Université du Havre

Résolution de problèmes non linéaires par les méthodes de points intérieurs.

Théorie et algorithmes.

Mohammed Ouriemchi

Laboratoire de mathématiques appliquées du Havre

08 décembre 2005

Plan

1. Introduction

Plan

Plan

Plan

Plan

Plan

Plan

Le problème non linéaire

Nous considérons le problème non linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \min f(x) \\ \text{s.c.} \\ x \in C \end{array}\right. \qquad (PNL)$$

Avec $C = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0 \text{ et } g(x) \leq 0\}$
où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Historique

Nous considérons le problème non linéaire suivant :

Pénalisation

$$\left\{\begin{array}{l} \min f(x) \\ \text{s.c.} \\ x \in C \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \min f(x) + t.h^2(x) \\ \text{s.c.} \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}\right.$$

Avec $C = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$

$\longrightarrow$ 1943 R. Courant

Historique

Nous considérons le problème non linéaire suivant :

Pénalisation

$$\left\{\begin{array}{l}\min f(x)\\ \text{s.c.}\\ x \in C\end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\min \varphi(x)\\ \text{s.c.}\\ x \in \mathbb{R}^n\end{array}\right.$$

Avec $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ convexe

- $\longrightarrow$ 1943 R. Courant
- $\longrightarrow$ 1951 Kuhn et Tucker

Historique

Nous considérons le problème non linéaire suivant :

Pénalisation

$$\left\{\begin{array}{l}\min f(x)\\ \text{s.c.}\\ x\in C\end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\min f(x) + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i \ln(-g_i(x))\\ \text{s.c.}\\ x\in \mathbb{R}^n\end{array}\right.$$

Avec $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$

- $\longrightarrow$ 1943 R. Courant
- $\longrightarrow$ 1951 Kuhn et Tucker
- $\longrightarrow$ 1954 Frisch

Historique

Nous considérons le problème non linéaire suivant :

Pénalisation

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.c.} \\ x \in C \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \min f(x) - t\sum_{i=1}^{m} min(g_i(x), 0) \\ \text{s.c.} \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Avec $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \geq 0\}$

- $\longrightarrow$ 1943 R. Courant
- $\longrightarrow$ 1951 Kuhn et Tucker
- $\longrightarrow$ 1954 Frisch
- $\longrightarrow$ 1955 Ablow et Brigham

Historique

Nous considérons le problème non linéaire suivant :

Pénalisation

$$\left\{\begin{array}{l} \min f(x) \\ \text{s.c.} \\ x \in C \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \min f(x) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \ln(-g_i(x)) \\ \text{s.c.} \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}\right.$$

Avec $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$

- $\longrightarrow$ 1943 R. Courant
- $\longrightarrow$ 1951 Kuhn et Tucker
- $\longrightarrow$ 1954 Frisch
- $\longrightarrow$ 1968 Fiacco et McCormick

Historique

Nous considérons le problème non linéaire suivant :

Pénalisation

$$\left\{\begin{array}{l}\min f(x)\\ \text{s.c.}\\ x \in C\end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\min f(x) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \ln(-g_i(x))\\ \text{s.c.}\\ x \in \mathbb{R}^n\end{array}\right.$$

Avec $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$

$\longrightarrow$ 1943 R. Courant

$\longrightarrow$ 1951 Kuhn et Tucker

$\longrightarrow$ 1954 Frisch

$\longrightarrow$ 1968 Fiacco et McCormick

$\longrightarrow$ 1969 Lootsma et Murray

Historique

Nous considérons le problème non linéaire suivant :

Pénalisation

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.c.} \\ x \in C \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \text{Projection : } T_k(x) = X_k^{-1}x/(e_n^t X_k^{-1}x) \\ \text{s.c.} \\ x \in S_n = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, e_n^t x = 1\} \end{cases}$$

Avec $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ et $f(x) = c^t x$

- $\longrightarrow$ 1943 R. Courant
- $\longrightarrow$ 1951 Kuhn et Tucker
- $\longrightarrow$ 1954 Frisch
- $\longrightarrow$ 1968 Fiacco et McCormick
- $\longrightarrow$ 1969 Lootsma et Murray
- $\longrightarrow$ 1984 Karmarkar

Plan

Programmation quadratique séquentielle

Soit le problème non linéaire avec des contraintes d'égalités suivant :

PNE

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.c.} \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

Les conditions d'optimalité de premier ordre sont données par le système suivant

$$\begin{cases} \nabla_x L(x, \lambda) = \nabla f(x) + J_h^t \lambda = 0 \\ h(x) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange, $L(x, \lambda)$ est le lagrangien associé au problème (PNE) et J_h est le Jacobien de h au point x.

Programmation quadratique séquentielle

Soit

$$F(x,\lambda) = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + J_h^t \lambda \\ h(x) \end{bmatrix} \tag{2}$$

Soit

$$F(x,\lambda) = \left[\begin{array}{l} \nabla f(x) + J_h^t \lambda \\ h(x) \end{array} \right] \tag{2}$$

$$\nabla F^t(x,\lambda) d = -F(x,\lambda) \tag{3}$$

Construire une suite de vecteur (x_k, λ_k) à partir d'un point initial et d'une direction de déplacement $d = \begin{pmatrix} d_x \\ d_\lambda \end{pmatrix}$ tel que

Programmation quadratique séquentielle

Soit

$$F(x,\lambda) = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + J_h^t \lambda \\ h(x) \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\nabla F^t(x,\lambda) d = -F(x,\lambda) \tag{3}$$

Construire une suite de vecteur (x_k, λ_k) à partir d'un point initial et d'une direction de déplacement $d = \begin{pmatrix} d_x \\ d_\lambda \end{pmatrix}$ tel que

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_x \\ d_\lambda \end{pmatrix} \tag{4}$$

où

$$\begin{bmatrix} W_k & J(x_k)^t \\ J(x_k) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x_k) - J(x_k)^t \lambda_k \\ -h(x_k) \end{bmatrix} \tag{5}$$

Considérons le problème quadratique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \frac{1}{2} d^t W d + b^t d \\ \text{s.c.} \\ Gd + c = 0 \end{array} \right. \tag{6}$$

où W est une matrice carrée d'ordre $n+p$,
$d \in \mathbb{R}^{n+p}$,
b est un vecteur de $\mathbb{R}^{n+p}$,
G est une matrice $(p, n+p)$ et
c est un vecteur de $\mathbb{R}^p$.

