



HAL
open science

Sur une nouvelle approche en calcul dynamique transitoire, incluant les basses et les moyennes fréquences

Mathilde Chevreuil

► **To cite this version:**

Mathilde Chevreuil. Sur une nouvelle approche en calcul dynamique transitoire, incluant les basses et les moyennes fréquences. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2005. Français. NNT: . hal-00016087

HAL Id: hal-00016087

<https://theses.hal.science/hal-00016087>

Submitted on 11 Sep 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Spécialité :
MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Présentée à l'École Normale Supérieure de Cachan par

Mathilde CHEVREUIL

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Sujet de la thèse :

**Sur une nouvelle approche en calcul dynamique transitoire,
incluant les basses et les moyennes fréquences**

Thèse soutenue le 8 décembre 2005 devant le jury composé de :

A. COMBESCURE	Directeur du LaMCoS, INSA de Lyon	Président
D. AUBRY	Directeur du MSSMat, ECP	Rapporteur
B. COCHELIN	Professeur des Universités, EGIM	Rapporteur
P. LADEVÈZE	Directeur du LMT-Cachan, ENS de Cachan	Directeur de thèse
P. ROUCH	Maître de Conférence, ENS de Cachan	Examineur
P. ROUX	CNES	Examineur
B. TROCLET	EADS Space Transportation	Examineur

LMT-Cachan

(ENS Cachan/CNRS UMR8535/Université Paris 6)

61 avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	iii
Liste des tableaux	v
Introduction	1
1 État de l'art	7
1 Approches temporelles	9
1.1 Discrétisation spatiale	9
1.2 Décomposition de domaine en dynamique transitoire	10
1.2.1 Principe	10
1.2.2 Approche duale	10
1.2.3 Approche primale	11
1.2.4 Approche mixte	11
1.3 Discrétisation temporelle	11
1.3.1 Principe	11
1.3.2 Schémas de Newmark	12
1.3.3 Méthode de Galerkin discontinue	13
1.4 Conclusion	13
2 Approches fréquentielles	14
2.1 Nouveau problème de vibration forcée à résoudre	15
2.2 Méthodes issues des basses fréquences	15
2.2.1 Approches basées sur les éléments finis standards	15
2.2.2 Éléments finis enrichis	18
2.2.3 Méthodes des éléments de frontière	20
2.2.4 Méthodes sans maillage	21
2.2.5 Méthodes des éléments continus	21
2.2.6 Méthodes de Trefftz	21

2.3	Méthodes issues des hautes fréquences	22
2.3.1	Méthodes basées sur l'énergie	22
2.3.2	Autres méthodes	24
2.4	Conclusion	25
2	Méthode proposée	27
1	Problème de référence en dynamique	28
2	Analyse fréquentielle du problème de référence	30
2.1	Formulation fréquentielle du problème	30
2.2	Principe de l'approche proposée	31
2.2.1	Calcul pour la plage basses fréquences	32
2.2.2	Calcul pour la plage moyennes fréquences	32
2.3	Retour à la solution temporelle	32
3	La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes	35
1	Problème de référence	37
1.1	Problème de vibration forcée	37
1.2	Cas des plaques minces de Kirchhoff-Love	38
1.2.1	Notations	38
1.2.2	Pour la flexion	39
1.2.3	Pour la tension	40
2	La formulation variationnelle associée à la TVRC	40
2.1	Présentation dans le cas général	40
2.2	Cas des assemblages de plaques	42
3	Les approximations à deux échelles	43
3.1	Principe	43
3.2	Rayons de vibration	44
3.2.1	Plaque en flexion	44
3.2.2	Plaque en tension	45
3.3	Le problème discrétisé	47
4	Convergence de la TVRC	48
4.1	Vibrations hors plan	48
4.2	Vibrations dans le plan	48
4	Mise en œuvre de la méthode	53
1	Choix des paramètres	55
1.1	Choix des bandes de fréquences	55
1.1.1	Structure étudiée	55
1.1.2	Influence de ω_c	56
1.1.3	Influence de ω'_c	59
1.1.4	Choix retenus	60

1.2	Le problème discrétisé dans l'approche fréquentielle	61
1.2.1	Discrétisation spatiale	61
1.2.2	Discrétisation fréquentielle	62
2	Reconstruction de la réponse temporelle	64
2.1	Exigences dues à la discrétisation du problème fréquentiel .	64
2.1.1	Temps d'observation T_o	64
2.1.2	Fonctions de Green	65
2.1.3	ImFT	65
2.1.4	Amortissement artificiel	66
2.2	Variante utilisant les propriétés des moyennes fréquences pour la reconstruction temporelle	67
2.2.1	Principe	67
2.2.2	Exemple	68
2.3	Amélioration qui prend en compte l'analyse large bande de la TVRC	71
2.3.1	Calcul TVRC sur une bande de fréquences	71
2.3.2	Utilisation de l'analyse large bande	73
3	Importance des moyennes fréquences	77
3.1	Contribution des moyennes fréquences	77
3.2	Influence des lois d'amortissement	80
3.3	Avantage de l'approche fréquentielle	81
4	Prise en compte adaptée des moyennes fréquences	82
5	Premiers développements pour les chocs pyrotechniques	87
1	Choc pyrotechnique	89
1.1	Contexte	89
1.2	Séparation de la coiffe par choc pyrotechnique	89
1.3	Géométrie et chargement	90
2	Traitement de la charge défilante avec la TVRC	93
3	Comparaison avec l'approche temporelle	94
3.1	Description du modèle dans l'approche temporelle	94
3.2	Description du modèle dans l'approche fréquentielle	95
3.3	Premiers résultats	95
3.3.1	Propagation des ondes de flexion	95
3.3.2	Propagation des ondes planes	99
3.3.3	Coût des simulations	105
3.3.4	Influence de l'amortissement	105
3.3.5	Influence de la taille de la jauge	105
3.4	Conclusion	107
	Conclusion et perspectives	109

Bibliographie

113

Table des figures

1	FRF d'une structure complexe	3
2.1	Problème dynamique de référence	28
3.1	Problème de référence de vibration forcée	37
3.2	Domaine d'admissibilité des rayons intérieurs	45
3.3	Domaine d'admissibilité des rayons de bord	45
3.4	Rayons intérieurs, de bord et de coin pour une plaque homogène	46
3.5	Domaine d'admissibilité des rayons de pression et de cisaillement	47
3.6	Amplitudes discrétisées	48
3.7	Caractéristiques géométriques et matériaux de la plaque en aluminium	49
3.8	Comparaison des solutions CORAY MF et MSC. Nastran à 3000 Hz	50
3.9	Comparaison des solutions CORAY MF et MSC. Nastran à 6000 Hz	51
3.10	Courbes de convergence de l'amplitude maximale des déformées obtenues avec CORAY MF et MSC.Nastran	52
4.1	Description de l'assemblage de douze plaques soumis à un impact	55
4.2	Représentations temporelle et fréquentielle du chargement	56
4.3	Vitesses pour trois valeurs de ω_c	57
4.4	Représentation globale de la déformée pour une excitation forcée à 450 Hz	58
4.5	FRF moyennes en vitesse sur les deux patchs	58
4.6	Vitesses pour trois valeurs de ω'_c	59
4.7	Courbe de convergence de l'énergie cinétique en fonction de ω'_c	60
4.8	Recouvrement temporel	63
4.9	Fenêtres de Hanning des deux plages de fréquences BF et MF	68
4.10	Réponses obtenues pour deux discrétisations fréquentielles différentes sur la plage MF	70
4.11	Description de la plaque libre soumise à un choc	74
4.12	Réponse forcée de la plaque libre à 2000 Hz	74
4.13	Analyse large bande de la TVRC	75

4.14	Comparaison des approches temporelle et fréquentielle avec l'analyse large bande	76
4.15	Courbe de convergence de l'énergie de déformation en fonction de ω'_c	77
4.16	Mode à la fréquence 75.6 Hz	78
4.17	Modes locaux de fréquence élevée	79
4.18	Importance des MF sur le patch 1	79
4.19	Importance des MF sur le patch 2	80
4.20	Courbe de convergence de l'énergie cinétique en fonction de α	81
4.21	Courbe de convergence de l'énergie cinétique en fonction de la prise en compte des MF	83
4.22	Vitesse matérielle avec prise en compte en moyenne des MF	84
5.1	Séparation de la coiffe pendant le vol	90
5.2	Séparation de la coiffe par deux cordons d'explosif	91
5.3	Description des essais	92
5.4	Plaque soumise à une charge défilante	92
5.5	Effort harmonique en espace	93
5.6	Propagation des ondes pyrotechniques de flexion	96
5.7	Déformations et déplacements hors plan	97
5.8	Vitesses et accélérations hors plan	98
5.9	Propagation des ondes pyrotechniques planes	100
5.10	Déformations XX et déplacements plans selon X	101
5.11	Vitesses et accélérations plans selon X	102
5.12	Déformations YY et déplacements plans selon Y	103
5.13	Vitesses et accélérations plans selon Y	104
5.14	Influence de l'amortissement η sur la réponse	106
5.15	Déformation YY pour deux tailles de jauge, $S = 1 \text{ mm}^2$ et $S = 121 \text{ mm}^2$	107
5.16	Influence de la taille de la jauge sur la mesure des déformations	108
5.17	Nouvelle campagne d'essais de chocs pyrotechniques	110

Liste des tableaux

1.1	Différents schémas de Newmark	12
4.1	Caractéristiques du maillage EF de l'assemblage de douze plaques pour le calcul de la FRF	61
4.2	Caractéristiques de la discrétisation spatiale de l'assemblage de douze plaques avec la TVRC	62
4.3	Nombre de calculs à effectuer pour l'obtention de la FRF de l'assemblage de douze plaques	64
4.4	Deux échantillonnages fréquentiels de la plage MF : sans et avec la technique de superposition	69
4.5	Échantillonnage fréquentiel global de l'approche en fréquence avec la technique de superposition	69
4.6	Nombre de calculs TVRC avec ou sans l'analyse large bande	76
4.7	Tailles des problèmes numériques pour les approches temporelle et fréquentielle	82
5.1	Discrétisation du problème de choc pyrotechnique avec l'approche temporelle sur une durée d'observation $T_o = 5$ ms	94
5.2	Discrétisation du problème de choc pyrotechnique avec l'approche fréquentielle	95
5.3	Taille des problèmes pour les approches temporelle et fréquentielle sur une durée d'observation $T_o = 2$ s	105

Introduction

AUJOURD'HUI de nombreuses structures industrielles sont dimensionnées en fonction de leur comportement vibro-acoustique et plus généralement de leur comportement en dynamique. Afin de limiter les essais longs et coûteux nécessaires à la validation de la conception, il est nécessaire de remplacer cette phase expérimentale par des simulations numériques. Pour mener correctement cette démarche appelée « virtual testing », il est indispensable de développer des outils de calcul fiables et prédictifs pour le comportement dynamique des structures. Ce type d'outils existe et fonctionne bien pour décrire les parties basses et hautes fréquences de la réponse dynamique dont les caractéristiques sont illustrées sur la Figure 1. Par contre la restitution de la réponse complète, tout particulièrement en régime transitoire, est hors de portée des outils de calcul actuels, basés sur des techniques éléments finis et des schémas d'intégration numérique, lorsque le chargement et donc la réponse sont à très large contenu fréquentiel. Ce cas est rencontré notamment dans le cadre de la séparation des différentes parties d'un lanceur par choc pyrotechnique. Les stratégies de calcul manquent énormément de robustesse car la partie moyennes fréquences est généralement ignorée, et elles conduisent à des temps de calcul prohibitifs. Cette question de l'élaboration de stratégies de calcul performantes et robustes en dynamique transitoire est une priorité industrielle : il s'agit de diminuer le coût des calculs tout en restituant la totalité du contenu fréquentiel, basses et moyennes fréquences, de la réponse.

On utilise en général la méthode des éléments finis pour les calculs dynamiques transitoires. Dans le cas d'un choc violent en terme de contenu fréquentiel, une modélisation extrêmement fine des phénomènes associés aux moyennes fréquences est primordiale. En effet, bien que les oscillations associées aux moyennes fréquences soient très petites, la vitesse et l'énergie cinétique peuvent être très importantes et par conséquent non négligeables. Ces phénomènes sont de petite longueur d'onde, ainsi, en considérant la discrétisation nécessaire en regard du nombre d'onde, les modèles éléments finis comportent un grand nombre de degrés de liberté et par conséquent la discrétisation en temps requiert une grille fine : le temps de calcul associé devient très important [Bathe 1995, Belytschko *et al.* 2000]. Une étude

sur la qualité de la solution obtenue lorsqu'on fait croître la fréquence, basée sur une estimation de l'erreur en pollution et en dispersion, montre que la qualité de la solution se dégrade plus vite que prévu [Ilhenburg et Babuška 1995, Deraemaeker *et al.* 1999]. En effet les erreurs faites sur chaque longueur d'onde se cumulent si bien qu'il faut faire une erreur moindre pour maîtriser l'erreur finale. Par ailleurs si l'on s'intéresse à un temps d'observation de la réponse plus long, le nombre de pas de temps augmente, ce qui engendre un temps de calcul prohibitif. Outre ce temps de calcul conséquent, une erreur sur la périodicité des oscillations due à un trop faible nombre de pas de temps et un déphasage des oscillations à cause de l'accumulation des erreurs numériques au cours des pas de temps peuvent être observés.

Il s'avère donc essentiel d'utiliser une alternative aux approches classiques, basées sur la méthode des éléments finis et les schémas d'intégration numérique, pour le calcul de la réponse dynamique transitoire d'une structure soumise à un choc à large spectre. L'approche présentée ici consiste à se placer dans le domaine fréquentiel à l'aide des transformées de Fourier, approche rendue numériquement efficace grâce aux développements de la transformée de Fourier rapide (FFT, *Fast Fourier Transform*). Nous sommes alors amenés à résoudre un problème de vibration forcée sur une très large bande de fréquences incluant à la fois les basses et aussi les moyennes fréquences pour l'étude des chocs. La solution temporelle est ensuite reconstruite par transformée de Fourier inverse. Les deux domaines fréquentiels, basses et moyennes fréquences, ont des propriétés bien distinctes : les outils de résolution appropriés sont par conséquent différents. Pour prédire la fonction de réponse en fréquence dans l'approche fréquentielle, nous proposons donc naturellement de séparer la plage de fréquences étudiée en deux parties : les basses fréquences d'un côté et les moyennes fréquences de l'autre. Pour chacune des deux plages, nous utilisons la technique de résolution la plus adaptée pour celle-ci.

Dans le domaine des basses fréquences (BF), les phénomènes vibratoires générés par l'excitation sont de relativement grande longueur d'onde comparée aux dimensions de la structure, seulement quelques oscillations sont observables. De plus la structure a un comportement qualifié de modal, *i.e.* les modes propres sont bien distincts les uns des autres. Par conséquent, le calcul de la fonction de réponse en fréquence dans ce domaine ne pose pas de problème en ce qui concerne la modélisation et la simulation numérique. Les méthodes les plus utilisées sont les méthodes basées sur les éléments finis (EF) [Zienkiewicz et Taylor 2000]. Le comportement étant modal, il est avantageux de mener les calculs sur la base modale éventuellement complétée de modes statiques.

En ce qui concerne les hautes fréquences (HF), les phénomènes sont de très petite longueur d'onde : une centaine d'oscillations sont présentes sur une dimension de la structure. Ainsi il n'est plus approprié de regarder les grandeurs locales

mais plutôt les grandeurs moyennées en espace et en fréquence. L'approche la plus utilisée est l'Analyse Statistique de l'Énergie (SEA) [Lyon et Maitanik 1962] qui donne le niveau énergétique vibratoire moyen par sous-structure. Cette méthode ne permet pas d'obtenir une solution prédictive puisqu'elle requiert la connaissance *a priori* de facteurs de couplage mesurés.

La plage des moyennes fréquences (MF) se situe entre les deux domaines précédemment cités (cf. Figure 1) : plusieurs dizaines d'oscillations apparaissent sur une dimension de la structure et la déformée est très sensible aux conditions aux limites et aux paramètres matériaux de la structure. Un comportement modal est encore observable mais les modes propres sont difficilement distincts les uns des autres : il peut y avoir plusieurs modes par Hertz, ces modes étant couplés par l'amortissement. Ainsi, étendre les méthodes éléments finis est inadapté puisqu'elles exigent un raffinement du maillage spatial et conduisent à un problème de grande taille et des difficultés numériques [Ilhenburg et Babuška 1995, Deraemaeker *et al.* 1999]. Le calcul de la base modale est lui aussi hors de portée à cause de la densification modale : il faudrait calculer jusqu'à un millier de modes. Les méthodes énergétiques utilisées pour les hautes fréquences sont quant à elles trop globales et ne décrivent pas assez précisément la solution.

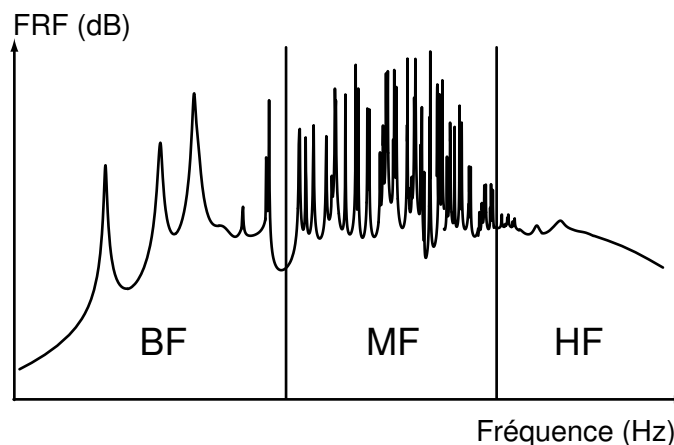


Figure 1 Fonction de réponse en fréquence d'une structure complexe [Ohayon et Soize 1998]

Pour traiter les vibrations forcées en moyennes fréquences, nous utilisons la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC), introduite dans [Ladevèze 1996], qui est une alternative aux approches classiques. Cette approche prédictive, qui impose que la structure soit divisible en sous-structures homogènes, est définie

comme suit. Les conditions de continuité en déplacement et en effort aux interfaces entre sous-structures n'ont pas besoin d'être vérifiées *a priori*, mais sont vérifiées au sens faible par une formulation variationnelle. Cette nouvelle formulation variationnelle du problème de vibration forcée à une fréquence donnée autorise l'utilisation d'approximations indépendantes par sous-structure. Par ailleurs la solution est supposée bien décrite par la superposition d'un nombre infini de modes locaux, appelés rayons, qui sont issus de la vérification des équations d'équilibre dynamique et des relations de comportement par sous-structure. Ces rayons sont à deux échelles : une échelle lente et une échelle rapide en fonction de la variable espace et de la fréquence. L'échelle rapide est traitée analytiquement afin de reporter l'effort numérique sur le calcul des quantités à variations lentes et conduire ainsi à un problème à faible nombre d'inconnues. Ici toutes les directions de propagation des ondes sont prises en compte, les inconnues du problème sont alors les amplitudes des rayons qui sont associées à l'échelle lente. Cette théorie a d'abord été développée pour des structures 1-D et pour des plaques dans [Ladevèze *et al.* 2001], puis a prouvé son efficacité pour des assemblages de plaques dans [Rouch et Ladevèze 2003] et a été étendue aux coques dans [Riou *et al.* 2004]. La prise en compte d'hétérogénéités a également fait l'objet de travaux dans [Ladevèze *et al.* 2003a].

Finalement nous proposons d'utiliser les outils suivants :

- pour les basses fréquences, la fonction de réponse en fréquence (FRF, *Frequency Response Function*) de la structure excitée est calculée par la méthode des éléments finis. Il est avantageux d'utiliser une base réduite construite à partir des premiers modes propres et complétée par les modes statiques,
- pour les moyennes fréquences, nous utilisons la TVRC qui est une méthode adaptée pour obtenir la fonction de réponse en fréquence sur cette plage fréquentielle.

L'objectif de ce travail de thèse a été d'étudier la faisabilité de l'approche fréquentielle pour le calcul de la réponse dynamique transitoire d'une structure soumise à un choc dont le contenu fréquentiel s'étendait jusqu'aux MF. Elle a été validée tout d'abord sur des structures 1-D puis sur des assemblages de plaques, par comparaison avec une approche temporelle classique. Elle a permis de montrer l'importance, en terme énergétique, de la prise en compte des moyennes fréquences dans la réponse transitoire malgré leurs petites oscillations. L'influence de l'amortissement dans la structure sur le comportement moyennes fréquences a également fait l'objet d'études.

Un certain nombre de questions se sont posées au cours de la thèse concernant les paramètres, à commencer par le choix de la coupure entre les plages basses et moyennes fréquences. Les premiers pas ont donc contribué à maîtriser les paramètres de discrétisation de la méthode en fonction de la structure étudiée et de la nature de l'impact appliqué à celle-ci [Ladevèze et Chevreuril 2005].

Par ailleurs, à cause de l'utilisation des transformées de Fourier discrètes, nous nous sommes heurtés à la taille du problème qui peut vite devenir importante si aucun soin n'est apporté. En effet le coût de calcul de l'approche fréquentielle dépend directement de l'échantillonnage en fréquence pour le calcul des FRF, lui-même obéissant au théorème de Shannon pour la reconstruction temporelle de la solution. Il est possible de réduire le nombre de problèmes de vibration forcée à résoudre pour la prédiction de la FRF sur la plage MF d'une part en profitant de la rapide extinction des ondes moyennes fréquences dans les milieux dispersifs amortis et d'autre part en utilisant la version large bande de la TVRC [[Chevreuil et al. 2004 - 2005](#)].

Afin de s'orienter vers une méthode plus adaptée à l'intégration des moyennes fréquences dans la réponse transitoire compte tenu de leurs caractéristiques, il est intéressant de considérer l'influence de ces fréquences comme un niveau vibratoire global de la structure plutôt que d'en tenir compte en tant que quantités locales. Finalement nous proposons d'appliquer la méthode à l'étude des chocs pyrotechniques [[Chevreuil et Ladevèze 2005](#)].

Les développements ont été implantés dans CORAY MF (*COmplex RAYs for Medium Frequency*). Ce logiciel, élaboré au LMT-Cachan sous MATLAB, permet à l'origine un calcul prédictif pour les vibrations moyennes fréquences sur des assemblages de barres, poutres, plaques et coques. Seul le calcul des fonctions de réponse en fréquence sur la plage BF est réalisé avec un logiciel extérieur tel que MSC.Nastran ou Cast3m et les résultats sont ensuite intégrés dans CORAY MF.

La rédaction de ce document reprend la problématique selon l'organisation suivante en cinq chapitres :

- Le premier chapitre présente une étude bibliographique des travaux concernant la dynamique transitoire pour les études de choc. Il fait également un rapide état de l'art des différentes approches que l'on peut trouver dans la littérature pour résoudre des problèmes de vibration forcée pour les besoins d'une approche fréquentielle.
- Dans un second temps, nous exposons l'approche fréquentielle proposée. La résolution d'un problème d'évolution en temps est remplacée par un problème de vibration forcée sur une très large bande de fréquences grâce à l'application de la transformée de Fourier. La prédiction de la FRF pour les moyennes fréquences utilise la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes.
- Le troisième chapitre rappelle les bases de la TVRC, méthode adaptée aux calculs moyennes fréquences qui permet de construire la solution approchée comme la superposition de modes de vibrations locaux.
- La mise en oeuvre numérique fait l'objet du chapitre suivant. Le choix des paramètres de la méthode y est étudié. Dans ce chapitre est aussi développée

l'analyse large bande de la TVRC et la prise en compte d'un niveau vibratoire plutôt que de grandeurs locales du contenu MF. Une comparaison avec une approche classique, utilisant la méthode des éléments finis associée à un schéma d'intégration en temps, met en évidence l'avantage d'utiliser une approche fréquentielle.

- Enfin sont présentés les premiers développements pour l'application de la méthode aux chocs pyrotechniques.

NOUS RAPPELONS, sans être évidemment exhaustifs, les différentes méthodes existantes dans la littérature pour le calcul des réponses transitoires et plus spécifiquement celles des structures soumises à un impact. Les méthodes les plus connues sont des approches temporelles s'appuyant sur la technique des éléments finis et les schémas d'intégration. Malgré les améliorations apportées par l'utilisation des maillages adaptatifs et des décompositions de domaine, l'analyse d'un front d'onde par une telle approche demeure coûteuse à cause des maillages spatial et temporel qu'elle requiert. L'autre famille de méthodes résulte d'une approche fréquentielle pour laquelle nous sommes amenés à calculer une fonction de réponse en fréquence. Les différentes techniques pour résoudre un problème de vibration forcée selon la plage fréquentielle étudiée sont citées en rappelant leurs intérêts et leurs inconvénients.

Sommaire

1	Approches temporelles	9
1.1	Discrétisation spatiale	9
1.2	Décomposition de domaine en dynamique transitoire	10
1.2.1	Principe	10
1.2.2	Approche duale	10
1.2.3	Approche primale	11
1.2.4	Approche mixte	11
1.3	Discrétisation temporelle	11

1.3.1	Principe	11
1.3.2	Schémas de Newmark	12
1.3.3	Méthode de Galerkin discontinue	13
1.4	Conclusion	13
2	Approches fréquentielles	14
2.1	Nouveau problème de vibration forcée à résoudre	15
2.2	Méthodes issues des basses fréquences	15
2.2.1	Approches basées sur les éléments finis standards	15
2.2.2	Éléments finis enrichis	18
2.2.3	Méthodes des éléments de frontière	20
2.2.4	Méthodes sans maillage	21
2.2.5	Méthodes des éléments continus	21
2.2.6	Méthodes de Trefftz	21
2.3	Méthodes issues des hautes fréquences	22
2.3.1	Méthodes basées sur l'énergie	22
2.3.2	Autres méthodes	24
2.4	Conclusion	25

1 Approches temporelles

Une approche temporelle est très souvent utilisée pour résoudre un problème d'évolution en temps tel que la propagation d'ondes en dynamique. La résolution numérique du problème discrétisé de dynamique passe par une discrétisation en espace et en temps de celui-ci.

1.1 Discrétisation spatiale

Classiquement on explore la méthode des éléments finis (FEM, *Finite Element Method*) pour modéliser le comportement de la structure étudiée [Zienkiewicz et Taylor 2000]. La FEM part d'une formulation variationnelle du problème de référence équivalente aux équations locales. Le domaine continu étudié étant discrétisé en sous-domaines appelés éléments finis (EF), la géométrie et la solution, le plus souvent le déplacement, sont approximées par des fonctions de forme polynomiales, qui sont définies sur chaque élément fini : avec cette méthode, la description de géométries complexes ne pose pas de difficultés. La formulation variationnelle permet d'obtenir un problème d'évolution à résoudre :

$$\mathbf{M}\ddot{\underline{U}} + \mathbf{C}\dot{\underline{U}} + \mathbf{K}\underline{U} = \underline{F} \quad (1.1)$$

avec \mathbf{M} la matrice de masse, \mathbf{C} la matrice d'amortissement, \mathbf{K} la matrice de rigidité. \underline{U} et \underline{F} désignent les vecteurs des déplacements et des efforts généralisés, *i.e.* les quantités aux nœuds des éléments. $\dot{\underline{U}}$ et $\ddot{\underline{U}}$ sont les dérivées première et seconde du déplacement soit la vitesse et l'accélération. Les matrices \mathbf{K} , \mathbf{C} et \mathbf{M} sont généralement des matrices symétriques et à stockage par bande.

La taille du système est associée au nombre de degrés de liberté (DDL) nécessaires pour bien représenter le phénomène étudié, ici les chocs. Afin de représenter un champ à fort gradient rencontré lors des chocs, il est nécessaire d'utiliser une grande quantité de polynômes par morceaux pour prédire la solution, soit en raffinant le maillage, soit en augmentant le degré des polynômes, ce qui conduit à un système de taille trop grande et trop lourde à gérer.

Étant donné le caractère très localisé des ondes propagatives en dynamique transitoire, la méthode des éléments finis adaptatifs répond au besoin d'enrichir le modèle localement en raffinant le maillage uniquement sur les fronts d'onde de manière contrôlée et automatique. Ces méthodes reposent sur la définition d'un estimateur d'erreur *a posteriori*, parmi ceux-ci trois grandes classes de méthodes co-existent :

- un estimateur construit sur les résidus d'équilibre [Babuška et Rheinboldt 1979] sur lequel se basent les travaux de [Aubry *et al.* 1999, Tie *et al.* 2003] pour l'adaptation de maillage dans le cadre de la propagation d'ondes,
- un estimateur utilisant le lissage des contraintes [Zienkiewicz et Zhu 1987],

- un estimateur basé sur l'erreur en relation de comportement [Ladevèze et Pelle 2001] dont l'application aux maillages adaptatifs en dynamique transitoire est trouvée dans [Coorevits 1993].

Par ailleurs, pour des systèmes de grande taille, la décomposition de domaine facilite la manipulation des données et permet de diviser le travail en plusieurs problèmes de taille réduite.

1.2 Décomposition de domaine en dynamique transitoire

1.2.1 Principe

Ces méthodes sont une alternative à la résolution du problème complet : elles consistent à diviser le domaine en sous-domaines afin de remplacer un gros calcul par plusieurs calculs de taille plus petite. Il est alors possible de partager les tâches et de tirer parti des ordinateurs à architecture parallèle. Nous ne nous intéressons ici qu'à quelques méthodes adaptées en dynamique à l'étude des chocs.

