien définies qu'il étudie le comportement des solutions, en utilisant le moyen adapté dans chaque cas. De la sorte, les cas plus particuliers sont distingués et définis avant d'être étudiés. Ils n'apparaissent pas comme des amendements à un raisonnement générique dont on constate, *a posteriori*, qu'il est parfois mis en défaut.

[33] « [Es scheint] nicht, als ob den eigenthümlichen Umständen, die eintreten, wenn die Wurzeln des Gleichung $f(s) = 0$ nicht alle von einander verschieden sind, besondere Beachtung geschenkt, und die Schwierigkeiten die sich alsdann darbieten [...], schon gehörig aufgeklärt seien. Auch glaubte ich anfangs, es würde dies bei der grossen Zahl verschiedener Fälle, die vorkommen können, nicht ohne weitlaüfige Erörterungen möglich sein. Um so erwünschter war es mir, zu finden, das sich die von den genannten Mathematikern gegebene Lösung der Aufgabe in einer Weise modificiren lässt, bei der es ganz gleichgültig ist, ob unter den Grössen $s_1, s_2, \ldots, s_n$ gleiche vorkommen oder nicht. »

Les démarches de Poincaré et Serret apparaissent donc comme des formes de raisonnement générique plus élaborées que celles qu'étudie Hawkins. Par ailleurs, elles sont bien différentes l'une de l'autre. Une raison en est sans doute l'écart entre leurs contextes : le caractère algébrique des préoccupations de Serret se prête sans doute mieux à développer un travail très formel que le problème d'analyse envisagé par Poincaré.

Est-ce à dire que l'expression « polynômes les plus généraux de leur degré » sous la plume de Poincaré est à entendre dans un sens tout à fait différent de celui que lui donne Serret ? Il me semble qu'il n'en est rien. L'interprétation que je vais proposer suppose de tenir compte du fait que l'expression apparaît à des stades différents dans le raisonnement des deux auteurs. Serret l'utilise pour décrire de façon positive le cadre dans lequel il travaille. Elle apparaît chez lui comme une *hypothèse*. Poincaré emploie la même expression, mais seulement *après* avoir défini les cas entre lesquels il partage son exploration des points singuliers : « de pareils points ne peuvent exister si X et Y sont les polynomes les plus généraux de leur degré. » [Poincaré 1881a, p. 19]

Ceci conduit à distinguer deux aspects du travail de Poincaré qui produit la liste hiérarchisée de cas que nous avons étudiée. Il s'agit d'une part de la partition des points singuliers en différents cas, délimités par des conditions sur les coefficients. Ce découpage est guidé, nous l'avons vu, par les conditions d'application des théorèmes disponibles, conjointement avec des propriétés géométriques, soit des caractéristiques, soit des courbes $X = 0$ et $Y = 0$. D'autre part, Poincaré classifie, ordonne ces différents cas, en faisant apparaître des degrés de généralité différents. Pour cette deuxième tâche, il fait appel à différents critères. Nous avons déjà souligné l'importance que semblent avoir les dégénérescences géométriques. C'est ainsi que sont distingués les points singuliers de première espèce et ceux de seconde espèce, suivant la position des courbes $X = 0$ et $Y = 0$ l'une par rapport à l'autre. C'est également en termes de dégénérescence géométrique que j'ai proposé d'interpréter la séparation posée par Poincaré entre les quatre cas subordonnés d'une part, pour lesquels le faisceau homographique est bien défini et admet deux droites doubles distinctes, et les *cas particuliers laissés de côté* d'autre part. La référence au calcul formel à la Serret semble constituer un deuxième critère. Elle permet de distinguer des cas « qui ne se produisent pas lorsque X et Y sont les plus généraux de leur degré », et de donner, par contraste, un rôle privilégié aux trois premiers cas subordonnés.

Cette caractérisation apposée au quatrième cas subordonné et aux cas particuliers laissés de côté est corrélée, nous l'avons vu, à l'apparition de conditions d'égalité portant sur les racines λ_i ou sur les coefficients a_i et b_i, tandis que les trois premiers cas subordonnés ne faisaient intervenir que des inégalités. Cette corrélation peut se justifier en rappelant que Serret donne une deuxième caractérisation des équations « les plus générales de leur degré » qu'il considère : « nous supposerons qu'il n'existe aucune relation entre les coefficients ». On peut ainsi interpréter le texte de Poincaré en considérant qu'il identifie les conditions d'égalités portant sur les racines ou les coefficients des polynômes comme des signes de moindre généralité, en référence à ce qui se passe dans le cadre formel. Je me suis appuyée ici sur le rapprochement suggéré par la terminologie entre l'ouvrage de Serret et le mémoire de Poincaré. Cette similarité me conduit à suggérer l'existence d'un lien entre la référence au résultat formel d'une part, et l'interprétation du nombre de conditions d'égalités comme indicateur du degré de généralité d'autre part. L'étude des travaux de Poincaré en mécanique céleste sera l'occasion de présenter un texte de notre auteur qui me semble confirmer ce lien (3.4.1). En cela, Poincaré conserve du raisonnement générique, au sens très large que Hawkins donne à cette expression, l'idée que ce qui se passe formellement a un statut particulier, et peut constituer un critère de généralité en vue de la hiérarchisation des cas.

Mais il va plus loin que les auteurs étudiés par Hawkins, puisqu'il ne se contente pas d'opposer un cas général — celui qui correspond au calcul formel — à des cas particuliers. En effet, il ordonne les cas qu'il dégage selon toute une échelle de degrés de généralité.

2.5 De l'identification de cas « plus particuliers » au « cas général »

Nous nous sommes jusqu'ici concentrés sur le deuxième chapitre du mémoire de Poincaré, dans lequel il rassemble les résultats concernant le comportement des caractéristiques « dans le voisinage d'un point ». Ceci nous a permis de mettre en évidence que Poincaré hiérarchise très précisément les différents cas qu'il délimite. Déjà dans l'étude locale, il exploite cette hiérarchisation en proposant une étude moins détaillée des points singuliers les plus particuliers. Mais c'est dans la suite du mémoire que ce travail, dont j'ai mentionné la nouveauté, donne tous ses fruits. Nous allons voir que cette dimension se révèle ainsi profondément liée à l'objectif spécifique de Poincaré : l'étude des solutions « dans toute l'étendue du plan ». C'est l'un des aspects qui contribue à l'élaboration d'une nouvelle façon d'étudier les équations différentielles.

2.5.1 Étude globale et définition d'un « cas général »

Le point de vue de Poincaré, aujourd'hui qualifié de « global »[34] est déjà décelable dans le critère utilisé pour opposer les trois premiers cas subordonnés aux autres points singuliers. Dire en effet qu'un type de points singuliers ne

[34] J'ai signalé qu'on peut distinguer deux approches « globales » d'une équation différentielle. La première cherche à étudier *une* solution déterminée sur tout son domaine de définition. La seconde s'attache à l'étude de *toutes* les solutions de l'équation, dans toute l'étendue du domaine sur lequel est définie l'équation. C'est dans la seconde acception que j'emploierai ce terme. C'est elle qui correspond au travail de Poincaré dans le mémoire *Sur les courbes*. Notons toutefois que Poincaré ne fait pas nettement cette différence dans l'introduction de son mémoire. Il oppose d'abord l'étude de « la fonction proposée *dans le voisinage d'un des points du plan* à l'étude de « cette fonction *dans toute l'étendue du plan* ». Or Poincaré renvoie, pour le premier point, aux recherches déjà entreprises dans l'étude générale des équations différentielles, donc à l'étude locale des fonctions de variable complexe des équations différentielles. Le « plan » évoqué ici semble donc désigner très naturellement le plan complexe, et il est question d'étudier une seule solution. Le travail effectivement mené par Poincaré est bien autre, comme C. Gilain l'a montré, mais Poincaré n'insiste pas sur le nouveau point de vue qu'il introduit. C'est subrepticement qu'il passe dans le cours de son introduction du projet d'étudier *une fonction* à celui de considérer *les courbes* définies par une équation différentielle. Le « plan » complexe de la variable dont Poincaré semble parler au début de son introduction devient, tout aussi subrepticement, le plan des variables x et y, l'équation étant désormais écrite sous la forme $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$ qui ne distingue plus une variable et une fonction. Ce plan est ensuite projeté sur une sphère. Au début du deuxième chapitre, on voit réapparaître les expressions opposées « dans le voisinage d'un point de la sphère » et « dans toute l'étendue de la sphère ». Ce sont bien alors les caractéristiques, au pluriel, qu'il s'agit d'étudier.

se présente pas « lorsque X et Y sont les polynômes les plus généraux de leur degré », c'est envisager l'ensemble des points singuliers de l'équation associée aux polynômes X et Y. Cette remarque reste vraie, qu'on voie X et Y comme deux polynômes dont les coefficients sont indéterminés, selon l'acception de Serret, ou qu'on les considère comme des polynômes déterminés.

Après l'étude locale des points singuliers dans le deuxième chapitre de son mémoire, Poincaré considère effectivement dans son troisième chapitre l'ensemble des points singuliers d'une équation différentielle. Il commence par montrer qu'il existe toujours au moins un point singulier, en procédant à nouveau par énumération des diverses situations qui peuvent se produire. Mais il s'agit ici d'une énumération explicitement exhaustive, dans laquelle Poincaré ne s'intéresse pas au degré de généralité des différents cas. L'ordre paraît surtout régi par la simplicité : le premier cas traité est celui où il y a des points singuliers évidents, et plus on avance dans l'énumération, plus l'exhibition d'un point singulier requiert un traitement élaboré.

Ayant montré qu'il y a toujours des points singuliers, Poincaré va établir un résultat sur le nombre des points singuliers des différentes sortes : nœuds, cols et foyers. Pour cela, il commence par formuler des hypothèses sur l'équation considérée :

> *Cas général.* — On peut, sans nuire à la généralité, supposer :
>
> 1° Que les polynomes X et Y sont de même degré ;
>
> 2° Que si X_2 et Y_2 sont les termes du degré le plus élevé de X et Y, on n'a pas identiquement
>
> $$x\,Y_2 - y\,X_2 = 0;$$
>
> 3° Que les courbes X = Y = 0 ne se coupent nulle part en plusieurs points confondus et ne se coupent pas sur l'équateur ;
>
> 4° Que l'équation
>
> $$x\,Y_2 - y\,X_2 = 0$$
>
> n'a pas de racines multiples.
>
> Dans ce cas, *l'équateur est toujours une caractéristique*, et tous les points singuliers sont de première espèce. De plus, on peut, sans nuire à la généralité, supposer que tous les points singuliers sont des *nœuds*, des *cols* et des *foyers*.
>
> [Poincaré 1881a, p. 23]

Dans ce passage, Poincaré définit le « cas général » par cinq hypothèses. Les quatre premières sont numérotées et exprimées comme des conditions explicites portant sur les polynômes X et Y. La dernière est introduite après un scolie où Poincaré tire les conséquences des quatre premières hypothèses. Elle se présente sous une forme particulière. En effet, elle porte non pas sur les polynômes qui définissent l'équation différentielle, mais directement sur le type de points singuliers qu'admettra l'équation. Il s'agit là d'une propriété de second ordre, qui s'apparente aux conséquences évoquées dans le scolie plus qu'aux premières hypothèses. Nous reviendrons sur l'expression de ces conditions.

Par ces lignes, Poincaré définit explicitement le cadre de l'étude qui suit : une équation différentielle $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$ étant donnée, on peut savoir si elle rentre ou non dans le « cas général » — du moins en théorie, *i.e.* si on sait résoudre les équations $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = 0$ et $x\,\mathrm{Y}_2 - y\,\mathrm{X}_2 = 0$. Le raisonnement par lequel Poincaré prouve ensuite que le nombre total des nœuds et des foyers est égal au nombre total des cols plus deux s'écarte en cela du *raisonnement générique* critiqué par Weierstrass. Mais Poincaré insiste sur le fait que les hypothèses qu'il fait ne nuisent pas à la généralité. Autrement dit, il affirme qu'il ne s'agit pas simplement d'hypothèses idoines qui délimitent un cadre restreint dans lequel il peut démontrer un résultat intéressant. Le cadre ainsi défini certes laisse de côté certaines circonstances, mais elles sont particulières, et la restriction qui en résulte est négligeable sous un certain rapport.

La nature de la généralité ainsi préservée n'est cependant pas explicitée. Nous chercherons à mettre au jour les critères qui ont pu faire dire à Poincaré que le « cas » ainsi défini est « général ». La première ressource dont nous disposons à cet effet est la formulation elle-même des hypothèses, en lien avec la classification des points singuliers, comme on le devine au vu du scolie et de la dernière hypothèse. Le texte de Poincaré offre une deuxième ressource : notre auteur envisage en effet, après le « cas général », un « deuxième cas », dont il justifie ainsi l'examen :

> *Deuxième cas.* — Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que X_2 et Y_2 étaient de même degré, sans que
>
> $$x\,\mathrm{Y}_2 - y\,\mathrm{X}_2$$
>
> soit identiquement nul.
>
> Nous n'avons pas examiné ce qui se passerait si nous avions identiquement
>
> $$x\,\mathrm{Y}_2 - y\,\mathrm{X}_2 = 0.$$
>
> A un certain point de vue, le cas que nous avons étudié est plus général que celui que nous avons laissé de côté.
>
> A un autre point de vue, c'est le contraire ; car deux polynomes X et Y quelconques peuvent être considérés comme des cas particuliers des polynomes
>
> $$\mathrm{X} + \lambda x\,\mathrm{Z}, \qquad \mathrm{Y} + \lambda y\,\mathrm{Z},$$
>
> où λ est une constante et Z un polynome de même degré que X et Y. [Poincaré 1881a, p. 31]

Autrement dit, Poincaré remet en cause l'idée que l'hypothèse 2° , selon laquelle on n'a pas identiquement $x\,\mathrm{Y}_2 - y\,\mathrm{X}_2 = 0$, ne nuit pas à la généralité. Or, tandis qu'il se contente dans la définition du « cas général » de donner une liste d'hypothèses, sans expliquer pourquoi on peut selon lui les adopter « sans nuire à la généralité », il explicite ici les raisons qui le conduisent à considérer ce deuxième cas, où $x\,\mathrm{Y}_2 - y\,\mathrm{X}_2 = 0$, comme plus général sous un autre rapport. Ceci nous permettra de mieux comprendre ce qu'il entend par l'expression « sans nuire à la généralité », reprise ici dans l'opposition entre un cas « plus général » et un cas « particulier ».

Il est d'abord nécessaire d'éclaircir le statut de ce « deuxième cas ». S'agit-il du deuxième item d'une nouvelle liste de cas, comme Poincaré en a déjà établi pour étudier le comportement local des solutions, et pour démontrer l'existence d'au moins un point singulier ? Il me semble qu'il n'en est rien. La dénomination « cas général » donnée au premier n'est pas simplement une indication du degré de généralité d'un « premier » cas. La façon dont Poincaré introduit le « deuxième cas » montre qu'il n'a pas ici l'intention d'établir une liste hiérarchisée de cas, mais seulement d'étudier le cas général. Poincaré étudie ce « deuxième cas » non en tant que cas alternatif au « cas général », mais parce que lui aussi peut être vu comme « plus général », si l'on change de point de vue.

Nous chercherons plus loin à élucider les raisons qui ont pu pousser Poincaré à adopter ce deuxième point de vue. Ce qui apparaît ici, c'est que Poincaré cherche seulement à étudier le cas « général », sans se soucier des cas plus particuliers. Seule une hésitation sur la bonne définition du cas « général » le conduit à examiner deux cas. Le repérage des hypothèses que l'on peut formuler « sans nuire à la généralité » est donc un préliminaire qui permet à Poincaré de se concentrer sur l'essentiel.

Cette orientation vers l'essentiel s'exprime dans le scolie et la dernière hypothèse de la définition du cas général. Poincaré y montre que les hypothèses qu'il formule permettent de limiter la diversité des comportements des caractéristiques. D'abord l'équateur est « *toujours* » une caractéristique. Ensuite les points singuliers que l'on pourra rencontrer se limitent, en vertu des quatre premières hypothèses, à ceux de première espèce, et Poincaré ajoute qu'on peut même se restreindre aux *noeuds*, aux *cols* et aux *foyers*. Dans cette liste, il ne retient que les types de points singuliers correspondant aux trois premiers cas subordonnés. On le reconnaît à l'absence des *centres* qui apparaissent dans le quatrième cas subordonné. On constate donc que tous les cas qui ne se produisent pas lorsque X et Y sont les polynômes les plus généraux de leur degré sont écartés.

De plus, on peut remarquer que les propriétés énoncées dans le scolie ne sont pas des corollaires accessoires des hypothèses par lesquelles Poincaré définit le « cas général ». Ces hypothèses sont exactement les conditions nécessaires pour assurer que les points singuliers soient toujours de première espèce et que l'équateur soit une *caractéristique*.

Poincaré en est sans doute conscient. En effet, les conditions algébriques qu'il utilise dans ces hypothèses ont déjà été examinées en relation soit avec la classification des points singuliers, dans le deuxième chapitre, soit avec la démonstration de l'existence d'au moins un point singulier pour toute équation différentielle.

Or, dans cette démonstration, on peut reconnaître presque immédiatement le type de point singulier auquel on a affaire dans chacun des cas examinés. On voit en particulier que les points d'intersection des courbes $X = Y = 0$ situés sur l'équateur sont des points singuliers de seconde espèce. Par ailleurs, dans sa classification des points singuliers, Poincaré avait noté que les points d'intersection multiple de ces mêmes courbes sont également des points singuliers de seconde espèce. Ainsi, l'hypothèse 3° sur les points d'intersection de ces deux courbes permet précisément d'assurer que les points singuliers situés en des points d'intersection de $X = 0$ et $Y = 0$ sont de première espèce.

Dans le cas où les polynômes ne sont pas de même degré, par exemple si le degré de X est plus grand que celui de Y, Poincaré a montré que le point de l'équateur dans la direction des x est toujours un point singulier. Le changement de variables qu'il a effectué dans ce but fait voir que pour ce point singulier, les deux racines λ_1 et λ_2 sont égales, si bien qu'on se trouve dans un cas qualifié de

« plus particulier ». De plus, les autres points singuliers situés sur l'équateur, s'il y en a, sont tous, dans ce cas, de seconde espèce. L'hypothèse 1° , selon laquelle les polynômes sont de même degré, est donc également une condition qui permet d'écarter les points singuliers de seconde espèce et plus largement les points singuliers autres que ceux qui proviennent des trois premiers cas subordonnés.

La recherche des points singuliers a conduit enfin Poincaré à remarquer que, sous les hypothèses 1° et 2° , les points singuliers qui ne sont pas des points d'intersection des courbes $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = 0$ correspondent aux racines de l'équation $x\,\mathrm{Y}_2 - y\,\mathrm{X}_2 = 0$. Autrement dit, l'hypothèse 4° achève d'écarter toutes les équations qui peuvent présenter des points singuliers de seconde espèce.

L'hypothèse 2° est moins directement liée au type des points singuliers. En revanche, elle assure que l'équateur soit une caractéristique. De plus, cette propriété entraîne que les points singuliers sur l'équateur ne pourront être que des nœuds ou des cols.

Ainsi, il semble bien que chacune des hypothèses qui définissent le « cas général » soit adoptée par Poincaré précisément en vue d'assurer que les points singuliers appartiennent seulement aux trois premiers cas subordonnés, et que l'équateur soit une caractéristique. Ces propriétés, sur lesquelles Poincaré attire immédiatement l'attention dans le scolie, lui permettent de limiter le nombre de cas à prendre en considération dans la démonstration qui suit.

Cette dernière repose en effet sur la définition et l'étude de l'indice d'un cycle, c'est-à-dire d'une courbe fermée sur la sphère. Poincaré montre que cet indice dépend des points singuliers à l'intérieur du cycle : chaque point singulier contribue à l'indice total d'une façon qui dépend de son type. Il faut donc déterminer la contribution de chaque type de point singulier, ce qui n'est possible que si le nombre de types à considérer est restreint.

Ceci éclaire également, a posteriori, la remarque que Poincaré faisait dans le deuxième chapitre à propos des points singuliers de seconde espèce : il notait la diversité des comportements auxquels ils donnent lieu, la posant comme argument pour ne pas entrer plus avant dans leur étude. Précédemment, Briot et Bouquet s'intéressaient à la diversité des comportements des solutions d'équations différentielles dès lors qu'on n'est plus dans les conditions du théorème de Cauchy. Poincaré, de son côté, rappelle les résultats de l'étude locale en vue d'une étude globale qui suppose de pouvoir considérer dans le même temps tous les points singuliers d'une équation différentielle donnée. Ceci le conduit à focaliser son attention sur les cas principaux, de façon à ne prendre en compte, pour l'étude globale, que ceux qui sont incontournables. L'examen du degré de généralité des différents cas envisagés apparaît donc comme orienté vers l'étude globale.

2.5.2 Quel mode de caractérisation du général ?

Nous avons élucidé l'enjeu de la définition du « cas général », et le statut du « deuxième cas » ; il nous reste à tenter de déterminer la nature de la généralité à laquelle Poincaré fait référence : qu'est-ce qui fait dire à Poincaré que les hypothèses qu'il formulent ne « nuisent pas à la généralité » ?

On peut d'abord remarquer que les quatre hypothèses que Poincaré énumère dans le premier passage que nous avons cité se présentent comme des conditions algébrico-géométriques sur les polynômes X et Y.

La discussion de l'hypothèse 2° lors de la définition du « deuxième cas » nous donne une indication plus précise sur ce qui fait dire à Poincaré qu'une circonstance est plus générale qu'une autre. Il introduit à cette occasion une nouvelle forme d'écriture des deux polynômes X et Y, relativement à laquelle le cas où $x\,\mathrm{Y}_2 - y\,\mathrm{X}_2$ n'est pas identiquement nul est perçu comme particulier. Lorsqu'on considère deux polynômes de la forme $\tilde{\mathrm{X}} = \mathrm{X} + \lambda y\,\mathrm{Z}$, $\tilde{\mathrm{Y}} = \mathrm{Y} + \lambda x\,\mathrm{Z}$, où X, Y et Z sont de même degré, $x\tilde{\mathrm{Y}}_2 - y\tilde{\mathrm{X}}_2$ est en effet identiquement nul, sauf lorsque λ est nul — on retrouve alors le cas de deux polynômes quelconques X et Y.

Poincaré met explicitement cette circonstance en parallèle avec le diagnostic initial selon lequel on peut supposer, sans nuire à la généralité, que $x\,\mathrm{Y}_2 - y\,\mathrm{X}_2$ n'est pas identiquement nul : « A un certain point de vue, le cas que nous avons étudié est plus général [...] A un autre point de vue, c'est le contraire ». Cette formulation indique que, pour Poincaré, il s'agit de comparer le cas où $x\,\mathrm{Y}_2 - y\,\mathrm{X}_2$ est identiquement nul et celui où il ne l'est pas du point de vue de la même question : lequel est le plus général ? C'est le point de vue adopté, mais non la question posée, qui change.

Par conséquent, on peut supposer que la même démarche sous-tend l'appréciation de la généralité du cas où $x\,\mathrm{Y}_2 - y\,\mathrm{X}_2$ est identiquement nul d'une part, et la liste d'hypothèses formulée plus haut d'autre part. Elle serait donc propre à nous éclairer sur ce qui est en jeu dans la définition du « cas général », d'autant plus qu'elle est plus explicite. Lorsque les polynômes se présentent sous la forme $\tilde{\mathrm{X}} = \mathrm{X} + \lambda x\,\mathrm{Z}$ et $\tilde{\mathrm{Y}} = \mathrm{Y} + \lambda y\,\mathrm{Z}$, la condition pour que $x\tilde{\mathrm{Y}}_2 - y\tilde{\mathrm{X}}_2$ ne soit pas identiquement nul se traduit simplement par la nullité du paramètre λ. Il en ressort que Poincaré considère comme particulier un cas caractérisé par l'annulation d'un paramètre. L'hypothèse 2° peut d'ailleurs s'écrire sous une forme comparable : $x\,\mathrm{Y}_2 - y\,\mathrm{X}_2$ est identiquement nul si et seulement si une série de relations entre les coefficients des polynômes X et Y sont vérifiées. Nous avons vu que la gradation des cas de plus en plus particuliers dans la classification des points singuliers fait également intervenir des relations d'égalité entre les coefficients des polynômes définissant l'équation.

À l'inverse, Poincaré semble considérer qu'une hypothèse est vérifiée en général si l'on n'a besoin d'exclure que des cas caractérisés par une relation entre les coefficients des polynômes, ou par l'annulation d'une expression algébrique de ces coefficients.

Les autres hypothèses par lesquelles Poincaré définit le cas général mettent en jeu des conditions plus complexes, mais rien ne paraît contredire qu'elles relèvent de la même approche du « général ».

La formulation de la condition 3° fait intervenir l'interprétation géométrique en termes d'intersection des courbes $\mathrm{X} = 0$ et $\mathrm{Y} = 0$ déjà utilisée dans la classification des points singuliers. Mais il s'agit bien d'une condition qui ne porte ni sur les courbes définies par l'équation ni sur des objets géométriques liés à ces courbes. Elle implique directement les polynômes qui définissent l'équation différentielle. Il en est visiblement de même de la condition 4° qui exclut les racines multiples de l'équation $x\,\mathrm{Y}_2 - y\,\mathrm{X}_2 = 0$.

Il semble moins naturel à première vue d'interpréter la première hypothèse, stipulant que les polynômes X et Y sont de même degré, comme une condition de non nullité d'expressions algébriques en leurs coefficients. Mais il faut garder en mémoire que Poincaré s'est placé dans le cadre de la géométrie projective en étudiant les *caractéristiques* sur la sphère plutôt que dans le plan. Le degré maximal m des deux polynômes joue de ce fait un rôle important lorsqu'on considère l'équation différentielle au voisinage des points de l'équateur. Ainsi, si l'un des polynômes est de degré plus petit, il apparaît, dans ce cadre de la géométrie projective, comme particulier : ses termes de plus grand degré sont nuls. On peut donc reconnaître la même approche du « général ».

La nouvelle hypothèse proposée pour définir le « deuxième cas », selon laquelle $x\,\mathrm{Y}_2 - y\,\mathrm{X}_2$ est identiquement nul, est elle aussi, nous l'avons vu, interprétée par Poincaré comme une condition de non nullité. Il propose en effet de considérer des polynômes $\tilde{\mathrm{X}}$ et $\tilde{\mathrm{Y}}$ de la forme $\tilde{\mathrm{X}} = \mathrm{X} + \lambda y\,\mathrm{Z}$ et $\tilde{\mathrm{Y}} = \mathrm{Y} + \lambda x\,\mathrm{Z}$. Pour ces polynômes, $x\tilde{\mathrm{Y}_2} - y\tilde{\mathrm{X}_2}$ sera identiquement nul à condition que λ soit non nul.

Cependant ceci n'explique pas d'où Poincaré tire les formules de $\tilde{\mathrm{X}}$ et $\tilde{\mathrm{Y}}$. Elles ont l'air de formules particulières, destinées précisément à rendre $x\tilde{\mathrm{Y}_2} - y\tilde{\mathrm{X}_2}$ identiquement nul. La condition initiale, selon laquelle $x\,\mathrm{Y}_2 - y\,\mathrm{X}_2$ n'est pas identiquement nul, ne semble rien laisser à désirer du point de vue de la généralité. Il me semble que c'est du côté de son interprétation géométrique qu'il faut se tourner pour comprendre l'hésitation de Poincaré. Lorsque $x\,\mathrm{Y}_2 - y\,\mathrm{X}_2$ n'est pas identiquement nul, Poincaré note que l'équateur est une caractéristique. Il l'utilise par la suite dans sa démonstration. Or c'est là une propriété qui peut sembler peu robuste. Il suffit de faire une transformation projective qui envoie sur l'équateur une droite quelconque du plan : cette droite n'a aucune raison d'être une caractéristique de l'équation, et il en résulte que le nouvel équateur ne sera plus une caractéristique. C'est l'interprétation que je propose pour expliquer l'hésitation qui conduit Poincaré à examiner un « deuxième cas ». Cette lecture s'accorde bien avec le raisonnement qu'il mène à cette occasion. Il effectue en effet justement un changement de coordonnées qui envoie une droite du plan sur l'équateur. Ceci lui permet de ne plus avoir de points singuliers sur l'équateur. On voit donc que l'idée de changer l'équateur est bien présente dans le texte de Poincaré, et précisément à cet endroit. De plus, ce changement de coordonnées conduit à des formules que l'on peut rapprocher de celles de $\tilde{\mathrm{X}}$ et $\tilde{\mathrm{Y}}$.

Comme nous l'avons déjà remarqué à plusieurs reprises en étudiant la classification des points singuliers, il s'avère donc ici encore que la traduction géométrique des conditions algébriques joue un rôle important dans l'évaluation de leur généralité. Elle conduit à remettre en question une condition qui, du point de vue algébrique, apparaissait clairement comme ne nuisant pas à la généralité.

Dans ce travail de Poincaré sur les équations différentielles, l'évaluation du degré de généralité, ainsi que la recherche du « cas général », apparaissent donc fondées principalement sur deux critères. Le premier est algébrique : sont particulières les circonstances définies par la nullité d'expressions algébriques en les coefficients des polynômes considérés. Le deuxième est géométrique. Il est plus difficile à décrire en termes précis. Mais nous avons vu qu'il est nécessaire de prendre en considération l'identification de dégénérescences géométriques ou de situations qui géométriquement apparaissent comme singulières si l'on veut rendre compte des indications données par Poincaré sur la généralité des phénomènes étudiés.

Nous avons rencontré un troisième moyen d'investigation utilisé par Poincaré, en parallèle avec ces critères, pour caractériser les points singuliers de seconde espèce. Notre auteur souligne que les points singuliers de seconde espèce peuvent être obtenus comme *limite*, lorsque plusieurs points singuliers de première espèce viennent à se confondre. En filigrane, on voit déjà apparaître l'idée d'insérer une situation donnée dans une famille à paramètre(s), ou, dit autrement, de regarder ce qui se passe lorsqu'on perturbe les équations initiales. Lors d'une telle perturbation, les points singuliers de première espèce sont conservés, tandis que les points singuliers de seconde espèce se scindent en plusieurs points singuliers de première espèce.

On pourrait être tenté d'interpréter les formules $\tilde{\mathrm{X}} = \mathrm{X} + \lambda y\,\mathrm{Z}$ et $\tilde{\mathrm{Y}} = \mathrm{Y} + \lambda x\,\mathrm{Z}$ de la même façon : Poincaré construit une famille d'équations qui dépendent du paramètre λ. Cependant il s'agirait d'une perturbation elle-même très particulière. En effet, d'une part on perturbe de façon semblable X et Y. D'autre part, on modifie le degré de X et Y, et l'on ajoute donc des termes dans leur écriture, par contraste avec un mode de perturbation plus ordinaire qui consisterait à faire varier les coefficients de ces deux polynômes. Enfin on s'écarte de la démarche du deuxième chapitre du mémoire, où Poincaré travaillait en ayant fixé le degré de X et Y, puisqu'il s'intéressait aux types de points singuliers présents lorsque les polynômes sont « les plus généraux de leur degré ».

Cette interprétation en termes de perturbation ne paraît donc pas pertinente ici. Cependant il me semble qu'on peut voir dans les deux situations que nous comparons les premières occurrences d'un mode de raisonnement auquel Poincaré donnera par la suite une place très importante dans ses travaux de mécanique céleste. Nous allons en voir un exemple bientôt avec l'étude des solutions périodiques (2.6.2) : Poincaré perturbe un problème pour lequel on connaît une solution périodique, et cherche les conditions dans lesquelles la solution périodique subsiste au cours de la perturbation.

2.6 La hiérarchisation des cas dans les travaux ultérieurs de Poincaré

Le mode d'exploration des cas, par ordre décroissant de généralité, adopté par Poincaré dans le mémoire *Sur les courbes* n'est pas une innovation soudaine introduite en 1881 : nous avons vu que Poincaré ordonnait déjà de façon semblable les cas qu'il distinguait dans ses premiers travaux. Il continue à employer cette méthode de raisonnement dans la poursuite de ses recherches.

Il est évidemment exclu de chercher à examiner sous cet angle l'ensemble des travaux de Poincaré, ni même tout ce qu'il a écrit dans le domaine des équations différentielles et de la mécanique céleste. Je m'attacherai seulement à montrer que le phénomène mis au jour dans le mémoire *Sur les courbes* n'est pas isolé dans l'œuvre de notre auteur. J'en donnerai deux exemples tirés de ses travaux de mécanique céleste. Le premier est un problème simple où l'on retrouve certaines caractéristiques du travail que nous avons étudié dans le mémoire de 1881. Le deuxième porte sur une question plus complexe : l'étude des solutions périodiques des équations différentielles. Poincaré hiérarchise les différents cas qui peuvent se produire dans une perspective d'étude globale comparable à celle que nous avons examinée dans l'étude des équations différentielles : seuls les cas qui apparaissent au début de la hiérarchie sont pris en compte pour l'étude globale.

Dans ces recherches, la gradation entre des cas que fait apparaître Poincaré reste non thématisée. Plus encore, Poincaré attire moins l'attention sur la présence de cette gradation dans les textes que nous allons examiner. En 1881, la classification des points singuliers faisait apparaître de façon centrale la définition de plusieurs cas et leur hiérarchisation du point de vue de la généralité. Ceci permettait à Poincaré de fixer ensuite précisément les bornes du « cas général » dans lequel il menait l'étude globale. Ici, la structure énumérative est beaucoup plus lâche. Mais je vais établir que la gradation en fonction de la généralité reste le critère qui détermine l'ordre dans lequel différentes circonstances sont examinées, ainsi que l'importance qui leur est accordée.

2.6.1 Un « cas d'exception »

Le problème qui m'intéresse ici est étudié par Poincaré dans le premier chapitre de son mémoire *Sur le problème des trois corps* [Poincaré 1890][35]. Notre auteur utilise le calcul des limites développé par Cauchy pour démontrer certains résultats sur le développement en série des solutions d'un système d'équations différentielles qui dépend d'un paramètre μ :

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y,z,\mu), \qquad \frac{dy}{dt} = f_1(x,y,z,\mu), \qquad \frac{dz}{dt} = f_2(x,y,z,\mu).$$

Il énonce ainsi :

> THÉORÈME II. — Nous venons de voir que x, y et z peuvent être développés suivant les puissances de t, μ, x_0, y_0, z_0 pourvu que ces cinq variable, y compris t, soient suffisamment petites.
>
> *Je dis que x, y et z pourront encore être développées suivant les puissances des quatre variables μ, x_0, y_0, et z_0 quelque grand que soit t pourvu que les quatre variables μ, x_0, y_0, et z_0 soient assez petites.*
>
> Il y a toutefois un cas d'exception sur lequel je reviendrai.
> [Poincaré 1890, p. 272] (cf. [Poincaré 1889, p. 196–197])

C'est seulement après la démonstration du théorème que Poincaré revient sur le cas d'exception qu'il a signalé. Il précise alors :

> Si, en faisant varier t, on voyait le point mobile (x,y,z) passer par un point singulier, notre théorème serait en défaut. Si t variant depuis $t = 0$ jusqu'à $t = t_0$, le point mobile (x,y,z) ne passe par aucun point singulier, [...] les trois fonctions x, y, z seront développables suivant les puissances de μ, x_0, y_0, z_0 pour toute valeur de t inférieure à t. Mais si pour $t = t_0$, le point (x,y,z) se confond avec un point singulier, le théorème cessera d'être vrai pour les valeurs de t supérieures à t_0. [Poincaré 1890, p. 274] (cf. [Poincaré 1889, p. 198])

[35]Le passage dont il s'agit est emprunté, à l'identique, à la note E dans la première version de ce mémoire, [Poincaré 1889].

Il n'y a pas, ici, de hiérarchisation complexe de différents cas. Mais un point mérite l'attention dans le contexte de notre discussion : Poincaré distingue deux cas et les traite de façon clairement séparée. La démonstration initiale ne relève pas d'un raisonnement générique naïf, dans la mesure où elle est précédée de l'annonce d'un cas d'exception, et suivie d'une formulation précise des conditions dans lesquelles elle est valide. Mais il ne s'agit pas non plus de deux cas traités simplement l'un après l'autre. Le deuxième cas est qualifié — à deux reprises — d'« exceptionnel », et Poincaré ne le décrit précisément que dans un deuxième temps.

Une telle forme de raisonnement, où l'on revient seulement *a posteriori* sur un cas particulier qui met en défaut la démonstration donnée d'abord, est sans doute très répandue. On la rencontre par exemple dans le mémoire de Briot et Bouquet [1856b, p. 192–193]. Mais ces derniers n'attirent pas comme Poincaré l'attention sur le caractère exceptionnel du cas d'abord négligé. Ils écrivent simplement :

> Nous avons supposé, dans ce qui précède, la quantité
>
> $$\frac{d\,\mathrm{F}_0}{dz_0} + \frac{d\,\mathrm{F}_0}{du_0} U_0$$
>
> différente de zéro. Voyons maintenant ce qui arrive lorsque cette quantité est nulle. [Briot et Bouquet 1856b, p. 193]

Ainsi, le passage de Poincaré que nous venons d'examiner, s'il n'a peut-être rien d'atypique ou de très remarquable, me semble confirmer que Poincaré est attentif, plus que Briot et Bouquet par exemple, à comparer, du point de vue de leur généralité, les cas qu'il est amené à distinguer. Il souligne souvent le caractère « plus particulier » ou « exceptionnel » de certains d'entre eux, et il les traite systématiquement par ordre décroissant de généralité. Par ailleurs, nous voyons ici Poincaré employer le terme d'« exception » qui revient à plusieurs reprises dans ses travaux de mécanique céleste : nous le retrouverons en étudiant le théorème de récurrence (chapitre 3).

2.6.2 L'étude des solutions périodiques dans les mémoires de mécanique céleste

Le problème auquel nous allons nous intéresser maintenant est le suivant : on considère un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{I}$$

où les X_i sont des fonctions des x_i et d'un paramètre μ. On suppose que lorsque $\mu = 0$, ces équations admettent une solution périodique $x_i = \varphi_i(t)$, et on cherche à prouver l'existence d'une solution périodique lorsque μ n'est plus nul. Poincaré étudie d'abord le cas où les X_i sont des fonctions périodiques de t, de période 2π. Il cherche, pour μ non nul, des solutions périodiques de même période 2π.

Poincaré montre comment ramener le problème à un système d'équations[36]

$$\psi_1 = \psi_2 = \cdots = \psi_n = 0, \tag{4}$$

[36] J'adopte ici la numérotation des équations commune aux deux textes [Poincaré 1889] et [Poincaré 1890].

où les ψ_i sont des fonctions holomorphes de μ et de n variables β_i. On cherche à résoudre ce système par rapport aux β_i. Poincaré donne d'abord la solution lorsque le déterminant fonctionnel[37] des ψ par rapport aux β n'est pas nul. Dans ce cas on peut résoudre le système (4), ce qui fournit, pour les valeurs de μ assez petites, une solution périodique des équations (I). La suite de l'étude est consacrée aux cas où le déterminant fonctionnel des ψ est nul.

Ce problème est abordé par Poincaré dans ses travaux sur le problème des trois corps. Je reviendrai plus en détail dans le prochain chapitre de mon travail sur l'histoire de ces textes. Pour l'instant, il suffit de savoir que nous disposons de deux versions successives du mémoire *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* : [Poincaré 1889] et [Poincaré 1890]. Les circonstances de la réécriture ne sont pas significatives pour la question des solutions périodiques. Le contenu de ce mémoire est ensuite intégré par Poincaré dans les *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* [Poincaré 1892–1899]. La question qui nous intéresse ici est traitée de façon largement parallèle dans ces trois textes. Ils présentent simplement quelques variantes, dans la formulation d'une part, et dans le degré de développement d'autre part. Je m'appuierai principalement sur le texte de 1889, et renverrai aux deux autres seulement lorsque les variantes qu'ils présentent apportent des indications intéressantes.

Dans ce premier texte, l'étude des cas où le déterminant fonctionnel est nul est d'emblée motivée par une question qui relève plutôt d'une vision globale. Poincaré vient de montrer que la solution périodique subsiste quand le déterminant fonctionnel est non nul. Il pose alors la question suivante :

> Supposons donc que les équations (I) admettent une solution périodique pour $\mu = 0$ et pour les valeurs de μ suffisamment petites, plus petites par exemple que μ_0, et qu'elles n'en admettent plus pour $\mu > \mu_0$. De quelle façon la solution périodique disparaîtra-t-elle au moment où μ atteindra la valeur μ_0 ? On pourrait montrer que les choses se passent comme il suit.
>
> Pour $\mu = \mu_0 - \varepsilon$, les équations (I) admettent *deux* solutions périodiques ; pour $\mu = \mu_0$, ces deux solutions se confondent en une seule et enfin pour $\mu > \mu_0$, ces deux solutions disparaissent. [Poincaré 1889, p. 52]

C'est seulement après cette annonce que Poincaré regarde plus précisément ce qui se passe lorsque le déterminant fonctionnel s'annule. C'est alors bien au voisinage de $\mu = 0$ — et non de $\mu = \mu_0$ — qu'il étudie les équations. Ce détail me semble indiquer, par contraste, qu'il s'agit déjà, dans la première annonce, d'une considération globale. Poincaré s'y intéresse en effet à ce qui se passe lorsqu'on fait varier le paramètre μ dans un intervalle, et non seulement à ce qui se passe au voisinage de $\mu = 0$.

Il explique ensuite comment ce phénomène de disparition de deux solutions périodiques se traduit dans l'étude locale au voisinage du point de disparition.

Il indique pour cela comment ramener les équations (4) : $\psi_1 = \psi_2 = \cdots = \psi_n = 0$ à une seule équation $\Phi = 0$, où Φ est une fonction holomorphe de μ et de β_n. L'argument donné en 1889 est assez approximatif, et correspond assez bien

[37]Le déterminant fonctionnel des ψ par rapport aux β est le déterminant de la matrice formée par les b_{ik}, où $b_{ik} = \frac{d\psi_i}{d\beta_k}$.

au *raisonnement générique* décrit par Hawkins : les dégénérescences éventuelles ne sont pas envisagées. Il est cependant déjà précisé dans une note annexe (E). En 1890, Poincaré inclut dans son chapitre préliminaire cette note annexe et la développe en reprenant les résultats établis dans sa thèse de 1879. Il en résulte que l'équation $\Phi = 0$ est obtenue, dans la deuxième version du texte, de façon parfaitement rigoureuse.

Reprenons le fil du premier texte. La condition selon laquelle le déterminant fonctionnel s'annule se traduit sur cette nouvelle équation par le fait que, pour $\mu = \beta_n = 0$, on a $\frac{d\Phi}{d\beta_n} = 0$. Par ailleurs, comme on est parti d'une solution périodique, pour $\mu = 0$ on a également $\Phi = 0$. De ceci, Poincaré déduit :

> En d'autres termes pour $\mu = 0$, l'équation $\Phi = 0$ admet $\beta_n = 0$ comme racine multiple.
>
> Supposons, ce qui est le cas le plus général, que ce soit une racine double. [Poincaré 1889, p. 53]

Sous cette hypothèse, il prouve qu'il y a, comme annoncé, deux solutions périodiques qui se confondent en une seule pour $\mu = 0$ et disparaissent ensuite. Il ajoute :

> Une discussion plus approfondie montrerait que les conclusions subsistent dans le cas où la racine $\beta_n = 0$, au lieu d'être une racine double de l'équation $\Phi = 0$ est une racine triple ou d'ordre supérieur. [Poincaré 1889, p. 54]

Il revient alors sur le résultat global qu'il avait en vue et conclut :

> *Lorsque les équations différentielles dépendent d'un paramètre arbitraire μ et admettent une solution périodique, et si l'on fait varier ce paramètre d'une manière continue, la solution périodique ne pourra disparaître qu'après s'être confondue avec une autre solution périodique.*
>
> C'est ainsi que, dans une équation algébrique dépendant d'un paramètre μ, si l'on fait varier ce paramètre d'une manière continue, une racine réelle ne pourra disparaître et devenir imaginaire, qu'après s'être confondue avec une autre racine réelle.
>
> *Les solutions périodiques disparaissent par couples, à la façon des racines réelles d'une équation algébrique.* [Poincaré 1889, p. 54]

Poincaré utilise les italiques de deux façons. Lorsqu'elles apparaissent à l'intérieur d'une phrase ou d'un paragraphe, elles soulignent une expression, une condition. Lorsqu'un paragraphe entier est en italique, c'est presque toujours l'énoncé d'un résultat — il est d'ailleurs courant que Poincaré choisisse ce moyen pour énoncer un résultat, plutôt que d'indiquer explicitement « Théorème :... ». Ici nous voyons donc que Poincaré conclut l'étude globale des solutions périodiques en affirmant leur disparition par couples.

Or l'étude de la persistance des solutions périodiques dans le cas où le déterminant est nul se poursuit après cette conclusion :

> Le cas particulier qui nous arrêtera le plus sera celui où les équations (I) admettent pour $\mu = 0$ une infinité de solutions périodiques de période 2π.
>
> Dans ce cas les équations (4) ne sont plus distinctes quand on y fait $\mu = 0$ et par exemple on peut déduire la n^e des $n - 1$ premières. [Poincaré 1889, p. 54]

Dans ce dernier cas, Poincaré transforme à nouveau les équations (4) pour les mettre sous la forme $\Phi = 0$, et remarque qu'alors, Φ contient μ en facteur. Il indique enfin comment procéder à l'étude des solutions périodiques qui subsistent pour $\mu \neq 0$.

Cette présentation rapide des grandes lignes de l'étude des solutions périodiques suffit à mettre en évidence les similarités de la démarche de Poincaré avec celle que nous avons étudiée dans le mémoire de 1881 *Sur les courbes* sous le rapport du mode d'exploration des cas.

Poincaré examine successivement diverses hypothèses :

– « Si le déterminant fonctionnel des ψ par rapport aux β n'est pas nul, [. . .] »
– « reprenons les équations (4) et supposons que le déterminant fonctionnel des ψ s'annule [. . .] »
– « Supposons, ce qui est le cas le plus général, que ce soit une racine double. »
– « dans le cas où la racine $\beta_n = 0$ [. . .] est une racine triple ou d'ordre supérieur »
– « Le cas particulier qui nous arrêtera le plus sera celui où les équations (I) admettent pour $\mu = 0$ une infinité de solutions périodiques de période 2π. Dans ce cas [. . .] »

On peut remarquer que dans le dernier cas, comme l'équation $\Phi = 0$ contient μ en facteur, $\beta_n = 0$ en est une racine qu'on pourrait dire d'ordre infini : $\frac{d^m\Phi}{d\beta_n^m}$ est nul en $(0, 0)$ pour toutes les valeurs de m. La traduction des conditions en termes de nullité des $\frac{d^m\Phi}{d\beta_n^m}$ n'apparaît pas dans le texte de 1889. Mais dans le chapitre de préliminaires en 1890, Poincaré exprime le fait que $y = 0$ est racine de degré m de l'équation $f(x, y) = 0$ en $x = 0$ par la condition que « pour $x = y = 0$, f s'annule ainsi que $\frac{df}{dy}, \frac{d^2f}{dy^2}, \ldots, \frac{d^{m-1}f}{dy^{m-1}}$, mais que $\frac{d^mf}{dy^m}$ ne s'annule pas » [Poincaré 1890, p. 279]. Il est donc très vraisemblable que Poincaré conçoit bien la liste d'hypothèses suivant lesquelles il ordonne son étude comme une liste graduée par le nombre d'égalités que suppose chaque condition.

De plus, il commente explicitement la plus grande généralité du cas où $\beta_n = 0$ est une racine double par rapport aux cas où c'est une racine d'ordre supérieur. Le dernier cas est également qualifié de « particulier ». Certes les cas ne sont pas séparés aussi nettement qu'ils l'étaient dans le mémoire de 1881. Mais il me semble que la structure de la démarche est malgré cela suffisamment semblable, pour qu'on puisse reconnaître dans ce texte le même procédé de hiérarchisation des cas que nous avons fait apparaître plus haut.

La liste de cas ainsi étudiés n'est pas présentée comme une liste exhaustive. Poincaré termine en examinant « le cas particulier qui nous arrêtera le plus », laissant penser qu'il existe d'autres cas particuliers qu'il n'a pas considérés.

Une autre spécificité rapproche les deux études. Poincaré utilise cette liste ordonnée de cas pour établir un résultat global. Ici son énoncé intervient à l'intérieur même de la liste des cas qui peuvent se présenter au niveau local. Cette circonstance permet de voir que Poincaré, quoique de façon tout à fait implicite, considère ici aussi un « cas général » qui n'inclut que les principaux comportements locaux, lesquels sont étudiés d'abord. Le cas particulier qui est envisagé ensuite semble étranger à la question globale du mode de disparition des solutions périodiques : cette question est en effet résolue avant qu'il ne soit examiné.

La différence la plus intéressante que présentent les versions ultérieures de 1890 et 1892 par rapport à cette première rédaction est que Poincaré y allonge la liste des cas particuliers qu'il envisage après avoir démontré le résultat global. Celui qu'il étudiait déjà en 1889 est désigné en 1890 et 1892 comme « un cas particulier intéressant ». Celui qu'il ajoute en 1892 est introduit de la façon suivante : « Un autre cas particulier qui me semble digne d'intérêt est le suivant [. . .] » [Poincaré 1892–1899, t. I, p. 84]. Ces cas ne sont donc pas présentés comme issus d'une dichotomie qui permettrait de n'en oublier aucun, mais comme un éventail de cas particuliers parmi d'autres possibles. Ainsi, une fois qu'il a étudié les premiers cas, essentiels à l'étude globale, Poincaré choisit les cas supplémentaires qu'il considère en fonction de leur intérêt et non en fonction d'une nécessité mathématique. On voit par là que ces derniers cas ont un statut différent des premiers.

Il me semble que cette étude fait apparaître deux points essentiels.

D'abord elle permet de mettre en évidence la prégnance, dans le travail de Poincaré, d'une démarche qui procède par hiérarchisation des cas en fonction du degré de généralité. Cette classification permet en particulier de mettre en avant les cas essentiels qui doivent être pris en compte pour établir un résultat global à partir de considérations locales.

Mais dans le même temps, ce moyen de comparaison de cas différents est de moins en moins explicité, du moins dans les textes que nous avons examinés. Tout se passe comme si, du fait que Poincaré n'a pas de moyen de le thématiser, cet auxiliaire du raisonnement reste à l'état de guide pour l'orientation de la recherche, un critère que Poincaré semble souligner de moins en moins — peut-être simplement parce qu'il lui est de plus en plus familier.

2.7 Conclusion

Dans le mémoire *Sur les courbes*, Poincaré introduit une forme particulière de conditions sous lesquelles établir un résultat. Entre des conditions universelles — ce qui est vrai « dans tous les cas » — et des conditions restrictives — ce qui est vrai « dans tel et tel cas » — Poincaré insère une forme de condition qu'on pourrait dire générique : ce qui est vrai dans le « cas général ». Il ne s'agit pas, toutefois, d'un *raisonnement générique* imprécis tel qu'en dégage Hawkins dans ses recherches sur l'histoire de la théorie des matrices. Poincaré définit précisément en 1881, en amont de son analyse, les limites du « cas général ». Cependant ces limites se distinguent de conditions restrictives en ceci qu'elles « ne nuisent pas à la généralité ».

La possibilité de définir un « cas général » apparaît corrélée avec un mode de travail spécifique de Poincaré : la définition de listes hiérarchisées de cas. À travers cette démarche privilégiée de raisonnement, Poincaré développe une réflexion sur le degré de généralité des différents cas qu'il est amené à considérer. Cette gradation, du point de vue de la généralité, entre les cas, constitue un préalable important à la définition du « cas général ».

Le passage d'une liste de cas hiérarchisée à un « cas général » s'avère particulièrement fructueux dans le cadre de l'établissement d'un résultat global à partir de la liste des comportements locaux possibles. C'est le cadre de l'étude de 1881, et on le retrouve à propos de l'étude des solutions périodiques. La hiérarchisation des comportements locaux permet à Poincaré de se restreindre, dans l'étude globale, aux cas essentiels, qui sont suffisamment bien connus pour que leur contribution au comportement global soit appréhendable. Les cas plus particuliers, plus complexes et plus divers, peuvent être écartés du « cas général », le cadre donné à l'étude globale.

Lorsque Poincaré inaugure dans son mémoire *Sur les courbes* une nouvelle approche, globale, de l'étude des équations différentielles, il s'appuie ainsi sur une technique qu'il a déjà introduite précédemment, dans son premier article [Poincaré 1878] et dans sa thèse [Poincaré 1879] : la hiérarchisation des cas. Mon analyse permet donc d'éclairer les étapes progressives par lesquelles Poincaré se démarque des problématiques qui orientaient le travail de ses prédécesseurs et élabore de nouvelles questions et de nouvelles méthodes. Je reviendrai dans la conclusion générale sur la deuxième caractéristique de la démarche adoptée par Poincaré en 1881 pour étudier les équations différentielles : il s'intéresse à leurs propriétés *qualitatives*. Sur ce point aussi, la thèse de 1879 semble préluder au travail de 1881 : nous avons vu que Poincaré y introduit déjà des passages d'interprétation géométrique — dans le domaine réel — de propriétés des équations aux dérivées partielles qu'il étudie.

Poincaré n'explicite pas ce qu'il entend lorsqu'il affirme d'un ensemble de conditions qu'elles « ne nuisent pas à la généralité ». L'hésitation dont il fait preuve à propos de l'hypothèse qu'il convient de faire sur le polynôme $x\,\mathrm{Y}_2 - y\,\mathrm{X}_2$ en 1881 témoigne d'une réflexion sur ce qui est plus général, quoiqu'elle ne soit pas aboutie dès le début de son travail. Les textes que nous avons étudiés permettent cependant de dégager quelques critères qui semblent guider Poincaré pour classer, du point de vue de leur degré de généralité, les cas qu'il définit.

Les conditions d'égalité, par opposition aux inégalités, entre des quantités qui définissent les cas jouent ainsi un rôle important. Plus le nombre d'égalités supposées vérifiées est grand, plus le cas est particulier. Ces égalités peuvent se présenter plus largement comme des conditions algébriques (racines multiples, etc.) sur les données du problème. La comparaison avec ce qui se passe formellement me semble se rapprocher de ce critère, puisque le raisonnement formel suppose que les coefficients des polynômes considérés ne sont liés par aucune relation. Ce point sera confirmé plus loin (3.4.1).

Un deuxième type de considérations, souvent liées aux conditions d'égalité, intervient pour comparer les cas sous le rapport du degré de généralité : la traduction géométrique des conditions qui les définissent. L'interprétation géométrique fait apparaître la dégénérescence de certains cas par rapport à d'autres : propriétés de tangence, points multiples, sont autant de propriétés qui signalent des cas plus particuliers.

Dans le problème que nous allons étudier maintenant, Poincaré emploie un critère tout à fait différent pour étudier la généralité relative de deux phénomènes.

Étude de l'équation $\frac{dx}{\mathrm{X}} = \frac{dy}{\mathrm{Y}}$ au point (α, β)

$$\mathrm{X} = a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(y-\beta) + \dots$$
$$\mathrm{Y} = b_0 + b_1(x-\alpha) + b_2(y-\beta) + \dots$$

1^er cas	$a_0 \neq 0$ ou $b_0 \neq 0$.	thm de Cauchy	Une seule caractéristique passe par (α, β).
2^e cas	$a_0 = b_0 = 0$, a_1, a_2, b_1, b_2 non tous nuls.	[énoncé du théorème de Poincaré]	
	`[Points singuliers de première espèce :]`		
1^er cas sub.	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$ [mais $\lambda_1 \neq \lambda_2$].	thm de Poincaré	Toutes les caractéristiques passent par (α, β). $\boxed{\text{nœud}}$
2^e cas sub.	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$.	résultat de Briot et Bouquet	Deux caractéristiques passent par (α, β). $\boxed{\text{col}}$
3^e cas sub.	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{C}$.	thm de Poincaré	Les caractéristiques sont des spirales autour de (α, β). $\boxed{\text{foyer}}$
4^e cas sub.	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1$.	« quelques remarques »	Les caractéristiques sont des spirales $\boxed{\text{foyer}}$ ou des courbes fermées concentriques $\boxed{\text{centre}}$ autour de (α, β).
Cas particuliers laissés de côté			
	$\lambda_1 = \lambda_2$.	résultat de Briot et Bouquet	Toutes les caractéristiques passent par (α, β). $\boxed{\text{nœud}}$
	`[Points singuliers de deuxième espèce :]`		
	$\lambda_1 = 0$.		
	$\lambda_1 = 0$ ou $a_1 = a_2 = 0$ ou $b_1 = b_2 = 0$		Le point singulier peut être considéré comme la limite d'un système de plusieurs points singuliers confondus ensemble.

TAB. 2.1 – Organisation du chapitre II de [Poincaré 1881a].

Chapitre 3

Mise en place d'un concept mathématique pour caractériser ce qui est exceptionnel

Les travaux de Poincaré en mécanique céleste fournissent, avec l'élaboration du « théorème de récurrence »[1], un autre contexte dans lequel notre auteur énonce un résultat qui n'est pas vrai toujours, mais seulement le plus souvent. L'étude de ce nouveau problème va nous permettre de dégager les différences importantes que son traitement présente par rapport au processus de définition d'un cas général que nous venons d'étudier, qui s'appuyait sur la hiérarchisation des cas.

Une première différence apparaît immédiatement et guidera la démarche adoptée pour étudier ce nouveau dossier : Poincaré thématise ici la généralité du résultat qui l'intéresse. Il introduit à cet effet le calcul des probabilités pour préciser mathématiquement en quoi les trajectoires qui ne satisfont pas au théorème sont « exceptionnelles ». Je me propose donc dans ce chapitre de dégager les modalités de cette thématisation, et d'analyser les outils utilisés par Poincaré. Nous disposons pour cela d'un corpus extrêmement intéressant. Poincaré précise en effet l'énoncé du théorème de récurrence progressivement, dans une série de textes successifs.

Le théorème apparaît dans le mémoire *Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique*, soumis par Poincaré au prix offert en 1888 par le roi Oscar II de Suède. Le manuscrit original n'a pas été retrouvé[2], mais nous disposons de deux versions imprimées du mémoire. Suite à la découverte d'une erreur importante, la première, [Poincaré 1889] (ci-après : [Pa]), n'a pas été distribuée. Le mémoire corrigé, [Poincaré 1890] ([Pb]), a été publié dans *Acta mathematica* l'année suivante. Il est rapidement suivi par deux résumés sans démonstrations, en 1891. Poincaré évoque à nouveau le théorème de récurrence en 1894, toujours sans démonstration, dans un contexte très différent : la théorie cinétique des gaz.

[1] Voir la note 4, p. 15.

[2] Voir [Barrow-Green 1997].

Enfin, le théorème est intégré, avec une démonstration, dans le troisième tome du maître ouvrage de Poincaré en mécanique céleste, les *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*[3]. Le tableau suivant donne une vision d'ensemble de ce corpus.

Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique			
	1888 —	version originale (non retrouvée)	manuscrit
[Pa]	1889 —	première version imprimée, avec notes annexes	non publiée
[Pb]	1890 —	version corrigée de [Pa], notes annexes intégrées	publiée
	janvier 1891 —	Deux résumés de [Pb], sans démonstration :	
		[Poincaré 1891b] *Bulletin astronomique*	
		[Poincaré 1891a] *Revue générale des sciences*	
	1894 —	Sur la théorie cinétique des gaz	
		[Poincaré 1894] *Revue générale des sciences*	
	1899 —	*Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*	(tome III)
		[Poincaré 1892–1899]	

3.1 Des trajectoires « *exceptionnelles* » : Introduction d'un langage et d'un concept nouveaux dans la formulation du théorème de récurrence

Le théorème de récurrence concerne les trajectoires d'un système d'équations différentielles de la forme $\frac{dx_i}{dt} = X_i$, en trois dimensions ($i = 1, 2, 3$). Autrement dit, on suppose le mouvement d'un point P régi par ces équations, et on s'intéresse aux différentes courbes que décrira ce point en fonction de sa position initiale. Le théorème est énoncé de façon identique dans les deux mémoires [Pa] et [Pb] :

> **Théorème 1.** Supposons que le point P reste à distance finie, et que le volume $\int dx_1 dx_2 dx_3$ soit un invariant intégral ; si l'on considère une région r_0 quelconque, quelque petite que soit cette région, il y aura des trajectoires qui la traverseront une infinité de fois.[4]

Il est ensuite étendu aux cas où l'espace dans lequel évolue le point P est de dimension quelconque, et où l'on dispose d'un invariant intégral (qui n'est pas nécessairement le volume), le point P étant toujours assujetti à rester à distance finie. En d'autres termes, comme Poincaré l'annonce lui-même dans chacun des deux mémoires, ce théorème affirme que sous ces hypothèses il y a une infinité de trajectoires qui jouissent d'une forme de stabilité à laquelle Poincaré donne dans [Pb] le nom de « stabilité au sens de Poisson »[5].

---

[3] J'abrégerai ce titre en *Méthodes nouvelles*.

[4] [Pa], p.31 et [Pb], p. 314 (édition des *Œuvres*). L'énoncé, identique, est intitulé « Théorème 1 » dans les deux textes. Seule la typographie présente de légères variations. Dans [Pa], « Théorème 1 » est en gras et l'énoncé en caractères romains. Dans [Pb], « Théorème 1 » est en petites capitales et l'énoncé en italique.

[5] Poincaré avait déjà, dans le troisième mémoire *Sur les courbes* [Poincaré 1885, p. 94], défini une notion de stabilité très semblable. Voir p. 116.

Dès [Pa], Poincaré revendique un résultat plus fort, qui porte sur la nature de cette infinité : « je pourrais même ajouter que les trajectoires qui jouissent de cette propriété sont plus générales que celles qui n'en jouissent pas, précisément autant que les nombres incommensurables sont plus généraux que les nombres commensurables. » Mais cette affirmation est énoncée sans démonstration.

3.1.1 Choix explicite d'un vocabulaire spécifique

On retrouve dans les textes ultérieurs l'idée de comparer, du point de vue de leur généralité, les trajectoires récurrentes et celles qui ne le sont pas. Mais la formulation de cette comparaison se modifie. En suivant un à un les énoncés successifs du théorème de récurrence, je vais mettre en évidence un processus intéressant. Non seulement Poincaré met en place à partir de 1890 une terminologie stable pour énoncer le contraste entre les deux types de trajectoires ; mais il souligne de plus avec insistance le sens technique qu'il donne aux termes qu'il introduit ainsi. C'est donc Poincaré lui-même qui invite à remarquer que son mémoire n'est pas constitué seulement de résultats mathématiques. La fabrication des énoncés au moyen desquels ces résultats sont consignés fait également partie du travail du mathématicien. Je m'attacherai d'abord à la *formulation* de la comparaison entre les trajectoires récurrentes et les autres, avant de m'intéresser dans un deuxième temps aux outils mathématiques utilisés par Poincaré. Ce travail d'analyse permettra ensuite de mettre en évidence la corrélation entre l'élaboration des résultats et des énoncés.

Dans [Pb], Poincaré annonce dès l'introduction de la section qui nous intéresse ce renforcement du théorème : « J'ajouterai que les premières [les trajectoires qui ne jouissent pas de la stabilité au sens de Poisson, AR] peuvent être regardées comme exceptionnelles et je chercherai plus loin à faire comprendre le sens précis que j'attache à ce mot. » [Pb, p. 314]

La formulation a changé par rapport à [Pa]. L'accent y était mis sur des trajectoires « plus générales » que d'autres. L'insistance se déplace sur le caractère « exceptionnel » de ces dernières. Nous verrons bientôt que ce changement de point de vue est lié à ce qu'établit la démonstration que Poincaré donne dans [Pb]. De plus, dès cette annonce introductive, Poincaré attire l'attention du lecteur sur le « mot » qu'il emploie. On retrouve la notion de précision qui était déjà présente en 1889 : « précisément autant ». Mais il s'agissait alors de la comparaison directe d'objets mathématiques. Dans [Pb], c'est un mot qui va recevoir une spécification mathématique précise. Ainsi Poincaré thématise en 1890 une *notion* mathématique en lui attachant un *vocabulaire*.

Après l'énoncé du théorème 1 et sa démonstration, gardés inchangés par rapport à [Pa], c'est sous la forme d'un corollaire que Poincaré introduit la précision qu'il a annoncée [Pb, p. 316] :

> **Corollaire 1.** *Il résulte de ce qui précède qu'il existe une infinité de trajectoires qui traversent une infinité de fois la région r_0 ; mais il peut en exister d'autres qui ne traversent cette région qu'un nombre fini de fois. Je me propose maintenant d'expliquer pourquoi ces dernières trajectoires peuvent être regardées comme exceptionnelles.*

Poincaré souligne immédiatement que « cette expression n'[a] par elle-même aucun sens précis », et en donne une « définition » en termes de probabilité.

Nous retrouvons l'accent déjà mis plus haut sur la précision de la terminologie. De plus, Poincaré signale qu'il prend un terme du langage courant, et lui donne un sens technique. Dans la suite du mémoire, on constate qu'il réserve le terme « exceptionnel » à ce sens précis. Il rappelle d'ailleurs à l'occasion comment le terme est défini : « si les conditions initiales ne sont pas exceptionnelles *au sens donné à ce mot dans le corollaire du théorème 1* » ([Pb], p. 323 ; je souligne).