Programmation quadratique séquentielle

Si (6) est convexe alors sa solution (p, μ) vérifie le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} Wd + b + G^t \mu = 0 \\ Gp + c = 0 \end{array} \right. \tag{7}$$

Programmation quadratique séquentielle

Si (6) est convexe alors sa solution (p, μ) vérifie le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} Wd + b + G^t \mu = 0 \\ Gp + c = 0 \end{array} \right. \tag{7}$$

ou sous forme matricielle,

$$\begin{bmatrix} W & G^t \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ \mu - \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b - G^t \lambda_k \\ -c \end{bmatrix} \tag{8}$$

Programmation quadratique séquentielle

En comparant les deux systèmes linéaires, on en déduit le principe de la méthode *SQP*.

$$\begin{bmatrix} W_k & J(x_k)^t \\ J(x_k) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x_k) - J(x_k)^t \lambda_k \\ -h(x_k) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} W & G^t \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ \mu - \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b - G^t \lambda_k \\ -c \end{bmatrix} \quad (8)$$

Avec $W = W(x_k, \lambda_k)$, $b = \nabla f(x_k)$,
$G = J_h(x_k)$, $c = h(x_k)$, $d_x = p$ et
$d_\lambda = \mu - \lambda_k$ ou $\lambda_{k+1} = \mu$.

Programmation quadratique séquentielle

Il s'agit de résoudre, à chaque itération le problème quadratique suivant :

sous-problème quadratique

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} d^t W d + \nabla f^t d \\ \text{s.c.} \\ J_h d + h = 0 \end{cases}$$

$W = W(x_k, \lambda_k)$, $\nabla f = \nabla f(x_k)$, $J_h = J_h(x_k)$ et $h = h(x_k)$

Méthodes de points intérieurs

Nous considérons le problème suivant :

PNI

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.c.} \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

On notera $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ le domaine réalisable et

Nous considérons le problème suivant :

PNI

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.c.} \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

Problème pénalisé

$$\begin{cases} \min f(x) - \mu \sum_{i=1}^{m} \ln(-g_i(x)) \\ \text{s.c.} \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$ir(C) = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < 0\}$ est l'ensemble des solutions strictement réalisables.

Lemme (Fiacco et McCormick)

Soit X *un ensemble compact tel que* $ir(C) \cap X \neq \emptyset$
Soit $(y_k)_k$ *une suite d'éléments de* $ir(C) \cap X$ *convergeant vers* $\bar{y} \in X \cap \partial(X)$.
Soit φ *une fonction continue définie dans* $ir(C) \cap X$ *avec la propriété :* $\varphi(y_k)$ *n'est pas bornée supérieurement quand* $k \to \infty$ *pour toute suite* $(y_k)_k$ *décrite ci-dessus.*
Alors φ *atteint son minimum fini* $\varphi^* = \varphi(x^*)$ *sur* $ir(C) \cap X$.

$\rightsquigarrow$ solution approchée.

Théorème (Convergence de la trajectoire barrière)

Soit le problème (PNI) où f et g sont continues.
Supposons que $ir(C) \neq \emptyset$.
Soit x^* un minimum local du problème (PNI), verifiant les conditions suffisantes d'optimalité :

- $\longrightarrow$ x^* *est un point KKT,*
- $\longrightarrow$ *les contraintes sont qualifiées au sens de la MFCQ au point x^*,*
- $\longrightarrow$ *il existe $\omega > 0$ tel que $d^t W(x^*, \lambda) d \geq \omega \|d\|^2$ pour tout multiplicateur acceptable λ et tout vecteur non nul d vérifiant :* $\nabla_x f(x^*) d = 0$ *et* $J_{\mathcal{A}} d \geq 0$.

Supposons appliquer une méthode barrière logarithmique avec μ_k décroissant strictement vers 0, alors :

Théorème (Convergence de la trajectoire barrière)

- → *il existe au moins une sous-suite,* $(x_k)_k$*, de minimums locaux de* $\varphi(x, \mu_k)$ *convergeant vers* x^**,*
- → *la suite* $(\lambda_k)_k$*, dont les composantes sont* $-\mu_k / g_i(x_k)$*, est bornée,*
- → $\lim_{k \to \infty} \lambda_k = \bar{\lambda} \in \mathcal{M}_\lambda(x^*)$.

  Si de plus La complémentarité stricte est vérifiée au point x^**, alors*
- → *pour* k *assez grand, le Hessien* $\nabla^2 \varphi(x_k, \mu_k)$ *est défini positif,*
- → *il existe une trajectoire* $x(\mu)$ *unique, où chaque valeur* $x(\mu)$ *est un minimum local de* $\varphi(x, \mu)$*,*
- → $\lim_{\mu \to 0^+} x(\mu) = x^*$.