Dans les approches de décomposition de domaine, le problème est condensé sur les quantités d'interface entre sous-domaines ce qui conduit à un problème de taille réduite. La majorité des méthodes utilisées aujourd'hui sont des méthodes sans recouvrement. Nous pouvons citer toutefois les travaux récents de [Ben Dhia et Rateau 2005] pour l'extension de la méthode de partition avec recouvrement Arlequin en dynamique.

Les différentes méthodes se distinguent principalement par la nature des raccords entre deux sous-structures. Pour les méthodes sans recouvrement, on peut distinguer trois types de familles : les approches primales, les approches duales, les approches mixtes. Le problème d'interface est généralement résolu de façon itérative, ce qui ne nécessite pas la construction explicite du complément de Schur, problème coûteux à résoudre. Par contre l'utilisation d'une méthode itérative exige un taux de convergence élevé pour rendre l'approche efficace. Afin d'améliorer la convergence pour un grand nombre de sous-structures, un problème grossier défini sur la structure complète est résolu ce qui permet de propager une information globale sur l'ensemble de la structure.

1.2.2 Approche duale

Dans cette approche, les quantités privilégiées sont les efforts : la méthode propose *a priori* des efforts en équilibre aux interfaces et cherche à écrire la continuité en déplacements. L'inconnue principale est constituée par les inter-efforts entre sous-structures, ici les multiplicateurs de Lagrange continus aux interfaces.

Dans la FETI (*Finite Element Tearing and Interconnecting*) [Farhat et Roux 1991, Farhat *et al.* 1994], l'algorithme itératif utilisé est un gradient conjugué préconditionné projeté. La projection du gradient conjugué constitue le problème ma-

croscopique grossier propageant l'information sur la structure entière. La convergence de la méthode dépend fortement du choix du préconditionneur [Rixen et Farhat 1999].

1.2.3 Approche primale

À l'inverse, les quantités privilégiées au raccord sont ici les déplacements : les déplacements aux interfaces sont supposés *a priori* continus et la méthode cherche à vérifier l'équilibre en effort aux interfaces.

La BDD (*Balancing Domain Decomposition Method*) [Roux 1990, Mandel 1993] utilise une technique de résolution similaire à la FETI.

1.2.4 Approche mixte

Dans ces approches, aucune continuité n'est imposée *a priori* et les déplacements et efforts sont traités à égalité. Ce sont des approches qui s'apparentent aux techniques du Lagrangien augmenté [Glowinski et Le Tallec 1990].

La méthode proposée dans [Ladevèze 1998] utilise pour solveur la méthode à grand incrément de temps (LATIN, *LA*rge *T*ime *I*Ncrement) qui consiste à rechercher la solution à chaque itération sur tout l'espace et sur tout le temps. Elle associe à chaque interface une relation de comportement entre les quantités statiques et cinématiques qui peut être complexe (contact, frottement, endommagement ...) [Champaney *et al.* 1997]. La version monoéchelle de la stratégie a été appliquée avec succès pour l'étude des chocs dans [Lemoussu *et al.* 2002, Sen Gupta *et al.* 2005]. Une vision multiéchelle [Ladevèze *et al.* 2002] a été développée en statique et quasi-statique, en revanche des développements doivent être étendus en dynamique.

1.3 Discrétisation temporelle

1.3.1 Principe

Les méthodes d'intégration directe sont nombreuses et mieux adaptées que les techniques de bases réduites à la représentation de chocs relativement rapides qui mettent en jeu des fréquences élevées.

Pour résoudre l'équation d'évolution en temps (1.1) traduisant l'équilibre dynamique, l'intervalle d'étude est coupé en sous-intervalles Δt . Il est nécessaire d'utiliser un schéma d'intégration en temps pour résoudre le système, l'objectif du schéma étant de calculer les inconnues au pas de temps $n + 1$ en fonction des variables au pas de temps précédent n . Dans la suite, nous présentons les familles de schémas d'intégration les plus utilisées.

Schéma	γ	β
Différences centrées	$\frac{1}{2}$	0
Accélération linéaire	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$
Accélération moyenne	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Accélération moyenne modifiée	$\frac{1}{2} + \alpha$	$\frac{(1+\alpha)^2}{4}$

Tableau 1.1 Différents schémas de Newmark

Il est à noter qu'il existe des méthodes qui s'affranchissent de la discrétisation temporelle et s'appuient sur une méthode asymptotique numérique pour déterminer la réponse transitoire de la structure [Cochelin et Compain 2000]. Toutefois, appliquées dans le cas où les variations temporelles sont lentes, elles demandent à être développées pour l'étude des chocs.

1.3.2 Schémas de Newmark

Les schémas de Newmark pour une intégration d'ordre 2 définissent des relations linéaires entre les inconnues du pas de temps $n + 1$ et celles du pas de temps précédent n . Ils sont régis par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{u}_{n+1} &= \dot{u}_n + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{u}_n + \gamma\Delta t \ddot{u}_{n+1} \\ u_{n+1} &= u_n + \Delta t \dot{u}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{u}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{u}_{n+1} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Les valeurs prises pour γ et β (cf. Tableau 1.1) vont définir les propriétés du schéma. Le choix d'une méthode est généralement dicté par le contenu fréquentiel du chargement appliqué qui fixe la taille du pas de temps sans oublier que la discrétisation temporelle n'est pas étrangère à la discrétisation spatiale de la structure.

Les schémas précis au second ordre des différences centrées et de l'accélération moyenne sont privilégiés pour les faibles erreurs d'amplitude et de périodicité qu'ils engendrent.

Le schéma des différences centrées est un schéma explicite. Il est adapté pour les chargements dynamiques rapides et pour le traitement des problèmes non-linéaires puisque la matrice dynamique à inverser est alors diagonale et rend le problème peu coûteux. Cependant ce schéma est conditionnellement stable : le respect de la condition de Courant, qui exprime le fait que le signal ne doit pas se propager de plus d'un élément pendant un pas de temps, peut s'avérer difficile à vérifier.

Le schéma de l'accélération moyenne est un schéma implicite et inconditionnellement stable. En revanche il est nécessaire de calculer l'opérateur inverse. Il est très adapté au cas des chargements dynamiques peu rapides.

Malgré leurs attraits, les schémas de Newmark conduisent à des difficultés lorsqu'il s'agit de représenter des fonctions qui ne sont plus suffisamment régulières comme des fronts de choc. Il est dans ce cas nécessaire de filtrer les hautes fréquences qui perturbent la solution. Pour cela, un amortissement est ajouté : il peut être soit associé au comportement du matériau, soit plus simplement associé au schéma d'intégration lui-même. Le schéma HHT proposé dans [Hilber *et al.* 1977] est l'un de ces schémas : il apporte un fort amortissement sur les fréquences élevées sans toutefois dégrader la solution du problème. Il consiste à appliquer les formules de Newmark (1.2) à l'équation temporelle discrète (1.1) modifiée en pondérant les forces élastiques et les forces externes sur l'intervalle de temps grâce au coefficient α :

$$\mathbf{M}\ddot{\underline{U}}_{n+1} + (1 - \alpha)(\mathbf{C}\dot{\underline{U}}_{n+1} + \mathbf{K}\underline{U}_{n+1}) + \alpha(\mathbf{C}\dot{\underline{U}}_n + \mathbf{K}\underline{U}_n) = (1 - \alpha)\underline{F}_{n+1} + \alpha\underline{F}_n \quad (1.3)$$

1.3.3 Méthode de Galerkin discontinue

Contrairement aux schémas précédents, la méthode de Galerkin discontinue en tant que schéma d'intégration temporelle autorise les variables du problème, déplacement et vitesse, à être discontinues en temps. Utilisée à l'ordre zéro, *i.e.* champs pris constants sur les intervalles de temps, elle permet de s'affranchir des oscillations numériques occasionnées lors du traitement d'un front d'onde. Toutefois ce schéma dissipe énormément et demande une discrétisation très fine pour bien représenter les irrégularités. La méthode de Galerkin discontinue au premier ordre permettrait de moins dissiper l'information mais apporte un surcoût au calcul de par l'écriture du problème [Leclère 2001].

Des travaux récents [Rethoré *et al.* 2005] proposent d'adopter une vision éléments finis du problème en temps en s'appuyant sur la même théorie que la XFEM (*eXtended Finite Element Method*) [Belytschko *et al.* 2001] pour traiter les problèmes discontinus. La TX-FEM (*Time eXtended Finite Element Method*) utilise une base de fonctions de forme en temps enrichie formant une partition de l'unité. Le schéma est alors équivalent à certaines méthodes de Galerkin discontinues, le nombre de pas de temps est inférieur à celui utilisé avec les schémas de Newmark et les oscillations numériques sont grandement atténuées. La TX-FEM est adaptée pour le traitement des discontinuités en temps et notamment les chocs.

1.4 Conclusion

De nombreuses contributions visent à faciliter et à rendre accessible la résolution d'un problème de choc en utilisant les éléments finis et les schémas d'intégration

temporelle. La décomposition de domaine réduit et partage le coût de calcul. Néanmoins pour les problèmes de dynamique transitoire, les échelles en temps et en espace sont couplées au regard de l'étude de la propagation d'onde : l'effort numérique à apporter peut être très variable d'un endroit à un autre de la structure selon que le champ varie fortement ou lentement à ces endroits. Afin d'optimiser les méthodes de décomposition de domaine, il est donc avantageux d'autoriser chaque sous-domaine à avoir son propre maillage spatial, sa discrétisation temporelle et son schéma numérique les plus appropriés : ceci a fait l'objet de développements dans [Gravouil et Combescure 2001, Combescure et Gravouil 2002, Combescure *et al.* 2003] qui permettent l'utilisation de maillages incompatibles et le couplage de schémas implicites et explicites.

Cependant, ces méthodes reposent toutes sur des techniques d'intégration en temps qui rendent l'étude des chocs très coûteuse puisque malgré les aménagements apportés à la FEM et aux schémas d'intégration, elles exigent un maillage EF et une discrétisation temporelle extrêmement fins. Par ailleurs, pour l'étude des chocs, les schémas d'intégration présentent soit des oscillations numériques qui perturbent la solution soit une dissipation trop forte pour bien représenter la réponse. Enfin, le raffinement des maillages est accompagné de difficultés numériques liées à la dispersion et à la pollution [Ilhenburg et Babuška 1995, Deraemaeker *et al.* 1999].

Afin de s'affranchir de l'intégration temporelle et des soucis numériques associés, il est possible de réécrire le problème temporel de référence en un problème qui dépend de la fréquence : c'est cette approche que nous choisissons d'adopter. Un rappel des techniques utilisées pour l'approche fréquentielle est fait dans la section suivante.

2 Approches fréquentielles

Avec le développement de la transformée de Fourier rapide (FFT, *Fast Fourier Transform*) [Brigham 1988], l'analyse dans le domaine fréquentiel utilisant la transformée de Fourier discrète est un moyen efficace de calculer la réponse dynamique transitoire d'un système linéaire [Clough et Penzien 1993]. Issue de la transformée de Fourier de l'intégrale de Duhamel, cette approche est également la plus adaptée dans les situations pour lesquelles des paramètres physiques dépendent de la fréquence et il est alors plus facile de calculer la fonction de réponse en fréquence que la réponse impulsionnelle. Cette technique est très largement utilisée pour les études sismiques pour lesquelles les contenus fréquentiels de l'excitation et de la réponse sont élevés et pour lesquelles les propriétés d'interaction sol/structure ou fluide/structure sont dépendantes de la fréquence.

2.1 Nouveau problème de vibration forcée à résoudre

L'approche fréquentielle consiste à réécrire le problème de dynamique transitoire sous la forme d'un problème variationnel en espace-fréquence. Pour cela est appliquée la transformée de Fourier à toutes les quantités dépendant du temps pour obtenir des quantités qui dépendent de la fréquence. Ce faisant, le problème à résoudre devient un problème de vibration forcée sur une bande de fréquences.

Finalement, nous sommes amenés à calculer des fonctions de réponse en fréquence (FRF) sur une large plage de fréquences. Pour le cas des chocs, il est nécessaire de prédire cette FRF pour les basses fréquences mais également et surtout pour les moyennes fréquences qui interviennent généreusement dans le traitement des chocs. Les sections 2.2 et 2.3 rappellent les différentes approches existantes pour la résolution d'un problème de vibration forcée.

2.2 Méthodes issues des basses fréquences

Les approches BF s'appuient sur les caractéristiques de cette bande fréquentielle :

- les phénomènes sont de grande longueur de variation,
- les modes propres sont peu nombreux et bien séparés.

Elles sont pour la plupart basées sur les techniques éléments finis.

2.2.1 Approches basées sur les éléments finis standards

2.2.1.1 Principe La FEM, dont le principe a été rappelé dans la section 1.1, utilise des fonctions d'approximation polynomiales. Pour une sollicitation harmonique de pulsation ω , la formulation variationnelle de la méthode permet d'obtenir des relations entre les déplacements généralisés, *i.e.* les inconnues aux nœuds des éléments, et mène à la résolution d'un système linéaire :

$$[-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}] \underline{U} = \underline{F} \quad (1.4)$$

avec \mathbf{M} la matrice de masse, \mathbf{C} la matrice d'amortissement, \mathbf{K} la matrice de rigidité. \underline{U} et \underline{F} désignent les vecteurs des déplacements et des efforts généralisés. En utilisant l'hypothèse de Basile sur l'amortissement, il est possible de calculer les premiers modes propres associés aux plus petites fréquences propres du système à résoudre. La solution approchée est alors projetée sur les sous-espaces propres associés. L'avantage de l'analyse modale est ainsi de ramener le problème à la résolution d'un système diagonal de faible dimension puisque pour les BF, seules quelques dizaines, voire quelques centaines de modes suffisent à bien représenter la solution.

Bien que très répandue et présentant de nombreux avantages pour le traitement des basses fréquences, l'utilisation de la méthode des éléments finis pour

les moyennes fréquences pose certaines difficultés. En effet afin de représenter des champs désormais très oscillants en vibrations MF, il faudrait utiliser une grande quantité de polynômes par morceaux pour approcher la solution. À titre d'illustration, on peut montrer qu'une borne majorante de l'erreur commise est donnée par la somme de l'erreur d'approximation en kh et l'erreur de pollution en $k(kh)^{2p}$ due à la dispersion numérique qui engendre une erreur sur les vecteurs d'onde [Ihlenburg et Babuška 1995, Deraemaeker *et al.* 1999], k désignant le nombre d'onde de l'équation d'Helmholtz, h la taille des éléments et p le degré des polynômes des fonctions de forme. Cette erreur montre que pour bien représenter la solution, la taille des éléments est liée à la longueur d'onde.

Mailler à kh constant est suffisant pour l'étude des basses fréquences mais ne suffit plus pour les moyennes fréquences pour lesquelles l'erreur de pollution devient prédominante : il faudrait respecter un maillage à $k^3 h^2$ constant (pour $p = 1$) ce qui rend excessivement coûteux le problème à traiter.

L'autre idée afin de diminuer l'erreur consiste à augmenter le degré d'interpolation des polynômes p (*p-methods*). Seulement, outre le coût du problème qui augmente, la méthode EF est rapidement confrontée à des soucis numériques. Dans la pratique, seuls $p = 1$ ou 2 sont utilisés.

Par ailleurs, monter en fréquence nécessite un nombre croissant de modes propres dans l'analyse modale. La densité modale augmentant en général avec la fréquence, l'extraction de ces modes propres devient de plus en plus difficile.

Enfin, la solution décrite à l'aide de grandeurs ponctuelles que sont les déplacements généralisés devient hypersensible aux moindres petites variations des paramètres structuraux et des conditions limites. Cette description est donc inadaptée pour la description des phénomènes MF.

2.2.1.2 Améliorations apportées pour diminuer l'erreur Il s'agit ici de proposer des améliorations liées au traitement du maillage pour réduire les erreurs d'approximation et de dispersion.

La première idée pour diminuer l'erreur est d'adapter le maillage en optimisant la taille des éléments finis à la dynamique locale. Pour ce faire, des estimateurs d'erreur *a posteriori* ont été développés pour évaluer l'erreur locale pour des structures [Ladevèze et Pelle 2001] et pour l'acoustique [Bouillard et Ihlenburg 1999, Irimie et Bouillard 2001]. Dans les zones à grande erreur, la discrétisation est raffinée soit en divisant les éléments (*h-method*), soit en augmentant le degré des polynômes (*p-method*), soit en combinant les deux (*hp-method*).

Les éléments finis stabilisés, la GLS (*Galerkin Least Squares*) et GGLS (*Galerkin Gradient Least Squares*), sont une réponse à la diminution de l'erreur de pollution due à la dispersion numérique [Harari et Hughes 1992, Harari et Haham

1998, Grosh et Pinsky 1998]. La méthode ajoute à la formulation EF classique un terme supplémentaire correspondant au résidu de l'équation d'équilibre intérieur. Ce terme dépend d'un paramètre caractéristique du maillage qui peut être déterminé de façon à minimiser l'erreur de pollution pour des directions de propagation privilégiées.

Contrairement aux méthodes GLS et GGLS, la QSFEM (*Quasi Stabilized Finite Element Method*) stabilise les EF non pas en intervenant sur la forme variationnelle mais en agissant sur les matrices issues de la formulation variationnelle [Babuška et al. 1995].

2.2.1.3 Méthodes de réduction Pour traiter les MF, la prédiction d'un nombre important de modes propres est nécessaire et la base sur laquelle est menée la suite des calculs est donc conséquente. L'idée est de réduire la taille de la base sur laquelle est projetée la solution afin de diminuer les temps de calcul.

[Morand 1992] et [Mercier 1993] proposent de réduire la taille de la base modale en projetant la solution uniquement sur les modes propres qui maximisent l'opérateur d'excitabilité soit les modes qui participent le plus dans la réponse. L'intérêt de la réduction de la base modale par cette approche est limitée en MF car elle nécessite la connaissance préalable de la base modale entière.

Une approche alternative est d'utiliser un autre espace de projection que les modes propres classiques. Dans [Soize 1998] un opérateur d'énergie relatif à une bande de fréquences est défini et la solution est projetée sur les premiers modes de cet opérateur. Il a pour particularité d'admettre un nombre dénombrable de valeurs propres qui tendent rapidement vers zéro. Cette méthode couplée à la théorie des structures floues [Soize 1986] permet de prendre en compte la complexité structurale par une approche probabiliste. Dans [Ohayon et Soize 1998] une synthèse de l'approche peut être trouvée. Cette approche permet de réduire le nombre de degrés de liberté, cependant elle repose sur une description EF qui nécessite un maillage fin pour obtenir une solution correcte.

2.2.1.4 Méthodes de décomposition de domaine Ces méthodes consistent à sous-structurer le domaine afin de remplacer un gros calcul par plusieurs calculs de taille plus petite.

Une première méthode de sous-structuration en dynamique est la synthèse modale par composant (CMS, *Component Modal synthesis*) [Hurty 1965] : les modes propres de chaque sous-structure sont recherchés et servent de base pour la recherche de la solution approchée de la structure entière. Les différentes méthodes se distinguent par le traitement spécifique des interfaces : interfaces fixes [Craig et

Bampton 1968], interfaces libres [McNeal 1971], interfaces non compatibles [Farhat et Geradin 1994]. Le calcul des modes par sous-structures nécessite cependant un maillage très fin dès que l'on monte en fréquence et un nombre de degrés de liberté du problème final encore trop élevé. La méthode AMLS (*Automated Multi-level Substructuring*) propose une optimisation de la sous-structuration pour alléger les calculs [Bennighof *et al.* 2000].

La méthode de condensation de variables de Guyan est une alternative à la CMS [Guyan 1965, Irons 1965, Sandberg *et al.* 2001]. Elle consiste à séparer les degrés de liberté (DDL) en deux groupes : les maîtres et les esclaves. La condensation statique consiste à négliger la contribution dynamique des DDL esclaves. La qualité de la solution dépend alors fortement du choix des maîtres et des esclaves.

La FETI introduite dans [Farhat et Roux 1991] est la méthode duale de décomposition de domaine présentée préalablement dans la section 2.2. L'application à la vibration des plaques et coques peut être trouvée dans [Farhat et Mandel 1998] et à l'acoustique dans [Tezaur *et al.* 2001].

2.2.1.5 Bilan Toutes les méthodes évoquées précédemment sont des réponses pour améliorer les calculs en termes de qualité et de coût. Cependant elles sont toutes basées sur la méthode des éléments finis et se heurtent donc à la même difficulté dès que l'on sort du domaine basses fréquences : la représentation polynomiale par morceau de la solution n'est pas adaptée à la description de phénomènes fortement oscillants. Les approches suivantes tentent de répondre à ce problème.

2.2.2 Éléments finis enrichis

Les éléments enrichis tirent parti de la connaissance *a priori* de la forme de la solution recherchée à savoir le caractère très oscillant de la solution et la complexité structurale. L'idée est alors d'enrichir les fonctions de base utilisées afin de reproduire ces oscillations. Les techniques citées ici se distinguent les unes des autres par la nature des fonctions ajoutées et la façon dont elles sont introduites et traitées dans la méthode.

2.2.2.1 Éléments finis hiérarchiques Les éléments hiérarchiques [Harari *et al.* 1996] sont une amélioration des *p-methods* [Dey 2003] dont ils sont issus. Ils permettent une réutilisation à l'ordre $p + 1$ des matrices de masse et de raideur élémentaires issues de l'ordre p . Le calcul est accéléré mais l'enrichissement est limité du fait de l'apparition des problèmes numériques pour des ordres trop élevés [West *et al.* 1997]. [Beslin et Nicolas 1997] propose de coupler le traitement hiérarchique à l'ajout d'espaces sinusoidaux pour monter en fréquence. L'introduction de fonctions oscillantes sous la forme de produits de fonctions polynômes et de fonctions

trigonométriques permet d'affiner la solution et de réduire les problèmes de conditionnement rencontrés dans les *p-methods* [Leung et Chan 1998].

2.2.2.2 Cell discretization Cet algorithme discrétise le domaine en cellules dans lesquelles la solution est recherchée sous la forme de produits de polynômes et de fonctions exponentielles complexes [Greenstadt 1999]. Les conditions de continuité de la solution entre chaque cellule sont assurées par collocation. Les résultats sont sensibles au choix des interfaces et des points de collocation.

2.2.2.3 Éléments finis multiéchelles Ici la solution est recherchée comme la somme d'une composante calculable associée à l'échelle grossière en espace et d'une composante non calculable associée à l'échelle fine [Hughes 1995]. Cette approche vise à prendre en compte l'effet de la contribution à l'échelle fine sans pour autant la calculer et permet ainsi d'améliorer la solution EF classique qui ne donnerait que la composante associée à l'échelle grossière des EF. Pour cela la stratégie s'appuie sur la construction d'une formulation variationnelle multiéchelle de la composante calculable dans laquelle l'effet de la composante non calculable est prise en compte par l'ajout d'un terme supplémentaire. Le problème est résolu à l'aide de fonctions de Green qui s'annulent sur le bord des éléments grossiers généralement remplacées par des approximations polynomiales pour un point de vue numérique [Oberai et Pinski 1998]. Pour des problèmes 2-D ou 3-D, l'ajout de fonctions nulles sur le bord ne permet pas une bonne approximation de la solution sur les frontières des éléments.

Dans [Franca *et al.* 1997, Franca et Macedo 1998], la méthode des fonctions bulles sans résidus (RFB, *Residual Free Bubbles*) résout le problème multiéchelle élément par élément ce qui rend la technique plus générale mais engendre des calculs plus coûteux puisque l'utilisation de fonctions « bulles » nécessite un calcul pour chaque fonction EF.

2.2.2.4 Exploitation de la PUM La PUM (*Partition of Unity Method*) utilise un recouvrement du domaine initial Ω par un ensemble de maillages Ω_i . À chaque Ω_i sont définies des fonctions d'enrichissement v_i et des fonctions ϕ_i qui vérifient la partition de l'unité : $\sum_i \phi_i = 1$ sur Ω . L'approximation est recherchée sous la forme $\sum_i \phi_i v_i$ [Melenk et Babuška 1997b]. L'intérêt de la PUM est de donner localement sur Ω_i une bonne approximation de la solution. Pour le problème de Helmholtz, [Melenk et Babuška 1997a] introduisent des fonctions de type ondes propagatives ou de Bessel radiales comme fonctions d'enrichissement.

La FEM associée à la PUM donne naissance à deux grandes familles d'approches, la GFEM (*Generalized Finite Element Method*) et la XFEM (*eXtended Finite Element Method*) qui se distinguent principalement l'une de l'autre par leur

mise en œuvre et l'obtention des fonctions d'enrichissement. Dans les deux méthodes, si les fonctions d'enrichissement ne sont pas activées, alors on retrouve la FEM classique. Dans la GFEM [Strouboulis *et al.* 2001], les fonctions d'enrichissement sont construites numériquement en résolvant à l'échelle fine un panel de problèmes aux conditions limites élémentaires dans la zone enrichie ; ces fonctions forment un « handbook » et permettent de traiter des détails structuraux comme les inclusions ou les trous. Les fonctions d'enrichissement de la XFEM sont des fonctions adaptées au traitement des discontinuités et des vides et sont quant à elles obtenues analytiquement en décrivant la géométrie indépendamment du maillage [Moës *et al.* 1999, Belytschko *et al.* 2001].

L'utilisation de la PUM permet une simplification du maillage mais l'intégration numérique des nouvelles fonctions introduites coûte souvent plus cher que celle des fonctions classiques. Par ailleurs, des problèmes de conditionnement surviennent pour des fréquences un peu élevées.

2.2.2.5 DEM La DEM (*Discontinuous Enrichment Method*) est une méthode de Galerkin éléments finis discontinue avec multiplicateurs de Lagrange dédiée aux applications qui présentent de forts gradients ou des oscillations rapides [Farhat *et al.* 2001 - 2003]. Les fonctions d'enrichissement sont calculées analytiquement et sont non nulles sur le bord : la continuité est assurée par l'introduction de multiplicateurs de Lagrange. Ces fonctions sont des ondes propagatives comme celles utilisées pour la PUM, mais elles sont ajoutées aux fonctions de base EF standards et non multipliées avec les polynômes.

Des exemples numériques montrent l'efficacité et la robustesse de la méthode notamment en vibroacoustique mais elle ne permet pas *a priori* de tenir compte des directions de propagation privilégiées et omet les ondes de bord pourtant nécessaires pour l'étude des poutres et des plaques.

2.2.2.6 Bilan Pour exploiter les méthodes d'enrichissement en moyennes fréquences, les fonctions de base doivent être capables de représenter la solution d'où l'idée d'introduire des fonctions oscillantes. Elles permettent de réduire la taille des problèmes traités mais leur intégration est souvent coûteuse.

2.2.3 Méthodes des éléments de frontière

La BEM (*Boundary Element Method*) consiste à ne mailler que les bords de la structure afin de réduire le nombre de degrés de liberté [Banerjee et Butterfield 1981, De Langre 1991]. La formulation intégrale de la frontière établit un lien entre les champs intérieurs et les quantités sur le bord. La matrice obtenue, de petite taille puisque seule la frontière est discrétisée, est pleine et non symétrique ce qui engendre une perte d'efficacité de la méthode. De plus l'utilisation de fonctions de

Green dans la BEM apporte certes un plus par rapport aux polynômes, mais leur extraction et leur manipulation se révèlent délicates.

2.2.4 Méthodes sans maillage

Un maillage fin pour éviter les problèmes de dispersion dans la FEM étant coûteux, l'approche EFGM (*Element Free Galerkin Method*) s'affranchit de cette étape [Belytschko *et al.* 1994] et ne requiert qu'un nuage de points sans connectivité entre eux. La méthode nécessite l'utilisation de fonctions de forme construites selon la méthode des moindres carrés mobiles (MLSM, *Moving Least Squares Method*) et formant une partition de l'unité [Lancaster et Salkhaushaus 1981]. La solution peut être décrite par approximation polynomiale ou sinusoïdale, ce qui, dans le second cas, élimine la dispersion dans certaines directions. Son application aux problèmes de vibration a été réalisée dans [Bouillard et Suleau 1998, Suleau *et al.* 2000] et montre que les erreurs de dispersion sont nettement meilleures, à répartition identique des nœuds, avec la EFGM qu'avec la FEM. Cependant, puisqu'elle est basée comme la FEM sur une discrétisation nodale, le nombre de DDL augmente avec la fréquence étudiée pour obtenir une représentation satisfaisante de la solution. Lorsqu'elle est couplée à la FEM, l'efficacité de la EFGM est exploitée en statique pour la prise en compte d'hétérogénéités localisées sur une structure : seules les zones contenant une hétérogénéité sont traitées sans être maillées, ce qui diminue ainsi la sensibilité de la réponse au maillage [Lacroix et Bouillard 2003].

2.2.5 Méthodes des éléments continus

Cette méthode utilise des solutions analytiques ou quasi-analytiques sur des sous-domaines simples (poutres, plaques rectangulaires, ...) pour construire les matrices de raideur qui, une fois assemblées, donnent la raideur de la structure entière [Fleuret et Duforet 1997, Casimir et Duforet 1997]. Cette méthode, utilisée en construction navale, est très performante en terme de qualité pour les basses, moyennes et hautes fréquences mais reste limitée aux cas de géométries simples.

