



HAL
open science

MODÉLISATION NUMÉRIQUE DU COMPORTEMENT D'UNE PARTICULE SOUS CHAMP ÉLECTRIQUE DANS LES MICROSYSTEMES : DE LA DÉFORMATION AU DÉPLACEMENT

Adel Mustapha Benselama

► **To cite this version:**

Adel Mustapha Benselama. MODÉLISATION NUMÉRIQUE DU COMPORTEMENT D'UNE PARTICULE SOUS CHAMP ÉLECTRIQUE DANS LES MICROSYSTEMES : DE LA DÉFORMATION AU DÉPLACEMENT. Energie électrique. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2005. Français. NNT: . tel-00011168v4

HAL Id: tel-00011168

<https://theses.hal.science/tel-00011168v4>

Submitted on 23 Dec 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

Titre :

MODÉLISATION NUMÉRIQUE DU COMPORTEMENT D'UNE PARTICULE SOUS CHAMP ÉLECTRIQUE DANS LES MICROSYSTEMES : DE LA DÉFORMATION AU DÉPLACEMENT

Présentée par :

Adel Mustapha BENSELAMA

Ingénieur de l'Institut National d'Aéronautique de Blida

Mémoire soumis à l'École Doctorale de Mécanique–Énergétique
(Spécialité Mécanique des Fluides et Transferts)
Université Joseph Fourier, Grenoble I
en vue de l'obtention du diplôme de :

**Docteur de l'Université Joseph Fourier
2005**

Soutenue publiquement le 25 novembre 2005

Composition du Jury :

M. Claude VERDIER,	Président
M. Édouard CANOT,	Rapporteur
M. Alberto PÉREZ,	Rapporteur
M. Pierre ATTEN,	Directeur de thèse
Mme Pascale PHAM,	Directeur de thèse
M. Jean-Luc ACHARD,	Invité

Thèse préparée au Laboratoire d'Électrostatique
et de Matériaux Diélectriques, UJF–CNRS de Grenoble,
et au Laboratoire d'Électronique et des Technologies de l'Information, CEA de Grenoble

Avant propos

Il est inconcevable de commencer ce mémoire sans adresser quelques mots aux personnes qui m'ont entouré de près, par leur présence, comme de loin, par leurs pensées, durant ces trois années de thèse. A travers ce parcours, j'ai découvert un pays, une ville mais plus que tout des gens dont j'ai apprécié la valeur et la particularité.

Parmi les personnes que j'ai su apprécier, figure sans doute mon directeur de thèse, M. Pierre Atten, directeur de recherche au LEMD, CNRS de Grenoble. Réserve, parfois même timide, son attitude dissimule en réalité un caractère trempé, curieux et très critique. Sa magie de relier les chiffres à la physique ne cessera jamais de me fasciner. Je le remercie pour toutes les discussions passionnantes et les conseils qu'il m'a prodigués le long de ce travail de thèse.

Une personne de volonté, de forte motivation, critique sans ménagement, néanmoins d'un cœur si doux est Pascale Pham, ma directrice de thèse et docteur ingénieur au LETI, CEA de Grenoble. Qu'elle trouve dans ces mots l'expression de gratitude et de ma reconnaissance pour avoir soutenu sans réserve ce travail du commencement jusqu'à la fin. Dans les moments les plus difficiles aux moments les plus agréables, elle a su maintenir une ligne de conduite exemplaire, me facilitant grandement la tâche dont je ne soupçonnais pas les difficultés et qu'elle arrivait souvent à anticiper.

Parmi les gens qui m'ont été d'un secours certain, d'une acuité intellectuelle rare et d'un foisonnement d'idées tous azimuts, il y a Jean-Luc Achard, directeur de recherche au LEGI de Grenoble. Si Jean-Luc était un personnage des contes de H.-C. Andersen, il serait sans doute le petit garçon qui hurla « le roi est nu » de par son regard toujours nouveau, son sens du détail et sa remise en question permanente de ce que l'on croit bien connaître, de ce qui est établi. Cette thèse aurait probablement difficilement vu le jour sans la ténacité, l'opiniâtreté et la témérité de Jean-Luc. Bien qu'ayant des obligations qui le tenaient parfois loin du feu de l'action, Jean-Luc était disponible à chaque fois que j'en avais besoin. Il avait également le talent d'être à mon écoute aussi bien concernant des préoccupations techniques que d'ordre plus général, plus humain. Que Jean-Luc trouve dans ces mots ma plus profonde reconnaissance et qu'il sache qu'il a laissé une trace indélébile dans mon esprit.

Par ailleurs, je tiens à adresser mes vifs remerciements à M. Claude Verdier, Professeur à l'Université Joseph Fourier et directeur de recherche au Laboratoire de Spectrométrie de Grenoble, d'avoir bien voulu présider mon jury de thèse et pour l'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail. Je remercie également M. Alberto Pérez, Professeur à la Faculté de Physique, Université de Séville et M. Edouard Canot, chercheur à l'IRISA, INRIA de Rennes, pour avoir rapporté mon manuscrit de thèse avec grand enthousiasme et pour les remarques et suggestions qu'ils ont émises ainsi que pour leur attitude très amicale. A Edouard Canot va aussi ma gratitude pour m'avoir invité à l'IRISA pour un mois à l'occasion du stage que j'ai effectué à Rennes au début de ma thèse et qui m'a permis de prendre la main et de saisir la multitude des méandres et la finesse du code numérique CANARD que j'avais à améliorer par la suite. Sa patience, sa disponibilité et sa volonté de me présenter cet outil très élégant, dans les moindres recoins et sous différents angles, ont été exemplaires.

Je remercie également tout le personnel du LEMD, MM. Le Saint, Denat, Malraison, Reboud, mais aussi Claire, Geneviève, Christophe pour ne citer que quelques noms, de m'avoir si bien accueilli ainsi que les doctorants, Rachid, Fadhel, Hayet, Bassem, Li et les autres pour la joyeuse ambiance qu'ils ont su faire régner au laboratoire. Au LETI, je remercie chaleureusement Mireille pour son extrême gentillesse, son accompagnement et sa sollicitude presque maternel, Alain G., Alain B., Anne, Isabelle, Philippe R., Philippe P., Henri, Sadok, Bastien, Aurélie, Anabela et Jean-Maxime (mais il manque aussi des noms de beaucoup d'autres, que ces pages ne sauront contenir) pour leur mélange ingénieux d'humour décalé, de sérieux et d'une conscience au travail incontestable.

Je remercie mes amis de Grenoble, Ahmed, Mohamed M., Mohamed H., Malek, Abdallah, Bachir, Noureddine et les autres pour les agréables moments que nous avons pu partagés pour quatre longues mais paradoxalement fugaces années.

Je remercie mes parents, frère, sœurs, neveux, nièces et amis de Blida pour leurs prières, leurs pensées pour moi, leurs tendres mots et leur affection sans limites qui m'ont donné la force de continuer même quand les difficultés me semblaient insurmontables.

Je rends avant et après tout grâce au tout Puissant pour m'avoir aidé à effectuer le travail de cette thèse dans des conditions, me semble-t-il, très favorables et dans la sérénité mais également d'avoir fait que mon chemin croise celui de personnes exceptionnelles.

Grenoble, le 05 décembre 2005

Adel M. BENSELAMA

Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1 : Généralités	5
1.1. La microfluidique.....	5
1.2. Polarisation de la matière.....	7
1.2.1. Polarisation électronique, ionique et d'orientation.....	8
1.2.2. Polarisation interfaciale (et effet Maxwell-Wagner).....	11
1.2.3. Conclusion.....	12
1.3. Les phénomènes électrohydrodynamiques.....	13
1.3.1. La diélectrophorèse (DEP).....	13
1.3.2. L'électrodéformation.....	13
1.3.3. L'électro-osmose.....	14
1.3.4. L'électrothermique.....	15
1.3.5. L'électrorotation.....	16
1.3.6. L'électrophorèse.....	17
1.3.7. L'électromouillage.....	17
1.3.8. L'électrostriction.....	18
1.4. Méthodes de résolution.....	19
1.4.1. Les méthodes des multipôles et du tenseur de Maxwell.....	20
1.4.2. La Méthode des Eléments Finis.....	21
1.4.3. La Méthode Intégrale aux Frontières.....	22
Annexe 1.1 : Aperçu des travaux MIF durant les 30 dernières années.....	25
Chapitre 2 : Modèle mathématique général	29
2.1. Inventaire des forces mises en jeu.....	29
2.1.1. Les forces électriques.....	30
2.1.1.1. Les forces électriques de volume.....	30
2.1.1.2. Les forces électriques de surface : les interfaces fluide–fluide.....	32
2.1.2. Les forces hydrodynamiques.....	33
2.1.2.2. Les forces hydrodynamiques de volume.....	33
2.1.2.2. Les forces hydrodynamiques de surface.....	34
2.2. Formulation générale des phénomènes électriques.....	37
2.2.1. Equations de Maxwell.....	37
2.2.2. Approximation quasistatique.....	40
2.2.3. Relations constitutives.....	40
2.2.4. Hypothèses supplémentaires du modèle électrique.....	42
2.2.5. Equations électriques et solutions asymptotiques.....	44
2.2.5.1. Le régime quasipermanent.....	44
2.2.5.2. Le régime sinusoïdal.....	45
2.2.6. Conditions aux limites électriques.....	46
2.2.6.1. Conditions aux interfaces en régime électrostatique quasipermanent.....	46
2.2.6.2. Conditions aux interfaces en régime électrostatique sinusoïdal.....	47
2.3. Formulation générale des phénomènes hydrodynamiques.....	47
2.3.1. Equations dans le domaine.....	47

2.3.2. Equations aux frontières.....	48
2.3.2.1. Conditions aux limites sur les frontières solides.....	49
2.3.2.2. Conditions aux limites sur les interfaces.....	49
2.4. Modèles EHD de particules, solide ou liquide, sous champ électrique	50
2.4.1. Modèle pour une particule solide en mouvement.....	50
2.4.2. Modèle pour une goutte de liquide en mouvement.....	51
2.4.2.1. Equation d'Euler en régime électrostatique quasipermanent.....	52
2.4.2.2. Equation d'Euler en régime électrostatique sinusoïdal.....	53
Chapitre 3 : Méthodes de résolution.....	55
3.1. Le modèle du dipôle ponctuel.....	56
3.1.1. Notion générale de dipôle ponctuel.....	56
3.1.2. Les diélectriques avec et sans pertes (parfaits et réels, respectivement.....	58
3.1.2.1. Moment dipolaire induit pour une sphère.....	58
3.1.2.2. Sphère diélectrique dans un fluide diélectrique sous champ uniforme.....	59
3.1.2.3. Sphère et fluide de conductivités finies sous champ continu et uniforme.....	60
3.1.2.4. Sphère diélectrique dans un fluide diélectrique en présence d'une charge ponctuelle.....	61
3.1.2.5. Coquille diélectrique dans un fluide diélectrique en champ uniforme.....	62
3.1.2.6. Sphère réelle dans un fluide réel en champ alternatif uniforme.....	64
3.1.2.7. Coquille réelle dans un fluide réel en champ alternatif uniforme et non uniforme.....	66
3.2. La Méthode des Eléments Finis.....	67
3.2.1. Préliminaire.....	67
3.2.2. La méthode variationnelle.....	69
3.2.3. Discrétisation de la formule variationnelle.....	70
3.2.4. Application de la Méthode des Eléments Finis au problème électrique.....	71
3.3. La Méthode Intégrale aux Frontières	74
3.3.1. Approche générale de la formulation MIF-EHD.....	74
3.3.2. Quelques résultats préliminaires.....	75
3.3.2.1. La deuxième identité de Green.....	75
3.3.2.2. Les deux formulations de la MIF.....	77
3.3.2.3. Formulation MIF indirecte	79
3.3.2.4. Formulation MIF directe.....	80
3.3.3. Application de la Méthode Intégrale aux Frontières au problème électrique.....	80
3.3.3.1. Formulation MIF en régime électrostatique quasipermanent.....	80
3.3.3.2. Formulation MIF en régime électrostatique sinusoïdal.....	83
3.3.3.3. Formulation MIF en régimes électrostatiques quasipermanent et sinusoïdal par la méthode des perturbations.....	84
3.3.4. Application de la Méthode Intégrale aux Frontières au problème hydrodynamique : la méthode de Bernoulli.....	86
3.3.4.1. Evolution temporelle du potentiel hydrodynamique.....	86
3.3.4.2. Equations hydrodynamiques intégrales (méthode de Bernoulli).....	87
3.3.5. Algorithme général de calcul.....	89
Annexe 3.1 : Unicité de la solution pour le problème de Laplace.....	91
Annexe 3.2 : Solution de l'équation de Laplace en symétrie de révolution.....	93

Chapitre 4 : Déplacement de particules rigides	95
4.1. Validation des Modèles numériques CANARD et FEMLAB.....	96
4.1.1. Description de la configuration pointe-plan.....	96
4.1.2. Validation du calcul du champ électrique dans une configuration pointe-plan.....	97
4.1.3. Méthodes MIF et MEF pour le calcul du champ électrique en présence de particules.....	101
4.1.3.1. Formulation MEF.....	102
4.1.3.2. Formulation MIF.....	102
4.1.3.3. Calcul de la force DEP par la méthode du tenseur de Maxwell.....	103
4.1.4. Calcul des forces DEP par le modèle des multipôles ponctuels.....	104
4.1.5. Validation du calcul de la force DEP par la méthode du tenseur de Maxwell	104
4.1.2.2. Configuration pointe-plan en présence d'une particule (validation MIF-MEF).....	105
4.1.2.3. Evaluation des forces d'interaction mutuelle entre deux particules	106
4.2. Domaine de validité du modèle ponctuel.....	109
4.2.1. Force DEP calculée par le modèle dipolaire et le modèle du tenseur de Maxwell.....	109
4.2.2. Vitesse limite calculée par le modèle dipolaire et le modèle du tenseur de Maxwell.....	112
4.2.3. Force calculée par le modèle multipolaire et le modèle du tenseur de Maxwell.....	113
4.3. Influence de la forme de la particule sur la force DEP.....	121
4.3.1. Géométrie.....	121
4.3.2. Expression de la force DEP par le modèle du dipôle ponctuel.....	123
4.3.3. Calcul de la force DEP par le modèle du dipôle ponctuel et par la méthode du tenseur de Maxwell.....	124
4.3.4. Vitesse calculée par le modèle dipolaire et le modèle du tenseur de Maxwell	130
4.4. Les forces d'interaction mutuelle entre deux cellules biologiques sous champ électrique uniforme.....	131
4.5. Conclusions.....	133
Annexe 4.1 : Dérivation de la solution analytique pour le potentiel dans la configuration pointe-plan.....	137
 Chapitre 5 : Déformation et déplacement de gouttes	 141
5.1. Sur la trace de Taylor.....	143
5.1.1. Goutte conductrice ellipsoïdale.....	143
5.1.2. Les cônes de Taylor en solution auto-similaire.....	147
5.1.3. Goutte sphérique avec écoulement sous champ uniforme.....	148
5.2. Une tentative pour déterminer la déformation : la méthode des petites perturbations.....	154
5.3. Etude numérique de la déformation de gouttes en champ électrique continu.....	156
5.3.1. Dynamique de la déformation d'une goutte.....	157
5.3.2. Formes d'équilibre possibles.....	158
5.4. Etude numérique de la déformation de gouttes en champ électrique alternatif.....	159
5.4.1. Configuration d'étude.....	160
5.4.2. Réponse dynamique de la goutte aux forces appliquées.....	160
5.4.3. Résultats des simulations.....	162
5.4.3.1. Effet de la conductivité.....	162

5.4.3.2. Effet de la fréquence.....	163
5.4.3.3. Effet du taux de croissance de champ électrique appliqué.....	164
5.4.3.4. L'instabilité de Taylor.....	166
5.4.3.5. Les cônes de Taylor.....	167
5.5. Formulation MIF en champ électrique non uniforme.....	170
5.5.1. Modèle théorique de Feng.....	170
5.5.2. Le modèle numérique MIF-EHD.....	173
5.5.3. Comparaison de l'approche MIF-EHD et du modèle de Feng	174
5.5.4. Goutte d'eau sous champ alternatif en configuration pointe-plan.....	177
5.6. Conclusions.....	181
Annexe 5.1 : Description du code CANARD.....	183
Annexe 5.2 : Application de la méthode des perturbations pour une goutte sous champ électrique uniforme.....	195
Conclusion et perspectives.....	213
1. Conclusion générale.....	213
2. Perspectives.....	215
Liste des publications et communications.....	217
Bibliographie.....	219

Introduction

Le sujet de cette thèse se situe dans le domaine des biotechnologies où le traitement d'échantillons biologiques nécessite souvent la manipulation d'objets biologiques de taille inférieure à la dizaine de microns tels que des cellules biologiques, des nanoparticules solides (particules de latex ayant des fonctions biologiques spécifiques) ou des gouttes de solution biologique plongées dans un liquide non miscible (huile).

La course vers des systèmes rapides (quelques minutes), sensibles (très faibles concentrations) et portables, conduit à l'ère de la miniaturisation. Le remplacement de nos laboratoires biologiques par des microsystèmes fermés et automatisés, de taille ne dépassant pas quelques centimètres (Lab-on-a-chip, ou laboratoires sur puce silicium ou plus simplement labopuces), est déjà une réalité.

Pour manipuler des particules (gouttes, cellules biologiques, etc.) dans les microsystèmes, une des solutions envisagées est l'utilisation du champ électrique. Si le champ électrique est non uniforme, la polarisation de la matière engendre une force qui provoque le déplacement des particules : c'est la diélectrophorèse (DEP). La DEP permet de manipuler sans contact mécanique des particules biologiques ou des gouttes. En solution aqueuse, on utilise des champs électriques alternatifs pour éviter les réactions électrochimiques aux électrodes. Par utilisation des ondes progressives de champ, on arrive à séparer des cellules vivantes et mortes. Posées sur un substrat diélectrique, il est également possible de déplacer des gouttes le long de rails constitués par une matrice d'électrodes interdigitées. L'électro-convection et l'électrocoalescence sont aussi utilisées pour manipuler les gouttes par le champ électrique. Au cours de ces manipulations, en plus du déplacement, la particule subit une déformation.

La réalisation de tels dispositifs passe habituellement par des séries de mesures expérimentales très longues à mettre en œuvre et qui plus est, onéreuses de par même la fabrication de prototypes. Il devient donc indispensable, avant d'envisager la réalisation d'un prototype, de le concevoir et de l'optimiser par des approches moins coûteuses telles les méthodes numériques. Il est toutefois exclu que l'approche numérique se substitue totalement à l'expérience ; au contraire, elle lui est complémentaire puisqu'elle la rend plus ciblée et plus directe.

Idéalement, l'outil numérique recherché pour simuler le comportement des particules sous champ électrique dans nos microsystèmes doit satisfaire plusieurs impératifs :

1. Il doit permettre le suivi du déplacement et de la déformation des cellules, gouttes ou autre fragments biologiques en tenant compte des forces électriques, hydrodynamiques (et autres si nécessaires) ;
2. Il doit permettre d'effectuer des calculs relativement rapidement.

Un choix possible est la Méthode des Eléments Finis (MEF) qui a l'avantage d'être générale. Le gros inconvénient de la MEF est que le suivi de la déformation des particules nécessite l'utilisation de techniques complémentaires qui ne sont pas toujours faciles à mettre en œuvre.

C'est dans ce contexte que le Laboratoire d'Electrostatique et de Matériaux Diélectriques, LEMD, du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) et de l'Université Joseph Fourier (UJF) de Grenoble et le Laboratoire des Composants Intégrés pour le Vivant (LCIV) sous la tutelle du Laboratoire d'Electronique et des Technologies de l'Information (LETI) du Commissariat à l'Energie Atomique (CEA) de Grenoble, ont souhaité explorer la voie vers de nouveaux outils numériques pour la prédiction du comportement des particules dans les labopuces de manière fiable et efficace.

Le CEA-LETI est depuis longtemps un des acteurs majeurs de Recherche et Développement pour l'industrie des microtechnologies. Participant à un mouvement général déclenché il y a une vingtaine d'années, ce centre s'est engagé dans la conception de microsystèmes en adaptant les processus de fabrication de la microélectronique. Les microsystèmes présentent un avenir prometteur dans l'instrumentation, les télécommunications et les applications biomédicales. Le LEMD-CNRS-UJF apporte sa contribution à ce mouvement en amont du développement des microsystèmes. Ceci est réalisé en terme d'expertise scientifique dans les domaines de l'Electrohydrodynamique et de l'utilisation de champs électriques pour le contrôle et la manipulation de gouttelettes ou particules en suspension dans un fluide.

Dans la démarche générale de modélisation et de simulation du mouvement de particules plus ou moins déformables soumises au champ électrique dans les microsystèmes, nous avons développé un nouveau modèle numérique basé sur la Méthode Intégrale aux Frontières (MIF). Cette méthode permet le suivi d'interfaces mobiles de manière naturelle et précise. Elle permet aussi de réduire d'une dimension le problème numérique à traiter, d'où un gain substantiel en temps de calcul. L'amélioration apportée dans cette thèse s'est opérée à partir de l'outil original CANARD (une concaténation de fragments des noms de ses auteurs, Edouard CANot et Jean-Luc AchARD), un code dédié à la résolution de problèmes d'écoulements irrotationnels développé au Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels (LEGI) de Grenoble et à l'Institut National de

Recherche en Informatique Appliquée (INRIA) de Rennes. Bien que n'offrant qu'une version 2D axisymétrique en écoulement irrotationnel visqueux [43], une extension du code CANARD électrique à une configuration tridimensionnelle visqueuse est en cours d'étude.

Le phénomène de mise en mouvement de particules plongées dans un liquide par DEP est une partie d'une vaste classe de phénomènes, où le fluide entre en interaction avec le champ électrique, appelée électrohydrodynamique (EHD). Le chapitre 1 présente les principaux phénomènes EHD que l'on rencontre dans les microsystèmes et situe le contexte EHD dans lequel nous nous plaçons dans la présente thèse, à savoir la DEP sur particules plus ou moins déformables. Les méthodes numériques utilisées (Méthode des Éléments Finis – MEF – et MIF) sont également présentées ainsi que les raisons qui ont motivé ces choix.

Le chapitre 2 présente les modèles mathématiques électrique et hydrodynamique. Dans un but de pédagogie, de clarté et d'accessibilité, nous avons préféré déduire les équations en partant d'arguments plus en amont. Pour chaque hypothèse simplificatrice émise, nous avons apporté une justification appropriée.

Dans le chapitre 3, nous nous sommes préoccupés de présenter la méthode du dipôle ponctuel (DP) pour le calcul de la force DEP et les formulations numériques (MEF et MIF) associées aux équations mathématiques développées au chapitre 2 ainsi que la méthode de résolution relative à chaque formulation. Moyennant certaines hypothèses simplificatrices, une nouvelle approche de la MIF en écoulement irrotationnel, qui permet d'intégrer dans la même formulation le calcul du champ électrique, du champ hydrodynamique et le suivi d'interface, est proposée dans ce chapitre.

Devant la complexité des phénomènes EHD, une démarche progressive a été adoptée. Elle consiste à envisager une approche plus simple, bien qu'on lisse de manière significative les phénomènes réels qui se produisent, pour ensuite rajouter progressivement des difficultés croissantes.

De ce fait, une première approche consiste à modéliser une particule rigide soumise à un champ électrique non uniforme. Nous nous centrons sur l'aspect électrique pur et considérons le problème de déplacement de ce type de particules entièrement résolu si la force DEP est déterminée. Bien que l'approche du dipôle électrique ponctuel soit largement utilisée [64, 114, 115, 132, 201, 219, 286], elle devient contestable si la taille des particules est comparable à celle des dispositifs de DEP. Dans le chapitre 4, nous étudions le domaine de validité du modèle dipolaire. La complexité des géométries nécessite d'utiliser des méthodes numériques, MIF en l'occurrence, dont les résultats sont

comparés à ceux fournis par la MEF.

Dans le chapitre 5, nous étudions, pour commencer, les déformations pures d'une particule soumise à un champ électrique uniforme en utilisant la MIF. A cause de leur simplicité, ne sont considérées que les gouttes de fluides non miscibles dont l'interface n'agit sur l'écoulement qu'à travers la tension de surface. Ensuite nous abordons le couplage déformation/déplacement des gouttes sous champ électrique non uniforme. Comme l'approche irrotationnelle exclut les effets visqueux associés au cisaillement, la MIF est améliorée pour prédire de manière plus appropriée, en tenant compte de la force de traînée, le déplacement et la déformation de gouttes en champ électrique non uniforme.

Ce manuscrit se clôt par une discussion générale sur l'ensemble du travail et ses perspectives.

Chapitre 1 : Généralités

Les très faibles volumes d'échantillons à manipuler (inférieurs à la centaine de microlitre) posent le problème des fonctions fluidiques dans les labopuces. La mise en circulation des liquides dans les microcanaux, le remplissage du composant, sa vidange, le brassage des liquides pour en assurer l'homogénéisation ou encore leur mélange avec des réactifs, sont autant d'opérations difficiles à mettre en œuvre. L'utilisation de systèmes mécaniques habituels (pompes, mélangeurs...) n'est pas adaptée. Par exemple, pour remplacer une pompe mécanique, des techniques nouvelles fondées sur la mise sous tension des parois du microcanal (écoulements électrocinétiques), sont utilisées.

1.1. La microfluidique discrète

Les applications ici visées concernent plus particulièrement les microsystèmes en gouttes ; elles mettent en jeu une microfluidique dite discrète par rapport à la microfluidique continue des microcanaux. Les très faibles volumes autorisent la manipulation du liquide directement sous forme de goutte, supprimant le microcanal du (micro)composant. Le transport des gouttes peut être obtenu par des champs électriques [107], leur brassage par effet Marangoni [229], leur mélange avec un réactif par électrocoalescence de gouttes [109]. On admettra que les gouttes de tampon ainsi que le liquide (en général une huile minérale) dans lequel elles sont plongées sont non miscibles. Le champ électrique paraît être une solution efficace pour assurer un nombre important de fonctions microfluidiques dans le microsystème.

Les autres objets, dans le domaine de la biologie, qui seront étudiés, à savoir les cellules et les particules de latex, sont habituellement plongés dans une solution liquide (le tampon biologique) dont la composition permet de garantir un environnement biochimique spécifique à chaque application. D'une manière générale, retenons que le tampon biologique est une solution aqueuse (à base d'eau), contenant de nombreux ions à concentration fixée. Il est assimilé à un électrolyte. Outre la manipulation du tampon biologique dans le microsystème, il est parfois nécessaire d'en extraire, filtrer et trier les objets biologiques qu'il contient. Nous définissons ainsi le terme générique « particule » pour désigner une goutte de tampon, une cellule biologique ou encore une particule de latex. Le champ électrique, par le biais du phénomène de diélectrophorèse (DEP), dont le

rôle central sera évoqué plus loin, permet d'assurer ces fonctions en évitant le contact mécanique avec la particule, l'utilisation de filtres mécaniques et autres ne sont pas envisageables. La prédiction du comportement d'une telle particule sous champ électrique est par conséquent déterminante pour concevoir des microsystèmes performants. L'expérimentation, à ces petites échelles, est difficile, et le recours à la simulation numérique est aujourd'hui envisageable par suite du niveau de maturité des méthodes numériques d'une part, et des performances des ordinateurs d'autre part.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il est donc opportun de présenter de façon approfondie les phénomènes physiques qui interviennent dans les microsystèmes à concevoir. Leur recensement (paragraphe 1.3), ainsi que le rappel des fondements permettant de les interpréter (paragraphe 1.2), à savoir la polarisation de la matière, sont des étapes essentielles pour espérer tirer du modèle des informations fiables. Il devient notamment possible de connaître les limites de fonctionnement pour chacune des options technologiques qui seront retenues.

Dans cette thèse le domaine physique est celui de l'électrohydrodynamique (EHD). D'une manière générale, l'EHD désigne l'ensemble des phénomènes physiques associés au mouvement des fluides sous l'effet d'un champ électrique. Le principal mécanisme de déplacement des particules solides ou liquides est la diélectrophorèse (DEP) (voir figure 1.1). Dans les microsystèmes, les particules, qu'elles soient solides ou liquides, sont toujours plongées dans une phase liquide. Aussi, seuls les liquides seront considérés dans notre étude à l'exclusion des gaz.

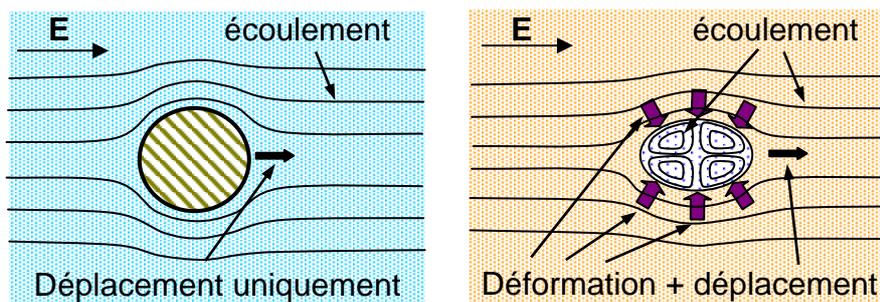


Figure 1.1. Les phénomènes électrohydrodynamiques induits par polarisation de la matière. A gauche, une particule non déformable (cellule biologique où particule synthétique) immergée dans un tampon, se déplace par DEP. A droite, une goutte se déforme par effet EHD en plus de son déplacement par DEP.

La mise en œuvre de la DEP est accompagnée d'autres phénomènes EHD (voir paragraphe 1.3) qui peuvent avoir des actions antagonistes au déplacement par DEP (électro-osmose, électrothermique, etc.). Comme phénomènes supplémentaires dans le cas des gouttes, sera incluse dans notre étude l'électrodéformation : elle ne peut être ignorée et il faudra la quantifier. En revanche, bien que les cellules biologiques puissent être

également des objets fortement déformables (globules rouges), elles seront considérées comme rigides.

Sera également introduit ici le thème des méthodes numériques (paragraphe 1.4), qui, intervenant en aval du modèle mathématique, ont leurs propres limites et peuvent parfois remettre en cause le modèle mathématique lui-même. Habituellement, la DEP se traite commodément par la Méthode des Eléments Finis (MEF). La prise en compte de la déformation des gouttes sous l'effet d'un champ électrique non uniforme et alternatif conduit à introduire en outre une méthode numérique de suivi d'interfaces. Bien que de telles méthodes (Level Set, par exemple) puissent se conjuguer avec la MEF, la Méthode Intégrale aux Frontières (MIF) a finalement été retenue. Cette dernière se prête en effet très directement à une extension aux problèmes à frontières libres : après transformation, grâce aux formules de Green, des équations aux dérivées partielles étendues sur des volumes à des équations intégrales sur les frontières de ces volumes, elle permet de concentrer les calculs sur les interfaces seules. En outre elle est parfaitement adaptée au traitement des phénomènes électriques dont les équations comportent l'opérateur laplacien qui est l'opérateur différentiel type sur lequel agissent les formules de Green.

Cependant le code que nous utiliserons est fondé sur une version de la MIF limitée aux écoulements irrotationnels. Il eut été trop long dans le cadre de cette thèse de réaliser l'extension aux écoulements rotationnels et ainsi de prendre en compte la totalité des aspects visqueux, essentiels pour certaines applications. En ce sens, les calculs que nous avons développés se sont inscrits d'emblée dans une entreprise à plus long terme que celui de cette thèse.

1.2. Polarisation de la matière

La polarisation affecte aussi bien les liquides, les solides que les gaz. Sont donc concernés dans nos microsystemes tous les échantillons à traiter : ce sont soit des solutions aqueuses contenant des particules solides (latex) ou des cellules biologiques supposées indéformables, soit des huiles contenant des gouttes de solution aqueuse (on parle alors de suspensions).

Il semble important de s'attarder sur l'origine de cet état afin que le lecteur dispose des éléments nécessaires pour comprendre certains des phénomènes électrohydrodynamiques (EHD) présentés dans le paragraphe 1.3. La diélectrophorèse en particulier, dont l'importance est soulignée plus haut, trouve son origine dans la polarisation de la matière.

1.2.1. Polarisation électronique, ionique et d'orientation

La matière est constituée de molécules. Les molécules sont formées d'atomes constitués d'un noyau chargé positivement $+Q$ et d'un nuage électronique chargé négativement, de charge totale $-Q$. Si le barycentre des charges négatives coïncide avec le barycentre des charges positives, la molécule est dite apolaire (cas des molécules symétriques comme H_2 , O_2 , N_2) et le champ électrique créé par ces deux types de charges en un point A, situé à une distance grande devant la dimension de la molécule, est nul.

Les charges électriques sont désignées comme 'libres' lorsque, sous l'action d'un champ électrique externe, elles se déplacent librement dans le matériau, comme si elles se trouvaient dans le vide. Les charges mobiles dans un matériau conducteur (les électrons) réagissent si facilement à la présence d'un champ électrique externe, aussi petit soit-il, qu'elles peuvent être considérées comme libres. Le déplacement des charges libres s'effectue jusqu'à atteindre un état d'équilibre où elles ne subissent plus aucune force. Ce nouvel état d'équilibre se traduit par l'apparition de charges induites à la surface du conducteur. Dans les diélectriques (ou isolants), les charges sont en revanche très peu mobiles. Les électrons sont « liés » aux atomes et voient leur déplacement, sous l'action d'un champ électrique externe E_0 , limité à des distances de l'ordre des distances moléculaires. Sous l'effet de la force de Coulomb F^{Coulomb} (voir chapitre 2), le nuage électronique se déforme. Le barycentre des charges négatives ne coïncide plus avec celui des charges positives localisé au centre du noyau (voir figure 1.2). D'un point de vue électrique, l'atome devient équivalent à un dipôle électrique (voir chapitre 2). Le champ électrique créé en A par le dipôle n'est plus nul ; il se superpose au champ électrique externe.

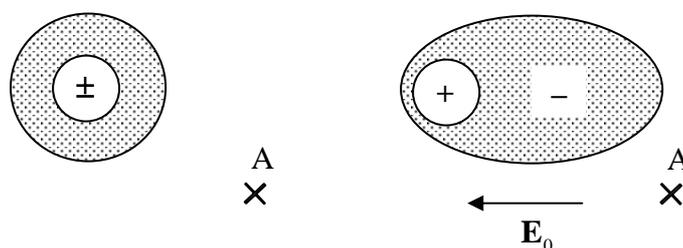


Figure 1.2. Effet de polarisation électronique d'un atome : les centres de charges positives et négatives se séparent sous l'effet du champ électrique appliqué

Au niveau des atomes, on appelle polarisation électronique ce déplacement du nuage électronique par rapport au noyau. D'autres types de polarisation peuvent exister selon la structure de la matière concernée. Dans les diélectriques solides cristallins (par exemple NaCl), c'est le déplacement mutuel des ions qui est à l'origine de la polarisation désignée

alors par *polarisation ionique*. La *polarisation d'orientation* se manifeste dans le cas des molécules non symétriques (H_2O , HCl , $CO\dots$), qualifiées de polaires, où le barycentre des charges positives ne coïncide pas avec le barycentre des charges négatives du fait de la structure même de la molécule. Ces molécules possèdent un moment dipolaire permanent qui, en l'absence de champ électrique externe et à cause de l'agitation thermique, est orienté de façon aléatoire dans le matériau. L'orientation statistique des moments dipolaires permanents dans la direction du champ électrique appliqué constitue le phénomène de polarisation d'orientation ou *dipolaire*. Cet alignement, toujours perturbé par l'agitation thermique et donc fortement dépendant de la température, augmente avec l'intensité du champ électrique appliqué. La polarisation organisationnelle nécessite que les dipôles permanents disposent d'une certaine mobilité dans la matière et elle se rencontre plus fréquemment dans les gaz et les liquides. L'eau, liquide polaire, est particulièrement affectée par ce type de polarisation.

L'alignement des dipôles dans les diélectriques polaires est un phénomène qui laisse prévoir un effet de saturation qui apparaît lorsque tous les dipôles sont orientés alors que l'intensité du champ appliqué continue à être augmentée. Par la suite, on admettra que les intensités des champs électriques utilisés sont telles que la saturation, se traduisant par des propriétés diélectriques non linéaires, n'est pas atteinte.

Si l'intensité du champ électrique externe est suffisamment grande pour provoquer l'arrachement d'électrons dans le diélectrique, celui-ci se comporte alors comme un conducteur et il se produit le phénomène de claquage. La valeur maximale du champ électrique admis par un diélectrique sans qu'il y ait claquage s'appelle *rigidité électrique*. Nous verrons que les intensités de champ électrique utilisées dans nos microsystèmes pour faire de la diélectrophorèse sont d'un ordre de grandeur plus faible (environ 10^6 V/m) que les rigidités électriques des matériaux diélectriques utilisés (environ 10^8 V/m). Le phénomène de claquage dégrade les propriétés diélectriques du matériau et doit donc être évité en prenant garde à rester en deça de la rigidité électrique.

Les dipôles créent en tout point de l'espace (et en tout point du diélectrique lui-même) un champ électrique dipolaire \mathbf{E}_d qui se superpose au champ appliqué \mathbf{E}_0 . Nous verrons, dans les études faites au chapitre 4, que l'hypothèse simplificatrice où le champ externe \mathbf{E}_0 est supposé grand devant le champ dipolaire \mathbf{E}_d est souvent, mais pas toujours, fondée. Cette hypothèse permet de simplifier fortement les configurations à simuler puisque, pour le calcul du champ électrique, la présence des particules diélectriques, sur lesquelles nous cherchons à connaître la force diélectrophorétique appliquée, est négligée.

Les différents types de polarisation cités ci-dessus peuvent intervenir simultanément dans un même diélectrique. Leur contribution à la polarisation totale peut être limitée notamment dans le cas où le champ électrique appliqué est alternatif. Par exemple, la polarisation d'orientation n'arrive plus à s'établir lorsque la fréquence est trop élevée. L'alignement des dipôles dans le champ électrique s'effectue suite à un mouvement de rotation des dipôles. Du fait d'une inertie due au frottement avec les autres molécules du matériau, ce mouvement de rotation prend du retard par rapport aux variations trop rapides du champ électrique. C'est le phénomène de relaxation diélectrique. Par exemple, l'eau qui a une permittivité relative à température ambiante d'environ 80, voit celle-ci chuter à la valeur de 1.77 au-dessus de 10^{10} Hz [113]. Les fréquences étudiées dans notre travail étant inférieures à 10^8 Hz, les phénomènes de relaxation diélectrique dans les solutions aqueuses sont négligeables. Les polarisations électronique et ionique, quant à elles, dépendent peu de la fréquence. L'hypothèse suivant laquelle les permittivités électriques sont indépendantes de la fréquence sera donc retenue tout au long de ce mémoire.

Si le point de vue microscopique permet de comprendre les différents mécanismes de polarisation de la matière, le point de vue macroscopique permet d'établir des modèles simples pour représenter le comportement global de la matière. La polarisation, qu'elle soit issue simplement d'un des trois types de polarisation cités ci-dessus ou une combinaison, est caractérisée par le vecteur *polarisation* noté \mathbf{P} (ou moment dipolaire par unité de volume du matériau diélectrique) qui, pour des diélectriques homogènes, isotropes et linéaires est tel que :

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\mathbf{E} \quad (1.1)$$

où ε_0 est la permittivité du vide et ε la permittivité absolue qui caractérise le diélectrique. On peut définir la permittivité diélectrique relative (ou constante diélectrique) ε_r par la relation :

$$\varepsilon_r \varepsilon_0 = \varepsilon \quad (1.2)$$

La distinction entre un diélectrique et un conducteur repose, en fait, sur le nombre de charges libres qu'il contient. A température normale, un bon diélectrique contient des électrons libres, en relativement petit nombre mais suffisamment pour provoquer une certaine conduction électrique. Un diélectrique peut être considéré comme un mauvais conducteur et, en plus de sa permittivité électrique ε , sera caractérisé par une conductivité électrique σ .

Dans le cas où le champ électrique appliqué est alternatif de pulsation ω , nous verrons au

chapitre 2 que le diélectrique est caractérisé par une combinaison de ε et σ , appelée la conductivité complexe :

$$\bar{\sigma} = \sigma + i\omega\varepsilon \quad (1.3)$$

Ainsi, le diélectrique est dominé par sa conductivité σ pour les faibles fréquences ($\varepsilon\omega \ll \sigma$) et par sa permittivité ε pour les hautes fréquences ($\varepsilon\omega \gg \sigma$).

1.2.2. Polarisation interfaciale (et effet Maxwell-Wagner)

Le phénomène de polarisation interfaciale, étudié par Maxwell et Wagner, apparaît lorsque plusieurs diélectriques sont mis en présence. Leurs interfaces vont jouer un rôle particulier dans le phénomène de polarisation. Supposons que ces diélectriques sont caractérisés par des permittivités et des conductivités électriques différentes. D'une manière générale, un milieu hétérogène, constitué de plusieurs de ces diélectriques, présentera une permittivité électrique globale qui devient dépendante de la fréquence : on parle alors de dispersion diélectrique interfaciale [227]. Cette dépendance fréquentielle est la conséquence de l'accumulation de charges à l'interface entre les diélectriques et plus précisément de leur répartition non homogène le long de cette interface. En général, le phénomène de polarisation interfaciale est dominant lorsque qu'un des milieux diélectriques est de petites dimensions par rapport aux autres et qu'il possède une conductivité électrique bien plus faible que celle des autres. Ce cas de figure est typiquement celui rencontré avec les particules de latex ou les cellules biologiques en milieu aqueux. De plus, la présence de nombreux ions dans le tampon aqueux (électrolyte) apporte une spécificité de par la double couche qui se crée autour de la particule. En effet, les ions présents dans le tampon aqueux sont attirés par les charges opposées accumulées en surface de la particule du fait de sa polarisation. Il se forme ainsi, autour de la particule, un nuage de contre-ions (double couche) qui, sous l'effet du champ électrique, se déplacent et contribuent à augmenter fortement la polarisation de la particule associée à cette atmosphère ionique.

La double couche étant de très faible épaisseur (quelques nanomètres), le phénomène de polarisation interfaciale peut être intégré dans une contribution surfacique à la conductivité électrique équivalente de la particule qui, dans le cas de particules de latex dans un environnement électrolytique donné, possède une conductivité de volume qui est quasiment nulle [121].

De la même manière, pour les cellules biologiques, les mesures de leurs propriétés électriques étant faites en présence du tampon, nous pouvons supposer, en première approximation, que les phénomènes de polarisation interfaciale sont pris en compte au

travers de ces mesures [227].

Concernant les gouttes, celles-ci dans nos études sont des gouttes d'eau plus ou moins conductrices plongées dans de l'huile. La particule est donc ici toujours plus conductrice que son milieu extérieur et le phénomène de polarisation interfaciale est négligeable. Il y a toutefois polarisation de la couche diffuse dans un cas à l'extérieur, dans l'autre cas à l'intérieur. Dans ce dernier cas, les phénomènes de déplacement électrocinétique sont négligeables. Dans le cas de gouttes d'huile plongées en tampon aqueux, il faudrait alors, comme pour les particules de latex et les cellules biologiques, tenir compte de l'effet de polarisation interfaciale au travers d'une conductivité de surface de la goutte.

1.2.3. Conclusion

En résumé, un champ électrique appliqué à une substance diélectrique, polarise celle-ci, soit en y induisant des dipôles électriques dans le cas des substances non polaires, soit en provoquant l'alignement des dipôles permanents dans le cas des diélectriques polaires. Nous ferons l'hypothèse que les domaines de fréquences et d'intensités de champ électrique utilisés dans nos applications permettent d'éviter les phénomènes de claquage. L'effet de polarisation interfaciale (effet Maxwell-Wagner) est pris en compte au travers des valeurs conductivités des particules issues de mesures expérimentales. La prise en compte du caractère faiblement conducteur des diélectriques en présence rend la polarisation dépendant de la fréquence.

1.3. Les phénomènes électrohydrodynamiques

Bien que la liste des phénomènes EHD soit longue, recensons ici les plus connus et éliminons ceux qui apparaissent négligeables pour nos applications.

1.3.1. La diélectrophorèse (DEP)

La DEP est le déplacement sous champ électrique de la matière polarisée. La non uniformité du champ électrique appliqué est une condition nécessaire et ce phénomène est de plus en plus utilisé dans les microsystèmes pour manipuler sans contact mécanique des particules biologiques ou pour déplacer des gouttes [148]. La DEP se caractérise par deux points : *i*) elle concerne autant la matière neutre (cellules biologiques, gouttes) que chargée (particules de latex fonctionnalisées), solide (particules de latex) ou liquide (gouttes de tampon biologique), *ii*) les champs électriques sont alternatifs, ce qui diminue les réactions électrochimiques aux électrodes. La particule se déplace soit vers le champ le plus fort (la diélectrophorèse est dite alors positive) soit repoussée vers le champ le plus

faible (auquel cas la diélectrophorèse est dite négative). Nous verrons que, le cas échéant, le passage d'un régime de DEP à l'autre dépend, pour une particule et un liquide donnés, uniquement de la fréquence du champ électrique appliqué.

La force diélectrophorétique est proportionnelle au volume de la particule et au gradient du champ électrique qui lui est appliqué. Un champ fortement variable dans l'espace ainsi que de grosses particules sont des situations favorables à l'obtention de forces DEP capables de déplacer les particules malgré l'existence de nombreuses forces antagonistes. Parmi elles, nous trouvons l'agitation thermique, la force de frottement due à la viscosité du liquide extérieur, et surtout l'entraînement par l'écoulement du fluide dont l'origine se trouve aussi dans le champ électrique appliqué (phénomènes EHD secondaires).

Une multitude de configurations d'électrodes ont été étudiées pour des applications diverses. Déplacement et tri de cellules [110], dispenseurs de nanogouttes (de quelques nanolitres) [147] sont des exemples d'applications bien maîtrisées aujourd'hui.

La première partie du chapitre 2 de ce manuscrit est entièrement consacrée au phénomène de DEP et aboutira aux différents modèles mathématiques retenus pour le représenter.

1.3.2. L'électrodéformation

Un deuxième phénomène que nous considérons dans nos modèles est la déformation des interfaces fluide-fluide sous l'effet d'un champ électrique appliqué (voir figure 1.3). Si nous souhaitons déplacer des gouttes par DEP, le champ électrique appliqué, non uniforme et alternatif, va induire la déformation de leur interface. D'une forme initialement sphérique, nous verrons, dans le chapitre 5, que les gouttes peuvent s'allonger jusqu'à parfois devenir instables.

La déformation engendrée par le champ électrique provient de l'équilibre local entre les forces électriques, les forces capillaires et les forces hydrodynamiques. Pour de fortes déformations, les instabilités qui apparaissent provoquent la rupture des gouttes. Ceci s'avère gênant si l'on désire extraire ces gouttes avec un minimum de contamination par le fluide extérieur. La prévision de la déformation de ces gouttes, afin d'estimer les conditions d'instabilités, est donc cruciale dans la conception des microsystèmes. Dans le chapitre 4, nous reprenons les résultats théoriques de Taylor [275-278] et les résultats expérimentaux de Berg [23, 178] pour une première mise à l'épreuve de nos modèles numériques sur une configuration de champ électrique uniforme (configuration à électrodes planes). Dans le chapitre 5, nous étudions une configuration en champ électrique non uniforme (configuration pointe-plan) où seuls les résultats numériques sont disponibles pour prévoir le comportement des gouttes.

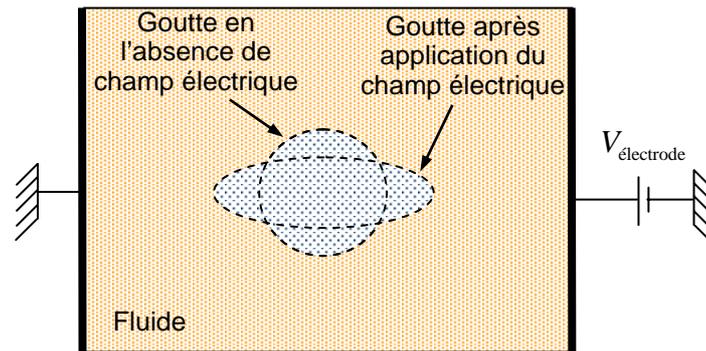


Figure 1.3. L'application d'un champ électrique sur une goutte provoque sa déformation.

1.3.3. L'électro-osmose

L'électro-osmose est la conséquence de la formation d'une double couche électrique à la surface des électrodes (vu dans le paragraphe 1.2.2.). L'existence d'une composante du champ électrique parallèle à cette surface a comme effet de provoquer le mouvement liquide qui engendre un cisaillement aux électrodes. D'un point de vue microscopique, c'est le déplacement des ions de cette double couche sous l'effet de la force de Coulomb, qui entraîne le liquide et le met en mouvement. En effet, considérons le cas simple d'une interface plane chargée négativement, par exemple. Parallèlement à cette surface, on applique un champ électrique dans le liquide. Le fait de la présence même de l'interface, une anisotropie sur la distribution des espèces chimiques de l'électrolyte se produit provoquant une anisotropie sur le champ électrique et les forces qui s'exercent en permanence sur ces mêmes espèces. Ces forces s'exercent de manière différentielle sur les espèces d'ions. Les ions positifs se rapprochent de l'interface par exemple et donc des ions négatifs apparaissent de l'autre côté de l'interface (voir figure 1.4). Soumis au champ électrique imposé, ces ions migrent entraînant par là même le liquide dans lequel ils baignent. Le liquide est donc mis en mouvement sous l'effet de l'entraînement dû à la migration des ions formant la double couche. La mise en mouvement par électro-osmose est certainement un des phénomènes EHD secondaires le plus perturbateur lorsque l'on souhaite manipuler des particules par DEP dans les microsystèmes. En effet, les vitesses obtenues sont souvent suffisantes pour qu'un effet d'entraînement des particules par le mouvement du liquide soit observé [120].

L'électro-osmose peut cependant être atténuée en adaptant la fréquence du champ électrique d'une part et en déposant une couche d'isolant électrique sur les électrodes d'autre part. Nous n'avons pas intégré ce phénomène dans notre modèle, ce travail devrait cependant être envisagé dans une version future du logiciel.

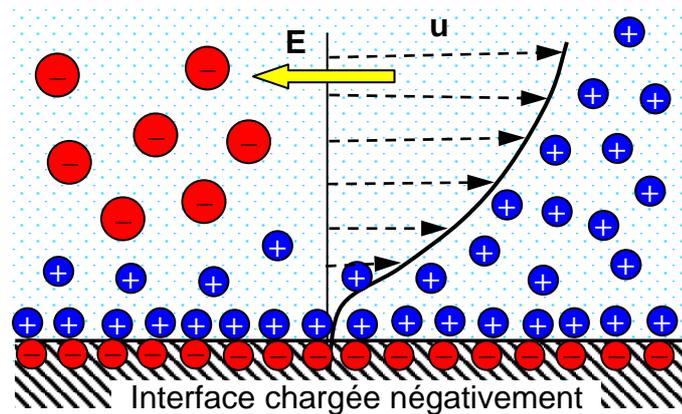


Figure 1.4. L'application d'un champ électrique tangentiel à une interface provoque la migration des ions de la double couche électrique et un cisaillement dans le fluide.

1.3.4. L'électrothermique

L'électrothermique résulte des variations des propriétés électriques du liquide (conductivité et permittivité électriques) avec la température. L'échauffement dû à l'effet Joule, fait apparaître des gradients de température engendrant des gradients de permittivité et conductivité. Ces gradients de propriétés électriques créent des forces de volume et entraînent le liquide (voir figure 1.5). Notons que l'électrothermique se distingue de la convection naturelle où les variations de la masse volumique avec la température sont à l'origine du mouvement du fluide.

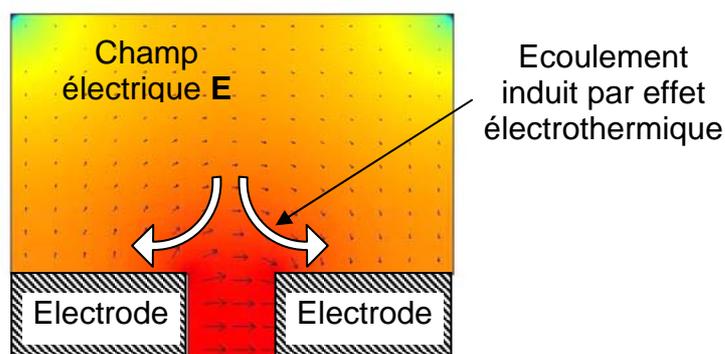


Figure 1.5. Un courant électrique engendre l'échauffement du liquide diélectrique de faible conduction qui à son tour modifie localement la permittivité électrique. Une force électrique prend naissance et un écoulement est instauré.

L'utilisation d'électrodes isolées électriquement (recouvertes par une couche de SiO_2 par exemple) est une condition favorable à la minimisation du phénomène de chauffage par effet Joule que nous négligerons dans une première approche.

1.3.5. L'électrorotation

Si l'on soumet une particule immergée dans un fluide à un champ électrique une distribution de charges à l'interface et donc un moment dipolaire équivalent s'établissent. Le temps d'établissement (et d'évanouissement) de l'orientation du moment dipolaire électrique équivalent dans la direction du champ appliqué est fini (comme nous le verrons au chapitre 3) si bien que si l'on fait varier brusquement la direction du champ électrique, un déphasage apparaît entre le champ électrique et le moment dipolaire. La particule subit alors un couple qui tend à la faire tourner pour réaliser cet alignement : c'est l'électrorotation. Afin d'entretenir cette rotation, le champ électrique doit changer de direction en permanence (il est alors dit *champ tournant*), comme indiqué par la figure 1.6.

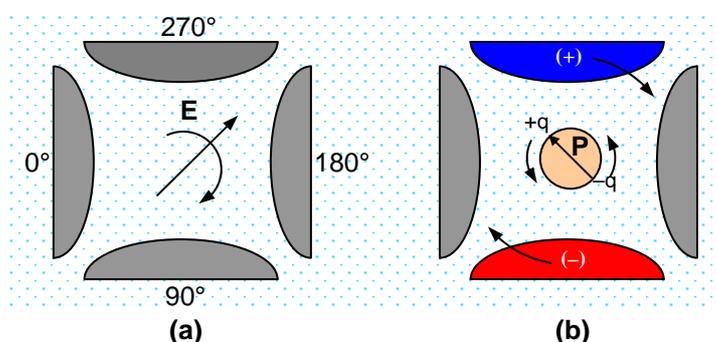


Figure 1.6. (a) Un champ électrique tournant est engendré entre quatre électrodes par application d'une tension sinusoïdale avec un déphasage de 90° . (b) Selon l'angle de phase entre la polarisation induite P et le champ électrique, le couple agit sur la particule en co- ou anti-champ. Pour le cas indiqué ici, la particule tourne à contre sens du champ électrique.

Notons que l'électrorotation est un phénomène qui peut être observé en champ électrique uniforme.

Les configurations qui nous intéressent n'utilisent pas de champs électriques tournants, les phénomènes d'électrorotation ne sont donc pas pris en compte dans nos modèles.

1.3.6. L'électrophorèse

L'électrophorèse est une méthode largement utilisée en biologie pour séparer des molécules chargées par migration différentielle sous l'action d'un champ électrique (figure 1.7). La force appliquée est la force de Coulomb (voir chapitre 2). Le sens de déplacement des particules dépend du sens du champ électrique appliqué. Dans nos applications, les champs électriques sont alternatifs ; les particules vont subir une force de Coulomb qui s'inverse avec le champ électrique et globalement la particule aura un mouvement oscillant autour d'une position fixe. L'électrophorèse sera donc négligée dans nos modèles bien que les particules de latex possèdent en général une charge non nulle.

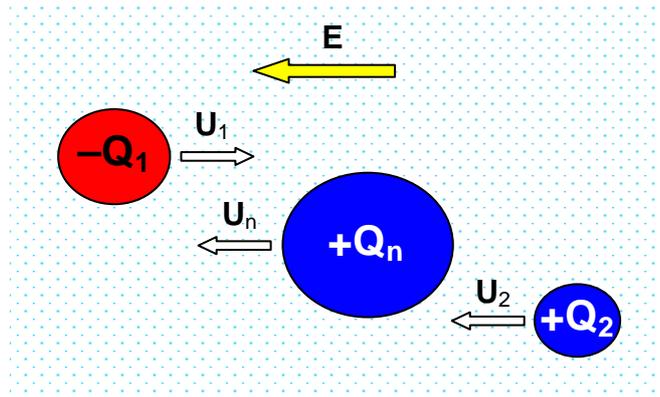


Figure 1.7. Electrophorèse de particules chargées par application d'un champ électrique.

1.3.7. L'électromouillage

Les premiers systèmes EWOD (Electrowetting On Dielectric) mettent en jeu une goutte en contact avec une électrode posée (sans contact électrique) sur une électrode plane, comme indiqué par la figure 1.8., L'électrode plane est reliée à une électrode filaire. Le dépôt d'une couche isolante sur l'électrode plane permet d'imposer un champ électrique continu ou de faible fréquence (de 100 Hz à 10 kHz) suffisamment intense pour faire varier l'angle de contact apparent de la goutte [24]. Les applications de ces systèmes concernent principalement l'optique où la goutte joue le rôle de lentille à focale variable. Des systèmes dérivés sont ensuite apparus, dans lesquels le déplacement de la goutte sur l'électrode est recherché (voir figure 1.8).

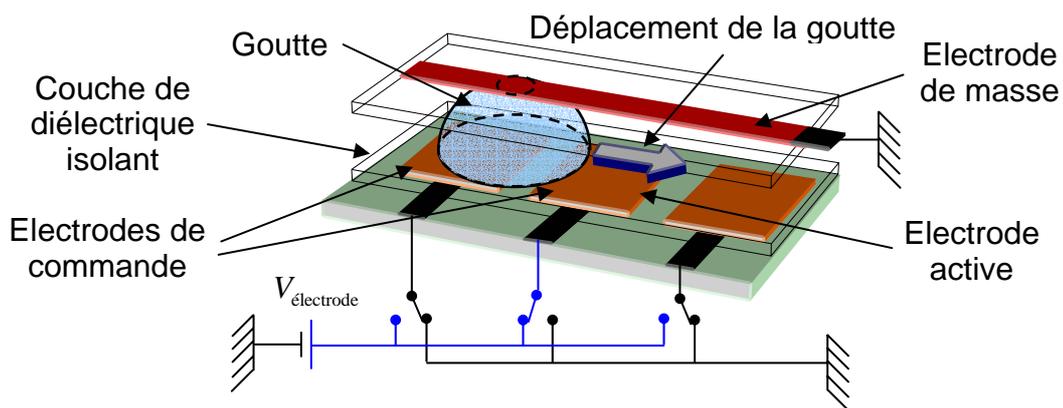


Figure 1.8. Déplacement d'une goutte dans un système EWOD.

De nombreux travaux plus théoriques ont attribué ce déplacement à la variation de mouillabilité de la goutte. Cette hypothèse a été remise en question par plusieurs auteurs en particulier Jones [149] qui attribua ce phénomène à l'existence de forces de volume, dues à la polarisation de l'eau et à la non uniformité du champ électrique appliqué ; le phénomène EWOD serait alors identique au phénomène de diélectrophorèse cité ci-dessus. Par

définition, l'électromouillage n'opère que si la goutte est posée sur une paroi initialement hydrophobe (non mouillante) et qui devient hydrophile (mouillante) lorsqu'elle est soumise au champ électrique. Cependant, la goutte (conductrice) doit aussi être en contact permanent avec une électrode pour que l'électromouillage soit effectif (dans ce cas, la goutte arrive à être propulsée à une vitesse de plusieurs millimètres par seconde).

1.3.8. L'électrostriction

Un phénomène sous-jacent à la polarisation d'un milieu soumis à un champ électrique est l'interaction mutuelle qui se produit quand les dipôles électriques (molécules polarisées) s'alignent dans la direction du champ. L'attraction des pôles opposés de ces dipôles provoque la contraction du milieu parallèlement au champ électrique appliqué (voir figure 1.9). Ce rétrécissement de la matière sous champ électrique est appelée électrostriction. A la différence du phénomène piézoélectrique (effort mécanique engendré par l'application d'un champ électrique et réciproquement) qui est spécifique à un type restreint de cristaux, l'électrostriction est un phénomène qui concerne tous les milieux diélectriques.

L'attraction des dipôles électriques est proportionnelle à trois facteurs. Elle est proportionnelle à l'intensité du champ électrique, à la polarisation des molécules et la proximité des molécules les unes aux autres. Si cette attraction est homogène, c'est-à-dire, si les molécules s'attirent partout avec la même intensité, il est évident que la résultante de ces attractions sur une molécule est nulle. Si en revanche cette attraction varie dans l'espace alors une force se crée suite à la contraction non homogène du milieu ; l'électrostriction induit aussi un déplacement de la matière.

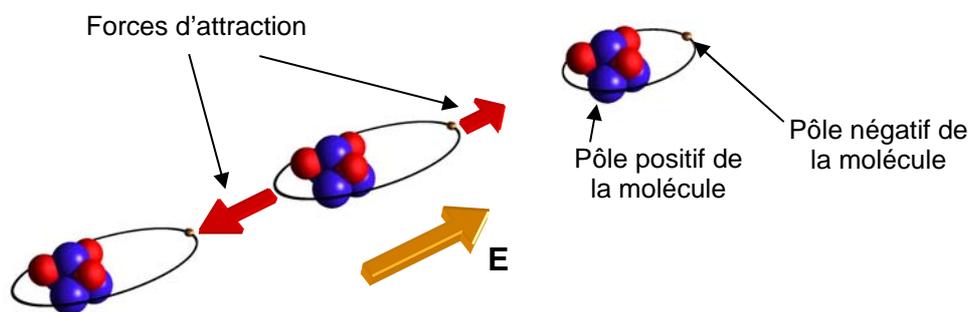


Figure 1.9. L'attraction non homogène qui s'exerce sur une molécule entraîne son déplacement vers les régions où cette attraction est la plus prononcée. Pour alléger la représentation, une molécule monoatomique est utilisée dans l'illustration.

1.4. Méthodes de résolution

Dans les microsystèmes, l'étude du mouvement et de la déformation d'objets sous l'influence du champ électrique ne peut être menée de manière générale que par l'outil numérique et ce à cause de la complexité des dispositifs électriques mis en jeu ainsi que du contexte de grandes déformations que subit l'objet (difficulté de linéariser pour obtenir des problèmes solubles analytiquement). En effet, ces déformations ne sont pas déterminées de manière précise par les méthodes analytiques (linéaires). Ces déformations font intervenir de surcroît la dynamique de l'écoulement ce qui rend l'utilisation des méthodes numériques indispensable et aujourd'hui possible pour résoudre ces problèmes.

Avant l'avènement de ces méthodes la technique des multipôles était largement utilisée en physique notamment pour modéliser le potentiel électrique induit par un objet. En chimie, par exemple, cette technique permet, du fait de la contribution de chaque atome, de modéliser le potentiel électrique autour d'une molécule complexe. La molécule est représentée par un ensemble de multipôles qui donnent accès à un ensemble d'équations suffisamment simples à résoudre pour en déduire le potentiel qu'elle crée autour d'elle. Nous reviendrons en 1.4.1 sur ces méthodes de résolution de type analytique qui ont un caractère de référence.

La présentation des méthodes numériques utilisées sera pour l'essentiel reprise de la littérature. Les deux méthodes numériques utilisées au cours de cette thèse, sont la Méthode des Eléments Finis (MEF) au travers du logiciel commercial Femlab® de la Société *Comsol incorporated* et la Méthode Intégrale aux Frontières (MIF) au travers du logiciel que nous développons ici (CANARD).

Toute méthode numérique consiste à associer à un problème défini par une équation différentielle et des conditions aux limites un problème algébrique correspondant. Dans ce cas l'intégration du problème différentiel revient à inverser la matrice associée. L'obtention du système matriciel correspondant repose sur deux principes : choisir la manière d'approcher l'équation continue par une équation discrète et la forme que prend l'inconnue dans le domaine discrétisé. Ces opérations sont effectuées soit sur l'équation différentielle soit sur une variante de cette équation obtenue par des transformations mathématiques plus ou moins complexes.

1.4.1. Les méthodes des multipôles et du tenseur de Maxwell

Une somme de sinus et cosinus permet de modéliser les fonctions périodiques si nous choisissons les bons coefficients (séries de Fourier). De la même manière, un regroupement particulier de polynômes (les polynômes de Legendre) permettent de

modéliser certaines fonctions dans le repère de coordonnées sphériques (harmoniques sphériques). Les coefficients associés à ces polynômes (ou *multipôles*) sont appelés *moments multipolaires*.

La technique des multipôles consiste à remplacer l'objet par un ensemble de charges électriques libres qui produisent un potentiel électrique équivalent.

Le multipôle le plus simple est la charge ponctuelle unique (le monopôle ou multipôle d'ordre 0). Le potentiel qu'il crée est distribué de façon isotrope autour de cette charge et le moment monopolaire est une estimation de la charge totale de l'objet.

Le multipôle d'ordre 1 est le dipôle constitué de deux charges opposées et séparées par une distance d . Le potentiel électrique créé par un dipôle est plus complexe que celui créé par un monopôle.

Nous verrons qu'en diélectrophorèse, les particules qui se polarisent sont généralement bien représentées par le dipôle électrique. La remise en question de ce modèle est souvent occultée par une vision exclusivement dipolaire des phénomènes de polarisation.

Bien que ce modèle simple semble convenir dans la majorité des cas, pour certaines configurations particulières, certains auteurs ont montré que l'approche multipolaire avec des ordres plus élevés était nécessaire [172]. C'est le cas notamment lorsque le champ électrique présente de fortes non uniformités et/ou que les particules sont localisées dans des zones où il est presque nul.

La prise en compte des ordres supérieurs à l'ordre 1 dans les développements multipolaires est fastidieuse. Le calcul numérique associé au développement d'ordinateurs suffisamment puissants a permis de lever les difficultés à prendre en compte des géométries complexes d'électrodes tout en introduisant des particules dans le domaine. Il est possible de calculer la répartition du potentiel électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la particule sans faire l'hypothèse qu'elle se comporte comme un dipôle électrique. Le calcul de la force électrique totale qui s'applique sur elle est obtenu par la méthode du tenseur de Maxwell qui est une méthode équivalente à une approche multipolaire d'ordre infini. Nous verrons, dans le chapitre 2, le détail de la méthode du tenseur de Maxwell ; les simulations de la configuration en champ électrique non uniforme pointe-plan montrent les limites de l'approche dipolaire (chapitre 4).

Des solutions aux problèmes électrohydrodynamiques peuvent aussi être obtenues en décrivant la déformation éventuelle de la particule par des techniques de perturbation. Plusieurs auteurs [122, 123, 170, 193] ont proposé des développements au premier ordre, mais il n'existe que des cas très particuliers pour lesquels des développements d'ordre

supérieur sont effectués [256]. Au chapitre 5, une résolution analytique au premier ordre pour une configuration assez générale est présentée.

1.4.2. La Méthode des Eléments Finis

Le caractère général de la MEF est indiscutable aujourd'hui puisque de nombreux codes commerciaux, basés sur cette méthode, existent. Nous ne nous étendrons pas sur les fondements de cette méthode, devenue standard, pour la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP). Notons toutefois qu'elle souffre d'un handicap quand il s'agit de décrire des frontières mobiles malgré l'existence de techniques pour les prendre en compte (*Level Set, Ghost Fluid, ALE*, pour *Arbitrary Lagrangian Eulerian*, ou des techniques de déformation du maillage) : leur intégration dans la MEF pénalise fortement la méthode autant du point de vue des capacités de mémoire requises que de la précision obtenue.

Mis à part les phénomènes à frontières mobiles, la MEF est très utilisée dans l'industrie, en particulier dans l'aéronautique, dans l'industrie automobile et en météorologie. Cette méthode est intéressante, compte tenu de sa souplesse d'utilisation, en particulier lorsqu'il s'agit (i) de phénomènes non linéaires, (ii) de géométries complexes et (iii) de couplage multiphysique. Le principe de la MEF, que nous verrons au chapitre 2, est généralisable à tous les domaines de la physique pour peu que celle-ci soit modélisable par l'hypothèse des milieux continus. La prise en compte des équations non linéaires est naturelle. Le couplage multiphysique ne pose pas de problème numérique particulier si ce n'est augmenter fortement la taille des matrices à résoudre et donc exiger des ressources de calcul importantes. L'automatisation de la méthode, en amont du type de physique qu'elle va traiter, permet d'obtenir des logiciels qui peuvent masquer totalement la méthode à l'utilisateur. La pertinence de cette automatisation reste cependant discutable et n'offre aucune garantie quant au bien fondé numérique du calcul effectué. La connaissance de la méthode par l'utilisateur reste donc, à ce jour, incontournable.

1.4.3. La Méthode Intégrale aux Frontières

La MIF présente, quant à elle, un double intérêt pour nos applications. Son principe, comme l'indique son nom, est de transformer les équations aux dérivées partielles à résoudre dans tout le domaine de calcul en équations intégrales définies uniquement sur les frontières du domaine. L'intérêt premier de la MIF est donc de ne pas être pénalisée par des frontières qui se déforment au cours du temps. Ce report du problème sur les frontières implique aussi une forte diminution de la taille de la matrice à résoudre. Ceci est le second

intérêt de la MIF qui nécessite beaucoup moins de ressources (mémoire et temps de calcul) que les méthodes classiques à précision équivalente.

Il est vrai, cependant, que le passage d'équations en volume à des équations aux frontières ne peut s'effectuer de manière *directe* que pour les seules équations linéaires de problèmes physiques tels les problèmes à écoulements irrotationnels, d'électrostatique et de conduction thermique.

Compte tenu du point de vue lagrangien de la MIF, le suivi d'interface, qui s'accompagne lors de l'évolution d'une goutte déformable dans un fluide, se fait de manière souple et intuitive. En effet, à la différence des méthodes eulériennes, dites de capture, la MIF identifie les interfaces de manière explicite, et permet une description plus précise de leur évolution.

Il existe plusieurs types de méthodes intégrales. Chacun est dédié à un problème physique particulier. Ce manque de généralité de la méthode explique en partie l'indisponibilité de codes MIF commerciaux (version boîte noire) jusqu'à l'heure actuelle. Les Méthodes Intégrales concernent classiquement les problèmes dont la modélisation mathématique fait intervenir des opérateurs elliptiques (qui se caractérisent par le fait que pour connaître l'information en un point, il est nécessaire et suffisant de la connaître sur une sphère qui entoure ce point). Bien que les problèmes qui font intervenir des opérateurs non linéaires et/ou des termes source (ou puits) ne soient pas le terrain de prédilection de la MIF, comme pour les autres méthodes numériques, il est toujours possible d'utiliser des méthodes itératives pour surmonter cette difficulté. Néanmoins, l'avantage de réduire la dimension du problème d'une unité de cette méthode est, dans ce cas, nécessairement émoussé, dans une proportion dépendant de chaque cas.

En l'absence de sources de volume, le champ à déterminer (vitesse, champ électrique, contrainte, etc.) dérive d'un potentiel qui vérifie l'équation de Laplace, de Helmholtz ou d'autres équations similaires. Ce champ va donc être régi par une distribution de singularités sur la frontière du domaine. Cette méthode, plus connue sous le nom de méthode de singularités, a été utilisée par Bykhovskiy dès 1960 et a suscité depuis l'investissement continu de toute une communauté de scientifiques issus de disciplines variées.

On présente dans l'Annexe 1.1 un rapide panorama des acquis de cette communauté.

En conclusion, l'utilisation de la MIF pour la résolution de problèmes aux dérivées partielles suppose une mise en œuvre complexe de la formulation notamment quand ces problèmes sortent du cadre habituel de cette méthode. A cause du manque de généralité, la MIF doit être adaptée à chaque problème ; plus que les autres méthodes numériques, il

existe une dualité certaine entre le problème mathématique à traiter et la formulation MIF *ad hoc*. Bien qu'elle soit utilisée essentiellement pour résoudre les équations de Laplace et de Helmholtz, la MIF a montré un succès indéniable pour le traitement de problèmes très complexes en mécanique des fluides, en thermique, en électromagnétisme et en élasticité.

L'électrohydrodynamique, qui nous importe de façon effective dans cette thèse, est gérée par des équations elliptiques qui sont particulièrement appropriées au traitement par la MIF. Ces équations linéaires étendues sur les domaines volumiques se transforment directement en équations intégrales surfaciques, indépendantes du temps de manière explicite. Elles peuvent être couplées sans encombre aux différentes équations d'évolution du domaine (conservation de charge, bilan normal de quantité de mouvement), qui sont des équations *ab initio* attachées aux interfaces, et leur caractère éventuellement fortement non linéaire ne pose pas de difficulté spécifique.

Annexe 1.1

Aperçu des travaux MIF durant les 30 dernières années

Parmi les auteurs les plus représentatifs utilisant la MIF, citons Tanaka *et al.*, [261], qui, en 1983, proposent la modélisation d'une flamme, initialement exprimée par des équations de Navier-Stokes pour un fluide visqueux en régime transitoire couplées avec l'équation d'énergie sous l'approximation de Boussinesq, par un système d'équations intégrales. Ces dernières sont exprimées en fonction du noyau spatio-temporel solution fondamentale de l'équation de diffusion. La même année, grâce à une formulation intégrale, Takahashi *et al.*, [266], explorent les problèmes de changement de phase avec des réactions de diffusion chimique aux interfaces, qui sont explicitement déterminées par des équations d'évolution des concentrations de phases. Les résultats obtenus sont d'une qualité remarquable et très peu coûteux, ouvrant ainsi la porte aux exploitations industrielles. Ikeuchi *et al.*, [140], utilisent une méthode similaire pour résoudre les équations de convection-diffusion thermo-hydrauliques, qui se révèle être stable pour de grandes valeurs des nombres de Courant et de diffusion. Onishi *et al.*, [219], parviennent à modéliser la dynamique d'un écoulement visqueux laminaire 2D en régime transitoire avec des conditions aux limites de Robin par une formulation fonction de courant-vorticité en utilisant pour noyaux de convolution les solutions fondamentales de l'équation de Laplace et de diffusion, respectivement. Avec un maillage beaucoup plus lâche, et un pas de temps nettement moins contraignant, ils parviennent à des résultats équivalents à ceux de la Méthode des Éléments Finis (MEF) pour une configuration de type convection naturelle dans une cavité. Ces auteurs parviennent, la même année, avec adjonction de l'équation de diffusion de chaleur et sous l'approximation de Boussinesq, à simuler avec succès la convection naturelle d'un écoulement visqueux en géométrie 2D. Bien que la précision des résultats obtenus soit largement influencée par le choix du pas temporel, la méthode demeure inconditionnellement stable.

Par un arrangement astucieux des équations de Navier-Stokes et de continuité, Tosaka *et al.* (1985), [283], formulent des équations intégrales équivalentes (avec des Noyaux de Stokes) qu'ils testent en régime instationnaire 2D avec succès, bien que la méthode paraisse particulièrement encombrante dans sa mise en œuvre. En collaboration avec Tanaka, ils réussissent à combiner, la même année, conduction, convection et rayonnement thermique en une seule formulation intégrale et montrent la validité du modèle développé

via plusieurs exemples, [221].

Par ailleurs, une formulation avec les variables primitives (vitesse et pression) est effectuée par Tosaka pour résoudre le problème de Stokes à bas nombre de Reynolds, [281]. Le système non linéaire, reliant la vitesse à la contrainte mécanique, est résolu par un procédé itératif approprié. La qualité des résultats obtenus pour un écoulement de Couette, de Poiseuille à l'intérieur d'une cavité ainsi qu'à l'aval d'une marche en dérapage, laisse supposer une large applicabilité de la méthode. Kuroki *et al.*, [164], choisissent une approche différente pour résoudre un type très proche de problèmes. Il s'agit d'un écoulement de fluide visqueux en régime transitoire soumis à une contrainte thermique. La méthode est une approche hybride MIF-méthode de la fonction de pénalité appliquée aux équations de Navier-Stokes. Le procédé itératif semble fonctionner pour l'exemple numérique choisi de convection naturelle dans une cavité fermée. La technique utilisée pour approcher la différentielle temporelle semble rudimentaire eu égard au choix du pas temporel.

Morino, dans plusieurs travaux, [202–206], présente différentes versions de la MIF à partir desquelles les problèmes linéaires les plus variés peuvent être résolus. Pour cela, il s'appuie sur la décomposition de Helmholtz-Poincaré qui permet de traiter les problèmes de champs non conservatifs (tels les écoulements visqueux ou le champ électromagnétique avec pertes) par la MIF et ce même si ces derniers ne sont pas solénoïdaux comme en dynamique des fluides incompressibles et en électromagnétisme lorsque se manifestent des distributions spatiales de charges électriques libres. Les exemples traités pour les voilures tournantes d'hélicoptère, des profils d'aile et de fuselage d'avion en régime transsonique, font état de résultats de calcul très encourageants.

La puissance de la Méthode Intégrale aux Frontières est de s'appuyer sur les résultats des calculs conduits aux seules frontières du domaine, pour évaluer, si nécessaire, *comme sous-produit direct de ces calculs* les inconnues du problème dans le domaine en entier. Cet avantage est partiellement perdu dès qu'il s'agit d'une équation à terme source. Il est vrai que la méthode permet toujours de se ramener vers un problème aux frontières, mais l'approche entraîne en général une lourde procédure itérative, qu'il n'est pas toujours facile d'exploiter. Le travail de Partridge, Brebbia et de Wrobel, en 1992 [222], et l'idée commençait à poindre dès 1982, d'après les travaux de Nardini et Brebbia, [211], a changé la donne. En dépensant un effort relativement minime et tout en conservant l'élégance et la robustesse de la méthode, l'objectif était de proposer une extension de la MIF aux problèmes différentiels les plus généraux ; il fallait toutefois qu'apparaisse explicitement un terme laplacien. Ainsi est apparue la Méthode Intégrale aux Frontières à Réciprocité

Duale (MIF-RD). Celle-ci repose sur l'approximation du terme non homogène par une série de fonctions test à base radiale (ou encore réseau de fonctions à base radiale) dont les primitives (dans le sens des fonctions qui admettent ces fonctions pour laplacien) sont déterminées.

Ainsi Golberg *et al.*, [115], en 1996, avancent une méthode efficace pour interpoler le terme de forçage (source) par une approximation multi-quadratique. Plusieurs exemples (y compris une géométrie 3D) sont présentés pour valider la méthode. Niku et Adey, la même année, propose une technique de partitionnement (dispatching) du domaine d'intégration pour alléger la procédure d'interpolation, d'une part, et d'autre part permettre d'éviter la procédure de condensation statique par diagonalisation de la matrice de masse et celle d'influence interne. Bien que soumise à une batterie importante de tests numériques et physiques, la faible généralité de la méthode et les fortes hypothèses introduites font qu'elle reste incertaine et pas assez fiable pour être utilisée d'une manière systématique.

Dans un autre contexte, Chen, en 1999, propose une variante de la méthode DR-BEM qui, grâce à une décomposition ingénieuse combinée à une transformation en loi exponentielle, permet de résoudre directement les équations de convection-diffusion transitoires sous réserve cependant que les termes de transport soient des dérivées d'une différentielle totale exacte, [54]. Tanaka *et al.*, [186], propose une analyse analogue pour le traitement de l'équation de propagation d'onde dans le domaine temporel via une procédure récursive couplée au problème d'élasticité dynamique inverse, tandis que Partridge, [223], fournit un critère, encore sommaire, pour le choix des fonctions tests selon le type de problème à traiter.

Tanaka *et al.* [270], en 2002, reprennent le formalisme pour résoudre le problème de conduction en régime permanent dans un matériau non homogène en définissant une nouvelle classe de fonctions à base radiale régulières, alors que Chen combine, dans deux travaux distincts mais complémentaires, des fonctions régulières à ordre élevé ainsi que des fonctions singulières dans l'approximation du terme non homogène de l'équation de Helmholtz. Il démontre ainsi la nette réduction du temps de calcul suite à l'exploitation de la méthode de particule de frontière (BPM), une variante de la méthode à réciprocité multiple (MR-BEM).

Les limites de la MIF-RD vont plus loin encore. Plusieurs auteurs ont, en effet, tenté de l'employer pour le traitement des équations non linéaires. Zhu *et al.*, [307], arrivent avec succès à simuler un problème de conduction couplé avec un terme source fortement non linéaire dû au rayonnement par micro-ondes. Ils reprennent le même formalisme, [308], qu'ils implémentent d'ailleurs dans un problème de diffusion très proche du précédent.

Bien que le traitement du transitoire, qui s'effectue dans l'espace transformé (spectral), rende la méthode très coûteuse, la précision du calcul se trouve, par le fait même de l'approche, conservée et ce pour de longs laps de temps. Le travail très abouti qu'ils réalisent en 1997, [250], combine une non linéarité du matériau (et donc de l'équation aux dérivées partielles) et des équations auxiliaires aux limites de Dirichlet, de Neumann, de Robin et de rayonnement. Deux approches sont testées, à savoir l'approche directe et celle par la transformée de Kirchhoff, qui bien qu'accommodante pour le traitement du système différentiel, est largement pénalisante quand il s'agit d'effectuer la transformation inverse, en post-traitement.

Un travail encore plus instructeur et plus riche se trouve dans les traités de Balakrishnan *et al.*, [9, 237], qui récapitulent les principales approches préconisées pour le traitement des équations non linéaires par la MIF-RD. Les auteurs montrent aussi l'incidence directe de la subdivision du domaine d'intégration sur l'amélioration du conditionnement de la matrice discrète d'influence.

Chapitre 2 : Modèle mathématique général

Sont présentées dans ce chapitre les différentes forces électriques et hydrodynamiques mises en jeu. Nous distinguerons les forces qui s'exercent en volume et celles qui s'exercent aux interfaces (sections 2.1). Après présentation des équations de Maxwell, des hypothèses simplificatrices sont émises (section 2.2). Ces hypothèses seront justifiées dans le cadre des applications visées dans cette thèse. Le problème couplé EHD étant assez complexe, le problème électrique est considéré, en première approche, dans deux situations : le régime électroquasistatique général et le cas particulier du régime électrique sinusoïdal. Par la suite, les lois de conservation sont écrites pour l'hydrodynamique et le couplage EHD sera finalement effectué (section 2.3). Le traitement du déplacement de particules solides (cellules biologiques supposées rigides ou corps synthétiques indéformables) sujettes à une force DEP sera distingué du traitement de la déformation et déplacement de gouttes de liquide en EHD. Dans le premier cas, on est confronté au problème de déplacement à faible vitesse de particules solides. Dans le second cas, il faut à la fois suivre la déformation et le déplacement des gouttes.

2.1. Inventaire des forces mises en jeu

Les microsystèmes considérés dans la présente étude font intervenir des échelles allant du micromètre au millimètre. Ces échelles sont donc nettement supérieures au libre parcours moyen (distance moyenne parcourue par une molécule entre deux collisions successives) des fluides qui est de l'ordre du nanomètre. Ainsi, l'hypothèse qui consiste à considérer les milieux comme continus reste admissible. Tous les développements relatifs à la mécanique de ces fluides seront effectués sur cette base.

Dans ce cadre, l'interaction entre matière et champ électrique se modélise par l'intermédiaire de plusieurs forces qu'il s'agit de distinguer.

2.1.1. Les forces électriques

2.1.1.1. Les forces électriques de volume

L'application d'un champ électrique dans un domaine homogène donné engendre, en tout point, une densité de force électrique (ou force électrique volumique), qui figure comme un terme source spécifique dans l'équation locale de quantité de mouvement étendue à tout le domaine. Cette force comprend trois composantes fondamentales.

- La force de Coulomb

En fonction de leur signe, deux charges électriques ponctuelles Q_1 et Q_2 disposées dans le vide l'une à proximité de l'autre s'attirent ou se repoussent. Cette force électrique est proportionnelle aux charges électriques et inversement proportionnelle au carré de la distance $\|\mathbf{r}\|$ qui les sépare. La loi qui exprime la force de Coulomb est :

$$F_i^{\text{Coulomb}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{\|\mathbf{r}\|^2} e_i \quad (2.1)$$

où $\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}$ F/m est la permittivité du vide et $e_i = r_i / \|\mathbf{r}\|$ un vecteur unitaire porté par la droite qui relie les deux charges. Loi de Coulomb est valable aussi bien à l'échelle atomique ($\sim \text{Å}$) qu'à l'échelle macroscopique ($\sim \text{km}$). Dans le cas où le milieu est autre que le vide, la forme de cette force similaire à (2.1) s'écrit :

$$F_i^{\text{Coulomb}} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{\|\mathbf{r}\|^2} e_i \quad (2.2)$$

où ϵ est la permittivité du milieu précisée dans le paragraphe suivant. Le terme $Q_1 e_i / 4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r}\|^2$ est regroupé en une seule entité appelée champ électrique \mathbf{E} .