Si, alertés par l'insistance de l'auteur sur ce terme, nous relisons l'introduction de [Pb], il apparaît que Poincaré utilise déjà le même mot, quoiqu'il n'insiste pas encore sur le sens technique qu'il lui donnera dans le corps du mémoire. Il décrit en effet ainsi son travail : « J'ai étudié plus spécialement un cas particulier du problème des trois corps, celui où l'une des masses est nulle et où le mouvement des deux autres est circulaire ; j'ai reconnu que dans ce cas les trois corps repassent une infinité de fois aussi près que l'on veut de leur position initiale, à moins que les conditions initiales du mouvement ne soient exceptionnelles. » [Pb, p. 264]

Laissons un instant de côté le théorème de récurrence pour donner un panorama des emplois de l'adjectif « exceptionnel », ainsi que des termes apparentés « exception » et « exceptionnellement », dans les mémoires sur le problème des trois corps et plus largement dans les textes de Poincaré.

Dans [Pa], l'adjectif « exceptionnel » était déjà employé dans un contexte qui le rapproche plutôt de la hiérarchisation des cas étudiée dans le premier chapitre. Poincaré écrivait : « Ce résultat ne cesserait d'être vrai que dans le cas exceptionnel où les deux nappes d'une infinité de surfaces asymptotiques viendrait à se confondre en une seule » (p. 156). Un terme de la même famille revient quelques lignes plus loin à propos du même sujet : « cela n'arrivera qu'exceptionnellement ». On retrouve ensuite l'expression entière « cas exceptionnel ». Ce passage, déjà dans [Pa], était repris par une note annexe où l'adjectif « exceptionnel » n'apparaît pas. C'est le contenu de cette note que l'on retrouve intégré dans le corps du mémoire [Pb]. Ainsi la disparition, dans ce dernier mémoire, de l'adjectif « exceptionnel » pour qualifier autre chose que les trajectoires non récurrentes est probablement fortuite, due au remaniement de ce passage, remaniement dont la rédaction date de 1889 et non de 1890.

Par ailleurs, Poincaré utilise à plusieurs reprises dans [Pb] le vocabulaire de l'« exception ». Mais c'est toujours dans des tournures qui s'apparentent à celles que nous venons d'évoquer dans [Pa], à savoir pour signaler des « cas d'exception », soit directement en employant cette expression, soit par la formule : « il n'y aurait exception que si . . . » ou des variantes. Dans tous ces emplois, c'est un « cas », autrement dit la réalisation d'une condition, qui est dit « exceptionnel ». À propos du théorème de récurrence, en revanche, c'est l'objet mathématique « trajectoire », ou encore les données initiales du mouvement elles-mêmes qui sont qualifiés d'exceptionnels. Je reviendrai dans la partie 3.4 sur la différence qui me semble capitale entre ces deux types d'« exceptions ».

En regardant plus largement l'œuvre de Poincaré, on constate qu'il emploie l'adjectif « exceptionnel » dans un sens non technique, et pour qualifier directement des « polynomes », c'est-à-dire des objets mathématiques [Poincaré 1896b, p. 515]. Poincaré signale, dans cet article, des « cas d'exception » [p. 512, 514] à un théorème démontré par Bruns. Peu nous importe ici le contenu de ce théorème. Ayant montré que le défaut de la démonstration se concentre sur des propriétés de certains polynômes, Poincaré appelle « polynomes exceptionnels » ceux qui mettent en défaut la démonstration de Bruns. C'est bien le sens courant de l'adjectif que Poincaré mobilise ici : est « exceptionnel » un polynôme qui fait « exception ». Il n'est pas question de la plus grande généralité des polynômes qui satisfont au théorème, et encore moins d'une caractérisation probabiliste de cette généralité. Certes on peut argumenter que Poincaré présente son projet ici d'abord comme la recherche de « cas d'exception ». Ceci permettrait de maintenir tant bien que mal une distinction entre des endroits où Poincaré examine des « cas » d'exception, d'une part, et des emplois techniques du vocabulaire de l'exception, pour lequel le calcul des probabilités permet de caractériser certains objets — les trajectoires non récurrentes, tout particulièrement — d'« exceptionnels ». Mais il serait sans doute exagéré et artificiel de chercher ainsi une opposition absolue, manifestée dans la syntaxe, entre le sens courant de la terminologie de l'exception, et le sens technique probabiliste. Je me contenterai donc de montrer que Poincaré emploie systématiquement, à partir de 1890, le vocabulaire de l'« exception » lorsqu'il fait référence au corollaire du théorème de récurrence. Nous verrons de plus qu'il prend soin, presque toujours, de souligner le sens technique dans lequel il l'emploie, en renvoyant au calcul des probabilités.

Ainsi, dans le résumé [Poincaré 1891b] qu'il écrit pour le *Bulletin Astronomique* des résultats publiés dans le mémoire [Pb], on lit :

> On peut donc, à ce point de vue, dire qu'il y a une infinité de solutions particulières instables[6], et une infinité de solutions particulières stables.
>
> Mais il y a plus, on peut dire que les premières sont l'exception et que les secondes sont la règle, au même titre que les nombres rationnels sont l'exception et que les nombres incommensurables sont la règle. [Poincaré 1891b, p. 490]

La phrase est construite sur le même schéma que dans [Pa] : la distinction des deux sortes de trajectoires est mise en parallèle avec celle entre commensurables et incommensurables. Mais Poincaré emploie maintenant le terme d'« exception », conformément à la convention qu'il a définie dans [Pb], plutôt que l'expression « plus générales » de [Pa]. Il poursuit en précisant ce que recouvre le terme d'« exception » qu'il vient d'employer :

> Je démontre, en effet, que la probabilité pour que les circonstances initiales du mouvement soient celles qui correspondent à une solution instable, que cette probabilité, dis-je, est nulle. Ce mot n'a par lui-même aucun sens : j'en donne dans mon Mémoire une définition précise que je ne crois pas utile de reproduire ici [...] [Poincaré 1891b, p. 490]

Ainsi, même sans avoir l'intention d'entrer dans les détails, Poincaré a soin d'utiliser le vocabulaire introduit dans [Pb]. Il souligne, ici encore, la précision de son propos, malgré une formulation qui pourrait sembler relever du langage courant. De plus, alors même qu'il ne la reprend pas en 1891, il insiste sur le fait qu'il a donné une démonstration de cette affirmation. Notons enfin qu'ici, le

[6] C'est-à-dire : non récurrentes (AR).

mot dont Poincaré annonce qu'il a donné une définition est celui de « probabilité », plutôt que celui d'« exception ». Nous reviendrons bientôt sur la question, importante aux yeux de Poincaré, de la définition des probabilités.

Le même phénomène se reproduit dans l'article écrit pour la *Revue générale des sciences* [Poincaré 1891a]. La formulation est semblable, avec la même insistance sur le caractère technique de la terminologie :

> J'ajouterai que les premières [les solutions instables, AR] sont exceptionnelles (ce qui permet de dire qu'il y a stabilité en général). Voici ce que j'entends par là, car ce mot en lui-même n'a aucun sens. Je veux dire qu'il y a une probabilité nulle pour que les conditions initiales du mouvement soient celles qui correspondent à une solution instable. [Poincaré 1891a, p. 68]

Nous retrouvons le terme « exceptionnel », avec sa définition en termes de probabilités. La parenthèse insérée par Poincaré explicite la raison principale qui l'amène à préciser le sens du terme et à démontrer le théorème qui en résulte, sur la probabilité des trajectoires instables. Il s'agit d'aller plus loin que le résultat démontré dès [Pa], qui établit seulement l'existence d'une infinité de trajectoires stables dans toute région, ou, en termes modernes, la densité des trajectoires stables. La caractérisation des trajectoires instables comme « exceptionnelles » permet de fonder mathématiquement l'affirmation de la stabilité « en général ». Nous reviendrons sur ce point dans la partie 3.3.2.

Poincaré fait à nouveau allusion au théorème de récurrence, en 1894, dans un autre article pour la même revue [Poincaré 1894]. Cette mention est particulièrement intéressante, parce qu'elle intervient dans un contexte différent. L'article de 1894 ne concerne en effet ni le problème des trois corps, ni plus généralement la mécanique céleste. Il traite de la théorie cinétique des gaz. Poincaré y expose « les idées de Maxwell », et discute en particulier le postulat de Maxwell. Il formule ce postulat dans les termes suivants : « quelle que soit la position initiale du système, il passera toujours une infinité de fois, je ne dis pas par toutes les situations *compatibles avec l'existence des intégrales, mais aussi près qu'on voudra* d'une quelconque de ces situations » [Poincaré 1894, p. 252]. Il rappelle les résultats qu'il a démontrés en mécanique céleste pour étayer sa discussion :

> Tous les problèmes de mécanique céleste admettent certaines solutions remarquables que j'ai appelées périodiques et asymptotiques et dont j'ai parlé ici-même dans un précédent article[7].
>
> Pour ces solutions, le postulat de Maxwell est *certainement faux.*
>
> Ces solutions, il est vrai, sont très particulières, elles ne peuvent se rencontrer que si la situation initiale est tout à fait exceptionnelle.
>
> Il faudrait donc au moins ajouter à l'énoncé du postulat cette restriction, déjà bien propre à provoquer nos doutes : *sauf pour certaines situations initiales exceptionnelles.* [Poincaré 1894, p. 256]

Non seulement le domaine, mais également le but de l'argumentation, sont différents. Le caractère exceptionnel des solutions instables justifiait en 1891 qu'on puisse considérer qu'« il y a stabilité en général ». Autrement dit, il permettait de restreindre suffisamment l'importance quantitative de ces solutions

[7]Il s'agit de l'article [Poincaré 1891a] dont nous venons de parler (AR).

pour qu'on puisse affirmer tout de même la stabilité. Ici au contraire, la simple existence des solutions instables est présentée comme inspirant des « doutes » sur le postulat de Maxwell, alors que leur caractère exceptionnel pourrait être invoqué au contraire pour conserver à ce postulat sa validité « en général ».

Malgré cette différence d'enjeu, Poincaré reprend le qualificatif « exceptionnel » associé à ces solutions. Il ne souligne pas, ici, la spécificité du vocabulaire utilisé. Mais il fait référence à son précédent article sur le problème des trois corps. Il est donc bien clair qu'il rappelle ses résultats de mécanique céleste pour argumenter sur la théorie cinétique des gaz. De plus, s'il n'insiste pas sur la terminologie elle-même, il attire l'attention sur la précision nécessaire dans l'énoncé du postulat.

Dans les *Méthodes nouvelles*, enfin, Poincaré reprend les mêmes termes. Il exprime et démontre dans cet ouvrage le théorème de récurrence en utilisant un langage plus imagé. Il y parle des trajectoires d'un système d'équations différentielles comme des trajectoires de molécules dont les mouvements sont définis par les équations[8]. Voici comment il annonce le corollaire au théorème de récurrence :

> Nous avons vu au n°291 qu'il y a des molécules qui traversent U_0 une infinité de fois. D'autre part, en général, il y en a d'autres qui ne traversent U_0 qu'un nombre fini de fois. Je me propose de montrer que ces dernières doivent être regardées comme exceptionnelles ou, pour préciser davantage, que la probabilité pour qu'une molécule ne traverse U_0 qu'un nombre fini de fois est infiniment petite, *si l'on admet* que cette molécule est à l'intérieur de U_0 à l'origine du temps. [Poincaré 1892–1899, t. III, p. 151]

Le terme d'« exceptionnel » est réutilisé à de nombreuses reprises dans la suite des *Méthodes nouvelles*, toujours avec le même sens technique, et souvent accompagné de la précision « au sens que j'ai donné plus haut à ce mot ».

On observe donc un contraste net entre [Pa] d'une part, [Pb] et tous les textes ultérieurs d'autre part.

En 1889, Poincaré se contente d'une remarque sommaire, sans démonstration, sur la plus grande généralité des trajectoires récurrentes. Le lecteur doit trouver lui-même ce qui conduit Poincaré à une telle affirmation. Le sens même de la remarque n'est pas évident. La comparaison avec les « nombres incommensurables » est supposée éclairer la nature de la généralité des trajectoires récurrentes, mais on peut l'entendre de plusieurs façons. Poincaré a-t-il en vue une caractérisation des trajectoires récurrentes par l'irrationalité d'un paramètre ? Fait-il référence à l'opposition démontrée par Cantor quelques années plus tôt entre les rationnels dénombrables et les irrationnels indénombrables ? Ou pense-t-il déjà à la démonstration qu'il propose dans [Pb] ? La question reste ouverte.

À partir de 1890, Poincaré introduit un nouveau vocabulaire. Il l'emploie systématiquement lorsqu'il parle des trajectoires non récurrentes, et souligne le caractère technique de cette terminologie. De plus, il mentionne presque toujours

[8]Cette image est très certainement suggérée par le rapprochement entre le théorème de récurrence et les questions de théorie cinétique des gaz. Nous venons de voir que Poincaré faisait lui-même ce lien en 1894. Son théorème de récurrence a été invoqué également par d'autres auteurs dans les débats sur la théorie cinétique des gaz à cette époque (voir note 13).

la définition, en termes de probabilité nulle, qu'il donne au mot « exceptionnel », ceci même lorsqu'il n'entre pas dans les détails de la définition de la probabilité.

3.1.2 Le contenu mathématique de cette terminologie

Poincaré ne se contente pas de forger un vocabulaire technique pour parler de la généralité de certaines trajectoires ; il associe explicitement à cette terminologie une définition mathématique précise.

Cette remarque pourrait sembler tautologique à première vue. Pourtant, elle ne l'est pas : dans l'œuvre de Poincaré lui-même, il est d'autres expressions à caractère technique qu'il n'accompagne pas d'une définition. Nous en avons rencontré une en étudiant le mémoire *Sur les courbes* : les « polynômes les plus généraux de leur degré ». Cette formule apparaît en italique, sans aucune variation, même minime, des mots qui la composent, à plusieurs reprises dans deux mémoires successifs, [Poincaré 1878] et [Poincaré 1881a]. Ainsi, la façon dont elle se présente dans ces textes invite à la même conclusion que pour le terme « exceptionnel » : il s'agit d'une expression qui pourrait sembler relever du langage courant, mais son emploi stable, ainsi que l'accent que l'auteur met dessus — *via* l'utilisation de l'italique dans ce cas — en révèlent le caractère technique.

Or Poincaré ne définit pas, dans les textes que nous avons étudiés, ce qu'il entend par les « polynômes les plus généraux de leur degré ». J'ai proposé comme hypothèse d'interprétation que Poincaré l'emploie au sens de Serret. Mais Poincaré ne juge pas nécessaire de le préciser, alors même qu'il introduit cette expression dans un cadre de travail substantiellement différent de celui de Serret, comme je l'ai souligné. Nulle part il ne donne une justification, fût-elle rapide, de l'affirmation qu'une circonstance ne se produit pas « lorsque les polynômes [définissant l'équation étudiée] sont les plus généraux de leur degré ».

Ceci contraste avec la caractérisation mathématique donnée au terme « exceptionnel » à propos du théorème de récurrence. Le contraste est d'autant plus marqué que, dans [Poincaré 1891a], Poincaré va jusqu'à dire que « ce mot [= exceptionnel] en lui-même n'a aucun sens ». Il manifeste par là une exigence, relativement aux mots du langage courant employés pour parler d'objets mathématiques, qui tranche avec sa pratique antérieure. Il me semble que cette différence entre l'attitude de Poincaré vis-à-vis « des polynômes les plus généraux de leur degré », et celle face aux « trajectoires exceptionnelles » met en évidence la nouveauté de la caractérisation qu'il propose pour ces dernières. Poincaré pouvait compter sur la culture mathématique de son lecteur pour comprendre ce que recouvraient les « polynômes les plus généraux de leur degré ». Mais il attire l'attention sur la définition nouvelle qu'il donne du caractère exceptionnel des trajectoires non récurrentes.

Venons-en à la définition du terme « exceptionnel » telle qu'elle est donnée dans [Pb] :

> Nous conviendrons de dire que la probabilité pour que la position initiale du point mobile appartienne à une certaine région r_0 est à la probabilité pour que cette position initiale appartienne à une autre région r'_0 dans le même rapport que le volume de r_0 au volume de r'_0.

> Les probabilités étant ainsi définies, je me propose d'établir que la probabilité pour qu'une trajectoire issue d'un point de r_0 ne traverse pas cette région plus de k fois est nulle, quelque grand que soit k et quelque petite que soit la région r_0. C'est là ce que j'entends quand je dis que les trajectoires qui ne traversent r_0 qu'un nombre fini de fois sont exceptionnelles. [Pb, p. 316]

Poincaré choisit donc d'utiliser une caractérisation probabiliste pour préciser ce qu'il entend par « trajectoires exceptionnelles ». Ceci nous invite à étudier les liens entre les mémoires sur le problème des trois corps et les travaux de Poincaré sur les probabilités. De fait, tous les textes de Poincaré portant spécifiquement sur le calcul des probabilités sont postérieurs à [Pb]. Ainsi, le mémoire sur le problème des trois corps est le premier témoin des réflexions de Poincaré dans ce domaine. Cette circonstance ne nous prive cependant pas de moyens d'investigation. En effet, nous pouvons comparer la façon dont le calcul des probabilités est mobilisé dans les travaux sur le problème des trois corps avec l'exposé que Poincaré en donne dans les années suivantes. La continuité que nous mettrons en évidence montrera que l'emploi des probabilités en 1890 et 1891 est pour Poincaré l'occasion de former sa conception personnelle de ce domaine des mathématiques. Nous voyons donc que l'enjeu de ce dossier n'est pas seulement l'émergence d'un nouveau type d'énoncé. Il apporte également une lumière nouvelle sur l'élaboration par Poincaré du calcul des probabilités. C'est pourquoi j'y consacrerai une partie entière (3.5).

Nous nous intéresserons surtout au premier ouvrage de Poincaré sur le calcul des probabilités, [Poincaré 1896a]. Il contient les leçons données au second semestre de l'année 1893–1894 à la Sorbonne. Poincaré a publié ensuite des articles à visée plutôt philosophique et, en 1912, une réédition augmentée du *Calcul des probabilités*[9].

Je voudrais montrer dès à présent que la façon dont Poincaré définit la probabilité dans [Pb] suit les exigences théoriques exposées dans [Poincaré 1896a]. Il s'agit donc bien déjà d'un usage technique des probabilités. Les premiers mots de la définition donnée dans [Pb], « nous *conviendrons*[10] de dire que la probabilité [...] » trouvent en effet un écho très net dans la première des *Leçons sur le calcul des probabilités* : « La définition complète de la probabilité est donc une sorte de pétition de principe : comment reconnaître que tous les cas sont également probables ? Une définition mathématique ici n'est pas possible ; nous devons dans chaque application faire des *conventions*[11], dire que nous considérons tel et tel cas également probables. Ces conventions ne sont pas tout à fait arbitraires, mais échappent à l'esprit du mathématicien qui n'aura pas à les examiner, une fois qu'elles seront admises. » [Poincaré 1896a, p. 5] Poincaré

[9] Comme les deux éditions, de 1896 et 1912, présentent peu de différences pour ce qui concerne le corps du texte, et que la deuxième est beaucoup plus facile à consulter, je citerai le cours dans la pagination de la deuxième édition, de 1912, sauf pour les passages que Poincaré a modifiés entre les deux éditions. Les changements les plus massifs consistent en l'ajout d'un long chapitre d'introduction ainsi que d'un dernier chapitre.

[10] Je souligne.

[11] Ici, l'italique est de Poincaré. Poincaré a beaucoup utilisé ce terme dans ses ouvrages philosophiques (voir par exemple [Poincaré 1902]). Je m'intéresserai seulement à l'emploi qu'il en fait en probabilité. Le lien entre les deux usages dépasse largement le cadre de mon étude (AR).

donne bien en 1890 une *convention* explicitant les cas supposés également probables : l'appartenance de la position initiale à deux régions est supposée de même probabilité lorsque les régions sont de même volume.

Dans les deux résumés des résultats de [Pb] publiés en 1891, Poincaré ajoute une remarque concernant la validité du corollaire. Elle est intéressante pour nous dans la mesure où il y souligne que le choix de la façon de définir la probabilité est libre dans une large mesure :

> On objectera qu'il y a une infinité de manières de définir cette probabilité ; mais cela [la probabilité est nulle pour que les conditions initiales du mouvement correspondent à une solution non récurrente, AR] reste vrai quelle que soit la définition que l'on adopte, à une condition toutefois : soient x et y les coordonnées de la troisième masse[12], x' et y' les composantes de sa vitesse. J'appelle $Pdxdydx'dy'$ la probabilité pour que x soit compris entre x_0 et $x_0 + dx$, y entre y_0 et $y_0 + dy$, x' entre x'_0 et $x'_0 + dx'$, y' entre y'_0 et $y'_0 + dy'$. Nous pouvons définir la probabilité comme nous le voulons et, par conséquent, nous donner arbitrairement P en fonction de x_0, y_0, x'_0 et y'_0. Eh bien, le résultat que j'ai énoncé plus haut reste vrai, quelle que soit cette fonction P, *pourvu qu'elle soit continue.* [Poincaré 1891a, p. 537]

La formulation est plus succincte dans [Poincaré 1891b], mais il s'agit de la même idée : « je dois ajouter que le même résultat subsisterait, quelle que soit la définition [de la probabilité, AR] adoptée, pourvu qu'il n'entre dans cette définition que des fonctions continues » (p. 490). Le résumé pour le *Bulletin astronomique* [Poincaré 1891b] et l'article dans la *Revue générale des sciences*, que nous venons d'examiner, sont des textes plutôt destinés à la vulgarisation des idées de [Pb]. De fait, ils sont beaucoup moins longs, et la précision pourrait donc ne pas sembler, *a priori*, la valeur la plus recherchée. Or c'est pourtant là qu'apparaît un détail supplémentaire par rapport à l'analyse de 1890, à savoir que le résultat est inchangé même si l'on change la définition de la probabilité.

Ce point est extrêmement révélateur. D'une part, nous pouvons en conclure que Poincaré s'est rendu compte qu'il peut laisser une très large latitude dans la définition de la probabilité précisément entre la rédaction de [Pb] et celle des articles de 1891. D'autre part, cette propriété a une importance significative à ses yeux, puisqu'il la signale dans de courts articles de résumé.

Ce fait est confirmé par les *Méthodes nouvelles*, où cette addition est insérée dès le moment où Poincaré définit ce qu'il entend par probabilité :

> [...] Mais il faut d'abord que j'explique le sens que j'attache au mot *probabilités.* Soit $\varphi(x, y, z)$ une fonction quelconque positive des trois coordonnées x, y, z ; je conviendrai de dire que la probabilité pour qu'à l'instant $t = 0$ une molécule se trouve à l'intérieur d'un certain volume est proportionnelle à l'intégrale
>
> $$J = \int \varphi(x, y, z) dx\, dy\, dz$$

[12]Poincaré parle ici de l'application du théorème de récurrence au problème restreint des trois corps (AR).

étendue à ce volume. Elle est égale, par conséquent, à l'intégrale J divisée par la même intégrale étendue au vase V tout entier.

Nous pouvons choisir arbitrairement la fonction φ, et la probabilité se trouve ainsi complètement définie : comme la trajectoire d'une molécule ne dépend que de sa position initiale, la probabilité pour qu'une molécule se comporte de telle ou telle manière est une quantité entièrement définie dès qu'on a choisi la fonction φ. [Poincaré 1892–1899, t. III, p. 151–152]

Il démontre ensuite le corollaire du théorème de récurrence dans le cas où $\varphi = 1$, ce qui correspond à la convention adoptée dans [Pb], où la probabilité est proportionnelle au volume. Il revient enfin au cas d'une fonction φ quelconque, et annonce que « les mêmes résultats subsistent quand, au lieu de prendre $\varphi = 1$, on fait tout autre choix pour la fonction φ. » Il prouve alors cette remarque : c'en est la première démonstration, puisqu'il se contentait, dans les articles de 1891, d'énoncer les résultats issus de [Pb]. Soulignons que c'est au cours de la démonstration qu'il suppose φ continue.

Poincaré mentionnera dans son cours de 1894 l'existence de problèmes similaires, où la probabilité d'un évènement ne dépend pas de la définition adoptée pour la probabilité, du moment qu'elle est donnée par une fonction φ continue. Nous reviendrons plus en détail sur ce point dans la partie 3.5 ; d'ores et déjà, ceci révèle que cette addition introduite en 1891 relève, aux yeux de Poincaré, d'un usage technique des probabilités.

J'ai insisté sur le fait qu'à partir de 1890, Poincaré qualifie les trajectoires ne jouissant pas de la stabilité au sens de Poisson d'« exceptionnelles » et explicite à l'aide du concept mathématique de probabilité le sens qu'il donne à ce mot. Il faut toutefois noter une légère évolution entre 1890 et les textes suivants dans la façon précise dont Poincaré définit le terme « exceptionnel ».

Nous avons vu la définition qu'il donne en 1890 : les trajectoires qui ne traversent une région r_0 qu'un nombre fini de fois sont dites exceptionnelles parce que la probabilité pour qu'une trajectoire issue de cette région ne la traverse pas plus de k fois est nulle, quelque soit k. En conséquence, nous verrons que Poincaré calcule cette probabilité à k fixé, et montre qu'elle est nulle. Dans ce mémoire, il n'est donc pas question de la probabilité pour qu'une trajectoire ne traverse r_0 qu'un nombre fini de fois.

Dès 1891, l'énoncé de la définition des trajectoires « exceptionnelles » change précisément sur ce point. Dans [Poincaré 1891a], Poincaré formule ainsi ce qu'il entend par l'affirmation que les trajectoires instables sont exceptionnelles : « Je veux dire qu'il y a une probabilité nulle pour que les conditions initiales du mouvement soient celles qui correspondent à une solution instable. » De même dans [Poincaré 1891b], Poincaré affirme qu'il démontre dans son mémoire « que la probabilité pour que les circonstances initiales du mouvement soient celles qui correspondent à une solution instable [...] est nulle. » Rien, dans ces textes, ne correspond à l'entier k qui apparaissait en 1890 dans la définition du terme « exceptionnel ». Il est possible qu'il s'agisse là d'un simple abus de langage, assez naturel dans des textes de résumé : l'auteur ne recherche pas la même précision que dans le mémoire complet, où figure la démonstration. D'ailleurs, on constate que la région r_0 n'est plus mentionnée non plus. Or la probabilité que calcule Poincaré dans [Pb] est la probabilité pour qu'une trajectoire issue d'une région donnée ne repasse pas plus de k fois *dans cette même région*. Dans la mesure où il n'a pas l'intention de donner de démonstration en 1891, on peut estimer que c'est à dessein qu'il évite d'introduire trop de notations, ce qui le conduit à donner un énoncé moins précis.

Mais dans les *Méthodes nouvelles*, en 1899, l'entier k n'apparaît pas non plus dans la définition du terme « exceptionnel ». Pourtant, dans cet ouvrage, Poincaré donne les démonstrations, et mentionne la région U_0 de laquelle sont issues les trajectoires considérées, et dans laquelle on compte le nombre de retours. Il affirme que « la probabilité pour qu'une molécule ne traverse U_0 qu'un nombre fini de fois est infiniment petite, *si l'on admet* que cette molécule est à l'intérieur de U_0 à l'origine du temps » [Poincaré 1892–1899, t. III, p. 151]. Plus précisément, il démontre dans un premier temps, comme dans [Pb], que « la probabilité pour qu'une molécule qui, à l'origine du temps, se trouve dans la région U_0 ne traverse pas cette région plus de k fois entre les époques $-\infty$ et 0 [...] est infiniment petite » [*Ibid.*, p. 153], et de même entre les époques 0 et $+\infty$. Il consacre ensuite plus d'une page à prouver que « la probabilité pour que notre molécule ne traverse pas U_0 une infinité de fois, entre les époques $-\infty$ et 0 », comme entre 0 et $+\infty$, est « infiniment petite »[13].

Il est difficile de savoir si cette addition était déjà sous-entendue dans les articles de 1891 ou si l'absence de mention de l'entier k y était due seulement à la concision de ces textes de résumé. Quoi qu'il en soit, le changement est clair dans les *Méthodes nouvelles*. Il s'agit donc bien d'un nouvel affermissement du corollaire, et plus précisément d'une modification du sens du terme « exceptionnel » : le sens dans lequel ce mot est employé dans les *Méthodes nouvelles* est plus fort que celui que Poincaré lui donne dans [Pb].

On remarque par ailleurs dans le passage que nous venons de citer plus haut que Poincaré ne parle plus de probabilité « nulle » comme dans [Pb], mais préfère utiliser l'expression « infiniment petite ». Il en est de même dans les *Leçons de calcul des probabilités*. Pourtant, la probabilité pour que x soit incommensurable y est encore dite « égale à 1 ». Il semble y avoir une hésitation sur le terme à employer. L'expression « infiniment petite » est plus conforme à la façon dont on peut calculer cette probabilité, en la majorant par des quantités aussi petites qu'on veut. C'est bien ainsi que procède Poincaré dans [Pb] pour

[13] Nous voyons apparaître ici un autre point sur lequel Poincaré précise son analyse dans les *Méthodes nouvelles* par rapport à son étude de 1890. Il s'intéressait alors aux retours d'une trajectoire à proximité de sa position initiale dans les temps positifs seulement. En 1899, il souligne que les équations gardent la même forme lorsqu'on change le sens du temps, et en déduit que la même démonstration prouve qu'il y a des trajectoires qui traversent la région U_0 considérée une infinité de fois « *avant l'époque zéro* » aussi bien que « *après l'époque zéro* ». Il va encore plus loin et ajoute — preuve à l'appui — qu'il y a des trajectoires « qui traversent U_0 une infinité de fois, *tant avant qu'après l'époque zéro.* » [Poincaré 1892–1899, t. III, p. 147]

Cette insistance à traiter symétriquement les temps négatifs et positifs me semble devoir être lue en relation avec les développements et les débats dans la théorie cinétique des gaz à cette époque. Une question centrale de ce débat est celle de la réversibilité des équations fournies par la théorie cinétique, qui semble entrer en contradiction avec le second principe de la thermodynamique. Or Zermelo avait invoqué le théorème de récurrence de Poincaré dans ce débat au cours des années 1890. Poincaré ne pouvait bien sûr pas y être indifférent, et c'est là un enjeu supplémentaire qui s'était attaché à ce théorème entre l'époque de [Pb] et celle où Poincaré rédige le troisième tome des *Méthodes nouvelles*. Cependant, il n'est pas dans mon propos de développer cet aspect du problème, qui n'a plus guère de rapport avec mon objectif principal : l'introduction du corollaire et des probabilités.

la démonstration du corollaire. Il n'hésitait pourtant pas, alors, à parler ensuite de probabilité nulle (voir citation page 109). L'emploi de la nouvelle formulation n'est pas systématique non plus dans les *Méthodes nouvelles*. On trouve en effet encore une occurrence, dans les *Méthodes nouvelles*, où Poincaré parle de probabilité « nulle », à propos du théorème de récurrence. Appliquant ce théorème au problème des trois corps, il écrit : « Cette proposition est vraie, en laissant de côté certaines trajectoires exceptionnelles, dont la probabilité est nulle, au sens donné à ce mot au n°296 » [Poincaré 1892–1899, t. III, p. 174] Ainsi, dans les textes auxquels nous nous intéressons ici, les deux qualifications semblent avoir exactement le même sens. Il est possible que la préférence pour l'expression « infiniment petite » soit provoquée par les débats sur la théorie cinétique des gaz dans lesquels le théorème de récurrence est invoqué comme argument (voir aussi la note 13).

3.1.3 Les démonstrations du théorème de récurrence et du corollaire

Nous nous sommes intéressés jusqu'ici au vocabulaire introduit par Poincaré pour formuler le corollaire qu'il ajoute en 1890, puis aux concepts probabilistes qu'il utilise pour définir cette terminologie. Il nous faut maintenant examiner la démonstration de l'affirmation selon laquelle les trajectoires qui ne possèdent pas la stabilité au sens de Poisson sont exceptionnelles, c'est-à-dire de probabilité nulle. Nous verrons ainsi précisément quels outils Poincaré mobilise pour établir cette propriété. En comparant la preuve avec celle du théorème de récurrence, nous aurons une meilleure appréhension des liens entre le théorème initial et le corollaire.

Voyons d'abord la démonstration du théorème de récurrence proprement dit, telle que nous la trouvons dans [Pa], et, reprise presque mot pour mot, dans [Pb].

Poincaré commence par prendre acte de la première hypothèse du théorème, à savoir qu'il existe, dans l'espace des phases, une région R dans laquelle les trajectoires sont contenues, et qui est de volume fini V. Il considère ensuite « une région très petite » r_0 dans R, de volume v. Fixant arbitrairement une échelle de temps τ, il considère les images $r_1, r_2, \ldots, r_n$ de la région r_0 par le flot des équations différentielles aux temps $\tau, 2\tau, \ldots, n\tau$. Il appelle r_n la n-ième *conséquente* de la région r_0. Réciproquement, r_0 est dite la n-ième *antécédente* de r_n.

La deuxième hypothèse stipule que le volume est un invariant intégral. Il en résulte qu'une région et ses conséquentes ont même volume.

Poincaré en déduit que toute région r_0 a une partie commune avec une de ses conséquentes $r_1, r_2, \ldots, r_n$, dès lors que $n > \frac{V}{v}$. En effet, $r_0, r_1, \ldots, r_n$ sont toutes de même volume v, et intérieures à R de volume V. Si elles n'avaient aucun point commun, leur volume total devrait satisfaire aux deux conditions incompatibles d'être plus grand que nv, mais plus petit que V, volume total de la région R qui les contient. Ainsi, deux de ces régions au moins ont une partie commune lorsque n est assez grand. Si r_p et r_q sont ces deux régions (avec $q > p$), il en découle que leurs $(q-p)$-ièmes antécédentes, r_0 et r_{q-p}, ont également une partie commune : r_0 a donc bien une partie commune avec une de ses conséquentes.

Poincaré note ensuite une généralisation de cette propriété, qu'il n'utilise pas en 1889, mais qui lui servira dans [Pb] pour la démonstration du corollaire : pour tout k, il existe une partie commune à au moins k des régions r_0, r_1, ..., r_n, dès lors que n est assez grand. En effet, s'il n'y a pas de points communs à plus de $k-1$ de ces régions, le volume total qu'elles occupent serait plus grand que $\frac{nv}{k-1}$. Il suffit donc de supposer $n > (k-1)\frac{V}{v}$ pour que l'on puisse trouver k régions ayant une partie commune parmi r_0, r_1, ..., r_n. Si r_0 ne fait pas partie de cette liste de k régions, on peut s'y ramener comme précédemment.

Grâce à la première propriété, Poincaré construit deux suites de régions emboîtées $r_0, r'_0, r''_0, \ldots, r^n_0, \ldots$ et r_0, s'_0, s''_0, ..., $s^n_0, \ldots$ de la façon suivante. Soit r_{p_0} la première conséquente de r_0 qui a une partie commune avec r_0. Poincaré note r'_0 cette partie commune, et s'_0 la p_0-ième antécédente de r'_0. Alors s'_0 est incluse dans r_0, de même que r'_0 qui est sa p_0-ième conséquente. r''_0 et s''_0 sont ensuite construites de la même manière à partir de r'_0.

Par récurrence, supposons r^n_0 et s^n_0 construites et telles que s^n_0 fait partie de r_0, de même que toutes ses conséquentes d'ordres p_0, p_0+p_1, ..., $p_0+p_1+\cdots+p_{n-1}$.

Soit $r^n_{p_n}$ la première conséquente de r^n_0 qui a une partie commune avec r^n_0. On définit r^{n+1}_0 comme cette partie commune, et s^{n+1}_0 comme l'antécédente d'ordre $p_0+p_1+\cdots+p_n$ de r^{n+1}_0. Alors s^{n+1}_0 fait partie de r_0 de même que toutes ses conséquentes d'ordre p_0, p_0+p_1, ..., $p_0+p_1+\cdots+p_n$.

Poincaré considère alors l'intersection, non vide — Poincaré l'affirme sans le justifier —, de toutes les régions s^n_0, qu'il note σ. Par construction, σ et toutes ses conséquentes d'ordre p_0, p_0+p_1, ..., $p_0+p_1+\cdots+p_n$, ... sont dans r_0. Ainsi, la trajectoire issue d'un point de σ repasse dans r_0 une infinité de fois.

Voyons maintenant la démonstration du corollaire dans [Pb]. Poincaré cherche à calculer la probabilité pour que la trajectoire issue d'un point de r_0 ne traverse pas $k+1$ fois la région r_0 entre l'époque zéro et l'époque $n\tau$. Il s'appuie sur la propriété démontrée plus haut, qui assure que si $n > \frac{kV}{v}$, on peut trouver $k+1$ régions r_0, r_{α_1}, ..., r_{α_k} qui ont une partie commune s_{α_k}. Soit s_0 l'antécédente d'ordre α_k de s_{α_k}. On voit que la trajectoire issue d'un point de s_0 traverse $k+1$ fois au moins la région r_0 entre l'époque zéro et l'époque $n\tau$. Autrement dit, Poincaré montre ici que si le volume v d'une région r_0 vérifie l'inégalité $n > \frac{kV}{v}$, alors il existe des points de r_0 (qu'il suffit de prendre dans la région s_0) tels que la trajectoire qui en est issue traverse r_0 au moins $k+1$ fois entre les époques zéro et $n\tau$.

Poincaré s'intéresse maintenant à la région σ_0 de r_0 définie par la propriété suivante : les trajectoires issues des points de σ_0 ne traversent pas la région r_0 plus de k fois entre les époques zéro et $n\tau$. Remarquons que cette région peut être définie à partir de r_0 et de ses n premières conséquentes par un nombre fini d'unions et d'intersections. Poincaré indique d'ailleurs comment le faire : on considère toutes les régions « analogues » à la région s_0 qu'on vient de définir, c'est-à-dire que pour chaque combinaison $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de k indices $\alpha_1 < \cdots < \alpha_k$ entre 1 et n, on considère s^α_0, α_k-ième antécédente de l'intersection des régions r_0, r_{α_1}, ..., r_{α_k} (certaines des s^α_0 peuvent être vides, mais Poincaré a montré qu'il en existe qui sont non vides). Alors σ_0 est obtenue en retirant à r_0 l'union de ces s^α_0, qui sont en nombre fini. Ainsi, considérer le volume de σ_0

ne nécessite pas de disposer d'une mesure du volume qui soit dénombrablement additive.

Le volume de la région σ_0 est noté w. Le raisonnement précédent, appliqué à σ_0 au lieu de r_0, montre que $w < \frac{kV}{n}$, puisque aucune trajectoire issue de σ_0 ne traverse r_0, ni *a fortiori* σ_0, $k+1$ fois entre les époques zéro et $n\tau$.

Il s'ensuit que la probabilité pour qu'une trajectoire issue de r_0 ne traverse pas cette région plus de k fois entre ces deux époques — probabilité donnée, par définition, par le rapport $\frac{w}{v}$ — est majorée par $\frac{kV}{nv}$. Cette borne peut être rendue aussi petite qu'on veut en prenant n suffisamment grand. Si l'on ne se limite plus à l'époque $n\tau$, on voit que la probabilité pour qu'une trajectoire issue de r_0 n'y repasse pas plus de k fois est plus petite que $\frac{kV}{nv}$, ceci quelque soit n. Elle est donc nulle.

Autrement dit, la propriété clé qui permet de démontrer le théorème aussi bien que le corollaire est la remarque suivante : lorsqu'une région a un volume suffisamment grand, on peut en déduire qu'elle possède une intersection non vide avec certaines de ses conséquentes. La propriété est utilisée sous cette forme pour démontrer le théorème, et sous la forme contraposée pour prouver le corollaire : une majoration du nombre d'intersection d'une région avec ses conséquentes se traduit par une majoration de son volume.

En 1899 dans les *Méthodes nouvelles*, la démonstration du théorème de récurrence et du corollaire se déroule, dans un premier temps, selon un schéma similaire[14].

La première différence notoire dans la façon dont est menée la démonstration a été signalée plus haut, à la note 13 : Poincaré considère les trajectoires dans les temps positifs et négatifs. Ceci lui permet de simplifier légèrement l'exposé de la démonstration du théorème, en montrant d'abord qu'il existe une trajectoire qui traverse r_0 une infinité de fois dans les temps négatifs. Il lui suffit en effet pour cela de construire une suite de régions emboîtées, qui correspond à la suite r_0, r_0', r_0'', …, r_0^n, …, dont l'intersection fournit au moins un point de r_0 par lequel passe une trajectoire récurrente dans les temps négatifs. Il en déduit le même résultat pour les temps positifs en considérant les équations obtenues en changeant le sens du temps, lesquelles ont la même forme que les équations initiales, si bien que le théorème s'y applique également. Il ajoute ensuite une démonstration de l'existence de trajectoires récurrentes à la fois en temps positifs et négatifs.

Mathématiquement, cette nouvelle façon de procéder n'a pas pour seul avantage de construire une seule suite emboîtée de régions r_0, r_0', …, r_0^n, … au lieu de deux comme dans [Pa] et [Pb]— où Poincaré définissait également la suite s_0, s_0', …, s_0^n, …. Poincaré note[15] dans les *Méthodes nouvelles* que la suite de régions ainsi construite possède la propriété que tous les antécédents de r_0^n d'ordres p_{n-1}, $(p_{n-2}+p_{n-1})$, …, $(p_0+p_1+\cdots+p_{n-1})$ sont dans la région r_0.

[14] Poincaré utilise des notations différentes mais que l'on peut mettre en correspondance : la petite région autour de laquelle s'élabore le raisonnement est nommée U_0 au lieu de r_0, U_0 désigne en même temps son volume, et remplace donc v. De même, les conventions pour noter les conséquentes sont légèrement différentes. Je vais, pour simplifier, conserver les notations de 1890.

[15] Comme je l'ai annoncé, je conserve les notations de [Pb] ; dans les *Méthodes nouvelles*, Poincaré emploie la lettre U au lieu de r et les lettres α, β, … pour les indices p_0, p_1, …

La preuve de 1890 s'appuyait sur une propriété semblable. Mais la construction des *Méthodes nouvelles* possède la conséquence supplémentaire que les antécédents d'ordre $\sum p_i$ sont dans r_0^k dès que l'ensemble des indices i sur lesquels porte la somme ne contient pas d'entier inférieur à k [Poincaré 1892–1899, t. III, p. 145]. Poincaré s'arrête à cette remarque, ce qui semble très étrange au lecteur mathématicien moderne. En effet, en suivant cette idée, on constate que la preuve des *Méthodes nouvelles* pourrait permettre de démontrer l'existence de trajectoires récurrentes dans un sens plus fort, qu'il avait déjà formulé dans le mémoire *Sur les courbes* : « Nous dirons que la trajectoire d'un point mobile est stable lorsque, décrivant autour du point de départ un cercle ou une sphère de rayon r, le point mobile, après être sorti de ce cercle ou de cette sphère, y rentrera une infinité de fois, et cela, quelque petit que soit r. » [Poincaré 1885, p. 94] Cette définition semble plus proche[16] de la stabilité à la Poisson telle que Poincaré la formule initialement : « on peut choisir la position initiale du point P (et cela d'une infinité de manières) de telle façon que ce point P repasse une infinité de fois aussi près que l'on veut de sa position initiale » [Pb, p. 313]. La formulation du théorème de récurrence semble au contraire s'en écarter : « si on considère une région r_0 quelconque, quelque petite que soit cette région, il y aura des trajectoires qui la traverseront une infinité de fois. » [Pb, p. 314] Pour prouver la version plus forte de la proposition, il suffirait d'imposer par exemple que le diamètre de r_0^n ne dépasse pas $1/n$ au moment où l'on construit les régions emboîtées r_0, r_0', …, r_0^n en suivant la procédure des *Méthodes nouvelles*. Ceci nécessite simplement de réduire éventuellement la région obtenue à chaque étape, ce qui est toujours possible. Un point de l'intersection possède alors un nombre infini d'antécédents dans chacune des régions r_0^n. Or quel que soit le rayon r, on peut trouver une valeur k de n pour laquelle le diamètre de r_0^n est plus petit que r. Ceci assure qu'un point sortant de l'intersection des régions r_0^n, donc *a fortiori* de r_0^k, repassera une infinité de fois dans r_0^k, c'est-à-dire à une distance inférieure à r de sa position initiale. En inversant le sens du temps, on obtient la propriété équivalente dans les temps positifs.

C'est dans l'utilisation des probabilités que les démonstrations de 1899 présentent les ajouts les plus intéressants pour notre propos par rapport à leur version de 1890. Esquissons-les tour à tour pour les deux renforcements du corollaire que nous avons relevés : d'une part, la probabilité est nulle quelle que soit la distribution de probabilité considérée, du moment qu'elle est continue ; d'autre part, Poincaré ne se contente pas en 1899 de montrer que la probabilité est nulle pour qu'une trajectoire ne repasse pas plus de k fois dans la région r_0 initiale, pour une valeur quelconque de k, mais il ajoute que la probabilité est encore nulle pour que la trajectoire passe seulement un nombre fini de fois dans r_0.

Lorsque la probabilité est définie comme étant proportionnelle à l'intégrale $J(r) = \int_r \varphi(x, y, z) dx\, dy\, dz$ plutôt que proportionnelle au volume de r, Poincaré considère la limite supérieure μ de φ dans R. Ceci lui permet de majorer cette intégrale étendue à une région donnée par le volume de cette région, multiplié par μ. La probabilité pour qu'une trajectoire issue de r_0 ne traverse pas cette région plus de k fois est alors majorée par $\frac{\mu k V}{n J(r_0)}$ au lieu de $\frac{kV}{nv}$, ce qui conduit

[16] Voir la partie 3.4.4 pour une discussion plus détaillée.

à la même conclusion[17].

Le deuxième renforcement donne lieu à une démonstration plus complexe. Poincaré avait déjà obtenu la majoration $\frac{kV}{nv}$ pour la probabilité qu'une trajectoire issue de r_0 n'y repasse pas plus de k fois entre les époques[18] 0 et n. Il pose alors $n = k^3 + x$. Le majorant devient $\frac{kV}{(k^3+x)v}$. Poincaré s'intéresse ensuite à la probabilité P pour qu'une trajectoire issue de r_0 n'y repasse pas une infinité de fois. Il admet alors la propriété d'additivité dénombrable pour les probabilités[19], qu'il tient pour évidente : « En effet cette probabilité P est la somme des probabilités pour que la [trajectoire] traverse [r_0] une fois seulement, pour qu'elle traverse [r_0] deux fois et deux fois seulement, pour qu'elle traverse [r_0] trois fois et trois fois seulement, etc » [*Ibid.*, p. 153]. Majorant ensuite la probabilité pour que la trajectoire traverse r_0 exactement k fois par la probabilité — déjà évaluée — pour que la trajectoire traverse r_0 au plus k fois, Poincaré majore P par la somme de la série de terme général $\frac{kV}{(k^3+x)v}$. Cette série converge uniformément par rapport au paramètre x. Ainsi, la somme de la série tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini, ce qui prouve que la probabilité P est infiniment petite.

3.2 Un élément d'explication de cette nouveauté : le changement de statut du théorème de récurrence

3.2.1 Comment interpréter les changements entre [Pa] et [Pb] ?

L'analyse qui précède a montré qu'une continuité se manifeste dans la formulation du corollaire au théorème de récurrence entre [Pb] et tous les textes ultérieurs. Certes, l'élaboration du concept de « probabilité nulle » par lequel Poincaré caractérise les trajectoires « exceptionnelles » se poursuit après la publication de [Pb]. Mais les additions que nous avons relevées en 1891 et en 1899 viennent seulement approfondir ce qui était déjà présent dans [Pb], et sont exprimées à l'aide du même vocabulaire technique.

Entre [Pa] et [Pb] en revanche, la formulation subit une mutation, et Poincaré n'explicite pas, dans [Pa], ce que recouvrent exactement ses remarques. La question se pose donc de savoir si l'élaboration d'un vocabulaire associé à une définition mathématique précise, dans [Pb], est seulement une explicitation apportée lors de la réécriture du mémoire pour détailler ce qui n'était qu'esquissé, ou si Poincaré a véritablement approfondi sa compréhension du phénomène en retravaillant son mémoire.

On pourrait être tenté de pencher pour la première interprétation en remarquant que, dès la première version, Poincaré revendiquait l'existence d'une caractérisation précise, quoique sans l'expliciter : « Je pourrais même ajouter

[17] Plus précisément, en 1899, Poincaré obtient la majoration $\frac{kV}{(n+1)v}$, puisque les régions r_0, r'_0, …, r_0^n sont au nombre de $(n+1)$.

[18] En réalité, comme signalé plus haut, Poincaré fait les calculs en 1899 pour les temps négatifs.

[19] Comme on le voit en poursuivant la lecture, Poincaré n'utilise en fait que la sous-additivité dénombrable.

que les trajectoires qui jouissent de cette propriété sont plus générales que celles qui n'en jouissent pas, *précisément autant* que les nombres incommensurables sont plus généraux que les nombres incommensurables. »[20]

Il est difficile de savoir ce que Poincaré visait alors en écrivant « précisément autant ». Nous avons vu que la démonstration du corollaire s'appuie sur le même genre de considérations que la preuve du théorème 1 lui-même, à savoir l'étude d'une région et de ses conséquentes aux temps τ, 2τ, $\ldots$, $n\tau$. Si les trajectoires restent dans une région bornée, certaines de ces conséquentes auront une intersection non vide ; telle est l'idée centrale de la démonstration du théorème 1 aussi bien que de celle du corollaire. Plus encore, nous avons vu que Poincaré montre dès 1889 que non seulement toute région a une intersection non vide avec une de ses conséquentes, mais qu'on peut même trouver une intersection commune à k conséquentes. Ainsi ce n'est pas en introduisant une technique de démonstration nouvelle que Poincaré donne un sens précis à cette idée que certains types de trajectoires sont plus généraux que d'autres. Dans [Pb], Poincaré ne fait que développer des techniques déjà présentes dans [Pa]. La véritable nouveauté est la *formulation*, en termes de probabilité, de la généralité des trajectoires stables au sens de Poisson, ainsi que le soin apporté à en donner une démonstration.

On sait de plus que Poincaré était assez coutumier d'une écriture très allusive ; le mémoire de 1888 n'échappe pas à la règle, comme en témoignent les échanges entre Mittag-Leffler, Hermite et Weierstrass[21] qui formaient le jury chargé d'attribuer le prix offert par le roi de Suède, pour lequel Poincaré avait soumis le mémoire original.

À ces éléments s'ajoute le fait que Poincaré affirme lui-même, dans l'introduction à [Pb], avoir précisé un certain nombre de choses qu'il n'avait pas eu le temps de détailler suffisamment dans la première version de son texte :

> Pressé par le temps, j'avais dû énoncer quelques résultats sans démonstration ; le lecteur n'aurait pu, à l'aide des indications que je donnais, reconstituer les démonstrations qu'avec beaucoup de peine. [Pb, p. 263]

Ces considérations convergent pour donner à penser que le corollaire ajouté en 1890 pourrait faire partie de ces résultats énoncés sans démonstration en 1889, que Poincaré complète en 1890.

Cette réponse me semble insuffisante. Ce « résultat » était en effet « énoncé » d'une façon assez vague dans la première version du mémoire, où il avait plutôt la forme d'un commentaire au détour d'une phrase que d'un corollaire important. Il faudrait donc comprendre plus avant pourquoi Poincaré ne jugeait pas utile, en 1889, de le formuler plus précisément, même sans démonstration. La thèse que je me propose de défendre est que l'introduction du corollaire au théorème de récurrence est la conséquence d'une modification cruciale qui amène ce théorème, en 1890, à jouer un rôle nouveau dans le mémoire.

Il faut noter d'abord que [Pa] contient déjà, sous forme de notes, plusieurs développements estimés nécessaires par Poincaré ou demandés par Mittag-Leffler

[20] [Poincaré 1889], p. 31. Je souligne.
[21] Voir par exemple [Barrow-Green 1994, p 65].

après l'attribution du prix, en vue de la publication. Ces ajouts figuraient simplement en annexes dans [Pa]. Ce sont ces notes que Poincaré présente comme venant préciser les résultats énoncés sans démonstration :

> J'avais songé d'abord à publier le texte primitif en l'accompagnant de notes explicatives ; mais j'avais été amené à multiplier ces notes de telle sorte que la lecture du mémoire serait devenue fastidieuse et pénible.
>
> J'ai donc préféré fondre ces notes dans le corps de l'Ouvrage, ce qui a l'avantage d'éviter quelques redites et de faire ressortir l'ordre logique des idées. [Pb, p. 263]

Or le corollaire du théorème de récurrence n'apparaît pas dans ces notes de [Pa]. D'ailleurs, leur insertion dans le corps du mémoire n'est pas la véritable raison de la réécriture du mémoire. Mais suite à des questions posées par Phragmén, qui préparait la publication, Poincaré s'est rendu compte, à la fin de l'année 1889, d'une erreur conséquente. [Pa] était alors déjà imprimé — avec les notes annexes, qui n'étaient pas jugées en rendre la lecture trop malcommode. Or la portée de cette erreur a nécessité un remaniement assez important du mémoire[22]. La correspondance entre Poincaré et Mittag-Leffler montre que c'est ce dernier qui suggère à l'auteur d'intégrer les notes en même temps qu'il corrige ce qui doit l'être, et d'annoncer ces deux modifications dans l'introduction, en soulignant d'abord la première [Poincaré et Mittag-Leffler 1999, lettre 92, 5/12/1889]. Il est assez manifeste que Mittag-Leffler propose cette ligne de conduite en vue de minimiser l'importance de l'erreur. Il était en effet dans une position délicate : le mémoire avait été primé sans que l'inexactitude de son contenu ait été remarquée. Mittag-Leffler imaginait, dans la première lettre écrite à Poincaré après la découverte de l'erreur, le « scandale » que ses « adversaires acquis par le succès des *Acta* » risquaient de lui faire « à cause de cette affaire » [lettre 91, 4/12/1889]. Il a par conséquent fait tout ce qui était en son pouvoir pour entourer de discrétion les modifications subies par le mémoire. Ce contexte invite à lire avec prudence ce que Poincaré dit lui-même, en concertation avec Mittag-Leffler, des différences entre le mémoire original et la version publiée [Pb].

En revanche, la prise en considération de l'enjeu majeur constitué par la rectification du mémoire nous fournit un critère d'analyse des différences entre [Pa] et [Pb]. Le temps consacré par Poincaré à la réécriture a été relativement court. La correspondance montre qu'il a remarqué son erreur dans les premiers jours de décembre, et il annonce le 5 janvier suivant à Mittag-Leffler qu'il envoie à Phragmén, par le même courrier, la rédaction définitive de son mémoire. Il est donc très probable que, à partir du moment où il s'est rendu compte de l'erreur qu'il avait commise, Poincaré a employé l'essentiel de son énergie à la corriger, plutôt qu'à préciser des points annexes. Ceci nous donne une clef de lecture du théorème de récurrence et de sa réécriture. S'il était totalement indépendant de l'erreur, nous serions portés à conjecturer que le changement de formulation est plus probablement une précision apportée à la faveur de la réécriture, mais dont l'idée était déjà claire pour Poincaré. Cependant, la différence nette que

[22] On trouvera dans [Barrow-Green 1997] une présentation d'ensemble de l'organisation de la compétition, et du contenu des mémoires de Poincaré avec les différences entre les deux versions. June Barrow-Green n'entre pas dans le détail de la formulation du théorème de récurrence, ni de sa place dans chacun des deux mémoires, qui est l'objet de mon travail.

nous avons mise en évidence entre la formulation vague de 1889 et le vocabulaire précis qui apparaît en 1890 et est conservé dans les textes ultérieurs nous met déjà sur la piste d'une autre interprétation. L'étude qui va suivre confirmera que le théorème de récurrence joue un rôle important dans [Pb], sinon directement pour corriger l'erreur, du moins indirectement pour suppléer à un résultat qui s'avère faux.

Il ne s'agit pas seulement ici de déterminer la date à laquelle Poincaré a pu avoir l'idée d'utiliser les probabilités pour préciser le théorème de récurrence. En étudiant la place de ce théorème dans l'économie des deux mémoires [Pa] et [Pb], nous pourrons retracer très finement le contexte dans lequel Poincaré élabore l'énoncé du corollaire, ainsi que les motivations qui l'animent lorsqu'il met au point la terminologie technique que nous avons décrite plus haut. Nous avons donc ici un accès privilégié pour saisir comment, dans l'histoire, un énoncé du type très particulier qui nous intéresse — c'est-à-dire, un énoncé qui *quantifie* la généralité d'une propriété — est apparu.

3.2.2 Le premier mémoire : le thème de la stabilité et le théorème de récurrence

Pour bien saisir l'impact de l'erreur et comprendre quelles modifications en résultent entre [Pa] et [Pb], il nous sera utile de décrire l'architecture du mémoire initial. Nous verrons par ailleurs que l'erreur touche particulièrement la démonstration de la stabilité. C'est la raison pour laquelle nous examinerons avec un soin particulier la place du thème de la stabilité dans [Pa], de façon à voir dans un deuxième temps comment elle se modifie dans [Pb].

Structure de [Pa]

Poincaré présente dans l'introduction de [Pa] — reproduite dans l'annexe A.1 — l'orientation de son travail et les principaux outils qu'il a mis en œuvre. Il commence par une mise en perspective historique qui lui permet de relire les résultats obtenus par ses prédécesseurs et de montrer comment son travail s'articule à cette histoire de la mécanique céleste et du problème des n corps.

Il évoque ainsi les tentatives successives pour intégrer les équations différentielles de la mécanique céleste par des séries trigonométriques, et leurs limites.

D'abord Laplace et Poisson ont pu montrer que les grands axes des orbites des planètes ne subissent que des « variations périodiques »[23] lorsqu'on tient compte seulement des premières et secondes puissances des masses. Autrement dit, les développements auxquels ils parviennent sont des sommes de termes de la forme $\alpha \cos nt$, dits « trigonométriques », ou encore de termes « mixtes » de la forme $\alpha t^m \cos nt$. Mais en tenant compte des troisièmes puissances, on voit apparaître des termes « séculaires », c'est-à-dire des termes de la forme αt^m, dans lesquels le temps se présente en dehors de toute fonction trigonométrique.

De nouveaux développements ont été obtenus ensuite, en particulier par Gyldén et Lindstedt, qui ne contiennent que des termes trigonométriques. Mais

[23]Dans l'introduction de [Pa], Poincaré emploie ce terme avec un sens très large. Dans [Pb] et dans les *Méthodes nouvelles*, il précise son propos et distingue les termes purement périodiques des termes « mixtes » de la forme $\alpha t^m \cos nt$. Ces derniers apparaissent dans les développements obtenus par Poisson, qui va jusqu'au deuxième ordre des masses tandis que Lagrange et Laplace s'arrêtaient au premier. Nous reviendrons sur ce point dans la partie 3.3.3.

la convergence de ces séries n'était pas prouvée, et Poincaré annonce un premier résultat — négatif — de son mémoire, à savoir que ces séries sont divergentes.

Cet aperçu historique lui permet de montrer les limites des développements en séries trigonométriques et la nécessité de trouver de nouvelles méthodes pour étudier les problèmes de la mécanique céleste. Il introduit alors un deuxième type d'outil, imaginé par Cauchy pour étudier les équations différentielles et développé par Weierstrass, puis par Briot, Bouquet, Kowalevski et Poincaré lui-même : le « calcul des limites ». Cette théorie permet de prouver la convergence de certains développements des solutions sous formes de séries. Là encore il en montre les faiblesses : « ces séries, procédant suivant les puissances croissantes de certaines variables, peuvent servir à démontrer l'existence de l'intégrale, ou même à calculer sa valeur numérique ; mais la plupart du temps, elles ne nous en font pas connaître les propriétés. »

Poincaré évoque alors une dernière méthode : la méthode géométrique qu'il a développée dans ses mémoires *Sur les courbes définies par les équations différentielles*. Il résume ainsi la démarche qu'il suivra dans cette nouvelle contribution :

> Dans le présent travail, je ferai concourir à mon but les trois méthodes dont je viens de parler ; aux anciennes méthodes de la mécanique céleste, j'emprunterai la forme trigonométrique des développements ; au « calcul des limites » la démonstration de leur convergence ; enfin c'est à la méthode géométrique de M. POINCARÉ[24] que j'aurai recours pour démontrer la stabilité. [Pa, p. 7–8]

Il présente ensuite le problème restreint des trois corps, à l'étude duquel il s'est limité, et annonce deux résultats : la démonstration rigoureuse de la stabilité dans le problème restreint des trois corps, et la « théorie complète » des solutions périodiques. Il attire enfin l'attention sur une notion qu'il a introduite pour appliquer sa méthode géométrique aux équations de la dynamique : les « invariants intégraux » sur lesquels nous reviendrons.

Le mémoire se compose ensuite de deux parties.

La première s'ouvre par un chapitre où Poincaré rassemble les notations et définitions qu'il utilisera par la suite. Il y précise la forme des équations qu'il étudiera, ainsi que ce qu'il entend par *solutions*, *intégrales*, *trajectoires*. Il définit les « surfaces trajectoires » qui vont jouer un rôle capital dans la démonstration de la stabilité :

> Considérons une courbe gauche quelconque. Par chacun des points de cette courbe passe une trajectoire ; l'ensemble de ces trajectoires constitue une surface que j'appellerai *surface-trajectoire*. [Pa, p. 11]

La propriété importante de ces *surfaces-trajectoires* est qu'elles ne peuvent être coupées par d'autres trajectoires. Elles sont de ce fait au cœur de l'analyse de la question de la stabilité, proposée immédiatement après leur définition par Poincaré :

> Nous aurons fréquemment dans la suite à nous occuper de la question de la stabilité. Il y aura *stabilité* si les trois quantités x_1, x_2, x_3 restent inférieures à certaines limites quand le temps t varie

[24]Le mémoire de 1889 conserve la forme anonyme du mémoire original soumis pour le prix offert par le roi de Suède.

> depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; ou en d'autres termes, si la trajectoire du point P reste tout entière dans une région limitée de l'espace.
>
> Supposons qu'il existe une surface-trajectoire fermée S ; cette surface partagera l'espace en deux régions, l'une intérieure, l'autre extérieure, et aucune trajectoire ne pourra passer d'une de ces régions dans l'autre. Si donc la position initiale du point P est dans la région intérieure, ce point y restera éternellement ; sa trajectoire sera tout entière à l'intérieur de S. Il y aura donc stabilité.
>
> Ainsi la question de stabilité se ramène à la recherche des surfaces trajectoires fermées. [Pa, p. 11-12]

De la sorte, Poincaré introduit dès le début de son mémoire l'objectif principal qu'il poursuit : démontrer la stabilité. Et il annonce en même temps la démarche par laquelle il compte arriver à ce résultat, à savoir la recherche de surfaces trajectoires fermées.

Les deux autres chapitres de la première partie présentent les outils mathématiques élaborés par Poincaré pour étudier le problème restreint des trois corps. Ils sont organisés en deux théories, qui apparaissent d'abord comme deux développements autonomes, la « théorie des invariants intégraux » et la « théorie des solutions périodiques ». Nous n'aurons pas besoin ici d'entrer dans les détails mathématiques de ces deux chapitres, il nous suffira de retenir deux points :

- C'est dans le chapitre sur les invariants intégraux que Poincaré énonce et démontre le théorème de récurrence, dans la section sur l'« usage des invariants intégraux ».
- Le cœur du chapitre sur les solutions périodiques consiste à utiliser le « calcul des limites » pour chercher des solutions périodiques. Connaissant une solution périodique pour des équations non perturbées (par exemple, dans le problème des trois corps, lorsque la troisième masse est nulle), Poincaré étudie les conditions pour qu'il existe encore une solution périodique pour les équations perturbées (lorsque la troisième masse n'est plus nulle, mais très petite). Poincaré étudie par ailleurs les propriétés de stabilité des solutions périodiques[25].

Dans la deuxième partie, Poincaré aborde le sujet proprement dit de son mémoire : l'étude des équations de la dynamique et du problème des n corps. Il considère tout d'abord le cas de deux degrés de liberté. Les équations de Hamilton comportent alors quatre équations et quatre inconnues, mais l'invariance de l'énergie permet de se ramener à un système de trois équations à trois inconnues. Poincaré commence donc par présenter plusieurs représentations géométriques

[25] Il ne faut pas confondre la question de la stabilité d'une solution périodique, qui dépend du comportement des solutions voisines, et la stabilité d'une trajectoire d'un système d'équations différentielles, qui concerne le comportement à long terme de cette trajectoire. Ces deux questions ne sont jamais mélangées par Poincaré, malgré l'emploi d'un terme unique. De fait, il n'y a jamais d'ambigüité, puisque le comportement à long terme d'une solution périodique est évidemment sans surprise (il est périodique, justement). Les solutions périodiques représentent d'ailleurs (qu'elles soient, du point de vue du comportement des solutions voisines, stables ou instables), le modèle de la stabilité totale pour ce qui est du comportement à long terme. Dans toute notre étude, nous nous intéresserons à la question de la stabilité essentiellement dans le deuxième contexte, c'est-à-dire l'étude du comportement à long terme. Nous verrons que Poincaré y emploie plusieurs caractérisations différentes de la stabilité, et que l'accent principal change entre [Pa] et [Pb]. Nous serons ainsi amenés à distinguer un premier et un second sens du terme stabilité, mais il s'agira toujours de la stabilité au regard du comportement à long terme.

qui permettent de ramener le problème à celui de l'intégration d'un champ de vecteurs dans une portion de l'espace à trois dimensions. Il donne en particulier comme exemple le problème restreint des trois corps. Ce cadre étant bien précisé, le chapitre sur la théorie des solutions périodiques fournit une infinité de solutions périodiques instables (au sens précisé à la note 25). Poincaré y a également montré que par chacune des trajectoires fermées représentant ces solutions périodiques passent deux surfaces trajectoires dites *asymptotiques* « sur lesquelles sont tracées en nombre infini des trajectoires qui vont en se rapprochant asymptotiquement de la courbe trajectoire fermée » [Pa, p. 114].