2.2.6 Méthodes de Trefftz

Les méthodes de Trefftz utilisent des fonctions de base définies sur tout le domaine de la sous-structure considérée et vérifiant exactement l'équation dynamique et la relation de comportement : la solution est représentée par la superposition de ces fonctions. Il reste alors à vérifier les conditions aux limites et de transmission. Les amplitudes des fonctions de base, inconnues du problème, sont déterminées de manière à satisfaire au mieux les conditions de bord grâce à la méthode de collocation, aux moindres carrés ou à une formulation variationnelle. L'avantage des méthodes de Trefftz est qu'elles permettent de traiter des problèmes à fréquence

élevée avec un nombre réduit de DDL. La complétude de l'espace de Trefftz joue un rôle majeur dans cette méthode [Gourgeon et Herrera 1981, Herrera 1984], cependant malgré cette propriété, l'utilisation de ses fonctions conduit à des matrices de petites tailles mais très mal conditionnées, raison pour laquelle l'approche est peu utilisée.

Les *T-elements* sont une approche qui lie la démarche de Trefftz et la FEM : la méthode de Trefftz est adoptée élément par élément [Jirousek et Wroblewski 1996, Qin 2000, Stojek 1998, Monk et Wang 1999, Harari *et al.* 1999 - 2001]. On peut considérer la PUM et la DEM comme faisant partie des *T-elements*. Ce concept permet de limiter les problèmes de conditionnement, les géométries complexes peuvent être prises en compte en les structurant, les singularités géométriques ou de chargement sont traitées par un enrichissement adéquat des fonctions et ne nécessitent aucun raffinement de maillage.

Pour des problèmes de vibroacoustique, la WBT (*Wave Based Technique*) a été développée dans [Desmet 1998, Desmet *et al.* 2002, Pluymers *et al.* 2002]. La structure n'est pas discrétisée comme pour les *T-elements* mais est décomposée en éléments de grande taille par rapport à la dimension de la structure. Les fonctions de base particulières utilisées améliorent le conditionnement des matrices. Cette approche conduit à des matrices de petite taille pleines et non symétriques. L'intégration numérique sur les bords coûte cher en MF et le conditionnement de la matrice en HF se dégrade du fait de la discrétisation des amplitudes (seules certaines directions de propagation sont prises en compte).

2.3 Méthodes issues des hautes fréquences

Pour décrire la réponse en vibrations hautes fréquences, il est généralement admis qu'il n'est pas indispensable de représenter la solution localement car elle n'a aucun sens physique puisque trop sensible aux paramètres du problème et le calcul nécessiterait un trop grand nombre de degrés de liberté : des grandeurs moyennées suffisent.

2.3.1 Méthodes basées sur l'énergie

2.3.1.1 Analyse statistique de l'énergie La SEA (*Statistical Energy Analysis*) [Lyon et Maidanik 1962] est la méthode de référence, dans le domaine des HF (implantée dans des codes industriels comme AutoSEA ou comme LASCAR dans le domaine aérospatial [Trochet *et al.* 1995]) au même titre que le sont les éléments finis pour les BF. Elle vise à prédire les niveaux vibratoires des différentes parties d'une structure en décrivant la solution à l'aide de grandeurs énergétiques constantes par sous-structure et par bande de fréquences. Dans la SEA, la structure est découpée en sous-structures. Ensuite des regroupements de modes sont

construits tels que statistiquement le niveau de chacun des groupes de modes soit semblable : la méthode repose donc sur l'hypothèse d'une forte densité modale dans la bande de fréquences étudiée. Chaque groupe de modes est associé à un DDL : le problème à résoudre issu de l'équilibre énergétique est par conséquent à faible nombre de DDL. Cet équilibre se traduit par un bilan de puissance dans lequel la puissance injectée à une sous-structure par des forces extérieures, aléatoires et stationnaires sur de larges bandes de fréquences, est égale à la somme de la puissance dissipée dans cette sous-structure par amortissement et de la puissance transmise à l'ensemble des sous-structures voisines avec lesquelles elle est connectée, appelée puissance de couplage. L'hypothèse forte de la SEA est la représentation de la puissance de couplage entre deux sous-structures : elle est supposée proportionnelle à la différence de leurs énergies par mode, le facteur de proportionnalité étant le coefficient de couplage.

La résolution du problème avec la SEA est peu coûteuse vu qu'elle ne fait intervenir qu'un faible nombre de DDL. Un autre avantage de la méthode est de s'appuyer sur une analyse globale de la structure dont les quantités déduites sont peu sensibles aux variations des paramètres de la structure. Toutefois, ces quantités sont trop globales en espace et en fréquence pour dimensionner finement la structure notamment dans le domaine des MF. Par ailleurs, les coefficients de couplage ne peuvent être connus explicitement *a priori* que pour des géométries très particulières et sont souvent déterminés expérimentalement ce qui fait de la SEA une méthode non prédictive. Pour des structures complexes, les travaux de [Maxit et Guyader 2001] s'attachent à évaluer ces coefficients en couplant une stratégie d'échantillonnage modal avec l'approche SEA à l'aide de méthodes éléments finis. Pour certains régimes d'excitation, le concept de coefficients de couplage n'est même plus réaliste [Mace 1994]. Enfin l'application de la méthode aux MF est délicate puisque l'hypothèse de la densité modale très grande n'est plus forcément vérifiée.

2.3.1.2 Méthode de diffusion de l'énergie La technique EFA (*Energy Flow Analysis*) est une extension de la SEA qui lui apporte un aspect local [Belov *et al.* 1977, Buvailo et Ionov 1980]. Elle permet de décrire de manière continue les variables énergétiques et se base sur une hypothèse de proportionnalité entre le flux d'énergie et le gradient de la densité d'énergie soit une relation de comportement de type diffusion de la chaleur (loi de Fourier). L'équilibre énergétique conduit à une équation portant sur la densité d'énergie analogue à l'équation de la thermique, la méthode peut alors s'appuyer sur des codes de calcul existant en thermique. Dans [Nefske et Sung 1989, Wohlever et Bernhard 1992] l'approche a été appliquée à des structures 1-D et dans [Bouthier et Bernhard 1995] à des structures 2-D particulières pour lesquelles l'hypothèse de relation de comportement de type diffusion de la chaleur reste valide. Cependant l'analogie avec la thermique n'est pas démontrée pour

des sollicitations et des géométries quelconques [Langley 1995, Ichchou et Jezequel 2001, Ichchou *et al.* 2001].

2.3.1.3 Analyse ondulatoire de l'énergie La WIA (*Wave Intensity Analysis*) [Langley 1992] est une généralisation de la SEA dans laquelle le champ d'ondes n'est plus supposé diffus mais est directionnel grâce à l'introduction d'un champ d'ondes aléatoires propagatives dans les sous-structures et de coefficients de couplage qui varient selon les angles d'incidence aux interfaces. Lorsque les champs non diffus sont prépondérants, la WIA est plus précise que la SEA mais elle ne fournit pas de description spatiale de la répartition énergétique.

2.3.1.4 Méthodes énergétiques simplifiées Issues des méthodes énergétiques générales (GEM, *General Energetic Method*) [Lase *et al.* 1996], la SEM (*Simplified Energy Method*) [Le Bot 1998] propose de pallier les insuffisances de la méthode de diffusion de l'énergie en s'attachant à donner une représentation locale des phénomènes. Le bilan de puissance est écrit aussi bien à l'intérieur des sous-structures qu'au niveau de leurs couplages. La SEM a été utilisée avec succès pour les structures et les salles acoustiques sans toutefois être prédictive puisque demeure le problème des coefficients de couplage non connus *a priori*.

2.3.2 Autres méthodes

2.3.2.1 Développements asymptotiques Cette technique consiste à regarder les tendances de la solution quand on fait varier les paramètres structuraux ou la fréquence dans l'équation de la dynamique [Ohayon 1989]. La méthode WBKJ (Wentzel Kramers Brillouin Jeffreys) permet de savoir si les modes propres recherchés sont locaux ou globaux [Gibert 1984]. Ces méthodes permettent de mettre en évidence la sensibilité de la solution à la position de l'excitation et à des hétérogénéités sans pour autant avoir à résoudre les équations. Leurs applications restent limitées à des géométries simples non industrielles.

2.3.2.2 Méthode de l'enveloppe Puisque la méthode des éléments finis échoue à évaluer des réponses fortement oscillantes en moyennes et hautes fréquences, la *Mean Value Method* [Skudrzyk 1980, Chadwick et Bettess 1997] s'attache à prédire l'enveloppe des amplitudes des résonances et des anti-résonances des fonctions de transfert. Cette quantité est à grande longueur de variation en espace, les équations obtenues peuvent alors être résolues par la technique des éléments finis.

La CEDA (*Complex Envelope Displacement analysis*) [Sestieri et Carcaterra 2001] est également une méthode de l'enveloppe sur les déplacements par application de la transformée de Hilbert sur l'équation d'équilibre, les conditions aux

limites et les excitations. Les équations étant compliquées, des techniques d'approximation ont été élaborées pour obtenir une solution stable. Cette méthode a été appliquée à des structures unidimensionnelles.

2.3.2.3 Méthode des chemins structuraux La SPA (*Structural Path Analysis*) repose sur l'hypothèse selon laquelle la structure peut être vue comme un treillis de poutres [Girard et Defosse 1990] dans lequel l'énergie emprunte le chemin le plus court pour aller d'un point à un autre. Des matrices de rigidité élémentaires, lissées sur la fréquence, sont construites par poutre et sont ensuite assemblées classiquement pour obtenir la matrice de rigidité globale de la structure. L'application de cette technique est très concluante pour les treillis de poutres [Girard et Defosse 1993] mais ne peut malheureusement pas s'étendre aux structures 2-D difficilement assimilables à des treillis.

2.3.2.4 Méthode des rayons Ici la réponse de la structure est décrite par le concept de rayons vibratoires. La RTM (*Ray Tracing Method*) consiste à suivre les rayons de vibration le long de leur parcours par l'étude de leur propagation, réflexion et transmission entre sous-structures par les lois de Snell Descartes de l'optique géométrique, jusqu'à l'amortissement des ondes.

Utilisée pour l'acoustique [Krokstadt 1968] et l'assemblage de plaques [Chae et Ih 2001], la RTM permet de connaître les directions privilégiées de transfert et la répartition spatiale de l'énergie mais à un coût numérique très élevé. De plus cette méthode n'est pas prédictive puisqu'elle requiert la connaissance de coefficients de transmission.

2.4 Conclusion

Les approches exposées ont permis de nombreuses avancées pour résoudre les équations de vibration en moyennes fréquences mais elles présentent encore des limites.

Les méthodes issues des techniques basses fréquences reposent généralement sur une discrétisation spatiale du domaine étudié et s'attachent à représenter un champ très oscillant par une approximation polynomiale : cela conduit à des problèmes de grande dimension, trop lourds à manipuler pour prédire la réponse dans la plage des moyennes fréquences et présentant des difficultés numériques. De plus les quantités calculées choisies, souvent le déplacement, sont trop sensibles aux moindres variations des paramètres du problème. Afin d'améliorer le résultat et de réduire le coût, l'introduction de fonctions oscillantes s'impose mais bien souvent toutes les directions de propagation ne sont pas prises en compte ou sinon de manière discrète ce qui conduit à un mauvais conditionnement des matrices.

Pour leur part, les méthodes issues des hautes fréquences basées sur l'énergie s'attachent bien à représenter une quantité à grande longueur d'onde et peu sensible aux variations structurales. Cependant elles sont souvent trop globales et non prédictives puisqu'elles s'appuient sur la connaissance de coefficients de couplage déterminés expérimentalement ou par des calculs complémentaires.

Toutefois cet état de l'art permet de dégager les points clefs pour construire un outil prédictif pour l'étude des moyennes fréquences :

- la méthode doit être prédictive : l'inconnue privilégiée est le déplacement plutôt que l'énergie,
- pour que le nombre de DDL soit faible, elle doit introduire des fonctions de base à deux échelles : l'échelle rapide représentant le caractère oscillant est connue explicitement et le calcul ne porte que sur l'échelle lente,
- elle doit être applicable à toute géométrie,
- elle doit permettre le calcul sur une bande fréquentielle puisque la solution à une fréquence fixe a peu de sens en MF.

La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC) répond à ces besoins : les bases de l'approche sont présentées dans le chapitre 3.

VU LES DIFFICULTÉS NUMÉRIQUES rencontrées lors de l'utilisation des méthodes classiques temporelles, la méthode proposée pour l'étude d'un choc est une approche fréquentielle dans laquelle le large contenu en fréquence dans la réponse transitoire est pris en compte. La transformée de Fourier est appliquée aux quantités qui dépendent du temps dans le problème dynamique de référence pour obtenir des fonctions de la fréquence, ce qui nous amène à calculer des fonctions de réponse en fréquence. L'efficacité de la méthode est améliorée en choisissant la technique de résolution adéquate en fonction de la plage de fréquences étudiée : les éléments finis pour les basses fréquences et la TVRC pour les moyennes fréquences. Les développements de la FFT ont permis de rendre cette approche compétitive.

Sommaire

1	Problème de référence en dynamique	28
2	Analyse fréquentielle du problème de référence	30
2.1	Formulation fréquentielle du problème	30
2.2	Principe de l'approche proposée	31
2.2.1	Calcul pour la plage basses fréquences	32
2.2.2	Calcul pour la plage moyennes fréquences	32
2.3	Retour à la solution temporelle	32

1 Problème de référence en dynamique

Le problème à résoudre est un problème dynamique sous l'hypothèse des petites perturbations et tel que le comportement des matériaux reste linéaire. Le milieu étudié occupe à l'instant initial un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$. L'étude est menée sur l'intervalle de temps $[0, T]$ étudié, et le milieu est soumis aux actions extérieures suivantes pour tout t appartenant à $[0, T]$ (cf. Figure 2.1) :

- une densité de déplacement \underline{U}_d sur la partie $\partial_1\Omega$ de la frontière $\partial\Omega$,
- une densité surfacique d'effort \underline{F}_d sur la partie $\partial_2\Omega$ de $\partial\Omega$ qui est la partie complémentaire de $\partial_1\Omega$,
- une densité volumique d'effort \underline{f}_d sur tout le domaine Ω .

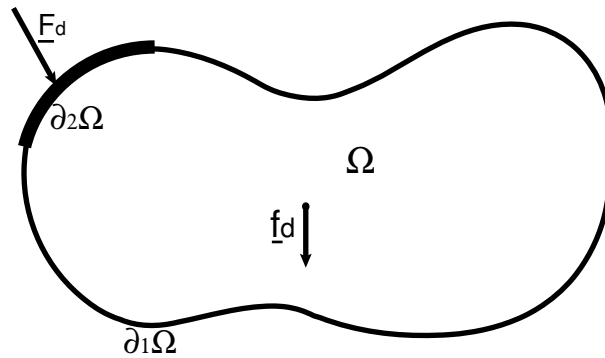


Figure 2.1 Problème dynamique de référence

Les chargements varient dans le temps, ce qui impose de tenir compte des quantités d'accélération.

Pour tout point \underline{M} appartenant à Ω , les déplacements $\underline{U}(\underline{M}, t)$ sont soumis aux conditions initiales à $t = 0$:

$$\begin{aligned}\underline{U}|_{t=0} &= \underline{U}_0 \\ \frac{d\underline{U}}{dt}|_{t=0} &= \underline{\dot{U}}_0\end{aligned}$$

où \underline{U}_0 et $\underline{\dot{U}}_0$ sont des données.

L'état du matériau est décrit par la relation de comportement :

$$\sigma = \mathbf{K}\varepsilon(\underline{U}) + \eta\mathbf{K}\dot{\varepsilon}(\underline{U})$$

où \mathbf{K} est l'opérateur de Hooke, σ est l'opérateur des contraintes, ε est l'opérateur des déformations avec $\varepsilon(\underline{U}) = [\mathbf{Grad}\underline{U}]_{\text{sym}}$. Dans la suite de nos travaux, un amortissement η qui dépend de la fréquence est introduit classiquement avec $\eta > 0$, pour que le problème de référence ait ainsi une solution unique. D'autres relations de comportement plus complexes peuvent être prises en considération. De même, des modèles d'amortissement plus fins peuvent être aisément introduits. Toutefois, les modèles performants utilisant la notion de dérivée fractionnaire s'écrivent très simplement en formalisme fréquentiel.

Le repère de référence est supposé galiléen. Le problème qui traduit l'évolution du milieu sur $[0, T]$ en élasticité linéaire peut être formulé comme suit :

trouver $\underline{U}(\underline{M}, t) \in \mathcal{U}^{[0, T]}$ et $\sigma(\underline{M}, t) \in \mathcal{S}^{[0, T]}$, pour $\underline{M} \in \Omega$ et $t \in [0, T]$, qui vérifient :

– les conditions initiales :

$$\forall \underline{M} \in \Omega \quad \underline{U}|_{t=0} = \underline{U}_0 \quad (2.1)$$

$$\left. \frac{d\underline{U}}{dt} \right|_{t=0} = \underline{\dot{U}}_0 \quad (2.2)$$

– les équations de liaison :

$$\forall t \in [0, T] \quad \underline{U}|_{\partial_1 \Omega} = \underline{U}_d \quad (2.3)$$

– l'équation d'équilibre :

$$\forall t \in]0, T[, \forall \underline{\dot{U}}^* \in \mathcal{U}_0 \quad (2.4)$$

$$\int_{\Omega} \rho \frac{d^2 \underline{U}}{dt^2} \cdot \underline{\dot{U}}^* d\Omega = - \int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma \varepsilon(\underline{\dot{U}}^*)] d\Omega + \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{\dot{U}}^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{\dot{U}}^* dS$$

ρ désigne la masse volumique, ici supposée constante par rapport au temps,

– la relation de comportement :

$$\sigma = \mathbf{K}\varepsilon(\underline{U}) + \eta \mathbf{K}\dot{\varepsilon}(\underline{U}) \quad (2.5)$$

\mathcal{U}_0 est le sous-espace de $\mathcal{U}^{[0, T]}$ associé à la valeur nulle de \underline{U}_d sur la frontière $\partial_1 \Omega$.

2 Analyse fréquentielle du problème de référence

2.1 Formulation fréquentielle du problème

Dans l'approche fréquentielle, le problème de dynamique transitoire est réécrit sous la forme d'un problème variationnel en espace-fréquence. Ainsi, la transformée de Fourier est appliquée à toutes les quantités dépendant du temps pour obtenir des fonctions de la fréquence ω que l'on note $\hat{\cdot}$:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.6)$$

Le problème de référence s'écrit alors :
trouver $(\hat{\underline{U}}(\underline{M}, \omega), \hat{\sigma}(\underline{M}, \omega))$, pour $\underline{M} \in \Omega$ et $\omega \in \mathbb{R}$, vérifiant :

- les équations de liaison et les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{U}}_{\partial_1 \Omega} &= \hat{\underline{U}}_d \\ \hat{\underline{U}} &= i\omega \hat{\underline{U}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

- l'équation d'équilibre :

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \mathbb{R}, \forall \hat{\underline{U}}^* \in \mathcal{U}_0 \quad (2.8) \\ \int_{\Omega} -\rho\omega^2 \hat{\underline{U}} \cdot \hat{\underline{U}}^* d\Omega = - \int_{\Omega} \text{Tr}[\hat{\sigma}_{\varepsilon}(\hat{\underline{U}}^*)] d\Omega + \int_{\Omega} \hat{\underline{f}}_d \cdot \hat{\underline{U}}^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \hat{\underline{F}}_d \cdot \hat{\underline{U}}^* dS \end{aligned}$$

- la relation de comportement :

$$\hat{\sigma} = (1 + i\eta) \mathbf{K}_{\varepsilon}(\hat{\underline{U}}) \quad (2.9)$$

Le problème peut être réécrit en privilégiant le déplacement :
trouver $\hat{\underline{U}}(\underline{M}, \omega)$, pour $\underline{M} \in \Omega$ et $\omega \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{U}}_{\partial_1 \Omega} &= \hat{\underline{U}}_d \\ \forall \omega \in \mathbb{R}, \forall \hat{\underline{U}}^* \in \mathcal{U}_0 \quad (2.10) \\ \int_{\Omega} \left\{ -\rho\omega^2 \hat{\underline{U}} \cdot \hat{\underline{U}}^* + (1 + i\eta) \text{Tr}[\mathbf{K}_{\varepsilon}(\hat{\underline{U}})_{\varepsilon}(\hat{\underline{U}}^*)] \right\} d\Omega = \\ & \int_{\Omega} \hat{\underline{f}}_d \cdot \hat{\underline{U}}^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \hat{\underline{F}}_d \cdot \hat{\underline{U}}^* dS \end{aligned}$$

Pour une valeur de ω fixée, le problème précédent s'identifie à un problème de vibration forcée dont l'unicité de la solution peut être montrée facilement. Les quantités en jeu sont définies dans l'espace des complexes.

Pour mener à terme l'approche en fréquence, il est nécessaire de résoudre le problème précédent pour une large plage de fréquences $[0, \omega'_c]$ qui contient les basses et les moyennes fréquences.

Par conséquent nous calculerons finalement les fonctions de réponse en fréquence $\hat{h}_{ij}(\omega)$ du système pour $\omega \in [0, \omega'_c]$, définies dans le cas de l'élasticité linéaire par :

$$\hat{x}_i(\omega) = \sum_{j=1}^a \hat{h}_{ij}(\omega) \cdot \hat{p}_j(\omega) \quad (2.11)$$

avec :

- \hat{x}_i la transformée de Fourier de la réponse au point courant M_i ,
- \hat{p}_j la transformée de Fourier des a différents chargements p_j supposés ici en nombre fini. p_j peut être un effort surfacique E_{dj} (ou un effort volumique f_{dj}) appliqué sur une zone j .

2.2 Principe de l'approche proposée

Dans le cas des chocs à large spectre, le calcul des FRF doit être mené sur une grande bande de fréquences $[0, \omega'_c]$. Pour les basses fréquences, les codes de calcul actuels sont très performants. Par contre, il n'en est pas de même pour les vibrations en moyennes fréquences dont la modélisation et le calcul sont des questions toujours largement ouvertes.

La démarche que nous proposons pour résoudre la formulation en fréquence du problème de référence consiste à scinder la plage de fréquences utile $[0, \omega'_c]$ en deux parties [[Ladevèze 2003](#)] :

- les basses fréquences $[0, \omega_c]$,
- les moyennes fréquences $[\omega_c, \omega'_c]$.

En dehors de cette plage de fréquences, les énergies cinétiques et de déformation sont supposées négligeables.

Remarque.

En réalité, l'utilisation de la FFT (*Fast Fourier Transform*), implique de calculer la FRF sur $[-\omega'_c, \omega'_c]$. Pour les fréquences négatives ω^- , la réponse est le conjugué de celle calculée pour les fréquences positives $\omega^+ = -\omega^-$:

$$\hat{h}_{ij}(-\omega^+) = \hat{h}_{ij}^*(\omega^+) \quad (2.12)$$

où * désigne le conjugué.

2.2.1 Calcul pour la plage basses fréquences

Pour la plage basses fréquences $[0, \omega_c]$, la FRF est obtenue grâce à la méthode des éléments finis. Le comportement du milieu étant modal en basses fréquences, il est avantageux d'utiliser une base réduite construite à partir des m premiers modes propres de la structure éventuellement complétée par des modes statiques. Avec cette approche standard (cf. par exemple [Bathe 1995, Deraemaeker *et al.* 2002]), le champ de déplacement est représenté par :

$$\hat{\underline{U}}(\underline{M}, \omega) = \sum_{i=1}^m a_i(\omega) \underline{\varphi}_i(\underline{M}) + \sum_{j=1}^q b_j(\omega) \underline{\varphi}'_j(\underline{M}) \quad (2.13)$$

où $\underline{\varphi}_i(\underline{M})$ sont les modes propres de la structure et $\underline{\varphi}'_j(\underline{M})$ sont les modes statiques.

Pour prédire correctement les FRF sur la plage $[0, \omega_c]$, la base réduite contient au moins les modes propres $\underline{\varphi}_i(\underline{M})$ tels que $\omega_i \leq 2 \omega_c$.

Les $\underline{\varphi}_i(\underline{M}), i \in \{1, 2, \dots, m\}$ et $\underline{\varphi}'_j(\underline{M}), j \in \{1, 2, \dots, q\}$ sont par construction orthogonaux par rapport au produit scalaire en énergie cinétique.

2.2.2 Calcul pour la plage moyennes fréquences

En ce qui concerne la plage des moyennes fréquences dont la modélisation et le calcul posent des difficultés, nous choisissons d'utiliser la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC) introduite dans [Ladevèze 1996] qui est une méthode bien adaptée à ce calcul sur $[\omega_c, \omega'_c]$.

Les bases de la TVRC sont présentées au chapitre 3.

2.3 Retour à la solution temporelle

Une fois les FRF $\hat{h}_{ij}(\omega)$ sur $[0, \omega'_c]$ déterminées dans les zones d'intérêt de la structure, elles sont multipliées par les transformées de Fourier $\hat{p}_j(\omega)$ des chargements $p_j(t)$.

Le retour à la réponse temporelle se fait finalement par transformée de Fourier inverse :

$$\begin{aligned} x_i(t)_{t \geq 0} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_i(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^a \hat{h}_{ij}(\omega) \cdot \hat{p}_j(\omega) \right) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (2.14)$$

En pratique, la réponse de la structure n'est recherchée qu'en quelques points ou globalement sur des parties de la structure, ainsi le retour à la réponse temporelle n'est pas très coûteux.

La FFT est une technique numérique efficace pour appliquer les transformées de Fourier discrètes rendant l'approche dans le domaine fréquentiel numériquement performante. L'utilisation de la FFT et de la IFFT (*Inverse Fast Fourier Transform*) n'alourdit donc que très légèrement le calcul, puisque l'essentiel du coût de calcul provient de la prédiction des FRF.

La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes

DANS LA RÉOLUTION du problème de vibration forcée sur la plage moyennes fréquences que requiert l'approche fréquentielle pour la dynamique transitoire, nous utilisons la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC) qui est une méthode prédictive dédiée pour le calcul des vibrations moyennes fréquences. Cette théorie construit la solution approchée comme la superposition de modes de vibrations locaux. Ces modes locaux sont des fonctions oscillantes qui contiennent toute l'information à variation rapide et sont traités analytiquement. Tout l'effort numérique de la stratégie est donc concentré sur le calcul des amplitudes de ces fonctions qui sont des quantités à variation lente. Par conséquent le nombre de degrés de liberté du système est faible, ce qui contribue à la performance de la TVRC.

Sommaire

1	Problème de référence	37
1.1	Problème de vibration forcée	37
1.2	Cas des plaques minces de Kirchhoff-Love	38
1.2.1	Notations	38
1.2.2	Pour la flexion	39

1.2.3	Pour la tension	40
2	La formulation variationnelle associée à la TVRC	40
2.1	Présentation dans le cas général	40
2.2	Cas des assemblages de plaques	42
3	Les approximations à deux échelles	43
3.1	Principe	43
3.2	Rayons de vibration	44
3.2.1	Plaque en flexion	44
3.2.2	Plaque en tension	45
3.3	Le problème discrétisé	47
4	Convergence de la TVRC	48
4.1	Vibrations hors plan	48
4.2	Vibrations dans le plan	48

1 Problème de référence

1.1 Problème de vibration forcée

Afin de simplifier la présentation, nous présentons le problème d'un assemblage de deux sous-structures, mais cette formulation peut facilement être généralisée à un assemblage de n sous-structures. Soient deux sous-structures S and S' , et ∂S et $\partial S'$ les frontières de S et S' respectivement. Nous étudions les vibrations harmoniques de ces deux sous-structures à une fréquence fixe ω . Toutes les quantités peuvent être définies dans le domaine complexe : une amplitude $Q(\underline{M})$ est associée à $Q(\underline{M})e^{i\omega t}$.

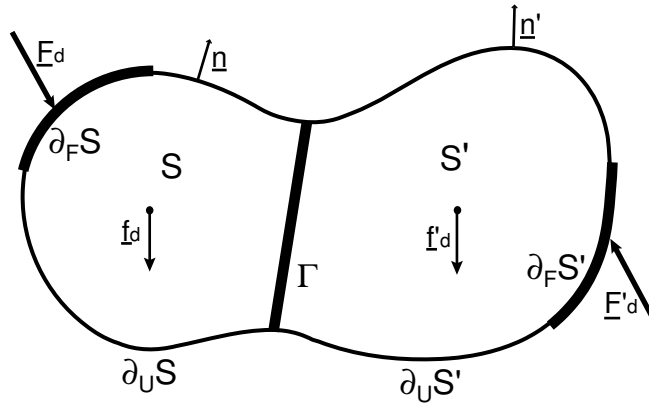


Figure 3.1 Problème de référence de vibration forcée

Les excitations appliquées à S (cf. Figure 3.1) sont :

- un champ de déplacement \underline{U}_d sur une partie $\partial_U S$ de la frontière ∂S ,
- une densité d'effort surfacique \underline{F}_d sur une partie $\partial_F S$ de ∂S ,
- une densité d'effort volumique \underline{f}_d sur tout le domaine S ,

où $\underline{U}_d, \underline{F}_d, \underline{f}_d$ sont les amplitudes des quantités définies dans le domaine complexe. Des quantités similaires sont définies pour S' .

Nous définissons pour la sous-structure S le couple déplacement-contrainte $s = (\underline{U}, \sigma)$ et l'espace correspondant \mathcal{S}_{ad} tels que :

$$\begin{aligned}
 \underline{U} &\in \mathcal{U} && \text{(champ de déplacement à énergie finie } [H^1(S)]^3) \\
 \sigma &\in \mathcal{S} && \text{(champ de contrainte à énergie finie } [L^2(S)]^3) \\
 \rho \underline{\Gamma} &= \operatorname{div} \sigma + \underline{f}_d && \text{sur } S \\
 \sigma &= (1 + i\eta) \mathbf{K}_0 \varepsilon(\underline{U}) && \text{sur } S \\
 \underline{\Gamma} &= -\omega^2 \underline{U} && \text{sur } S
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

où \mathbf{K}_0 est l'opérateur de Hooke, ρ la masse volumique et η le coefficient d'amortissement (qui dépend de la fréquence). Le sous-espace de \mathcal{S}_{ad} associé à \underline{f}_d nul est noté $\mathcal{S}_{ad,0}$. De façon similaire, nous introduisons les espaces \mathcal{S}'_{ad} et $\mathcal{S}'_{ad,0}$.