Ces considérations permettent de se rattacher à une définition élémentaire de la force de Coulomb car habituellement, le champ électrique \mathbf{E} est défini de façon beaucoup plus générale : nous le considérons comme une donnée sur tout le domaine considéré. Soit q_v la densité volumique des charges électriques, la densité de la force de Coulomb s'écrit alors :

$$f_{v,i}^{\text{Coulomb}} = q_v E_i \quad (2.3)$$

- La force d'électrostriction

La déformation d'un élément fluide provoquée par l'attraction des molécules qui se polarisent sous l'effet du champ électrique appliqué est appelée électrostriction. La polarisation d'un matériau augmente à mesure que l'excentricité des barycentres des charges liées positives et négatives augmente par l'application du champ électrique. La

polarisabilité d'un matériau est caractérisée par sa susceptibilité électrique χ . La susceptibilité électrique d'un diélectrique est toujours positive. Souvent, on admet une loi linéaire entre la polarisation d'un diélectrique et le champ électrique appliqué (voir chapitre 1). Le facteur de linéarité est donné par la quantité $\varepsilon_0\chi$, où ε_0 n'est autre que la permittivité du vide. Par définition, la quantité $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_0\chi$ est la permittivité du diélectrique considéré. Si cette permittivité est grande comparée à la permittivité du vide, le matériau sera très polarisable (l'eau par exemple). Si cette permittivité est proche de celle du vide (les huiles par exemple) le matériau ne sera que faiblement polarisable. Puisque la polarisation est liée au champ électrique qui l'engendre, l'inversion du champ électrique, qui entraîne l'inversion de polarisation, ne modifie pas la déformation subie. Si le champ électrique est uniforme, alors la résultante des forces d'électrostriction sur l'élément fluide est nulle.

L'expression de la densité de force d'électrostriction est donnée par (la sommation s'opère sur les indices répétés), [169],

$$f_{v,i}^{\text{électrostriction}} = \frac{1}{2} \partial_i \left(E_k E_k \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_{T=Cte} \rho \right) \quad (2.4)$$

où ρ est la masse volumique du fluide et T la température. Parce que la force d'électrostriction s'écrit sous la forme d'un gradient, elle est souvent assimilée à une pression supplémentaire.

- La force diélectrique

La troisième force électrique qui est susceptible de s'appliquer est la force diélectrique. Cette dernière, appelée force de Korteweg-Helmholtz [46], se manifeste lorsqu'une variation spatiale de la polarisabilité de l'élément fluide se produit. La variation dans l'espace de la permittivité électrique ε peut être due soit à une non homogénéité du même matériau (soumis à un gradient thermique par exemple) soit à la coexistence de plusieurs matériaux (ou phases) homogènes. Ce dernier cas où la permittivité subit un saut sera considéré dans le paragraphe 2.1.1.2. La forme de la densité de force diélectrique correspondant au premier cas est donnée dans ce paragraphe.

Le point de départ des deux cas (variation de la permittivité au sein du même matériau ou de plusieurs matériaux) est le tenseur de Maxwell $\mathbb{T}^{\text{électrique}}$ défini par :

$$\mathbb{T}^{\text{électrique}} = \varepsilon \left(\mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \mathbb{I} \right) + \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T \rho \mathbb{I} \quad (2.5)$$

En intégrant la force d'électrostriction à la pression, comme mentionné plus haut,

l'expression (2.5) se réduit à la forme standard suivante :

$$\mathbb{T}^{\text{électrique}} = \varepsilon (\mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})\mathbb{I}) \quad (2.6)$$

La densité de la force électrique est calculée par, [178],

$$\mathbf{f}_v^{\text{électrique}} = \nabla \cdot \mathbb{T}^{\text{électrique}} \quad (2.7)$$

L'expression de la force électrique se déduit, selon [48] (formule 3.49) et [169], par :

$$f_{v,i}^{\text{électrique}} = -\frac{1}{2} E_k E_k (\partial_i \varepsilon) + \rho E_i \quad (2.8)$$

où $\partial_i = \partial/\partial x_i$. On voit ainsi que la densité de la force électrique, telle que donnée par (2.7), inclut la force de Coulomb, à laquelle elle se réduit si la permittivité ε du milieu est uniforme. C'est le premier terme de la force électrique (2.8) que l'on appelle force diélectrique.

2.1.1.2. Les forces électriques de surface : les interfaces fluide–fluide

Abordons le cas évoqué plus haut où il se produit, d'un domaine à un autre, non pas une variation continue mais un saut de permittivité. C'est le cas, notamment, des interfaces qui séparent deux fluides diélectriques non miscibles. Alors, il n'est plus possible de définir pour des points situés sur ces interfaces des bilans locaux qui fassent intervenir des forces volumiques continues. A la place, on introduit des bilans locaux à partir des forces qui s'exercent sur un élément d'interface d'aire unité, de part et d'autre de l'interface. Ces contraintes relatives à chaque milieu apparaissent sous la forme d'un saut :

$$\mathbf{f}_s^{\text{électrique}} = \mathbf{n}^{(e)} \cdot \mathbb{T}^{\text{électrique}(e)} + \mathbf{n}^{(i)} \cdot \mathbb{T}^{\text{électrique}(i)} = \mathbf{n} \cdot (\mathbb{T}^{\text{électrique}(i)} - \mathbb{T}^{\text{électrique}(e)}) \quad (2.9)$$

$\mathbf{n}^{(e)}$ (resp. $\mathbf{n}^{(i)}$) est la normale à l'interface extérieure au fluide (e) (resp. fluide (i)) et l'on choisit de définir arbitrairement $\mathbf{n} = \mathbf{n}^{(i)}$ (voir figure 2.1).

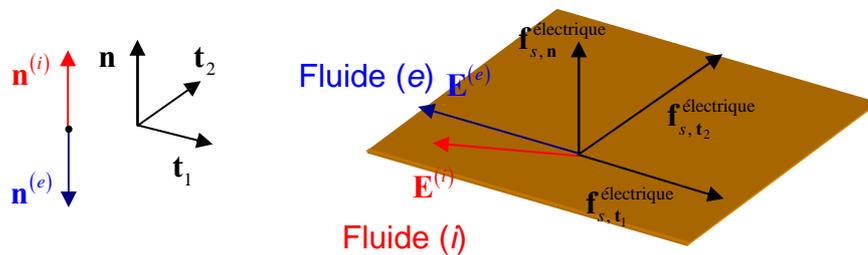


Figure 2.1. Force électrique appliquée à une interface entre deux fluides.

Pour des questions de concision pour la suite, on introduit la notation $\llbracket \cdot \rrbracket$ définie par :

$$\llbracket \mathbf{n} \cdot \mathbb{T}^{\text{électrique}} \rrbracket = \mathbf{n}^{(e)} \cdot \mathbb{T}^{\text{électrique}(e)} + \mathbf{n}^{(i)} \cdot \mathbb{T}^{\text{électrique}(i)} \quad (2.10)$$

Après projection de (2.9) sur la normale \mathbf{n} et les vecteurs tangents \mathbf{t}_α ($\alpha = 1, 2$), à

l'interface, on trouve :

$$\mathbf{f}_s^{\text{électrique}} \cdot \mathbf{n} = \left[\varepsilon^{(i)} E_n^{(i)} E_n^{(i)} - \varepsilon^{(e)} E_n^{(e)} E_n^{(e)} - (\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}) (E_{t1}^2 + E_{t2}^2) \right] / 2 \quad (2.11)$$

$$\mathbf{f}_s^{\text{électrique}} \cdot \mathbf{t}_\alpha = (\varepsilon^{(i)} E_n^{(i)} - \varepsilon^{(e)} E_n^{(e)}) E_{t_\alpha} = q_s E_{t_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.12)$$

Si nous considérons un objet immergé dans un fluide non miscible, alors l'interface, qui sépare les deux milieux, sera fermée. Par définition, si l'objet est rigide (auquel cas il est appelé particule), aucune déformation ne se produit. Les contraintes électriques, telles que données par (2.11), (2.12), ont néanmoins, après intégration sur la surface, un effet global sur la particule. C'est dans ce sens que l'on appelle force électrophorétique et force diélectrophorétique les forces résultant de la contribution de toutes les contraintes de Coulomb et celles purement diélectriques, respectivement, sur la particule.

En outre, si l'objet est susceptible de se déformer (c'est le cas notamment des gouttes de fluide), au déplacement induit par la force résultante s'ajoutent une déformation due principalement aux contraintes qui s'exercent sur la normale à l'interface.

2.1.2. Les forces hydrodynamiques

Pour un objet immergé dans un fluide, les forces électriques s'équilibrent, dans les bilans locaux volumique ou surfacique, avec les forces hydrodynamiques. Les forces hydrodynamiques se subdivisent en quatre classes : les forces d'inertie, les forces de pression, les forces visqueuses et la tension de surface. Dans la présente étude, la tension de surface n'est considérée que pour les gouttes de fluide ; les cellules biologiques et les particules synthétiques sont supposées rigides en première approche si bien que le domaine qu'ils occupent n'est pas décrit localement mais en *bloc*.

2.1.2.2. Les forces hydrodynamiques de volume

- Les forces d'inertie :

L'expression de la densité volumique de la force d'inertie est classiquement donnée par :

$$f_{v,i}^{\text{inertie}} = \rho \frac{Du_i}{Dt} \quad (2.13)$$

où le symbole D/Dt représente la dérivée particulaire définie par :

$$\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \quad (2.14)$$

- Les forces de pression :

A échelle microscopique, la pression se traduit, pour les fluides, par l'intensité et le nombre de chocs que reçoit une surface par unité de temps. Ces collisions se produisent naturellement par le mouvement aléatoire (brownien) des molécules du fluide. La somme de cette pression et de la pression associée à l'électrostriction est appelée pression modifiée, soit :

$$p^{\text{modifiée}} = p + \frac{1}{2} E_k E_k \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_{T=Cte} \rho \quad (2.15)$$

- Les forces visqueuses :

Pour un fluide newtonien isovolume (incompressible par effet de pression et indilatable par effet de température), la force de pression ainsi que la force de viscosité peuvent être rassemblées sous le terme d'une divergence d'un tenseur, appelé tenseur des contraintes Π , soit :

$$\Pi = -p\mathbb{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^t) \quad (2.16)$$

où p est la pression et μ la viscosité dynamique et l'exposant t indique le tenseur transposé.

La densité de la force volumique associée à ces termes s'écrit :

$$\mathbf{f}_v^{\text{hydrodynamique}} = \nabla \cdot \Pi \quad (2.17)$$

Soit, après simplification (le fluide est supposé isovolume, cf. § 2.4.1) :

$$\mathbf{f}_v^{\text{hydrodynamique}} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla p - \mu \nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (2.18)$$

On observe que les forces visqueuses disparaissent si l'écoulement est supposé irrotationnel.

- La force de gravité :

L'expression de la densité volumique de la force de gravité est donnée par :

$$f_{v,i}^{\text{gravité}} = \rho g_i \quad (2.19)$$

où \mathbf{g} est l'accélération de la gravité supposée constante.

2.1.2.2. Les forces hydrodynamiques de surface

A l'image du traitement effectué au § 2.1.1.2, la densité surfacique des forces hydrodynamiques de pression et de viscosité est également obtenue par le saut normal à l'interface du tenseur des contraintes Π :

$$\mathbf{f}_s^{\text{hydrodynamique}} = \mathbf{n} \cdot (\Pi^{(i)} - \Pi^{(e)}) \quad (2.20)$$

Soit :

$$\mathbf{f}_s^{\text{hydrodynamique}} = \llbracket \mathbf{n} \cdot \Pi \rrbracket \quad (2.21)$$

Après projection de cette équation sur la normale \mathbf{n} , on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_s^{\text{hydrodynamique}} \cdot \mathbf{n} &= \llbracket \mathbf{n} \cdot \left(-p\mathbb{I} + \mu \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t \right) \right) \rrbracket \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{f}_s^{\text{hydrodynamique}} \cdot \mathbf{n} &= \llbracket \mathbf{n} \cdot \left(-p\mathbb{I} + 2\mu \nabla \mathbf{u} + \mu \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega} \right) \rrbracket \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.22)$$

où $\boldsymbol{\omega}$ est le champ tourbillonnaire :

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (2.23)$$

Soit lorsque les écoulements sont irrotationnels :

$$\mathbf{f}_s^{\text{hydrodynamique}} \cdot \mathbf{n} = -p^{(i)} + p^{(e)} + 2\mu^{(i)} \left(\mathbf{n}^{(i)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(i)} \right) \cdot \mathbf{n} - 2\mu^{(e)} \left(\mathbf{n}^{(e)} \cdot \nabla u_n^{(e)} \right) \cdot \mathbf{n} \quad (2.24)$$

A la différence de l'équation volumique (2.18), l'équation surfacique (2.24) montre que les forces visqueuses ne disparaissent pas complètement si l'écoulement est supposé irrotationnel. On constate donc que l'irrotationnalité n'implique aucunement l'absence d'effets visqueux. Il sera donc justifié d'étudier certains effets visqueux avec les modèles irrotationnels qui seront utilisés plus loin. En revanche, ces effets ne seront que partiels et ne peuvent prendre en compte le cisaillement.

Si l'on projette, en revanche (2.21) selon les vecteurs tangents à l'interface \mathbf{t}_α ($\alpha = 1, 2$), on obtient :

$$\mathbf{f}_s^{\text{hydrodynamique}} \cdot \mathbf{t}_\alpha = \llbracket \mathbf{n} \cdot \mu \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t \right) \rrbracket \cdot \mathbf{t}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.25)$$

soit si les écoulements sont irrotationnels :

$$\mathbf{f}_s^{\text{hydrodynamique}} \cdot \mathbf{t}_\alpha = 2\mu^{(i)} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(i)} \cdot \mathbf{t}_\alpha - 2\mu^{(e)} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(e)} \cdot \mathbf{t}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.26)$$

- La tension de surface :

Pour aborder cette force, il est instructif d'examiner le comportement microscopique sous-jacent. A l'intérieur d'un fluide, chaque molécule est entourée de toutes parts par d'autres molécules. Elle est soumise à des interactions, forces attractives dites de cohésion moléculaire, dont la somme est nulle si la symétrie sphérique est respectée. A la surface du fluide, la somme de ces interactions est non nulle. Déformer un objet fluide revient à modifier le rapport entre son volume, constant dans notre cas (fluide isovolume), et l'aire de sa surface. L'énergie dépensée pour augmenter, par exemple, l'aire d'un objet fluide correspond à celle qui est nécessaire pour amener les molécules de l'intérieur vers la surface. En effet, l'aire de la surface ne peut s'accroître qu'aux dépens des molécules qui viennent de l'intérieur (comme illustré par la figure 2.2).

Pour augmenter cette aire, il faut donc fournir du travail entraînant une variation de

l'énergie de l'objet. La grande mobilité des molécules dans les fluides, due à la faiblesse des forces de cohésion, permet une répartition homogène du travail fourni. On peut donc admettre que le travail W de déformation soit proportionnel à la quantité de molécules ramenées à la surface, c'est-à-dire à la variation même ΔS de l'aire S de la surface :

$$W = \gamma \Delta S \quad (2.27)$$

Le facteur γ est un facteur de proportionnalité. Selon le principe des moindres actions, les configurations habituelles d'équilibre correspondent aux états d'énergie minimum et donc les surfaces d'équilibre des fluides doivent être de surfaces à aire minimale. En utilisant la théorie générale des membranes élastiques, Young a proposé d'assimiler l'interface entre deux fluides à une membrane infiniment mince, tendue, de manière que la force exercée sur un élément de ligne située sur l'interface soit perpendiculaire à cet élément et proportionnelle à sa longueur par le facteur γ . Ce facteur ne dépend que de la nature chimique et de la température des deux fluides en présence. Ceci est, par définition, la tension interfaciale d'un fluide en contact de l'autre, appelée *tension de surface* γ .

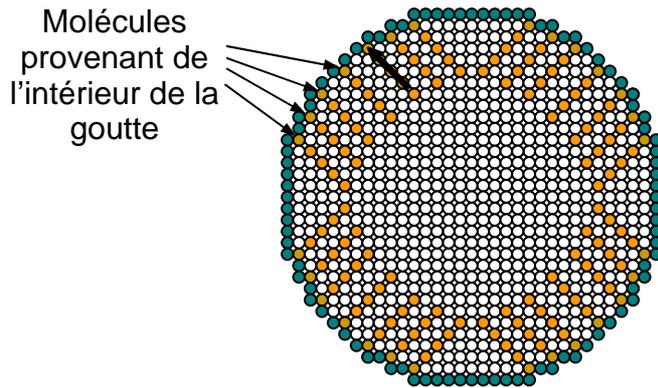


Figure 2.2. Une goutte de fluide (composée d'un grand nombre de molécules) suspendue dans un gaz. Lors de la déformation de la surface de cette goutte (qui entraîne une variation de son aire) des molécules sont ramenées de l'intérieur de la goutte vers cette surface moyennant une quantité d'énergie dépensée.

Plusieurs facteurs peuvent influencer de manière perceptible la tension de surface tels la présence dans les fluides d'agents chimiques appelés *tensio-actifs* (ou surfactants en anglais) ou la variation de la température.

Dans le cas général où la tension de surface varie le long de l'interface, la force de surface \mathbf{f}_s^γ qui lui est associée possède des composantes normale et tangentielles données par :

$$\mathbf{f}_s^\gamma \cdot \mathbf{n} = \gamma \nabla_s \cdot \mathbf{n} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{f}_s^\gamma \cdot \mathbf{t}_\alpha = -\nabla_s \gamma \cdot \mathbf{t}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.29)$$

Le symbole ∇_s est la projection de l'opérateur ∇ (gradient) sur le plan tangent à l'interface, soit :

$$\nabla_s = (\mathbb{I} - \mathbf{nn}) \cdot \nabla \quad (2.30)$$

2.2. Formulation générale des phénomènes électriques

Seront d'abord présentées les équations de l'électromagnétisme sous leur forme la plus générale. Les hypothèses simplificatrices qui entrent dans le cadre des problèmes de microsystemes à traiter ayant été définies, il sera possible de spécifier les nouvelles équations en tenant compte de ces hypothèses. Enfin, les différentes conditions aux limites associées au problème électrique seront précisées.

2.2.1. Equations de Maxwell

Pour un diélectrique quelconque, les équations de Maxwell sont les suivantes, [48, 187],

1. L'induction magnétique \mathbf{B} est solénoïdale (conservation du flux ou encore, insécabilité des pôles magnétiques Nord et Sud), c'est-à-dire qu'il obéit à la relation :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.31)$$

2. La loi de Lenz (ou de Faraday) d'induction électromagnétique, qui corréle la génération du champ électrique \mathbf{E} (ou de la force électromotrice) à la variation de l'induction magnétique \mathbf{B} , s'écrit :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.32)$$

3. La loi de Gauss, exprimant la conservation du flux du champ déplacement électrique \mathbf{D} à travers une surface fermée dû aux charges électriques libres que cette surface renferme, s'écrit sous forme locale :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q \quad (2.33)$$

où q est la densité volumique des charges électriques libres.

4. Le théorème d'Ampère, reliant le champ magnétique au courant électrique qui l'engendre, s'exprime sous la forme différentielle suivante :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.34)$$

où \mathbf{H} est le champ magnétique et \mathbf{j} la densité du courant électrique.

2.2.2. Approximation quasistatique

La première approximation effectuée pour simplifier le traitement des problèmes d'électrohydrodynamique dans les microsystèmes considérés dans notre étude est de supposer que :

1. Le champ électrique obéit à l'approximation quasistatique : une faible interaction entre le champ électrique et le champ magnétique est supposée ;
2. La taille des systèmes étudiés est telle que pour un domaine connexe du même fluide, une variation du champ électrique dans une partie du domaine se fait sentir instantanément dans tout le domaine (pas de retard dans une phase homogène de fluide).

Ces deux hypothèses restent liées. En effet, négliger les variations de l'induction magnétique \mathbf{B} signifie que l'on néglige les effets d'induction magnétique dus aux variations temporelles du champ électromagnétique. En effet, si les électrodes sont alimentées sinusoïdalement, le champ électrique et le champ magnétique dans le liquide diélectrique sont également sinusoïdaux dans le temps. Ces variations du champ magnétique sont à l'origine de la création de courants électriques dans les liquides conducteurs en présence. Ces courants, qui apparaissent en surface, sont appelés *courant de Foucault*. La profondeur de pénétration de ces courants dans la matière est déterminée (pour un conducteur) par l'épaisseur de peau δ définie par [172] :

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu^{\text{magnétique}} \sigma}} \quad (2.35)$$

où f est la fréquence du champ électrique appliqué, $\mu^{\text{magnétique}}$ la perméabilité magnétique du fluide diélectrique (dans notre cas le liquide) et σ sa conductivité électrique, bien entendu. Faire l'approximation quasistatique revient à négliger la présence de courant de Foucault. On montre que l'approximation quasistatique est une hypothèse valable si l'épaisseur de peau δ est plus grande que les dimensions du conducteur. D'après (2.35) on voit que l'épaisseur de peau est d'autant plus petite que la fréquence est grande et/ou que le milieu est conducteur. Les phénomènes d'induction prennent donc effet à haute fréquence et/ou pour les conducteurs. Il convient donc de vérifier l'approximation quasistatique dans le cas des hautes fréquences et des grandes conductivités. Plus les dimensions du système sont petites, plus l'approximation quasistatique est confortée.

Pour les milieux diélectriques, la longueur pertinente est la longueur d'onde de l'onde électromagnétique. Cette longueur d'onde, notée ξ , est donnée par :

$$\xi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0} 2\pi f} \quad (2.36)$$

où c est la vitesse de l'onde électromagnétique dans le vide.

Le tableau 2.1 donne les épaisseurs de peau dans la solution physiologique et dans une solution de Mannitol ($C_6H_{14}O_6$), supposées conductrices, calculées pour différentes fréquences en considérant que ces deux liquides ne sont pas magnétiques ($\mu^{\text{magnétique}} = \mu_r \mu_0$, avec $\mu_r = 1$ et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$).

Tableau 2.1. Variation de l'épaisseur de peau en fonction de la conductivité du tampon et la fréquence du champ électrique appliqué.

Fréquence	Épaisseur de peau δ dans une solution physiologique ($\sigma = 2.5 \text{ S/m}$)	Épaisseur de peau δ dans du Mannitol ($\sigma = 140 \mu\text{S/m}$)	Longueur d'onde ξ ($\varepsilon = 78 \varepsilon_0$)
1 Hz	35.7 cm	47.68 m	5400 km
1 kHz	1.13 cm	1.5 m	5.4 km
10 kHz	3.57 mm	47.7 cm	540 m
100 kHz	1.13 mm	15 cm	54 m
1 MHz	375 μm	4.77 cm	540 cm
10 MHz	113 μm	1.5 cm	54 cm
100 MHz	37.5 μm	4.77 mm	54 mm
1 GHz	11.3 μm	1.5 mm	5.4 mm

Les variations de la longueur d'onde en fonction de la fréquence sont également reportées sur ce tableau, si les solutions sont supposées diélectriques. L'épaisseur de peau δ dans la solution physiologique devient inférieure à 100 μm dès que $f > 10 \text{ MHz}$ (dans les microsystèmes considérés, cette dimension est celle de la distance qui sépare les électrodes). Au-delà de 10 MHz, se développent donc des courants de Foucault non négligeables dans la solution physiologique du fait de sa forte conductivité électrique et des dimensions du système. Le premier effet de ces courants est d'induire des échauffements. Ils peuvent aussi être à l'origine de forces de Lorentz-Laplace qui entraînent le liquide et conduisent à des écoulements magnétohydrodynamiques. Négliger les courants de Foucault dans les solutions physiologiques (souvent très conductrices) est une approximation qui devient plus ou moins discutable dès que l'on travaille à des fréquences supérieures à quelques Méga Hertz. Pour le Mannitol, les courants de Foucault restent sans effet jusqu'au Giga Hertz. Après un rapide tour d'horizon, on voit que l'hypothèse quasistatique reste donc valable pour les microsystèmes dans une large gamme de fréquence. Nous devons cependant garder à l'esprit que l'approximation quasistatique est loin d'être toujours vérifiée, même dans les microsystèmes considérés, notamment

lorsque les tampons biologiques sont fortement conducteurs et les fréquences du champ électrique appliqué élevées. D'autre part, l'approximation quasistatique, en vertu des relations (2.32) et (2.33), implique que le champ électrique satisfait une équation elliptique, dans laquelle le temps n'intervient pas (d'où l'assertion de l'instantanéité de propagation d'une perturbation électrique dans les microsystèmes).

2.2.3. Relations constitutives

Deux relations constitutives sont ajoutées aux équations de Maxwell, à savoir :

1. La proportionnalité entre champ vecteur déplacement \mathbf{D} et champ électrique \mathbf{E} (linéarité du milieu diélectrique) :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.37)$$

ε est la permittivité du milieu qui peut être une quantité notamment tensorielle (dépendant de la direction).

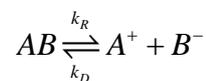
2. La proportionnalité entre densité de courant électrique \mathbf{j} et champ électrique \mathbf{E} (appelé régime ohmique) :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.38)$$

Cette dernière relation constitutive est en fait le résultat de plusieurs approximations qui supposent que :

- i. Les milieux considérés soumis au champ électrique sont en équilibre thermodynamique de sorte que l'électroneutralité est vérifiée localement en volume ; les charges électriques n'existent que sur les frontières et les interfaces fluide-fluide ;
- ii. La conductivité électrique σ de chaque milieu est homogène et isotrope : c'est une quantité scalaire constante pour chaque liquide (supposé isotherme et incompressible).

Pour les approximations (i) et (ii), une explication plus approfondie s'impose. La conductivité d'un liquide (ou d'un fluide, en général) provient de la dissociation-recombinaison et de la migration des porteurs de charge électrique (des ions, en général) dans ce milieu. Pour fixer les idées, supposons qu'il n'existe que deux types de ces porteurs de charge, des cations A^+ et des anions B^- , dans le liquide en équilibre thermodynamique :



où la constante de recombinaison k_R est donnée par :

$$k_R = \frac{K_{A^+} + K_{B^-}}{\varepsilon} \quad (2.39)$$

A l'équilibre thermodynamique, la constante de dissociation k_D est reliée à k_R par :

$$k_D [AB] = k_R [A^+] [B^-] \quad (2.40)$$

Les quantités $[A^+]$ et $[B^-]$ sont exprimées en C/m^3 . La conductivité électrique σ du liquide est reliée aux concentrations via la relation :

$$\sigma = (K_{A^+} [A^+] + K_{B^-} [B^-]) q_e \quad (2.41)$$

où K_{A^+} et K_{B^-} sont les mobilités des porteurs de charges A^+ et B^- , respectivement, et définissent la facilité avec laquelle ces porteurs se déplacent dans le liquide. La mobilité dépend faiblement de la nature du porteur de charge mais varie, en première approximation, en raison de l'inverse de la viscosité du liquide dans lequel il se meut. q_e est la charge électrique de l'électron.

Au voisinage des électrodes, les porteurs de charge ne sont plus en situation d'électroneutralité et se manifeste une variation propre de chacune de leur concentration comme indiqué par la figure 2.3. En présence de charges libres portées par une collection d'ions indicés i , la densité de courant \mathbf{j} est définie, de manière générale, par :

$$\mathbf{j} = \sum_{\substack{i \text{ porteurs} \\ \text{de charge}}} q_{v,i} \mathbf{u} + K_i q_{v,i} \mathbf{E} - D_i \nabla q_{v,i} \quad (2.42)$$

(où \mathbf{u} est la vitesse du fluide, K_i et D_i la mobilité et la diffusivité, respectivement du porteur de la charge $q_{v,i}$).

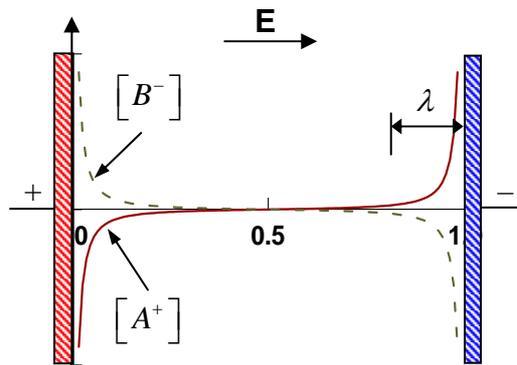


Figure 2.3. Variation de la concentration des porteurs de charges dans le liquide. Cette variation entraîne une modification de la conductivité électrique du liquide jusqu'à une distance $\lambda = \max(\lambda_c, \lambda_d)$ aux électrodes.

A cause de cette non uniformité, l'approximation d'une conductivité du liquide σ donnée n'est plus valable. Deux distances caractéristiques sont mises en jeu : la distance de migration des porteurs de charges, notée λ_c , est de l'ordre de, [48],

$$\lambda_c = KE\tau \quad (2.43)$$

et la distance de diffusion, appelée longueur de Debye, notée λ_D , de l'ordre de, [48],

$$\lambda_D = \sqrt{D\tau} \quad (2.44)$$

où K et D sont la mobilité et le coefficient de diffusion de l'un des porteurs de charges (A^+ et B^-) et τ leur temps de relaxation. Ce temps est donné par :

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad (2.45)$$

σ est la conductivité du liquide.

En fonction de la valeur de λ_c et de λ_D , par rapport à la taille du dispositif d'électrodes, nous pouvons admettre ou pas la recevabilité de l'approximation ohmique. Cette analyse est présentée au paragraphe suivant.

2.2.4. Hypothèses supplémentaires du modèle électrique

Pour les liquides polaires, ou la polarisation résulte principalement de l'orientation des moments dipolaires de chaque molécule, la polarité a un certain retard par rapport au champ électrique \mathbf{E} . L'hypothèse de colinéarité du vecteur déplacement \mathbf{D} et du champ électrique \mathbf{E} suppose en réalité l'absence de dissipation d'énergie par polarisation (pertes diélectriques) mais aussi la petitesse relative du champ \mathbf{E} . Or une des formes d'échauffement d'un fluide diélectrique provient des frictions générées entre les molécules du fluide diélectrique polaire. Ce comportement se produit à très haute fréquence, quand les moments dipolaires n'arrivent plus à suivre le champ électrique excitateur. Pour l'eau, cette fréquence critique est de l'ordre de 3 GHz. Pour que la relation (2.37) soit applicable, il est donc impératif que la fréquence du champ électrique soit inférieure à cette valeur critique.

Au paragraphe 2.2.1., nous avons supposé que la conduction des fluides était supposée obéir à la loi d'Ohm. Nous tentons ici de justifier cette hypothèse. En effet, dans nos applications, deux situations se distinguent :

- La première est celle où le fluide est de l'eau :

- Si elle est pure (auquel cas $(A^+, B^-) = (H_3O^+, OH^-)$) la mobilité des ions vaut $K_{H_3O^+} \sim K_{OH^-} \approx 2 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{V.s}$ et leur diffusivité $D_{H_3O^+} \sim D_{OH^-} \approx 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$. Pour $E = 10^4 \text{ V/m}$, $\sigma = 10^{-5} \text{ S/m}$ et $\varepsilon = 80\varepsilon_0$ on trouve $\tau \sim 10^{-4} \text{ s}$, $\lambda_c \sim 2 \times 10^{-13} \text{ m}$ et $\lambda_D \sim 1 \mu\text{m}$. Dans les microsystèmes où la distance entre électrodes est largement supérieure au micron, l'approximation d'une conductivité donnée est valable et l'électroneutralité vérifiée, sinon il faut tenir compte des équations de conservation de chaque espèce ionique pour pouvoir relier la densité du courant \mathbf{j} au champ électrique \mathbf{E} . Les régions pour lesquelles la constance de la conductivité et l'électroneutralité de l'eau ne sont pas vérifiées sont de minces couches sur les électrodes.
- Dans ce cas d'une eau salée, la totalité du sel AB (NaCl par exemple) est dissociée. Pour $\sigma = 1 \text{ S/m}$, $K_{Na^+} \sim K_{Cl^-} \approx 2 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{V.s}$ et $D_{Na^+} \sim D_{Cl^-} \approx 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$, on trouve $\tau \sim 10^{-9} \text{ s}$, $\lambda_c \sim 10^{-10} \text{ m}$ et $\lambda_D \sim 10^{-9} \text{ m}$. Ces distances sont totalement négligeables devant la taille des microsystèmes en question si bien que nous considérons l'approximation de la conductivité du liquide valable et l'électroneutralité satisfaite partout ($f \ll 1 \text{ GHz}$).
- Pour une huile, des traces d'impuretés (sels) qui sont très faiblement dissociés maintiennent une très faible conductivité. En appliquant un champ électrique $E = 10^5 \text{ V/m}$, avec une conductivité de l'huile $\sigma = 10^{-10} \text{ S/m}$, une permittivité $\varepsilon = 2\varepsilon_0$ et des mobilités d'ions $K \sim 10^{-9} \text{ m}^2/\text{V.s}$, le temps de relaxation vaut $\tau \approx 0.2 \text{ s}$, $\lambda_c \approx 2 \times 10^{-5} \text{ m} = 20 \mu\text{m}$ et $\lambda_D \approx 2 \times 10^{-6} \text{ m} = 2 \mu\text{m}$. Dans les microsystèmes (dont la distance entre électrodes est de l'ordre de $100 \mu\text{m}$) et en régime électrique continu, quand le liquide est très peu conducteur, l'électroneutralité n'est pas toujours vérifiée et la validité de l'approximation de la conductivité du liquide est remise en cause. Dans ces cas, il est indispensable de tenir compte des équations de conservation de toutes les espèces ioniques mises en jeu. Une exception peut être faite pour les champs électriques alternatifs pour lesquels la période $T \ll \tau$ auquel cas les porteurs de charge n'auront qu'un laps de temps égal à $T/2$ pour migrer. Dans les mêmes

conditions que précédemment, une fréquence du champ de 50 Hz, les ions ne parcourent qu'une distance égale à $\lambda = KET/\pi \approx 1 \mu\text{m}$. L'épaisseur de la zone où une charge d'espace peut exister ne peut pas excéder cette distance λ ; l'électroneutralité est vérifiée et l'approximation de la conductivité du liquide est valable dans la quasi-totalité de l'espace entre électrodes (pourvu que $d \gg 1 \mu\text{m}$).

Dans la suite, nous supposons l'électroneutralité vérifiée en volume quelle que soit le régime électrique.

2.2.5. Equations électriques et solutions asymptotiques

Deux classes de solutions électriques asymptotiques, ou régimes d'équilibre, vont jouer un rôle essentiel dans notre étude : le régime permanent et le régime sinusoïdal. Une solution asymptotique est une solution vers laquelle tend le système une fois que les effets transitoires se sont évanouis. Dans les problèmes d'EHD que nous aurons à traiter, les échelles de temps seront essentiellement fournies par les effets hydrodynamiques qui sont les plus lents. Ces derniers pilotent donc les évolutions des systèmes considérés tandis que les phénomènes électriques, qui sont beaucoup plus rapides, s'adaptent quasi instantanément à ces évolutions. C'est en ce sens que les solutions asymptotiques ci-dessus évoquées sont importantes et suffisent à décrire les aspects électriques. Ainsi le régime quasipermanent est utile pour décrire des stimulations électriques *continues* tandis que le régime sinusoïdal est utile pour décrire des stimulations électriques *alternatives*.

2.2.5.1. Le régime quasipermanent

Ce régime fait référence expérimentalement au cas où l'on applique une rampe de tension avant d'atteindre une valeur finale donnée. L'absence d'interaction entre le champ électrique et le champ magnétique implique :

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.46)$$

Le champ électrique devenant irrotationnel, il dérive d'un potentiel, appelé potentiel électrique V , soit :

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2.47)$$

L'hypothèse 3 de linéarité électrique des fluides implique :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.48)$$

L'introduction de cette équation dans la loi de Gauss (2.33) conduit, avec l'électroneutralité, à :

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla V) = 0 \quad (2.49)$$

Puisque les propriétés électriques de chaque fluide k sont constantes, l'équation (2.49) devient :

$$\nabla^2 V^{(k)} = 0 \quad (2.50)$$

2.2.5.2. Le régime sinusoïdal

Pour le régime électrocinétique stationnaire, les champs électriques sont supposés osciller à la même fréquence f que celle de la tension d'excitation appliquée. Nous établirons plus loin une condition nécessaire et suffisante pour que cette hypothèse supplémentaire soit vérifiée. En adoptant la notation complexe, les champs électriques sont fonction du temps par une forme en $e^{j\omega t}$ ($j^2 = -1$ et $\omega = 2\pi f$) :

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left[\bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t} \right] \quad (2.51)$$

$$V = \text{Re} \left[\bar{V} e^{j\omega t} \right] \quad (2.52)$$

où les quantités $\bar{\mathbf{E}} = (\bar{E}_x, \bar{E}_y, \bar{E}_z)$, \bar{V} sont complexes qui incluent l'amplitude et le déphasage (par rapport à la phase du champ électrique exciteur) des quantités physiques réelles qui leur correspondent. Il découle que :

$$\bar{\mathbf{E}} = -\nabla \bar{V} \quad (2.53)$$

En tenant compte des hypothèses 2 et 3, et en prenant la divergence de l'équation (2.34), la loi d'Ampère s'écrit :

$$\nabla \cdot \left(\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \quad (2.54)$$

Si l'on introduit l'expression complexe du champ électrique dans cette dernière équation, on trouve :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{j}} = 0 \quad (2.55)$$

où

$$\bar{\mathbf{j}} = \bar{\sigma} \bar{\mathbf{E}} \quad (2.56)$$

et

$$\bar{\sigma} = \sigma + j\omega\varepsilon \quad (2.57)$$

$\bar{\mathbf{j}}$ est appelé vecteur densité de courant complexe et $\bar{\sigma}$ la conductivité complexe.

La combinaison de (2.53) et de (2.55) implique finalement :

$$\nabla \cdot (\bar{\sigma} \nabla \bar{V}) = 0 \quad (2.58)$$

Au sein de chaque fluide, la conductivité et la permittivité sont uniformes. Ceci implique :

$$\nabla^2 \bar{V}^{(k)} = 0 \quad \text{pour chaque fluide } k \quad (2.59)$$

Bien que le traitement se fasse à valeurs réelles pour le régime permanent et à valeurs complexes pour le régime sinusoïdal, les équations à résoudre restent formellement identiques. Le champ électrique appliqué est sinusoïdal, mais la linéarité des équations de Maxwell permet d'étendre cette formulation pour n'importe quelle forme d'un signal périodique.

2.2.6. Conditions aux limites électriques

Trois types de conditions aux limites peuvent être rencontrés :

1. Un potentiel électrique imposé : ce sont les électrodes que l'on considère infiniment conductrices ;
2. Une composante normale du champ électrique nulle : ce sont des frontières parfaitement isolantes ;
3. Une troisième forme de conditions aux limites, valable aux interfaces entre deux milieux, exprime la loi de Gauss et la loi d'Ampère écrites à ces interfaces. Cette condition s'écrit de manière différente, selon que le régime électrique est permanent ou sinusoïdal.

2.2.6.1. Conditions aux interfaces en régime électrostatique quasipermanent

Pour ce régime, la loi de Gauss (2.33) s'écrit au niveau de l'interface :

$$\llbracket \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \rrbracket = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}^{(i)} - \mathbf{D}^{(e)}) = q_s \quad (2.60)$$

La loi d'Ampère formulée en tenant compte du mouvement de l'interface s'écrit, quant à elle, sous la forme générale suivante, [50, 261],

$$\frac{D^{(s)} q_s}{Dt} + u_n (\nabla \cdot \mathbf{n}) q_s + q_s \nabla_s \cdot \mathbf{u}_s + \nabla_s \cdot \mathbf{K}_s - \llbracket \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \rrbracket = 0 \quad (2.61)$$

où

$$\frac{D^{(s)}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla_s \quad (2.62)$$

et

$$\mathbf{K}_s = -D_s \nabla_s q_s \Big|_{\text{interface}} \quad (2.63)$$

D_s représente la diffusivité des charges électriques à l'interface, $u_n \mathbf{n}$ et \mathbf{u}_s la vitesse normale et tangentielle à l'interface, respectivement.

L'équation d'évolution (2.61) est utilisée comme première condition à l'interface, en plus de l'équation de continuité du potentiel électrique, qui découle de la continuité de la composante tangentielle du champ électrique :

$$V^{(i)} \Big|_{\text{interface}} = V^{(e)} \Big|_{\text{interface}} \quad (2.64)$$

Pour le moment, le terme transitoire, dans l'équation d'évolution de la charge à l'interface, est conservé. Nous verrons par la suite dans quelles configurations d'EHD ce terme est négligeable ou pas. En fonction de ce choix, nous obtiendrons des variantes de la méthode de résolution comme indiqué au chapitre 3.

2.2.6.2. Conditions aux interfaces en régime électrostatique sinusoïdal

Dans le cas du régime sinusoïdal, un traitement de l'équation (2.55), similaire à celui effectué à la section précédente, implique l'équation suivante :

$$\llbracket \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{j}} \rrbracket = 0 \quad (2.65)$$

Soit :

$$\mathbf{n} \cdot (\bar{\mathbf{j}}^{(i)} - \bar{\mathbf{j}}^{(e)}) = 0 \quad (2.66)$$

A travers une interface, susceptible d'être le lieu d'accumulation de charges électriques libres, la composante normale du vecteur densité de courant complexe se conserve. Notons que le vecteur densité de courant complexe comprend les contributions de la polarisation et de la conduction des milieux. De même que précédemment, est assurée la continuité du potentiel électrique complexe \bar{V} à travers l'interface :

$$\bar{V}^{(i)} \Big|_{\text{interface}} = \bar{V}^{(e)} \Big|_{\text{interface}} \quad (2.67)$$

2.3. Formulation générale des phénomènes hydrodynamiques

2.3.1. Equations dans le domaine

Les écoulements considérés concernent plusieurs milieux fluides en présence. Les fluides possèdent les propriétés suivantes :

1. Ce sont des fluides isovolumes (incompressibles et indilatables) : la masse volumique ρ de chaque élément fluide est supposée constante au cours du mouvement de cet élément. Cette constance se traduit par :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u_k \partial_k \rho = 0 \quad (2.68)$$

2. Dans le cas d'une goutte, les fluides sont non miscibles : la frontière qui sépare les deux fluides (l'interface) est imperméable. Bien que ces interfaces soient susceptibles de se déplacer, aucune masse n'est autorisée à les traverser. Ces interfaces deviennent de cette manière matérielles. Le changement de phase, par exemple, ne peut être traité par l'approche décrite dans ce cadre ;

3. Les interfaces fluide-fluide (pour une goutte) sont dotées d'une tension de surface constante (absence d'écoulement le long de l'interface dû au gradient de concentration de surfactants ou de température, communément appelé effet Marangoni).

En plus de ces hypothèses, d'autres hypothèses complémentaires sont faites sur l'écoulement des fluides, à savoir qu'il est :

4. Laminaire : dû aux tailles micrométriques, aucun effet de turbulence (fluctuations de vitesse et de pression) n'est supposé se produire ;
5. Isotherme. A cause de cette hypothèse, il n'est pas tenu compte du bilan énergétique dans la description de l'écoulement et par ceci les propriétés mécaniques et électriques des fluides sont supposées indépendantes de la température.

En vertu de l'équation (2.68), l'équation de conservation de la masse suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.69)$$

devient :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.70)$$

En imposant l'équilibre entre les différentes densités volumiques des forces hydrodynamiques (inertie, (2.13), pression et viscosité, (2.18)) et électriques (de Coulomb, (2.3) et diélectrique, (2.8)) collectées, l'expression standard de l'équation de Navier-Stokes en régime incompressible est obtenue :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p - \rho \mathbf{g} - \mu \nabla \times \boldsymbol{\omega} + q_v \mathbf{E} - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \nabla \varepsilon \quad (2.71)$$

Or, pour un système isotherme, les fluides sont électriquement neutres et la permittivité est uniforme ce qui implique :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} - \mu \nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (2.72)$$

2.3.2. Equations aux frontières

Une principale occurrence se présente lors du traitement des phénomènes régis par l'électrohydrodynamique, selon que le temps propre au phénomène électrique est largement inférieur au temps hydrodynamique ou non. La première implique un découplage entre les équations électrique et hydrodynamique. Ceci suppose en lui-même deux hypothèses subordonnées :

1. à frontières fixes, le champ électrique n'est fonction que de la géométrie des interfaces à chaque instant ; la distribution du champ électrique et des charges est supposée établie à chaque instant ;
2. l'entraînement des charges électriques, au niveau des interfaces est négligeable par rapport aux effets de conduction aux interfaces.

Deux types de frontières sont traités dans le présent cadre. Le premier type regroupe toutes les frontières solides du domaine. Le second n'est autre que les interfaces fluide-fluide susceptibles de se déformer sous l'effet du champ électrique et de l'écoulement.

2.3.2.1. Conditions aux limites sur les frontières solides

Une condition purement cinématique (résultant de la conservation du débit de masse) peut être appliquée à ces frontières. En effet, puisqu'elles sont supposées imperméables une vitesse normale nulle est imposée à ces frontières, soit :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\text{frontière solide}} = 0, \quad \mathbf{n} \text{ normale à la frontière} \quad (2.73)$$

Une condition d'adhérence est rajoutée, empêchant le glissement relatif de la couche du fluide en contact avec la paroi. Cette condition se traduit par :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \Big|_{\text{frontière solide}} = 0, \quad \mathbf{t} \text{ tangente à la frontière} \quad (2.74)$$

2.3.2.2. Conditions aux limites sur les interfaces

A cause de la déformation de l'interface, d'autres conditions doivent être précisées. La première est cinématique (conservation du débit) alors que la deuxième est dynamique (équilibre des forces). La condition cinématique résulte du caractère imperméable de l'interface. Ceci se traduit par :

$$[[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]] = 0 \quad (2.75)$$

$$\mathbf{u}^{(i)} \cdot \mathbf{n}^{(i)} \Big|_{\text{interface}} = \mathbf{u}^{(e)} \cdot \mathbf{n}^{(e)} \Big|_{\text{interface}} \quad (2.76)$$

La deuxième condition est due à l'absence de glissement relatif entre les couches adjacentes des fluides (effet de la viscosité) :

$$[[\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}]] = 0 \quad (2.77)$$

$$\left(\mathbf{u}^{(i)} - \mathbf{u}^{(e)} \right) \cdot \mathbf{t} \Big|_{\text{interface}} = 0 \quad (2.78)$$

La condition dynamique est déduite du bilan normal de quantité de mouvement à l'interface, qui s'écrit (en équilibrant (2.11), (2.24) et (2.28)) :

$$p^{(e)} - p^{(i)} = 2\mu^{(e)} \frac{\partial v_n^{(e)}}{\partial n} - 2\mu^{(i)} \frac{\partial v_n^{(i)}}{\partial n} + \varepsilon^{(e)} \left((E_n^{(e)})^2 - (E_t)^2 \right) - \varepsilon^{(i)} \left((E_n^{(i)})^2 - (E_t)^2 \right) + 2H\gamma \quad (2.79)$$

où $2H = -\nabla_s \cdot \mathbf{n}$. A ce niveau, les forces électriques aux interfaces vont déterminer les déformations des interfaces.

De même, en équilibrant (2.12), (2.26) et (2.29), on obtient la projection tangentielle du bilan de quantité de mouvement à l'interface, soit :

$$q_s E_{t_\alpha} + 2\mu^{(i)} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(i)} \cdot \mathbf{t}_\alpha - 2\mu^{(e)} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(e)} \cdot \mathbf{t}_\alpha - \nabla_s \gamma \cdot \mathbf{t}_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.80)$$

2.4. Modèles EHD de particules, solide ou liquide, sous champ électrique

Le traitement du problème électrohydrodynamique d'une particule solide dans un liquide est plus simple que celui d'une goutte déformable. Dans le cas d'une particule solide (biologique ou autre) de forme classique (sphérique ou ellipsoïdale), les lois du mouvement d'un corps rigide permettent de relier les forces électriques au déplacement. Pour ce qui est des gouttes de liquide, un traitement de la mécanique des fluides plus approfondi est nécessaire pour déterminer la forme et le déplacement de ces dernières.

2.4.1. Modèle pour une particule solide en mouvement

Dans le cas d'une particule rigide immergée dans un tampon au repos, nous disposons de la force électrique qui agit sur cette dernière. L'adimensionnalisation de l'équation de Navier-Stokes par le diamètre de la particule d et une vitesse caractéristique U , donne :

$$\left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} \right) = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + Fr \tilde{\mathbf{e}}_z + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} \quad (2.81)$$

Les quantités en « $\tilde{}$ » sont adimensionnelles. $Fr = \frac{g}{dU}$, $Re = \frac{\rho U d}{\mu}$, sont le nombre de

Froude et le nombre de Reynolds, respectivement. E_0 est l'intensité du champ électrique de référence. Le nombre de Reynolds exprime le rapport des forces d'inertie sur les forces visqueuses. Dans le cadre des microsystèmes, où la vitesse U est de l'ordre de quelques centaines de micromètres par seconde et la taille d des particules de la dizaine de micromètres, le nombre de Reynolds est au plus de l'ordre de 0.1. La petitesse du nombre de Reynolds permet de supposer que la translation de la particule se fait dans un régime d'écoulement rampant (appelé aussi de Stokes) [126]. Dans ce type d'écoulement, l'équation (2.81) se simplifie en :

$$-\tilde{\nabla}\tilde{p} + Fr\tilde{\mathbf{e}}_z + \frac{1}{Re}\tilde{\nabla}^2\tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.82)$$

En tenant compte des conditions d'imperméabilité et de non glissement (2.76) et (2.78), l'équation (2.82) est résolue analytiquement pour un ellipsoïde de révolution dans un domaine infini. La force hydrodynamique appliquée sur des corps indéformables axisymétriques est ainsi déduite. Cette force, appelée force de traînée de Stokes, est donnée par l'expression [303]:

$$\mathbf{F}^{\text{Stokes}} = -6\pi k \mu^{(e)} R \mathbf{U} \quad (2.83)$$

où le facteur de proportionnalité k est fonction uniquement de la forme de la particule et R est tel que :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = Vol_{\text{Particule}} \quad (2.84)$$

où $Vol_{\text{Particule}}$ est le volume de la particule.

S'il s'agit d'un ellipsoïde aplati, ce facteur vaut :

$$k = \frac{4}{3\sqrt{\lambda_0^2 + 1} \left(\lambda_0 - (\lambda_0^2 - 1) \arctan(\lambda_0) \right)}, \quad \lambda_0 = \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} \quad (2.85)$$

pour un ellipsoïde allongé, il devient :

$$k = \frac{4}{3\sqrt{\tau_0^2 - 1} \left((\tau_0^2 + 1) \arg \coth(\tau_0) - \tau_0 \right)}, \quad \tau_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (2.86)$$

alors que pour la sphère :

$$k = 1 \quad (2.87)$$

La force électrique totale appliquée sur le corps solide est, quant à elle, déduite directement de la densité surfacique de la force électrique donnée par (2.11) et (2.12).

2.4.2. Modèle pour une goutte de liquide en mouvement

La déformation qu'implique le mouvement des gouttes de liquide nécessite un traitement spécifique. Parmi les approches les plus élémentaires, il existe l'approche des écoulements irrotationnels [202-206] : la mise en mouvement, supposée impulsionnelle, n'implique ni les contraintes de cisaillement ni la diffusion de vorticité près des parois et interfaces. Cette hypothèse sera retenue dans le chapitre 5 où il est question de déformation. Elle se traduit par :

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad (2.88)$$

Donc l'équation (2.72) devient :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (2.89)$$

Or

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u}^2) - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \quad (2.90)$$

Vu l'équation (2.88), l'équation (2.89) se simplifie en l'équation d'Euler :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u}^2) \right) = -\nabla p + \nabla (\rho g z) \quad (2.91)$$

L'irrotationnalité (équation (2.88)) implique aussi que la vitesse \mathbf{u} dérive d'un potentiel hydrodynamique φ , soit :

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi \quad (2.92)$$

L'introduction de cette expression dans l'équation (2.70) implique :

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (2.93)$$

alors que dans l'équation (2.89), cela implique :

$$\rho \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (2.94)$$

A cause de l'hypothèse d'irrotationnalité de l'écoulement, il n'est plus possible de satisfaire les conditions de non glissement (2.74) et (2.78) aux parois solides et aux interfaces. Seul les conditions d'imperméabilité (2.76) et (2.78) sont retenues dans le modèle. Ceci suppose donc que le glissement de fluide le long de ces frontières soit admis par le modèle en développement. Ce choix a été dicté par la contrainte de l'outil numérique CANARD basé sur la Méthode Intégrale aux Frontières (MIF) qui ne permet pas de tenir compte des conditions autres que normales aux frontières. Nous évoquerons cependant dans chaque application (chapitre 3, 4 et 5) des arguments qui plaideront en faveur ou, au contraire, en défaveur à cette hypothèse *a priori* restrictive. L'hypothèse d'irrotationnalité de l'écoulement ne permet pas non plus de tenir compte des bilans tangentiels de quantité de mouvement (2.80) (que la tension de surface soit constante ou non).

2.4.2.1. Equation d'Euler en régime électrostatique quasipermanent

L'intégration spatiale de l'équation (2.94) conduit à :

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{u}^2) + p - \rho g z = C(t) \quad (2.95)$$

Notons que le potentiel hydrodynamique φ ne représente qu'une variable intermédiaire qui ne revêt aucune signification physique si ce n'est son gradient spatial (qui représente la vitesse de l'écoulement \mathbf{u}). De ce fait, la constante $C(t)$ peut être prise d'une manière

complètement arbitraire sans influencer pour autant le champ de vitesse. Pour cela, on supposera cette fonction du temps identiquement nulle :

$$C(t) \equiv 0 \quad (2.96)$$

L'équation (2.95) devient :

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{u}^2) + p - \rho g z = 0 \quad (2.97)$$

Puisque :

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u}^2 \quad (2.98)$$

Il vient :

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 - \frac{1}{\rho} p + g z \quad (2.99)$$

2.4.2.2. Equation d'Euler en régime électrostatique sinusoïdal

Dans cette situation, on peut écrire, d'après (2.33) et (2.51) :

$$\begin{aligned} q &= \varepsilon (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \varepsilon \left(\nabla \cdot \operatorname{Re} \left[\bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t} \right] \right) \\ &= \varepsilon \left(\operatorname{Re} \left[(\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}}) e^{j\omega t} \right] \right) \end{aligned}$$

or, selon (2.55), au sein de chaque fluide, nous avons :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}} = 0$$

Ce qui implique :

$$q = 0$$

Ceci est un résultat bien connu en électromagnétisme ; en régime électrocinétique stationnaire les charges électriques libres n'apparaissent qu'au niveau des interfaces. Ceci implique une équation d'évolution temporelle du potentiel hydrodynamique φ identique au cas électrostatique dans lequel nous imposons d'emblée l'absence totale de charges électriques volumiques, c'est-à-dire que l'équation (2.99) demeure tout aussi valable.

Chapitre 3 : Méthodes de résolution

Est exposée d'abord dans ce chapitre la méthode du Dipôle Ponctuel qui permet de calculer la force DEP par une approche simplifiée. Ensuite, les deux méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations électrique et hydrodynamique, à savoir la Méthode Intégrale aux Frontières (MIF) et la Méthode des Eléments Finis (MEF), sont présentées.

Dans la section 3.1 la méthode du Dipôle Ponctuel est présentée ainsi que son extension à la méthode multipolaire. L'utilisation de la méthode du Dipôle Ponctuel est très répandue pour obtenir des ordres de grandeurs des forces DEP appliquées à des particules rigides de faible taille. Toutefois cette méthode se révèle insuffisante si la taille des particules considérées est non négligeable devant l'échelle typique des dispositifs dans lesquels elles se meuvent. Quand l'approximation du dipôle ponctuel devient insuffisante, il est légitime de faire appel à des méthodes numériques adaptées, la MEF et la MIF en l'occurrence. Ces deux méthodes sont présentées aux sections 3.2 et 3.3, respectivement.

Les problèmes que nous examinons dans le présent manuscrit concernent le mouvement d'une particule rigide et la déformation et/ou la mise en mouvement de gouttes de liquide sous l'influence du champ électrique. Dans le cas de gouttes non chargées (neutres), ces deux effets (déformation pure et déformation avec déplacement) sont issus de champs électriques différents. En effet, la déformation de gouttes neutres se produit sous l'action d'un champ électrique extérieur uniforme tandis que le déplacement n'a lieu que si le champ électrique appliqué est non uniforme. Dans le premier cas, aucun déplacement n'est possible, dans le deuxième, la déformation est accompagnée d'un déplacement. De la même manière, le déplacement des particules rigides n'est envisageable que sous un champ électrique non uniforme.

Deux configurations classiques sont reprises dans ce travail pour recouvrer ces deux situations (voir figure 3.1). La première configuration est un système d'électrodes planes, afin d'engendrer un champ électrique uniforme. Ce type de géométrie, qui respecte la symétrie équatoriale, est utilisé pour produire des déformations étudiées de manière assez complète dans la littérature [23, 124, 171, 193]. C'est une étape nécessaire pour la

validation du modèle numérique proposé. La seconde configuration est un système pointe-plan qui engendre un champ variable dans l'espace. Cette configuration, qui rompt la symétrie équatoriale, est plus proche de notre préoccupation de détermination du comportement de gouttes et particules rigides soumises à la force DEP dans les microsystèmes.

La résolution du problème EHD associé à la déformation et au déplacement de gouttes et au déplacement pur des particules rigides sous champ électrique s'effectue soit directement sur les équations différentielles, auquel cas est utilisée la formulation des Eléments Finis (MEF), soit au travers d'une formulation entièrement intégrale via la Méthode Intégrale aux Frontières (MIF) qui, pour ce faire, nécessite des développements supplémentaires comme décrit à la section 3.3.

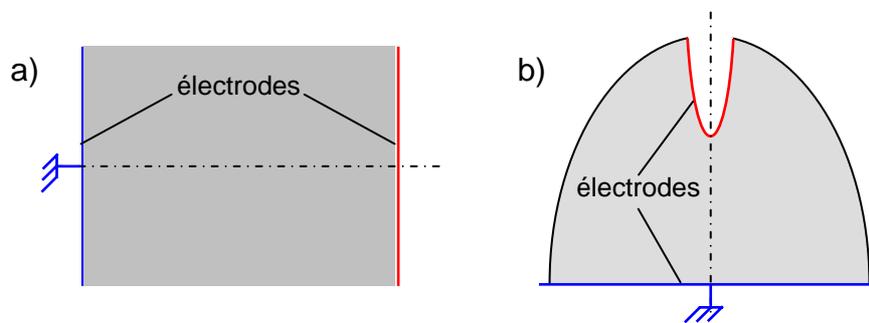


Figure 3.1. Les deux configurations utilisées pour simuler a) le champ uniforme, grâce à un système d'électrodes planes et b) un champ non uniforme, issu d'un système point-plan.

3.1. Le modèle du dipôle ponctuel

Le modèle le plus communément utilisé pour le calcul de la force DEP appliquée à une particule de faible taille est le modèle du dipôle ponctuel. A cause de l'existence de formules analytiques pour la force DEP dans ce cas, cette approche est réputée simple et directe. La particule est supposée équivalente à un dipôle ponctuel qui ne perturbe pas le champ électrique à son voisinage.

3.1.1. Notion générale de dipôle ponctuel

Considérons une paire de charges électriques égales et opposées (+q et -q) situées à une faible distance l'une de l'autre et placées dans un champ électrique non uniforme $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ comme illustré par la figure 3.2. Cette paire de charges électriques est appelée dipôle électrique. La force \mathbf{F}^{DP} qui s'exerce sur ce dipôle est la résultante des forces appliquées sur chacune de ses charges, soit :

$$\mathbf{F}^{\text{DP}} = q\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{d}) - q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.1)$$

En première approximation, on peut écrire, par développement limité :

$$\mathbf{F}^{\text{DP}} = q(\mathbf{d} \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \cdot (\nabla\mathbf{E}(\mathbf{r})) \quad (3.2)$$

où $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ est appelé moment du dipôle.

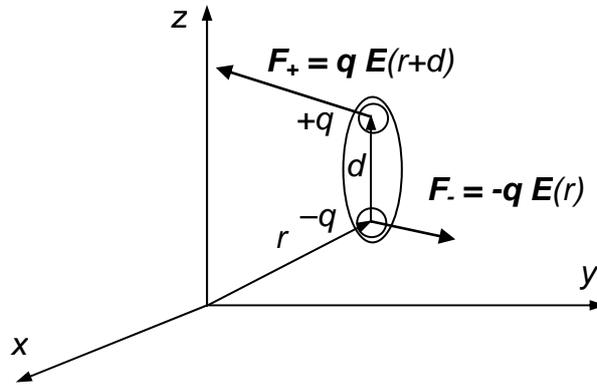


Figure 3.2. Schématisation d'un dipôle électrique : deux charges égales et opposées dans un champ électrique non uniforme. La force nette qui leur est appliquée n'est pas nulle

De même, le couple exercé est égal à la contribution des moments des forces appliquées sur chaque charge :

$$\mathbf{T}_{\text{dip}} = \frac{1}{2}\mathbf{d} \times q\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{d}) - \frac{1}{2}\mathbf{d} \times (-q)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = q\mathbf{d} \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (3.3)$$

Quelques remarques se dégagent dès à présent.

- Le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ est bien le champ électrique total, c'est-à-dire, compte tenu de la contribution du champ électrique extérieur (sous-entendu sans présence du dipôle) et du champ électrique engendré par le dipôle.
- La force ainsi engendrée, est due à la présence d'un gradient de \mathbf{E} . Si le champ est uniforme, cette force est identiquement nulle ; la diélectrophorèse est un phénomène associé donc uniquement à des champs électriques non uniformes.
- La loi donnant l'expression de la force diélectrophorétique n'est plus valable si le champ (total) varie substantiellement sur une échelle comparable à la taille du dipôle (\mathbf{d}), auquel cas il faudra tenir compte des termes d'ordre supérieur pour le développement de Taylor du champ électrique \mathbf{E} au voisinage de \mathbf{r} .
- En première approximation, le couple \mathbf{T} est présent même pour un champ uniforme. Ceci est dû à la nature du dipôle.
- La loi relative au couple n'est valable de même que si \mathbf{E} ne varie que peu entre \mathbf{r} et $\mathbf{r} + \mathbf{d}$. Autrement, on utilisera comme pour l'estimation de la force, des termes d'ordre supérieur pour le développement de \mathbf{E} au voisinage de \mathbf{r} .

3.1.2. Les diélectriques avec et sans pertes (parfaits et réels, respectivement)

Dans les équations (3.2) et (3.3), l'expression que prend le moment \mathbf{p} du dipôle n'est pas précisée. En effet, le moment dipolaire \mathbf{p} peut être un moment dipolaire permanent de molécules polaires ou de particules auto-polarisées, ou induit par le champ électrique extérieur.

L'examen de l'expression de la force telle que donnée par (3.2) permet de mettre au point une approche efficace pour le calcul de cette force ; l'effet de la particule ne s'exerce qu'à travers le moment dipolaire \mathbf{p} alors que le gradient du champ électrique $\nabla\mathbf{E}$ n'est dû, quant à lui, qu'au champ électrique extérieur. Cette approche permet donc de calculer le moment du dipôle ponctuel puis de déduire la force et le couple en post-traitement. Cette méthode de calcul des moments dipolaires effectifs fournit des résultats valables pour des cas où l'obtention de résultats rigoureux fondés sur le tenseur de Maxwell s'avère difficile, voir inconcevable analytiquement. Cette démarche reste correcte tant que les points cités plus haut sont bien entendu observés. Si la taille du dipôle devient non négligeable devant la taille du système d'électrodes qui engendre le champ électrique (par exemple, dans les microsystèmes biologiques) le modèle du dipôle ponctuel ne donnera que des résultats très approximatifs. On se rabattra alors sur la méthode générale du tenseur de Maxwell qui implique des approches numériques.

3.1.2.1. Moment dipolaire induit pour une sphère

Une particule immergée dans un fluide diélectrique est soumise à un champ électrique uniforme (figure 3.3). Ce champ va polariser la particule et induire un moment dipolaire. Par définition, le moment dipolaire effectif, \mathbf{p}_{eff} , est le moment du dipôle équivalent qui immergé dans le même milieu (au lieu de la particule) au même endroit (centre de la particule) induirait la même distribution du potentiel électrostatique.

Dans le cadre de l'électrostatique, le potentiel électrique V vérifie l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 V(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.4)$$

On démontre, pour des conditions aux limites de potentiel ou de champ normal imposés, qu'il existe une solution unique à ce problème (voir annexe 3.1).

Le potentiel $V_{dipôle}$ dû à un dipôle, orienté suivant l'axe z et immergé dans un milieu de permittivité $\varepsilon^{(e)}$, est donné par :

$$V_{dipôle}(r, \varphi, \theta) = \frac{p_{eff} \cos \theta}{4\pi\varepsilon^{(e)} r^2} \quad (3.5)$$

(r, ϕ, θ) étant les coordonnées sphériques (ϕ n'intervient pas à cause de la symétrie axiale). Le moment dipolaire \mathbf{p}_{eff} est calculé dans les paragraphes suivants.

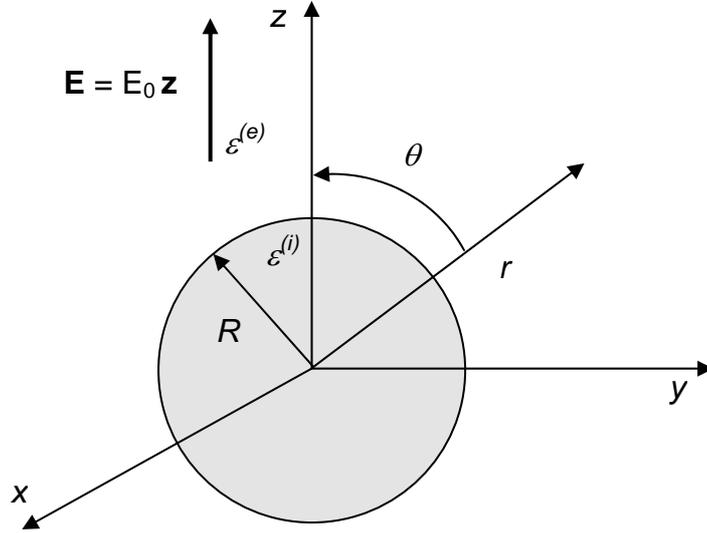


Figure 3.3. Une particule sphérique soumise à un champ électrique uniforme.

3.1.2.2. Sphère diélectrique dans un fluide diélectrique sous champ uniforme

La sphère et le fluide extérieur ont des permittivités $\epsilon^{(i)}$ et $\epsilon^{(e)}$, respectivement. Le champ électrique appliqué est uniforme et l'on suppose l'absence de charges électriques libres de volume et que la sphère ne perturbe que localement le champ électrique.

L'équation de Laplace doit être satisfaite, du fait de l'absence de charges et du régime permanent (quasistatique) du système. Soit $V^{(i)}$ (resp. $V^{(e)}$) la solution du potentiel à l'intérieur (resp. à l'extérieur) de la sphère. On peut écrire (voir annexe 3.2) :

$$V^{(i)}(r, \theta) = -Br \cos \theta, \quad r \leq R \quad (3.6)$$

$$V^{(e)}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{A \cos \theta}{r^2}, \quad r \geq R \quad (3.7)$$

A l'interface particule-fluide extérieur, la continuité du potentiel et celle de la composante normale du vecteur déplacement électrique s'écrivent :

$$V^{(i)}(r = R, \theta) = V^{(e)}(r = R, \theta) \quad (3.8)$$

$$\epsilon^{(i)} E_n^{(i)}(r = R, \theta) = \epsilon^{(e)} E_n^{(e)}(r = R, \theta) \quad (3.9)$$

respectivement. Ces égalités permettent de déduire les expressions de A et B :

$$A = \frac{\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}} R^3 E_0 \quad (3.10)$$

$$B = \frac{3\varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}} E_0 \quad (3.11)$$

Or, d'après (3.5) :

$$A = \frac{P_{eff}}{4\pi\varepsilon^{(e)}} \quad (3.12)$$

Il vient donc :

$$P_{eff} = 4\pi\varepsilon^{(e)}KR^3E_0 \quad (3.13)$$

où le facteur K , appelé facteur de Clausius-Mossotti, est donné par :

$$K = \frac{\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}} \quad (3.14)$$

On remarque que le changement d'orientation du champ électrique entraîne un changement d'orientation du moment dipolaire, ce qui selon l'expression (3.2), conserve le sens de la force DEP appliquée qui s'écrit alors :

$$F^{DP} = 4\pi\varepsilon^{(e)}KR^3E_0 \frac{\partial E_0}{\partial z} \quad (3.15)$$

3.1.2.3. Sphère et fluide de conductivités finies sous champ continu et uniforme

Un schéma identique à celui décrit à la section précédente est repris, à l'exception près que la sphère (de conductivité $\sigma^{(i)}$) est plongée dans un fluide (de conductivité $\sigma^{(e)}$). Le champ électrique est continu et l'on suppose que le régime est permanent.

Le potentiel électrique, à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère, aura une forme identique aux expressions (3.6) et (3.7), respectivement. Les coefficients A et B seront déterminés par la continuité du potentiel électrique ainsi que la densité de courant à travers l'interface sphère-fluide extérieur, ce qui s'écrit :

$$V^{(i)}(r = R, \theta) = V^{(e)}(r = R, \theta) \quad (3.16)$$

$$\sigma^{(i)}E_n^{(i)}(r = R, \theta) = \sigma^{(e)}E_n^{(e)}(r = R, \theta) \quad (3.17)$$

L'on déduit immédiatement les expressions suivantes (en substituant $\sigma^{(k)}$ à $\varepsilon^{(k)}$):

$$A = \frac{\sigma^{(i)} - \sigma^{(e)}}{\sigma^{(i)} + 2\sigma^{(e)}} R^3 E_0 \quad (3.18)$$

et

$$B = \frac{3\sigma^{(e)}}{\sigma^{(i)} + 2\sigma^{(e)}} E_0 \quad (3.19)$$

L'expression du facteur de Clausius-Mossotti devient :

$$K = \frac{\sigma^{(i)} - \sigma^{(e)}}{\sigma^{(i)} + 2\sigma^{(e)}} \quad (3.20)$$

3.1.2.4. Sphère diélectrique dans un fluide diélectrique en présence d'une charge ponctuelle

Le champ électrique non uniforme le plus simple (d'un point de vue physique) imaginable est celui engendré par une charge électrique ponctuelle. Afin d'étudier la polarisation d'une sphère sous un champ électrique non uniforme, cette dernière est placée au voisinage d'une charge électrique q (voir figure 3.4). Le comportement électrique de la sphère est ensuite déduit pour un champ électrique quelconque en reliant les moments multipolaires linéaires induits aux dérivées spatiales successives du champ électrique. Sur la figure 3.4 sont montrées la sphère de rayon R et la charge q placée à une distance ζ du centre de la sphère.

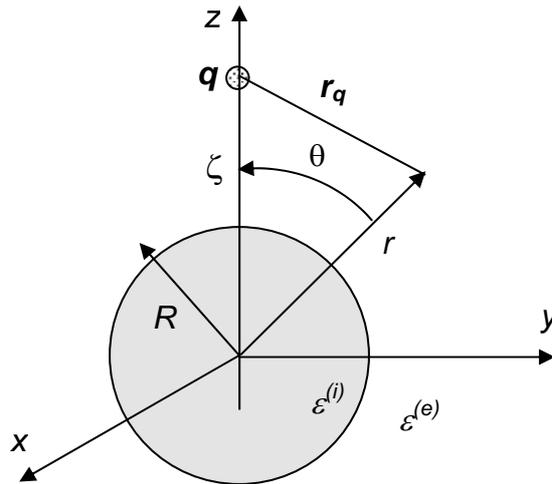


Figure 3.4. Une sphère diélectrique immergée dans un fluide diélectrique est soumise à un champ électrique généré par une charge ponctuelle q .

La solution générale pour le potentiel électrostatique s'écrit (annexe 1) :

$$V^{(i)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n r^n P_n(\cos \theta), \quad r \leq R \quad (3.21)$$

$$V^{(e)}(r, \theta) = \frac{q}{4\pi \epsilon^{(e)} r_q} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta), \quad r \geq R \quad (3.22)$$

où n est un entier et $P_n(\cos \theta)$ est le polynôme de Legendre d'ordre n . A_n et B_n sont de coefficients à déterminer en fonction des conditions aux limites. Afin de simplifier l'identification lors de l'application des conditions aux limites, notons que :

$$\frac{1}{r_q} = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{\zeta} \right)^n P_n(\cos \theta) \quad (3.23)$$

ce qui introduit dans (3.8) et (3.9) implique la forme suivante des coefficients A_n et B_n :

$$A_n = \frac{-q}{4\pi \varepsilon^{(e)}} \frac{n(\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)})}{n\varepsilon^{(i)} + (n+1)\varepsilon^{(e)}} \frac{R^{2n+1}}{\zeta^{n+1}} \quad (3.24)$$

$$B_n = \frac{q}{4\pi} \frac{2n+1}{n\varepsilon^{(i)} + (n+1)\varepsilon^{(e)}} \frac{1}{\zeta^{n+1}} \quad (3.25)$$

Si l'on identifie l'expression du potentiel électrique induit par le multipôle d'ordre n à celle donnée par (3.22), on déduit que :

$$p^{(n)} = 4\pi \varepsilon^{(e)} A_n \quad (3.26)$$

Cependant, une expression plus pratique peut être obtenue en exprimant le moment multipolaire en fonction du champ électrique induit par la charge électrique et de ses dérivées successives. Ce champ s'obtient à partir de la loi de Coulomb :

$$\mathbf{E}(z=0) = - \left(\frac{q}{4\pi \varepsilon^{(e)} \zeta^2} \right) \mathbf{e}_z \quad (3.27)$$

et ses dérivées successives s'écrivent :

$$\frac{\partial^n \mathbf{E}}{\partial z^n} = - \left(\frac{(n+1)! q}{4\pi \varepsilon^{(e)} \zeta^{n+2}} \right) \mathbf{e}_z \quad (3.28)$$

En remplaçant ces expressions dans (3.24) puis dans (3.26), on trouve :

$$p^{(n)} = \frac{4\pi \varepsilon^{(e)} K^{(n)} R^{2n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{n-1} E_z}{\partial z^{n-1}} \quad (3.29)$$

où

$$K^{(n)} = \frac{\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}}{n\varepsilon^{(i)} + (n+1)\varepsilon^{(e)}} \quad (3.30)$$

Le coefficient $K^{(n)}$ est appelé le coefficient de Clausius-Mossotti généralisé, à partir duquel on trouve le facteur de Clausius-Mossotti standard pour $n = 1$.

3.1.2.5. Coquille diélectrique dans un fluide diélectrique en champ uniforme

Etudier une coquille diélectrique est intéressant parce cela permet d'approcher un type de particules particulièrement important ; celui des cellules biologiques. En effet, une cellule biologique comporte un milieu interne aqueux et une membrane lipidique. Il arrive même que certains types de cellules soient dotés d'une paroi qui enrobe la membrane. Toutefois, pour simplifier le traitement, nous supposons pour le moment que la particule

est constituée uniquement d'une sphère recouverte d'une enveloppe (voir figure 3.5). Nous changeons, provisoirement, notre notation en associant les exposants 1, 2 et 3 à la sphère intérieure, à l'enveloppe et au milieu extérieur, respectivement. La sphère intérieure, l'enveloppe et le milieu extérieur ont les permittivités $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$ et $\varepsilon^{(3)}$, respectivement. Le champ électrique appliqué est $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_z$.

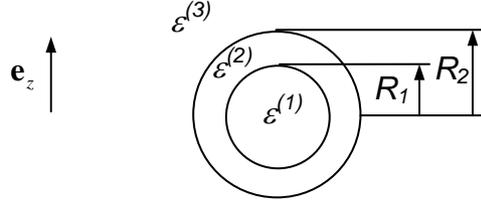


Figure 3.5. Une coquille diélectrique immergée dans un fluide diélectrique est soumise à un champ électrique uniforme.

En se référant aux sections précédentes, le potentiel électrique s'écrit sous la forme :

$$V^{(1)} = -Ar \cos \theta, \quad r \leq R_1 \quad (3.31)$$

$$V^{(2)} = \left(-Br + \frac{C}{r^2} \right) \cos \theta, \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad (3.32)$$

$$V^{(3)} = \left(-E_0 r + \frac{D}{r^2} \right) \cos \theta, \quad r \geq R_2 \quad (3.33)$$

En appliquant les conditions de continuité du potentiel et celle de la composante normale du vecteur déplacement électrique à travers les interfaces sphère-enveloppe et enveloppe-milieu extérieur, on obtient les valeurs des constantes A , B , C et D :

$$A = -\frac{3\varepsilon^{(3)}(1-K)a^3}{\left(\varepsilon^{(2)'} + 2\varepsilon^{(3)}\right)(a^3 - K)} E_0 \quad (3.34)$$

$$B = -\frac{3\varepsilon^{(3)}a^3}{\left(\varepsilon^{(2)'} + 2\varepsilon^{(3)}\right)(a^3 - K)} E_0 \quad (3.35)$$

$$C = \frac{3\varepsilon^{(3)}KR_1^3}{\left(\varepsilon^{(2)'} + 2\varepsilon^{(3)}\right)(a^3 - K)} E_0 \quad (3.36)$$

$$D = \frac{\varepsilon^{(2)'} - \varepsilon^{(3)}}{\varepsilon^{(2)'} + 2\varepsilon^{(3)}} R_1^3 E_0 \quad (3.37)$$

où $a = R_1/R_2$ et K est le facteur de Clausius-Mossotti défini à partir des permittivités $\varepsilon^{(2)'}$ et $\varepsilon^{(3)}$, soit :

$$K = \frac{\varepsilon^{(2)'} - \varepsilon^{(3)}}{\varepsilon^{(2)'} + 2\varepsilon^{(3)}} \quad (3.38)$$

$\varepsilon^{(2)'}$ est la permittivité équivalente de la coquille. Elle est donnée par :

$$\varepsilon^{(2)'} = \varepsilon^{(2)} \left[a^3 + 2 \left(\frac{\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}}{\varepsilon^{(1)} + 2\varepsilon^{(2)}} \right) \right] / \left[a^3 - \left(\frac{\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}}{\varepsilon^{(1)} + 2\varepsilon^{(2)}} \right) \right] \quad (3.39)$$

L'écriture (3.37) permet de considérer la coquille comme constituée non plus de deux milieux différents, mais comme une sphère homogène d'un matériau de permittivité électrique équivalente $\varepsilon^{(2)'}$. Cette méthode de substitution est donc praticable pour une particule d'un nombre quelconque de couches. Il suffit, pour retrouver la permittivité équivalente à la particule entière, de procéder à partir des couches les plus internes vers l'extérieur. La permittivité à chaque niveau est calculée par une formule identique à (3.39). Cette procédure est illustrée par la figure 3.6.

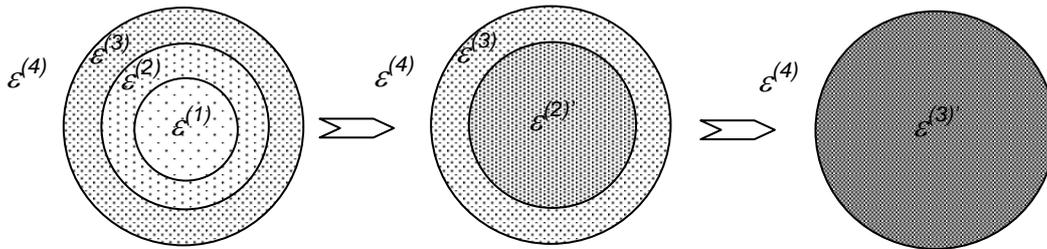


Figure 3.6. De l'intérieur vers l'extérieur, une particule sphérique multicouches est remplacée par une particule sphérique homogène équivalente.

3.1.2.6. Sphère réelle dans un fluide réel en champ alternatif uniforme

Par réel est entendu un matériau qui manifeste une polarisation et une conduction ohmique à la fois. La particule et le fluide extérieur se voient ainsi affectés d'une permittivité et d'une conductivité. Le champ électrique appliqué est supposé alternatif et uniforme, soit :

$$\mathbf{E}(t) = \text{Re}[\bar{\mathbf{E}}_0] \quad (3.40)$$

où

$$\bar{\mathbf{E}}_0 = E_0 e^{j\omega t} \mathbf{e}_z \quad (3.41)$$

$j^2 = -1$ et ω la pulsation reliée à la fréquence f par la relation :

$$\omega = 2\pi f \quad (3.42)$$

Les conditions à l'interface particule-fluide extérieur sont la continuité du potentiel électrique, la conservation de la charge et le saut de la composante normale du vecteur déplacement (loi de Gauss intégrale), soit :

$$V^{(i)} = V^{(e)}, \text{ à } r = R \quad (3.43)$$

$$\sigma^{(i)} E_n^{(i)} - \sigma^{(e)} E_n^{(e)} + \frac{\partial q_s}{\partial t} = 0, \text{ à } r = R \quad (3.44)$$

$$q_s = [\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}] = \varepsilon^{(i)} E_n^{(i)} - \varepsilon^{(e)} E_n^{(e)}, \quad \mathbf{n} \text{ normale à l'interface, à } r = R \quad (3.45)$$

Dans le cas d'une solution stationnaire, toutes les variables dépendent du temps par une loi en $\exp(j\omega t)$ et sont notées par une barre supérieure ; la règle de dérivation par rapport au temps s'écrit symboliquement : $\partial/\partial t \equiv j\omega$. L'équation (3.44) devient alors :

$$\sigma^{(i)} E_n^{(i)} - \sigma^{(e)} E_n^{(e)} + j\omega q_s = 0, \text{ à } r = R \quad (3.46)$$

La multiplication de (3.45) par $j\omega$ puis la soustraction, membre à membre, du résultat obtenu de (3.46) donne :

$$\bar{\sigma}^{(i)} \bar{E}_n^{(i)} = \bar{\sigma}^{(e)} \bar{E}_n^{(e)} \quad (3.47)$$

Le terme $\bar{\sigma}^{(k)}$ ($k = i, e$) est par définition la conductivité complexe du milieu k , reliée à la permittivité et à la conductivité réelle par :

$$\bar{\sigma}^{(k)} = \sigma^{(k)} + j\omega \varepsilon^{(k)} \quad (3.48)$$

Nous retrouvons une formulation en tous points similaire à celle d'une particule conductrice dans un milieu conducteur en régime permanent en remplaçant $\sigma^{(i)}$ et $\sigma^{(e)}$ par $\bar{\sigma}^{(i)}$ et $\bar{\sigma}^{(e)}$, respectivement, ou de manière équivalente pour une particule diélectrique dans un fluide diélectrique en remplaçant $\varepsilon^{(i)}$ et $\varepsilon^{(e)}$ par $\bar{\sigma}^{(i)}$ et $\bar{\sigma}^{(e)}$, respectivement. La solution est donc similaire avec les constantes complexes données par :

$$\bar{A} = \frac{\bar{\sigma}^{(i)} - \bar{\sigma}^{(e)}}{\bar{\sigma}^{(i)} + 2\bar{\sigma}^{(e)}} R^3 E_0 \quad (3.49)$$

$$\bar{B} = \frac{3\bar{\sigma}^{(e)}}{\bar{\sigma}^{(i)} + 2\bar{\sigma}^{(e)}} E_0 \quad (3.50)$$

L'expression du moment complexe du dipôle ponctuel devient :

$$\bar{\mathbf{p}}_{\text{effectif}} = 4\pi \varepsilon^{(e)} \bar{K} R^3 \bar{\mathbf{E}}_0 \quad (3.51)$$

Le nouveau facteur de Clausius-Mossotti est désormais complexe et tient compte de l'amplitude et du déphasage du moment dipolaire par rapport au champ électrique excitateur :

$$\bar{K}(\omega) = \frac{\bar{\sigma}^{(i)} - \bar{\sigma}^{(e)}}{\bar{\sigma}^{(i)} + 2\bar{\sigma}^{(e)}} \quad (3.52)$$

Comme annoncé au chapitre 1, ce facteur dépend aussi bien des propriétés électriques de la

particule et du fluide extérieur que de la fréquence du champ électrique appliqué.