Poincaré étudie alors en détail ces surfaces asymptotiques, établit leurs équations, et montre — ou plutôt, croit montrer — qu'elles se raccordent exactement, formant donc une surface trajectoire fermée[26]. En vertu de la caractérisation donnée au tout début du mémoire, il conclut à la stabilité :

> Donc *les surfaces asymptotiques sont des surfaces fermées.*
>
> Mais au début de ce travail, nous avons montré que pour établir la stabilité, il suffit de démontrer l'existence de surfaces trajectoires fermées.
>
> Donc dans le cas particulier qui nous occupe[27], *la stabilité peut être regardée comme rigoureusement établie.* [Pa, p. 143]

Le mémoire se termine par deux chapitres courts. Le premier propose un résumé en deux parties des résultats obtenus pour les problèmes à deux degrés de liberté : résultats positifs et résultats négatifs. Ce chapitre, comme l'introduction, est particulièrement intéressant pour nous, puisqu'il permet de voir comment Poincaré conçoit l'articulation des différents résultats de son mémoire les uns avec les autres[28]. Le dernier chapitre présente les difficultés rencontrées par Poincaré lorsqu'il a tenté d'étendre ces résultats à un nombre plus grand de degrés de liberté.

La conclusion négative que Poincaré qualifie de « la plus importante » est l'absence d'intégrale analytique et uniforme autre que l'intégrale des forces vives qui soit valable pour toutes les équations de la dynamique. De ce résultat découle la divergence des séries habituellement employées en mécanique céleste, en particulier celle de Lindstedt, que Poincaré mentionnait dans l'introduction.

Dans le résumé des résultats positifs, Poincaré rappelle d'abord l'ensemble de la démarche qui conduit à la preuve de la stabilité : on peut représenter les solutions des équations de la dynamique lorsqu'il y a deux degrés de liberté — en particulier pour le problème restreint des trois corps — par des courbes, dites trajectoires, dans l'espace. Parmi ces trajectoires on distingue des trajectoires périodiques, en nombre infini. Au voisinage de celles qui sont instables, on peut montrer l'existence de trajectoires asymptotiques, qui forment ensemble une surface-trajectoire. Cette surface partage l'espace en trois régions, lesquelles contiennent à nouveau des trajectoires fermées instables, donc des surfaces asymptotiques, donc peuvent être subdivisées à leur tour.

[26] Voir figure 3.1, p. 128 où l'on imagine facilement comment la surface pourrait se refermer.

[27] Poincaré parle ici des équations de la dynamique avec deux degrés de liberté, comme par exemple le problème restreint des trois corps. (AR)

[28] Le résumé des résultats positifs est reproduit dans l'annexe A.2.

Poincaré précise — sans avoir développé ce point précédemment, et donc sans donner de démonstration[29] :

> Cette subdivision peut être continuée à l'infini et on peut la pousser assez loin pour que le volume de chaque région partielle soit aussi petit qu'on le veut.
>
> Comme aucune trajectoire ne peut passer d'une région dans l'autre, on doit conclure que la stabilité est rigoureusement démontrée ; qu'il est possible, étant donnée la position initiale du point représentatif de la situation du système, de trouver une région d'où ce point ne pourra sortir et d'assigner à cette région, sinon *ses limites précises*, du moins des limites aussi rapprochées qu'on le veut de ces limites précises. » [Pa, p. 154–155]

Il conclut en récapitulant les différents types de trajectoires : fermées, asymptotiques et autres. Il renvoie à cette occasion au théorème de récurrence, en formulant la conjecture qu'il existe des trajectoires fermées dans toute portion de l'espace, ou, en langage moderne, que les trajectoires fermées sont denses, et permettent donc d'approcher n'importe quelle trajectoire.

Le thème de la stabilité dans [Pa]

La comparaison des introductions des mémoires [Pa] et [Pb] est très significative pour comprendre la mutation de la place du thème de la stabilité dans ces deux mémoires. Le terme de stabilité ne figure pas dans l'introduction du mémoire [Pb], alors qu'il apparaît dès le début de celle de [Pa].

C'est en effet selon cet axe d'étude que Poincaré relit les travaux de ses prédécesseurs pour articuler son mémoire par rapport à cette tradition de mécanique céleste : « Parmi les résultats qu'il ont obtenus, un des plus remarqués est celui qui se rapporte à la stabilité du système solaire. »

Comme nous l'avons vu ensuite, Poincaré annonce qu'il va faire « concourir à [son] but les trois méthodes » dont il rappelle l'origine dans l'introduction : il utilisera des développements trigonométriques, montrera leur convergence grâce au calcul des limites, et démontrera finalement la stabilité grâce à sa méthode géométrique. La démonstration de la stabilité, dans le cadre du problème restreint des trois corps, apparaît donc comme le but ultime du mémoire.

Cet accent est renforcé dans la suite de l'introduction. Une seule phrase entière y est soulignée par l'usage de l'italique, et elle s'y rapporte : « *Dans ce cas particulier*[30]*, j'ai démontré rigoureusement la stabilité* ». Deux autres expressions sont par ailleurs elles aussi mises en valeur par l'usage de l'italique.

[29] Poincaré reprend cette question, avec d'autres, dans la note B de [Pa]. Il s'efforce dans cette note, à la demande de Mittag-Leffler, de reformuler les principaux résultats dans le langage habituel de l'astronomie. Le formalisme est donc très différent de celui du corps du mémoire, mais on reconnaît le même raisonnement qui consiste à confiner les trajectoires à l'intérieur des surfaces asymptotiques. Poincaré affirme à nouveau pouvoir, « en choisissant convenablement » parmi les inégalités données par chaque solution instable, « resserrer autant qu'on le veut les limites entre lesquelles a [le demi-grand axe de la petite planète] et e [son excentricité] restent comprises » [Pa, p. 179]. C'est seulement dans l'« addition à la note B » que Poincaré précise ceci, en montrant que « *Le grand axe* (et il en est de même de l'excentricité) *varie entre deux limites et la différence entre la limite supérieure et la limite inférieure est du même ordre de grandeur que* $\sqrt(\mu)$. » [Pa, p. 183]

[30] Poincaré vient de présenter le problème restreint des trois corps, à l'étude duquel il se limite (AR).

Il s'agit d'une part des « *solutions périodiques* » dont Poincaré annonce une théorie complète, et d'autre part des « *invariants intégraux* », une « notion nouvelle » introduite « pour pouvoir appliquer aux équations de la dynamique la méthode géométrique » élaborée dans les mémoires sur les courbes définies par les équations différentielles [Poincaré 1881a, 1882, 1885, 1886]. Or la théorie des solutions périodiques comme celle des invariants intégraux sont traitées dans la première partie, pour être ensuite utilisées dans la deuxième partie, celle où Poincaré « aborde le problème lui-même » [Pa, p. 8]. Ainsi, ces deux théories, tout en ayant leur cohérence et leur intérêt propre, sont placées, dans le mémoire de 1889, comme des préliminaires vis-à-vis du cœur de l'étude qui contient en particulier la démonstration de la stabilité.

Quant au premier résultat annoncé dans l'introduction, la divergence des séries connues, il est lui aussi orienté vers la démonstration de la stabilité, puisqu'il montre l'insuffisance des méthodes disponibles jusque là. C'est un résultat négatif qui apporte une motivation pour introduire de nouveaux outils, plus qu'un résultat pour lui-même. Il apparaît dans le corps du texte comme une conséquence de l'absence d'intégrale analytique et uniforme autre que l'intégrale des forces vives, et c'est ce dernier résultat qui est mis en valeur. Ainsi, la divergence des séries connues se présente dans l'introduction de façon incidente, et non en tant que résultat essentiel.

De tous les résultats annoncés dans l'introduction, c'est donc bien la démonstration rigoureuse de la stabilité qui se dégage comme le résultat central du mémoire.

Le théorème de récurrence est également associé au thème de la stabilité. Plus précisément, Poincaré définit, pour introduire ce résultat, un deuxième sens pour le terme stabilité :

> Nous avons défini plus haut la stabilité en disant que le point mobile P doit rester à distance finie ; on l'entend quelquefois dans un autre sens. Pour qu'il y ait stabilité, il faut que le point P revienne au bout d'un temps suffisamment long sinon à sa position initiale, du moins dans une position aussi voisine que l'on veut de cette position initiale. [Pa, p. 31]

Mais ce sens du terme stabilité n'est utilisé que dans la section du mémoire où il est introduit. Au contraire, dans tous les passages où Poincaré insiste sur ce résultat capital qu'est sa démonstration de stabilité, il est bien question du premier sens, introduit dès le début du mémoire : celui qui renvoie au confinement des trajectoires à l'intérieur de surfaces trajectoires fermées.

Nous avons vu en effet comment Poincaré renvoie explicitement à cette caractérisation de la stabilité au moment de conclure sa démonstration (voir citation page 123). Il ressaisit également l'ensemble de sa démarche, en insistant sur le rôle des surfaces trajectoires pour la démonstration de la stabilité, dans le résumé des résultats positifs (voir annexe A.2).

Les échanges de lettres avec Mittag-Leffler étaient cette conclusion. La définition de la stabilité suscitait des interrogations dans le jury chargé d'attribuer le prix, et Weierstrass en particulier contestait le sens physique de la caractérisation utilisée par Poincaré. Celle-ci impose en effet seulement que les trajectoires restent dans une région limitée de l'espace, et semble négliger les éventuelles collisions. À la demande de Weierstrass, Mittag-Leffler demande donc à Poincaré de préciser plus avant la définition de stabilité qu'il emploie. Poincaré répond à Mittag-Leffler en montrant que sa condition exclut en réalité les collisions, puisque les coordonnées employées incluent les vitesses. Or au voisinage d'une collision, la vitesse tend vers l'infini. Si donc les trajectoires restent dans une région bornée, les vitesses seront également bornées, et deux corps ne pourront pas s'approcher indéfiniment[31]. Tout au long de ces échanges, Poincaré réaffirme la définition de la stabilité qu'il considère : « Je dis qu'un système de n corps est stable si les conditions initiales du mouvement sont telles que l'on soit certain que, quelque grand que soit t, la distance de deux quelconques des n corps restera inférieure à une certaine limite finie et positive » (lettre du 25/12/1888 à Mittag-Leffler). C'est bien là la stabilité au premier sens du terme.

Suite à cette discussion épistolaire, Poincaré ajoute au mémoire initial la note B que nous trouvons dans [Pa]. Il y reprend, sous la forme analytique d'encadrement des coordonnées du mouvement, l'argument qui consiste à enfermer les trajectoires à l'intérieur de régions définies par des surfaces asymptotiques (voir note 29). Ainsi, lorsqu'il est interrogé sur sa caractérisation de la stabilité, Poincaré ne fait référence qu'au premier sens, celui qu'il définit au début du mémoire en ces termes : « Il y aura *stabilité*, [...] si la trajectoire du point P reste tout entière dans une région limitée de l'espace. » La stabilité dans le second sens, à laquelle Poincaré donnera en 1890 le nom de stabilité à la Poisson, n'intervient à aucun moment dans cette discussion.

Le théorème de récurrence dans [Pa]

Si nous nous intéressons maintenant au deuxième sens de la stabilité, celui du théorème de récurrence, nous constatons qu'il est présenté comme un sens secondaire et relatif au premier.

Relevons déjà que dans la citation ci-dessus, Poincaré renvoie à ce deuxième sens comme employé « quelquefois », c'est-à-dire moins fréquemment que le premier.

Le théorème de récurrence est ensuite présenté, dans [Pa], comme une propriété supplémentaire de certaines trajectoires, conséquence de la première forme de stabilité :

> Je dis que s'il y a un invariant positif, la stabilité dans le premier sens du mot entraîne la stabilité dans le second sens du mot, non pas pour toutes les trajectoires, mais pour une infinité d'entre elles. [Pa, p. 31]

La propriété principale de stabilité est bien la première, qui s'applique à toutes les trajectoires du problème des trois corps. Nous verrons bientôt qu'il en va tout autrement dans [Pb] et dans les textes suivants.

Pour compléter notre analyse de la place du théorème de récurrence dans l'économie de [Pa], il nous faut examiner la façon dont ce théorème est exploité. Il est d'abord appliqué, immédiatement après être énoncé, au problème de Hill, un modèle pour l'étude du mouvement de la Lune. Nous y reviendrons.

[31] Voir [Barrow-Green 1997], p. 88 et 136, et [Poincaré et Mittag-Leffler 1999], lettre 70 (15/11/1888) note 7, lettre 74 (21/12/1888), lettre 75 (25/12/1888), en particulier la note 8, et enfin lettre 76 (15/01/1889).

Comme nous l'avons signalé en présentant le plan de [Pa], le théorème de récurrence ne sera de nouveau cité qu'à la fin du mémoire, dans le résumé des résultats positifs. Le terme « stabilité » n'apparaît pas à cette occasion :

> Nous pouvons affirmer (théorème I, chapitre II, I^{re} partie[32]) que si l'on envisage une portion de l'espace quelconque, si petite qu'elle soit, il y aura toujours des trajectoires qui la traverseront une infinité de fois.
>
> Il est même hautement vraisemblable que toute portion de l'espace est traversée par une infinité de trajectoires fermées. S'il en est ainsi, et si nous considérons une trajectoire quelconque de la 3^{e} catégorie, nous pouvons toujours trouver une trajectoire de l'une des deux premières catégories[33] qui pendant un temps aussi long qu'on veut, s'en écarte aussi peu qu'on veut, ce qui permettrait de trouver l'équation avec telle approximation qu'on voudrait. [Pa, p. 155]

Nous voyons ainsi que, si Poincaré exprime son espoir d'améliorer le résultat donné par le théorème de récurrence, ce n'est pas dans le sens du corollaire introduit dans [Pb]. Ce dernier assure que les trajectoires récurrentes sont non seulement *denses*, mais encore *plus générales* que les autres. Le résultat conjecturé dans [Pa], lui, affirmerait que non seulement *les trajectoires récurrentes* sont denses, mais que *les trajectoires périodiques* le sont également.

Cette conjecture était déjà formulée un peu plus haut, à la fin de l'étude des systèmes à deux degrés de liberté, conduite dans [Pa] juste avant le résumé des résultats :

> On peut démontrer que dans le voisinage d'une trajectoire fermée représentant une solution périodique, soit stable, soit instable, il passe une infinité d'autres trajectoires fermées. Cela ne suffit pas, en toute rigueur, pour conclure que toute région de l'espace, si petite qu'elle soit, est traversée par une infinité de trajectoires fermées[34], mais cela suffit pour donner à cette hypothèse un haut caractère de vraisemblance. [Pa, p. 153]

Le théorème de récurrence apparaît donc, dans le résumé des résultats, comme un des appuis de cette conjecture sur la densité des trajectoires périodiques[35].

Pour résumer, dans [Pa], le résultat principal est la stabilité au premier sens pour le problème restreint des trois corps. La stabilité au sens du théorème de récurrence n'en est qu'une conséquence, et n'entretient de fait guère de liens avec le thème de la stabilité. Ce théorème est plutôt intégré à la tentative de caractérisation des diverses sortes de trajectoires, qui inspire la conjecture sur la densité des solutions périodiques.

---

[32] Il s'agit du théorème de récurrence (AR).

[33] Poincaré vient de récapituler les types de trajectoires qu'il a mis en évidence. Les deux premières catégories sont respectivement les trajectoires fermées et les trajectoires asymptotiques, la troisième catégorie rassemble toutes les autres trajectoires.

[34] Poincaré insère ici une note sur laquelle nous reviendrons plus loin : « Les travaux récents de M. Cantor nous ont appris en effet (pour employer le langage de ce savant géomètre) qu'un ensemble peut être parfait, sans être continu. »

[35] La question de la densité des trajectoires périodiques est encore ouverte aujourd'hui.

3.2.3 L'impact de l'erreur

Grâce aux questions de Phragmén, Poincaré s'est rendu compte d'une erreur dans sa démonstration de la fermeture des surfaces asymptotiques. Ces surfaces sont composées de pans s'appuyant sur une trajectoire périodique, comme on peut le voir sur la figure 3.1. Poincaré écrit les équations de ces surfaces sous forme de séries en fonction d'un petit paramètre μ, qui représente, dans le problème restreint des trois corps, la masse de la petite planète. La première approximation, qui ne tient compte que des termes en $\sqrt{\mu}$, donne des surfaces toriques (en forme de chambre à air, *i.e.* fermées). Lorsqu'on ne néglige plus les termes d'ordre supérieur en μ, on obtient des pans de surfaces proches de ces tores, et Poincaré croyait montrer par un argument géométrique simple — mais faux — que ces pans se recollent encore pour former une surface torique s'appuyant sur la trajectoire périodique considérée (on imagine facilement cette surface en prolongeant les morceaux de surface représentés sur la figure 3.1 tout le long de la trajectoire périodique)[36]. Mais ce que découvre Poincaré à la fin de l'année 1889, c'est que les deux morceaux ne se recollent pas exactement. Si l'on représente l'intersection des morceaux de surfaces asymptotiques avec le plan de section représenté sur la figure 3.1, on obtient non pas une courbe fermée, mais deux branches de courbes qui se coupent en étant presque tangentes, comme on peut le voir à gauche sur la figure 3.2.

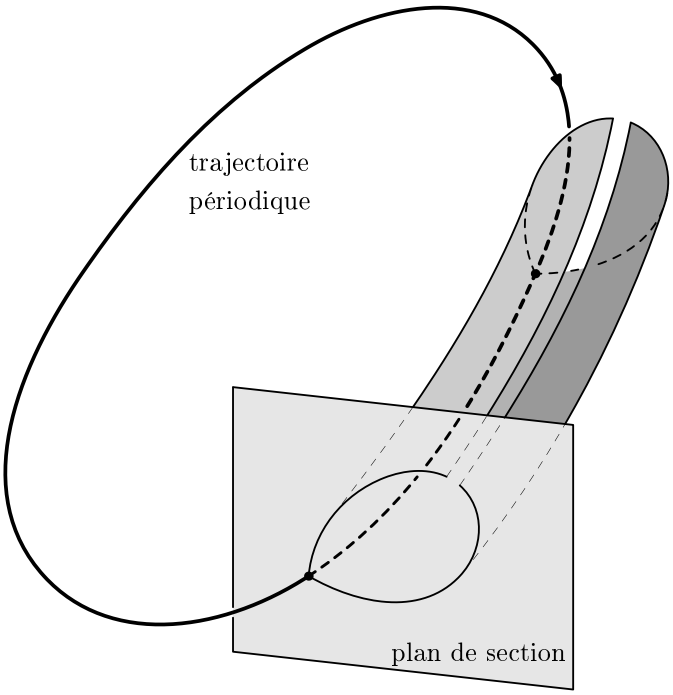

FIG. 3.1 – Surface asymptotique.

[36]J.-C. Yoccoz a souligné que les développements asymptotiques des deux morceaux de surface coïncident à tous les ordres. Il estime que c'est probablement cette propriété qui a donné à Poincaré la conviction erronée qu'ils forment une surface fermée (conférence « un texte, un mathématicien » BNF/SMF, 13 avril 2005).

FIG. 3.2 – Section d'une surface asymptotique.

Cette erreur ne touche pas directement le théorème de récurrence. D'une part en effet, la validité du théorème de récurrence n'est pas remise en cause par la découverte de cette erreur. D'autre part, les usages que fait Poincaré, dans [Pa] comme dans [Pb], de ce théorème, ne nécessitent pas le corollaire ajouté dans [Pb]. En fait — nous l'avons vu pour [Pa]—, Poincaré utilise très peu le théorème de récurrence. Il en donne d'abord, dans [Pb] comme dans [Pa], une application directe : le théorème de récurrence permet de préciser un résultat de Hill sur la théorie de la Lune. Dans [Pb], Poincaré étend cette précision à une généralisation du problème de Hill proposée par Bohlin.

La différence qui pourrait sembler la plus significative est que Poincaré utilise le théorème de récurrence, dans [Pb], pour l'étude des surfaces asymptotiques. Ayant montré que les deux branches de la courbe représentée à gauche sur la figure 3.2 se coupent au moins deux fois, Poincaré applique le théorème de récurrence à la petite région délimitée par les deux branches entre ces deux points d'intersection (grisée sur la figure 3.2). Il en déduit qu'une infinité des conséquentes de cette région ont une partie commune avec elle, ce qui lui permet de montrer que les deux branches de courbes se recoupent une infinité de fois. Comme par ailleurs chacune des deux branches, prise isolément, ne peut pas avoir de point double, il en résulte un dessin extrêmement complexe, que Poincaré ne se hasarde pas à essayer de tracer — beaucoup s'y sont essayés depuis, et ont montré qu'on obtient quelque chose qui ressemble à la figure 3.2, à droite, dont la complexité croît si l'on prolonge encore les deux branches de courbes.

Cette étude des intersections des branches de courbes représentant, dans la surface de section, les surfaces asymptotiques est nécessitée par la correction de l'erreur. Dans [Pa] en effet, Poincaré croyait que les deux branches se refermaient pour former une courbe fermée.

Lorsque Poincaré utilise ici le théorème 1, c'est donc bien pour rectifier une étude qui était erronée dans le premier mémoire. Mais il utilise le théorème initial et n'a nul besoin du corollaire à cet endroit. L'introduction du corollaire dans [Pb] n'est donc pas rendue nécessaire par cette correction.

À première vue donc, la caractérisation des trajectoires « exceptionnelles » grâce aux probabilités semble être une précision gratuite apportée par Poincaré en 1890. Et ceci, nous l'avons souligné, pendant la courte période où il devait être surtout occupé à corriger l'erreur qu'il avait découverte, afin de fournir au plus vite à Mittag-Leffler un mémoire correct. En réalité, de nombreux indices montrent que l'ajout du corollaire accompagne un changement profond de la place occupée par le théorème de récurrence dans l'économie du mémoire. Alors qu'il avait dans [Pa], comme nous l'avons vu, une place relativement subalterne, éclipsé qu'il était par la démonstration « rigoureuse » de la stabilité dans le premier sens du terme, le théorème de récurrence devient en 1890 le résultat principal de stabilité. L'intérêt du corollaire est alors manifeste : il exprime en effet de façon rigoureuse que les trajectoires stables (au second sens du terme) sont les plus générales, alors que le théorème initial assurait seulement qu'on pouvait trouver des trajectoires stables dans toute région.

3.2.4 La nouvelle signification du théorème de récurrence dans l'économie de [Pb] et des textes ultérieurs

Le vide produit par l'effondrement de la démonstration de la stabilité

Suite à la découverte de l'erreur qui invalide la « démonstration rigoureuse de la stabilité », le thème de la stabilité perd, dans [Pb], l'importance qu'il avait dans [Pa]. Ceci est très manifeste dès l'introduction de [Pb], où le terme n'apparaît même plus. En contrepartie, Poincaré met en valeur les résultats négatifs sur la divergence des séries employées en Mécanique céleste et la non-existence des intégrales uniformes. Ces deux résultats étaient déjà présents dans [Pa], mais seul le premier était mentionné dans l'introduction. Il y apparaissait d'ailleurs, nous l'avons vu, comme une motivation pour chercher à développer d'autres techniques d'étude des équations de la mécanique, plutôt que comme un résultat pour lui-même. Au contraire, Poincaré écrit dans l'introduction de [Pb] : « j'attirerai surtout l'attention du lecteur sur les résultats négatifs qui sont développés à la fin du Mémoire ». La présentation de ces résultats négatifs occupe ensuite deux paragraphes de l'introduction, pourtant plus courte que celle de 1889.

Outre les résultats négatifs, l'introduction de [Pb] donne une place nouvelle à plusieurs résultats qui étaient, dans [Pa], subordonnés à divers titres à la démonstration de la stabilité.

Poincaré évoque ainsi les différentes sortes de trajectoires qu'il a mises en évidence, alors qu'il ne parlait, dans l'introduction de [Pa], que des trajectoires périodiques. Les trajectoires asymptotiques, dont l'étude était dans [Pa] orientée vers l'étude des surfaces asymptotiques et par là vers la démonstration de stabilité, sont maintenant considérées pour elles-mêmes, et mentionnées dès l'introduction. D'ailleurs, l'étude des surfaces asymptotiques, qui formait une partie importante du mémoire initial, garde, *mutatis mutandis*, tout son intérêt, bien qu'elle ne permette plus de démontrer la stabilité[37].

De même, le théorème de récurrence est désormais énoncé dès l'introduction, avec son corollaire : « j'ai reconnu que dans ce cas [le problème restreint des trois corps, AR] les trois corps repasseront une infinité de fois aussi près que l'on veut de leur position initiale, à moins que les conditions initiales du mouvement ne soient exceptionnelles » [Pb, p. 264]. Alors que ce théorème était dans [Pa] un résultat dérivé de la stabilité au premier sens, Poincaré lui reconnaît dans [Pb] une portée propre, qui justifie de l'évoquer dès l'introduction.

La présentation du théorème de récurrence dans le corps du mémoire est modifiée de façon semblable. Il apparaissait dans [Pa] comme une conséquence

[37] Rétrospectivement, la nouvelle discussion des surfaces asymptotiques dans [Pb] présente un intérêt majeur. En effet, en décrivant la complexité de ces surfaces qui s'intersectent une infinité de fois le long de trajectoires asymptotiques, Poincaré donne — ce qui sera reconnu seulement bien plus tard — une des premières descriptions mathématiques d'un comportement chaotique dans un système dynamique.

de la stabilité : « la stabilité dans le premier sens du mot entraîne la stabilité dans le second sens du mot » [Pa, p. 31]. Au contraire, il est énoncé dans [Pb] directement comme une propriété vérifiée par le problème restreint des trois corps : « je me propose d'établir que, dans un des cas particuliers du problème des trois corps, on peut choisir la position initiale du point P (et cela d'une infinité de manières), de telle façon que ce point P repasse une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position initiale. » [Pb, p. 313]

Plus encore, Poincaré donne désormais au théorème de récurrence la place qui revenait, dans [Pa], à la démonstration de la stabilité par confinement des trajectoires.

Il opère cette substitution quelques jours seulement après la découverte de l'erreur, comme en témoigne sa lettre à Mittag-Leffler le 9 décembre 1889 : « La stabilité subsiste en ce sens qu'à moins que les conditions initiales du mouvement ne soient exceptionnelles, la planète repassera une infinité de fois aussi près que l'on veut de sa situation primitive. » [Poincaré et Mittag-Leffler 1999, lettre 93]. Mais c'est seulement progressivement que ce changement se répercute sur l'organisation du mémoire de Poincaré.

Dans [Pb], le remplacement du premier sens du terme stabilité par le second n'est pas très manifeste. Mais le théorème de récurrence prend dans l'économie du mémoire, presque subrepticement, la place occupée précédemment par la démonstration de la stabilité au premier sens du terme. Poincaré intègre en effet dans [Pb], juste avant d'énoncer le théorème de récurrence, une partie de l'introduction historique qui ouvrait [Pa]. Il y évoquait tout particulièrement le thème de la stabilité du système solaire comme une motivation de son travail. Nous avons vu que le terme « stabilité » disparaît dans l'introduction de [Pb], ainsi que la présentation historique qui en était faite dans [Pa]. Ces deux thèmes, histoire de la mécanique céleste et stabilité, réapparaissent ensemble, précisément dans l'introduction de la section de [Pb] sur le théorème de récurrence.

Le théorème de récurrence remplace le résultat de stabilité par confinement des trajectoires dans l'argumentation de Poincaré à une autre occasion. Il s'agit de la comparaison de ses résultats avec ceux de Hill et de Bohlin. Poincaré avait mentionné le problème étudié par Hill dans [Pa], et montré que les hypothèses du théorème de récurrence y sont remplies. Mais dans ce passage, le problème de Hill apparaissait seulement comme une illustration du théorème de récurrence, comme un exemple de problème auquel il s'applique. À l'inverse, lorsqu'il s'agissait de montrer la supériorité de ses résultats par rapport à ceux de Hill et de Bohlin[38], dans la note B, Poincaré n'invoquait pas le théorème de récurrence. Il montrait plutôt que la stabilité obtenue en confinant les trajectoires à l'intérieur des surfaces asymptotiques est un résultat plus fort que ceux de Hill et Bohlin [Pa, p. 179].

Dans [Pb], nous retrouvons la mention de ces travaux de Hill et de Bohlin. Poincaré cherche toujours à montrer la nouveauté de ses résultats. Mais c'est maintenant à l'occasion de l'application du théorème de récurrence que Poincaré exprime sa conviction de « compléter » le résultat de Hill.

[38]Ces travaux de Bohlin avaient été publiés entre le moment où Poincaré a soumis son mémoire au concours ouvert par le roi de Suède, et celui de la préparation de l'impression de [Pa]. Ils généralisent ceux de Hill.

Mutation dans la notion de stabilité

Le statut du théorème de récurrence dans [Pb] vis-à-vis de la question de la stabilité est assez hésitant. Une raison en est sans doute que [Pb] est l'amendement d'un texte erroné. Poincaré a repris les passages incorrects, et il a renforcé, comme nous avons commencé de le montrer, l'exposition du théorème de récurrence qui lui permettait de remplacer tant bien que mal ce qu'il avait dû abandonner. Mais il laisse sans modification un grand nombre de pages de son mémoire. Ainsi le chapitre de notations et définitions qui ouvre le mémoire est inchangé. Il continue de présenter les surfaces trajectoires en prélude à la définition de la stabilité telle que Poincaré pensait initialement la démontrer [Pb, p. 267–268]. Les deux concepts utilisés pour caractériser la stabilité, le sens premier et la stabilité « au sens de Poisson », cohabitent donc dans [Pb]. Par ailleurs, Poincaré n'emploie pas le terme « stabilité » dans l'introduction de [Pb] ; ceci signifie en particulier qu'il ne présente pas, à cet endroit, le théorème de récurrence comme un résultat de stabilité.

Cependant, nous venons de montrer que, du point de vue de l'économie du mémoire, le théorème de récurrence prend la place de la stabilité au premier sens du terme. Celle-ci est toujours définie la première, mais n'est plus prouvée. On peut même mettre en évidence l'amorce d'un mouvement qui tend à le présenter véritablement comme un résultat de stabilité, et du même coup à remplacer le premier concept de stabilité, qui n'est plus présent que comme une définition fossile, par la stabilité « au sens de Poisson ». En effet, lorsque Poincaré mentionnait le problème de Hill à la suite de la démonstration du théorème de récurrence dans [Pa], il se contentait de conclure : « Le théorème 1 est donc encore vrai ; c'est-à-dire qu'il existe des trajectoires qui traversent une infinité de fois toute région de l'espace à 4 dimensions, quelque petite que soit cette région » [Pa, p. 35]. Le terme « stabilité » — fût-ce « stabilité au second sens du terme » — n'apparaissait même pas, signe que le théorème de récurrence, s'il était vu comme une conséquence de la stabilité, n'était pas lui-même conçu de façon centrale comme un résultat de stabilité. Dans [Pb], au contraire, lorsque Poincaré applique le théorème de récurrence au problème de Hill, il affirme démontrer un résultat de stabilité : « C'est ce remarquable résultat de M. Hill que je me propose de compléter en montrant que, dans ces conditions, la Lune jouirait également de la stabilité au sens de Poisson » [Pb, p. 320]. Il commente de même l'application du théorème de récurrence au problème de Bohlin : « Je me propose maintenant de montrer que l'intégrale J [...] est finie ; d'où nous pourrons conclure, comme nous l'avons fait plus haut, que la stabilité au sens de Poisson subsiste encore dans ce cas » [Pb, p. 322].

Le changement qui s'esquisse ainsi se confirme seulement dans les textes suivants, en particulier en 1891. En effet, dans les deux résumés du mémoire sur le problème des trois corps destinés au *Bulletin astronomique* et à la *Revue générale des sciences*, Poincaré présente le théorème de récurrence non plus dans la section sur les invariants intégraux — comme c'est le cas dans [Pa] et [Pb] —, mais sous le titre « stabilité ».

Le premier résumé, [Poincaré 1891b], est explicitement découpé en paragraphes portant chacun un titre. Les deux derniers paragraphes sont intitulés « invariants intégraux » et « stabilité ». Non seulement le théorème de récurrence est cité sous le titre « stabilité », mais il occupe à lui seul tout ce paragraphe.

Dans [Poincaré 1891a], les sections sont seulement repérées par des numéros, mais il est manifeste que le théorème de récurrence est là aussi présenté comme le résultat de stabilité prouvé dans [Pb]. Il est en effet énoncé dans le paragraphe qui commence par les mots suivants : « Une des questions qui ont le plus préoccupé les chercheurs est celle de la stabilité du système solaire ». Une assez longue présentation historique des travaux menés dans cette direction suit, qui reprend les mêmes étapes que l'introduction de [Pa]. On arrive ainsi à l'énoncé du théorème de récurrence. De façon encore un peu plus marquée que dans [Pb], nous voyons donc à nouveau Poincaré inscrire le théorème de récurrence à la place qu'occupait la démonstration erronée de la stabilité dans [Pa], comme une nouvelle étape dans l'étude de la stabilité du système solaire.

Par ailleurs, Poincaré attire ici à nouveau l'attention sur l'avancée que constitue ce résultat par rapport aux travaux de Hill et Bohlin en des termes qui confirment mon hypothèse :

> Dans ce cas [le problème restreint des trois corps, AR], MM. Hill et Bohlin ont démontré que le rayon vecteur de la petite planète reste toujours inférieur à une limite finie. Cela ne suffit pas toutefois pour la stabilité ; il faut encore que la petite masse repasse une infinité de fois aussi près que l'on veut de sa position initiale. » [Poincaré 1891a, p. 537]

Ce passage est particulièrement intéressant, parce qu'il montre comment la stabilité au sens de Poisson est devenue pour Poincaré, au moment où il écrit ces lignes, *la* stabilité. Poincaré ne présente en effet pas ici la stabilité à la Poisson, c'est-à-dire le fait de repasser « une infinité de fois aussi près que l'on veut de [la] position initiale », comme une façon parmi d'autres de définir la stabilité. Elle devient une condition nécessaire pour pouvoir parler légitimement de stabilité. On trouve exactement la même idée, presque dans les mêmes termes, dans [Poincaré 1891b] : « Dans ce cas, MM. Hill et Bohlin ont démontré que le rayon vecteur CA ne peut croître au delà de toute limite ; mais il reste pour établir complètement la stabilité un dernier point à démontrer. Il faut faire voir que les trois corps se retrouveront une infinité de fois aussi près qu'on voudra de leur position initiale. » (p. 489–490)

Ainsi, la notion de stabilité se trouve, en 1891, identifiée à la propriété de récurrence.

3.3 En quête d'une définition adéquate de la stabilité

3.3.1 Deux concepts sous-jacents qui sont présents tout au long de la période étudiée : confinement et récurrence

Nous avons mis en évidence une évolution majeure entre 1889 et 1891. Dans [Pa], le confinement à l'intérieur de surfaces trajectoires semblait être la propriété clé pour définir la stabilité. En 1891, la récurrence est présentée comme *la* condition de la stabilité. Cependant, si nous poursuivons la lecture des textes de Poincaré sur la mécanique céleste, nous constatons que la définition adoptée en 1891 n'éclipse pas définitivement toute autre conception. La condition de confinement des trajectoires — non reliée aux surfaces trajectoires, cette fois — réapparaît dans l'article *sur la stabilité du système solaire* [Poincaré 1898, p. 540]. Nous verrons qu'on la retrouve aussi dans les *Méthodes nouvelles*. « On peut démontrer, dans certains cas particuliers, écrit Poincaré en 1898, que les éléments de l'orbite d'une planète redeviendront une infinité de fois très voisins des éléments initiaux, et cela est probablement vrai aussi dans le cas général, mais *cela ne suffit pas*[39] ; il faudrait faire voir que non seulement ces éléments finiront par reprendre leurs valeurs primitives, mais qu'ils ne s'en écarteront jamais beaucoup. » La formulation est ici d'autant plus frappante que l'expression « cela ne suffit pas » était déjà employée en 1891. Or, à cette occasion, c'était la propriété de récurrence qui était présentée comme l'élément nécessaire pour compléter le résultat de Hill et Bohlin.

Les réflexions de Lakatos [1976, 1984] et le vocabulaire qu'il propose me paraissent susceptible de nous aider à mieux décrire le processus auquel nous avons affaire. En effet, nous voyons combien la définition de la stabilité évolue d'un texte à un autre, d'une façon très liée avec la preuve qui en est proposée. La comparaison de [Pa] d'une part, [Pb] et les résumés de 1891 d'autre part, fait apparaître un phénomène comparable à celui que Lakatos exprime par la formule « trois preuves, trois théorèmes, un seul ancêtre »[40] [Lakatos 1984, p. 83]. Nous avons ici deux preuves, deux théorèmes, un seul ancêtre. Comme dans l'exemple de Lakatos, chaque couple preuve–théorème correspond à une définition propre de la stabilité. La stabilité par confinement (ou stabilité au premier sens) donne lieu au théorème prouvé dans [Pa], qui établit « rigoureusement » la stabilité dans le problème restreint des trois corps. La stabilité au second sens du terme est étudiée par le théorème de récurrence. Mais les deux concepts sont rattachés à l'exploration historique de la stabilité du système solaire par développement en séries perturbatrices des solutions des équations du mouvement. Nous avons en effet constaté que, dans [Pa] comme dans [Pb] et ses résumés, Poincaré présente le théorème principal de stabilité comme ancré dans l'histoire de ce thème. Dans [Pa] ce lien est fait dans l'introduction, et c'est la démonstration de la stabilité au premier sens du terme qui vient continuer le travail de Laplace, Poisson, Gyldén, Lindstedt. Dans [Pb], c'est au moment d'énoncer le théorème de récurrence que Poincaré rappelle les recherches de Poisson sur la stabilité. Nous y reviendrons dans la partie 3.3.3.

Le phénomène que étudions est cependant plus complexe à certains égards que celui que Lakatos prend pour objet.

Tout d'abord, comme nous venons de le mettre en évidence, les deux sens du terme stabilité ne sont pas employés de façon exclusive l'un de l'autre. Plus

[39] Je souligne.

[40] Lakatos introduit cette formule pour remplacer « l'expression habituelle *'différentes preuves du même théorème'* », qui « nous égare car elle dissimule le rôle vital des preuves dans la formation des théorèmes ». Les trois preuves auxquelles il fait référence dans ce passage sont les preuves de la formule d'Euler pour les polyèdres dues respectivement à Cauchy, Gergonne et Legendre. La preuve de Cauchy consiste à étirer le polyèdre après en avoir retiré une face, de façon à obtenir une figure plane. Gergonne se place dans le cas d'un polyèdre convexe et suppose qu'on regarde le polyèdre de l'intérieur, en mettant l'oeil au niveau d'une des faces, supposée transparente. Legendre suppose qu'on peut trouver un point à partir duquel projeter le polyèdre sur une sphère. Chacune de ces preuves s'appuie sur une propriété particulière que doit vérifier le polyèdre, et renvoie donc à une définition spécifique des polyèdres, que Lakatos traduit en disant par exemple que la preuve de Cauchy démontre le théorème : « *tout polyèdre de Cauchy est eulérien* ».

que deux définitions distinctes de la stabilité, entre lesquelles on choisit suivant la preuve qu'on veut mettre en œuvre ou le contexte d'étude, ces deux sens apparaissent comme deux composantes du concept « familier »[41] de stabilité.

De plus, chacun de ces deux aspects de la stabilité se comporte lui-même comme un concept tel que Lakatos les étudie, susceptible d'« extension » et de définitions successives qui ne se recouvrent pas exactement. C'est à propos du deuxième concept, celui de récurrence, que ce phénomène nous intéresse particulièrement[42], parce que ces élargissements sont liés au traitement des trajectoires exceptionnelles. Nous y reviendrons en détail dans la partie 3.3.2.

Poincaré associait déjà ces deux concepts, confinement et récurrence, pour étudier la stabilité dans ses mémoires *Sur les courbes définies par les équations différentielles* [1881a, 1882, 1885, 1886]. Le troisième de ces mémoires, en particulier, s'ouvre par un chapitre sur « stabilité et instabilité ». Nous y trouvons — à ma connaissance — la première réflexion de Poincaré sur la définition de la stabilité. Ce texte mériterait une étude approfondie dont le présent travail n'est pas le lieu. Quelques remarques suffiront à notre propos.

Dans le chapitre mentionné, Poincaré commence par donner cinq exemples à partir desquels il va définir ce qu'il entend par stabilité. Dans le premier exemple, toutes les trajectoires sont fermées, et Poincaré qualifie ce cas de « stabilité complète »[43]. Il souligne d'ailleurs ensuite que la propriété de récurrence, adoptée finalement pour définir la stabilité, caractérise « une certaine périodicité d'une nature particulière » [Poincaré 1885, p. 92]. Les quatre derniers exemples sont particulièrement intéressants, parce qu'ils illustrent précisément les quatre combinaisons possibles entre les deux caractéristiques suivant lesquelles Poincaré examine les trajectoires des systèmes considérés : la propriété de récurrence et la question de savoir si les trajectoires restent dans une région bornée du plan ou non. Ainsi, tout en choisissant le concept de récurrence pour définir la stabilité, Poincaré examine systématiquement le comportement des trajectoires vis-à-vis de l'autre concept. Il estime d'ailleurs que « la stabilité ainsi définie », c'est-à-dire par la propriété de récurrence, « n'a qu'une importance théorique ». Cette remarque concorde avec l'introduction du premier mémoire, en 1881. Poincaré y examinait les questions d'ordre qualitatif que pose la mécanique céleste, et seule la détermination de bornes à l'intérieur desquelles le système est confiné était évoquée : « ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'en éloigner indéfiniment ; si la distance des deux corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites ? » « Qu'est-ce que la question de l'in-

[41] Lakatos propose ce terme pour désigner le concept tant qu'il n'a pas été défini mathématiquement [Lakatos 1984, p. 21]. Avant que des objections ne s'élèvent, on suppose la faculté de distinguer ce qui est stable de ce qui ne l'est pas.

[42] À propos du premier concept, il faudrait distinguer le confinement dans les surfaces asymptotiques de 1889 de la condition selon laquelle le système ne s'éloigne pas indéfiniment. En effet, les surfaces asymptotiques avaient la particularité qu'il en existait de diamètre arbitrairement petit. C'est ce qui faisait leur supériorité par rapport au résultat de Hill et Bohlin.

[43] Il faudrait, pour étudier dans le détail la formation de ces deux concepts, articuler ce modèle où toutes les trajectoires sont fermées avec la tradition de développements trigonométriques des solutions des équations du système solaire. Les termes trigonométriques des développements représentent en effet le modèle des fonctions périodiques. D'ailleurs, Poincaré souligne plusieurs fois le caractère périodique des solutions cherchées par Laplace, Lagrange ou Poisson (voir par exemple [Poincaré 1891a], où Poincaré rappelle : Poisson montre « que les grands axes éprouvent autour de leur valeur moyenne des oscillations périodiques »).

variabilité des éléments des planètes, sinon une véritable question de géométrie qualitative, puisque, faire voir que le grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille constamment entre certaines limites ? »[44]

Nous avons relevé dans le résumé de 1891 et dans l'article sur la stabilité du système solaire deux phrases qui semblent se faire écho. Poincaré affirme d'abord en 1891 que le confinement des trajectoires dans une région bornée « ne suffit pas » sans la propriété de récurrence. Inversement, en 1898, il estime que la récurrence « ne suffit pas » si l'on ne sait pas montrer que les trajectoires restent à distance finie. Ainsi, même lorsqu'en 1891 la récurrence supplante, du point de vue de la démonstration, la caractérisation en terme de confinement, les deux concepts restent inséparables dans la réflexion de Poincaré sur la stabilité. Cette union intime entre les deux caractérisations de la stabilité se retrouve plus nettement encore en 1899 dans les *Méthodes nouvelles*.

Dans le troisième tome de cet ouvrage, c'est un chapitre entier qui s'intitule « stabilité à la Poisson ». Il s'ouvre par le théorème de récurrence et, comme en 1891, c'est le seul endroit de l'ouvrage où Poincaré examine la question de la stabilité des trajectoires[45]. Ainsi, d'une part, le théorème de récurrence est bien conçu, à partir de 1891, comme un résultat de stabilité, et d'autre part, c'est le seul résultat de stabilité que Poincaré établit.

Il n'en reste pas moins que Poincaré est plus réservé vis-à-vis de la stabilité « à la Poisson » dans les *Méthodes nouvelles* que dans les articles de 1891. Nous avons vu qu'il présentait en 1891 la propriété de récurrence comme « le dernier point à démontrer » « pour établir complètement la stabilité ». D'ailleurs, il n'employait plus, à cette date, la locution « stabilité au sens de Poisson » introduite en 1890. La propriété de récurrence des trajectoires semblait y être considérée comme la stabilité au sens absolu.

Mais dans les *Méthodes nouvelles*, lorsqu'il discute les diverses définitions de la stabilité, Poincaré commence par analyser le résultat obtenu par Lagrange et le qualifier de « stabilité complète ». Nous reconnaissons facilement les deux concepts de confinement et de récurrence qui caractérisent cette stabilité « complète » :

> Il en résulte que, si ces séries sont uniformément convergentes, les grands axes demeurent compris entre certaines limites ; le système des axes ne peut donc pas passer par toutes les situations compatibles avec les intégrales des forces vives et des aires ; et de plus il repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa situation initiale.
>
> C'est la stabilité complète.

Le résultat de Poisson est ensuite identifié par Poincaré comme un autre sens du terme stabilité. Lui aussi est examiné du point de vue des deux concepts de

---

[44]Tatiana Roque [2001, chap. 7] étudie ces textes, et la question de la stabilité telle qu'elle s'y manifeste, sous un angle un peu différent. Elle examine l'articulation entre mathématique et physique, entre développement théorique et inspiration par la mécanique céleste. Ce rapport est envisagé surtout du point de vue des résultats qu'obtient Poincaré. Celui-ci remarque en effet que les systèmes dynamiques généraux d'une part, et les systèmes hamiltoniens — issus de la mécanique — d'autre part ont un comportement différent vis-à-vis de la propriété de récurrence. Mais cette articulation entre mathématique et physique pourrait également se révéler un bon outil d'analyse pour étudier les rôles respectifs des deux concepts utilisés par Poincaré pour appréhender la notion de stabilité. Une telle étude dépasse très largement le cadre de notre travail, et nous éloignerait trop de notre sujet principal.

[45]J'écarte ici la stabilité des trajectoires périodiques, comme je l'ai expliqué à la note 25.

confinement et de récurrence, avec la différence qu'il ne satisfait que le second :

> Nous pouvons affirmer que le système repassera toujours une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa situation initiale ; mais non qu'il ne s'en éloignera pas beaucoup.
>
> Le mot *stabilité* n'a donc pas le même sens pour Lagrange et pour Poisson.

Poincaré propose enfin la définition suivante, qui ne fait qu'entériner les deux analyses précédentes :

> Pour qu'il y ait stabilité complète dans le problème des trois corps, il faut trois conditions :
>
> 1º Qu'aucun des trois corps ne puisse s'éloigner indéfiniment ;
>
> 2º Que deux des corps ne puissent se choquer et que la distance de ces deux corps ne puisse descendre au-dessous d'une certaine limite ;
>
> 3º Que le système revienne une infinité de fois aussi près que l'on veut de sa situation initiale.
>
> Si la troisième condition est remplie, sans que l'on sache si les deux premières le sont, je dirai qu'il y a seulement *stabilité à la Poisson.* [Poincaré 1892–1899, t.3, p. 141]

Il poursuit en rappelant que la première condition est démontrée depuis longtemps pour le problème restreint des trois corps, et annonce qu'il va prouver que la troisième condition est également remplie. La première condition correspond en effet au résultat de Hill, généralisé par Bohlin. C'est ce résultat que Poincaré affirmait « compléter » en 1890 grâce au théorème de récurrence. L'application de ce théorème requiert d'ailleurs comme condition préalable que les trajectoires restent dans une région bornée de l'espace.

Notons bien que la « stabilité complète » que Poincaré définit par ces trois conditions ne correspond pas au résultat qu'il croyait avoir démontré en 1889 : il s'agissait alors d'enfermer les trajectoires dans des tores de plus en plus fins, autrement dit, de les confiner dans des régions aussi petites que l'on veut. Rien de tel dans la définition des *Méthodes nouvelles* : il semble bien que Poincaré a tout à fait abandonné cette caractérisation de la stabilité.

De la deuxième condition, Poincaré dit seulement dans les *Méthodes nouvelles* : « je ne puis rien en dire ». Elle renvoie probablement aux demandes de précision que lui adressait Weierstrass en 1889 (voir page 125).

La cohabitation des deux concepts de récurrence et de confinement semble manifester une tension entre ce que la preuve permet de démontrer (« *proof-generated concept* ») et ce qui est attendu lorsqu'on parle de stabilité, autrement dit le « concept familier » de stabilité. Cette tension semble ici se traduire comme une tension entre mathématiques et physique, entre théorique et pratique. D'un point de vue mathématique et théorique, le concept le plus intéressant de stabilité est celui que l'on peut prouver. Mais d'un point de vue physique et pratique, une propriété technique plus ou moins *ad hoc* reste insatisfaisante vis-à-vis de ce qu'on attend en employant le terme de stabilité.

3.3.2 Le caractère exceptionnel des trajectoires non récurrentes

Nous venons de mettre en regard deux concepts de stabilité, et d'étudier l'évolution de leurs rapports entre 1889 et 1899. Mais ces concepts ne sont pas figés au long de cette période. En particulier, nous avions noté plus haut que le corollaire du théorème de récurrence est progressivement renforcé. Je me propose donc maintenant d'examiner plus en détail l'évolution du concept de stabilité « à la Poisson » au fil de ces textes. Je m'intéresserai également à la façon dont la définition mathématique du terme « exceptionnel » est exploitée. Le terme lui-même voit sa définition se modifier entre 1890 et 1899. Nous verrons que ces amendements successifs conduisent à tirer tout le parti possible de la preuve : le concept de stabilité à la Poisson qui en résulte est vraiment un concept né de la preuve, « *proof generated concept* » au sens de Lakatos.

La première évolution de l'usage du terme « stabilité », qui se manifeste entre [Pa] et les textes ultérieurs, est liée au phénomène que nous avons mis en évidence dans la partie 3.2.4. Le théorème de récurrence, en 1889, visait surtout à montrer l'existence dans toute région de l'espace de trajectoires d'un type particulier, les trajectoires récurrentes, dites « stables au second sens ». La question de la stabilité du problème restreint des trois corps était traitée ailleurs. Ainsi, la stabilité au second sens apparaissait seulement comme une propriété de certaines *trajectoires*. À partir de 1890, et même dès la lettre de Poincaré à Mittag-Leffler le 9 décembre 1889, la stabilité, toujours « au sens de Poisson », est également prédiquée, par extension, du *problème* défini par les équations différentielles étudiées, ou du corps (la Lune par exemple) dont elles modélisent le mouvement.

Ce qui est nouveau dans cet emploi, c'est que le terme « stabilité » recouvre alors non seulement les trajectoires récurrentes, mais également les trajectoires exceptionnelles — qui ne jouissent pas de la stabilité au sens de Poisson — que peut présenter le problème étudié. Le passage déjà cité de la lettre à Mittag-Leffler illustre bien cette extension du sens du terme « stabilité » lorsqu'il n'est pas utilisé à propos d'une trajectoire particulière : « La stabilité subsiste en ce sens qu'à moins que les conditions initiales du mouvement ne soient exceptionnelles, la planète repassera une infinité de fois aussi près que l'on veut de sa position initiale. » Poincaré ne dit pas ici que la trajectoire de la planète est stable *sauf* pour certaines conditions initiales exceptionnelles, mais que le mouvement est stable, *au sens où* les trajectoires ne jouissant pas de la stabilité à la Poisson sont exceptionnelles. Ces deux emplois de la stabilité au sens de la propriété de récurrence ne sont pas présentés par Poincaré comme deux sens différents du terme stabilité, au même titre qu'il distingue, en 1889 et 1890, la stabilité au premier sens du terme de celle au second sens, encore appelée, en 1890, stabilité au sens de Poisson. Ainsi, il y a bien, pour Poincaré, deux concepts distincts, la récurrence et le confinement, qu'il désigne comme deux sens du terme stabilité. Mais le concept de récurrence n'est pas mathématiquement immuable ; il s'étend en même temps que l'argumentation s'élabore. À partir du moment où Poincaré a défini ce qu'il entend par trajectoires exceptionnelles, il s'autorise à parler de stabilité dans un sens plus large, « en ce sens qu'à moins que les conditions initiales ne soient exceptionnelles, la planète repassera [...] ». Il s'agit d'une *extension* plus que d'une transformation du sens de la stabilité à la Poisson. En effet, Poincaré continue à parler de solutions jouissant ou non de la stabilité au sens de Poison, en même temps qu'il dit que le problème dans son ensemble est stable.

Le glissement de langage que nous venons de constater n'est pas spécial à la lettre mentionnée : on le retrouve dans tout notre corpus. Dans [Pb], la stabilité au sens de Poisson est d'abord définie très clairement comme une propriété des trajectoires (ou solutions) particulières : « Pour qu'il y ait stabilité, il faut que le point P revienne au bout d'un temps suffisamment long sinon à sa position initiale, du moins dans une position aussi voisine que l'on veut de cette position initiale. C'est dans ce dernier sens que Poisson entendait la stabilité » (p. 313). Le théorème de récurrence est introduit avec le même emploi du terme « stabilité » : « En d'autres termes, il y aura une infinité de solutions particulières du problème qui ne jouiront pas de la stabilité au second sens du mot, c'est-à-dire au sens de Poisson ; mais il y en aura une infinité qui en jouiront. » Cependant, lorsque Poincaré applique le théorème de récurrence au problème de Hill, il affirme non la stabilité de certaines trajectoires possibles de la Lune, mais bien du mouvement de cet astre : « C'est ce remarquable résultat de M. Hill que je me propose de compléter en montrant que, dans ces conditions, la Lune jouirait également de la stabilité au sens de Poisson ; je veux dire par là que, si les conditions initiales du mouvement ne sont pas exceptionnelles, la Lune repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position primitive. » (p. 320) L'expression employée est bien la même, « jouir de la stabilité au sens de Poisson ». Mais les *trajectoires* stables à la Poisson s'opposent aux trajectoires exceptionnelles, tandis que l'existence de ces dernières n'empêche pas d'affirmer la stabilité au niveau du *problème* lui-même. On remarque d'ailleurs ici que la propriété énoncée par Poincaré n'est pas celle qui correspond, à proprement parler, au théorème de récurrence. Elle intègre le corollaire.

Dans les *Méthodes nouvelles*, Poincaré définit la stabilité à la Poisson par la condition « que le système vienne passer une infinité de fois aussi près que l'on veut de sa situation initiale » (voir citation p. 137). Il annonce alors que cette condition est remplie dans le cas du problème restreint des trois corps. Il faut bien sûr ici aussi entendre par là que les trajectoires qui n'ont pas cette propriété sont exceptionnelles.

Poincaré fait d'ailleurs, un peu plus loin, explicitement le lien entre le caractère exceptionnel des trajectoires non récurrentes et la légitimité d'affirmer la stabilité en les englobant dans l'énoncé :

> En résumé, les molécules qui ne traversent U_0 qu'un nombre fini de fois sont exceptionnelles au même titre que les nombres commensurables qui ne sont qu'une exception dans la série des nombres, pendant que les nombres incommensurables sont la règle.
>
> Si donc Poisson a cru pouvoir répondre affirmativement à la question de la stabilité telle qu'il l'avait posée, bien qu'il eût exclu les cas où le rapport des moyens mouvements est commensurable, nous aurons de même le droit de regarder comme démontrée la stabilité telle que nous la définissons, bien que nous soyons forcés d'exclure les molécules exceptionnelles dont nous venons de parler. [Poincaré 1892–1899, t. III, p. 154]

Ceci nous permet d'expliciter le commentaire succinct que nous trouvons dans [Poincaré 1891a] : « J'ajouterai que les premières [les solutions particulières instables, AR] sont exceptionnelles (ce qui permet de dire qu'il y a stabilité en général) ». Grammaticalement, on peut analyser la remarque entre parenthèses de plusieurs façons, suivant qu'on rattache « en général » au substantif « stabilité », ou à l'un des verbes « permet », « dire », « il y a ». Deux sens me semblent se dégager de ces différentes possibilités. Soit on comprend que, en général, c'est-à-dire le plus souvent mais pas toujours, il y a stabilité. Soit on comprend qu'il y a « stabilité en général » : on peut prédiquer la stabilité, au sens d'une propriété générale, à distinguer d'une propriété universelle. La considération des autres textes du corpus montre qu'on peut trancher pour la deuxième interprétation. Le caractère exceptionnel des trajectoires instables permet d'affirmer la stabilité, ce qui n'aurait pas été justifié si seul le théorème de récurrence avait été établi. En effet, il prouve seulement l'existence de trajectoires stables dans toute région du plan, mais ne donne aucune information sur l'importance quantitative de ces trajectoires par rapport à celles qui sont instables.

La quantification mathématique de l'exceptionnel est donc présentée par Poincaré comme un élément central de son argumentation. Elle l'autorise à limiter l'importance de certaines trajectoires marginales et à étendre la propriété vérifiée par les autres trajectoires au problème dans sa globalité. Les deux niveaux auxquels la stabilité peut être prédiquée ne sont cependant jamais confondus, et c'est seulement lorsque Poincaré parle de la stabilité d'un problème qu'il exclut les trajectoires exceptionnelles. Encore signale-t-il le plus souvent — on le voit dans les passages qui viennent d'être cités — en quel sens il affirme la stabilité : dire que le problème de la Lune, le problème restreint des trois corps, etc. est stable, c'est dire que les trajectoires possèdent la propriété de récurrence sauf si les conditions initiales sont exceptionnelles.

Après cette introduction, en 1890, du concept mathématique d'exception, nous avons relevé plusieurs éléments de renforcement du théorème et de son corollaire. Poincaré remarque d'abord dès 1891 que la probabilité pour qu'une trajectoire soit récurrente est nulle quelle que soit la loi de probabilité choisie, du moment qu'elle est définie par une fonction continue. En même temps qu'une avancée théorique dans le calcul des probabilités (voir 3.5.4), cette remarque conduit à imposer une condition plus forte. Du point de vue du sens du terme « exceptionnel », il s'agit d'une restriction[46] : ne pourront être dits « exceptionnels » que les objets d'une classe moins étendue que précédemment.

Un nouveau renforcement apparaît explicitement dans les *Méthodes nouvelles*[47]. Il consiste à prouver non seulement que la probabilité pour qu'une molécule ne traverse pas plus de k fois la région r_0 est nulle, mais que la probabilité pour qu'une molécule ne traverse cette région qu'un nombre fini de fois — quel que soit ce nombre — est également nulle. Cette nouvelle propriété,

[46] Rétrospectivement, on pourrait argüer que la classe des ensembles de mesure nulle n'est pas modifiée par un changement de mesure défini par une densité continue. À ce titre, il est équivalent de définir exceptionnel par « de probabilité nulle pour la mesure de probabilité uniforme » ou « de probabilité nulle pour toute mesure de densité continue par rapport à la mesure de probabilité uniforme ». L'extension de la classe des ensembles qu'on peut qualifier d'exceptionnels n'est donc pas modifiée. Cependant, Poincaré écrit dans un cadre théorique différent, et il donne une démonstration directe du renforcement qu'il propose. Ceci me semble suffisant pour considérer que d'un point de vue historique, l'extension du concept est modifiée.

[47] On peut s'interroger sur la lecture qu'il faut faire, à ce sujet, des résumés de 1891, voir p. 112.

toujours interprétée comme la stabilité au sens de Poisson, est plus forte que celle qui était envisagée auparavant.

Ces deux transformations permettent à Poincaré de tirer tout le parti possible de la preuve du corollaire. Autrement dit, elles permettent de forger l'énoncé le plus fort possible que la démonstration permet d'établir. C'est le processus que Lakatos décrit comme la recherche du domaine de la preuve [Lakatos 1984, p. 81–82]. Lakatos développe sa thèse sur l'exemple[48] de la formule d'Euler pour les polyèdres : S-A+F=2, où S est le nombre des sommets, A celui des arêtes, et F celui des faces. Il étudie donc les démonstrations et réfutations du théorème « les polyèdres satisfont à la formule d'Euler », en s'attachant aux évolutions subies par le concept de polyèdre. Les premières tentatives de preuve se trouvent confrontées à des contre-exemples. Ceci conduit à donner une définition suffisamment restrictive de « polyèdre ». Une fois qu'est donnée une telle définition, accompagnée d'une preuve solide, la « recherche du domaine de la preuve » consiste à étendre le concept de « polyèdre » en affaiblissant les hypothèses de façon à ce que la preuve reste valide. C'est bien ce que nous avons observé chez Poincaré. À partir de la démonstration initiale, il étend au maximum la portée de son théorème en modifiant la définition des termes de l'énoncé. Ici deux termes sont concernés : « exceptionnel » et « stable au sens de Poisson » (ou récurrent). Si l'on considère le corollaire sous la forme « les trajectoires non récurrentes sont exceptionnelles », la recherche du domaine de la preuve consiste à étendre, autant que la preuve le permet, le concept sujet « trajectoires non récurrentes », donc à restreindre celui de « trajectoires récurrentes », et/ou à rétrécir le concept prédicat « exceptionnelles », c'est-à-dire à le rendre aussi difficile à satisfaire que possible.

Cette grille de lecture permet de proposer une interprétation d'un passage que nous avons déjà relevé dans les *Méthodes nouvelles* (voir page 116). Précisons bien que l'absence de commentaire de la part de Poincaré concernant la différence entre la preuve des *Méthodes nouvelles* et celle de [Pa] et [Pb] ne permet que d'avancer une hypothèse pour laquelle il est difficile de trouver étai ou démenti. Poincaré relève une propriété de la suite de régions emboîtées qu'il définit dans sa démonstration du théorème de récurrence. Cette remarque aurait pu lui permettre d'établir un résultat plus fort, en rétrécissant encore le concept de récurrence : non seulement il existe dans toute région des trajectoires qui reviennent une infinité de fois dans la même région, mais il existe, dans toute région, des trajectoires qui reviennent une infinité de fois aussi près qu'on veut de position initiale[49]. Or il ne l'exploite pas.

On peut voir là une tentative qui relève de l'étape suivante envisagée par Lakatos : lorsque la preuve, telle quelle, ne permet plus d'étendre le domaine, on cherche une preuve « plus profonde » [Lakatos 1976, p. 82], plus performante. La méthode de démonstration indiquée dans les *Méthodes nouvelles* permettrait effectivement d'établir une version plus forte du théorème. Mais elle ne fournit pas de preuve du corollaire qui corresponde au rétrécissement du concept de récurrence ainsi obtenu. Or, du moins à partir de 1890, c'est le corollaire, plus encore que le théorème, qui est important. Poincaré ne peut plus se satisfaire d'un résultat de densité, puisqu'il a besoin d'un résultat de stabilité pour le

[48] On pourrait parler plus précisément de *paradigme*. En effet, Lakatos laisse bien entendre que les processus qu'il met en scène ne sont pas attachés à la question des polyèdres, mais se reproduisent dans tous les domaines des mathématiques.

[49] La différence peut être décrite comme l'inversion de deux quantificateurs.

problème global et non pour certaines trajectoires. Cette remarque pourrait donc expliquer que Poincaré, tout en ayant remarqué que cette nouvelle preuve est plus profonde, ne l'exploite pas : elle ne permet pas de renforcer le résultat visé qui est celui du corollaire.

3.3.3 Une nouvelle lecture des travaux de Poisson et Lagrange

Nous avons déjà eu plusieurs fois l'occasion de souligner les références que Poincaré fait régulièrement aux travaux de ses prédécesseurs. Or la manière dont Poincaré y renvoie évolue corrélativement aux modifications que nous avons mises en évidence : l'accent nouveau mis sur le théorème de récurrence en tant que résultat de stabilité, son renforcement par le corollaire et le nouvel usage du terme stabilité pour qualifier un problème dont les trajectoires sont stables à l'exclusion de certaines trajectoires exceptionnelles.

Dans l'introduction de [Pa], Poincaré rapporte les résultats de Laplace et Poisson : ils « sont parvenus à démontrer qu'en tenant compte seulement des premières et secondes puissances des masses, les grands axes des orbites ne subissent que des variations périodiques. » Avec les travaux ultérieurs de Gyldén et Lindstedt, Poincaré les présente comme un ensemble de méthodes d'étude du problème des n corps. Elles inspirent son travail en tant qu'elles consistent à rechercher des développements sous forme trigonométrique des solutions des équations du mouvement : « aux méthodes anciennes de la mécanique céleste, j'emprunterai la forme trigonométrique des développements » [Pa, p. 7]. Mais c'est là le seul aspect de ces méthodes auquel Poincaré fait référence en 1889.