Le problème de référence peut être formulé comme suit :
trouver $(\underline{U}(\underline{M}), \underline{\sigma}(\underline{M}), \underline{M} \in \mathcal{S})$ et $(\underline{U}'(\underline{M}), \underline{\sigma}'(\underline{M}), \underline{M} \in \mathcal{S}')$ tels que :

$$\begin{aligned} s = (\underline{U}, \underline{\sigma}) \in \mathcal{S}_{ad} & & s' = (\underline{U}', \underline{\sigma}') \in \mathcal{S}'_{ad} \\ \underline{U} = \underline{U}_d \text{ sur } \partial_U \mathcal{S} & & \underline{U}' = \underline{U}'_d \text{ sur } \partial_U \mathcal{S}' \\ \underline{\sigma} \underline{n} = \underline{F}_d \text{ sur } \partial_F \mathcal{S} & & \underline{\sigma}' \underline{n}' = \underline{F}'_d \text{ sur } \partial_F \mathcal{S}' \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}' \text{ sur } \Gamma \\ \underline{\sigma} \underline{n} + \underline{\sigma}' \underline{n}' &= \underline{Q} \text{ sur } \Gamma \end{aligned}$$

1.2 Cas des plaques minces de Kirchhoff-Love

Nous nous plaçons dans le cas des plaques minces de Kirchhoff-Love, homogènes et isotropes, d'épaisseur e , de masse volumique ρ , sans effort volumique et de coefficient d'amortissement structural η . Les équations classiques de vibration harmonique forcée formulées dans les complexes pour les cas de la flexion et de la tension sont détaillées respectivement dans les paragraphes suivants 1.2.2 et 1.2.3.

1.2.1 Notations

En se plaçant dans le cas isotrope, la relation de comportement s'écrit :

$$\underline{\sigma} = \mathbf{K} \underline{\varepsilon} = \lambda \text{Tr}(\underline{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \underline{\varepsilon} \quad \text{avec } \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.3)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé, $E = (1 + i\eta)E_0$ est le module d'Young complexe et ν le coefficient de Poisson.

Si l'on pose l'état de contrainte plane (CP) :

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{xx} & \tilde{\sigma}_{xy} & 0 \\ \tilde{\sigma}_{yx} & \tilde{\sigma}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a alors : } \underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{xx} & \tilde{\varepsilon}_{xy} & 0 \\ \tilde{\varepsilon}_{yx} & \tilde{\varepsilon}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \text{ On note la partie plane des}$$

opérateurs : $\tilde{\sigma} = \pi \underline{\sigma} \pi$ et $\tilde{\varepsilon} = \pi \underline{\varepsilon} \pi$ avec π l'opérateur de projection plan.

La relation de comportement peut alors se mettre sous la forme :

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{K}_{CP} \tilde{\varepsilon} = \lambda_{CP} \text{Tr}(\tilde{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu_{CP} \tilde{\varepsilon} \quad \text{avec } \lambda_{CP} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}; \mu_{CP} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.4)$$

Sous les hypothèses de Kirchhoff-Love (KL), le déplacement prend la forme :
 $\underline{U}(x, y, z) = \underline{U}(\underline{u}, w) = \underline{u}(x, y) + w(x, y) \underline{e}_z - z \underline{\text{grad}} w(x, y)$. \underline{u} est la partie plane et w est la partie hors plan du déplacement.

On peut alors décomposer $\pi\varepsilon$ de la façon suivante :

$$\pi\varepsilon(\underline{U}) = \varepsilon(\underline{u}) - z\text{Grad grad } w = \mathfrak{C}(\underline{u}) + z\mathcal{X}(w) \quad (3.5)$$

\mathcal{X} et \mathfrak{C} sont les opérateurs de courbure et de tension.

Les relations de comportement généralisées en flexion et en tension s'écrivent alors :

$$\mathbf{M} = \frac{e^3}{12}\mathbf{K}_{CP}\mathcal{X}(w) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{N} = e\mathbf{K}_{CP}\mathfrak{C}(\underline{u}) \quad (3.7)$$

Dans la suite, \underline{t} et \underline{n} sont les vecteurs tangent et normal aux bords de la plaque.

1.2.2 Pour la flexion

Le problème de référence en flexion à résoudre est :
trouver les champs de déplacement hors plan et de moment (w, \mathbf{M}) et (w', \mathbf{M}') qui vérifient :

– les équations d'équilibre

- intérieur

$$\text{div}(\underline{\text{div}}\mathbf{M}) = -\rho e\omega^2 w \text{ sur } S \quad \text{div}(\underline{\text{div}}\mathbf{M}') = -\rho' e'\omega^2 w' \text{ sur } S' \quad (3.8)$$

- de bord (moments et efforts tranchants imposés)

$$\begin{aligned} \underline{n}\mathbf{M}\underline{n} &= M_d \text{ sur } \partial_{M_d}S & \underline{n}'\mathbf{M}'\underline{n}' &= M'_d \text{ sur } \partial_{M'_d}S' \\ \underline{n}\underline{\text{div}}\mathbf{M} + (\underline{t}\mathbf{M}\underline{n})_{,t} &= K_d \text{ sur } \partial_{K_d}S & \underline{n}'\underline{\text{div}}\mathbf{M}' + (\underline{t}'\mathbf{M}'\underline{n}')_{,t'} &= K'_d \text{ sur } \partial_{K'_d}S' \end{aligned} \quad (3.9)$$

- de coin

$$\begin{aligned} &\text{Continuité de } \underline{t}\mathbf{M}\underline{n} \text{ aux coins anguleux de } \partial S \\ &\text{Continuité de } \underline{t}'\mathbf{M}'\underline{n}' \text{ aux coins anguleux de } \partial S' \end{aligned} \quad (3.10)$$

– les équations de liaison

$$\begin{aligned} w &= w_d \text{ sur } \partial_{w_d}S & w' &= w'_d \text{ sur } \partial_{w'_d}S' \\ w_{,n} &= w_{nd} \text{ sur } \partial_{w_{nd}}S & w'_{,n} &= w'_{nd} \text{ sur } \partial_{w'_{nd}}S' \end{aligned} \quad (3.11)$$

– les conditions d'interface parfaite

$$\begin{aligned} w &= w' & & \text{sur } \Gamma \\ w_{,n} &= w'_{,n} & & \text{sur } \Gamma \\ \underline{n}\mathbf{M}\underline{n} + \underline{n}'\mathbf{M}'\underline{n}' &= 0 & & \text{sur } \Gamma \\ \underline{n}\underline{\text{div}}\mathbf{M} + (\underline{t}\mathbf{M}\underline{n})_{,t} + \underline{n}'\underline{\text{div}}\mathbf{M}' + (\underline{t}'\mathbf{M}'\underline{n}')_{,t'} &= 0 & & \text{sur } \Gamma \end{aligned} \quad (3.12)$$

– les relations de comportement

$$\mathbb{M} = \frac{e^3}{12} \mathbf{K}_{CP\mathcal{X}}(w) \text{ sur } S \quad \mathbb{M}' = \frac{e'^3}{12} \mathbf{K}'_{CP\mathcal{X}}(w') \text{ sur } S' \quad (3.13)$$

1.2.3 Pour la tension

Le problème de référence à résoudre en tension s'écrit :
trouver les champs de déplacement dans le plan et de tension $(\underline{u}, \mathbb{N})$ et $(\underline{u}', \mathbb{N}')$ qui vérifient :

– les équations d'équilibre

- intérieur

$$\underline{\text{div}} \mathbb{N} = -\rho e \omega^2 \underline{u} \text{ sur } S \quad \underline{\text{div}} \mathbb{N}' = -\rho' e' \omega'^2 \underline{u}' \text{ sur } S' \quad (3.14)$$

- de bord (efforts dans le plan imposés)

$$\mathbb{N} \underline{n} = e T_d \text{ sur } \partial_{T_d} S \quad \mathbb{N}' \underline{n}' = e' T'_d \text{ sur } \partial_{T_d} S' \quad (3.15)$$

– les équations de liaison

$$\underline{u} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial_{\underline{u}_d} S \quad \underline{u}' = \underline{u}'_d \text{ sur } \partial_{\underline{u}_d} S' \quad (3.16)$$

– les conditions d'interface parfaite

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \underline{u}' && \text{sur } \Gamma \\ \mathbb{N} \underline{n} + \mathbb{N}' \underline{n}' &= 0 && \text{sur } \Gamma \end{aligned} \quad (3.17)$$

– les relations de comportement

$$\mathbb{N} = e \mathbf{K}_{CP\mathcal{D}}(\underline{u}) \text{ sur } S \quad \mathbb{N}' = e' \mathbf{K}'_{CP\mathcal{D}}(\underline{u}') \text{ sur } S' \quad (3.18)$$

2 La formulation variationnelle associée à la TVRC

2.1 Présentation dans le cas général

La formulation variationnelle, introduite dans [Ladevèze 1996] et utilisée dans la TVRC, fait intervenir des quantités de type puissance. C'est une formulation mixte qui utilise comme espace admissible \mathcal{S}_{ad} les couples déplacement-contrainte (\underline{U}, σ) définis par l'équation (3.1) : ainsi les équations d'équilibre et la relation de comportement sont vérifiées exactement par sous-structure. Cette formulation globale traduit les conditions limites en déplacement et en effort, ainsi que les conditions de continuité sur Γ qui sont quant à elles vérifiées en moyenne. La formulation

variationnelle des rayons complexes est une extension aux problèmes de vibration forcée de la formulation introduite pour des problèmes de statique dans [Ladevèze 1983] avec une variante pour les conditions d'interface [Hochard *et al.* 1993].

La formulation s'écrit :

trouver $s = (\underline{U}, \sigma) \in \mathcal{S}_{ad}$ et $s' = (\underline{U}', \sigma') \in \mathcal{S}'_{ad}$ tels que :

$$\begin{aligned} \text{Re} \left\{ -i\omega \left[\int_{\partial_U S} \delta \sigma \underline{n} (\underline{U}^* - \underline{U}_d^*) dl + \int_{\partial_F S} (\sigma \underline{n} - \underline{F}_d) \delta \underline{U}^* dl + \right. \right. \\ \left. \int_{\partial_U S'} \delta \sigma' \underline{n}' (\underline{U}'^* - \underline{U}'_d^*) dl + \int_{\partial_F S'} (\sigma' \underline{n}' - \underline{F}'_d) \delta \underline{U}'^* dl + \right. \\ \left. \left. \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\delta \sigma \underline{n} - \delta \sigma' \underline{n}') (\underline{U}^* - \underline{U}'^*) + (\sigma \underline{n} - \sigma' \underline{n}') (\delta \underline{U}^* - \delta \underline{U}'^*) dl \right] \right\} = 0 \\ \forall (\delta \underline{U}, \delta \sigma) \in \mathcal{S}_{ad,0} \quad \forall (\delta \underline{U}', \delta \sigma') \in \mathcal{S}'_{ad,0} \end{aligned} \quad (3.19)$$

La formulation étant écrite dans les complexes, $\text{Re}[A]$ désigne la partie réelle et A^* le conjugué de la quantité A .

Remarques.

- Il est facile de démontrer que la formulation variationnelle est équivalente au problème de référence, si [Ladevèze *et al.* 2001] :
 - le problème de référence a une solution,
 - les opérateurs de Hooke \mathbf{K}_0 et \mathbf{K}'_0 sont définis positifs,
 - les coefficients d'amortissement sont tels que $\eta, \eta' > 0$.
- La nouvelle formulation variationnelle a un sens pour les problèmes mal posés ; un déplacement et une distribution d'effort peuvent être imposés sur une même partie du bord. Le terme correspondant est alors :

$$\frac{1}{2} \text{Re} \left\{ -i\omega \left[\int_{\partial_L S} \delta \sigma \underline{n} (\underline{U}^* - \underline{U}_d^*) dl + \int_{\partial_L S} (\sigma \underline{n} - \underline{F}_d) \delta \underline{U}^* dl \right] \right\} \quad (3.20)$$

- La formulation variationnelle peut s'écrire dans le cas plus général, avec $V = (\underline{U}, \sigma) \times (\underline{U}', \sigma')$, sous la forme :

$$a(V, \delta V) = L(\delta V) \quad \forall \delta V \in \mathcal{S}_{ad,0} \times \mathcal{S}'_{ad,0} \quad (3.21)$$

La TVRC peut encore se mettre sous la forme [Arnaud 2000] :

trouver $s = (\underline{U}, \sigma) \in \mathcal{S}_{ad}$ et $s' = (\underline{U}', \sigma') \in \mathcal{S}'_{ad}$ tels que :

$$\begin{aligned} \delta (E_D(\underline{U}) + E'_D(\underline{U}')) + \left\langle \begin{bmatrix} s \\ s' \end{bmatrix}, \delta \begin{bmatrix} s \\ s' \end{bmatrix} \right\rangle = \left(L_D, \delta \begin{bmatrix} s \\ s' \end{bmatrix} \right) \\ \forall \delta s \in \mathcal{S}_{ad,0} \quad \forall \delta s' \in \mathcal{S}'_{ad,0} \end{aligned} \quad (3.22)$$

où E_D est la puissance dissipée due à l'amortissement qui s'écrit par convention dans une sous-structure S :

$$E_D(\underline{U}) = \frac{\omega}{2} \int_S \eta \operatorname{Tr}[\mathbf{K}_0 \varepsilon(\underline{U}) \varepsilon(\underline{U}^*)] dS \quad (3.23)$$

L_D est une forme linéaire dépendant des données associées au chargement et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire antisymétrique, définie sur la frontière Γ entre sous-structures qui vérifie $\langle u, v \rangle = -\langle v^*, u^* \rangle$.

La partie symétrique de la forme bilinéaire associée à la formulation s'exprime en fonction de la puissance dissipée du système et dépend donc directement de l'amortissement. C'est elle qui assure l'unicité de la solution.

2.2 Cas des assemblages de plaques

Dans le cas des plaques minces de Kirchhoff-Love, la formulation variationnelle s'écrit :

– pour la flexion : trouver $(w, \mathbf{M}) \in \mathcal{S}_{ad}$ et $(w', \mathbf{M}') \in \mathcal{S}'_{ad}$ tels que :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ -i\omega \left[\int_{\partial_{w_{nd}} S} \delta \underline{n} \mathbf{M} \underline{n} (w_{,n} - w_{nd})^* dl - \int_{\partial_{w_d} S} \delta K (w - w_d)^* dl \right. \right. \\ + \int_{\partial_{M_d} S} (\underline{n} \mathbf{M} \underline{n} - M_d) \delta w_{,n}^* dl - \int_{\partial_{K_d} S} (K - K_d) \delta w^* dl \\ + \int_{\partial_{w'_{nd}} S'} \delta \underline{n}' \mathbf{M}' \underline{n}' (w'_{,n} - w'_{nd})^* dl - \int_{\partial_{w'_d} S'} \delta K' (w' - w'_d)^* dl \\ + \int_{\partial_{M'_d} S'} (\underline{n}' \mathbf{M}' \underline{n}' - M'_d) \delta w'_{,n}{}^* dl - \int_{\partial_{K'_d} S'} (K' - K'_d) \delta w'^* dl \\ \left. - \sum_{\text{coins de } \partial S} [(\underline{t} \mathbf{M} \underline{n}) \delta w_{,n}^*] - \sum_{\text{coins de } \partial S'} [(\underline{t}' \mathbf{M}' \underline{n}') \delta w'_{,n}{}^*] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \delta (\underline{n} \mathbf{M} \underline{n} - \underline{n}' \mathbf{M}' \underline{n}') (w_{,n} - w'_{,n})^* - \delta (K - K') (w - w') dl \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\underline{n} \mathbf{M} \underline{n} + \underline{n}' \mathbf{M}' \underline{n}') \delta (w_{,n} + w'_{,n})^* - (K + K') \delta (w + w') dl \right] \} = 0 \\ \forall (\delta w, \delta \mathbf{M}) \in \mathcal{S}_{ad,0} \quad \forall (\delta w', \delta \mathbf{M}') \in \mathcal{S}'_{ad,0} \end{aligned} \quad (3.24)$$

où \mathcal{S}_{ad} et \mathcal{S}'_{ad} sont l'ensemble des couples qui vérifient les équations (3.8) et (3.13).

– pour la tension : trouver $(\underline{u}, \mathbf{N}) \in \mathcal{S}_{ad}$ et $(\underline{u}, \mathbf{N}) \in \mathcal{S}'_{ad}$ tels que :

$$\begin{aligned}
 \text{Re} \left\{ -i\omega \left[\int_{\partial_{\underline{u}_d} S} \delta \mathbb{N} \underline{n} (\underline{u} - \underline{u}_d)^* dl + \int_{\partial_{T_d} S} (\mathbb{N} \underline{n} - e T_d) \delta \underline{u}^* dl \right. \right. \\
 \left. \left. + \int_{\partial_{\underline{u}'_d} S'} \delta \mathbb{N}' \underline{n}' (\underline{u}' - \underline{u}'_d)^* dl + \int_{\partial_{T'_d} S'} (\mathbb{N}' \underline{n}' - e' T'_d) \delta \underline{u}'^* dl \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \delta (\mathbb{N} \underline{n} - \mathbb{N}' \underline{n}') (\underline{u} - \underline{u}')^* - (\mathbb{N} \underline{n} + \mathbb{N}' \underline{n}') \delta (\underline{u} + \underline{u}') dl \right] \right\} = 0 \\
 \forall (\delta \underline{u}, \delta \mathbb{N}) \in \mathcal{S}_{ad,0} \quad \forall (\delta \underline{u}', \delta \mathbb{N}') \in \mathcal{S}'_{ad,0}
 \end{aligned} \quad (3.25)$$

où \mathcal{S}_{ad} et \mathcal{S}'_{ad} sont l'ensemble des couples qui vérifient les équations (3.14) et (3.18).

3 Les approximations à deux échelles

3.1 Principe

Afin d'écrire une formulation approximée de la TVRC, il est nécessaire de définir les sous-espaces \mathcal{S}_{ad}^h et $\mathcal{S}_{ad,0}^h$ (respectivement $\mathcal{S}'_{ad}{}^h$ et $\mathcal{S}'_{ad,0}{}^h$) de \mathcal{S}_{ad} et $\mathcal{S}_{ad,0}$ (respectivement \mathcal{S}'_{ad} et $\mathcal{S}'_{ad,0}$) pour chaque sous-structure. La solution approchée vérifie alors le problème :

trouver $s^h = (\underline{U}^h, \sigma^h) \in \mathcal{S}_{ad}^h$ et $s'^h = (\underline{U}'^h, \sigma'^h) \in \mathcal{S}'_{ad}{}^h$ tels que :

$$\begin{aligned}
 \delta \left(E_D(\underline{U}^h) + E'_D(\underline{U}'^h) \right) + \left\langle \begin{bmatrix} s^h \\ s'^h \end{bmatrix}, \delta \begin{bmatrix} s^h \\ s'^h \end{bmatrix} \right\rangle = \left(L_D, \delta \begin{bmatrix} s^h \\ s'^h \end{bmatrix} \right) \\
 \forall \delta s^h \in \mathcal{S}_{ad,0}^h \quad \forall \delta s'^h \in \mathcal{S}'_{ad,0}{}^h
 \end{aligned} \quad (3.26)$$

La TVRC introduit des approximations à deux échelles $(\underline{U}^h, \sigma^h)$ à fort contenu mécanique, définies en identifiant trois zones : la zone intérieure, la zone de bord et la zone de coin. Par exemple, dans le voisinage d'un point \underline{X} , la solution est supposée localement bien décrite par la superposition d'un nombre infini de rayons de vibration (ondes propagatives et ondes évanescentes), chacun pouvant s'écrire :

$$\begin{aligned}
 \underline{U}^h(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{k}) &= \underline{U}^h(\underline{X}, \underline{k}) e^{k \cdot \underline{Y}} \\
 \sigma^h(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{k}) &= \sigma^h(\underline{X}, \underline{k}) e^{k \cdot \underline{Y}}
 \end{aligned} \quad (3.27)$$

où \underline{X} et \underline{Y} représentent le vecteur position, \underline{X} étant associé aux variations lentes et \underline{Y} aux variations rapides. Plus précisément, les termes relatifs au vecteur position \underline{X} varient lentement quand \underline{X} bouge le long de la structure, tandis que les termes associés au vecteur position \underline{Y} varient rapidement quand \underline{Y} bouge. \underline{k} est le vecteur

d'onde caractérisant le rayon de vibration. Pour que ces rayons $(\underline{U}^h, \sigma^h)$ soient admissibles, ils doivent appartenir à l'espace \mathcal{S}_{ad}^h et doivent vérifier (3.1) dans le cas général, (3.8) et (3.13) dans le cas des plaques en flexion et (3.14) et (3.18) dans le cas des plaques en tension. Nous obtenons ainsi des propriétés sur \underline{k} .

3.2 Rayons de vibration

3.2.1 Plaque en flexion

Considérons les déplacements de flexion hors plan w d'une plaque mince homogène isotrope S . Dans le cadre de la modélisation de Kirchhoff-Love, les rayons de vibration doivent satisfaire (3.8) et (3.13) pour être admissibles. Le déplacement w de la fibre neutre de la plaque dans la direction perpendiculaire à la plaque est alors gouverné par l'équation de la dynamique :

$$\frac{E_0 e^3}{12(1-\nu^2)}(1+i\eta)\Delta\Delta w = \rho e \omega^2 w \text{ sur } S \quad (3.28)$$

où Δ est l'opérateur Laplacien, E_0 le module d'Young, η l'amortissement avec $\eta \ll 1$. Les rayons de vibration sont recherchés sous la forme :

$$w^h(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{k}) = w_n^h(\underline{X}, \underline{k}) e^{i \underline{k} \cdot \underline{Y}} \quad (3.29)$$

où w_n^h est un polynôme de degré n en \underline{X} . Dans la suite de l'étude, nous nous placerons dans le cadre des rayons de vibration d'ordre 0 ($n = 0$) : w_0^h est un polynôme constant en \underline{X} , \underline{k} est un vecteur du plan de la plaque à composantes complexes $\underline{k} = \begin{bmatrix} k_{xr} + ik_{xi} \\ k_{yr} + ik_{yi} \end{bmatrix}$. En introduisant (3.29) dans (3.28) dans le cas isotrope, nous obtenons l'équation d'onde :

$$(\underline{k} \cdot \underline{k})^2 = k^4 = \frac{12\rho(1-\nu^2)\omega^2}{E_0(1+i\eta)e^2} = \frac{1}{(1+i\eta)} k_0^4 \quad (3.30)$$

On peut en déduire les différentes familles de champs de rayons considérées dans le cas des plaques.

La première famille de rayons sont les rayons intérieurs qui ont un comportement propagatif et sont définis par le vecteur d'onde : $\underline{k} = -ik\underline{\nu}$ avec $\underline{\nu} \in \mathbb{R}^2$, $\|\underline{\nu}\| = 1$. L'équation (3.30) montre que \underline{k} appartient à un cercle C_i de rayon k_0 défini par les propriétés matériau, l'épaisseur de la plaque et la fréquence. Toutes les directions de la plaque sont prises en compte en parcourant tout le cercle C_i (cf. Figure 3.2).

De la même façon, on cherche des champs associés à un bord de normale \underline{e}_x et de tangente \underline{e}_y qui soient évanescents selon \underline{e}_x quand on s'éloigne de ce bord ($k_{xr} > 0$

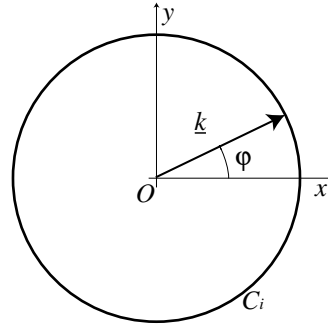


Figure 3.2 Domaine d'admissibilité des rayons intérieurs

et $k_{yr} = 0$). \underline{k} doit appartenir à une courbe C_b représentée dans la Figure 3.3. Tous les rayons de bord dont la vitesse de propagation est inférieure à celle des rayons intérieurs sont pris en compte en parcourant C_b .

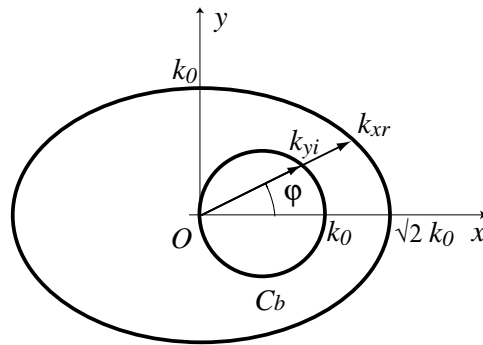


Figure 3.3 Domaine d'admissibilité des rayons de bord

Enfin les rayons de vibration de coin correspondent à des ondes évanescentes, localisées au niveau des coins de la plaque c'est-à-dire avec $k_{xr} > 0$ et $k_{yr} > 0$.

La Figure 3.4 montre quelques exemples de rayons de flexion admissibles pour une plaque isotrope homogène.

3.2.2 Plaque en tension

Considérons les déplacements dans le plan \underline{u} d'une plaque mince homogène isotrope S dans le cadre de la modélisation de Kirchhoff-Love. Les rayons de vibration doivent satisfaire (3.14) et (3.18) pour être admissibles. Le déplacement \underline{u} vérifie alors l'équation de la dynamique :

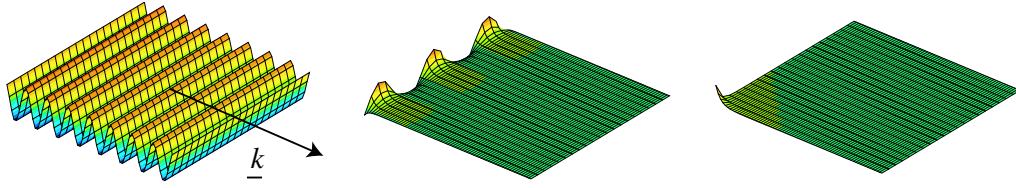


Figure 3.4 Rayons intérieurs, de bord et de coin pour une plaque homogène

$$\operatorname{div}(e\mathbf{K}_{CP}\varepsilon(\underline{u})) = -\rho e\omega^2 \underline{u} \text{ sur } \mathcal{S} \quad (3.31)$$

Pour les ondes planes, les rayons de vibration sont recherchés sous la forme :

$$\underline{u}^h(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{k}) = \underline{u}_n^h(\underline{X}, \underline{k}) e^{k \cdot \underline{Y}} \quad (3.32)$$

où \underline{u}_n^h est un vecteur de polynômes de degré n en \underline{X} . Comme précédemment, nous considérerons uniquement les rayons de vibration d'ordre 0 ($n = 0$) dans la suite de l'étude : \underline{u}_0^h est constant en \underline{X} . \underline{k} est un vecteur du plan de la plaque.

Nous pouvons distinguer deux familles de rayons dans le plan de la plaque : les ondes de pression et les ondes de cisaillement.

Les ondes de pression sont recherchées avec \underline{u}_0^h colinéaire au vecteur d'onde \underline{k} : $\underline{u}_0^h = u_{0P} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$ et $\underline{k} = k_P \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$. En introduisant (3.32) dans (3.28) dans le cas isotrope, l'équation d'onde obtenue est :

$$k_P^2 = -\frac{\rho(1-\nu^2)\omega^2}{E_0(1+i\eta)} \quad (3.33)$$

Les ondes de cisaillement dans le plan de la plaque sont quant à elles recherchées avec \underline{u}_0^h orthogonal au vecteur d'onde \underline{k} : $\underline{u}_0^h = u_{0S} \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix}$ et $\underline{k} = k_S \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$. L'équation d'onde s'écrit alors :

$$k_S^2 = -\frac{2\rho(1+\nu)\omega^2}{E_0(1+i\eta)} \quad (3.34)$$

Les ondes de pression et de cisaillement sont des ondes propagatives et les équations (3.33) et (3.34) montrent que \underline{k} appartient respectivement aux cercles C_P et C_S définis par les propriétés matériau et la fréquence. Toutes les directions de la plaque sont prises en compte en parcourant les cercles C_P et C_S (cf. Figure 3.5).