La force DEP moyenne s'écrit dans ce cas:

$$\langle F^{\text{DP}} \rangle = 2\pi \varepsilon^{(e)} \text{Re}[\bar{K}] R^3 E_0 \frac{\partial E_0}{\partial z} \quad (3.53)$$

3.1.2.7. Coquille réelle dans un fluide réel en champ alternatif uniforme et non uniforme

Il est possible d'extrapoler les résultats précédents au cas d'une coquille réelle sous champ électrique non uniforme. En effet, tous les résultats énoncés pour une particule diélectrique dans un fluide diélectrique sont transposables au cas d'un champ électrique alternatif, notamment ceux concernant les particules en coquille. Nous reprenons ici la notation qui associe les exposants 1, 2 et 3 à la sphère intérieure, à l'enveloppe et au milieu extérieur, respectivement. Un schéma identique à la figure 3.5 est repris, avec les couples des constantes électriques $(\sigma^{(1)}, \varepsilon^{(1)})$, $(\sigma^{(2)}, \varepsilon^{(2)})$ et $(\sigma^{(3)}, \varepsilon^{(3)})$ pour la sphère intérieure, l'enveloppe et le milieu extérieur, respectivement.

En champ électrique alternatif uniforme, nous obtenons la nouvelle expression du facteur complexe de Clausius-Mossotti :

$$\bar{K} = \frac{\bar{\sigma}^{(2)'} - \bar{\sigma}^{(3)}}{\bar{\sigma}^{(2)'} + 2\bar{\sigma}^{(3)}} \quad (3.54)$$

où

$$\bar{\sigma}^{(2)'} = \bar{\sigma}^{(2)} \frac{a^3 + 2 \left(\frac{\bar{\sigma}^{(1)} - \bar{\sigma}^{(2)}}{\bar{\sigma}^{(1)} + 2\bar{\sigma}^{(2)}} \right)}{a^3 - \left(\frac{\bar{\sigma}^{(1)} - \bar{\sigma}^{(2)}}{\bar{\sigma}^{(1)} + 2\bar{\sigma}^{(2)}} \right)} \quad (3.55)$$

En champ électrique alternatif non uniforme, la nouvelle expression du moment multipolaire s'écrit :

$$\bar{p}^{(n)} = \frac{4\pi \varepsilon^{(3)} \bar{K}^{(n)} R^{2n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{n-1} \bar{E}_z}{\partial z^{n-1}} \quad (3.56)$$

où le facteur complexe de Clausius-Mossotti d'ordre n est donné par :

$$\bar{K}^{(n)} = \frac{\bar{\sigma}_n^{(2)'} - \bar{\sigma}^{(3)}}{n\bar{\sigma}_n^{(2)'} + (n+1)\bar{\sigma}^{(3)}} \quad (3.57)$$

où :

$$\bar{\sigma}_n^{(2)'} = \bar{\sigma}^{(2)} \frac{a^{2n+1} + (n+1) \frac{\bar{\sigma}^{(1)} - \bar{\sigma}^{(2)}}{n\bar{\sigma}^{(1)} + (n+1)\bar{\sigma}^{(2)}}}{a^{2n+1} - n \frac{\bar{\sigma}^{(1)} - \bar{\sigma}^{(2)}}{n\bar{\sigma}^{(1)} + (n+1)\bar{\sigma}^{(2)}}} \quad (3.58)$$

Finalement, l'expression générale de la force DEP moyenne, telle que donnée par le modèle multipolaire, est :

$$\langle F_z \rangle = \sum_{n=1}^m \frac{2\pi\epsilon^{(e)} R^{2n+1}}{n!(n-1)!} \operatorname{Re} \left[\bar{K}^{(n)} \right] \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^{n-1} E_{z,\text{efficace}}}{\partial z^{n-1}} \right]^2 \quad (3.59)$$

où $E_{z,\text{efficace}}$ est le champ électrique extérieur efficace.

3.2. La Méthode des Eléments Finis

A cause du traitement spécifique et coûteux associé au suivi d'interface, la partie hydrodynamique n'est pas traitée par la MEF dans le présent travail. Il est toutefois prévu d'effectuer, dans des travaux futurs, un couplage MEF-MIF qui décrirait avec précision et sans grande restriction les problèmes électrohydrodynamiques avec électrodéformation. En conséquence, seuls les problèmes électriques feront l'objet d'une résolution par la MEF.

3.2.1. Préliminaire

La plupart des problèmes de physique peuvent se formuler ainsi : trouver un champ (scalaire, vectoriel et tensoriel) $u(\mathbf{x}, t)$ satisfaisant à un ensemble d'équations aux dérivées partielles et d'équations ordinaires en tout point \mathbf{x} d'un domaine Ω à tout instant t ,

$$P(u(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.60)$$

et respectant des conditions aux limites (éventuellement fonction du temps) sur la frontière $\partial\Omega$ de ce domaine par exemple du type ($\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$) :

$$\begin{cases} u(\mathbf{x}, t) = u_{\partial\Omega_D}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_D \\ \frac{\partial}{\partial n} u(\mathbf{x}, t) = q_{\partial\Omega_N}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_N \end{cases} \quad (3.61)$$

La MEF consiste à rechercher une solution approchée de la solution exacte sous la forme d'un champ $\tilde{u}(\mathbf{x}, t)$ défini par morceaux sur des sous-domaines de Ω . Les n sous-domaines Ω_i doivent être tels que :

$$\bigcup_{i=1}^n \Omega_i = \Omega \quad (3.62)$$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 : (i \neq j) \Rightarrow (\hat{\Omega}_i \neq \hat{\Omega}_j) \quad (3.63)$$

où $\hat{\Omega}_i$ désigne l'intérieur de Ω_i . Autrement dit, les Ω_i sont une partition de Ω comme illustré par la figure 3.7.

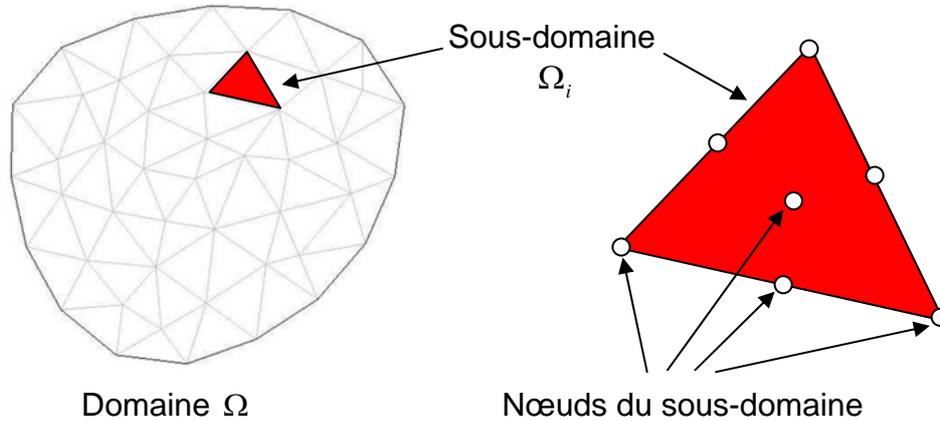


Figure 3.7. Représentation du domaine discrétisé Ω et d'un de ses sous-domaines.

Les champs $\tilde{u}_i(\mathbf{x}, t)$, définis dans chaque sous-domaine, sont des champs choisis parmi une famille arbitraire de champs (généralement polynomiaux). La famille de champs locaux est appelée espace des fonctions d'interpolation de l'élément. La famille de champs globaux $\tilde{u}(\mathbf{x}, t)$, obtenus par sommation des champs locaux, est appelée espace des fonctions d'interpolation du domaine Ω .

Le champ dans chaque sous-domaine Ω_i est déterminé par un nombre fini de valeurs de ce champ (ou valeurs de ses dérivées) en des points choisis arbitrairement dans le sous-domaine appelés nœuds. Le champ local est une interpolation entre les valeurs aux nœuds. Le sous-domaine muni de son interpolation est appelé *élément*.

La recherche de solution par Eléments Finis consiste donc à déterminer quel champ local on attribue à chaque sous-domaine pour que le champ global $\tilde{u}(\mathbf{x}, t)$, obtenu par sommation de ces champs locaux, soit *proche* de la solution exacte du problème.

La qualité de la solution approchée (proximité de la solution exacte) dépend de la division en sous-domaines (nombre et dimensions des sous domaines), du choix de la famille de champs locaux dans chaque sous-domaine et des conditions de continuité qu'on impose aux frontières des sous-domaines. Une fois ces choix faits, il reste à chercher une combinaison de champs locaux qui satisfait *au mieux* les équations.

Pour résoudre un problème par la MEF, on procède par étapes successives :

1. On se pose un problème physique sous la forme d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles à satisfaire en tout point d'un domaine Ω , avec des conditions aux limites sur la frontière $\partial\Omega$;
2. On construit une formulation intégrale du système différentiel à résoudre et de ses conditions aux limites : c'est la formulation variationnelle du problème ;
3. On divise Ω en sous-domaines : c'est le maillage. Les sous-domaines sont appelés mailles ;
4. On choisit la famille de champs locaux, c'est-à-dire à la fois la position des nœuds dans les sous-domaines et les polynômes (ou autres fonctions) qui définissent le champ local en fonction des valeurs aux nœuds (et éventuellement des dérivées). La maille complétée par ces informations est alors appelée élément ;
5. On ramène le problème à un problème discret. La solution approchée est entièrement déterminée par les valeurs aux nœuds des éléments. Le problème fondamental de la MEF peut se résumer en deux questions :
 - a. comment choisir le problème discret dont la solution est proche de la solution *exacte* ?
 - b. quelle signification donner au terme *exacte* ?
6. on résout le problème discret : c'est la résolution ;
7. on peut alors construire la solution approchée à partir des valeurs trouvées aux nœuds et en déduire d'autres grandeurs : c'est le post-traitement ;
8. on exploite la solution pour juger de sa qualité numérique.

Les étapes de 1 à 5 sont souvent rassemblées sous le nom de prétraitement.

Actuellement, le travail de ces différentes étapes est assisté par un grand nombre de logiciels. Il reste que pour maîtriser leur utilisation, il est indispensable de comprendre les fondements de la méthode, notamment les étapes 3 et 4, ne serait-ce que pour choisir en toute connaissance de cause parmi les options que ces logiciels proposent.

3.2.2. La méthode variationnelle

Sans le démontrer, nous acceptons le théorème de l'analyse fonctionnelle suivant :

$$\left(\forall \beta(\mathbf{x}) : \int_{\Omega} \beta(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}, t) dv(\mathbf{x}) = 0 \right) \Leftrightarrow (\forall \mathbf{x} \in \Omega : h(\mathbf{x}, t) = 0) \quad (3.64)$$

où $\beta(\mathbf{x})$ et $h(\mathbf{x}, t)$ et Ω doivent satisfaire certaines conditions de régularité qu'on n'explicitera pas ici.

Résoudre l'équation différentielle (3.60) est donc équivalent à chercher $u(\mathbf{x}, t)$ tel que :

$$\int_{\Omega} \beta(\mathbf{x}) P(u(\mathbf{x}, t)) dv(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.65)$$

avec les conditions aux limites (3.61). Cette formulation est une formulation variationnelle du problème. Il peut exister d'autres formulations équivalentes à (3.65) déduites par des transformations mathématiques (par intégration par parties par exemple, auquel cas la formulation sera dite faible).

3.2.3. Discrétisation de la formule variationnelle

Le principe de l'approximation par éléments finis est le suivant :

On définit la formulation variationnelle que l'on cherche à satisfaire avec les \tilde{u} déterminés par les valeurs aux nœuds. Il va de soi que ce problème n'a généralement pas de solution si l'on conserve la condition absolue $\forall \beta(\mathbf{x})$ (à moins que l'on cherche la solution exacte).

On ne vérifie donc cette équation que pour certains $\beta_i(\mathbf{x})$ uniquement. A chaque $\beta_i(\mathbf{x})$ correspond une équation scalaire fonction des valeurs aux nœuds. Il suffit de les choisir (linéairement) indépendantes et en nombre n égal au nombre d'inconnues. Les fonctions $\beta_i(\mathbf{x})$ sont appelées fonctions test ou encore fonctions de pondération. On est ainsi ramené à résoudre un système algébrique de n équations à n inconnues. Si l'opérateur P est linéaire, le système d'équations obtenu suite à cette discrétisation est également linéaire. Si en revanche, il est non linéaire, une méthode de linéarisation itérative, telle la méthode Newton-Raphson ou la méthode de Douglas, est utilisée.

Il existe une infinité de manières de choisir les $n \beta_i(\mathbf{x})$. Chacune d'entre elles engendre une variante de la MEF et chacune aboutit à une solution approchée différente. La seule condition impérative est que le choix des $\beta_i(\mathbf{x})$ conduise à un système algébrique régulier (à solution unique). Des théorèmes d'analyse numérique suggèrent certains choix pour lesquels la solution approchée \tilde{u} est garantie unique et convergente vers la solution exacte quand le maillage se raffine.

Pour un problème mono-dimensionnel, la fonction test chapeau (linéaire par morceaux, voir figure 3.8) satisfait souvent à ces contraintes, mais des fonctions plus élaborées (polynomiales en général) peuvent tout aussi bien être utilisées.

La construction du système d'équations algébriques à résoudre s'appelle assemblage. Les choix faits précédemment (les fonctions test et les fonctions d'interpolation) conduisent à un système d'équations non symétrique en général. Afin d'obtenir des systèmes symétriques (pour lesquels on dispose d'algorithmes numériques de résolution plus

efficaces) l'on utilise des fonctions test identiques aux fonctions d'interpolation ; c'est la méthode de Galerkin.

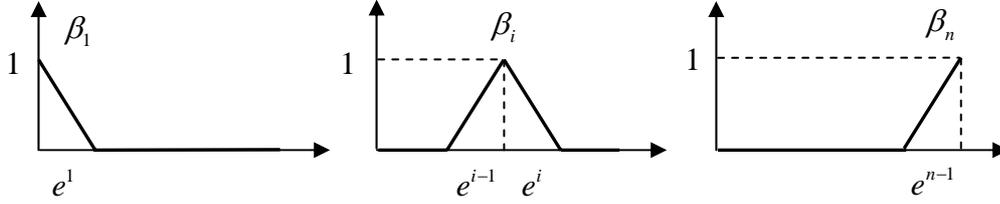


Figure 3.8. La fonction test β_i et le sous-domaine Ω_i auquel elle correspond forment l'élément e^i . On vérifie que ces fonctions test sont indépendantes par paires.

3.2.4. Application de la Méthode des Eléments Finis au problème électrique

Le traitement du problème d'une particule soumise à un champ électrique en régime quasistatique est identique à tout point de vue à celui du régime sinusoïdal (ou la permittivité électrique ε du milieu serait remplacée par sa conductivité complexe $\bar{\sigma}$). Aussi, n'allons-nous développer la formulation Eléments Finis que pour le régime électrocinétique.

Le problème du champ électrique autour d'une particule en régime sinusoïdal posé au chapitre 2 se résume comme suit :

$$\nabla \cdot (\bar{\sigma}^{(k)} \bar{V}^{(k)}(\mathbf{x})) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^{(k)} \text{ et } k = i, e \quad (3.66)$$

$$\bar{V}^{(e)} \Big|_{\Gamma_D} = V_{\Gamma_D} \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \bar{V}^{(e)} \Big|_{\Gamma_N} = q_{\Gamma_N} \quad (3.68)$$

$$\bar{\sigma}^{(i)} \frac{\partial}{\partial n} \bar{V}^{(i)} \Big|_S = \bar{\sigma}^{(e)} \frac{\partial}{\partial n} \bar{V}^{(e)} \Big|_S \quad (3.69)$$

Sub-divisons le domaine $\Omega^{(k)}$ en n sous domaines e^l (par abus, on identifie le sous domaine Ω_i à l'élément e^l). On suppose que le potentiel $\bar{V}^{(k),e^l}$ dans chaque élément e^l s'écrit sous la forme :

$$\bar{V}^{(k),e^l}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \bar{V}_i^{(k),e^l} \beta_i^{e^l}(\mathbf{x}) \quad (3.70)$$

où m est le nombre de nœuds définis dans l'élément e^l et $\beta_i^{e^l}(\mathbf{x})$ la fonction d'interpolation et la fonction test à la fois. La solution approchée globale du potentiel électrique s'écrit donc :

$$\bar{V}^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{V}_i^{(k)e^l} \beta_i^{e^l}(\mathbf{x}) \quad (3.71)$$

En introduisant l'expression (3.71) dans l'équation (3.66) pondérée par $\beta_i^{e^l}(\mathbf{x})$ puis en intégrant sur le domaine $\Omega^{(k)}$, on obtient :

$$\int_{\Omega^{(k)}} \beta_j^{e^q}(\mathbf{x}) \nabla \cdot \left(\bar{\sigma}^{(k)} \nabla \left(\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{V}_i^{(k)e^l} \beta_i^{e^l}(\mathbf{x}) \right) \right) dv(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.72)$$

L'intégration de cette équation par parties, permet d'obtenir l'équation :

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{V}_i^{(k)e^l} \int_{\partial\Omega^{(k)}} \bar{\sigma}^{(k)} \beta_j^{e^q}(\mathbf{x}) \mathbf{n} \cdot \nabla \left(\beta_i^{e^l}(\mathbf{x}) \right) dv(\mathbf{x}) \\ & - \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{V}_i^{(k)e^l} \int_{\Omega^{(k)}} \bar{\sigma}^{(k)} \nabla \left(\beta_i^{e^l}(\mathbf{x}) \right) \cdot \nabla \left(\beta_j^{e^q}(\mathbf{x}) \right) dv(\mathbf{x}) = 0, \quad k = i, e \end{aligned} \quad (3.73)$$

Notons que, à cause de la conservation du flux de la densité de courant complexe à l'interface S (condition (3.69)), l'équation (3.73) peut s'écrire pour un milieu unique dont la conductivité complexe $\bar{\sigma}$ varie dans l'espace, soit :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \bar{\sigma}^{(i)} & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(i)} \\ \bar{\sigma}^{(e)} & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(e)} \end{cases} \quad (3.74)$$

Tout le problème revient donc à ignorer les frontières intérieures qui séparent les différents milieux mis en jeu et de se servir de la conductivité complexe qui est propre à chaque point du domaine d'intérêt, soit :

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{V}_i^{e^l} \int_{\partial(\Omega^{(i)} \cup \Omega^{(e)})} \bar{\sigma}(\mathbf{x}) \beta_j^{e^q}(\mathbf{x}) \mathbf{n} \cdot \nabla \left(\beta_i^{e^l}(\mathbf{x}) \right) dv(\mathbf{x}) \\ & - \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{V}_i^{e^l} \int_{\Omega^{(i)} \cup \Omega^{(e)}} \bar{\sigma}(\mathbf{x}) \nabla \left(\beta_i^{e^l}(\mathbf{x}) \right) \cdot \nabla \left(\beta_j^{e^q}(\mathbf{x}) \right) dv(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (3.75)$$

Ce traitement peut donc être généralisé de manière immédiate au calcul du champ électrique autour d'une particule multicouches, comme c'est le cas des cellules biologiques.

La fonction d'interpolation (et de pondération) $\beta_i^{e^l}(\mathbf{x})$ fixée par défaut par le logiciel FEMLAB est le polynôme de Lagrange du deuxième degré. Le faible degré de ce polynôme permet de ne relier à un nœud donné que les nœuds qui lui sont immédiatement voisins. Dans chaque ligne de la matrice à inverser, il n'y a que peu de composantes qui ne sont pas nulles ; le système obtenu est creux. La résolution du système linéaire discret est effectuée grâce au paquetage libre UMFPack (de l'université de Floride, CISE), un outil

très puissant pour la résolution de systèmes algébriques creux tels que déduits par l'équation (3.75).

Après résolution du problème algébrique, nous disposons du champ électrique dans tout le domaine que l'on a défini. Reste à exploiter ces résultats pour calculer la force électrique qui s'applique sur la particule en question. Pour ce faire, une intégration de la divergence du tenseur de Maxwell sur une sphère qui englobe cette particule est effectuée, comme indiqué par la figure 3.9.

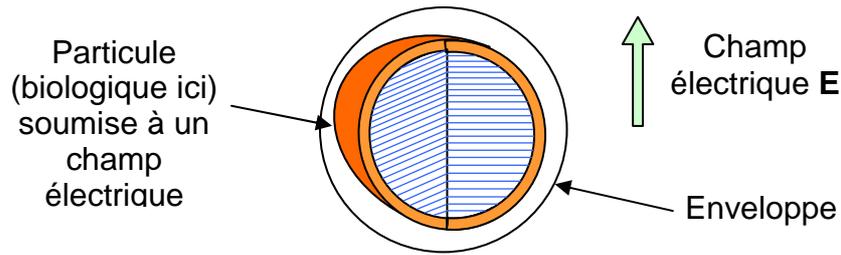


Figure 3.9. Post-traitement : une enveloppe qui entoure la particule (une cellule biologique ici) est définie pour le calcul du flux du tenseur de Maxwell. Ce flux est égal à la force électrique appliquée à la particule.

ce qui revient, selon le théorème de Green-Ostrogradski, à effectuer l'intégration du flux de ce tenseur à travers l'enveloppe de cette sphère, soit :

$$\mathbf{F}^{\text{Electrique}} = \int_{\text{Sphère}} \nabla \cdot \mathbb{T} dv = \int_{\text{Enveloppe}} \mathbf{n} \cdot \mathbb{T} dS \quad (3.76)$$

Les particules qui se déplacent dans les microsystèmes sont de faible taille (de l'ordre de quelques dizaines de μm) et évoluent dans un tampon aqueux à des vitesses relativement faibles (de l'ordre du mm/s). Le nombre de Reynolds, qui détermine la prépondérance des forces d'inertie par rapport aux forces visqueuses, construit sur cette base vaut :

$$Re = \frac{\rho U d}{\mu} \sim 0.01 \quad (3.77)$$

La faible valeur de ce nombre implique la prédominance des forces visqueuses parmi les forces hydrodynamiques mises en jeu. Si le milieu dans lequel baigne la particule est supposé infini, alors la force appliquée par le fluide sur cette particule a une expression analytique. On rappelle que pour une particule sphérique de rayon r_0 , cette force est donnée par (cf. § 2.4.1) :

$$\mathbf{F}_z = -6\pi \mu^{(k)} r_0 \mathbf{U} \quad (3.78)$$

Quand la particule atteint une vitesse constante, l'équilibre des forces

électrohydrodynamiques implique l'expression suivante :

$$\mathbf{U} = \frac{1}{6\pi\mu^{(k)}r_0}\mathbf{F}^{\text{électrique}} \quad (3.79)$$

3.3. La Méthode Intégrale aux Frontières

Comme évoqué au chapitre 1, la MIF permet le passage d'équations différentielles elliptiques de domaines à des équations intégrales aux frontières de ces domaines. L'approche utilisée pour effectuer ce passage ainsi que les nouvelles inconnues qui en découlent sont précisées dans ce qui suit.

3.3.1. Approche générale de la formulation MIF-EHD

Le problème de déformation d'une goutte de fluide, immergée dans un autre fluide, soumise à un champ électrique est traité par l'intermédiaire de la MIF. La MIF intervient dans le calcul des potentiels électriques et hydrodynamiques de manière indépendante de leur évolution dans le temps. Toutes les grandeurs sont calculées uniquement aux frontières.

Pour une configuration de l'interface goutte-fluide donnée, définie par une collection de marqueurs, la distribution des charges électriques et le potentiel hydrodynamique sont calculés. Les lois mises en jeu sont la conservation des charges à l'interface et les équations de Bernoulli pour chaque domaine écrites à cette interface. Ne faisant intervenir que des équations différentielles ordinaires, cette partie est effectuée par intégration temporelle. Connaissant la distribution des charges électriques, le champ (et le potentiel) électrique est calculé par la MIF. Par cette méthode également, la connaissance du potentiel hydrodynamique permet de retrouver le champ de vitesse. Une nouvelle configuration de l'interface est donc calculée à l'instant suivant. Le diagramme suivant, qui illustre de façon très globale la procédure de calcul, sera repris avec plus de détail en fin de chapitre.

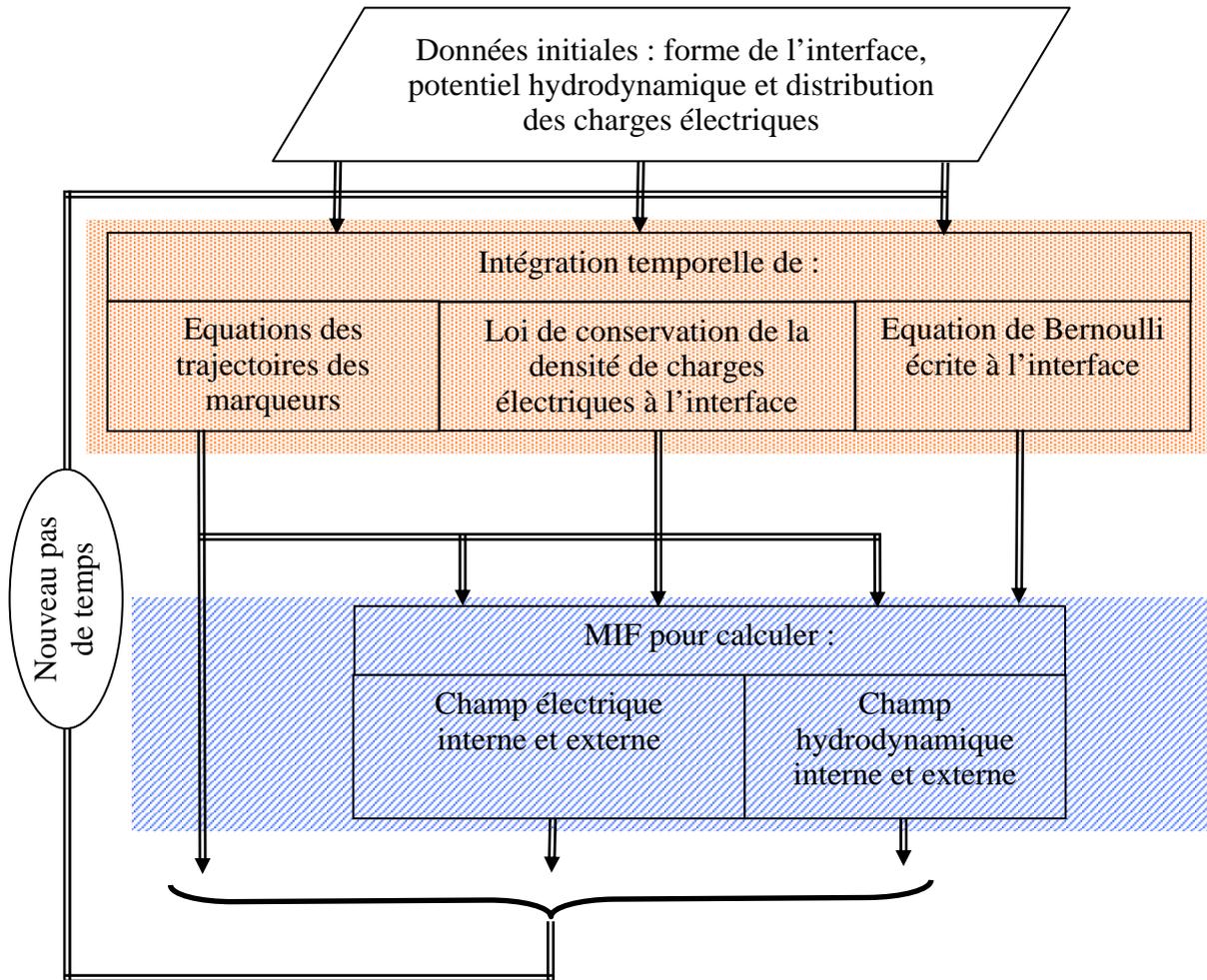


Diagramme 3.10. Méthode générale de résolution EHD sur interface mobile.

3.3.2. Quelques résultats préliminaires

3.3.2.1. La deuxième identité de Green

L'on se donne un domaine (espace connexe) $\Omega^{(i)}$ limité par une frontière $\partial\Omega$ comme indiqué par la figure 3.11. Soient données, de plus, deux fonctions scalaires, $\varphi^{(i)}$ et ψ , deux fois différentiables (sauf peut être en un nombre fini de points isolés). La normale extérieure au domaine est notée \mathbf{n} .

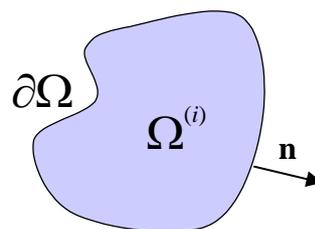


Figure 3.11. Représentation du domaine de calcul $\Omega^{(i)}$ et du domaine complémentaire.

Dans ces conditions, la relation suivante est vérifiée :

$$\int_{\Omega} \left(\psi \nabla'^2 \varphi^{(i)} - \varphi^{(i)} \nabla'^2 \psi \right) dV' = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n}' \cdot \left(\psi \nabla' \varphi^{(i)} - \varphi^{(i)} \nabla' \psi \right) dS' \quad (3.80)$$

dans laquelle on a noté $dV' = dV(\mathbf{x}')$, $dS' = dS(\mathbf{x}')$ et $\mathbf{n}' = \mathbf{n}(\mathbf{x}')$ et ∇' le gradient par rapport à \mathbf{x}' . Cette égalité, appelée deuxième identité de Green, est utilisée pour transformer les équations différentielles définies dans un domaine en équations intégrales ramenées à la frontière de ce domaine.

Un choix qui sera jugé particulièrement intéressant dans la suite pour la fonction ψ , est de lui imposer d'être solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta(\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|) \\ \lim_{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \end{cases} \quad (3.81)$$

avec δ , la distribution de Dirac, $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in (\mathbb{R}^3)^2$. La solution de ce problème que l'on note dorénavant G , appelée solution fondamentale ou noyau de Green, prend la forme suivante dans une configuration 3D :

$$G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} \quad (3.82)$$

L'allure de cette fonction est donnée dans la figure 3.12.

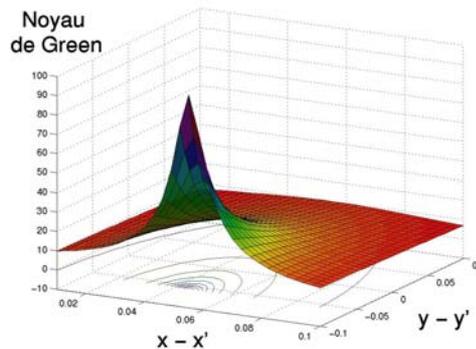


Figure 3.12. Représentation du noyau de Green. La singularité se manifeste par une concentration des lignes de niveau (en projection) quand \mathbf{x}' approche \mathbf{x} .

Si l'on suppose le potentiel harmonique, en vertu de (3.81) l'équation (3.80) devient, [205] :

$$\alpha(\mathbf{x}) \varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n}' \cdot \left(G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \nabla' \varphi^{(i)}(\mathbf{x}') - \varphi^{(i)}(\mathbf{x}') \nabla' G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \right) dS(\mathbf{x}')$$

où de manière plus compacte :

$$\alpha(\mathbf{x})\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \left(G \frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial n'} - \varphi^{(i)} \frac{\partial G}{\partial n'} \right) dS' \quad (3.83)$$

$\alpha(\mathbf{x})$ est l'angle solide (au facteur $\frac{1}{4\pi}$ près) qui décrit la frontière $\partial\Omega$, coté intérieur, vue par un observateur au point \mathbf{x} [205]. En particulier, $\alpha = 1$ à l'intérieur de $\Omega^{(i)}$, $\alpha = 0$ à l'extérieur de $\Omega^{(i)}$ et $\alpha = 1/2$ sur un point lisse de la frontière $\partial\Omega$ (c.-à-d., un point où la normale est continue).

Supposons que l'on définisse un potentiel $\varphi^{(e)}$ harmonique dans $\Omega^{(e)}$ le domaine complémentaire à $\Omega^{(i)}$. La sommation de la deuxième identité de Green (3.83) pour le potentiel $\varphi^{(i)}$ et le potentiel $\varphi^{(e)}$ (avec des conditions de régularité à l'infini) implique :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &\equiv \begin{cases} \varphi^{(i)} & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(i)} \\ \frac{1}{2}(\varphi^{(i)} + \varphi^{(e)}) & \text{si } \mathbf{x} \in S \\ \varphi^{(e)} & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(e)} \end{cases} \\ &= - \int_S \mathbf{n}(\mathbf{x}') \cdot \left[G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \nabla'(\varphi^{(i)} - \varphi^{(e)}) + (\varphi^{(i)} - \varphi^{(e)}) \nabla' G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \right] dS' \end{aligned} \quad (3.84)$$

Par ailleurs la théorie potentielle classique [43] montre qu'un potentiel harmonique défini dans un domaine, intérieur ou extérieur à une frontière S , est engendré par une distribution de singularités appropriées (sources et/ou doublets, appelés encore dipôles) sur la frontière S . On dit alors aussi que la solution est exprimée sous la forme d'une somme de potentiels simple et double couche, répartis sur la frontière S :

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = - \int_S \left[\sigma(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) + \tau(\mathbf{x}') \nabla' G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}') \right] dS(\mathbf{x}') \quad (3.85)$$

σ est l'intensité de la distribution surfacique des sources (ou charges électriques en électrostatique) et τ est l'intensité de la distribution surfacique des doublets (ou dipôles électriques en électrostatique). Il est clair que les distributions simple et double couche sont toutes deux harmoniques dans $\Omega^{(i)}$ ainsi que $\varphi^{(i)}$, tel que défini par (3.85).

Par identification avec l'équation (3.84), on trouve :

$$\sigma = -\mathbf{n}^{(i)} \cdot \left[\nabla(\varphi^{(i)} - \varphi^{(e)}) \right] \Big|_S \quad (3.86)$$

$$\tau = (\varphi^{(i)} - \varphi^{(e)}) \Big|_S \quad (3.87)$$

3.3.2.2. Les deux formulations de la MIF

Montrons dans quelle mesure les relations ci-dessus déduites de l'identité de Green

permettent de résoudre un système d'équations aux dérivées partielles d'un type fréquent en physique : les problèmes de Laplace. Supposons pour fixer les idées que l'on soit confronté au problème de Laplace pour le potentiel $\varphi^{(i)}$:

$$\nabla^2 \varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^{(i)} \quad (3.88)$$

avec la condition de Dirichlet suivante :

$$\varphi^{(i)}|_S = \varphi_S \quad (3.89)$$

où φ_S est donné à la frontière S . On tente de chercher la solution φ à ce problème sous la forme d'une somme de potentiels simple et double couche, répartis sur la frontière S comme présentés dans l'équation (3.85) . On montre tout d'abord que le membre de gauche de (3.85) donne :

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \in S}} \varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \varphi^{(i)}(\mathbf{y})|_S = \varphi_S \quad (3.90)$$

ce qui permet de déduire que les distributions σ et τ doivent satisfaire l'équation suivante :

$$\varphi_S(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \tau(\mathbf{y}) - \int_S \sigma(\mathbf{x}') G(\mathbf{y}, \mathbf{x}') dS' - \int_S \tau(\mathbf{x}') \nabla' G(\mathbf{y}, \mathbf{x}') \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}') dS' \quad (3.91)$$

Puisqu'à cette équation sont associées deux inconnues (σ et τ), le problème posé est sous déterminé. Pour garantir l'unicité de la représentation intégrale, des conditions auxiliaires doivent être introduites. Ces conditions, appelées *règle de sélection des singularités*.

Observons au passage que c'est tout l'intérêt de la MIF que de se restreindre à la frontière pour effectuer le calcul et de pouvoir retrouver *dans un deuxième temps* n'importe quelle information à l'intérieur du domaine de manière exacte dans le sens où aucun type de développement ou d'interpolation n'est nécessaire dans cette démarche.

Il se trouve que le choix des singularités est équivalent à la détermination d'un champ harmonique potentiel dans le domaine complémentaire à $\Omega^{(i)}$. En effet considérons les deux cas qui se présentent. Si l'on se propose d'étudier une situation dans laquelle un problème de Laplace sur $\Omega^{(i)}$ est couplé à un problème de Laplace sur $\Omega^{(e)}$, le domaine complémentaire, les deux domaines sont simultanément le siège d'un phénomène physique du même type et donc susceptibles d'obéir au même type de lois, comme c'est le cas pour nos applications électrique et hydrodynamique. Alors la sous-détermination évoquée précédemment disparaît car les champs relatifs aux deux domaines sont obligatoirement couplés par une condition supplémentaire qui fixe σ ou τ ou encore qui les lie. C'est la formulation indirecte.

Si en revanche le problème de Laplace sur $\Omega^{(i)}$ est indépendant du milieu environnant, alors il nous reste le loisir de lever la sous-détermination en définissant un problème de Laplace arbitraire ou fictif sur $\Omega^{(e)}$. Ce choix doit idéalement conduire à des représentations plus simples d'un point de vue numérique, ou plus explicatives physiquement ou plus commodes mathématiquement. Un choix classique est de considérer ce domaine comme passif ; c'est à dire de supposer que $\varphi^{(e)}$ est nul sur $\Omega^{(e)}$. Il s'agit alors de la formulation directe. On peut aussi raccorder à l'interface les potentiels $\varphi^{(e)}$ et $\varphi^{(i)}$ ou les dérivées normales de ces potentiels, c'est-à-dire annuler σ ou τ . Il s'agit de nouveau d'une formulation indirecte.

3.3.2.3. Formulation MIF indirecte

Selon que l'on considère le problème fluide ou le problème électrique, on aura soit à satisfaire la condition de continuité de la vitesse normale soit la continuité du potentiel électrique. La première situation implique une distribution d'un potentiel double couche (doublets), la seconde implique la distribution d'un potentiel simple couche (charges électriques). Ceci est détaillé dans les sections 3.3.3 et 3.3.4 qui suivent. Dans un écoulement bi-fluide, cette représentation de singularités engendre ainsi un écoulement pour les deux fluides de façon simultanée.

Dans le cas d'un problème de Laplace sur un seul domaine, on peut vouloir exprimer la fonction à déterminer, $\varphi^{(i)}$, par une distribution de potentiels double couche, τ . De manière équivalente, on impose au potentiel fictif de satisfaire la condition de Neumann à la frontière S suivante :

$$\sigma = 0 = -\mathbf{n}^{(i)} \cdot \left[\nabla \left(\varphi^{(i)} - \varphi^{(e)} \right) \right] \Big|_S \quad (3.92)$$

L'introduction de cette équation dans (3.91) implique :

$$\varphi_s(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \tau(\mathbf{y}) - \int_S \tau(\mathbf{x}') \nabla' G(\mathbf{y}, \mathbf{x}') \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}') dS' \quad (3.93)$$

Cette équation est une équation de Fredholm de deuxième espèce pour le potentiel double couche τ qui assure la dominance de la diagonale de la matrice d'influence discrète équivalente [43]. A cause de son bon conditionnement, cette formule est souvent utilisée.

Si en revanche, on veut exprimer la fonction $\varphi^{(i)}$ par une distribution de potentiels simple couche σ uniquement, alors le potentiel fictif satisfera la condition de Dirichlet à la frontière S suivante :

$$\tau = 0 = \left(\varphi^{(i)} - \varphi^{(e)} \right) \Big|_S \quad (3.94)$$

Ce qui implique, par introduction de cette équation dans l'équation (3.91),

$$\varphi_S(\mathbf{y}) = - \int_S \sigma(\mathbf{x}') G(\mathbf{y}, \mathbf{x}') dS' \quad (3.95)$$

Bien que cette équation soit une équation de Fredholm de première espèce (réputée mal conditionnée) pour l'inconnue σ , la singularité du noyau de Green garantit la prédominance de la diagonale de la matrice d'influence.

3.3.2.4. Formulation MIF directe

Ici sont imposées les conditions suivantes pour le potentiel fictif :

$$\varphi^{(e)} \Big|_S = 0 \quad (3.96)$$

$$\mathbf{n}^{(i)} \cdot \left[\nabla \varphi^{(e)} \right] \Big|_S = 0 \quad (3.97)$$

ce qui implique un champ potentiel fictif nul partout dans $\Omega^{(e)}$. Ceci permet d'écrire (d'après (3.84), (3.86) et (3.87)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi^{(i)} \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(i)} \\ \frac{1}{2} \varphi^{(i)} \quad \text{si } \mathbf{x} \in S \\ 0 \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(e)} \end{array} \right\} = - \int_S \mathbf{n}(\mathbf{x}') \cdot \left[G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \nabla' \varphi^{(i)} + \varphi^{(i)} \nabla' G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \right] dS' \quad (3.98)$$

Selon que le potentiel $\varphi^{(i)}$, ou son gradient normal à la frontière $\mathbf{n}' \cdot \nabla' \varphi^{(i)}$, soit à déterminer, on résout une équation de Fredholm de deuxième ou première espèce, respectivement.

3.3.3. Application de la Méthode Intégrale aux Frontières au problème électrique

3.3.3.1. Formulation MIF en régime électrostatique quasipermanent

Nous nous proposons de déterminer le champ électrique au voisinage d'une goutte de forme quelconque évoluant dans un microsysteme. La configuration est indiquée par la figure 3.13 (bien que les électrodes puissent avoir une forme quelconque). Le fluide de la goutte est noté par l'exposant (i) et celui du milieu extérieur par l'exposant (e) .

Avec les hypothèses énoncées dans la partie électrique, les équations à résoudre pour le potentiel électrique $V^{(k)}$ ainsi que les conditions aux limites associées s'écrivent :

$$\nabla^2 V^{(k)} = 0, \quad k = i, e \quad (3.99)$$

$$V^{(e)} \Big|_{\Gamma_1} = 0 \quad (3.100)$$

$$V^{(e)}|_{\Gamma_2} = V(t) \quad (3.101)$$

$$\frac{\partial V^{(e)}}{\partial n}|_{\Gamma_3} = 0 \quad (3.102)$$

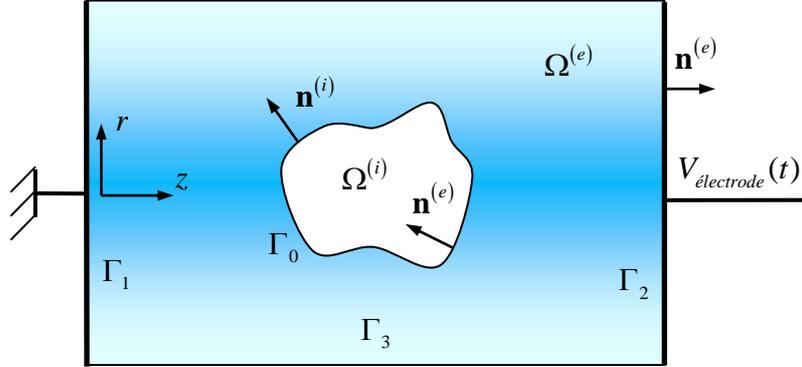


Figure 3.13. Configuration d'étude : le système est composé d'une goutte immergée dans un liquide diélectrique. Les électrodes sont portées à des potentiels différents. La frontière latérale est isolante.

Au niveau de l'interface des deux fluides Γ_0 , la continuité du potentiel électrique est vérifiée :

$$V^{(i)}|_{\Gamma_0} = V^{(e)}|_{\Gamma_0} \quad (3.103)$$

Rappelons que l'équation de transport des charges électriques est satisfaite :

$$\frac{Dq_s}{Dt} + u_n (\nabla \cdot \mathbf{n}) q_s + q_s \nabla_s \cdot \mathbf{u}_s + \nabla_s \cdot \mathbf{K}_s - \llbracket \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \rrbracket = 0 \quad (3.104)$$

où :

$$\mathbf{K}_s = -D_s \nabla_s q_s|_{\text{interface}}$$

et :

$$q_s = \llbracket \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \rrbracket = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}^{(i)} - \mathbf{D}^{(e)}) \quad (3.105)$$

D_s représente la diffusivité des charges électriques à l'interface, u_n la composante normale de la vitesse à l'interface et \mathbf{u}_s la vitesse tangentielle à l'interface.

La continuité du potentiel électrique à travers cette interface devient, avec les nouvelles notations,

$$V^{(i)}|_{\text{interface}} = V^{(e)}|_{\text{interface}} \quad (3.106)$$

La deuxième identité de Green permet d'écrire l'équation (3.99) (pour chaque fluide k) sous forme intégrale :

$$\alpha^{(k)}(\mathbf{x})V^{(k)}(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega^{(k)}} \left(G \frac{\partial V^{(k)}}{\partial n^{(k)}} - V^{(k)} \frac{\partial G}{\partial n^{(k)}} \right) dS', \quad k = i, e \quad (3.107)$$

où $\partial\Omega^{(k)}$ est la frontière du domaine $\Omega^{(k)}$. Pour la goutte $\partial\Omega^{(i)} = \Gamma_0$, alors que pour le fluide extérieur $\partial\Omega^{(e)} = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

Multiplions l'équation intégrale (3.107) pour $k = i$ par $\varepsilon^{(i)}$ et celle pour $k = e$ par $\varepsilon^{(e)}$, puis effectuons la sommation, membre à membre ; nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \alpha^{(i)}\varepsilon^{(i)}V^{(i)} + \alpha^{(e)}\varepsilon^{(e)}V^{(e)} &= -\int_{\Gamma_0} Gq_s dS' - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial G}{\partial n'} (\varepsilon^{(i)}V^{(i)} - \varepsilon^{(e)}V^{(e)}) dS' \\ &\quad - \varepsilon^{(e)} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} \left(G \frac{\partial V^{(e)}}{\partial n'} - V^{(e)} \frac{\partial G}{\partial n'} \right) dS' \end{aligned} \quad (3.108)$$

où $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}^{(e)}(\mathbf{x}')$ sur $\partial\Omega^{(e)}$ (ce qui implique que $\mathbf{n}' = \mathbf{n}^{(i)}(\mathbf{x}')$ sur $\partial\Omega^{(i)}$). La continuité du potentiel électrique à travers l'interface permet de simplifier (3.108) en :

$$\begin{aligned} \alpha^{(i)}\varepsilon^{(i)}V^{(i)} + \alpha^{(e)}\varepsilon^{(e)}V^{(e)} &= -\int_{\Gamma_0} Gq_s dS' - (\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}) \int_{\Gamma_0} \frac{\partial G}{\partial n'} V^{(e)} dS' \\ &\quad - \varepsilon^{(e)} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} \left(G \frac{\partial V^{(e)}}{\partial n'} - V^{(e)} \frac{\partial G}{\partial n'} \right) dS' \end{aligned} \quad (3.109)$$

Sur l'interface Γ_0 , l'équation (3.109) devient :

$$\begin{aligned} (\alpha^{(i)}\varepsilon^{(i)} + \alpha^{(e)}\varepsilon^{(e)})V^{(e)} &= -\int_{\Gamma_0} Gq_s dS' - (\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}) \int_{\Gamma_0} \frac{\partial G}{\partial n'} V^{(e)} dS' \\ &\quad - \varepsilon^{(e)} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} \left(G \frac{\partial V^{(e)}}{\partial n'} - V^{(e)} \frac{\partial G}{\partial n'} \right) dS' \end{aligned} \quad (3.110)$$

Sur le reste des frontières ($\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$), l'équation (3.109) devient :

$$\begin{aligned} \alpha^{(e)}\varepsilon^{(e)}V^{(e)} &= -\int_{\Gamma_0} Gq_s dS' - (\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}) \int_{\Gamma_0} \frac{\partial G}{\partial n'} V^{(e)} dS' \\ &\quad - \varepsilon^{(e)} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} \left(G \frac{\partial V^{(e)}}{\partial n'} - V^{(e)} \frac{\partial G}{\partial n'} \right) dS' \end{aligned} \quad (3.111)$$

Le système d'équations à résoudre est l'équation (3.110) sur l'interface Γ_0 et l'équation

(3.111) sur les frontières $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ avec les inconnues $V^{(e)}|_{\Gamma_0}$, $\frac{\partial V^{(e)}}{\partial n'}|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$ et $V^{(e)}|_{\Gamma_3}$,

respectivement. q_s est supposée connue à partir de l'équation (3.104).

Après résolution de ce système nous disposons, entre autres choses, du potentiel électrique $V^{(i)}|_{\Gamma_0}$, puisque $V^{(i)}|_{\Gamma_0} = V^{(e)}|_{\Gamma_0}$. L'équation (3.107) pour $k = i$ permet de déduire la composante normale du champ électrique du fluide intérieur $\frac{\partial V^{(i)}}{\partial n'}|_{\Gamma_0}$ le long de l'interface Γ_0 . Connaissant $\frac{\partial V^{(i)}}{\partial n'}|_{\Gamma_0}$ et q_s , nous déduisons $\frac{\partial V^{(e)}}{\partial n'}|_{\Gamma_0}$ à partir de (3.105) et mettons à jour q_s (pour le pas de temps suivant) grâce à l'équation d'évolution (3.104).

3.3.3.2. Formulation MIF en régime électrostatique sinusoïdal

Une démarche similaire est entreprise pour résoudre le problème électrique en régime électrique sinusoïdal. Puisque les propriétés électriques de chaque milieu sont supposées constantes, le potentiel électrique complexe vérifie donc :

$$\nabla^2 \bar{V}^{(k)} = 0, \quad k = i, e \quad (3.112)$$

qui, selon la deuxième identité de Green, donne l'équation intégrale suivante :

$$\alpha(\mathbf{x}) \bar{V}^{(k)}(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \left(G \frac{\partial \bar{V}^{(k)}}{\partial n'} - \bar{V}^{(k)} \frac{\partial G}{\partial n'} \right) dS', \quad k = i, e \quad (3.113)$$

Réécrivons la condition à l'interface (2.64) que doit satisfaire le champ électrique :

$$\mathbf{n} \cdot (\bar{\mathbf{j}}^{(i)} - \bar{\mathbf{j}}^{(e)}) = 0 \quad (3.114)$$

La multiplication de l'équation (3.113) par $\bar{\sigma}^{(k)}$ et la sommation, membre à membre, pour $k = i, e$, donnent :

$$\begin{aligned} \alpha^{(i)} \bar{\sigma}^{(i)} \bar{V}^{(i)} + \alpha^{(e)} \bar{\sigma}^{(e)} \bar{V}^{(e)} &= - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial G}{\partial n'} (\bar{\sigma}^{(i)} - \bar{\sigma}^{(e)}) \bar{V}^{(e)} dS' \\ &- \bar{\sigma}^{(e)} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} \left(G \frac{\partial \bar{V}^{(e)}}{\partial n'} - \bar{V}^{(e)} \frac{\partial G}{\partial n'} \right) dS \end{aligned} \quad (3.115)$$

Sur l'interface Γ_0 , l'équation (3.115) devient :

$$\begin{aligned} (\alpha^{(i)} \bar{\sigma}^{(i)} + \alpha^{(e)} \bar{\sigma}^{(e)}) \bar{V}^{(e)} &= - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial G}{\partial n'} (\bar{\sigma}^{(i)} - \bar{\sigma}^{(e)}) \bar{V}^{(e)} dS' \\ &- \bar{\sigma}^{(e)} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} \left(G \frac{\partial \bar{V}^{(e)}}{\partial n'} - \bar{V}^{(e)} \frac{\partial G}{\partial n'} \right) dS' \end{aligned} \quad (3.116)$$

Alors que sur le reste des frontières ($\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$), elle s'écrit :

$$\alpha^{(e)} \bar{\sigma}^{(e)} \bar{V}^{(e)} = - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial G}{\partial n'} (\bar{\sigma}^{(i)} - \bar{\sigma}^{(e)}) \bar{V}^{(e)} dS' - \bar{\sigma}^{(e)} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} \left(G \frac{\partial \bar{V}^{(e)}}{\partial n'} - \bar{V}^{(e)} \frac{\partial G}{\partial n'} \right) dS' \quad (3.117)$$

Le système d'équations à résoudre est l'équation (3.116) sur l'interface Γ_0 et l'équation (3.117) sur les frontières $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ avec les inconnues $\bar{V}^{(e)}|_{\Gamma_0}$, $\frac{\partial \bar{V}^{(e)}}{\partial n'}|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$ et $\bar{V}^{(e)}|_{\Gamma_3}$, respectivement.

Après résolution de ce système nous disposons du potentiel $\bar{V}^{(i)}|_{\Gamma_0}$, puisque $\bar{V}^{(i)}|_{\Gamma_0} = \bar{V}^{(e)}|_{\Gamma_0}$. L'équation (3.113) pour $k = i$ permet de déduire la composante normale

du champ électrique du fluide intérieur $\frac{\partial \bar{V}^{(i)}}{\partial n'}|_{\Gamma_0}$ le long de l'interface Γ_0 . Connaissant

$\frac{\partial \bar{V}^{(i)}}{\partial n'}|_{\Gamma_0}$ nous déduisons $\frac{\partial \bar{V}^{(e)}}{\partial n'}|_{\Gamma_0}$ à partir de la continuité de la composante normale de la

densité complexe du courant (3.114).

3.3.3.3. Formulation MIF en régimes électrostatiques quasipermanent et sinusoïdal par la méthode des perturbations

Connaissant la solution du problème électrique en l'absence de goutte, la méthode des perturbations permet de résoudre, à la place du problème électrique initial, un problème équivalent où seule la perturbation du champ électrique due à la goutte est calculée. Pour se fixer les idées, on prend la configuration d'une goutte entre deux électrodes planes.

En l'absence de la goutte dans la configuration étudiée, la solution triviale du potentiel électrique s'écrit :

$$V^{(0)}(\mathbf{x}) = V_{\text{électrode}}(t) \frac{z}{L} \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega^{(i)} \cup \Omega^{(e)} \quad (3.118)$$

L est la distance interélectrodes. Le champ électrique associé à cette distribution de potentiel est donné par :

$$\mathbf{E}^{(0)} = -\nabla V^{(0)} = -\frac{V_{\text{électrode}}}{L} \mathbf{e}_z \quad (3.119)$$

Au lieu de viser la solution complète, on a cherché à calculer uniquement :

$$\zeta(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) - V^{(0)}(\mathbf{x}) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega^{(i)} + \Omega^{(e)} \quad (3.120)$$

qui satisfait aussi l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 \zeta = \nabla^2 V - \nabla^2 V^{(0)} = 0 \quad (3.121)$$

avec les nouvelles conditions aux limites :

- sur les deux électrodes :

$$\zeta^{(e)} \Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0 \quad (3.122)$$

- et sur la frontière latérale :

$$\zeta^{(e)} \Big|_{\Gamma_3} = 0 \quad (3.123)$$

$$\frac{\partial \zeta^{(e)}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} = 0 \quad (3.124)$$

De cette manière, la contribution intégrale de la frontière latérale Γ_3 devient nulle ; d'un point de vue électrique, il n'y a plus besoin de considérer cette frontière.

Sur l'interface goutte-fluide Γ_0 , les conditions (3.103) et (3.105) deviennent :

$$\zeta^{(i)} \Big|_{\Gamma_0} = \zeta^{(e)} \Big|_{\Gamma_0} \quad (3.125)$$

$$q_s = \mathbf{n} \cdot (\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}) \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{n} \cdot (-\varepsilon^{(i)} \nabla \zeta^{(i)} + \varepsilon^{(e)} \nabla \zeta^{(e)}) \quad (3.126)$$

Si l'on applique la deuxième identité de Green à l'équation (3.121), la forme intégrale suivante est déduite :

$$\alpha^{(k)}(\mathbf{x}) \zeta^{(k)}(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega^{(k)}} \left(G \frac{\partial \zeta^{(k)}}{\partial n^{(k)}} - \zeta^{(k)} \frac{\partial G}{\partial n^{(k)}} \right) dS', \quad k = i, e \quad (3.127)$$

En multipliant cette équation pour $k = i$ (resp. $k = e$) par $\varepsilon^{(i)}$ (resp. $\varepsilon^{(e)}$) puis en sommant, on obtient l'équation suivante sur l'interface Γ_0 :

$$\begin{aligned} & \left(\alpha^{(i)} \varepsilon^{(i)} + \alpha^{(e)} \varepsilon^{(e)} \right) \zeta^{(e)}(\mathbf{x}) = - \int_{\Gamma_0} G q_s dS' \\ & - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial G}{\partial n'} (\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}) \zeta^{(e)} dS' - \varepsilon^{(e)} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} \left(G \frac{\partial \zeta^{(e)}}{\partial n'} - \zeta^{(e)} \frac{\partial G}{\partial n'} \right) dS' \end{aligned} \quad (3.128)$$

dans laquelle la condition (3.125) a été introduite. Alors que sur les frontières $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, la même somme donne :

$$\begin{aligned} & \alpha^{(e)} \varepsilon^{(e)} \zeta^{(e)}(\mathbf{x}) = - \int_{\Gamma_0} G q_s dS' \\ & - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial G}{\partial n'} (\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}) \zeta^{(e)} dS' - \varepsilon^{(e)} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} \left(G \frac{\partial \zeta^{(e)}}{\partial n'} - \zeta^{(e)} \frac{\partial G}{\partial n'} \right) dS' \end{aligned} \quad (3.129)$$

L'introduction des conditions aux limites (3.122), (3.123) et (3.124), permet d'écrire :

- Sur l'interface Γ_0 :

$$\begin{aligned} & \left(\alpha^{(i)} \varepsilon^{(i)} + \alpha^{(e)} \varepsilon^{(e)} \right) \zeta^{(e)}(\mathbf{x}) = - \int_{\Gamma_0} G q_s dS' \\ & - \int_S \frac{\partial G}{\partial n'} \left(\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)} \right) \zeta^{(e)} dS' - \varepsilon^{(e)} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} G \frac{\partial \zeta^{(e)}}{\partial n'} dS' \end{aligned} \quad (3.130)$$

- et sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

$$\begin{aligned} & \alpha^{(e)} \varepsilon^{(e)} \zeta^{(e)}(\mathbf{x}) = - \int_{\Gamma_0} G q_s dS' \\ & - \int_S \frac{\partial G}{\partial n'} \left(\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)} \right) \zeta^{(e)} dS' - \varepsilon^{(e)} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} G \frac{\partial \zeta^{(e)}}{\partial n'} dS' \end{aligned} \quad (3.131)$$

En résumé, les inconnues à déterminer sont ; sur l'interface Γ_0 le potentiel $\zeta^{(e)}|_S$ et sur les électrodes $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ la composante normale du champ électrique $\partial \zeta^{(e)} / \partial n|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$. Après calcul des ces inconnues, on résout l'équation (3.127) , pour $k = i$, où la seule inconnue à déterminer est $\partial \zeta^{(i)} / \partial n|_{\Gamma_0}$. Ainsi est achevée la résolution du problème électrique en régime quasistatique.

Pour le régime sinusoïdal, la démarche est similaire en tous points à celle entreprise en régime quasistatique si bien qu'elle ne sera pas présentée ici.

3.3.4. Application de la Méthode Intégrale aux Frontières au problème hydrodynamique : la méthode de Bernoulli

Il existe plusieurs méthodes pour le calcul d'un champ de vitesses dans deux fluides de part et d'autre d'une interface déformable. Les deux méthodes les plus utilisées sont la méthode vortex généralisée et la méthode de Bernoulli généralisée [43]. La première exprime explicitement l'évolution temporelle du saut du potentiel hydrodynamique à travers l'interface, tandis que la deuxième définit un paramètre intermédiaire, appelé potentiel hydrodynamique généralisé, qui servira au calcul du saut de potentiel hydrodynamique. Ces méthodes sont équivalentes. Toutefois c'est la deuxième méthode, nous semblant plus intuitive, qui a été choisie dans ce travail.

3.3.4.1. Evolution temporelle du potentiel hydrodynamique

La soustraction membre à membre de l'équation de Bernoulli écrite pour les fluides $k = i, e$ donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho^{(i)} \varphi^{(i)} - \rho^{(e)} \varphi^{(e)}] = -\frac{1}{2} [\rho^{(i)} (\mathbf{u}^{(i)})^2 - \rho^{(e)} (\mathbf{u}^{(e)})^2] - [p^{(i)} - p^{(e)}] + [\rho^{(i)} - \rho^{(e)}] gz \quad (3.132)$$

que l'on divise par $(\rho^{(i)} + \rho^{(e)})$ pour obtenir :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1+At}{2} (\mathbf{u}^{(i)})^2 - \frac{1-At}{2} (\mathbf{u}^{(e)})^2 \right] - \frac{1}{\rho^{(i)} + \rho^{(e)}} [p^{(i)} - p^{(e)}] + At \times gz \quad (3.133)$$

où $At = \frac{\rho^{(i)} - \rho^{(e)}}{\rho^{(i)} + \rho^{(e)}}$ est le nombre d'Atwood et Φ le potentiel hydrodynamique généralisé défini par :

$$\Phi = \frac{\rho^{(i)} \varphi^{(i)} - \rho^{(e)} \varphi^{(e)}}{\rho^{(i)} + \rho^{(e)}} \quad (3.134)$$

L'introduction de l'expression du saut de pression à travers l'interface Γ_0 dans (3.133) implique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = & -\frac{1}{2} \left[\frac{1+At}{2} (\mathbf{u}^{(i)})^2 - \frac{1-At}{2} (\mathbf{u}^{(e)})^2 \right] + At \times gz \\ & - \frac{1}{\rho^{(i)} + \rho^{(e)}} \left[2\mu^{(i)} \frac{\partial v_n^{(i)}}{\partial n} - 2\mu^{(e)} \frac{\partial v_n^{(e)}}{\partial n} \right. \\ & \left. + \varepsilon^{(i)} \left((E_n^{(i)})^2 - (E_t)^2 \right) - \varepsilon^{(e)} \left((E_n^{(e)})^2 - (E_t)^2 \right) + 2H\gamma \right] \end{aligned} \quad (3.135)$$

Cette forme d'équation a l'avantage de ne relier l'évolution du potentiel hydrodynamique généralisé qu'aux variables cinématiques et géométriques telles la vitesse, l'altitude et la courbure de l'interface et au champ électrique de part et d'autre de l'interface Γ_0 .

3.3.4.2. Equations hydrodynamiques intégrales (méthode de Bernoulli)

L'application de la deuxième identité de Green à l'équation de Laplace pour le potentiel hydrodynamique donne pour chaque fluide k :

$$\alpha^{(k)}(\mathbf{x}) \varphi^{(k)}(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega^{(k)}} \left(G \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial n^{(k)}} - \varphi^{(k)} \frac{\partial G}{\partial n^{(k)}} \right) dS' \quad (3.136)$$

Pour $\mathbf{x} \in \Gamma_0$, faisons la somme membre à membre de cette équation appliquée aux fluides (i) et (e) :

$$\frac{1}{2} (\phi^{(e)} + \phi^{(i)}) \Big|_{\Gamma_0} = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial' G}{\partial n'} \tau dS' - \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} G \frac{\partial' \phi^{(e)}}{\partial n'} dS' + \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} \frac{\partial' G}{\partial n'} \phi^{(e)} dS' \quad (3.137)$$

où

$$\tau = \left(\phi^{(e)} - \phi^{(i)} \right) \Big|_{\Gamma_0} \quad (3.138)$$

représentant le saut du potentiel à travers l'interface, est appelé intensité du doublet hydrodynamique.

Nous vérifions aisément que τ est relié au potentiel hydrodynamique généralisé Φ par la formule :

$$\Phi = \frac{1}{2} \tau + \frac{At}{2} \left(\phi^{(e)} + \phi^{(i)} \right) \Big|_{\Gamma_0} \quad (3.139)$$

En éliminant $\left(\phi^{(e)} + \phi^{(i)} \right) \Big|_{\Gamma_0}$ entre (3.137) et (3.139), nous obtenons l'équation :

$$\frac{1}{2} \tau + At \times \left(\int_{\Gamma_0} \frac{\partial' G}{\partial n'} \tau dS' + \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} \frac{\partial' G}{\partial n'} \phi^{(e)} dS' \right) = \Phi + At \times \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} G \frac{\partial' \phi^{(e)}}{\partial n'} dS' \quad (3.140)$$

Pour $\mathbf{x} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, la même somme (de (3.136)) donne :

$$\frac{1}{2} \phi^{(e)} \Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial' G}{\partial n'} \tau dS' - \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} G \frac{\partial' \phi^{(e)}}{\partial n'} dS' + \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} \frac{\partial' G}{\partial n'} \phi^{(e)} dS' \quad (3.141)$$

Si l'on admet que Φ est mis à jour à chaque nouveau pas de temps par l'équation (3.135), donc connu à l'instant de calcul en cours, alors l'équation (3.140) devient une équation de Fredholm de deuxième espèce pour l'inconnue τ , au même titre que l'équation (3.141) pour l'inconnue $\phi^{(e)} \Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3}$. Reste à estimer correctement les vitesses,

$\mathbf{u}^{(i)} \Big|_{\Gamma_0}$ et $\mathbf{u}^{(e)} \Big|_{\Gamma_0}$. Bien que le calcul des champs électriques $\mathbf{E}^{(i)}$ et $\mathbf{E}^{(e)}$ ait été, quant à lui, décrit avec suffisamment de détails dans la section 2.5.2.3, notons la légère modification apportée pour inclure leur effet dans le présent traitement. En effet, on ne comptabilisera plus les carrés des champs normaux instantanés dans l'équation d'évolution (3.135) du potentiel hydrodynamique généralisé Φ mais bien leur contribution moyenne entre deux pas de temps successifs ; le passé et l'instant en cours, selon la formule :

$$\left(E_n^{(k)} \right)_{moy}^2 = \frac{1}{t^{(n)} - t^{(n-1)}} \int_{t^{(n-1)}}^{t^{(n)}} \left(E_n^{(k)} \right)^2 dt \quad (3.142)$$

Notons ensuite qu'une fois les équations (3.140) et (3.141) résolues (et donc τ , entre autres, calculé), nous pouvons déterminer grâce à (3.137) la quantité $\frac{1}{2} \left(\phi^{(e)} + \phi^{(i)} \right) \Big|_{\Gamma_0}$, et par-là même $\phi^{(i)} \Big|_{\Gamma_0}$ et $\phi^{(e)} \Big|_{\Gamma_0}$, selon les relations (triviales) suivantes :

$$\phi^{(i)} \Big|_{\Gamma_0} = \frac{1}{2} \left(\phi^{(e)} + \phi^{(i)} \right) \Big|_{\Gamma_0} - \tau \quad (3.143)$$

$$\phi^{(e)} \Big|_{\Gamma_0} = \frac{1}{2} \left(\phi^{(e)} + \phi^{(i)} \right) \Big|_{\Gamma_0} + \tau \quad (3.144)$$

Les vitesses tangentielles seront ainsi déduites par dérivation par rapport à la paramétrisation de l'interface Γ_0 , soit :

$$u_t^{(k)} = \nabla_s \phi^{(k)}, \quad k = i, e \quad (3.145)$$

Demeure la vitesse normale à l'interface Γ_0 , $\frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0}$, qui, connaissant $\phi^{(i)} \Big|_{\Gamma_0}$, sera déterminée par résolution de l'équation (3.136), écrite pour le fluide (i) sous la forme d'une équation de Fredholm de première espèce :

$$\int_{\Gamma_0} G \frac{\partial' \phi^{(i)}}{\partial n'} dS' = \frac{1}{2} \phi^{(i)} \Big|_{\Gamma_0} + \int_{\Gamma_0} \frac{\partial' G}{\partial n'} \phi^{(i)} dS' \quad (3.146)$$

La nouvelle position de l'interface sera déterminée par l'intégration de l'équation :

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{u}^{(i)} + \mathbf{u}^{(e)} \right) \quad (3.147)$$

et la mise à jour du potentiel généralisé Φ sera assurée par l'intégration (par rapport au temps) de l'équation (3.135). Une nouvelle résolution pour le pas de temps suivant peut ainsi être entamée.

3.3.5. Algorithme général de calcul

La méthode de calcul d'électrodéformation repose sur le découplage entre les équations qui régissent le champ électrique et les équations qui régissent le champ hydrodynamique. L'algorithme général de calcul consiste donc à effectuer à chaque pas de temps le calcul du champ électrique et le greffer ensuite au calcul du champ hydrodynamique. Le diagramme suivant résume les principales étapes observées pour le suivi de l'électrodéformation d'une interface fluide-fluide mobile.

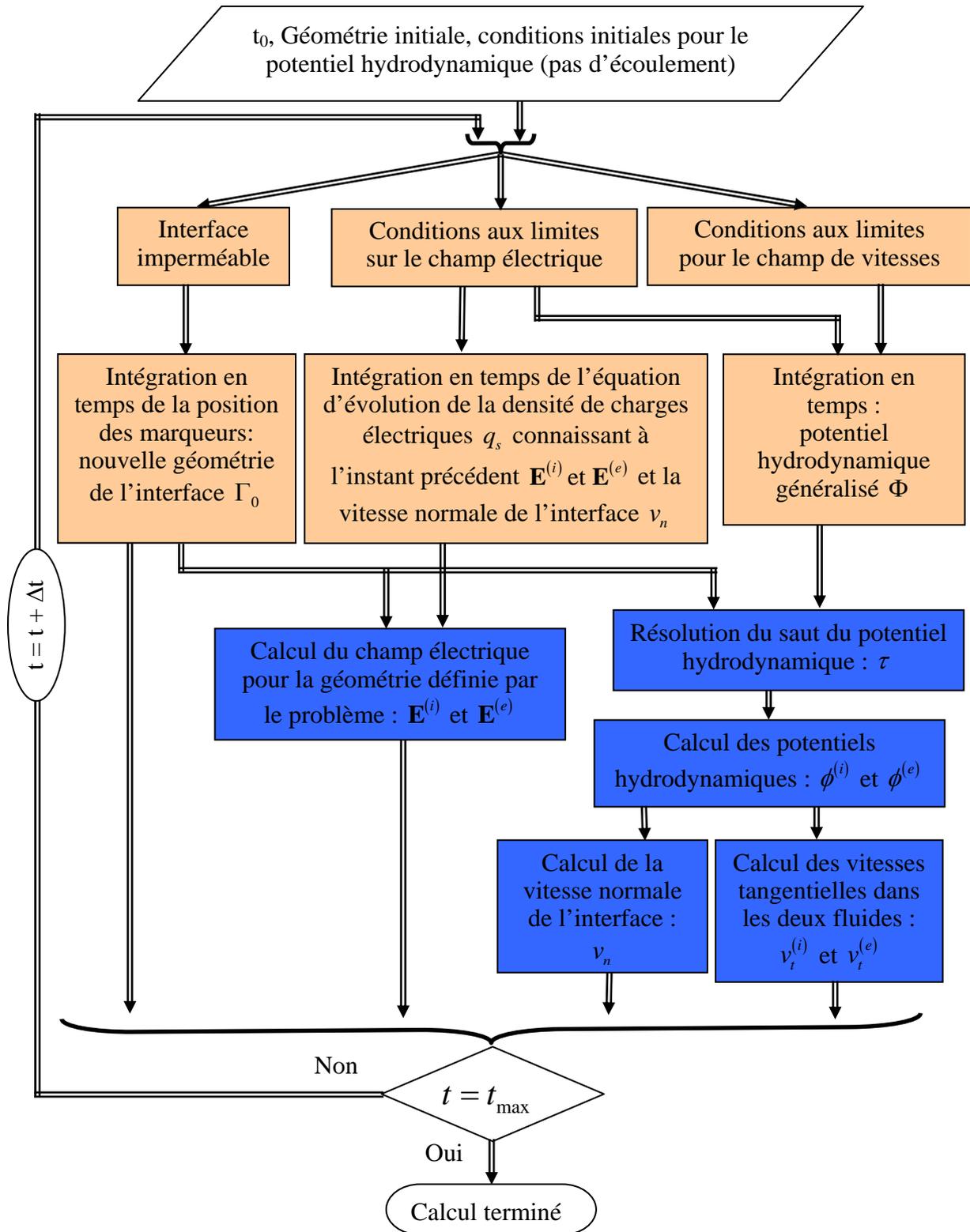


Figure 3.13. Méthode de Bernoulli généralisée pour le suivi d'une interface soumise à des contraintes électrohydrodynamiques

Annexe 3.1

Unicité de la solution pour le problème de Laplace

On se donne le problème de Laplace suivant défini dans un domaine Ω :

$$\nabla^2 \varphi^*(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{Ann3.1-1})$$

$$\varphi^*(\mathbf{x}) = \varphi_{\partial\Omega_D} \quad \text{si } \mathbf{x} \in \partial\Omega_D \quad (\text{Ann3.1-2})$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \varphi^*(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi^*(\mathbf{x}) = \theta_{\partial\Omega_N} \quad \text{si } \mathbf{x} \in \partial\Omega_N \quad (\text{Ann3.1-3})$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure à Ω de frontière $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$ ($\partial\Omega_D \neq \emptyset$).

On admet l'existence d'une solution pour ce problème et on tente de démontrer son unicité.

Pour cela, supposons que deux solutions φ_1 et φ_2 existent et étudions leur différence

$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Il est clair que φ est deux fois différentiable et satisfait le problème suivant :

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{Ann3.1-4})$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{si } \mathbf{x} \in \partial\Omega_D \quad (\text{Ann3.1-5})$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{si } \mathbf{x} \in \partial\Omega_N \quad (\text{Ann3.1-6})$$

Multiplions l'équation (Ann3.1-4) par φ , intégrons la sur le domaine Ω et effectuons les opérations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi \nabla^2 \varphi dS &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} \varphi \nabla \cdot (\nabla \varphi) dV &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) dV - \int_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 dV &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot (\varphi \nabla \varphi) dS - \int_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 dV &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{\partial\Omega} \varphi (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi) dS - \int_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 dV &= 0 \end{aligned}$$

Or en vertu de (Ann3.1-5) et (Ann3.1-6):

$$\varphi (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi) \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (\text{Ann3.1-7})$$

Finalement :

$$\int_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 dV = 0 \quad (\text{Ann3.1-8})$$

Soit encore :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega: \nabla \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{Ann3.1-9})$$

Prenons maintenant un point $\mathbf{y} \in \partial\Omega_D$, nous savons, d'après (Ann3.1-5) que :

$$\varphi(\mathbf{y}) = 0 \quad (\text{Ann3.1-10})$$

L'intégration de (Ann3.1-9) sur un chemin quelconque entre \mathbf{y} et $\mathbf{x} \in \Omega$ donne :

$$\int_{\mathbf{y}}^{\mathbf{x}} d\mathbf{l} \cdot \nabla \varphi = 0$$

Soit :

$$[\varphi]_{\mathbf{y}}^{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y}) = 0$$

Puisque \mathbf{x} est quelconque dans Ω , il vient :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega: \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{Ann3.1-11})$$

La fonction φ est identiquement nulle sur Ω d'où l'unicité de la solution du problème défini par (Ann3.1-1), (Ann3.1-2) et (Ann3.1-3), ce qui clôt la démonstration.

Annexe 3.2

Solution de l'équation de Laplace en symétrie de révolution

Soit l'équation de Laplace suivante à résoudre :

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (\text{Ann3.2-1})$$

où ψ est la fonction scalaire que l'on cherche à déterminer.

En coordonnées sphériques, l'équation (Ann3.2-1) s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] = 0 \quad (\text{Ann3.2-1})$$

Si l'on observe la symétrie axiale, c'est-à-dire si :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{Ann3.2-3})$$

alors l'équation (Ann3.2-2) devient :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (\text{Ann3.2-4})$$

On effectue maintenant la séparation des variables. Pour ce faire, on suppose que la solution s'écrit sous la forme :

$$\psi = R(r) \times \Theta(\theta) \quad (\text{Ann3.2-5})$$

que l'on introduit dans (Ann3.2-4). Ceci implique les deux équations suivantes :

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1) \quad (\text{Ann3.2-6})$$

$$\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \quad (\text{Ann3.2-7})$$

où l est un paramètre entier indépendant de r et de θ .

La solution de l'équation (Ann3.2-6) prend la forme simple suivante :

$$R_l(r) = c_{1,l} r^{-(l+1)} + c_{2,l} r^l \quad (\text{Ann3.2-8})$$

Tandis que l'équation (Ann3.2-7) est résolue par développement en série infinie. L'identification des coefficients des puissances croissantes de θ (plus précisément de $\cos \theta$) implique la forme suivante de la solution :

$$\Theta_l(x) = P_l(x) \quad (\text{Ann3.2-9})$$

où :

$$x = \cos(\theta) \quad (\text{Ann3.2-10})$$

et $P_l(x)$ est le polynôme de Legendre normalisé d'ordre l . Il est défini par :

$$P_l(x) = c_{3,l} \begin{cases} y_1(x) & \text{si } l \text{ pair} \\ y_2(x) & \text{si } l \text{ impair} \end{cases} \quad (\text{Ann3.2-11})$$

où :

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{[(l-2n+2)\dots(l-2)l][(l+1)(l+3)\dots(l+2n-1)]}{(2n)!} x^{2n} \quad (\text{Ann3.2-12})$$

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{[(l-2n+1)\dots(l-3)(l-1)][(l+2)(l+4)\dots(l+2n)]}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (\text{Ann3.2-13})$$

Les premiers polynômes de Legendre s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\ P_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation de Laplace sera la somme de toutes ces fonctions particulières, $R_l(r) \times P_l(\cos \theta)$, soit :

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} (c_{1,l} r^{-(l+1)} + c_{2,l} r^l) P_l(\cos \theta) \quad (\text{Ann3.2-14})$$

Les coefficients qui interviennent dans (Ann3.2-8) et (Ann3.2-11) sont déduits des conditions aux limites associées à l'équation différentielle (Ann3.2-1).

Dans le cas où ψ est le potentiel électrique qu'on cherche à calculer, l'unique solution qui garantit l'uniformité du champ à l'infini est celle qui comprend un terme en $\cos \theta$, soit celle qui correspond à $l = 1$:

$$\psi(r, \theta) = \left(c_{1,1} \frac{1}{r^2} + c_{2,1} r \right) \cos \theta \quad (\text{Ann3.2-15})$$

Chapitre 4 : Déplacement de particules rigides

Dans les microsystèmes, le phénomène de DEP sur particules rigides sous champ électrique produit des déplacements à faible nombre de Reynolds. Le traitement hydrodynamique peu donc s'opérer simplement ; la force hydrodynamique agissant sur la particule rigide est la traînée de Stokes, sauf au voisinage immédiat des électrodes. En pratique, la vitesse stationnaire (limite ou encore terminale) est connue lorsqu'on connaît la force (électrique) qui s'exerce sur la particule. Etudier la DEP revient donc essentiellement à déterminer la force DEP qui s'applique sur particules rigides.

Le modèle le plus communément utilisé pour estimer la force DEP appliquée à une particule est le modèle du dipôle ponctuel [129, 136, 182, 183, 189, 190, 252, 286]. C'est l'approche la plus simple à mettre en œuvre. La particule est supposée de taille négligeable d'une part et ne perturbant pas le champ électrique qui lui est appliqué d'autre part. Elle n'est donc pas prise en compte dans le calcul du champ électrique ce qui simplifie considérablement le modèle numérique à traiter. Pour le dimensionnement des microsystèmes biologiques de DEP, le modèle du dipôle ponctuel peut devenir insuffisant du fait que la distance entre électrodes n'est pas beaucoup plus grande que la taille des particules. Certains auteurs proposent de considérer la contribution des moments multipolaires d'ordre supérieur (voir chapitre 2) [253] mais cette méthode reste une méthode qui néglige encore la perturbation du champ électrique due à la présence de la particule. Pour pouvoir estimer de manière plus précise les forces DEP appliquées sur les particules dans ces systèmes, nous utilisons la méthode plus générale du tenseur de Maxwell qui, elle, tient compte de la présence de la particule. Le tenseur de Maxwell tel que défini par l'expression (2.8) du chapitre 2, outre la force DEP, inclut la contribution de toutes les forces d'origine électrique (voir chapitre 2) et permet de calculer la force électrique totale qui agit sur la particule. Ce calcul nécessite de connaître le champ électrique perturbé autour de la particule. Les travaux analytiques qui utilisent la méthode du tenseur de Maxwell ne concernent que des géométries simples [139, 294]. Les méthodes numériques permettent une mise en œuvre relativement aisée de cette méthode pour des géométries complexes. La méthode du tenseur de Maxwell reste plus coûteuse que la méthode du dipôle ponctuel, même lorsqu'elle est traitée numériquement.

Nous commençons, dans ce chapitre (section 4.1), par une étape de validation des modèles MIF mis en place dans CANARD (chapitre 3). La validation est effectuée par confrontation avec des solutions analytiques, d'une part, et par comparaison avec les solutions approchées obtenues en utilisant le logiciel FEM FEMLAB™, d'autre part.

Dans la section 4.2, nous délimitons le domaine de validité de la méthode du dipôle ponctuel dans nos microsystèmes. Deux configurations sont étudiées ici. La première traite d'une particule sphérique homogène placée entre une électrode plane et une pointe (configuration pointe-plan). La seconde aborde le cas de cellules biologiques de forme ellipsoïdale (section 4.3) : cette configuration permet d'étudier l'influence de la forme de la particule sur la force DEP. Le calcul des forces d'interaction mutuelle qui s'exercent entre deux cellules biologiques est abordée dans la section 4.4.

4.1. Validation des Modèles numériques CANARD et FEMLAB

Pour la configuration pointe-plan, nous disposons de solutions analytiques pour le champ électrique. Nous utilisons ces solutions pour valider les codes CANARD et FEMLAB.

4.1.1. Description de la configuration pointe-plan

La configuration pointe-plan est classiquement utilisée pour créer un champ électrique non uniforme. En pratique, cette configuration correspond à une électrode plane circulaire au-dessus de laquelle est placée une pointe (figure 4.1). Une goutte de solution contenant les particules est disposée sur l'électrode plane, alors que la pointe est mise en contact avec le liquide.

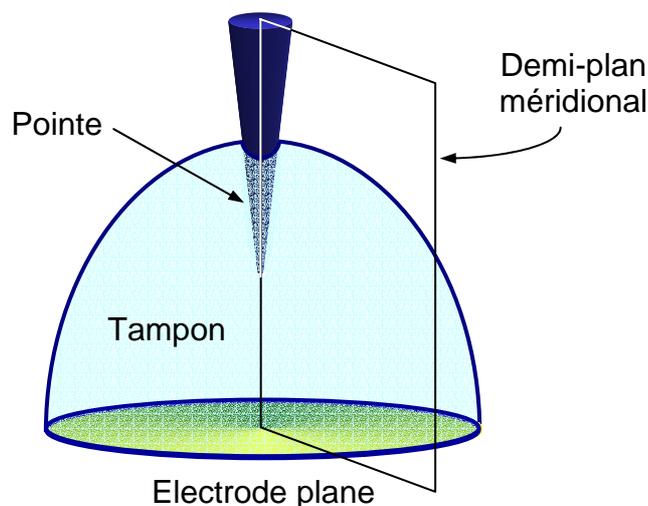


Figure 4.1. Configuration pointe-plan.

Pour cette configuration, nous disposons de la solution analytique pour le potentiel électrique. Par ailleurs, cette configuration est à symétrie 2D-axisymétrique, c'est-à-dire que le champ électrique ne varie pas par rotation autour de l'axe de la pointe. De ce fait, le domaine d'étude du champ électrique se ramène au demi-plan méridional (voir figure 4.1). La contrainte d'axisymétrie est imposée par CANARD qui ne dispose pas à ce jour de module 3D. Lorsque nous considérons la présence d'une goutte dans ce microsysteme, celle-ci sera obligatoirement placée le long de l'axe de la pointe afin de conserver la symétrie axiale 2D.

4.1.2. Validation du calcul du champ électrique dans une configuration pointe-plan

En l'absence de particule dans le système, le système d'équations électriques suivant :

$$\begin{cases} \nabla^2 V(\mathbf{x}) = 0 & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega \\ V(\mathbf{x}) = V_{\Gamma_1}, & \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma_1 \\ \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = -E_n(\mathbf{x}) = 0 & \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma_2 \\ V(\mathbf{x}) = V_{\Gamma_3}, & \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma_3 \end{cases} \quad (4.1)$$

possède une solution analytique. La solution est donnée par l'expression suivante (Annexe 4.1) :

$$V = \frac{V_2 - V_1}{\ln \left[\tan \left(\frac{\eta_0}{2} \right) \right]} \ln \left[\tan \left(\frac{\eta}{2} \right) \right] + V_1 \quad (4.2)$$

où :

$$\eta = \arccos \left(\frac{\left[\left[(z+c)^2 + \rho^2 \right]^{1/2} - \left[(z-c)^2 + \rho^2 \right]^{1/2} \right]}{2c} \right) \quad (4.3)$$

η_0 est un paramètre relié à la courbure de la pointe et $c \cos \eta_0$ est la distance qui sépare les deux électrodes comme indiqué par la figure 4.2.