Codes numériques

$\longrightarrow$ LOQO (Vanderbei 1996)
pénalisation, quadratique, recherche linéaire

Codes numériques

$\longrightarrow$ LOQO (Vanderbei 1996)
$\longrightarrow$ KNITRO (Waltz 1996)
MPI, SQP, RC, Steihaug/dogleg, fonction de mérite

Codes numériques

$\longrightarrow$ LOQO (Vanderbei 1996)
$\longrightarrow$ KNITRO (Waltz 1996)
$\longrightarrow$ filterSQP (Fletcher, Leyfer et Toint 2002)
ensemble actif, SQP, RC, phase de restauration, filtre

Codes numériques

$\longrightarrow$ LOQO (Vanderbei 1996)
$\longrightarrow$ KNITRO (Waltz 1996)
$\longrightarrow$ filterSQP (Fletcher, Leyfer et Toint 2002)
$\longrightarrow$ SNOPT (Gill, Murray et saunders 2002)
ensemble actif, BFGS, recherche linéaire , SQOPT

Plan

La méthode SDC

Nous considérons le problème suivant :

PNL

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.c.} \\ h(x) = 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

La méthode SDC

Nous considérons le problème suivant :

PNL

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.c.} \\ h(x) = 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

- Points intérieurs

La méthode SDC

Nous considérons le problème suivant :

PNL

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.c.} \\ h(x) = 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

- Points intérieurs
- SQP

La méthode SDC

Nous considérons le problème suivant :

PNL

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.c.} \\ h(x) = 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

- Points intérieurs
- SQP
- Région de confiance

La méthode SDC

Nous considérons le problème suivant :

PNL

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.c.} \\ h(x) = 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

- Points intérieurs
- SQP
- Région de confiance
- D.C.

La méthode SDC

Nous considérons le problème suivant :

PNL

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.c.} \\ h(x) = 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

- Points intérieurs
- SQP
- Région de confiance
- D.C.
- Fonction de mérite

Problème pénalisé

(P_μ)

$$\begin{cases} \min f(x) - \mu \sum_{i=1}^{m} \ln(s_i) \\ \text{s.c.} \\ g(x) + s = 0 \\ h(x) = 0 \\ x \in \mathbb{R}^n \\ s \in \mathbb{R}_+^m \end{cases}$$

$$L_\mu(x, s, \lambda_h, \lambda_g) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^{m} \ln s_i + \lambda_h^t h(x) + \lambda_g^t (g(x) + s)$$

Les conditions d'optimalité

Soit

$$L_\mu(x, s, \lambda_h, \lambda_g) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^{m} \ln s_i + \lambda_h^t h(x) + \lambda_g^t (g(x) + s) \tag{9}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \nabla_x f(x) + J_h^t \lambda_h + J_g^t \lambda_g & = & 0 \\ \lambda_g S e & = & \mu e \\ h(x) & = & 0 \\ g(x) + s & = & 0 \\ s \in \mathbb{R}_+^m & & \end{array} \right. \tag{10}$$

où $S = diag(s_i) \quad i = 1, \cdots, m$ et e est le vecteur unité de $\mathbb{R}^m$.

Les conditions d'optimalité

La méthode de Newton $\rightsquigarrow$

$$\begin{pmatrix} \nabla^2_{xx} L_\mu & 0 & J_h^t & J_g^t \\ 0 & \Lambda_g & 0 & S \\ J_h & 0 & 0 & 0 \\ J_g & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_s \\ \lambda_h^+ \\ \lambda_g^+ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x f \\ -\mu e \\ h(x) \\ g(x) + s \end{pmatrix} \tag{11}$$

où $\Lambda_g = diag(\lambda_g)$.

Les conditions d'optimalité

La méthode de Newton $\rightsquigarrow$

$$\begin{pmatrix} \nabla^2_{xx} L_\mu & 0 & J_h^t & J_g^t \\ 0 & \Lambda_g & 0 & S \\ J_h & 0 & 0 & 0 \\ J_g & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_s \\ \lambda_h^+ \\ \lambda_g^+ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x f \\ -\mu e \\ h(x) \\ g(x) + s \end{pmatrix} \tag{11}$$

SQP $\curvearrowleft$ matrice symétrique.

Les conditions d'optimalité

La méthode de Newton $\rightsquigarrow$

$$\begin{pmatrix} \nabla^2_{xx} L_\mu & 0 & J_h^t & J_g^t \\ 0 & \Lambda_g & 0 & S \\ J_h & 0 & 0 & 0 \\ J_g & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_s \\ \lambda_h^+ \\ \lambda_g^+ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x f \\ -\mu e \\ h(x) \\ g(x) + s \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{pmatrix} \nabla^2_{xx} L_\mu & 0 & J_h^t & J_g^t \\ 0 & S^{-1}\Lambda_g & 0 & I \\ J_h & 0 & 0 & 0 \\ J_g & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_s \\ \lambda_h^+ \\ \lambda_g^+ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x f \\ -\mu S^{-1} e \\ h(x) \\ g(x) + s \end{pmatrix} \tag{12}$$

Les conditions d'optimalité

La méthode de Newton $\rightsquigarrow$

$$\begin{pmatrix} \nabla^2_{xx} L_\mu & 0 & J_h^t & J_g^t \\ 0 & \Lambda_g & 0 & S \\ J_h & 0 & 0 & 0 \\ J_g & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_s \\ \lambda_h^+ \\ \lambda_g^+ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x f \\ -\mu e \\ h(x) \\ g(x) + s \end{pmatrix} \qquad (11)$$

$$d_s = S \tilde{d}_s$$

Les conditions d'optimalité

$$\begin{pmatrix} \nabla^2_{xx} L_\mu & 0 & J_h^t & J_g^t \\ 0 & \Lambda_g S & 0 & S \\ J_h & 0 & 0 & 0 \\ J_g & S & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ \tilde{d}_s \\ \lambda_h^+ \\ \lambda_g^+ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x f \\ -\mu e \\ h(x) \\ g(x) + s \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$d_s = S\tilde{d}_s$$

Les conditions d'optimalité

$$\begin{pmatrix} W & J^t \\ J & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d} \\ \lambda^+ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x \varphi(x,s) \\ c(x,s) \end{pmatrix} \tag{14}$$