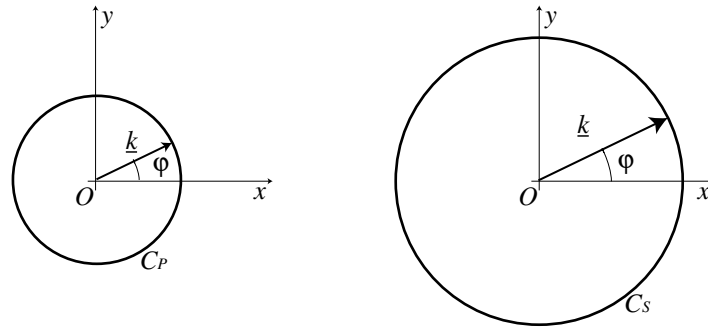


Figure 3.5 Domaine d'admissibilité des rayons de pression et de cisaillement

3.3 Le problème discrétisé

Le déplacement de chaque point d'une sous-structure est généré par la base des rayons complexes admissibles. Les inconnues sont les amplitudes généralisées $\underline{U}^h(\underline{X}, \underline{k})$, soit $w_n^h(\underline{X}, \underline{k})$ dans le cas de la flexion et $u_n^h(\underline{X}, \underline{k})$ pour la tension, de la base (un polynôme d'ordre n en \underline{X} et une quantité à grande longueur de variation). Tenir compte de toutes les directions φ de l'ensemble des courbes admissibles C se traduit par une intégrale sur C . Dans le cas où l'on se restreint aux rayons d'ordre 0, la solution est recherchée sous la forme :

$$\underline{U}^h(\underline{X}, \underline{Y}) = \int_{\underline{k} \in C} \underline{U}_0^h(\underline{X}, \underline{k}(\varphi)) e^{k(\varphi)\underline{Y}} d\varphi \quad (3.35)$$

Afin d'obtenir un problème de dimension finie, l'intégrale (3.35) peut être discrétisée et les amplitudes $\underline{U}_0^h(\underline{X}, \underline{k}(\varphi))$ considérées constantes par secteur angulaire : $\underline{U}^h(\underline{X}, E_p)$ (cf. Figure 3.6). La distribution angulaire des ondes pour tous les points de la sous-structure est supposée bien décrite par cette distribution angulaire discontinue.

Une fois la discrétisation choisie par sous-structure, la TVRC mène à un système d'équations linéaires dans le domaine complexe :

$$\mathbf{K}^h \underline{U} = \underline{F}^h \quad (3.36)$$

où $\mathbf{K}^h = \mathbf{K}_s^h + \mathbf{Z}^h$ et $\underline{F}^h = \underline{L}_D^h \cdot \mathbf{K}_s^h$ est la matrice d'amortissement symétrique définie positive associée à la puissance dissipée E_D ; \mathbf{Z}^h est la matrice associée à la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie telle que $\mathbf{Z}^{hT*} = -\mathbf{Z}^h$; \underline{L}_D^h est le vecteur associé à la forme linéaire L_D ; \underline{U} est le vecteur correspondant aux amplitudes inconnues associées aux polynômes complexes $\underline{U}^h(\underline{X}, E_p)$. L'équation (3.36) a une solution unique. Cependant, bien que l'inversibilité de la matrice \mathbf{K} (et, par conséquent, l'unicité de la

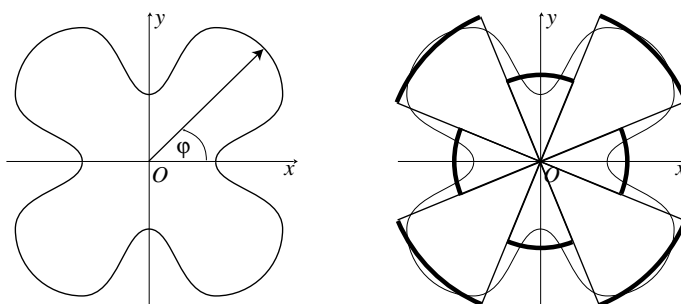


Figure 3.6 Amplitude continue (à gauche) et amplitudes discrétisées (à droite)

solution) soit prouvée, un soin tout particulier doit être apporté au calcul numérique car cette approche peut conduire à un mauvais conditionnement de la matrice \mathbf{K} .

4 Convergence de la TVRC

4.1 Vibrations hors plan

Les possibilités de la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes ont été très largement démontrées sur des assemblages de plaques et coques pour les vibrations de flexion dans [Ladevèze et Arnaud 2000, Ladevèze *et al.* 2001, Rouch et Ladevèze 2003]. Des comparaisons avec des codes éléments finis industriels montrent que la TVRC est une méthode prédictive pour les vibrations moyennes fréquences à un coût faible. Dans [Riou *et al.* 2004], on peut trouver l'extension de la TVRC aux assemblages de coques. Enfin la méthode a été étendue à l'introduction des hétérogénéités dans la structure dans [Ladevèze *et al.* 2003a].

4.2 Vibrations dans le plan

L'étude des vibrations planes de la plaque fait l'objet d'études récentes. Les premiers pas pour le cas d'une plaque peuvent être trouvés dans [Sourcis 2005]. Pour illustrer les performances de la TVRC dans ce cadre, une comparaison entre les résultats issus de la TVRC réalisés avec CORAY MF et les résultats d'un calcul éléments finis réalisé avec MSC.Nastran est effectuée sur une plaque en aluminium, soumise à une excitation harmonique dans le plan de la plaque, dont la géométrie et l'environnement sont présentés dans la Figure 3.7.

Sur les Figures 3.8 et 3.9 sont tracées, respectivement pour des excitations harmoniques aux fréquences 3000 Hz et 6000 Hz, les déformées dans le plan selon

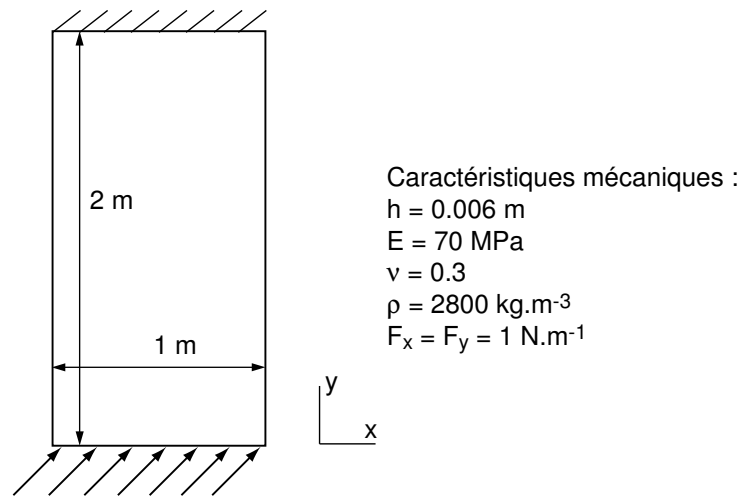


Figure 3.7 Caractéristiques géométriques et matériaux de la plaque en aluminium

X et selon Y des réponses obtenues grâce aux deux méthodes. Ces déformées sont tracées avec la même échelle.

La comparaison vise à mettre en évidence l'évolution du nombre de degrés de liberté utilisés dans les deux approches avec la fréquence. Le maillage éléments finis utilisé dans MSC.Nastran a été choisi de façon à obtenir la réponse à convergence. Pour les deux fréquences d'excitation étudiées, les deux approches donnent des résultats très similaires.

La Figure 3.10 représente l'amplitude maximale de la déformée selon X et Y pour les sollicitations harmoniques à 3000 Hz et à 6000 Hz en fonction du nombre de DDL utilisés dans chacun des deux codes de calcul. Alors que le nombre de DDL dans CORAY MF (72 rayons de pression et 72 rayons de cisaillement) n'évolue quasiment pas avec la fréquence, celui-ci explose lors de l'utilisation du code éléments finis MSC.Nastran pour converger en amplitude. En effet la méthode des EF donne une allure de la déformée de la réponse forcée correcte avec un maillage même grossier, mais l'amplitude n'en reste pas moins erronée si le maillage n'est pas raffiné en fonction de la fréquence d'excitation. Le gain en termes de nombre de DDL est donc très significatif avec la TVRC.

Son application aux assemblage de plaques est d'autant plus prometteuse mais elle demande encore des développements dans le cas des vibrations planes.

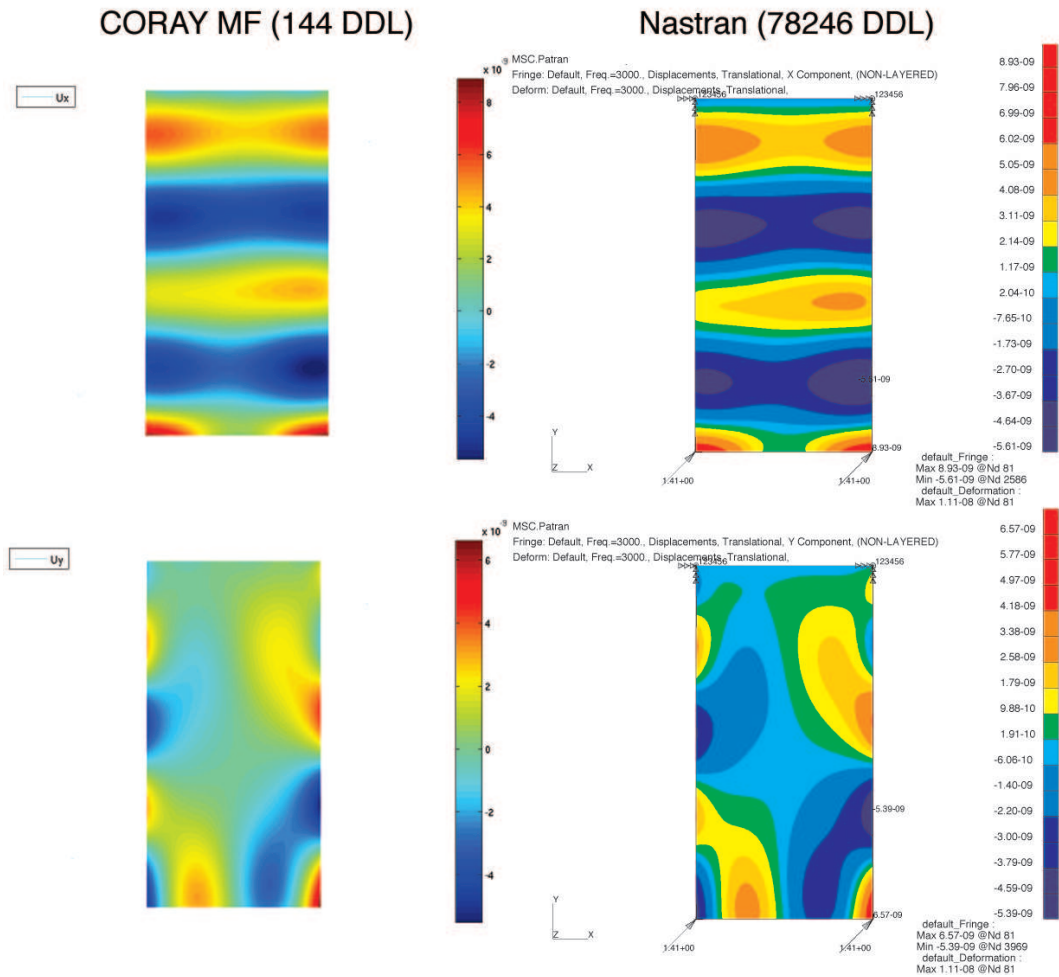


Figure 3.8 Comparaison des solutions CORAY MF et MSC. Nastran à 3000 Hz

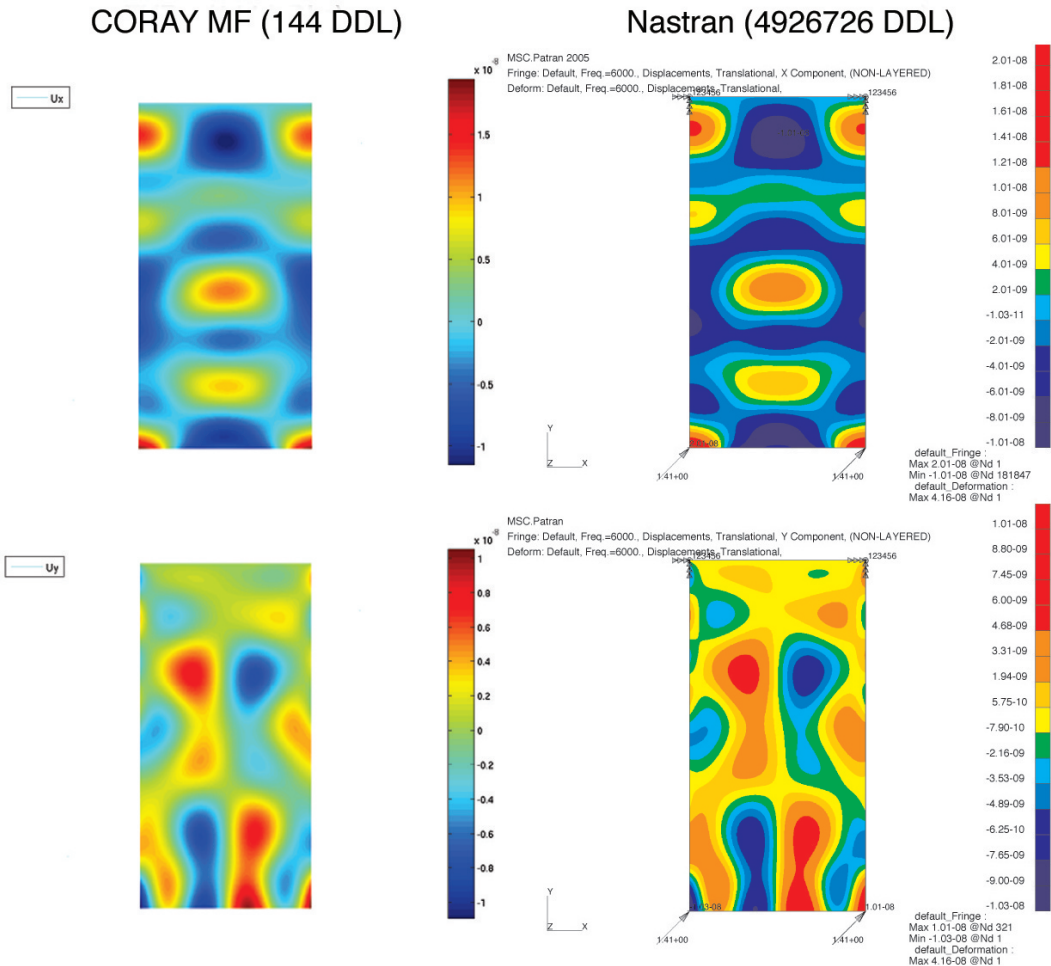
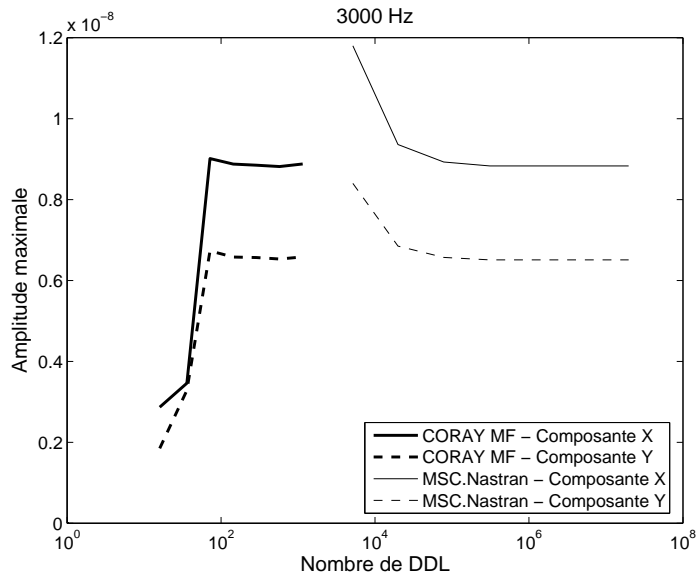
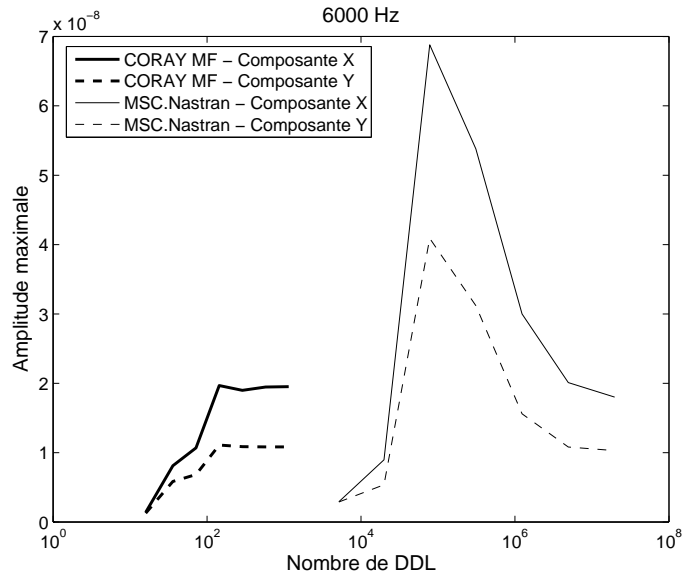


Figure 3.9 Comparaison des solutions CORAY MF et MSC. Nastran à 6000 Hz



(a) Courbe de convergence pour une excitation forcée à 3000 Hz



(b) Courbe de convergence pour une excitation forcée à 6000 Hz

Figure 3.10 Courbes de convergence de l'amplitude maximale des déformées obtenues avec les deux codes de calcul CORAY MF et MSC.Nastran

L'APPROCHE PROPOSÉE dans le domaine fréquentiel requiert la mise au point de paramètres, à commencer par le choix des deux plages de fréquences. Cette étude sera détaillée dans ce chapitre. Par ailleurs, les développements numériques de la méthode mettent en œuvre les versions discrètes des transformées de Fourier, ce qui fixe le nombre de calculs de problèmes de vibration forcée à effectuer pour obtenir la fonction de réponse en fréquence et pour reconstruire la solution dans le domaine temporel sans recouvrement d'une période sur la suivante. Deux techniques sont proposées et appliquées pour réduire le nombre de calculs TVRC sur la plage des moyennes fréquences.

L'importance du contenu moyennes fréquences est mise en évidence au travers de quelques exemples, ainsi que l'efficacité de la méthode.

Sommaire

1	Choix des paramètres	55
1.1	Choix des bandes de fréquences	55
1.1.1	Structure étudiée	55
1.1.2	Influence de ω_c	56
1.1.3	Influence de ω'_c	59
1.1.4	Choix retenus	60
1.2	Le problème discrétisé dans l'approche fréquentielle	61

1.2.1	Discrétisation spatiale	61
1.2.2	Discrétisation fréquentielle	62
2	Reconstruction de la réponse temporelle	64
2.1	Exigences dues à la discrétisation du problème fréquentiel	64
2.1.1	Temps d'observation T_o	64
2.1.2	Fonctions de Green	65
2.1.3	ImFT	65
2.1.4	Amortissement artificiel	66
2.2	Variante utilisant les propriétés des moyennes fréquences pour la reconstruction temporelle	67
2.2.1	Principe	67
2.2.2	Exemple	68
2.3	Amélioration qui prend en compte l'analyse large bande de la TVRC	71
2.3.1	Calcul TVRC sur une bande de fréquences	71
2.3.2	Utilisation de l'analyse large bande	73
3	Importance des moyennes fréquences	77
3.1	Contribution des moyennes fréquences	77
3.2	Influence des lois d'amortissement	80
3.3	Avantage de l'approche fréquentielle	81
4	Prise en compte adaptée des moyennes fréquences	82

1 Choix des paramètres

1.1 Choix des bandes de fréquences

La bande de fréquences étudiée $[0, \omega'_c]$ est divisée en deux parties : les basses fréquences $[0, \omega_c]$ et les moyennes fréquences $[\omega_c, \omega'_c]$. Le premier problème à résoudre dans la démarche proposée porte donc sur le choix des deux plages de fréquences étudiées : quelle limite ω_c prendre entre les basses et les moyennes fréquences ; comment choisir ω'_c pour avoir suffisamment d'information fréquentielle et donner une réponse correcte.

Pour répondre à ces questions, nous allons étudier l'influence des deux bandes de fréquences afin d'établir un critère que nous utiliserons par la suite pour le choix de ces plages.

Pour la plage BF, la méthode des éléments finis avec réduction sur la base modale est utilisée pour prédire la FRF. Quant à la plage MF, elle est gérée grâce à la TVRC.

1.1.1 Structure étudiée

L'influence de ω_c et ω'_c est étudiée sur la géométrie illustrée sur la Figure 4.1. Cet exemple correspond à un longeron pouvant être trouvé sur un châssis de voiture constitué d'un assemblage de douze plaques. Il est soumis à un choc à l'extrémité gauche et les déplacements sont bloqués à l'extrémité droite.

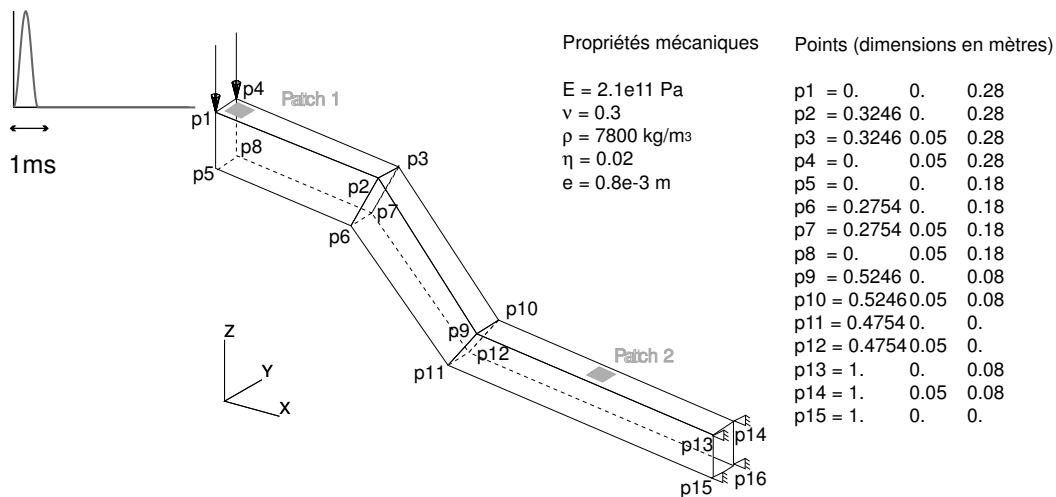


Figure 4.1 Description de l'assemblage de douze plaques soumis à un impact

Le chargement caractérisant l'impact et l'amplitude de son spectre obtenu par transformée de Fourier sont décrits dans la Figure 4.2 : l'impact est modélisé par un sinus versé d'une durée $T = 1$ ms.

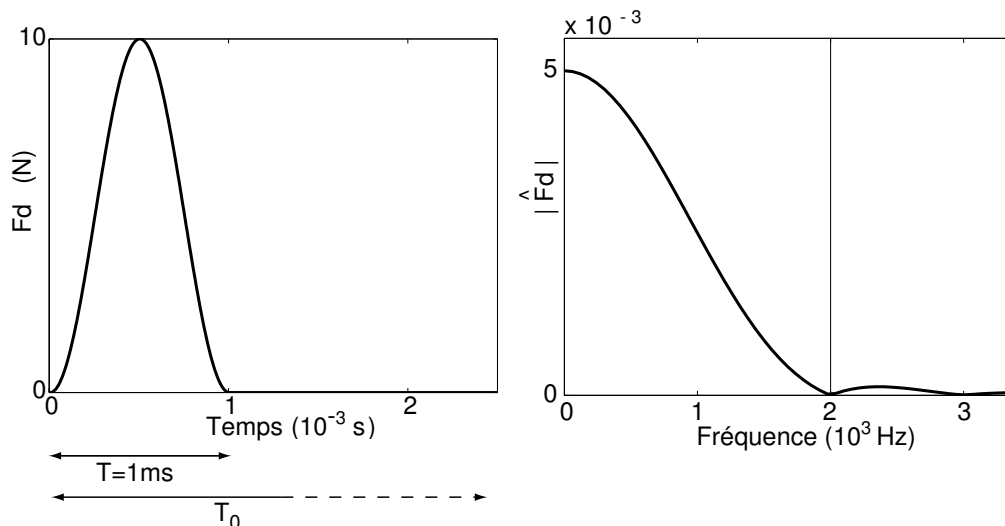


Figure 4.2 Représentations temporelle (à gauche) et fréquentielle (à droite) du chargement

Les réponses seront observées au niveau des deux patchs matérialisés sur la Figure 4.1 : l'un se trouve près de la source et l'autre plus près de l'encastrement.

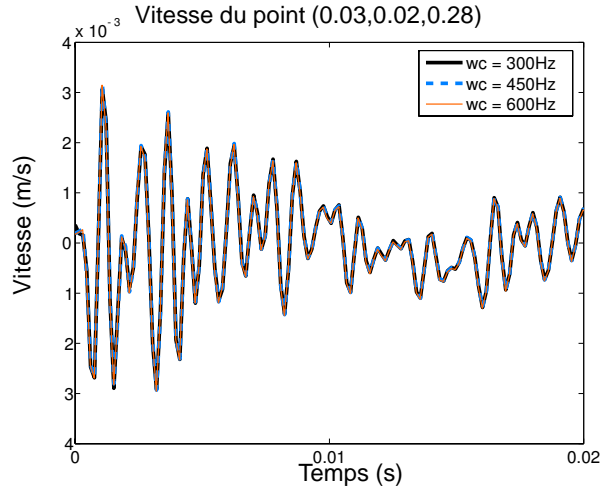
1.1.2 Influence de ω_c

Dans un premier temps, l'influence de ω_c est étudiée avec $\omega'_c = 2000$ Hz fixée. La Figure 4.3 montre les vitesses matérielles pour des points situés dans les deux patchs et pour trois valeurs différentes de ω_c : $\omega_c = [300 \text{ Hz}, 450 \text{ Hz}, 600 \text{ Hz}]$.

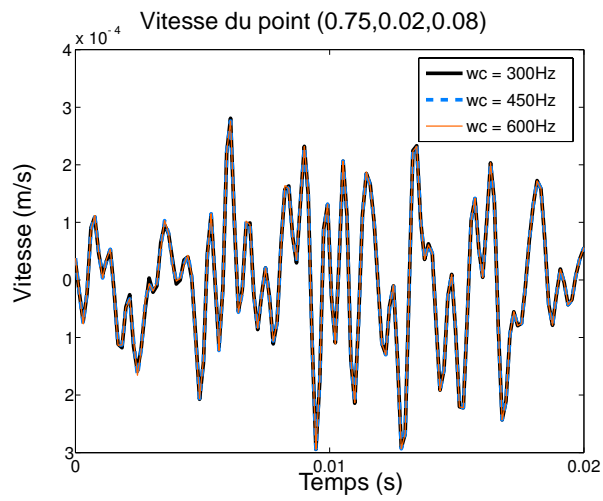
Comme nous pouvions nous y attendre, le choix de ω_c n'affecte pas la qualité de la réponse. En effet, le contenu fréquentiel $[0, \omega'_c]$ des trois réponses est identique, seule la façon de calculer la fonction de réponse en fréquence est différente mais dans tous les cas cette FRF est calculée sur la même plage de fréquences totale.

Toutefois, le choix de ω_c agit sur le coût du calcul : une fréquence ω_c trop grande nécessite une base réduite trop coûteuse pour le calcul de la FRF sur $[0, \omega_c]$ et peut engendrer des difficultés numériques rappelées dans la section 2.2.1 du chapitre 1.

En pratique, ω_c est choisie telle qu'à partir de cette fréquence, les modes deviennent locaux. Ici ω_c est pris égal à 450 Hz, la solution du problème de vibration forcée à cette fréquence est représentée sur la Figure 4.4. $\omega_c = 450$ Hz correspond



(a) Patch 1



(b) Patch 2

Figure 4.3 Vitesses pour trois valeurs de ω_c

également à la fréquence à partir de laquelle les modes se densifient comme cela peut être observé sur les FRF moyennes en vitesse sur les deux patches (cf. Figure 4.5). C'est donc la fréquence limite au-delà de laquelle la qualité de la FRF calculée est très sensible au maillage spatial EF et par conséquent au-delà de laquelle nous considérons appartenir au domaine des moyennes fréquences. Pour le longeron, l'obtention de la FRF sur $\omega_c = [0, 450 \text{ Hz}]$ requiert déjà le calcul des 50 premiers modes propres de la structure.