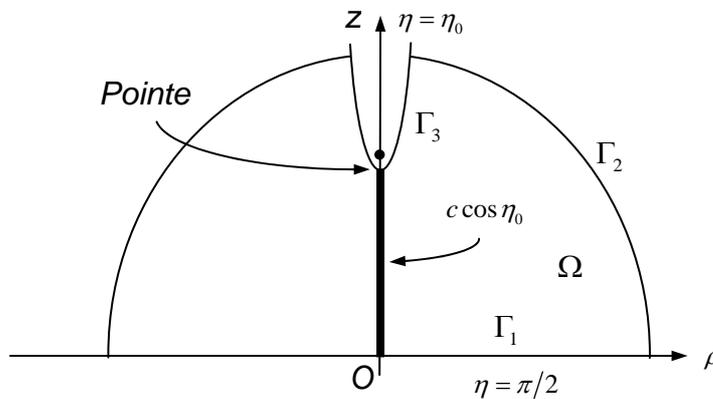


Figure 4.2. Correspondance entre le paramètre η et le système d'électrodes.

Le potentiel sur l'axe, calculé par la MIF (avec CANARD) et la MEF (avec FEMLAB), est comparé à la solution analytique (4.2). La distance entre électrodes est égale à 100 μm et la différence de potentiel $\Delta V = 1\text{ V}$.

Pour la MIF, 300 nœuds sont utilisés, alors que pour la MEF, du fait du maillage à l'intérieur du domaine (voir figure 4.3), environ 30000 nœuds sont utilisés.

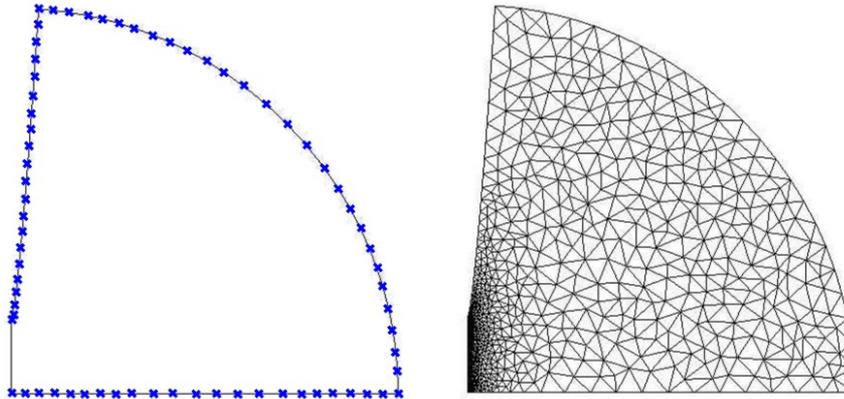


Figure 4.3. Maillages utilisés par CANARD (MIF), à gauche, et FEMLAB (MEF), à droite, pour la résolution du système d'équations électrique. De par la nature de la méthode numérique qu'il utilise, CANARD ne maille que la frontière du domaine alors que FEMLAB maille l'intégralité du domaine.

La figure 4.4 donne la variation du potentiel électrique obtenue sur l'axe reliant les électrodes. Elle montre que les résultats numériques sur le potentiel électrique concordent bien avec la solution analytique.

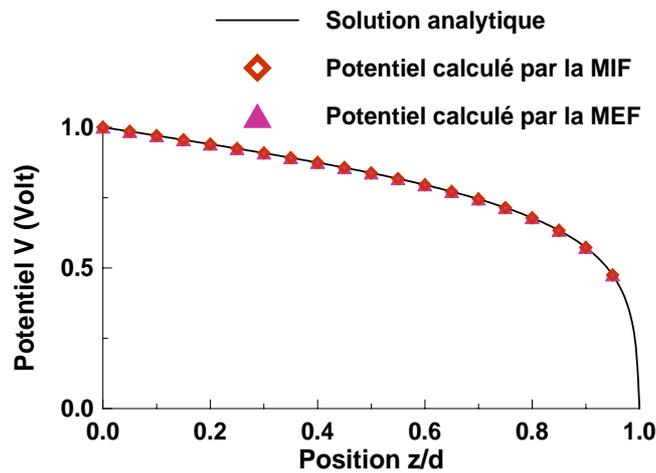


Figure 4.4. Variation du potentiel électrique sur l'axe selon la distance au plan. La solution analytique, la solution calculée par CANARD (MIF) et par FEMLAB (MEF) sont représentées. ($V(z=0) = V_{\text{plan}} = 1$,

$$V(z=1) = V_{\text{pointe}} = 0).$$

Afin d'évaluer la précision des calculs obtenus avec les deux méthodes, on étudie l'erreur euclidienne relative commise définie comme :

$$\varepsilon_{\text{euclidienne}} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (V_i - V(\mathbf{x}_i))^2}{\sum_{i=1}^n V(\mathbf{x}_i)^2} \right]^{1/2} \quad (4.4)$$

où \mathbf{x}_i est la position du nœud i , V_i le potentiel électrique calculé au nœud i , $V(\mathbf{x}_i)$ le potentiel électrique analytique estimé au nœud i et n le nombre total de nœuds.

A partir de cette définition, le tableau 4.1, montrant la variation de l'erreur euclidienne relative en fonction du nombre de nœuds utilisés par chaque méthode, a été dressé.

Pour un maillage de densité raisonnable (quelques centaines de nœuds pour la MIF et quelques dizaines de milliers pour la MEF), cette erreur est de l'ordre de 10^{-5} (voir tableaux 4.1, 4.2 et 4.3). La consistance des schémas numériques MIF et MEF, définie par la convergence de la solution du schéma discret vers la solution du problème continu quand la taille des nœuds diminue, est vérifiée puisque, à mesure que le nombre de nœuds utilisés augmente, la précision des résultats se trouve améliorée du fait de la diminution de l'erreur euclidienne. Pour les calculs effectués dans les sections suivantes, nous avons utilisé des maillages qui donnent des erreurs relatives inférieures à 10^{-4} pour le potentiel électrique et 10^{-2} pour le champ électrique.

Tableau 4.1. Evolution du nombre des nœuds utilisés dans la discrétisation pour atteindre une erreur euclidienne relative donnée du potentiel électrique, par rapport à la solution analytique, calculé par CANARD (MIF) et FEMLAB (MEF).

Erreur ciblée pour le potentiel électrique	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
Nombre de nœuds en MIF	10	100	400	2000
Nombre de nœuds en MEF	2000	24000	80000	225000

Tableau 4.2. Evolution de l'erreur commise par CANARD sur le calcul du potentiel électrique et sur le champ électrique à la pointe, par rapport à la solution analytique, en fonction du nombre de nœuds utilisés.

Nombre de nœuds utilisés par CANARD (MIF)	15	30	60	120	240	480	960	1920
Erreur euclidienne relative pour le potentiel électrique $\times 10^4$	5.79	4.37	2.39	0.932	0.311	0.095	0.028	0.016
Erreur relative pour le champ électrique à la pointe $\times 10^2$	61	34	8.06	1.99	1.47	0.42	0.151	0.064

Tableau 4.3. Evolution de l'erreur commise par FEMLAB sur le calcul du potentiel électrique et sur le champ électrique à la pointe, par rapport à la solution analytique, en fonction du nombre de nœuds utilisés.

Nombre de nœuds utilisés par FEMLAB (MEF)	2000	10000	50000	100000	200000
Erreur euclidienne relative pour le potentiel électrique $\times 10^4$	9.25	2.61	0.454	0.0841	0.0158
Erreur relative pour le champ électrique à la pointe $\times 10^2$	53.24	8.35	1.43	0.725	0.426

L'erreur maximum relative sur le potentiel est définie par :

$$\Delta V = \max_{i=1,\dots,n} (|V_i - V(\mathbf{x}_i)|) / \max_{i=1,\dots,n} (|V(\mathbf{x}_i)|) \quad (4.5)$$

La figure 4.5 montre la variation de l'erreur maximale relative sur le potentiel électrique calculé par CANARD en fonction du nombre de nœuds utilisé ainsi que le temps de remplissage et d'inversion de la matrice discrète (voir annexe 4).

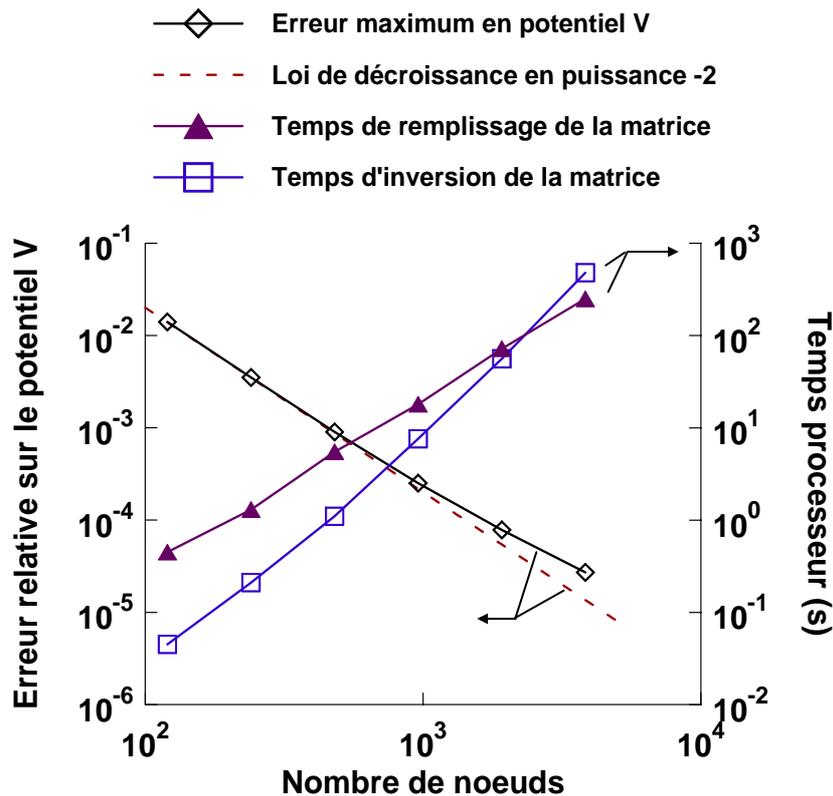


Figure 4.5. Variation de l'erreur euclidienne sur le potentiel électrique en n^{-2} (n nombre de nœuds) et variation du temps de remplissage de la matrice discrète à inverser ainsi que le temps de résolution par CANARD.

Le potentiel électrique ainsi que la composante normale du champ électrique sont interpolés par des fonctions linéaires. La loi de variation théorique de l'erreur de troncature

dans ce cas est une loi en n^{-2} . La figure 4.5 montre ainsi une variation avec cette loi sur plus d'une décade. Au-delà d'un certain nombre de nœuds (aux alentours de 2000 nœuds), cette loi n'est plus rigoureusement observée car les erreurs d'arrondi (en simple précision) finissent par interférer avec l'erreur de troncature associée à la discrétisation du problème électrique continu. En deçà de 2000 nœuds, c'est le remplissage de la matrice discrète qui prend le plus de temps CPU (à 1000 nœuds, le remplissage prend 20 s et le temps d'inversion prend 5 s). En revanche, au-delà de ce nombre, c'est la résolution du système discret qui devient consommatrice en temps CPU.

4.1.3. Méthodes MIF et MEF pour le calcul du champ électrique en présence de particules

Le microsysteme biologique considéré dans cette partie est la configuration pointe-plan. La tension électrique appliquée est sinusoïdale de fréquence f . Une particule sphérique de synthèse est placée entre les deux électrodes comme indiqué par la figure 4.6. La symétrie axiale du système permet d'effectuer l'étude uniquement dans le demi-plan méridien. La distance entre électrodes vaut $100 \mu\text{m}$.

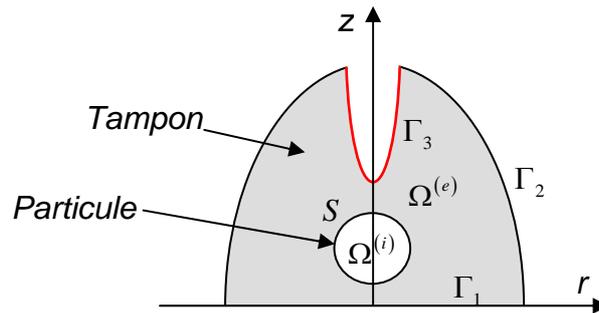


Figure 4.6. Configuration pointe-plan pour déplacer une particule par DEP. La force DEP appliquée sur la particule est calculée par le modèle du dipôle ponctuel en omettant la présence de cette dernière, alors que cette présence est prise en compte dans l'approche par le tenseur de Maxwell.

La particule est plongée dans une solution de Mannitol (solution aqueuse, le Mannitol est un alcool sucré). Les différentes propriétés électriques sont résumées dans le tableau 4.4.

Tableau 4.4. Propriétés électriques des matériaux diélectriques considérés dans les calculs. ϵ_0 est la permittivité du vide.

Matériau	Permittivité	Conductivité électrique
	ϵ F/m	σ ($\mu\text{S}/\text{cm}$)
Solution de Mannitol	$77.8 \epsilon_0$	1.4
Particule sphérique	$2.55 \epsilon_0$	23.8

Les différentes conditions aux limites associées à ce problème sont : potentiel électrique imposé aux électrodes et champ électrique tangentiel à la paroi latérale (paroi isolante). Dans le cas où la particule est prise en compte, c'est la condition de continuité de la composante normale du vecteur densité de courant complexe qui est considérée. En résumé, nous avons l'équation 2.40) du chapitre 2 :

$$\nabla \cdot (\bar{\sigma}^{(k)} \nabla \bar{V}^{(k)}) = 0, \quad k = i, e \quad (4.6)$$

dont lui sont associées les conditions aux limites suivantes :

$$V^{(e)}(\mathbf{x}) = V_{\Gamma_1}, \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma_1 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial V^{(e)}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = -E_n^{(e)}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma_2 \quad (4.8)$$

$$V^{(e)}(\mathbf{x}) = V_{\Gamma_3}, \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma_3 \quad (4.9)$$

$$\bar{\sigma}^{(i)} \bar{E}_n^{(i)}(\mathbf{x}) = \bar{\sigma}^{(e)} \bar{E}_n^{(e)}(\mathbf{x}) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in S \quad (4.10)$$

4.1.3.1. Formulation MEF

La Méthode des Eléments Finis résout l'équation (4.6), à l'intérieur de la particule comme dans le tampon, associée aux conditions aux limites (4.7), (4.8) et (4.9), de la manière présentée au chapitre 3 (§ 3.2.4), soit :

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{V}_i^{e^l} \int_{\partial(\Omega^{(i)} \cup \Omega^{(e)})} \bar{\sigma}(\mathbf{x}) \beta_j^{e^q}(\mathbf{x}) \mathbf{n} \cdot \nabla (\beta_i^{e^l}(\mathbf{x})) dv(\mathbf{x}) \\ & - \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{V}_i^{e^l} \int_{\Omega^{(i)} \cup \Omega^{(e)}} \bar{\sigma}(\mathbf{x}) \nabla (\beta_i^{e^l}(\mathbf{x})) \cdot \nabla (\beta_j^{e^q}(\mathbf{x})) dv(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

où :

$$\bar{V}^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{V}_i^{(k)e^l} \beta_i^{e^l}(\mathbf{x}) \quad (4.12)$$

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \bar{\sigma}^{(i)} & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(i)} \\ \bar{\sigma}^{(e)} & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(e)} \end{cases} \quad (4.13)$$

et $\beta_i^{e^l}(\mathbf{x})$ la fonction d'interpolation et la fonction test à la fois (méthode de Galerkin).

4.1.3.2. Formulation MIF

Comme présenté au chapitre 3, le système, défini par l'équation (4.6) et les conditions (4.7), (4.8), (4.9) et (4.10), est réécrit sous une forme intégrale.

Sur l'interface S :

$$\begin{aligned} (\alpha^{(i)} \bar{\sigma}^{(i)} + \alpha^{(e)} \bar{\sigma}^{(e)}) \bar{V}^{(e)} &= - \int_S \frac{\partial G}{\partial n'} (\bar{\sigma}^{(i)} - \bar{\sigma}^{(e)}) \bar{V}^{(e)} dS' \\ - \bar{\sigma}^{(e)} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} \left(G \frac{\partial \bar{V}^{(e)}}{\partial n'} - \bar{V}^{(e)} \frac{\partial G}{\partial n'} \right) dS' & \end{aligned} \quad (4.14)$$

Sur le reste des frontières ($\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$) :

$$\alpha^{(e)} \bar{\sigma}^{(e)} \bar{V}^{(e)} = - \int_S \frac{\partial G}{\partial n'} (\bar{\sigma}^{(e)} - \bar{\sigma}^{(e)}) \bar{V}^{(e)} dS' - \bar{\sigma}^{(e)} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} \left(G \frac{\partial \bar{V}^{(e)}}{\partial n'} - \bar{V}^{(e)} \frac{\partial G}{\partial n'} \right) dS' \quad (4.15)$$

Les équations (4.14) et (4.15) définissent le système à résoudre pour calculer $\bar{V}^{(e)}|_S$, $\frac{\partial \bar{V}^{(e)}}{\partial n}|_{\Gamma_1}$, $\bar{V}^{(e)}|_{\Gamma_2}$ et $\frac{\partial \bar{V}^{(e)}}{\partial n}|_{\Gamma_3}$. Après résolution de ce système, on calcule $\frac{\partial \bar{V}^{(i)}}{\partial n}|_S$ grâce à la condition (4.10).

4.1.3.3. Calcul de la force DEP par la méthode du tenseur de Maxwell

A ce niveau, le calcul du champ électrique en présence de la particule est supposé effectué soit par la MEF soit par la MIF, comme décrit dans les deux paragraphes précédents.

Le calcul de la force électrique repose sur l'expression du tenseur de Maxwell définie au chapitre 2 et que l'on rappelle ici :

$$\mathbb{T}_{lm}^{\text{électrique}} = \varepsilon \left(E_l E_m - \frac{1}{2} E_p E_p \delta_{lm} \right) \quad (4.16)$$

En prenant l'expression complexe du champ électrique en compte, cette équation devient :

$$\mathbb{T}_{lm}^{\text{électrique}} = \varepsilon \left(\text{Re} \left[\bar{E}_l e^{j\omega t} \right] \times \text{Re} \left[\bar{E}_m e^{j\omega t} \right] - \frac{1}{2} \text{Re} \left[\bar{E}_p e^{j\omega t} \right] \times \text{Re} \left[\bar{E}_p e^{j\omega t} \right] \delta_{lm} \right) \quad (4.17)$$

En régime alternatif, seule la moyenne temporelle de ce tenseur nous importe. Le résultat général suivant :

$$\begin{aligned} \left\langle \text{Re} \left[\bar{A} e^{j\omega t} \right] \text{Re} \left[\bar{B} e^{j\omega t} \right] \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Re} \left[\bar{A} e^{j\omega t} \right] \text{Re} \left[\bar{B} e^{j\omega t} \right] d(\omega t) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[\bar{A} \times \bar{B}^* \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

(où le symbole * représente le nombre complexe conjugué) permet d'écrire :

$$\hat{\mathbb{T}}_{lm}^{\text{électrique}} = \left\langle \mathbb{T}_{lm}^{\text{électrique}} \right\rangle = \frac{1}{2} \varepsilon \left(\text{Re} \left[\bar{E}_l \bar{E}_m^* \right] - \frac{1}{2} \text{Re} \left[\bar{E}_p \bar{E}_p^* \right] \delta_{lm} \right) \quad (4.19)$$

La force électrique moyenne qui s'exerce sur la particule est ainsi donnée par :

$$F_l^{\text{électrique}} = \int_V \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\hat{\mathbb{T}}_{lm}^{\text{électrique}} \right) dv = \int_S n_l \hat{\mathbb{T}}_{lm}^{\text{électrique}} dS \quad (4.20)$$

Pour que la contribution des charges électriques au niveau de l'interface S soit prise en compte, ce sont les composantes du champ électrique extérieur à la particule qui interviennent dans l'expression du tenseur de Maxwell $\hat{\mathbb{T}}^{\text{électrique}}$, [293].

4.1.4. Calcul des forces DEP par le modèle des multipôles ponctuels

En l'absence de particule dans la configuration pointe-plan, nous disposons d'une solution analytique pour le potentiel électrique. Cette solution est utilisée pour déduire l'expression du moment dipolaire \mathbf{p} induit et celle de la force DEP estimée par le modèle du dipôle ponctuel $\mathbf{F}^{DP} = \mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{E}$. L'expression de la moyenne de cette force (dans la direction z) est donnée par (voir annexe 4.1) :

$$F_z^{DP} = 4\pi\epsilon^{(e)}R^3 \operatorname{Re}[\bar{K}] \left(\frac{V_2 - V_1}{\ln\left[\tan\left(\frac{\eta_0}{2}\right)\right]} \right)^2 \frac{c^2 z}{(c^2 - z^2)^3} \quad (4.21)$$

Le facteur \bar{K} est le facteur de Clausius-Mossotti défini par :

$$\bar{K} = \frac{\bar{\sigma}^{(i)} - \bar{\sigma}^{(e)}}{\bar{\sigma}^{(i)} + 2\bar{\sigma}^{(e)}} \quad (4.22)$$

La contribution des moments d'ordre supérieur (jusqu'à l'ordre 5) est prise en compte pour calculer leur contribution dans la force DEP. Du fait de la complexité de leurs expressions, une feuille de calcul Mathematica™, montrant le cheminement du calcul pour les obtenir, est jointe dans l'annexe 4.1.

4.1.5. Validation du calcul de la force DEP par la méthode du tenseur de Maxwell

Dans une première phase, la méthode du tenseur de Maxwell est testée par comparaison à une autre méthode. Cette méthode peut être soit une méthode analytique approchée (entre autres, la méthode du dipôle ponctuel) soit une méthode qui se base, comme le calcul du tenseur de Maxwell, sur le calcul numérique du champ électrique. Nous préférons reporter la confrontation avec les méthodes analytiques pour plus tard (sections 2 et 3 de ce chapitre) et abordons la validation de la méthode du tenseur de Maxwell par comparaison des résultats obtenus par la MIF et la MEF ; l'obtention de résultats similaires par deux méthodes numériques différentes garantit une bonne fiabilité des résultats obtenus. Le test de la méthode du tenseur de Maxwell se fera également par confrontation à la méthode des travaux virtuels.

4.1.2.2. Configuration pointe-plan en présence d'une particule (validation MIF-MEF)

La configuration pointe-plan est reprise en introduisant une particule sphérique. Le champ électrique est calculé par CANARD et par FEMLAB. Les figures 4.7 illustrent la distribution du potentiel électrique et du champ électrique entre les électrodes.

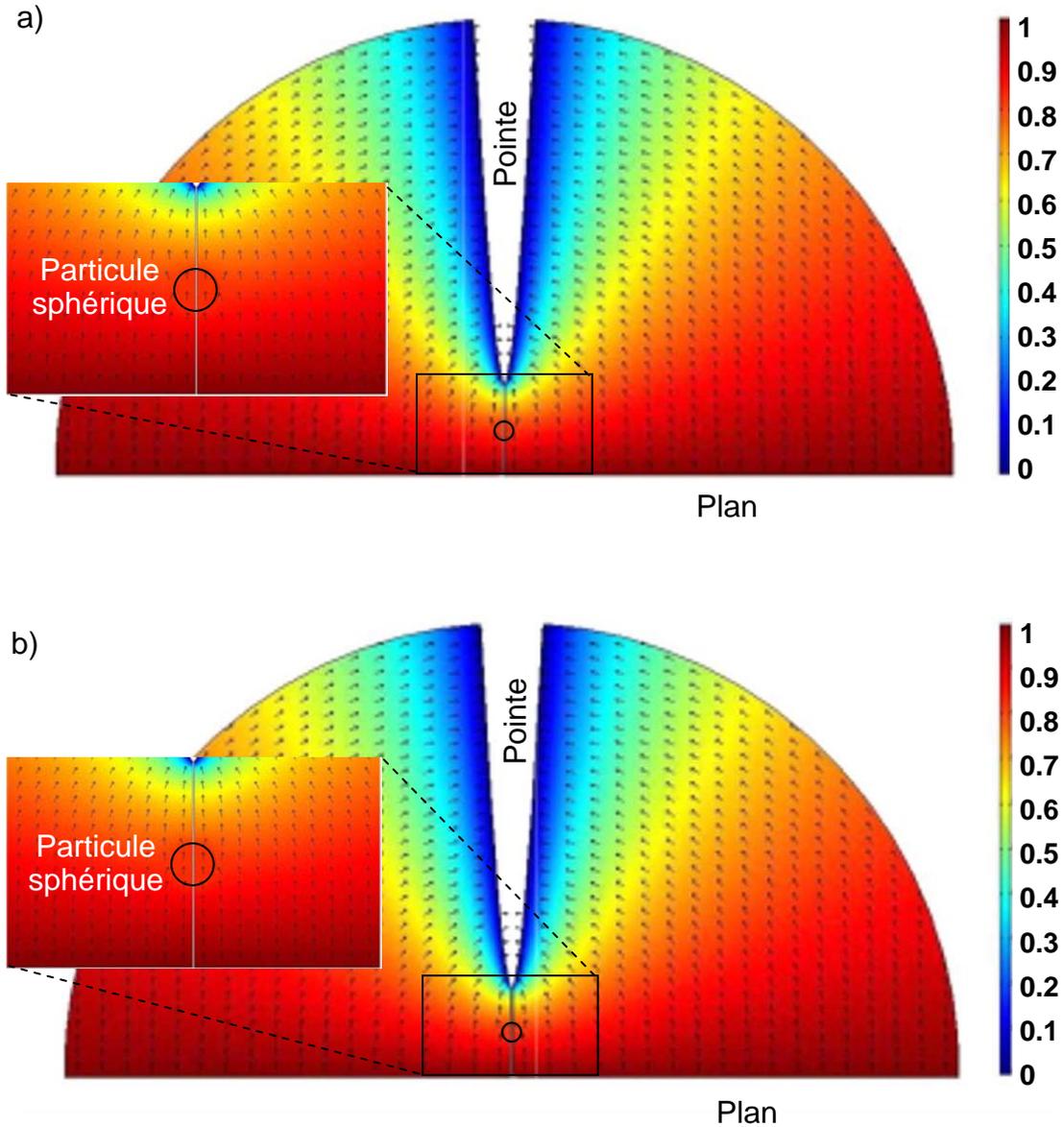


Figure 4.7. Distribution du potentiel et carte du champ électrique calculés par (a) FEMLAB et (b) CANARD. Une sphère est immergée dans une solution de Mannitol. Le champ électrique est alternatif de fréquence $f = 100$ Hz.

Le potentiel électrique, étant un scalaire, est représenté par des dégradés de couleurs qui passent du rouge (correspondant à 1 V) au bleu (correspondant à 0 V) en passant par le vert, comme indiqué par l'échelle. Le champ électrique, qui est vectoriel, est représenté par des flèches. A cause de la forte variation du module du champ électrique, une représentation normalisée (la longueur de la flèche n'est pas proportionnelle au module

du vecteur qu'elle représente) est utilisée. Le champ électrique est normal aux électrodes (le courant électrique pénètre ou sort des électrodes) alors qu'il est tangentiel à la frontière isolante latérale. Loin de la particule, le champ conserve sa direction en allant du plan vers la pointe, alors qu'au voisinage de la particule, il est fortement perturbé, comme les zooms le montrent.

La figure 4.8 compare la force électrique calculée par le tenseur de Maxwell (4.20) en utilisant CANARD et FEMLAB pour différentes positions de la particule. Les courbes indiquent un bon accord entre les résultats issus des deux méthodes. En effet, la différence relative ne dépasse jamais 3 % quelle que soit la position de la particule entre les électrodes.

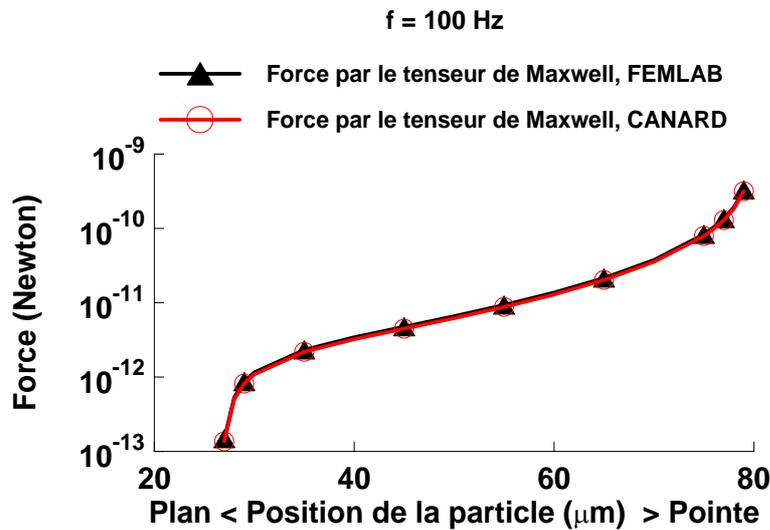


Figure 4.8. Force électrique par le tenseur de Maxwell. Le champ électrique est calculé par FEMLAB et CANARD. Une particule est immergée dans du Mannitol. Le champ électrique est alternatif de fréquence $f = 100$ Hz.

4.1.2.3. Evaluation des forces d'interaction mutuelle entre deux particules

La perturbation du champ électrique par la présence d'une particule crée des forces qui attirent ou repoussent les particules voisines.

La méthode des Travaux virtuels repose sur le principe qu'un Travail est associé à toute force (notamment électrique) qui déplace ou déforme un système. Pour un système conservatif (c'est un système dont les formes d'énergie, cinétique, potentiel et électrique, varient de manière réversible en conservant l'énergie totale), le travail fourni à ce système est égal à la variation de son énergie potentielle. Dans le cas du Travail des forces électriques, l'énergie potentielle électrique est donnée par :

$$\xi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon \mathbf{E}^2 dv \quad (4.23)$$

Si le champ électrique est alternatif, nous retrouvons l'expression de la moyenne de l'énergie potentielle électrique suivante :

$$\hat{\xi} = \langle \xi \rangle = \frac{1}{4} \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{Re} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*] dv \quad (4.24)$$

Pour connaître la force électrique appliquée à une particule dans un système, il suffit de calculer la variation de l'énergie potentielle suite au déplacement (virtuel) de cette particule. Deux positions sont donc nécessaires pour calculer le travail fourni et déduire la force qui lui est associée, soit :

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{F} = W = \xi_1 - \xi_2 \quad (4.25)$$

Deux remarques doivent toutefois être formulées. La première est que le système électrique considéré doit impérativement être conservatif. Pour un système (électrique) à pertes (par effet Joule, par exemple), cette méthode donne des résultats approximatifs, sauf si la variation calculée de l'énergie potentielle est d'un ordre de grandeur plus important que celui de ces pertes. Ceci suggère donc la possibilité d'utiliser des diélectriques de faible conductivité. Le deuxième point vient du fait qu'un Travail n'étant qu'un scalaire, aucune information ne peut être tirée quand à la direction de la force qui lui a donné naissance : la méthode des travaux virtuels ne détermine la force appliquée de manière univoque que si l'on connaît au préalable la direction de cette force. Il est clair cependant que pour une configuration 2D-axisymétrique, aucun problème ne se pose à ce niveau, puisque la force est axiale par symétrie (la force est attractive si l'énergie potentielle du système diminue et répulsive si l'énergie potentielle augmente).

La configuration choisie pour effectuer le test consiste en une particule sphérique à proximité de laquelle se situe une sphère dont le potentiel (et la charge) varie en $\cos \omega t$. Les deux corps sont immergés dans un diélectrique assez isolant ($\sigma = 10^{-6}$ S/m, pour minimiser les pertes par effet Joule) qui est supposé occuper un volume infini (d'un point de vue numérique, la boîte de calcul est une sphère dont le rayon est 25 fois plus grand que celui de la particule). La figure 4.9 montre une cartographie du potentiel et du champ électrique calculé sur cette configuration.

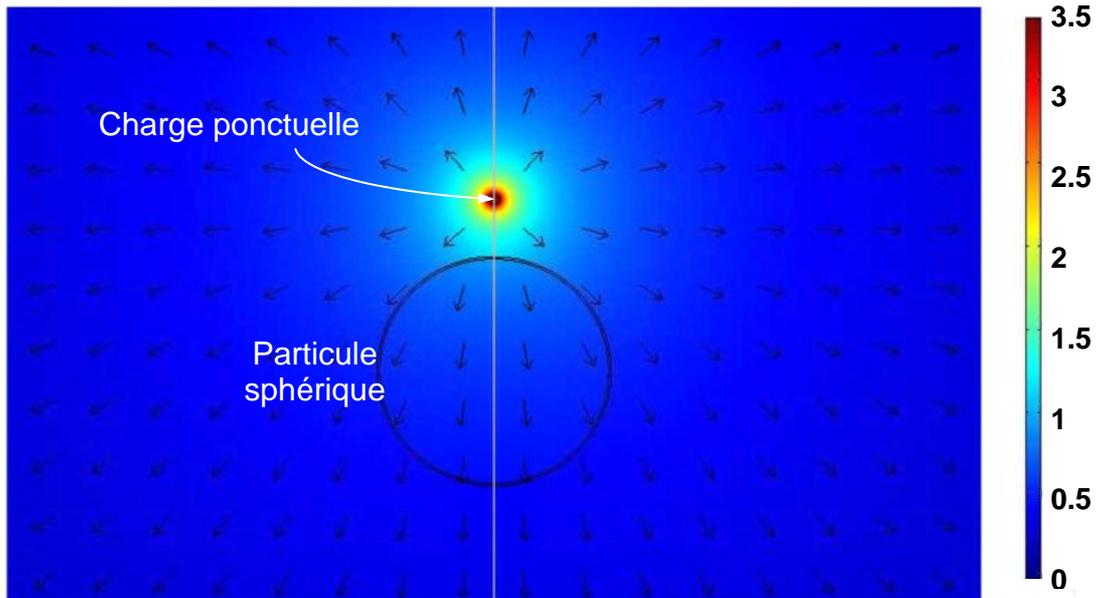


Figure 4.9. Distribution du potentiel et carte du champ électrique calculés par FEMLAB. La particule est une sphère à proximité d'une charge ponctuelle est immergée dans une solution de Mannitol. La charge ponctuelle pulse (se charge et se décharge) à une fréquence $f = 10 \text{ kHz}$.

A partir de cette configuration, nous traçons les variations de la force électrique appliquée en fonction de la distance qui sépare la particule de la charge ponctuelle pour plusieurs fréquences f (figure 4.10). Pour toutes les fréquences testées, les forces calculées par les deux méthodes présentent une correspondance acceptable, hormis lorsque la distance qui sépare la particule de la charge ponctuelle devient grande. Outre le fait que des pertes par effet Joule rendent le système électrique non conservatif (la puissance dissipée est de l'ordre de 10^{-9} Watts), nous pensons qu'une raison numérique explique cet écart. En effet, le champ électrique n'est que faiblement perturbé par la présence de la particule *a fortiori* lorsque celle dernière est loin de la charge ponctuelle. Si \mathbf{E} est le champ électrique total calculé en un point de donné, alors $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p$, où \mathbf{E}_0 est le champ électrique en l'absence de la particule et \mathbf{E}_p la perturbation du champ par la présence de la particule, avec $\mathbf{E}_p \ll \mathbf{E}_0$. Les erreurs d'arrondi commises lors du calcul du champ électrique total influencent donc fortement le calcul de l'information utile \mathbf{E}_p et la variation de l'énergie totale qui lui est associée.

Suite à ces confrontations, on ne peut valider la méthode du tenseur de Maxwell par une comparaison avec la méthode des travaux virtuels, trop imprécise. Pour rendre cette méthode précise, on procède alors à la résolution d'un problème mathématique équivalent dont l'inconnue à calculer est uniquement la perturbation \mathbf{E}_p , [229].

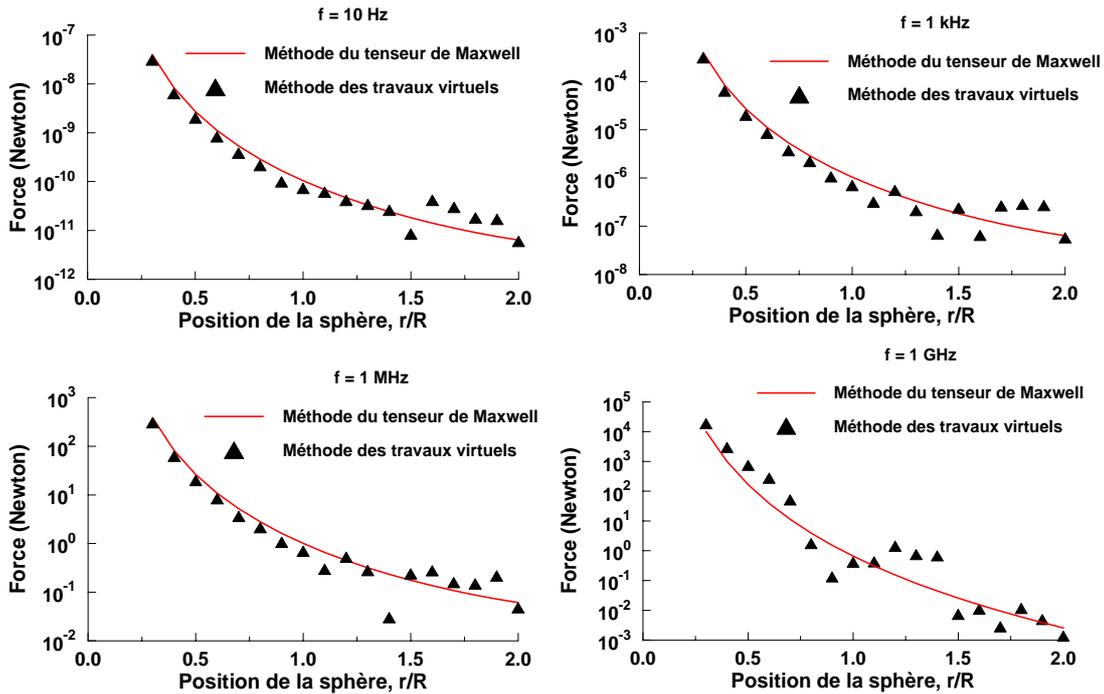


Figure 4.10. Calcul par FEMLAB du champ électrique au voisinage d'une sphère à proximité d'une charge ponctuelle qui pulse à une fréquence f . La force électrique est calculée par la méthode du tenseur de Maxwell et la méthode des travaux virtuels.

4.2. Domaine de validité du modèle ponctuel

4.2.1. Force DEP calculée par le modèle dipolaire et le modèle du tenseur de Maxwell

Puisque la particule est à la fois plus conductrice et moins polarisable que le Mannitol (tableau 4.4), on s'attend à ce que la DEP soit positive à basse fréquence et négative à haute fréquence. La figure 4.11, qui montre les variations du facteur de Clausius-Mossotti \bar{K} en fonction de la fréquence, confirme bien ces tendances asymptotiques.

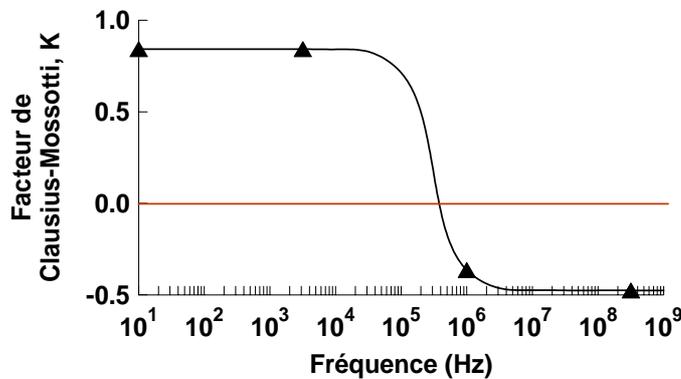


Figure 4.11. Variation du facteur de Clausius-Mossotti pour une particule immergée dans une solution de Mannitol.

La figure 4.12 présente la variation de la force électrique calculée pour une particule de 20 μm de rayon, immergée dans une solution de Mannitol (solution aqueuse dans laquelle sont dissous du sucre et du Mannitol). La distance entre électrodes vaut 100 μm . La particule prend plusieurs positions le long de l'axe de symétrie du microsysteme et la fréquence du champ électrique appliqué est comprise entre 10 Hz et 100 MHz.

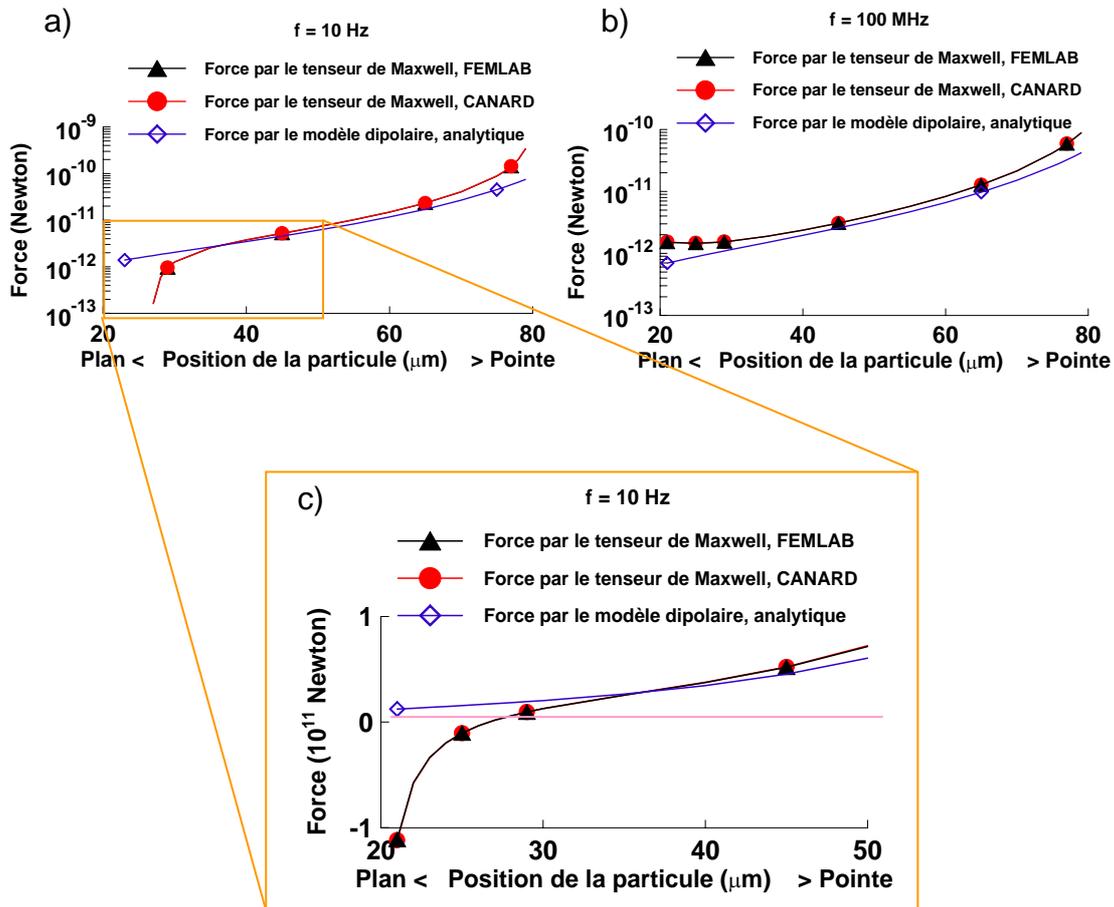


Figure 4.12. Variation du module de la force DEP appliquée à une particule sphérique en fonction de sa position entre les électrodes. La particule est immergée dans une solution de Mannitol. La distance est mesurée par rapport à l'électrode plane. La fréquence du champ électrique appliqué vaut 10 Hz en (a) (DEP positive) et 100 MHz en (b) (DEP négative). Un agrandissement à $f=10$ Hz à proximité de l'électrode plane, (c).

A 10 Hz (figure 4.12(a)), la DEP, telle que prédite par le modèle du dipôle ponctuel, est positive. La concordance entre les calculs de la force DEP par le tenseur de Maxwell et le modèle dipolaire est bonne lorsque la particule est positionnée au milieu du système (40 et 70 μm de l'électrode plane). Pour une position au voisinage de l'électrode plane (en dessous de 40 μm), la force DEP est surestimée par le modèle dipolaire, alors qu'à proximité de la pointe (au-delà de 70 μm) elle est sous-estimée. Le zoom proche de la pointe (figure 4.12(c)) montre une attraction des particules vers l'électrode alors que le modèle du dipôle ponctuel ne décèle pas ce changement de régime DEP. A 100 MHz

(figure 4.12(b)), le modèle dipolaire suit d'une manière appropriée les variations de la force diélectrophorétique sauf à proximité des électrodes où la force est nettement sous-estimée. Le tableau 4.5 illustre les principales discordances entre le calcul de la force diélectrophorétique par le tenseur de Maxwell (CANARD et FEMLAB) et par le modèle du dipôle ponctuel (solution analytique).

Tableau 4.5. Valeurs indicatives de la force DEP calculée par le tenseur de Maxwell (CANARD et FEMLAB) et par le modèle du dipôle ponctuel (analytique) en plusieurs positions de la particule entre les électrodes.

		Distance à l'électrode plane (μm)		
		30	50	70
f = 10 Hz	Force par le tenseur de Maxwell (CANARD) $\times 10^{12}$	1.276402	7.22397	40.5351
	Force par le tenseur de Maxwell (FEMLAB) $\times 10^{12}$	1.265732	7.163328	40.23946
	Force par le modèle dipolaire (analytique) $\times 10^{12}$	2.039376	6.050061	26.68601
	Erreur CANARD/FEMLAB (%)	0.843	0.847	0.734
	Erreur Maxwell/Dipolaire (%)	61.22	15.54	33.68
f = 100 MHz	Force par le tenseur de Maxwell (CANARD) $\times 10^{12}$	-1.585133	-4.122585	-21.46457
	Force par le tenseur de Maxwell (FEMLAB) $\times 10^{12}$	-1.574355	-4.118244	-21.34155
	Force par le modèle dipolaire (analytique) $\times 10^{12}$	-1.152359	-3.418615	-15.07906
	Erreur CANARD/FEMLAB (%)	6.84	0.105	0.576
	Erreur Maxwell/Dipolaire (%)	26.80	16.98	29.34

Notons que c'est en régime diélectrophorétique positif ($f = 10 \text{ Hz}$) que l'écart entre ces deux modèles est le plus marqué, avec une erreur au centre des électrodes qui dépasse 15 % et atteint 61 % du côté de l'électrode plane. En DEP négative ($f = 100 \text{ MHz}$), les écarts sont du même ordre à proximité des deux électrodes ($\approx 30\%$) et restent de l'ordre de 15 % au centre.

4.2.2. Vitesse limite calculée par le modèle dipolaire et le modèle du tenseur de Maxwell

La figure 4.13 représente les variations de la vitesse (calculée par la formule (3.79) du chapitre 3) pour une sphère de rayon $R = 20 \mu\text{m}$. Pour une différence de potentiel de 1 V et une distance interélectrodes de $100 \mu\text{m}$, la vitesse de la particule varie entre 0.01 et 2 mm/s. La particule parcourt le microsystème en approximativement une seconde. La vitesse de déplacement peut être augmentée si la différence de potentiel est augmentée, puisque la force DEP appliquée à la particule (et sa vitesse) varie comme le carré de la tension électrique appliquée (cf. relation (3.15)). Par ailleurs, et puisque il y a proportionnalité entre cette vitesse limite et la force DEP appliquée sur la particule, les mêmes conclusions que pour l'estimation de la force sont tirées : à proximité des électrodes, une vitesse erronée est prédite par le modèle du dipôle ponctuel. En effet, en DEP positive (resp. négative), la vitesse prédite par le modèle du dipôle ponctuel est égale 0.4 mm/s (resp. 0.22 mm/s) à proximité de la pointe alors qu'elle est égale à 1.8 mm/s (resp. 0.46 mm/s) telle que prédite par la méthode du tenseur de Maxwell.

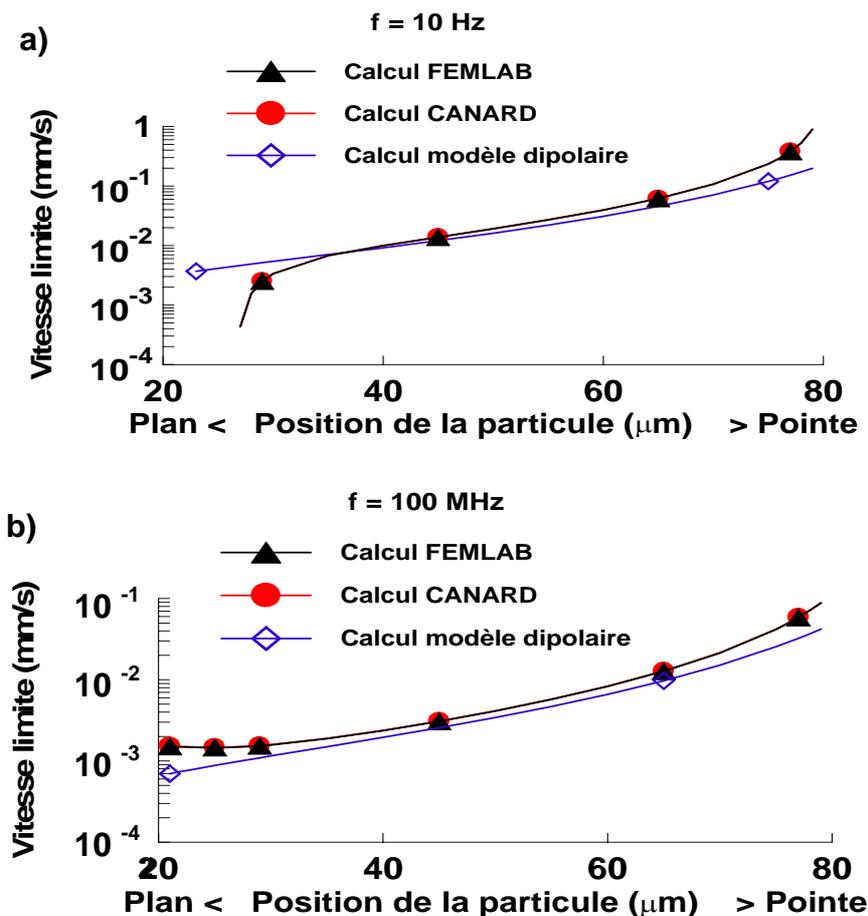


Figure 4.13. Variation de la vitesse limite d'une sphère en fonction de sa position entre les électrodes. a) DEP positive et b) DEP négative.

4.2.3. Force calculée par le modèle multipolaire et le modèle du tenseur de Maxwell

D'après les résultats de la section 4.2.1, la zone centrale entre électrodes apparaît comme étant celle où le modèle du dipôle ponctuel estime le mieux la force DEP. Deux points expliquent cette observation. Le premier point est que, dans cette zone, le champ électrique varie faiblement par rapport à la taille de la sphère et de manière quasi-linéaire (voir figure 4.14). L'approximation du dipôle ponctuel reste donc valable dans cette zone. Mais à proximité de l'électrode plane, bien que le champ électrique présente une variation quasi-linéaire, la figure 4.12 et le tableau 4.5 montrent que l'approximation du dipôle ponctuel donne des estimations totalement erronées.

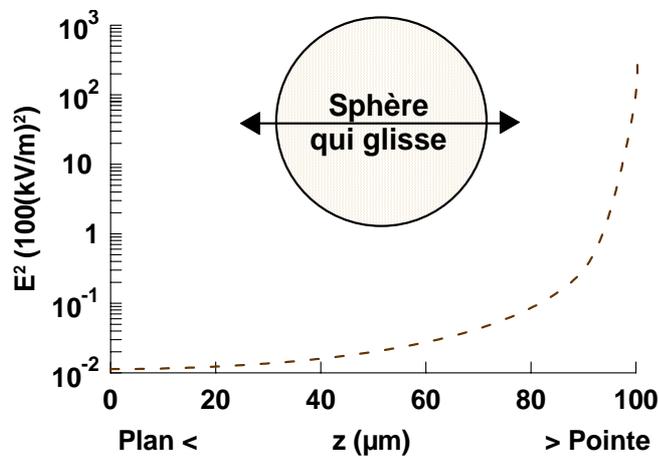


Figure 4.14. Variation du carré du champ électrique en fonction de la position, en l'absence de la sphère. Pour la taille de la sphère indiquée, le modèle dipolaire qui repose sur l'hypothèse de variation linéaire de cette quantité devient approximative au voisinage de la pointe.

Ceci nous ramène au second point. Du fait de la présence même de la particule, de toute évidence le champ électrique total est perturbé. Ceci a une conséquence directe sur le champ électrique aux électrodes lorsque la particule est à proximité d'une électrode (figure 4.15). Dans ce cas, la distribution de charges sur l'électrode devient fonction de la taille et des propriétés électriques de la particule.

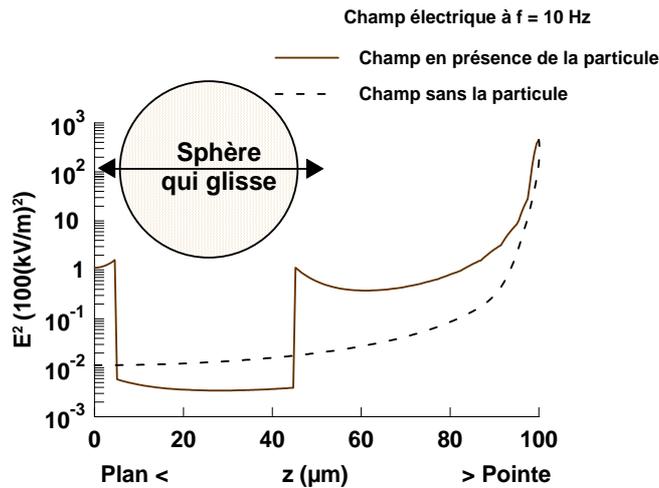


Figure 4.15. Perturbations du champ électrique par la présence de la particule. Lorsque celle-ci est au voisinage des électrodes, le champ électrique est également perturbé au voisinage immédiat des électrodes.

D'un point de vue mathématique, la présence de l'électrode plane est équivalente à une configuration où apparaîtraient deux particules et deux pointes l'une vis-à-vis de l'autre comme montré par la figure 4.16 ; la deuxième particule est dite image de la particule originelle par rapport à l'électrode plane. Bien que cette représentation ne soit que mathématique, elle arrive toutefois à expliquer l'attraction subie par la particule à proximité de l'électrode plane indépendamment du régime DEP prédit par le modèle ponctuel. Cette attraction, qui a déjà été décelée sur la figure 4.12, est donc équivalente aux forces d'interaction mutuelle entre particules. L'étude de cette force est reportée à la section 4.4. On pourrait être tenté d'exprimer la force diélectrophorétique uniquement par la contribution de force ponctuelle. Or, si l'on sait déterminer l'image d'un dipôle par rapport à une électrode plane, on ignore complètement comment déterminer son image par rapport à une électrode de forme plus complexe. La prise en compte de l'effet de la proximité des électrodes par le modèle ponctuel paraît tout à fait illusoire.

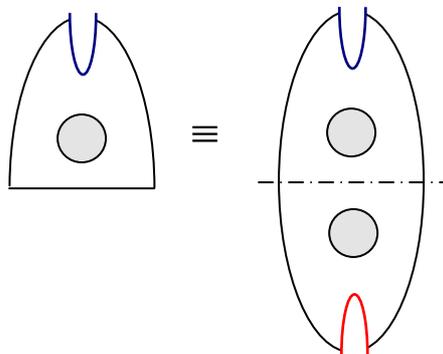


Figure 4.16. Par la méthode des images, à la configuration pointe-plan équivaut une configuration dans laquelle une nouvelle particule et pointe se substituent à (et en bas de) l'électrode plane.

Le paramètre important ici n'est plus la position de la sphère mais le rapport s/R entre la distance sphère-plan, s , et le rayon de la sphère, R . La sphère image génère un gradient de champ qui peut compenser le gradient théorique (sans sphère) et même devenir dominant lorsque $s/R \ll 1$.

En position centrale, la particule a le moins d'influence sur la charge de surface des électrodes. Pour cette position, nous traçons la variation de la force diélectrophorétique, calculée par le modèle du dipôle ponctuel et par le tenseur de Maxwell, en fonction de la taille de la sphère comme indiqué par la figure 4.17.

L'approche du dipôle ponctuel reste une très bonne approximation tant que son rayon est inférieur à 10 % de la distance entre électrodes (100 μm), l'erreur commise ne dépassant pas 3 % pour toutes les fréquences. En revanche, cette erreur atteint 10% si le rayon avoisine 20% de la distance entre électrodes. Pour une taille donnée de la particule, l'erreur commise par l'approximation du dipôle ponctuel est plus importante en DEP positive qu'en DEP négative.

Ces résultats confirment bien que l'approche du dipôle ponctuel est précise quand la particule, de rayon inférieur à 10% à la distance entre électrodes, est loin de ces électrodes. Pour une plus grande taille, on peut se demander si la précision des calculs est améliorée en considérant les multipôles d'ordre supérieur dans le calcul de la force diélectrophorétique. La figure 4.18 montre l'écart entre la force diélectrophorétique évaluée par le modèle dipolaire et le modèle multipolaire. Une réduction notable de l'erreur est obtenue grâce à la prise en compte des contributions des moments multipolaires allant jusqu'à l'ordre 100. Toutefois, il convient de noter que la prise en compte des 100 premiers ordres est rendue superflue, puisque des résultats quasi similaires sont obtenus en utilisant les 5 premiers ordres (cet ordre dépendant du rapport s/R).

Les figures 4.19, 4.20 et 4.21 rassemblent des résultats de calculs effectués sur la particule en fonction de son rayon et de la fréquence pour des distances à l'électrode plane égales à 30, 50 et 70 μm , respectivement. La force calculée est la somme des contributions des 5 premiers multipôles. Bien que le calcul de la force se trouve amélioré par comparaison à la contribution uniquement dipolaire pour une particule au centre des électrodes (ce qui rejoint la remarque mentionnée plus haut), la force estimée par ce modèle reste encore très approximative au voisinage des électrodes (jusqu'à 120 % à 30 μm et 15 % à 70 μm).

Le rayon maximum pour lequel la force diélectrophorétique est estimée à moins de 10 % d'erreur pour pratiquement toutes les positions et les fréquences est de l'ordre de 5 % de la distance interélectrodes.

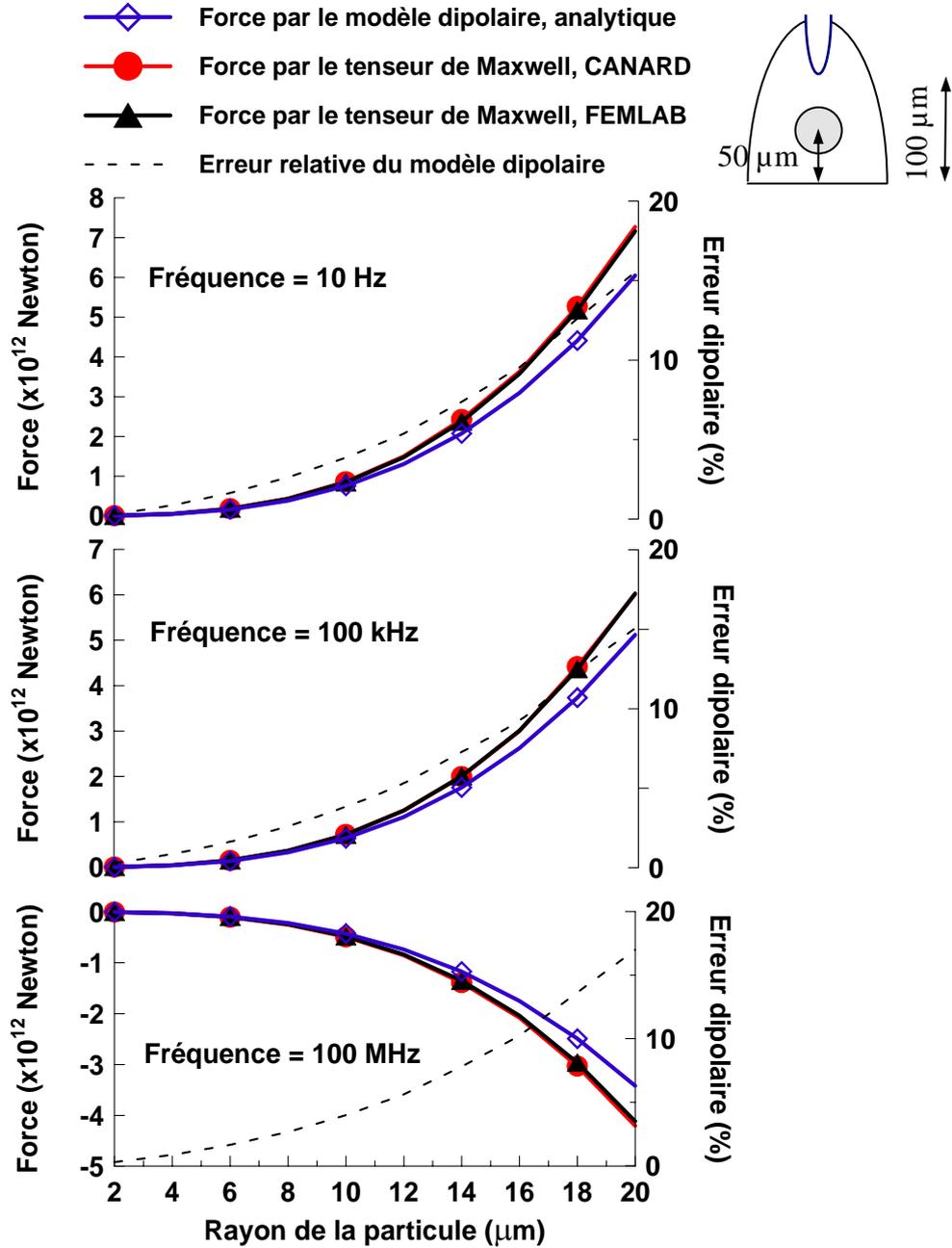


Figure 4.17. Variation de la force DEP appliquée à une particule sphérique et erreur commise par l'approche dipolaire en fonction de sa taille. La particule est immergée dans une solution de Mannitol. Le centre de la sphère se situe à $50 \mu\text{m}$ de l'électrode plane. La force DEP est calculée par la méthode du tenseur de Maxwell (CANARD et FEMLAB) et par l'approximation dipolaire (analytique).

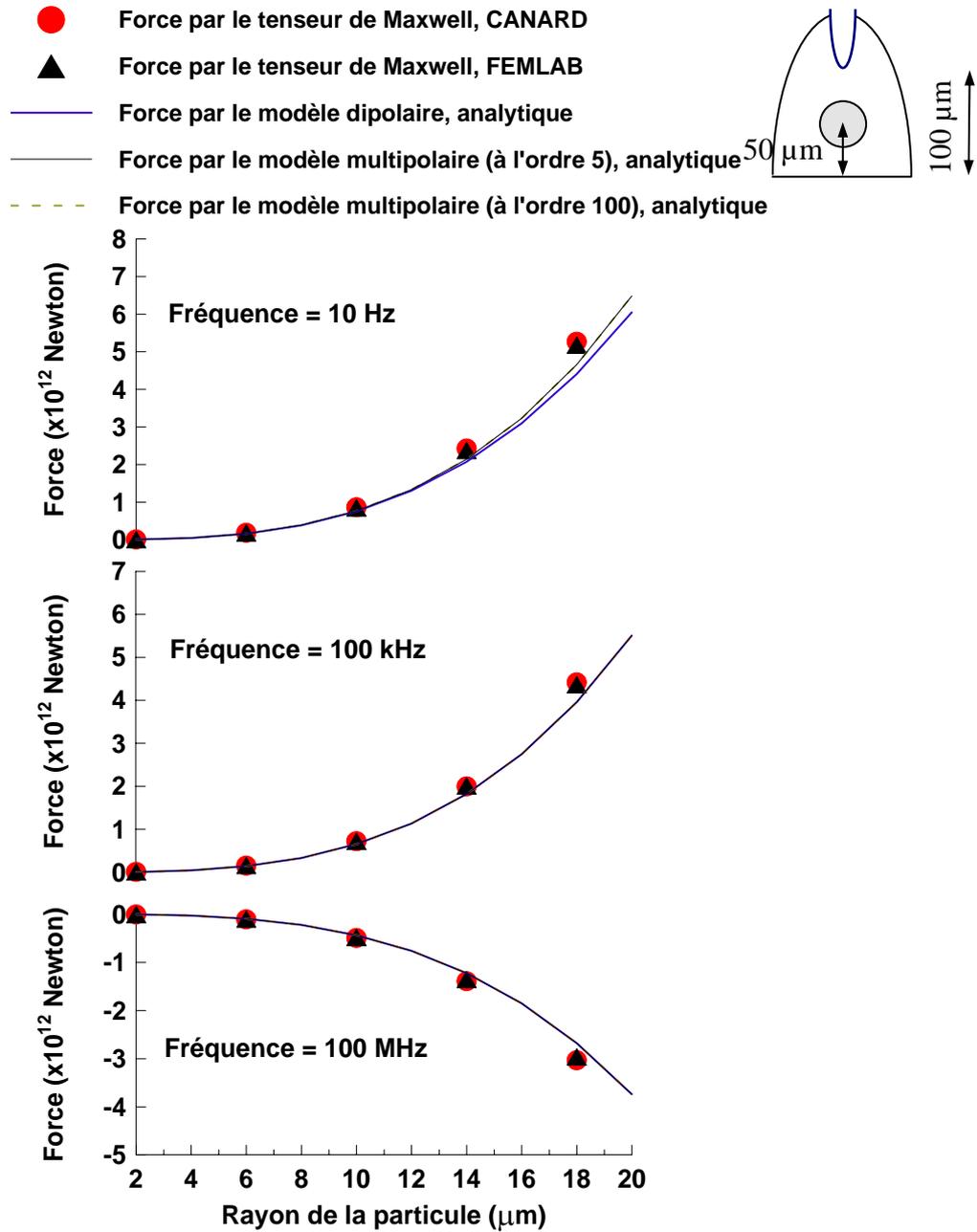


Figure 4.18. Variation de la force DEP appliquée à une particule sphérique en fonction de sa taille. La particule est immergée dans une solution de Mannitol. Le centre de la sphère se situe à $50 \mu\text{m}$ de l'électrode plane. La force DEP est calculée par la méthode du tenseur de Maxwell (CANARD et FEMLAB) et par l'approximation dipolaire et multipolaire (jusqu'à l'ordre 5 et 100, analytique).

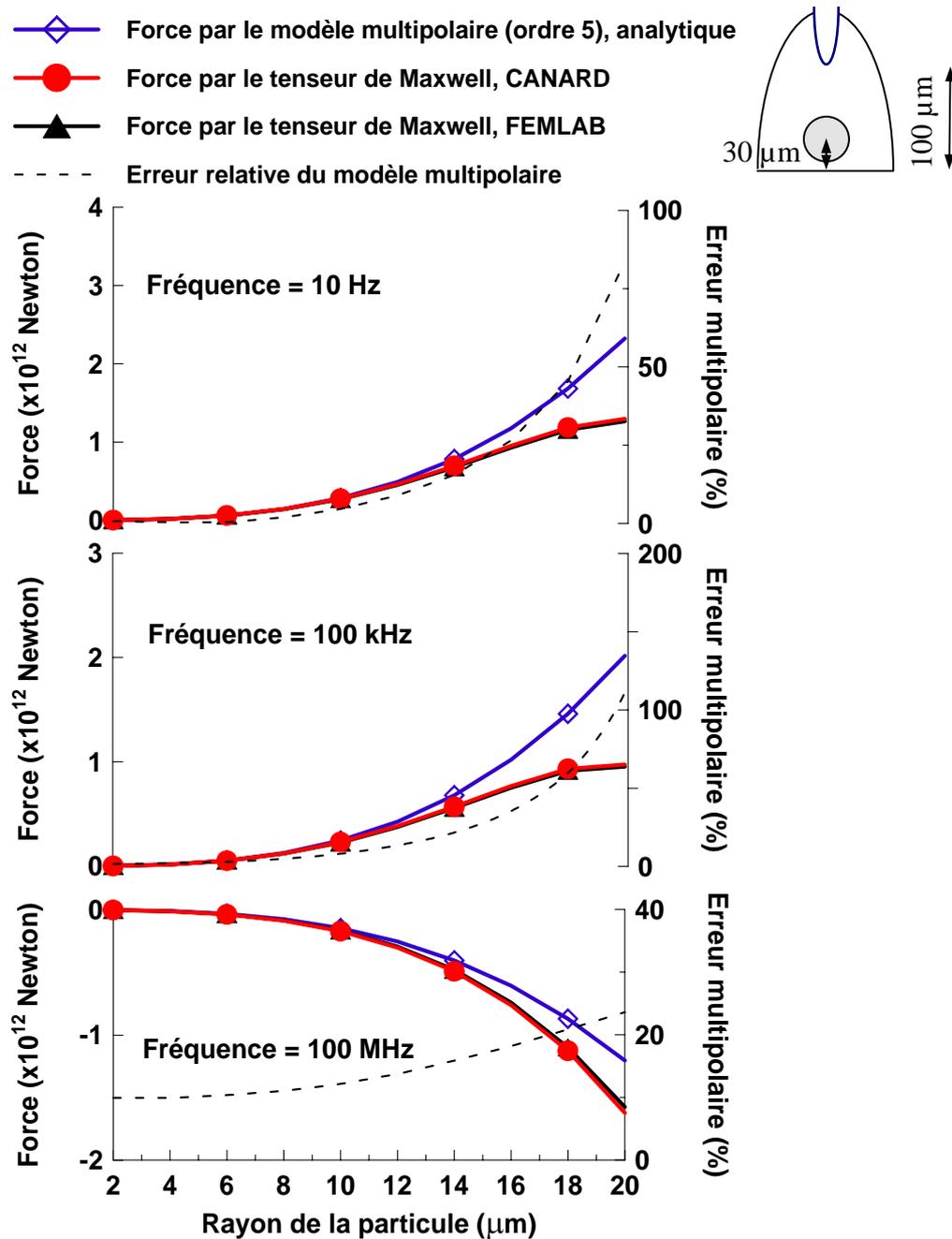


Figure 4.19. Variation de la force DEP appliquée à particule sphérique et erreur commise par l'approche multipolaire en fonction de sa taille. La particule est immergée dans une solution de Mannitol. Le centre de la sphère se situe à $30 \mu\text{m}$ de l'électrode plane. La force DEP est calculée par la méthode du tenseur de Maxwell (CANARD et FEMLAB) et par l'approximation multipolaire (jusqu'à l'ordre 5) (analytique).

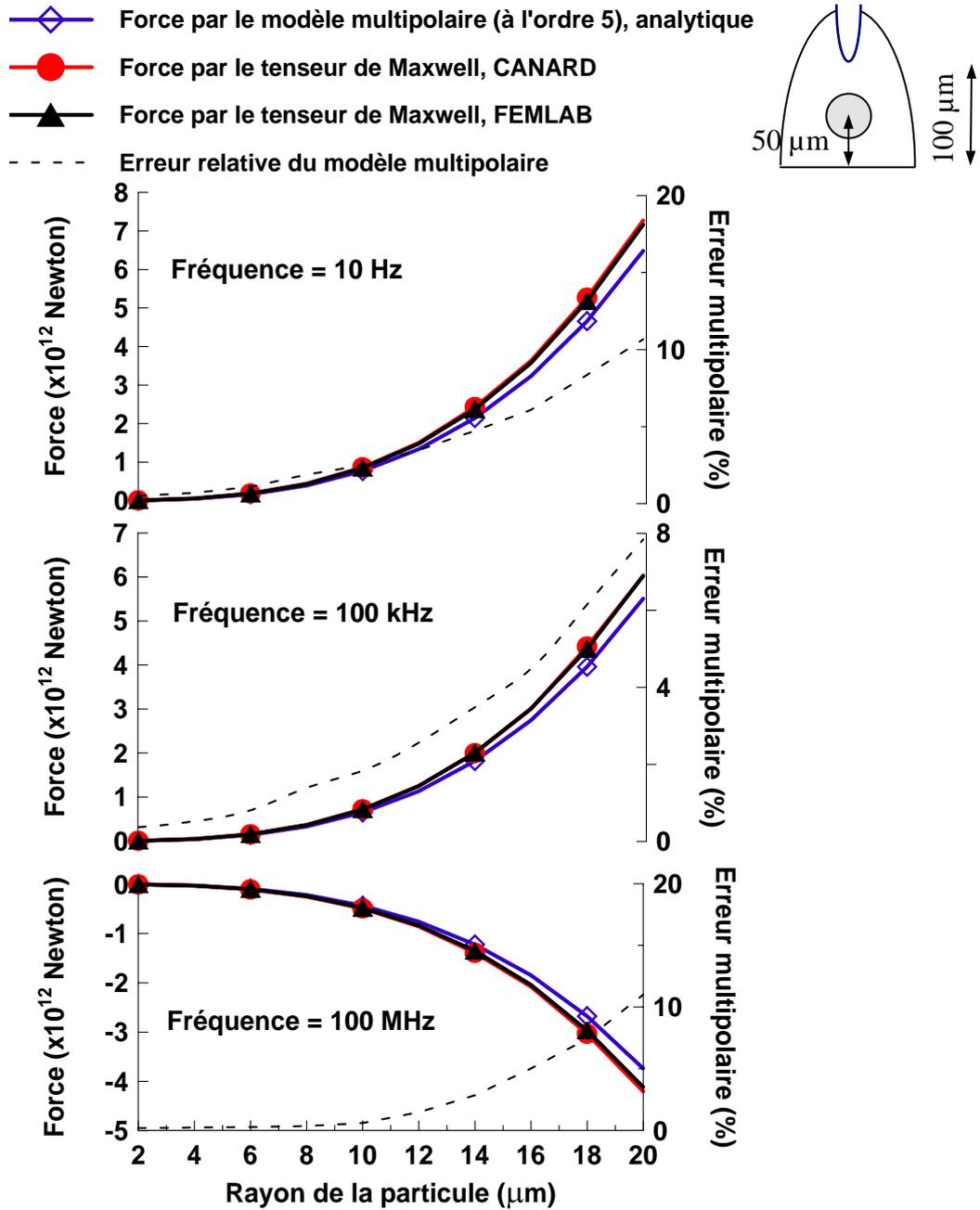


Figure 4.20. Variation de la force DEP appliquée à une particule sphérique et erreur commise par l'approche multipolaire en fonction de sa taille. La particule est immergée dans une solution de Mannitol. Le centre de la sphère se situe à $50 \mu\text{m}$ de l'électrode plane. La force DEP est calculée par la méthode du tenseur de Maxwell (CANARD et FEMLAB) et par l'approximation multipolaire (jusqu'à l'ordre 5) (analytique).

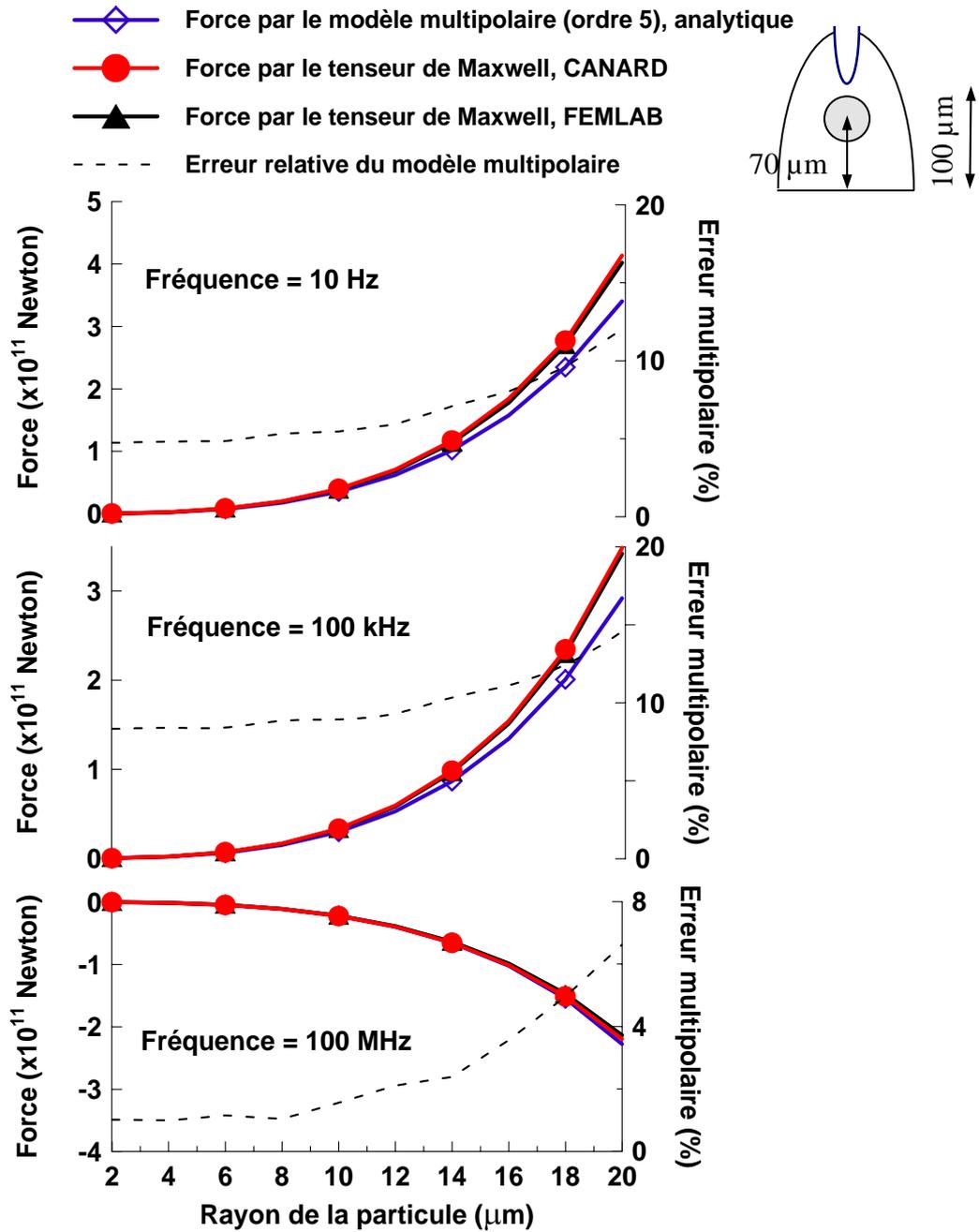


Figure 4.21. Variation de la force DEP appliquée à une particule sphérique et erreur commise par l'approche multipolaire en fonction de sa taille. La particule est immergée dans une solution de Mannitol. Le centre de la sphère se situe à $70\ \mu\text{m}$ de l'électrode plane. La force DEP est calculée par la méthode du tenseur de Maxwell (CANARD et FEMLAB) et par l'approximation multipolaire (jusqu'à l'ordre 5) (analytique).

4.3. Influence de la forme de la particule sur la force DEP

Les calculs précédents, effectués sur une particule sphérique et homogène, ont montré les limites d'utilisation du modèle ponctuel quand la taille relative de cette dernière dépassait 5% de la distance interélectrodes. Dans cette section, nous nous proposons d'effectuer une extension des calculs pour une cellule biologique de forme allongée ou aplatie plongée dans une solution aqueuse plus ou moins conductrice, pour la configuration pointe-plan. En première approche, nous considérons que la cellule est constituée d'un milieu intracellulaire homogène (cytoplasme) et d'une enveloppe extérieure de faible épaisseur (10 nm) (membrane lipidique). Le tableau 4.6 ci-après décrit les propriétés électriques de CHO (Ovocyte de Hamster Chinois) et des solutions qui les contiennent.

Tableau 4.6. Les différentes propriétés électriques des matériaux diélectriques considérés dans les calculs. ε_0 est la permittivité du vide.

Matériau	Permittivité ε (F/m)	Conductivité électrique σ ($\mu\text{S/cm}$)
Eau déionisée	$78.5 \varepsilon_0$	100
Eau salée	$78.5 \varepsilon_0$	25000
Membrane du CHO	$4 \varepsilon_0$	10^{-3}
Milieu intracellulaire du CHO	$60 \varepsilon_0$	5000

4.3.1. Géométrie

Un CHO (Ovocyte de Hamster Chinois), de forme ellipsoïdale variable, est placé dans la configuration pointe-plan selon la figure 4.22. La distance pointe-plan est égale 100 μm . La position de la cellule est repérée par la distance qui sépare son centre de l'électrode plane. a représente la longueur de l'ellipsoïde le long de l'axe de symétrie et b représente la longueur de l'ellipsoïde le long de l'axe transverse. Le cytoplasme est noté $\Omega^{(1)}$, la membrane lipidique $\Omega^{(2)}$ et le tampon $\Omega^{(3)}$. Les interfaces cytoplasme-membrane lipidique et membrane lipidique-tampon sont notées S_1 et S_2 , respectivement.

Si la cellule est considérée sphérique, son diamètre est pris égal à 20 μm . Dans le cas où la cellule est considérée de forme ellipsoïdale, les dimensions sont déduites afin de conserver ce volume correspondant à ce diamètre (voir figure 4.23).

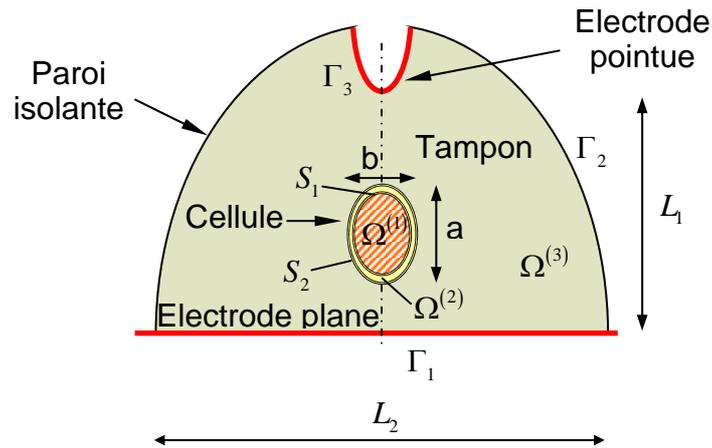


Figure 4.22. Un CHO de forme ellipsoïdale soumis à un champ non uniforme. Les dimensions du CHO sont tels que $R = \sqrt[3]{ab^2}$, $R/L_1 = 1/10$, $R/L_2 = 1/100$, avec $R = 10 \mu\text{m}$ et $L_1 = 100 \mu\text{m}$.

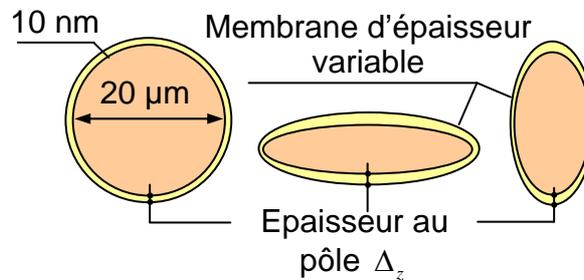


Figure 4.23. Formes des CHO utilisés dans les simulations.

Dans cette étude, ne sont considérées que les cellules dont la forme ellipsoïdale de la membrane lipidique et celle du cytoplasme sont confocales, c'est-à-dire possédant des foyers (au sens géométrique) communs [148, 245]. Ceci impose une épaisseur non uniforme de la membrane : elle varie en fonction de l'allongement de la cellule. Néanmoins, ces variations d'épaisseur restent faibles car l'épaisseur initiale de la membrane est très petite devant le rayon de la cellule.