Les conditions d'optimalité

$$\begin{pmatrix} W & J^t \\ J & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d} \\ \lambda^+ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x \varphi(x,s) \\ c(x,s) \end{pmatrix} \tag{14}$$

avec

$$W = \begin{pmatrix} \nabla^2_{xx} L_\mu & 0 \\ 0 & \Lambda_g S \end{pmatrix}$$

Les conditions d'optimalité

$$\begin{pmatrix} W & J^t \\ J & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d} \\ \lambda^+ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x \varphi(x, s) \\ c(x, s) \end{pmatrix} \tag{14}$$

avec

$$W = \begin{pmatrix} \nabla^2_{xx} L_\mu & 0 \\ 0 & \Lambda_g S \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} J_h & 0 \\ J_g & S \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} d_x \\ \tilde{d}_s \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda^+ = \begin{pmatrix} \lambda_h^+ \\ \lambda_g^+ \end{pmatrix}$$

$$\nabla \varphi = \begin{pmatrix} \nabla_x f \\ -\mu e \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c(x, s) = \begin{pmatrix} h(x) \\ g(x) + s \end{pmatrix}$$

Région de confiance

Soit $r > 0$, on considère le problème suivant :

RC

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} d^t W d + \nabla\varphi^t d \\ \text{s.c.} \\ \quad Jd + c = 0 \\ \quad \|d\|_2 \le r \\ \\ \quad d \in \mathbb{R}^{n+m} \end{cases} \tag{15}$$

Région de confiance

Soit $r > 0$, on considère le problème suivant :

RC

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \frac{1}{2} d^t W d + \nabla \varphi^t d \\ \text{s.c.} \\ \quad Jd + c = 0 \\ \quad \|d\|_2 \leq r \\ \\ \quad d \in \mathbb{R}^{n+m} \end{array} \right. \tag{15}$$

$\rightsquigarrow$ risque d'incompatibilité des contraintes !
$\{d \in \mathbb{R}^{n+m} / Jd + c = 0 \text{ et } \|d\|_2 \leq r\}$

Région de confiance

Soit $r > 0$, on considère le problème suivant :

RC

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} d^t W d + \nabla \varphi^t d \\ \text{s.c.} \\ \quad Jd + c = 0 \\ \quad \|d\|_2 \leq r \\ \\ \quad d \in \mathbb{R}^{n+m} \end{cases} \tag{15}$$

le schéma d'Omojukun : Trouver le plus petit ε, tel que $\{d \in \mathbb{R}^{n+m} / Jd + c = \varepsilon \text{ et } \|d\|_2 \leq r\} \neq \emptyset$.

Région de confiance

Soit $r > 0$, on considère le problème suivant :

RC

$$\left\{\begin{array}{l} \min \frac{1}{2} d^t W d + \nabla\varphi^t d \\ \text{s.c.} \\ \quad Jd + c = Jv + c \\ \quad \|d\|_2 \leq r \\ \quad d \in \mathbb{R}^{n+m} \end{array}\right. \tag{15}$$

le schéma d'Omojukun : Résoudre le problème

$$\left\{\begin{array}{l} \min \frac{1}{2} \|Jv + c\|_2^2 \\ \text{s.c.} \\ \quad \|v\|_2 \leq r \end{array}\right. \tag{16}$$

Problème horizontal

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} d^t W d + \nabla\varphi^t d \\ \text{s.c.} \\ \quad J(d - v) = 0 \\ \quad \|d\|_2 \leq r \\ \quad d \in \mathbb{R}^{n+m} \end{cases} \tag{17}$$

Problème horizontal

$$\left\{\begin{array}{l} \min \frac{1}{2} d^t W d + \nabla\varphi^t d \\ \text{s.c.} \\ \quad J(d-v) = 0 \\ \quad \|d\|_2 \leq r \\ \quad d \in \mathbb{R}^{n+m} \end{array}\right. \tag{17}$$

On note $w = d - v$.

PH

$$\left\{\begin{array}{l} \min \frac{1}{2} w^t W w + (\nabla\varphi + W^t v)^t w \\ \text{s.c.} \\ \quad Jw = 0 \\ \quad \|w\|_2 \leq \bar{r} \\ \quad d \in \mathbb{R}^{n+m} \end{array}\right. \tag{18}$$

où $\bar{r} = \sqrt{r^2 - \|v\|_2^2}$

La contrainte linéaire $Jw = 0$, traduit le fait que le vecteur w est un élément du noyau de J.

Problème horizontal

La contrainte linéaire $Jw = 0$, traduit le fait que le vecteur w est un élément du noyau de J.
Soit Z la base de l'espace généré par $ker(J)$
Z est de dimension $(n+m, n-p)$ et nous avons $JZ = 0$.

Problème horizontal

La contrainte linéaire $Jw = 0$, traduit le fait que le vecteur w est un élément du noyau de J.
Soit Z la base de l'espace généré par $ker(J)$, alors
il existe un vecteur u dans $\mathbb{R}^{n-p}$ tel que $w = Zu$.

Problème horizontal

La contrainte linéaire $Jw = 0$, traduit le fait que le vecteur w est un élément du noyau de J.

PHR

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} u^t H u + (\nabla \varphi_z)^t u \\ \text{s.c.} \\ \quad \|u\|_2 \leq \bar{r} \\ \quad u \in \mathbb{R}^{n-p} \end{cases} \tag{19}$$

où $w = Zu$, $H = Z^t W Z$ et $\nabla \varphi_z = (\nabla \varphi + W^t v) Z$.

Résolution des sous-problèmes quadratiques

Les deux sous-problèmes quadratiques (PV) et (PHR) sont de la forme

PV

$$\begin{cases} \min q(x) = \frac{1}{2} x^t Q x + b^t x \\ \text{s.c.} \\ ||x||_2 \leq \delta \\ x \in \mathbb{R}^q \end{cases} \tag{20}$$

où $Q = J^t J$, $b = c^t J$, et $\delta = \zeta r$.
Le problème (PV) est convexe dans $\mathbb{R}^{n+m}$ $(q = n + m)$.

Résolution des sous-problèmes quadratiques

Les deux sous-problèmes quadratiques (PV) et (PHR) sont de la forme

PHR

$$\begin{cases} \min q(x) = \frac{1}{2}x^t Q x + b^t x \\ \text{s.c.} \\ ||x||_2 \leq \delta \\ x \in \mathbb{R}^q \end{cases} \tag{20}$$

où $Q = H$, $b = \nabla \varphi_z$, et $\delta = \bar{r}$.
Le sous-problème horizontal réduit est non convexe dans $\mathbb{R}^{n-p}$ $(q = n - p)$.