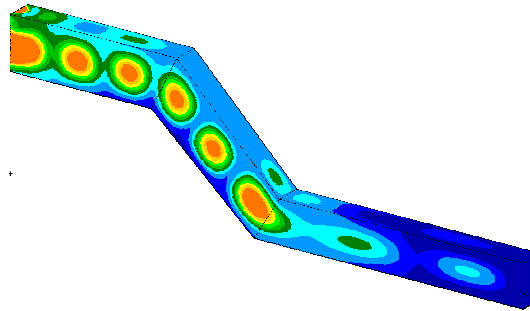


Figure 4.4 Représentation globale de la déformée pour une excitation forcée à 450 Hz

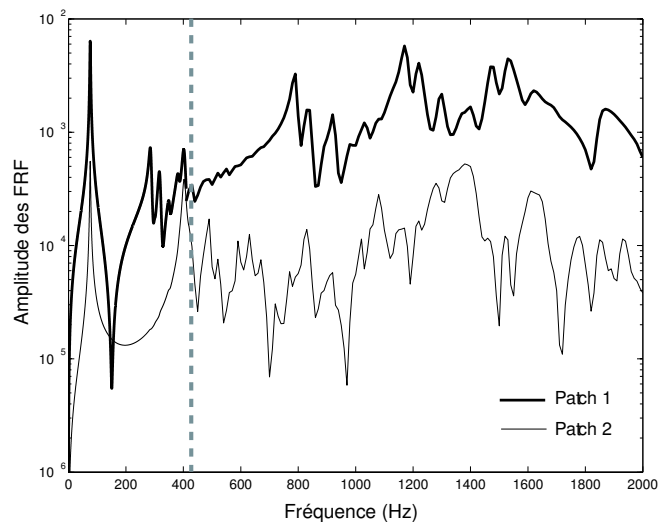
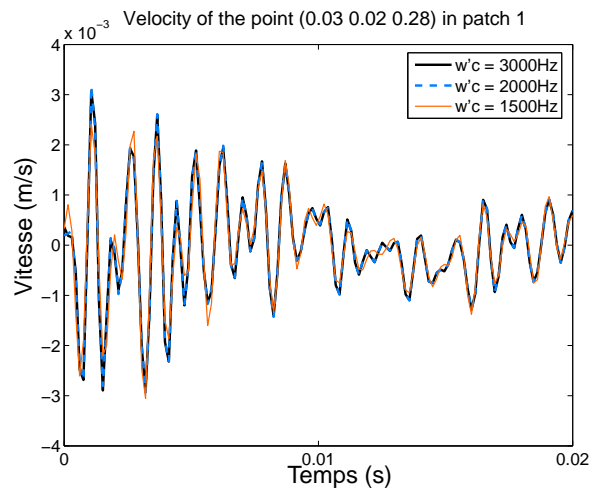


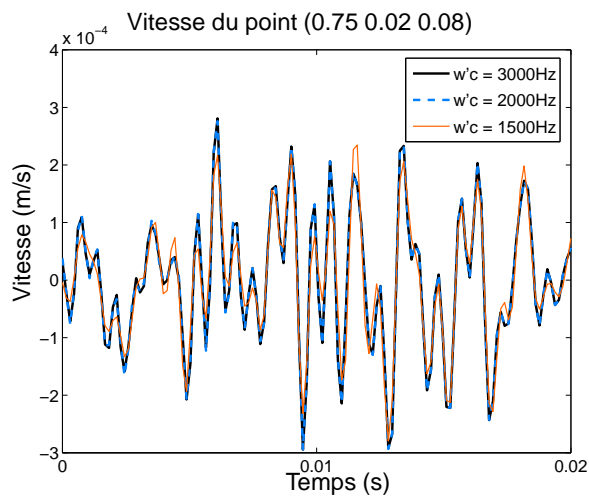
Figure 4.5 FRF moyennes en vitesse sur les deux patches

1.1.3 Influence de ω'_c

La Figure 4.6 montre l'influence de ω'_c , *i.e.* l'effet du contenu fréquentiel pris en compte dans la réponse sur la qualité de celle-ci. Les vitesses pour des points situés dans les deux patchs sont tracées pour trois valeurs de ω'_c et une valeur constante $\omega_c = 450$ Hz. ω'_c prend les valeurs suivantes : $\omega'_c = [1500 \text{ Hz}, 2000 \text{ Hz}, 3000 \text{ Hz}]$.



(a) Patch 1



(b) Patch 2

Figure 4.6 Vitesses pour trois valeurs de ω'_c

Cette comparaison montre bien que le contenu fréquentiel pris en compte dans la réponse joue sur la qualité de la vitesse calculée et, par conséquent, sur l'énergie cinétique. Afin d'évaluer la plage de fréquences nécessaire pour restaurer la réponse temporelle, le maximum de l'énergie cinétique sur les deux patchs pendant le temps d'observation est tracé sur la Figure 4.7 en fonction du contenu fréquentiel pris en compte pour le calcul de la solution.

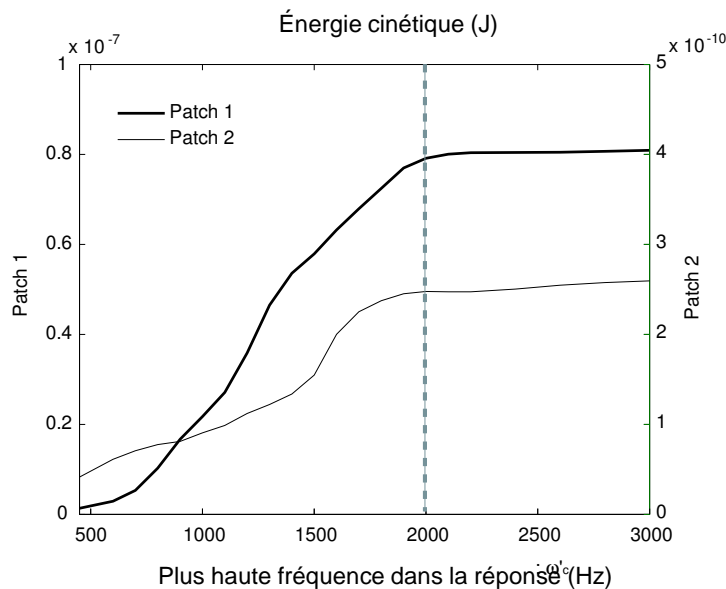


Figure 4.7 Courbe de convergence de l'énergie cinétique des patchs en fonction de la plage de fréquences prise en compte $[0, \omega'_c]$

Sur la structure étudiée, la bande de fréquences nécessaire et suffisante pour produire un niveau d'énergie correct est $[0, 2000 \text{ Hz}]$; cette plage est repérée par une ligne verticale sur la Figure 4.7.

$\omega'_c = 2000 \text{ Hz}$ est le double de la fréquence $\frac{1}{T}$ qui caractérise le signal d'entrée de type sinus verse. L'amplitude du spectre de ce signal sur la Figure 4.2 montre que la plage de fréquences $[0, 2000 \text{ Hz}]$ permet de tenir compte de l'essentiel du contenu fréquentiel du chargement. C'est ce critère qui sera désormais retenu pour choisir ω'_c . Dans le cas particulier d'un sinus verse de durée T appliqué à la structure nous prendrons $\omega'_c = \frac{2}{T}$.

1.1.4 Choix retenus

Finalement le choix des plages basses et moyennes fréquences sera désormais dicté par les critères suivants :

- ω_c est choisie telle que l'excitation harmonique à cette fréquence commence à déformer localement la structure et telle que les modes se densifient à partir de ω_c ,
- ω'_c est fixée en fonction du chargement : ω'_c doit permettre de tenir compte de l'essentiel du contenu fréquentiel de celui-ci ($\omega'_c = \frac{2}{T}$ dans le cas d'un sinus verse).

1.2 Le problème discrétisé dans l'approche fréquentielle

1.2.1 Discrétisation spatiale

1.2.1.1 Plage BF Comme suggéré dans la section 2.2 du chapitre 2, une méthode éléments finis classique avec réduction sur la base modale, effectuée à l'aide de MSC.Nastran, est utilisée pour obtenir la fonction de réponse en fréquence sur la plage des basses fréquences. Afin de prédire une FRF correcte, la base réduite est construite à partir des $m = 50$ premiers modes propres de la structure avec la pulsation du dernier mode telle que $\omega_m = 2\omega_c$, ω_c étant la plus haute fréquence pour laquelle la FRF doit être obtenue par la FEM. Cette base est ensuite complétée avec le mode statique de flexion.

Le maillage est discrétisé selon la règle classique de maillage en éléments finis pour les vibrations permettant d'assurer une erreur relativement faible en phase et en amplitude : au moins 10 éléments linéaires par longueur d'onde sont requis pour le calcul du dernier mode propre m de la base réduite d'une structure 2-D.

Les estimations du nombre de DDL nécessaires, en respectant la règle des 10 éléments par longueur d'onde, et du nombre de modes à calculer pour la base réduite sont résumées et comparées dans le Tableau 4.1 pour l'utilisation de la méthodes EF sur $[0, \omega_c] = [0, 450 \text{ Hz}]$ d'une part et sur $[0, \omega'_c] = [0, 2000 \text{ Hz}]$. Exécuter le calcul de la FRF sur $[0, 2000 \text{ Hz}]$ avec les EF est cher et peut conduire à des difficultés numériques.

Plage de fréquences	$[0, 450 \text{ Hz}]$	$[0, 2000 \text{ Hz}]$
Nombre de DDL	$20 \cdot 10^3$	$336 \cdot 10^3$
Base réduite	51 modes	500 modes

Tableau 4.1 Caractéristiques du maillage EF de l'assemblage de douze plaques pour le calcul de la FRF

1.2.1.2 Plage MF Pour des structures complexes, la TVRC se révèle être bien adaptée pour la prédiction de la FRF sur la plage des moyennes fréquences. Elle est

performante car l'introduction d'approximations à deux échelles permet de n'utiliser que peu de DDL même pour des fréquences élevées. Le calcul est mené en introduisant de manière fine les directions privilégiées de chaque plaque. La structure étudiée (cf. Figure 4.1) est divisée en 12 sous-structures et 32 modes intérieurs et 5 modes de bord par bord sont utilisés par sous-structure. Le calcul de la FRF sur la plage MF est effectué avec la logiciel dédié CORAY MF. Le Tableau 4.2 résume la discrétisation spatiale pour la bande MF.

Plage de fréquences	[450 Hz, 2000 Hz]
Nombre de sous-structures	12
Nombre de rayons (DDL)	624

Tableau 4.2 Caractéristiques de la discrétisation spatiale de l'assemblage de douze plaques avec la TVRC

1.2.2 Discrétisation fréquentielle

Pour rendre la formulation fréquentielle plus commode, elle est formulée de manière numérique et utilise la FFT qui est une technique efficace permettant de calculer les transformées de Fourier discrètes. Or lors de leur utilisation, elles supposent le chargement $p_j(t)$ périodique de période T_o . Ce temps d'observation T_o doit être choisi méticuleusement de sorte que la réponse transitoire de la structure amortie s'éteigne avant la fin de cet intervalle de temps : cela permet de minimiser les perturbations sur les conditions initiales de la réponse dû au recouvrement temporel.

Le recouvrement temporel, illustré sur la Figure 4.8, est issu de la discrétisation de la réponse en fréquence $\hat{x}_i(\omega)$: la multiplication de ce signal continu par un peigne de Dirac de période $f_o = \frac{1}{T_o}$ se traduit par une convolution de la réponse temporelle $x_i(t)$ avec un autre peigne de Dirac de période T_o : le signal de sortie est alors converti en un signal périodique de période T_o . Si à la fin de ce temps T_o le signal n'est pas nul, alors il vient perturber les conditions initiales de la période suivante.

Dans l'approche fréquentielle, une attention particulière doit donc être accordée au choix de l'échantillonnage fréquentiel intervenant dans le calcul de la FRF $\hat{h}_{ij}(\omega_n)$, cet échantillonnage dépendant directement du temps d'observation T_o . Les pulsations ω_n pour lesquelles la FRF est calculée doivent être choisies telles que $\omega_n = n(2\pi f_o)$ avec $f_o = \frac{1}{T_o}$ et T_o tel que la réponse de la structure soit négligeable à la fin de ce temps.

Si la structure est peu amortie ou bien si le chargement est long, alors l'échantillonnage fréquentiel est très fin et le calcul de la FRF d'autant plus coûteux. Dans la

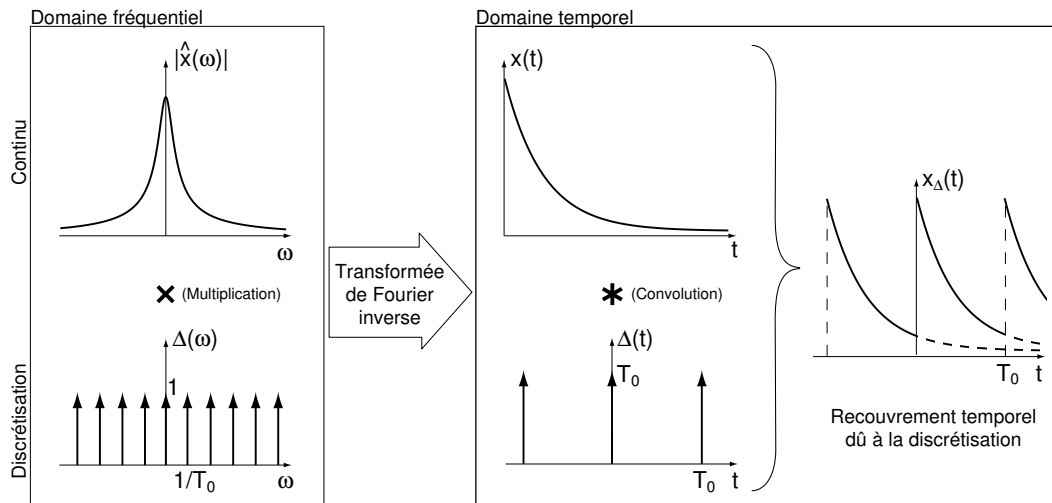


Figure 4.8 Recouvrement temporel

section 2 de ce chapitre, nous verrons comment le nombre de calculs TVRC peut être réduit pour l'obtention de la FRF sur la bande des moyennes fréquences.

Des contraintes supplémentaires interviennent pour le choix de l'échantillonnage fréquentiel. En effet, le nombre de pas de fréquence N doit être une puissance de 2 pour pouvoir utiliser la FFT et bénéficier de son efficacité. De plus N doit être choisi de façon à bien décrire le chargement avec le pas de temps $T_e = \frac{T_c}{N}$. Selon le théorème de Nyquist-Shannon, la fréquence d'échantillonnage $f_e = \frac{1}{T_e}$ d'un signal doit être égale ou supérieure à deux fois la fréquence maximale f_{max} contenue dans ce signal pour le convertir à une forme numérique :

$$f_e \geq 2f_{max} \quad (4.1)$$

Par exemple, un sinus verse est bien représenté avec au moins 7 pas de temps sur une période du sinus.

Une fois la FRF discrète calculée sur $[0, \omega'_c]$, elle est prolongée avec des zéros jusqu'à la fréquence de Nyquist $f_{Nyquist} = \frac{N}{2}f_o$, puis étendue aux fréquences négatives selon l'équation (2.12).

La transformée de Fourier rapide inverse (IFFT) est appliquée au spectre $\hat{x}_i(\omega_n) = \hat{h}_{ij}(\omega_n)\hat{p}_j(\omega_n)$ de la réponse en temps pour rétablir la solution dans le domaine temporel. Avant d'appliquer la IFFT, $\hat{x}_i(\omega_n)$ est multiplié par une fenêtre de Hanning dans le domaine fréquentiel afin d'éviter les oscillations dues au phénomène de Gibbs qui apparaîtraient dans le domaine temporel avec une fenêtre de type échelon (cf. [Brigham 1988]).

2 Reconstruction de la réponse temporelle

2.1 Exigences dues à la discrétisation du problème fréquentiel

2.1.1 Temps d'observation T_o

Pour reconstruire la réponse temporelle correctement et avoir les bonnes conditions initiales, il faut être très vigilant sur le choix de l'échantillonnage fréquentiel pour le calcul de la FRF, par conséquent il faut bien choisir le temps d'observation T_o qui doit être tel que la réponse soit négligeable avant la fin de T_o (cf. section 1.2.2).

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, la réponse temporelle s'obtient par l'équation (2.14) qui peut être réécrite sous la forme :

$$x_i(t)_{t \geq 0} = \int_0^t \left(\sum_{j=1}^a \underline{h}_{ij}(t-\tau) \cdot \underline{p}_j(\tau) \right) d\tau \quad (4.2)$$

L'équation (4.2) est appelée intégrale de convolution généralement connue sous le nom d'intégrale de Duhamel. $p_j(\tau)$ est le chargement j et $\underline{h}_{ij}(t-\tau)$ est la réponse impulsionnelle, *i.e.* elle exprime la réponse du système en i à une impulsion de valeur unité appliquée en j à l'instant $t = \tau$.

Ainsi, pour un chargement $p_j(t)$ appliqué à une structure, la durée T_o de la réponse est la somme de la durée T_p du chargement et de la durée T_h de la réponse impulsionnelle, T_h étant propre à la structure et indépendante des forces appliquées à celle-ci.

Malheureusement, pour des structures très faiblement amorties (T_h grand) ou pour des chargements de longue durée (T_p grand), le temps d'observation total $T_o = T_h + T_p$ est très long et du coup l'obtention de la FRF très coûteuse. À titre d'exemple, le Tableau 4.3 résume le nombre de problèmes de vibration forcée à résoudre pour prédire la réponse de l'assemblage de douze plaques faiblement amorti (T_h grand) soumis à un choc ($T_p = T$ petit) décrit dans la Figure 4.1.

Plage de fréquences	BF	MF
Méthode	base réduite : 51 modes	TVRC : 624 rayons
Plage fréquentielle	[0, 450 Hz]	[450 Hz, 2000 Hz]
Nb. d'échantillons fréquentiels	451	1551

Tableau 4.3 Nombre de calculs à effectuer pour l'obtention de la FRF de l'assemblage de douze plaques sur les deux plages de fréquences

Des méthodes ont été développées pour pallier le problème des conditions initiales et réduire de façon considérable T_o lors de l'utilisation de l'approche fréquentielle pour le calcul de la réponse dynamique transitoire. Nous citerons les principes de trois méthodes et leurs inconvénients dans notre cadre d'étude :

- les fonctions de Green,
- la ImFT,
- l'amortissement artificiel.

Cette liste n'a pas la prétention d'être exhaustive.

2.1.2 Fonctions de Green

Une première méthode consiste à retrouver le déplacement transitoire $x(t)$ à partir de la réponse au chargement périodique $y(t)$ [Veletsos et Kumar 1983, Veletsos et Ventura 1984], *i.e.* :

$$x(t) = y(t) + \varepsilon(t)$$

avec $\varepsilon(t)$ le déplacement correctif représentant les effets des conditions initiales non satisfaites. Il peut être exprimé sous la forme :

$$\varepsilon(t) = g(t)\varepsilon(0) + h(t)\dot{\varepsilon}(0)$$

$g(t)$ et $h(t)$ sont les déplacements dus respectivement à un déplacement et à une vitesse unitaires initiaux. Ces fonctions, appelées fonctions de Green, sont connues analytiquement pour un système à un degré de liberté et sont définies dans [Clough et Penzien 1993]. $\varepsilon(0)$ et $\dot{\varepsilon}(0)$ sont les valeurs initiales de $\varepsilon(t)$ et de sa dérivée déterminées par :

$$\begin{aligned}\varepsilon(0) &= x(0) - y(0) \\ \dot{\varepsilon}(0) &= \dot{x}(0) - \dot{y}(0)\end{aligned}$$

Cette méthode peut être appliquée aux systèmes à plusieurs DDL en se ramenant, par synthèse modale, à plusieurs systèmes à un DDL.

Notre approche fréquentielle ne nous permet pas d'utiliser les fonctions de Green connues analytiquement pour des systèmes à un DDL puisque l'utilisation de la TVRC empêche la décomposition du système en plusieurs sous-systèmes à un DDL.

2.1.3 ImFT

Une autre approche, proposée dans [Mansur *et al.* 2000], est l'utilisation de la *Implicit Fourier Transform* (ImFT) qui réduit T_o à T_h . Le déplacement discret en temps x peut être obtenu par une opération matricielle :

$$x = \frac{1}{N} \mathbf{e} \mathbf{p}$$

p est le chargement discret et toutes les opérations requises pour appliquer la DFT (*Discrete Fourier Transform*) et la IDFT (*Inverse Discrete Fourier Transform*) sont considérées de façon implicite dans la matrice \mathbf{e} :

$$\mathbf{e} = \mathbf{E}\mathbf{H}\mathbf{E}^*$$

La DFT et la IDFT sont exprimées respectivement dans les matrices \mathbf{E}^* et \mathbf{E} . \mathbf{H} est la matrice diagonale de termes diagonaux $H_{m+1,m+1} = H(\omega_m)$, avec $H(\omega)$ la FRF. \mathbf{e} est une matrice de Toeplitz donc seule la première colonne a besoin d'être calculée. Par ailleurs, l'auteur montre que \mathbf{e} , réduite à sa partie triangulaire inférieure, suffit à représenter la solution x pourvu que le temps d'observation T_o soit choisi au moins égal à T_h , respectant ainsi la causalité de la réponse. T_o ne dépend plus des caractéristiques des forces appliquées mais uniquement des propriétés mécaniques de la structure étudiée, elle est donc appropriée pour l'étude de structures amorties sollicitées sur des temps très longs.

L'extension aux systèmes à plusieurs DDL se fait sur les coordonnées modales ce qui rend cette approche inapplicable dans notre approche pour les mêmes raisons citées dans le paragraphe précédent. De plus, nous nous plaçons dans le cadre d'étude de la réponse dynamique transitoire de structures peu amorties (T_h grand) soumises à des chocs très courts (T_p) : la ImFT ne réduirait que de façon négligeable le temps d'observation dans ce cas.

2.1.4 Amortissement artificiel

La méthode proposée dans [Humar et Xia 1993] force la réponse à s'éteindre en introduisant un amortissement artificiel e^{-Dt} sur la structure au travers de la réponse impulsionnelle $h(t)$ et sur le chargement $p(t)$, avec D un réel positif :

$$\begin{aligned} h_D(t) &= e^{-Dt} h(t) \\ p_D(t) &= e^{-Dt} p(t) \end{aligned}$$

La réponse temporelle issue de l'intégrale de Duhamel (4.2) peut être reformulée en fonction de $h_D(t)$ et $p_D(t)$:

$$x(t) = e^{Dt} \int_0^t h_D(t-\tau) p_D(\tau) d\tau$$

En montrant que $\hat{h}_D(\omega) = \hat{h}(\omega - iD)$, on obtient l'expression de la réponse suivante dans le domaine temporel :

$$x(t) = e^{Dt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(\omega - iD) \hat{p}_D(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

L'amortissement D contrôle le recouvrement temporel et est choisi tel qu'à la fin du temps d'observation T_o , l'exponentiel décroissante est de l'ordre du centième de la valeur au début de la période :

$$e^{-DT_o} = \frac{1}{100}$$

L'avantage de cette technique est qu'elle est performante même sur les structures non amorties et qu'elle autorise le temps d'observation T_o à n'être que légèrement supérieur à la durée de la réponse désirée. Ceci étant, [Hall et Beck 1993] évoque les difficultés numériques associées au choix du coefficient D : s'il est choisi trop grand, alors des oscillations de forte amplitude apparaissent en fin de temps d'observation. Ces oscillations peuvent être gênantes pour l'étude des chocs puisqu'il s'agit de ne pas confondre des oscillations numériques avec les oscillations moyennes fréquences étudiées. Par ailleurs l'utilisation de l'amortissement artificiel passe par le calcul de la FRF pour des fréquences complexes $\omega - iD$, ce qui n'est pas toujours possible avec les codes EF industriels.

Dans les paragraphes suivants sont proposées deux techniques exploitables dans notre approche fréquentielle permettant de réduire le nombre de résolutions de problèmes de vibration forcée sur la plage des moyennes fréquences.

2.2 Variante utilisant les propriétés des moyennes fréquences pour la reconstruction temporelle

2.2.1 Principe

Lorsque la structure étudiée est un milieu dispersif amorti, alors il est possible de réduire le nombre de pas de fréquence pour le calcul de la FRF discrète sur la plage des moyennes fréquences. En effet, le temps nécessaire pour que les oscillations deviennent négligeables est alors beaucoup plus court pour les moyennes fréquences que pour les basses fréquences.

Ainsi, dans l'équation (4.3), grâce à la linéarité des transformées de Fourier, la réponse temporelle $x(t)$ peut être vue comme la superposition de deux composantes, $x_{BF}(t)$ et $x_{MF}(t)$, qui correspondent respectivement aux contributions des basses fréquences $\hat{x}_{BF}(\omega)$ et des moyennes fréquences $\hat{x}_{MF}(\omega)$.

$$\begin{aligned} x(t)_{t \geq 0} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_{BF}(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_{MF}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= x_{BF}(t) + x_{MF}(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Les deux composantes $x_{BF}(t)$ et $x_{MF}(t)$ sont calculées indépendamment avec l'approche fréquentielle et ne sont superposées qu'ensuite. Le calcul séparé des deux composantes est avantageux car lors du calcul de $x_{MF}(t)$, les BF sont mises de côté et seules les MF sont prises en compte. Il est donc possible de tirer parti de la rapide extinction de ces oscillations MF dans le domaine temporel pour raccourcir considérablement le temps d'observation T_o lors de l'utilisation des transformées de Fourier discrètes et réduire l'échantillonnage fréquentiel de la FRF \hat{x}_{MF} sur la bande des moyennes fréquences.

2.2.2 Exemple

La superposition des composantes BF et MF est appliquée à l'assemblage de 12 plaques de la Figure 4.1.

Puisqu'une IFFT est effectuée, nous avons utilisé une fenêtre de Hanning pour chacune des deux plages de fréquences afin d'éviter les phénomènes de Gibbs présents lors de l'utilisation d'une fenêtre rectangle. Pour ne pas perdre l'amplitude de la FRF autour de ω_c , les deux fenêtres de Hanning des BF et des MF se chevauchent sur une plage de fréquences commune [400 Hz, 450 Hz] tel qu'illustré dans la Figure 4.9.

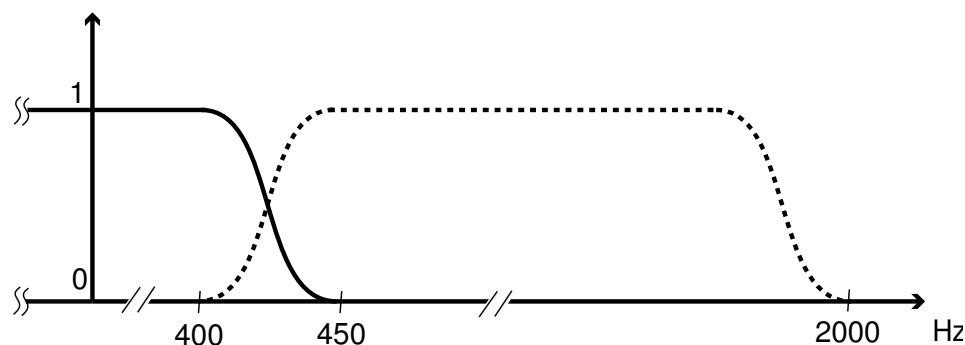


Figure 4.9 Fenêtres de Hanning des deux plages de fréquences BF et MF

Les temps nécessaires pour que les ondes s'évanouissent dans la structure étudiée, avec un amortissement structural $\eta = 0.02$, sont :

- $T_o = 1$ s pour les basses fréquences,
- $T_o = 0.1$ s pour les moyennes fréquences.

Afin de vérifier que la fenêtre temporelle $T_o = 0.1$ s est assez large pour exécuter la IFFT pour la contribution MF, les résultats sont comparés pour deux fenêtres

temporelles différentes sur cette plage de fréquences : d'une part nous avons choisi $T_o = 0.1$ s qui permet de tirer parti de la rapide extinction des ondes moyennes fréquences et ainsi de réduire le nombre de calculs, et d'autre part nous avons pris $T_o = 1$ s qui est le temps requis par les ondes basses fréquences pour devenir négligables et par conséquent le temps d'observation pris par défaut dans notre exemple si la superposition n'est pas utilisée. Le choix de ces deux fenêtres temporelles différentes mène aux échantillonnages fréquentiels donnés dans le Tableau 4.4 et les réponses correspondantes sont tracées sur la Figure 4.10.

Discretisation	1	2
Temps d'observation T_o	1 s	0.1 s
$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{T_o}$	1 Hz	10 Hz
Nombre de calculs	1601	161

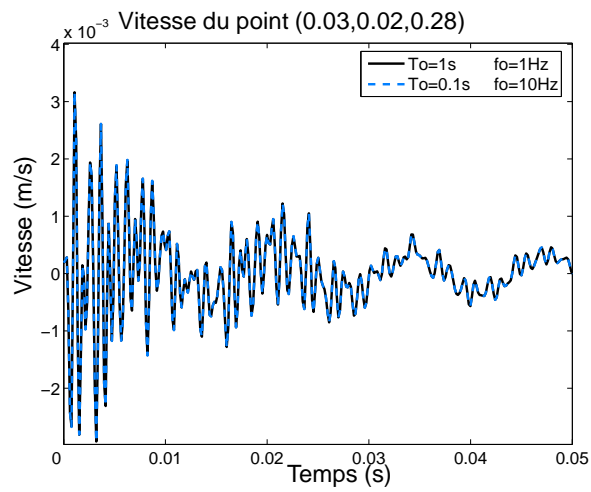
Tableau 4.4 Deux échantillonnages fréquentiels de la plage MF [400 Hz, 2000 Hz] : sans (1) et avec (2) la technique de superposition

Les réponses sont identiques, nous pouvons donc désormais calculer les deux composantes, issues des contributions BF et MF, séparément et réduire ainsi le coût de calcul de la composante MF. Finalement les échantillonnages fréquentiels retenus pour les deux plages de fréquences sont proposés dans le Tableau 4.5.

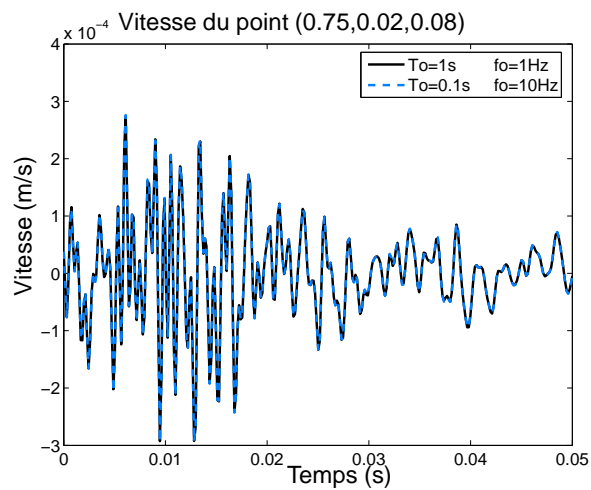
Plage de fréquences	[0, 450 Hz]	[400 Hz, 2000 Hz]
Durée d'extinction des ondes T_o	1 s	0.1 s
$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{T_o}$	1 Hz	10 Hz
Nombre de calculs	451	161

Tableau 4.5 Échantillonnage fréquentiel global de l'approche en fréquence avec la technique de superposition

La réduction du temps d'observation T_o et donc du nombre de calculs pour les MF est très intéressante surtout lors de l'application de l'approche fréquentielle aux systèmes non linéaires. En effet l'étude de tels systèmes conduit à l'échange de données entre les domaines fréquentiel et temporel, donc à de nombreux calculs de FRF et de nombreuses exécutions de la IFFT.