La formulation mathématique utilisée ici est identique à celle proposée à la section précédente, à la différence près de considérer un milieu supplémentaire, à savoir, la membrane lipidique, ce qui revient à écrire (voir figure 4.21 pour la définition des différentes frontières) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\bar{\sigma}^{(k)} \nabla V^{(k)}) = 0 \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega^{(k)}, k = 1, 2, 3 \\ \bar{\sigma}^{(1)} \bar{E}_n^{(1)}(\mathbf{x}) = \bar{\sigma}^{(2)} \bar{E}_n^{(2)}(\mathbf{x}) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in S_1 \\ \bar{\sigma}^{(2)} \bar{E}_n^{(2)}(\mathbf{x}) = \bar{\sigma}^{(3)} \bar{E}_n^{(3)}(\mathbf{x}) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in S_2 \\ V^{(3)}(\mathbf{x}) = V_{\Gamma_1} \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma_1 \\ \frac{\partial V^{(3)}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = -E_n^{(3)}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma_2 \\ V^{(3)}(\mathbf{x}) = V_{\Gamma_3} \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma_3 \end{array} \right. \quad (4.26)$$

4.3.2. Expression de la force DEP par le modèle du dipôle ponctuel

Nous avons vu au chapitre 2 que le calcul de la force DEP d'une particule sphérique multicouches soumise à un champ électrique alternatif s'écrit sous la forme :

$$\langle \mathbf{F}^{\text{DP}} \rangle = 2\pi \varepsilon^{(3)} R^3 \text{Re}[\bar{K}] \nabla E_{\text{efficace}}^2 \quad (4.27)$$

où $\text{Re}[\bar{K}]$ est la partie réelle du facteur de Clausius-Mossotti (expression (4.22)). Si nous considérons maintenant une particule multicouches de forme ellipsoïdale, la même expression est utilisée pour calculer la force DEP. Seul le facteur \bar{K} prend une forme plus ou moins compliquée en fonction du rapport des axes a/b de l'allongement de la particule [148], soit :

$$\bar{K} = \frac{1}{3} \frac{\bar{\varepsilon}^{\text{cellule}} - \bar{\varepsilon}^{(3)}}{\bar{\varepsilon}^{(3)} + (\bar{\varepsilon}^{\text{cellule}} - \bar{\varepsilon}^{(3)}) L_{\parallel}} \quad (4.28)$$

Si la cellule est allongée :

$$L_{\parallel} = \frac{b^2}{2a^2 e^3} \left(\ln \left(\frac{1+e}{1-e} \right) - 2e \right) \quad (4.29)$$

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2} \quad (4.30)$$

si la cellule est aplatie, alors :

$$L_{\parallel} = \frac{b^2}{2(b^2 - a^2)} \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} - \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (4.31)$$

et si la cellule est sphérique :

$$L_{\parallel} = 1/3 \quad (4.32)$$

La permittivité complexe équivalente $\bar{\varepsilon}^{\text{cellule}}$ de la cellule est donnée par l'approximation

suivante (cf. chapitre 2) :

$$\bar{\varepsilon}^{\text{cellule}} = \varepsilon^{(2)} \left[\frac{\bar{\varepsilon}^{(1)} + \Delta_z (\bar{\varepsilon}^{(1)} + \varepsilon^{(2)}) / a}{\bar{\varepsilon}^{(2)} + \Delta_z (\bar{\varepsilon}^{(1)} + \varepsilon^{(2)}) / a} \right] \quad (4.33)$$

Δ_z représente l'épaisseur de la membrane aux pôles (extrémités dans la direction du champ électrique appliqué) de la cellule (voir figure 4.23).

4.3.3. Calcul de la force DEP par le modèle du dipôle ponctuel et par la méthode du tenseur de Maxwell

L'effet de la forme de la cellule sur le module et le sens de la force DEP qui lui est appliquée est étudié. La différence de potentiel appliquée aux électrodes vaut 1 V.

La figure 4.24 montre les variations de la force DEP estimées par le modèle du tenseur de Maxwell pour un CHO immergé dans de l'eau salée ($\sigma = 25000 \mu\text{S/cm}$) en fonction de la fréquence, sur une plage allant de 10 Hz à 100 MHz. Le CHO est positionné au milieu des électrodes. On remarque que la force DEP reste toujours négative quelle que soit l'ellipticité (définie par a/b) et la fréquence. Immergées dans un tampon très conducteur, les cellules biologiques vivantes subissent essentiellement une DEP négative [148]. On note de plus que l'influence de l'aplatissement des cellules sur la force DEP est beaucoup plus importante (par rapport à la forme sphérique, la force DEP augmente, en module, de plus de 88 % pour une cellule dont l'ellipticité $a/b = 1/3$) que celle de l'allongement (la cellule dont l'ellipticité $a/b = 3$ subit une DEP moins importante, en module, de 5 % seulement par rapport à la forme sphérique).

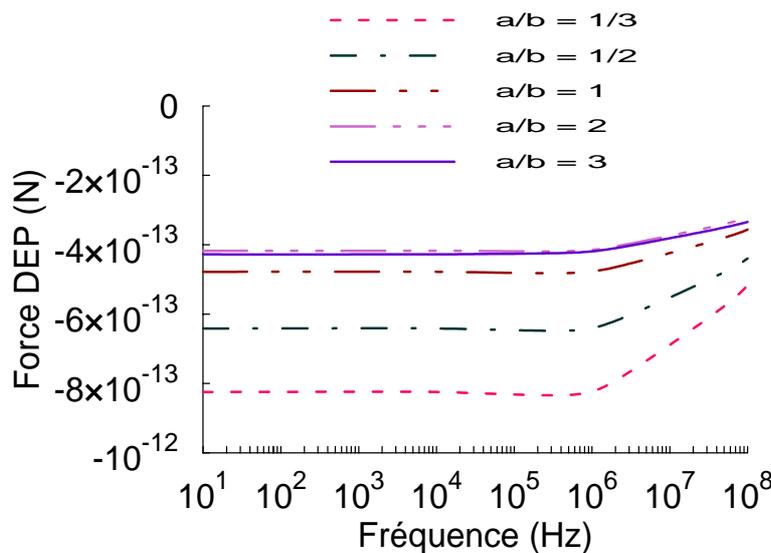


Figure 4.24. Variation de la force DEP, appliquée sur un CHO immergé dans de l'eau salée et positionné à $50 \mu\text{m}$ du plan, en fonction de la fréquence et de l'ellipticité (a/b).

La figure 4.25 représente l'évolution du module de la force DEP en fonction du gradient du carré du champ électrique appliqué pour différentes ellipticités a/b dans le cas d'un CHO immergé dans de l'eau salée.

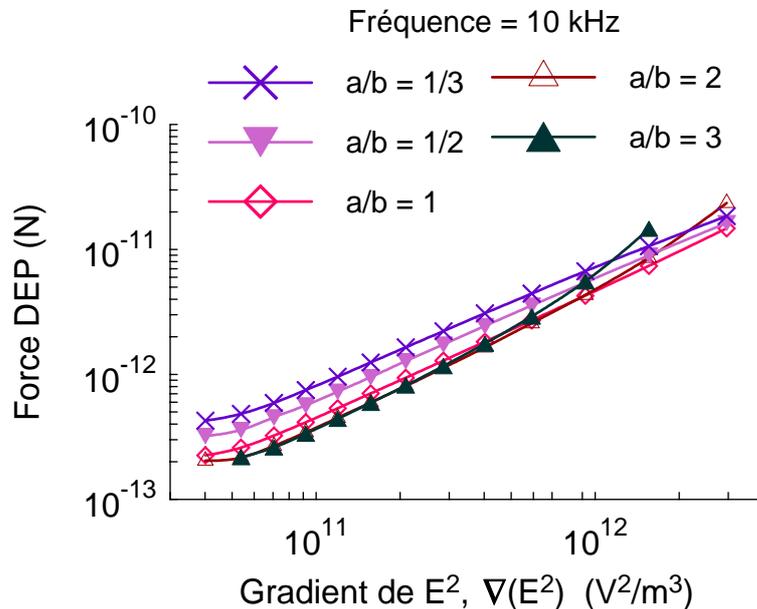


Figure 4.25. Variation du module de la force DEP appliquée sur un CHO en fonction de l'ellipticité a/b . Le CHO baigne dans de l'eau salée à $f = 10$ kHz (la DEP est négative).

Quelle que soit son ellipticité, la tendance de la force DEP appliquée sur le CHO reste la même : la force augmente lorsque l'on augmente le gradient du champ électrique. Sur une large zone entre électrodes, on peut faire la même remarque que précédemment ; les cellules aplaties subissent une force DEP nettement plus importante (en module) que les cellules sphériques, tandis que les cellules allongées montrent une faible diminution par rapport aux cellules sphériques. Ces tendances restent pratiquement inchangées pour des positions allant de 20 à 70 μm .

La figure 4.26, qui reproduit la variation du module de la force DEP déduite du tenseur de Maxwell en fonction de l'ellipticité de la cellule, pour les mêmes positions, corrobore parfaitement ce qui vient d'être dit. La force DEP diminue à mesure que la cellule s'allonge. En revanche, quand elle s'approche de la pointe, on trouve une forme pour laquelle la force DEP est minimale. Cette forme, qui dépend de la position du CHO, est proche de la sphère.

Bien qu'identifiant correctement le régime de DEP, le modèle du dipôle ponctuel ne prévoit que de manière approximative l'intensité de la force DEP (l'erreur varie entre 15 et 70 %). D'autre part, il ne prévoit pas le même effet de l'ellipticité sur l'intensité de la force

DEP. Ce modèle prévoit même une force DEP plus importante pour une ellipticité voisine de $\frac{1}{2}$ et ce quelque soit la position de la cellule.

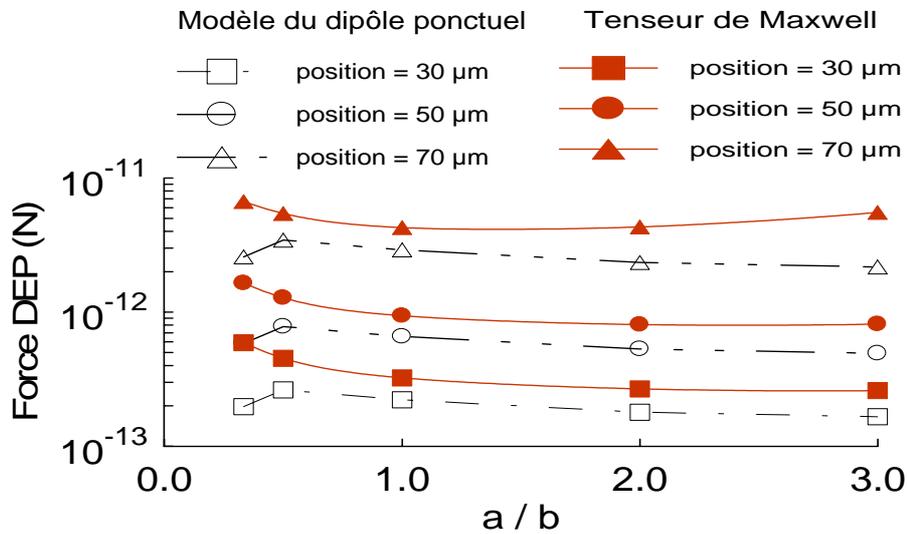


Figure 4.26. Variation du module de la force DEP appliquée sur un CHO en fonction de l'ellipticité a/b . Le CHO baigne dans de l'eau salée. La fréquence vaut $f = 10$ kHz.

On se place maintenant dans des conditions où le tampon est nettement moins conducteur (eau déionisée où $\sigma = 100 \mu\text{S}/\text{cm}$) dans lequel on a observé à la section précédente des changements de régime de DEP en fonction de la position de la cellule.

La figure 4.27 illustre la comparaison entre la force DEP calculée par FEMLAB (figure 4.27.a) et celle prédite par le modèle du dipôle ponctuel (figure 4.27.b). Trois points peuvent être dégagés. Le premier est que le modèle dipolaire donne qualitativement les bons régimes DEP. Le second concerne la fréquence de changement d'un régime à l'autre. Ainsi, la transition entre DEP négative et positive se situe entre 100 et 400 kHz, alors que le modèle dipolaire la prédit entre 50 et 150 kHz. Par ailleurs, bien que la cellule soit positionnée à mi-distance des électrodes, la force prédite par le modèle du dipôle ponctuel est sous-estimée en DEP négative et surestimée en DEP positive. L'écart varie, selon l'ellipticité, entre 30 et 130 %. Le troisième point est relatif au contraste entre les effets de l'aplatissement et de l'allongement selon que la DEP est positive ou négative. Pour la DEP positive, la force varie peu avec l'aplatissement ($a/b < 1$) alors qu'elle augmente fortement avec l'allongement ($a/b > 1$) (voir figure 4.27). Au contraire, pour la DEP négative, la force dépend peu de l'allongement mais augmente avec l'aplatissement.

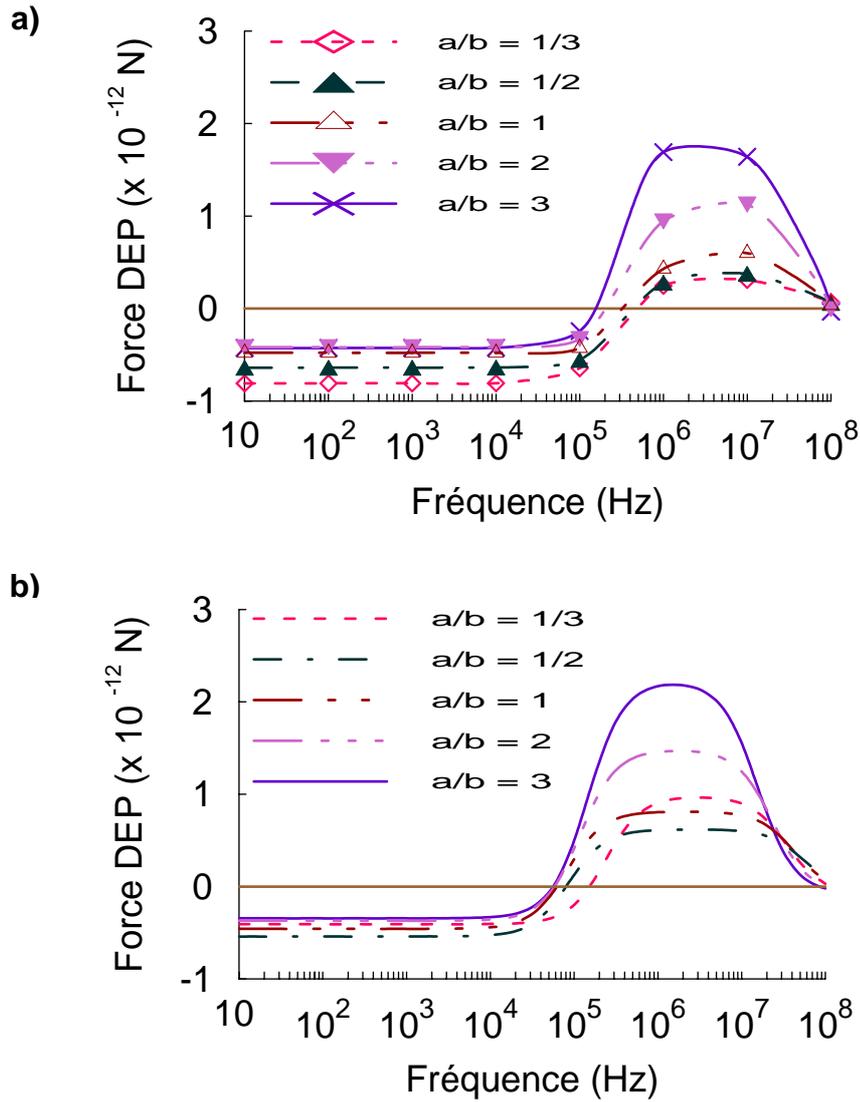


Figure 4.27. Variation de la force DEP, appliquée sur un CHO immergé dans de l'eau déionisée et positionné à $50 \mu\text{m}$ du plan, en fonction de la fréquence, a) par le tenseur de Maxwell et b) par le modèle du dipôle ponctuel.

On peut comprendre qualitativement ces variations contrastées en considérant un milieu homogène équivalent à la cellule. Le champ électrique le long de l'axe de ce corps homogène est tracé en DEP négative et positive (figure 4.28.a et 4.28.b, respectivement).

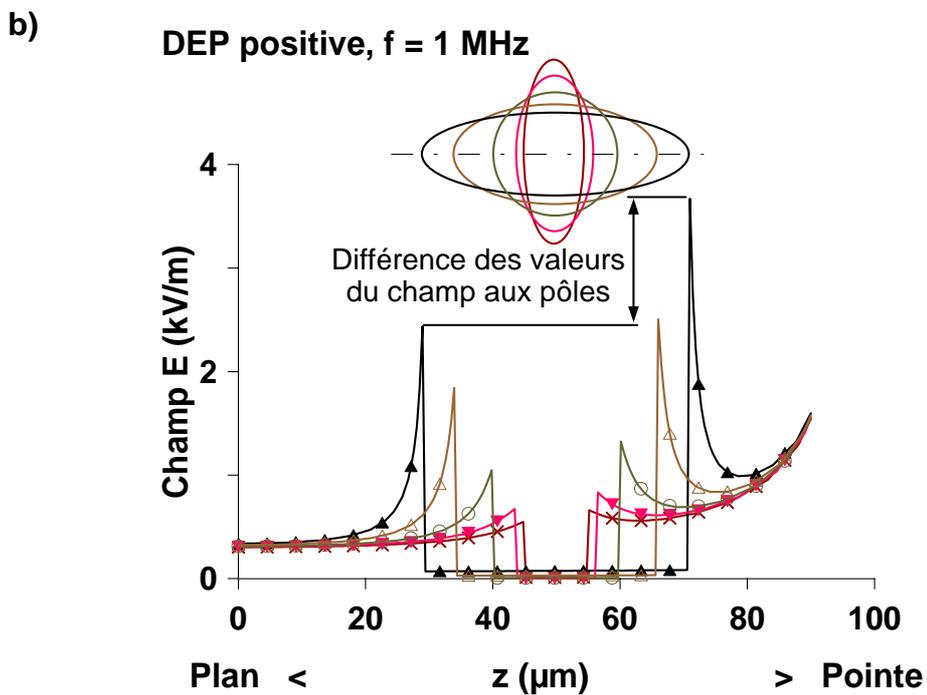
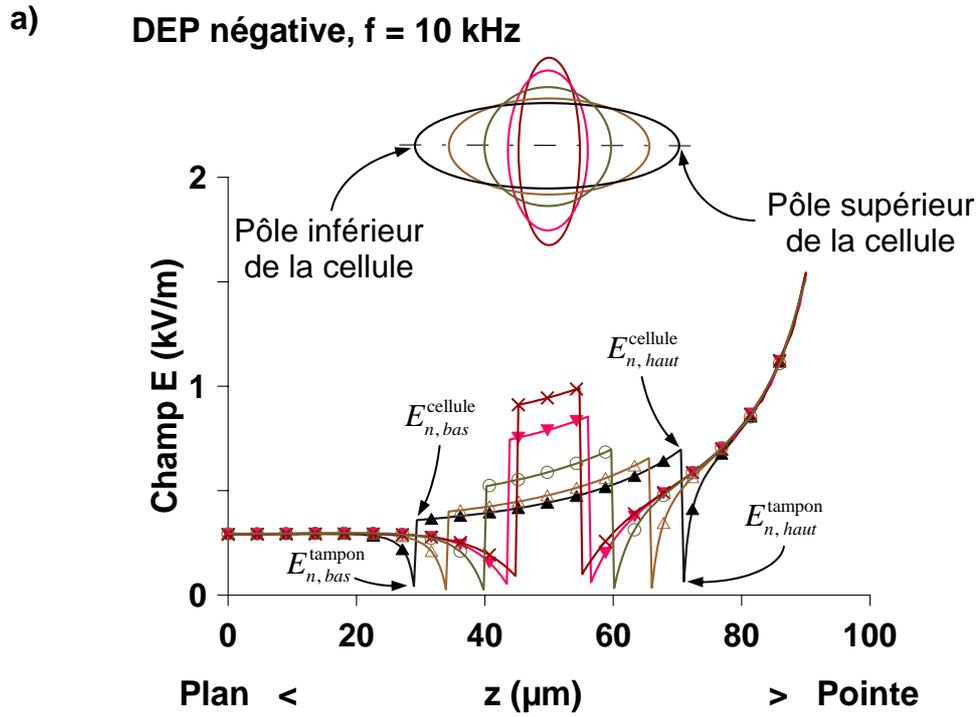


Figure 4.28. Variations du champ électrique le long de l'axe de symétrie du système d'électrodes. Les courbes \times , \blacktriangledown , \circ , \triangle et \blacktriangle représentent le champ perturbé par un CHO dont l'ellipticité vaut $1/3$, $1/2$, 1 , 2 et 3 , respectivement. Le CHO baigne dans de l'eau pure.

En première approximation, nous supposons que la force électrique est proportionnelle à la quantité :

$$\varepsilon^{\text{cellule}} \left(E_{n, \text{haut}}^{\text{cellule}} \right)^2 - \varepsilon^{\text{tampon}} \left(E_{n, \text{haut}}^{\text{tampon}} \right)^2 - \left(\varepsilon^{\text{cellule}} \left(E_{n, \text{bas}}^{\text{cellule}} \right)^2 - \varepsilon^{\text{tampon}} \left(E_{n, \text{bas}}^{\text{tampon}} \right)^2 \right) \quad (4.34)$$

où les indices *haut* et *bas* représentent les pôles supérieur et inférieur de la cellule, respectivement, définis sur la figure 4.28.

En DEP négative, la permittivité équivalente de la cellule est inférieure à celle du tampon ($\|\bar{\varepsilon}^{\text{cellule}} / \bar{\varepsilon}^{\text{tampon}}\| \ll 1$). Par continuité de la composante normale du vecteur déplacement électrique complexe ($\bar{\varepsilon} \bar{E}_n$) à travers l'interface cellule-tampon, on déduit que le champ électrique immédiatement extérieur à la cellule est pratiquement négligeable devant le champ électrique immédiatement intérieur ($\|\bar{E}_n^{\text{tampon}}\| = \|\bar{\varepsilon}^{\text{cellule}} / \bar{\varepsilon}^{\text{tampon}}\| \|\bar{E}_n^{\text{cellule}}\| \ll \|\bar{E}_n^{\text{cellule}}\|$ ce qui implique $\|E_n^{\text{tampon}}\| \ll \|E_n^{\text{cellule}}\|$) (voir figure 4.28.a). La force DEP est donc déterminée en majeure partie par la contribution du champ électrique intérieur, et le terme de proportionnalité (4.34) devient $\varepsilon^{\text{cellule}} \left(E_{n, \text{haut}}^{\text{cellule}} + E_{n, \text{bas}}^{\text{cellule}} \right) \left(E_{n, \text{haut}}^{\text{cellule}} - E_{n, \text{bas}}^{\text{cellule}} \right)$. Plus la cellule est aplatie, plus le champ intérieur est intense. La force varie ainsi sensiblement avec l'aplatissement. Quand la cellule est allongée, la valeur du champ intérieur tend vers celle du champ extérieur (la différence de potentiel est imposée) si bien que la force DEP tend à saturer.

En DEP positive, la permittivité équivalente de la cellule est plus importante que celle du tampon. Le champ intérieur est donc nettement plus faible que celui à l'extérieur de la cellule (figure 4.28.b). Le terme de proportionnalité (4.34) pour la force DEP se réduit à $\varepsilon^{\text{tampon}} \left(\left(E_{n, \text{haut}}^{\text{tampon}} \right)^2 - \left(E_{n, \text{bas}}^{\text{tampon}} \right)^2 \right)$. A mesure que la cellule s'aplatit, le saut du champ extérieur normal devient moins dépendant de l'épaisseur de la cellule et la force DEP tend asymptotiquement vers une valeur finie. Si en revanche, la cellule s'allonge, le champ électrique en soi ainsi que la différence entre le champ extérieur aux deux pôles

augmentent (voir détail figure 4.28.b). De ce fait, la force DEP varie fortement en fonction de l'allongement de la cellule.

4.3.4. Vitesse calculée par le modèle dipolaire et le modèle du tenseur de Maxwell

La figure 4.29 représente les variations de la vitesse pour un CHO de différentes ellipticités en fonction de la fréquence du champ électrique appliqué. Le CHO est au centre des électrodes. En DEP positive, la vitesse maximum se produit à 1 MHz, alors, qu'en DEP négative, elle est pratiquement constante, pour une forme donnée du CHO. Pour une différence de potentiel de 1 V et une distance interélectrodes de 100 μm , la vitesse maximum de la particule varie, selon le régime DEP et la forme, entre 1 et 6 $\mu\text{m/s}$ telle que prédite par la méthode du tenseur de Maxwell et entre 2.5 et 8 $\mu\text{m/s}$. Dans ces conditions, le mouvement du CHO, qui parcourt le microsystème en 40 secondes (en moyenne), est beaucoup plus lent que celui des particules synthétiques utilisées à la section 4.2 à cause de sa taille mais aussi de par ses propriétés électriques.

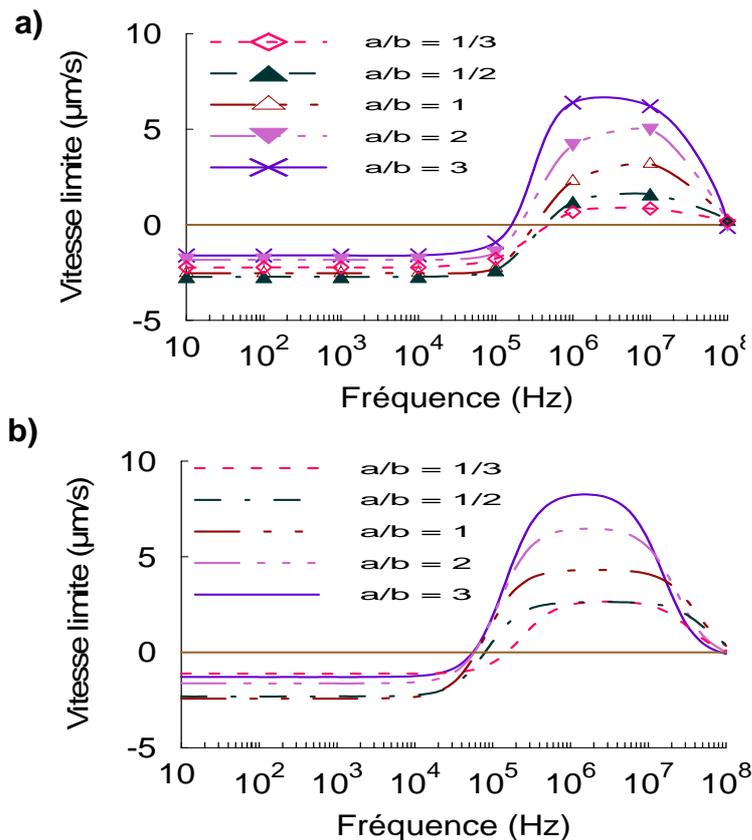


Figure 4.29. Variation de la vitesse limite d'un CHO dans une eau déionisée en fonction la fréquence du champ électrique appliqué. Le CHO est au centre des électrodes. (a) selon le tenseur de Maxwell et (b) selon le modèle dipolaire.

En effet, la conductivité et la permittivité du cytoplasme sont proches de celles de l'eau dans laquelle le CHO baigne (voir tableau 4.6) ce qui rend la différence de polarisabilité du

couple CHO-liquide extérieur, qui est à l'origine de l'effet DEP, moins importante que celle du couple particule de synthèse-liquide extérieur. Par ailleurs, et puisque le coefficient de traînée est plus important pour un CHO aplati qu'un CHO allongé (voir tableau 4.7), et qu'en DEP positive (resp. négative) la force DEP est plus (resp. moins) importante pour les CHO allongés que les CHO aplatis, le contraste en vitesse est plus prononcé (respectivement moins prononcé) que celui relevé pour les forces.

Tableau 4.7. Variation du coefficient associé à traînée k en fonction de l'ellipticité.

Ellipticité	1/3	1/2	1	2	3
Coefficient k (chapitre 2, formules (2.85), (2.86) et (2.87))	1.93126	1.2464	1	1.20394	1.40446

4.4. Les forces d'interaction mutuelle entre deux cellules biologiques sous champ électrique uniforme

La configuration étudiée ici comprend deux électrodes planes qui génèrent un champ électrique uniforme. Entre les deux électrodes, deux CHO sont alignés dans la direction du champ électrique (voir figure 4.30). Le rapport entre le rayon des cellules et la distance inter-électrode vaut 1/40. La frontière isolante se situe à une distance égale à 60 fois le rayon des cellules. Le champ électrique uniforme appliqué est égal à 25 V/cm. Les différentes propriétés des milieux sont celles définies dans le tableau 4.6 du paragraphe précédent.

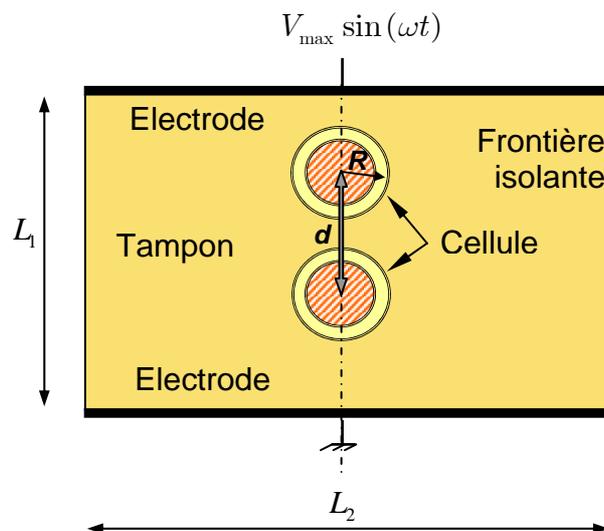


Figure 4.30. Deux CHO soumis à un champ électrique uniforme. La représentation des cellules ainsi que l'épaisseur de leur membrane ont des tailles exagérées. $R/L_1 = 1/40$, $R/L_2 = 1/60$, $R = 10 \mu\text{m}$.

Dans le cadre de l'approximation du dipôle ponctuel, la force d'interaction entre deux particules identiques est donnée par [156] :

$$F_z^{\text{Mutuelle}} = 12\pi \left(\text{Re}[\bar{K}] \right)^2 \varepsilon^{(\text{solution})} E_0^2 R^6 d^{-4} \quad (4.35)$$

Rappelons que \bar{K} est le facteur de Clausius-Mossotti défini par :

$$\bar{K} = \frac{\bar{\sigma}^{(\text{particule})} - \bar{\sigma}^{(\text{solution})}}{\bar{\sigma}^{(\text{particule})} + 2\bar{\sigma}^{(\text{solution})}} \quad (4.36)$$

La figure 4.31 montre les variations de la force électrique d'interaction entre cellules en fonction de la distance d qui sépare leur centre (voir figure 2.30), calculée par le tenseur de Maxwell et par le modèle du dipôle ponctuel (les CHO baignent dans de l'eau salée, $\sigma = 25000 \mu\text{s/cm}$). Pour des distances telles que $d/R > 3$, la force d'interaction évolue de manière sensiblement proche de la loi dipolaire en $(d/R)^{-4}$.

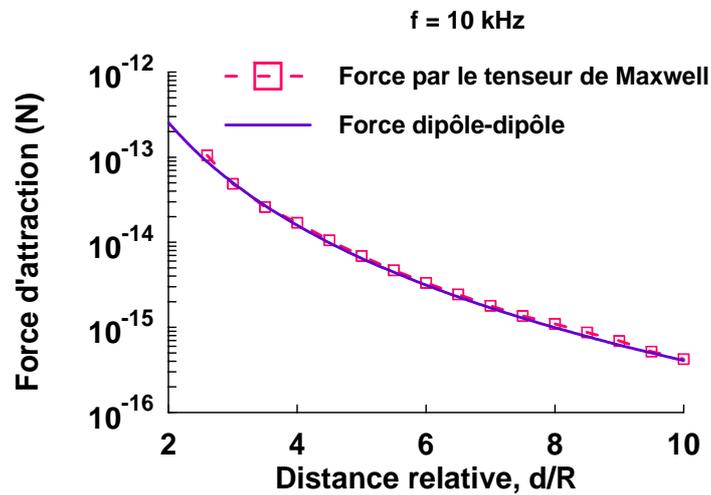


Figure 4.31. Variation de la force électrique d'interaction entre deux CHO dans de l'eau salée en fonction de la distance entre leur centre. La force est calculée par le tenseur de Maxwell et par l'approximation du dipôle ponctuel.

Il est utile de noter que, dans ce cas, la très bonne correspondance entre les deux modèles s'explique pour deux raisons. La première est que les électrodes sont éloignées des cellules (les forces images n'interviennent donc que très peu). La deuxième est due au fait que, le champ électrique appliqué étant uniforme, la longueur caractéristique de variation du champ électrique induit par un dipôle ponctuel est le rayon de la cellule. Pour la configuration pointe-plan, le rayon de courbure de la pointe est une autre longueur caractéristique qui intervient dans la distribution du champ électrique dans le microsystème. Cette longueur, de l'ordre du micromètre, est sensiblement inférieure à la taille des cellules.

Sont reportées sur la figure 4.32 les variations de la force d'interaction mutuelle en fonction de la fréquence et ce pour une position proche (à $d/R = 2.5$) et une position éloignée (à $d/R = 5$). La figure (4.32.a) correspond au cas où le tampon est une eau salée ($\sigma = 25000 \mu\text{S}/\text{cm}$) et la figure (4.32.b) correspond au cas où le tampon est une eau déionisée ($\sigma = 100 \mu\text{S}/\text{cm}$). Pour les deux cas (eau salée et déionisée pure) ainsi que pour toutes les fréquences testées, la force d'interaction mutuelle est attractive. Ceci explique la formation de chaîne où l'on constate un alignement de cellules dans la direction du champ électrique [60]. Quand le tampon est de l'eau salée, la force d'interaction mutuelle ne change que très peu dans une large gamme de fréquences (10 Hz et 1 MHz). A partir de cette dernière fréquence, la force d'attraction mutuelle commence à baisser. Quand le tampon est de l'eau pure, la force d'interaction mutuelle subit deux variations visibles. La première à environ 2 kHz et la seconde à 50 MHz. Avant 1 kHz et entre 10 kHz et 10 MHz, la force présente des paliers. Les variations de la force d'interaction en fonction de la fréquence sont corrélées aux variations du carré de la partie réelle du facteur de Clausius-Mossotti conformément à la formule (4.35).

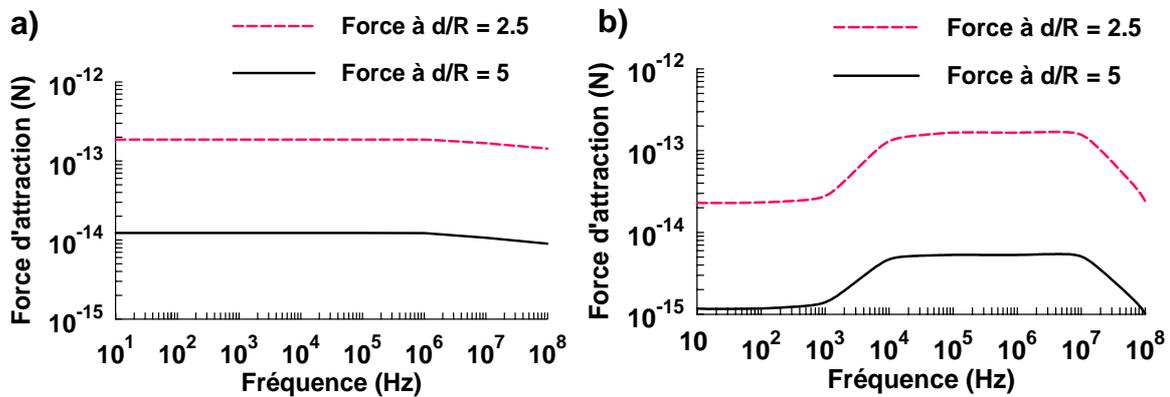


Figure 4.32. Variation de la force électrique d'interaction mutuelle en fonction de la fréquence entre deux CHO immergés a) dans de l'eau salée et b) dans de l'eau déionisée.

On note ici que la vitesse d'approche des CHO n'est plus déterminée par le modèle de particule isolée (la formule de Stokes), mais plutôt par le drainage du film liquide entre les CHO.

4.5. Conclusions

Les limites de validité du modèle du dipôle ponctuel ont été estimées par confrontation avec le modèle du tenseur de Maxwell qui prend en compte la perturbation du champ électrique due à la présence de la particule. Plusieurs tests ont été effectués. Le premier concerne une configuration pointe-plan qui crée un champ électrique non uniforme entre

les électrodes. Pour les sphères homogènes immergées dans une solution de Mannitol, un accord satisfaisant a été trouvé entre ces deux modèles si la particule est de taille inférieure à 10 % de la distance interélectrodes ou si elle est positionnée dans la zone centrale entre électrodes. A proximité de la pointe comme du plan, la méthode ponctuelle a montré ses limites bien que des développements multipolaires aient été utilisés. De façon très générale, la validité du modèle ponctuel (dipolaire ou multipolaire) est dépendante du rapport des dimensions électrodes/particules qui doit, comme dans les macrosystèmes, être toujours très grandes. En effet, ce modèle suppose que le champ électrique varie très peu à l'échelle de la taille de la particule qui peut donc être négligée. Cette explication devrait, dans le cas de la configuration pointe-plan, justifier un écart plus important du côté de la pointe où le champ électrique varie fortement par rapport à l'électrode plane. Or, l'inversion des tendances (écart plus important du côté de l'électrode plane) la remet en cause. La justification se trouve plutôt dans la distribution des charges sur l'électrode qui est fortement perturbée par la proximité d'une particule. Ainsi, cela nous conduirait à conclure que le modèle ponctuel reste très approximatif même pour une configuration où le champ est uniforme, pour peu que la particule soit au voisinage des électrodes.

Le deuxième test correspond à l'étude de l'influence de la forme d'un CHO (Ovocyte de Hamster Chinois) sur la force DEP qui lui est appliquée dans la configuration pointe-plan. Pour le CHO plongé dans une solution très conductrice ($\sigma = 25000 \mu\text{S/cm}$), où la DEP est toujours négative, la force DEP pour les CHO aplatis est presque 2 fois plus élevée que pour les CHO de forme sphérique ; pour les CHO allongés, par contre, la modification reste négligeable. Pour un CHO dans une solution moins conductrice ($\sigma = 100 \mu\text{S/cm}$), on obtient les mêmes conclusions tant que le régime de DEP est négatif. En revanche, pour des fréquences du champ donnant une DEP positive on constate l'effet inverse : la force pour les CHO allongés peut être 3 fois plus grande que pour la forme sphérique alors que pour les CHO aplatis la variation est de 40 % au plus. Le modèle du dipôle ponctuel identifie correctement le régime de DEP sauf à proximité de la fréquence de transition. Mais il ne donne qu'un ordre de grandeur des forces DEP qui s'exercent sur les CHO de différentes formes.

Le troisième test porte sur une configuration plan-plan qui induit un champ électrique uniforme. La force d'interaction mutuelle entre deux CHO a été déterminée par la méthode du tenseur de Maxwell. Pour des cellules assez éloignées ($d/R > 3$) (R est le rayon de la cellule et d la distance qui sépare leur centre), nous retrouvons les valeurs prédites par la loi en $(d/R)^{-4}$ traduisant l'interaction dipôle-dipôle. Cette loi est donc valable pour des

milieux biologiques suffisamment dilués.

La force électrique appliquée à une particule dépend de sa forme. Inversement, en présence d'un champ électrique, les gouttes ou les cellules peuvent se déformer. Il est donc indispensable d'utiliser des modèles qui, d'une part tiennent compte de la présence de la particule, et d'autre part soient traités par une méthode numérique capable de suivre la déformation de cette particule. Satisfaisant à ces impératifs, la MIF est utilisée pour effectuer le couplage entre le déplacement par DEP et la déformation de la particule.

Annexe 4.1

Dérivation de la solution analytique pour le potentiel dans la configuration pointe-plan

Reprenons la configuration pointe-plan longuement décrite. La pointe est hyperbolique et la frontière latérale du microsysteme ellipsoïdale est orthogonale à la pointe. Le plan est médian à l'ellipsoïde. Le problème électrique à résoudre est :

$$\begin{cases} \nabla^2 V(\mathbf{x}) = 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \\ V(\mathbf{x}) = V_1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma_1 \\ \frac{\partial V}{\partial n}(\mathbf{x}) = 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma_2 \\ V(\mathbf{x}) = V_2 & \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma_3 \end{cases} \quad (\text{Ann4.1-1})$$

Dans ces conditions, les coordonnées sphéroïdales allongées vont faciliter la résolution du problème, comme illustré par la figure ci-après.

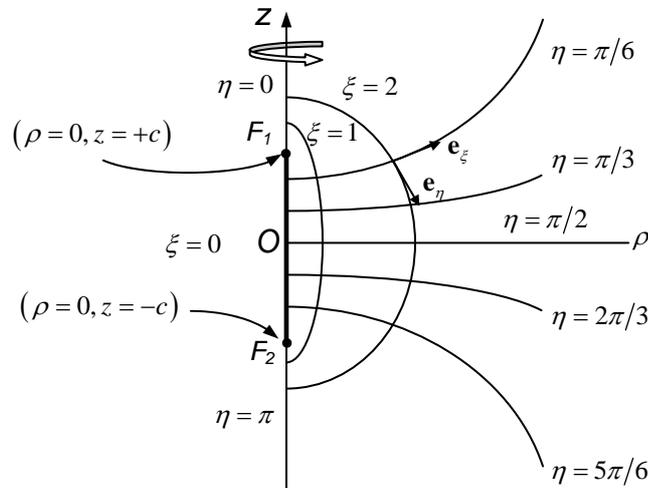


Figure Ann.4.1-1. Système de coordonnées adopté pour le calcul du potentiel électrique généré entre une plaque plane et une pointe.

En effet la transformation :

$$z + i\rho = c \cosh(\xi + i\eta), \quad (\text{Ann4.1-2})$$

$c > 0$, donne naissance aux relations :

$$z = c \cosh \xi \cos \eta, \quad \rho = c \sinh \xi \sin \eta \quad (\text{Ann4.1-3})$$

L'univocité de cette transformation est garantie pour les domaines de variation de ces

coordonnées tels que :

$$0 \leq \xi, \quad 0 \leq \eta \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (\text{Ann4.1-4})$$

$$\cosh \xi = \frac{R_1 + R_2}{2c}, \quad \cos \eta = \frac{R_2 - R_1}{2c} \quad (\text{Ann4.1-5})$$

$$R_1 = \left[(z - c)^2 + \rho^2 \right]^{1/2} \quad (\text{Ann4.1-6})$$

$$R_2 = \left[(z + c)^2 + \rho^2 \right]^{1/2} \quad (\text{Ann4.1-7})$$

Les coefficients métriques sont donnés par :

$$h_\xi = h_\eta = \frac{1}{c(\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta)^{1/2}}, \quad h_\theta = \frac{1}{c \sinh \xi \sin \eta} \quad (\text{Ann4.1-8})$$

L'équation que doit satisfaire le potentiel, se réécrit comme, (Happel et Brenner, [126]) :

$$\nabla^2 V = h_\xi h_\eta h_\theta \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta h_\theta} \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi h_\theta} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h_\theta}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \right] = 0 \quad (\text{Ann4.1-9})$$

ou encore, à cause de la symétrie axiale du problème, sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(c \sinh \xi \sin \eta \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(c \sinh \xi \sin \eta \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (\text{Ann4.1-10})$$

Les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \text{a) } \eta = \pi/2 & V = V_1 \\ \text{b) } \eta = \eta_0 & V = V_2 \\ \text{c) } \xi = \xi_0 & \partial V / \partial \xi = 0 \end{cases} \quad (\text{Ann4.1-11})$$

Avec ξ_0 et η_0 des paramètres qui définissent respectivement la pointe hyperboloïde et frontière latérale ellipsoïdale. Une solution possible est celle où les deux termes apparaissant dans l'équation (Ann4.1-10) s'annulent simultanément, c.-à-d. telle que $\sinh \xi \frac{\partial V}{\partial \xi}$ soit indépendant de ξ et $\sin \eta \frac{\partial V}{\partial \eta}$ de η . Vu les conditions aux limites, la

solution s'écrit donc sous la forme :

$$V = A \ln \left[\tan(\eta/2) \right] + B \quad (\text{Ann4.1-12})$$

L'application des conditions aux limites (Ann4.1-11a, b) donne la solution définitive suivante ((Ann4.1-11b) est tacitement vérifiée par le choix de la forme de V) :

$$V = (V_2 - V_1) \ln \left[\tan \left(\frac{\eta}{2} \right) \right] / \ln \left[\tan \left(\frac{\eta_0}{2} \right) \right] + V_1 \quad (\text{Ann4.1-13})$$

L'unicité du problème de Cauchy permet d'affirmer donc que (Ann4.1-13) est la solution

du problème (Annexe 3.1). Par ailleurs :

$$(V = \text{Cst}) \Leftrightarrow (\eta = \text{Cst}) \quad (\text{Ann4.1-14})$$

Les iso-potentiels s'obtiennent par élimination de ξ entre les relations (Ann4.1-3). Ce sont des hyperboles de forme :

$$\frac{z^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{\rho^2}{c^2 \sin^2 \eta} = 1 \quad (\text{Ann4.1-15})$$

Le champ n'a donc qu'une seule composante (selon η) qui vaut :

$$E_\eta = -\frac{V_2 - V_1}{\ln \left[\tan \left(\frac{\eta_0}{2} \right) \right]} \frac{1}{\sin \eta} h_\eta \quad (\text{Ann4.1-16})$$

soit :

$$E_\eta = -\frac{V_2 - V_1}{\ln \left[\tan \left(\frac{\eta_0}{2} \right) \right]} \frac{1}{\sin \eta} \frac{1}{c (\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta)^{1/2}} \quad (\text{Ann4.1-17})$$

Et la force diélectrophorétique moyenne déduite de l'approximation dipolaire, Jones [148], est donnée par :

$$\mathbf{F}_{\eta, \text{moyenne}} = -4\pi \varepsilon^{(e)} R^3 \text{Re} \left[\frac{\bar{\sigma}^{(i)} - \bar{\sigma}^{(e)}}{\bar{\sigma}^{(i)} + 2\bar{\sigma}^{(e)}} \right] \frac{(V_2 - V_1)^2}{\left(\ln \left[\tan \left(\frac{\eta_0}{2} \right) \right] \right)^2} \frac{\cos \eta}{c^3 (1 - \cos^2 \eta)^3} \mathbf{e}_\eta \quad (\text{Ann4.1-18})$$

En remarquant que :

$$\cos \eta = \frac{\sqrt{(z+c)^2 + \rho^2} - \sqrt{(z-c)^2 + \rho^2}}{2c} \quad (\text{Ann4.1-19})$$

$$\mathbf{e}_\eta = \frac{1}{\left[\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta \right]^2} (\sinh \xi \cos \eta \mathbf{e}_\rho - \cosh \xi \sin \eta \mathbf{e}_z) \quad (\text{Ann4.1-20})$$

la formule (Ann4.1-18) devient, sur la partie d'intérêt de l'axe de symétrie, où $\rho = 0$ et $0 \leq z \leq c \cos \eta_0$:

$$\mathbf{F}_z = 4\pi \varepsilon^{(e)} R^3 \text{Re} \left[\frac{\bar{\sigma}^{(i)} - \bar{\sigma}^{(e)}}{\bar{\sigma}^{(i)} + 2\bar{\sigma}^{(e)}} \right] \left(\frac{V_2 - V_1}{\ln \left[\tan \left(\frac{\eta_0}{2} \right) \right]} \right)^2 \frac{c^2 z}{(c^2 - z^2)^3} \mathbf{e}_z \quad (\text{Ann4.1-21})$$

La force induite par le moment $p^{(n)}$ d'ordre n est donnée par :

$$F_z^n = \frac{2\pi \varepsilon^{(e)} R^{2n+1}}{n!(n-1)!} \text{Re} \left[\bar{K}^{(n)} \right] \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^{n-1} E_{z, \text{efficace}}}{\partial z^{n-1}} \right]^2 \quad (\text{Ann4.1-22})$$

$$\bar{K}^{(n)} = \frac{\bar{\sigma}^{(i)} - \bar{\sigma}^{(e)}}{n\bar{\sigma}^{(i)} + (n+1)\bar{\sigma}^{(e)}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{Ann4.1-23})$$

La force totale induite jusqu'au moment d'ordre m s'écrit :

$$F_z^{\text{totale}} = \sum_{n=1}^m F_z^n \quad (\text{Ann4.1-24})$$

La feuille de travail Mathematica pour effectuer ce calcul est la suivante :

Multipole.nb

```
% La permittivité du vide est donnée par epsilon0 :
epsilon0 := 8.8254 * 10^-12;

% Ici sont définies les permittivités complexes de la sphère en latex et de la solution de Mannitol (omega = 2 Pi f) :
eps1c[omega_] := epsilon0 * 77.8 + 1.4 * 10^-4 / (1 * omega); eps2c[omega_] := epsilon0 * 2.55 + 2.379 * 10^-3 / (1 * omega);

% "F[z]" est le facteur de la composante axiale du champ électrique qui dépend de la cote "z",
"K[n,omega]" le facteur de Clausius – Mossotti généralisé d'ordre "n". "c" et "etha0" sont des paramètres de la pointe :
F[z_] := 1 / Log[Tan[etha0/2]] * 1 / (c^2 - z^2); K[n_, omega_] := (eps2c[omega] - eps1c[omega]) / (n * eps2c[omega] + (n + 1) * eps1c[omega]);

% "Force" est la force due au multipôle d'ordre "n"
Force[R_, z_, n_, omega_] := Evaluate[2 Pi Re[ComplexExpand[eps1c[omega]]] Re[ComplexExpand[K[n, omega]]] R^2 n^+1 / (n! (n - 1)!] D[(D[F[z], {z, n - 1}]]];

Force[R, z, n, w]

% "Forcetotale" est la force due à tous les multipôles jusqu'à l'ordre 100
Forcetotale[R_, z_, w_] := Evaluate[0.5 Sum[Force[R, z, n, w], {n, 1, 100}];

Forcetotale[R, z, w]

% Définition des paramètres "etha0" et "c" :
etha0 = Pi/2 - 1.5; c = 1 / Cos[etha0];

matable = FortranForm[TableForm[Table[Forcetotale[R, 0.5, 2 Pi 10^8], {R, 0.02, 0.2, 0.02}]]];

discret1 = 0.26; discret2 = 0.27; discret3 = 0.28; discret4 = 0.29; discret5 = 0.25; discret6 = 0.3; discret7 = 0.35; discret8 = 0.4;
discret9 = 0.45; discret10 = 0.5; discret11 = 0.55; discret12 = 0.6; discret13 = 0.65; discret14 = 0.7; discret15 = 0.75;
discret16 = 0.76; discret17 = 0.77; discret18 = 0.78; discret19 = 0.79;

matable = FortranForm[TableForm[Table[Forcetotale[0.2, discret1, 2 Pi 10^1], {i, 1, 4}]]];

manouvable = FortranForm[TableForm[Table[{2 Pi 10^1, Re[K[1, 2 Pi 10^1]]}, {i, 1, 9, 0.5}]]];

Save["Fichier.dat", matable];

R = 0.2; c = 1 / Cos[Pi/2 - 1.5];

Clear[Force1, Force2, Force3, Force4, Force5, Force6]; Clear[eps1c, eps2c]

omega = 2 * Pi * 10^1
20 pi

Clear[z]; FortranForm[N[Force1[z, omega] + Force2[z, omega] + Force3[z, omega] + Force4[z, omega] + Force5[z, omega]]];

Save["Fichier1.dat", matable]

Save["Fichier2.dat", manouvable]
```

Chapitre 5 : Déformation et déplacement de gouttes

Dans le chapitre 4, le traitement du mouvement de particules s'effectue sous l'hypothèse de particules rigides. Il est tenu compte pour estimer la vitesse du déplacement, de la force DEP qui s'applique sur la particule.

Pour tenir compte des déformations, les forces électriques locales à l'interface des particules sont également considérées dans ce chapitre. Une première étape est de considérer des déformations de gouttes de liquide non miscibles où seule la tension de surface intervient au niveau de l'interface goutte-fluide extérieur. Le problème des gouttes a un double intérêt. D'une part, il permet d'aborder le comportement des cellules biologiques en première approche et d'autre part, il s'agit d'une préoccupation pratique puisque des dispositifs, pour déplacer des gouttes et/ou pour les faire coalescer, sont actuellement en cours de développement.

L'étude des déformations EHD de gouttes n'est pas entièrement nouvelle et plusieurs approches ont été effectuées. Rayleigh est le premier à examiner la stabilité d'une goutte chargée. Taylor étudie une goutte infiniment conductrice soumise à un champ électrique \mathbf{E} uniforme [276]. Melcher et Taylor considèrent une goutte de conductivité finie soumise à un champ électrique [184]. Dans le cadre de l'interaction entre deux gouttes proches soumises à champ électrique, plusieurs travaux ont été effectués tels ceux de Chein [53] et de Lundgaard *et al.* [178].

Ce dernier problème a des applications directes. En effet, soumettre les gouttes d'eau en suspension dans du pétrole brut à un champ électrique est un procédé efficace pour provoquer leur coalescence et permettre par la suite leur extraction. Les gouttelettes d'eau se comportent comme des dipôles électriques qui s'attirent (par force d'interaction mutuelle, comment cela a été présenté au chapitre 4), coalescent et forment ainsi des gouttes de plus en plus grosses facilement extractibles. Cependant, quand le champ électrique atteint une valeur critique E_c , c'est le processus inverse qui se produit, celui étudié par Taylor ; le champ électrique trop intense provoque la brisure des gouttes. Pour prédire dans quelles conditions la brisure des gouttes se produit, plusieurs études ont

été effectuées d'un point de vue analytique et expérimental [23, 255, 275]. Sur le plan analytique, certains travaux considèrent des formes données de la goutte pour lesquelles la solution analytique exacte pour le champ électrique est connue ; c'est le cas notamment des travaux de Taylor sur des gouttes ellipsoïdales infiniment conductrices où aucun écoulement ne se produit et ceux de Melcher et Taylor dans lesquels sont étudiées des gouttes sphériques de conductivité finie où l'écoulement est pris en compte [193, 274, 275, 276, 277, 278]. Ces travaux sont revus en détail dans la section 5.1. D'autres approches analytiques consistent à effectuer des développements par des méthodes de perturbations pour relier le champ électrique à la forme *a priori* inconnue de la goutte. La perturbation est estimée par l'écart à un état initial donné. Les travaux de Tsamopoulos *et al.* [285], de Shiryayeva *et al.* [123, 254, 257] utilisent ces développements jusqu'à l'ordre 2 mais ne sont exploitables que pour des gouttes conductrices. Nous proposons dans la section 5.2 de ce chapitre une application de la méthode des perturbations pour une goutte diélectrique de conductivité finie en écoulement permanent. La principale contrainte imposée par ces méthodes analytiques approchées est qu'elles ne sont valables que pour des déformations des gouttes relativement faibles ; la prise en compte de grandes déformations implique des calculs difficiles à mettre en oeuvre. Les méthodes numériques, qui restent des méthodes approchées, offrent une alternative puisqu'elles permettent de considérer tout type de géométrie. Dans le cas particulier d'écoulements irrotationnels, nous effectuons un traitement numérique par le code CANARD-EHD (voir Annexe 5.1), dont la formulation MIF a été présentée au chapitre 3. Les simulations de la déformation d'une goutte sous champ uniforme continu et alternatif sont présentées dans les sections 5.3 et 5.4. Les résultats obtenus par CANARD-EHD sont comparés aux travaux théoriques de Taylor [276] et aux résultats expérimentaux de Berg *et al.* [23]. S'inscrivant dans la suite de ces travaux, la section 5.5 traite à la fois du déplacement et de la déformation de gouttes. Les particules considérées sont des gouttes de fluide immergées dans un fluide non miscible. Les résultats obtenus par CANARD-EHD sont discutés dans le cas de déformation et déplacement lorsque le champ électrique est non uniforme. Pour cela, nous utilisons une configuration EHD en champ électrique continu pour laquelle Feng [101] donne la solution analytique. Le même code est ensuite utilisé pour simuler le mouvement d'une goutte d'eau dans de l'huile sous l'effet d'un champ électrique alternatif dans la configuration pointe-plan d'électrodes décrite au chapitre 4.

5.1. Sur la trace de Taylor

Pour une goutte suspendue dans un fluide non miscible à l'état permanent, les forces électriques s'équilibrent avec les forces hydrodynamiques en tout point de l'interface goutte-fluide. Pour assurer cet équilibre, l'interface se déforme. Dans la pratique, on distingue plusieurs cas, selon les propriétés électriques des gouttes et du fluide extérieur mais aussi selon le temps d'observation du phénomène traité. En vue de valider notre modèle numérique, nous avons d'abord considéré le comportement électrohydrodynamique de gouttes dans les configurations traitées dans la littérature. Bien que les premiers travaux aient été effectués par Rayleigh à partir de 1884, les développements analytiques de Taylor (notre principale référence ici), concernant les gouttes conductrices soumises à un champ électrique uniforme, ne remontent qu'à 1964. Nous commençons par rappeler l'essentiel des travaux de Taylor avant de présenter nos résultats.

5.1.1. Goutte conductrice ellipsoïdale

Taylor a étudié une goutte conductrice chargée et isolée ainsi qu'une goutte non chargée soumise à un champ électrique uniforme (voir figure 5.1). Cette situation correspond au cas asymptotique de régime électrique permanent. Dans les deux cas, la goutte a une forme d'un ellipsoïde et aucun écoulement ne se produit, [276].

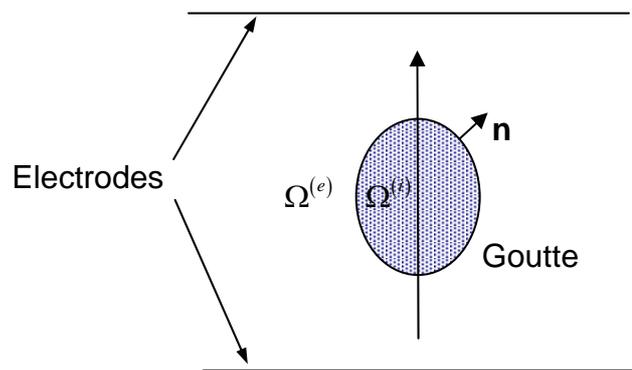


Figure 5.1. Goutte de forme ellipsoïdale soumise à un champ électrique uniforme.

En coordonnées cylindriques (r, φ, z) , l'équation de l'interface de la goutte est donnée par :

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1 \quad (5.1)$$

où a (respectivement b) est la moitié de la longueur de l'axe majeur (respectivement, l'axe mineur) de l'ellipsoïde.

a) Goutte conductrice de charge Q

Taylor étudie une goutte chargée isolée. En régime électrostatique permanent (pas de mouvement de charges électriques d'espace), il découle que la densité du courant de conduction $\mathbf{j}^{(i)}$ à l'intérieur du conducteur est nulle ; le champ est donc nul partout à l'intérieur du conducteur et sa composante tangentielle à l'interface E_t l'est également. Le potentiel électrique est ainsi constant sur l'interface. Ce potentiel, proportionnel à la charge Q , sera noté V . Le champ électrique extérieur normal à l'interface est donné par, [276] :

$$E_n = -\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{PV}{b^2 I_1} \quad (5.2)$$

où :

$$P = \frac{b}{\sqrt{1 - z^2 e^2 / a^2}} \quad (5.3)$$

$$I_1 = \frac{1}{2e} \ln \left(\frac{1+e}{1-e} \right) \quad (5.4)$$

e est l'excentricité de l'ellipsoïde définie par :

$$e = \sqrt{1 - b^2 / a^2} \quad (5.5)$$

La contrainte électrique normale au point de cote z de l'interface est donnée par :

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbb{T}) \cdot \mathbf{n} = \mathbb{T}_{mm} = \frac{1}{2} \varepsilon^{(e)} \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon^{(e)} \frac{V^2}{b^2 (1 - z^2 e^2 / a^2) I_1^2} \quad (5.6)$$

\mathbf{n} est la normale extérieure à la goutte (voir figure (5.1)).

La contrainte normale associée à la tension de surface est donnée par :

$$2H\gamma = \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (5.7)$$

où H est la courbure moyenne, r_1 et r_2 sont les rayons de courbure méridional et azimutal, respectivement. Les expressions analytiques de ces rayons de courbure sont données par :

$$r_1 = a^2 b^2 \left(\frac{z^2}{a^4} + \frac{r^2}{b^4} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (5.8)$$

$$r_2 = b^2 \left(\frac{z^2}{a^4} + \frac{r^2}{b^4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.9)$$

Au pôle de la goutte ($r=0, z=a$) $H = ab^{-2}$, alors qu'à l'équateur ($r=b, z=0$) $2H = ba^{-2} + b^{-1}$.

Nous reprenons, dans ce qui suit, la première approximation de Taylor dans laquelle l'équilibre entre les forces électriques et les forces hydrodynamiques au pôle et à l'équateur est assuré, soit :

$$2ab^{-2}\gamma - \Delta p = \left(\mathbb{T}_{mn}^{\text{électrique}} \right)_{z=a} \quad (5.10)$$

$$\gamma(ba^{-2} + b^{-1}) - \Delta p = \left(\mathbb{T}_{mn}^{\text{électrique}} \right)_{z=0} \quad (5.11)$$

Δp est le saut de pression à l'interface, supposé constant en l'absence d'écoulement, entre l'intérieur et l'extérieur de la goutte. Par élimination de Δp entre (5.10) et (5.11), l'on obtient :

$$(2ab^{-2} - ba^{-2} - b^{-1})\gamma = \left(\mathbb{T}_{mn}^{\text{électrique}} \right)_{z=a} - \left(\mathbb{T}_{mn}^{\text{électrique}} \right)_{z=0} \quad (5.12)$$

La condition de conservation du volume impose que a et b soient de la forme :

$$a = r_0 \alpha^{-\frac{1}{3}}, \quad b = r_0 \alpha^{\frac{1}{6}} \quad (5.13)$$

où r_0 est le rayon initial de la goutte et $\alpha = 1 - e^2$. Les contraintes électriques normales deviennent :

$$\left(\mathbb{T}_{nn} \right)_{z=a} = \frac{1}{2} \varepsilon^{(e)} \frac{V^2 \alpha^{-\frac{4}{3}}}{r_0^2 I_1^2} \quad (5.14)$$

$$\left(\mathbb{T}_{nn} \right)_{z=0} = \frac{1}{2} \varepsilon^{(e)} \frac{V^2 \alpha^{-\frac{1}{3}}}{r_0^2 I_1^2} \quad (5.15)$$

Par introduction de (5.14) et de (5.15) dans (5.12), nous obtenons la condition d'équilibre suivante :

$$\frac{V}{\sqrt{2r_0\gamma/\varepsilon^{(e)}}} = I_1 N(\alpha) \quad (5.16)$$

où :

$$N^2(\alpha) = \alpha^{\frac{2}{3}} \left(2 - \alpha^{\frac{3}{2}} - \alpha^{\frac{1}{2}} \right) / (1 - \alpha) \quad (5.17)$$

La figure 5.2 représente les variations du potentiel électrique d'équilibre en fonction de l'ellipticité a/b de la goutte. Pour la forme sphérique ($a/b = 1$), il existe un potentiel (et une charge électrique) au-dessous duquel la goutte conserve sa forme sphérique. Pour un potentiel supérieur à cette valeur critique, la goutte se déforme. Cette valeur du potentiel V_c telle que $V_c / \sqrt{2r_0\gamma/\varepsilon^{(e)}} = \sqrt{2}$ coïncide avec la valeur critique donnée par Rayleigh. Notons que la solution à l'équilibre prédite par ce modèle (figure 5.2) est instable pour toute valeur d'ellipticité $a/b > 1$.

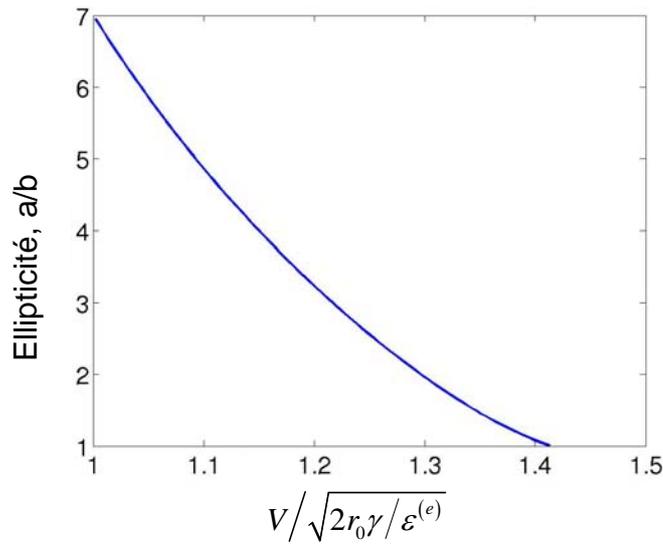


Figure 5.2. Variations de l'ellipticité en fonction du potentiel électrique d'équilibre.

b) Goutte neutre soumise à un champ électrique uniforme

L'axe majeur a est dans la direction du champ électrique E_0 appliqué. Le champ électrique sur l'interface est donné par :

$$E_n = -\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{E_0 z P}{b^2 I_2} \quad (5.18)$$

P conserve son expression telle que définie par (5.3) et I_2 est donné par :

$$I_2 = \frac{1}{2e^3} \ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right) - \frac{1}{e^2} \quad (5.19)$$

La contrainte électrique normale au point de cote z de l'interface est donnée par :

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbb{T}) \cdot \mathbf{n} = \mathbb{T}_{nn} = \frac{1}{2} \varepsilon^{(e)} \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon^{(e)} \frac{E_0^2 z^2}{b^2 (1 - z^2 e^2 / a^2) I_2^2} \quad (5.20)$$

En introduisant cette expression dans (5.12) nous obtenons :

$$E_0 \sqrt{2\varepsilon^{(e)} r_0 / \gamma} = I_2 M(\alpha) \quad (5.21)$$

où :

$$M(\alpha) = 2\alpha^{\frac{2}{3}} \sqrt{2 - \alpha^{\frac{2}{3}} - \alpha^{\frac{1}{2}}} \quad (5.22)$$

La figure 5.3 représente les variations du champ électrique d'équilibre en fonction de l'ellipticité a/b de la goutte. Il existe une valeur critique E_c du champ électrique au-delà de laquelle aucune forme de goutte n'assure l'équilibre. Cette valeur est telle que :

$$E_c \sqrt{2\varepsilon^{(e)} r_0 / \gamma} = 0.64 \quad (5.23)$$

Pour une valeur du champ électrique appliqué inférieure à E_C , deux formes d'équilibre existent ; la moins allongée est stable tandis que la plus allongée est instable. La valeur de l'ellipticité associée à E_C est :

$$a/b = 1.9 \tag{5.24}$$

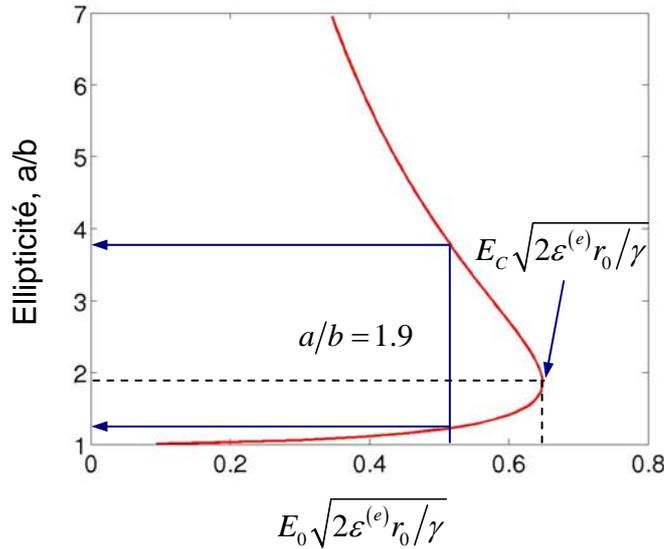


Figure 5.3. Variations de l'ellipticité en fonction du champ électrique d'équilibre.

5.1.2. Les cônes de Taylor en solution auto-similaire

On considère un liquide conducteur de forme conique porté à un potentiel électrique (V_0) dont l'extrémité est à la distance a_0 d'une électrode plane portée au potentiel nul (voir figure 5.4).

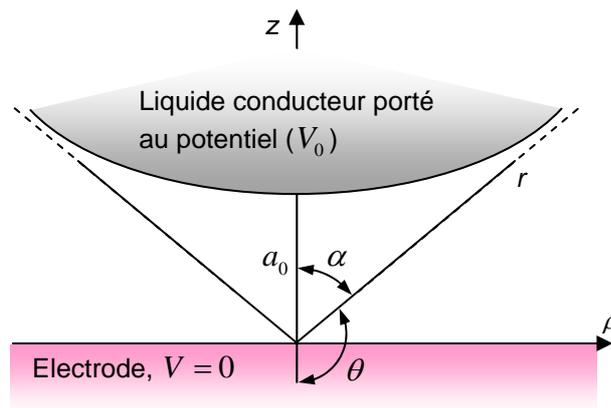


Figure 5.4. Une goutte axisymétrique conductrice portée à un potentiel V_0 à une distance a_0 d'une électrode plane portée au potentiel 0.

La distribution du potentiel électrique est décrite selon les coordonnées sphériques (r, θ) . La forme est supposée être en équilibre ; par conséquent les contraintes électriques

s'équilibrent avec les contraintes capillaires. Par analyse dimensionnelle, le potentiel électrique V_0 peut s'exprimer en fonction de la tension de surface γ et de a_0 sous la forme [302] :

$$V_0 = C \left(\frac{\gamma a_0}{\varepsilon^{(e)}} \right)^{1/2} \quad (5.25)$$

où C est un coefficient sans dimension. En supposant l'auto-similarité du potentiel électrique, c'est-à-dire son invariance pour r/a_0 constant, on peut écrire :

$$V = \left(\frac{\gamma a_0}{\varepsilon^{(e)}} \right)^{1/2} F \left(\frac{r}{a_0}, \theta \right) \quad (5.26)$$

où F est une fonction sans dimension. Loin de l'interstice, la fonction F prend, par séparation des variables, la forme en puissance suivante :

$$F \left(\frac{r}{a_0}, \theta \right) = \left(\frac{r}{a_0} \right)^{1/2} \Psi(\theta) \quad (5.27)$$

ce qui permet d'écrire (5.26) sous la forme :

$$V = \left(\frac{\gamma}{\varepsilon^{(e)}} \right)^{1/2} r^{1/2} \Psi(\theta) \quad (5.28)$$

L'unique solution de l'équation de Laplace, prenant la forme (5.28), est telle que [276] :

$$\Psi(\theta) = P_{1/2}(\cos \theta) \quad (5.29)$$

où $P_{1/2}$ est le polynôme de Legendre généralisé d'ordre $1/2$. D'un point de vue mathématique, la surface conique du liquide ne devient équipotentielle (et indépendante de r) que si $P_{1/2}(\cos \theta) = 0$. Or, l'unique racine de $P_{1/2}(\cos \theta)$, comprise entre 0 et π , pour laquelle ceci se produit est $\theta = 130.7^\circ$, [276]. A cette valeur, correspond un demi-angle au sommet du cône :

$$\alpha = \pi - \theta = 49.3^\circ \quad (5.30)$$

Selon ce résultat, si une forme d'équilibre conique d'une goutte existe, celle-ci a pour demi-angle au sommet l'angle $\alpha = 49.3^\circ$. Cette forme est appelée cône de Taylor.

5.1.3. Goutte sphérique avec écoulement sous champ uniforme

Dans le cas général de deux fluides de conductivité finie, l'écoulement, à l'intérieur et à l'extérieur de la goutte, doit être pris en compte. La conductivité de la goutte est supposée différente de celle du liquide extérieur et les deux fluides sont visqueux. Melcher et Taylor [193] ont étudié ce problème en faisant l'approximation que la goutte est

sphérique. Le champ électrique et l'écoulement sont supposés respecter la symétrie axiale. Ces auteurs ont effectué un développement analytique assez simple en se plaçant dans un système de coordonnées sphériques comme indiqué par la figure 5.5.a.

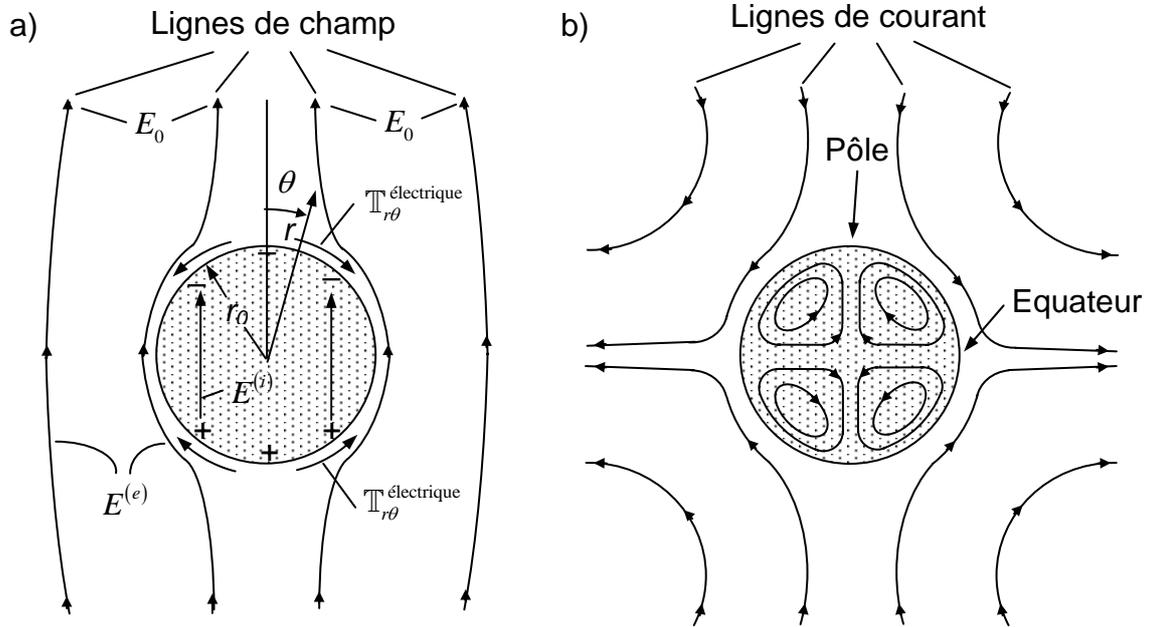


Figure 5.5. Une goutte sphérique de rayon r_0 occupe la région (i) et est immergée dans un liquide qui occupe la région (e). a) le champ électrique continu appliqué E_0 est uniforme loin de la sphère et la répartition des charges électriques à l'interface correspond au cas où la conductivité du liquide extérieur est plus grande que celle de la goutte. En interaction avec le champ électrique, ces charges créent une contrainte tangentielle $\mathbb{T}_{r\theta}^{\text{électrique}}$. b) Caractéristiques de l'écoulement induit par le champ électrique.

En régime permanent, la continuité de la densité du courant \mathbf{j} qui traverse l'interface doit être vérifiée, soit :

$$\sigma^{(i)} E_n^{(i)} = \sigma^{(e)} E_n^{(e)} \quad (5.31)$$

Le saut de la conductivité électrique détermine le saut de la composante normale du champ électrique E_n à l'interface :

$$E_n^{(i)} - E_n^{(e)} = \left(\frac{\sigma^{(e)}}{\sigma^{(i)}} - 1 \right) E_n^{(e)}$$

Dans le cas général où les temps électriques de relaxation τ_e ($\tau_e = \varepsilon/\sigma$) de la goutte et du liquide extérieur sont différents, ce saut implique une discontinuité de la composante normale D_n du vecteur déplacement électrique :

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}] = \varepsilon^{(i)} E_n^{(i)} - \varepsilon^{(e)} E_n^{(e)} = \sigma^{(e)} \left(\frac{\varepsilon^{(i)}}{\sigma^{(i)}} - \frac{\varepsilon^{(e)}}{\sigma^{(e)}} \right) E_n^{(e)} \neq 0 \quad (5.32)$$

qui correspond, d'après le théorème de Gauss (équation (2.33) du chapitre 2), à une densité surfacique de charges q_s à l'interface. Cette distribution engendre une force de Coulomb tangentielle s'il existe une composante tangentielle du champ électrique (équation (2.12) du chapitre 2). Sous l'effet de la viscosité, les fluides, à l'intérieur ainsi qu'à l'extérieur de la goutte, se mettent en mouvement comme indiqué par la figure 5.5.b.

La partie électrique est décrite par l'équation de Laplace pour le potentiel électrique :

$$\nabla^2 V^{(k)} = 0, \quad k = i, e \quad (5.33)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} E^{(e)}(\mathbf{r}) \rightarrow E_0 & \text{quand } \|\mathbf{r}\| \rightarrow +\infty \\ V^{(e)}(\mathbf{r})\big|_{\|\mathbf{r}\|=r_0} = V^{(i)}(\mathbf{r})\big|_{\|\mathbf{r}\|=r_0} \\ \sigma^{(e)} E_n^{(e)}(\mathbf{r})\big|_{\|\mathbf{r}\|=r_0} = \sigma^{(i)} E_n^{(i)}(\mathbf{r})\big|_{\|\mathbf{r}\|=r_0} \end{cases} \quad (5.34)$$

En supposant la densité du courant électrique dû au transport des charges à l'interface par l'écoulement faible devant la densité du courant électrique dû à la conduction des fluides sous-jacents, la solution classique de ce système proposée au chapitre 3 reste valable :

$$V^{(i)} = -\frac{3}{2+S} E_0 r \cos \theta \quad (5.35)$$

$$V^{(e)} = -E_0 \cos \theta \left(r + \frac{1-S}{2+S} \frac{r_0^3}{r^2} \right) \quad (5.36)$$

où $S = \sigma^{(i)}/\sigma^{(e)}$ et le champ électrique en coordonnées sphérique est :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{i}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta \quad (5.37)$$

D'un autre côté, la partie hydrodynamique est décrite par l'équation de conservation de la masse et l'équation de Navier-Stokes dont il convient de rappeler les expressions dans le cas d'écoulements incompressibles :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(k)} = 0, \quad k = i, e \quad (5.38)$$

$$\rho^{(k)} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^{(k)}}{\partial t} + \mathbf{u}^{(k)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(k)} \right) = -\nabla p^{(k)} + \mu^{(k)} \nabla^2 \mathbf{u}^{(k)}, \quad k = i, e \quad (5.39)$$

En dénotant U et L la vitesse et la longueur caractéristiques de l'écoulement, respectivement, et en gardant les mêmes notations entre les variables dimensionnelles et adimensionnelles, alors l'équation (5.39) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{(k)}}{\partial t} + \mathbf{u}^{(k)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(k)} = -\nabla p^{(k)} + \frac{1}{Re^{(k)}} \nabla^2 \mathbf{u}^{(k)} \quad (5.40)$$

où le nombre de Reynolds $Re^{(k)}$, défini au chapitre 2, s'écrit :

$$Re^{(k)} = \frac{\rho^{(k)}UL}{\mu^{(k)}} \quad (5.41)$$

En régime permanent et à faible nombre de Reynolds, les termes d'inertie deviennent négligeables devant les autres termes, ce qui conduit à l'équation de Stokes :

$$\nabla p^{(k)} = \frac{1}{Re^{(k)}} \nabla^2 \mathbf{u}^{(k)} \quad (5.42)$$

Les conditions aux limites associées à (5.42) sont :

$$\|\mathbf{u}^{(e)}\|(\mathbf{r}) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \|\mathbf{r}\| \rightarrow +\infty \quad (5.43)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{(e)}(\mathbf{r}) \Big|_{\|\mathbf{r}\|=r_0} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{r}) \Big|_{\|\mathbf{r}\|=r_0} = 0 \quad (5.44)$$

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}^{(e)}(\mathbf{r}) \Big|_{\|\mathbf{r}\|=r_0} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{r}) \Big|_{\|\mathbf{r}\|=r_0} \quad (5.45)$$

$$\mathbf{n} \cdot \left(\Pi^{(e)} - \Pi^{(i)} \right) \Big|_{\|\mathbf{r}\|=r_0} + \mathbf{n} \cdot \left(\mathbb{T}^{(e)\text{électrique}} - \mathbb{T}^{(i)\text{électrique}} \right) \Big|_{\|\mathbf{r}\|=r_0} = 2H\gamma\mathbf{n} \quad (5.46)$$

où \mathbf{n} et \mathbf{t} sont les vecteurs normal et tangent à l'interface, respectivement. $2H$, la courbure totale de l'interface au point courant, est donnée par $2H = -\nabla_s \cdot \mathbf{n}$, où ∇_s représente la projection normale de l'opérateur ∇ (nabla) sur le plan tangent à l'interface. Dans la configuration axisymétrique, il est approprié de définir une fonction de courant ψ telle que [126] :

$$\mathbf{u}^{(k)} = \nabla \times \left(\frac{\psi^{(k)}}{r \sin \theta} \mathbf{i}_\phi \right) \quad (5.47)$$

En prenant le rotationnel de (5.42) puis en introduisant (5.47), nous obtenons les équations suivantes à résoudre :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \psi^{(k)} = 0 \quad (5.48)$$

En examinant la condition aux limites (5.46), on déduit que pour obtenir l'équilibre entre les composantes tangentielles des contraintes hydrodynamiques et électriques, pour tout angle θ , il est nécessaire que $\psi/\sin \theta$ possède une dépendance en θ analogue à celle du terme $\mathbb{T}_{r\theta}^{\text{électrique}}$ (qui varie en $\sin \theta \cos \theta$). La forme suggérée de ψ est la suivante :

$$\psi = f(r) \sin^2 \theta \cos \theta \quad (5.49)$$

En introduisant cette expression dans l'équation (5.48), Melcher et Taylor ont obtenu une équation pour f dont la solution est de la forme :

$$f(r) = r^n \quad (5.50)$$

avec $n = -2, 0, 3$ ou 5 . En appliquant la condition (5.43) et en imposant la régularité de $\psi^{(i)}$ en $r = 0$, ces auteurs ont déduit :

$$\psi^{(i)} = (Cr_0^{-1}r^3 + Dr_0^{-3}r^5) \sin^2 \theta \cos \theta \quad (5.51)$$

$$\psi^{(e)} = (Ar_0^4r^{-2} + Br_0^2) \sin^2 \theta \cos \theta \quad (5.52)$$

où les constantes A , B , C et D sont entièrement déterminées par les conditions aux limites (5.44), (5.45) et (5.46) :

$$A = -B = C = -D = U \quad (5.53)$$

U est la vitesse à l'équateur (voir figure 5.4). L'équilibre des contraintes à l'interface de la goutte $r = r_0$ implique :

$$\mathbb{T}_{rr}^{(i)\text{électrique}} - \mathbb{T}_{rr}^{(e)\text{électrique}} + \Pi_{rr}^{(i)} - \Pi_{rr}^{(e)} = C \quad (5.54)$$

$$\mathbb{T}_{r\theta}^{(i)\text{électrique}} - \mathbb{T}_{r\theta}^{(e)\text{électrique}} + \Pi_{r\theta}^{(i)} - \Pi_{r\theta}^{(e)} = 0 \quad (5.55)$$

Ce qui conduit finalement à :

$$\begin{aligned} & \frac{9E_0^2}{2(2+S)^2} \left(\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)} + \left[\varepsilon^{(e)} (S^2 + 1) - 2\varepsilon^{(i)} \right] \cos^2 \theta \right) \\ & + \frac{U}{r_0} \left(5\mu^{(e)} + 3\mu^{(i)} \right) (1 - 3\cos^2 \theta) = C \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\frac{-9E_0^2}{2(2+S)^2} \left(\varepsilon^{(e)} S - \varepsilon^{(i)} \right) (2 \cos \theta \sin \theta) - 10 \frac{U}{r_0} \left(\mu^{(i)} + \mu^{(e)} \right) \cos \theta \sin \theta = 0 \quad (5.57)$$

La constante C est donnée par :

$$C = \Delta p - \frac{2\gamma}{r_0} \quad (5.58)$$

qui exprime la différence entre la pression à l'intérieur de la goutte et la contrainte associée à la pression capillaire. Pour que l'équilibre soit assuré sur toute l'interface (sphérique), il faut et il suffit que le coefficient de $\cos^2 \theta$ dans (5.56) et celui de $\cos \theta \sin \theta$ dans (5.57) soient nuls. Ceci conduit aux deux relations entre le rapport des permittivités $P = \varepsilon^{(i)}/\varepsilon^{(e)}$, le rapport des conductivités $S = \sigma^{(i)}/\sigma^{(e)}$ et celui des viscosités $M = \mu^{(i)}/\mu^{(e)}$, ainsi que la vitesse U et l'intensité E_0 du champ électrique appliqué :

$$U = - \frac{9\varepsilon^{(e)} E_0^2 r_0 (S - P)}{10(2 + R)^2 (\mu^{(i)} + \mu^{(e)})} \quad (5.59)$$

$$\frac{S^2 - 2P + 1}{S - P} + \frac{3}{5} \left(\frac{3M + 2}{M + 1} \right) = 0 \quad (5.60)$$

Si deux fluides sont tels que la relation (5.60) entre S , P et M est vérifiée, alors l'équilibre de la forme sphérique est assuré, indépendamment de l'intensité du champ électrique appliqué.