Il en va tout autrement dans [Pb]. La stabilité dans le second sens du terme, *i.e.* la propriété de récurrence, est désormais rattachée aux travaux de Poisson, jusqu'à recevoir le nom de ce dernier : « stabilité au sens de Poisson ». Poincaré écrit ainsi :

> C'est dans ce sens que Poisson entendait la stabilité. Lorsqu'il a démontré que, si l'on tient compte des secondes puissances des masses, les grands axes des orbites demeurent invariables, il s'est seulement attaché à établir que les développements de ces grands axes en séries ne contiennent que des termes périodiques de la forme $\sin \alpha t$ ou $\cos \alpha t$, ou des termes mixtes de la forme $t \sin \alpha t$ ou $t \cos \alpha t$, sans contenir aucun terme séculaire de la forme t ou t^2. Cela ne signifie pas que les grands axes ne peuvent jamais dépasser une certaine valeur, car un terme mixte $t \cos \alpha t$ peut croître au delà de toute limite ; cela veut dire seulement que les grands axes repasseront une infinité de fois par leur valeur primitive. [Pb, p. 313]

Or, dans l'introduction de [Pa], Poincaré n'opposait pas les termes périodiques et les termes mixtes ; il se contentait de les opposer ensemble aux termes purement séculaires. Ce passage témoigne donc d'une nouvelle lecture des travaux de Poisson par Poincaré en 1890. Ce dernier relève une similitude entre la forme des développements obtenus par Poisson et la propriété de récurrence, à laquelle il veut donner une importance plus grande, et qui est appelée à recevoir le statut de résultat de stabilité.

Pourtant Poisson considère les termes mixtes de la forme $t \sin \alpha t$ comme les premiers termes de développements qui représentent des fonctions réellement périodiques [Poisson 1809]. Si la lettre de sa démonstration conduit effectivement à de tels termes mixtes, lesquels semblent référer à une autre définition de la stabilité, Poisson entend bien prouver que les grands axes restent bornés. Et Poincaré en est d'ailleurs bien conscient. Dans l'article sur le problème des trois corps pour la *Revue générale des sciences*, il évoque les mêmes travaux de Poisson dans les termes suivants : « [Poisson montre] que les grands axes éprouvent autour de leur valeur moyenne des oscillations périodiques ; mais, d'après ses formules, l'amplitude de ces oscillations pourrait croître au delà de toute limite ; ce n'est là qu'une apparence due au mode de développement, et si l'on ne négligeait pas certains termes, on pourrait prouver que cette amplitude reste finie. » [Poincaré 1891b, p. 536]

Ainsi, Poincaré ne s'attache pas seulement au résultat effectivement visé par Poisson, mais trouve également de l'inspiration dans la forme que prend sa démonstration. La référence aux travaux de Poisson permet à Poincaré d'illustrer la propriété de récurrence. Cette dernière pourrait paraître très abstraite en particulier aux astronomes. Au contraire, l'exemple des termes mixtes comme $t \cos \alpha t$ a l'avantage de leur être familier. Enfin, en reliant cette notion de stabilité aux travaux de Poisson, et à des phénomènes usuels pour les astronomes, Poincaré peut défendre la pertinence de cette notion de stabilité, donc aussi du théorème de récurrence, dans les problèmes de mécanique céleste.

Ayant ainsi introduit la propriété de récurrence, Poincaré continue à faire référence aux travaux de Poisson pour présenter le théorème de récurrence et son corollaire. Cette présentation est l'occasion de faire apparaître une continuité entre les résultats de Poisson et ce qu'il va démontrer.

> La stabilité, au sens de Poisson, peut-elle appartenir à toutes les solutions ? Poisson ne le croyait pas, car sa démonstration suppose expressément que les moyens mouvements ne sont pas commensurables ; elle ne s'applique donc pas quelles que soient les conditions initiales du mouvement.
>
> L'existence des solutions asymptotiques, que nous établirons plus loin, montre suffisamment que si la position initiale du point P est convenablement choisie, ce point P ne repassera pas une infinité de fois aussi près que l'on voudra de cette position initiale.
>
> Mais je me propose d'établir que, dans un cas particulier du problème des trois corps, on peut choisir la position initiale du point P (et cela d'une infinité de manières), de telle façon que ce point P repasse une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position initiale. [Pb, p. 313]

Ainsi, tout en introduisant une méthode d'étude complètement nouvelle, extrêmement différente de l'approximation par des développements en séries utilisée par Poisson, Poincaré élabore une continuité entre les résultats qu'il va obtenir et les résultats classiques. Les développements utilisés alors n'étaient valables qu'en excluant des cas particuliers (le cas où les moyens mouvements sont commensurables). De même le théorème de récurrence affirme l'existence de trajectoires qui possèdent la propriété de stabilité « au sens de Poisson », et même l'existence de telles solutions au voisinage de n'importe quel point.

Mais la preuve de Poincaré, comme celle de Poisson, laisse de côté certaines trajectoires qui ne jouissent pas de cette propriété.

Le passage que nous venons de citer est intéressant à un deuxième titre. Il donne à voir la façon dont Poincaré lit Poisson. Nous voyons d'abord que Poincaré fait référence à la « démonstration » de Poisson, et non à un résultat. D'ailleurs Poisson ne relève pas explicitement l'exception constituée par le cas où les moyens mouvements sont commensurables. C'est seulement dans la démonstration qu'on peut voir que les formules manipulées par Poisson n'ont un sens que lorsque les moyens mouvements sont incommensurables. En effet, certains dénominateurs deviennent nuls dans le cas contraire[50]. Que Poincaré ait effectivement lu en détail la démonstration de Poisson, ou qu'il l'ait refaite lui-même, comme il en avait l'habitude[51], c'est dans la démonstration qu'il lit l'extension du théorème.

On voit enfin que la lecture de Poisson proposée ici par Poincaré ne s'attache pas aux mêmes aspects qu'en 1889. Dans [Pa], Poincaré soulignait l'ordre du développement par rapport aux masses. Il rappelait que Lagrange et Poisson ont tenu « compte seulement des premières et des secondes puissances des masses » [Pa, p. 5]. C'est la limite qu'il souligne à leurs travaux : « Dès qu'on tient compte des troisièmes puissances des masses, on voit apparaître des termes séculaires dans le développement des grands axes. » Le cas particulier où les moyens mouvements sont commensurables n'est pas du tout évoqué[52]. Au contraire en 1890, Poincaré ne dit rien de l'ordre du développement conduit par Poisson, mais s'intéresse aux hypothèses sur les moyens mouvements qui sont requises.

Cette relecture rétrospective des résultats classiques est encore approfondie dans les *Méthodes nouvelles*.

Poincaré renvoie toujours à Poisson pour ce qui concerne la stabilité au sens de la propriété de récurrence. De plus, il rattache aux travaux de Lagrange la première notion de stabilité, selon laquelle les grands axes restent compris entre certaines limites.

Il rappelle ensuite, comme il le faisait déjà dans [Pb], l'hypothèse sous-jacente aux démonstrations de ces auteurs, à savoir que les rapports des moyens mouvements sont incommensurables. Il ajoute :

---

[50]Dans les *Méthodes nouvelles*, Poincaré renvoie également aux travaux de Lagrange. Celui-ci formule l'hypothèse de non-commensurabilité nécessaire pour sa démonstration (voir les mémoires successifs de Lagrange [1776, 1781, 1808] ; le dernier est une réponse à [Poisson 1809]).

[51]Poincaré écrit à Mittag-Leffler :

> J'ai l'habitude, quand je lis un mémoire, de le parcourir d'abord rapidement de façon à me donner une idée de l'ensemble et de revenir ensuite sur les points qui me semblent obscurs.
>
> Je trouve plus commode de refaire les démonstrations que d'approfondir celles de l'auteur. [Poincaré et Mittag-Leffler 1999, lettre 80 (5/2/1889)].

[52]On peut seulement y voir une origine possible de la comparaison entre les trajectoires stables et les irrationnels, déjà examinée : « Je pourrais même ajouter que les trajectoires qui jouissent de cette propriété sont plus générales [...] ; précisément autant que les nombres incommensurables sont plus généraux que les nombres commensurables. » [Pa, p. 31] Cependant, aucun autre indice ne permet de trancher. Le lien entre les exceptions de la démonstration de Poisson et les trajectoires exceptionnelles du théorème de récurrence est fait encore plus explicitement dans les *Méthodes nouvelles*. Mais il est difficile de savoir si c'est une relecture rétrospective de Poincaré, ou si Poincaré avait déjà cette comparaison en tête en 1889.

> Les deux géomètres n'en concluent pas moins à la stabilité[53] parce qu'il est *infiniment peu probable* que ce rapport soit exactement commensurable.[54]

Ainsi, dans les *Méthodes nouvelles*, Poincaré introduit le langage des probabilités dès la référence aux travaux de Lagrange et Poisson. Il le reprend ensuite, presque dans les mêmes termes, pour comparer les trajectoires stables « à la Poisson » et celles qui ne le sont pas : « la probabilité pour qu'une molécule ne traverse U_0 qu'un nombre fini de fois est infiniment petite ». Ainsi l'exclusion de trajectoires exceptionnelles dans le résultat de stabilité, comme les moyens utilisés pour caractériser ces trajectoires exceptionnelles, sont rattachés aux travaux de Poisson et Lagrange. De plus, ce lien est fait aussi bien pour la stabilité « à la Poisson » que pour la stabilité au premier sens du terme, illustrée par le résultat de Lagrange.

Nous constatons donc qu'à partir de 1890, Poincaré relève deux aspects de la démonstration de la stabilité du système solaire par Poisson, afin de les mettre en relation avec le théorème de récurrence et son corollaire. Les termes mixtes, de la forme $t^m \sin \alpha t$ ou $t^m \cos \alpha t$, des développements obtenus par Poisson, sont présentés comme illustrant la propriété de récurrence dénommée en conséquence « stabilité à la Poisson ». Et les cas où les moyens mouvements seraient commensurables, invalidant la preuve donnée par Poisson, sont rapprochés des trajectoires *exceptionnelles* pour lesquelles la propriété de récurrence n'est pas vraie. Le deuxième de ces rapprochements concerne spécifiquement le corollaire du théorème de récurrence. Mais le premier porte sur le théorème lui-même, et il est donc particulièrement significatif qu'il soit absent de [Pa]. C'est dire que cette comparaison des termes mixtes avec la propriété de récurrence n'était pas jugée utile en 1889 et le devient en 1890. La raison est assez manifeste : le théorème de récurrence visait en 1889 à établir une propriété technique de certaines trajectoires, tandis que Poincaré veut le présenter en 1890 comme un résultat de stabilité. Or la propriété de récurrence n'a pas immédiatement l'aspect attendu pour caractériser la stabilité. Le rôle mineur joué en 1889 par le théorème de récurrence, et particulièrement le fait qu'il n'est presque pas présenté comme un résultat de stabilité, comme nous l'avons vu, en témoignent. La remarque qui affirme, dans [Poincaré 1885], que la stabilité au sens de la propriété de récurrence « n'a qu'une importance théorique » en est un autre signe. Poincaré lui-même n'était sans doute pas entièrement satisfait par cette définition de la stabilité qu'il avait dû adopter comme un ersatz, à la place de la stabilité initialement visée. La comparaison avec les travaux de Poisson lui permet visiblement de légitimer cette définition : stabilité « au sens de Poisson », à l'exception de certaines trajectoires. Poincaré montre en effet que cette définition partage plusieurs caractéristiques avec une démonstration de stabilité historiquement bien acceptée.

[53] Comme signalé à la note 50, Poisson ne relève pas les cas commensurables où sa démonstration ne s'applique pas. Lagrange, lui, note l'exception constituée par ces cas, et affirme qu'elle est négligeable : « d'où l'on voit qu'il ne peut jamais en résulter des termes proportionnels à t, à moins que l'on ait $in + i'n' + i"n" + \cdots = 0$, ce qui est à peu près impossible, vu l'incommensurabilité des coefficients n, n', $n"$ ... dans notre système planétaire. » [Lagrange 1808, p. 736] (AR)

[54] [Poincaré 1892–1899, t. 3, p. 141]. L'italique est de Poincaré.

3.3.4 Trois changements corrélés

Notre analyse nous permet maintenant de revenir à la question adressée au début de la partie 3.2.1 : quelle interprétation donner aux changements affectant le théorème de récurrence et sa formulation entre [Pa] et [Pb] ?

Poincaré introduit en 1890 un nouveau formalisme, issu du calcul des probabilités, qui lui permet d'étendre le théorème de récurrence par un corollaire. Dans les textes suivants, le corollaire est progressivement renforcé, dans un processus que l'on peut décrire à la suite de Lakatos comme la recherche du domaine de la preuve. Ainsi, l'introduction du langage des probabilités s'insère dans un mouvement plus large par lequel Poincaré augmente la portée du théorème de récurrence.

Cette évolution survient précisément lorsque Poincaré confère au théorème de récurrence la place de la démonstration de stabilité qui s'est révélée fautive. On observe donc une *corrélation* entre le changement de statut du théorème de récurrence et son renforcement mathématique par le corollaire.

Enfin un troisième aspect des textes de notre corpus se modifie pendant la même période : la façon dont Poincaré articule ses travaux avec ceux des astronomes qui l'ont précédé, en particulier Lagrange et Poisson. Poincaré établit un parallèle entre son théorème et la démonstration par Poisson de la stabilité du système solaire précisément sur les deux points qui évoluent : l'exclusion de certaines trajectoires dans l'énoncé d'un résultat de stabilité, qui est l'objet du corollaire ajouté en 1890, et le fait de considérer la propriété de récurrence comme une forme de stabilité.

Ces trois changements sont visiblement intimement liés. La légitimation par référence à Poisson vise à la fois la forme de stabilité étudiée par le théorème de récurrence et la dimension de quantification apportée par le corollaire. De plus, l'affermissement du théorème est nécessaire pour pouvoir le présenter comme un résultat de stabilité. Dans sa forme originelle, il se présente comme une condition technique d'existence de solutions ayant une propriété particulière. Mais pour qu'il puisse valoir comme résultat de stabilité, il faut pouvoir dire quel type de trajectoire est le plus répandu. L'information apportée par le corollaire est donc particulièrement cruciale. C'est seulement cette précision quantitative sur l'importance des trajectoires récurrentes qui donne au théorème sa force dans la lignée des résultats de stabilité établis par Lagrange, Laplace et Poisson.

Or le rapport de Mittag-Leffler annonçant le résultat du prix offert par le roi de Suède mentionnait explicitement la stabilité en tête des questions traitées par le mémoire primé :

> Les plus importantes et les plus difficiles questions, comme la stabilité du système du monde, l'expression analytique des coordonnées des planètes par des séries de sinus et de cosinus des multiples du temps, puis l'étude, on ne peut plus remarquable, des mouvements asymptotiques, la découverte de formes de mouvement où les distances des corps restant comprises entre des limites fixes, on ne peut cependant exprimer leurs coordonnées par des séries trigonométriques, d'autres sujets encore que nous n'indiquons point, sont traités par des méthodes qui ouvrent, il n'est que juste de le dire, une époque nouvelle dans la mécanique céleste. [Rapport, p. 287]

Ce contexte ne pouvait manquer de presser Poincaré à conserver à son mémoire un résultat de stabilité, fût-il plus faible que celui originellement visé.

On peut donc, sans s'avancer beaucoup, affirmer que c'est précisément en vue de remplacer la démonstration fautive de stabilité que Poincaré retravaille son théorème de récurrence entre [Pa] et [Pb], en lui donnant une plus grande portée mathématique et en présentant le résultat qu'il obtient ainsi dans la continuité des travaux fondateurs sur la stabilité en mécanique céleste, même s'il emploie des techniques tout à fait nouvelles.

Autrement dit, c'est bien un besoin nouveau qui conduit à un véritable changement de perspective dans la façon dont Poincaré considère la stabilité « au second sens du terme ». C'est dans ce contexte que Poincaré fait appel au calcul des probabilités pour affermir le résultat donné par le théorème de récurrence.

3.4 D'où vient l'idée d'utiliser les probabilités ?

Dans l'étude qui précède, nous avons pu mettre en évidence un moment précis où Poincaré est amené, suite à la découverte de son erreur, à introduire un nouveau type d'énoncé. L'outil auquel il fait appel à cet effet est le calcul des probabilités. Or il s'agit d'un domaine des mathématiques bien lointain à première vue. Comment Poincaré a-t-il été amené à adopter un tel outil pour étudier les trajectoires ? En quoi le calcul des probabilités répond-il aux besoins qui se manifestent à lui ?

Poser une telle question présente le risque de conduire à une lecture anachronique. On pourrait en effet être tenté de considérer d'un point de vue moderne le problème étudié par Poincaré, pour chercher à démontrer qu'il n'avait pas le choix et qu'il était forcé d'introduire un nouveau mode d'appréhension pour évaluer l'importance des trajectoires récurrentes. Ou même qu'il devait nécessairement faire appel à la théorie des probabilités ou à un outil similaire. Mais qu'entend-on par « la théorie des probabilités ou un outil similaire » ? Le lecteur moderne pense bien sûr à la théorie de la mesure. Mais il s'agit d'une vision rétrospective. Plus largement, l'état de développement des théories dont nous disposons aujourd'hui pour décrire précisément ce que fait Poincaré, et éventuellement juger de ce qui convenait le mieux ne correspond en rien à ce que Poincaré avait effectivement à sa disposition. Il en résulte qu'il est très délicat de poser la question d'un choix de Poincaré.

En revanche, on peut recenser des usages de la notion de probabilité dans des contextes proches du travail de Poincaré sur le problème des trois corps : il s'agit là de faits qui ont pu suggérer à Poincaré d'exploiter le calcul des probabilités. C'est ce que je m'appliquerai à identifier.

Par ailleurs, je m'attacherai à montrer des éléments de continuité entre la démonstration du théorème de récurrence et celle du corollaire. Nous verrons ainsi que Poincaré a mis en valeur le travail qui l'avait conduit à la preuve du théorème et l'a développé pour établir le corollaire. Il en ressort que le calcul des probabilités, tel que Poincaré le formule pour l'introduire ici, est un outil approprié au renforcement du théorème de récurrence. Notre auteur ne plaque pas un outil extérieur sur un problème donné, mais adapte l'un à l'autre.

Enfin, je mettrai en évidence des spécificités du travail accompli par Poincaré à l'aide du calcul des probabilités dans le cadre du théorème de récurrence. Elles soulignent la nouveauté de cette réflexion par rapport à d'autres modes d'étude des ensembles de trajectoires, ou par rapport à d'autres usages des probabilités.

3.4.1 Solution générale et solutions particulières

Je propose de commencer par examiner les premiers travaux de Poincaré dans le domaine de la mécanique céleste.

Ces recherches sont intéressantes pour notre propos à deux égards. D'abord Poincaré y parle de la *probabilité* de ces trajectoires périodiques — quoique dans un sens bien différent de celui qu'il donne à ce mot en 1890, comme nous le verrons. Plus largement, Poincaré y met en œuvre d'autres outils pour caractériser des ensembles de trajectoires.

Les textes que je propose d'examiner sont une note publiée aux CRAS [Poincaré 1883], et un article paru l'année suivante dans le *Bulletin astronomique* [Poincaré 1884], qui en développe le contenu. Poincaré s'y intéresse à « certaines solutions particulières du problème des trois corps », dont il montre l'existence et étudie les propriétés.

L'article *Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps* [Poincaré 1884] débute par une opposition entre « la solution générale du problème des trois corps », qui « est encore à trouver », et « certaines solutions particulières » qu'il s'agit de mettre en évidence. Alors que la convergence des développements trigonométriques proposés pour la solution générale du problème des trois corps n'est pas démontrée[55], Poincaré souligne un intérêt majeur de certaines solutions particulières, périodiques, qu'il va étudier : on peut donner des séries convergentes pour les représenter. L'opposition que fait ici Poincaré entre solution « générale » et solutions « particulières » est classique dans l'étude des équations différentielles, et Poincaré la rappelle au début des deux versions de son mémoire sur le problème des trois corps, [Pa] et [Pb]. Si l'on s'intéresse aux équations

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

les formules

$$x_i = \varphi_i(t, C_1, \ldots, C_n) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

« représentent la *solution générale* si les constantes C_i y restent arbitraires ». Elles « représentent une *solution particulière* si l'on y donne aux C des valeurs numériques » [Pb, p. 266]. Autrement dit, la « solution générale » est la donnée d'une seule formule qui contient toutes les solutions particulières, lesquelles sont obtenues en fixant les valeurs des constantes arbitraires entrant dans la solution générale.

Poincaré poursuit son article de 1884 en présentant la méthode qu'il propose pour montrer l'existence de solutions particulières périodiques. Il l'applique à trois reprises pour mettre en évidence trois « sortes » de solutions périodiques. À propos de la première sorte, il précise la quantité de solutions périodiques ainsi exhibées : « il y a donc des solutions périodiques de la première sorte ; il

[55] Dans son mémoire de 1890, Poincaré prouve d'ailleurs, entre autres choses, la non-convergence de certaines de ces séries.

y en a même une quadruple infinité. » De fait, Poincaré montre que les solutions périodiques de cette sorte sont données par des formules dans lesquelles subsistent quatre constantes arbitraires. Ces quatre paramètres libres donnent lieu à la « quadruple infinité » de solutions annoncée.

Ces considérations quantitatives sur les solutions périodiques dont Poincaré démontre l'existence étaient présentes dès la note de 1883 :

> Dans la solution particulière envisagée, il reste encore, si les trois corps sont assujettis à se mouvoir dans un plan, quatre paramètres arbitraires ; s'ils se meuvent dans l'espace, il en reste huit. Ainsi, dans l'un comme dans l'autre cas, il faut imposer quatre conditions aux éléments initiaux du mouvement pour que ce mouvement présente cette périodicité dont nous venons de parler. [Poincaré 1883, p.252]

En 1884, Poincaré prouve l'existence de trois « sortes » de solutions périodiques. Les deux premières correspondent à des mouvements plans, la troisième à un mouvement dans l'espace. Poincaré ne donne le détail du dénombrement des constantes arbitraires que pour les solutions de la première sorte. La conclusion de l'étude des solutions de la troisième sorte stipule simplement : « ce qui démontre l'existence d'une infinité de solutions périodiques de la troisième sorte ». C'est au lecteur de constater qu'il reste huit paramètres arbitraires qu'il peut fixer à loisir pour obtenir ces solutions périodiques, ainsi que Poincaré l'avait annoncé en 1883.

De même, Poincaré montre comment calculer par approximations successives les coefficients de séries qui représentent les solutions de la première sorte. Précisément, il effectue le calcul de la première approximation, indiquant par là la procédure à suivre. Mais il ne présente ce calcul que dans le cas des solutions de la première sorte.

Il est donc assez manifeste que Poincaré choisit en 1884 de détailler seulement l'étude des solutions de la première sorte, tant pour ce qui est du dénombrement des constantes arbitraires que pour le calcul des solutions par approximations. Pour les autres sortes, il donne seulement la partie de l'analyse qui présente des différences notoires avec la première étude, et laisse au lecteur le soin de compléter le travail pour se convaincre des résultats annoncés dans la note de 1883.

Cependant, même si le dénombrement des constantes arbitraires n'est donné que sur le premier exemple dans l'article de 1884, on constate que les considérations sur le nombre de constantes à fixer pour déterminer parfaitement une solution d'un type donné forment le dernier tiers de la courte note de 1883. Ceci témoigne de l'importance que Poincaré accorde à cette évaluation quantitative des ensembles de solutions qu'il met en évidence.

Visiblement, le mode de caractérisation que Poincaré emploie ici pour estimer l'importance d'un ensemble de solutions est lié à l'opposition entre solution générale et solutions particulières. Les ensembles de solutions présentés dans ces travaux apparaissent comme des intermédiaires entre la solution générale et une solution particulière. Ils sont en effet donnés par des formules dans lesquelles certaines constantes restent arbitraires, tandis que d'autres doivent être imposées.

Le passage de la note de 1883 que j'ai cité appelle une autre remarque. Poincaré s'y intéresse d'abord au nombre de constantes arbitraires qu'il reste dans l'expression de la solution. En termes modernes, ceci correspond à la dimension de l'ensemble de solutions considéré. Mais il reformule ensuite cette information de façon à indiquer le nombre de conditions à satisfaire pour que les données initiales correspondent à une solution de la forme voulue. Autrement dit, il indique la codimension de l'ensemble étudié.

Ce mode d'évaluation par la codimension, c'est-à-dire par les conditions à imposer, rappelle la liste hiérarchisée de cas construite par Poincaré au début de son mémoire *Sur les courbes*. J'ai montré le rôle joué par le nombre de conditions d'égalité pour juger du degré de généralité des différents cas considérés. Ici également, Poincaré porte son attention sur le nombre de conditions à imposer pour que le mouvement présente la périodicité attendue. Il en résulte qu'on peut être tenté de lire les indications données en 1883 et 1884 comme des éléments d'évaluation du degré de généralité des solutions proposées.

Un tel rapport entre le nombre de constantes arbitraires dans une formule et l'appréciation de la généralité des solutions représentées par cette formule n'est pas fait explicitement dans ces textes. Mais le lien est confirmé par un passage du mémoire *sur le problème des trois corps*. Poincaré y commente en ces termes une formule qu'il donne pour représenter certaines solutions :

> Cette solution n'est pas la plus générale, puisqu'elle ne contient que trois constantes arbitraires, mais c'est la plus générale parmi celles que l'on peut ramener à la forme (3).[56]

Peu nous importe la forme des solutions étudiées à cet endroit. Le point important est que Poincaré fait lui-même le lien entre le nombre de constantes arbitraires et le degré de généralité de la solution.

La comparaison entre l'évaluation des ensembles de solutions et la hiérarchisation des cas dans l'étude des points singuliers vient par ailleurs renforcer l'interprétation que j'ai proposée pour les « polynômes les plus généraux de leur degré ». L'opposition entre la solution générale et les solutions particulières est en effet de la même forme que celle construite par Serret entre le polynôme général d'un degré donné, dont tous les coefficients sont indéterminés, d'une part, et les polynômes particuliers du même degré, d'autre part. Il apparaît donc qu'une telle opposition peut servir de point de départ à une gradation, du point de vue de la généralité, entre des ensembles d'objets. C'est ce que fait Poincaré dans le mémoire *Sur les courbes* pour les différents cas qu'il dégage dans l'étude des points singuliers. Lorsqu'il évalue l'ensemble des solutions définies par une formule à l'aide du nombre de constantes arbitraires qu'elle contient, on peut reconnaître un processus semblable.

C'est après avoir porté ainsi son attention sur le nombre de conditions à fixer pour obtenir des solutions périodiques que Poincaré remarque en 1884 :

> *Application des solutions périodiques.* — Il semble au premier abord que ces solutions périodiques ne puissent être d'aucune utilité pratique, puisqu'elles correspondent à des valeurs *particulières* des éléments initiaux, valeurs dont la probabilité est nulle. Mais, si les éléments initiaux sont très voisins de ceux qui correspondent à une solution périodique, on pourra rapporter les positions véritables des

[56] Ce passage se trouve dans [Pa] p. 81–82, et il est repris dans [Pb] p. 360.

> trois masses aux positions qu'elles occuperaient dans cette solution périodique et se servir, par conséquent, de cette solution comme d'une *orbite intermédiaire*. [Poincaré 1884, p. 260]

Nous voyons que Poincaré souligne le qualificatif « particulières », qui fait écho à l'opposition entre solution générale et solutions particulière. Nous venons d'analyser comment Poincaré a développé cette opposition en une gradation de la généralité. Il note ensuite que la probabilité des conditions initiales qui donnent lieu à ces solutions périodiques est nulle. Mais au contraire de l'usage des probabilités que nous avons étudié dans [Pb], il n'explicite pas du tout la façon dont il propose de calculer cette probabilité. Le fait que la probabilité est nulle semble ici souligner l'indication précédente sur la particularité de ces solutions périodiques plutôt qu'apporter une nouvelle information. Il semble donc que le terme de probabilité soit employé ici dans son sens courant, et non dans une acception technique.

Ainsi, Poincaré emploie, dans ses travaux de mécanique céleste, deux moyens bien différents pour appréhender des ensembles de trajectoires.

L'attention portée à la dimension des classes de solutions, qui prolonge le dénombrement des conditions définissant différents cas, apparaît dès les premiers travaux sur les équations différentielles puis en mécanique céleste. Cette approche dimensionnelle est encore présente en 1889 et 1890, comme nous l'avons vu.

Mais en 1890, Poincaré introduit un nouveau moyen de comparaison entre différentes sortes de trajectoires. Il mobilise à cet effet le calcul des probabilités, employé de façon technique.

Ces deux outils procèdent d'une démarche commune qui consiste à évaluer quantitativement un ensemble de solutions. L'usage du terme « probabilité » en 1884 me semble plutôt refléter cette similarité entre les deux modes d'appréhension que renvoyer à la théorie des probabilités. Ce rapprochement entre les deux idées a pu jouer, en 1890, pour suggérer à Poincaré l'idée d'employer de façon technique le calcul des probabilités. Mais les deux démarches restent bien distinguées dans la pratique ultérieure de Poincaré, ce qui permet de supposer qu'il est tout à fait conscient de leurs différences. Nous reviendrons bientôt sur la spécificité du problème des trajectoires récurrentes : c'est un autre facteur qui a pu conduire Poincaré à faire appel à un nouvel outil.

3.4.2 La théorie des ensembles de Cantor

Poincaré emprunte aux travaux de Cantor un troisième type de considérations pour étudier des ensembles de trajectoires. Ce mathématicien a forgé des concepts spécifiques pour étudier les ensembles : dénombrabilité, densité, dérivé d'un ensemble, ensembles fermés, « parfaits », etc. Poincaré s'y réfère dans le mémoire *Sur le problème des trois corps*, nous l'avons vu, pour discuter sa conjecture sur la densité des trajectoires [Pa, p. 153 et Pb, p. 454]. Il montre que dans le voisinage de toute trajectoire fermée, il en passe une infinité d'autres. Poincaré remarque que cela ne suffit pas pour conclure que les trajectoires fermées sont denses, et justifie cette remarque à l'aide d'un résultat de Cantor : « un ensemble peut être parfait sans être continu ».

Un ensemble parfait, dans la théorie de Cantor, est un ensemble qui est fermé, et dont tout élément est limite d'une suite d'éléments distincts de cet ensemble. Poincaré a seulement montré que l'ensemble des trajectoires fermées vérifie la deuxième des conditions qui caractérise les ensembles parfaits. Il n'a donc pas affaire à un ensemble parfait. Il faut probablement comprendre le commentaire de Poincaré comme renvoyant aux propriétés de l'adhérence de l'ensemble des trajectoires. Cette dernière est fermée par définition, et vérifie toujours la deuxième condition, donc c'est un ensemble parfait. Poincaré conjecture qu'on atteint de cette façon toutes les trajectoires — autrement dit, tout l'espace des conditions initiales. Ici encore, il s'agit d'évaluer l'importance d'un ensemble de trajectoires. Puisqu'au voisinage d'une solution périodique il en existe une infinité d'autres, il y a beaucoup de trajectoires fermées, et on peut penser qu'elles sont denses. Mais le résultat de Cantor conduit à modérer cette première impression en l'absence d'argument supplémentaire.

Les contacts de Poincaré avec les travaux de Cantor datent du début de l'année 1883. Il a contribué à cette époque à la traduction en français d'un mémoire de ce mathématicien, demandée par Mittag-Leffler pour *Acta Mathematica*[57] [Cantor 1883]. La correspondance entre Mittag-Leffler, Hermite et Poincaré laisse transparaître que les Français impliqués dans la traduction ne sont pas convaincus de l'intérêt de ces recherches en elles-mêmes. Mais Poincaré n'hésite pas, dès 1883, à utiliser des notions définies par Cantor lorsqu'elles lui permettent de préciser sa compréhension des phénomènes qu'il étudie [Poincaré et Mittag-Leffler 1999, lettre 28, note 4]. Le mémoire *Sur le problème des trois corps* en est un nouvel exemple.

On voit ainsi que Poincaré étudie les ensembles de trajectoires sous tous leurs aspects, en faisant appel à tous les moyens dont il dispose : approche dimensionnelle, probabilités, théorie des ensembles. Plus largement nous voyons que Poincaré est très ouvert à l'utilisation de méthodes diverses. Nous avons déjà remarqué qu'il donne volontiers une interprétation géométrique des phénomènes qu'il étudie. L'influence de la théorie cinétique des gaz sur la réécriture de la démonstration du théorème de récurrence est un autre exemple des rapprochements qu'il fait volontiers entre divers champs de son étude. Il me semble que l'importation d'un outil probabiliste relève du même mode de travail de Poincaré, prompt à faire interagir divers domaines de son activité mathématique.

3.4.3 L'utilisation des probabilités par Gyldén

Poincaré avait donc déjà employé plusieurs outils pour étudier les ensembles de trajectoires : l'approche dimensionnelle, et la théorie des ensembles. Mais s'il avait déjà parlé de probabilité en 1884, il n'avait pas eu recours, ni dans ses travaux antérieurs ni dans [Pa], au calcul des probabilités proprement dit. On peut cependant relever une circonstance qui a pu attirer son attention sur cet outil. L'astronome suédois Gyldén en avait fait usage peu de temps auparavant. Il cherchait à évaluer la probabilité pour que les entiers intervenant dans le développement en fraction continue d'un irrationnel pris au hasard puissent être très grands. Ces travaux sont présentés dans deux notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, [Gyldén 1888b] et [Gyldén 1888d], qui résument deux articles en suédois dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Stockholm*, [Gyldén 1888a] et [Gyldén 1888c].

[57] Voir [Dugac 1984] et [Poincaré et Mittag-Leffler 1999, lettre 28, note 3].

Plusieurs éléments convergent pour faire penser que Poincaré avait connaissance de ces recherches de Gyldén. L'introduction de [Pb] fournit un premier indice. Poincaré y renvoie à un article de Bohlin dans le même volume des *Comptes rendus de l'Académie de Stockholm*. Il explique qu'il n'avait pas encore eu connaissance de ce mémoire au moment de la fermeture du concours, parce qu'il n'était pas encore imprimé. Il en a donc eu connaissance ensuite. Il est possible qu'il ait eu accès directement au volume des *Comptes rendus de l'Académie de Stockholm*, et qu'il ait vu en même temps les articles de Gyldén.

Le deuxième indice est plus décisif. Poincaré était présent à la séance où a été lue la première communication de Gyldén à l'Académie de Paris : il y présentait lui-même une note. Ainsi Poincaré a été informé de ces recherches de Gyldén justement entre le moment où il a soumis la première version de son mémoire au jury du concours et le moment où il y a retravaillé, d'abord pour ajouter les annexes que nous trouvons dans [Pa], puis pour corriger son erreur et mettre au point la version définitive [Pb].

Il faut ajouter à cela que Poincaré avait tout lieu de s'intéresser aux travaux de Gyldén. Il mentionnait d'ailleurs des travaux de cet astronome dans l'introduction de [Pa]. Il avait donc connaissance des recherches de Gyldén, qui touchent à ses propres centres d'intérêt. De plus, juste après l'annonce de la remise du prix, avant que le mémoire n'ait été imprimé dans sa première version, Gyldén avait revendiqué la priorité sur des résultats obtenus par Poincaré, en faisant référence à ses recherches antérieures [Gyldén 1887]. Mittag-Leffler avait fait appel à Poincaré pour préparer sa réponse, ce qui avait donné lieu à de longues lettres au début de l'année 1889 [Poincaré et Mittag-Leffler 1999, lettres 79 à 87]. Poincaré y commente le mémoire de 1887 de Gyldén, et discute la convergence des séries qui y sont construites.

Or la motivation de Gyldén pour étudier la décomposition en fractions continues des irrationnels est liée à ces questions de mécanique céleste et de convergence des séries. Il la développe dans le premier mémoire en suédois. Le problème sous-jacent est celui de la convergence des séries trigonométriques qui interviennent tout particulièrement en mécanique céleste lorsqu'on calcule les perturbations du mouvement képlérien d'une planète dues à l'attraction des autres planètes. Gyldén arrive à la conclusion que « la probabilité pour que se produise la divergence des séries par lesquelles on représente les perturbations des planètes est moindre que toute valeur donnée. » [Gyldén 1888a, p. 83][58] Cette finalité est évoquée dans la conclusion de la deuxième note aux CRAS : « Des résultats obtenus découle une thèse d'une grande importance pour juger de la convergence de certaines séries trigonométriques employées dans le calcul des perturbations, à savoir : *la probabilité de trouver une valeur de a hors d'une limite donnée est en raison inverse du nombre qui signifie cette limite.*[59] » [Gyldén 1888d, p. 1781]. Dans les communications à l'Académie de Paris, c'est la seule mention de l'orientation de ces recherches vers la mécanique céleste, assez elliptique. Mais Poincaré connaissait Gyldén, et l'objectif de ce dernier était peut-être tout à fait clair pour lui, qu'il ait lu ou non les mémoires en suédois.

[58] Cité par von Plato [1994].

[59] C'est Gyldén qui souligne. Les a_i sont ici les entiers qui apparaissent dans le développement en fraction continue d'un nombre irrationnel donné. Gyldén montre que la probabilité pour qu'un a_i soit plus grand que n est proportionnelle à $\frac{1}{n}$. (AR)

3.4.4 Une caractéristique importante du théorème de récurrence : une démonstration non constructive

Nous avons déjà relevé la continuité qui se manifeste entre la démonstration du théorème de récurrence à proprement parler et le corollaire que Poincaré ajoute en 1890. Poincaré reprend les mêmes éléments de démonstration, c'est-à-dire la considération de la suite des régions conséquentes d'une région donnée et de leurs parties communes, ainsi que des évaluations de leurs volumes. Il ne fait au fond, dans [Pb], qu'affiner son analyse de ces régions. Le calcul des probabilités s'avère donc constituer un moyen approprié pour tirer un parti plus grand de la méthode de démonstration déjà mise en œuvre pour le théorème.

Cette continuité est plus profonde. En entrant dans les détails techniques, on peut mettre au jour une autre caractéristique que partagent le théorème et le corollaire. Elle représente une différence radicale entre la question des trajectoires récurrentes et l'étude de cas hiérarchisés que nous avons considérée plus haut (voir chap 2 et § 3.4.1). Le théorème de récurrence affirme l'existence de trajectoires possédant une certaine propriété, mais ne permet absolument pas d'exhiber une telle trajectoire. Il s'agit donc d'un résultat non constructif. Cette particularité n'est pas sans conséquences sur les moyens par lesquels on peut évaluer l'importance qualitative des trajectoires d'un type donné, ainsi que Poincaré le fait dans le corollaire. Dans l'article sur les solutions périodiques étudié plus haut [Poincaré 1884], Poincaré menait une analyse des conditions sous lesquelles une trajectoire est périodique de la première [resp. deuxième ou troisième] sorte. Il en tirait des considérations sur l'importance respective de ces types de solutions entre elles et par rapport à l'ensemble des solutions du problème. Ici il n'est pas question d'en faire autant : il n'est pas possible de caractériser par une condition les positions initiales qui donnent lieu à des trajectoires récurrentes.

Le caractère non constructif de la preuve du théorème de récurrence va très loin.

En fait, il n'est même pas possible de définir précisément ce que signifie pour une trajectoire donnée d'être ou non récurrente au sens du théorème tel qu'il est énoncé dans [Pa] et [Pb]. En 1885, Poincaré donnait « une définition précise de la stabilité » pour une trajectoire :

> Nous dirons que la trajectoire d'un point mobile est stable, lorsque, décrivant autour du point de départ un cercle ou une sphère de rayon r, le point mobile, après être sorti de ce cercle ou de cette sphère, y rentrera une infinité de fois, et cela, quelque petit que soit r. [Poincaré 1885, p. 94]

Mais il ne démontre l'existence de telles trajectoires[60] ni dans [Pa], ni dans [Pb]. Dans ces deux mémoires, il définit la stabilité au second sens du mot seulement par une phrase du langage courant, sans introduire de notions mathématiques :

> Pour qu'il y ait stabilité, il faut que le point P revienne au bout d'un temps suffisamment long sinon à sa position initiale, du moins

[60] Comme nous l'avons remarqué page 116, la preuve donnée dans les *Méthodes nouvelles* pourrait très facilement être complétée de façon à établir cette version du théorème de récurrence. Mais Poincaré se contente de prouver le théorème tel qu'il est formulé dès [Pa].

> dans une position aussi voisine que l'on veut de cette position initiale.
> [Pa, p. 31 et Pb, p. 313]

Dans le langage courant, l'ordre des composants de la phrase est beaucoup plus libre que dans le langage technique. C'est seulement dans l'énoncé du théorème que la position du quantificateur « une position aussi voisine que l'on veut » est fixée par rapport à la détermination d'une trajectoire stable :

> Si l'on considère une région r_0 quelconque, quelque petite que soit cette région, il y aura des trajectoires qui la traverseront une infinité de fois.

L'introduction de la notation r_0 est précédée de l'expression « si l'on considère », qui marque la définition d'un objet mathématique. C'est donc bien la région considérée qui est choisie d'abord. On fixe seulement ensuite une trajectoire pour en examiner les propriétés. Dans la première formulation, en langage courant, le point P apparaît sans être défini, et la phrase n'impose donc pas la lecture suivant laquelle la stabilité serait définie pour une trajectoire donnée comme le fait de revenir une infinité de fois dans n'importe quelle région contenant le point de départ. Elle admet plusieurs interprétations, ce qui n'est pas le cas du théorème.

Ainsi, la définition de la stabilité n'est fixée techniquement que dans l'énoncé du théorème, et elle est inséparable de cet énoncé. Il n'y a pas des trajectoires stables dont le théorème prédit l'existence. Mais pour chaque région, le théorème prédit l'existence de trajectoires récurrentes relativement à cette région. C'est cela qui est interprété comme l'existence de trajectoires stables.

Il en va de même pour le corollaire. On observe dans [Pb] que la définition du terme « exceptionnel » n'est pas isolée de celle de la stabilité ni de l'énoncé du corollaire. C'est d'abord une conséquence de ce que nous venons de voir : il n'y a pas un ensemble de trajectoires non récurrentes dont on pourrait calculer la probabilité, mais seulement des trajectoires récurrentes relativement à une région. De plus, la probabilité calculée par Poincaré en 1890 n'est pas celle des trajectoires non récurrentes relativement à une région donnée, mais celle des trajectoires qui ne reviennent pas dans cette région plus de k fois. Il en résulte que le sens du terme « exceptionnel » n'est défini que par l'énoncé que va établir Poincaré. Plus précisément encore, Poincaré écrit :

> Les probabilités étant ainsi définies, je me propose d'établir que la probabilité pour qu'une trajectoire issue d'un point de r_0 ne traverse pas cette région plus de k fois est nulle, quelque grand que soit k et quelque petite que soit la région r_0. C'est là ce que j'entends quand je dis que les trajectoires qui ne traversent r_0 qu'un nombre fini de fois sont exceptionnelles. [Pb, p. 316]

Ainsi, il prétend non pas donner un sens mathématique au terme « exceptionnel » en lui-même, mais expliciter ce qu'il faut entendre par le fait que les trajectoires non récurrentes — relativement à une région donnée — sont exceptionnelles.

Ceci se manifeste encore par une organisation assez étrange du texte. La section qui est marquée comme constituant le corollaire vient avant le passage que je viens de citer. Il s'agit d'un paragraphe en italique, précédé du titre de rubrique « corollaire » :

Corollaire. — *Il résulte de ce qui précède qu'il existe une infinité de trajectoires qui traversent une infinité de fois la région r_0 ; mais il peut en exister d'autres qui ne traversent cette région qu'un nombre fini de fois. Je me propose maintenant d'expliquer pourquoi ces dernières trajectoires peuvent être regardées comme exceptionnelles.* [Pb, p. 316]

À cet endroit du texte, Poincaré n'a pas encore défini le terme « exceptionnel », il n'a même pas encore parlé de probabilité. Il annonce une explication et une démonstration en même temps qu'une définition de ce qu'il entend par exceptionnel.

Dans les *Méthodes nouvelles*, nous avons vu que Poincaré s'affranchit du paramètre k dans l'énoncé qu'il démontre. Mais il n'en profite pas pour isoler la définition du terme exceptionnel de la description technique de la propriété qu'il va prouver. Il commence de même par donner un énoncé qui emploie le terme « exceptionnel », avant de préciser ce qu'il entend par là en une reformulation qui, dans le même mouvement, donne prise à la démonstration.

Ainsi nous voyons se dégager une nouvelle caractéristique commune au théorème de récurrence et à son corollaire : l'imbrication de ces deux énoncés avec la définition des termes par lesquels ils sont traduits. La stabilité — à la Poisson — n'est pas une propriété intrinsèque de certains objets, de même que le caractère exceptionnel de certains types de trajectoires n'est pas une propriété intrinsèque d'un ensemble donné. Ces termes permettent à Poincaré de reformuler des propriétés techniques complexes.

3.5 Les probabilités

3.5.1 Poincaré et le calcul des probabilités

Le calcul des probabilités n'est pas un domaine dans lequel Poincaré a beaucoup produit. En fait, l'utilisation des probabilités dans [Pb] est le témoignage le plus ancien dont nous disposons pour connaître ses réflexions sur ce sujet. En 1890, Poincaré est titulaire depuis trois ans de la chaire intitulée « Physique mathématique et calcul des probabilités » à la Sorbonne, mais c'est seulement au second semestre de l'année 1893–1894 qu'il choisit le calcul des probabilités comme thème de son enseignement. Ce cours est rédigé par Albert Quiquet, ancien élève de l'ENS (promotion 1883), qui travaillait depuis 1886 comme actuaire dans une compagnie d'assurances. Il est publié deux ans plus tard [Poincaré 1896a]. Le livre est composé de chapitres de longueurs à peu près égales, repérés seulement par des numéros de leçons. Le contenu reproduit probablement très fidèlement l'enseignement de Poincaré en 1894. C'est seulement dans la deuxième édition, publiée en 1912, que Poincaré revoit le découpage pour former des chapitres thématiques. Il ajoute une introduction et un chapitre supplémentaire à la fin. Les modifications dans le corps du texte, quant à elles, sont très discrètes, et mineures pour ce qui nous concerne ici[61]. Entre

[61] On peut signaler principalement que Poincaré introduit dans la seconde édition ce qu'il appelle les « fonctions caractéristiques » pour démontrer très rapidement le théorème central limite. Cet ajout, très discret dans le texte, aura une grande importance dans le développement des probabilités en France.

les deux éditions, Poincaré a publié un article moins spécialisé, [Poincaré 1899], qu'il intégrera dans *La science et l'hypothèse* [Poincaré 1902], puis un article [Poincaré 1907] qui forme l'introduction déjà évoquée à la deuxième édition du cours.

Or la période qui nous intéresse particulièrement est celle de la réécriture du mémoire sur le problème des trois corps, puis de la publication des résumés pour le *Bulletin astronomique* et la *Revue générale des sciences*, c'est-à-dire la période 1889–1891. Les travaux portant explicitement sur le calcul des probabilités sont donc postérieurs. Mais le cours de 1894 présente une forme aboutie des réflexions de Poincaré pendant les années précédentes. De fait, nous avons déjà relevé plus haut (3.1.2) des corrélations frappantes entre l'énoncé du corollaire au théorème de récurrence et le contenu de ce cours. En poursuivant cette analyse, nous serons à même de proposer une chronologie du travail de Poincaré dans le domaine des probabilités. Plus encore qu'une chronologie, l'étude des recherches sur le problème des trois corps nous donne accès à certaines des motivations de Poincaré dans l'élaboration de son approche personnelle du calcul des probabilités.

Le cours publié en 1896 mentionne très peu de sources. Poincaré parle bien sûr du théorème de Bernoulli, de la formule de Stirling, des méthodes de Cotes et de Gauss, etc. Mais il s'agit là de noms consacrés par l'habitude, et non de références aux travaux de ces mathématiciens. L'auteur le plus cité est très clairement Joseph Bertrand, dont l'ouvrage de calcul des probabilités est paru peu de temps auparavant [Bertrand 1888]. Poincaré connaissait d'ailleurs certains points de l'ouvrage de Bertrand par les exposés que ce dernier en avait fait aux séances de l'Académie alors même qu'il le rédigeait. Il a pu également avoir connaissance des réflexions de Bertrand sur les probabilités à l'École polytechnique. L'enseignement d'analyse y était alors partagé entre Hermite et Bertrand. En 1873–1874, lorsque Poincaré entre à l'école, Hermite faisait le cours de première année et Bertrand celui de deuxième année, et l'année suivante ils échangeaient, si bien que Poincaré a suivi les cours d'Hermite les deux années. Poincaré n'a donc pas eu Bertrand comme professeur, ce qui n'empêche pas qu'il ait pu avoir des échos de son enseignement. Les cahiers de cours[62] montrent que Bertrand insérait dans ses leçons d'analyse quelques séances sur le calcul des probabilités. Hermite, de son côté, traitait seulement du calcul intégral. Le seul enseignement de calcul des probabilités dans le cadre du cursus était donné au sein du cours d'astronomie, pendant la deuxième année. M. Faye n'a consacré en 1874–1875 qu'une leçon et demie au calcul des probabilités, et il a parlé pour l'essentiel de la question des erreurs d'observation [Sommaire 1873–1874, Sommaire 1874–1875].

Poincaré renvoie à Bertrand plusieurs fois dans son cours. Il lui reconnaît

[62] Je remercie chaleureusement L. Rollet qui m'en a fourni des reproductions.

la paternité de plusieurs exemples[63], questions[64], résultats[65], remarques[66]. En regard de cette référence constante à l'ouvrage de Bertrand, on peut constater que, lorsque Poincaré reprend quelques-unes des explications du paradoxe de Saint-Pétersbourg, il omet de nommer leurs auteurs, alors que Bertrand rapportait précisément les origines des diverses interprétations. Cette circonstance me semble indiquer que Poincaré utilise l'ouvrage de Bertrand comme source principale. Il tire parti du travail de compilation de ce dernier.

Le seul mathématicien auquel Poincaré fasse référence et qui ne soit pas déjà cité par Bertrand est Maurice d'Ocagne. Poincaré lui attribue la solution d'un problème de probabilités géométriques[67] [Poincaré 1896a, p. 113]. Mais il s'agit d'une contribution ponctuelle, sans comparaison avec celle de Bertrand.

Ainsi, il semble bien que Poincaré ait réfléchi au calcul des probabilités essentiellement à partir de l'ouvrage de Bertrand.

Ceci nous apprend deux choses. D'une part, Poincaré a lu l'ouvrage de Bertrand, du moins avant 1894, et probablement plus tôt, peut-être dès 1889 ; il n'est pas impossible que cette lecture — et les réflexions qu'elle a suscitées — soit une des sources d'inspiration qui lui a suggéré la formulation en termes de probabilités du théorème de récurrence. Plus précisément, je me propose de montrer que le travail sur le théorème de récurrence entre 1889 et 1891 est pour Poincaré l'occasion d'élaborer sa conception personnelle du calcul des probabilités.

3.5.2 Bertrand et les probabilités continues

Un des points sur lesquels les ouvrages de Bertrand et Poincaré présentent des différences importantes concerne le traitement des problèmes de probabilités continues, c'est-à-dire les problèmes pour lesquels l'ensemble des résultats possibles d'une expérience de probabilité est un continuum, et donc un ensemble infini. Il est important pour nous d'étudier les traitements que réservent Bertrand et Poincaré à ces problèmes, puisque la probabilité évaluée par Poincaré pour le corollaire du théorème de récurrence est de ce type. En effet, l'ensemble des conditions initiales possibles qui déterminent une trajectoire est un domaine de l'espace à n dimensions.

Dès le tout début de son ouvrage, Bertrand met en garde contre ce type de problèmes, montrant les contradictions qu'ils peuvent faire naître :

> Une remarque encore est nécessaire : l'infini n'est pas un nombre ; on ne doit pas, sauf explication, l'introduire dans les raisonnements.

[63] Ainsi les premiers exemples de problèmes de probabilités. La référence est explicite : « Citons deux autres exemples dus à Bertrand ». Avant même ce renvoi, Poincaré avait choisi, comme Bertrand, la question de la probabilité du point *4* au lancé de dé comme exemple le plus simple de calcul des probabilités. De même ensuite, on retrouve, non signalés, plusieurs exemples communs à Bertrand et Poincaré : le tir au pistolet, l'erreur de Maxwell et le problème du scrutin [Poincaré 1896a, p. 41–49] et [Bertrand 1888, p. 29–31 et 18–20].

[64] Notons tout particulièrement le paradoxe de Bertrand, résolu par Poincaré, sur lequel nous reviendrons.

[65] [Poincaré 1896a], p. 73 : « J. Bertrand a calculé le *moment probable de sa ruine.* »

[66] [Poincaré 1896a], p. 173 : « J. Bertrand présente les objections suivantes : [. . .] »

[67] Nous verrons que c'est pour ce domaine que Poincaré se démarque le plus par rapport à l'ouvrage de Bertrand.

> La précision illusoire des mots pourrait faire naître des contradictions. Choisir *au hasard*, entre un nombre infini de cas possibles, n'est pas une indication suffisante. [Bertrand 1888, p. 4]

Notons pour commencer que Bertrand ne vise pas ici toutes les questions mettant en jeu des probabilités continues, mais bien les problèmes impliquant un choix « au hasard » parmi un ensemble infini de choix possibles. Ainsi, les chapitres sur la théorie des erreurs font intervenir des lois de probabilités continues, sans relever de cet avertissement initial.

Bertrand donne immédiatement un premier exemple des difficultés qui surgissent dans le traitement de ces problèmes : « On demande la probabilité pour qu'un nombre, entier ou fractionnaire, commensurable ou incommensurable, choisi *au hasard* entre 0 et 100, soit plus grand que 50. La réponse semble évidente [...]. La probabilité est $\frac{1}{2}$. » [Bertrand 1888, p.4] Or on trouve un résultat différent si l'on considère le carré de ce nombre et qu'on évalue la probabilité pour que ce carré soit compris entre 2 500 et 10 000 : la réponse naturelle est alors $\frac{3}{4}$.

Bertrand propose ensuite un deuxième problème : « On trace *au hasard* une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus petite que le côté du triangle équilatéral inscrit ? » [Bertrand 1888, p. 4]. Il présente trois raisonnements visant à calculer cette probabilité : ils produisent chacun un résultat différent. Bertrand conclut : « Entre ces trois réponses, quelle est la véritable ? Aucune des trois n'est fausse, aucune n'est exacte, la question est mal posée. » [Bertrand 1888, p. 5] C'est cet exemple que Poincaré choisit pour ouvrir son chapitre sur la probabilité du continu. Mais au lieu de rejeter le problème comme mal posé, il élucide le paradoxe : chacun de ces raisonnements, introduisant des coordonnées différentes pour repérer une corde du cercle, conduit à définir une loi de probabilité différente sur l'ensemble des cordes.

Bertrand ne se contente pas de donner ces deux exemples pour mettre en garde contre une difficulté. Tout au long de son ouvrage, il manifeste une attitude de rejet assez sensible des problèmes qui supposent un choix au hasard parmi une infinité de cas possibles. À chaque fois, il réaffirme que la question est mal posée. Nous en verrons plusieurs exemples.

L'interprétation de l'attitude de Bertrand face à ces paradoxes est une question historique complexe. L'intérêt qu'il porte aux probabilités se mêle à une attitude polémiste qui va jusqu'au scepticisme, si bien qu'il est difficile de faire la part des choses. De plus, il n'existe pas d'étude sérieuse sur le personnage et ses positions philosophiques, importantes pour la conception des probabilités. Sans prétendre suppléer à ce manque, je me propose de mettre en évidence quelques aspects de la pensée de Bertrand sur le calcul des probabilités qui se dégagent du traitement qu'il donne à ce problème.

La première chose à noter est que Bertrand n'est pas le premier à mettre en évidence un paradoxe de ce type. Dans la deuxième moitié du XVIIIe siècle, Lambert et Laplace avaient proposé deux formules toutes deux plausibles, mais contradictoires, pour exprimer ce que signifie tirer au hasard un point sur une sphère. Le paradoxe est discuté par Cournot [1843], ainsi que lors de séances de la société philomatique à la fin des années 1840. Bertrand y est présent [Bru et al. 1997, note 22][68] et il est donc confronté dès cette époque à ces diffi-

[68] Voir aussi p. 161 et la note 58 : dès 1842, Bienaymé formulait une critique explicite et

cultés du calcul des probabilités.

Mais il semble bien que son attitude face à ces problèmes était alors fort différente de celle qu'il adopte en 1888 dans son ouvrage de calcul des probabilités. Les comptes-rendus des séances de la société philomatique, quoique rédigés de façon très succincte, conduisent en effet à cette interprétation. La seule séance où nous trouvions une référence suffisamment explicite à ces paradoxes est celle du 12 juillet 1851, au sujet de laquelle il est indiqué :

> « M. Bravais rapporte l'opinion émise par M. Cournot sur la manière de prendre les moyennes quand il s'agit de trois dimensions. Il indique aussi les recherches auxquelles il s'est livré pour déterminer la forme moyenne du crâne. M. Quetelet s'est également occupé de ces questions.
>
> M. Villarceau réplique.
>
> MM. Bertrand et Bienaymé ajoutent quelques remarques. M. Bienaymé, pour montrer combien le problème est indéterminé, rappelle les discussions auxquelles on s'est livré à propos de la vie moyenne[69].
>
> M. Bertrand pense qu'il est possible de définir nettement ce que l'on appelle direction moyenne. » [CR Soc Phil, Ms. 2090, p. 27–28]

Quelques explications sont nécessaires pour situer ces quelques lignes. Le problème rapporté par Bravais est un peu différent de celui de l'indétermination des probabilités continues, mais il lui est très lié. L'origine de cette discussion est une remarque de Cournot dans son *Exposition* [Cournot 1843], p. 143–144 dans l'édition de Vrin [Cournot 1973–] : peut-on définir un triangle moyen ? Cournot montre que cette question ne va pas de soi ; en particulier, si l'on tire au hasard les trois sommets et qu'on fait les moyennes des trois angles séparément, on ne trouve pas comme somme 180 degrés, qui est pourtant toujours la somme des angles. Cette argumentation lui sert à critiquer la notion d'homme moyen proposée par Quetelet dans son grand essai [Quetelet 1835]. Suite à la réponse de Quetelet, Bravais (qui a fait sa thèse sur les erreurs de situation d'un point dans l'espace) reprend cette discussion à la Société. Le compte-rendu laisse entendre qu'elle dérive vers la problématique qui nous intéresse plus spécifiquement du fait de la mention de la direction moyenne. Ceci renvoie en effet aux réflexions de Cournot sur les façons variées de définir les coordonnées d'un astre, qui se traduisent par des comportements différents de la moyenne : « Pour faire ressortir les lois auxquelles la distribution des orbites cométaires dans l'espace peut être assujettie, et pour appliquer le calcul des chances aux particularités que cette distribution présente, le système de coordonnées dont les astronomes font usage [§145] serait peu convenable. D'une part, nous avons remarqué [§71] que

technique de la loi uniforme sur l'intervalle [0 ;1]. Des réflexions semblables sont développées plus tard non seulement par Bertrand, mais également en Allemagne (en particulier par von Kries) et en Angleterre (Boole, Edgeworth).

[69] Bienaymé fait probablement référence en particulier à la séance du 29 mars 1845 où nous lisons : « M. Bienaymé communique des recherches sur la durée de la vie humaine et sur la manière dont les familles disparaissent. Cette communication donne lieu à une discussion que M. Bienaymé résumera dans une note » (Ms 2089, page 71, verso). Les archives de la société philomatique comportent, en plus des registres des procès-verbaux manuscrits des séances, une quarantaine de cartons (n^{os}123–164). Je n'ai pas trouvé la note de Bienaymé dans le carton 131 qui semblait, d'après le catalogue, le seul carton susceptible de la contenir. Cependant je n'ai pas examiné en détail ces archives, qui recèlent peut-être des compléments intéressants, mais tout à fait à la frontière de mes préoccupations principales.

la moyenne d'une série de longitudes converge moins rapidement vers un terme fixe, est moins promptement affranchie des anomalies du hasard que la moyenne de la série de latitudes ou de distances polaires correspondantes. D'autre part, nous savons que le meilleur moyen de mettre en évidence les lois par lesquelles des combinaisons sont régies, consiste à combiner des éléments symétriques ; et l'emploi d'un système de longitudes et de latitudes, ou de longitudes et de distances polaires, ne satisfont pas à cette condition de symétrie. En conséquence nous avons employé [dans l'*Addition au traité d'astronomie de J. Herschel*, AR] les distances des pôles des orbites à trois points symétriquement placés sur la sphère céleste héliocentrique. » [Cournot 1973–, §150, p. 179].

Le contexte étant éclairci, nous remarquons que c'est Bienaymé qui insiste sur le caractère indéterminé de la question, tandis que Bertrand estime qu'on peut définir suffisamment le problème pour lever l'indétermination.

Cette lecture est cohérente avec l'utilisation que fait Bertrand du calcul des probabilités dans son cours de calcul intégral. Il travaille en effet à cet endroit sur un problème continu [Bertrand 1870, p. 483–491]. Plus précisément, il s'agit démontrer la formule suivante, attribuée à Crofton[70] :

$$\int d\sigma(\omega - \sin\omega) = \frac{L^2}{2} - \pi\Omega,$$

« $d\sigma$ désignant un élément quelconque du plan extérieur à une courbe convexe dont l'aire est Ω et la longueur L, et ω l'angle sous lequel cette courbe est vue d'un point situé sur l'élément $d\sigma$. » La preuve utilise la probabilité pour qu'un disque convexe projeté au hasard sur un plan découpé par des lignes parallèles rencontre une de ces lignes. Bertrand calcule ensuite la probabilité pour que deux cordes choisies au hasard sur une courbe convexe se rencontrent à l'intérieur de la courbe. Il évalue enfin la probabilité pour qu'elles se rencontrent au dehors dans un espace déterminé. Autrement dit, Bertrand envisage en 1870, sans que cela semble lui poser de problème théorique, le choix au hasard d'une corde d'une surface convexe. Plus encore, il donne sa préférence à cette démonstration probabiliste pour établir la formule de Crofton : « Quoique l'auteur [Crofton] ait su la rendre indépendante du calcul des probabilités, c'est en s'appuyant sur les premiers principes de cette doctrine qu'on peut lui donner [...] la forme la plus simple et la plus nette. »

Ainsi, à cette époque, Bertrand ne manifeste aucune réticence à considérer des expériences de probabilités où le nombre de cas possibles est infini. Au contraire, il apprécie l'ingéniosité de cette preuve du théorème de Crofton. Or deux problèmes traités au cours de cette preuve sont repris en 1888 : celui du disque projeté sur une série de lignes parallèles, et celui de la corde d'un cercle. Il en résulte un contraste particulièrement saisissant entre le cours de 1870 et l'ouvrage sur le calcul des probabilités : alors que ces deux problèmes ne semblaient pas poser de problème en 1870, ils apparaissent comme des sources de difficultés dans le texte de 1888. Nous l'avons déjà vu avec le problème du choix au hasard d'une corde d'un cercle, que Poincaré a nommé de façon significative « paradoxe de Bertrand ». Nous allons maintenant nous tourner vers le problème du choix au hasard d'une corde d'un cercle. Il donne lieu, en effet, à un passage très intéressant du texte de 1888.

[70] Voir [Seneta et al. 2001] pour une étude plus détaillée de l'histoire de ce problème.

Bertrand s'y intéresse pour traiter le problème classique de l'aiguille de Buffon : on suppose que sont tracées sur un plan des lignes parallèles équidistantes, on lance une aiguille au hasard sur le plan et on cherche la probabilité pour que l'aiguille rencontre une des lignes parallèles. Cet exemple classique est repris dans le troisième chapitre de l'ouvrage de 1888. Bertrand le résout en se ramenant au calcul de la probabilité pour qu'un cercle de rayon R, lancé au hasard sur le plan, rencontre une des lignes parallèles. Il s'agit donc du même calcul que celui qui ouvre la démonstration du théorème de Crofton en 1870. Voici comment Bertrand procédait en 1870[71] :

> Cela posé, la distance des parallèles étant $2a$, si le disque est un cercle de rayon R, la probabilité pour qu'il y ait rencontre est évidemment $\frac{R}{a}$, car il faut et il suffit pour cela que le centre se trouve à une distance moindre que R de l'une des parallèles entre lesquelles il est tombé, et que, par conséquent, sur une distance $2a$ dont tous les points sont également possibles, le centre du cercle se place dans une portion dont la longueur totale est $2R$. [Bertrand 1870, p. 484]

Le problème de l'aiguille de Buffon est tellement classique, et sa solution tellement évidente, que Bertrand semble ne pas se résoudre à le considérer comme insuffisamment déterminé — ce qui serait pourtant cohérent avec la mise en garde initiale contre le choix parmi un nombre infini de cas possibles. Il le présente donc, mais c'est le seul exemple de probabilités continues, et il apparaît donc au milieu d'un florilège de problèmes de probabilités finies. Bertrand tente même de ramener sa résolution à celle d'un choix parmi un nombre fini de cas possibles :

> La probabilité pour que le cercle rencontre une des parallèles est $\frac{2R}{a}$. Si l'on partage, en effet, la distance $2a$ des deux parallèles entre lesquelles tombe le centre du cercle en n parties, il y a chance égale pour qu'il tombe sur chacune d'elles, et il faut, pour qu'il y ait rencontre, qu'il soit à une distance moindre que R de l'une ou l'autre des deux lignes. Le nombre des divisions favorables est $\frac{2Rn}{a}$; leur nombre total est n, et la probabilité de la rencontre est, par conséquent, $\frac{2R}{a}$. [Bertrand 1888, p. 55]

Le résultat est juste, mais la tentative de discrétisation est très insatisfaisante, et témoigne de l'embarras de Bertrand. En effet, le « nombre de divisions favorables » $\frac{2Rn}{a}$ n'a aucune raison d'être entier. Le problème n'est donc ramené qu'en apparence à un nombre fini de cas. Bertrand était certainement tout à fait conscient de ce hiatus. Ce passage montre donc qu'il s'interdit de choisir au hasard parmi un nombre infini de cas, mais sans pour autant rejeter, en fait, tous les problèmes de ce type.