Résolution des sous-problèmes quadratiques

On montre que si $\delta \neq 0$ alors le vecteur x est solution de (20) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait

$$\left\{\begin{array}{l} (Q + \lambda I)x = -b \\ \|x\| \leq \delta \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda(\|x\| - \delta) = 0 \\ (Q + \lambda I) \text{ est semi-définie positive} \end{array}\right. \tag{21}$$

On montre que si $\delta \neq 0$ alors le vecteur x est solution de (20) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} (Q + \lambda I)x = -b \\ \|x\| \leq \delta \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda(\|x\| - \delta) = 0 \\ (Q + \lambda I) \text{ est semi-définie positive} \end{array} \right. \tag{21}$$

- La méthode de Steihaug

Résolution des sous-problèmes quadratiques

On montre que si $\delta \neq 0$ alors le vecteur x est solution de (20) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait

$$\begin{cases} (Q+\lambda I)x = -b \\ \|x\| \leq \delta \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda(\|x\|-\delta) = 0 \\ (Q+\lambda I) \text{ est semi-définie positive} \end{cases} \tag{21}$$

- La méthode de Steihaug
- D.C.

Méthodes D.C.

Problème D.C.

$$m_p = \min\{f(x) = R(x) - T(x) : \quad x \in \mathbb{R}^n\}$$

où R et T sont des fonctions de $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ (l'ensemble des fonctions convexes, propres et s.c.i.).

Méthodes D.C.

Problème D.C.

$$m_p = \min\{f(x) = R(x) - T(x) : \quad x \in \mathbb{R}^n\}$$

où R et T sont des fonctions de $\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ (l'ensemble des fonctions convexes, propres et s.c.i.).
Le principe d'une méthode DC est de construire deux suites $(x^k)_k$ qui converge vers une solution primale et $(y^k)_k$ qui converge vers une solution duale, on en demande en outre d'être telle que $(R - T)(x^k)$ est décroissante.

Méthodes D.C.

Problème D.C.

$$m_p = \min\{f(x) = R(x) - T(x) : \quad x \in \mathbb{R}^n\}$$

L'algorithme D.C. est donné par le schéma suivant :

Méthodes D.C.

Problème D.C.

$$m_p = \min\{f(x) = R(x) - T(x) : \quad x \in \mathbb{R}^n\}$$

L'algorithme D.C. est donné par le schéma suivant :

1. $k = 0$ et $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Méthodes D.C.

Problème D.C.

$$m_p = \min\{f(x) = R(x) - T(x) : \quad x \in \mathbb{R}^n\}$$

L'algorithme D.C. est donné par le schéma suivant :

1. $k = 0$ et $x^0 \in \mathbb{R}^n$.
2. $y^k \in \partial T(x^k)$.

Méthodes D.C.

Problème D.C.

$$m_p = \min\{f(x) = R(x) - T(x) : \quad x \in \mathbb{R}^n\}$$

L'algorithme D.C. est donné par le schéma suivant :

1. $k = 0$ et $x^0 \in \mathbb{R}^n$.
2. $y^k \in \partial T(x^k)$.
3. $x^{k+1} \in \partial R^*(y^k) \Leftrightarrow y^k \in \partial R(x^{k+1})$.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On appelle fonction conjuguée de f, notée f^*, la fonction définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{y^t x - f(x)\}$$

Méthodes D.C.

Problème D.C.

$$m_p = \min\{f(x) = R(x) - T(x) : \quad x \in \mathbb{R}^n\}$$

L'algorithme D.C. est donné par le schéma suivant :

1. $k = 0$ et $x^0 \in \mathbb{R}^n$.
2. $y^k \in \partial T(x^k)$.
3. $x^{k+1} \in \partial R^*(y^k) \Leftrightarrow y^k \in \partial R(x^{k+1})$.
4. Arrêt si $x^{k+1} = x^k$.

Le schéma décrit ci-dessus est un schéma d'une méthode primale-duale.

Méthode D.C.

$$\begin{cases} \min q(x) = \frac{1}{2}x^t Q x + b^t x \\ \text{s.c.} \\ x \in C = \{x \in \mathbb{R}^q : ||x||_2 \leq \delta\} \\ x \in \mathbb{R}^q \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}x^t Q x + b^t x + \chi_C(x) \\ \text{s.c.} \\ x \in \mathbb{R}^q \end{cases}$$

Pour résoudre le sous-problème quadratique, nous proposons la décomposition suivante :

$$R(x) = \frac{\rho}{2}\|x\|^2 + b^t x + \chi_C(x) \tag{22}$$

et

$$T(x) = \frac{\rho}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}x^t Q x \tag{23}$$

Méthode D.C.

Pour résoudre le sous-problème quadratique, nous proposons la décomposition suivante :

$$R(x) = \frac{\rho}{2}\|x\|^2 + b^t x + \chi_C(x) \tag{22}$$

et

$$T(x) = \frac{\rho}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}x^t Q x \tag{23}$$

Ainsi l'algorithme issu de cette décomposition est le suivant :

1. $k = 0$, x^0 quelconque
2. $y^k = \nabla T(x^k) = (\rho I - Q)x^k$
3. $x^{k+1} \in argmin\{\frac{\rho}{2}\|x\|^2 - x^t(y^k - b) \quad | \quad x \in C\}$
$(i.e.\ x^{k+1} \in argmin\{\|x\|^2 - 2x^t(\frac{y^k - b}{\rho}) \quad | \quad x \in C\})$
4. $k = k + 1$

Algorithme 1: Algorithme DC-optimal

Le problème vertical

En posant $z^k = \frac{y^k - b}{\rho}$, on remarque que x^{k+1} n'est autre que la projection de z^k sur la boule C. Cette projection est donnée par :

$$x^{k+1} = \begin{cases} z^k & \text{si} \quad \|z^k\| \leq \delta \\ \frac{r z^k}{\|z^k\|} & \text{sinon} \end{cases} \tag{24}$$

On considère le test d'arrêt suivant $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \varepsilon$ où ε est la précision recherchée.