Comme U est déterminé par (5.59), nous pouvons examiner la consistance du modèle, dont une des hypothèses est que l'écoulement est à faible nombre de Reynolds. Pour une goutte d'eau ($r_0 = 1$ cm, $\sigma = 10^{-2}$ S/m) dans de l'huile ($\sigma = 10^{-10}$ S/m), nous obtenons dans un champ de 10 kV/cm les nombres de Reynolds $Re^{(i)} = 0.1$ et $Re^{(e)} = 0.01$. Nous vérifions *a posteriori* que le régime hydrodynamique est bien à faible nombre de Reynolds.

Pour voir quelle forme prendrait la goutte lorsque la condition sur S , P et M est légèrement différente de (5.60), on ajoute un terme de contrainte normale supplémentaire $C' \cos^2 \theta$ qui permettra de conserver la condition d'équilibre des contraintes (5.56) :

$$\begin{aligned} & \frac{9E_0^2}{2(2+S)^2} \left(\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)} + \left[\varepsilon^{(e)} (S^2 + 1) - 2\varepsilon^{(i)} \right] \cos^2 \theta \right) \\ & + \frac{U}{r_0} \left(5\mu^{(e)} + 3\mu^{(i)} \right) (1 - 3\cos^2 \theta) + C' \cos^2 \theta = C \end{aligned} \quad (5.61)$$

C' est positif si la force ajoutée est dirigée vers l'intérieur de la goutte. Les équations (5.57) et (5.61) ne sont satisfaites que dans la condition suivante :

$$C' = \frac{9E_0^2 \varepsilon^{(e)}}{2(2+S)^2} \left(S^2 - 2P + 1 + 3(S - P) \left(\frac{3M + 2}{5M + 5} \right) \right) \quad (5.62)$$

Puisque dans (5.62) la quantité devant les parenthèses est positive, le signe de la force supplémentaire a le signe de l'expression :

$$\Delta(S, P, M) = S^2 - 2P + 1 + 3(S - P) \left(\frac{3M + 2}{5M + 5} \right) \quad (5.63)$$

qui discrimine les différentes formes possibles que la goutte prend. Si $\Delta(S, P, M)$ est positif, la goutte est allongée sous l'effet du champ électrique, alors que s'il est négatif, la goutte est aplatie. Si $\Delta = 0$, on retrouve la condition de sphéricité de la goutte (5.60). Il convient de noter que la nature de la forme de la goutte (allongée ou aplatie) est indépendante du champ électrique appliqué E_0 .

Par cet artifice, Melcher et Taylor arrivent ainsi à déterminer la tendance qu'a une goutte initialement sphérique à s'aplatir ou à s'allonger. Cette condition reste toutefois qualitative.

Pour déterminer analytiquement les déformations de gouttes de manière plus précise, on a recours à la méthode de perturbations comme décrit dans la section suivante.

5.2. Une tentative pour déterminer la déformation : la méthode des petites perturbations

Pour aller au-delà de ce qu'avaient fait Melcher et Taylor pour prédire les déformations de gouttes, il faut utiliser des méthodes plus générales. Une première idée consiste à utiliser la méthode de petites perturbations au cas linéaire et l'étendre ensuite au cas non linéaire.

Nous avons donc essayé d'utiliser la méthode de petites perturbations pour déterminer, par des développements analytiques, la relation qui relie la déformation d'une goutte au champ électrique qui lui est appliqué. En partant d'une forme *initiale* donnée de la goutte, des approximations de proche en proche de la forme sont recherchées. En pratique, nous prenons la sphère comme forme initiale de la goutte (solution en l'absence de champ électrique). On définit un paramètre caractérisant l'écart à la forme initiale. Ce paramètre doit rester faible pour que la méthode soit valable. Toutes les autres variables, champ électrique et champ de vitesse, sont ensuite calculées en fonction de ce paramètre.

Les travaux de Melcher et Taylor s'inscrivent, de par la définition de la méthode de perturbations, comme une étude à l'ordre 0 de la déformation de gouttes ; en effet ces auteurs prennent *a priori* un champ électrique et hydrodynamique issus d'une forme sphérique qui créent à leur tour des contraintes ne déformant pas la goutte.

Plusieurs travaux, qui utilisent la méthode des petites perturbations, ont été réalisés dans le passé pour étudier la stabilité des gouttes autour de différents états d'équilibre. Tsamopoulos et Brown [284] ont examiné la stabilité de gouttes immergées dans un fluide passif (qui ne manifeste qu'une pression uniforme) et la stabilité de bulles immergées dans un fluide en mouvement par la méthode des petites perturbations. Leurs développements sont effectués jusqu'au deuxième ordre. Les écoulements qu'ils considèrent sont irrotationnels. Dans un autre travail, [285], ils ajoutent aux effets hydrodynamiques la contribution du champ électrique sur des gouttes chargées. Les équations valables uniquement en écoulement irrotationnel intègrent correctement l'équilibre des forces normales à l'interface. Il est donc utile d'étendre ce travail aux ordres supérieurs pour prédire les formes d'équilibre de manière plus précise en fonction des différentes propriétés électriques et hydrodynamiques de la goutte et du fluide extérieur.

Les développements analytiques présentés en Annexe 5.1 utilisent la technique de perturbation de Poincaré [288]. La forme de goutte est supposée définie par l'équation (Ann5.2-1) :

$$r = F(\theta) \quad (5.64)$$

Un changement de variables est effectué pour ramener la géométrie de la goutte, donnée par :

$$\eta = r/F(\theta) \quad (5.65)$$

à la géométrie sphérique :

$$\eta = 1 \quad (5.66)$$

Le paramètre de perturbation ε (à ne pas confondre avec les permittivités $\varepsilon^{(i)}$ et $\varepsilon^{(e)}$ de la goutte et du fluide extérieur) est défini par (équation (Ann5.2-24)) :

$$\frac{2}{5}\varepsilon = \int_0^\pi F(\theta) P_2(\cos\theta) \sin\theta d\theta \quad (5.67)$$

Au premier ordre en ε , pour les petites déformations, les potentiels électriques sont donnés par :

$$V^{(i)}(\eta, \theta) = -LE_0 P_0(\cos\theta) - E_0 \frac{3}{2+S} \eta r_0 P_1(\cos\theta) \quad (5.68)$$

$$V^{(e)}(\eta, \theta) = -LE_0 P_0(\cos\theta) - E_0 \eta r_0 P_1(\cos\theta) - r_0^3 \frac{E_0}{\eta^2} \frac{\sigma^{(e)} - \sigma^{(i)}}{2\sigma^{(e)} + \sigma^{(e)}} P_1(\cos\theta) \quad (5.69)$$

et les potentiels hydrodynamiques par (équations (Ann5.2-81) et (Ann5.2-82)) :

$$\psi^{(i)}(\eta, \theta) = \varpi r_0^5 (\eta^5 - \eta^3) (-P_2(\cos\theta) + P_4(\cos\theta)) \quad (5.70)$$

$$\psi^{(e)}(\eta, \theta) = \varpi \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right) (-P_2(\cos\theta) + P_4(\cos\theta)) \quad (5.71)$$

où :

$$\varpi = \frac{9E_0^2 r_0^2}{35} \frac{\varepsilon^{(e)}}{\mu^{(i)} + \mu^{(e)}} \frac{(S-P)}{(2+S)^2} \quad (5.72)$$

L'expression qui relie le champ électrique E_0 , pour lequel on a équilibre, à l'ellipticité a/b est donnée par (équation (Ann5.2-92)) :

$$E_0 = \sqrt{\frac{4\gamma}{\varepsilon^{(e)} r_0 \left(\frac{3}{2+S}\right)^2 \left[\frac{1}{3}(S^2 - 2P + 1) + \frac{(S-P)(2+3M)}{5(1+M)}\right]} \frac{-1 + \frac{a}{b}}{1 + \frac{1}{2} \frac{a}{b}}} \quad (5.73)$$

Cette relation est plus générale que celle proposée par Taylor, mais reste astreinte aux faibles déformations ($\varepsilon/r_0 \ll 1$). En effet, si l'on trace la courbe de variation de l'ellipticité

de la goutte en équilibre en fonction du champ électrique appliqué (figure 5.6), on trouve que les deux courbes se rejoignent si la déformation est faible, mais l'écart augmente considérablement dès que la déformation devient grande.

Il est donc clair que le développement au premier ordre de la perturbation n'est pas suffisant pour décrire correctement la déformation d'une goutte proche de la rupture sous champ électrique. Les développements d'ordres supérieurs, qui nécessitent un effort calculatoire considérable, n'ont pas été poursuivis.

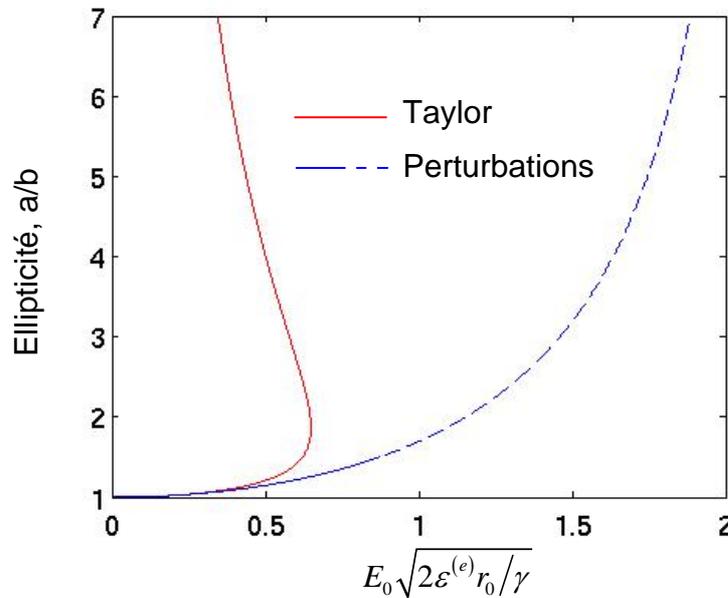


Figure 5.6. Variations du champ électrique d'équilibre, calculé par Taylor et par la méthode des perturbations, en fonction de l'ellipticité.

5.3. Etude numérique de la déformation de gouttes en champ électrique continu

Une goutte d'eau $\Omega^{(i)}$ de rayon r est placée entre deux électrodes planes (frontières Γ_1 et Γ_2 , voir figure 5.7). La goutte baigne dans une huile $\Omega^{(e)}$. La frontière Γ_3 est supposée isolante. Le champ électrique loin de la goutte est uniforme. Nous choisissons la distance L telle que $L/r > 10$. Les détails de la configuration 2D-axisymétrique sont résumés sur la figure 5.7.

Une tension électrique continue est appliquée à l'électrode gauche $V(t) = V_0(1 - e^{-t/\tau})$ et l'électrode droite est mise à la terre ($V = 0$). En l'absence de goutte, ceci engendre un champ donné par :

$$E(t) = -E_0(1 - e^{-t/\tau}) \quad (5.74)$$

où $E_0 = V_0/L$ et τ est le temps caractéristique d'application du champ électrique que l'on suppose être supérieur au temps électrique de relaxation $\tau^{\text{relaxation}} = (\varepsilon^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}) / (\sigma^{(i)} + 2\sigma^{(e)})$ (régime électrique établi). Pour l'interface goutte d'eau-huile minérale, $\tau^{\text{relaxation}} = 0.1 \mu\text{s}$.

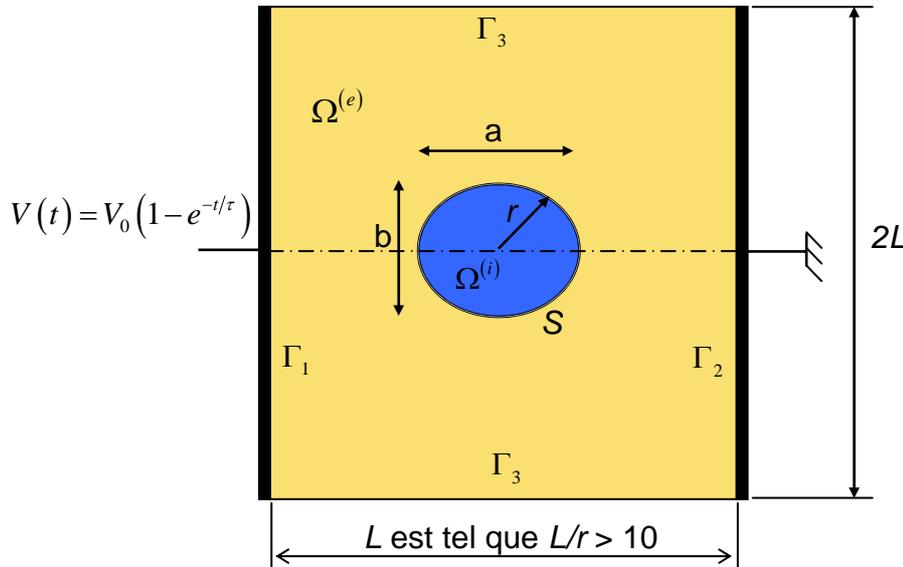


Figure 5.7. Configuration utilisée dans les simulations de déformation d'une goutte soumise à un champ électrique continu.

Les différentes valeurs des paramètres utilisés dans les simulations sont données dans tableau 5.1.

Tableau. 5.1. Valeurs des paramètres utilisés dans les simulations ($T = 25 \text{ }^\circ\text{C}$).

Paramètre	Valeur	Unité
Permittivité relative de la goutte $\varepsilon^{(i)}$ (eau du robinet)	78.8	–
Permittivité relative de l'huile minérale $\varepsilon^{(e)}$	2.55	–
Conductivité de la goutte, $\sigma^{(i)}$ (eau du robinet)	100	$\mu\text{S/cm}$
Conductivité de l'huile minérale $\sigma^{(e)}$	3×10^{-10}	$\mu\text{S/cm}$
Tension de surface γ de l'interface eau-huile	≈ 40	mN/m

5.3.1. Dynamique de la déformation d'une goutte

Différentes déformations de la goutte sont observées, selon leur taille et l'intensité du champ électrique appliqué. La figure 5.8 reporte les formes obtenues par les simulations

pour un rayon initial de goutte égal à $500\ \mu\text{m}$. Si la tension électrique est appliquée progressivement de 0 à V_0 ($\tau = 0.001\ \text{s}$) où $E_0 = 10\ \text{kV/cm}$, alors la goutte se déforme par une succession d'ellipsoïdes allongés en quasi-équilibre (faible influence de l'inertie dans ce cas).

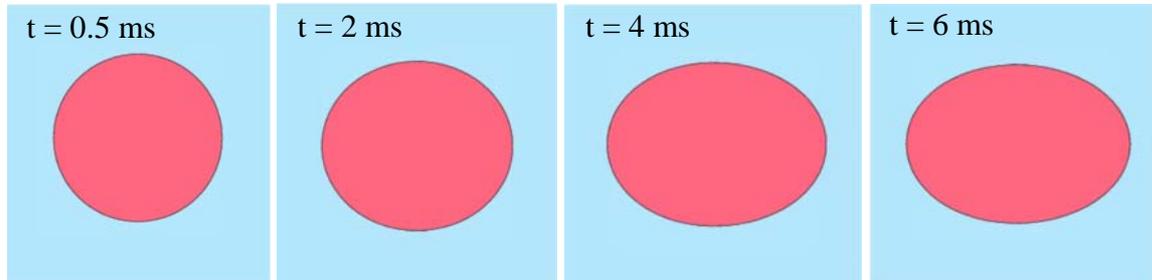


Figure 5.8. De gauche à droite, une séquence de déformation d'une goutte ($r = 500\ \mu\text{m}$) calculée après application du champ électrique. Le temps caractéristique de l'application du champ électrique est égal à $\tau = 10^{-3}\ \text{s}$ et $E_0 = 10\ \text{kV/cm}$.

5.3.2. Formes d'équilibre possibles

L'outil MIF dont nous disposons permet de calculer la déformation d'une goutte en lui imposant un champ électrique. Pour calculer les formes d'équilibre qu'elle peut admettre, nous appliquons à une goutte de forme ellipsoïdale *donnée*, un champ électrique. En fonction de la valeur du champ électrique, la goutte aura tendance soit à s'allonger soit à s'aplatir, l'évolution se faisant toujours vers une forme sphéroïdale plus ou moins différente de la forme ellipsoïdale initiale.

A champ électrique fixé, tant que l'ellipticité $a/b < 1.9$, les simulations révèlent une tendance vers une forme sphéroïdale donnée, que l'on approche cette forme par une forme initiale plus ou moins allongée : c'est la branche inférieure stable de la courbe présentée dans la figure 5.9. Si $a/b > 1.9$, la goutte tend soit à rejoindre une forme nettement moins allongée, soit au contraire à s'allonger jusqu'à éclatement : cette branche est la partie instable de la courbe d'équilibre. Puisqu'il y'a une certaine incertitude dans la valeur du champ, calculé par dichotomie, qui correspond à la position exacte d'équilibre dans la branche instable, nous observons un écart (de l'ordre de 3 %) entre la théorie de Taylor et notre modèle MIF. Une autre explication possible pourrait être le fait que la forme d'équilibre prédite par la MIF n'est pas exactement ellipsoïdale comme la théorie de Taylor le suggère. Comme c'est le cas pour les résultats de Taylor, les simulations montrent que le point de retournement est voisin d'une ellipticité égale à 1.9.

Notons que cette étude est équivalente à l'analyse linéaire de stabilité que l'on effectue par perturbation d'un système près de son état d'équilibre.

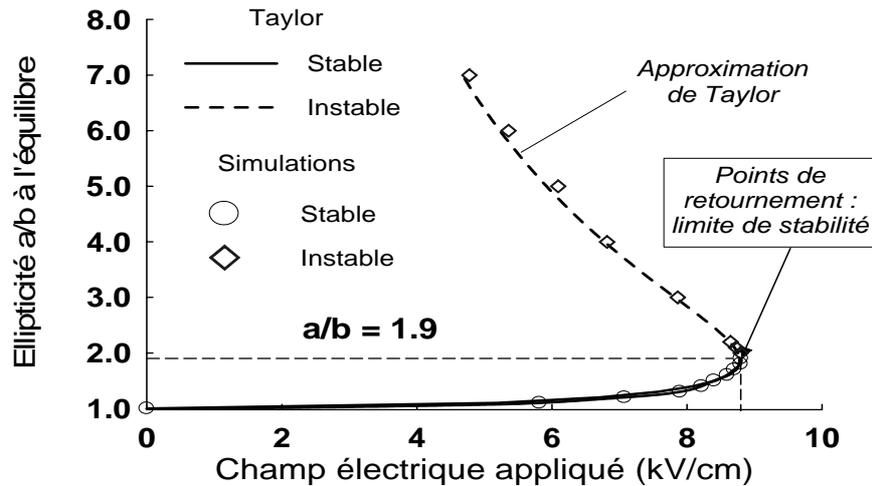


Figure 5.9. Loi d'équilibre de la goutte prédite par Taylor et calculée par le modèle MIF en fonction de la valeur efficace du champ électrique appliqué. Rayon équivalent de la goutte $r = 500 \mu\text{m}$.

5.4. Etude numérique de la déformation de gouttes en champ électrique alternatif

Berg *et al.* [23] montrent que les gouttes d'eau, immergées dans du pétrole, réagissent de deux manières lorsqu'un champ électrique alternatif leur est appliqué. (i) Aux faibles valeurs du champ électrique, les gouttes initialement sphériques se déforment et s'allongent (parfois, un aplatissement est observé, [23]). (ii) Pour une intensité du champ électrique supérieure à une valeur limite (champ électrique critique E_C) des instabilités (éjection de gouttelettes, apparition de jet fin ou de nuages de fines gouttelettes) se développent au niveau des pôles de la goutte suite à la formation des cônes. Les paramètres que Berg utilise dans ses expériences sont, d'une part, l'intensité, la fréquence et la forme de variation du champ électrique appliqué et, d'autre part, la conductivité de la goutte. Nous comparons nos simulations aux résultats expérimentaux de Berg. Le modèle MIF que nous utilisons ici suppose que le champ électrique à une variation sinusoïdale dont la fréquence est égale à la fréquence f du champ électrique appliqué. Cette approximation n'est valable que lorsqu'il n'y a pas de déformation induite par la pression électrostatique aux harmoniques supérieures ($2f$, $4f$, etc.). Ce point est également développé dans ce qui suit.

5.4.1. Configuration d'étude

La configuration décrite dans la section 5.3 est reprise pour reproduire numériquement les expériences de Berg *et al.* Une tension électrique sinusoïdale est appliquée à l'électrode gauche :

$$\tilde{V}(t) = (1 - e^{-t/\tau}) \operatorname{Re}(V_{max} e^{j\omega t}) \quad (5.75)$$

où ω est la pulsation ($\omega = 2\pi f$) et f la fréquence. De même τ , le temps caractéristique d'application du champ électrique, doit être supérieur au temps électrique de relaxation $\tau^{\text{relaxation}} = (\epsilon^{(i)} + 2\epsilon^{(e)}) / (\sigma^{(i)} + 2\sigma^{(e)})$. L'électrode de droite est mise à la terre ($V = 0$).

5.4.2. Réponse dynamique de la goutte aux forces appliquées

Examinons qualitativement la déformation que subit une goutte en fonction de la fréquence du champ électrique appliqué.

A basse fréquence, on s'attend à ce que les gouttes se déforment de manière à suivre quasi-instantanément les variations du champ électrique appliqué. D'un point de vue hydrodynamique, ceci implique des déformations quasistatiques, comme illustré par la figure (5.10.a).

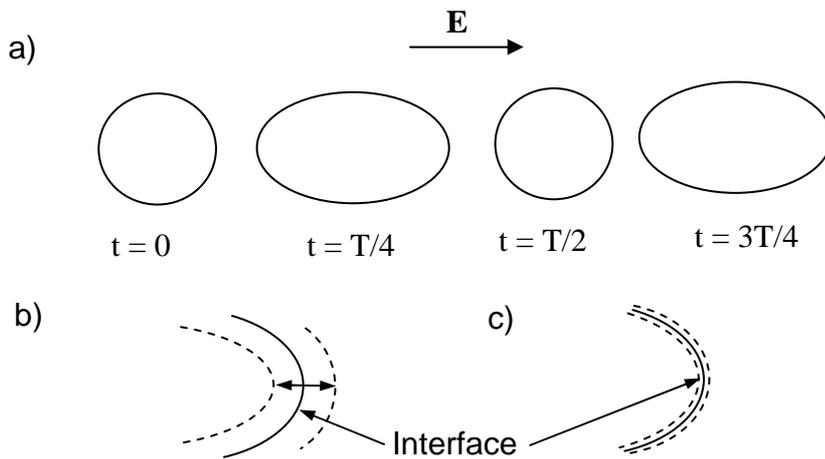


Figure 5.10. a) Au gré de l'intensité instantanée du champ électrique, la goutte se déforme de manière périodique. b) la goutte arrive difficilement à suivre les variations rapides du champ électrique

A mesure que la fréquence augmente, à cause de son inertie, l'interface aura de plus en plus de mal à suivre les oscillations du champ électrique. Les oscillations de l'interface s'effectuent autour d'une position moyenne (figure 5.10.b).

Si la fréquence devient très élevée, les déformations de l'interface se produisent avec des oscillations qui sont d'amplitude négligeable (figure 5.10.c) et le champ électrique peut être considéré localement (dans le temps) indépendant du mouvement de cette interface.

La version CANARD-EHD sous champ électrique sinusoïdal considère des champs électriques à fréquence suffisamment élevée pour que le calcul du champ électrique soit effectué en supposant qu'il possède la même fréquence l'oscillation dans tout le domaine d'intérêt. La dernière version CANARD-EHD mise en œuvre sous champ électrique

quasistatique s'affranchit de cette condition, mais le temps imparti à cette thèse n'a pas permis l'exploitation de cette nouvelle version du code. Nous tentons, dans ce qui suit, de déterminer la fréquence *discriminante* du champ électrique appliqué au-dessus de laquelle le modèle du champ électrique sinusoïdal n'est plus valable. L'échelle de temps caractéristique du phénomène hydrodynamique, et en particulier du mouvement de l'interface, est utilisée dans la description de tout le phénomène électrohydrodynamique. Puisque les phénomènes hydrodynamiques sont associés exclusivement au mouvement de l'interface eau-huile, deux fréquences sont mises en jeu ; la fréquence capillaire et la fréquence visqueuse. Elles sont données par :

$$f_{\gamma} = \sqrt{\gamma / \rho r^3} \quad (5.76)$$

$$f_{\nu} = \frac{\nu}{r^2} \quad (5.77)$$

où ν est la viscosité cinématique de liquide le plus visqueux (l'huile, en l'occurrence).

Pour la goutte d'eau dans de l'huile, la variation de ces deux fréquences en fonction de la taille de la goutte est donnée par la figure 5.11.

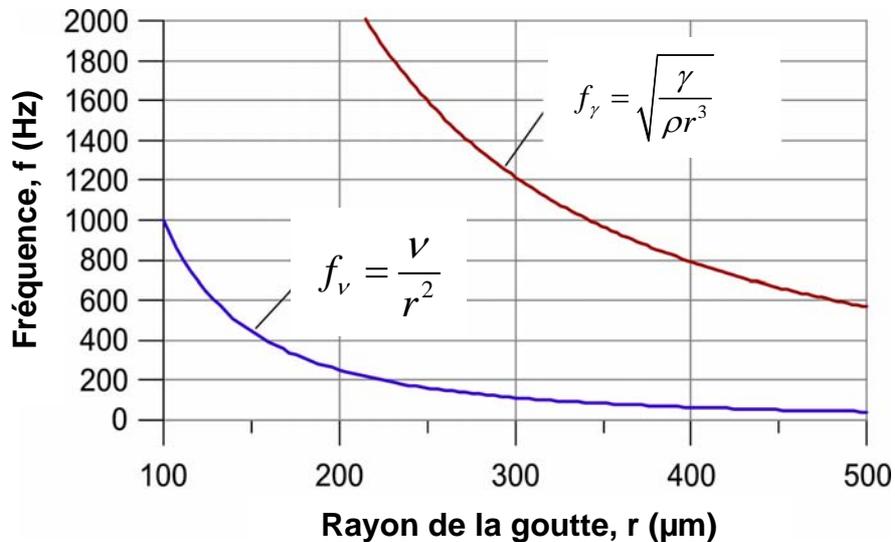


Figure 5.11. Variation des fréquences capillaire f_{γ} et visqueuse f_{ν} typiques en fonction du rayon de la goutte (ν est la viscosité cinématique de l'huile).

De par la grande viscosité de l'huile, nous admettons que la dynamique de la goutte est fondamentalement gérée par les contraintes visqueuses longitudinales. Ainsi, le champ électrique doit avoir une fréquence f qui satisfasse la condition :

$$f \gg f_{\nu} \quad (5.78)$$

afin que l'hypothèse de linéarité de la distribution du champ électrique soit vérifiée.

5.4.3. Résultats des simulations

Les résultats des simulations sont comparés aux mesures expérimentales de Berg *et al.* [23]. L'influence de la fréquence f et de la conductivité de la goutte sur l'intensité du champ électrique critique E_c , à partir duquel la goutte devient instable, est étudiée. Les formes transitoires que prend la goutte au cours de sa déformation sont aussi présentées. Nous retenons deux fréquences parmi celles choisies par Berg, à savoir 50 et 2000 Hz. Bien que l'étude de Berg montre des résultats différents obtenus en fonction de la forme temporelle du champ électrique appliqué (triangulaire, en créneau et sinusoïdale), nous n'étudions que le cas de champs électriques sinusoïdaux. La goutte d'eau est immergée dans une huile faiblement conductrice. Pour modifier la conductivité de la goutte, les auteurs lui ajoutent de 5 à 50 g/l de NaCl, ce qui correspond (selon la loi de Kohlrausch) à une conductivité variant entre 10^4 et 10^5 $\mu\text{S/cm}$, respectivement. Les résultats de Berg montrent que pour ces ordres de grandeur, aucun effet notable de la conductivité sur le comportement de la goutte ne se produit ($\tau^{(i)} \approx 1$ ns). Pour voir si cette hypothèse reste toujours vérifiée, nous effectuons des simulations sur des gouttes d'eau déionisée ($\sigma^{(i)} = 1$ $\mu\text{S/cm}$) et d'eau du robinet ($\sigma^{(i)} = 100$ $\mu\text{S/cm}$).

5.4.3.1. Effet de la conductivité

La figure 5.12 montre les variations du champ électrique critique E_c , évalué par simulation, en fonction du rayon de la goutte pour deux valeurs de conductivité ($\sigma = 1$ et 100 $\mu\text{S/cm}$).

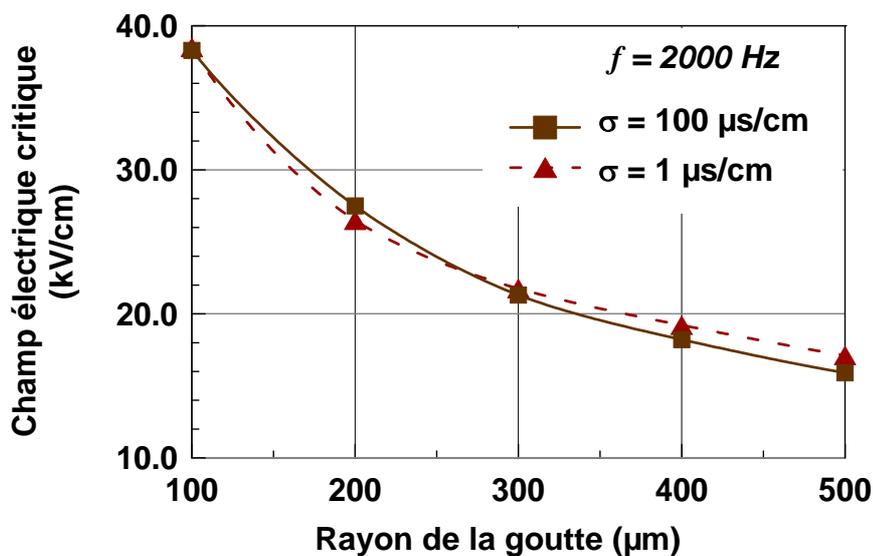


Figure 5.12. Effet de la conductivité sur le champ électrique critique, déduit de la simulation, en fonction de la taille de la goutte ($f = 2000$ Hz).

Aux incertitudes de calcul près nous ne remarquons pas de changement significatif de la valeur de E_C dû à la conductivité. Bien que l'une des valeurs de la conductivité corresponde à celle de l'eau déionisée, la goutte peut être considérée comme infiniment conductrice par rapport à l'huile.

5.4.3.2. Effet de la fréquence

La goutte, dont le rayon initial varie entre 100 et 500 μm , est constituée d'eau du robinet. La figure 5.13.a représente les variations du champ électrique critique E_C en fonction du rayon de la goutte pour $f = 2000 \text{ Hz}$. Le champ E_C est déterminé par approximations successives sur la valeur efficace du champ électrique appliqué E_0 qui provoque ou non la rupture d'une goutte de rayon initial donné. Cette valeur est calculée en prenant $\tau = 1 \mu\text{s}$.

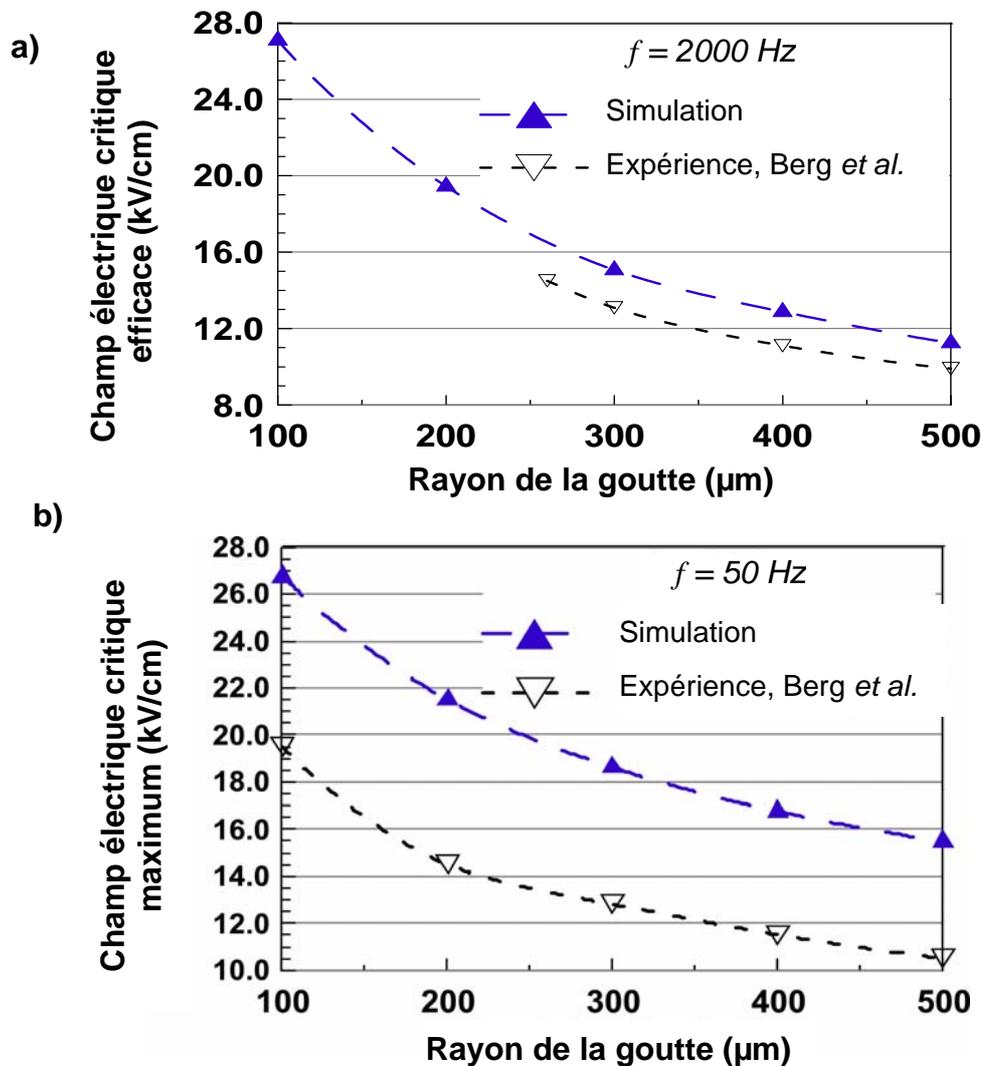


Figure 5.13. a) Variations du champ électrique critique efficace en fonction du rayon de la goutte, $f = 2000 \text{ Hz}$ et b) variations du champ électrique maximum en fonction du rayon de la goutte, $f = 50 \text{ Hz}$.

L'accord avec l'expérience est acceptable, bien que l'erreur maximale commise soit égale à 10.5 %. Ceci s'explique en partie par l'incertitude sur la valeur de la tension de surface mesurée qui varie au cours du temps [23]. La figure 5.13.b représente les mêmes variations à $f = 50$ Hz, en utilisant la valeur maximale du champ électrique. Cette fréquence ne vérifiant pas la condition (5.78) puisque, pour des gouttes de taille comprise entre 100 et 500 μm , les fréquences hydrodynamiques varient entre 40 et 1000 Hz. Néanmoins, les simulations sont supposées donner une condition suffisante d'instabilité des gouttes. En effet, la limite de stabilité montrée par la figure 5.13.b est toujours supérieure à celle obtenue à partir des expériences. Les résultats de simulation indiquent une tendance identique à l'expérience : plus la goutte est petite, plus le champ électrique nécessaire pour la déformer et la rompre est important. Ce comportement s'explique par l'augmentation de l'effet des forces capillaires quand la taille des gouttes diminue.

A champ électrique donné, quand la fréquence du champ électrique augmente, les gouttes de plus petite taille deviennent plus stables, alors qu'aucun changement notable ne se produit pour les plus grosses gouttes. Le mécanisme qui tend à rendre les gouttes plus stables quand la fréquence augmente semble se manifester dans l'intervalle $50 < f < 2000$ Hz pour les gouttes de taille inférieure à 400 μm alors qu'il s'exprime à une fréquence encore plus basse pour les plus grosses gouttes. Ce mécanisme est lié essentiellement à la résonance qui se produit au moment où la fréquence de forçage de la pression électrostatique est proche de celle de la fréquence propre des gouttes.

5.4.3.3. Effet du taux de croissance de champ électrique appliqué

Différentes déformations de la goutte sont observées, selon leur taille, la fréquence et l'intensité du champ électrique appliqué. La figure 5.14.a reporte les formes obtenues par les simulations à $f = 2000$ Hz et pour un rayon initial de goutte égal à 500 μm . Si le champ électrique est appliqué progressivement de 0 à E_0 (avec $\tau \gg \tau_{\text{hydrodynamique}}$), où $E_0 = 12$ kV/cm $< E_c$ (nous rappelons que $E_{\text{max}} = E_0(1 - e^{-t/\tau})$, voir expression (5.75)), alors la goutte se déforme par une succession d'ellipsoïdes allongés en quasi-équilibre (faible influence de l'inertie dans ce cas). Sur les figures 5.14.b et 5.14.c est représentée la dynamique de déformation en fonction de la taille de la goutte et du taux de croissance du champ électrique appliqué. La fréquence du champ électrique appliqué est 2000 Hz. Pour $\tau = 6$ ms et $E_0 = 36$ kV/cm, la goutte, de 500 μm de rayon, s'allonge initialement puis, soudainement, s'écrase et entame une oscillation autour d'une position aplatie d'équilibre (figure 5.14.a). Pour la figure 5.14.b, $\tau = 1$ μs et $E_0 = 12$ kV/cm, la goutte, de 500 μm de

rayon, se déforme jusqu'à l'apparition de forme conique aux pôles de la goutte. A cause de la rapidité du phénomène (moins de 6 ms), ce développement d'instabilité est dû au fait que les forces d'inertie sont prépondérantes par rapport aux forces liées à la tension de surface. De façon identique, la figure 5.14.c, pour une goutte de rayon égal à $250 \mu\text{m}$, $\tau = 1 \mu\text{s}$ et $E_0 = 20 \text{ kV/cm}$, montre le développement d'une forme semblable à la précédente à ceci près qu'au lieu des cônes, ce sont des gouttelettes qui sont éjectées de part et d'autre de la goutte principale; la simulation suggère donc que le régime d'instabilité est fonction de la taille de la goutte.

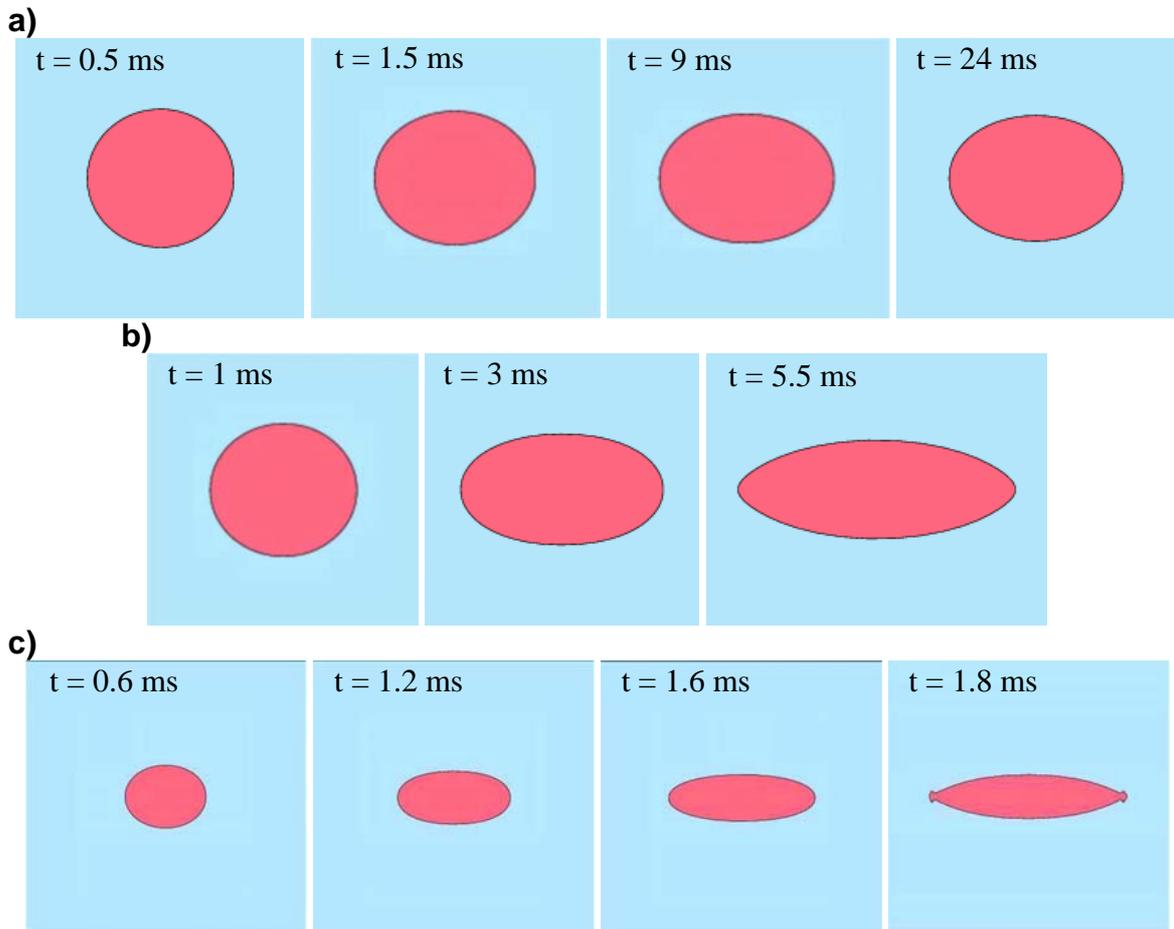


Figure 5.14. De gauche à droite, déformation d'une goutte simulée après application du champ électrique à $f = 2000 \text{ Hz}$. a) $r = 500 \mu\text{m}$ et $E_0 = 12 \text{ kV/cm}$ lent, $\tau = 1 \text{ ms}$ (défini dans (5.75)),

b) $r = 500 \mu\text{m}$ et $E_0 = 12 \text{ kV/cm}$ très rapide, $\tau = 1 \mu\text{s}$, et c) $r = 250 \mu\text{m}$ et $E_0 = 20 \text{ kV/cm}$ très rapide, $\tau = 1 \mu\text{s}$.

D'un autre côté, quand le champ électrique est appliqué brusquement, la vitesse caractéristique de déformation des gouttes, définie par r/t où t est la durée de la déformation, est de l'ordre de 0.1 m/s . Dans le travail de Moore [201], qui considère le mouvement d'une bulle sphérique dans un fluide, il est montré que la solution

irrotationnelle fournit, lorsque le nombre de Reynolds $Re = \rho UL/\mu$ augmente, une approximation uniforme de la composante normale des contraintes visqueuses qui s'applique si l'écoulement était considéré comme vorticitaire :

$$\left(\mu \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{\text{Navier-Stokes}} - \left(\mu \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{\text{Euler}} = O(Re^{-4/3}) \quad (5.79)$$

Or, le nombre de Reynolds dans notre cas (basé sur $\mu^{(i)} = 10^{-2}$ Poise) est $Re = 5$ ce qui donne : $(Re)^{-4/3} = 0.1$. Ceci assure une bonne corrélation entre écoulement irrotationnel et écoulement rotationnel si les contraintes sont essentiellement normales.

5.4.3.4. L'instabilité de Taylor

Une étude de stabilité analogue à celle faite à la section 5.3.2 est reprise dans cette section. La technique de dichotomie pour la recherche du champ électrique assurant l'équilibre à ellipticité donnée est utilisée. Les simulations concernent une goutte de rayon $r = 500 \mu\text{m}$ à la fréquence $f = 2000 \text{ Hz}$. La variation de l'ellipticité a/b de la goutte en équilibre, en fonction de l'intensité du champ électrique qui la maintient à cette forme, est mise en évidence (figure 5.15) et nous tentons d'estimer l'écart entre les résultats de Taylor et la simulation. Le comportement de la goutte en champ alternatif, tel que simulé par nos calculs, est très proche du comportement prévu par Taylor, en utilisant la valeur efficace du champ électrique alternatif dans les résultats issus de nos simulations. De même que la théorie de Taylor, nous trouvons que la branche supérieure définit un état d'équilibre instable, tandis que la branche inférieure représente un régime d'équilibre stable. Bien que faibles, les écarts détectés dans la branche instable sont dus, comme pour le champ continu, au fait que la forme d'équilibre exacte à atteindre n'est pas tout à fait ellipsoïdale et que les instabilités ne vont que croître en fonction du temps, si bien qu'il est impossible de retrouver numériquement la forme d'équilibre ; en effet, on ne peut que soupçonner son existence. Par les deux méthodes, les courbes supérieure et inférieure se rejoignent en un point de retournement, qui correspond à des valeurs du champ électrique critique très proches. En champ électrique alternatif, la très bonne correspondance s'explique par le fait qu'à fréquence élevée (2000 Hz), par rapport à la fréquence de résonance des gouttes (de l'ordre de 500 Hz pour une goutte de rayon $r = 500 \mu\text{m}$), l'interface n'arrive à suivre l'effort électrique (qui est donné comme le carré du champ électrique cf. équation (3.135) du chapitre 3 et dont la fréquence est double de la fréquence du champ électrique) qu'à travers sa valeur moyenne, qui correspond à la valeur efficace du champ électrique appliqué.

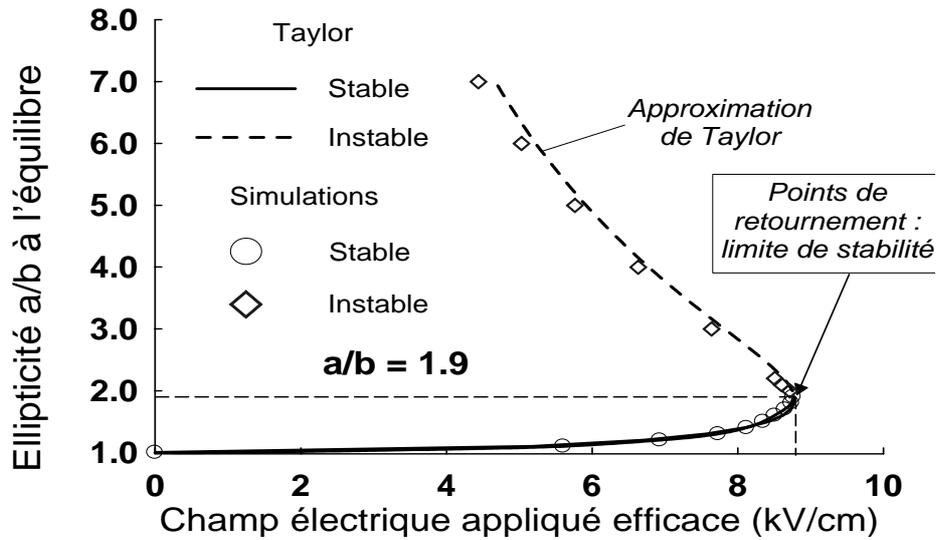


Figure 5.15. Loi d'équilibre de la goutte prédite par Taylor et calculée par le modèle MIF en fonction de la valeur efficace du champ électrique appliqué. Rayon équivalent de la goutte $r = 500 \mu\text{m}$ et $f = 2000 \text{ Hz}$.

5.4.3.5. Les cônes de Taylor

La figure 5.16 reproduit les photographies de cône de Taylor parues dans l'article original de cet auteur [276]. D'un autre côté, La simulation ne met en évidence l'existence momentanée de forme conique que pour les grosses gouttes. L'évolution de la forme de la goutte (de rayon $r = 500 \mu\text{m}$) jusqu'à l'apparition d'un cône est présentée à la figure 5.17. Quand la goutte s'allonge, ses pôles deviennent plus courbés (5.17.a, b, c et d). Cette augmentation de courbure a deux conséquences : *i*) l'augmentation de la force de rappel due à la tension de surface ($F_\gamma \propto \gamma/R$ où R est le rayon de courbure) et *ii*) l'augmentation du champ électrique local ($F_{\text{électrique}} \propto \Delta V^2/R$). En régime d'équilibre, ces efforts se compensent le long de la zone immédiate au pôle, sauf peut être au pôle, et la formation du cône de Taylor stable est possible. En régime transitoire, en revanche, et *a fortiori* pour les transitoires rapides où les forces d'inertie deviennent non négligeables, la goutte s'allonge de manière excessive et au-delà d'une forme, dont le demi-angle au sommet est égal à 49.3° . Des formes *transitoires* plus pointues apparaissent avant la rupture de la goutte (éjection d'un filet fluide) comme montré par les figures 5.17.e, f et g. La méthode MIF utilisée ne permettant pas le suivi des filets fluides de manière automatique, les calculs s'arrêtent.

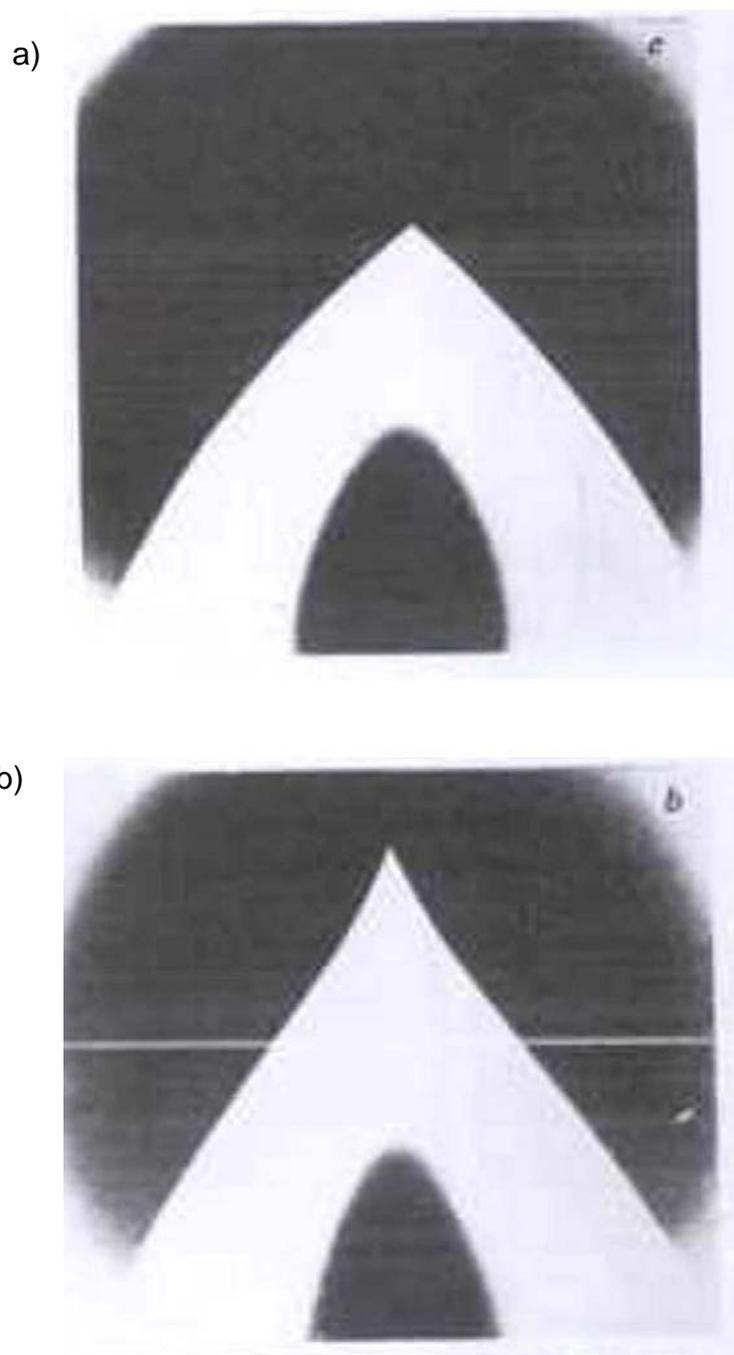


Figure 5.16. Expérience réalisée par Taylor [276]. a) Cône stable dont le demi-angle au sommet d'une goutte est égal à 49.3° , b) Cône instable dont le demi-angle au sommet est inférieur à 49.3° .

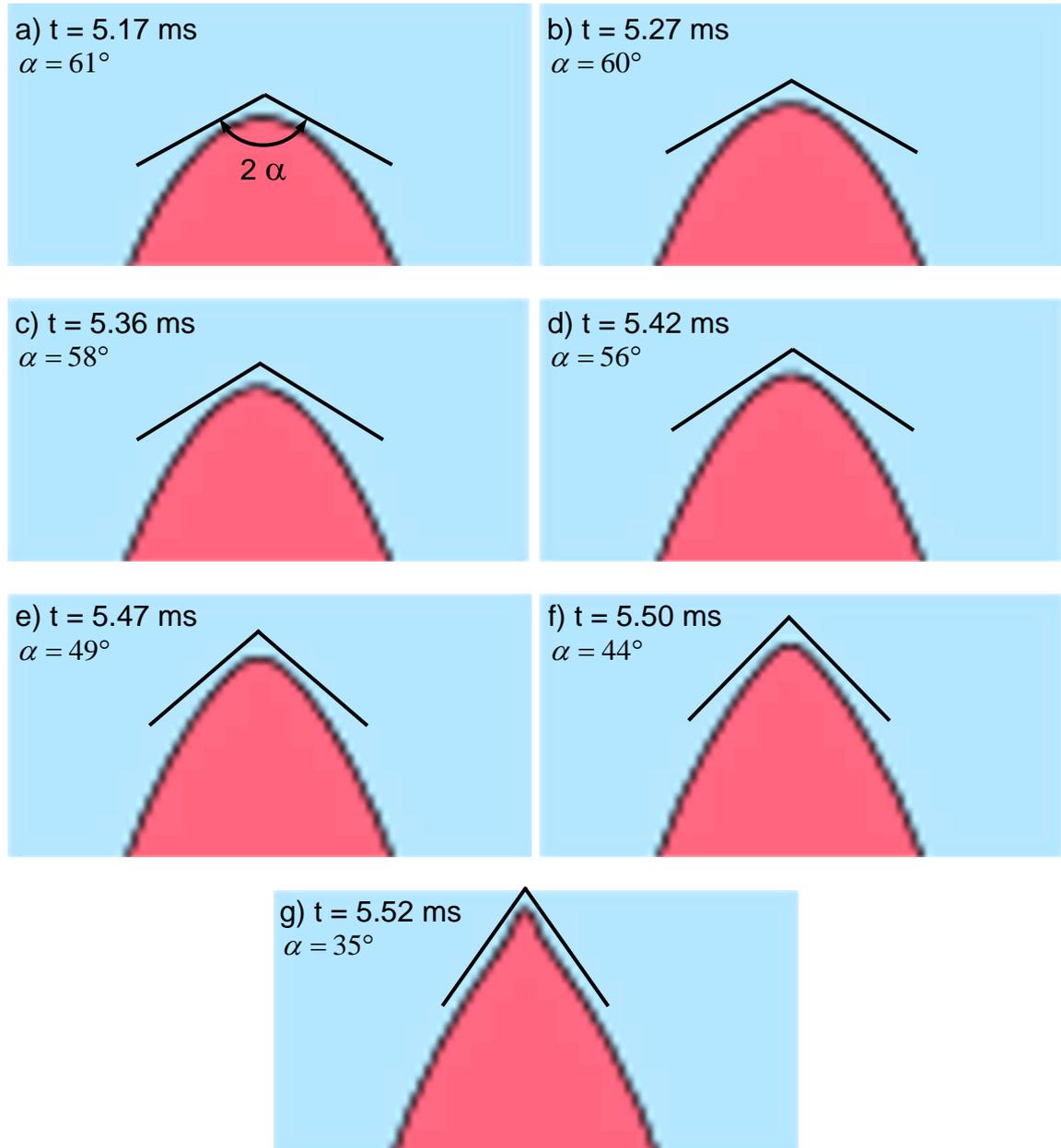


Figure 5.17. Simulation d'instabilité à l'origine de la formation du cône de Taylor. L'angle α est égal au demi-angle au sommet. Rayon initial de la goutte $r = 500 \mu\text{m}$ et $f = 2000 \text{ Hz}$, champ électrique appliqué $E_0 = 12 \text{ kV/cm}$ et $\tau = 1 \mu\text{s}$.

5.5. Formulation MIF en champ électrique non uniforme

Le modèle MIF ayant été validée en champ électrique uniforme, il convient de l'étendre au cas du champ électrique non uniforme où le déplacement de gouttes par DEP se produit ; c'est l'objectif fixé pour cette thèse. Un test préliminaire est effectué dans une configuration particulière étudiée par Feng [101] qui propose la solution analytique du problème EHD d'une goutte soumise à un champ électrique non uniforme et continu. Ensuite, le problème de déplacement d'une goutte dans une configuration pointe-plan en champ électrique alternatif est abordé.

5.5.1. Modèle théorique de Feng

Dans son travail Feng [101] se propose de trouver la solution analytique du problème de déformation et de déplacement d'une goutte en champ électrique continu et non uniforme dans une configuration 2D-axisymétrique. En coordonnées sphériques (r, θ) (la symétrie axiale implique une indépendance du problème EHD de l'angle azimutal ϕ) une goutte de forme sphérique est soumise à un champ électrique non uniforme dont le potentiel est donné par :

$$V(r, \theta) = -E_0 (rP_1(\cos \theta) + \Lambda r^2 P_2(\cos \theta)) \quad (5.80)$$

où P_1 et P_2 présentent les polynômes de Legendre d'ordre 1 et 2. Λ est une mesure de la non uniformité du champ et E_0 est l'intensité du champ électrique uniforme de référence (à $r=0$). Parmi toutes les combinaisons possibles des solutions fondamentales du potentiel électrique (solution de l'équation de Laplace en configuration axisymétrique, voir Annexe 3.2), la forme (5.80) est la forme la plus simple qui correspond à un champ électrique non uniforme. Le but est de produire un effet de déplacement par DEP de la goutte en plus de sa déformation.

Les propriétés électriques et hydrodynamiques de la goutte et du fluide dans lequel elle baigne sont supposées constantes. La formulation du problème électrique en régime continu est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 V^{(k)}(r, \theta) = 0, \quad (r, \theta) \in \Omega^{(k)}, \quad k = i, e \\ V^{(e)}(r, \theta) = V(r, \theta), \quad r \rightarrow +\infty \\ V^{(i)}(r, \theta)|_s = V^{(e)}(r, \theta)|_s \\ \sigma^{(i)} \frac{\partial V^{(i)}}{\partial n}(r, \theta)|_s = \sigma^{(e)} \frac{\partial V^{(e)}}{\partial n}(r, \theta)|_s \end{array} \right. \quad (5.81)$$

La solution de ce système s'écrit sous la forme :

$$V^{(i)}(r, \theta) = -E_0 \left[\frac{3}{2+S} r P_1(\cos \theta) + \Lambda \frac{5}{2+S} r^2 P_2(\cos \theta) \right] \quad (5.82)$$

$$V^{(e)}(r, \theta) = -E_0 \left[\left(r + \frac{1-S}{2+S} \frac{r_0^3}{r^2} \right) P_1(\cos \theta) + \Lambda \left(r^2 + 2 \frac{1-S}{3+2S} \frac{r_0^5}{r^3} \right) P_2(\cos \theta) \right] \quad (5.83)$$

où r_0 le rayon initial de la goutte. De manière similaire au traitement effectué au paragraphe 5.2.1, sous l'hypothèse d'écoulement à bas nombre de Reynolds en régime permanent, le potentiel hydrodynamique ψ doit satisfaire l'équation suivante :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \psi^{(k)} = 0, \quad k = i, e \quad (5.84)$$

ψ est relié à la vitesse \mathbf{u} par la relation :

$$\mathbf{u} = \nabla \times \left(\frac{\psi}{\sin \theta} \mathbf{i}_\phi \right) \quad (5.85)$$

Pour faciliter le traitement, Feng a pris le centre de la goutte comme origine des coordonnées (pas de modification des équations lorsque la vitesse de la goutte est constante). De plus, il décompose le problème hydrodynamique en un problème de translation d'une goutte sphérique à vitesse constante \mathbf{U} en régime de Stokes et un problème d'écoulement induit par le champ électrique autour d'une goutte sphérique fixe. La solution du premier problème est donnée par Stokes. Les conditions aux limites pour le deuxième problème hydrodynamique sont les suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(e)}(r, \theta) \rightarrow \mathbf{0}, & r \rightarrow +\infty \\ \mathbf{u}^{(i)}(r, \theta)|_S = \mathbf{u}^{(e)}(r, \theta)|_S \end{cases} \quad (5.86)$$

En outre, l'équilibre local entre forces électriques et forces hydrodynamiques doit être assuré, soit (cf. équations (2.78) et (2.79) du chapitre 2) :

$$\llbracket \mathbf{n} \cdot \Pi \rrbracket + \llbracket \mathbf{n} \cdot \mathbb{T}^{\text{électrique}} \rrbracket = \gamma (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (5.87)$$

La solution du système constitué par l'équation (5.84) et les conditions (5.86) est la suivante [126] :

$$\psi^{(i)}(r, \theta) = \frac{\varepsilon^{(e)}}{\mu^{(e)}} \frac{(S-P) E_0^2}{M+1} \sum_{l=2}^5 \beta_l \frac{(r^{l+2} - r_0^2 r^l)}{r_0^{l-2}} G_l(\cos \theta) \quad (5.88)$$

et :

$$\psi^{(e)}(r, \theta) = \frac{\varepsilon^{(e)}}{\mu^{(e)}} \frac{(S-P) E_0^2}{M+1} \sum_{l=2}^5 \beta_l \left(\frac{1}{r^{l-3}} - \frac{r_0^2}{r^{l-1}} \right) r_0^l G_l(\cos \theta) \quad (5.89)$$

Les fonctions G_l sont les fonctions de Gegenbauer de première espèce (voir Annexe 5.3) et les β_l^{\square} sont des fonctions définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{15} \\ \beta_3 = \frac{\eta_1^2}{5} + \frac{6\eta_2^2}{35} \\ \beta_4 = \frac{24\eta_1 \eta_2}{35} \\ \beta_5 = \frac{4\eta_2^2}{7} \end{array} \right. \quad (5.90)$$

où :

$$\eta_1 = \frac{3}{2+S} \quad (5.91)$$

$$\eta_2 = \frac{5\Lambda r_0}{3+2S} \quad (5.92)$$

L'équation qui décrit l'équilibre des forces globales, déduites de la condition (5.87), de la force d'Archimède et la traînée de Stokes, s'écrit [101] :

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi\mathcal{E}^{(e)}E_0^2r_0^3}{(2+S)(3+2S)} \left[2(2S^2+S-3) + \frac{P-S}{M+1} \right] \\ & = \frac{4}{3}\pi r_0^3 g (\rho^{(i)} - \rho^{(e)}) + 2\pi\bar{\mu}^{(e)}\bar{r}_0 U \frac{3M+2}{M+1} \end{aligned} \quad (5.93)$$

g est l'accélération de la gravité et $\rho^{(i)}$ et $\rho^{(e)}$ les masses volumiques de la goutte et du fluide extérieur, respectivement.

Le membre gauche de l'équation (5.93) prend en compte les forces induites par application du champ électrique. Le premier terme de ce membre est dû à la contribution des forces électriques normales à l'interface goutte-fluide alors que le second terme est dû aux forces visqueuses générées par l'écoulement EHD (rotationnel) induit par le champ électrique.

Lorsque l'écoulement tangentiel n'est pas supposé influencer le comportement EHD de la goutte (c'est-à-dire, lorsque la goutte est supposée largement plus visqueuse que le fluide extérieur, où $M \rightarrow +\infty$, pour que le fluide qui constitue son interface ne puisse être entraîné tangentiellement), la force DEP déduite de (5.93) devient :

$$F_z^{DEP} = 8\pi\mathcal{E}^{(e)}E_0^2\Lambda r_0^3 \frac{S-1}{S+2} \quad (5.94)$$

En petites déformations, l'équation suivante définit l'interface :

$$r = r_0(1 + F(\theta)) \quad (5.95)$$

L'équilibre local des forces (5.87) implique la forme de la fonction F suivante :

$$F(\theta) = \sum_{l=2}^4 \alpha_l P_l(\cos \theta) \quad (5.96)$$

Les coefficients α_l (supposés tels que : $|\alpha_l| \ll 1$) sont donnés par :

$$\alpha_2 = \frac{\varepsilon^{(e)} E_0^2 r_0}{4\gamma} \left[\frac{\eta_1^2}{3} (S^2 - 2P + 1) + \frac{\eta_2^2}{7} (4S^2 - P - 3) + \left(\eta_1^2 + \frac{6\eta_2^2}{7} \right) \frac{(S - P)(3M + 2)}{5(M + 1)} \right] \quad (5.97)$$

$$\alpha_3 = \frac{\varepsilon^{(e)} E_0^2 r_0 \eta_1 \eta_2}{50\gamma} \left[6(S^2 - 2P - 1) + \frac{12(S - P)(4M + 3)}{7(M + 1)} \right] \quad (5.98)$$

$$\alpha_4 = \frac{\varepsilon^{(e)} E_0^2 r_0 \eta_2^2}{105\gamma} \left[6(S^2 - 2P + 1) + \frac{(S - P)(5M + 4)}{M + 1} \right] \quad (5.99)$$

5.5.2. Le modèle numérique MIF-EHD

La formulation numérique que nous avons utilisée résout le problème hydrodynamique dans le cadre des écoulements irrotationnels, les équations à résoudre étant l'équation de continuité et l'équation d'Euler :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(k)} = 0, \quad k = i, e \quad (5.100)$$

$$\rho^{(k)} \left[\frac{\partial \mathbf{u}^{(k)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \left(\left(\mathbf{u}^{(k)} \right)^2 \right) \right] = -\nabla \left(\rho^{(k)} g z \right) - \nabla \left(p^{(k)} \right), \quad k = i, e \quad (5.101)$$

z est la cote du point courant ($z = r \cos \theta$). L'évolution de la forme de l'interface est donnée par :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (5.102)$$

\mathbf{n} est la normale à l'interface. Pour justifier la pertinence du modèle d'écoulement irrotationnel dans le cas de la déformation pure de gouttes, nous avons avancé l'argumentation proposée par Moore [201]. En considérant le mouvement d'une bulle sphérique dans un fluide, il montre que la solution irrotationnelle fournit, lorsque le nombre de Reynolds $Re = \rho UL / \mu$ augmente, une approximation uniforme de la composante normale des contraintes visqueuses. Cette uniformité assure donc une bonne corrélation entre écoulement irrotationnel et écoulement rotationnel si les contraintes sont essentiellement normales comme nous l'avons supposé pour la déformation pure des gouttes étudiée dans la section 5.4. Il est cependant inapproprié de traiter le déplacement d'une goutte dans le cadre de cette approximation. Il est également inapproprié de ne pas tenir compte des contraintes de cisaillement (tangential) qui sont associées au déplacement

de gouttes. Cette insuffisance est connue, pour les écoulements potentiels, sous la dénomination du *paradoxe de d’Alambert* ; négliger les efforts de cisaillement implique une surestimation de la vitesse de translation de la goutte.

Afin de remédier à ce problème, nous proposons d’introduire une correction dans la formulation MIF qui a pour but de tenir compte, de manière indirecte, de la force de traînée qui s’applique sur la goutte en mouvement ; ceci est réalisé sous la forme d’une *pseudo* force de volume. Le modèle potentiel permet en effet d’introduire autant de forces (conservatives) de volume que l’on veut. L’unique condition que doit satisfaire cette force de volume ajoutée est d’être équivalente à la force de Stokes censée s’appliquer sur la goutte. Pour une goutte sphérique, la force de traînée de Stokes est donnée par :

$$\mathbf{F}^{\text{traînée}} = -\frac{4}{3}\pi r_0^3 AU \quad (5.103)$$

où :

$$A = \frac{3}{2}(\mu^{(e)}(3M + 2)) / (r_0^2(M + 1)) \quad (5.104)$$

L’expression peut être plus compliquée si la forme de la goutte est non sphérique [303]. La contribution de la densité de la force *pseudo* volumique $-AU$ est intégrée aux forces externes dans l’équation d’Euler (5.101), soit :

$$\rho^{(i)} \left[\frac{\partial \mathbf{u}^{(i)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \left((\mathbf{u}^{(i)})^2 \right) \right] = -\nabla (\rho^{(i)} g z) - \nabla p^{(i)} - AU(t) \quad (5.105)$$

La vitesse U est la vitesse du centre de gravité de la goutte. A chaque instant, elle est définie par :

$$U = \int_{\Omega^{(i)}} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u}^{(i)} dv / \frac{4}{3}\pi r_0^3 \quad (5.106)$$

Soit, en introduisant le potentiel hydrodynamique φ :

$$U = \frac{3}{4\pi r_0^3} \int_{\Omega^{(i)}} \mathbf{e}_z \cdot \nabla \varphi^{(i)} dv = \frac{3}{4\pi r_0^3} \mathbf{e}_z \cdot \int_{\partial\Omega^{(i)}} \varphi^{(i)} \mathbf{n} dS = \frac{3}{4\pi r_0^3} \int_{\partial\Omega^{(i)}} \varphi^{(i)} (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}) dS \quad (5.107)$$

5.5.3. Comparaison de l’approche MIF-EHD et du modèle de Feng

Bien qu’une partie des effets visqueux soit prise en compte par CANARD et que la traînée globale soit corrigée, le modèle numérique ne satisfait pas l’équilibre tangentiel de quantité de mouvement (§ 2.3.3 du chapitre 2), tandis que le modèle statique de Feng néglige totalement les effets inertiels alors qu’ils sont entièrement pris en compte par CANARD. Malgré ce fait, une comparaison a été effectuée pour examiner dans quelle mesure les deux modèles fournissent ou non des résultats similaires. La figure 5.18 représente les variations de la force électrique appliquée à la goutte évaluée par les deux

modèles en fonction du rapport des conductivités S et ce pour trois valeurs du rapport des permittivités P . Le rapport des viscosités est $M = 1/20$.

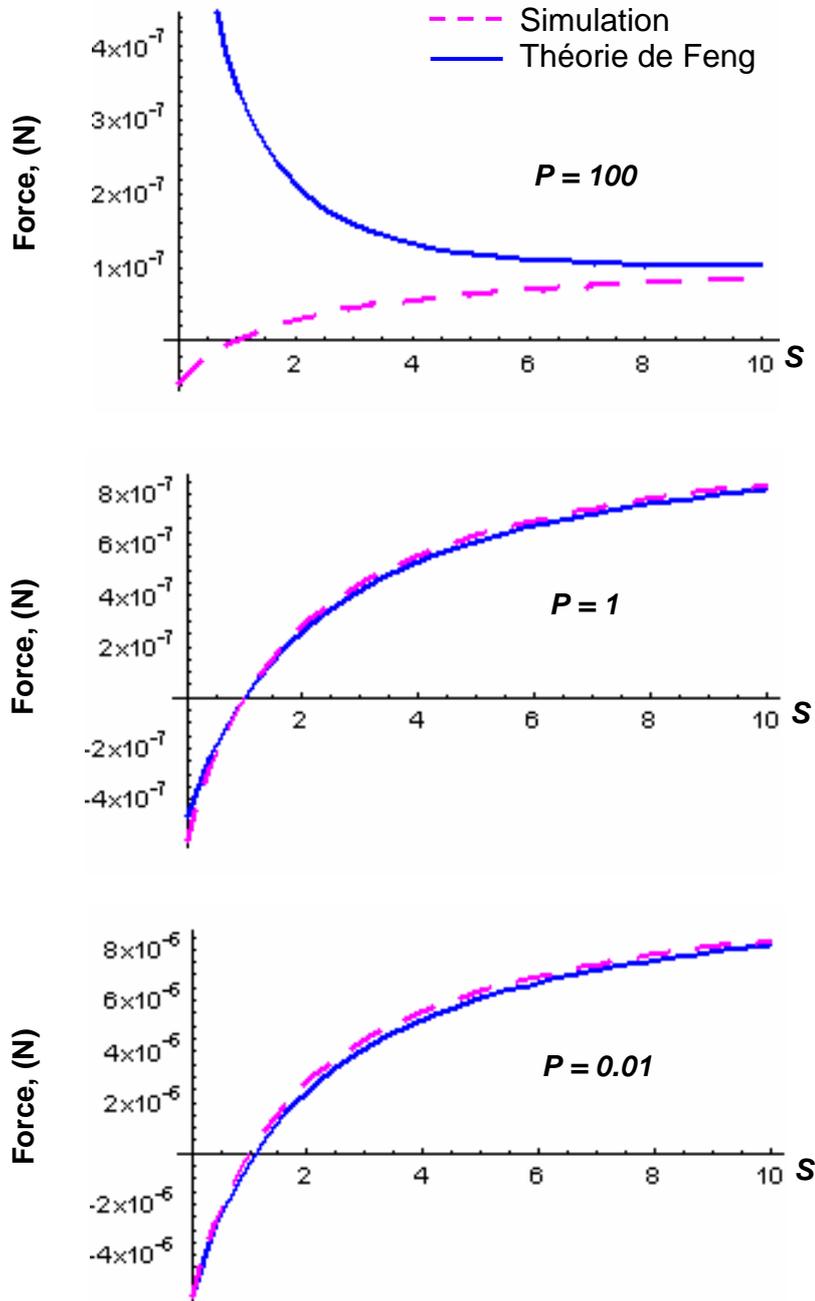


Figure 5.18. Variations de la force DEP calculée par CANARD-EHD (en tirés) comparée à la force EHD prédite par Feng (en continu) en fonction du rapport des conductivités S . a) $P = 100$, b) $P = 1$ et c) $P = 0.01$. Pour les trois graphes $M = 1/20$, $E_0 = 1$ kV/cm, $\Lambda = 0.5$ et le rayon de la goutte $r_0 = 1$ mm.

Lorsque S est faible, une différence importante est notée entre les forces évaluées par les deux approches pour les grandes valeurs de P . Ceci peut être montré en réécrivant la force

EHD (membre gauche de l'équation (5.93)) en fonction de l'expression théorique (5.94) de la force DEP :

$$F_z^{\text{EHD}} = F_z^{\text{DEP}} \left[1 + \frac{1}{2(S+2)(2S+3)} \frac{P-S}{(M+1)} \right] \quad (5.108)$$

Pour de grandes valeurs de P , la différence entre les deux forces devient notable. Quand P devient faible et/ou M devient grand, les deux forces convergent vers les mêmes valeurs. Par ailleurs, les deux forces convergent quand $S \gg 1$ indépendamment des valeurs de P et de M . La goutte d'eau dans de l'huile en champ électrique alternatif, qui est traité dans la section suivante, satisfait cette dernière condition. Nous remarquons que l'écart entre les forces EHD et DEP est indépendant de l'intensité du champ électrique appliqué E_0 et de la non uniformité Λ .

La figure 5.19 représente les variations de la force DEP après déformation d'une goutte. Il s'agit d'une goutte d'eau de 1 mm de rayon qui baigne dans de l'huile ($S = 2.4 \times 10^9$, $P = 3.23 \times 10^{-2}$, $M = 1/20$, $\gamma = 40 \times 10^{-3} \text{ N/m}$) avec $\Lambda = 10^3 \text{ m}^{-1}$. Pour les faibles valeurs du champ électrique appliqué ($E_0 < 0.15 \text{ kV/cm}$) la goutte conserve sa forme sphérique et la force EHD estimée par le modèle de Feng reste proche de la force DEP calculée par CANARD. Cependant au-delà de cette valeur du champ électrique, une divergence se produit sur les formes prédites et en conséquences sur les forces électriques appliquées sur la goutte.

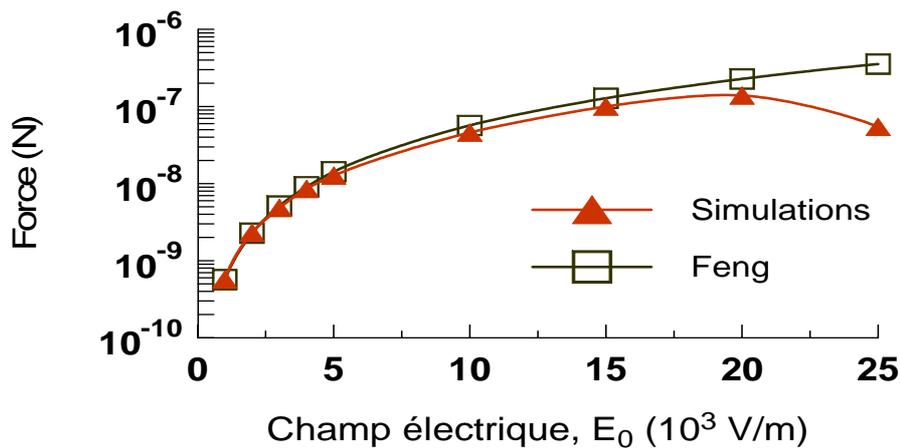


Figure 5.19. Variations de la force DEP, appliquée à une goutte, calculée par CANARD-EHD et comparée à la force EHD prédite par Feng en fonction de l'intensité du champ électrique appliqué. $S = 2.4 \times 10^9$, $P = 3.23 \times 10^{-2}$, $M = 1/20$, $\Lambda = 1/r_0$ et le rayon de la goutte $r_0 = 1 \text{ mm}$.

Le deuxième test effectué est relatif à la différence des formes prédites par les deux méthodes. Selon la figure 5.20a, où le champ électrique appliqué au centre de la goutte est égal à 0.01 kV/cm, aucune déformation notable ne se produit. Cependant lorsque le champ électrique devient plus intense (0.25 kV/cm), un développement d'instabilité se produit (figure 5.20b). Le modèle de Feng, étant un modèle statique, ne décèle pas de telles instabilités. La non trivialité du potentiel électrique imposé (équation (5.80)) qui ne correspond pas à une configuration simple d'électrodes ne nous permet pas d'apporter un élément de réponse à ce type de comportement. Notons toutefois, que le développement d'un anneau d'instabilité au pôle supérieur, corrélé au renflement à proximité du pôle inférieur, peut être dû aux effets inertiels.

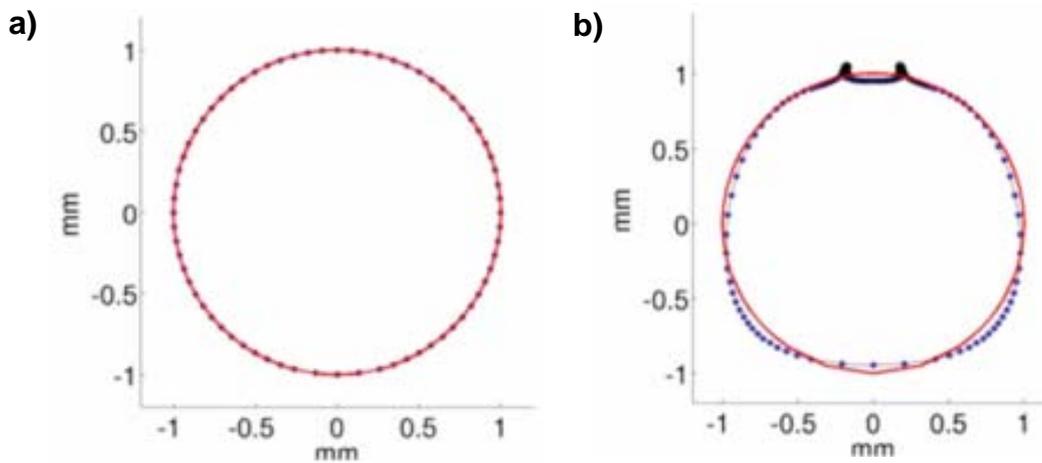


Figure 5.20. Une goutte d'eau dans de l'huile. CANARD-EHD (en pointillés) et selon Feng (en continu). $S = 2.4 \times 10^9$, $P = 3.23 \times 10^{-2}$, $M = 1/20$, $\Lambda = 10^3 \text{ m}^{-1}$, $r_0 = 10^{-3} \text{ m}$ et $\gamma = 40 \times 10^{-3} \text{ N/m}$. a) $E_0 = 10^3 \text{ V/m}$ et b) $E_0 = 2.5 \times 10^4 \text{ V/m}$.

5.5.4. Goutte d'eau sous champ alternatif en configuration pointe-plan

Un champ électrique alternatif est engendré par une configuration pointe-plan. La goutte d'eau, baignant dans de l'huile, est placée sur l'axe de symétrie du dispositif. Nous avons appliqué ici la correction du modèle MIF. Comme montré par la figure 5.21, lorsque la goutte se déplace vers la pointe, aucune différence significative de forme n'est constatée entre le modèle corrigé et le modèle standard. Ceci est prévisible, puisque la force de traînée telle qu'introduite dans CANARD agit de manière uniforme sur l'ensemble de la goutte.

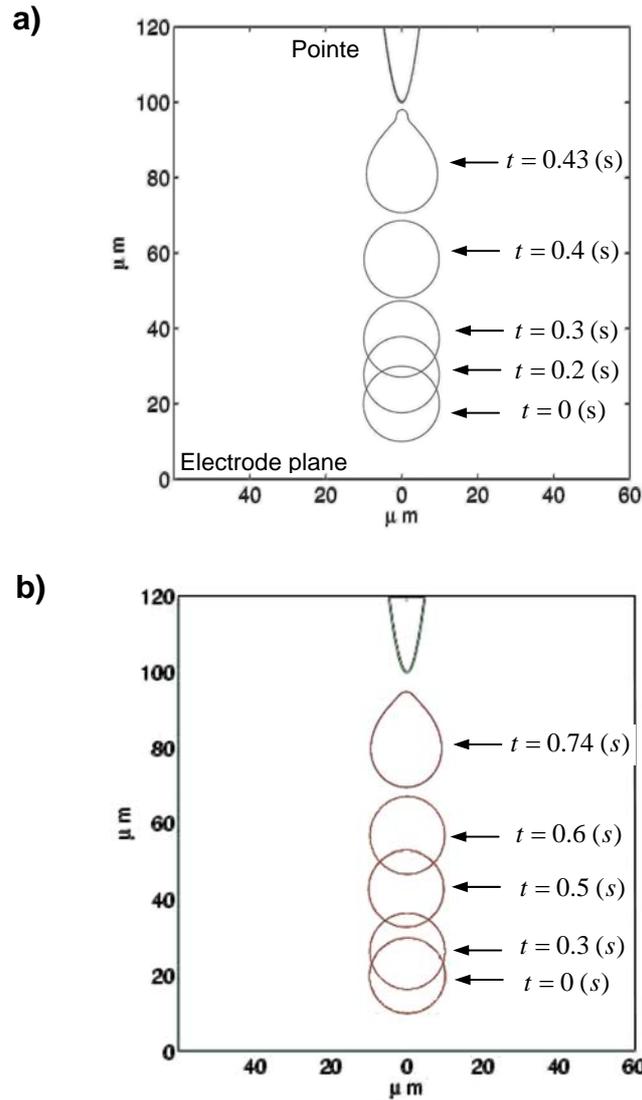


Figure 5.21. Déformation et déplacement d'une gouttelette tels que prédits par CANARD-EHD a) sans introduction de la correction de la traînée et b) en incluant la correction de la traînée. La distance entre électrodes est 100 μm. Le rayon initial de la goutte $r_0 = 10 \mu\text{m}$, sa position initiale est à 20 μm du plan.

$$\Delta V = 4 \text{ V} \text{ et } f = 10^8 \text{ Hz.}$$

La figure 5.22 montre l'amélioration apportée au modèle MIF en terme de vitesse de déplacement. Les résultats donnés par CANARD sont comparés aux résultats obtenus à partir d'un modèle analytique simplifié d'une particule sphérique soumise à la traînée de Stokes et à la force DEP estimée par l'approche du dipôle ponctuel.