On peut tenter d'avancer, à cette hésitation de Bertrand, plusieurs raisons qui sont peut-être en partie mêlées. Je me concentrerai ici sur la question de la détermination de la probabilité, même s'il y a probablement d'autres facteurs qui entrent en ligne de compte[72]. Ceci me permettra de montrer que cette difficulté sur laquelle Bertrand insiste dans son cours trouve dans celui de Poincaré

[71] Je modifie légèrement les notations pour les harmoniser avec celles de 1888. En 1870, Bertrand note le rayon du cercle r plutôt que R.

[72] B. Bru estime que la position de Bertrand dans son cours de probabilités est significative de Bertrand qui, vieillissant, devient infiniment sceptique sur le rôle des mathématiques et des mathématiciens. Il aime passionnément les mathématiques, mais en vient à rejeter toute

une résolution qui est liée avec la façon dont ce dernier introduit le calcul des probabilités pour renforcer le théorème de récurrence.

Pour mieux comprendre le problème que rencontre Bertrand, il nous faut étudier de près la façon dont il exprime ce qui est déficient dans le choix au hasard parmi un ensemble infini de cas. Il souligne, dès le début de son réquisitoire que ce « n'est pas une indication suffisante » [Bertrand 1888, p. 4].

Après l'exemple de la corde choisie « *au hasard* » dans un cercle, Bertrand propose deux autres problèmes similaires pour lesquels deux raisonnements en apparence également satisfaisants conduisent à des résultats différents :

> On choisit au hasard un plan dans l'espace ; quelle est la probabilité pour qu'il fasse avec l'horizon un angle plus petit que $\frac{\pi}{4}$? [Bertrand 1888, p. 5–6]
>
> On fixe au hasard deux points sur la surface d'une sphère ; quelle est la probabilité pour que leur distance soit inférieure à $10'$? [Bertrand 1888, p. 6]

Il conclut dans chacun des cas de façon à peu près semblable que pour le problème de la corde :

> Cette question, comme la précédente, est mal posée et les deux réponses contradictoires en sont la preuve. [Bertrand 1888, p. 6]
>
> Les probabilités relatives à la distribution des étoiles, en les supposant semées *au hasard* sur la sphère céleste, sont impossibles à assigner si la question n'est pas précisée davantage. [Bertrand 1888, p. 7]

Nous retrouvons le même genre de diagnostic à propos d'un autre problème de probabilités continues, étudié par Bertrand dans un autre objectif :

> *On tire à la cible. L'arme, sans être parfaite, ne présente aucun défaut systématique ; les déviations ont en tous sens même probabilité. L'hypothèse est-elle réalisable ? On le suppose.*
>
> *Quelle est la probabilité pour que le point frappé soit à une distance du but comprise entre r et $r + dr$?*
>
> Les données sont insuffisantes, cela semble évident. [Bertrand 1888, p. 29]

La suite de l'étude vise à dénoncer une application mal fondée du principe des probabilités composées pour prouver — à tort — que la loi de probabilité est nécessairement gaussienne. C'est la remarque initiale, selon laquelle les données sont insuffisantes, qui nous intéresse. En effet, elle rejoint le jugement exprimé à propos du premier paradoxe : les indications sont insuffisantes. Nous verrons que Poincaré reprend le même exemple, et la comparaison des deux passages se révèlera significative de la différence d'approche entre nos deux auteurs.

Dans tous ces passages, nous voyons que Bertrand revient toujours à la façon dont le problème est décrit pour y chercher l'origine du paradoxe ou des difficultés rencontrées : la question est mal posée, pas assez précise, les indications sont insuffisantes.

application à n'importe quoi. Ceci s'applique en particulier à la théorie bayesienne des probabilités. Bertrand reprend peut-être les critiques anglaises (Edgeworth), en tous cas il profite de son livre pour attaquer violemment la théorie de Laplace–Bayes et la théorie des jugements. Dans ce but, il s'appuie probablement sur des réflexions antérieures, entre autres à la société philomatique.

Bertrand donne déjà une importance semblable à la précision de la description du problème posé dans le passage déjà évoqué de son ouvrage de calcul intégral. Il y posait la question suivante :

> *Une courbe convexe étant donnée, on y considère deux cordes choisies au hasard, quelle est la probabilité pour qu'elles se rencontrent au dedans de la courbe et celle pour qu'elles se rencontrent au dehors dans un espace déterminé ?* [Bertrand 1870, p. 486–487]

Il précise ensuite immédiatement :

> Commençons par définir avec plus de précision ce que nous entendons par corde choisie *au hasard*.
>
> Je suppose que la courbe soit projetée sur le système de parallèles défini plus haut et qu'on recommence l'épreuve jusqu'à ce qu'il y ait intersection. La corde détachée par celle des lignes qui est rencontrée sera pour nous la première des cordes choisies au hasard ; la seconde s'obtiendra par une autre épreuve renouvelée, s'il est nécessaire, jusqu'à ce qu'elle ait donné un résultat. [Bertrand 1870, p. 487]

La première phrase semble bien annoncer ce que Bertrand affirmera avec force en 1888, à savoir que « choisir *au hasard* parmi un nombre infini de cas n'est pas une précision suffisante ». La façon dont il détaille ici ce que signifie ce « *au hasard* » est très révélatrice. C'est en décrivant l'épreuve suffisamment précisément que Bertrand estime devoir (et pouvoir) préciser ce qui est entendu par « *au hasard* ». L'indication qu'il donne semble convenir à Bertrand. Le diagnostic moderne, conforme à la conception de Poincaré, serait différent sur cette question. Il nous suffirait de constater que la même loi de probabilité est conservée tout au long du calcul. Ceci assure que le résultat final — qui n'est plus un énoncé probabiliste, mais un résultat de calcul intégral — est correct. On pourrait sans doute discuter pour savoir si la description donnée par Bertrand suffit à légitimer la loi de probabilité qu'il choisit ici. Cette question est ici secondaire. Le seul point important pour nous est celui-ci : Bertrand semble considérer que la loi de probabilité doit être déterminée par la description de l'expérience qui est menée. Autrement dit, la probabilité est nécessairement objective. Elle résulte des conditions de l'expérience, qui doit être décrite très précisément.

Ceci nous met sur la piste d'une explication à la radicalité avec laquelle Bertrand rejette, en 1888, l'emploi des probabilités dans les problèmes qui font intervenir un choix parmi un nombre infini de possibles.

Remarquons d'abord que Bertrand envisage de tels problèmes principalement à deux endroits dans son ouvrage — presque toujours pour critiquer les solutions qu'on a pu tenter de leur donner. Il s'agit d'abord du premier chapitre, sur l'énumération des chances, duquel sont extraits les premiers exemples que j'ai donnés. Bertrand revient ensuite avec insistance sur le caractère insuffisamment déterminé de certains problèmes dans son chapitre sur la probabilité des causes. Dans ce domaine du calcul des probabilités, on cherche à déterminer la probabilité des différents évènements qui ont pu conduire à un même résultat observé. Le premier exemple donné par Bertrand est le suivant :

> Pierre a parié d'amener avec trois dés un point supérieur à 16 ; il a gagné : tel est l'évènement. Le point amené peut être 17 ou 18 : telles sont les causes possibles du succès. [Bertrand 1888, p. 143]

Pour résoudre ce genre de problèmes, il faut connaître la loi de probabilité *a priori* pour l'expérience dont on connaît le résultat. Dans le problème ci-dessus, elle est naturelle. Pierre joue avec trois dés. On suppose évidemment qu'ils sont non pipés, si bien que pour chaque dé, les probabilités des six résultats possibles sont, avant que Pierre n'ait lancé les dés, égales. Mais on omet souvent de préciser la loi initiale dans des problèmes où elle n'est pourtant pas évidente. Tel est le premier exemple que propose Bertrand après avoir présenté la résolution théorique du problème de la probabilité des causes :

> *Une urne contient μ boules : les unes sont blanches, les autres noires, on ignore dans quelle proportion. On tire k boules, en remettant à chaque fois la boule sortie. Il ne sort que des boules blanches. Quelle est la probabilité pour que l'urne ne contienne que des boules blanches ?* » [Bertrand 1888, p. 146]

Bertrand commence par remarquer que « la question est mal posée » et qu'« il faudrait dire, en outre, quelle est, *a priori*, la probabilité » de chaque hypothèse sur la composition de l'urne. La façon dont il décrit plusieurs manières de préciser l'énoncé du problème est conforme à ce que nous avons mis en évidence dans le *Cours d'analyse* de 1870 : il faut décrire l'expérience qui a déterminé la composition de l'urne. C'est cette description précise qui permet de connaître la probabilité *a priori* :

> Si, toutes les combinaisons possibles ayant été préparées dans des urnes d'apparence identique, le hasard a décidé entre elles, les conditions sont autres que si l'on a puisé au hasard dans une urne de composition convenue, pour composer avec les boules ainsi tirées l'urne nouvelle dont nous parlons. [Bertrand 1888, p. 146]

Bertrand mène les calculs dans différents cas où la probabilité *a priori* est ainsi déterminée, puis son ton se fait plus polémique :

> « On a assimilé sans raison au problème précédent des questions en réalité fort différentes.
>
> Lorsque les observations démentent des prévisions dont la probabilité semblait grande, on présume, naturellement, l'influence d'une cause perturbatrice et l'on est conduit à chercher la probabilité de son existence.
>
> La question est insoluble. On n'a pas, d'une part, les données nécessaires. Le dilemme, d'autre part : ou il existe une cause, ou il n'en existe pas, n'a pas la netteté promise par la forme de l'énoncé. » [Bertrand 1888, p. 156]

Il donne divers exemples : probabilité pour qu'une pièce favorise l'arrivée de pile ou de face en fonction des résultats donnés par un grand nombre de lancers, raison des écarts entre le rapport des nombres de naissances de filles et de garçons d'un endroit à un autre, etc. Dans tous ces exemples, on voit que le problème principal est celui de la définition de la probabilité *a priori*. Celle-ci ne peut plus être définie par une description suffisante de l'expérience, du fait de la nature des problèmes envisagés. On pouvait dire comment l'urne de composition inconnue avait été choisie parmi un ensemble d'urnes, ou remplie en tirant des boules au sort. Mais pour déterminer la probabilité *a priori* pour qu'une pièce favorise l'arrivée de pile ou face, il faudrait énumérer les facteurs qui peuvent produire un déséquilibre de la pièce, leur contribution à ce déséquilibre et leur probabilité d'occurrence... La plupart des problèmes que Bertrand évoque pour combattre l'utilisation abusive du calcul des probabilités à leur sujet sont de tels problèmes de probabilité des causes : les causes n'y sont pas issues d'expériences de probabilités. Il en résulte qu'on ne peut pas décrire précisément une expérience qui leur aurait donné lieu. Donc les données restent insuffisantes aux yeux de Bertrand.

On voit donc dans l'ouvrage de Bertrand un lien entre le rejet du choix parmi un nombre infini de cas possibles, qui n'est pas une précision suffisante, et l'assaut vigoureux qu'il mène contre un grand nombre d'utilisations abusives du calcul des probabilités, dans le but de redonner à ce dernier une légitimité qu'il avait pu perdre.

Ce lien peut être interprété de deux façons au moins. On peut trouver à ces deux attitudes une origine commune dans une conception objective des probabilités : la probabilité des évènements doit être déterminée par les conditions de l'expérience. Lorsque tel n'est pas le cas, les données sont insuffisantes et l'application du calcul des probabilités n'est pas fondée. Mais on peut aussi avancer que c'est la volonté polémique de rejeter des usages abusifs des probabilités qui conduit Bertrand à tenir si fermement à l'objectivité des probabilités. Il en vient ainsi à adopter une attitude radicale dès le début de son ouvrage, au point de se mettre lui-même dans l'embarras au moment de traiter le problème classique et non controversé de l'aiguille de Buffon.

Quelle que soit la raison profonde de cette attitude assez offensive de Bertrand, elle le conduisait à mettre en doute la légitimité de l'application du calcul des probabilités dès qu'il ne s'agit plus de théorie des jeux. Ceci touche la justice[73], mais aussi la physique et l'astronomie :

> Appliquée aux dés, aux cartes, au jeu de rouge et de noire, aux numéros pairs ou impairs, à pile ou face, la théorie des chances est indiscutable : rien n'y altère la rigueur des preuves ; l'Algèbre exécute plus rapidement les dénombrements qu'avec de la patience et du temps on pourrait faire sur ses doigts. [...]
>
> La Physique, l'Astronomie, les phénomènes sociaux, semblent, dans plus d'un cas, régis par le hasard. Peut-on comparer la pluie ou le beau temps, l'apparition ou l'absence des étoiles filantes, la santé ou la maladie, la vie ou la mort, le crime ou l'innocence à des boules blanches ou noires tirées d'une même urne ? Le même désordre apparaît dans les détails, cache-t-il la même uniformité dans les moyennes ? Retrouvera-t-on dans les écarts les traits connus et la physionomie des effets du hasard ?
>
> [...] Le raisonnement ne peut devancer l'expérience ; les observations, soigneusement discutées, condamnent, en même temps que les sceptiques rebelles à tout rapprochement, les esprits absolus qui prétendent tout soumettre au calcul. [Bertrand 1888, p. XXIII]

Un peu plus haut dans cette même préface, p. XVIII–XIX, Bertrand avait déjà évoqué un usage des probabilités en mécanique céleste, pour en montrer le

[73] Le dernier chapitre de son ouvrage est un « résumé critique des tentatives faites pour appliquer le Calcul des probabilités aux décisions judiciaires », où il montre toutes les failles de la théorie de Condorcet.

caractère abusif. Il avait d'abord expliqué l'« application trop hardie » qu'avait faite « un astronome dont le nom est resté obscur sans injustice, l'archevêque Mitchell » d'une idée ingénieuse et juste : ce dernier s'était intéressé à la répartition, sur la voûte céleste, des 3000 étoiles connues. Il avait montré entre autres choses qu'on pourrait parier à 500 000 contre 1 pour qu'une cause, en dehors du hasard, ait rapproché les six étoiles du groupe des Pléiades. Bertrand ne condamne pas de façon absolue ce genre de calculs, mais il se montre extrêmement prudent et juge :

> En proposant la mesure précise d'assertions aussi vagues, on peut compromettre la Science. [...] Les appréciations sans chiffres n'engagent à rien, un chiffre engage la science, et c'est sans aucun droit. L'application du calcul aux questions de ce genre est une illusion et un abus. [Bertrand 1888, p. XVIII]

Le problème est développé dans le corps du texte p. 169–171, et son analyse s'achève avec la même méfiance à l'égard de l'application de la probabilité des causes en mécanique céleste.

L'exemple suivant d'utilisation abusive du calcul des probabilités touche encore à la mécanique céleste : « "Les motifs de croire que, sur 10 millions de boules blanches mêlées à 1 noire, ce ne sera pas la noire que je tirerai du premier coup est de même nature, a écrit Condorcet, que le motif de croire que le Soleil ne manquera pas de se lever demain." L'assimilation n'est pas permise : l'une des probabilités est objective, l'autre est subjective. » [74].

La seule application du calcul des probabilités que Bertrand admet en astronomie concerne la théorie des erreurs, les calculs d'incertitude, les erreurs d'observation. La mécanique céleste, du point de vue théorique, est pour sa part présentée par Bertrand comme un domaine où le calcul des probabilités n'a pas lieu d'être utilisé.

3.5.3 Utilisation des probabilités en mécanique céleste : la loi de probabilité présentée comme une convention par Poincaré

En contrepoint à ce rejet des choix « au hasard » parmi un nombre infini de cas possibles, qui touche en particulier les probabilités continues, dans tout l'ouvrage de Bertrand, Poincaré consacre deux chapitres de son cours à ces dernières[75]. Il y expose le paradoxe de Bertrand, explique pourquoi on obtient des résultats différents pour le même problème, et montre comment éviter cette difficulté.

La façon dont Poincaré résout ces paradoxes s'ancre dans une conception du calcul des probabilités qui se distingue de celle de Bertrand. En effet, Poincaré distingue deux étapes dans la résolution de tout problème de probabilités. Une première étape consiste à déterminer les cas que l'on considère comme également probables, c'est-à-dire à fixer la loi de probabilité ; il s'agit là du choix d'une « convention », et cette étape n'est pas, pour Poincaré, une étape mathématique.

[74] [Bertrand 1888], p. XIX. On lit bien « les motifs de croire [...] est de même nature [...] » dans la citation que fait Bertrand.

[75] Il s'agit, dans la deuxième édition (1912), du chapitre VII, intitulé « Probabilités continues », et du chapitre d'« applications diverses » ; ces deux chapitres forment, dans la première édition, la deuxième partie de la 8^e leçon ainsi que les 9^e et 10^e leçons.

Une fois cette convention fixée, en revanche, il ne s'agit plus que de calcul. Ainsi, alors que Bertrand incluait dans le calcul des probabilités l'évaluation de la loi de probabilité, déterminée par l'expérience menée, Poincaré place cette étape de la résolution des problèmes hors du champ mathématique.

Dans son ouvrage, Poincaré s'occupe très peu de la partie de l'étude consistant à fixer la loi de probabilité, sinon justement pour expliquer les « paradoxes » relevés par Bertrand : ils sont dus seulement au fait que les différents calculs sont basés sur des lois de probabilité différentes. Autrement dit, ce n'est pas le calcul qui cause le paradoxe, mais bien l'incompatibilité des conventions utilisées dans deux évaluations différentes de la probabilité.

Cette évolution dans la façon de concevoir les probabilités coïncide avec une réévaluation des liens possibles entre le calcul des probabilités et la mécanique céleste par rapport à la position de Bertrand.

Nous avons vu que ce dernier mettait en cause la légitimité de l'application du calcul des probabilités à la physique ou à l'astronomie. Poincaré, au contraire, donne dans son cours plusieurs exemples de problèmes issus de la mécanique céleste.

À deux reprises il prend l'exemple des étoiles placées au hasard sur la sphère céleste — que Bertrand étudiait, nous l'avons vu, seulement pour critiquer la légitimité du calcul proposé par Mitchell. Dans le chapitre où il présente diverses applications des probabilités continues, il calcule la distance moyenne entre deux étoiles si l'on suppose N étoiles disposées au hasard sur la sphère céleste. Dans les exemples précédents, il avait déjà considéré des figures placées au hasard sur une sphère, et il avait choisi la loi de probabilité proportionnelle à la mesure de surface sur la sphère. Il continue à travailler avec cette convention. Il s'agit seulement pour lui d'un problème de calcul, et le lien avec la disposition effective des astres dans le ciel n'est pas envisagé. Il s'intéresse ensuite à la façon dont un grand nombre de planètes se répartissent sur le zodiaque au bout d'un temps assez long, quelles que soient leurs positions initiales : nous y reviendrons.

Il propose également un problème de probabilités des causes qui fait intervenir des astres : la rupture avec l'attitude de Bertrand est ici particulièrement nette. Le problème s'énonce ainsi : « Représentons par N le *nombre total des petites planètes* ; parmi elles, un certain nombre M sont connues. Dans une année, on en observe n parmi lesquelles m planètes connues. On demande la valeur probable de N. » Poincaré fait une hypothèse supplémentaire, pour pouvoir appliquer le calcul des probabilités : « nous supposerons connue la probabilité pour que, pendant l'année d'observation, une planète existante ait été observée ; soit p cette probabilité : nous admettrons qu'elle est la même pour les planètes connues et inconnues. » Il traite ensuite le cas où la probabilité p est supposée inconnue, et où l'on se donne une loi de probabilité vérifiée par la valeur de p. Ici encore, il est assez clair que Poincaré ne se soucie pas du rapport entre les calculs qu'il mène et le nombre véritable des petites planètes. Les calculs n'ont aucune prétention à en dire quelque chose, ils résultent des hypothèses de départ.

Ainsi, l'approche de Poincaré lui permet d'appliquer le calcul des probabilités à des objets qui relèvent de la mécanique céleste, sans tomber sous le coup de la critique de Bertrand. Le monde physique n'apparaît pas plus soumis à des lois probabilistes dans l'ouvrage de Poincaré que dans celui de Bertrand. Mais Poincaré introduit de fait des problèmes dont les objets viennent de la mécanique céleste. Alors que Bertrand s'attachait à dénoncer les emplois abusifs du calcul des probabilités pour ne pas la dévaloriser, Poincaré présente cette théorie comme un outil mathématique qui peut se révéler utile dans divers domaines.

Le cours de 1894 aborde ainsi plusieurs problèmes issus de la mécanique céleste, contrairement à la position adoptée par Bertrand. On est tenté de se demander s'il n'y a pas là une trace nette de l'usage que Poincaré a fait des probabilités dans ses recherches en mécanique céleste, tout particulièrement pour la formulation du corollaire au théorème de récurrence.

L'un des exemples donnés par Poincaré dans le chapitre d'application des probabilités continues vient appuyer cette hypothèse de façon frappante. Poincaré montre que, pour un système différentiel sous forme hamiltonienne, si l'on se donne une loi de probabilité sur les conditions initiales du système et si cette loi est proportionnelle au volume, cette loi sera conservée pour les valeurs finales lorsqu'on fait évoluer le système pendant un temps fixé. Il s'agit là d'une variante de la propriété d'invariance du volume pour les systèmes hamiltoniens. Poincaré avait énoncé cette dernière propriété dans ses travaux de mécanique céleste. Plus encore, il s'agit précisément de la propriété qui permet d'appliquer le théorème de récurrence. On voit donc que Poincaré fait le lien entre le calcul des probabilités et la mécanique céleste, et qu'il relit les résultats obtenus dans le second domaine de recherche en utilisant la terminologie du calcul des probabilités.

De plus, nous avons remarqué que Poincaré met déjà en œuvre, en 1890, la conception des probabilités qui lui permet de résoudre les paradoxes de Bertrand. Dans [Pb], en effet, il a soin de préciser dès le départ la *convention* qu'il adopte pour évaluer les probabilités en jeu. Il emploie la même terminologie : « Nous *conviendrons* de dire que la probabilité [...] » [Pb, p. 316] (je souligne). Ainsi, sa réflexion sur les probabilités semble bien présenter, dès 1890, la supériorité que nous venons de relever par rapport à l'ouvrage de Bertrand.

En cela, il se démarque de Gyldén. Nous avons vu que ce dernier utilise également le calcul des probabilités, en vue de la mécanique céleste. Mais il ne fixe pas la loi de probabilité sur le segment $[0,1]$ dans lequel il choisit « *au hasard* » un nombre μ. Il commence par considérer la fraction continue représentant μ, puis raisonne sur les nombres qui apparaissent lors du calcul de cette fraction continue, et suppose qu'une quantité formée comme fonction de ces coefficients suit une loi uniforme. Or cette loi correspond à une loi non uniforme sur le nombre initial. C'est le problème que mettait en évidence le premier exemple de Bertrand : le carré d'un nombre semble avoir de façon naturelle la probabilité $\frac{3}{4}$ de se trouver entre 2500 et 10000, tandis qu'un nombre n'a que la probabilité $\frac{1}{2}$ d'être entre 50 et 100. Mais Gyldén ne manifeste aucune précaution à cet égard.

Au contraire, lorsque Poincaré utilise le calcul des probabilités en 1890, il commence par définir la loi de probabilité qu'il adopte. Il fait ainsi preuve, vis-à-vis des paradoxes de Bertrand, d'une rigueur qui annonce celle de son cours de 1894 et se manifeste de la même façon. Si donc le travail de 1890 a pu être inspiré par Gyldén, il témoigne d'une réflexion personnelle de Poincaré.

Plus encore, je reviendrai bientôt sur la précision que Poincaré ajoute en 1891 : la probabilité pour qu'une trajectoire ne soit pas récurrente est nulle, *quelle que soit la loi de probabilité choisie*. Nous verrons que Poincaré présente cette addition comme la réponse à une « objection ». Je montrerai qu'on peut reconnaître là une allusion aux paradoxes de Bertrand, et l'origine d'un développement théorique important : la méthode des fonctions arbitraires.

L'intérêt du calcul des probabilités pour la physique est marqué encore plus nettement par Poincaré dans la deuxième édition de son cours, en 1912. Il ajoute alors l'introduction, qui reprend un article publié en 1907, et le dernier chapitre. Dans celui-ci, Poincaré développe l'analyse des problèmes qu'il a présentés en introduction : le battage des cartes, la répartition des décimales dans une table numérique et le mélange des liquides. Poincaré élargit ainsi le champ couvert par son ouvrage au moment où Borel, avec quelques autres jeunes savants, se fait le promoteur de l'utilisation du calcul des probabilités dans les théories cinétiques. Cette évolution est analysée dans [Bru et al. 1999] de la façon suivante :

> Poincaré lui-même, le plus grand de tous, dont l'hostilité aux théories cinétiques et le scepticisme à l'égard du calcul des probabilités sont assez connus, donne bientôt à la *Revue [du mois]* un article retentissant [Poincaré 1907] dans lequel il admet enfin que certains phénomènes physiques à une échelle convenable sont et ne sauraient être que « fortuits » et qu'en effet seul un calcul des probabilités peut en rendre compte dès lors que ses résultats ne dépendent plus de la particularité des conditions initiales, ce qui est le cas chaque fois que le principe ergodique probabiliste s'applique, par exemple lors du battage des cartes [...]. Il est difficilement niable que Poincaré ait été sur ces sujets en partie influencé par les réflexions de Borel, dont l'œuvre scientifique prend alors une autre dimension. [Bru et al. 1999, p. 192–193]

Or il me semble qu'on trouve déjà, bien avant 1907, des traces de l'ouverture de Poincaré à l'utilisation des probabilités en physique. J'ai montré la distance assez considérable, sur ce point, entre l'ouvrage de Bertrand et la première édition du cours des probabilités de Poincaré, en 1896, sans doute conforme au cours professé en 1894. Ce dernier se place de plus dans la continuité du travail de 1890 sur les trajectoires exceptionnelles.

La réflexion de Poincaré se poursuit dans son premier article à caractère philosophique sur les probabilités, publié en 1899. Poincaré y donne deux exemples de problèmes où l'on ignore l'état initial d'un système, et où l'on cherche à dire tout de même quelque chose de l'état actuel : le problème des petites planètes, et celui de la théorie cinétique des gaz. Il conclut : « Seul, le calcul des probabilités permet de prévoir les phénomènes moyens qui résulteront de la combinaison de ces vitesses. » Le rôle irremplaçable du calcul des probabilités est donc déjà nettement affirmé en 1899.

On peut constater sur ce point une évolution entre le cours de 1894 et l'article de 1899. Dans la première édition de son cours, Poincaré insistait surtout sur la *convention* qui prélude à tout calcul des probabilités dans ces domaines. Il écrit ainsi : « Nous connaissons, par exemple, la loi du mouvement des molécules ; si nous connaissions exactement leur position initiale, nous serions capables de dire où elles seront à un moment donné ; la probabilité pour que ces molécules occupent telle position finale dépendra donc de la probabilité que nous attribuerons *par convention* à telle ou telle position initiale. Dans chaque cas, une hypothèse particulière sera nécessaire. »[76] On ne peut manquer de voir la différence entre ce passage où Poincaré admet simplement l'utilité que peut avoir le calcul des probabilités, et la conclusion déjà citée de l'article de 1899, où le calcul des probabilités est présenté comme « seul » à permettre des prévisions.

Ainsi, l'étude de l'utilisation des probabilités pour la formulation du corollaire du théorème de récurrence, apporte une lumière nouvelle sur les premiers développements de la réflexion de Poincaré dans ce domaine. Mais il ne s'agit là que d'un premier travail, centré sur le début des années 1890. Il serait intéressant de poursuivre, en étudiant en particulier les écrits de Poincaré sur la théorie cinétique des gaz, à partir du milieu des années 1890. On pourrait alors mieux évaluer l'importance respective de la mécanique céleste, de la théorie cinétique des gaz, et des réflexions de Borel dans l'élaboration de la conception du calcul des probabilités et de son rôle pour Poincaré.

3.5.4 La méthode des fonctions arbitraires de Poincaré

On peut souligner un deuxième point par lequel l'ouvrage de Poincaré présente, en lien avec ses travaux sur le problème des trois corps, une amélioration importante par rapport à celui de Bertrand. Poincaré introduit en effet une méthode nouvelle, la méthode des fonctions arbitraires, par laquelle l'arbitraire du choix par « convention » de la loi de probabilité est évacué[77].

Cette méthode était déjà utilisée par von Kries en 1886 [von Kries 1886][78] pour montrer l'équiprobabilité du rouge et du noir dans un jeu de roulette simplifié. Il affirme que pour toute distribution de probabilité suffisamment régulière sur les états mécaniques du système, la probabilité totale de la couleur rouge et celle du noir seront approximativement égales. Il ne donne cependant pas les conditions mathématiques suffisantes pour assurer ce résultat. C'est la même idée qui apparaît à partir de 1891 dans les travaux de Poincaré sur le problème des trois corps : quelle que soit la loi de probabilité, suffisamment régulière, adoptée par convention sur l'espace des conditions initiales, la probabilité pour qu'une trajectoire ne soit pas récurrente est nulle. L'arbitraire qui est présent dans le choix initial de la convention disparaît au cours du calcul et le résultat n'en dépend plus.

Il est difficile de savoir avec certitude si Poincaré a eu connaissance de ces travaux de von Kries ou non. L'absence de l'ouvrage de ce dernier de toutes les bibliothèques parisiennes (et même françaises, hormis Strasbourg) laisse penser que Poincaré n'a vraisemblablement jamais eu ce livre entre les mains. Par ailleurs, von Kries est un physiologiste, et appartient de ce fait à un milieu assez étranger aux réseaux de Poincaré.

De fait, la précision apportée dans les résumés de 1891 apparaît plutôt

[76]Ce passage se retrouve, identique, dans la première leçon de l'édition de 1896 et dans le premier chapitre de celle de 1912, p. 31.

[77]Von Plato [1883] propose une présentation plus complète de l'histoire de la méthode des fonctions arbitraires, en particulier des développements que lui ont donnée plusieurs mathématiciens après Poincaré : Fréchet, Hostinsky, etc. On pourra compléter la bibliographie proposée par von Plato avec [Fréchet 1921] et [Fréchet 1938]. Bru [2003] apporte également un éclairage historique intéressant sur l'histoire des probabilités dans la première moitié du XX^{e} siècle, avec une partie sur les recherches de Poincaré.

[78]On trouvera dans [Kamlah 1883] une discussion de la théorie des probabilités de von Kries. Plus récemment, le *preprint* de Shafer et Vovk [2004, p. 13–14] présente brièvement l'ouvrage de von Kries [1886].

comme une réponse aux paradoxes de Bertrand que comme une façon de concevoir le calcul des probabilités à l'image de ce que développe von Kries. La formulation de [Poincaré 1891b] est trop succincte pour qu'on puisse en tirer des conclusions, mais celle de [Poincaré 1891a] peut nous fournir un indice intéressant. Poincaré écrit en effet : « On objectera qu'il y a une infinité de manière de définir cette probabilité ; mais cela reste vrai quelle que soit la définition que l'on adopte [...] ». Poincaré affirme donc répondre à l'objection selon laquelle il n'y a pas une manière unique de définir la probabilité dans un espace continu. On reconnaît là la difficulté soulevée par Bertrand à propos des problèmes où l'on choisit « au hasard » parmi un nombre infini de possibles, autrement dit où l'on prétend calculer une probabilité lorsque l'ensemble des causes possibles est infini. Poincaré était-il conscient, en 1890, de cette faiblesse de son corollaire exprimé en termes probabilistes, sans savoir alors comment y remédier ? S'en est-il rendu compte seulement après le marathon qu'a représenté la correction du mémoire ? A-t-il eu connaissance indirectement des travaux de von Kries, qui lui auraient inspiré cette addition ? Dans tous les cas, la précision est présentée comme une réponse à la problématique ouverte par les paradoxes de Bertrand. Autrement dit, la réflexion de Poincaré sur le calcul des probabilités, stimulée par l'utilisation qu'il est conduit à en faire à la suite de l'erreur découverte dans son mémoire de 1889, s'appuie certainement, dès 1890-1891, sur une étude de ces paradoxes.

Cette réflexion, qui se manifeste d'abord à propos du corollaire du théorème de récurrence, conduit Poincaré à remarquer, dans son ouvrage de calcul des probabilités, une classe d'événements particuliers. Il s'agit des évènements dont la probabilité ne dépend pas de la loi de probabilité choisie. Après avoir donné de nombreux exemples pour montrer comment la loi se transforme lors d'un changement de variable, Poincaré conclut en rappelant l'importance du choix initial de cette loi. Il souligne alors l'existence de problèmes qui n'en dépendent pas. Il donne donc suite, dans son ouvrage sur les probabilités, à la remarque qu'il a faite à partir de 1891 selon laquelle le caractère exceptionnel des trajectoires non récurrentes ne dépend pas de la loi de probabilité.

> De tout ce qui précède, il résulte *qu'il faut apporter un très grand soin à définir le choix de la loi de probabilité qu'on adopte.*
>
> La probabilité pour que x soit compris entre x_0 et x_1 s'exprime par une intégrale
> $$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)dx;$$
> $\varphi(x)$ sera une fonction sur laquelle nous devrons faire des hypothèses pour connaître la loi de probabilité, mais, en général, on sera conduit à regarder $\varphi(x)$ comme continue.
>
> En général, la probabilité pour que x satisfasse à une condition donnée dépendra du choix de φ ; cependant, il n'en est pas toujours ainsi, et *certains problèmes sont indépendants de la loi de probabilité.*
>
> *Exemple.* — La probabilité pour que x soit incommensurable sera toujours égale à 1, quelle que soit la fonction continue φ que l'on choisisse, et celle pour que x soit commensurable, toujours infiniment petite.[79]

[79][Poincaré 1896a], leçon n°X ; p. 147–148 dans l'édition de 1912. On peut reconnaître dans

Après l'exemple des rationnels et des irrationnels, Poincaré présente deux autres exemples de tels évènements. Tout d'abord le problème qui avait été étudié par von Kries : « Soit une roue divisée en un très grand nombre de parties égales, alternativement rouges et noires ; imprimons-lui une rotation rapide. Lorsqu'elle s'arrêtera, une des divisions se trouvera en regard d'un point de repère fixe : quelle est la probabilité pour que cette division soit rouge ou noire ? » [Poincaré 1896a, p. 148] L'analyse de Poincaré est mathématiquement plus précise que celle de von Kries. Poincaré montre que la probabilité s'approche de $\frac{1}{2}$ pour chaque couleur lorsque le nombre des divisions augmente indéfiniment, sous l'hypothèse que la densité de probabilité a une dérivée bornée. Le second problème est inspiré de la mécanique céleste : « Considérons un grand nombre de *planètes*, dont les orbites soient sensiblement circulaires. [...] Je dis qu'au bout d'un temps très long les planètes seront également distribuées dans tous les signes du zodiaque. La probabilité pour que l [la longitude] soit comprise entre des limites données sera donc indépendante de φ [la densité de probabilité]. » [Poincaré 1896a, p. 150–151] Ainsi, la méthode des fonctions arbitraires apparaît dans l'ouvrage de Poincaré en lien avec la mécanique céleste, et peut permettre d'y justifier l'usage des probabilités, contrairement à l'attitude adoptée par Bertrand. Le raisonnement que je viens de citer permet en effet de légitimer l'adoption de la loi uniforme sur la distribution de ces planètes : quelle que soit la loi initiale, au bout d'un temps suffisamment long, les planètes seront distribuées suivant une loi uniforme.

3.6 Conclusion

En 1890, Poincaré introduit un énoncé d'un type nouveau, grâce auquel il formule mathématiquement la remarque qu'il faisait précédemment en des termes qui restaient vagues : « les trajectoires qui jouissent de cette propriété [de stabilité, AR] sont plus générales que celles qui n'en jouissent pas. » La découverte d'une erreur qui remet en cause une partie des résultats qu'il croyait assurés en 1889 motive la recherche d'une assise mathématique à cette affirmation dont l'importance devient cruciale. Ainsi, cette construction n'est pas recherchée pour elle-même, mais vient répondre à un besoin.

Le problème mathématique qui est en jeu diffère profondément de celui du mémoire *Sur les courbes*. Dans ce texte, Poincaré pouvait classifier les points singuliers en différents cas à l'aide de conditions sur leur définition. Ces conditions permettaient dans le même temps de désigner les cas et de les ordonner suivant leur degré de généralité. Les cas les plus particuliers étaient reconnus comme tels à la seule vue de leur caractérisation. Dans le problème qu'étudie Poincaré en 1890, au contraire, les trajectoires récurrentes et celles qui ne le sont pas ne peuvent pas être désignées, Poincaré prouve seulement leur existence. Pour montrer que les trajectoires non récurrentes sont exceptionnelles, il lui faut donc employer d'autres outils.

C'est vers le calcul des probabilités que Poincaré se tourne pour répondre à cette nouvelle question. Cette ressource a pu lui être suggérée par diverses lectures, en particulier de Bertrand et Gyldén. Mais il ne s'agit pas d'un instrument tout prêt pour répondre aux besoins de Poincaré. Notre auteur l'adapte à son

la dernière remarque, quoique de façon très embryonnaire, une annonce des ensembles de mesure nulle qui seront étudiés par Borel et Lebesgue.

objet et le développe en fonction de ses exigences. Alors que Gyldén travaillait sur un problème numérique en calculant des moyennes, Poincaré s'appuie sur les estimations de volume qui sont au cœur de sa démonstration du théorème de récurrence, et réinterprète le volume comme mesurant la probabilité. Il fait sienne l'exigence de rigueur qui conduisait Bertrand à mettre en avant ses paradoxes, mais il travaille pour les résoudre et mettre à l'abri des doutes son usage des probabilités.

De la sorte, le travail de correction de son premier mémoire s'accompagne d'une réflexion sur les concepts probabilistes qu'il introduit à cette occasion. Poincaré élabore à ce moment une approche personnelle des probabilités que l'on retrouve dans son cours à la Sorbonne quelques années plus tard. L'étude des trajectoires récurrentes est en particulier à l'origine de la méthode des fonctions arbitraires.

Chapitre 4

Divers modes d'articulation entre général et particulier : l'article sur les géodésiques des surfaces convexes (1905)

Nous nous sommes intéressés dans les deux premiers chapitres à un aspect très spécifique de l'opposition entre ce qui est général et ce qui est particulier. Il s'agissait de voir comment Poincaré isole des cas plus particuliers, dégénérés, exceptionnels, qui font défaut à un résultat sans remettre en cause sa portée générale. Dans l'article que je propose d'examiner maintenant, on retrouve cette problématique, dans la continuité avec la hiérarchisation des cas mise en évidence dans le premier chapitre. Mais dans son étude des géodésiques des surfaces convexes, Poincaré met en œuvre d'autres modes d'interaction entre différents cas. Nous allons voir qu'une circonstance très particulière peut également être mobilisée en vue d'un résultat général[1].

Dans son mémoire *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes* [1905c], Poincaré donne deux démonstrations de l'existence d'une géodésique fermée sans point double sur toute surface convexe. La première consiste à prouver un résultat un peu plus précis :

Théorème 2. *Sur une surface convexe quelconque, il y a toujours au moins une géodésique fermée sans point double et il y en a toujours un nombre impair.*[2]

C'est cette première démonstration[3] que j'étudierai plus particulièrement[4]. Je la désignerai ici comme *la* démonstration du théorème 2.

[1]Ce chapitre reprend, en l'augmentant grâce aux apports du chapitre 2, l'étude que j'ai publiée dans la *Revue d'histoire des mathématiques* [Robadey 2004].

[2]C'est moi qui donne à ce résultat le titre de théorème. Dans l'article de Poincaré, ce résultat est seulement énoncé, dans un paragraphe séparé et en italique, à la fin de la démonstration.

[3]Le lecteur est bien sûr invité à consulter le texte de Poincaré ; cependant, j'en exposerai dans le corps de mon texte les points clefs sur lesquels s'appuie mon commentaire. Les annexes B.1 et B.2 discutent certaines inexactitudes, explicitent les points de la démonstration de Poincaré qui sont insuffisants, et montrent comment y remédier.

[4]C'est la partie la moins connue de l'article de Poincaré : la deuxième démonstration a,

Il sera par ailleurs utile pour le lecteur d'avoir une idée, ne serait-ce que très schématique, du plan de l'article de Poincaré : après une introduction, Poincaré consacre la section 2 à une étude géométrique des géodésiques, d'inspiration assez traditionnelle ; les sections 3 et 4 contiennent la démonstration du théorème 2 ; les propriétés des géodésiques dont on vient de prouver l'existence sont explorées dans les parties 5 et 6 ; dans les sections 7 et 8 enfin, on trouve la deuxième démonstration d'existence et ses conséquences.

Nous verrons qu'il est nécessaire, pour comprendre la portée de la démonstration de Poincaré, de dégager le contexte de cette étude des géodésiques. Dans la section des *Œuvres* consacrée aux travaux de Poincaré en géométrie, le mémoire de 1905 apparaît très isolé. Mais nous allons voir qu'en approfondissant la lecture de la démonstration du théorème 2, on met au jour des relations complexes entre le problème des géodésiques *stricto sensu*, qui constitue le sujet immédiat de l'article, et tout le travail de Poincaré sur les solutions périodiques en mécanique céleste. Pour cela, je m'appuierai principalement sur le chapitre III des *Méthodes nouvelles* [Poincaré 1892–1899], qui reprend des résultats exposés peu de temps avant dans les mémoires *Sur le problème des trois corps*, [Pa] et [Pb] (voir 2.6.2).

Cette mise en contexte révèle que le travail sur les géodésiques s'appuie implicitement sur une hiérarchisation des cas établie par Poincaré dans ses travaux de mécanique céleste. Ainsi, le théorème 2 vaut pour une surface convexe suffisamment générale, et non pour toute surface.

Ce point fait ressortir une étrangeté dans le processus de démonstration adopté par Poincaré. Notre auteur étudie les géodésiques des surfaces proches de la sphère et utilise le résultat qu'il obtient dans une étape cruciale de la démonstration. Or la sphère relève d'un cas très particulier au regard de la gradation qui sous-tend la démonstration, et Poincaré aurait pu utiliser plutôt une surface non dégénérée, un ellipsoïde par exemple. Ce choix surprenant nous amènera à faire apparaître un autre lien de cet article avec le travail de Poincaré en mécanique céleste. Le problème des géodésiques est un cas particulier d'étude de système d'équations différentielles. Mais Poincaré ne se contente pas de lui appliquer des résultats ou des méthodes établis en mécanique céleste, comme une simple rentabilisation d'un outil puissant. La façon dont il rédige ce mémoire montre que la question des géodésiques y est abordée comme un exemple sur lequel appliquer une méthode ébauchée dans les *Méthodes nouvelles*, afin de la développer d'une façon qui pourra s'étendre à d'autres problèmes. Le lien n'est pas univoque, avec un simple transfert de méthode d'un domaine à un autre, mais réciproque. La théorie développée en mécanique céleste donne une méthode d'attaque de la question des géodésiques. Et celle-ci à son tour est utilisée comme un paradigme grâce auquel Poincaré développe plusieurs points

semble-t-il, été beaucoup plus lue. Elle a du moins donné lieu à de nombreuses reprises cherchant à la rendre rigoureuse selon les critères des époques traversées. C'est finalement Croke en 1982 qui a donné une démonstration que personne n'a plus contestée depuis [Croke 1982]. Une nouvelle démonstration, plus simple, a été donnée par J. Hass et F. Morgan plus récemment [1996] ; il suffit de lire l'introduction de ce dernier article pour constater que même après la démonstration donnée par Croke l'intérêt pour ce problème ne s'est pas éteint : plusieurs autres démonstrations, plus ou moins générales, et mettant en œuvre des méthodes diverses, avaient été proposées dans l'intervalle. Le développement de la théorie des surfaces minimales, qui généralise la théorie des géodésiques en dimension supérieure, est une motivation importante pour les étudier et rechercher de nouvelles démonstrations susceptibles de mieux se généraliser.

seulement esquissés dans les *Méthodes nouvelles*.

À travers le problème particulier des géodésiques, c'est donc une méthode de portée plus générale que Poincaré expose ici. Nous verrons que le choix du cas très particulier de la sphère est lié à cette autre modalité de la recherche de généralité.

Dans le même temps, cette mise en contexte nous permettra de faire apparaître l'unité du texte de 1905. Ce dernier est en effet composé de plusieurs morceaux qui font appel à des techniques au premier abord très diverses, et seul paraît les lier leur sujet commun, l'étude des géodésiques des surfaces convexes.

Cette étude de cas ayant mis en évidence que l'article de Poincaré a une validité plus large que le seul problème des géodésiques explicitement étudié, je m'intéresserai dans un deuxième temps plus spécifiquement à ce mode d'écriture mathématique. J'en dégagerai certaines caractéristiques, à l'aide de ce mémoire de Poincaré, mais dans une perspective plus large. Deux points retiendront principalement mon attention. Il s'agit d'abord de l'utilisation du contexte géométrique fourni par les géodésiques pour interpréter les étapes successives de la méthode suggérée par la mécanique céleste, c'est-à-dire du cadre d'interprétation qu'offre l'utilisation d'un paradigme par opposition à une présentation plus abstraite dans le seul contexte de la mécanique céleste. D'autre part, nous verrons que ce mode de présentation choisi par Poincaré fait écho à la description qu'il donne dans ses œuvres philosophiques du travail du mathématicien, ainsi qu'à d'autres spécificités de son écriture mathématique.

4.1 L'article sur les géodésiques et ses liens complexes avec la mécanique céleste

Commençons par présenter la démonstration du théorème 2, en suivant le texte de 1905. Derrière cette première lecture s'en cachent beaucoup d'autres, qui seront déployées dans la suite de l'étude, au fur et à mesure de l'explicitation des liens qu'entretient cet article de Poincaré avec ses travaux de mécanique céleste.

4.1.1 Présentation de la démonstration

La démonstration proposée par Poincaré se compose de deux parties distinctes, dont je vais indiquer succinctement les grandes lignes. Je me limiterai ici à ce qui est nécessaire pour comprendre les niveaux de lecture successifs que je proposerai ensuite.

Géodésiques d'un sphéroïde

La première partie de la démonstration[5] établit le théorème 1 pour les surfaces suffisamment proches de la sphère, auxquelles Poincaré donne le nom de

[5]Elle correspond à la section 3, intitulée *Géodésiques d'un sphéroïde*, dans l'article de Poincaré.

sphéroïdes. Il s'agit d'étudier ce que deviennent les géodésiques de la sphère, qui sont toutes fermées[6], lorsqu'on déforme très peu la sphère.

Nous qualifierions donc aujourd'hui cette étude de « locale » à deux titres : la surface considérée doit être proche de la sphère, et les géodésiques fermées sont cherchées au voisinage des géodésiques — fermées — de la sphère[7]. Dans la suite, je parlerai parfois de « l'étude locale » ou du « résultat local » pour désigner cette première partie de la démonstration.

En suivant d'aussi près que possible les termes de Poincaré, ce premier résultat s'énoncerait ainsi : *sur un sphéroïde, le nombre de géodésiques fermées qui subsistent quelque petite que soit la déformation de la sphère est impair.*

Poincaré représente la déformation de la sphère comme une famille analytique de sphéroïdes paramétrée par un réel μ, de telle façon qu'on obtienne la sphère lorsque $\mu = 0$. Il travaille d'abord au premier ordre par rapport à μ, c'est-à-dire qu'il étudie le problème linéarisé. Son objectif est de caractériser les géodésiques fermées qui persistent lorsque μ n'est plus nul.

Il met en œuvre dans ce but une méthode inspirée explicitement par la méthode de variation des constantes de Lagrange[8] pour l'étude de la trajectoire d'une planète sous l'effet des perturbations dues aux autres planètes. Elle consiste à choisir un système de coordonnées particulier, lié à la dynamique non perturbée.

Lorsqu'une planète est seule autour du soleil, elle parcourt une ellipse képlérienne. Cette orbite elliptique peut être décrite par des *éléments elliptiques* : l'excentricité, l'inclinaison sur le plan de l'écliptique, etc. Une dernière coordonnée repère la position de la planète sur l'ellipse ainsi caractérisée.

Si l'on tient compte de l'attraction d'une autre planète (ou de plusieurs), le mouvement est modifié, mais faiblement : les masses des planètes perturbatrices sont très petites devant celle du soleil. Ainsi, la façon la plus pratique de décrire le mouvement perturbé est de considérer que la planète décrit encore une orbite elliptique, mais que cette orbite varie lentement au cours du temps. On étudie donc les variations des éléments elliptiques définissant cette orbite en fonction du temps. À un instant t donné, les éléments elliptiques repèrent l'ellipse que décrirait la planète étudiée si l'on supprimait à cet instant l'influence des autres planètes.

---

[6]Dans tout ce qui suit, on considère des surfaces plongées dans l'espace euclidien, munies de la métrique induite. On appelle sphère l'ensemble des points à distance fixée de l'origine. Les géodésiques de la sphère sont donc les grands cercles.

[7]Poincaré précise, à la fin de la démonstration, que son résultat concerne seulement les géodésiques « qui subsistent quelque petit[e] que soit » la déformation de la sphère. Lorsqu'il utilise le résultat de l'étude locale dans la section suivante, c'est dans le contexte des géodésiques fermées sans point double, précision absente de l'étude locale, sinon dans cette remarque finale. Or les géodésiques de la sphère sont sans point double, et Poincaré montre dans la deuxième partie de la démonstration que le nombre de points doubles ne peut pas changer quand on suit une géodésique fermée au cours d'une déformation. La remarque sur les géodésiques fermées « qui subsistent quelque petit[e] que soit » la déformation est donc sans doute la justification, aux yeux de Poincaré, de l'utilisation du résultat de la partie locale dans le cadre de l'étude des géodésiques *sans point double*.

[8]Il s'agit d'une méthode classique en mécanique céleste, utilisée par Lagrange (voir par exemple [Lagrange 1776]), et associée ensuite à son nom. On en trouve une présentation détaillée dans les *Leçons de mécanique céleste* de Poincaré, [Poincaré 1905b].

Par analogie, Poincaré étudie les géodésiques d'une surface proche de la sphère comme des perturbations des grands cercles de la sphère. Il introduit par conséquent des « éléments de l'orbite osculatrice »[9] qui caractérisent le mouvement d'un point à la façon dont les éléments elliptiques repèrent le mouvement képlérien d'une planète dans la méthode de Lagrange.

Comme les géodésiques de la sphère sont les grands cercles parcourus à vitesse constante, il adopte les coordonnées position–vitesse (ou *éléments de l'orbite osculatrice* ; voir figure 4.1) suivantes sur la sphère :

θ, longitude du nœud[10] N de l'orbite circulaire décrite par le point considéré si on le laisse se mouvoir sans contrainte avec la vitesse initiale considérée ;

i, inclinaison de cette orbite sur l'équateur ;

λ, distance du point au nœud sur l'orbite ;

ω, vitesse de circulation sur l'orbite.

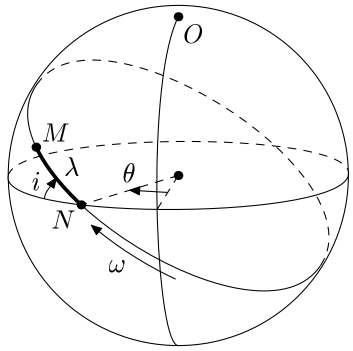

FIG. 4.1 – Nouvelles coordonnées définies par analogie avec les éléments elliptiques de la méthode de Lagrange.

Lorsque μ est nul, les solutions des équations des géodésiques sont, dans ces coordonnées : $i = i_0$; $\theta = \theta_0$; $\omega = \omega_0$; et $\lambda = \omega_0 t$. On peut donc prendre λ comme variable à la place du temps. Lorsque μ n'est plus nul, la méthode de Lagrange consiste à considérer que i et θ varient lentement par rapport à la variable λ (la propriété de conservation de l'énergie permet de se débarrasser de la variable ω).

Grâce à cette description du problème, et en négligeant les quantités d'ordre supérieur à 2 en μ, Poincaré montre que les géodésiques fermées qui subsistent pour μ non nul correspondent aux couples (i_0, θ_0) qui sont des points critiques d'une fonction $R(i, \theta)$. Un renvoi au chapitre III des *Méthodes nouvelles* lui permet ensuite de justifier le passage de l'étude linéarisée (*i.e.* au premier ordre en μ) au résultat pour μ suffisamment petit. Il utilise enfin un résultat d'*Analysis Situs* qu'il a établi dans le mémoire *Sur les courbes* [Poincaré 1881a, p. 29] pour conclure que ces géodésiques sont en nombre impair.

[9]Poincaré utilise donc ici le même vocabulaire qu'en mécanique céleste, comme on peut le voir par exemple dans sa présentation de la méthode de Lagrange, *Leçons de Mécanique Céleste* [Poincaré 1905b, p. 90ss].

[10]Le nœud est l'intersection avec l'équateur.

Le principe de continuité analytique

Dans la deuxième partie, Poincaré, quoique sans renvoyer aux *Méthodes nouvelles*, suit de très près une argumentation qu'il y développait déjà. Elle consiste à montrer que la parité du nombre de géodésiques fermées sans point double est constante lorsqu'on déforme progressivement (et analytiquement) une surface convexe. Cette ligne directrice est annoncée par le titre que Poincaré donne à cette section de son article : « Le principe de continuité analytique ».

L'étude ne se restreint donc plus aux surfaces suffisamment proches de la sphère. Poincaré considère au contraire une surface convexe quelconque Σ_1, et une famille analytique de surfaces Σ_t reliant Σ_1 à un sphéroïde Σ_0. Le résultat local précédent s'applique donc à Σ_0. Poincaré montre que l'ensemble des géodésiques fermées sur les surfaces Σ_t (où t varie entre 0 et 1) forme une courbe analytique $\mathcal{C}$ dans un espace de paramètres convenablement choisi, dont l'intervalle de variation de t forme une dimension (voir figure 4.2).

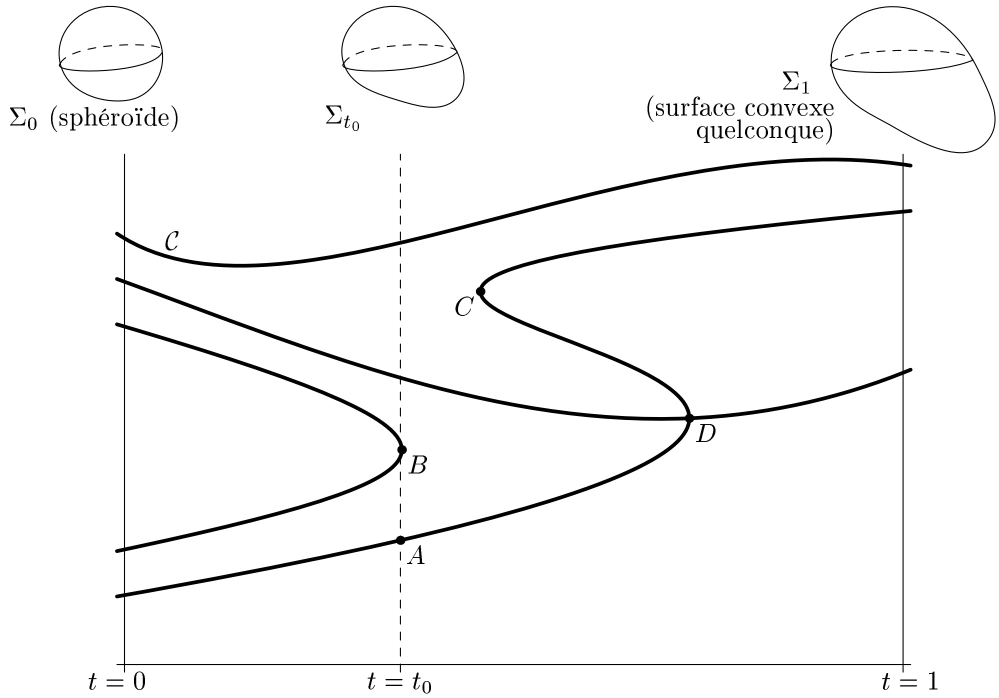

FIG. 4.2 – Courbe analytique $\mathcal{C}$ représentant les géodésiques fermées sans point double sur les surfaces de la famille Σ_t.

Poincaré explique enfin que la situation est celle que nous pouvons résumer[11] par la figure 4.2 : pour une branche donnée de la courbe analytique $\mathcal{C}$, au voi-

[11] Poincaré ne fait pas de figure. Voir l'annexe B.2 pour les problèmes posés par la définition de la courbe $\mathcal{C}$. Ma figure est très optimiste : la courbe $\mathcal{C}$ peut présenter des points de rebroussement (comme ceux représentés à droite sur la figure 4.3), et les différentes branches de courbes peuvent se recouper y compris en de tels points. La démonstration de Poincaré inclut toutes ces éventualités. Je discute en annexe des cas encore plus particuliers qui pourraient se produire, que Poincaré ne prend pas explicitement en compte (voir aussi 4.1.4).

sinage d'un de ses points d'abscisse t_0, il y a seulement deux comportements qualitatifs possibles. Soit la branche de courbe présente un point pour chaque valeur de t (comme au voisinage du point A de la figure 4.2), soit il y a deux tels points pour les valeurs de t inférieures à t_0, qui se confondent en un seul en t_0 (comme en B), puis disparaissent pour les valeurs supérieures à t_0, ou l'inverse (comme en C). En D, deux branches distinctes de la courbe $\mathcal{C}$ se coupent. Ainsi, les géodésiques fermées d'une branche apparaissent et disparaissent par couples. Autrement dit, la parité du nombre de géodésiques appartenant à une même branche de la courbe $\mathcal{C}$ reste constante lorsque t varie.

Il reste, pour obtenir un résultat sur les géodésiques *sans point double*, à étudier quels types de géodésiques on peut rencontrer sur la même branche de la courbe $\mathcal{C}$. Poincaré montre que le nombre de points doubles ne varie pas lorsqu'on suit une branche de $\mathcal{C}$. Ceci lui permet de conclure, comme nous l'avons annoncé, que si l'on considère seulement les branches de $\mathcal{C}$ correspondant aux géodésiques sans point double, on a la situation résumée par la figure 4.2. Il en conclut que leur nombre est de parité constante ; l'étude précédente a montré que les géodésiques fermées sans point double sont en nombre impair sur un sphéroïde, elles sont donc en nombre impair sur une surface convexe quelconque [Poincaré 1905c, p. 60].

4.1.2 L'origine, dans la mécanique céleste, de la problématique de l'étude des géodésiques

À plusieurs reprises dans son article, Poincaré fait référence à ses travaux de mécanique céleste. Dès l'introduction [Poincaré 1905c, p. 38], ils sont présentés comme une motivation de l'ensemble du mémoire.

L'étude des géodésiques sur les surfaces constitue en effet le problème le plus simple qui s'apparente au problème des trois corps. Poincaré dit de ce dernier : « à côté de la difficulté principale, celle qui tient au fond même des choses, il y a une foule de difficultés secondaires qui viennent compliquer encore la tâche du chercheur. » Le problème des lignes géodésiques en revanche « est encore un problème de dynamique, de sorte que la difficulté principale subsiste ; mais c'est le plus simple de tous les problèmes de dynamique ; d'abord il n'y a que deux degrés de liberté, et puis, si l'on prend une surface sans point singulier, on n'a rien de comparable avec la difficulté que l'on rencontre dans les problèmes de dynamique aux points où la vitesse est nulle ; dans le problème des lignes géodésiques, en effet, la vitesse est constante et peut être regardée comme une donnée de la question. » [Poincaré 1905c, p. 38–39]

Poincaré justifie enfin son choix d'étudier les géodésiques sur les surfaces *convexes*, par le fait qu'elles ressemblent plus aux trajectoires de la mécanique céleste que celles des surfaces à courbures opposées étudiées par Hadamard [1898] :

> [...] ce n'est pas aux géodésiques des surfaces à courbures opposées que les trajectoires du problème des trois corps sont comparables ; c'est, au contraire, aux géodésiques des surfaces convexes.
>
> J'ai donc abordé l'étude des lignes géodésiques des surfaces convexes ; [...]
> [Poincaré 1905c, p. 39]

Dans la première partie de la démonstration, ensuite, il fait référence explicitement au chapitre III des *Méthodes nouvelles*, afin de justifier le passage de l'étude linéarisée au résultat local. En réalité, ce chapitre des *Méthodes nouvelles* consacré à l'étude des solutions périodiques est loin d'être seulement une référence utile pour compléter un point technique d'une partie de la démonstration de 1905. Nous allons voir qu'il inspire la preuve dans son ensemble.

Le contexte de la mécanique céleste permet par ailleurs de rendre compte d'une deuxième particularité de la problématique adoptée, à savoir l'étude des géodésiques *fermées*.

Hadamard avait déjà effleuré une problématique proche dans l'article évoqué. Il avait entrepris une classification et une étude des géodésiques en fonction de leurs caractéristiques topologiques[12], ce qui l'avait amené à étudier *entre autres* les géodésiques fermées.

Mais c'est bien la mécanique céleste, et non la topologie[13], qui donne le bon contexte pour comprendre l'attention portée par Poincaré en 1905 aux *seules* géodésiques fermées. En effet, en mécanique céleste, Poincaré avait exprimé non seulement le souci — repris par Hadamard — d'étudier *qualitativement* les solutions des équations, mais plus précisément la conviction que l'étude des solutions *périodiques* est d'une importance toute particulière. Il écrivait à ce propos, dans l'introduction au chapitre III des *Méthodes nouvelles* :

> Il semble d'abord que ce fait [l'existence de solutions périodiques] ne puisse être d'aucun intérêt pour la pratique. En effet, il y a une probabilité nulle pour que les conditions initiales du mouvement soient précisément celles qui correspondent à une solution périodique. Mais il peut arriver qu'elles en diffèrent très peu, et cela a lieu justement dans les cas où les méthodes anciennes ne sont plus applicables. On peut alors avec avantage prendre la solution périodique comme première approximation, comme *orbite intermédiaire*, pour employer le langage de M. Gyldén.[14]
>
> Il y a même plus : voici un fait que je n'ai pu démontrer rigoureusement, mais qui me paraît pourtant très vraisemblable.
>
> Étant données des équations de la forme[15] définie dans le numéro 13 et une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on

[12] Il attribuait d'ailleurs à Poincaré la paternité de la problématique, en se référant à l'insistance de celui-ci pour l'étude *qualitative* des solutions d'équations différentielles.

[13] La topologie — le terme employé par Poincaré est *Analysis situs* — est également employée dans ce mémoire, mais de façon moins centrale (voir p. 200). Là n'est pas la motivation de l'étude des géodésiques *fermées*.

[14] Poincaré reprend dans ce premier paragraphe une remarque qu'il faisait déjà, presque dans les mêmes termes, en conclusion de l'un de ses premiers mémoires de mécanique céleste, en 1884 [Poincaré 1884]. Voir 3.4.1. (AR)

[15] Poincaré considérait dans ce paragraphe 13 des équations sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \frac{dF}{dy_i}; \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{dF}{dx_i}. \tag{4.1}$$

(AR)

> le veut[16]. D'ailleurs, ce qui rend ces solutions périodiques aussi précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable. [Poincaré 1892–1899, t. I, p. 82]

Cette insistance particulière sur les trajectoires périodiques se traduit par l'étude exclusive, dans l'article de 1905, des géodésiques fermées et de leurs propriétés, à la différence de ce que faisait Hadamard.

Les géodésiques périodiques n'apparaissent donc plus comme l'un des types topologiques de géodésiques, mais comme *le* type de géodésiques qui offre une première prise à l'étude de la dynamique. Ceci signale clairement une problématique issue des travaux de Poincaré en mécanique céleste, qui oriente son approche de la question des géodésiques sur les surfaces convexes.

Le problème des géodésiques est donc présenté par Poincaré comme une sorte de cas particulier dont l'étude est utile à une meilleure compréhension des phénomènes dynamiques. Ceci le conduit à s'intéresser au problème des géodésiques *fermées* sur les surfaces *convexes*.

4.1.3 La continuité entre la mécanique céleste et la démonstration de 1905

L'influence de la mécanique céleste sur le travail de 1905 ne s'arrête pas là. La première partie de la démonstration est également marquée par la mécanique céleste de façon très visible : d'abord par l'utilisation de l'analogie avec la méthode de Lagrange, puis par le renvoi explicite au chapitre III des *Méthodes nouvelles* pour justifier le passage de l'étude linéarisée au résultat local. Mais on peut montrer que le lien est encore plus profond.

Il nous faut pour cela examiner les « principes exposés dans le chapitre III du tome 1 de [s]on ouvrage, *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* » [Poincaré 1905c, p. 54], auxquels Poincaré renvoie au cours de la première partie de la démonstration de 1905. Ceci nous permettra de préciser les rapports entre ce chapitre des *Méthodes nouvelles* et chacune des deux parties de la démonstration qui nous intéresse. Nous découvrirons ainsi que la mécanique céleste exerce une influence plus déterminante que ne le laissent paraître, à première lecture, l'analogie avec la méthode de Lagrange et le renvoi ponctuel aux *Méthodes nouvelles* pour complément de justification. C'est en effet la démonstration entière qui reprend les principes exposés dans les *Méthodes nouvelles* au chapitre III, tandis que la méthode de Lagrange n'est qu'un outil utile pour une des étapes.

Ce chapitre des *Méthodes nouvelles* est celui où Poincaré s'intéresse aux solutions périodiques d'équations différentielles. Il y reprend les recherches qu'il avait engagées dans ses mémoires *Sur le problème des trois corps*, et que nous avons étudiées à la fin du premier chapitre (2.6.2). J'ai surtout souligné, alors, comment Poincaré étudie des « cas » de plus en plus particuliers, à l'image de la hiérarchisation qu'il avait mise en place dans le mémoire *Sur les courbes*. Nous allons maintenant regarder de plus près le contenu de l'étude des différents cas, pour en reconnaître les similarités avec la démonstration de 1905.