Résolution des sous-problèmes quadratiques

$x_0 \in \mathbb{R}^q$, $k = 0$, $\varepsilon > 0$, $\rho > \|G\|_1$ et $\delta > 0$ quelconque.

Tant que $(\|x_{k+1} - x_k\| > \varepsilon)$ **faire**

- $k = k + 1$
- $z_k = \frac{(\rho I - G)x_k - b}{\rho}$
- **Si** $(\|z_k\|_2 \leq \delta)$ **Alors**
  - $x_{k+1} = z_k$
- **Sinon**
  - $x_{k+1} = \delta \frac{z_k}{\|z_k\|_2}$
- **Fin Si**

Fait

$x^* = x_{k+1}$

où ε est la précision recherchée.

Algorithme 2: L'algorithme de base de la résolution DC

Le lemme suivant montre que la suite $(v_k)_k$ prend ses valeurs dans $Im(J^t)$.

Lemme

Soit le problème quadratique $\{\min q(v) = \frac{1}{2}v^t J^t Jv + c^t Jv : \|v\| \leq \delta\}$ *où* J *est une matrice* $(m \times n)$ *et* $c \in \mathbb{R}^m$*.*
si le point initial v_0 *est dans* $Im(J^t)$ *alors tous les itérés* v_k *donnés par la méthode DC-optimale sont dans l'ensemble* $Im(J^t)$ *et la solution du problème quadratique est dans cet ensemble.*

Les multiplicateurs de Lagrange

Les multiplicateurs sont importants pour deux raisons :

1. vitesse de convergence car les multiplicateurs interviennent dans le calcul du Hessien,
2. détecter l'optimalité car les conditions d'optimalités sont évaluées à chaque itération en (x_k, s_k, λ_k)

Rebroussement

Assurer la positivité stricte des itérés s_k en forçant le déplacement d_s à satisfaire :

$$s_k + d_s \geq (1 - \tau)s_k \tag{25}$$

avec $\tau \in]0, 1[$.
or $d_s = S_k \tilde{d}_s$
d'où la solution $\tilde{d}_s$ doit vérifier :

$$\tilde{d}_s \geq -\tau e_m \tag{26}$$

où e_m est le vecteur unité de $\mathbb{R}^m$.

Les fonctions de mérite

La fonction de mérite, notée M, permet de contrôler la direction de déplacement et la progression des itérations.
La réduction actuelle notée $ared$ est définie par

$$ared(d) = M(x, s, \sigma) - M(x + d_x, s + d_s, \sigma)$$

où $\sigma > 0$ est le paramètre de pénalité.

Les fonctions de mérite

La fonction de mérite, notée M, permet de contrôler la direction de déplacement et la progression des itérations.
La réduction actuelle notée $ared$ est définie par

$$ared(d) = M(x, s, \sigma) - M(x + d_x, s + d_s, \sigma)$$

où $\sigma > 0$ est le paramètre de pénalité.

L'amélioration apportée par la direction de déplacement $d = v + w$ au problème quadratique sera quantifiée par la réduction prédite :

$$pred(d) = -q(w) + \sigma\sqrt{-m(v)}$$

où $q(w) = \frac{1}{2}w^tWw + (\nabla\phi + W^tv)^tw$
et $m(v) = \frac{1}{2}v^tJ^tJv + c^tJv$

Les fonctions de mérite

la direction de déplacement sera accepté s'il permet une réduction de la fonction de mérite proportionnelle à la réduction prédite :

$$r(d) > \eta$$

où $r(d) = ared(d)/pred(d)$ est la qualité de la réduction et $\eta \in]0, 1[$ est le seuil d'acceptation.

Les fonctions de mérite et RC

La qualité de la réduction contrôle la réévaluation du rayon de confiance r par la règle suivante

$$r_{k+1} = \begin{cases} \alpha_1 \|d_k\| & \text{Si} \quad r(d) \leq \eta_1 \\ r_k & \text{Si} \quad \eta_1 \leq r(d) \leq \eta_2 \\ \max(r_k, \alpha_2 \|d_k\|) & \text{Si} \quad r(d) \geq \eta_2 \end{cases} \tag{27}$$

Où les paramètres α_1, α_2, η_1 et η_2 sont à déterminer.

Les fonctions de mérite et RC

La qualité de la réduction contrôle la réévaluation du rayon de confiance r par la règle suivante

$$r_{k+1} = \begin{cases} \alpha_1 \|d_k\| & \text{Si} \quad r(d) \leq \eta_1 \\ r_k & \text{Si} \quad \eta_1 \leq r(d) \leq \eta_2 \\ \max(r_k, \alpha_2 \|d_k\|) & \text{Si} \quad r(d) \geq \eta_2 \end{cases} \tag{27}$$

Où les paramètres α_1, α_2, η_1 et η_2 sont à déterminer.