En négligeant les effets de la masse ajoutée F^{MA} (dus à l'accélération relative de la particule), l'équation associée à ce dernier modèle est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho^{(i)} \frac{dU}{dt} = \frac{4}{3} \pi r_0^3 g (\rho^{(i)} - \rho^{(e)}) - 2\pi \mu^{(e)} r_0 U \frac{3M + 2}{M + 1} \\ + 4\pi \varepsilon^{(e)} r_0^3 \text{Re}[\bar{K}] \left(\frac{\Delta V}{\ln \left[\tan \left(\frac{\eta_0}{2} \right) \right] \right)^2 c^2 z / (c^2 - z^2)^3 \end{aligned} \quad (5.109)$$

\bar{K} est le facteur de Clausius-Mossotti tel que : $\bar{K} = \frac{(\bar{\sigma}^{(i)} - \bar{\sigma}^{(e)})}{(\bar{\sigma}^{(i)} + 2\bar{\sigma}^{(e)})}$, η_0 est le paramètre qui définit la courbure de l'hyperbole et c est tel que $c = L/\cos\eta_0$ (L la distance entre électrodes). L'accord entre les deux résultats est bon dans la mesure où le modèle dipolaire donne une estimation correcte de la force DEP uniquement dans la région centrale, c'est-à-dire loin des électrodes (cf. paragraphe 4.2.1 du chapitre 4), la correspondance est satisfaisante. L'accélération prédite par le modèle analytique est moins importante que celle prédite par le modèle CANARD-EHD modifié car la force DEP estimée par le modèle analytique est sous estimée à mesure que la goutte s'éloigne du plan et s'approche de la pointe.

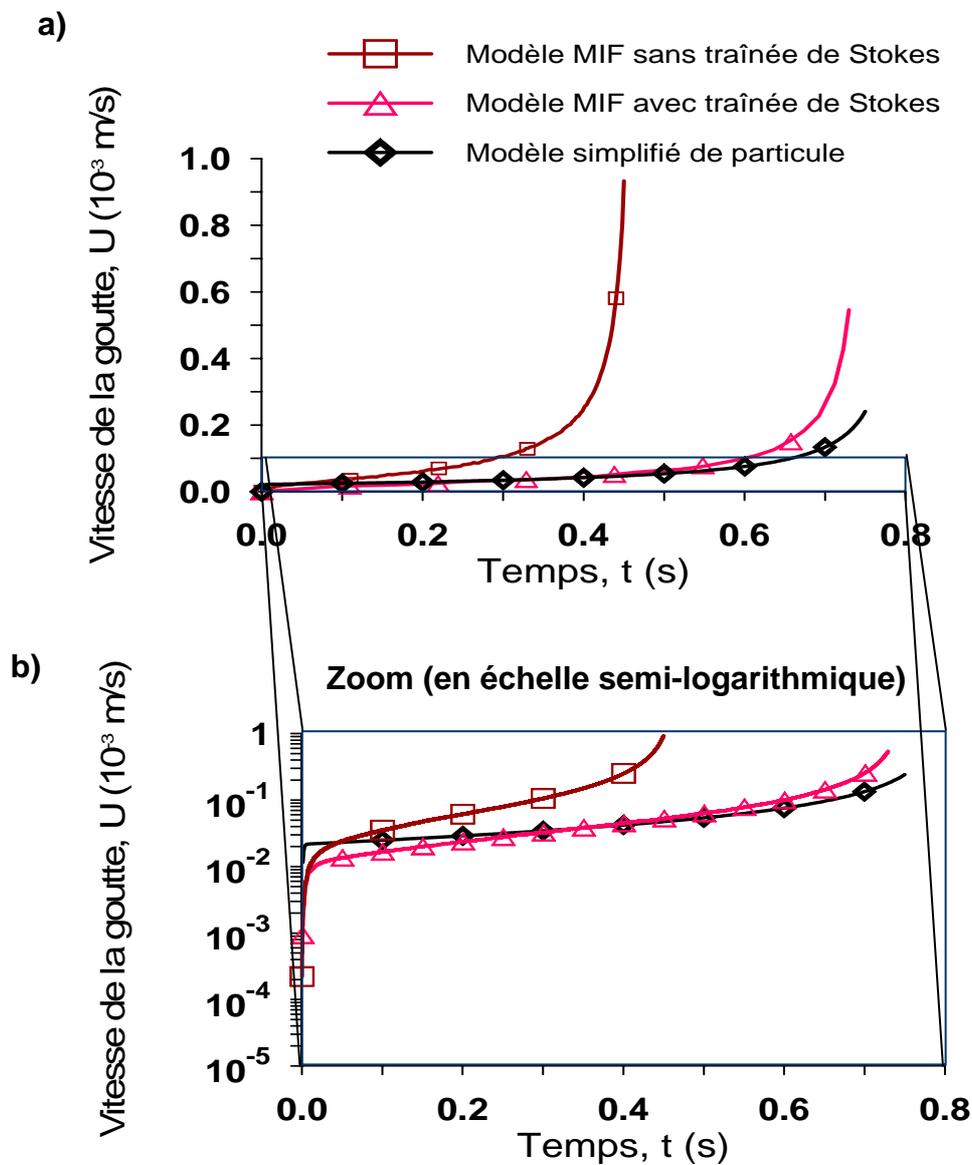


Figure 5.22. Evolution de la vitesse de la goutte telle que donnée par CANARD-EHD standard, CANARD-EHD modifié et par la solution analytique du modèle analytique simplifié.

En calculant la force de masse ajoutée, nous trouvons :

$$F^{\text{MA}} = \frac{1}{2} \rho^{(e)} \frac{4}{3} \pi r_0^3 \frac{dU}{dt} \approx \rho^{(e)} r_0^3 \frac{U}{T} \approx 10^{-15} \text{ N} . \text{ Or la traînée de Stokes est de l'ordre de}$$

$F^{\text{Stokes}} \approx 6\pi\mu^{(e)} r_0 U \approx 10^{-10} \text{ N} .$ Nous vérifions *a posteriori* que la force de masse ajoutée est effectivement négligeable devant les autres termes.

La figure 5.23 montre l'évolution de la vitesse instantanée en fonction du temps pour $f = 10^4, 10^6$ et 10^8 Hz . A cause de la variation de la force DEP entre les électrodes, la particule est accélérée de plus en plus jusqu'à la rupture à proximité de la pointe. La rupture se produit à une distance interface-pointe relativement constante qui est de l'ordre de $10 \mu\text{m}$. Toutefois, l'accélération est plus prononcée à basse fréquence qu'à très haute fréquence. Les variations du facteur de Clausius-Mossotti en fonction de la fréquence montrées par la figure 5.24 montrent en effet une diminution de ce facteur et par conséquent de la force DEP pour les fréquences les plus élevées.

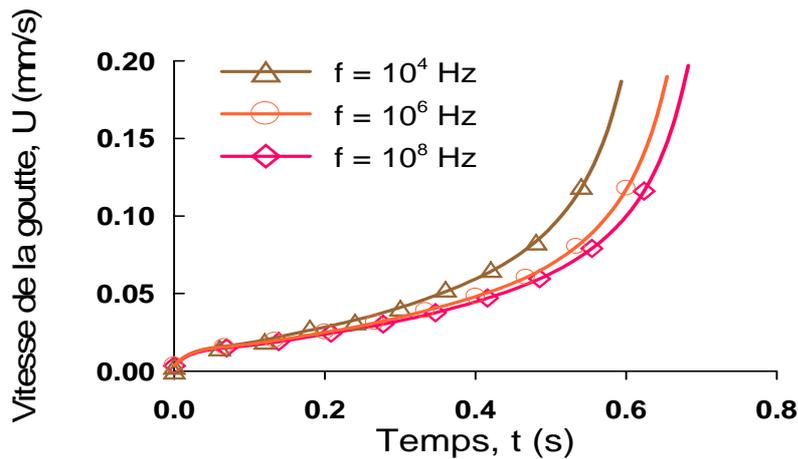


Figure 5.23. Evolution de la vitesse d'une goutte telle que donnée par CANARD modifié pour trois fréquences du champ électrique appliqué, $r_0 = 10 \mu\text{m}$, $f = 10 \text{ kHz}$, 1 MHz et 100 MHz .

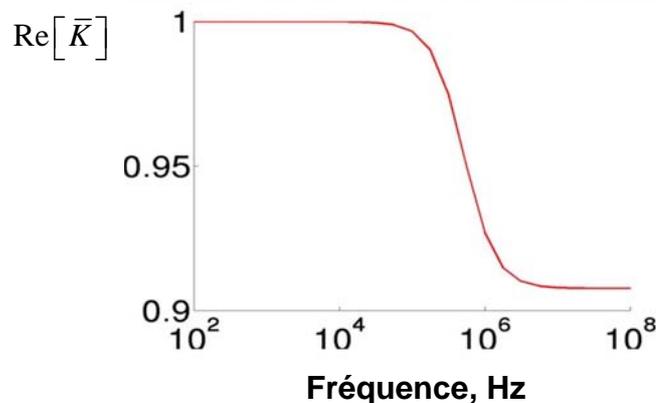


Figure 5.24. Variations de la partie réelle du facteur de Clausius-Mossotti, pour le couple eau-huile, en fonction de la fréquence.

La figure 5.25 reporte les déformations observées en fonction de la taille des gouttes. La plus grosse goutte ($r = 15 \mu\text{m}$) présente une forme de cône avant rupture, alors que la goutte de taille plus réduite ($r = 10 \mu\text{m}$) présente une forme à la rupture qui suggère l'éjection d'une (ou plusieurs) gouttelette satellite. L'instabilité ne se développe, dans un cas comme dans l'autre, qu'au pôle du côté de la pointe.

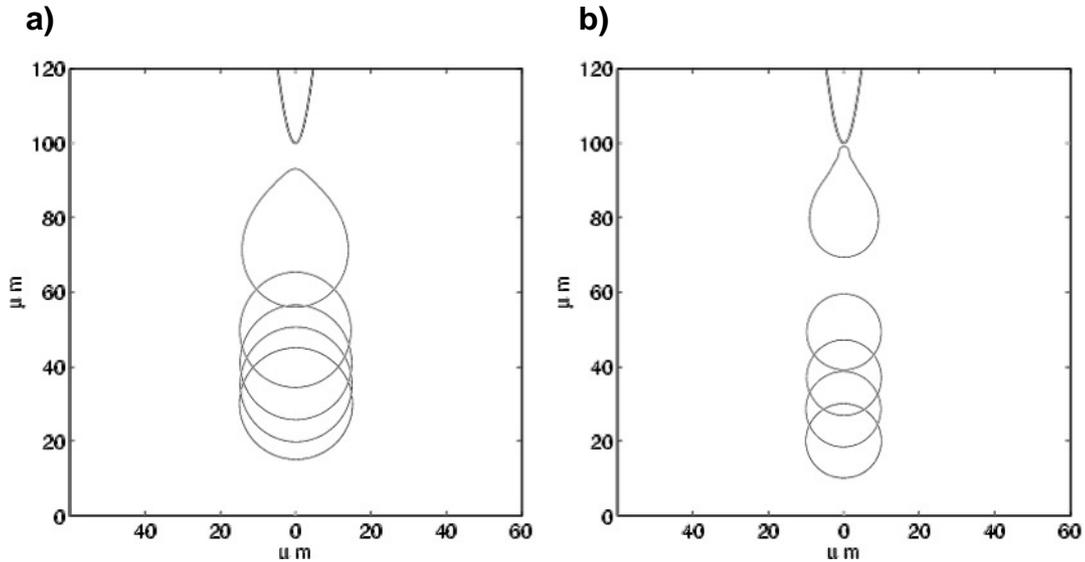


Figure 5.25. Mise en évidence des déformations, à intervalle de temps fixe, en fonction de la taille initiale de la goutte, $f = 1 \text{ MHz}$. a) $r_0 = 15 \mu\text{m}$ et b) $r_0 = 10 \mu\text{m}$.

5.6. Conclusions

La déformation de gouttes soumises au champ électrique uniforme a été étudiée par plusieurs méthodes. Les études analytiques simplifiées sur des cas particuliers ont permis d'avoir une idée assez précise sur la déformation et les instabilités dans les cas considérés (gouttes elliptiques infiniment conductrices sans écoulement et gouttes diélectriques sphériques avec écoulement). L'approche par la méthode des perturbations permet, dans une certaine mesure, de traiter le problème de déformation des gouttes sous champ électrique de manière plus générale. Cette méthode offre de fortes potentialités, mais la mise en œuvre qu'elle implique est souvent prohibitive pour être pleinement exploitable. En l'occurrence, le développement au premier ordre des perturbations est insuffisant pour décrire de manière correcte la déformation de gouttes jusqu'à la rupture.

Le code CANARD-EHD a été testé par comparaison à des travaux expérimentaux en champ électrique uniforme. La configuration concerne la déformation d'une goutte d'eau dans de l'huile. Des résultats encourageants ont été obtenus quant à l'effet de la taille des gouttes sur la valeur du champ électrique critique. De manière similaire à l'expérience, la faible influence de la conductivité de l'eau sur le champ critique a été retrouvée. Une

extension de l'étape de validation du code CANARD-EHD a été effectuée également par comparaison aux résultats de Taylor. En courant continu, une très bonne correspondance a été trouvée entre les formes d'équilibre prédites par Taylor et celle retrouvées par les simulations. En courant électrique alternatif, à fréquence élevée, une très bonne correspondance a été mise en évidence en utilisant la valeur efficace du champ électrique appliqué au lieu de son amplitude.

Le code CANARD-EHD a été ensuite testé dans une configuration de goutte soumise à un champ électrique non uniforme où déplacement par DEP et déformation se produisent simultanément. En champ électrique continu, une confrontation du modèle MIF avec le modèle analytique de Feng a été effectuée. CANARD-EHD prédit correctement les forces électriques qui s'appliquent sur la goutte si la goutte est plus conductrice que le liquide extérieur. Dans le cas où la goutte est à la fois plus polarisable et moins conductrice que le liquide extérieur, la forte contribution des effets visqueux tangentiels (non pris en compte par le modèle MIF) rend le modèle MIF inapproprié pour décrire de manière précise les interactions entre champ électrique et champ hydrodynamique. En champ électrique alternatif et par une amélioration apportée dans l'estimation de la traînée, le modèle MIF a été testé avec succès par comparaison à un modèle analytique simplifié. Comme pour le champ électrique uniforme, les gouttes présentent, en champ électrique non uniforme, différents types d'instabilité en fonction de leur taille.

Annexe 5.1

Description du code CANARD-EHD

Dans cette annexe est présentée une description détaillée du code CANARD sous sa version originale qui résout les équations de l'hydrodynamique en écoulements potentiels. La deuxième partie de cette annexe est réservée à la description des modifications que nous avons apportées au code CANARD pour le traitement des problèmes électriques uniquement, puis le couplage EHD pour aboutir à la version CANARD-EHD actuellement mis sur pied.

1. CANARD hydrodynamique

Le code CANARD utilise la Méthode Intégrale aux Frontières, pour la résolution de problèmes au laplacien, c'est-à-dire, aux équations du type :

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{Ann5.1-1})$$

Ecrit initialement en Fortran77, puis mis à jour et amélioré sous Fortran90, CANARD est né suite à une collaboration étroite entre deux personnages du Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels (LEGI) de Grenoble dès 1985. Il s'agit de Jean-Luc Achard, professeur à l'INP de Grenoble et chercheur CNRS et d'Edouard Canot, son étudiant doctorant à l'époque et à présent chercheur à l'IRISA-INRIA de Rennes.

Il existe deux variantes de CANARD ; la première opère en géométrie plane (2D) et la seconde en géométrie axisymétrique (2D-axi). La différence entre les deux variantes ne se fait remarquer par un exploitant du code que par de faibles nuances. Nous ne nous appuierons dans la description dans cette partie que sur la variante 2D-axisymétrique en faisant, toutefois, des remarques sur les points qu'il faudra observer lors du passage au cas 2D-plan.

Comme dans tout code de calcul, il existe dans CANARD plusieurs parties dédiées aux différentes tâches classiques pour la résolution d'un problème différentiel, à savoir :

- Une partie de définition de la géométrie ;
- Une partie à l'application des conditions aux limites ;
- Une partie pour la définition du maillage ;
- Une partie pour la définition des inconnues du problème et du système à résoudre ;
- Une partie pour la résolution ;

- Une partie pour l'évolution en temps.

Nous avons subdivisé CANARD en parties, mais souvent il peut ne pas exister de distinction claire entre quelques unes de ces parties, ce qui rend CANARD particulièrement délicat à exploiter si l'on ne maîtrisait pas un minimum des méandres de cet outil de calcul. Une telle organisation du code se justifie par deux constats. Le premier est dû à la méthode autant que telle ; tandis que la formulation des éléments finis, par exemple, est unique quelque soit la nature du problème à traiter, la méthode intégrale aux frontières, quant à elle, est une méthode qui est sensible à la configuration d'étude pour un même problème. Il en va de même, *a fortiori*, si un problème différent doit être traité. Ce point est d'ailleurs à l'origine du retard d'émergence de codes commerciaux basés sur la MIF jusqu'à maintenant. Le deuxième point est historique, car si la MIF réduit l'étude d'un problème de domaine à l'étude du problème intégral associé aux frontières de ce domaine, les calculs mener sur ces frontières sont denses et nécessitent des traitements assez lourds. Tout gain, aussi minime soit-il, dans une procédure donnée de calcul, permet d'obtenir une réduction substantielle dans le temps de calcul, puisque se faisant un nombre faramineux de fois. Ce point a ainsi la fâcheuse tendance à raidir la manière d'écrire le code. Il est à noter que les auteurs initiaux du code ont toutefois réussi à extraire des bibliothèques génériques prêtes à l'emploi quelque soit le type du problème à traiter. La première description concerne ces bibliothèques.

1.1. Les bibliothèques de CANARD

Elles sont partagées en trois grandes classes :

1. La bibliothèque **math** ;
2. La bibliothèque **splines** ;
3. La bibliothèque **linalg**.

Passons en revue chacune d'entre-elles.

1.1.1. La bibliothèque math

Cette bibliothèque rassemble :

- la valeur du nombre « **pi** » ;
- le calcul des intégrales elliptiques complètes **K(t)** et **E(t)** ;
- les coefficients de Legendre utilisés dans l'intégration par quadrature de Gauss : **gauss_leg**.

Cette bibliothèque permet de faire les calculs en simple ou en double précision.

1.1.2. La bibliothèque splines

Cette bibliothèque regroupe trois procédures impliquant des splines cubiques de fonctions

numériques à variables réelles :

- **cub_spl** : calcule les coefficients des splines cubiques à passer, soit en mode interpolation soit en mode approximation (respectivement, sans ou avec lissage) ;
- **int_spl** : une fois l'interpolation effectuée, permet d'interpoler les valeurs de la fonction, de sa dérivée première ou seconde ;
- **som_spl** : calcule une intégrale de la fonction sur un intervalle déterminé, le calcul des coefficients d'interpolation ayant été effectué au préalable.

Cette bibliothèque permet de faire les calculs en simple ou en double précision.

1.1.3. La bibliothèque linalg

Cette bibliothèque regroupe deux procédures nécessaires à la résolution d'un système d'équations :

- **sgefa** : il s'agit d'une décomposition (LU) effectuée sur une matrice carré A à valeurs réelles ;
- **sgeco** : une procédure identique que sgefa, mais fournit en plus une estimation du conditionnement de la matrice introduite ;
- **sgesl** : résout un système linéaire du type : $A.x = b$, la matrice A ayant été factorisée (LU).

Cette bibliothèque permet de faire les calculs en simple ou en double précision.

1.2. Définition de la géométrie

Cette partie s'effectue dans le corps du programme principal, l'on peut définir la géométrie soit analytiquement soit par importation d'un fichier de coordonnées (r, z) paramétrés par l'abscisse curviligne qui représente les différents contours, dans le demi-plan méridional (axe de symétrie non compris), que constitue la configuration (voir figure Ann5.1-1).

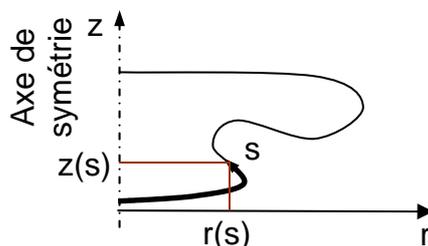


Figure Ann5.1-1. Représentation de la frontière du domaine paramétrée par l'abscisse curviligne s .

1.3. (Re)maillage des frontières

La redistribution des marqueurs est effectuée section par section selon un certain nombre de critères, principalement géométriques (figure Ann5.1-2). Les contraintes actuellement prises en compte sont les suivantes : (1) angle compris entre deux facettes

consécutives inférieur à un seuil, (2) raffinement à proximité d'une autre partie de la même section, (3) raffinement à proximité d'une autre section, (4) raffinement à proximité de l'axe de symétrie, (5) raffinement dans les zones de forte variation de l'inconnue, (6) taille des éléments comprise entre un minimum et un maximum, (7) rapport des tailles d'éléments consécutifs inférieur à un seuil.

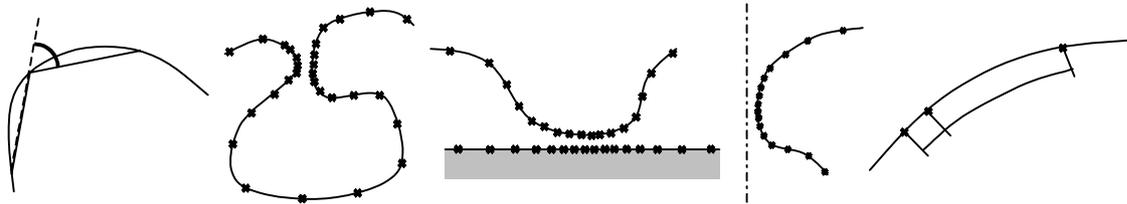


Figure Ann5.1-2. Les critères géométriques pour l'optimisation du maillage. De gauche à droite les critères 1, 2, 3, 4 et 7.

Le critère (1) vise à obtenir une bonne représentation de l'interface. Les critères (2) et (4) et (7) sont liés à la précision du calcul des intégrales régulières. Les critères (1) et (5) peuvent s'exprimer sous la forme $\Delta s(s) \leq f(s)$ où Δs est la taille de la maille et $f(s)$ une fonction de l'abscisse curviligne s qui exprime le critère. Les fonctions associées sont rassemblées dans le Tableau 1.

Tableau 1. Fonctions associées aux critères d'optimisation du maillage

Critère	Fonction associée	commentaires
1	$f_1 = A/\kappa(s)$	κ est la courbure de l'interface
2-4	$f = A d$	d est la distance correspondante
5	$f_5 = A/\sqrt{\varphi''(s)}$	critère pour la courbure de φ

La redistribution optimale des marqueurs par la méthode du critère global a été décrite dans la thèse de Lemonnier, H. (INPG, 1984). On construit la fonction $F(s) = \min (f_i(s))$ à partir des fonctions $f_i(s)$ correspondant aux critères (1-5). Cette fonction est corrigée pour tenir compte des deux derniers critères :

critère (6) : Δs est maintenue à l'intérieur de l'ensemble de valeurs choisi,

critère (7) : $\frac{1}{g} \leq \frac{\Delta s_{i+1}}{\Delta s_i} \leq g$ s'exprime aussi sous la forme $\frac{1-g}{g} \leq \frac{dF(s)}{ds} \leq g-1$.

On calcule ensuite la fonction $G(s)$:

$$G(s) = \int_0^s \frac{du}{F(u)} \quad (\text{Ann5.1-2})$$

Le contour est divisé en un nombre suffisant de pas pour obtenir une intégrale précise. F est considérée linéaire par morceaux et est intégrée analytiquement :

$$F(s_i) = A s_i + B \quad (\text{Ann5.1-3})$$

$$G(s_i) = \frac{1}{A} \ln \frac{F(s_i)}{F(s_{i-1})} \quad (\text{Ann5.1-4})$$

F étant strictement positive, G est strictement croissante (figure Ann5.1-1).

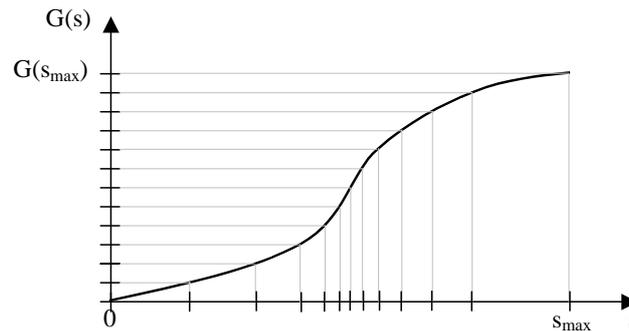


Figure Ann5.1-3.. Redistribution des marqueurs par la méthode du critère global.

Pour satisfaire intégralement les critères, on divise ensuite l'intervalle $[0, G(s_{\max})]$ en intervalles égaux de taille inférieure ou égale à l'unité et le maillage est calculé en prenant l'inverse de G par interpolation linéaire. Le nombre de nœuds du maillage est alors égal à $E[G(s_{\max})] + 2$. Les critères $\Delta s(s_i) \leq F(s_i)$ sont alors satisfaits, en effet :

$$G(s_{i+1}) - G(s_i) = \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{du}{F(u)} \approx \frac{s_{i+1} - s_i}{F(s_i)} = \frac{\Delta s_i}{F(s_i)} \leq 1 \quad (\text{Ann5.1-5})$$

Pour satisfaire au mieux les critères, dans le cas où le nombre de nœuds N est fixé arbitrairement, on divise l'intervalle $[0, G(s_{\max})]$ en $N-1$ intervalles égaux et le maillage est de nouveau calculé en inversant G .

1.4. Définition des conditions aux limites

Les conditions aux limites sont définies manuellement et en dur dans le programme principal et ceci le long de toutes les frontières. Ces conditions seront inchangées durant toute l'exécution du code.

On peut diviser les conditions aux limites envisagées par CANARD en trois catégories :

1. Les conditions de Dirichlet, c.-à-d., sur la l'inconnue φ ;

2. Les conditions de Neumann, c.-à-d., sur la dérivée normale à la frontière de l'inconnue $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}$;
3. Les conditions de continuité de φ ou de sa dérivée normale $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}$ le long d'une interface fluide-fluide.

1.5. Remplissage des matrices d'influence

Cette tâche demeure quasiment manuelle, elle se fait dans une procédure à laquelle le programme principal fait appel. Chaque physique lui est réservée une procédure de remplissage de matrice de coefficients qui lui est propre. Toutefois, le calcul des coefficients d'influence se fait de manière indifférente de la physique à traiter grâce à une pseudo-bibliothèque dans laquelle sont définies deux procédures, à savoir **potentiel** et **vitesse**. Ces procédures sont différentes selon que la géométrie soit plane ou de révolution. L'appel à ces procédures se fait comme suit :

potentiel(i, j, vecteur) et **vitesse(i, j, vecteur1, vecteur2)**

Ces deux procédures renvoient l'influence de l'élément j (le panneau compris entre le nœud j et le nœud j+1) sur le nœud i. Les coefficients d'influence sont stockés dans les tableaux **vecteur**, **vecteur1** et **vecteur2** (à quatre éléments chacun).

Elle sont définies d'après l'équation intégrale au laplacien qui est donnée par :

$$A(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \left(G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \varphi}{\partial n'}(\mathbf{x}') - \varphi(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right) dS(\mathbf{x}')$$

$$A(\mathbf{x})\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \left(\nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \varphi}{\partial n'}(\mathbf{x}') - \varphi(\mathbf{x}') \nabla \frac{\partial G}{\partial n'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right) dS(\mathbf{x}')$$

où n' est la normale à $\partial\Omega$ orientée extérieurement à Ω .

Les deux procédures correspondent chacune à :

$$\int_{e_{j,j+1}} G(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}') \frac{\partial \varphi}{\partial n'} dS' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right)_j \text{vecteur}(1) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right)_{j+1} \text{vecteur}(2)$$

$$\int_{e_{j,j+1}} \varphi \frac{\partial G}{\partial n'}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}') dS' = \varphi_j \text{vecteur}(3) + \varphi_{j+1} \text{vecteur}(4)$$

$$\int_{e_{j,j+1}} \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \varphi}{\partial n'} dS' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right)_j \begin{pmatrix} \text{vecteur1}(1) \\ \text{vecteur2}(1) \end{pmatrix} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right)_{j+1} \begin{pmatrix} \text{vecteur1}(2) \\ \text{vecteur2}(2) \end{pmatrix}$$

et

$$\int_{e_{j,j+1}} \nabla \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \varphi dS' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)_j \begin{pmatrix} \text{vecteur1}(3) \\ \text{vecteur2}(3) \end{pmatrix} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)_{j+1} \begin{pmatrix} \text{vecteur1}(4) \\ \text{vecteur2}(4) \end{pmatrix}$$

1.6. Noyau de la résolution

Une fois la matrice d'influence remplie, l'inversion de la matrice du système discret s'effectue par appel à la procédure **sgefa** de la bibliothèque **linalg**. La solution est obtenue ensuite par appel à **sgesl** de la même bibliothèque.

1.7. Evolution temporelle

L'intégration temporelle se fait par mise à jour de l'interface, dont la vitesse normale a été entièrement déterminée par le processus précédent et du paramètre φ dans la partie Dirichlet de la frontière du domaine. Cette intégration s'effectue par la technique Runge–Kutta d'ordre quatre pour les équations différentielles ordinaires.

1.8. Critère de stabilité

Il est clair qu'une technique d'intégration aussi standard que la méthode de Runge–Kutta ne pose aucune difficulté d'implémentation dans le code CANARD si ce n'est le choix du pas temporel à adopter à chaque instant de calcul. La stabilité et la précision de la résolution de l'équation de Bernoulli est étudiée en un nœud du maillage, après transformation de l'interface, considérée localement comme plane et horizontale, [45]. On introduit une petite perturbation sinusoidale dans l'équation de Bernoulli, ce qui conduit à une équation différentielle du deuxième ordre de type masse-ressort-amortissement. Cette équation différentielle du deuxième ordre est transformée en un système de deux équations différentielles du premier ordre, puis on introduit le schéma numérique de résolution d'une équation différentielle ordinaire. Les deux valeurs propres du système matriciel obtenu sont solution du polynôme caractéristique. Leur module doit être plus petit que l'unité pour que le système soit stable (selon l'analyse de stabilité de Von Neumann). Les polynômes caractéristiques correspondant à plusieurs schémas numériques de Runge–Kutta ont été établis.

Un calcul, effectué sous Maple, permet ensuite d'aboutir, pour chacun de ces schémas numériques, à l'expression formelle de la plus grande valeur propre, fonction du pas de temps et d'un paramètre λ qui intègre la physique et la discrétisation spatiale. Le pas de temps critique t_c est tel que la plus grande valeur propre λ a un module inférieur à l'unité. Du fait de l'allure de la fonction $t_c(\lambda)$ dans le cas RK4 explicite qui nous intéresse [45], le calcul de t_c est divisé en deux parties. Si $\lambda < 1$, $t_c = 2.6$, sinon, un calcul dichotomique est

entrepris.

La définition de ce critère de stabilité faisant appel à plusieurs approximations (linéarisation par exemple), on prend un garde fou supplémentaire en choisissant un pas de temps plus petit, souvent d'un facteur moitié, voire plus, que le pas de temps critique.

Le pas de temps choisi pour l'évolution temporelle satisfait aux critères suivants :

1. le critère de stabilité de la méthode RK4 explicite décrit ci-dessus. Il est calculé une seule fois sur le contour pour l'élément de frontière le plus petit ;
2. un critère de non croisement des mailles de l'interface. Le pas de temps correspondant à ce critère est calculé en chaque marqueur par la formule suivante : $\Delta t = \min(\Delta s_i, \Delta s_{i+1}) / 2 \|\mathbf{u}_i\|$ où Δs_i et Δs_{i+1} sont les longueurs des éléments de frontière attachés au point et $\|\mathbf{u}_i\|$ le module de la vitesse au pas de temps précédent en ce point. Le problème s'illustre comme suit

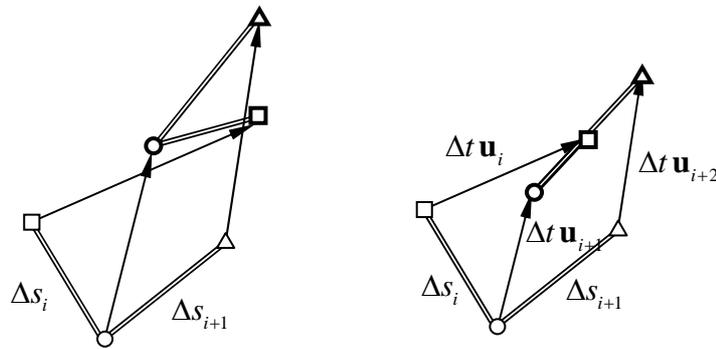


Figure Ann5.1-4. Critère de non croisement des éléments successifs d'un pas à l'autre. A gauche, un croisement non autorisé. A droite, limite supérieure du pas temporel avant intersection des éléments ; le produit scalaire de Δs_i par Δs_{i+1} doit être au plus égal au produit de leurs normes.

Notons au passage qu'aucun facteur d'amortissement numérique n'est introduit et ce afin de ne pas pénaliser la précision du schéma d'intégration en temps initial. Ceci confère au code une description physique très réaliste mais sanctionne lourdement sa sensibilité aux conditions initiales. Ceci est d'autant plus vrai que la MIF (quelque soit la méthode d'intégration temporelle utilisée) est une méthode très sensible aux variations locales. En effet, à cause de l'ellipticité des équations auxquelles s'applique la MIF, une variation dans le comportement de la solution en une région se répercute sur la solution dans tout le domaine de calcul au même instant.

2. CANARD électrique

Les premières modifications concernent la définition de la géométrie et des conditions aux limites qui sont associées au problème électrique. Entre autres, c'est la continuité du

potentiel électrique et la discontinuité de la composante normale du champ électrique qui sont imposées aux interfaces alors qu'en hydrodynamique c'est la discontinuité du potentiel hydrodynamique et la continuité de la composante normale de la vitesse qui sont imposées sur ces interfaces. Bien que présentant un certain degré de similitude, il s'agit bien de résoudre deux problèmes distincts : le problème électrique et le problème hydrodynamique. Par ailleurs, il n'existe pas d'équivalent en hydrodynamique à la loi de Gauss aux interfaces (les interfaces sont supposées imperméables alors que des charges électriques peuvent s'accumuler à leur niveau).

Hors les modifications inhérentes aux types de conditions aux limites, et donc des équations intégrales à résoudre, qu'il est nécessaire d'apporter au code CANARD dans les parties du code principal, nous avons ajouté plusieurs modules de calcul et des bibliothèques pour pouvoir traiter le problème électrocinétique par les nombres complexes. Nous commençons par donner un aperçu de ces bibliothèques.

2.1. Les bibliothèques de CANARD-EHD

Les bibliothèques que nous avons ajoutées sont les suivantes :

1. La bibliothèque **cmplx_splines** ;
2. La bibliothèque **cmplx_linalg**.

Ces bibliothèques sont analogues aux bibliothèques splines et linalg, respectivement, sauf qu'elles opèrent sur des fonctions et des matrices à valeurs complexes. Dans ce qui suit, nous présentons chacune d'elles.

2.1.1. La bibliothèque cmplx_splines

Cette bibliothèque regroupe trois procédures impliquant des splines cubiques de fonctions complexes à variable réelle :

- **cmplx_cub_spl** : calcule les coefficients des splines cubiques à passer, soit en mode interpolation soit en mode approximation (respectivement, sans ou avec lissage) ;
- **cmplx_int_spl** : une fois l'interpolation effectuée, permet d'interpoler les valeurs de la fonction, de sa dérivée première ou seconde ;
- **cmplx_som_spl** : calcule une intégrale de la fonction sur un intervalle déterminé, le calcul des coefficients d'interpolation ayant été effectué au préalable.

Cette bibliothèque permet de faire les calculs en simple ou en double précision.

2.1.2. La bibliothèque cmplx_linalg

Cette bibliothèque regroupe deux procédures nécessaires à la résolution d'un système d'équations à coefficients complexes :

- **cmplx_sgefa** : il s'agit d'une décomposition (LU) effectuée sur une matrice carré A à valeurs complexes ;
- **cmplx_sgeco** : une procédure identique que cmplx_sgefa, mais fournit en plus une estimation du conditionnement de la matrice introduite ;
- **cmplx_sgesl** : résout un système linéaire complexe du type : $A \cdot x = b$, la matrice A ayant été factorisée (LU).

Cette bibliothèque permet de faire les calculs en simple précision.

2.2. Calcul de la force DEP par l'approximation ponctuelle

Le calcul de la force DEP nécessite de connaître le gradient du champ électrique E. Pour cela, nous prenons le double gradient de l'équation intégrale du potentiel

$$A(\mathbf{x}) \nabla(\nabla \varphi)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \left(\nabla(\nabla G)(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \varphi}{\partial n'}(\mathbf{x}') - \varphi(\mathbf{x}') \nabla \left(\nabla \frac{\partial G}{\partial n'} \right)(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right) dS(\mathbf{x}')$$

Le calcul des coefficients d'influence se fait à travers la pseudo-bibliothèque dans laquelle est définie une procédure, à savoir **grad_vitesse**. L'appel à cette procédure se fait comme suit :

grad_vitesse(r,z, j, tenseur)

Cette procédure renvoie l'influence de l'élément j (le panneau compris entre le nœud j et le nœud j+1) sur le nœud de coordonnées (r, z). Les coefficients d'influence sont stockés dans le tableau (à trois dimensions) **tenseur** (4×2×2).

Ces coefficients correspondent à :

$$\int_{e_{j,j+1}} \nabla(\nabla G)(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \varphi}{\partial n'} dS' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right)_j \begin{pmatrix} \text{tenseur}(1,1,1) & \text{tenseur}(1,2,1) \\ \text{tenseur}(1,2,1) & \text{tenseur}(1,2,2) \end{pmatrix} \\ + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right)_{j+1} \begin{pmatrix} \text{tenseur}(2,1,1) & \text{tenseur}(2,2,1) \\ \text{tenseur}(2,2,1) & \text{tenseur}(2,2,2) \end{pmatrix}$$

et

$$\int_{e_{j,j+1}} \nabla \left(\nabla \frac{\partial G}{\partial n'} \right)(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varphi dS' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)_j \begin{pmatrix} \text{tenseur}(3,1,1) & \text{tenseur}(3,1,2) \\ \text{tenseur}(3,2,1) & \text{tenseur}(3,2,2) \end{pmatrix} \\ + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)_{j+1} \begin{pmatrix} \text{tenseur}(4,1,1) & \text{tenseur}(4,1,2) \\ \text{tenseur}(4,2,1) & \text{tenseur}(4,2,2) \end{pmatrix}$$

2.3. Fonctions mathématiques de bases

Dans cette bibliothèque sont définies quelques fonctions mathématiques de base :

1. asinh ;

2. acosh ;
3. tanh ;
4. cotanh ;
5. atanh ;
6. acotanh ;
7. delta ;
8. LegendreP.

La fonction delta est égale à l'unité si l'argument est nul et est nulle autrement. La fonction LegendreP est le polynôme de Legendre de première espèce. Deux paramètres sont introduits ; le premier est l'ordre de la fonction de Legendre et le second l'argument sur lequel cette fonction s'applique.

2.4. Calcul de la force électrique totale

Lorsque le champ électrique est connu, on peut déduire la force électrique totale qui s'applique sur une particule. Pour ce faire, nous avons défini la procédure **Maxwell_process** qui stocke la valeur de la force dans le tableau à deux valeurs **force_Maxwell**. A cause de la configuration 2D-axisymétrique, la force électrique est nécessairement axiale. La composante **force_Maxwell(1)** est la partie réelle de la force électrique alors que la composante **force_Maxwell(2)** est la partie imaginaire de cette force.

3. CANARD électrohydrodynamique

Dans cette partie sont présentés les différents outils que nous avons définis lorsque le couplage électrohydrodynamique est considéré.

3.1. Critère de redistribution du maillage

Aux différents critères géométriques et hydrodynamiques de remaillage, s'ajoute un critère de remaillage électrique. Dans une première version du code, nous avons choisi de remailler en respectant une variation lisse du potentiel, mais il nous a paru plus approprié d'observer les variations de la composante normale du champ électrique aux interfaces au lieu du potentiel électrique. Ainsi, le critère supplémentaire à respecter pour la redistribution du maillage est :

$$f_s = A / \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)''} (s)$$

3.2. Calcul de la vitesse du centre de gravité de la particule

Afin d'introduire la force de traînée dans l'équation de quantité de mouvement, la vitesse de la particule doit être calculée à chaque instant. Pour cela, nous avons défini la procédure **mass_center_velocity(ideb, ifin, U_mc)** qui nécessite de connaître au préalable la vitesse en chaque point de l'interface. **ideb** est l'indice du premier nœud du tronçon qui représente l'interface particule/milieu extérieur, **ifin** l'indice du dernier nœud de ce tronçon. **mass_center_velocity** renvoie la valeur de la vitesse du centre de masse de la particule par l'intermédiaire de la variable **U_mc**.

3.3. Couplage électrohydrodynamique

Le couplage EHD s'effectue au niveau de l'équation de transport du potentiel hydrodynamique généralisé (3.135). L'intégration par le schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre implique donc que soit donné le champ électrique, de part et d'autre de l'interface, à chaque pas et « fraction » de pas de calcul. De même, l'intégration de l'équation de transport des charges électriques à l'interface s'effectue par un schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre. Un problème se pose toutefois si le temps caractéristique de déformation de l'interface est nettement supérieur au temps de relaxation électrique de l'interface. Ceci se produit lorsqu'un des milieux est suffisamment conducteur. Dans ce cas, il est inutile de prendre l'équation d'évolution des charges électriques à l'interface, puisque au cours du chargement l'interface ne bouge pas. Il est donc plus approprié de prendre comme condition à l'interface non plus l'évolution de la charge mais l'équilibre de la densité du courant normale qui n'est que la limite asymptotique de l'équation de transport des charges électriques. Cette formation est donc plus simple puisque, d'un point de vue électrique, il n'y a pas d'influence explicite du temps.

3.4. La transformée de Fourier rapide

Pour calculer les fréquences (et les modes) d'oscillation d'une particule, nous utilisons la transformée de Fourier rapide appliquée à l'évolution du rapport des axes de la particule en fonction du temps. Ceci est réalisé par la fonction **CFFTF(n, c, wsave)**. Pour cela, il faut initialiser le tableau **wsave** par **CFFTI(n, wsave)** à chaque fois qu'on utilise **CFFTF** avec une nouvelle valeur de **n**. **wsave** est un tableau à $4n+15$ composantes réelles. **c** est un tableau à **n** composantes qui contient les valeurs de l'échantillon à transformer. Après appel de **CFFTF**, **c** contient les coefficients de la transformée de Fourier.

Annexe 5.2

Application de la méthode des perturbations pour une goutte sous champ électrique uniforme

1. Cadre de travail et hypothèses générales

On se place dans le cas de la déformation d'une goutte de fluide diélectrique avec faiblement conducteur plongée dans un liquide diélectrique avec pertes. La goutte est non chargée. Le système composé de fluides non miscibles est soumis à un champ électrique uniforme. L'écoulement permanent à faible vitesse s'évanouit loin de la goutte. Bien que non linéaires, les déformations de la goutte, considérées par rapport à la forme sphérique, sont suffisamment faibles pour que l'hypothèse des petites perturbations soit valable. L'hypothèse d'écoulement à faible vitesse a deux conséquences. (i) d'une part, le courant électrique dû à l'effet de conduction électrique sera largement prépondérant devant l'effet du transport des porteurs de charges par advection. Le problème électrique sera donc traité dans le cadre électrostatique. Ce fait permet de découpler le problème électrique du problème hydrodynamique. D'ailleurs, la logique de résolution du problème électrique puis l'injection des contraintes électriques dans le problème hydrodynamique sera respectée le long de cette partie. (ii) d'autre part, le problème hydrodynamique sera traité dans le cadre des écoulements rampants, dont les solutions générales, pour une configuration à symétrie de révolution, sont connues.

2. Configuration d'étude

La configuration illustrée par la figure Ann5-2.1 représente une goutte immergée dans un fluide. Le rayon initial de la goutte est noté r_0 . Les deux fluides sont newtoniens. L'on note le fluide intérieur $\Omega^{(i)}$ et le fluide extérieur $\Omega^{(e)}$. Les grandeurs physiques dont l'exposant est (i) (respectivement (e)) sont associées au fluide $\Omega^{(i)}$ (respectivement $\Omega^{(e)}$). Les deux fluides sont séparés par une interface S .

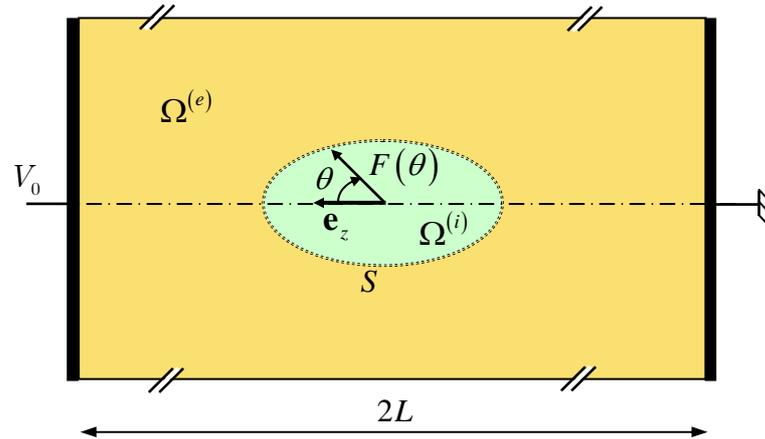


Figure Ann5-2.1. Goutte soumise à un champ électrique. De rayon initial r_0 , tel que $r_0 \ll L$, la goutte se déforme.

A cause de la symétrie de révolution de la configuration choisie, l'interface S est définie, pour une faible distorsion relativement à la forme sphérique initiale, par la relation suivante :

$$r = F(\theta) \quad (\text{Ann5.2-1})$$

3. Equations générales

3.1. Equations électriques

Les équations qui régissent la distribution du champ électrique $\mathbf{E}^{(k)}$ ($k = i, e$) sont données dans ce qui suit.

Si le champ électrique $\mathbf{E}^{(k)}$ est supposé découplé du champ magnétique, il dérive d'un potentiel $V^{(k)}$ tel que :

$$\mathbf{E}^{(k)} = -\nabla V^{(k)} \quad (\text{Ann5.2-2})$$

En l'absence de charges spatiales libres, la deuxième équation de Maxwell, exprimant la conservation du courant électrique, s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{j}^{(k)} = 0 \quad (\text{Ann5.2-3})$$

où $\mathbf{j}^{(k)}$ est la densité de courant donnée, dans le cas où le fluide k est un diélectrique isotrope et linéaire de conductivité $\sigma^{(k)}$, par la relation constitutive suivante :

$$\mathbf{j}^{(k)} = \sigma^{(k)} \mathbf{E}^{(k)} \quad (\text{Ann5.2-4})$$

La combinaison de (Ann5.2-2), (Ann5.2-3) et de (Ann5.2-4) implique l'équation de Laplace pour le potentiel électrique du fluide k :

$$\nabla^2 V^{(k)} = 0 \quad (\text{Ann5.2-5})$$

3.2. Conditions aux limites sur le champ électrique

Les conditions suivantes sont assignées aux potentiels électriques :

- Loin de la goutte, l'influence de la perturbation électrique due à la goutte est nulle, soit :

$$\mathbf{E}^{(e)} \rightarrow \mathbf{E}_0 \quad \text{quand} \quad \|\mathbf{r}\| \rightarrow +\infty \quad (\text{Ann5.2-6})$$

- Champ électrique fini au centre la goutte :

$$\mathbf{E}^{(i)} \text{ fini quand } \|\mathbf{r}\| \rightarrow 0 \quad (\text{Ann5.2-7})$$

- Continuité du potentiel électrique à travers l'interface S :

$$V^{(i)} \Big|_S = V^{(e)} \Big|_S \quad (\text{Ann5.2-8})$$

- Le saut du vecteur déplacement électrique à travers l'interface S (ou la loi de Gauss intégrale) s'écrit sous la forme intégrale locale :

$$\varepsilon^{(i)} \frac{\partial V^{(i)}}{\partial n} \Big|_S - \varepsilon^{(e)} \frac{\partial V^{(e)}}{\partial n} \Big|_S = q_S \quad (\text{Ann5.2-9})$$

avec $\varepsilon^{(i)}$ (resp. $\varepsilon^{(e)}$) la permittivité électrique du fluide $\Omega^{(i)}$ (resp. $\Omega^{(e)}$) et q_S la densité surfacique des charges électriques libres à l'interface S .

- Conservation de la densité de courant à travers l'interface :

$$\sigma^{(i)} \frac{\partial V^{(i)}}{\partial n} \Big|_S - \sigma^{(e)} \frac{\partial V^{(e)}}{\partial n} \Big|_S = 0 \quad (\text{Ann5.2-10})$$

- Le potentiel électrique, étant défini à une constante additive près, est pris égal à 0 à l'électrode mise à la masse, ce qui implique :

$$V^{(e)} = 0 \quad \text{pour} \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_z = -L/2 \quad (\text{Ann5.2-11})$$

Le respect de la neutralité électrique de la goutte implique la condition globale suivante :

$$\int_S q_S dS = 0 \quad (\text{Ann5.2-12})$$

3.3. Equations hydrodynamiques

Les équations auxquelles obéit l'écoulement incompressible rampant dans chaque fluide k sont l'équation de continuité et les équations de Stokes qui s'écrivent comme :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(k)} = 0 \quad (\text{Ann5.2-13})$$

$$\nabla p^{(k)} = \frac{1}{Re^{(k)}} \nabla^2 \mathbf{u}^{(k)} \quad (\text{Ann5.2-14})$$

3.4. Conditions aux limites sur le champ hydrodynamique

Les conditions aux limites que doivent vérifier le fluide extérieur (e) et intérieur (i) sont :

- Annulation de la vitesse loin de la goutte, soit :

$$\mathbf{u}^{(e)} \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{quand} \quad \|\mathbf{r}\| \rightarrow +\infty \quad (\text{Ann5.2-15})$$

- Continuité de la vitesse tangentielle à l'interface S :

$$u_{\tau}^{(e)} \Big|_S = u_{\tau}^{(i)} \Big|_S \quad (\text{Ann5.2-16})$$

- Interface en état d'équilibre (elle ne bouge pas). Ceci implique la nullité des vitesses normales à l'interface :

$$u_n^{(e)} \Big|_S = 0 \quad (\text{Ann5.2-17})$$

$$u_n^{(i)} \Big|_S = 0 \quad (\text{Ann5.2-18})$$

- Pas de translation possible de la goutte :

$$\mathbf{u}^{(i)} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} = \mathbf{0} \quad (\text{Ann5.2-19})$$

- Equilibre des contraintes EHD à l'interface S :

$$\llbracket \mathbf{n} \cdot \Pi \rrbracket + 2H\gamma \mathbf{n} = -\llbracket \mathbf{n} \cdot \mathbb{T}^{\text{électrique}} \rrbracket \quad (\text{Ann5.2-20})$$

L'équation adimensionnelle déduite de (Ann5.2-20) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} & \lambda \left\{ -p^{(i)} + \frac{1}{\text{Re}^{(i)}} \left[\nabla \mathbf{u}^{(i)} + (\nabla \mathbf{u}^{(i)})^{\dagger} \right] \right\} \cdot \mathbf{n} - \left\{ -p^{(e)} + \frac{1}{\text{Re}^{(e)}} \left[\nabla \mathbf{u}^{(e)} + (\nabla \mathbf{u}^{(e)})^{\dagger} \right] \right\} \cdot \mathbf{n} \\ & + M\alpha \left\{ \mathbf{E}^{(i)} \mathbf{E}^{(i)} - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^{(i)} \cdot \mathbf{E}^{(i)}) \mathbb{I} \right\} \cdot \mathbf{n} - \alpha \left\{ \mathbf{E}^{(e)} \mathbf{E}^{(e)} - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^{(e)} \cdot \mathbf{E}^{(e)}) \mathbb{I} \right\} \cdot \mathbf{n} \\ & + M\alpha \left\{ \mathbf{E}^{(i)} \mathbf{E}^{(i)} - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^{(i)} \cdot \mathbf{E}^{(i)}) \mathbb{I} \right\} \cdot \mathbf{n} - \alpha \left\{ \mathbf{E}^{(e)} \mathbf{E}^{(e)} - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^{(e)} \cdot \mathbf{E}^{(e)}) \mathbb{I} \right\} \cdot \mathbf{n} = (2h Ca) \mathbf{n} \quad (\text{Ann5.2-21}) \end{aligned}$$

où $\lambda = \frac{\rho^{(i)}}{\rho^{(e)}}$, $M = \frac{\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(e)}}$, $\alpha = \frac{\varepsilon^{(e)} V^2}{\rho^{(e)} r_0^2 U^2}$, et $Ca = \frac{\gamma}{\rho^{(e)} U^2 r_0}$. U est une échelle de vitesse à déterminer. h est la courbure adimensionnée par $1/r_0$.

- Conservation du volume de la goutte (équation de continuité (Ann5.2-1) écrite sous forme intégrale) :

$$\int_v F^3(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \quad (\text{Ann5.2-22})$$

4. Solutions analytiques générales pour la configuration 2D-axisymétrique

Toutes les équations présentées dans la sous-section précédente sont reprises dans le cas particulier d'une symétrie de révolution. Les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) sont utilisées pour cette fin. A cause de la symétrie de révolution, aucune dépendance du

méridien ϕ n'est retenue.

4.1. Solution analytique générale associée au champ électrique

En configuration axisymétrique, la solution générale de l'équation (Ann5.2-5) s'écrit :

$$V^{(k)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(G_n^{(k)} r^n + \frac{H_n^{(k)}}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) \quad (\text{Ann5.2-23})$$

Les coefficients $G_n^{(k)}$ et $H_n^{(k)}$ sont déterminés par application des conditions (Ann5.2-6) à (Ann5.2-12) et P_n est le polynôme de Legendre d'ordre n .

Les conditions (Ann5.2-6) et (Ann5.2-7) impliquent donc les formes des potentiels électriques suivantes:

$$V^{(e)} = G_0^{(e)} P_0(\cos \theta) + G_1^{(e)} r P_1(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n^{(e)}}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (\text{Ann5.2-24})$$

$$V^{(i)} = \sum_{n=1}^{+\infty} G_n^{(i)} r^n P_n(\cos \theta) \quad (\text{Ann5.2-25})$$

En notant au passage que :

$$G_1^{(e)} = -E_0 \quad (\text{Ann5.2-26})$$

Par dérivation du potentiel électrique, l'expression du champ électrique est déduite :

$$E_r^{(e)} = -G_1^{(e)} P_1(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1) H_n^{(e)}}{r^{n+2}} P_n(\cos \theta) \quad (\text{Ann5.2-27})$$

$$E_\theta^{(e)} = G_1^{(e)} \sin \theta + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n H_n^{(e)}}{r^{n+2}} \frac{P_{n-1}(\cos \theta) - \cos \theta P_n(\cos \theta)}{\sin \theta} \quad (\text{Ann5.2-28})$$

$$E_r^{(i)} = -\sum_{n=0}^{+\infty} G_n^{(i)} n r^{n-1} P_n(\cos \theta) \quad (\text{Ann5.2-29})$$

$$E_\theta^{(i)} = \sum_{n=1}^{+\infty} G_n^{(i)} n r^{n-1} \frac{P_{n-1}(\cos \theta) - \cos \theta P_n(\cos \theta)}{\sin \theta} \quad (\text{Ann5.2-30})$$

4.2. Solution analytique générale associée au champ hydrodynamique

Dans une configuration à symétrie de révolution, la définition d'une combinaison d'un potentiel hydrodynamique permet de simplifier le problème hydrodynamique à résoudre [126]. Ce potentiel est défini par :

$$\mathbf{u}^{(k)} = \nabla \times \left(\psi^{(k)} (\nabla \phi) \right) \quad (\text{Ann5.2-31})$$

Nous nous assurons, par cette définition, de satisfaire à l'équation locale de continuité (Ann5.2-13). Ce potentiel étant défini à une fonction harmonique près, on lui impose de

satisfaire de plus à la relation suivante :

$$\nabla \cdot (\psi^{(k)} (\nabla \phi)) = 0 \quad (\text{Ann5.2-32})$$

Or, le gradient de ϕ est donné par :

$$\nabla \phi = \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{i}_\phi \quad (\text{Ann5.2-33})$$

Ce qui implique :

$$\psi = \psi(r, \theta) \quad (\text{Ann5.2-34})$$

et que :

$$\mathbf{u}^{(k)} = \nabla \times \left(\frac{\psi^{(k)}}{r \sin \theta} \mathbf{i}_\phi \right) \quad (\text{Ann5.2-35})$$

Par développement, on trouve que les composantes de la vitesse s'écrivent :

$$\begin{cases} u_r^{(k)} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \theta} \\ u_\theta^{(k)} = \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial r} \end{cases} \quad (\text{Ann5.2-36})$$

En remplaçant la vitesse par son expression (Ann5.2-36) dans l'équation de Stokes (Ann5.2-14), nous obtenons :

$$\nabla p^{(k)} = \frac{1}{Re^{(k)}} \nabla^2 \left(\nabla \times \left(\frac{\psi^{(k)}}{r \sin \theta} \mathbf{i}_\phi \right) \right) \quad (\text{Ann5.2-37})$$

Le rotationnel de l'équation (Ann5.2-37) permet d'obtenir l'équation vectorielle suivante :

$$\nabla^2 \left(\nabla^2 \left(\frac{\psi^{(k)}}{r \sin \theta} \mathbf{i}_\phi \right) \right) = \mathbf{0} \quad (\text{Ann5.2-38})$$

Cette équation est équivalente au système scalaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{r \sin \theta} D^2 (\psi^{(k)}) = -\omega^{(k)} \\ \frac{1}{r \sin \theta} D^2 (r \sin \theta \omega^{(k)}) = 0 \end{cases} \quad (\text{Ann5.2-39})$$

où

$$D^2 = r \sin \theta \left(\nabla^2 \left(\frac{\quad}{r \sin \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\quad}{r \sin \theta} \right)$$

et $\omega^{(k)}$ la composante méridional de la vorticité, soit :

$$\omega^{(k)} \mathbf{i}_\phi = \nabla \times \mathbf{u}^{(k)} \quad (\text{Ann5.2-40})$$

On démontre, [120], que la solution générale du système d'équations (Ann5.2-39)

s'écrit sous la forme (en omettant l'exposant k pour une meilleure lisibilité) :

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (A_n r^{n+3} + B_n r^{n+1} + C_n r^{2-n} + D_n r^{-n}) \left(\frac{P_{n+1}(\cos \theta) - P_{n-1}(\cos \theta)}{2n+1} \right) \quad (\text{Ann5.2-41})$$

et

$$\omega(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((4n+6)A_n r^{n+1} + (-4n+2)C_n r^{-n}) \left(\frac{P_{n+1}(\cos \theta) - P_{n-1}(\cos \theta)}{2n+1} \right) \quad (\text{Ann5.2-42})$$

P_n est le polynôme de Legendre d'ordre n . Symboliquement, nous avons noté $P_{-1}(\cos \theta) = 1$.

Le champ de pression se déduit immédiatement par l'expression :

$$p(r, \theta) = \frac{1}{Re} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{n(n+1)(2n+1)r^{n+1} \sin \theta} \left((4n+6)(n+1)A_n r^{2n+1} - n(-4n+2)C_n \right) \times \\ \left[-(n-1)P_{n-2}(\cos \theta) + (n-1)\cos \theta P_{n-1}(\cos \theta) + \right. \\ \left. + (n+1)(P_n(\cos \theta) - \cos \theta P_{n+1}(\cos \theta)) \right] \quad (\text{Ann5.2-43})$$

Pour interdire la possibilité d'obtenir une pression infinie au sein de l'écoulement, nous sommes tenu de prendre :

$$A_0^{(i)} = A_0^{(e)} = 0 \quad (\text{Ann5.2-44})$$

En substituant ψ par son expression (Ann5.2-41) dans les relations (Ann5.2-36), l'on obtient les expressions des composantes radiale et azimutale de la vitesse :

$$u_r = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{2n+1} \frac{r^{-n-2}}{\sin^2 \theta} \left[-(n-1)P_{n-2}(\cos \theta) + (n-1)\cos \theta P_{n-1}(\cos \theta) \right. \\ \left. + (n+1)(P_n(\cos \theta) - \cos \theta P_{n+1}(\cos \theta)) \right] \times \\ \times (A_n r^{2n+3} + B_n r^{2n+1} + C_n r^2 + D_n) \quad (\text{Ann5.2-45})$$

et :

$$u_\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{2n+1} \frac{r^{-n-1}}{\sin \theta} \left[P_{n+1}(\cos \theta) - P_{n-1}(\cos \theta) \right] \times \\ \times \left[(n+1)B_n r^{2n} + (n+3)A_n r^{2(n+1)} - (n-2)C_n r - \frac{nD_n}{r} \right] \quad (\text{Ann5.2-46})$$

La prise en compte des conditions (Ann5.2-15) et (Ann5.2-19) implique les formes suivantes du champ de vitesse :

$$u_r^{(e)} = -\frac{B_0^{(e)}}{r} - \frac{D_0^{(e)}}{r^2} - \frac{C_1^{(e)}}{r} \cos \theta - \frac{D_1^{(e)}}{r^3} \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{2n+1} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{C_n^{(e)}}{r^n} + \frac{D_n^{(e)}}{r^{n+2}} \right) \times \left[-(n-1) P_{n-2}(\cos \theta) \right. \\
 & \left. + (n-1) \cos \theta P_{n-1}(\cos \theta) + (n+1) (P_n(\cos \theta) - \cos \theta P_{n+1}(\cos \theta)) \right] \quad (\text{Ann5.2-47})
 \end{aligned}$$

$$u_{\theta}^{(e)} = \frac{B_0^{(e)}}{r} \tan \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1) \sin \theta} \left[P_{n+1}(\cos \theta) - P_{n-1}(\cos \theta) \right] \left(\frac{(n-2) C_n^{(e)}}{r^n} + \frac{n D_n^{(e)}}{r^{n+2}} \right) \quad (\text{Ann5.2-48})$$

$$\begin{aligned}
 u_r^{(i)} = & -A_0^{(i)} r - A_1^{(i)} r^2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{2n+1} \left(A_n^{(i)} r^{n+1} + B_n^{(i)} r^{n-1} \right) \times \\
 & \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[-(n-1) P_{n-2}(\cos \theta) + (n-1) \cos \theta P_{n-1}(\cos \theta) \right. \\
 & \left. + (n+1) (P_n(\cos \theta) - \cos \theta P_{n+1}(\cos \theta)) \right] \quad (\text{Ann5.2-49})
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 u_{\theta}^{(i)} = & 3A_0^{(i)} r \tan \frac{\theta}{2} + 2A_1^{(i)} \sin \theta r^2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{(2n+1) \sin \theta} \left[(n+3) A_n^{(i)} r^{n+1} + (n+1) B_n^{(i)} r^{n-1} \right] \times \\
 & \times (P_{n+1}(\cos \theta) - P_{n-1}(\cos \theta)) \quad (\text{Ann5.2-50})
 \end{aligned}$$

5. La méthode de perturbation du domaine

La méthode de perturbation du domaine a été initialement présentée par Joseph (1973) [142]. Elle a été utilisée pour la résolution d'un problème de déformation d'une goutte d'eau en écoulement irrotationnel. Cette méthode est cependant très générale. Elle se base sur des approximations (corrections) successives de la solution du problème donné partant d'un problème « proche » dont la solution est connue. En clair, on démarre, pour notre problème, de la configuration représentée par la figure Ann5.2-2, où la différence de potentiel est nulle et aucun écoulement ne se produit.

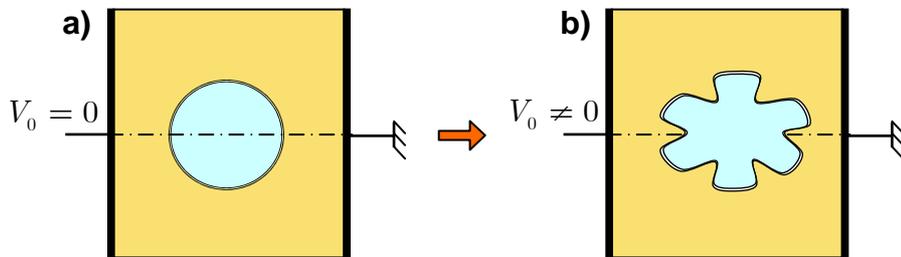


Figure Ann5.2-2. Principe de la méthode de perturbation du champ électrohydrodynamique. a) champ au repos (solution triviale du problème). b) perturbation du champ par application d'une différence de potentiel.

Ce champ EHD implique une forme sphérique de la goutte. L'on procède ensuite à une déformation imposée de cette goutte (qui physiquement est l'effet) et l'on va trouver la distribution du champ EHD qui a provoqué (a été la cause de) cette déformation. Ceci suppose implicitement, l'unicité de ce champ à déformation arrêtée.

5.1. La formulation

5.1.1. Développement en séries de puissances

Les six quantités qui vont être perturbées sont les suivantes : le champ hydrodynamique et électrique de chaque fluide, la forme de la goutte et le champ électrique imposé au loin. Ces perturbations s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \psi^{(e)} \\ \psi^{(i)} \\ V^{(e)} \\ V^{(i)} \\ F \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \begin{pmatrix} \psi^{(e)[k]} \\ \psi^{(i)[k]} \\ V^{(e)[k]} \\ V^{(i)[k]} \\ F^{[k]} \end{pmatrix} \quad (\text{Ann5.2-51})$$

ε est la grandeur qui caractérise l'amplitude de la perturbation, elle sera définie plus loin. L'exposant $[k]$ indique l'ordre auquel la perturbation est évaluée. Pour plus de commodité,

l'on définit aussi la perturbation d'une quantité subordonnée, à savoir $q_{\text{libre}}^{(s)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} q_{\text{libre}}^{(s)[k]}$. Le

travail qui « reste » à accomplir est de corréler les perturbations les unes aux autres (et notamment le champ appliqué E_0 à la forme de la goutte $F^{[k]}$). La récursivité exige la résolution du problème à l'ordre 1 (rappelons que l'ordre 0 est la solution triviale nulle, puisque, par définition, une perturbation nulle lui est associée) avant de pouvoir entamer le problème d'ordre 2, puis les problèmes d'ordres supérieurs, les uns suite aux autres.

D'autre part, remarquons que les solutions électriques et hydrodynamiques s'écrivent comme des combinaisons linéaires de polynômes de Legendre de première espèce uniquement. Aussi, pour homogénéiser le traitement général du problème, l'on recherchera la fonction d'aspect $F^{[k]}$ à l'ordre k sous la forme :

$$F^{[k]}(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} J_n^{[k]} P_n(\cos \theta) \quad (\text{Ann5.2-52})$$

où $J_n^{[k]}$, $n \in \mathbb{N}$, sont des constantes à déterminer.

Finalement, si l'on introduit les expressions des potentiels électriques et hydrodynamiques (Ann5.2-23) et (Ann5.2-41) dans la relation (Ann5.2-51), on trouve que :

$$\begin{pmatrix} A_n^{(f)} \\ B_n^{(f)} \\ C_n^{(f)} \\ D_n^{(f)} \\ G_n^{(f)} \\ H_n^{(f)} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \begin{pmatrix} A_n^{(f)[k]} \\ B_n^{(f)[k]} \\ C_n^{(f)[k]} \\ D_n^{(f)[k]} \\ G_n^{(f)[k]} \\ H_n^{(f)[k]} \end{pmatrix} \quad (\text{Ann5.2-53})$$

où $(f) = (i)$ ou (e) .

En conséquence, l'injection de la forme (Ann5.2-51) des solutions dans les conditions (Ann5.2-6), (Ann5.2-8) à (Ann5.2-12), (Ann5.2-16) à (Ann5.2-20) et (Ann5.2-22) puis l'arrangement de ces dernières en puissances de ε permet de générer les problèmes de perturbations sous-jacents à résoudre de manière récursive.

5.1.2. Forme choisie pour la perturbation

La forme que proposent Looss et Joseph, 1990 [13_bis] (voir aussi par similitude, Achard et Georgescu, 1999 [14_bis]), pour la définition du paramètre de perturbation ε est donnée par la projection orthogonale de la fonction d'aspect $F(\theta)$ sur le polynôme de Legendre d'ordre 2, soit :

$$\frac{2}{5} \varepsilon = \int_0^{\pi} F(\theta) P_2(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (\text{Ann5.2-54})$$

5.1.3. Quelques contraintes additionnelles

Précisons, avant de poursuivre, une notation dont nous aurons à utiliser fréquemment par la suite. Il s'agit du produit scalaire suivant :

$$\langle K(\theta), L(\theta) \rangle_{Wei} = \int_0^{\pi} K(\theta) L(\theta) Wei(\theta) \sin \theta d\theta \quad (\text{Ann5.2-55})$$

où les K et L sont des fonctions quelconques dont l'argument est l'azimut θ . La fonction Wei est la fonction de pondération associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Wei}$. Elle sera définie de manière à simplifier le calcul de cette projection, comme on le verra plus loin. Ce produit sera utilisé dans les projections opérées dans tout ce qui suit.

Par ailleurs, la fonction d'aspect est définie de manière implicite de manière à ce que les différentes conditions aux limites (sur le champ électrohydrodynamique) soient vérifiées. Cependant, à cause de la spécificité du problème à traiter, des considérations globales (telles la conservation du volume (Ann5.2-22) et la symétrie équatoriale du problème à traiter, ainsi que la définition même du paramètre de perturbation ε) doivent

être prises en compte aussitôt par la fonction d'aspect $F(\theta)$. Aussi, si l'on introduit l'expression (Ann5.2-52) dans cette définition, l'on obtient immédiatement le résultat suivant :

$$\begin{cases} J_2^{[k]} = 0, & \text{si } k \neq 1 \\ J_2^{[1]} = 1 \end{cases} \quad (\text{Ann5.2-56})$$

D'autre part, la condition de symétrie implique que :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad F(\theta) = F(\pi - \theta) \quad (\text{Ann5.2-57})$$

Ceci doit être satisfait à chaque ordre de ε , d'où l'égalité :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad \sum_{n=0}^{+\infty} J_n^{[k]} P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} J_n^{[k]} P_n(-\cos \theta)$$

Par projection de cette égalité sur la fonction $P_m(\cos \theta)$, avec la fonction poids $wei(\theta) = \sin \theta$, l'on obtient le résultat suivant :

$$J_m^{[k]} = (-1)^m J_m^{[k]}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{ etc.} \quad (\text{Ann5.2-58})$$

ce qui n'est manifestement vrai, si m est impair, que lorsque $J_m^{[k]} = 0$. Finalement, la fonction de forme s'écrit :

$$F^{[k]}(\theta) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{+\infty} J_{2n}^{[k]} P_{2n}(\cos \theta), \quad \text{si } k \neq 1 \quad (\text{Ann5.2-59})$$

et :

$$F^{[1]}(\theta) = P_2(\cos \theta) + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{+\infty} J_{2n}^{[1]} P_{2n}(\cos \theta) \quad (\text{Ann5.2-60})$$

5.2. Perturbation au premier ordre

5.2.1. Solution exacte au problème électrique

Sur l'interface, les relations (Ann5.2-9) et (Ann5.2-10) s'écrivent, respectivement, au premier ordre :

$$\varepsilon^{(i)} (\nabla V^{(i)[0]} \cdot \mathbf{n}^{[1]} + \nabla V^{(i)[1]} \cdot \mathbf{n}^{[0]}) - \varepsilon^{(e)} (\nabla V^{(e)[0]} \cdot \mathbf{n}^{[1]} + \nabla V^{(e)[1]} \cdot \mathbf{n}^{[0]}) = q_s^{[1]} \quad (\text{Ann5.2-61})$$

$$\sigma^{(i)} (\nabla V^{(i)[0]} \cdot \mathbf{n}^{[1]} + \nabla V^{(i)[1]} \cdot \mathbf{n}^{[0]}) - \sigma^{(e)} (\nabla V^{(e)[0]} \cdot \mathbf{n}^{[1]} + \nabla V^{(e)[1]} \cdot \mathbf{n}^{[0]}) = 0 \quad (\text{Ann5.2-62})$$

pour $\eta = 1$ et $0 \leq \theta \leq \pi$. Or les champs électriques à l'ordre 0 sont nuls, ce qui simplifie (Ann5.2-61) et (Ann5.2-62) en :

$$\varepsilon^{(i)} \nabla V^{(i)[1]} \cdot \mathbf{n}^{[0]} - \varepsilon^{(e)} \nabla V^{(e)[1]} \cdot \mathbf{n}^{[0]} = q_s^{[1]} \quad (\text{Ann5.2-63})$$

$$\sigma^{(i)} \nabla V^{(i)[1]} \cdot \mathbf{n}^{[0]} - \sigma^{(e)} \nabla V^{(e)[1]} \cdot \mathbf{n}^{[0]} = 0 \quad (\text{Ann5.2-64})$$

Les développements du vecteur normal et tangentiel sont donnés dans l'Annexe II.

La condition (Ann5.2-8) se traduit au premier ordre aussi par, $\eta = 1$ et $0 \leq \theta \leq \pi$,

$$V^{(e)[1]} = V^{(i)[1]} \quad (\text{Ann5.2-65})$$

1. Si l'on remplace J par l'équation (Ann5.2-65) (membre à membre) dans le produit (Ann5.2-55) et K par $P_m(\cos \theta)$, avec $Wei(\theta) = 1$, alors, on obtient le résultat suivant :

$$G_0^{(e)[1]} \frac{2}{2m+1} \delta_{m,0} + G_1^{(e)[1]} F^{[0]} \frac{2}{2m+1} \delta_{m,1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^{n+1}} \frac{2}{2m+1} \delta_{m,n} = \sum_{n=1}^{+\infty} G_n^{(i)[1]} (F^{[0]})^n \frac{2}{2m+1} \delta_{m,n}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Ann5.2-66})$$

2. Si l'on remplace J par l'équation (Ann5.2-65) (membre à membre) dans le produit (Ann5.2-64) et K par $P_m(\cos \theta)$, avec $Wei(\theta) = \sin \theta$, alors l'on obtient le résultat suivant :

$$-\sigma^{(i)} \left\{ -\sum_{n=1}^{+\infty} (F^{[0]})^{n-1} \delta_{m,n} G_n^{(i)[1]} \right\} + \sigma^{(e)} \left\{ -G_1^{(e)[1]} \delta_{m,1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(F^{[0]})^{n+2}} \delta_{m,n} H_n^{(e)[1]} \right\} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Ann5.2-67})$$

3. La condition (Ann5.2-6), implique aussi que :

$$G_1^{(e)[1]} = -E_0^{[1]} \quad (\text{Ann5.2-68})$$

Après arrangement et résolution, l'on obtient les solutions suivantes du système ainsi posé :

$$V^{(i)[1]} = G_0^{(e)[1]} P_0(\cos \theta) - E_0^{[1]} \frac{3}{2+S} \eta F^{[0]} P_1(\cos \theta) \quad (\text{Ann5.2-69})$$

$$V^{(e)[1]} = G_0^{(e)[1]} P_0(\cos \theta) - E_0^{[1]} \eta F^{[0]} P_1(\cos \theta) - (F^{[0]})^3 \frac{E_0^{[1]}}{\eta^2} \frac{1-S}{2+S} P_1(\cos \theta) \quad (\text{Ann5.2-70})$$

où :

$$S = \sigma^{(i)} / \sigma^{(e)} \quad (\text{Ann5.2-71})$$

Le potentiel électrique est défini à une constante additive près. Pour le déterminer de manière univoque, et supprimer ainsi tout arbitraire, l'on choisi d'affecter un potentiel nul à l'électrode de masse. Si cette dernière se situe à une distance $L/2$ du centre de la goutte ($r \cos \theta = -L/2$), alors cette condition se traduit par :

$$G_0^{(e)[1]} = -L E_0^{[1]} \quad (\text{Ann5.2-72})$$

Finalement, les potentiels s'écrivent sous la forme :

$$V^{(i)[1]}(\eta, \theta) = -L E_0^{[1]} P_0(\cos \theta) - E_0^{[1]} \frac{3}{2+S} \eta F^{[0]} P_1(\cos \theta), \quad 0 \leq \eta \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \pi \quad (\text{Ann5.2-73})$$

$$\begin{aligned} V^{(e)[1]}(\eta, \theta) &= -L E_0^{[1]} P_0(\cos \theta) - E_0^{[1]} \eta F^{[0]} P_1(\cos \theta) \\ &- \left(F^{[0]} \right)^3 \frac{E_0^{[1]}}{\eta^2} \frac{1-S}{2+S} P_1(\cos \theta), \quad \eta \geq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \pi \end{aligned} \quad (\text{Ann5.2-74})$$

L'on vérifie que la condition (Ann5.2-22), qui s'écrit au premier ordre sous la forme :

$$\int_0^\pi q_s^{[1]} F^{[0]} \sin \theta d\theta = 0 \quad (\text{Ann5.2-75})$$

est systématiquement satisfaite par les solutions trouvées.

5.2.2. Solution exacte du problème hydrodynamique

Puisque l'on dispose désormais du champ électrique, l'on peut calculer les efforts appliqués à l'écoulement qui s'en suivent et résoudre le problème EHD. Ceci est l'objectif de cette section.