[16] Poincaré reprend ici la conjecture sur la densité des trajectoires périodiques dont il a déjà été question plus haut (voir 3.2.2). (AR)

Après une introduction où Poincaré précise ce qu'il appelle solutions périodiques, le chapitre III des *Méthodes nouvelles* est consacré au problème suivant :

> Supposons que, dans les équations $[\frac{dx_i}{dt} = X_i]$, les fonctions X_i dépendent d'un certain paramètre μ ; supposons que dans le cas $\mu = 0$ on ait pu intégrer les équations, et qu'on ait reconnu ainsi l'existence d'un certain nombre de solutions périodiques. Dans quelles conditions aura-t-on le droit d'en conclure que les équations comportent encore des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ ? [Poincaré 1892–1899, t. I, p. 81]

Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que la formulation est extrêmement proche du problème que traite Poincaré dans la première partie, pour les sphéroïdes. Jusque dans le choix des notations, le problème est posé de façon similaire. Poincaré considère en effet dans cette première partie de la démonstration de 1905 une famille de surfaces paramétrée par un réel μ, ce qui se traduit par le fait que les équations des géodésiques sont exactement sous la forme considérée dans les *Méthodes nouvelles*. Dans le cas $\mu = 0$, on sait intégrer ces équations : les solutions sont les géodésiques de la sphère, qui sont les grands cercles, c'est-à-dire des solutions périodiques. On cherche à savoir si les équations possèdent encore des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ, c'est-à-dire s'il existe encore des géodésiques fermées sur les sphéroïdes paramétrés par ces valeurs de μ.

Poursuivons la lecture du chapitre III des *Méthodes nouvelles*.

Poincaré considère donc des équations $\frac{dx_i}{dt} = X_i$ où les X_i sont fonctions des x_i, de μ, et périodiques[17] de période 2π par rapport au temps t. Il fait l'hypothèse que, pour $\mu = 0$, ces équations admettent une solution périodique de période 2π, $x_i = \varphi_i$, où $\varphi_i(2\pi) = \varphi_i(0)$.

Il définit ensuite les fonctions ψ_i par la propriété que la solution valant $\varphi_i(0) + \beta_i$ pour $t = 0$ vaut $\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i$ pour $t = 2\pi$. D'après le théorème de régularité par rapport aux paramètres des solutions d'équations différentielles que Poincaré a démontré auparavant, les ψ_i sont des fonctions analytiques de μ et des β_i.

Or, vu la définition, les fonctions $\psi_i(\beta_1, ..., \beta_n, \mu)$ mesurent en quelque sorte le défaut de périodicité de la solution de conditions initiales $(\varphi_i(0) + \beta_i)_i$. Ainsi les ψ_i sont nulles en $\mu = \beta_i = 0$, puisque, par hypothèse, $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ est une solution périodique des équations pour $\mu = 0$. Et la condition pour que les équations comportent encore une solution périodique lorsque μ n'est plus nul est qu'on puisse trouver $\beta_1, ..., \beta_n$ tels que $\{\psi_i(\beta_1, ..., \beta_n, \mu) = 0\}_{i=1...n}$.

Ceci ramène donc le problème à l'application du théorème des fonctions implicites.

Ce théorème s'applique dans sa forme usuelle lorsque le déterminant fonctionnel (ou jacobien) des ψ_i est non nul. En pareil cas, il existe une fonction continue qui à chaque valeur de μ proche de 0 associe les valeurs des β_i qui correspondent aux conditions initiales d'une solution périodique. La condition

[17] Dans un deuxième temps, Poincaré traite le cas où les X_i ne dépendent pas du temps, comme c'est le cas pour les géodésiques. Ce cas est légèrement plus compliqué, mais à part quelques aménagements, l'analyse de Poincaré dans les *Méthodes nouvelles* se développe de façon parallèle dans les deux cas. J'ai donc choisi de présenter les grandes lignes de cette analyse dans le cas le plus simple, c'est-à-dire dans le cas dépendant du temps.

de non nullité du déterminant fonctionnel peut également être traduite par le fait que les équations $\psi_i = 0$ admettent pour $\mu = 0$ le système $\beta_i = 0$ comme solution *simple*.

Dans le chapitre II des *Méthodes nouvelles*, Poincaré avait donné une démonstration du théorème des fonctions implicites, d'abord sous sa forme habituelle, puis sous une forme raffinée qui permet de traiter également certains cas où le déterminant fonctionnel dont il est question ci-dessus est nul, c'est-à-dire où la solution connue pour $\mu = 0$ n'est pas simple.

Si donc on a pour $\mu = 0$ une solution d'ordre m supérieur à 2 mais fini, selon la parité de m, on est dans l'un des deux cas suivants, représentés sur la figure 4.3 (les figures de droite sont des cas encore un peu plus particuliers, mais aussi bien pris en compte par la méthode de Poincaré) : si m est impair, il y a une solution pour chaque valeur suffisamment petite de μ, comme dans le cas où le déterminant est non nul ; si m est pair, il y a deux solutions pour $\mu < 0$, et aucune pour $\mu > 0$, ou bien le contraire.

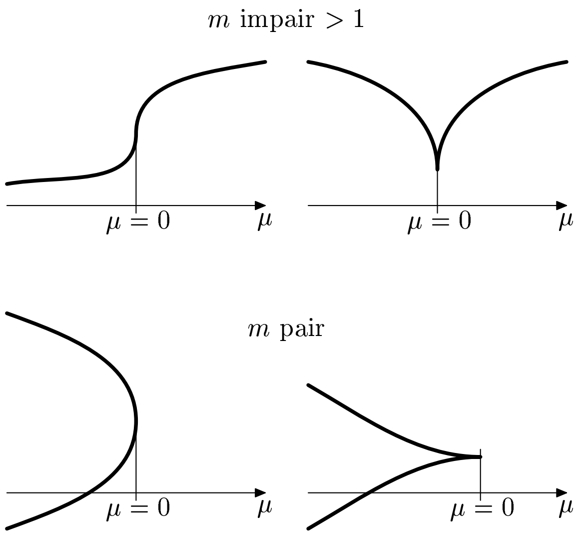

FIG. 4.3 – Cas où le déterminant fonctionnel est nul, mais où la solution reste d'ordre fini.

À ce stade de la présentation, Poincaré tire une première conclusion :

> Une solution périodique ne peut donc disparaître qu'après s'être confondue avec une autre solution périodique.
>
> En d'autres termes, *les solutions périodiques disparaissent par couples à la façon des racines réelles des équations algébriques.*
> [Poincaré 1892–1899, t. I, p. 83]

En utilisant un théorème d'élimination des variables démontré dans le chapitre précédent, Poincaré montre ensuite que les équations $\psi_i = 0$ peuvent être ramenées à une seule équation $\Phi(\beta_n, \mu) = 0$, où Φ est holomorphe et s'annule en $\beta_n = \mu = 0$. Il interprète cette équation comme celle d'une courbe analytique dans le plan des β_n et μ, et précise : « à chaque point de cette courbe correspond une solution périodique » [Poincaré 1892–1899, t. I, p. 84].

J'interromps ici pour l'instant la lecture du chapitre III des *Méthodes nouvelles*. On arrive en effet à la fin d'une unité dans le § 37, consacré aux équations dépendant du temps. La représentation d'un ensemble de solutions périodiques par une courbe analytique permet à Poincaré de ramener le problème à l'étude de la forme de cette courbe au voisinage de l'origine. Il poursuit ensuite cette étude dans plusieurs cas particuliers. Nous reviendrons sur le premier plus bas.

Dans ce que nous venons de rapporter des *Méthodes nouvelles*, nous retrouvons plusieurs éléments essentiels de la deuxième partie de la démonstration de 1905, quoique Poincaré ne renvoie pas explicitement, dans cette deuxième partie de son étude des géodésiques, à ses travaux de mécanique céleste.

En effet, l'argument donné pour justifier, dans l'article de 1905, les deux comportements qualitatifs possibles (représentés par les points A et B de notre figure 4.2) est exactement celui qu'on trouve dans le chapitre II des *Méthodes nouvelles* pour démontrer la forme raffinée du théorème des fonctions implicites dont nous avons représenté le résultat sur la figure 4.3. Cette forme du théorème des fonctions implicites est l'argument clef pour démontrer dans les *Méthodes nouvelles* que « *les solutions périodiques disparaissent par couples à la façon des racines réelles des équations algébriques.* » Et c'est également le point central de la démonstration de 1905, qui conduit à un résultat comparable : « Le nombre de ces points [les points d'intersection d'une branche de $\mathcal{C}$ avec le plan $t = t_0$ (AR)] ne peut varier que [...] de deux unités » [Poincaré 1905c, p. 56].

Outre cette similarité de l'argument de fond, nous avons vu que l'idée de représenter les solutions périodiques par une courbe dans un espace de paramètres est déjà présente, bien qu'encore assez peu développée, dans les *Méthodes nouvelles*. C'est sous cette forme que Poincaré choisit de présenter le principe de continuité par lequel il étend le résultat de parité obtenu pour le sphéroïde à toute surface convexe.

Après le passage dans lequel nous avons reconnu le principe de la deuxième partie, globale, de la démonstration de 1905, le chapitre III des *Méthodes nouvelles* se poursuit par la présentation d'un cas particulier qui va nous donner la clef de la première partie, locale, de l'étude des géodésiques :

> Un cas particulier intéressant est celui où, pour $\mu = 0$, les équations différentielles admettent une infinité de solutions périodiques.[18] [Poincaré 1892–1899, t. I, p. 84]

Pour étudier cette nouvelle situation, l'auteur des *Méthodes nouvelles* considère une famille continue de solutions périodiques, paramétrée par un réel h, donnée par des fonctions $\varphi_i(t, h)$: pour chaque valeur de h, les $x_i(t) = \varphi_i(t, h)$ sont périodiques par rapport à t et vérifient les équations $\frac{dx_i}{dt} = X_i$ lorsqu'on fait $\mu = 0$.

Dans ce cas, Poincaré montre que la courbe définie plus haut, $\Phi(\beta_n, \mu) = 0$, contient la droite $\mu = 0$, qui représente la famille de solutions existant pour

[18] La suite montre que Poincaré entend par là, non pas l'existence d'une infinité de solutions périodiques quelconques (si on admet une période arbitrairement grande, il existe toujours une infinité de géodésiques périodiques sur une surface convexe, Poincaré le remarque d'ailleurs à une autre occasion), mais l'existence d'une famille *continue* de solutions périodiques.

$\mu = 0$ (voir la figure 4.4). En d'autres termes, l'équation $\Phi = 0$ contient μ en facteur : $\Phi = \mu\Phi_1$. Pour étudier les trajectoires périodiques qui subsistent lorsque μ n'est plus nul, c'est donc l'équation $\Phi_1 = 0$ qu'il faut étudier.

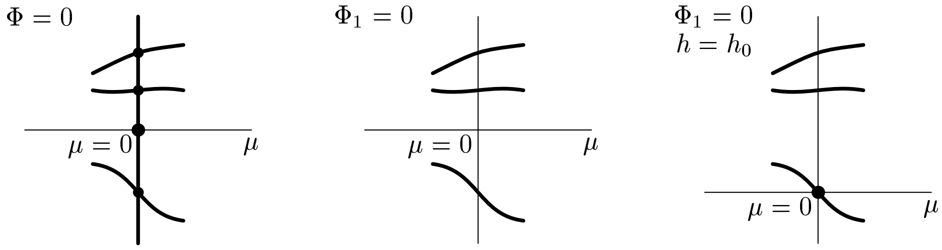

FIG. 4.4 – Les courbes $\Phi = 0$ et $\Phi_1 = 0$ dans le cas où il existe, pour $\mu = 0$, une famille de solutions périodiques. La figure de droite représente la courbe $\Phi_1 = 0$ après qu'on a choisi une valeur convenable h_0 de h.

Mais, continue Poincaré, « cette courbe $\Phi_1 = 0$ ne passe pas toujours par l'origine », contrairement à la courbe $\Phi = 0$ étudiée précédemment. Il conclut :

> *Nous devons donc avant tout disposer de la constante arbitraire h de façon que cette courbe passe par l'origine.* [Poincaré 1892–1899, t. I, p. 84]

Autrement dit, parmi les trajectoires périodiques existant pour $\mu = 0$, seules celles correspondant à certaines valeurs de h (telle h_0 qui fournit le schéma de droite de la figure 4.4) donneront une trajectoire périodique pour $\mu \neq 0$. Ce sont ces valeurs de h qu'il faut déterminer.

En s'intéressant, en 1905, aux géodésiques des sphéroïdes, Poincaré considère une situation qui relève de ce cas particulier. Sur la sphère en effet, il existe une famille continue de géodésiques fermées, puisqu'elles le sont toutes ! Plus précisément, les géodésiques fermées sont tous les grands cercles, qu'on peut paramétrer par les deux angles i et θ de la figure 4.1. Le couple (i, θ) retenu par Poincaré pour son travail correspond donc exactement au paramètre h introduit dans les *Méthodes nouvelles*. Et la première partie de la démonstration consiste justement à déterminer les valeurs à donner à ces deux paramètres i et θ pour que le grand cercle correspondant persiste sous forme d'une géodésique fermée lorsque μ n'est plus nul[19].

[19] On peut préciser ainsi la correspondance technique entre l'analyse des *Méthodes nouvelles* et la démonstration de 1905 :

Les équations [Poincaré 1905c, p. 49]

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mu}{\sin i}\frac{dS_1}{d\theta} - \mu \operatorname{cotg} i \frac{dS_1}{d\lambda} \; ; \; \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\mu}{\sin i}\frac{dS_1}{di}, \tag{4.2}$$

intégrées sur une période de λ, montrent que les ψ_i définis dans les *Méthodes nouvelles* valent ici :

$$\psi_1(i, \theta) = \frac{\mu}{\sin i}\frac{dR}{d\theta} + o(\mu) \; ; \; \psi_2(i, \theta) = -\frac{\mu}{\sin i}\frac{dR}{di} + o(\mu). \tag{4.3}$$

Si on note $\Phi = 0$ le système d'équations $\{\psi_1 = 0 \; ; \; \psi_2 = 0\}$, on reconnaît que μ est en facteur dans ces équations, si bien qu'on peut écrire $\Phi = \mu\Phi_1$, où le système d'équations $\Phi_1 = 0$

La démarche adoptée en 1905 est identique à celle que Poincaré avait déjà mise en œuvre pour traiter un autre problème du même type dans les *Méthodes nouvelles*, un peu plus loin dans le même chapitre [Poincaré 1892–1899, t. 1, § 46, p. 133–139]. Mais il considérait alors un problème qui était déjà formulé dans un système de coordonnées bien adapté, où les paramètres naturels décrivant la famille de solutions périodiques pour $\mu = 0$ faisaient partie des variables dans lesquelles étaient écrites les équations initiales[20]. Ainsi, la première étape dans la démonstration de 1905 consiste à se ramener à un tel système de coordonnées, avant de procéder de la même façon que dans le § 46 des *Méthodes nouvelles*. La similarité dans la suite de la preuve est accentuée par le choix des notations : dans les *Méthodes nouvelles* comme dans l'article sur les géodésiques, Poincaré introduit une fonction R, moyenne des termes du premier ordre en μ du hamiltonien, dont les extremums correspondent aux solutions périodiques qui subsistent pour μ non nul.

Ainsi le travail de 1905 suit l'indication donnée par les *Méthodes nouvelles* : « *disposer de la constante arbitraire h de façon que [la] courbe [$\Phi_1 = 0$] passe par l'origine* », et reprend dans ce but la démarche déjà employée dans le § 46 des *Méthodes nouvelles*. La nouveauté est la méthode de Lagrange que Poincaré adapte pour obtenir un système de coordonnées adapté.

Nous voyons donc en conclusion de cette étude comparée du chapitre III des *Méthodes nouvelles* et de la démonstration de 1905, que le lien n'est pas ponctuel, ni limité à la problématique adoptée. C'est la démonstration entière de l'article sur les géodésiques qui suit pas à pas les principes énoncés dans les *Méthodes nouvelles*.

Cette remarque permet de faire apparaître une unité entre les deux parties de la démonstration, lesquelles semblaient au premier abord très différentes : la première partie utilise la caractérisation mécanique des géodésiques comme trajectoires d'un mobile ne subissant aucune force, tandis que la seconde présente un aspect plus dynamique, qui utilise le fait qu'une géodésique est caractérisée par sa position et sa vitesse initiale. En réalité, hormis le fait que la première partie est locale, et la deuxième globale, elles sont toutes deux fondées sur la problématique énoncée au début du chapitre III des *Méthodes nouvelles*, l'étude de la persistance des solutions périodiques lorsqu'on perturbe les équations du mouvement.

4.1.4 Hiérarchisation des cas

Ainsi, la démonstration de 1905 s'appuie sur le travail rapporté dans le chapitre III des *Méthodes nouvelles*. Or nous avons vu (2.6.2) que Poincaré hiérarchise de façon précise les cas qu'il dégage lors de cette étude des solutions périodiques. Cette hiérarchisation se transpose donc très certainement, dans la réflexion de Poincaré, au problème des géodésiques fermées.

---

s'écrit, après simplification par $\sin i$,

$$\frac{dR}{d\theta} + o(\mu) = 0 \;;\; \frac{dR}{di} + o(\mu) = 0.$$

Choisir (i, θ) point critique de R, c'est donc bien s'assurer que la courbe $\Phi_1 = 0$ passe par l'origine.

[20]Techniquement, cette particularité se traduisait par le fait que le hamiltonien F_0 était « indépendant de quelques-unes des variables x ».

Il en résulte que seules les surfaces dont les géodésiques fermées sans point double correspondent à des racines simples ou multiples d'ordre fini sont prises en considération dans l'étude globale. Ce présupposé implicite permet d'affirmer que les géodésiques fermées ne peuvent apparaître ou disparaître que par couple.

Mais nous pouvons constater que cette hiérarchisation est de moins en moins explicite. Rien n'indique, dans l'article de 1905, que Poincaré limite les surfaces qu'il prend en considération lorsqu'il met en œuvre le principe de continuité analytique. Nous avions déjà remarqué que le processus de passage du local au global dans le cas général était beaucoup plus discret dans l'étude des solutions périodiques que dans le premier mémoire *Sur les courbes*. En 1881, Poincaré définissait précisément le « cas général » dans lequel il se plaçait pour l'étude globale. En 1889, 1890 et dans les *Méthodes nouvelles*, seul l'ordre du texte permet de reconnaître que l'étude globale est faite sous une hypothèse de généralité qui exclut les cas les plus particuliers. Le résultat global affirmant que les solutions périodiques disparaissent par couple est en effet démontré avant que ne soient examinés les cas les plus particuliers. Dans l'article de 1905, il ne reste aucune trace de cette hiérarchisation des cas. Seul le lien avec le travail sur les solutions périodiques permet de la reconstituer.

L'étude locale des géodésique des sphéroïdes, quant à elle, se trouve au contraire relever d'un cas très particulier, exclu dans l'étude globale.

La considération des degrés de généralité des différentes surfaces qui peuvent se présenter s'impose encore par un second biais. Dans l'étude locale, Poincaré ramène la recherche des géodésiques fermées qui subsistent lorsqu'on déforme la sphère à la recherche des points critiques d'une fonction R définie sur la sphère. Il renvoie alors au mémoire *Sur les courbes* [Poincaré 1881a] pour conclure que le nombre de points critique est de la forme $4n+2$. Or cette conclusion est la reformulation d'un résultat sur les points singuliers d'une équation différentielle considérée sur la sphère. Ce résultat sur le nombre de points singuliers était obtenu dans le cadre du « cas général » que nous savons étudié plus haut (2.5). Pour conclure sur le nombre de points critiques de la fonction R, il faut donc supposées vérifiées certaines hypothèses sur les dérivées $\frac{dR}{di}$ et $\frac{dR}{d\theta}$. Poincaré ne rappelle pas plus cette hypothèse de généralité qu'il ne mentionnait les surfaces exceptionnelles à exclure dans l'étude globale. Mais on voit ainsi qu'il renvoie à deux reprises à des recherches antérieures qui utilisent de façon similaire la hiérarchisation des cas considérés. Il est donc d'autant plus vraisemblable que Poincaré est conscient, en 1905, de ces hypothèses de généralité qu'il n'explicite pas.

4.1.5 L'orientation de cette étude des géodésiques vers un approfondissement des méthodes mises au point en mécanique céleste : le but de la première partie de la démonstration

Après cette mise en contexte, il nous faut poursuivre l'analyse de la démonstration que fait Poincaré de l'existence de géodésiques fermées. Une deuxième direction pour les liens qu'elle entretient avec les travaux de mécanique céleste va se dégager. Nous avons déjà vu que Poincaré adapte une méthode de mécanique céleste pour l'utiliser en géométrie et en tirer des résultats sur les géodésiques.

Du point de vue de la mécanique céleste, on peut décrire ceci comme une exportation de techniques vers la géométrie. Mais ceci ne suffit pas à rendre compte de l'article de 1905. Dans le même temps, Poincaré utilise l'étude des géodésiques pour développer cette méthode et la rendre encore plus efficace *en vue de la mécanique céleste.* On pourrait parler d'une importation de l'exemple des géodésiques pour approfondir cette technique d'étude.

Poincaré évoque la motivation de mécanique céleste qui l'anime dès l'introduction. Il présente le problème des géodésiques des surfaces convexes comme une sorte de cas particulier dont l'étude est utile à une meilleure compréhension des phénomènes de dynamique. Cependant, l'introduction est suivie d'abord par une partie très géométrique, où Poincaré s'inspire des travaux sur les géodésiques au XIX^{e} siècle, comme le montre l'analyse de P. Nabonnand [1995] : étude du lieu conjugué, du lieu de coupure, etc. On pourrait en conclure que ce mémoire est surtout destiné à étudier les propriétés des géodésiques, grâce, entre autres, à des méthodes issues de la mécanique céleste. Ces méthodes sont d'autant plus adaptées — et donc plus fructueuses — que l'analogie est plus forte entre les deux problèmes : géodésiques fermées des surfaces *convexes* et mécanique céleste. De plus, l'étude des géodésiques permet d'illustrer ces techniques.

Une telle lecture serait réductrice. L'analyse de la structure de la démonstration va nous permettre de montrer que Poincaré de se contente pas d'*utiliser* la théorie des *Méthodes nouvelles*, mais que dans le même temps il la développe et en élargit le champ : tel est le deuxième sens des liens entre géométrie et mécanique céleste que nous allons maintenant mettre en évidence.

La démonstration, nous l'avons vu, se déroule en deux parties. Elle consiste à montrer que le nombre de géodésiques fermées sans point double est impair. La deuxième partie établit que la parité de ce nombre est constante, en reprenant l'idée déjà présente dans les *Méthodes nouvelles* : les géodésiques fermées apparaissent et disparaissent par couples. Après ce constat, Poincaré s'attache à spécifier ce résultat général, pour montrer qu'il s'énonce de la même façon quand on se restreint aux géodésiques sans point double. À la théorie déjà présente dans les *Méthodes nouvelles* s'ajoute donc la discussion sur les types de géodésiques qu'on peut rencontrer sur une même branche de la courbe $\mathcal{C}$. Poincaré prouve de cette façon que le nombre de géodésiques fermées sans point double est soit toujours pair, soit toujours impair.

La fonction de la première partie, quant à elle, est explicitement de trancher en faveur de l'une ou l'autre possibilité. Poincaré y établit que le nombre de géodésiques fermées sans point double sur un sphéroïde est impair. Il peut alors appliquer la deuxième partie de la démonstration à un chemin reliant une surface convexe quelconque à un sphéroïde. Le point clef de la première partie est donc de déterminer la parité du nombre de géodésiques sur un sphéroïde. Poincaré l'entend bien ainsi, qui conclut la démonstration par :

> Donc le nombre total de géodésiques fermées sans point double est toujours pair ou toujours impair. Or nous avons vu au paragraphe précédent que pour un sphéroïde ce nombre est impair. De plus, on peut passer d'un sphéroïde à une surface convexe quelconque d'une manière continue.
>
> *Donc, sur une surface convexe quelconque, il y a toujours au*

moins une géodésique fermée sans point double et il y en a toujours un nombre impair. [Poincaré 1905c, p. 60]

Or il n'avait pas du tout besoin de cette étude locale, et il en était parfaitement conscient. La prise en compte de ce point clef va nous permettre de saisir toute la portée de cette partie de sa démonstration. Jacobi avait en effet réussi à intégrer complètement les équations des géodésiques sur un ellipsoïde. Sur un ellipsoïde à trois axes inégaux, il y a exactement trois géodésiques fermées sans point double. Et Poincaré le sait, puisqu'il fait référence à ce résultat, en poursuivant dans ce mémoire même :

> Par exemple, pour un ellipsoïde nous avons les trois sections principales par les plans de symétrie. [Poincaré 1905c, p. 60]

Tout le calcul perturbatif, relativement technique, de la première partie, se révèle donc inutile ! Poincaré pouvait appliquer le principe de continuité en partant d'un ellipsoïde : il lui suffisait d'écrire par exemple :

> Donc le nombre total de géodésiques fermées sans point double est toujours pair ou toujours impair. Or pour un ellipsoïde nous avons les trois sections principales par les plans de symétrie.[21]
>
> *Donc, sur une surface convexe quelconque, il y a toujours au moins une géodésique fermée sans point double et il y en a toujours un nombre impair.*

C'est exactement ce qu'il fait plus loin dans ce même article, dans la partie 5, *Stabilité et instabilité* :

> *Donc, si sur une surface convexe quelconque on envisage toutes les géodésiques fermées sans point double, l'excès du nombre de celles qui sont stables sur le nombre de celles qui sont instables est constant*[22]*; il est donc le même que pour l'ellipsoïde, il est donc égal à 1.* [Poincaré 1905c, p. 66]

Au contraire, au lieu d'utiliser le résultat connu sur l'ellipsoïde dans la démonstration du théorème 2, il le mentionne seulement comme une remarque en passant.

Ceci montre que non seulement la première partie de la démonstration est inutile dans l'économie de la démonstration, mais que Poincaré en est parfaitement conscient. Nous avons donc maintenant établi que c'est par un choix délibéré qu'il développe l'étude des géodésiques d'un sphéroïde.

Pourquoi Poincaré a-t-il choisi d'exposer ce calcul compliqué, alors qu'il est inutile pour le but précis qui paraît être le sien dans l'article de 1905 ? Cet écart révèle qu'il poursuit un autre objectif. La thèse que je propose pour rendre compte de cette singularité est qu'il faut lire dans la démonstration l'exposé, sur le *paradigme* des géodésiques des surfaces convexes, d'une méthode dont la portée est plus générale.

---

[21] Je me suis contentée ici d'inverser l'ordre des éléments dans le texte de Poincaré, sans ajouter de formules qui ne soient de lui.

[22] Ce résultat a été prouvé par Poincaré d'une façon tout à fait analogue au principe de continuité analytique pour le nombre des géodésiques ; l'idée est que lorsque deux géodésiques fermées se confondent et disparaissent, l'une est stable et l'autre instable.

Nous avons vu que Poincaré traitait déjà dans les *Méthodes nouvelles* un problème « où pour $\mu = 0$ les équations différentielles admettent une infinité de solutions périodiques ». Mais dans cette étude du § 46 des *Méthodes nouvelles*, les équations étaient d'emblée écrites dans un système de coordonnées bien adapté à la résolution proposée. Poincaré ne donnait donc pas la marche à suivre s'il n'en avait pas été ainsi.

Dans l'article de 1905, Poincaré présente une résolution plus complète, en ajoutant l'étape de changement de coordonnées. Ainsi, d'une part il montre le lien entre le problème particulier traité dans les *Méthodes nouvelles* et le problème général, qui s'y ramène après un changement de variable. D'autre part, il propose une méthode pour conduire ce changement de variables, en montrant comment adapter la méthode de Lagrange. Le travail sur les géodésiques apporte donc un complément à l'exposé des *Méthodes nouvelles*.

De plus, dans un problème de dynamique plus général, l'argument perturbatif peut retrouver toute son importance. En effet, pour un problème plus compliqué, il est improbable qu'on sache intégrer complètement un cas suffisamment général : on ne saura le plus souvent intégrer que les cas extrêmement particuliers, possédant des symétries. Dans de telles situations, il existera une famille continue de trajectoires périodiques, ou même toutes les trajectoires seront périodiques, comme c'est le cas pour les géodésiques de la sphère. Le raccourci que permet la connaissance des géodésiques de l'ellipsoïde n'existera plus. Le schéma d'étude proposé dans l'article de 1905 pour mettre en œuvre la méthode décrite dans les *Méthodes nouvelles* prendra alors toute sa valeur. Il faudra commencer par étudier le système au voisinage d'une situation singulière intégrable, en adaptant la méthode de Lagrange, avant d'étendre les résultats par un principe de continuité analytique.

Outre une méthode pour effectuer le calcul perturbatif lorsque pour $\mu = 0$ il y a une infinité de solutions périodiques, Poincaré présente donc, dans l'article de 1905, l'enjeu de ce calcul. Ce cas qui apparaissait comme un cas particulier, peut-être anecdotique, dans les *Méthodes nouvelles*, est ici inséré dans la démonstration d'un résultat global. Le chapitre III des *Méthodes nouvelles* montrait comment appliquer le théorème des fonctions implicites dans différentes situations pour étudier la persistance de trajectoires périodiques. Ce travail sur les géodésiques est l'occasion pour Poincaré de montrer comment ces différents cas d'application peuvent être articulés de façon à prouver un théorème général pour les systèmes dynamiques d'une certaine forme, ici pour les géodésiques fermées sans point double des surfaces convexes.

Ainsi le problème des géodésiques n'est pas véritablement un *exemple* d'utilisation d'une méthode exposée par ailleurs dans les *Méthodes nouvelles*. Il fonctionne plutôt comme un *paradigme* grâce auquel Poincaré développe et met en forme les idées qu'il avait commencé à exprimer dans les *Méthodes nouvelles*. Les deux textes présentent des théories qui sont dans le prolongement l'une de l'autre, mais formulées sous des modes différents. Dans les *Méthodes nouvelles*, Poincaré avait exposé ses idées en considérant des équations générales abstraites $\frac{dx_i}{dt} = X_i$. Il développe ensuite ces mêmes idées en les formulant de façon moins abstraite sur le paradigme des géodésiques. La généralité se présente autrement : non dans le mode d'expression, mais dans le champ d'application possible de la méthode exposée.

4.2 La pratique des mathématiques sur paradigme

Ce caractère paradigmatique de la démonstration de Poincaré mis en évidence, nous allons maintenant tenter de dégager les particularités de ce mode d'écriture et de pratique des mathématiques. À ma connaissance, il n'a malheureusement pas été beaucoup étudié par les historiens des mathématiques. Il me semble pourtant qu'il est plus répandu qu'on pourrait le croire.

4.2.1 Un type de pratique des mathématiques spécifique

Je voudrais d'abord soutenir qu'il ne faut pas réduire cette façon d'écrire et de pratiquer les mathématiques à un préliminaire heuristique, ni à un procédé didactique.

Il y a, certes, une part heuristique dans le travail de Poincaré. Il le souligne lui-même : le problème des géodésiques est le plus simple qui présente les mêmes caractéristiques que les problèmes de la mécanique céleste, et son étude est un bon moyen pour mieux comprendre les mécanismes en jeu ; nous avons vu par exemple que la géométrie de la sphère et la simplicité de l'exemple choisi permettent d'adapter facilement la méthode de Lagrange pour étudier les géodésiques fermées du sphéroïde.

Mais il ne s'agit pas seulement d'une étude liminaire. D'une part, Poincaré n'est pas en train de chercher une méthode : celle-ci existe déjà, présentée dans le chapitre III des *Méthodes nouvelles*. D'autre part, nous avons vu que la méthode utilisée là est déjà pensée comme plus générale : c'est le cœur de l'argument qui nous a permis de montrer que le problème des géodésiques est utilisé comme un paradigme. De plus, nous allons voir maintenant que, par plusieurs aspects, ce mémoire est déjà le lieu d'une généralisation importante du cadre présenté dans les *Méthodes nouvelles*.

Cette généralisation se manifeste d'abord dans la manière dont l'étude locale est conduite : dans les *Méthodes nouvelles*, Poincaré effectuait une telle étude seulement dans un cas plus particulier où le système de coordonnées est adapté à la méthode d'étude proposée, tandis qu'il montre comment choisir des coordonnées convenables pour chercher les géodésiques fermées du sphéroïde.

Le deuxième aspect par rapport auquel Poincaré généralise les idées des *Méthodes nouvelles* tient à la nature de la courbe analytique introduite. Dans les *Méthodes nouvelles*, Poincaré ne considérait cette représentation que dans un plan, et la présentait rapidement à la fin de son étude. En 1905 en revanche, il développe cette idée, considère une courbe analytique dans un espace dont la dimension est seulement déterminée par la dimension de l'espace des paramètres nécessaires pour caractériser une trajectoire donnée, et fait de cette représentation le fondement de tout le raisonnement de la seconde partie.

Enfin, dans l'étude des géodésiques, Poincaré développe une approche globale qui n'était présente qu'à l'état de germe dans les *Méthodes nouvelles*. En effet, dans ce dernier ouvrage, Poincaré étudiait les trajectoires périodiques surtout pour les petites valeurs de μ, c'est-à-dire localement. C'est dans ce cadre qu'il présentait la problématique du chapitre consacré à l'étude des solutions périodiques.

Il insérait ensuite dans son énumération de cas la remarque selon laquelle « *les solutions périodiques disparaissent par couples à la façon des racines réelles des équations algébriques* » [Poincaré 1892–1899, t. I, p. 83]. Il s'agit bien là d'une perspective globale, qui annonce le résultat de 1905 selon lequel la parité du nombre de géodésiques fermées est constante.

La représentation des solutions périodiques par une courbe analytique annonçait également une vision globale. Poincaré écrit « Si l'on regarde un instant β_n et μ comme les coordonnées d'un point dans un plan, cette équation représente une courbe passant par l'origine ; à chacun des points de cette courbe correspond une solution périodique. » [Ibid., p. 84]. Il précise bien que la courbe passe par l'origine, puisqu'il étudie les trajectoires périodiques au voisinage de celle représentée par l'origine, justement. Mais la proposition suivante, « à chacun des points de cette courbe correspond une solution périodique », a une connotation plus globale, et annonce l'argument de prolongement analytique qui sera fondé sur l'étude de cette courbe analytique.

Cependant, dans la suite des *Méthodes nouvelles*, dans les applications à des problèmes de mécanique céleste, la recherche des trajectoires périodiques se cantonne à une étude locale, dont les résultats sont valables pour les *petites* valeurs de la perturbation représentée par μ.

La deuxième partie de la démonstration de 1905 apporte donc elle aussi une généralisation remarquable par rapport à l'étude faite dans les *Méthodes nouvelles*, à travers la globalisation menée à son terme pour obtenir un résultat sur le nombre de géodésiques fermées sur une surface quelconque.

Le cas du théorème de récurrence, que nous avons étudié dans le chapitre 3 d'un autre point de vue, va nous permettre de renforcer cette remarque : l'usage d'un paradigme n'est pas réductible à un procédé heuristique, provisoire, destiné à faciliter le travail dans un premier temps, mais il a des avantages intrinsèques et peut être employé par choix à des étapes variées du développement d'une théorie mathématique.

Comme je l'ai signalé plus haut, sans m'attarder sur cette caractéristique, la présentation de la démonstration du théorème de récurrence change sensiblement entre le mémoire *Sur le problème des trois corps* [Pb] et les *Méthodes nouvelles*.

Dans la première version, celle de 1890, le théorème et sa démonstration sont écrits directement dans les termes d'un système d'équations différentielles de forme générale. Dans les *Méthodes nouvelles*, en revanche, Poincaré choisit d'exposer la même démonstration d'abord dans un contexte physique : au lieu de travailler sur les trajectoires d'un système d'équations différentielles, il considère le mouvement d'un liquide dans un vase. Il parle de la trajectoire d'une molécule du liquide plutôt que de la trajectoire d'un point mobile. De cette façon, les deux conditions principales d'application du théorème, qui sont la conservation du volume (ou d'un invariant intégral plus général), et le fait que les trajectoires restent dans un espace borné, sont directement saisies par l'intuition physique : la conservation du volume résulte de l'incompressibilité du liquide, et le confinement dans une région bornée de l'espace est matérialisé par le vase qui contient le liquide. Lorsque Poincaré énonce ensuite le résultat dans un cadre plus général, il ne donne pas de nouvelle démonstration. Il souligne simplement : « Il n'y a d'ailleurs rien à changer aux démonstrations qui précèdent. Nous retrouverons, par exemple, l'inégalité [...]. Nous pouvons en déduire les mêmes conséquences. » [Poincaré 1892–1899, t. III, p. 155-156]

Ainsi, la même démonstration est formulée de deux façons différentes, la première fois sous forme abstraite et la deuxième fois dans le contexte d'un paradigme. Le paradigme vient ici dans un deuxième temps : il ne s'agit pas d'un procédé heuristique, d'un premier état du théorème, encore mal débarrassé du contexte dans lequel il a été découvert. C'est véritablement un choix délibéré de l'auteur qui le conduit à présenter ce théorème de cette façon-là.

Ceci nous amène à considérer la deuxième réduction qu'on pourrait être tenté de faire concernant l'utilisation d'un paradigme : il s'agirait d'un procédé didactique. Là encore, mon propos n'est évidemment pas de nier toute intention didactique dans le choix d'utiliser un paradigme. Il est clair que dans le cas du théorème de récurrence, le paradigme du liquide dans un vase permet de mieux mettre en évidence les hypothèses du théorème. L'article de 1905 est par ailleurs issu d'une conférence donnée à Saint-Louis, et porte donc probablement la marque d'un exposé oral, dans lequel un soin est apporté tout particulièrement au caractère didactique de la présentation. Mais il serait tout aussi simplificateur de ne voir dans ce mode d'exposition qu'un artifice didactique.

Le cas du théorème de récurrence montre les limites d'une telle explication. Les *Méthodes nouvelles* ne sont pas un ouvrage de vulgarisation ni un cours. Poincaré a écrit un cours de mécanique céleste [Poincaré 1905b], ainsi que deux résumés de son mémoire de 1890, l'un adressé aux astronomes [Poincaré 1891b], l'autre pour un public plus large encore [Poincaré 1891a]. Les *Méthodes nouvelles*, au contraire, forment l'exposé complet, organisé, de ses travaux de mécanique céleste. De plus, le choix du paradigme, qui conduit Poincaré à parler des trajectoires des molécules du liquide, semble bien être lié à l'intérêt porté par Poincaré entre 1890 et 1899 à la théorie cinétique des gaz. Nous avons rencontré d'autres modifications dans l'énoncé et la démonstration du théorème de récurrence qui sont visiblement à mettre en lien avec l'usage du théorème de récurrence dans les controverses de l'époque sur la théorie cinétique des gaz. Sans entrer dans plus de détails, on voit que l'usage d'un paradigme est plus qu'un simple procédé didactique. C'est plutôt un mode d'écriture dont la richesse demande à être étudiée pour elle-même.

De plus, considérer ce procédé comme un artifice didactique suppose qu'il renvoie à une autre formulation, préexistante, du même théorème, de la même démonstration. C'est le cas pour le théorème de récurrence, mais je ne connais aucune trace d'une autre expression de ce qui est exposé dans l'article de 1905, sinon dans les *Méthodes nouvelles*. Or dans ces dernières, la théorie est présentée, nous l'avons vu, sous une forme moins aboutie. Plus profondément, voir là un procédé didactique suppose un jugement *a priori* sur l'expression canonique que doit prendre un énoncé mathématique : on trouverait dans les *Méthodes nouvelles* la formulation attendue, et dans l'article sur les géodésiques une présentation didactique. Quel critère définirait alors la formulation standard ? Pas la généralité puisque nous avons vu qu'elle peut aussi bien s'exprimer de façon abstraite comme dans les *Méthodes nouvelles* que sur un paradigme. Si l'on utilise l'abstraction comme critère, il s'agit d'un présupposé qui donne lieu à discussion : il faudrait du moins montrer que cette forme est privilégiée par les mathématiciens, tâche probablement impossible à tenir, surtout si l'on prend en compte toutes les traditions mathématiques.

Remarquons que voir dans l'emploi d'un paradigme un procédé heuristique relève d'un présupposé similaire. Cela revient en effet à considérer que la démonstration trouvée d'abord sur un paradigme revêt encore une forme inachevée, dans l'attente d'une formulation définitive qui serait nécessairement d'un autre type.

L'ensemble de ces considérations nous invite à nous débarasser des idées *a priori*, pour étudier les textes mathématiques s'appuyant sur des paradigmes en tant que tels, plutôt que comme des « ombres » de formulations idéales préexistantes ou devant les remplacer. Ce travail a déjà été engagé à propos d'une toute autre tradition : les mathématiques chinoises [Chemla 2003]. Certains points de l'étude de K. Chemla rejoignent des propriétés que nous avons relevées à propos du texte de Poincaré ; l'étude comparative des différentes façons d'utiliser des paradigmes dépasse largement le cadre de notre article, mais se présente comme un objectif dont la réalisation passe par l'étude la plus approfondie possible des différents matériaux disponibles.

4.2.2 L'importance de la signification géométrique : un rôle d'interprétation

Ces remarques nous invitent donc à exploiter le plus possible le texte de Poincaré en vue de mieux décrire l'écriture sur paradigme qui s'y fait jour. Ceci nous amène à étudier une caractéristique de ce texte sur laquelle nous n'avons pas insisté jusque là : l'utilisation massive d'interprétations géométriques.

À deux reprises, Poincaré interrompt l'argument calculatoire sur les géodésiques du sphéroïde pour donner aux quantités qui apparaissent dans le calcul une signification géométrique.

Il commence par étudier les géodésiques des sphéroïdes grâce à leur équation différentielle, fournie par la mécanique : une géodésique est décrite comme la trajectoire d'un mobile astreint à rester sur la surface sans autre contrainte.

Après plusieurs étapes de calculs qui permettent de simplifier progressivement ces équations, Poincaré définit une quantité S_1, qui joue le rôle d'une énergie cinétique. Après quelques transformations supplémentaires des équations, il s'interrompt en écrivant : « Rendons-nous compte de la signification géométrique de cette fonction S_1. »[Poincaré 1905c, p. 50]

Il revient alors à une approche plus géométrique du sphéroïde, mettant en œuvre un plongement de celui-ci dans l'espace ambiant, une correspondance bijective avec la sphère, des éléments de longueur sur le sphéroïde et sur la sphère. De plus, il donne un caractère encore plus visuel à cette interprétation géométrique en choisissant la correspondance entre la sphère et le sphéroïde de façon à pouvoir utiliser « le langage de la Géodésie ». Ceci lui permet d'exprimer S_1 en fonction des éléments de longueur sur la sphère et sur le sphéroïde. Cette formule fait donc intervenir la géométrie du sphéroïde, alors que S_1 apparaissait d'abord seulement comme un auxiliaire de calcul dans un contexte mécanique et non géométrique.

Les deux pages d'interprétation géométrique se caractérisent ainsi d'abord par un changement de références mathématiques : on passe de calculs menés en des termes issus de la mécanique à une approche plus géométrique. Ce changement s'accompagne d'une rupture nette du style de discours. La partie calculatoire est caractérisée par les expressions : « Formons l'équation », « posons », « nos équations deviendront », « nous pouvons écrire », « nous pouvons remplacer », « on conservera », « on remplacera ». Toutes ces expressions impliquent une transformation des objets mathématiques manipulés. Au contraire, lorsque Poincaré cherche la signification géométrique de S_1, le texte devient descriptif, il montre un état de fait : « Rendons-nous compte », « nous voyons », « Il est manifeste », « i et θ désigneront », etc. Seules quelques lignes de calcul dans le passage sur la signification géométrique contiennent à nouveau des tournures impliquant transformation.

Cette section est de plus séparée du texte par une formule d'ouverture et une formule de clôture. Elle est introduite par : « Rendons-nous compte de la signification géométrique de cette fonction S_1 ». Poincaré conclut ensuite : « Telle est la signification géométrique de S_1. »[Poincaré 1905c, p. 50 et 52]

Ainsi, tant au niveau du sens que de la formulation, il y a bien un changement très net de type de discours.

Après cette première digression géométrique, Poincaré reprend les équations auxquelles il était parvenu. Il adopte un style démonstratif, avec l'emploi à deux reprises de la formule « il faut et il suffit ». Nous retrouvons l'expression d'une transformation : dans la première section de démonstration, c'était une transformation calculatoire des équations des géodésiques ; ici il s'agit d'une transformation logique de la condition de fermeture des géodésiques. Poincaré est alors conduit à introduire une nouvelle quantité, R, valeur moyenne de S_1. Comme S_1 précédemment, R apparaît donc d'abord comme un auxiliaire naturel du calcul. Le raisonnement de Poincaré lui permet de montrer que « les géodésiques fermées correspondent aux maxima, aux minima et aux minimax de la fonction R. »[Poincaré 1905c, p. 52]

À nouveau, Poincaré s'interrompt sur ces mots : « Il faut d'abord rechercher la signification géométrique de la fonction R. »[Poincaré 1905c, p.53]

Ici encore, il utilise le langage de la géodésie pour donner une signification concrète aux objets qui interviennent. Ceci lui permet finalement d'interpréter la fonction $R(i, \theta)$ comme la différence entre la longueur des grands cercles de la sphère et la longueur du « grand cercle astronomique » C, l'équivalent sur le sphéroïde du grand cercle de coordonnées i et θ.

La séparation entre la partie sur la signification géométrique de R et le reste du texte est un peu moins nette : il n'y a pas de formule de clôture comme à la fin de l'interprétation géométrique de S_1. De plus, Poincaré utilise dans la fin de la démonstration des objets qu'il a introduit dans le paragraphe sur l'interprétation géométrique de R — nous y reviendrons. Cependant, on peut noter que l'interprétation géométrique a pour objet de traduire en termes géométriques le résultat obtenu immédiatement avant. La partie démonstrative précédente s'achève en effet sur : « Les géodésiques fermées répondront donc aux maxima, au minima et aux minimax de la fonction R. » L'interprétation géométrique se conclut ensuite par : « Ainsi les maxima, minima et minimax de R correspondent aux minima, maxima et minimax de la longueur totale des courbes C. »[Poincaré 1905c, p.53] Ces deux formules qui se répondent permettent donc finalement de délimiter précisément la section sur la signification géométrique de R, comme nous avions pu le faire pour celle de S_1.

La démonstration s'achève par le renvoi à un résultat d'*analysis situs* sur le nombre de points critiques d'une fonction définie sur la sphère, comme c'est le cas de la fonction R.

Comme pour S_1, l'interprétation géométrique de R constitue donc une section nettement séparée du reste de la démonstration. Elle met en jeu des objets différents : géométrie, Géodésie, et utilise un style d'écriture différent.

En résumé, on peut mettre en évidence deux parties de l'étude des géodésiques du sphéroïde, qui se distinguent du corps de la démonstration tant par les thèmes dominants, géométrie et langage de la géodésie *versus* calculs issus de la mécanique, que d'un point de vue purement linguistique. D'abord ces deux passages sont nettement délimités. De plus on observe une rupture de style forte au niveau du premier de ces deux passages, et sensible également dans le second. Les parties démonstratives emploient un style prescriptif (transformations calculatoires) et argumentatif (transformations logiques). Dans les sections d'interprétation, il est surtout descriptif. Ces dimensions objectives rencontrent la perception que Poincaré a de la différence, lorsqu'il donne explicitement le but des deux passages que nous mettons à part : « chercher la signification géométrique ».

Par ailleurs, à l'exception d'une référence, à la fin de la démonstration, à un terme introduit seulement dans un de ces deux passages, du point de vue logique ils ne sont pas nécessaires à la démonstration. On peut suivre l'argument analytique qui montre que les géodésiques fermées du sphéroïde correspondent aux extremums de la fonction R, puis utiliser le résultat d'*analysis situs* pour conclure qu'elles sont en nombre impair, sans savoir ce que représente cette fonction. Pourtant, Poincaré souligne l'importance, à ses yeux, de l'interprétation géométrique, et affirme sa volonté de s'y intéresser dans le corps même de la démonstration, lorsqu'il écrit (je souligne) : « *Il faut d'abord* rechercher la signification géométrique de R. »[Poincaré 1905c, p. 53]

Ainsi, la structure du texte de Poincaré nous invite à nous poser la question du rôle de ces deux développements. Nous allons voir qu'en reconnaissant ici l'emploi d'un paradigme, nous pouvons rendre compte de l'importance donnée par Poincaré à ces passages. C'est en effet un avantage capital de ce mode d'écriture que d'offrir la possibilité d'interpréter les étapes du calcul. De plus, en prenant en considération cet attachement de Poincaré à mettre en correspondance la méthode issue de la mécanique céleste et les propriétés géométriques de son paradigme, nous serons conduits à percevoir un principe unificateur de l'ensemble de l'article.

Les caractéristiques des passages sur la signification géométrique relevées ci-dessus permettent de comprendre le rôle qu'ils jouent. Nous avons en effet montré les points suivants :

- ces passages sont descriptifs, et ne participent pas aux calculs ni à l'argumentation ;
- ils sont cependant insérés au fur et à mesure des étapes de la démonstration ;
- ils portent sur des quantités, S_1 et R, qui sont introduites comme des auxiliaires de calcul ;
- ils concentrent l'utilisation des propriétés géométriques des objets étudiés, au contraire de la démonstration à proprement parler, laquelle est surtout calculatoire, et basée sur des principes de mécanique.

Il me semble qu'on peut en conclure que ces passages visent à exploiter le caractère géométrique des objets étudiés pour *interpréter* au fur et à mesure les quantités que l'application de la méthode inspirée par celle de Lagrange conduit à introduire. Non seulement le paradigme choisi permet d'exposer la méthode de recherche des trajectoires fermées qui subsistent quand on perturbe un système qui en possède une famille continue. Mais il fournit de plus un domaine d'interprétation grâce auquel Poincaré donne un deuxième sens aux étapes successives du calcul. Le travail sur les équations données par la mécanique, bien mené, conduit à introduire les quantités S_1 et R, et fournit le résultat dans ces termes. Si Poincaré avait exposé cette méthode dans les termes plus abstrait des *Méthodes nouvelles*, il n'aurait pu qu'indiquer la marche à suivre dans cette transformation des équations — c'est ce qui se passe dans les paragraphes 46 à 48 des *Méthodes nouvelles*. Le paradigme permet d'éclairer cette méthode en offrant un deuxième cadre de description. En plus de la mécanique, Poincaré peut ici s'appuyer sur les propriétés géométriques des objets qu'il étudie. Il ne manque pas d'exploiter cette richesse qui vient du choix qu'il a fait d'employer un paradigme. On rend compte ainsi de l'insistance de Poincaré à donner la signification géométrique avant même de poursuivre la démonstration.

Nous avions relevé dans la partie 4.1.5 comment le paradigme permet de *mettre en situation* une méthode, et montre ainsi comment différents cas peuvent être articulés en vue d'un résultat global. Il s'agissait là d'un éclairage de la méthode que nous pourrions qualifier d'extérieur. Les *Méthodes nouvelles* indiquaient comment traiter le cas d'une famille infinie de trajectoires fermées d'une part, celui où les trajectoires fermées sont isolées et d'ordre fini d'autre part. L'application de cette méthode au problème des géodésiques montre comment articuler ces différents cas dans une étude globale pour prouver un résultat sur le nombre de géodésiques. L'importance du cas d'une famille infinie de trajectoires périodiques en ressort éclairée : il n'est pas seulement anecdotique, mais peut servir à initier un principe de continuité analytique.

Avec l'exploitation des propriétés géométriques du paradigme, nous voyons un éclairage interne de la méthode : ce sont les étapes successives du calcul prescrit par cette méthode qui prennent sens.

Ainsi, le choix d'un problème qui peut se formuler aussi bien en termes mécaniques qu'en termes géométriques fournit un domaine d'interprétation qui permet une meilleure compréhension du raisonnement, du rôle et du sens de chacune des étapes du calcul. Ceci permet de rendre compte de la corrélation que nous observons entre deux singularités de cet article de Poincaré : le développement d'un calcul inutile à première vue, et l'insistance à donner la signification géométrique des quantités qui interviennent. Ces deux particularités se rencontrent dans la même portion du texte de Poincaré, à propos de l'étude locale.

Loin d'être un hasard, cette corrélation met en évidence un avantage important que présente l'exposition d'une méthode grâce à un paradigme plutôt que de façon plus abstraite. Le choix d'une formulation dans un cadre particulier — comme ici la géométrie — permet en effet d'exploiter le langage et les propriétés de ce cadre. On dispose alors d'un domaine d'interprétation qui se conjugue avec la méthode employée, et permet de l'éclairer de l'intérieur. Le paradigme donne tous ses fruits grâce à cette traduction de la méthode dans le cadre du paradigme.

Une analyse encore un peu plus fine de l'interaction des sections démonstratives et interprétatives de cette étude locale permet d'éclairer la conception qu'avait Poincaré de l'*Analysis situs*.

Dans un premier temps, le vocabulaire géométrique et les objets définis dans les sections d'interprétation y restent confinés. De plus, à l'intérieur même de ces sections, les objets géométriques et ceux qui viennent de la description mécanique sont bien distingués, et leur rapport est toujours exprimé par une correspondance explicite. Ainsi, les couples de points sont dits *correspondre* aux valeurs des variables utilisées dans le calcul. De même, dans la formule « les maxima, minima et minimax de R correspondent aux minima, maxima et minimax de la longueur totale des courbes C », les deux domaines sont mis en correspondance, mais restent bien distingués. La fonction R est définie au cours de la démonstration, comme une fonction de i et θ. Les courbes C, en revanche, sont des objets géométriques définis pour interpréter cette fonction.

Mais à la fin de la démonstration cette séparation s'estompe, précisément lorsque Poincaré utilise un résultat d'*Analysis situs* démontré dans un autre article. Après avoir défini des points P en relation avec les courbes C, il parle des « points P où la fonction R a la même valeur ». La fonction R est soudain considérée comme une fonction des points de la sphère, et non plus comme une fonction des variables i et θ.

Cette assimilation des deux types d'objets est corrélée avec l'introduction dans le raisonnement d'un résultat d'*Analysis situs* : R étant maintenant vue comme une fonction définie sur la sphère, les nombres de ses minima, maxima et minimax sont liés par une relation, qui permet de conclure à la parité du nombre de géodésiques fermées.

Cette corrélation rejoint l'analyse de C. Gilain [1977] et A. Herreman [1996] qui soulignent un lien très fort entre *Analysis situs* et géométrie chez Poincaré. Ainsi, C. Gilain suggère que la représentation géométrique qui est au cœur des mémoires de Poincaré *sur les courbes définies par les équations différentielles* [Poincaré 1881a, 1882, 1885, 1886] n'est pas seulement une illustration géométrique de propriétés analytiques, mais qu'elle joue un rôle théorique qui débouche sur l'introduction explicite de l'*Analysis situs* dans la troisième partie du mémoire [Gilain 1977, p. 87–88]. L'utilisation, en 1905, d'un paradigme géométrique joue sans doute un rôle semblable, puisqu'il apporte le substrat géométrique qui prépare l'introduction d'un résultat d'*Analysis situs*.

L'utilisation des propriétés géométriques des objets auxquels Poincaré applique ici des techniques de mécanique céleste ne se borne pas à la partie locale de sa démonstration. Nous allons voir que l'exploitation du caractère géométrique du paradigme des géodésiques permet de mieux comprendre l'unité de l'article, non plus seulement au niveau de la démonstration du théorème 2, mais à l'échelle de l'article entier.

Après la démonstration à laquelle je me suis particulièrement intéressée, Poincaré étudie les propriétés de stabilité des géodésiques dont il vient de montrer l'existence. Là encore, le vocabulaire vient des *Méthodes nouvelles* : géodésiques *stables*, *instables de première, deuxième, troisième catégorie*. Poincaré revendique explicitement le parallèle avec ses travaux de mécanique céleste, puisqu'il écrit : « L'analyse qui précède ne diffère pas de celle du n°347 du tome III de mon Ouvrage sur *les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. »[Poincaré 1905c, p. 63] Mais Poincaré peut en outre, dans l'article de

1905, exploiter le champ d'interprétation fourni par l'utilisation d'un paradigme.

C'est ainsi qu'il fait intervenir des notions géométriques spécifiques aux géodésiques pour interpréter les différentes sortes de stabilité. Remarquons d'ailleurs qu'il s'agit là d'une nouvelle forme d'interprétation. Nous avons montré que la section 3 — l'étude locale — présentait l'interprétation des étapes d'une méthode grâce au paradigme géométrique. Ici Poincaré éclaire le sens d'une propriété mathématique, il montre à quoi correspond géométriquement la définition de la stabilité.

Dans ce but, il utilise une partie des résultats qu'il prouve au début de son article, dans la partie 2, *Foyers et caustiques*. On pourrait à première vue trouver cette section inutile, ou du moins sans rapport direct avec le reste de l'article. Elle forme en effet une sorte de préambule purement géométrique, qui aborde la question des géodésiques d'une façon beaucoup plus traditionnelle [Nabonnand 1995]. Elle se rapproche de fait, par les thèmes abordés et les méthodes employées, des travaux du XIX^{e} siècle sur les géodésiques des surfaces plus que des travaux de mécanique céleste. Au contraire, nous avons mis en évidence la dépendance importante de la démonstration du théorème 2 et des parties suivantes vis-à-vis des *Méthodes nouvelles* en particulier. Mais l'utilisation de quelques-uns des résultats géométriques pour interpréter la notion de stabilité dans les sections suivantes révèle en fait une grande cohésion de l'ensemble. L'exploration préliminaire de propriétés géométriques de son paradigme permet à Poincaré de lui donner une plus grande force d'interprétation. Il se dote ainsi d'un outil plus puissant pour mettre ensuite en lumière les méthodes et les notions de mécanique céleste qu'il met en œuvre sur ce paradigme.

Nous pouvons relever enfin un dernier point de fécondation réciproque de la géométrie et de la mécanique céleste, à la fin de l'article de Poincaré. Il propose une deuxième démonstration de l'existence d'au moins une géodésique fermée sans point double sur toute surface convexe. L'idée-clef consiste à chercher une telle géodésique comme la courbe de longueur minimale parmi une classe convenable de courbes sur cette surface.

Or nous avons vu que les géodésiques fermées qui subsistent quand on déforme la sphère correspondent aux points critiques de la fonction R. Et l'interprétation géométrique de cette dernière conduit à y reconnaître, à un coefficient près, la longueur des courbes que Poincaré appelle « grands cercles astronomiques ». En d'autres termes, il a fait apparaître une famille de courbes sur le sphéroïde, ces « grands cercles astronomiques » C, candidates pour représenter les géodésiques fermées qui subsistent. Ces dernières correspondront aux courbes C dont la longueur est minimale, maximale, ou minimax dans la famille.

Il est donc possible que l'interprétation géométrique donnée par Poincaré dans la section 3 soit à l'origine de cette deuxième démonstration, qui fait l'objet de la section 7.

Une étude détaillée permettrait ensuite de montrer que cette deuxième démonstration est à nouveau une occasion pour Poincaré de creuser l'étude de la correspondance entre la notion de stabilité et les propriétés géométriques des géodésiques.

Ainsi les liens entre mécanique céleste et géodésiques dont témoigne le texte de 1905 sont riches et subtils. On ne peut en aucun cas subordonner entièrement cet article de Poincaré à ses recherches en mécanique céleste, en n'y voyant que l'exposé de méthodes qui lui sont destinées. Poincaré démontre des résultats de grand intérêt sur les géodésiques des surfaces convexes. Certains arguments employés, principalement dans la section sur les foyers et les caustiques, puis dans la deuxième démonstration, sont tout à fait géométriques. Cependant, mon analyse révèle à quel point Poincaré lie fortement les deux domaines, et dans quelle mesure les parties plus géométriques de l'article sont utilisées ensuite dans une perspective de mécanique céleste, pour interpréter les méthodes et les notions présentées. Il y a ainsi un jeu constant de fécondation réciproque, qui n'est pas exactement symétrique : les aspects géométriques ont une fonction plutôt interprétative, orientée vers une meilleure compréhension des méthodes et définitions techniques fournies, elles, par la mécanique céleste.

L'écriture sur paradigme se laisse donc saisir dans ce mémoire de Poincaré comme un procédé qui permet d'articuler la méthode employée — ici, venant de la mécanique céleste — avec les propriétés intrinsèques du paradigme — ici les propriétés géométriques des surfaces et de leurs géodésiques.

4.2.3 Paradigme, style de rédaction et réflexion épistémologique de Poincaré

Nous venons de souligner l'importance que Poincaré accorde à la recherche de la signification géométrique des quantités introduites par le calcul. Ceci s'accompagne de nombreuses autres particularités du style de Poincaré qui visent à illustrer son travail technique, à le rendre plus immédiatement compréhensible.

Il y a d'abord un soin apporté explicitement au choix du vocabulaire.

Nous avons déjà relevé l'utilisation du « langage de la géodésie » dans les passages sur la signification géométrique de S_1 et R. Il est particulièrement intéressant de remarquer que c'est un choix de Poincaré, celui de la correspondance entre les points de la sphère et ceux du sphéroïde, qui lui permet d'employer ce vocabulaire. Poincaré signale : « Le choix de cette correspondance est arbitraire dans une assez large mesure ». Puis, après avoir fixé une correspondance, il souligne qu'elle rend possible l'utilisation d'un vocabulaire adapté, plus imagé : « Dans ces conditions, si l'on veut me permettre le langage de la Géodésie, u et v représenteront sur le sphéroïde la colatitude et la longitude *astronomiques.* » [Poincaré 1905c, p. 50]

Dans la section 2 du même article de 1905, Poincaré utilise également un vocabulaire imagé emprunté cette fois à l'art des chemins de fer. Il distingue ainsi plusieurs types de foyers en fonction de l'allure de la courbe sur laquelle ils se trouvent : foyers *en pointe, en talon.*

On peut reconnaître une volonté semblable de faire comprendre dans la rédaction d'un autre passage de ce mémoire. Poincaré montre au début de la section 4 que les géodésiques fermées forment une courbe analytique $\mathcal{C}$ dans un espace convenablement choisi. L'argument qu'il donne, tel quel, est très imprécis, et même faux si l'on adopte un point de vue plus rigoureux. Garnier, en éditant le tome 6 des Œuvres de Poincaré, juge d'ailleurs nécessaire de le préciser par une longue note. Cependant, l'argument de Poincaré va directement à l'idée essentielle, à savoir qu'on peut représenter l'ensemble des géodésiques par une courbe analytique dans un espace bien choisi, peu importe lequel[23]. Il pourrait s'agir ici d'une contrainte didactique, qui interdit, lors d'une confé-

[23]En réalité, ceci n'est possible que localement. Voir l'annexe B.2 pour plus de détails.

rence, de rentrer dans des détails techniques tels ceux nécessaires pour définir rigoureusement la courbe analytique $\mathcal{C}$. Mais on sait bien que c'est une caractéristique beaucoup plus générale du style de Poincaré, qui lui a été plus d'une fois reprochée[24]. Certes, le texte dont nous disposons ne nous permet pas de savoir s'il était conscient de la légèreté de sa définition de $\mathcal{C}$. Si tel est le cas, on peut en conclure que la rédaction de Poincaré privilégie l'exposition des idées et la description des phénomènes, aux dépens parfois de l'exactitude formelle.

Nous avons jusqu'ici seulement étudié la façon dont Poincaré travaille en 1905 sur le paradigme des géodésiques. Nous avons déjà évoqué le théorème de récurrence, présenté en 1899 sur le paradigme du liquide dans un vase. Cet autre exemple d'emploi d'un paradigme donne accès à la façon dont Poincaré lui-même décrit l'intérêt de ce mode d'écriture.

Dans ce cas, en effet, il précise une raison de ce choix d'exposition : « Pour mieux faire comprendre le principe de la démonstration, je vais d'abord prendre un exemple simple. Considérons un liquide enfermé dans un vase de forme invariable et qu'il remplit complètement. [...] » [Poincaré 1892–1899, t. III, p. 142].

C'est donc en termes d'avantage pour la *compréhension* que Poincaré formule un profit qu'il trouve à présenter la démonstration sur un paradigme. Quoiqu'il ne thématise pas lui-même la façon dont il travaille sur le paradigme des géodésiques, il me semble que les deux exemples ont suffisamment de points communs pour qu'on puisse reconnaître une portée générale à ce bénéfice pour la compréhension.

Poincaré explicite la généralité de la validité de la démonstration donnée sur le paradigme à propos du théorème de récurrence. Dans le cas des géodésiques, il la manifeste implicitement en développant la partie perturbative. Dans les deux cas, il souligne la simplicité de l'exemple choisi. De même enfin qu'il explicite la signification géométrique des quantités apparaissant dans le calcul perturbatif de 1905, de même il souligne tout au long de la démonstration de 1899 la correspondance entre les propriétés du liquide dans le vase et les hypothèses du théorème de récurrence. Il écrit par exemple : « L'incompressibilité du liquide ou, ce qui revient au même, l'existence de l'invariant intégral nous montre [...] ».

La volonté de faciliter la compréhension est donc probablement un motif qui le conduit en 1905 à adopter à nouveau un mode d'écriture comparable à celui du théorème de récurrence dans les *Méthodes nouvelles*.

Dans son étude de l'usage des paradigmes dans les classiques de mathématiques en Chine ancienne, K. Chemla s'est intéressée aux indications que nous donnent les commentaires transmis avec ces textes sur la lecture qu'en faisaient les commentateurs. Ces derniers se sont préoccupés d'expliquer et de justifier les textes des classiques. Un passage d'un commentaire du IIIe siècle donne une raison qui fait écho au bénéfice que relevait Poincaré pour la compréhension :

> « Cette procédure est universelle, mais il est difficile de la faire comprendre avec des expressions abstraites *(kongyan)* ; c'est pourquoi elle est délibérément liée au cas des millets pour éliminer cet obstacle. »[Chemla 2003]

[24]On trouvera de tels reproches par exemple dans la correspondance entre Mittag-Leffler, Hermite et Weierstrass, qui formaient le jury du prix offert par le roi de Suède et reçu par Poincaré en 1889 (voir [Barrow-Green 1994]).