$\alpha_1 = 0.25$, $\alpha_2 = 5$, $\eta_1 = 10^{-4}$ et $\eta_2 = 0.99$

L'algorithme de la méthode SDC

Choisir ε_μ et ε_{tot}

Choisir $r_0 > 0$, $\mu_0 > 0$, $\sigma_0 \geq 0$, $s_0 > 0$ et $\theta \in]0, 1[$

$k = 0$

Tant que $(E(x_k, s_k, \mu_k) > \varepsilon_{tot})$ **faire**

  Tant que $(E(x_k, s_k, \mu_k) > \varepsilon_\mu)$ **faire**

    Calculer λ_k

    Évaluer le Hessien W et le Jacobien J

    Calculer $v = J^t u$ par la procédure PV

    Calculer $w = Zu$ par la procédure PHR

    $\tilde{d}_k = v + w$

    Rebroussement de $\tilde{d}_k$

    $d_k = S\tilde{d}_k$

    Évaluer σ_k et calculer la fonction de mérite $M(x_k, s_k, \sigma_k)$

    $\vdots$

L'algorithme de la méthode SDC

Tant que $(E(x_k, s_k, \mu_k) > \varepsilon_{tot})$ **faire**

  Tant que $(\ E(x_k, s_k, \mu_k) > \varepsilon_\mu)$ **faire**

    $\vdots$

    Si $(ared > \eta pred)$ **Alors**

      $x_{k+1} = x_k + d_x$

      $s_{k+1} = s_k + d_s$

      $k \leftarrow k + 1$

      Évaluer le rayon de confiance r_k par la règle (27)

    Sinon

      Utiliser la procédure CSO (Effet Maratos)

    Fin Si

  Fait

  $\mu_k = \theta\mu_k$ et $\varepsilon_\mu = \theta\varepsilon_\mu$

Fait

Plan

Stabilité numérique

Problème	méthode 1			méthode 2		
	iter	obj	cc	iter	obj	cc
BIGGS6	46	2.50e-01	0.00e+00	46	2.50e-01	0.00e+00
BOOTH	27	0.00e+00	9.68e-09	27	0.00e+00	9.68e-09
BOX3	46	4.15e-04	0.00e+00	46	4.15e-04	0.00e+00
HS44	11	-8.91e-02	1.43e-02	17	2.01e-05	3.21e-05
SIMPLLPA	46	-7.43e+02	1.27e+03	1	-2.37e-02	8.17e-01
SIMPLLPB	46	-4.00e+03	4.92e+03	1	1.03e+00	2.32e-01
SISSER	19	2.10e-12	0.00e+00	19	2.10e-12	0.00e+00
SUPERSIM	1	4.35e-01	2.79e-01	1	4.35e-01	2.79e-01
SYNTHES1	3	3.31e+00	6.66e-01	2	1.00e+01	7.17e-05

Notons que $iter$ désigne le nombre d'itérations,
obj est la valeur optimale de la fonction objectif et
$cc = \max\{\|h(x)\|_\infty, \|g(x)+s\|_\infty\}$, est le défaut de réalisabilité.

Stabilité numérique

iter	obj	$\lvert g+s \rvert$	$s_{\min}$	KKT	r	μ
0	3.00e-01	1.20e+00	1.96e-03	1.20e+00	7.00e+01	1.00e+01
1	-2.37e-02	8.17e-01	9.82e-06	8.17e-01	1.75e+01	2.00e+00
2	-1.23e+00	1.90e+00	4.91e-08	1.90e+00	1.75e+01	4.00e-01
3	-3.08e+00	3.57e+00	2.46e-10	3.57e+00	1.75e+01	8.00e-02
4	-2.63e+00	2.82e+00	1.23e-12	2.82e+00	1.75e+01	1.60e-02
5	4.84e+00	8.17e+00	6.14e-15	8.17e+00	1.75e+01	3.20e-03
6	1.16e+01	1.87e+01	3.07e-17	1.87e+01	1.75e+01	6.40e-04
7	1.54e+01	3.11e+01	1.53e-19	3.11e+01	1.75e+01	1.28e-04
8	8.98e+00	5.20e+01	7.67e-22	5.20e+01	1.75e+01	2.56e-05
9	-1.08e+01	8.54e+01	3.84e-24	8.54e+01	1.75e+01	5.12e-06
10	-2.88e+01	1.17e+02	1.92e-26	1.17e+02	1.75e+01	1.02e-06
11	-5.01e+01	1.51e+02	9.59e-29	1.51e+02	1.75e+01	2.05e-07
12	-6.78e+01	1.83e+02	4.80e-31	1.83e+02	1.75e+01	4.10e-08
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Stabilité numérique

iter	obj	$\|g+s\|$	$s_{\min}$	KKT	r	μ
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
36	-5.44e+02	9.49e+02	2.86e-86	9.49e+02	1.75e+01	6.87e-25
37	-5.67e+02	9.82e+02	1.43e-88	9.82e+02	1.75e+01	1.37e-25
38	-5.83e+02	1.01e+03	7.15e-91	1.01e+03	1.75e+01	2.75e-26
39	-6.07e+02	1.05e+03	3.57e-93	1.05e+03	1.75e+01	5.50e-27
40	-6.24e+02	1.08e+03	1.79e-95	1.08e+03	1.75e+01	1.10e-27
41	-6.47e+02	1.11e+03	8.93e-98	1.11e+03	1.75e+01	2.20e-28
42	-6.62e+02	1.14e+03	4.47e-100	1.14e+03	1.75e+01	4.40e-29
43	-6.87e+02	1.17e+03	2.23e-102	1.17e+03	1.75e+01	8.80e-30
44	-7.04e+02	1.20e+03	1.12e-104	1.20e+03	1.75e+01	1.76e-30
45	-7.27e+02	1.24e+03	5.58e-107	1.24e+03	1.75e+01	3.52e-31
46	-7.43e+02	1.27e+03	2.79e-109	1.27e+03	1.75e+01	7.04e-32

Tab.2 Résolution du problème SIMPLLPA par la méthode 1.

iter	obj	$\|g+s\|$	$s_{\min}$	KKT	r	μ
0	3.00e-01	1.20e+00	1.96e-03	1.20e+00	7.00e+01	1.00e+01
1	-2.37e-02	9.02e-01	9.82e-06	8.17e-01	1.75e+01	2.00e+00
2	2.97e-01	7.19e-01	4.91e-08	7.19e-01	1.75e+01	4.00e-01

Tab.3 Résolution du problème SIMPLLPA par la méthode 2.