(a) Patch 1



(b) Patch 2

Figure 4.10 Réponses obtenues pour deux fenêtres temporelles différentes, soit deux discrétisations fréquentielles différentes, sur la plage MF

2.3 Amélioration qui prend en compte l'analyse large bande de la TVRC

Puisque la FRF doit être calculée sur une très grande plage de fréquences, il est commode d'utiliser la TVRC sur une large bande.

2.3.1 Calcul TVRC sur une bande de fréquences

L'objectif est de prédire la solution sur une plage de fréquences B de fréquence centrale ω_n et de largeur ω_B . Il faut donc trouver \underline{U} qui vérifie :

$$\mathbf{K}^h(\omega)\underline{U}(\omega) = \underline{F}^h(\omega) \quad \forall \omega \in B = [\omega_n - \frac{\omega_B}{2}; \omega_n + \frac{\omega_B}{2}] \quad (4.4)$$

L'idée est d'introduire une approximation à deux échelles en fonction de ω . Toute quantité α , y compris l'opérateur $\mathbf{K}^h(\omega)$ et le chargement $\underline{F}^h(\omega)$, peut être réécrite sur $\omega \in B$ de la manière suivante :

$$\alpha(\omega) = \sum_{r=1}^l Q_r(\omega) A_r(\omega_n) \quad (4.5)$$

où A_r est supposé constant sur B . Si nécessaire, une meilleure approximation de A_r peut être construite en le prenant linéaire par exemple. Q_r est une fonction qui varie rapidement en fonction de ω et est de la forme :

$$Q_r(\omega) = e^{2\pi i \omega q_r}$$

où q_r est une valeur discrète : $\{r\xi | r = -N, -N+1, \dots, 0, 1, 2, \dots, N\}$. En pratique, $2\omega_n N \xi$ est égal au nombre maximal de longueurs d'onde en espace par sous-structure. ξ ou N est un paramètre qui caractérise la qualité de l'approximation à deux échelles (4.5) ($N \sim 100$ à 1000).

Plusieurs techniques ont été développées pour déterminer une approximation de \underline{U} sous la forme de l'équation (4.5) [Ladevèze *et al.* 2003b]. Ici nous utilisons la version introduite dans [Ladevèze et Riou 2005].

Pour cela nous étudions le comportement de l'exponentielle : cette quantité peut être développée en série de Taylor à l'ordre \bar{k} . La matrice \mathbf{K}^h et le vecteur chargement \underline{F}^h peuvent être approximés comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^h(\omega) &= \sum_{k=0}^{\bar{k}} \mathbf{K}_k(\omega_n) (\omega - \omega_n)^k \\ \underline{F}^h(\omega) &= \sum_{k=0}^{\bar{k}} \underline{F}_k(\omega_n) (\omega - \omega_n)^k \end{aligned} \quad (4.6)$$

La valeur moyenne sur la plage de fréquences B est définie de la manière suivante :

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{\omega_B} \int_B \cdot d\omega$$

La matrice \mathbf{K}^h et le vecteur \underline{F}^h s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^h(\omega) &= \langle \mathbf{K}^h \rangle + \Delta \mathbf{K}(\omega) \\ \underline{F}^h(\omega) &= \langle \underline{F}^h \rangle + \Delta \underline{F}(\omega) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Selon les développements de Taylor (4.6), nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{K}^h(\omega) &= \sum_{k=0}^{\bar{k}} \Delta \mathbf{K}_k(\omega_n) (\omega - \omega_n)^k \\ \Delta \underline{F}^h(\omega) &= \sum_{k=0}^{\bar{k}} \Delta \underline{F}_k(\omega_n) (\omega - \omega_n)^k \end{aligned} \quad (4.8)$$

\underline{U} peut être défini avec une approche identique :

$$\underline{U}^h(\omega) = \langle \underline{U}^h \rangle + \Delta \underline{U}(\omega) \quad (4.9)$$

Sur la plage B , les équations (4.4), (4.7) et (4.9) peuvent être reformulées :

$$\left[\langle \mathbf{K}^h \rangle + \Delta \mathbf{K} \right] \left[\langle \underline{U} \rangle + \Delta \underline{U} \right] = \langle \underline{F}^h \rangle + \Delta \underline{F} \quad (4.10)$$

L'équation (4.10) fait intervenir des termes d'amplitudes très différentes, importantes pour certains et petites pour d'autres. En utilisant la méthode des perturbations, les termes des différents ordres peuvent être identifiés et l'équation (4.10) s'écrit alors pour les ordres 0 et 1 :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{K}^h \rangle \langle \underline{U} \rangle &= \langle \underline{F}^h \rangle && \text{ordre 0} \\ \langle \mathbf{K}^h \rangle \Delta \underline{U} &= -\Delta \mathbf{K} \langle \underline{U} \rangle + \Delta \underline{F} && \text{ordre 1} \end{aligned} \quad (4.11)$$

avec $\Delta \underline{U}$ égal à :

$$\Delta \underline{U} = \sum_{k=0}^{\bar{k}} \Delta \underline{U}_k(\omega_n) (\omega - \omega_n)^k \quad (4.12)$$

Finalement le déplacement retenu sur la plage B est :

$$\underline{U} = \lambda \langle \underline{U} \rangle + \mu \Delta \underline{U} \quad (4.13)$$

où λ et μ minimisent l'erreur définie par les approximations dans (4.11) :

$$E^2 = \frac{1}{\omega_B} \int_B [\underline{F}^h - \mathbf{K}^h \underline{U}]^T [\mathbf{K}_s^h]_D^{-1} [\underline{F}^h - \mathbf{K}^h \underline{U}] d\omega \quad (4.14)$$

$[\mathbf{K}_s^h]_D$ est la diagonale de la partie symétrique de \mathbf{K}^h qui est à variation lente.

Remarques.

- Seule la matrice $\langle \mathbf{K}^h \rangle$ doit être inversée dans l'analyse large bande, ce qui rend cette technique intéressante.
- \bar{k} correspond à l'ordre du développement de Taylor, c'est le seul paramètre devant être choisi de façon à assurer la qualité de la solution.
- L'énergie dissipée moyenne est :

$$e = \frac{\lambda^2}{2} \langle \underline{U} \rangle^T \mathbf{K}_s^h \langle \underline{U} \rangle + \frac{\mu^2}{2\omega_B} \int_B \Delta \underline{U}^T \mathbf{K}_s^h \Delta \underline{U} d\omega \quad (4.15)$$

- λ, μ peuvent être des fonctions de ω .

L'analyse large bande de la TVRC a été testée sur des poutres et sur des assemblages de plaques dans [Ladevèze et Riou 2005].

2.3.2 Utilisation de l'analyse large bande

La mise en place de l'analyse large bande dans l'approche fréquentielle pour la dynamique transitoire est étudiée sur une structure simple constituée d'une plaque libre en aluminium avec un choc en flexion sur un bord (cf. Figure 4.11).

La plage de fréquences pour le calcul de la FRF est divisée comme suit :

- les BF : $[0, \omega_c] = [0 \text{ Hz}, 2000 \text{ Hz}]$, elles sont traitées par la méthode des éléments finis avec le calcul des 516 premiers modes propres ;
- les MF : $[\omega'_c, \omega_c] = [2000 \text{ Hz}, 20 \text{ Hz}]$, elles sont prises en compte par la TVRC avec 68 rayons dont 32 rayons intérieurs et 9 rayons de bord par bord.

La coupure $\omega_c = 2000 \text{ Hz}$ entre les deux domaines correspond à une réponse forcée déjà fortement oscillante représentée sur la Figure 4.12.

L'amortissement est choisi de type hystérétique : $E = E_0(1 + i\eta)$ avec η le coefficient d'amortissement structural constant. Pour deux valeurs de η , le temps d'extinction T_o des ondes de la plage des moyennes fréquences et le nombre de pas de fréquence s'en suivant dans cette plage [2000Hz, 20kHz] sont décrits dans le Tableau 4.6. Sans l'analyse large bande, les pas fréquentiels correspondent au nombre de calculs TVRC à effectuer pour prédire la FRF.

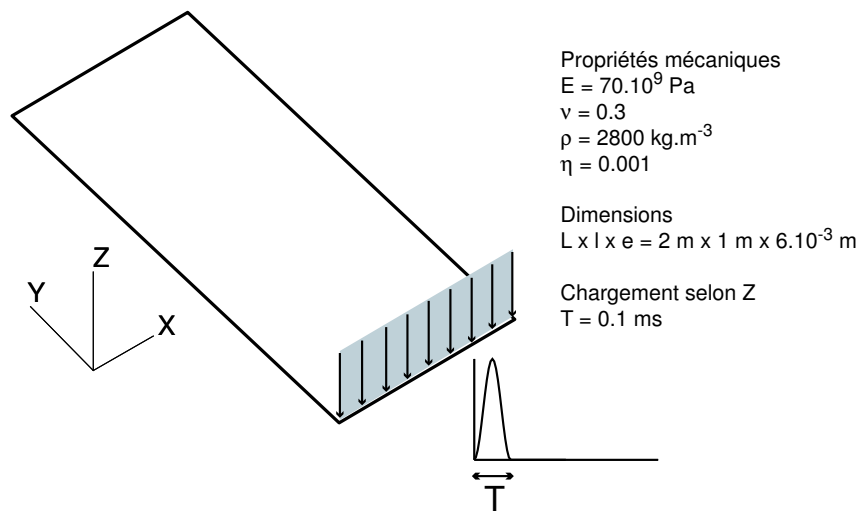


Figure 4.11 Description de la plaque libre soumise à un choc

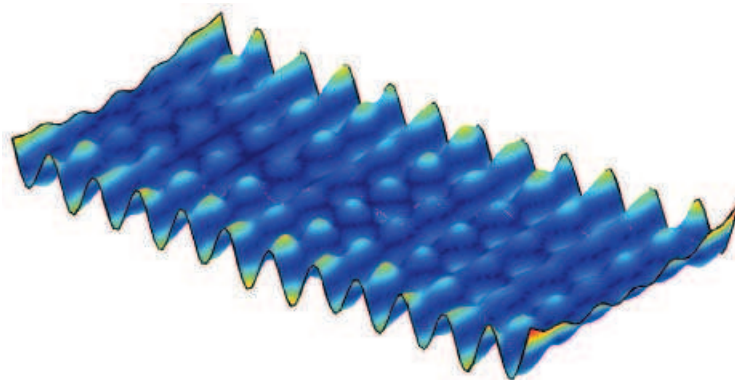


Figure 4.12 Réponse forcée de la plaque libre à 2000 Hz

Sur la Figure 4.13 sont tracées les FRF, moyennées sur la plaque, obtenues d'une part de façon discrète à chaque fréquence avec la TVRC et d'autre part par utilisation de l'analyse large bande pour des valeurs de l'ordre de développement \bar{k} allant de 0 à 5. L'amortissement dans cet exemple est $\eta = 0.001$, ce qui est le cas le plus défavorable pour l'approximation par analyse large bande puisque les pics de la FRF sont alors très pointus, et la bande B est prise égale à 8 Hz.

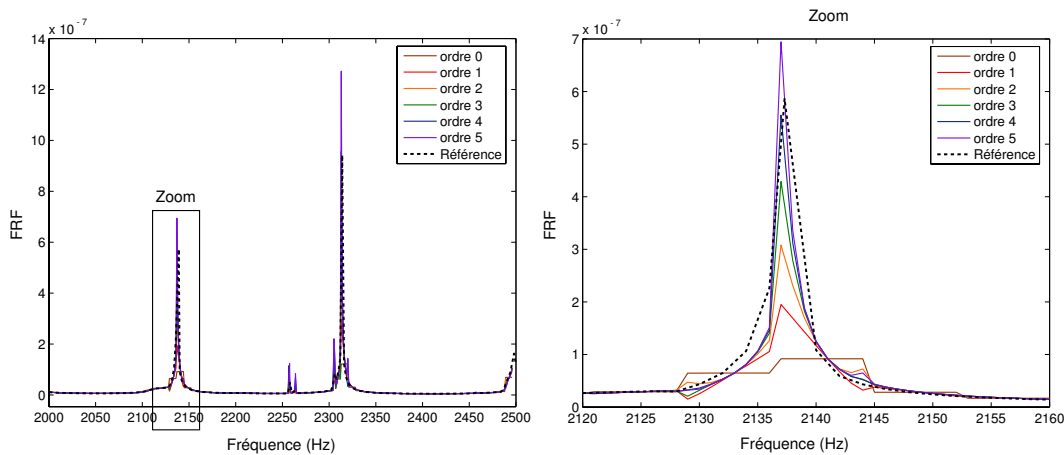


Figure 4.13 Analyse large bande de la TVRC pour différents ordres de développement

L'ordre $\bar{k} = 5$ semble conduire à une bonne approximation. Si la bande B est choisie plus grande, alors l'approximation au cinquième ordre peut diverger comme cela apparaît déjà légèrement sur la FRF autour de 2320 Hz.

Le nombre de calculs TVRC est réduit de façon considérable pour la prédiction de la FRF dans l'approche fréquentielle pour la dynamique transitoire. La réduction est d'autant plus grande lorsque l'amortissement dans la structure est faible, grâce à l'utilisation de l'analyse large bande comme cela est résumé dans la dernière ligne du Tableau 4.6.

Sur la Figure 4.14 sont tracées les vitesses matérielles en un point de la plaque avec la FEM dans Cast3m (sans amortissement) et avec l'approche fréquentielle utilisant l'analyse large bande dans CORAY MF (pour un amortissement très faible $\eta = 0.001$). Les courbes sont semblables même si les tous premiers instants de la réponse obtenue avec l'approche fréquentielle présentent de petites oscillations résiduelles dues au recouvrement temporel.

L'exploitation de l'extension de la TVRC à l'analyse large bande donne des résultats très satisfaisants. Elle est très utile pour l'étude dynamique transitoire

Amortissement η	0.001	0.01
Durée d'extinction des ondes T_o	2 s	0.2 s
Nombre de pas de fréquence sur la plage MF	$36 \cdot 10^3$	$3.6 \cdot 10^3$
Nombre de calculs TVRC sans analyse LB	$36 \cdot 10^3$	$3.6 \cdot 10^3$
Nombre de calculs TVRC avec analyse LB	$2 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$

Tableau 4.6 Nombre de calculs TVRC avec ou sans l'analyse large bande (LB)

de structures faiblement amorties par l'approche fréquentielle car elle permet de réduire le coût de calcul de façon conséquente.

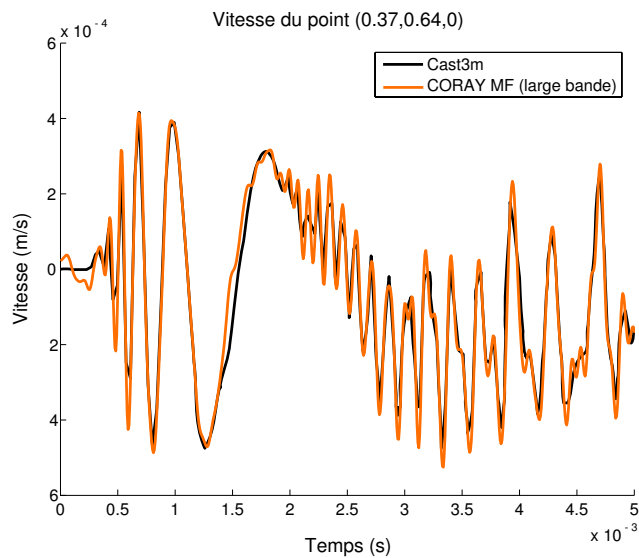


Figure 4.14 Comparaison des approches temporelle et fréquentielle avec l'analyse large bande

3 Importance des moyennes fréquences

Dans cette section, la structure étudiée est le longeron décrit dans la Figure 4.1. Elle sert de support pour montrer l'importance de la prise en compte du contenu moyennes fréquences dans la réponse.

3.1 Contribution des moyennes fréquences

En l'absence de la prise en compte des moyennes fréquences dans la réponse, les oscillations d'énergie cinétique importante dues à ces fréquences sont tuées, le niveau de l'énergie cinétique est alors erroné comme cela a pu être observé sur la Figure 4.7. La même observation peut être faite pour l'énergie de déformation au vu de la Figure 4.15 sur laquelle est tracée le maximum de l'énergie de déformation sur les deux patchs pendant le temps d'observation en fonction de la plage de fréquences prise en compte dans la réponse.

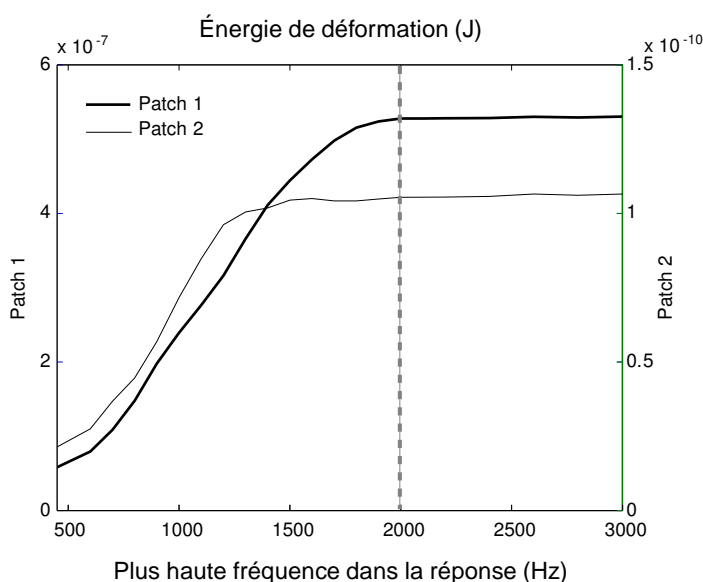


Figure 4.15 Courbe de convergence de l'énergie de déformation des patchs en fonction de la plage de fréquences prise en compte $[0, \omega'_c]$

Ainsi, les moyennes fréquences interviennent largement à la fois dans l'énergie cinétique et l'énergie de déformation. En effet, les FRF des deux patchs tracées sur la Figure 4.5 montrent que :

- le mode global de flexion, dessiné dans la Figure 4.16, est fortement excité avec le chargement choisi, il correspond au premier pic de la FRF à $\omega = 75.6$ Hz ;
- de plus, de nombreux autres modes de fréquence plus élevée contribuent largement au contenu des FRF. De fait, vu l'aspect local du chargement d'impact sur la structure mince, des modes moyennes fréquences qui sont locaux sont excités. Les modes les plus excités par le chargement sont illustrés sur la Figure 4.17.

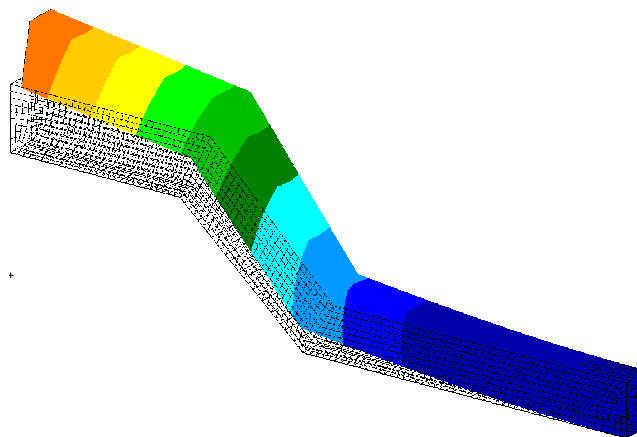


Figure 4.16 Mode à la fréquence 75.6 Hz

Dans cet exemple, la majeure partie de l'énergie cinétique induite dans le patch 1, situé près du chargement, est due aux moyennes fréquences comme cela peut être observé sur la Figure 4.7. À titre d'exemple la vitesse d'un point de ce patch est tracée sur la Figure 4.18. La composante de la vitesse intégrant uniquement la contribution des basses fréquences est également tracée pour mettre en évidence l'importance du contenu moyennes fréquences.

Le milieu étant dispersif, les vitesses de propagation des ondes MF sont plus élevées que les celles des ondes BF. Les moyennes fréquences s'amortissent donc plus rapidement que les basses fréquences : la proportion relative entre les contenus MF et BF est de l'ordre de 2.3 dans le patch 2 plus éloigné de l'impact (cf. Figure 4.19), elle est plus faible que dans le patch 1 dont le rapport est de 6.4.

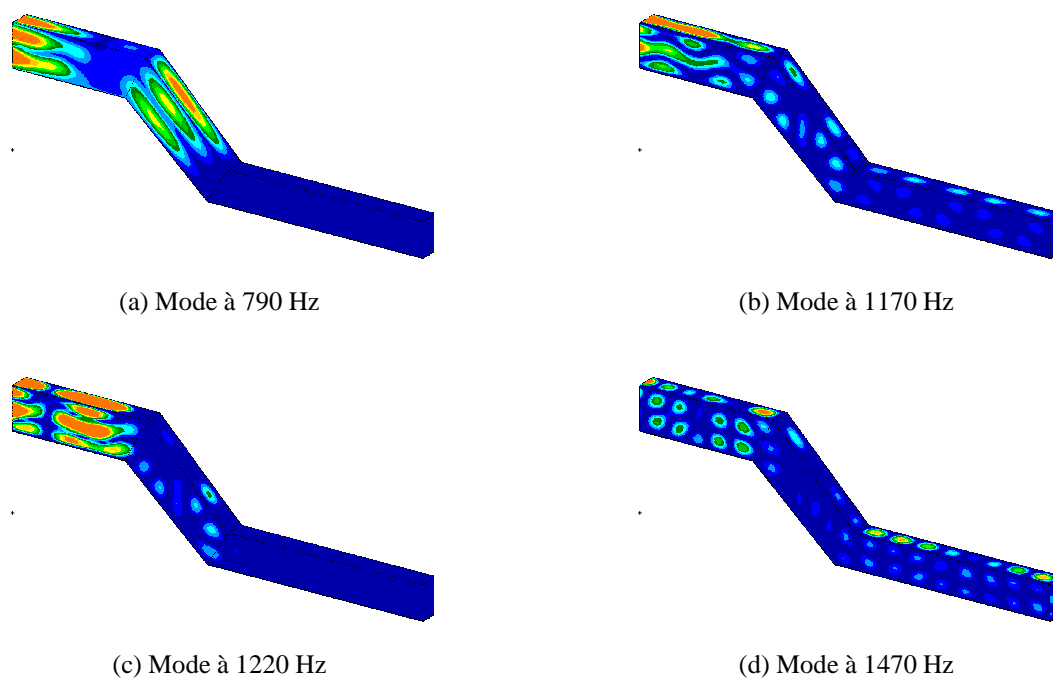


Figure 4.17 Modes locaux de fréquence élevée et de contribution importante dans la réponse

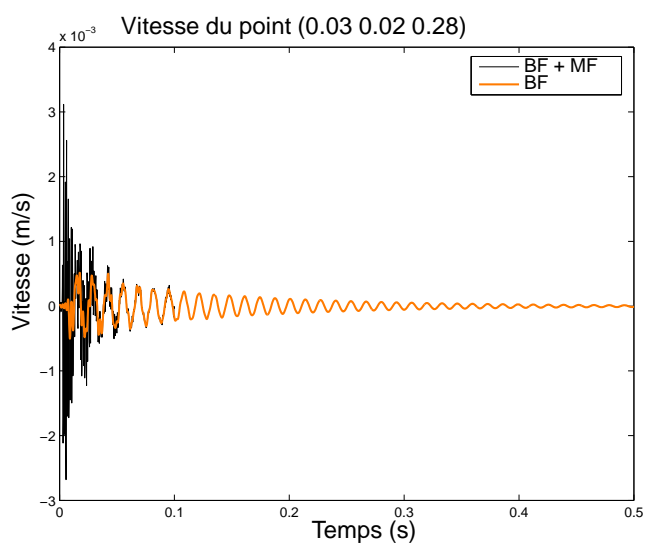


Figure 4.18 Importance des MF sur le patch 1

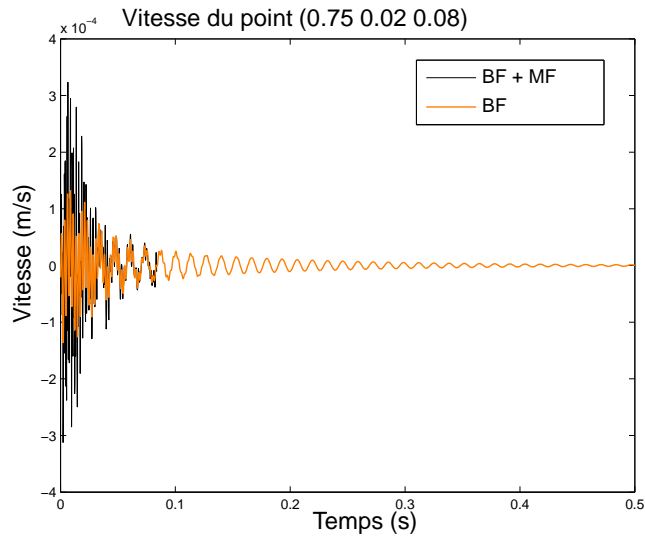


Figure 4.19 Importance des MF sur le patch 2

3.2 Influence des lois d'amortissement

Si l'amortissement décroît avec la fréquence, alors l'énergie cinétique due aux ondes moyennes fréquences est d'autant plus importante. Prenons une loi d'amortissement de type dérivée fractionnaire telle que :

$$\begin{aligned} \omega \in [0, \omega_0] & \quad \eta = 0.02 \\ \omega \geq \omega_0 & \quad \eta = 0.02 \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^\alpha \end{aligned}$$

avec $\omega_0 = 400$ Hz. Le maximum de l'énergie cinétique sur le patch 1 pendant le temps d'observation est tracé sur la Figure 4.20 en fonction du coefficient α .

Plus l'amortissement décroît rapidement avec la fréquence, plus l'énergie cinétique totale dépend des moyennes fréquences. Si les moyennes fréquences sont laissées de côté, une grande partie de l'énergie cinétique est ignorée surtout pour des valeurs de α proches de 1, *i.e.* pour une décroissance forte de l'amortissement avec la fréquence.

Cet exemple met l'accent sur l'importance de la prise en compte de la plage des moyennes fréquences dans le calcul de la réponse. Ces dernières ne peuvent donc pas être ignorées puisqu'elles apparaissent dans une grande proportion dans la vitesse et l'énergie cinétique. Ignorer les MF conduirait à un sous-dimensionnement des structures d'un point de vue énergétique.

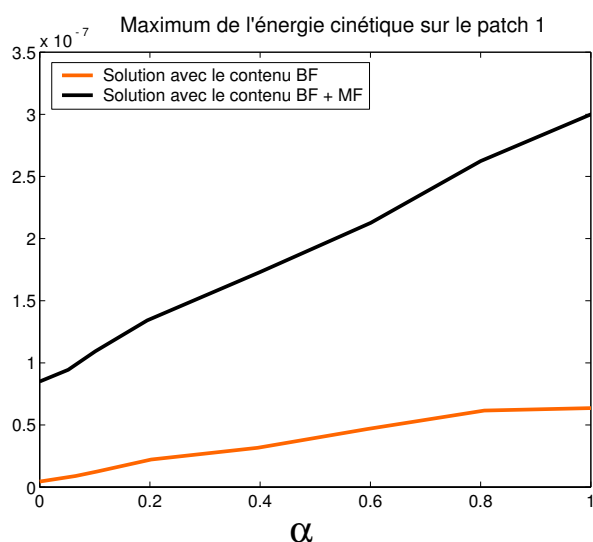


Figure 4.20 Courbe de convergence de l'énergie cinétique sur le patch 1 en fonction de α

3.3 Avantage de l'approche fréquentielle

L'avantage de l'approche fréquentielle pour la résolution d'un problème de dynamique rapide est de connaître la réponse jusqu'à l'extinction des oscillations. En effet le problème discret résumé dans le Tableau 4.5 pour l'assemblage des douze plaques permet de prédire la réponse de la structure sur un très grand intervalle de temps.

En ce qui concerne les approches temporelles qui utilisent les schémas d'intégration numérique, la réponse transitoire de la même structure est connue pas à pas et requiert au moins 7000 pas de temps pour prédire la solution : ce nombre de pas de temps est évalué selon la règle des 7 pas de temps minimum nécessaires à représenter la forme sinusoïdale du chargement et 7000 pas permettent d'atteindre le temps d'observation $T_o = 1$ s. De plus, un maillage spatial plus fin dans toutes les directions constitué de $336 \cdot 10^3$ DDL est nécessaire et coûteux.

Pour de telles structures complexes, la construction d'une base réduite suffisamment riche en modes pour traiter la dynamique rapide est souvent hors de portée. Dans ce cas, l'intégration numérique est menée directement sur les matrices éléments finis conduisant à un coût de calcul d'autant plus grand.

Dans notre approche, l'extension du contenu fréquentiel ne requiert que peu de calculs TVRC. Les coûts des approches temporelle et fréquentielle pour la structure constituée de l'assemblage de douze plaques soumis à un impact sont comparés dans le Tableau 4.7.