1. Si l'on remplace J par l'équation (Ann5.2-16) (membre à membre) dans le produit (Ann5.2-64) et K par $P_m(\cos \theta)$, avec $Wei(\theta) = \sin^2 \theta$, alors l'on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} & \frac{B_0^{(e)[1]}}{F^{[0]}} (\delta_{m,0} - \delta_{m,1}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} (\delta_{m,n+1} - \delta_{m,n-1}) \left(\frac{n-2}{(F^{[0]})^n} C_n^{(e)[1]} + \frac{n}{(F^{[0]})^{n+2}} D_n^{(e)[1]} \right) \\ &= 3A_0^{(i)[1]} F^{[0]} (\delta_{m,0} - \delta_{m,1}) + 2A_1^{(i)[1]} \frac{2}{3} (\delta_{m,0} - \delta_{m,2}) \\ &+ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{2n+1} \left[(n+1) (F^{[0]})^{n-1} B_n^{(i)[1]} + (n+3) (F^{[0]})^{n+1} A_n^{(i)[1]} \right] (\delta_{m,n+1} - \delta_{m,n-1}), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Ann5.2-76}) \end{aligned}$$

2. Avec la même fonction de pondération et la fonction suivant laquelle la projection se fait, l'on obtient pour l'équation (Ann5.2-17) le résultat suivant :

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{B_0^{(e)[1]}}{F^{[0]}} - \frac{D_0^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^2} \right) \frac{2}{3} (\delta_{m,0} - \delta_{m,2}) + \left(\frac{C_1^{(e)[1]}}{F^{[0]}} + \frac{D_1^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^3} \right) \frac{2}{5} (\delta_{m,3} - \delta_{m,1}) \\ &+ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{2n+1} \left(\frac{C_n^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^n} + \frac{D_n^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^{n+2}} \right) \times \end{aligned}$$

$$\left[-\frac{n(n-1)(2n+3)}{(2n-1)(2n+3)}\delta_{m,n-2} + \frac{2(2n+1)(n^2+n-1)}{(2n-1)(2n+3)}\delta_{m,n} - \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3}\delta_{m,n+2} \right] = 0,$$

$$m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Ann5.2-77})$$

3. Un traitement équivalent à l'équation (Ann5.2-18) donne

$$-A_0^{(i)[1]}F^{[0]\frac{2}{3}}(\delta_{m,0} - \delta_{m,2}) + A_1^{(i)[1]}(F^{[0]})^{\frac{2}{5}}(\delta_{m,3} - \delta_{m,1})$$

$$+ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{2n+1} \left[A_n^{(i)[1]}(F^{[0]})^{n+1} + B_n^{(i)[1]}(F^{[0]})^{n-1} \right] \times$$

$$\left[\left(1-n + \frac{(n-1)^2}{2n-1} \right) \delta_{m,n-2} + \left(n+1 + \frac{n(n-1)}{2n-1} - \frac{(n+1)^2}{2n+3} \right) \delta_{m,n} - \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} \delta_{m,n+2} \right] = 0$$

$$m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Ann5.2-78})$$

4. Et pour la projection normale, à l'interface S , du bilan de quantité de mouvement (Ann5.2-21) :

$$-\left\{ \frac{2\lambda}{Re^{(i)}} \left[-A_0^{(i)[1]}\frac{2}{3}(\delta_{m,0} - \delta_{m,2}) - 2F^{[0]}A_1^{(i)[1]}\frac{2}{3}(\delta_{m,0} - \delta_{m,2}) \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{2n+1} (F^{[0]})^n \right. \right.$$

$$\left. \times \left[\left(1-n + \frac{(n-1)^2}{2n-1} \right) \delta_{m,n-2} + \left(n+1 + \frac{n(n-1)}{2n-1} - \frac{(n+1)^2}{2n+3} \right) \delta_{m,n} - \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} \delta_{m,n+2} \right] \right.$$

$$\left. \times (n+1)A_n^{(i)[1]} + \frac{n-1}{(F^{[0]})^2} B_n^{(i)[1]} \right] - \frac{\lambda}{Re^{(i)}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n+1)(F^{[0]})^{2n+1} (4n+6)A_n^{(i)[1]} \right] \times$$

$$\left. \left. \left(\left(1-n + \frac{(n-1)^2}{2n-1} \right) \delta_{m,n-2} + \left(n+1 + \frac{n(n-1)}{2n-1} - \frac{(n+1)^2}{2n+3} \right) \delta_{m,n} - \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} \delta_{m,n+2} \right) \right\}$$

$$+ \left\{ -\frac{1}{Re^{(e)}} \sum_{n=1}^{+\infty} -n(n+2)C_n^{(e)[1]} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)(F^{[0]})^{n+1}} \right.$$

$$\left. \times \left[\left(1-n + \frac{(n-1)^2}{2n-1} \right) \delta_{m,n-2} + \left(n+1 + \frac{n(n-1)}{2n-1} - \frac{(n+1)^2}{2n+3} \right) \delta_{m,n} - \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} \delta_{m,n+2} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{Re^{(e)}} \left[\frac{2}{3} (\delta_{m,0} - \delta_{m,2}) \left(\frac{B_0^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^2} + \frac{2}{(F^{[0]})^3} D_0^{(e)[1]} + \frac{3}{(F^{[0]})^4} D_1^{(e)[1]} \right) + \frac{C_1^{(e)[1]}}{(F^{[0]})^2} \frac{2}{5} (\delta_{m,1} - \delta_{m,3}) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{2n+1} \left[-(n+2)(F^{[0]})^{-n-3} D_n^{(e)[1]} - n(F^{[0]})^{-n-1} C_n^{(e)[1]} \right] \right. \\
& \quad \left. \times \left[\left(1 - n + \frac{(n-1)^2}{2n-1} \right) \delta_{m,n-2} + \left(n+1 + \frac{n(n-1)}{2n-1} - \frac{(n+1)^2}{2n+3} \right) \delta_{m,n} - \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} \delta_{m,n+2} \right] \right] \\
& = \frac{Ca}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)(n+2) \left[-\frac{n(n-1)}{(2n+1)(2n-1)} \delta_{m,n-2} + \left(1 - \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{n^2}{(2n+1)(2n-1)} \right) \delta_{m,n} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \delta_{m,n+2} \right] J_n^{[1]} + \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{E_0^{[1]} r_0}{V} \right)^2 \left[9M \left(\frac{S}{2+S} \right)^2 \left(-\frac{14}{35} \delta_{m,0} + \frac{6}{7} \delta_{m,2} - \frac{16}{35} \delta_{m,4} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left\{ -\left(1 + \frac{1-S}{2+S} \right)^2 \left(\frac{58}{111} \delta_{m,0} - \frac{16}{21} \delta_{m,2} + \frac{8}{35} \delta_{m,4} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(1 - 2 \frac{1-S}{2+S} \right)^2 \left(\frac{14}{105} \delta_{m,0} + \frac{10}{105} \delta_{m,2} - \frac{8}{35} \delta_{m,4} \right) \right\} \right] \quad (\text{Ann5.2-79})
\end{aligned}$$

5. Pour la partie tangentielle du bilan de quantité de mouvement (Ann5.2-21), l'on choisira la fonction de pondération suivante $Wei(\theta) = \sin^3 \theta$. La projection implique, après simplification, l'équation suivante

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{Re^{(e)}} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(F^{[0]})^{-n-3}}{2n+1} \left[(n-2) C_n^{(e)[1]} (F^{[0]})^2 + (n+2) D_n^{(e)[1]} \right] \\
& \times \left[\delta_{m,n-1} - \frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)(2m+5)} (\delta_{m,n-3} - \delta_{m,n-1}) - \frac{2m^2 + 2m - 1}{(2m-1)(2m+3)} (\delta_{m,n-1} - \delta_{m,n+1}) \right. \\
& \left. - \frac{m(m-1)}{(2m-3)(2m-1)} (\delta_{m,n+1} - \delta_{m,n+3}) - \delta_{m,n+1} \right] - \frac{1}{Re^{(e)} (F^{[0]})^2} B_0^{(e)[1]} \left[\frac{2}{3} (\delta_{m,0} - \delta_{m,2}) - \frac{2}{5} (\delta_{m,1} - \delta_{m,3}) \right] \\
& + \frac{1}{Re^{(e)} F^{[0]}} \left[\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{4n+2} (F^{[0]})^{-n-2} \left(\left(2(n^2 - 3n + 2) + \frac{2(m+1)(m+2)(n^2 - 3n + 2)}{(2m+3)(2m+5)} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2(m+1)(2n^2 - 7n + 5)}{2m+1} \right) \delta_{m,n-3} + \left(-2n^2 - 4n + 2 + \frac{2(2m^2 + 2m - 1)(n^2 - 3n + 2)}{(2m-1)(2m+3)} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. -\frac{2(m+1)(m+2)(n^2+n)}{(2m+3)(2m+5)} - \frac{2m(2n^2-7n+5)}{2m-1} + \frac{(m+1)(4n^2+2n-2)}{2m+3} \right) \delta_{m,n-1} \\
& + \left(2+2n + \frac{2(m-1)m(n^2-3n+2)}{(2m-3)(2m-1)} - \frac{2(2m^2+2m-1)(n^2+n)}{(2m-1)(2m+3)} + \frac{m(4n^2+2n-2)}{2m+3} \right) \delta_{m,n+1} \\
& - \frac{2(m-1)m(n^2+n)}{(2m-3)(2m-1)} \delta_{m,n+3} \left[C_n^{(e)[1]} (F^{[0]})^2 + D_n^{(e)[1]} \right] \\
& - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{n-2}{(F^{[0]})^n} C_n^{(e)[1]} + \frac{n}{(F^{[0]})^{n+2}} D_n^{(e)[1]} \right] \left(\frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)(2m+5)} \delta_{m,n-3} \right. \\
& + \left(-1 - \frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)(2m+5)} + \frac{2m^2+2m-1}{(2m-1)(2m+3)} \right) \delta_{m,n-1} \\
& + \left(1 + \frac{(m-1)m}{(2m-3)(2m-1)} - \frac{2m^2+2m-1}{(2m-1)(2m+3)} \right) \delta_{m,n+1} \\
& + \left. \frac{(1-m)m}{(2m-3)(2m-1)} \delta_{m,n+3} \right) - \frac{1}{F^{[0]}} B_0^{(e)[1]} \left[\frac{2}{3} (\delta_{m,0} - \delta_{m,2}) - \frac{2}{5} (\delta_{m,1} - \delta_{m,3}) \right] \\
& + \frac{1}{F^{[0]}} C_1^{(e)[1]} \left(\frac{8}{15} \delta_{m,0} - \frac{16}{21} \delta_{m,2} + \frac{8}{35} \delta_{m,4} \right) \\
& - \frac{\lambda}{Re^{(i)}} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} -\left(\frac{n+1}{2n+1} \right) (F^{[0]})^{n-2} \left[(n+3) A_n^{(i)[1]} (F^{[0]})^2 + (n-1) B_n^{(i)[1]} \right] \right. \\
& \times \left[\delta_{m,n-1} - \frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)(2m+5)} (\delta_{m,n-3} - \delta_{m,n-1}) - \frac{2m^2+2m-1}{(2m-1)(2m+3)} (\delta_{m,n-1} - \delta_{m,n+1}) \right. \\
& \left. \left. - \frac{m(m-1)}{(2m-3)(2m-1)} (\delta_{m,n+1} - \delta_{m,n+3}) - \delta_{m,n+1} \right] + 3A_0^{(i)[1]} \left[\frac{2}{3} (\delta_{m,0} - \delta_{m,2}) - \frac{2}{5} (\delta_{m,1} - \delta_{m,3}) \right] \right. \\
& \left. + 4F^{[0]} A_1^{(i)[1]} \left(\frac{8}{15} \delta_{m,0} - \frac{16}{21} \delta_{m,2} + \frac{8}{35} \delta_{m,4} \right) \right) \\
& - \frac{\lambda}{Re^{(i)} F^{[0]}} \left[\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{4n+2} (F^{[0]})^{n-1} \left(2 \left[\frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)(2m+5)} \delta_{m,n-3} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{2m^2+2m-1}{(2m-1)(2m+3)} \delta_{m,n-1} + \frac{m(m-1)}{(2m-3)(2m-1)} \delta_{m,n+1} - \frac{1}{2} \delta_{m,n-1} \right] (n^2-3n+2) \right. \\
& \left. + \left[\frac{m+1}{2m+3} \delta_{m,n-1} + \frac{m}{2m-1} \delta_{m,n+1} \right] (4n^2+2n-2) + (-n^2+n+2) \delta_{m,n+1} + 2(n^2-3n+2) \delta_{m,n-3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left[\frac{m+1}{2m+3} \delta_{m,n-3} - \frac{m}{2m-1} \delta_{m,n-1} \right] (2n^2 - 7n + 5) + (-n^2 - 7n + 4) \delta_{m,n-1} \\
& + 2(-n^2 - n) \left[\frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)(2m+5)} \delta_{m,n-1} + \frac{2m^2 + 2m - 1}{(2m-1)(2m+3)} \delta_{m,n+1} \right. \\
& \quad \left. + \frac{m(m-1)}{(2m-3)(2m-1)} \delta_{m,n+3} - \frac{1}{2} \delta_{m,n+1} \right] \\
& \times \left[A_n^{(i)[1]} (F^{[0]})^2 + B_n^{(i)[1]} \right] - \left(2A_1^{(i)[1]} (F^{[0]})^2 \left[\frac{8}{15} \delta_{m,0} - \frac{16}{21} \delta_{m,2} + \frac{8}{35} \delta_{m,4} \right] \right. \\
& \quad \left. + 3A_0^{(i)[1]} F^{[0]} \left[\frac{2}{3} (\delta_{m,0} - \delta_{m,2}) - \frac{2}{5} (\delta_{m,1} - \delta_{m,3}) \right] \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left[(n+1) B_n^{(i)[1]} (F^{[0]})^{n-1} + (n+3) A_n^{(i)[1]} (F^{[0]})^{n+1} \right] \right. \\
& \quad \left. \times \left[\delta_{m,n-1} - \delta_{m,n+1} - \frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)(2m+5)} (\delta_{m,n-3} - \delta_{m,n-1}) - \frac{2m^2 + 2m - 1}{(2m-1)(2m+3)} (\delta_{m,n-1} - \delta_{m,n+1}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{m(m-1)}{(2m-3)(2m-1)} (\delta_{m,n+1} - \delta_{m,n+3}) \right] \right] = -\alpha \left(\frac{E_0^{[1]} r_0}{V} \right)^2 \left[M \frac{72}{315} (9\delta_{m,1} - 14\delta_{m,3} + 5\delta_{m,5}) \left(\frac{1}{2+S} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{8}{315} (9\delta_{m,1} - 14\delta_{m,3} + 5\delta_{m,5}) \left(-1 + 2 \frac{1-S}{2+S} \right) \left(1 + \frac{1-S}{2+S} \right) \right] \quad (\text{Ann5.2-80})
\end{aligned}$$

Après résolution de ce système d'équations, on obtient la forme des potentiels hydrodynamiques suivante :

$$\psi^{(i)[1]}(\eta, \theta) = \varpi (F^{[0]})^5 (\eta^5 - \eta^3) (-P_2(\cos \theta) + P_4(\cos \theta)) \quad (\text{Ann5.2-81})$$

$$\psi^{(e)[1]}(\eta, \theta) = \varpi \left(1 - \frac{1}{\eta^2} \right) (-P_2(\cos \theta) + P_4(\cos \theta)) \quad (\text{Ann5.2-82})$$

où :

$$\varpi = \frac{9E_0^2 r_0^2}{35} \frac{\varepsilon^{(e)}}{\mu^{(i)} + \mu^{(e)}} \frac{(S-P)}{(2+S)^2} \quad (\text{Ann5.2-83})$$

et :

$$P = \frac{\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(e)}} \quad (\text{Ann5.2-84})$$

5.2.3. Solution pour la fonction d'aspect et le champ électrique appliqué

La fonction d'aspect est définie par l'équilibre des forces normales à l'interface (Ann5.2-79). Après avoir calculer les potentiels électriques et hydrodynamiques, puis injection dans (Ann5.2-79), on trouve que :

$$J_n^{[1]} = 0, \quad n \neq 2 \quad (\text{Ann5.2-85})$$

Ce qui permet d'écrire l'expression de la fonction de forme à l'ordre 1 sous la forme :

$$F^{[1]}(r, \theta) = P_2(\cos \theta) \quad (\text{Ann5.2-86})$$

Finalement, la fonction d'aspect totale s'écrit :

$$F(\theta) = F^{[0]} + \varepsilon F^{[1]} = r_0 + \varepsilon P_2(\cos \theta) \quad (\text{Ann5.2-87})$$

Et l'expression du champ électrique E_0 en fonction du paramètre de perturbation ε :

$$E_0 = \sqrt{\frac{4\gamma}{\varepsilon^{(e)} r_0^2 \left(\frac{3}{2+S}\right)^2 \left[\frac{1}{3}(S^2 - 2P + 1) + \frac{(S-P)(2+3M)}{5(1+M)}\right]}} \varepsilon \quad (\text{Ann5.2-88})$$

où :

$$M = \frac{\mu^{(i)}}{\mu^{(e)}} \quad (\text{Ann5.2-89})$$

A partir de l'expression (Ann5.2-87), on peut tirer l'expression de l'ellipticité en fonction du paramètre ε :

$$\frac{a}{b} = \frac{F(\theta=0)}{F(\theta=\frac{\pi}{2})} = \frac{r_0 + \varepsilon P_2(1)}{r_0 + \varepsilon P_2(0)} = \frac{r_0 + \varepsilon}{r_0 - \frac{1}{2}\varepsilon} \quad (\text{Ann5.2-90})$$

Ou encore :

$$\varepsilon = \frac{-1 + \frac{a}{b}}{1 + \frac{1}{2}\frac{a}{b}} r_0 \quad (\text{Ann5.2-91})$$

L'injection de (Ann5.2-91) dans (Ann5.2-88) donne :

$$E_0 = \sqrt{\frac{4\gamma}{\varepsilon^{(e)} r_0^2 \left(\frac{3}{2+S}\right)^2 \left[\frac{1}{3}(S^2 - 2P + 1) + \frac{(S-P)(2+3M)}{5(1+M)}\right]}} \frac{-1 + \frac{a}{b}}{1 + \frac{1}{2}\frac{a}{b}} \quad (\text{Ann5.2-92})$$

Conclusion et perspectives

1. Conclusion générale

L'objectif de ce travail était le développement d'un modèle et d'un outil numérique capable de prédire le mouvement et la déformation de particules sous champ électrique dans les microsystèmes biologiques. À terme, ces moyens permettront la simulation et l'optimisation de labopuces (Lab-on-a-chip) dans les phases de conception les plus amont possibles.

Considérée comme une étape préliminaire, nous avons adopté essentiellement sur l'outil CANARD, basé sur la Méthode Intégrale aux Frontières (MIF) appliquée aux écoulements irrotationnels en géométrie 2D-axisymétrique, pour la résolution des problèmes électrohydrodynamiques (EHD).

Dans un souci de méthodologie, trois étapes successives ont été suivies.

La première étape a consisté à modéliser le mouvement de corps solides (de particules homogènes puis de particules à structure plus complexes, telles les cellules biologiques) sous l'influence du champ électrique. La présence de particules modifie le champ électrique. Le calcul du champ électrique s'effectue par la MIF et cette technique a été testée par comparaison à la Méthode des Eléments Finis (MEF) (disponible avec le code commercial FEMLABTM). En déterminant le champ électrique et en évaluant la force résultante à partir du tenseur de Maxwell, nous avons montré que, dans les microsystèmes, le modèle du Dipôle Ponctuel (DP), habituellement utilisé pour estimer les forces DEP appliquées sur les particules sphériques, [148], est inapproprié lorsque la taille des particules n'est pas très petite devant la distance entre électrodes ou encore lorsque la particule est à une distance des électrodes inférieure à son rayon. Bien qu'offrant des résultats moins erronés, le modèle multipolaire échoue également dans la détermination des forces DEP appliquées. Cette méthode a été ensuite évaluée sur des particules de forme ellipsoïdale allongée ou aplatie. Là aussi, le modèle du DP n'offre qu'une approximation assez grossière des forces DEP mises en jeu. À l'issue de cette étude, il apparaît que la prise en compte de la modification du champ électrique par la présence des particules est nécessaire pour simuler correctement les microsystèmes.

La deuxième étape de ce travail a consisté à aborder la question de la déformation de

gouttes sous l'effet d'un champ électrique uniforme. Nous avons choisi de modéliser les déformations pures d'une goutte de liquide non miscible avec le fluide suspensé. Pour inclure les forces électriques, nous avons modifié CANARD pour *i*) intégrer le calcul du champ électrique et *ii*) assurer le couplage EHD pour le suivi d'interface sous l'effet du champ électrique. Ceci représente le problème le plus simple parce que la seule propriété mécanique de l'interface goutte/liquide extérieur prise en compte est la tension de surface. Le modèle MIF-EHD que nous avons développé est assujéti à l'hypothèse des écoulements irrotationnels. Le caractère irrotationnel des écoulements est imposé, entre autres, par l'outil CANARD. Deux tests, correspondant au suivi des déformations et du développement d'instabilité de gouttes sous champ électrique continu et alternatif, ont été effectués. En champ électrique continu, le comportement des gouttes au voisinage des formes d'équilibre a été comparé aux résultats théoriques approchés de Taylor, [276]. Une excellente concordance a été obtenue pour les solutions statiques ainsi qu'en terme de leur caractère stable ou instable. En champ électrique alternatif à fréquence élevée, l'étude des formes d'équilibre et du caractère stable ou instable de ces formes a montré un très bon accord entre les résultats des simulations et la théorie de Taylor en utilisant la valeur efficace du champ électrique appliqué au lieu de son amplitude (l'interface ne ressentant que l'effet moyen des efforts électriques). En régime dynamique, le développement de cônes instables ainsi que des formes qui suggèrent l'éjection de gouttelettes ont été retrouvés par les simulations, bien qu'il faille prendre ces résultats avec prudence. Une alternative aux résolutions entièrement numériques pourrait être les méthodes de perturbation. Cette méthode, qui consiste à effectuer des développements asymptotiques et de les résoudre analytiquement, offre de fortes potentialités [285], mais la mise en œuvre qu'elle implique est souvent prohibitive pour être pleinement exploitable. En l'occurrence, le développement au premier ordre de perturbation que nous avons effectué est insuffisant pour décrire de manière correcte la déformation de gouttes jusqu'à la rupture. Ceci justifie pleinement le choix d'utiliser les méthodes numériques.

La troisième étape a été dédiée au suivi du déplacement et de la déformation des gouttes dans un champ électrique non uniforme. En champ continu, des comparaisons ont été effectuées avec le modèle théorique de Feng, [101]. Le calcul des forces DEP par CANARD-EHD et celui des forces EHD par Feng a montré une inadéquation du modèle numérique que nous avons utilisé si la goutte est à la fois plus polarisable et moins conductrice que le liquide extérieur, ceci à cause de la non prise en compte des efforts tangentiels au niveau de l'interface. En effet, le caractère irrotationnel supposé des écoulements a deux conséquences : ni la continuité des vitesses tangentielles ni l'équilibre

des contraintes tangentielles ne sont assurés aux interfaces (bien que les contraintes tangentielles ne soient pas considérées, les effets visqueux normaux à l'interface sont pris en compte par le modèle MIF). En dehors de ce cas, CANARD-EHD estime convenablement la force électrique appliquée sur la goutte. Le caractère irrotationnel des écoulements déterminés ne permet pas de prédire le mouvement des gouttes au sein du liquide extérieur. Nous avons donc proposé d'utiliser un artifice pour tenir compte des forces de traînée en les intégrant de manière indirecte dans les équations de mouvement comme des pseudo forces volumiques. Ce modèle amélioré a été comparé avec succès dans une configuration de champ électrique alternatif à un modèle analytique simplifié. Dans ce cas, les simulations suggèrent l'existence d'au moins deux types d'instabilité l'un pour les grosses gouttes, où la déformation près de la pointe est conique, l'autre pour les petites gouttes, où la goutte s'allonge beaucoup plus et devrait conduire à l'échappement de gouttelette. L'absence de résultats théoriques et expérimentaux dans la littérature concernant le développement d'instabilité sous champ électrique non uniforme nous empêche de juger de la pertinence de ces résultats.

2. Perspectives

Les perspectives de ce travail sont multiples. Nous avons choisi pour clore ce mémoire d'en présenter quelques unes, actuellement à l'étude.

Le code CANARD-EHD amélioré, et appliqué à la déformation et au déplacement de gouttes, apparaissant comme un outil intéressant, il devrait immédiatement être envisagé, pour cerner de manière quantitative les possibilités qu'il offre, de le comparer avec une approche moins discutable, la MEF en géométrie axisymétrique couplée à une technique de suivi d'interface, par exemple.

Même dans l'éventualité où la MIF modifiée présente un apport non négligeable, il convient, pour tenir compte de la vorticité, de chercher des méthodes de suivi d'interface qui soient complémentaires ou de substitution à la MIF. Plusieurs voies sont à explorer.

Il s'agit en premier de continuer le développement du modèle MIF en le généralisant aux écoulements rotationnels. Cette généralisation peut se faire par couplage de la MIF avec la Méthode des Particules de Tourbillon (MPT) qui consiste à adjoindre une équation de transport de la vorticité dans l'écoulement aux équations d'évolution de l'interface. L'avantage de cette approche est de combiner des méthodes compatibles puisque la MIF comme la MPT sont des descriptions lagrangiennes du mouvement du fluide.

Une autre approche consiste à utiliser la MIF   Réciprocité Duale (MIF-RD) qui permet de tenir compte des termes sources (associés à la vorticité) dans les équations au domaine en

les intégrant aux frontières par une technique proposée par Brebbia *et al.*, [222]. Pour ce faire, ces termes sources sont écrits sous la forme de solutions test harmoniques. Le choix des fonctions test est multiple, mais les fonctions à base radiale (la variable est la distance qui sépare les points) se sont imposées par leur simplicité et par la précision qu'elles offrent.

Une autre voie envisageable également consiste à combiner une méthode eulérienne (telle la MEF) soit avec la MIF soit avec une technique eulérienne de suivi d'interface telle la méthode Level Set (dans cette méthode, on définit une équation de transport pour un scalaire passif dont une des lignes de niveau détermine l'interface). La première technique semble attrayante puisqu'elle combine la généralité de la MEF à la précision de la MIF, alors que la dernière semble plus facile à mettre en œuvre bien qu'elle manque de précision notamment aux longues échelles de temps.

Il reste impératif dans toutes les méthodes envisageables, de prévoir une extension de l'outil aux configurations entièrement tridimensionnelles. Quelle que soit la méthode choisie pour effectuer le suivi du mouvement et de la déformation des cellules biologiques sous champ électrique dans les microsystèmes, celle-ci doit parallèlement intégrer de façon correcte la rhéologie de leur membrane, [11], qui n'est décrite ici que de manière grossière en se contentant de l'assimiler à une interface dotée uniquement d'une tension de surface.

Il ne faut cependant pas perdre de vue également que les phénomènes EHD considérés dans le cas présent se limitent aux effets de polarisation interfaciale. Dans les microsystèmes, les effets associés à l'électrothermique et à l'électro-osmose peuvent devenir très importants si bien qu'ils risquent de masquer complètement les effets DEP souhaités et détériorer notablement les performances de ces dispositifs. Il est donc souhaitable d'effectuer une expertise dans laquelle l'influence de ces différents phénomènes serait prise en compte.

Liste des publications et communications

1. Publications dans des journaux à comité de lecture

- [1] Benselama, A.M., Achard, J.-L. and Pham, P., Numerical simulation of an uncharged droplet in a uniform electric field, *Journal of Electrostatics*, In Press
- [2] Benselama, A.M., Pham, P. et Atten, P., Calcul de la force diélectrophorétique dans les microsystèmes biologiques: comparaison du modèle dipolaire avec le modèle du tenseur de Maxwell, *Journal of Electrostatics*, In Press

2. Communications internationales

- [3] Benselama, A.M., Pham, P., Glière, A. and Atten, P., Motion and deformation of a water droplet in oil subjected to a nonuniform electric field, *International Conference of Dielectric Liquids*, Coimbra, Portugal, june, 26 - july, 01, 2005
- [4] Benselama, A.M., Pham, P. et Atten, P., Calcul de la force diélectrophorétique dans les microsystèmes biologiques: comparaison du modèle dipolaire avec le modèle du tenseur de Maxwell, 4ème Conférence de la Société Française d'Electrostatique, Poitiers, 1-2 septembre 2004
- [5] Benselama, A.M., Achard, J.-L. and Pham, P., Numerical simulation of an uncharged droplet in a uniform electric field, 5th International workshop on Electrohydrodynamics, Poitiers, August, 29-30, 2004
- [6] Benselama, A.M., Pham, P. and Canot, E, Modeling of the dielectrophoretic forces acting upon biological cells: a numerical comparison between Finite Element/Boundary Element Maxwell stress tensor methods and point dipole approach, Nanotech2004 conference, Boston, April, 7-11, 2004

Bibliographie

- [1] Achard, J.-L., Machane, R. et Canot, E., Formulation entièrement intégrale des équations de Navier-Stokes, C.R. Académie des Sciences de Paris, 1996, t. 323, Série II b, p. 653-660
- [2] Alassar, R.S. and Badar, H.M., Steady flow past on ablate spheroid at small Reynolds numbers, *Journal of Engineering Mathematics*, 1999, vol. 36, No. 3, pp 277-287
- [3] Amari, S. and Bornemann, J., Efficient numerical computation of singular integrals with applications to electromagnetism, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1995, vol. 43, No. 11, pp 1343-1348
- [4] Aris, R., *Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics*, 1962, Prentice-Hall Editor
- [5] Arnold, W.M. and Zimmermann, U., Electro-rotation: development of a technique for dielectric measurements on individual cells and particles, *Journal of Electrostatics*, 1988, vol. 21, pp 151-191
- [6] Arnold, W.M. and Zimmermann, U., Electro-rotation: Rotating-field-induced rotation and measurement of the membrane capacitance of single mesophyll cells of *Avena sativa*, *Zeitschrift für Naturforschung C*, 1982, vol. 37 c, pp 908-915
- [7] Arro, V., On the approximate calculation of double integrals with weight function, *Proceedings of the Estonian Academy of Science, Physics and Mathematics*, 2000, vol. 49, No. 2, pp 67-74
- [8] Baker, G.R., Meiron, D.I. and Orszag, S.A., Generalized vortex methods for free surface flow problems, *Journal of Fluid Mechanics*, 1982, vol. 123, pp 477-501
- [9] Balakrishnan, K. and Ramachandran, P.A., A particular solution Trefftz Method for non-linear Poisson problems in heat and mass transfer, *Journal of Computational Physics*, 1999, vol. 150, pp 239-267
- [10] Barthès-Biesel, D. and Rallison, J.M., The time-dependent deformation of a capsule freely suspended in a linear shear flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 1981, vol. 113, pp 251-267
- [11] Barthès-Biesel, D., Diaz, A. and Dhenin, E., Effect of constitutive laws for two-dimensional membranes on flow-induced capsule deformation, *Journal of Fluid Mechanics*, 2002, vol. 460, pp 211-222
- [12] Barthès-Biesel, D., *Mécanique des suspensions de particules déformables*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie -Paris 6-, 1982
- [13] Barthès-Biesel, D., Motion of a spatial microcapsule freely suspended in a linear shear flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 1980, vol. 100, No. 4, pp 831-853
- [14] Basaran, O.A. and Scriven, L.E., Axisymmetric shapes and stability of charged drops in an external electric field, *Physics of Fluids A*, vol. 5, No. 5, pp 799-809
- [15] Batchelor, G.K., *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, 1967

- [16] Beale, J.T. and Lai, M.-C., A method for computing nearly singular integrals, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2001, vol. 38, pp 1902-25
- [17] Beale, J.T., A grid-based boundary integral method for elliptic problems in 3D, *SIAM Journal on Numerical Analysis* (submitted 2003)
- [18] Belonozhko, D.F. and Grigor'ev, A.I., Characteristic time for the evolution of instability of a droplet charged to the Rayleigh limit, *Technical Physics Letters*, 1999, vol. 25, No. 8, pp 610-611
- [19] Benselama, A.M., Achard, J.-L. and Pham, P. , Numerical simulation of an uncharged droplet in a uniform electric field, 5th International workshop on Electrohydrodynamics, Poitiers, August, 29-30, 2004
- [20] Benselama, A.M., Pham, P. and Canot, E, Modeling of the dielectrophoretic forces acting upon biological cells: a numerical comparison between Finite Element/Boundary Element Maxwell stress tensor methods and point dipole approach, Nanotech2004 conference, Boston, April, 7-11, 2004
- [21] Benselama, A.M., Pham, P. et Atten, P., Calcul de la force diélectrophorétique dans les microsystèmes biologiques: comparaison du modèle dipolaire avec le modèle du tenseur de Maxwell, 4ème Conférence de la Société Française d'Electrostatique, Poitiers, 1-2 septembre 2004
- [22] Benselama, A.M., Pham, P., Glière, A. and Atten, P., Motion and deformation of a water droplet in oil subjected to a nonuniform electric field, International Conference of Dielectric Liquids, Coimbra, Portugal, june, 26 - july, 01, 2005
- [23] Berg, G., Lundgaard, L.E., Becidan, M. and Sigmond, R.S., Instability of electrically stressed water droplets in oil, Proceedings of the 14th International Conference on Dielectric Liquids, Graz, Austria, 2002, pp 220-224
- [24] Berge, B., Electrocapillarité et mouillage de films isolants par l'eau, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1993, III 317 p. 157-163
- [25] Bialecki, R., Divo, E. and Kassab, A.J., Unknown time dependent heat flux boundary condition reconstruction using a BEM-based inverse algorithm, *Electronic Journal of Boundary Elements*, BETEQ, 2001, No. 1, pp 104-114
- [26] Bibly, B.A. and Kolbuszewski, M.L., The finite deformation of an inhomogeneity in two-dimensional slow viscous incompressible flow, *Proceedings of the Royal Society of London, A.*, 1977, vol. 355, pp 335-353
- [27] Biros, G., Ying, L. and Zorin, D., An embedded Boundary Integral solver for the unsteady incompressible Navier-Stokes equations, Report No. 2003-838, Institute of Mathematical Sciences, New York, USA, 2002
- [28] Blake, J.R., A note on the image system for a Stokeslet in a no-slip boundary, *Proceedings of the Cambridge Philosophy Society*, 1971, vol. 70, pp 303-310
- [29] Bond. C., A new integration method providing the accuracy of Gauss-Legendre with error estimation capability, Private communication, 2003
- [30] Bonnet, M. and Guiggiani, M., Direct evaluation of double hypersingular integrals and new free terms in 2D symmetric Galerkin BEM, International Association for Boundary Element Methods, UT Austin, TX, USA, May 28-30, 2002
- [31] Bonnet, M., *Boundary integral equation methods for solids and fluids*, Eyrolles and CNRS Editions, Paris, France, 1995
- [32] Bottino, D.C., Fauci, L.J., A computational model of ameboid deformation and locomotion, *The European Biophysics Journal*, 1998, vol. 27, pp 532-539
- [33] Boulbitch, A., Quinn, B. and Pink, D., Elasticity of the Rod-Shaped Gram-Negative Eubacteria, *Physical Review Letters*, 2000, vol. 85, No. 24, pp 5246-5249
- [34] Bracewell, R., *The Fourier transform and its applications*, McGraw-Hill, 2nd Edition, 1986

- [35] Bradley, C.P., Harris, G.M. and Pullan, A.J., The computational performance of a high-order coupled FEM/BEM procedure in electropotential problems, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2001, vol. 48, No. 11, pp 1238-1250
- [36] Brazier-Smith, P.R., Jennings, S.G. and Latham, J., An investigation of the behaviour of drops and drop-pairs subjected to strong electrical field, *Proceedings of the Royal Society of London*, 1971, vol. 14, No. 1, pp 363-376
- [37] Brazier-Smith, P.R., Stability and shape of isolated and pairs of water drops in an electric field, *Physics of Fluids*, 1971, vol. 14, No. 1, pp 1-6
- [38] Brown, M.J. and Ingber, M.S., Parallelization of a vorticity formulation for the analysis of incompressible viscous fluid flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2002, vol. 39, pp 979-999
- [39] Brown, M.J., Mammoli, A.A. and Ingber, M.S., Parallel multipole implementation of the generalized Helmholtz decomposition for solving viscous flow problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, vol. 55, No. 11, pp 1617-1635
- [40] Brunn, P.O., The deformation of a viscous particle surrounded by an elastic shell in a general time-dependent linear flow field, *Journal of Fluid Mechanics*, 1983, vol. 126, pp 533-544
- [41] Bulcão, A., Loeffler, C. and Oliveira, P.C., High order elements in dual reciprocity boundary element method applied to transient conduction heat transfer, *Métodos Numéricos en Ingeniería*, Spain, 1999
- [42] Candel, S., *Mécanique des fluides*, Dunod Publisher, 2nd Edition, 1995
- [43] Canot, E. and Achard, J.-L., An overview of boundary integral formulations for potential flows in fluid-fluid systems, *Arch. Mech.*, 1991, vol. 43, No. 4, pp 453-498
- [44] Canot, E., *Généralisation de la méthode intégrale aux frontières pour les systèmes fluide-fluide*, Thèse de Doctorat, Institut de Mécanique de Grenoble, INP de Grenoble, 1989
- [45] Canot, E., Stability criteria for capillary/gravity free-surface waves in BEM simulations of viscous potential flows, *Proceedings of the Int. Conference on Boundary Element Techniques*, Queen Mary and Westfield College, London, 6-8 July, 1999 (M.H. Aliabadi, Ed.), pp 321-330
- [46] Carin, M., Barthès-Biesel, D., Edwards-Lévy, F., Postel, C. and Andrei, D.C., Compression of biocompatible liquid-filled HSA-alginate capsules: determination of the membrane mechanical properties, *Biotechnology and Bioengineering Journal*, 2003, vol. 82, No. 2, pp 207-212
- [47] Cariño, R., Robinson, I. and De Doncker, E., Adaptive Integration of singular functions over a triangularized region on a distributed system, *Proceedings of the Seventh SIAM Conference on Parallel Processing for Scientific Computing*, 1994
- [48] Castellanos, A., *Electrohydrodynamics*, Springer-Verlag Series, 1998
- [49] Castellanos, A., González, Nonlinear waves and instabilities on electrified interfaces, *International Conference on Conduction and Breakdown in Dielectric Liquids*, Roma, Italy, July 15-19, 1996
- [50] Castellanos, A., González, Nonlinear electrohydrodynamics of free surfaces, *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 1998, vol. 5, No. 3, pp 334-343
- [51] Chen, Y. and Atkinson, K., Solving a Single Layer Integral Equation On Surfaces in R^3 , *Reports on Computational Mathematics*, 1994, No. 51, Department of Mathematics, University of Iowa

- [52] Charles, G.E. and Mason, S.G., The coalescence of liquid drops with flat liquid interfaces, *The Journal of Colloid Science*, 1960, vol. 15, pp 236-267
- [53] Chien, D. D-K., Piecewise polynomial collocation for integral equation on surfaces in three dimensions, Ph.D. thesis Mathematics Graduate College of the University of Iowa, May 1991
- [54] Chen, K., Improving the accuracy of DRBEM for convective partial differential equations, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1999, vol. 23, pp 639-644
- [55] Chen, S.H. and Cheung, Y.K., A modified Lindstedt-Poincaré method for a strongly non-linear two degree-of-freedom system, *Journal of Sound and Vibration*, 1996, vol. 193, No. 4, pp 751-762
- [56] Chen, W. and Tanaka, M., A meshless, integration-free, and boundary-only RBF technique, *Computer and Mathematics with Applications*, 2002, vol. 43, pp 397-391
- [57] Chen, W. RBF-based meshless boundary knot method and boundary particle method, *Proceedings of China Congress on Computational Mechanics*, 2001, pp 319-326
- [58] Chen, W., Meshfree boundary particle method applied to Helmholtz problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2002, vol. 26, pp 577-581
- [59] Chen, W., New RBF collocation methods and kernel RBF with applications, *Computational Science and Engineering*, 2002, vol. 26, pp75-86
- [60] Chen, W., Somme recent advances on the RBF, *Proceedings of BEM, Portugal*, 2002, vol. 24, pp 125-134
- [61] Chen, Y., Sprecher, A.F. and Conrad, H., Electrostatic particle-particle interactions in electrorheological fluids, *Journal of Applied Physics*, 1991, vol. 70, No. 11, pp 6796-6803
- [62] Chien, D. D.-K. and Atkinson, K., A discrete Galerkin method for a hypersingular boundary integral equation, *IMA Journal on Numerical Analysis*, 1997, vol. 17, pp 463-478
- [63] Chien, D. D.-K., C^2 surfaces built from zero sets of the 7-direction dox spline, *IMA Conference on the Mathematics of surfaces*, 1996, pp 463-474, Clarendon Press
- [64] Cisse, L., Bamji, S.S. and Bulinski, A.T., Electric field calculations for needle-plane geometry and space charge in polyethylene, *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 2003, vol. 10, No. 1, pp 176-180
- [65] Clague, D.S. and Wheeler, E.K., Dielectrophoresis manipulation of macromolecules: The electric field, *Physical Review E*, vol. 64, 026605
- [66] Coelho, C.P., White, J. and Miguel Silveira, L., Dealing with stiffness in time-domain Stokes flow simulation, *NSTI-Nanotech 2004*, vol. 2, pp 387-390
- [67] Coulter, C.B., The isoelectric point of red blood cells and its relation to agglutination, *The journal of General Physiology*, 1920, vol. 3, pp 309-406
- [68] Cummings, E.B., A comparison of theoretical and experimental electrokinetic and dielectrophoretic fields, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Paper*, 2002, pp 3193-3210
- [69] Datta, S. and Deo, S., Stokes flow with slip and Kuwabara boundary conditions, *Proceedings of Indian Academic Science (Math Science)*, 2002, vol. 112, No. 3, pp 436-475
- [70] Davidson, M., Boundary integral prediction of the spreading of an inviscid drop impacting on a solid surface, *Chemical Engineering Science*, 2000, vol. 55 pp 1159-1170

- [71] Denaro, F.M., On the application of the Helmholtz-Hodge decomposition in projection methods for incompressible flows with general boundary conditions, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2003, vol. 43, pp 43-69
- [72] Diaz, A. and Barthès-Biesel, D., Effect of membrane viscosity on the dynamic response of an axisymmetric capsule, *Physics of Fluids*, 2001, vol. 13, No. 12, pp 3835-3838
- [73] Diaz, A., Pelekasis, N. and Barthès-Biesel, D. Transient response of a capsule subjected to varying flow conditions : effect of internal fluid viscosity and membrane elasticity. *Physics of Fluids*, 2000, vol. 12, pp 948-957
- [74] Dillon, R., Fauci, L.J., A microscale model of bacterial and biofilm dynamics in porous media, *Biotechnology and Bioengineering*, 2000, vol. 68, No. 5
- [75] Dimova, R., Membranes (part 1): Mechanics and rheology, *Colloidal Science and Biophysics Seminar*, Max Planck Institute of Colloidal and Interfaces, January 2003
- [76] Davies, A.J. and Crann, D., Parallel Laplace transform methods for boundary element solutions of diffusion-type problems, *Electronic Journal of Boundary Elements*, 2002, vol. BETEQ 2001, No. 2, pp 231-238
- [77] Divo, E. and Kassab, A., A generalized boundary-element method for steady-state heat conduction in heterogeneous anisotropic media, *Numerical Heat Transfer*, 1997, Part B, vol. 32, pp 37-61
- [78] Divo, E. and Kassab, A., *Boundary element method for heat conduction with applications in non-homogeneous media*, WIT Press, 2002
- [79] Divo, E. and Kassab, A., Generalized boundary integral equation for transient heat conduction in heterogeneous media, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 1998, vol. 12, No. 3, pp 364-373
- [80] Divo, E. and Kassab, A., Generalized boundary integral equation for transient heat conduction in heterogeneous media, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 1998, vol. 12, No. 3, pp 364-373
- [81] Divo, E. and Kassab, A.J., A generalized BIE for transient heat conduction in heterogeneous media, 1998, vol. 12, No. 3, pp 364-373
- [82] Divo, E. and Kassab, A.J., A generalized boundary integral equation for axisymmetric heat conduction in non-homogeneous media, *Proceedings of BEM XIX. The 19th International Conference on Boundary Elements*, Rome, Italy, 1997, pp 453-464
- [83] Divo, E. and Kassab, A.J., A generalized boundary-element method for steady-state heat conduction in heterogeneous anisotropic media, *Numerical Heat Transfer*, Part B: Fundamentals, 1997, vol. 32, No. 1, pp 37-61
- [84] Divo, E. and Kassab, A.J., Boundary integral formulation for non-linear heat conduction in anisotropic heterogeneous media, *Proceedings of BEM XX. The 20th International Conference on Boundary Elements*, Orlando, Florida, 1998, pp 659-669
- [85] Divo, E. Steinthorsson, E., Kassab, A.J. and Bialecki, R., An iterative BEM/FVM protocol for steady-state multi-dimensional conjugate heat transfer in compressible flows, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2002, vol. 26, pp 447-454
- [86] Divo, E., Kassab, A.J. and Rodriguez, F., Domain decomposition for 3D boundary elements in non-linear heat conduction, *Proceedings of the ASME Summer Heat Transfer Conference*, 2003, pp 923-932

- [87] Divo, E., Kassab, A.J., Generalized boundary integral equation for heat conduction in non-homogeneous media: recent developments on the sifting property, *Engineering Analysis with Boundary Element*, 1998, vol. 22, pp 221-234
- [88] Dumont, N.A. and Noronha, M.A.M., On the correct numerical evaluation of double integrals with a complex quasi-singularity pole, *The 14th Engineering Mechanics Conference of the American Society of Civil Engineers (EM 2000)*, August 2000
- [89] Dutta, P. and Beskok, A., Analytical solution of combined electroosmotic/pressure driven flows in two-dimensional straight channels: finite Debye layer effects, *Analytical Chemistry*, 2001, vol. 73, No. 9, pp 1979-1986
- [90] Eck, M. and Hoppe, H., Automatic reconstruction of B-splines surfaces of arbitrary topological type, *Proceeding of the 23rd annual conference on Computer Graphics and Interactive Techniques USA 1996*, pp 325-334
- [91] Eck, M., DeRose, T. and Duchamp T., Multisolution analysis of arbitrary meshes, *Computer Graphics, SIGGRAPH'95 Proceedings*, August, 1995, pp 173-182
- [92] Edwards, D.A., Brenner, H. and Wasan, D.T., *Interfacial transport processes and rheology*, Butterworth-Heinemann Editing Corporation, 1991
- [93] Eggleton, C.D. and Popel, A.S., Large deformation of red blood cell ghosts in a simple shear flow, *Physics of Fluid*, vol. 10, No. 8, pp 1834-1845
- [94] Eisner, L. and Clayton, R., A reciprocity method for multiple-source simulations, *Bulletin of Seismological Society of America*, 2001, vol. 91, No. 3, pp 553-560
- [95] El-Dib, Y.O. and Moatimid, G.M., The instability of a viscoelastic conducting cylindrical interface supporting free-surface currents, *Zeitschrift für Naturforschung*, 2002, vol. 57 a, pp 159-176
- [96] Espelid, T.O. and Genz, A. DECUHR: An algorithm for automatic integration of singular functions over a hyperrectangular region, *Numerical Algorithms*, 1994, vol. 8, No. 3, pp 201-220
- [97] Evans, E.A. and Hochmuth, R.M., Membrane viscoelasticity, *Biophysical Journal*, 1976, vol. 16, pp 1-11
- [98] Faiz, J. and Ojaghi, M., Novel techniques for treating singularity problems in the boundary element method applied to electric field evaluation within the tank of a power transformer, *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2000, vol. 15, No.2, pp 592-598
- [99] Feng, J.J., Krichnamoorthy, S., Chen, Z.J. and Makhijani, V.B., Numerical and analytical studies of AC electric field in dielectrophoretic electrode arrays, *Journal of Computational Nanoscience and Nanotechnology*, 2002, pp 85-88
- [100] Feng, J.Q. and Beard, K.V., Three-dimensional oscillation characteristics of electrostatically deformed drops, *Journal of Fluid Mechanics*, 1991, vol. 227, pp 429-447
- [101] Feng, J.Q., Dielectrophoresis of a deformable fluid particle in a nonuniform electric field, *Physical Review, E*, 1996, vol. 54, No. 4, pp 4438-4441
- [102] Feng, J.Q., The oscillations of a bubble moving in an inviscid fluid, *SIAM, Journal of Applied Mathematics*, 1992, vol. 52, No. 1, pp 1-14
- [103] Feng, Z.C., Instability caused by the coupling between non-resonant shape oscillation modes of a charged conducting drop, *Journal of Fluid Mechanics*, 1997, vol. 333, pp 1-21

- [104] Fiedler, S., Shirley, S.G., Schnelle, T. and Fuhr, G., Dielectrophoretic sorting of particles and cells in a microsystem, *Journal of Analytical Chemistry*, 1998, vol. 70, pp 1909-1915
- [105] Fischer, G., Tilg, B., Wach, P., Lafer, G. and Rucker, W., Analytical validation of the BEM-application of the BEM to the electrocardiographic forward and inverse problem, *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 1998, vol. 55, pp 99-106
- [106] Florez, W.F., Power, H. and Janna, F.C., Multi-domain dual reciprocity for the solution of inelastic non-Newtonian flow problems at low Reynolds number, *Journal of Computational Mechanics*, 2001, vol. 27, pp 396-411
- [107] Fouillet, Y. and Achard, J.-L., Microfluidique discrète et biotechnologie, *Compte rendu de Physique*, 2004, No. 5, pp 577-588
- [108] Francisco, S.Y., Taunton, J.W. and Lightfoot, E.N., Transient creeping flow around spheres, *AIChE Journal*, 1970, 99 386-391
- [109] Fuchs, O. Fouillet, Y. et Achard, J.-L., Coalescence de micro-gouttes assistée par des forces électriques, *Congrès de Microfluidique de la Société Hydrotechnique de France*, pp 37-46, 3-5, Décembre 2002, Toulouse
- [110] Fuhr, G., Positioning and manipulation of cells and microparticles using miniaturized electric field traps and travelling waves, *Sensors and Materials*, JP, 1995, vol 7, n°2, 131-146
- [111] Gañán-Calvo, A.M., Dávila, J. and Barrero, A., Current and droplet size in the electro spraying of liquids scaling laws, *Journal of the Aerosol Science*, 1997, vol. 28, No. 2, pp 249-275
- [112] Gençer, N.G. and Tanzer, I.O., Forward problem solution of electromagnetic source imaging using a new BEM formulation with high-order elements, *Physics in Medicine and Biology*, 1999, vol. 44, pp 2275-2287
- [113] Glarum, S.H. Dielectric relaxation of polar liquids, *J. Chem. Phys*, 1960, vol. 33, pp 1371-
- [114] Golberg, M.A., and Chen, C.S., The theory of radial basis functions applied to the BEM for inhomogeneous partial differential equations, *Boundary Elements Communications*, 1994, vol. 5, pp 57-61
- [115] Golberg, M.A., Chen, C.S. and Karur, S.R., Improved multiquadric approximation for partial differential equations, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1996, vol. 18, pp 9-17
- [116] González, H. and Castellanos, A., The effect of an axial electric field on the stability of a rotating dielectric cylindrical liquid bridge, *Physics of Fluids*, 1990, vol. 2, No. 11, pp 2069-2071
- [117] Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M., *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, 1980
- [118] Green, N.G. and Morgan, H., Dielectrophoresis of submicrometer Latex spheres. 1. Experimental results, *Journal of Physics and Chemistry, B* 1999, vol. 103, pp 41-50
- [119] Green, N.G., Ramos, A. and Morgan, H., Numerical solution of the dielectrophoretic and travelling wave forces for interdigitated electrode arrays using the finite elements method, *Journal of Electrostatics*, 2002, vol. 56, n°2, pp 235-254
- [120] Green, N. G., Ramos, A., Gonzalez, A., Morgan, H. and Castellanos, A., Fluid flow induced by non-uniform AC electric fields in electrolytes on microelectrodes III: Observation of streamlines and numerical simulation, *Physical Review E*, 2002, 66(026305)

- [121] Green, N.G. and Morgan H., Dielectrophoretic investigations of sub-micrometers latex spheres, *J. Phys. D: Applied Physics*, 1997, vol. 30 pp 2626-2633
- [122] Grigor'ev, A.I. and Gaibov, A.R., On acoustic radiation accompanying vibrations of a charged droplet, *Technical Physics*, 2001, vol. 46, No.115, pp 1351-1357
- [123] Grigor'ev, A.I. and Shiryayeva, S.O., Capillary oscillations of a charged droplet of viscous fluid with finite conductivity, *Fluid Dynamics*, 1997, vol. 32, No.5, pp 704-713
- [124] Grigor'ev, A.I., Electric dispersion of fluid under the oscillation instability of its free surface, *Technical Physics*, 2000, vol. 45, No. 5, pp 543-548
- [125] Ha, J.-W. and Yang, S.-M., Electrohydrodynamics and electrorotation of a drop with fluid less conductive than that of the ambient fluid, *Physics of Fluids*, 2000, vol. 12, No. 4, pp 764-772
- [126] Happel, J. and Brenner, H., *Low Reynolds number hydrodynamics*, Martinus Nijhoff Publishers, 1986
- [127] Hardy, R.L., Multiquadratic equations of topography and other irregular surfaces, *Journal of Geophysical Research*, 1971, vol. 76, No. 8, pp 1905-1915
- [128] Hartley, G.S., The application of the Debye-Hückel theory to colloidal electrolytes, *Faraday Transactions Society*, 1935, vol. 31, pp 31-50
- [129] Hartley, L.F., Kaler, K.V.I.S. and Paul, R., Quadrupole levitation of microscopic dielectric particles, *Journal of Electrostatics*, 1999, vol. 46, pp 233-246
- [130] Hasley, T.C., Rheology of electrorheological fluids, *Physical Review Letters*, 1992, vol. 68, No. 10, pp 1519-1522
- [131] Helmy, A. and Barthès-Biesel, D., Migration of a spherical capsule freely suspended in an unbounded parabolic flow, *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, 1982, vol. 1, N° 5, p. 859-88
- [132] Hénon, S., Lenormand, G., Richert, A. and Gallet, F., A new determination of the shear modulus of the human erythrocyte membrane using optical tweezers, *Biophysical Journal*, 1999, vol. 76, pp 1145-1151
- [133] Hisao, A. and Yoshihara, S., Three-dimensional large amplitude drop oscillations: experiments and theoretical analysis, *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, vol. 393, pp 309-332
- [134] Hopkins, M.M. and Fauci, L.J., A computational model of the collective fluid dynamics of motile micro-organisms, *Journal of Fluid Mechanics*, 2002, vol. 455, pp 149-174
- [135] Hsiao, S.-C., Mammoli, A.A. and Ingber, M.S., The evaluation of domain integrals in complex multiply-connected three-dimensional geometries for boundary element methods, *International Association for Boundary Element Methods*, UT Austin, USA, May 28-30, 2002
- [136] Huang, Y., Hölzel, R. Pethig, R. and Wang, X.-B., Differences in the AC electrodynamic of viable and non-viable yeast cells determined through combined dielectrophoresis and electrorotation studies, *Journal of Physics for Medicine and Biology*, 1992, vol. 37, no 7, pp 1499-1517
- [137] Huang, Y., Wang, X.-B., Tame, J.A. and Pethig, R., Electrokinetic behavior of colloidal particles in travelling electric fields: studies using yeast cells, *Journal of Physics, D: Applied Physics*, vol. 26, pp 1528-1535
- [138] Hughes, M.P., Pethig, R. and Wang, X.-B., Dielectrophoretic forces on particles in travelling electric fields, *Journal of Physics D: Applied Physics*, 1995, vol. 28, pp 474-482

- [139] Hui, C.-Y., Yeh, J.-L.A. and Tien, N.C., Calculation of electrostatic forces and torques in MEMS using path-independent integrals, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2000, vol. 10, p. 477–482
- [140] Ikeuchi, M. and Onishi, K., Boundary elements in transient convective diffusion problem, *Boundary Elements Vth Proceedings*, 1983, pp 275-282
- [141] Ikeuchi, M., Sakakihara, M. and Onishi, K., Constant boundary element solution for steady-state convection diffusion equation in three dimensions, *The Transactions of the IECE of Japan*, June 1983, vol. E 66, No. 6, pp 373-376
- [142] Ingber, M.S. and Kempka, S.N., A Galerkin implementation of the generalized Helmholtz decomposition for vorticity formulations, *Journal of Computational Physics*, 2001, vol. 169, pp 215-237
- [143] Ingber, M.S., Morrow, C.W., Kempka, S.N., A Galerkin implementation of the generalized Helmholtz decomposition for use in vorticity formulations, *Boundary Elements XXI*, 1999, pp 397-410
- [144] Ishii, M., *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow*, Eyrolles Editions, 1975
- [145] Jeans, J.H., *The mathematical theory of electricity and magnetism*, Cambridge University Press, 1927
- [146] Jones, T.B. and Bliss, G.W., Bubble dielectrophoresis, *Journal of Applied Physics*, 1977, vol. 48, No. 4, pp 1412-1417
- [147] Jones, T.B., Dispensing picoliter droplets using dielectrophoretic (DEP) microactuation, *Microscale Thermophysical Engineering*, 2004, vol. 8, pp 271-283
- [148] Jones, T.B., *Electromechanics of particles*, Cambridge University Press, 1995
- [149] Jones, T.B., An electromechanical interpretation of electrowetting, *Journal of Micromech. Microeng.*, 2005, vol. 15, pp 1184-1187
- [150] Joseph, D.D., Domain perturbations: the higher order theory of infinitesimal water waves, *Archives for Rational Mechanics and Analysis*, 1973, vol. 51, pp 295-303
- [151] Karcher, H., Lammerding, J., Huang, H., Lee, R.T., Kamm, R.D. and Kaazempur-Mofrad, M. R., A Three-Dimensional Viscoelastic Model for Cell Deformation with Experimental Verification, *Biophysical Journal*, 2003, vol. 85, pp 3336–3349
- [152] Kassab, J.J., Karur, S.R. and Ramachandran, P.A., Quasilinear boundary element method for nonlinear Poisson type problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1995, vol. 15, pp 277-282
- [153] Kassab, A.J. and Divo, E., A generalized boundary integral equation for isotropic heat conduction with spatially varying thermal conductivity, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1996, vol. 18, pp 273-286
- [154] Kassab, A.J. and Divo, E., Authors' reply to Bonnet and Guiggiani comments, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1998, vol. 22, pp 241-244
- [155] Kassab, A.J., Divo, E., Kapat, J.S. and Chyu, M.K., Retrieval of multi-dimensional heat coefficient distribution using an inverse-BEM-based regularized algorithm: numerical and experimental examples, *Proceedings of the ASME, Heat Transfer Division*, 1999, vol. 1, pp 235-244
- [156] Klingenberg, D.J., Van Swol, F. and Zukoski, C.F., The small shear rate response of electrorheological suspensions. I. Simulation in the point-dipole limit, *Journal of Chemical Physics*, 1991, vol. 94, No. 9, pp 6160-6169
- [157] Klingenberg, D.J., Van Swol, F. and Zukoski, C.F., The small shear rate response of electrorheological suspensions. II. Extension beyond the point-dipole limit, *Journal of Chemical Physics*, 1991, vol. 94, No. 9, pp 6170-6178

- [158] Ko, S.-C., Lee, S. and Hsueh, C.-H., Viscoelastic stress relaxation in film/substrate systems-Kelvin model, *Journal of Applied Physics*, vol. 93, No. 5, 2003, pp 2453-2457
- [159] Kobayashi, K., Ohura, Y. and Onishi, K., Small expert BEM.FEM system - KYOKAI, *Boundary Elements VIIth Proceedings*, 1985, vol. 2, No. 11, pp 3-12
- [160] Köhl, M., Rjasanow, S., Multifrequency analysis for the Helmholtz equation, *International Association for Boundary Element Methods*, UT Austin, USA, May 28-30, 2002
- [161] Koiller, J. and Raupp, M.A., Spectral methods for Stokes flows: the Lorentz operator, *Brazilian Society for Computational and Applied Mathematics*, 1998, vol. 17, No. 3, pp 341-369
- [162] Kondrat'ev, V.A., Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points, *Journal of The American Mathematical Society*, 1968, vol. 16, pp 227-313
- [163] Kudela, H., Numerical study of the motion and deformation of two-dimensional bubbles by a vortex method, *Vortex Flows and Related Numerical Methods*, 1993, pp 191-205
- [164] Kuroki, T., Onishi, K. and Tosaka, N., Thermal fluid flow with velocity evaluation using boundary elements and penalty function method, *Boundary Elements VIIIth Proceedings*, 1985, vol. 1, No. 2, pp 107-114
- [165] Kwak, S. and Pozrikidis, C., Effect of membrane bending stiffness on the axisymmetric deformation of capsules in uniaxial extensional flow, *Physics of Fluids*, 2001, vol. 13, No. 5, pp 1234-1242
- [166] Kwon, Y. and Cho, K.S., Time-strain nonseparability in viscoelastic constitutive equations, *The Journal of Rheology*, vol. 45, No. 6, 2001, pp 1441-1452
- [167] Ladyzhenskaya, O.A., *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach Science Publishers, 1963
- [168] Lahtmann, A. and Haberland, C., Comparative application of finite element and boundary element methods to heat transfer in structures, *Numerical Methods in Thermal Problems VII, Part I*, 1991, pp 5-16
- [169] Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., *Electrodynamics of continuous media*, Pergamon Press, Oxford, 1960, section 15
- [170] Lee, S.M. and Kang, I.S., Three-dimensional analysis of a steady-state shape and small-amplitude oscillation of a bubble in uniform and non-uniform electric fields, 1999, vol. 384, pp 59-91
- [171] Lee, S.M., Im, D.J. and Kang, I.S., Circulating flows inside a drop under time-periodic nonuniform electric fields, *Physics of Fluids*, 2000, vol. 12, No. 8, pp 1899-1910
- [172] Leonardi, A., Medoro, G., Manaresi, N., Tartagnit, M. and Guerrieri, R., Simulation methodology for dielectrophoresis in microelectronic Lab-on-a-chip, *Modeling and Simulation of Microsystems 2002*, ISBN 0-9708275-7-1
- [173] Léonetti, M., On biomembrane electrodiffusive models, *The European Physical Journal B*, 1998, vol. 2, pp 325-340
- [174] Liao, S.-J., Boundary element method for general nonlinear differential operators, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1997, vol. 20, pp 91-99
- [175] Liao, S.-J., General boundary element method for Poisson equation with spatially varying conductivity, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1998, vol. 21, pp 23-38

- [176] Lindell, I.V. and Dassios, G., Generalized Helmholtz decomposition and static electromagnetics, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 2000, vol. 14, No. 10, pp 1415-1428
- [177] Liu, Y.J., On the simple-solution method end non-singular nature of the BIE/BEM - a review and some results, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, 2000, vol. 24, pp 789-795
- [178] Lundgaard, L.E., Berg, G., Pederson, A. and Nilsen, P.J., Electrocoalescence of water drop pairs in oil, *Proceedings of the 14th International Conference on Dielectric Liquids*, 2002, Austria, July 7-12th, 2002
- [179] Machane, R. and Canot, E., High-order schemes in boundary element methods for transient non-linear free surface problems, *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, 1997, vol. 24, pp 1049-1072
- [180] Machane, R., Achard, J.-L. and Canot, E., A new velocity-vorticity boundary integral formulation for Navier-Stokes equations, *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, 2000, vol. 34, pp 47-63
- [181] Machane, R., Contribution de la méthode intégrale aux frontières au suivi d'interfaces, Thèse de Doctorat, Formation Doctorale en Mécanique, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1997
- [182] Markx, G.H. and Pethig, R., Dielectric separation of cells: continuous separation, *Journal of Biotechnology and Bioengineering*, 1995, vol. 45, pp 337-343
- [183] Markx, G.H., Huang, Y., Zhou, X.-F. and Pethig, R., Dielectrophoretic characterization and separation of micro-organisms, *Journal of Microbiology*, 1994, vol. 140, pp 585-591
- [184] Markx, G.H., Talary, M.S. and Pethig, R., Separation of viable and non-viable yeast using dielectrophoresis, *Journal of Biotechnology*, 1994, vol. 32, pp 29-37
- [185] Martinsen, f. G., Grimnes, S. and Schwan, H.P., Interface phenomena and dielectric properties of biological tissue, *Encyclopedia of Surface and Colloid Science*, 2002, p.A1 2643-2652
- [186] Matsumoto, T. and Tanaka M., A boundary treatment of domain integral term for initial condition in time-domain boundary element method for diffusion equation, *Electronic Journal of Boundary Elements*, 2002, vol. BETEQ 2001, No. 3, pp 377-385
- [187] Maxwell, J.C., *A treatise on electricity and magnetism*, vol. 1, Clarendon Press, Oxford, 1998
- [188] May-Duy, N. and Tran-Cong, T., Neural networks for BEM analysis of steady viscous flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2003, vol. 41, pp 743-763
- [189] Medoro, G., Manaresi, N., Leonardi, A., Altomare, L., Tartagni, M. and Guerrieri, R., A lab-on-a-chip for cell detection and manipulation, *IEEE*, 2002, pp 472-477
- [190] Medoro, G., Manaresi, N., Tartagni, M. and Guerrieri, R., An integrated sensor/actuator for bio-particles manipulation, *Private Communication*, 1999
- [191] Medoro, G., Manaresi, N., Tartagni, M. and Guerrieri, R., CMOS-only sensors and manipulators for microorganisms, *IEEE, International Electron Devices Meeting 2000*, pp 415-418
- [192] Meiron, D.I., Baker, G.R. and Orszag, S.A., Analytic structure of cortex sheet dynamics. Part 1. Kelvin-Helmholtz instability, *Journal of Fluid Mechanics*, 1982, vol. 114, pp 283-298

- [193] Melcher, J.R. and Taylor, G.I., Electrohydrodynamics: A review of the role of interfacial shear stresses, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1969, vol. 1, pp 111-146
- [194] Meradji, S., Lyubimova, T.P., Lyubimov, D.V. and Roux, B., Numerical simulation of a liquid drop freely oscillating, *Crystal Research and Technology*, 2001, vol. 36, pp 729-744
- [195] Milovanović, G.V., On high precision methods for computing integrals of oscillatory functions, *Fourth International Colloquium on Numerical Analysis*, Plovdiv, 1995, pp 123-130
- [196] Milroy, M.F., Vichers, G.W. and Bradley, C., An adaptive radial basis function approach to modeling scattered data, *Journal of Applied Science and Computing*, 1994, pp 319-349
- [197] Mischel, M., Voss, A. and Pohl, H.A., Cellular spin resonance in rotating electric fields, *Journal of Biological Physics*, 1982, vol. 10, pp 223-226
- [198] Mitra, A.K., Use of eigenfunctions in the optimization of the grid for the boundary element method, *Journal of Computational Physics*, 1992, vol. 100, pp 246-252
- [199] Mogilevckaya, S.G., Crouch, S.L. and Wang, J., A Galerkin boundary integral method for an elastic plane with multiple inclusions, holes and cracks, *Electronic Journal of Boundary Elements*, 2002, vol. BETEQ 2001, No. 3, pp 311-319
- [200] Montes, F.J., Galán, M.A. and Cerro, R.L., Comparison of the theoretical and experimental characteristics of oscillating bubbles, *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 2002, vol. 41, pp 6235-6245
- [201] Moore, D.W., The boundary layer on a spherical gas bubble, *Journal of Fluid Mechanics*, 1963, vol. 16, pp 161-176
- [202] Morino, L. and Tseng, K., A general theory of unsteady compressible potential flows with applications to aeroplanes and rotors, *Boundary Element Methods in Nonlinear Fluid Dynamics. Development in Boundary Elements Methods*, Elsevier Applied Science, 6th ed., 1990, pp 183-245
- [203] Morino, L., Bernardini, G. and Gennaretti, M., A boundary element method for the aerodynamic analysis of rotors in arbitrary motions, *International Association for Boundary Element Methods*, UT Austin, USA, May 28-30, 2002
- [204] Morino, L., Helmholtz and Poincaré potential-vorticity decompositions for the analysis of unsteady compressible viscous flows, *Boundary Element Methods in Nonlinear Fluid Dynamics. Development in Boundary Elements Methods*, Elsevier Applied Science, 6th ed., 1990, pp 1-54
- [205] Morino, L., Helmholtz decomposition revised: vorticity generation and trailing edge condition Part 1: Incompressible flows, *Journal of Computational Mechanics*, vol. 1, No. 1, pp 65-90
- [206] Morino, L., Helmholtz decomposition revised: vorticity generation and trailing edge condition, Part 1: Incompressible flows, *Computational Mechanics*, 1986, vol. 1, pp 65-90
- [207] Morrison, C.A., Leavitt, R.P. and Wortman, D.E., The extended Rayleigh theory of the oscillation of liquid droplets, *Journal of Fluid Mechanics*, 1981, vol. 104, pp 295-309
- [208] Morse, P.M. and Feshbach, H., *Methods of theoretical physics*, vol. 1, Mc Graw-Hill, 1965
- [209] Morse, P.M. and Feshbach, H., *Methods of theoretical physics*, vol. 2, Mc Graw-Hill, 1965

- [210] Müller, T., Gerardino, A., Schnelle, T., Shirley, S.G., Bordon, F., De Gasperis, G., Leoni, R. and Fuhr, G., Trapping of micrometre and sub-micrometre particles by high-frequency electric fields and hydrodynamic forces, *Journal of Physics D: Applied Physics*, 1996, vol. 29, pp 340-349
- [211] Nardini, D. and Brebbia, C.A., A new approach to free vibration analysis using boundary elements, *Proceedings of the 4th International Conference on the Boundary Elements*, 1982, pp 312-326
- [212] Nicaud, F. and Schönfeld, T., Integral boundary conditions for unsteady biomedical CFD applications, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2002, vol. 40, pp 457-465
- [213] Nicholson, D.W. and Kassab, A.J., Explicit boundary element method for nonlinear solid mechanics using domain integral reduction, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2000, vol. 24, pp 707-713
- [214] Niku, S.M. and Adey, R.A., Computational aspect of the dual reciprocity method for dynamics, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1996, vol. 18, pp 43-61
- [215] Nilson, R. and Griffiths, S.K., Inverted method for simulation of electrokinetic transport in microchannel devices, *Journal of Modeling and Simulation of Microsystems*, 2001, pp 210-213
- [216] Nowak, A.J. and Partdridge, P.W., Comparison of the dual reciprocity and the multiple reciprocity methods, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1992, vol. 10, pp 155-160
- [217] Okada, H., Rajiyah, H. and Atluri, S.N., A novel displacement gradient boundary element method for elastic stress analysis with high accuracy, *Journal of Applied Mechanics*, 1988, vol. 55, pp 786-794
- [218] Onishi, K. and Ohara, Y., Direct method of solution for general boundary value problem of the Laplace equation, *Boundary Elements XXIIth Proceedings*, Cambridge Sept. 4-6, 2000, pp 203-210
- [219] Onishi, K., Kuroki, T. and Tanaka, M., An application of a boundary element method to incompressible laminar viscous flows, *Engineering Analysis*, 1984, vol. 1, No. 3, pp 122-127
- [220] Onishi, K., Kuroki, T. and Tanaka, M., An application of a boundary element method to natural convection, *Applied Mathematics Modelling*, Dec. 1984, vol. 8, pp 383-390
- [221] Onishi, K., Tosaka, N. and Tanaka, M. Conduction, convection, and radiation in heat transport by BEM, *Boundary Elements VIIIth Proceedings*, 1985, vol. 1, No. 2, pp 3-12
- [222] Partridge, P.W., Brebbia, C.A. and Wrobel, L.C., *The dual reciprocity boundary element method*, Computational Mechanics, Elsevier Applied Science, 1992
- [223] Partridge, P.W., Towards criteria for selecting approximation functions in the Dual Reciprocity Method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2000, vol. 24, pp 519-529
- [224] Patankar, N.A., Direct numerical simulation of moving charged, flexible bodies with thermal fluctuations, *Journal of Modeling and Simulation of Microsystems*, 2002, pp 32-35
- [225] Paul, R. and Kaler, K.V.I.S., Theory of electrode polarization in dielectrophoresis and electrorotation. 1 The study of nonhomogeneous fields arising from hemispherical electrodes in ionic media, *Journal of Colloid and Interface Science*, 1997, vol. 194, pp 225-238
- [226] Peskin, C.S., The immersed boundary method, *Acta Numerica* 2002, vol. 11, pp 479-517

- [227] Pethig, R., Dielectric and electronic properties of biological materials, John Wiley and Sons, Ltd, 1979
- [228] Pethig, R., Huang, Y., Wang, X.-B. and Burt, J.P.H., Positive and negative dielectrophoresis collection of colloidal particles using interdigitated castellated microelectrodes, *Journal of Physics D: Applied Physics*, 1992, Vol. 24, pp 881-888
- [229] Pham, P., Modélisation d'un dispositif de diagnostic moléculaire ultrasensible : étapes de concentration de nanoparticules superparamagnétiques et hybridation d'oligonucléotides sur support fonctionnalisé par micropompe Marangoni, Thèse de Doctorat, Ec. doct. Mécanique des Fluides et Transferts, INP de Grenoble, 2001
- [230] Pohl, H.A., Dielectrophoresis, Cambridge University Press, 1978
- [231] Pozrikidis, C., The instability of a moving viscous drop, *Journal of Fluid Mechanics*, 1990, vol. 210, pp 1-21
- [232] Premat, E., Prise en compte d'effets météorologique dans une méthode d'éléments finis de frontière, Thèse de Doctorat, Formation Doctorale en Acoustique, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2000
- [233] Prosperetti, A., On the oscillations of drops and bubbles in viscous liquids, Private Communication
- [234] Queffélec, H., Topologie, Edition Dunod, 2002
- [235] Quéguiner, C. and Barthès-Biesel, D., Axisymmetric Motion of Capsules Through Cylindrical Channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 1997, vol. 348, pp 349-376
- [236] Rajković, P. M., On integration of nearly singular functions by the quadratures over the semicircle with equal weights, *Mechanics, Automatic Control and Robotics*, vol. 3, No. 12, pp 359-364, 2002
- [237] Ramachandran, P.A. and Balakrishnan, K., Radial basis functions as approximate particular solutions: review of recent progress, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2000, vol. 24, pp 575-582
- [238] Rejniak, K.A., Kliman, H.J. and Fauci, L.J., A computational model of the mechanics of growth of the villous trophoblast bilayer, to appear in the *Journal of Mathematical Biology*, 2004
- [239] Reuss, F.F. Notice sur un nouvel effet de l'électricité galvanique, *Mémoires de la Société Impériale de Naturalistes de Moscou*, 1809, vol. 2, pp 327-337
- [240] Rezkin, S.N., Yarin, A.L., Theron, A. and Zussman, E., Transient and steady shapes of droplets attached to a surface in a strong electric field, *Journal of Fluid Mechanics*, 2004, vol. 516, pp 349-377
- [241] Riera, J.J. and Fuentes, M.E., Electric lead field for a piecewise homogeneous volume conductor model of the head, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 1998, vol. 45, No. 6, pp 746-753
- [242] Rodriguez, F., Divo, E. and Kassab, A.J., A strategy for BEM modeling of large-scale three dimensional heat transfer problems, *Proceedings of SECTAM XXI, Recent Advances in Theoretical and Applied Mechanics*, Orlando, Florida, May 19-21, 2002, pp 645-654
- [243] Russel, W.B., The rheology of suspensions of charged rigid spheres, *Journal of Fluid Mechanics*, 1978, vol. 85, No. 2, pp 209-232
- [244] Sabry, A.A., Symmetric and asymmetric stabilities of charged liquid drops, *Acta Physica*, 1980, vol. 101A, pp 223-242
- [245] San-Martin, S.M., Sebastián, J.-L., Sancho, M. and Miranda-Pantoja, J.-M., Electric field distribution in realistic cell shape models, XXVIIth General Assembly of the International Union of Radio Science, August, 17-24, 2002, Maastricht, the Netherlands

- [246] Šarler, B. and Kuhn, G., Dual reciprocity boundary element method for convective-diffusive solid-liquid phase change problems, Part 1. Formulation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1998, vol. 21, pp 53-63
- [247] Šarler, B. and Kuhn, G., Dual reciprocity boundary element method for convective-diffusive solid-liquid phase change problems, Part 2. Numerical examples, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1998, vol. 21, pp 65-79
- [248] Šarler, B., DRBEM for heat transfer and fluid flow problems, *Electronic Journal of Boundary Elements*, 2002, vol. BETEQ 2001, No. 3, pp 360-367
- [249] Sarpkaya, T., Computational methods with vortices, *Journal of Fluids Engineering*, 1989, vol. 111, pp 5-45
- [250] Satravaha, P. and Zhu, S., An application of the LTDRM to transient diffusion problems with nonlinear material properties and nonlinear boundary conditions, *Applied Mathematics and Computation*, 1997, vol. 87, pp 127-160
- [251] Schmalholz, S.M., Podladchikov, Y.Y., Viscoelastic folding: Maxwell versus Kelvin rheology, *Geophysical Research Letters*, vol. 28, No. 9, pp 1835-1838
- [252] Schnelle, T., Müller, T. and Fuhr, G., Trapping in AC octopode field cages, *Journal of Electrostatics*, 2000, vol. 50, pp 17-29
- [253] Schnelle, T., Müller, T., Fiedler, S., Fuhr, G., The influence of higher moments on particle behaviour in dielectrophoretic field cages, *Journal of Electrostatics*, 1999, vol. 46, pp 13-28
- [254] Shiryayeva, S.O., Capillary oscillations of a charged viscous spheroidal droplet, *Technical Physics*, 1998, vol. 43, No. 4, pp 366-372
- [255] Shiryayeva, S.O., Asymmetry in the nonlinear resonance interaction of the capillary oscillation modes of a charged droplet, *Technical Physics Letters*, 2000, vol. 26, No. 11, pp 1016-1019
- [256] Shiryayeva, S.O., Grigor'ev, A.I. and Belonozhko, D.F., Bipartition of a strongly-charged droplet during nonlinear oscillations, 2000, vol. 26, No. 10, pp 857-860
- [257] Shiryayeva, S.O., Koromyslov, V.A. and Grigor'ev, O.A., Reduction in the critical conditions for instability of a highly charged droplet moving relative to a medium, *Technical Physics Letters*, 1998, vol. 24, No. 7, pp 523-524
- [258] Shiryeva, S.O. and Grigor'eva, I.D., Growth rate of the instability of a highly charged droplet, *Technical Physics Letters*, 1994, vol. 20, No. 3, pp 214-215
- [259] Singh, K.M. and Tanaka, M., Analytical evaluation of weakly singular integrals for Helmholtz equation, *Transactions of the Japan Society for Computational Engineering and Science*, 1999, No. 0021, pp 1-6
- [260] Sladek, V., Sladek, J. and Tanaka, M., Regularization of hypersingular and nearly singular integrals in the potential theory and elasticity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1993, vol. 36, pp 1609-1628
- [261] Slattery, J.C. and Flumerfelt, R.W., Interfacial phenomena, in *Handbook of multiphase systems*, 1982, No. 1, pp 224-254
- [262] Sozou, C., A rotating spherical liquid drop in an electric field, *Journal of Fluid Mechanics*, 1972, vol. 56, No. 2 pp 305-312
- [263] Stefanescu, A., Kassab, A., A boundary integral method for transient heat diffusion in isotropic non-homogeneous media, *Symposium on Advanced Mathematical and Computational Mechanics Aspects of the Boundary Element Method*, 2001, pp 365-375
- [264] Suehiro, J. and Pethig, R., The dielectrophoretic movement and positioning of a biological cell using a three-dimensional grid electrode system, *Journal of Physics, D: Applied Physics*, 1998, vol. 31, pp 3298-3305

- [265] Sumiyoshitani, S., Three-dimensional model for analysing charge carrier motion around a charged spherical object in the presence of flow and electric field, *Aerosol Science and Technology*, 1996, vol. 24, No. 4, pp 279-289
- [266] Takahashi, S., Hayashi, K., Onishi, K. and Kuroki, T., Boundary elements to phase change problems, *Boundary Elements Vth Proceedings*, 1983, pp 163-172
- [267] Talary, M.S. and Pethig, R., Optical technique for measuring positive and negative dielectrophoretic behaviour of cells and colloidal suspensions, *IEE Proceeding of Science and Measurement Technology*, 1994, vol. 141, No. 5, pp 395-399
- [268] Tam, C.K.W. and Hyman, W.A., Transverse motion of an elastic sphere in a shear field, *Journal of Fluid Mechanics*, 1973, vol. 59, No. 1, pp 177-185
- [269] Tanaka, M. and Chen, W., Dual reciprocity BEM and dynamic programming filter for inverse elastodynamic problem, *Transactions of the Japanese Society for Computational Engineering and Science*, 2000
- [270] Tanaka, M., Matsumoto, T. and Suda, Y., A dual reciprocity boundary element method applied to the steady-state heat conduction problem of functionally gradient materials, *Journal of Boundary Elements*, 2002, vol. BETEQ 2001, No. 1, pp 128-135
- [271] Tanaka, M., Morita, M., Onishi, K. and Kuroki, T., Boundary element method applied to fire simulation, *Boundary Elements Vth Proceedings*, 1983, pp 183-192
- [272] Tanaka, M., Sladek, V. and Sladek, J., Regularization techniques applied to boundary element methods, *Applied Mechanics Review*, 1994, vol. 47, No. 10, p. 457-499
- [273] Taubin, G., Estimating the tensor of curvature of a surface from a polyhedral approximation, *Fifth International Conference on Computer Vision (ICCV'95)*, IEEE, 1995, pp 902-907, June 20-23
- [274] Taylor, G.I. and McEwan, A.D., The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field, *Journal of Fluid Mechanics*, 1965, vol. 22, pp 1-15
- [275] Taylor, G.I., Conical free surfaces and fluid interfaces, *Proceedings of the 11th International Congress of Applied Mechanics*, Munich, 1964, pp 790-796
- [276] Taylor, G.I., Disintegration of water drops in an electric field, *Proceedings of the Royal Society of London*, 1964, vol. 280, pp 383-397
- [277] Taylor, G.I., Drops in an electric field, *Proceedings of the 7th Euromechanics colloquium, Bubbled liquids mechanics*, Grenoble, April, 23-26th, 1968
- [278] Taylor, G.I., The circulation produced in a drop by an electric field, *Proceedings of the Royal Society*, 1966, vol. 280, pp 159-166
- [279] Teubner, M., The motion of charged colloidal particles in electric fields, *Journal of Chemical Physics*, 1982, vol. 76, No. 11, pp 5564-5573
- [280] Torza, S., Cos, R.G. and Mason, S.G., Electrohydrodynamic deformation and burst of liquid drops, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 1971, vol. 269, pp 295-319
- [281] Tosaka, N. and Kakuda, K., Boundary element analysis of steady viscous flows based on P-U-V formulation, *Boundary Elements VIIth Proceedings*, 1985, vol. 2, No. 9, pp 71-80
- [282] Tosaka, N. and Onishi, K., Boundary integral equation formulations for unsteady incompressible viscous fluid by time-differencing, *Engineering Analysis*, 1986, vol. 3, No. 2, pp 101-104
- [283] Tosaka, N. and Onishi, K., Boundary integral equation formulations for unsteady Navier-Stokes fundamental solutions, *Engineering Analysis*, 1985, vol. 2, No. 3, pp 128-132

- [284] Tsamopoulos, J. and Brown, R.A., Nonlinear oscillations of inviscid drops and bubbles, *Journal of Fluid Mechanics*, 1983, vol. 127, pp 519-537
- [285] Tsamopoulos, J. and Brown, R.A., Resonant oscillations of inviscid charged drops, *Journal of Fluid Mechanics*, 1984, vol. 147, pp 373-395
- [286] Turcu, I. and Lucaciu, C.M., Dielectrophoresis: a spherical shell model, *Journal of Physics A.: Mathematical and General*, 1989, vol. 22, p 985-993
- [287] Van't Ent, D., De Munck, J.C. and Kaas, A.L., A fast method to derive realistic BEM models for E/MEG source reconstruction, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2001, vol. 48, No. 12, pp 1434-1443
- [288] Viswanath, D., The Lindstedt-Poincaré technique as an algorithm for computing periodic orbits, *SIAM Review*, 2001, vol. 43, No. 3, pp 478-495
- [289] Voldman, J., Toner, M., Gray, M.L. and Schmidt, M.A., A dielectrophoresis-based array cytometer, *The 11th International Conference on Solid-State Sensors and Actuators*, Munich, Germany, June, 10-14, 2001
- [290] Wagner, K. W., Erklärung der dielektrischen nachwirkungsvorgänge auf grund Maxwellscher verstellungen, *Electrical Engineering (Archiv für Electrotechnik)*, 1914, vol. 2, pp 371-389
- [291] Wang, M. and Troesch, A.W., Numerical stability analysis for free surface flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1997, vol. 24, pp 893-912
- [292] Wang, Q. and Onishi, K., Inverse boundary value problems of the Laplace equation, *VIIth Hydraulic Engineering Software*, Lisbon, June 12-14, 2000, pp 425-436
- [293] Wang, X., Wang, X.-B. and Gascoyne, P.R.C., General expressions for dielectrophoretic force and electrorotational torque derived using the Maxwell stress tensor method, *Journal of electrostatics*, 1997, vol. 39, pp 277-295
- [294] Wang, X., Wang, X.-B., Becker, F.F. and Gascoyne, P.R.C., A theoretical method of electrical field analysis for dielectrophoretic electrode arrays using Green's theorem, *Journal of Physics D.: Applied Physics*, 1996, vol. 29, pp 1649-1660
- [295] Wang, X.-B., Huang, Y., Burt, P.H., Markx, G.H. and Pethig, R., Selective dielectrophoresis confinement of bioparticles in potential energy wells, *Journal of Physics*, 1993, D; *Applied Physics*, vol. 26, pp 1278-1285
- [296] Wang, X.-B., Huang, Y., Hölzel, R., Burt, J.P.H. and Pethig, R., Theoretical and experimental investigations of the interdependence of the dielectric, dielectrophoretic and electrorotational behaviour of colloidal particles, *Journal of Physics, D.: Applied Physics*, 1993, vol. 26, pp 312-322
- [297] Washizu, M. and Jones, T.B., Multipolar dielectrophoretic force calculation, *Journal of Electrostatics*, 1994, vol. 33, pp 187-198
- [298] Winslow, W.M., Induced Fibrillation of Suspensions, *Journal of Applied Physics*, 1949, vol. 20, pp 1134-1140
- [299] Wrobel, L.C. and Brebbia, C.A., The dual reciprocity boundary element formulation for nonlinear diffusion problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1987, vol. 65, pp 147-164
- [300] Wrobel, L.C., Brebbia, C.A. and Nardini, D., The dual reciprocity boundary element formulation for transient heat conduction, *VI International Conference on Finite elements in Water Resources*, Lisbon, Portugal, 1986, pp 801-811
- [301] Wrobel, L.C., Brebbia, C.A., The dual reciprocity boundary element formulation for nonlinear diffusion problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1987, vol. 65, pp 147-164

- [302] Yarin, A.L., Koombhongse, S. and Reneker, D.H., Taylor cone and jetting from liquid droplets in electrospinning of nanofibers, *Journal of Applied Physics*, 2001, vol. 90, No. 9, pp 4836-4846
- [303] Zapryanov, Z. and Tabakova, S., *Dynamics of bubbles, drops and rigid particles*, Kluwer Academic Publisher, 1999
- [304] Zeleny, J., Instability of electrified liquid surfaces, *Physical Review*, 1917, vol. 10, No. 1, pp 1-8
- [305] Zerroukat, M. and Wrobel, L.C., A boundary element method for multiple moving boundary problems, *Journal of Computational Physics*, 1997, vol. 138, pp 501-519
- [306] Zhmakin, A.I. and Makarov, N., Numerical modeling of intense heat release in a slow viscous gas flow, *Izvestiya Akademii Nauk USSR, Mekhanika Zhidkosti Gaza*, 1985, No. 6, pp 16-22
- [307] Zhu, S. and Statravaha, P., An efficient computational method for modelling transient heat conduction with nonlinear source terms, *Applied Mathematics and Modelling*, 1996, vol. 20, pp 513-522
- [308] Zhu, S. and Statravaha, P., Solving nonlinear time-dependent diffusion equations with the dual reciprocity method in Laplace space, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1996, vol. 18, pp 19-27
- [309] Zimmermann, U. and Neil, G.A., *Electromanipulation of cells*, CRC Press, 1996.

Adel M. Benselama

Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I. 25 novembre 2005

**MODÉLISATION NUMÉRIQUE DU COMPORTEMENT
D'UNE PARTICULE SOUS CHAMP ÉLECTRIQUE DANS
LES MICROSYSTEMES : DE LA DÉFORMATION AU DÉPLACEMENT**

Résumé

Un nouvel outil numérique pour prédire le mouvement et la déformation de particules sous champ électrique dans les microsystèmes biologiques est proposé. Ce moyen permettra à terme l'optimisation de labopuces dans les premières phases de conception. Le phénomène utilisé pour manipuler les particules est la diélectrophorèse associée au mouvement dû à la polarisation des diélectriques sous champ électrique non uniforme. L'outil numérique utilisé pour le suivi des interfaces mobiles sous champ électrique est la Méthode Intégrale aux Frontières (MIF). Les écoulements sont supposés irrotationnels. Par cet outil, nous avons réussi à retrouver les résultats de Taylor sur l'instabilité des gouttes sous champ uniforme. Les résultats du déplacement des gouttes sous champ non uniforme montrent un bon accord également entre les simulations et des modèles analytiques approchés. L'état de développement de l'outil MIF nous permet d'envisager son extension vers des problèmes électrohydrodynamiques encore plus riches.

Mots-clé : Electrohydrodynamique ; Diélectrophorèse ; Méthode Intégrale aux Frontières ; Méthode du Tenseur de Maxwell ; modèle du Dipôle Ponctuel ; suivi d'interface mobile

**MODELING AND NUMERICAL SIMULATION OF THE BEHAVIOR
OF A PARTICLE SUBJECTED TO AN ELECTRIC FIELD IN MICROSYSTEMS:
FROM DEFORMATION TO DISPLACEMENT**

Abstract

A new numerical tool to predict the motion and deformation of particles subjected to an electric field in biological Microsystems has been developed. In a middle term, this tool will be used to optimize Lab-on-a-chip devices in the earliest design stages. Particles are handled in Microsystems by dielectrophoresis, which is associated to the motion induced by the polarization of dielectric materials when subjected to a nonuniform electric field. The numerical tool uses to follow the deformation of moving interfaces is the Boundary Element Method (BEM). Flows are supposed to be potential. This tool permits us to find Taylor results in droplets shapes and instability development in both DC and AC uniform electric field. The tool also fits well, when displacement is involved, as non uniform electric field is applied, with simplified analytical models. At this point, we do think that our numerical tool can be extended to deal with more general electrohydrodynamic problems.

Keywords : Electrohydrodynamics; Dielectrophoresis; Boundary Integral Method; Maxwell Tensor Method; Point Dipole model; moving interface tracking