Cette remarque du commentateur chinois montre qu'il accorde une certaine valeur à l'abstraction, et qu'il voit l'emploi d'un paradigme comme un choix, qui peut présenter des avantages pour la compréhension. Cette liberté se manifeste également par l'existence dans les œuvres de Poincaré de deux rédactions différentes de la démonstration du théorème de récurrence, l'une à l'aide d'un paradigme et l'autre d'une façon plus abstraite. Les deux mathématiciens soulignent que l'emploi d'un paradigme permet de mieux comprendre le mécanisme de la procédure ou de la démonstration ; il fournit un domaine d'interprétation qui permet d'éclairer la signification des étapes successives de la procédure ou de la démonstration.

Les possibilités d'interprétation fournies par le paradigme, et l'aide à la compréhension qui en résulte rejoignent l'accent que Poincaré met régulièrement sur l'intuition. Il le formule explicitement dans ses travaux philosophiques, particulièrement au début de *La valeur de la science* [Poincaré 1905a]. L'enjeu affirmé en est bien la compréhension :

> « L'analyse pure met à notre disposition une foule de procédés dont elle nous garantit l'infaillibilité ; elle nous ouvre mille chemins différents où nous pouvons nous engager en toute confiance ; nous sommes assurés de n'y pas rencontrer d'obstacles ; mais, de tous ces chemins, quel est celui qui nous mènera le plus promptement au but ? Qui nous dira lequel il faut choisir ? Il nous faut une faculté qui nous fasse voir le but de loin, et, cette faculté, c'est l'intuition. Elle est nécessaire à l'explorateur pour choisir sa route, elle ne l'est pas moins à celui qui marche sur ses traces et veut savoir pourquoi il l'a choisie.
>
> [...]
>
> Cette vue d'ensemble est nécessaire à l'inventeur ; elle est nécessaire également à celui qui veut réellement comprendre l'inventeur. » [Poincaré 1905a, p. 36–37]

Ainsi, pour Poincaré, par delà l'établissement de la certitude, il s'agit de comprendre ; et ceci aussi bien pour celui qui trouve la démonstration, que pour celui qui veut la lire. Le procédé d'écriture que nous avons reconnu dans l'article de 1905, ainsi que l'insistance de Poincaré à donner l'interprétation géométrique des quantités introduites au fur et à mesure, se placent dans la même perspective : ils permettent de *comprendre* le sens des calculs et non seulement de s'assurer de leur validité. Dans ce but, ils donnent prise à l'intuition — géométrique ici, physique pour le théorème de récurrence — plus que ne le permet une présentation analytique.

Nous constatons donc une convergence des choix que fait Poincaré de travailler sur des paradigmes, d'une part avec son style de rédaction, et d'autre part avec la façon dont il décrit le travail scientifique, en donnant beaucoup d'importance à l'intuition. Notons que Poincaré considère bien dans un même mouvement l'inventeur et son lecteur, la pratique des mathématiques et leur rédaction, ce qui invite à ne pas séparer les aspects heuristiques et didactiques, mais à appréhender cette façon de pratiquer et d'écrire les mathématiques dans son ensemble. C'est tout un domaine de recherche qui s'ouvre, et la réflexion de Poincaré que nous venons de citer dégage un des axes de cette étude. La corrélation qui se dessine chez Poincaré entre l'utilisation de paradigmes et la position épistémologique amène à interroger plus largement le champ de l'histoire des mathématiques. Quels sont les mathématiciens qui font le plus grand usage de ce mode de travail, quelles relations peut-on mettre en évidence avec leurs options épistémologiques ? Il s'agit là d'un point charnière où philosophie des sciences et histoire des mathématiques peuvent s'éclairer l'une l'autre.

4.2.4 Problématiques ouvertes par ce type d'écriture mathématique

Lorsque la généralité est exprimée sur un paradigme, le lecteur doit reconnaître cette caractéristique du texte, et déterminer lui-même le champ d'application de la méthode présentée. Nous avons vu que Poincaré insiste explicitement sur la généralité de la démonstration du théorème de récurrence dans les *Méthodes nouvelles*. Par contre, dans l'article sur les géodésiques, les indices qui nous ont conduits à cette lecture sont plus discrets : l'introduction annonce une perspective plus générale que les géodésiques, puis, du fait que le cas particulier de l'ellipsoïde n'est pas exploité, on est amené à reconnaître le caractère paradigmatique du problème des géodésiques.

Le commentaire de René Garnier à cet article de 1905 dans le tome 6 des Œuvres signale que le mémoire « trouve son origine dans les problèmes difficiles posés par les solutions périodiques de la Mécanique céleste », mais la suite témoigne de ce que la lecture de Garnier diffère de celle que j'ai proposée ici. Il écrit en effet :

> « L'idée maîtresse du Mémoire est l'application d'une méthode de continuité : envisageons une famille continue de surfaces convexes analytiques, dépendant analytiquement d'un paramètre t (ou μ) et reliant une surface donnée ($t = 1$) à la sphère ou à l'ellipsoïde ($t = 0$). Pour t (ou μ) infiniment petit, on peut procéder comme en Mécanique céleste (§ 3) et l'on peut chercher à étendre par continuité les résultats obtenus au cas de t quelconque (§ 4). » [Poincaré 1916–1954, tome VI, p. 85]

Ainsi, Garnier n'a pas accordé la même importance que moi au choix explicite de Poincaré de relier une surface quelconque à un *sphéroïde*, et justement pas à une *sphère* ni à un *ellipsoïde*. C'est précisément parce que Poincaré n'exploite pas la connaissance qu'il a des géodésiques de l'ellipsoïde que nous avons pu reconnaître qu'il donne une portée plus générale à la méthode qu'il présente. Ceci lui permet en particulier de mettre en évidence l'importance de la démonstration locale. Or Garnier semble bien passer à côté du rôle de paradigme que Poincaré fait jouer au problème des géodésiques des surfaces convexes.

Il n'est d'ailleurs pas le seul lecteur de Poincaré à négliger cet aspect. Morse écrit également[25] :

> He supposed that one member of the family, say S_0, was an ellipsoid with unequal axes. On the ellipsoid there are three principal ellipses. According to Poincaré, upon varying the parameter α, closed

[25]Il est possible qu'une difficulté de traduction ait compliqué la lecture de Morse. En effet, « spheroid » désigne en anglais un ellipsoïde de révolution, alors qu'il a en général en français le sens beaucoup plus large de surface proche de la sphère. C'est dans ce sens que l'emploie Poincaré, et peut-être Morse a-t-il été conduit à porter moins d'intérêt à la partie perturbative à cause de cette équivoque.

> geodesics appear and disappear in pairs and the analytic continuation of the three principal ellipses will lead to an odd number of closed geodesics. [Morse 1934]

Dans le passage ci-dessus, Garnier cite la sphère en alternative à l'ellipsoïde comme surface à partir de laquelle on effectue la déformation. C'est une proposition plus proche de ce que fait effectivement Poincaré, puisqu'il part d'un sphéroïde, et que le nombre de géodésiques du sphéroïde est calculé en voyant le sphéroïde comme une perturbation de la sphère. Pourtant, Poincaré a bien soin de séparer la partie perturbative au voisinage de la sphère du principe de continuité analytique. Alors qu'il considère dans la première partie de sa démonstration une surface extrêmement singulière, sur laquelle les équations des géodésiques sont complètement intégrables et dont les géodésiques ont une forme simple, Poincaré passe complètement sous silence dans la partie globale les surfaces singulières qui pourraient apparaître dans la famille. C'est ainsi qu'il n'évoque pas du tout l'éventualité d'une famille continue de géodésiques fermées sans point double, sauf pour la sphère dans la première partie.

Il est difficile de comprendre comment Poincaré concevait ces surfaces singulières. L'article sur les géodésiques donne trop peu de pistes pour aborder cette question, mais je compte l'étudier sur un corpus plus large, à partir des mémoires sur les courbes définies par des équations différentielles et/ou des mémoires de mécanique céleste. Sans préjuger des résultats que donneront cette étude, il me semble que le silence de Poincaré lorsqu'il applique la méthode de prolongement analytique laisse deviner une conception particulière. C'est pourquoi il est sans doute trop rapide de supposer comme le fait Garnier que Poincaré entend relier une surface quelconque à la sphère. Il continue d'ailleurs en reprochant à la démonstration de Poincaré de ne pas prendre en compte les cas particuliers qui peuvent se produire. Or le fait que Poincaré évite soigneusement de partir de la situation singulière qu'est la sphère pour appliquer le principe de continuité analytique est probablement lié à son silence sur les surfaces singulières.

Garnier conçoit par ailleurs le lien avec la mécanique céleste essentiellement comme l'utilisation de la méthode de Lagrange. Il cantonne en effet ce lien à la section 3, sans reconnaître l'origine, dans les *Méthodes nouvelles*, des *deux* sections 3 et 4. Ceci concorde avec le choix des éditeurs des Œuvres d'inclure ce texte dans le volume consacré à la géométrie. Or l'article de 1905 apparaît très isolé dans cette petite section des Œuvres.

Au contraire, j'ai montré à quel point la démonstration que nous avons étudiée est à la fois issue de, et tournée vers, la mécanique céleste : elle vient compléter la présentation faite dans les *Méthodes nouvelles* d'un procédé qui permet d'étudier le comportement d'une trajectoire périodique quand on perturbe le système. Plus généralement, nous avons vu que cette préoccupation pour des questions de mécanique céleste, même si elle ne rend pas compte de tous les résultats contenus dans cet article de Poincaré, imprègne l'article entier, et qu'elle est explicite dès l'introduction.

D'ailleurs, quand on parcourt le texte écrit en 1901 par Poincaré à la demande de Mittag-Leffler pour présenter ses travaux scientifiques, on remarque que Poincaré ne parle de géodésiques que dans la section consacrée à la mécanique céleste [Poincaré 1921, p. 106]. Certes, ce texte a été écrit avant l'article

Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes. Nous ne pouvons donc pas savoir comment Poincaré lui-même aurait situé ce dernier dans son œuvre. Il me semble cependant assez clair que, dans l'œuvre de Poincaré, ce mémoire aurait trouvé une place plus pertinente dans le tome 7 des Œuvres, avec les travaux de mécanique céleste[26]. De façon similaire, Birkhoff [1927] et Lefschetz [1957] évoquent la méthode de continuation analytique de Poincaré, mais ne citent que les travaux de mécanique céleste. Il en résulte que Birkhoff déplore que Poincaré n'ait utilisé cette méthode qu'au voisinage de problèmes intégrables : ou bien il ne connaissait pas l'article sur les géodésiques, dans lequel Poincaré applique globalement le principe de continuation, ou bien il n'a pas fait le lien.

Il semble que se dégage une corrélation entre la mise en contexte de l'article de Poincaré, et la reconnaissance de la généralité qui s'y exprime via le paradigme des géodésiques. C'est en effet le contexte de la mécanique céleste qui nous a permis de rendre compte de l'importance de l'étude locale — dont Poincaré, à première vue, n'avait pas besoin — et, par suite, de la généralité de la méthode exposée. À l'inverse, R. Garnier, qui ne relie pas aussi fortement ce mémoire à la mécanique céleste, ne relève pas non plus l'accent mis par Poincaré sur le sphéroïde dans la partie globale.

Ainsi la mise en contexte de recherches menées grâce à des paradigmes pose un problème théorique, qui ouvre sur une nouvelle problématique. Comment peut-on dire qu'un article, un texte mathématique, dépend de tel ou tel domaine des mathématiques ? Je laisse de côté ici les problèmes posés par la différence entre les catégories employées par les auteurs et les nôtres. Le mode d'écriture sur paradigme pose en effet une autre question, qui a peut-être été moins étudiée. En effet, lorsqu'un auteur choisit de présenter un théorème, une méthode, un type de calcul, sur un exemple paradigmatique, le texte produit relève de deux domaines distincts, avec autant de légitimité. Le développement du paradigme reçoit toute sa force de l'exploitation parallèle du domaine d'interprétation d'où est tiré l'exemple, et de celui qui fournit la méthode, ou auquel elle est destinée, comme nous l'avons montré à la fin de la partie 4.2.2.

Plus largement, face à ce mode d'écriture, nous avons été conduits à adopter une lecture qui distingue la méthode de son domaine d'application, de façon à faire ressortir leurs contributions respectives, et à étudier pour eux-mêmes les liens qui sont établis entre eux. Cette méthode historiographique que nous avons été conduits à élaborer pour analyser l'article de 1905 a une portée plus large. Il me semble qu'une clef de lecture semblable permettra par exemple d'aborder le texte de la *Commentatio* de Riemann[27] d'une façon nouvelle.

Ce travail montre la diversité des lectures qu'on peut faire d'un même texte. L'éclairage apporté par un contexte se révèle capital, et complexe. Il ne s'agit pas seulement en effet de donner un cadre de lecture, mais d'analyser les liens entre le texte étudié et le contexte proposé. Les différences que nous avons notées entre la lecture de R. Garnier et celle que nous avançons montrent combien cet éclairage n'est pas donné d'avance. L'autre enjeu qui se dégage est le développement

[26] D'ailleurs, J. Barrow-Green ne manque pas de mentionner l'article sur les géodésiques parmi les travaux de Poincaré liés à la mécanique céleste après 1889 [Barrow-Green 1997].

[27] « Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quæstioni ab Ill$^{\text{ma}}$ Academia Parisiensi propositae : [Suit l'énoncé de la question] », mémoire soumis par Riemann en 1861 pour un prix de l'Académie des Sciences de Paris, et publié en 1876 [Riemann 1876].

d'un type de lecture particulier pour saisir la portée réelle du discours. En effet, comme nous l'avons constaté, la compréhension du contenu scientifique lui-même ne met pas seulement en jeu des connaissances mathématiques. Il est nécessaire d'interroger le texte pour en évaluer la portée, et mettre à jour des niveaux de généralité qui ne sont pas toujours apparents.

4.3 Conclusion

Revenons à l'articulation entre général et particulier. Le résultat de Poincaré que nous venons d'étudier se compose de deux parties. D'un côté, un argument de « prolongement analytique » permet — dans la plupart des cas — de suivre le devenir d'une géodésique fermée lors de la déformation d'une surface. Ainsi, il met en lien les géodésiques fermées sur diverses surfaces. Mais c'est seulement un résultat relatif. Il est donc nécessaire d'étudier d'un autre côté les géodésiques d'une surface donnée. Autrement dit, il faut étudier un cas particulier. Les résultats obtenus dans l'examen de ce cas particulier s'étendront alors à toutes les surfaces convexes — suffisamment générales.

Deux cas particuliers sont évoqués par Poincaré, qui peuvent tous deux conduire au résultat cherché : la sphère et l'ellipsoïde. Et nous avons pu mettre au jour deux points de vue par rapports auxquels le choix de la sphère ou de l'ellipsoïde peut être interprété en terme de recherche du général.

Au regard du seul problème des géodésiques et de leur comportement lors des déformations, l'ellipsoïde est un cas particulier générique. C'est en effet une des surfaces dont toutes les géodésiques subsistent lors d'une perturbation. Elle fournit donc un exemple du comportement « général » (ou « générique ») des géodésiques. La seule propriété spéciale nécessaire à la démonstration est que l'équation de la surface est algébrique, de petit degré. Ceci a permis à Jacobi d'en déterminer les géodésiques, et en particulier les géodésiques fermées sans point double. Mais il s'agit déjà d'un calcul complexe. Par ailleurs, ce caractère générique de l'ellipsoïde fait que, une fois ses géodésiques fermées déterminées, on tient immédiatement le résultat qui se transmet, par continuation, à toutes les autres surfaces génériques.

À l'inverse, la sphère est une surface dégénérée, pour laquelle les géodésiques fermées sans point double sont en nombre infini. C'est une exception au regard du résultat sur le nombre de géodésiques. C'est pourtant sur l'étude de la sphère que Poincaré choisit de faire reposer le résultat final. En effet, il y a un deuxième point de vue à partir duquel évaluer ce qui est plus général. C'est que la sphère est une surface remarquable, au même titre que le triangle rectangle est remarquable parmi tous les triangles. De même que la formule de Pythagore est beaucoup plus simple que celle d'Al-Kashi, et peut être prouvée avec des moyens géométriques simples, de même la détermination des géodésiques de la sphère est presque immédiate, sans comparaison avec le travail mené par Jacobi pour l'ellipsoïde. Le théorème de Pythagore peut servir à démontrer celui d'Al-Kashi, et le cas de la sphère peut être utilisé pour montrer que les géodésiques fermées des surfaces convexes génériques sont en nombre impair. Mais le théorème de Pythagore est une forme particulière de celui d'Al-Kashi, tandis que la sphère n'est pas une surface convexe générique sur laquelle les géodésiques fermées sont en nombre impair. Un travail supplémentaire est nécessaire pour passer de la situation exceptionnelle de la sphère au résultat générique, obtenu pour les sphéroïdes. Ce travail supplémentaire, cependant, relève de la méthode de perturbation qui servait déjà à établir le résultat de prolongement analytique.

C'est la possibilité d'utiliser un tel cas remarquable, fut-il exceptionnel au regard du résultat général, que Poincaré choisit de mettre en avant. Par ce choix, il fait apparaître la démarche suivie dans l'étude des géodésiques comme plus générale en l'orientant vers la mécanique céleste. Tel est le deuxième point de vue à partir duquel on peut envisager la recherche de la généralité. Poincaré propose ici d'aborder le problème général des trajectoires fermées — ou des géodésiques fermées — en le ramenant, par le principe de continuité analytique, aux cas simples, remarquables, et même exceptionnels[28]. L'ellipsoïde, de son côté, appartient au cas général, qui est, dans la plupart des problèmes de mécanique céleste, inabordable par les méthodes classiques.

Ainsi, le « cas général » et les « cas exceptionnels », qui sont a priori dans un rapport d'exclusion, sont ici réunis par Poincaré qui met l'étude d'un cas exceptionnel au service d'un résultat général — mais non universel.

[28]D'autres mathématiciens ont exploité la même idée : partir d'un cas très symétrique, même très dégénéré, pour lequel les calculs peuvent facilement être menés explicitement, et puis étudier les perturbations pour en déduire le résultat générique. Un bel exemple de cette démarche a été donné par M. Berry à propos d'un calcul de caustique.

Chapitre 5

Conclusion

5.1 Le mathématicien Poincaré

L'approche que j'ai adoptée, centrée sur un petit nombre de textes de Poincaré, très liés entre eux, a fait émerger des traits stables dans la manière de travailler de cet auteur. À travers l'analyse fouillée de ces mémoires, c'est toute une facette de Poincaré mathématicien qui se laisse appréhender.

Un premier trait récurrent me semble ressortir très fortement : Poincaré mobilise plusieurs domaines des mathématiques pour l'étude d'un problème donné. Ces appels à des connaissances variées pour éclairer une question précise se font suivant plusieurs modalités différentes.

On peut relever d'abord des appels ponctuels à des résultats établis dans des contextes tout à fait différents. C'est ainsi que Poincaré cite un résultat de Cantor sur les ensembles parfaits pour étayer son étude des trajectoires périodiques. Dans un autre contexte, il rappelle son théorème de récurrence pour discuter le postulat de Maxwell.

Plus nombreuses sont les circonstances où Poincaré fait appel à un domaine différent des mathématiques ou de la physique pour *interpréter* les conditions qui se présentent dans l'étude d'un problème. Dès sa thèse il donne une traduction géométrique des conditions qu'il formule pour distinguer différents cas. Dans le mémoire *Sur les courbes*, nous avons vu qu'il introduit également des interprétations géométriques des hypothèses qui caractérisent les différents cas. Dans le mémoire *Sur les géodésiques*, il s'intéresse à la signification géométrique des calculs menés suivant la méthode qu'il avait élaborée pour la mécanique céleste. Dans les *Méthodes nouvelles*, la théorie cinétique des gaz lui inspire une autre forme d'interprétation pour les hypothèses du théorème de récurrence : en présentant ce théorème sur le paradigme du mouvement des molécules dans un vase, il peut traduire la condition de conservation du volume par l'hypothèse physique d'incompressibilité.

Mais les interprétations géométriques ou physique auxquelles Poincaré fait ainsi appel ne restent pas de simples illustrations. Elles aident à la compréhension des phénomènes étudiés, et plus encore elles *contribuent* à l'analyse. À ce titre, elles jouent un rôle comparable aux outils que nous avons évoqués précédemment : la théorie des ensembles de Cantor pour l'étude du problème restreint des trois corps, le théorème de récurrence dans la théorie cinétique des gaz. Nous avons vu par exemple que la traduction géométrique de l'étude des géodésiques du sphéroïde conduit à l'introduction de l'*analysis situs.* Cette dernière permet de conclure à l'imparité du nombre de géodésiques fermées des sphéroïdes. De même, dans l'étude des points singuliers, la traduction des conditions qui définissent les différents cas en termes de faisceau homographique joue un rôle important dans la hiérarchisation des cas : elle met en évidence la dégénérescence de certains cas.

La comparaison avec les courbes algébriques semble constituer une source d'inspiration plus large, qui revient à plusieurs reprises : dans le mémoire *Sur les courbes* d'une part, et pour l'étude des trajectoires périodiques dans les travaux de mécanique céleste et dans le mémoire *Sur les géodésiques* d'autre part. La considération des courbes $X = 0$ et $Y = 0$ permet de caractériser les points singuliers de première espèce, et guide la distinction de plusieurs cas dans l'étude de ceux de deuxième espèce. Par ailleurs, la théorie des courbes algébriques est présentée par Poincaré comme un *modèle* pour l'étude qualitative des courbes définies par les équations différentielles. C'est à cette même théorie que Poincaré rattache l'idée de la disparition par couple des trajectoires périodiques en mécanique céleste, ou des géodésiques fermées.

Enfin, à plusieurs reprises, nous avons pu constater que les résultats extérieurs mobilisés par Poincaré pour étudier un problème donné ne sont pas seulement des outils tout prêts. Leur utilisation dans un nouveau contexte suscite de nouvelles questions et s'accompagne de nouveaux résultats.

Nous avons ainsi étudié assez longuement dans le chapitre 3 comment l'utilisation des probabilités pour préciser l'énoncé du théorème de récurrence s'accompagne d'un travail sur le calcul des probabilités et laisse des traces dans le cours professé sur ce sujet par Poincaré quelques années plus tard.

Par ailleurs, Poincaré applique en 1894 le théorème de récurrence à la théorie cinétique des gaz, ce qui le conduit à proposer une formulation plus précise du postulat de Maxwell. J'ai étudié moins en détail cette deuxième période. Mais nous avons pu voir que l'utilisation du théorème de récurrence dans les débats que suscite la théorie cinétique ne reste pas non plus sans suite. De nouvelles questions se font jour à cette occasion, qui conduisent Poincaré à modifier sa présentation du théorème de récurrence dans les *Méthodes nouvelles.* C'est ainsi qu'il s'intéresse, dans ce dernier ouvrage, à la propriété de récurrence non seulement dans les temps positifs, mais également dans les temps négatifs. Ceci est très probablement à mettre en lien avec la question de la réversibilité des phénomènes étudiés par la théorie cinétique.

L'utilisation du paradigme des géodésiques dans l'article de 1905 en vue de poursuivre le travail sur l'étude des solutions périodiques suscite également un apport pour les deux problèmes. La méthode élaborée pour la mécanique céleste conduit à un résultat nouveau sur les géodésiques, et en retour les propriétés du paradigme sont exploitées en vue de la mécanique céleste.

Ces remarques font apparaître la place centrale occupée par la géométrie — qu'elle soit euclidienne, projective, algébrique, ou différentielle. Elle permet à Poincaré d'*interpréter* et, par là, de mieux *comprendre* les phénomènes étudiés, mais aussi d'*évaluer* leur importance. Il me semble qu'on peut voir là une technique fondamentale de travail qui se prolonge dans l'approche géométrique et qualitative des problèmes de dynamique développée par Poincaré.

L'interprétation géométrique des phénomènes se superpose à plusieurs endroits à leur étude par d'autres méthodes. Il en est ainsi pour les interprétations géométriques données aux conditions qui définissent les différents cas dans l'étude des points singuliers. De même dans le mémoire *Sur les géodésiques*, nous avons vu que Poincaré distingue bien les calculs menés en suivant la méthode proposée dans ses travaux de mécanique céleste d'une part et l'interprétation géométrique des quantités introduites au cours de ces calculs d'autre part.

Mais la géométrie n'est pas seulement un moyen d'interprétation combiné à d'autres modes d'investigation. Poincaré développe une approche géométrique des problèmes de dynamique auxquels il s'intéresse. En particulier, il considère les solutions d'équations différentielles moins comme des fonctions que comme des trajectoires dans des espaces bien choisis. C'est là toute la nouveauté de l'approche qualitative qu'il inaugure avec ses mémoires *Sur les courbes*. Cette innovation semble être préparée par les passages d'interprétation géométrique insérés par Poincaré dans sa thèse. Outre la place qu'ils donnent à la géométrie, ces passages se rapprochent en effet de l'étude qualitative introduite quelques années plus tard : Poincaré s'y restreint au domaine réel. Ainsi lorsque Poincaré s'attache à considérer l'interprétation géométrique des phénomènes qu'il étudie, il ne s'agit pas seulement d'une illustration, mais d'une technique de travail qui le conduit à introduire de nouvelles méthodes : étude qualitative des équations différentielles, *analysis situs*.

Poincaré continue à mettre en œuvre la méthode d'étude qualitative dans ses travaux de mécanique céleste. Ceci le conduit à proposer de nouvelles représentations géométriques pour les solutions des problèmes de mécanique céleste, en particulier pour le problème restreint des trois corps. Le soin qu'il apporte à décrire ces représentations géométriques, en leur consacrant toute une section de son mémoire *Sur le problème des trois corps*, montre l'importance qu'il leur accorde. Les malentendus dont fait état la correspondance avec Mittag-Leffler et Weierstrass[1] semblent indiquer la nouveauté de cette approche : Poincaré considère les trajectoires dans l'espace des phases et non dans l'espace physique. Ceci lui permet de se ramener à l'étude de trajectoires d'équations du premier degré. Il ne s'agit pas seulement d'un choix de coordonnées plus pratiques. L'espace des phases est véritablement envisagé comme un espace géométrique. L'utilisation de la propriété de conservation du volume ainsi que l'étude des antécédents et conséquents d'une région donnée témoignent que cette vision géométrique occupe une place centrale dans le travail sur le problème des trois corps.

Poincaré n'est probablement pas le seul à donner une grande importance aux liens entre la géométrie et l'étude des équations différentielles. L'ouvrage de Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal* [Darboux 1887–1896], à peu près contemporain, me semble constituer une piste intéressante pour prolonger le travail que j'ai engagé sur Poincaré. Darboux cherche-t-il plutôt à utiliser les méthodes du calcul infinitésimal pour résoudre des problèmes posés par la géométrie, ainsi que le titre de son ouvrage le laisse entendre ? Il privilégierait dans ce cas un sens différent des liens possibles entre géométrie et calcul différentiel : l'approche

[1] Voir p. 125 : Weierstrass semble n'avoir pas remarqué immédiatement toutes les conséquences du fait que les coordonnées employées par Poincaré incluent les vitesses des corps.

qualitative de Poincaré consiste, elle, à élaborer une vision géométrique des solutions d'équations différentielles. Pour poursuivre le travail dans cette direction, on pourrait chercher à identifier d'autres auteurs qui mettent en place des emplois spécifiques de la géométrie, et comparer leurs démarches avec celle de Poincaré.

Par ailleurs, c'est seulement à partir d'un petit corpus de textes de Poincaré que j'ai dégagé la constance avec laquelle il met en œuvre une approche géométrique des problèmes étudiés. Il serait intéressant d'élargir cette étude et de chercher à caractériser son travail dans d'autres domaines. Une telle exploration permettrait de déterminer si l'importance de la géométrie dans les textes que j'ai analysés est liée spécifiquement au fait qu'ils portent sur les équations différentielles et la mécanique céleste, ou s'il s'agit d'un trait saillant de l'ensemble de son œuvre.

L'étude de l'écriture sur paradigme, en particulier dans le mémoire *Sur les géodésiques*, nous a permis d'observer une autre caractéristique du mode de travail de Poincaré : il commence très souvent par examiner un cas simple. Il se préoccupe seulement dans un deuxième temps d'indiquer l'extension du résultat ainsi obtenu — dans le cas des géodésiques, il va jusqu'à laisser ce travail au lecteur.

J'ai surtout étudié de ce point de vue les endroits, dans mon corpus, où Poincaré emploie un paradigme : celui des géodésiques en 1905, et celui des molécules dans un vase en 1999, lorsqu'il énonce le théorème de récurrence dans les *Méthodes nouvelles*. Ces exemples permettent à Poincaré de disposer d'un champ d'interprétation, géométrique ou physique, des quantités qui interviennent dans les calculs. Mais on trouve, dans le même corpus, de nombreux choix d'exposition qui partagent une partie des caractéristiques de l'usage d'un paradigme. Ainsi, dès les premiers mémoires *Sur le problème des trois corps*, Poincaré énonce le théorème de récurrence en deux temps. Il démontre d'abord le résultat dans le cas d'un système d'équations différentielles à trois variables qui conservent le volume, puis indique que le résultat reste vrai pour un nombre quelconque de variables, dès qu'il existe un invariant intégral.

J'ai montré que le travail sur un paradigme n'est pas seulement un premier essai, mais qu'il est mené d'emblée dans une perspective générale. De même, on peut montrer que Poincaré avait certainement déjà en vue l'énoncé du théorème de récurrence pour un nombre quelconque de variables au moment où il en donne la formulation restreinte. Un premier indice est que l'énoncé du théorème de récurrence est précédé de toute une partie sur les invariants intégraux. Poincaré a donc longuement réfléchi à l'existence de ces invariants — dont fait partie le volume pour certains problèmes —, quel que soit le nombre de variables. L'énoncé du théorème de récurrence dans le cas simple où le volume est invariant se situe ainsi dans la perspective d'une réflexion plus vaste sur l'utilisation des invariants intégraux. Un deuxième indice est que Poincaré conserve cet ordre d'exposition lorsqu'il reprend son texte, dans la deuxième version du mémoire *Sur le problème des trois corps* puis dans les *Méthodes nouvelles*. Un dernier indice est qu'il ne juge pas nécessaire de donner une nouvelle démonstration lorsqu'il indique que le théorème reste valide sous les hypothèses plus générales : Poincaré considère donc que la démonstration du premier énoncé possède déjà une portée plus grande que le cas simple dans le cadre duquel elle est rédigée.

Une démarche comparable est employée à plusieurs reprises dans le mémoire *Sur les courbes.* On en trouve un exemple particulièrement frappant dans le chapitre qui suit celui où Poincaré classifie les points singuliers. Il démontre d'abord le théorème suivant — il n'est pas nécessaire ici de savoir précisément ce qu'il entend par cycle algébrique, contact, etc. :

> Théorème VI. — *Le nombre des contacts d'un cycle algébrique qui n'a pas de point anguleux, qui n'a pas de contact d'ordre supérieur avec une caractéristique et qui ne passe par aucun point singulier est toujours fini et pair.* [Poincaré 1881a, p. 34]

Il énonce ensuite une série de « remarques » qui étendent la validité du théorème aux cas exclus dans l'énoncé. La première suffit à faire comprendre le phénomène :

> *Remarque I.* — Le théorème est encore vrai quand même le cycle donné a des contacts d'ordre supérieur avec une caractéristique ; à la condition toutefois que l'on ait soin de compter un contact d'ordre n pour n contacts. [Poincaré 1881a, p. 35]

Il est plus difficile ici de *démontrer* que le théorème est d'emblée pensé avec les extensions que constituent les remarques. Cependant, les remarques viennent immédiatement après le premier énoncé, si bien qu'elles n'apparaissent pas comme des ajouts postérieurs, suscités par la découverte qu'il est possible d'étendre le théorème. Sans doute Poincaré vise-t-il dès le départ le résultat général. Mais il préfère indiquer d'abord ce qui se passe dans les cas simples, avant de détailler les subtilités des cas où il existe des contacts d'ordre supérieurs, des points anguleux, etc.

Les deux exemples que je viens d'évoquer appellent un commentaire spécifique. La généralisation que Poincaré apporte dans un deuxième temps, après avoir énoncé le théorème pour un cas simple, n'est pas du même genre dans les deux cas. Pour le théorème de récurrence, le cas simple de trois variables, où le volume est un invariant intégral, constitue un cas particulier par rapport à l'énoncé général qui vient ensuite. Lorsqu'il détermine le nombre de contacts d'un cycle algébrique, en revanche, Poincaré s'intéresse d'abord à ce qui se passe dans le cas général. Il exclut dans son premier énoncé les circonstances exceptionnelles : point anguleux, contact d'ordre supérieur, etc. Les remarques qui suivent sont l'occasion d'explorer ces singularités et de leur étendre le résultat général, moyennant des conventions pour le comptage des contacts. Malgré cette différence dans la nature des problèmes, la rédaction du théorème de récurrence et celle du théorème sur le nombre de contacts des cycles algébriques présentent les mêmes particularités. Dans les deux cas, le premier énoncé, celui qui est mis en évidence par le titre de « théorème », n'est pas le résultat le plus complet. Ce dernier vient seulement dans un deuxième temps, et il est moins valorisé par la typographie et la structuration du texte.

Il me semble que, dans ces contextes différents, les choix d'exposition de Poincaré répondent à la même orientation profonde. Il vise à comprendre et expliquer ce qui se passe, plutôt qu'à attirer l'attention sur le résultat le plus fort qu'il peut obtenir. Le cas simple et plus accessible à l'imagination de la dimension trois, pour l'énoncé du théorème de récurrence, comme la concentration sur le résultat générique, hors singularités, pour le dénombrement des contacts d'un cycle algébrique, servent une compréhension plus immédiate des phénomènes en jeu. L'étude de l'emploi de paradigmes nous avait déjà conduits à des conclusions semblables. Il semble donc qu'il s'agisse d'un trait caractéristique du travail de Poincaré. Il ne cherche pas à présenter une synthèse abstraite, aussi englobante que possible, de ses recherches. Il paraît plutôt s'attacher à présenter l'idée principale de chaque résultat, en l'énonçant dans un cadre qui met en lumière ce qui est essentiel. Le titre même de son grand ouvrage de mécanique céleste, les « *Méthodes nouvelles* », confirme cette tendance : il ne s'agit pas d'un « traité » systématique, ni d'une « théorie » unificatrice, mais de « méthodes ». Poincaré les applique pour obtenir certains résultats, sans fermer leur champ d'application possible.

Le choix de travailler avec des équations polynomiales, dans sa thèse aussi bien que dans le mémoire *Sur les courbes*, relève de la même démarche. Même si Poincaré utilise, dans le mémoire de 1881, cette propriété des équations pour se ramener à l'étude des trajectoires sur la sphère, on peut voir que les résultats qu'il obtient dans ce cadre ont, à ses yeux, une validité plus grande. Il n'hésite pas, en effet, à les utiliser dans son étude des géodésiques, alors même que les données ne sont plus polynomiales. Mais la fonction dont il cherche à déterminer les points critiques est bien définie sur la sphère — et prend des valeurs égales aux couples de points opposés —, ce qui est la seule propriété effectivement utilisée dans le mémoire *Sur les courbes*.

La poursuite de l'essentiel qui se manifeste dans ces traits de l'écriture de Poincaré est-elle liée au fait que c'est précisément lui qui développe des moyens pour quantifier les cas exceptionnels ? Le corpus que j'ai constitué montre du moins une corrélation frappante. Ici encore, mes conclusions invitent à poursuivre l'investigation, par l'exploration des recherches de Poincaré dans d'autres domaines, et par la comparaison avec les travaux d'autres mathématiciens.

5.2 Cas particuliers. Réflexion historique et épistémologique

Au début de mon travail, je proposais de distinguer trois sortes de cas particuliers que peut présenter un problème donné : cas particuliers exceptionnels, génériques et remarquables.

Je définissais les *cas particuliers génériques* comme ceux qui relèvent d'un *cas général*, par opposition aux *cas particuliers exceptionnels*. Ainsi, dans le mémoire *Sur les courbes*, les points singuliers définis et étudiés au titre des trois premiers cas subordonnés sont génériques : ce sont eux que l'on rencontre dans le « cas général » délimité par Poincaré pour conduire l'étude globale des courbes définies par les équations différentielles. Au contraire, les autres cas sont exceptionnels : ils « ne se produisent pas si les polynomes sont les plus généraux de leur degré », et les hypothèses du « cas général » sont formulées précisément d'une façon qui les exclut. Les trajectoires récurrentes dans le problème restreint des trois corps sont génériques, par opposition aux trajectoires non récurrentes. Poincaré mobilise le calcul des probabilités pour préciser en quel sens ces dernières sont exceptionnelles. L'ellipsoïde est un cas particulier générique de surface convexe : les géodésiques fermées sans point double y sont en nombre impair. La sphère, à l'opposé, est un cas particulier exceptionnel, auquel le résultat d'imparité ne s'applique pas.

Par ailleurs je proposais de nommer *cas particuliers remarquables* les cas particuliers qui satisfont au résultat général mais présentent des propriétés spéciales que l'on peut exploiter. Ainsi, l'ellipsoïde est une surface convexe remarquable par le fait qu'on peut en déterminer les géodésiques. Nous avons vu également que Poincaré s'intéresse spécialement, dans ses travaux de mécanique céleste, aux trajectoires périodiques. Elles constituent des cas particuliers remarquables de trajectoires récurrentes, qui motivent l'étude de ces dernières.

J'ai d'abord concentré mon attention sur l'opposition entre cas exceptionnels et cas général, et sur les moyens élaborés par Poincaré pour établir le caractère exceptionnel de certains cas et en tirer parti.

La première stratégie employée par Poincaré pour délimiter un « cas général » dont ne sont exclus que des cas particuliers exceptionnels est élaborée dans le mémoire de 1881 *Sur les courbes*. On la retrouve lorsque Poincaré étudie la persistance des trajectoires périodiques sous l'effet de perturbations, dans ses travaux sur le problème des trois corps à partir de 1889. J'ai proposé de la qualifier de « hiérarchisation des cas ». En effet, Poincaré ne se contente pas, dans ces travaux, d'opposer un cas général à des cas exceptionnels. Il met en place une gradation complexe entre les différents cas qui peuvent se produire lorsqu'on étudie une équation différentielle au voisinage d'un point. Cette gradation est capitale en vue de l'étude globale. Les points singuliers, pris isolément, sont exceptionnels : le comportement général est celui où le théorème de Cauchy s'applique et assure l'unicité de la solution. Mais lorsqu'on étudie l'équation sur toute l'étendue de la sphère, Poincaré montre qu'il existe toujours des points singuliers. Plus encore, ce sont les points autour desquels s'organise la dynamique. Or les points singuliers peuvent présenter des comportements multiples, et Poincaré ne peut pas prendre en compte tous les cas possibles dans l'étude globale. Il distingue donc ceux qui se présentent dans le cas général de ceux qui sont plus particuliers.

Il met en œuvre à partir de 1890 une stratégie différente pour renforcer le théorème de récurrence en montrant que les trajectoires non récurrentes sont exceptionnelles. On peut relever entre ces deux corpus deux différences principales dans la façon dont Poincaré travaille pour opposer cas général et exceptions.

D'une part les moyens utilisés sont bien différents. Lorsqu'il étudie les points singuliers, ou les trajectoires périodiques, une partie du travail de Poincaré consiste à distinguer différents cas qu'il étudie par des moyens appropriés. La hiérarchisation de ces cas s'ajoute au travail de partition qui les produit. Poincaré emploie à cet effet des critères que nous avons pu mettre au jour, quoiqu'il ne les explicite pas lui-même. Ces critères s'appuient directement sur les considérations qui servent par ailleurs à délimiter et étudier les différents cas : conditions d'égalités entre les coefficients qui caractérisent les cas et interprétations géométriques données à ces coefficients. Au contraire, pour énoncer le corollaire du théorème de récurrence, Poincaré introduit un outil nouveau : le calcul des probabilités.

D'autre part, l'attention portée à l'explicitation de ces moyens est à peine comparable. Dans le mémoire *Sur les courbes*, Poincaré délimite précisément différents cas, et insiste sur le fait que les dernier sont plus particuliers. Mais il n'identifie pas les critères à l'aide desquels il évalue leur degré de généralité, et ne justifie pas qu'ils sont pertinents. Lorsqu'il s'intéresse aux conditions sous lesquelles une trajectoire périodique subsiste si on perturbe les équations, on peut déceler le même principe d'organisation par hiérarchisation des cas. Mais Poincaré ne le souligne pas, et c'est au lecteur de le reconnaître. Notre auteur semble donc estimer que ce processus de hiérarchisation est suffisamment évident, ou du moins qu'il ne mérite pas d'être particulièrement souligné. Au contraire, dans son travail sur le théorème de récurrence, Poincaré apporte un grand soin à définir ce qu'il entend par « exceptionnel ». Il indique comment il détermine la probabilité. Ceci lui permet de *démontrer* que les trajectoires non récurrentes sont exceptionnelles. Alors que les critères employés pour la hiérarchisation des cas sont implicites, Poincaré thématise, en 1890, à l'aide de l'outil probabiliste, le caractère exceptionnel des trajectoires non récurrentes.

Ces différences sont corrélées avec la façon dont les problèmes se présentent à Poincaré. Quand il étudie l'allure des courbes solutions au voisinage des points singuliers, il est amené à distinguer plusieurs « cas », en fonction des théorèmes disponibles et des résultats qu'ils fournissent. Ces « cas » sont déterminés par des conditions algébriques sur les coefficients des polynômes qui définissent l'équation différentielle. Lorsqu'il commente le caractère plus ou moins général des phénomènes étudiés, c'est sur ces « cas », plutôt que sur les sortes de points singuliers auxquels ils conduisent, que Poincaré fait porter son analyse. Les théorèmes qu'il applique pour étudier la persistance des trajectoires périodiques conduisent également à délimiter plusieurs cas, définis par des conditions de forme similaire. Dans ces deux problèmes, on a donc des « cas » identifiés par des conditions explicites d'égalité ou d'inégalité. Leur degré de généralité se lit sur ces conditions. Il peut donc être considéré par Poincaré comme suffisamment évident pour qu'il ne soit pas nécessaire de justifier plus avant que certains cas sont plus particuliers que d'autres. Au contraire, les trajectoires récurrentes sont obtenues non comme résultant d'une condition sur les données initiales, mais par une démonstration non constructive. Leur caractérisation ne donne donc pas d'indication immédiate sur leur généralité. Une analyse supplémentaire est nécessaire pour déceler qu'elles sont plus générales que les trajectoires non récurrentes.

Une différence semble donc se dégager entre les phénomènes étudiés dans les deux premiers chapitres. Mais il s'agit moins d'une différence dans la nature de la généralité mise en jeu que dans la façon dont les objets dont on cherche à comparer la généralité sont définis. Il est aujourd'hui classique de distinguer deux notions de généricité en analyse : la généricité au sens topologique, qui s'appuie sur les catégories de Baire, et qu'on retrouve par exemple au cœur des théories modernes de transversalité et de stratification, et la généricité au sens probabiliste [Oxtoby 1971]. Un premier réflexe pourrait suggérer de rapprocher la classification des points singuliers par Poincaré de la première notion, et de l'opposer ainsi au travail sur le théorème de récurrence, qui signe la naissance de la généricité au sens probabiliste. Or l'analyse des textes conduit à les opposer à un autre point de vue : la hiérarchisation des cas est développée par Poincaré pour prendre en compte les degrés de généralité de cas définis par des conditions explicites. L'approche probabiliste est introduite pour étudier la généralité d'objets étudiés de façon implicite.

Ceci suggère plusieurs pistes de réflexion pour prolonger le travail que j'ai entrepris, en vue de dégager les démarches élaborées historiquement pour caractériser des cas particuliers exceptionnels. La distinction entre des problèmes posés de façon explicite et d'autres qui se présentent implicitement a-t-elle une portée épistémologique et historique plus large que les travaux de Poincaré auxquels je me suis intéressée ? S'agit-il d'une opposition à deux termes ou de deux modes parmi d'autres selon lesquels des problèmes liés à la question de la généricité peuvent se présenter ? Le problème étudié par Gyldén semble, à cet égard, appartenir à un troisième type. Gyldén cherche à montrer que, parmi les réels de l'intervalle $[0; 1]$, ceux dont le développement en fraction entière contient de grands coefficients sont exceptionnels. La condition qui est ainsi examinée n'est pas une condition algébrique, mais arithmétique. Peut-on la rapprocher de l'un des problèmes étudiés par Poincaré ? C'est une question qui nécessite une analyse spécifique et pourra contribuer à faire avancer la réflexion à laquelle j'ai apporté quelques éléments.

Mon travail n'est en effet qu'un pas dans un champ immense. Même en considérant seulement les travaux à peu près contemporains de ceux de Poincaré, on peut penser à plusieurs mathématiciens, outre Gyldén, qui se sont intéressés à la formulation de résultats généraux mais non universels et à la caractérisation de ce qui peut être dit exceptionnel. On peut nommer en particulier Cantor, Borel, Baire. Les conclusions obtenues en étudiant les recherches de Poincaré inspirent plusieurs questions à adresser à de nouveaux corpus :

Quels outils sont utilisés ou mis au point pour mesurer la généralité ou la particularité d'un cas ou d'une propriété ? Peut-on mettre le choix de ces outils en correspondance avec un contexte historique ? avec la façon dont les objets étudiés sont définis ou obtenus ? avec une caractérisation plus intrinsèque de ces objets ?

Un autre aspect de mon travail a porté sur la distinction entre les cas particuliers exceptionnels, qui ne satisfont pas au résultat général, et cas particuliers remarquables, pour lesquels le résultat général est vérifié, mais qui présentent des propriétés spéciales. Il apparaît que la distinction est plus ténue qu'on pourrait le penser à première vue. On le voit déjà dans l'article *Sur les courbes.* Poincaré définit un premier « cas général », et démontre, sous cette hypothèse, la formule liant les nombres de points singuliers de différentes sortes. Une hésitation quant à la généralité d'une des hypothèses définissant le « cas général » le conduit à définir un deuxième cas, dans lequel il démontre la même formule. Certains cas qui apparaissent d'abord comme exceptionnels se révèlent donc satisfaire à la même propriété que les cas génériques, même s'ils requièrent une nouvelle démonstration.

L'utilisation de l'exception constituée par la sphère, dans l'article sur les géodésiques, montre un autre aspect de la proximité entre cas exceptionnels et remarquables. Il est assez naturel de penser qu'un cas particulier remarquable peut servir pour démontrer le résultat général. Par exemple, on peut démontrer le théorème d'Al-Kashi en introduisant une hauteur du triangle et en appliquant le théorème de Pythagore aux deux triangles rectangles ainsi construits. Mais nous avons vu avec le mémoire *Sur les géodésiques* qu'un cas particulier exceptionnel peut également être utilisé pour établir le résultat général, alors même qu'il n'y satisfait pas.

Plus encore, la théorie de Fuller permet de définir l'« indice » d'une géodésique fermée (voir l'annexe B.2.4), ou d'un ensemble compact de telles géodésiques, qui joue le rôle du « nombre » de géodésiques. Le résultat de Poincaré, valable seulement pour une surface générale, peut s'énoncer en terme d'indice d'une façon qui vaut pour n'importe quelle surface : la somme des indices des géodésiques fermées, ou des familles de telles géodésiques, est impaire. Dans le problème des points singuliers, Poincaré définissait déjà un indice possédant les mêmes propriétés. La démonstration de Poincaré permet facilement d'obtenir le résultat suivant : pour n'importe quelle équation, la somme des indices des points singuliers est -2. Dans le cas général qu'il délimite, la somme des indices peut être interprétée comme $C - N - F$, où C est le nombre des cols, N celui des noeuds, et F celui des foyers. Mais l'énoncé en terme d'indice permet d'unifier tous les cas, y compris s'il existe des points singuliers dégénérés : simplement, les indices de ces derniers ne seront pas toujours 1 ou -1 comme ceux des cols, nœuds et foyers. À la vue de ces deux exemples, il apparaît que la possibilité d'unifier les cas particuliers exceptionnels dans un résultat universel, moyennant une reformulation du problème, existe pour les deux problèmes que nous avons étudiés dans le premier chapitre. En revanche, il ne semble pas possible d'en faire autant à propos du théorème de récurrence. S'agit-il d'une piste qui pourrait conduire à dégager une différence intrinsèque entre les deux problèmes ? Est-ce seulement un effet de point de vue, le signe que notre compréhension des phénomènes n'est pas aussi profonde dans les deux cas ?

5.3 Que lit-on dans un texte ?

En conclusion, je souhaite revenir sur la méthode d'étude que j'ai été amenée à développer. J'en ai présenté les principales modalités dans l'introduction, je voudrais revenir ici sur les enjeux historiographiques et épistémologiques.

Il me semble que la lecture détaillée que j'ai élaborée au cours de cette thèse s'est imposée pour répondre à trois types d'objectifs.

C'est d'abord pour établir de façon argumentée une interprétation des mémoires de Poincaré auxquels je m'intéressais que je me suis penchée sur leurs propriétés textuelles. Ainsi, je cherchais à comprendre ce que Poincaré entend lorsqu'il affirme qu'un cas est « plus particulier » qu'un autre dans son mémoire *Sur les courbes*. C'est en examinant comment il présente chaque item de son énumération, et en repérant les ruptures de parallélisme, que j'ai pu identifier des éléments au regard desquels les cas sont de plus en plus particuliers à mesure qu'on avance dans l'énumération. Ceci m'a permis de proposer, sur des bases solides, des hypothèses quant aux critères utilisés par Poincaré pour comparer, du point de vue du degré de généralité, les cas auxquels il a affaire.

Les textes constituent, à un deuxième plan, des traces — souvent les seules dont dispose l'historien — du travail mathématique de l'auteur, du développement historique de sa réflexion. L'étude de l'évolution de la formulation du théorème de récurrence, et les échos entre la terminologie que Poincaré y emploie et celle qu'on retrouve dans son cours de calcul des probabilités permettent ainsi d'établir une chronologie de sa réflexion sur le calcul des probabilités et sur les évènements de probabilité nulle.

Un troisième niveau d'étude conduit à examiner les textes en tant que tels. L'historien n'a pas seulement à les lire pour en *tirer* des informations sur le travail de l'auteur, des indices pour argumenter sur une question historique. Le texte est lui-même un résultat du travail mathématique, que l'historien peut prendre comme objet d'étude. La formation d'un concept mathématique inclut l'élaboration d'une terminologie et d'une façon d'employer cette terminologie : c'est seulement par là que le mathématicien peut faire travailler le concept qu'il a forgé. La rédaction n'est donc pas une activité annexe, littéraire, du mathématicien. C'est une part essentielle de son travail mathématique.

Nous l'avons vu en étudiant le mémoire *Sur les courbes*. Poincaré y examine différentes sortes de points singuliers, et présente ses résultats sous la forme d'une énumération. Or cette énumération n'est pas seulement la concaténation des conclusions relatives aux différentes sortes de points singuliers. Poincaré élabore un texte structuré, par et dans lequel il ordonne et hiérarchise très précisément les différents cas qu'il considère. La forme du texte elle-même est un instrument de cette hiérarchisation, que ne remplacent pas totalement les indications données sur le caractère plus ou moins particulier de tel ou tel cas. L'analyse que j'ai menée de cette énumération des points singuliers n'est pas seulement un *moyen* qui donne accès à une réflexion de Poincaré sur les degrés de généralité des différents cas. Sa réflexion est inséparable de l'expression qu'il lui donne, si bien qu'étudier l'énumération qu'il fabrique est aussi un *but* en soi pour l'historien : c'est étudier le travail de Poincaré sur la généralité.

L'élaboration du corollaire du théorème de récurrence nous a permis d'observer la fabrication d'un tout autre mode d'expression du général. Poincaré introduit une nouvelle forme d'énoncé, qui consiste à affirmer une propriété en précisant que les objets n'y satisfaisant pas sont exceptionnels. Nous avons vu comment l'emploi du terme « stabilité » est modifié par le concept de trajectoires « exceptionnelles » : Poincaré ne désigne plus seulement comme « stables au sens de Poisson » les trajectoires récurrentes, mais également le problème dans sa globalité, alors même qu'il existe des trajectoires non récurrentes. La réflexion sur le caractère exceptionnel de ces dernières se traduit par une nouvelle façon d'exprimer un résultat mathématique. Mais il ne s'agit pas encore de la terminologie qui s'imposera plus tard, où l'on parlera de « presque toutes les trajectoires », ou de propriété vraie « presque partout ». On voit donc que, sur ce point, il y aura, après Poincaré, un travail supplémentaire pour aboutir à la formulation actuelle. S'attacher seulement au résultat pourrait conduire à négliger cette étape. J'ai ainsi tenté de montrer dans cette thèse l'intérêt que présente l'étude d'une part parfois délaissée de l'activité des mathématiciens : la production, en parallèle des résultats, de mots, de façons de parler, de types d'énoncés qui permettent de les exprimer.

J'espère que les pistes qui sont apparues au fil de ces recherches, dont je n'ai suivi qu'un petit nombre, pourront être explorées et permettront d'approfondir notre connaissance de Poincaré et de sa façon de faire des mathématiques.

Annexe A

Extraits de [Pa]

A.1 Introduction [Pa, p. 5–8]

« Le présent mémoire a été entrepris pour répondre à la première des quatre questions du concours ; mais les résultats que j'ai obtenus sont tellement incomplets que j'aurais hésité à les publier si je ne savais que l'importance et la difficulté du problème donne de l'intérêt à tout ce qui s'y rapporte et qu'on ne peut attendre une solution définitive que d'une longue série d'efforts successifs. [p. 5]

Les immortels fondateurs de la mécanique céleste ont cherché à résoudre le problème des n corps par approximations successives. À cet effet, ils ont développé la solution suivant les puissances croissantes des masses et exprimé chaque terme du développement par une série de sinus et de cosinus. Leur succès montre suffisamment que cette méthode était la plus convenable pour les premières approximations.

Parmi les résultats qu'ils ont obtenus, un des plus remarqués est celui qui se rapporte à la stabilité du système solaire. Laplace et Poisson sont parvenus à démontrer qu'en tenant compte seulement des premières et secondes puissances des masses, les grands axes des orbites ne subissent que des variations périodiques. On a cru longtemps que le fait était général et on en a même cherché une démonstration directe ; c'était une erreur. Dès qu'on tient compte des troisièmes puissances des masses, on voit apparaître des termes séculaires dans le développement des grands axes.

Ainsi la méthode dont nous venons de parler devient insuffisante quand on veut pousser l'approximation un peu loin. Les séries auxquelles elle conduit contiennent non seulement des termes purement trigonométriques de la forme :

$$A \sin \alpha t \qquad \text{ou} \qquad B \cos \alpha t,$$

non seulement des termes mixtes de la forme :

$$A t^m \sin \alpha t \qquad \text{ou} \qquad B t^m \cos \alpha t,$$

mais des termes purement séculaires de la forme [p. 6]

$$A t^m.$$

Rien ne permet donc d'affirmer que ces séries resteront convergentes pour de grandes valeurs de t.

Aussi les géomètres contemporains se sont ils efforcés de remplacer ces développements par d'autres séries ne contenant que des termes trigonométriques. Ils y sont enfin parvenus dans ces derniers temps et les séries de M. Gyldén comme celles de M. Lindstedt ne contiennent que des termes en

$$A \sin \alpha t \qquad \text{ou} \qquad B \cos \alpha t,$$

où non seulement A et B mais encore α sont développés suivant les puissances de m.

Tout n'est pas fini cependant. On peut se demander si les séries ainsi obtenues sont convergentes et comme la présence de « petits diviseurs » a pour effet de rendre certains termes très grands, on peut avoir des doutes sérieux au sujet de cette convergence. Le présent travail montrera que ces doutes sont fondés ; toutes ces séries divergent ; je dois réserver toutefois les séries proposées par M. Gyldén dans son dernier mémoire (*Acta*, t. 9) ; en ce qui les concerne je n'ai aucun moyen de reconnaître si elles sont convergentes ou divergentes.

Ainsi en cherchant à intégrer les équations différentielles du problème des trois corps par des séries trigonométriques, on est généralement conduit à des développements divergents, mais on sait qu'il existe pour les équations différentielles de tous les ordres des procédés d'intégration dont la convergence est certaine et on pourrait en attendre des résultats dans le cas qui nous occupe.

Cauchy a imaginé un procédé de calcul ingénieux qu'il a appelé, je ne sais pourquoi, « calcul des limites » (*Comptes rendus*, tome 14, p. 1020–1023) et par lequel il montre que les équations différentielles d'ordre quelconque, admettent une intégrale développable par la série de Taylor. Il y a exception en certains points nommés points singuliers.

Considérablement perfectionné par M. Weierstrass, le « calcul des limites » a fourni une importante moisson aux géomètres qui l'ont cultivé et
[p. 7] en particulier à MM. Briot et Bouquet et M^me^ Kowalevski. C'est ainsi que les résultats de Cauchy ont été étendus aux équations aux dérivées partielles.

Parmi ces résultats, je citerai le suivant : soit x une quantité définie en fonction de t par une équation différentielle du n^{e} ordre où entre un certain paramètre μ. Considérons la solution particulière qui est telle que x s'annule pour $t = 0$ ainsi que ses $n - 1$ premières dérivées. Cette solution pourra se développer suivant les puissances de t et de μ, pourvu que t et μ soient assez petits ; mais il y a plus ; cette solution pourra encore, pour une valeur particulière t_1 de t se développer suivant les puissances croissantes de μ seulement, pourvu que μ soit assez petit et quelque grand que soit t_1, à moins qu'on ait passé par quelque point singulier entre $t = 0$ et $t = t_1$.

Les séries ainsi obtenues sont toujours convergentes au moins dans une certaine étendue, mais il arrive en général que cette convergence n'a lieu que pour les petites valeurs de la variable. M. Poincaré[1] par l'application des principes de Cauchy, a trouvé des séries (*Comptes rendus*, 27 février 1882) qui restent convergentes pour toutes les valeurs du temps. Il ne faut pas croire pourtant le problème résolu ; ces séries, procédant suivant les puissances de certaines variables, peuvent servir à démontrer l'existence de l'intégrale, ou même à calculer sa valeur numérique ; mais la plupart du temps, elles ne nous en font pas connaître les propriétés. C'est ainsi qu'elles sont impuissantes, dans le cas de la

[1] Le mémoire original était une entrée anonyme au concours ouvert à l'occasion de l'anniversaire du roi de Suède. [Pa] a gardé ce caractère. (AR)

mécanique céleste, à mettre en évidence la périodicité quand elle existe, ou à décider de la question de la stabilité.

C'est à un ordre d'idées absolument différent que se rapportent d'autres mémoires de M. POINCARÉ auxquels nous ferons quelques emprunts (Journal de LIOUVILLE, 3e série, tomes 7 et 8 ; 4e série, tomes 1 et 2). Dans ces mémoires intitulés *Sur les courbes définies par les équations différentielles* il cherche à construire ces courbes et à déterminer dans le plan et dans l'espace une région limitée d'où elles ne pourront jamais sortir. Il y est parvenu pour certaines équations différentielles mais les équations de la dynamique ont semblé jusqu'ici rebelles à sa méthode.

Dans le présent travail, je ferai concourir à mon but les trois méthodes dont je viens de parler ; aux anciennes méthodes de la mécanique céleste, j'emprunterai la forme trigonométrique des développements ; au « calcul des limites » la démonstration de leur convergence ; enfin c'est à la méthode géométrique de M. [p. 8]
POINCARÉ que j'aurai recours pour démontrer la stabilité.

Malgré l'emploi simultané de ces trois méthodes, jointes à quelques principes nouveaux, j'ai dû me restreindre à un cas particulier. J'ai traité seulement des équations de la dynamique quand il n'y a (pour employer une expression usitée en Angleterre) que deux degrés de liberté (*degrees of freedom*). En ce qui concerne le problème des trois corps, je ne suis pas sorti du cas suivant :

Je considère trois masses, la première très grande, la seconde petite mais finie, la troisième infiniment petite ; je suppose que les deux premières décrivent un cercle autour de leur centre de gravité commun et que la troisième se meut dans le plan de ces cercles. Tel serait le cas d'une petite planète troublée par Jupiter, si l'on négligeait l'excentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites.

Dans ce cas particulier, j'ai démontré rigoureusement la stabilité, non seulement en montrant que le rayon vecteur de la petite planète ne peut croître indéfiniment, mais en lui fixant sinon ses limites précises, au moins des limites aussi rapprochées qu'on le veut de ces limites précises.

Les démonstrations du calcul des limites ne s'appliquent pas en général aux séries trigonométriques de la mécanique céleste et ne permettent pas d'en démontrer la convergence.

L'obstacle qui s'y oppose est la présence d'une infinité de petits diviseurs. Mais il est un cas où ces petits diviseurs disparaissent, c'est celui où il n'y a plus qu'un seul argument, c'est à dire celui des *solutions périodiques* qui ont été rencontrées dans certains cas particuliers d'abord par M. HILL (American Journal, t. 1), puis par M. POINCARÉ (Bulletin astronomique, t. 1). On en trouvera dans la suite une théorie complète.

Pour pouvoir appliquer aux équations de la dynamique la méthode géométrique de M. POINCARÉ, j'ai dû introduire une notion nouvelle qui est celle des *invariants intégraux.* Elle m'a été fort utile et j'ai lieu de croire qu'elle pourra rendre des services dans d'autres problèmes.

Ces considérations générales qui m'étaient indispensables remplissent la première partie de ce travail. Je n'aborde le problème lui-même que dans la seconde partie où je n'ai plus qu'à appliquer les principes posés dans la première. » [Poincaré 1889, p. 5–8]

A.2 Résumé des résultats positifs [Pa, p. 153–155]

[p. 153] « Nos résultats s'appliquent aux équations de la dynamique toutes les fois qu'il n'y a que deux degrés de liberté ; ils s'appliquent donc spécialement à un cas particulier du problème des trois corps qui est celui

1° où la masse de la planète troublée étant nulle, le mouvement de la planète troublante reste Képlérien.

2° où l'excentricité de la planète troublante est nulle, celle de la planète troublée pouvant être quelconque.

3° où l'inclinaison des orbites est nulle.

Lorsqu'il n'y a que deux degrés de liberté, la situation du système peut être représentée par la position d'un point dans l'espace, ce qui permet d'énoncer les résultats obtenus sous une forme géométrique.

Toute solution peut être représentée par une courbe gauche appelée trajectoire ; les trajectoires fermées correspondent aux solutions périodiques. Il y a toujours une infinité de trajectoires fermées, mais ces trajectoires fermées
[p. 154] peuvent être réparties en deux classes :

1° . Les trajectoires stables. Si la position initiale du point représentatif est très voisine d'une trajectoire stable, ce point restera éternellement très près de cette trajectoire.

2° . Les trajectoires instables qui ne jouissent pas de la même propriété.

Dans le voisinage d'une trajectoire fermée instable, il y a une infinité de trajectoires dites asymptotiques qui jouissent de la propriété suivante :

Le point représentatif qui parcourt une trajectoire asymptotique est pour $t = -\infty$ infiniment rapproché de la trajectoire fermée correspondante ; il s'en éloigne asymptotiquement, finit par en être très éloigné, puis s'en rapproche asymptotiquement de manière à en être de nouveau infiniment près pour $t = +\infty$.

On voit sans peine qu'il doit exister des trajectoires qui s'éloignent asymptotiquement d'une trajectoire fermée instable et d'autres qui s'en rapprochent asymptotiquement, mais le résultat difficile à établir et véritablement inattendu, c'est que ce sont *les mêmes* trajectoires asymptotiques, qui après s'être éloignées asymptotiquement d'une trajectoire fermée se rapprochent ensuite asymptotiquement de *la même* trajectoire fermée.

L'ensemble des trajectoires asymptotiques relatives à une même solution périodique instable, forme une surface dite asymptotique.

Les surfaces asymptotiques sont des surfaces fermées à courbe double présentant les mêmes connexions que la surface qu'engendrerait la révolution d'un limaçon à point double ou d'une lemniscate autour d'un axe ne rencontrant pas la courbe.

Chacune de ces surfaces partage donc l'espace en trois régions.

Dans chacune de ces trois régions, il y a encore une infinité de trajectoires fermées instables, et par conséquent une infinité de surfaces asymptotiques. Il en résulte que chacune de ces trois régions peut à son tour être subdivisée en trois autres et ainsi de suite.

Cette subdivision peut être continuée à l'infini et on peut la pousser assez
[p. 155] loin pour que le volume de chaque région partielle soit aussi petit qu'on le veut.

Comme aucune trajectoire ne peut passer d'une région dans l'autre, on doit conclure que la stabilité est rigoureusement démontrée ; qu'il est possible, étant donnée la position initiale du point représentatif de la situation du système, de trouver une région d'où ce point ne pourra sortir et d'assigner à cette région, sinon *ses limites précises*, du moins des limites aussi rapprochées qu'on le veut de ces limites précises.

Il y a donc trois sortes de trajectoires :

1° . Les trajectoires fermées correspondant aux solutions périodiques et dont il est aisé par les principes du chapitre III (I$^{\text{ère}}$ partie) de trouver les équations sous forme d'égalités où entrent des séries convergentes.