Fonction de mérite

Dans l'étude suivante nous avons testé quatre formes de la fonction de mérite :

Fonction de mérite

Dans l'étude suivante nous avons testé quatre formes de la fonction de mérite :

- La fonction de mérite de type l_1 :

$$M_\sigma(x,s) = \varphi(x,s) + \sigma(\|g(x)+s\|_1 + \|h(x)\|_1) \tag{28}$$

Fonction de mérite

Dans l'étude suivante nous avons testé quatre formes de la fonction de mérite :

- La fonction de mérite de type l_1 :

$$M_\sigma(x,s) = \varphi(x,s) + \sigma(\|g(x)+s\|_1 + \|h(x)\|_1) \tag{28}$$

- La fonction de mérite de type l_2 :

$$M_\sigma(x,s) = \varphi(x,s) + \sigma(\|g(x)+s\|_2 + \|h(x)\|_2) \tag{29}$$

  C'est cette fonction de mérite que nous avons utilisée pour réaliser les expériences ci-dessus.

Fonction de mérite

Dans l'étude suivante nous avons testé quatre formes de la fonction de mérite :

- La fonction de mérite de type l_1 :

$$M_\sigma(x,s) = \varphi(x,s) + \sigma(\|g(x)+s\|_1 + \|h(x)\|_1) \tag{28}$$

- La fonction de mérite de type l_2 :

$$M_\sigma(x,s) = \varphi(x,s) + \sigma(\|g(x)+s\|_2 + \|h(x)\|_2) \tag{29}$$

- La fonction de mérite de type l_∞ :

$$M_\sigma(x,s) = \varphi(x,s) + \sigma(\|g(x)+s\|_\infty + \|h(x)\|_\infty) \tag{30}$$

où σ est un réel et φ est l'objectif du modèle pénalisé.

Fonction de mérite à poids

fonction de mérite pondérée

$$M(x,s,\sigma_f,\sigma^h,\sigma^g) = \sigma_f \varphi(x,s) + \sum_{i=1}^{p} \sigma_i^h |h_i(x)| + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^g |g_i(x)+s_i| \quad (31)$$

Soit $I \subset \{1,2,\cdots,m\}$ l'ensemble des indices pour lesquels $|g(x)+s| > 0$.

$$\sigma_i^h = \begin{cases} \frac{|h_i(x)|}{\sum_{i\in I}|g_i(x)+s_i| + \sum_{i=1}^{p}|h_i(x)|} & si \quad h_i(x) \neq 0 \\ \sigma_c & si \quad h_i(x) = 0 \end{cases} \quad (32)$$

$$\sigma_i^g = \begin{cases} \frac{|g_i(x)+s_i|}{\sum_{i\in I}|g_i(x)+s_i| + \sum_{i=1}^{p}|h_i(x)|} & si \quad i \in I \\ \sigma_c = \frac{\alpha}{\sum_{i\in I}|g_i(x)+s_i| + \sum_{i=1}^{p}|h_i(x)|} & si \quad i \notin I \end{cases} \quad (33)$$

où $\alpha = min\{min_{i\in I}|g_i(x)+s_i|, min_{i=1,2,\cdots,p}|h_i(x)|\} > 0$ et $\sigma_f \in \mathbb{R}_+$.

Discussion

	méthode 1			méthode 2		
ver	L1	L 2	L inf	L 1	L 2	L inf
obj	6.03E+06	7.04E+09	5.44E+09	6.03E+06	4.97E+06	4.96E+06

Tab.4 Résultats de la comparaison de la somme de l'objectif

Discussion

méthode	méthode 1			méthode 2		
Version	L 1	L 2	L inf	L 1	L 2	L inf
Moyenne cc	8,17	12,19	10,97	7,99	8,59	7,98

Tab.5 Résultats de la comparaison du défaut de réalisabilité

Discussion

Pour la fonction pondérée nous avons obtenu les résultats suivants :

	méthode 1			méthode 2		
Problème	obj	cc	iter	obj	cc	iter
BOX2	1.884491	0.000019	46	1.884491	0.000019	46
DECONVB	2322.859476	1.624325	7	110.319736	0.000875	46
HS105	1290.077170	78.030050	46	1234.646191	0.000000	46
HS110	-45.023446	0.000000	8	-45.023446	0.000000	8
HS1	23.164300	0.000000	3	23.164300	0.000000	3
HS25	32.835000	0.000006	4	32.835000	0.000000	1
HS31	681.944982	7.582547	46	18.858175	0.007743	46
comparaison	4307.74	12.46	22.86	1376.68	0.001	28

Tab.7 Résultats pour la fonction de mérite pondérée

Plan

Conclusions

→ **La stabilité numérique.**

Conclusions

$\longrightarrow$ **La stabilité numérique.**

$\longrightarrow$ **Programmation D.C.**

Conclusions

- $\longrightarrow$ **La stabilité numérique.**
- $\longrightarrow$ **Programmation D.C.**
- $\longrightarrow$ **La réduction des dimensions de la programmation quadratique.**

Conclusions

- $\longrightarrow$ **La stabilité numérique.**
- $\longrightarrow$ **Programmation D.C.**
- $\longrightarrow$ **La réduction des dimensions de la programmation quadratique.**
- $\longrightarrow$ **Fonctions de mérite.**

Conclusions

$\longrightarrow$ **La stabilité numérique.**

$\longrightarrow$ **Programmation D.C.**

$\longrightarrow$ **La réduction des dimensions de la programmation quadratique.**

$\longrightarrow$ **Fonctions de mérite.**

$\longrightarrow$ **Convergence.**

Plan

Perspectives

→ la fonction de mérite pondérée

Perspectives

$\longrightarrow$ la fonction de mérite pondérée

$\longrightarrow$ la programmation PQCQ

Perspectives

$\longrightarrow$ la fonction de mérite pondérée

$\longrightarrow$ la programmation PQCQ

$\longrightarrow$ proposer la version AMPL de SDC

Perspectives

→ la fonction de mérite pondérée
→ la programmation PQCQ
→ proposer la version AMPL de SDC
→ les problèmes de très grandes tailles

Méthode SDC

Merci