2° . Les trajectoires asymptotiques dont nous venons de parler en détail. En ce qui les concerne, nous avons donné dans le chapitre précédent le moyen de former l'équation des surfaces asymptotiques ; quand on possédera cette équation, on pourra en déduire l'équation des trajectoires asymptotiques elles-mêmes par une application convenable des principes des *Vorlesungen über Dynamik*[2].

3° . Les trajectoires les plus générales qui ne rentrent dans aucune des deux premières catégories.

Nous pouvons affirmer (théorème I, chapitre II, I$^{\text{ère}}$ partie[3]) que si l'on envisage une portion de l'espace quelconque, si petite qu'elle soit, il y aura toujours des trajectoires qui la traverseront une infinité de fois.

Il est même hautement vraisemblable que toute portion de l'espace est traversée par une infinité de trajectoires fermées. S'il en est ainsi, et si nous considérons une trajectoire quelconque de la 3$^{\text{me}}$ catégorie, nous pouvons toujours trouver une trajectoire de l'une des deux premières catégories qui pendant un temps aussi long qu'on veut, s'en écarte aussi peu qu'on veut, ce qui permettrait de trouver l'équation avec telle approximation qu'on voudrait. » [Poincaré 1889, p. 153–155]

[2]Il s'agit de l'ouvrage de Jacobi édité par Borchardt et Clebsch à partir de cours donnés à Königsberg pendant l'hivers 1842–1843 [Jacobi 1866]. (AR)

[3]Il s'agit du théorème de récurrence. (AR)

Annexe B

Compléments mathématiques sur les géodésiques des surfaces convexes

B.1 Sur les passages d'interprétation géométrique

Le but de cette annexe est de donner quelques précisions techniques sur le calcul effectué par Poincaré aux pages 51 et 52 de son mémoire. Poincaré utilise la même notation T_0 avec deux sens différents, et il oublie un peu plus loin un facteur 2. La lecture de ce qui suit nécessite d'avoir suivi le début de la démonstration de Poincaré [Poincaré 1905c, p. 46–51].

Poincaré pose p. 51 : $T_0 = \frac{1}{2}({u'}^2 + {v'}^2 \sin^2 u) = \frac{{ds_1}^2}{2}$, ce qui est une définition différente de celle adoptée au début de la partie sur les géodésiques du sphéroïde. Je noterai ici $T"_0$ à la place de T_0 pour éviter les confusions[1]. D'autre part, Poincaré définit $T_0' = \frac{1}{2}({u_0'}^2 + {v_0'}^2 \sin^2 u) = \frac{{ds_1}^2}{2}$.

Il considère ensuite T_1, que je vais noter T_1'' pour la même raison que précédemment, tel que $T = T_0'' + \mu T_1''$. Enfin, T_1' désigne ce que devient T_1'' quand on remplace u' et v' par u_0' et v_0'[2].

En utilisant l'homogénéité de T et un développement de Taylor par rapport à la différence $(u' - u_0')$ — de l'ordre de μ —, un calcul au premier ordre en μ le conduit à la formule : $T_0'' = \frac{\omega^2}{2} - 2\mu T_1''$. Il utilise alors la relation $T = T_0'' + \mu T_1''$ pour en déduire que $T = T_0' - \mu T_1''$, d'où $2T = T_0' + T_0''$, et

$$2ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2.$$

Puis il reprend la valeur de S_1 définie plus haut — donc à partir du T_1 initial, et non de T_1'' :

$$S_1 = \frac{T - \omega^2}{\mu\omega^2}.$$

[1] On attendrait $T_0 = \frac{1}{2}(U^2 + \frac{1}{\sin^2 u} V^2)$, c'est-à-dire $T_0 = \frac{1}{2}({u_0'}^2 + {v_0'}^2 \sin^2 u)$; on a donc ici $T_0' = T_0$ (avec mes conventions), tandis que la quantité que Poincaré vient d'introduire, notée ici T_0'', est différente.

[2] On vient de voir que $T_0 = T_0'$. En revanche, T_1' est défini à partir de T_1'', et non par la formule $T = T_0' + \mu T_1'$. Les quantités T_1' et T_1 n'ont donc rien à voir.

Il manque ici un facteur 2 : la valeur exacte est $S_1 = \frac{T_1}{\omega^2} = \frac{T-T_0}{\mu\omega^2} = \frac{T-\omega^2/2}{\mu\omega^2}$.

Poincaré remplace alors T et ω^2 par ds^2 et ds_2^2 respectivementi, avec à nouveau la même erreur d'un facteur 2 : T est égal à $\frac{ds^2}{2}$, et non à ds^2. Ceci donne :

$$S_1 = \frac{ds^2 - ds_2^2}{2\mu ds_2^2}$$

(et non $S_1 = \frac{ds^2-ds_2^2}{\mu ds_2^2}$).

En négligeant les puissances supérieures de μ, ceci conduit à la signification géométrique de S_1 qu'il cherchait :

$$S_1 = \frac{1}{\mu}\frac{ds_1 - ds}{ds_1}$$

(et non $S_1 = \frac{2}{\mu}\frac{ds_1-ds}{ds_1}$).

Lorsque Poincaré utilise cette formule pour l'interprétation géométrique de R, il transmet le facteur 2 et trouve

$$R = \frac{1}{\pi\mu}(s_1 - s),$$

au lieu de $R = \frac{1}{2\pi\mu}(s_1 - s)$.

Comme les quantités intéressantes sont les minima, maxima et minimax de cette fonction R, le facteur 2 n'influe pas sur le résultat final.

Il faut relever un dernier point dans cette partie de la démonstration de Poincaré : le résultat sur l'imparité du nombre d'extremums de la fonction R est obtenu pour des données polynomiales, où les polynômes sont « *les plus généraux de leur degré* » [Poincaré 1881a, p. 17]. Le résultat s'étend au cas d'une fonction analytique comme l'est R, mais toujours avec une hypothèse que nous qualifierions d'hypothèse de généricité. Effectivement, si par exemple la fonction R est constante, ce qui arriverait si la déformation de la sphère consistait seulement en une dilatation, tous les points sont des extremums de R, et toutes les géodésiques — en nombre infini — restent fermées.

B.2 Sur le principe de continuité analytique

Cette annexe vise à identifier les points non démontrés et les failles dans la démonstration que donne Poincaré du théorème 2, et à en proposer une version rigoureuse. La formulation plus précise que nous nous attacherons à prouver, qui ne fait qu'expliciter ce que Poincaré suppose implicitement, est la suivante :

Théorème 3. *Sur toute surface convexe*[3] *analytique de* $\mathbb{R}^3$*, soit il existe une famille continue de géodésiques fermées sans point double, soit le nombre de telles géodésiques, comptées avec multiplicité, est impair. Il en résulte qu'il y a au moins une géodésique fermée sans point double sur toute surface convexe analytique.*

[3]Il est clair, particulièrement dans la section 2 de son mémoire, que Poincaré considère des surfaces dont la courbure est comprise entre deux constantes strictement positives. Nous utiliserons comme lui *convexe* dans ce sens fort.

Nous préciserons bien entendu ce que nous entendons par multiplicité d'une géodésique sur une surface convexe, et nous montrerons qu'il s'agit d'une quantité définie modulo 2.

La démonstration de Poincaré procède en deux temps ; dans un premier temps, il prouve que le nombre de géodésiques fermées (sous-entendu : sans point double) est impair pour certaines surfaces suffisamment proches de la sphère. Il étend ensuite par continuité ce résultat à toute surface convexe analytique. C'est à la deuxième partie de la démonstration, que Poincaré intitule « principe de continuité analytique », que nous nous intéresserons ici[4]. Il s'agit de prouver que la parité du nombre de géodésiques fermées sans point double ne dépend pas de la surface convexe analytique choisie.

B.2.1 Connexité

La première étape consiste à construire un chemin analytique de surfaces qui relie une surface convexe analytique quelconque à une surface convexe de référence. On prouvera ensuite que lorsqu'on déforme ainsi progressivement la surface de référence, on peut suivre l'évolution des géodésiques fermées sans point double, et que ces géodésiques ne peuvent apparaître ou disparaître que par couples. Il en résultera que leur nombre est de parité constante.

Considérons donc deux surfaces convexes analytiques Σ_0 et Σ_1 de $\mathbb{R}^3$.

Soient C_0 et C_1 les convexes de $\mathbb{R}^3$ bordés par Σ_0 et Σ_1. On utilise les sommes de Minkowski pour définir un chemin de convexes entre C_0 et C_1 :

$$C_t = \{(1-t)p_0 + tp_1 \,|\, p_0 \in C_0,\ p_1 \in C_1\}$$

On vérifie facilement que C_t est un convexe pour tout $t \in [0,1]$ et que la frontière de C_t est constituée des barycentres des points de C_0 et C_1 qui ont même plan tangent.

Ainsi, $\Sigma_t = \partial C_t$ est pout tout t une surface bien définie, analytique, convexe, et le chemin $(\Sigma_t)_{t\in[0,1]}$ est lui aussi analytique[5].

Avec Poincaré, nous pouvons donc supposer les surfaces Σ_t données par une équation $f(x,y,z,t) = 0$, où f est analytique. Nous utiliserons la notation f_t pour désigner la fonction qui définit la surface Σ_t, définie naturellement par $f_t(x,y,z) = f(x,y,z,t)$.

[4]La première partie, nous l'avons vu, est inutile lorsqu'il s'agit seulement de démontrer le théorème 3, puisqu'on connaît les géodésiques fermées sans point double sur un ellipsoïde à trois axes inégaux : ce sont les trois ellipses principales.

[5]Minkowski a publié plusieurs travaux sur les surfaces et les volumes convexes entre 1897 et 1903. On trouve en particulier dans un article de 1903 [Minkowski 1903] les idées essentielles nécessaires ici. Minkowski attribue dans [Minkowski 1901a] à Brunn [1887] la dénition des sommes de convexes (aujourd'hui dites « sommes de Minkowski »). Par ailleurs, Minkowski avait publié une note aux CRAS, [Minkowski 1901b], qui reprend la plupart de ces idées, et qui a été présentée à l'Académie lors d'une séance où Poincaré était certainement présent, puisqu'il présentait une autre note, envoyée par Ludwig Schlessinger. Ainsi, les précisions que nous apportons ici correspondent probablement à ce que Poincaré avait en tête en affirmant qu'« on peut toujours passer d'une surface convexe à une autre d'une manière continue ».

B.2.2 Continuité

Une fois qu'il dispose d'un chemin analytique entre ses surfaces, Poincaré propose de se placer dans un espace de paramètres convenable pour montrer que les géodésiques fermées sont représentées par les branches d'une courbe analytique, et qu'on peut isoler les branches représentant les géodésiques sans point double. En réalité, cette opération ne peut être réalisée que localement, puisque l'idée initiale de Poincaré reviendrait au fond à se placer dans l'espace constitué par l'ensemble des orbites géométriques (fermées ou non), lequel n'est pas bien joli, puisqu'il n'est même pas séparé (du fait de l'existence de géodésiques asymptotes à d'autres...). Il faut en particulier tenir compte de la longueur parcourue avant que la géodésique se referme. Garnier ajoute une note dans l'édition des Œuvres pour corriger la définition de Poincaré, manifestement incorrecte. Mais dans la définition qu'il propose en remplacement, il élimine la variable longueur, ce qui équivaut à projeter la courbe analytique dans un espace plus petit. D'une part l'ensemble qui en résulte n'est plus une courbe analytique, et d'autre part, nous verrons que le contrôle de la longueur des géodésiques étudiées est crucial pour conclure, ce que ni Poincaré, ni Garnier, n'ont remarqué.

La propriété qu'on peut établir rigoureusement en suivant la suggestion de Poincaré est la suivante :

Proposition 1. *Soit γ une géodésique fermée sur Σ_{t_0}. Les géodésiques*
- *proches de γ,*
- *sur les surfaces Σ_t avec t proche de t_0,*
- *qui se referment après une longueur proche de celle de γ,*

sont en correspondance avec un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ de la forme $F^{-1}(0)$ où F est une application analytique de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.

Démonstration : On fixe arbitrairement un point origine P sur γ, ainsi qu'une direction de parcours. À partir de maintenant, nous considérons donc γ comme une géodésique paramétrée par l'abscisse curviligne $s \in \mathbb{R}$. On note l la longueur de γ, ou, plus rigoureusement, la période de γ. On a en particulier $\mathrm{P} = \gamma(0) = \gamma(l)$. Les vecteurs $V = \gamma'(0)$, $N = \vec{\nabla} f_{t_0}(\gamma(0))$ et $T = V \wedge N$ forment une base orthogonale naturelle de $\mathbb{R}^3$ au voisinage de P. Le vecteur V est de norme 1, puisque la géodésique est paramétrée par l'abscisse curviligne.

Soit $\Phi^s_{\Sigma_t}$ le flot géodésique sur la surface Σ_t ; si p est un point de Σ_t, et si $v \in \mathrm{T}_p\Sigma_t$, on note $\Phi^s_{\Sigma_t}(p,v) = (\mathrm{P}^s_{\Sigma_t}(p,v), V^s_{\Sigma_t}(p,v))$. Alors $\mathrm{P}^s_{\Sigma_t}(p,v)$ désigne le point de Σ_t atteint au temps s par la géodésique issue de p avec la vitesse v, et $V^s_{\Sigma_t}(p,v)$ désigne la vitesse de cette géodésique au temps s.

Pour décrire une géodésique δ de Σ_{t_0} proche de γ, on utilisera deux paramètres u et v. Le premier repèrera un point d'intersection P^u de δ avec une transversale à γ en P tangente à T (voir figure B.1). Le deuxième paramètre repèrera la direction de δ en ce point d'intersection. Pour ce faire, on identifiera le plan tangent en P^u (qui est, rappelons-le, un point proche de P) à Σ_{t_0} avec le plan tangent en P, par exemple par la projection orthogonale de $\mathrm{T_P}\Sigma_{t_0}$ (vu comme sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$) sur $\mathrm{T}_{\mathrm{P}^u}\Sigma_{t_0}$.

Si $u \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ et $v \in \mathrm{T}^1_{\mathrm{P}}\Sigma_{t_0}$, on notera donc

$$\mathrm{P}^u = \mathrm{P}^u_{\Sigma_{t_0}}(\mathrm{P}, T),$$

$$w^{(u,v)} = \frac{v - (v.\vec{\nabla} f_{t_0}(\mathrm{P}^u))\vec{\nabla} f_{t_0}(\mathrm{P}^u)}{\|v - (v.\vec{\nabla} f_{t_0}(\mathrm{P}^u))\vec{\nabla} f_{t_0}(\mathrm{P}^u)\|},$$

et $\delta^{(u,v)}$ la géodésique de Σ_{t_0} issue de P^u avec la vitesse $w^{(u,v)}$.

Pour que δ soit proche de γ, il suffit que v soit proche de $V = \gamma'(0)$, condition qui peut s'écrire simplement $v.V > 1 - \varepsilon$, puisque v est par définition un vecteur unitaire de $\mathrm{T_P}\Sigma_{t_0}$, de même que V.

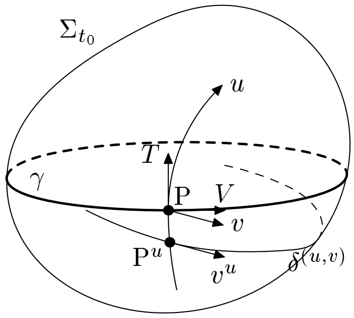

FIG. B.1 – Repérage des géodésiques proches de γ.

Remarque 1. *Ce paramétrage peut conduire à associer une infinité de couples (u, v) à une même géodésique (au sens géométrique) proche de γ, si par exemple on considère une géodésique qui s'enroule en se rapprochant asymptotiquement de γ. Mais nous travaillerons localement y compris pour le paramètre de parcours de chaque géodésique : ce sont les valeurs de s proches de la longueur l de γ qui nous intéresserons, si bien que nous pouvons nous restreindre à $s \in]-\varepsilon, l+\varepsilon[$ par exemple. Ainsi, des valeurs différentes de u et v, si elles peuvent se rapporter à la même géodésique considérée globalement, renverront pour nous à des sections distinctes de cette géodésique.* In fine, *nous nous intéresserons seulement aux géodésiques fermées sans point double, lesquelles sont caractérisées univoquement par ce paramétrage.*

Nous n'avons pour l'instant parlé que des géodésiques proches de γ sur la surface Σ_{t_0}, mais ce sont bien sûr les géodésiques proches sur les surfaces Σ_t proches de Σ_{t_0} qui nous intéressent. Le principe de paramétrage sera identique, avec un paramètre supplémentaire, t. La première étape consiste à choisir sur chaque surface Σ_t (pour t proche de t_0) un point qui jouera le même rôle d'origine pour les paramètres u et v que jouait P sur Σ_{t_0}. Il suffit de définir la projection P_t de P sur Σ_t selon N. On vérifie facilement que les coordonnées de P_t sont analytiques par rapport à t.

À partir de ce point, u étant donné voisin de 0, on définit $\mathrm{P}_t^u = \mathrm{P}_{\Sigma_t}^u(\mathrm{P}_t, T - (T.\vec{\nabla} f_t(\mathrm{P}_t))\vec{\nabla} f_t(\mathrm{P}_t))$. C'est un point de Σ_t atteint à partir de P_t en suivant le flot géodésique dans la direction de T, direction transversale à celle de γ. Comme précédemment, on désigne par v un vecteur unitaire de $\mathrm{T_P}\Sigma_{t_0}$ proche de V, et on définit

$$w_t^{(u,v)} = \frac{v - (v.\vec{\nabla} f_t(\mathrm{P}^u))\vec{\nabla} f_t(\mathrm{P}^u)}{\|v - (v.\vec{\nabla} f_t(\mathrm{P}^u))\vec{\nabla} f_t(\mathrm{P}^u)\|}.$$

C'est un vecteur unitaire de $\mathrm{T}_{P_t^u}\Sigma_t$.

Ainsi, étant donnés u, v et t, on définit une géodésique $\delta_t^{(u,v)}$, qui est la géodésique de Σ_t issue de P_t^u avec la vitesse $w_t^{(u,v)}$. On notera $w_t^{(u,v)}(s) = V_{\Sigma_t}^s(\mathrm{P}_t^u, w_t^{(u,v)})$ le vecteur vitesse au point $\delta_t^{(u,v)}(s)$.

Puisqu'on considère une famille analytique de surfaces analytiques, le flot géodésique est également analytique par rapport à toutes les variables, et il en résulte que l'application $(u,v,t,s) \longmapsto \delta_t^{(u,v)}(s)$ est analytique de $U \times \mathcal{V} \times I \times]-\varepsilon, l+\varepsilon[$ dans $\mathbb{R}^3$, où U est un voisinage de 0, I un voisinage de t_0, et $\mathcal{V} = \{v \in \mathrm{T_P}\Sigma_{t_0} = \mathrm{vect}(V,T)\ ,\ \|v\| = 1\ ,\ v.V > 1-\varepsilon\}$ un voisinage de V dans $\mathrm{T}^1_{\mathrm{P}}\Sigma_{t_0}$.

Nous cherchons les géodésiques *fermées* proches de γ. Il nous faut donc écrire la condition de fermeture de la géodésique $\delta_t^{(u,v)}$. La géodésique se referme lorsqu'il existe une valeur de s (à laquelle on imposera d'être proche de l, conformément à la remarque 1 ci-dessus) telle que $\delta_t^{(u,v)}(s) = \delta_t^{(u,v)}(0)$ et $w_t^{(u,v)}(s) = w_t^{(u,v)}(0)$.

Par définition, $\delta_t^{(u,v)}(s)$ et $\delta_t^{(u,v)}(0)$ sont deux points de Σ_t proches l'un de l'autre, et le plan tangent à Σ_t en $\delta_t^{(u,v)}(0) = \mathrm{P}_t^u$ est transverse à N lorsque t et u sont suffisamment petits, et que s est proche de l. Il suffit donc de vérifier que $(\delta_t^{(u,v)}(s) - \delta_t^{(u,v)}(0))\,.\,V = 0$ et que $(\delta_t^{(u,v)}(s) - \delta_t^{(u,v)}(0))\,.\,T = 0$.

Lorsque ces conditions sont vérifiées, $w_t^{(u,v)}(s)$ et $w_t^{(u,v)}(0)$ sont deux vecteurs unitaires de $\mathrm{T}_{\mathrm{P}_t^u}\Sigma_t$, tous deux proches de V ; pour s'assurer qu'ils sont égaux, il suffit de vérifier que $(w_t^{(u,v)}(s) - w_t^{(u,v)}(0))\,.\,T = 0$.

Finalement, nous sommes conduits à considérer l'application analytique

$$\begin{array}{rrcl} F: & U \times \mathcal{V} \times I \times]l-\varepsilon, l+\varepsilon[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v,t,s) & \longmapsto & (\delta_t^{(u,v)}(s) - \delta_t^{(u,v)}(0))\,.\,V \\ & & & (\delta_t^{(u,v)}(s) - \delta_t^{(u,v)}(0))\,.\,T \\ & & & (w_t^{(u,v)}(s) - w_t^{(u,v)}(0))\,.\,T \end{array}$$

L'ensemble des géodésiques fermées dans le voisinage de γ est donc représenté par une courbe analytique $F = 0$. On vérifie immédiatement que tout a été fait de sorte qu'on ait $F(0, V, t_0, l) = 0$: ces valeurs des paramètres correspondent à la géodésique fermée γ. □

Remarque 2. *Une remarque cruciale à ce point est que dans une même branche de notre courbe analytique, on ne peut pas rencontrer à la fois des géodésiques avec point double et des géodésiques sans point double parcourues une seule fois. Poincaré fait cette remarque [Poincaré 1905c, p. 56–57], et poursuit avec une étude plus poussée des types topologiques de géodésiques qui peuvent se rencontrer dans une même branche de la courbe analytique ; il prouve ainsi que le nombre de points doubles ne peut pas varier. Pour nous, seul le début du raisonnement de Poincaré est nécessaire, puisque nous incluons la longueur dans les paramètres décrivant une géodésique fermée. Ainsi, une géodésique fermée parcourue une fois et la même géodésique parcourue deux fois sont pour nous des objets bien différents, et seul le premier nous intéresse, si bien que l'exemple étudié par Poincaré d'une géodésique à un point double qui dégénère en une géodésique sans point double parcourue deux fois est tout à fait étranger à notre point de vue [Poincaré 1905c, p. 57–60].*

Si les points de $F = 0$ où la différentielle de F n'est pas de rang maximal sont isolés, on peut suivre l'analyse de Poincaré : en un point de cette courbe analytique, la ou les branches de courbe passant par ce point peuvent être représentées par la donnée des paramètres u, v et s en séries d'une puissance fractionnaire de t. Il n'y aurait d'exception que s'il existait une (ou plusieurs) branche "verticale", entièrement contenue dans un hyperplan $t = t_1$. La surface Σ_{t_1} possèderait alors une famille continue de géodésiques fermées. Il en est ainsi par exemple des surfaces de révolution, dont tous les méridiens sont des géodésiques fermées.

Lorsqu'une branche de courbe est donnée par des séries en une puissance fractionnaire de t au voisinage d'un de ses points, d'abscisse t_2, il y a deux comportements qualitatifs possibles. Si le dénominateur de la puissance fractionnaire est impair, la branche possède exactement un point pour chaque valeur de t proche de t_2 ; autrement dit, la géodésique considérée subsiste pour $t_2 - \varepsilon < t < t_2 + \varepsilon$. Si au contraire le dénominateur est pair, la branche considérée de la courbe analytique possède deux points pour $t < t_2$ et aucun pour $t > t_2$ (ou le contraire) ; on a donc deux géodésiques sur les surfaces Σ_t pour $t < t_2$, qui se rapprochent l'une de l'autre lorsque t s'approche de t_2, se confondent sur la surface Σ_{t_2}, puis disparaissent.

Mise à part la question de la définition précise de la courbe analytique décrivant les géodésiques fermées, c'est là le résultat obtenu par Poincaré. Nous reviendrons plus loin sur les cas dégénérés qui peuvent apparaître, en particulier lorsque les surfaces présentent des familles continues de géodésiques fermées. D'ores et déjà, il manque un élément important pour pouvoir conclure, comme le fait Poincaré, que le nombre de géodésiques fermées sans point double ne peut pas changer de parité. Il faut un résultat de compacité pour pouvoir déduire de cette étude locale un énoncé global.

B.2.3 Compacité

La propriété fondamentale qui permet de conclure est que la longueur d'une géodésique fermée *sans point double* sur une surface strictement convexe est majorée. Ainsi, une géodésique fermée sans point double ne peut pas voir sa longueur augmenter sans limite lorsque t s'approche de t_1 pour disparaître en t_1.

Le résultat de majoration est dû à Calabi et Cao [1992] :

Théorème 4. *On considère la sphère munie d'une métrique telle que la courbure vérifie en tout point :* $0 \leqslant \mathrm{K}$. *On note M la variété riemannienne obtenue, A son aire, et* $\mathrm{Long}(\delta)$ *la longueur de la courbe fermée δ. Alors pour toute géodésique simple fermée γ, on a* $\mathrm{Long}(\gamma) \leqslant \sqrt{\max(\mathrm{K})}\, A/2$*, avec égalité si et seulement si M est isométrique à la sphère unité.*

Si maintenant γ_t est une géodésique fermée sans point double sur Σ_t, qui varie continûment avec t pour $t < t_0$, il existe une géodésique γ_{t_0} sur Σ_{t_0} telle que les géodésiques γ_t pour $t \leqslant t_0$ constituent une branche de la courbe analytique dont nous avons précisé la construction ci-dessus.

En effet, si γ_t est une telle famille, nous pouvons choisir un point P_t sur chaque géodésique de la famille, noter v_t un vecteur unitaire tangent à γ_t en

P_t, et s_t la longueur de la géodésique. Les surfaces Σ_t sont compactes, les v_t sont unitaires, et les longueurs s_t sont bornées. Ainsi, par compacité on peut extraire une sous-suite $t(n)$ de la suite $(t_0 - \frac{1}{n})$ telle que $\mathrm{P}_{t(n)}$ converge vers P, $v_{t(n)}$ converge vers V, et $s_{t(n)}$ vers l. Par continuité de f, $\mathrm{P} \in \Sigma_{t_0}$ et $V \in \mathrm{T_P}\Sigma_{t_0}$. Par hypothèse, les géodésiques $\gamma_{t(n)}$ sont fermées de longueurs $s_{t(n)}$, donc par continuité du flot géodésique, la géodésique γ_{t_0} issue de P avec la vitesse V sur Σ_{t_0} est fermée de longueur l.

On peut lui appliquer l'analyse locale précédente. Toutes les géodésiques proches de γ_{t_0} sur les surfaces proches de Σ_{t_0} sont décrites par une courbe analytique. Il en est donc ainsi des géodésiques $\gamma_{t(n)}$ pour n assez grand, et par suite des γ_t pour t suffisamment proche de t_0, puisque les γ_t étaient supposées former une famille continue de géodésiques fermées pour $t < t_0$. Autrement dit, la famille γ_t forme une portion de la courbe analytique construite à partir de γ_{t_0}. L'analyse précédente permet donc de prolonger la famille γ_t soit au delà de t_0, soit par une deuxième famille $\tilde{\gamma}_t$ pour $t \leqslant t_0$, avec $\tilde{\gamma}_{t_0} = \gamma_{t_0}$.

Ceci montre que, d'un point de vue global, et non plus seulement au voisinage d'une géodésique fermée donnée, les géodésiques fermées sans point double ne peuvent disparaître qu'en se confondant avec une autre géodésique. La parité de leur nombre global est donc constante au cours de la déformation de la surface, elle est donc la même pour les surfaces Σ_0 et Σ_1 dont nous sommes partis.

B.2.4 Multiplicité et familles continues

Nous ne sommes plus très loin du résultat visé par Poincaré. Cependant, nous voyons également les limites de la formulation qu'il adopte. D'une part, il faut bien sûr compter les géodésiques avec multiplicité, comme on fait pour les racines des équations algébriques. Poincaré ne signale pas ce point, mais il fait explicitement le parallèle entre la méthode qu'il expose et la théorie des racines des équations algébriques. Ainsi, lorsqu'on a un développement en une puissance fractionnaire à dénominateur pair de t en t_1, la géodésique en laquelle se confondent deux géodésiques avant de disparaître est de multiplicité paire. Il faudrait encore vérifier que la multiplicité, ou du moins sa parité, dépend seulement de la surface considérée, et non de la famille dont elle fait partie.

De plus, les surfaces qui possèdent des familles continues de géodésiques fermées sans point double introduisent de nouvelles complications que Poincaré ne relève pas plus explicitement. En particulier, on ne peut pas définir une multiplicité pour une géodésique donnée d'une telle famille. On ne peut donner un sens qu'à la multiplicité de la famille de géodésiques fermées dans son ensemble. Un exemple permet d'illustrer ce problème.

Sur un ellipsoïde de révolution Σ_{t_0}, on voit aisément que les géodésiques fermées sans point double se partagent en une famille à un paramètre, l'ensemble des méridiens de l'ellipsoïde, γ_θ et une géodésique fermée isolée, l'équateur. Si l'on inclut notre ellipsoïde de révolution dans la famille d'ellipsoïdes obtenue en faisant varier l'un des axes, de façon que Σ_t soit un ellipsoïde à trois axes inégaux pour $t \neq t_0$, la famille de géodésiques fermées sans point double constituée par les méridiens de Σ_{t_0} disparaît pour $t \neq t_0$, remplacée par les deux ellipses principales orthogonales à l'équateur. Mais suivant l'orientation choisie pour les axes des ellipsoïdes Σ_t, ce n'est pas toujours la même des géodésiques de la famille γ_θ qui donne naissance, pour $t \neq t_0$, à une géodésique fermée sans point double sur Σ_t. Ainsi, on ne peut pas attribuer de multiplicité à une géodésique γ_{θ_0} particulière. Il est seulement naturel d'attribuer une multiplicité paire à la famille de géodésiques γ_θ dans son ensemble.

Certes, le résultat visé par Poincaré est surtout l'existence d'au moins une géodésique fermée sans point double sur toute surface convexe. Il suffit, pour ce résultat plus faible, de montrer que s'il en existe une sur une surface connue — un sphéroïde par exemple, ou un ellipsoïde — il en existera encore au moins une sur toute surface qu'on peut lier à la surface connue par un chemin analytique. La multiplicité n'a besoin, pour démontrer ce résultat affaibli, d'être définie que dans une famille donnée de surfaces. On peut alors suivre la démarche de Poincaré. Mais deux points doivent être soulignés.

Le premier est que la courbe analytique à considérer ne peut pas être vue comme plongée dans un espace de paramètres : elle est définie seulement localement. Il faut donc la voir comme une variété analytique abstraite, ce qui nous éloigne du texte de Poincaré, quoique la notion de variété abstraite soit à peu près formée à cette époque. En considérant cette variété abstraite et sa projection sur l'intervalle des paramètres, on peut suivre la parité du cardinal de la fibre, comme le suggère Poincaré, par des arguments locaux : les points de la fibre naissent ou meurent par paires.

Cette analyse est encore insuffisante. En effet, Poincaré laisse dans l'ombre les cas où une surface possède une famille continue de géodésiques fermées sans point double. Si cela se produit pour une surface isolée de la famille, l'analyse menée dans le § 46 de *Méthodes nouvelles*, ou pour les géodésiques des sphéroïdes peut être adaptée et assurer la persistance des géodésiques fermées lors de la déformation. Mais s'il existe un intervalle $]t'_1, t'_2[\subset [t_1, t_2]$ tel que les surfaces Σ_t possèdent des familles continues de géodésiques fermées[6], on fait apparaître de nouveaux types de bifurcations.

Ainsi, il faudrait soit montrer que, quitte à perturber le chemin de surfaces reliant Σ_{t_1} à Σ_{t_2}, on peut éviter une telle situation, soit faire une étude exhaustive de toutes les bifurcations possibles.

Toutes ces difficultés liées à des surfaces singulières pour F ont amené Morse à juger très sévèrement cette démonstration de Poincaré [Morse 1934, p. 305].

Le formalisme nécessaire à une démonstration rigoureuse du théorème 3 a été mis au point par Fuller [1967]. Il permet de donner un sens à la multiplicité d'une géodésique fermée — ou d'un ensemble compact de telles géodésiques — sur une surface, indépendemment de la famille de surfaces dans laquelle on peut l'inclure. L'« indice » ainsi défini correspond, modulo 2, au nombre de géodésiques comptées avec multiplicité, et reste bien défini pour les surfaces qui possèdent des familles continues de géodésiques fermées.

L'auteur ne semble pas avoir remarqué que sa théorie donnait exactement un des deux outils nécessités par cette démonstration de Poincaré[7], le deuxième étant la majoration de la longueur des géodésiques fermées sans point double. D'ailleurs, Fuller insiste — mais à propos d'autres exemples — sur la nécessité

[6] En s'inspirant des calculs menés dans le chapitre 4 de [Besse 1978], on peut fabriquer une telle famille de surfaces.

[7] Fuller a publié plusieurs autres articles sur des sujets proches, mais je n'ai trouvé nulle part de référence à l'article de Poincaré sur les géodésiques fermées. Il cite un livre de Lefschetz [1957], lequel mentionne plusieurs mémoires de Poincaré, mais pas celui sur les géodésiques.

de borner la longueur des trajectoires périodiques considérées, et il donne à la fin de l'article cité des propriétés de majoration de la longueur des orbites périodiques pour d'autres problèmes.

La technique mise au point par Fuller en s'inspirant des théories d'indice des points fixes conduit à définir tout d'abord l'indice d'une géodésique fermée sans point double, isolée, comme l'indice de l'application de retour de Poincaré dans une section autour de la géodésique. Dans notre formalisme, on peut prendre comme section le fibré des vecteurs tangents à Σ_{t_0} le long de la courbe formée des P^u. On dispose des coordonnées (u, v) dans cette section. Alors l'application de retour associe à (u, v) le couple $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ tel qu'il existe s proche de la longueur de la géodésique initiale vérifiant $\delta_{t_0}^{(u,v)}(s) = \mathrm{P}^{\mathfrak{u}}$ et $\frac{d\delta_{t_0}^{(u,v)}}{ds}(s) = w^{(\mathfrak{u},\mathfrak{v})}$. Lorsque la différentielle de l'application de retour est inversible au point fixe correspondant à une géodésique parcourue une seule fois, on peut montrer que l'indice est 1 ou -1 [Leray 1945, p. 215]. Ceci est vérifié lorsque l'application F définie plus haut est de rang maximal, et que le noyau de la différentielle n'est pas contenu dans l'hyperplan $t = \text{const}$ (ce dernier cas est celui où on considère une géodésique qui appartient à une famille continue de géodésiques fermées sur une des surfaces).

On peut ensuite définir l'indice d'un nombre fini de géodésiques fermées comme la somme des indices de chaque géodésique. Lorsque chacune est non dégénérée (*i.e.* lorsque la différentielle de l'application de retour est inversible, ou encore que l'application F considérée plus haut est de rang maximal), chacune contribue pour 1 ou -1, si bien que l'indice est de même parité que le nombre des géodésiques considérées.

Enfin, si C est un ensemble compact isolé de géodésiques fermées (sans point double), on peut déformer légèrement la surface de façon à n'avoir plus que des géodésiques isolées dans un voisinage de C, ce qui permet de définir l'indice de l'ensemble C comme celui de l'ensemble de ces géodésiques isolées sur la surface perturbée. Le point central de la théorie de Fuller consiste à démontrer que l'indice est bien défini, et qu'il ne varie pas dans une famille analytique Σ_t. Ceci se ramène à prouver le second point dans le cas particulier où les géodésiques fermées sans point double de Σ_0 et de Σ_1 sont isolées.

La propriété essentielle qui nous permet d'appliquer ce résultat de Fuller est précisément la compacité établie plus haut : l'ensemble des géodésiques fermées sans point double (parcourues une seule fois) sur les surfaces Σ_t avec $t \in [0, 1]$ est compact.

En résumé, la théorie de Fuller prouve que l'indice de l'ensemble des géodésiques fermées sans point double, parcourues une seule fois, ne dépend pas de la surface convexe considérée. Pour les surfaces dont toutes les géodésiques fermées sans point double sont non dégénérées, c'est-à-dire lorsque la différentielle de F est de rang maximal en tous les points représentant une géodésiques fermée sans point double de la surface considérée, cet indice est de même parité que le nombre de géodésiques fermées. Lorsqu'il y a une géodésique isolée dégénérée (par exemple lorsque deux géodésiques se confondent avant de disparaître), l'indice de cette géodésique, modulo 2, correspond à la multiplicité avec laquelle on était amené à la compter dans notre explicitation de la méthode de Poincaré. Enfin, lorsqu'une surface présente une famille continue de géodésiques fermées, l'indice associé à cette famille se calcule en comptant les géodésiques fermées qui subsistent lorsqu'on perturbe la surface. Ce dernier procédé est exactement celui que Poincaré emploie pour étudier les géodésiques fermées sur les surfaces proches de la sphère, c'est-à-dire que la première partie de la démonstration de Poincaré revient à calculer l'indice de Fuller modulo 2 de l'ensemble des grands cercles de la sphère, qui est une famille continue à deux paramètres de géodésiques fermées sans point double.

Nous avons utilisé ici une version un peu plus faible de la théorie de Fuller, puisque nous n'avons considéré l'indice qu'il définit que modulo 2, de façon à rester plus près de la formulation de Poincaré en terme de *nombre* de géodésiques. L'indice de Fuller est un entier relatif qui ne dépend pas de la surface considérée, mais il ne correspond pas exactement au nombre des géodésiques, puisque, dans les cas non dégénérés, chaque géodésique contribue par son indice, positif ou négatif suivant le comportement des géodésiques proches.

Remarquons enfin que l'indice de Fuller correspond au degré défini par White [1991] dans le cas plus général des sous-variétés minimales d'une variété donnée. Fuller (et déjà Poincaré avant lui) travaille en considérant la propriété de fermeture d'une géodésique comme une propriété de point fixe, tandis que White utilise une caractérisation variationnelle des géodésiques. Les résultats atteints par les deux théories sont identiques (à ceci près que la théorie de White est écrite directement pour des sous-variétés de dimension quelconque d'une variété de dimension quelconque...).

Bibliographie

[Armengaud 1999] Françoise ARMENGAUD. *La pragmatique.* PUF, collection Que sais-je ?, 1999. 4^{e} édition corrigée.

[Arnold 1980] Vladimir ARNOLD. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles.* Éditions Mir, Moscou, 1980.

[Barrow-Green 1994] June BARROW-GREEN. Oscar II's prize competition and the error in Poincaré's memoir on the three body problem. *Archive for history of exact sciences*, 48 : p. 107–131, 1994.

[Barrow-Green 1997] June BARROW-GREEN. *Poincaré and the Three Body Problem.* AMS-LMS, 1997.

[Bertrand 1870] Joseph BERTRAND. *Traité de calcul différentiel et intégral. Calcul intégral.* Gauthier–Villars, 1870.

[Bertrand 1888] Joseph BERTRAND. *Calcul des probabilités.* Gauthier-Villars, 1888. Disponible en ligne sur Gallica.

[Besse 1978] Arthur L. BESSE. *Manifolds all of whose geodesics are closed.* Springer, 1978.

[Birkhoff 1927] George D. BIRKHOFF. *Dynamical systems.* AMS colloquium publications, vol. IX, 1927.

[Briot et Bouquet 1856a] BRIOT et BOUQUET. Étude des fonctions d'une variable imaginaire. *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVI : p. 85–131, 1856. Disponible sur Gallica.

[Briot et Bouquet 1856b] BRIOT et BOUQUET. Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles. *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVI : p. 133–198, 1856. Mémoire présenté à l'Institut, le 21 août 1854. Disponible sur Gallica, à la suite du mémoire [Briot et Bouquet 1856a].

[Bru 2003] Bernard BRU. Souvenirs de Bologne. *Journal de la Société Française de Statistique*, 144 : p. 135–226, 2003.

[Bru et al. 1997] Bernard BRU, Marie-France BRU et O. BIENAYMÉ. La statistique critiquée par le calcul des probabilités : deux manuscrits inédits d'Irénée Jules Bienaymé. *Revue d'histoire des mathématiques*, 3 (2) : p. 137–239, 1997.

[Bru et al. 1999] Bernard BRU, Marie-France BRU et Kai Lai CHUNG. Borel et la martingale de Saint-Pétersbourg. *Revue d'histoire des mathématiques*, 5 : p. 181–247, 1999.

[Brunn 1887] Hermann BRUNN. Über Ovale und Eiflächen. Inaugural Dissertation, München, 1887.

[Calabi et Cao 1992] Eugenio CALABI et Jianguo CAO. Simple closed geodesics on convex surfaces. *Journal of differential geometry*, 36 : p. 517–549, 1992.

[Cantor 1883] Georg CANTOR. Fondements d'une théorie générale des ensembles. *Acta Mathematica*, 2 : p. 381–408, 1883. Traduction d'un article en allemand, réalisée avec l'aide de Poincaré.

[Cauchy 1821] Augustin CAUCHY. *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*. Debure frères, 1821. *Œuvres* [Cauchy 1882–1974], s. 2, t. 3.

[Cauchy 1829] Augustin-Louis CAUCHY. *Exercices de mathématiques*, chapter Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes. Debure frères, 1829. *Œuvres* [Cauchy 1882–1974], s. 2, t. 9, p. 174–195.

[Cauchy 1841] Augustin-Louis CAUCHY. Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre (19e l., 21 nov. 1842 et 20e l., 5 déc. 1842). In *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique*, volume II. Bachelier, 1841. *Œuvres* [Cauchy 1882–1974], s. 2, t. 12, p. 272–309.

[Cauchy 1842a] Augustin-Louis CAUCHY. Mémoire sur un théorème fondamental, dans le calcul intégral. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, XIV : p. 1020–1023, 1842. Séance du 27 juin 1842. *Œuvres* [Cauchy 1882–1974], s. 1, t. 6, p. 461–467 (extrait n°167).

[Cauchy 1842b] Augustin-Louis CAUCHY. Mémoire sur l'emploi d'un nouveau calcul, appelé calcul des limites, dans l'intégration d'un système d'équations différentielles. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, XV : p. 14, 1842. Séance du 4 juillet 1842. *Œuvres* [Cauchy 1882–1974], s. 1, t. 7, p. 5–17 (extrait n°169).

[Cauchy 1842c] Augustin-Louis CAUCHY. Mémoire sur l'emploi du calcul des limites dans l'intégration des équations aux dérivées partielles. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, XV : p. 44–58, 1842. Séance du 11 juillet 1842. *Œuvres* [Cauchy 1882–1974], s. 1, t. 7, p. 17–33 (extrait n°170).

[Cauchy 1842d] Augustin-Louis CAUCHY. Mémoire sur l'application du calcul des limites à l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, XV : p. 85–101, 1842. Séance du 18 juillet 1842. *Œuvres* [Cauchy 1882–1974], s. 1, t. 7, p. 33–49 (extrait n°171).

[Cauchy 1843] Augustin-Louis CAUCHY. Remarques sur les intégrales des équations aux dérivées partielles, et sur l'emploi de ces intégrales dans les questions de Physique mathématique. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, XVI : p. 572, 1843. Séance du 13 mars 1843. *Œuvres* [Cauchy 1882–1974], s. 1, t. 7, p. 308–325 (extrait n°206).

[Cauchy 1855] Augustin-Louis CAUCHY. Rapport sur un mémoire présenté à l'académie par MM. Briot et Bouquet. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 11 : p. 557, 1855. *Œuvres* [Cauchy 1882–1974], s. 1, t. 12, p. 243–256. Ce rapport de Cauchy porte sur le mémoire de Briot et Bouquet publié l'année suivante : [Briot et Bouquet 1856b].

[Cauchy 1882–1974] Augustin-Louis CAUCHY. *Œuvres Complètes d'Augustin Cauchy. Publié sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences.*

Gauthier-Villars, 1882–1974. Première série : mémoires extraits des recueils de l'Académie des sciences de l'Institut de France, 12 volumes et un volume de table générale. Deuxième série : mémoires divers et ouvrages, 15 volumes. Disponibles sur Gallica.

[Chasles 1880] Michel CHASLES. *Traité de géométrie supérieure*. Gauthier–Villars, 2e éd. edition, 1880. `http://name.umdl.umich.edu/abn2684`.

[Chemla 2003] Karine CHEMLA. Generality above abstraction. The general expressed in terms of the paradigmatic in mathematics in ancien China. *Science in context*, 16 (3) : p. 413–458, 2003.

[Chemla 2005] Karine CHEMLA. Le paradigme et le général. réflexions inspirées par les textes mathématiques de la chine ancienne. In Jean-Claude PASSERON et Jacques REVEL, éditeurs, *Penser par cas*. Éditions de l'EHESS, 2005.

[Cournot 1843] Antoine-Augustin COURNOT. *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*. Hachette, 1843. *Œuvres*, [Cournot 1973–, t. 1].

[Cournot 1973–] Antoine-Augustin COURNOT. *Œuvres complètes*. Vrin, 1973–.

[CR Soc Phil] Comptes-rendus des séances de la Société philomatique de Paris. Manuscripts conservés à la bibliothèque de la Sorbonne, Ms 2081–2099. En particulier : Ms 2089, années 1842–1849 et Ms 2090, années 1850–1857.

[Croke 1982] Christopher B. CROKE. Poincaré's problem on the shortest closed geodesic on a convex hypersurface. *Journal of differential geometry*, 17 : p. 595–634, 1982.

[Darboux 1887–1896] Gaston DARBOUX. *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. Gauthier-Villars, Paris, 1887–1896. 1re édition, 4 tomes. Les deux premiers tomes ont été augmentés et réédités en 1914 et 1915 respectivement.

[Diacu et Holmes 1996] Florin DIACU et Philip HOLMES. *Celestial encounters : the origins of chaos and instability*. Princeton U. P., 1996.

[Dirichlet 1829] DIRICHLET. Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1829.

[Dugac 1984] Pierre DUGAC. Georg Cantor et Henri Poincaré. *Bolletino di storia delle scienze matematische*, 4 : p. 65–96, 1984.

[Fréchet 1921] Maurice FRÉCHET. Remarques sur les probabilités continues. *Bull. Sci. Math.*, 45 : p. 87–88, 1921.

[Fréchet 1938] Maurice FRÉCHET. *Méthode des fonctions arbitraires : théorie des évènements en chaîne dans le cas d'un nombre fini de cas possibles*. Gauthier–Villars, 1938.

[Fuller 1967] F. Brock FULLER. An index of fixed point type for periodic orbits. *American Journal of Mathematics*, 89 : p. 133–148, 1967.

[Gilain 1977] Christian GILAIN. *La théorie géométrique des équations différentielles de Poincaré et l'histoire de l'analyse*. Thèse de doctorat, Université Paris I, 1977.

[Gray 1992] Jeremy J. GRAY. Poincaré, topological dynamics, and the stability of the solar system. In A. E. Shapiro P. M. HARMAN, éditeur, *The investigation of difficult things. Essays on Newton and the history of the exact sciences*, p. 503–524. Cambridge Univ. Press, 1992.

[Gyldén 1887] Hugo GYLDÉN. Untersuchungen über die Convergenz der Reihen, welche zur Darstellung der Coordinaten des Planeten angewendet werden. *Acta mathematica*, 9 : p. 185–294, 1887.

[Gyldén 1888a] Hugo GYLDÉN. Om sannolikheten af inträdande divergens vid användande af de hittills brukliga methoderna att analytiskt framställa planetariska störingar. *Öfversigt af Kongliga Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, 45 : p. 77–87, 8 février 1888.

[Gyldén 1888b] Hugo GYLDÉN. Quelques remarques relativement à la représentation des irrationnels au moyen des fractions continues. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 106 : p. 1584–1587, séance du 4 juin 1888.

[Gyldén 1888c] Hugo GYLDÉN. Om sannolikheten af att påträffa stora tal vid utvecklingen af irrationela decimalbråk i kedjebråk. *Öfversigt af Kongliga Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, 45 : p. 349–358, 6 juin 1888.

[Gyldén 1888d] Hugo GYLDÉN. Quelques remarques relatives à la représentation des irrationnels au moyen des fractions continues. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 106 : p. 1777–1781, séance du 25 juin 1888.

[Hadamard 1898] Jacques HADAMARD. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. *J. de math. pures et appliquées*, 4 (5) : p. 27–73, 1898. *Œuvres* [Hadamard 1968], t. 2, p. 729–776.

[Hadamard 1968] Jacques HADAMARD. *Œuvres*. Éditions du CNRS, Paris, 1968.

[Hald 1998] Anders HALD. *A History of Mathematical Stratistics from 1750 to 1930*. Wiley, 1998.

[Hass et Morgan 1996] Joel HASS et Frank MORGAN. Geodesics and soap bubbles in surfaces. *Mathematische Zeitschrift*, 223 : p. 185–196, 1996.

[Hawkins 1975a] Thomas HAWKINS. Cauchy and the spectral theory of matrices. *Historia mathematica*, 2 : p. 1–29, 1975.

[Hawkins 1975b] Thomas HAWKINS. The theory of matrices in the 19th century. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vancouver, 1974*, volume 2, p. 561–570. Canadian Math. Congress, 1975.

[Hawkins 1977a] Thomas HAWKINS. Another look at Cayley and the theory of matrices. *Archives internationales d'histoire des sciences*, 27 : p. 82–112, 1977.

[Hawkins 1977b] Thomas HAWKINS. Weierstrass and the theory of matrices. *Archive for history of exact sciences*, 17 : p. 119–163, 1977.

[Herreman 1996] Alain HERREMAN. *Éléments d'histoire sémiotique de l'homologie*. Thèse de doctorat, Université Paris 7 Denis Diderot, 1996.

[Jacobi 1866] Carl Gustav J. JACOBI. *Volesungen über Dynamik*. G. Reimer, 1866.

[Kamlah 1883] Andreas KAMLAH. Probability as a quasi-theoretical concept : J. v. Kries' sophisticated account after a century ; methodology, epistemology and philosophy of science. *Erkenntnis*, 19 : p. 239–251, 1883.

[Kronecker 1874] L. KRONECKER. Über Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen. *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1874. *Werke* [Kronecker 1895–1931], t. 1, p. 349–413.

[Kronecker 1895–1931] Leopold KRONECKER. *Leopold Kronecker's Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften von K. Hensel.* Teubner, 1895–1931. http://name.umdl.umich.edu/AAS8260.

[Lagrange 1776] J.-L. LAGRANGE. Sur l'altération des moyens mouvements des planètes. *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 1776. *Œuvres* [Lagrange 1867–1892], t. IV, p. 255ss.

[Lagrange 1781] J.-L. LAGRANGE. Théorie des variations séculaires des planètes, première partie. 1781. *Œuvres* [Lagrange 1867–1892], t. V.

[Lagrange 1808] J.-L. LAGRANGE. Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites. *Mémoires de la première classe de l'Institut de France*, 1808. *Œuvres* [Lagrange 1867–1892], t. VI, p. 713ss.

[Lagrange 1867–1892] J.-L. LAGRANGE. *Œuvres.* Gauthier–Villars, 1867–1892.

[Lakatos 1976] Imre LAKATOS. *Proofs and refutations : the logic of mathematical discovery.* Cambridge U. Press, 1976. Édité par John Worall et Élie Zahar.

[Lakatos 1984] Imre LAKATOS. *Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique.* Hermann, 1984. Textes présentés par John Worall et Élie Zahar. Traduction de Nicolas Balacheff et Jean-Marie Laborde.

[Lambert 1801] Jean-Henri LAMBERT. *Lettres cosmologiques sur l'organisation de l'univers, écrites en 1761.* Gerard Hulst van Keulen, 1801. Traduction de l'allemand par M. Darquier. Fac-sim. publié chez A. Brieux en 1977.

[Lefschetz 1957] Solomon LEFSCHETZ. *Differential equations : Geometric theory.* Interscience, 1957.

[Leray 1945] Jean LERAY. Sur les équations et les transformations. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 24 : p. 201–248, 1945. Cet article constitue la troisième partie d'un cours de topologie algébrique, écrit en captivité.

[Luc et al. 2000] C. LUC, M. MOHAJID, M.-P. PÉRY-WOODLEY et J. VIRBEL. Les énumérations : structures visuelles, syntaxiques et rhétoriques. In *Document électronique dynamique : Actes du troisième colloque internationnal sur le document électronique, CIDE'2000, Lyon, 4–6 juillet 2000, p. 21–40.* Europia production, 2000.

[Luc 2001] Christophe LUC. Une typologie des énumérations basée sur les structures rhétoriques et architecturales du texte. In *Huitième conférence annuelle sur le traitement automatique des langues naturelles, TALN–RECITAL 2001, Tours, 2–5 juillet*, 2001. http://www.atala.org/doc/actes_taln/AC_0045.pdf.

[Maurey et Tacchi 2002] Bernard MAUREY et Jean-Pierre TACCHI. Ludwig Scheeffer et les extensions du théorème des accroissements finis. *Travaux mathématiques*, fascicle XIII : p. 1–60, 2002. Voir http://www.math.jussieu.fr/~maurey/articles/.

[Minkowski 1901a] Hermann MINKOWSKI. Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, 9 : p. 115–121, 1901. [Minkowski 1911], t. II, p. 122–127.

[Minkowski 1901b] Hermann MINKOWSKI. Sur les surfaces convexes fermées. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 132 : p. 21–24, 1901.

[Minkowski 1903] Hermann MINKOWSKI. Volumen und Oberfläche. *Mathematische Annalen*, 57 : p. 447–495, 1903. [Minkowski 1911], t. II, p. 230–276.

[Minkowski 1911] Hermann MINKOWSKI. *Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski, unter Mitwirkung von Andreas Speiser und Hermann Weyl, herausgegeben von David Hilbert.* B. G. Teubner, 1911.

[Morse 1934] Marston MORSE. *The Calculus of Variations in the Large.* A.M.S., 1934. (Colloquium Publications, vol. XVIII).

[Nabonnand 1995] Philippe NABONNAND. Contribution à l'histoire de la théorie des géodésiques au XIX^e siècle. *Revue d'histoire des mathématiques*, 1 : p. 159–200, 1995.

[Oxtoby 1971] John C. OXTOBY. *Measure and Category : a survey of the analogies between topological and measure spaces.* Springer, 1971.

[Poincaré 1878] Henri POINCARÉ. Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles. *Journal de l'École Polytechnique*, 45^e cahier : p. 13–26, 1878. *Œuvres* [Poincaré 1916–1954], t. 1, p. XXXVI–XLVIII.

[Poincaré 1879] Henri POINCARÉ. *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles.* Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris, 1^er août 1879. *Œuvres* [Poincaré 1916–1954], t. 1, p. IL–CXXXII.

[Poincaré 1880a] Henri POINCARÉ. Sur les courbes définies par une équation différentielle. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 90 : p. 673–675, 1880. *Œuvres* [Poincaré 1916–1954], t. 1, p. 1–2.

[Poincaré 1880b] Henri POINCARÉ. Sur les formes cubiques ternaires. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 90 : p. 1336–1338, 1880. *Œuvres* [Poincaré 1916–1954], t. 5, p. 25–27.

[Poincaré 1881a] Henri POINCARÉ. Sur les courbes définies par une équation différentielle *(première partie). Journal de Liouville (3^e série)*, 7 : p. 375–422, 1881. *Œuvres* [Poincaré 1916–1954], t. 1 : p. 3–44.

[Poincaré 1881b] Henri POINCARÉ. Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires. *Journal de l'École Polytechnique*, 50^e Cahier : p. 190–253, 1881. *Œuvres* [Poincaré 1916–1954], t. 5, p. 28–72.

[Poincaré 1882] Henri POINCARÉ. Sur les courbes définies par une équation différentielle *(deuxième partie). Journal de Liouville (3^e série)*, 8 : p. 251–296, 1882. *Œuvres* [Poincaré 1916–1954], t. 1 : p. 44–84.

[Poincaré 1883] Henri POINCARÉ. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 97 : p. 251–252, 1883. *Œuvres* [Poincaré 1916–1954], t. 7, p. 251–252.

[Poincaré 1884] Henri POINCARÉ. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps. *Bulletin astronomique*, 1 : p. 65–74, 1884. *Œuvres* [Poincaré 1916–1954], t. 7 : p. 253–261.

[Poincaré 1885] Henri POINCARÉ. Sur les courbes définies par les équations différentielles *(troisième partie). Journal de Liouville (4^e série)*, 1 : p. 167–244, 1885. *Œuvres* [Poincaré 1916–1954], t. 1 : p. 90–158.

[Poincaré 1886] Henri POINCARÉ. Sur les courbes définies par les équations différentielles *(quatrième partie)*. *Journal de Liouville (4e série)*, 2 : p. 151–217, 1886. *Œuvres* [Poincaré 1916–1954], t. 1 : p. 167–222.

[Poincaré 1889] Henri POINCARÉ. Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique. *Mémoire couronné du prix de S.M. le roi Oscar* II *de Suède*. 1889. Ce mémoire, déjà complété par plusieurs longues notes par rapport au mémoire effectivement couronné, a été imprimé par *Acta mathematica*, mais retiré avant la publication, pour être remplacé par [Poincaré 1890], où le texte est très largement remanié (voir [Barrow-Green 1997] pour plus de détails sur les deux versions). [Pa]

[Poincaré 1890] Henri POINCARÉ. Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique. *Mémoire couronné du prix de S. M. le roi Oscar* II *de Suède*. *Acta mathematica*, 13 : p. 1–270, 1890. *Œuvres* [Poincaré 1916–1954], t. 7, p. 262–479. Ce mémoire est en réalité une version largement remaniée de [Poincaré 1889]. [Pb]

[Poincaré 1891a] Henri POINCARÉ. Le problème des trois corps. *Revue générale des sciences*, 2 : p. 1–5, 15 janvier 1891. *Œuvres* [Poincaré 1916–1954], t. 8, p. 529-537.

[Poincaré 1891b] Henri POINCARÉ. Sur le problème des trois corps. *Bulletin astronomique*, 8 : p. 12–24, janvier 1891. *Œuvres* [Poincaré 1916–1954], t. 7, p. 480–490. Il s'agit d'un exposé, sans démonstration, des principaux résultats obtenus dans [Poincaré 1890] susceptibles d'intéresser les lecteurs du *Bulletin Astronomique*.

[Poincaré 1892–1899] Henri POINCARÉ. *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Gauthier-Villars, Paris, 1892–1899.

[Poincaré 1894] Henri POINCARÉ. Sur la théorie cinétique des gaz. *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 5 : p. 513–521, 1894. *Œuvres* [Poincaré 1916–1954], t. 10, p. 246–263. La pagination donnée est celle des *Œuvres*.

[Poincaré 1896a] Henri POINCARÉ. *Calcul des probabilités, leçons professées pendant le deuxième semestre 1893–1894*. Carré et Naud, 1896. Leçons rédigées par A. Quiquet. J'ai utilisé une réimpression de 1900. Une deuxième édition, revue et augmentée par l'auteur, est ensuite publiée en 1912 ; les principales modifications sont l'ajout de l'article [Poincaré 1907] en guise d'introduction, et un dernier chapitre qui reprend mathématiquement des problèmes évoqués dans cet article, à savoir le battage des cartes, la répartition des décimales dans une table numérique, et le mélange des liquides.

[Poincaré 1896b] Henri POINCARÉ. Sur la méthode de Bruns. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 123 : p. 1224–1228, 1896. *Œuvres* [Poincaré 1916–1954], t. 7 : p. 512–516.

[Poincaré 1898] Henri POINCARÉ. Sur la stabilité du système solaire. *Revue scientifique*, 9 : p. 609–613, 1898. *Œuvres* [Poincaré 1916–1954], t. 8, p. 538–547.

[Poincaré 1899] Henri POINCARÉ. Réflexions sur le calcul des probabilités. *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 10 : p. 262–269, 1899. Cet article a été inséré, un peu modifié, dans [Poincaré 1902], p. 214–244.

[Poincaré 1902] Henri POINCARÉ. *La science et l'hypothèse*. Flammarion, 1902. Cité d'après la réédition aux Ed. de la Bohème, 1992.

[Poincaré 1905a] Henri POINCARÉ. *La valeur de la science.* Flammarion, 1905. Cité d'après la réédition de 1970.

[Poincaré 1905b] Henri POINCARÉ. *Leçons de mécanique céleste.* Gauthier-Villars, Paris, 1905.

[Poincaré 1905c] Henri POINCARÉ. Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes. *Transactions of the American Mathematical Society*, 6 : p. 237–274, 1905. *Œuvres* [Poincaré 1916–1954], t. 6, p. 38–84. Cité d'après la pagination de l'édition des *Œuvres.*

[Poincaré 1907] Henri POINCARÉ. Le hasard. *La revue du mois*, 3 : p. 257–276, 1907. Cet article est repris comme introduction à la deuxième édition de [Poincaré 1896a] en 1912, et inclus également dans [Poincaré 1908], p. 64–94.

[Poincaré 1908] Henri POINCARÉ. *Science et méthode.* Paris, 1908.

[Poincaré 1916–1954] Henri POINCARÉ. *Œuvres.* Gauthier-Villars, 1916–1954.

[Poincaré 1921] Henri POINCARÉ. Analyse de ses travaux scientifiques. *Acta Mathematica*, 38 : p. 1–135, 1921. Cette note, quoique publiée seulement en 1921, a été écrite par Poincaré en 1901.

[Poincaré et Mittag-Leffler 1999] Henri POINCARÉ et Gösta MITTAG-LEFFLER. *La Correspondance entre Henri Poincaré et Gösta Mittag-Leffler, avec en annexe les lettres échangées par Poincaré avec Fredholm, Gyldén et Phragmén.* Birkhaüser, 1999. Publié par P. Nabonnand.

[Poisson 1809] Siméon-Denis POISSON. Mémoire sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes (lu à l'Institut le 20 juin 1808). *Journal de l'École Polytechnique*, t. VIII (15e cahier) : p. 1–56, 1809.

[Quetelet 1835] Adolphe QUETELET. *Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou Essai de physique sociale.* Bachelier, 1835.

[Rapport] Rapport de la commission du prix offert par S.M. le roi Oscar II de Suède. *Œuvres* de Poincaré [Poincaré 1916–1954], t. 11, p. 286–289, 20 janvier 1889.

[Riemann 1854] Bernhard RIEMANN. Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique. Mémoire d'habilitation présenté à la faculté de philosophie de l'université de Göttingen. Publié dans les *Mémoires de la Société royale des sciences de Göttingen.*, 1854. *Œuvres* : [Riemann 1898], p. 225–272 et [Riemann 1876], p. 227–265.

[Riemann 1876] Bernhard RIEMANN. *Bernhard Riemann's Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass,* H. Weber et R. Dedekind, éditeurs. Teubner, 1876. Cité d'après la seconde édition de 1892, avec le supplément de M. Noether et W. Wirtinger (1902), réimprimée en 1990 conjointement par Springer Verlag et Teubner, sous le titre *Gesammelte mathematische Werke, Wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge. Collected papers.*

[Riemann 1898] Bernhard RIEMANN. *Œuvres mathématiques.* Gauthier-Villars, 1898. Traduites par L. Laugel à partir de la deuxième édition allemande, avec une préface de M. Hermite et un discours de M. Felix Klein.

[Robadey 2004] Anne ROBADEY. Exploration d'un mode d'écriture de la généralité : l'article de Poincaré sur les lignes géodésiques des surfaces convexes (1905). *Revue d'histoire des mathématiques*, 10 : p. 257–318, 2004.

[Roque 2001] Tatiana ROQUE. *Ensaio sobre a gênese das idéas matemáticas : exemplos da theoria dos sístemas dinâmicos.* Thèse de doctorat, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 2001.

[Seneta et al. 2001] Eugene SENETA, Karen H. PARSHALL et François JONGMANS. Nineteenth-century developments in geometric probability : J. J. Sylvester, M. W. Crofton, J.-E. Barbier, and J. Bertrand. *Archive for history of exact sciences*, 55 : p. 501–524, 2001.

[Serret 1866] Joseph-Alfred SERRET. *Cours d'algèbre supérieure (3e édition).* Gauthier-Villars, 1866.

[Shafer et Vovk 2004] Glenn SHAFER et Vladimir VOVK. The sources of Kolmogorov's *Grundbegriffe*. `http://www.probabilityandfinance.com` (working paper), 2004.

[Sheynin 1991] O. B. SHEYNIN. H. Poincaré's work on probability. *Archive for history of exact sciences*, 42 : p. 139–171, 1991.

[Sommaire 1873–1874] Sommaire des leçons à l'École polytechnique, 1873–1874. Archives de l'École Polytechnique.

[Sommaire 1874–1875] Sommaire des leçons à l'École polytechnique, 1874–1875. Archives de l'École Polytechnique.

[Stigler 1986] Stephen M. STIGLER. *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900.* The Belknap Press of Harvard University Press, 1986.

[von Kries 1886] Johannes VON KRIES. *Die Principien des Wahrscheinlichkeits-Rechnung.* Mohr, 1886.

[von Plato 1983] Jan VON PLATO. The method of arbitrary functions. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 34 : p. 37–47, 1983.

[von Plato 1994] Jan VON PLATO. *Creating modern probability. Its mathematics, physics and philosophy in historical perspective.* Cambridge U. Press, 1994.

[Weierstrass 1858] Karl WEIERSTRASS. Über ein die homogene Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem. *Monatsbericht der Königlich Akademie der Wissenschaften*, 1858. *Werke* [Weierstrass 1894–1927], t. 1, p. 233–246.

[Weierstrass 1894–1927] Karl WEIERSTRASS. *Mathematische Werke von Karl Weierstrass. Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission.* Mayer & Müller, 1894–1927. `http://name.umdl.umich.edu/AAN8481`.

[White 1991] Brian WHITE. The space of minimal submanifolds for varying Riemannian metrics. *Indiana University Mathematics Journal*, 40 (1) : p. 161–200, 1991.