Approche	TD		FD	
	Base réduite		Base réduite	TVRC
DDL EF	$336 \cdot 10^3$		$20 \cdot 10^3$	
Modes propres	500		50	
Rayons complexes				624
Nombre de calculs	7000		451	161
Taille du problème	7000×500 $= 3500 \cdot 10^3$		$451 \times 50 + 161 \times 624$ $= 123 \cdot 10^3$	

Tableau 4.7 Tailles des problèmes numériques pour les approches temporelle (TD) et fréquentielle (FD)

La méthode dans le domaine fréquentiel fait intervenir des transformées de Fourier discrètes effectuées grâce aux algorithmes IFFT. L'utilisation des IFFT rend les approches fréquentielles efficaces pour l'étude des réponses dynamiques transitoires des systèmes linéaires amortis [Clough et Penzien 1993]. Dans le cas de systèmes non linéaires, de nombreuses IFFT doivent être appliquées. La réduction du nombre de calculs TVRC selon les techniques développées dans la section 2 se révèle indispensable.

4 Prise en compte adaptée des moyennes fréquences

Jusqu'à présent, dans l'approche fréquentielle comme dans l'approche temporelle, les déplacements et vitesses ont été calculés localement en des points précis de la structure. L'approche dans le domaine des fréquences requiert le calcul de la FRF en ces points d'intérêt sur une très large bande de fréquences. Cependant, dans la plage des moyennes fréquences, la distribution spatiale du déplacement ou de la vitesse $q(\underline{X})$ n'a pas de sens d'un point de vue mécanique puisque la réponse à un point précis et à une fréquence donnée est très sensible aux moindres variations des paramètres de la structure et des conditions limites.

La prise en compte du contenu MF dans la réponse par un niveau vibratoire est donc plus significatif que leur prise en compte par des quantités locales. Pour cela nous définissons les quantités effectives qui sont des quantités moyennées en espace définies sur un domaine $S_{\underline{X}_0}$ de dimensions supérieures à une longueur d'onde. Au voisinage d'un point \underline{X}_0 , les quantités effectives associées sont définies telles que :

$$q_{eff}(\underline{X}_0) = \frac{1}{S_{\underline{X}_0}} \int_{S_{\underline{X}_0}} q(\underline{X}) dS \quad (4.16)$$

Ces quantités sont à grande longueur d'onde et par conséquent beaucoup moins sensibles aux variations des paramètres d'entrée.

Sur l'exemple de la plaque libre décrite dans la Figure 4.11 pour l'analyse large bande, la réponse est calculée grâce à l'approche fréquentielle avec :

- pour la plage $[0, \omega_{eff}]$, la FRF locale en ce point,
- pour la plage $[\omega_{eff}, 20 \text{ kHz}]$, la FRF effective (déplacement ou vitesse effectifs) en prenant pour domaine S_{X_0} la plaque entière.

Si nous observons une quantité effective telle que l'énergie cinétique sur la plaque, alors une FRF effective depuis les basses jusqu'aux moyennes fréquences suffit pour traduire le niveau vibratoire global de la structure (cf. Figure 4.21 : en pointillés, l'énergie cinétique en fonction de ω_{eff} incluant tout le contenu fréquentiel $[0, 20 \text{ kHz}]$ avec, sur $[\omega_{eff}, 20 \text{ kHz}]$, utilisation des quantités effectives ; en trait continu, l'énergie cinétique incluant uniquement la plage $[0, \omega_{eff}]$ en fonction de ω_{eff}).

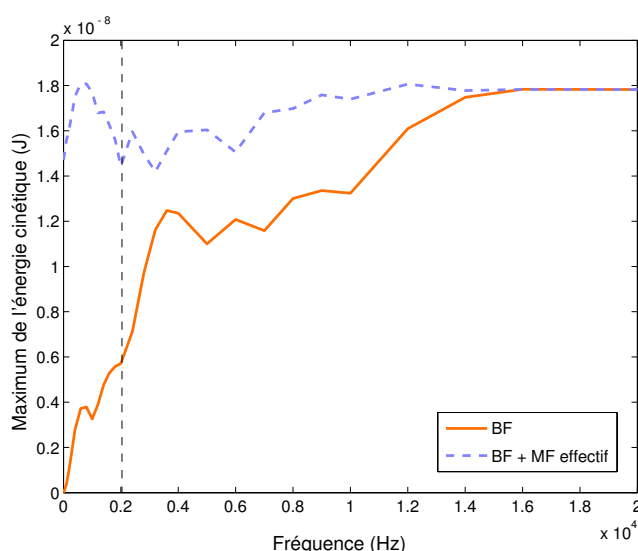


Figure 4.21 Courbe de convergence de l'énergie cinétique en fonction de la prise en compte des MF

Regardons maintenant une quantité locale telle que la vitesse au point de coordonnées $(0.369, 0.642, 0)$ (cf. Figure 4.22 ; en trait continu noir, la vitesse de référence avec prise en compte des BF et MF de façon locale ; en trait pointillé, la vitesse incluant les MF grâce aux quantités effectives sur $[\omega_{eff}, 20 \text{ kHz}]$; en trait continu clair, solution avec uniquement les BF sur $[0, 2000 \text{ Hz}]$). Si la fréquence

ω_{eff} est prise telle que $\omega_{eff} = \omega_c = 2000$ Hz, les résultats sont tout à fait satisfaisants. Par contre si ω_{eff} est choisie trop petite $\omega_{eff} = 500$ Hz, la vitesse est moins précise.

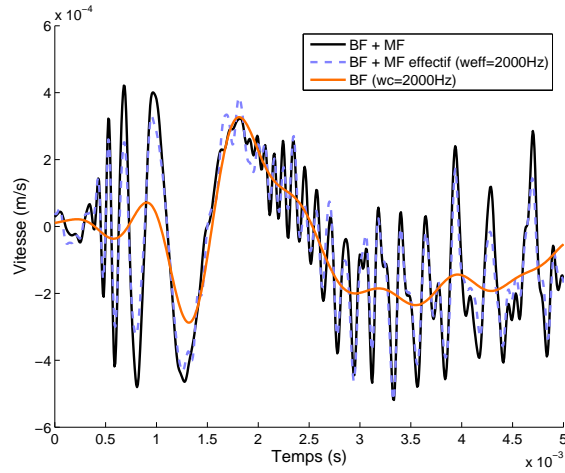
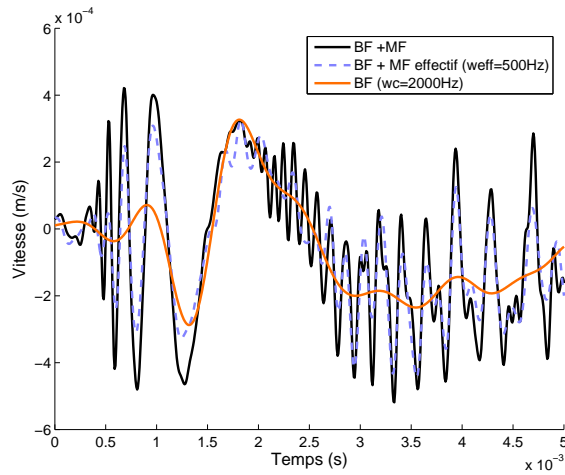
(a) $\omega_{eff} = 2000$ Hz(b) $\omega_{eff} = 500$ Hz

Figure 4.22 Vitesse matérielle du point $(0.369, 0.642, 0)$ avec prise en compte en moyenne des MF

Lors du calcul de la réponse transitoire d'une structure soumise à un choc avec l'approche fréquentielle, il convient de tenir compte des contenus basses et moyennes fréquences de la façon suivante :

- pour la plage BF $[0, \omega_c]$, les FRF locales sont calculées aux points discrets étudiés ;
- pour la plage MF $[\omega_c, \omega'_c]$, les FRF effectives (calculées avec la sous-structure sur laquelle est située le point d'intérêt pour S_{X_0}) suffisent à intégrer les propriétés des moyennes fréquences dans la réponse.

Premiers développements pour les chocs pyrotechniques

LES DÉVELOPPEMENTS NUMÉRIQUES ainsi que les critères de choix des paramètres de la méthode ayant été définis au chapitre précédent, l'approche fréquentielle est maintenant appliquée au cas des chocs pyrotechniques dans le cadre de la séparation de la coiffe sur les lanceurs. Le découpe pyrotechnique est modélisée par un chargement défilant et le calcul de la structure en dynamique est réalisé à l'aide de l'approche proposée.

Par ailleurs des comparaisons en termes de coûts de calcul sont réalisées entre les approches temporelle et fréquentielle pour des temps d'observation de la réponse assez grands.

Sommaire

1	Choc pyrotechnique	89
1.1	Contexte	89
1.2	Séparation de la coiffe par choc pyrotechnique	89
1.3	Géométrie et chargement	90
2	Traitement de la charge défilante avec la TVRC	93

3	Comparaison avec l'approche temporelle	94
3.1	Description du modèle dans l'approche temporelle	94
3.2	Description du modèle dans l'approche fréquentielle	95
3.3	Premiers résultats	95
3.3.1	Propagation des ondes de flexion	95
3.3.2	Propagation des ondes planes	99
3.3.3	Coût des simulations	105
3.3.4	Influence de l'amortissement	105
3.3.5	Influence de la taille de la jauge	105
3.4	Conclusion	107

1 Choc pyrotechnique

1.1 Contexte

Les lanceurs, destinés à mettre les satellites sur orbite, doivent être le plus confortable possible afin d'éviter une détérioration du matériel lors du lancement. Le client détermine le choix du lanceur en fonction des spécifications en niveau de choc permettant de caractériser le niveau de confort du lanceur et conçoit le satellite en respect des spécifications. L'orientation du choix se fera vers le lanceur qui nécessitera des équipements moins coûteux.

La majorité des séparations sur Ariane 5 se fait par découpe pyrotechnique car elle a l'avantage d'être très fiable. Elle est réalisée grâce à un cordon pyrotechnique placé dans un logement et est amorcée par des entailles. Quand la découpe s'effectue d'un seul côté du cordon, elle est dite « mono-rupture », si elle est faite des deux côtés alors elle est appelée « bi-rupture ». La découpe « mono-rupture » sollicite plus la structure radialement que la découpe « bi-rupture ».

Les chocs pyrotechniques issus des différentes séparations des étages sont très contraignants dans la définition du confort. Ils engendrent des propagations d'ondes au niveau énergétique très élevé et au contenu fréquentiel très large. Il est donc primordial de connaître au mieux les phénomènes de découpe et de propagation jusqu'aux équipements afin de dimensionner correctement ces derniers et de proposer des technologies atténuant les niveaux d'énergie des ondes lors de leur propagation.

Le pôle « chocs pyrotechniques » est un programme de recherche, lancé par le CNES et regroupant industriels et universitaires (CNES, EADS, MBDA, SNPE, Alcatel, Dassault, LMT-Cachan, ECP, CNAM), qui vise à travailler sur les thématiques suivantes :

- les effets sur les équipements,
- le choc à la source,
- la propagation, les liaisons, l'atténuation.

C'est dans le dernier thème que le LMT-Cachan a réalisé des travaux de recherche et plus précisément sur la caractérisation de la propagation des ondes de choc à travers les liaisons entre les étages [Lemoussu *et al.* 2002, Boucard *et al.* 2003].

1.2 Séparation de la coiffe par choc pyrotechnique

La coiffe, constituée de deux demi-coiffes, assure la protection du matériel embarqué, appelé charge utile, pendant le vol atmosphérique. Elle est larguée pendant le vol dès qu'elle est sortie de l'atmosphère (cf. Figure 5.1). Sa séparation est assurée par deux dispositifs pyrotechniques :

- l'un horizontal (HSS),

- l'autre vertical (VSS).



Figure 5.1 Séparation de la coiffe pendant le vol
(ESA/D. Ducros)

La fusée ayant encore à ce moment une accélération importante, il est nécessaire d'éjecter les deux demi-coques de la coiffe radialement afin qu'elles ne restent pas sur la trajectoire du lanceur. Les deux dispositifs pyrotechniques doivent donc communiquer aux deux parties de la coiffe l'impulsion nécessaire à leur dégagement latéral.

La découpe pyrotechnique horizontale (HSS) à ce niveau est donc soit une découpe mono-rupture soit une découpe bi-rupture avec des entailles présentant une inclinaison pour assurer l'éjection des bases des deux demi-coiffes sur les côtés. La séparation de la coiffe est par conséquent une rupture qui sollicite la structure en grande partie radialement : elle est donc la séparation qui fait l'objet d'études de recherche concernant le choc à la source et la propagation d'ondes puisque les ondes de flexion sont à haut niveau d'énergie et risquent d'endommager l'équipement embarqué.

Pour la séparation de la coiffe, la détonation est effectuée simultanément à deux endroits diamétralement opposés sur le lanceur (cf. Figure 5.2). L'explosion se propage ensuite de chaque côté à une vitesse d'environ 7100 m.s^{-1} dans le cordon. Cette vitesse, supérieure à la vitesse des ondes dans les coques, génère des ondes qui se propagent de biais comme nous allons le voir.

1.3 Géométrie et chargement

Des essais ont été conçus au sein du pôle « chocs pyrotechniques » pour valider les simulations. Ils sont réalisés sur des structures linéaires élémentaires constituées

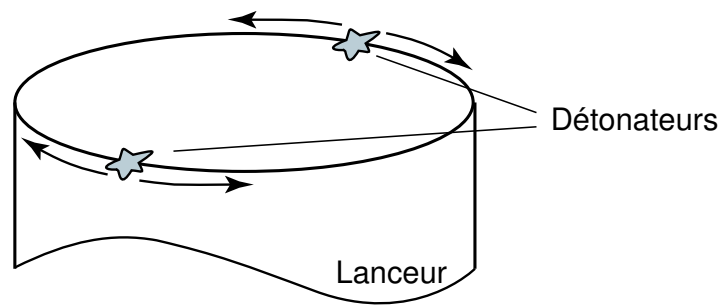


Figure 5.2 Séparation de la coiffe par deux cordons d'explosif

de deux plaques séparées par l'éprouvette contenant le cordon pyrotechnique (cf. Figure 5.3) :

- la plaque inférieure non instrumentée : elle simule la partie éjectée, ici la coiffe ;
- la plaque supérieure en aluminium de dimensions $2\text{ m} \times 1\text{ m} \times 6\text{ mm}$ représentant le lanceur : elle est instrumentée à l'aide d'accéléromètres et de jauges de déformation mesurant l'ambiance vibratoire au sein de la plaque sur quelques millièmes de seconde après la découpe.

Des travaux pour identifier le choc à la source ont été réalisés notamment dans [Derumaux 2004] par une technique de déconvolution. Les résultats montrent que les temps caractéristiques de l'impact sont de l'ordre de $15\ \mu\text{s}$ et de forme complexe. L'objectif de notre étude est de montrer le potentiel de l'approche fréquentielle proposée, nous nous contentons donc de simuler le choc par un sinus verse d'une durée $T = 15\ \mu\text{s}$.

Au vu de la description des essais, les simulations numériques sont effectuées sur la structure décrite sur la Figure 5.4 :

- la géométrie : plaque libre en aluminium de $2\text{ m} \times 1\text{ m} \times 6\text{ mm}$;
- le chargement : une composante selon Z pour simuler les ondes de flexion et une selon Y pour simuler les ondes planes. Le choc est représenté par un sinus verse d'une durée $T = 15\ \mu\text{s}$ se propageant sur le bord libre à la vitesse $V = 7100\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Dans la suite, les réponses seront observées au niveau du point de mesure J repéré sur la Figure 5.4.

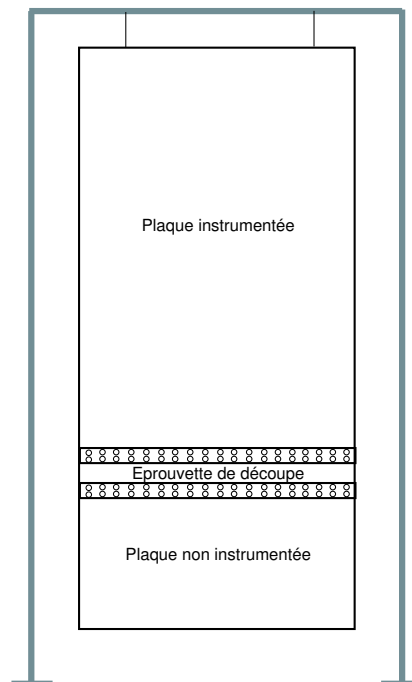


Figure 5.3 Description des essais

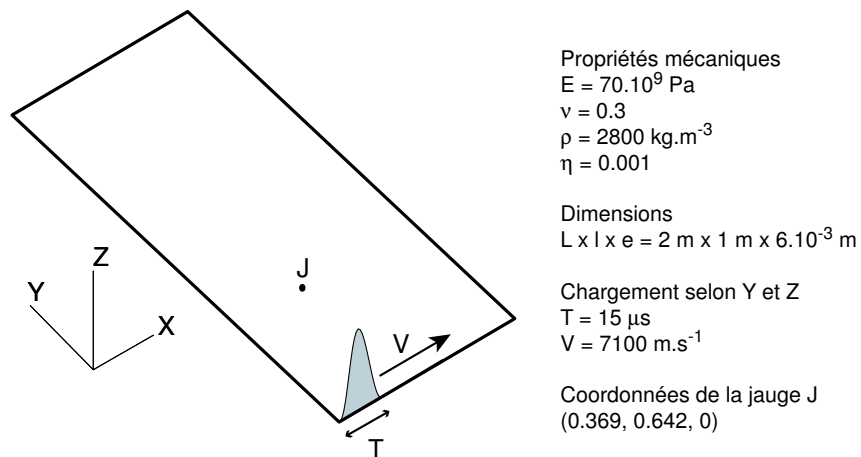


Figure 5.4 Plaque soumise à une charge défilante

2 Traitement de la charge défilante avec la TVRC

Le choc pyrotechnique est un chargement qui se propage à la vitesse V sur le bord. Pour la simulation numérique, il s'agit donc d'appliquer une charge défilante de la forme $f(t - \frac{x}{V})$. Dans le domaine des fréquences, le chargement $f(t - \frac{x}{V})$ se traduit par un effort harmonique en espace après transformée de Fourier selon l'équation (5.1) :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \frac{x}{V}) e^{-i\omega t} dt &= e^{-i\omega \frac{x}{V}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= e^{-i\omega \frac{x}{V}} \hat{f}(\omega) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Dans l'approche fréquentielle proposée pour simuler la propagation des ondes, le traitement de la charge défilante passe donc par le calcul d'une fonction de réponse en fréquence avec comme effort $\hat{p}_j(\omega)$ un chargement harmonique en espace $\hat{p}_j(\omega) = e^{-i\omega \frac{x}{V}} \hat{f}(\omega)$ tel que c'est illustré sur la Figure 5.5.

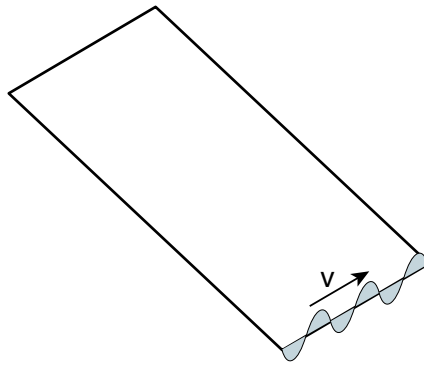


Figure 5.5 Effort harmonique en espace

Dans la TVRC, la solution est décrite par la superposition de quantités à deux échelles selon l'équation (5.2) :

$$\underline{U}(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{k}) = \underline{U}(\underline{X}, \underline{k}) e^{k \cdot \underline{Y}} \quad (5.2)$$

Il est alors très facile de gérer le chargement $\hat{p}_j(\omega)$ harmonique en espace sur la plage des moyennes fréquences puisque ce type de chargement peut lui-même adopter le format à deux échelles utilisé dans la TVRC en posant :

$$\begin{cases} \underline{U}(\underline{X}, \underline{k}) = \hat{f}(\omega) \\ \underline{k} = i\omega \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.3)$$

3 Comparaison avec l'approche temporelle

L'objectif est de montrer pour cet exemple relativement simple que la simulation par l'approche fréquentielle donne de bons résultats en prenant la méthode des éléments finis pour référence.

3.1 Description du modèle dans l'approche temporelle

La modélisation éléments finis de la plaque a été réalisée avec Cast3m. Le schéma d'intégration numérique de ce code de calcul est le schéma de Newmark des différences centrées qui est un schéma explicite.

La plage de fréquences d'intérêt considérée dans la propagation des chocs pyrotechniques est [200 Hz, 50 kHz]. La discrétisation temporelle est choisie de manière à converger vers la solution continue tout en ayant le meilleur temps CPU. Elle est prise de manière à bien représenter les ondes issues du choc, un pas de temps $\Delta t = 1.5 \mu\text{s}$ est donc privilégié. Selon le théorème de Shannon, la fréquence maximale observable est :

$$f_{max} = \frac{1}{2\Delta t}$$

Avec le pas de temps choisi, la fréquence f_{max} est bien supérieure à la plage de fréquences qui nous intéresse dans le choc pyrotechnique.

La discrétisation spatiale est directement liée à la discrétisation temporelle. Un très bon compromis entre la qualité de la solution et le temps de calcul est de se rapprocher au mieux de la condition de Courant (condition de stabilité des schémas explicites) $r \geq 1$ avec :

$$r = \frac{\Delta l}{c\Delta t}$$

Δl est la taille des éléments et c la célérités des ondes. Dans le cas de la plaque en aluminium, la célérité des ondes est de l'ordre de $5000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, ce qui pour un rapport $r = 1$ entraîne une taille de maille $\Delta l = 7.5 \text{ mm}$. Le Tableau 5.1 résume la discrétisation retenue.

Approche temporelle	Discrétisation spatiale	Discrétisation temporelle
Taille des éléments	$\Delta l = 7.5 \text{ mm}$	$\Delta t = 1.5 \mu\text{s}$
Taille du problème	$213 \cdot 10^3 \text{ DDL}$	3300 pas de temps

Tableau 5.1 Discrétisation du problème de choc pyrotechnique avec l'approche temporelle sur une durée d'observation $T_o = 5 \text{ ms}$

3.2 Description du modèle dans l'approche fréquentielle

Dans la démarche fréquentielle, les plages de fréquences sont prises telles que :

- $[0, \omega_c] = [0, 2000 \text{ Hz}]$,
- $[\omega_c, \omega'_c] = [2000 \text{ Hz}, 130 \text{ kHz}]$.

Sur la plage des BF, la fonction de réponse en fréquence est calculée grâce à la méthode des éléments finis réduits sur la base modale constituée des 516 premiers modes propres.

La plage des MF est traitée indépendamment grâce à la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes qui est effectuée, pour cette première étude, avec une seule sous-structure. Pour les ondes de cisaillement hors plan, 128 rayons intérieurs et 33 rayons de bord par bord sont nécessaires. Pour les ondes de pression et de cisaillement dans le plan de la plaque, 36 rayons de pression et 64 rayons de cisaillement sont requis.

Le pas fréquentiel est pris égal à 0.5 Hz. La TVRC est utilisée avec son extension large bande sur $B = 8 \text{ Hz}$. Le nombre total de calculs TVRC est donc réduit à 16000 sur la plage $[\omega_c, \omega'_c] = [2000 \text{ Hz}, 130 \text{ kHz}]$.

Approche fréquentielle	BF	MF
DDL	516 modes	360 rayons
Nombre de calculs	$4 \cdot 10^3$	$16 \cdot 10^3$

Tableau 5.2 Discrétisation du problème de choc pyrotechnique avec l'approche fréquentielle

3.3 Premiers résultats

3.3.1 Propagation des ondes de flexion

La vitesse de découpe $V = 7100 \text{ m.s}^{-1}$ génère des ondes de flexion se propageant de biais dans la plaque.

La Figure 5.6 montre la propagation des ondes obtenue avec les approches temporelle et fréquentielle lors de l'application de l'impact défilant : les ondes de flexion dans une plaque étant dispersives, les ondes moyennes fréquences se propagent plus vite que les basses fréquences.

Les Figures 5.7 et 5.8 comparent d'une part les déformations sur une jauge de surface $S = 1 \text{ mm}^2$ placée en J et les déplacements hors plan en J, et d'autre part les vitesses et les accélérations matérielles hors plan en J obtenus avec un code éléments finis classique, ici Cast3m, et avec la démarche fréquentielle.

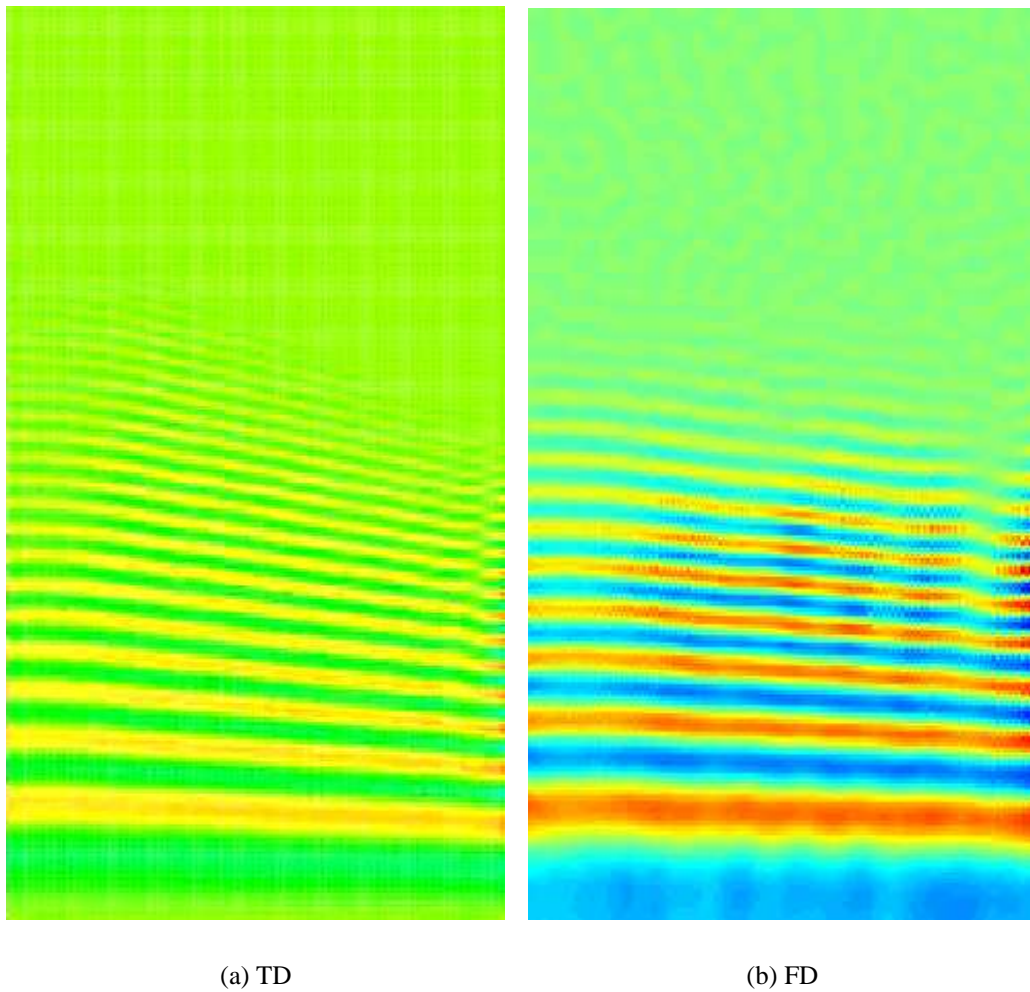
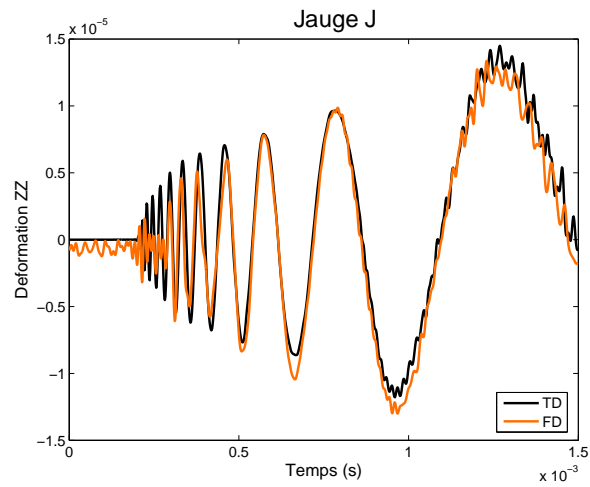
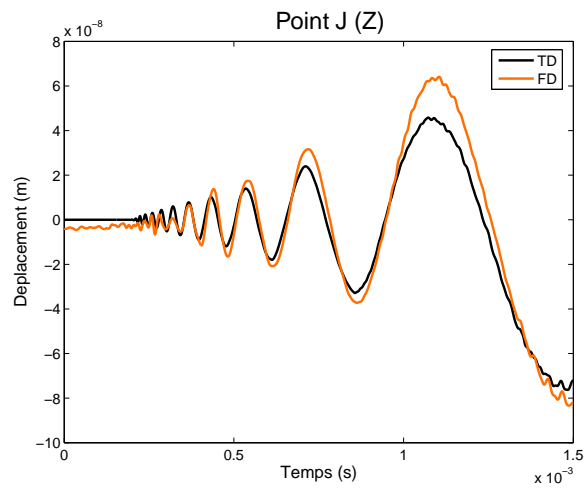


Figure 5.6 Propagation des ondes pyrotechniques de flexion à l'instant $t = 0.3$ ms

Les réponses sont très semblables pour des quantités telles que le déplacement et la grandeur moyennée qu'est la déformation. Elles sont tout aussi comparables sur des grandeurs dérivées telles que la vitesse et l'accélération.

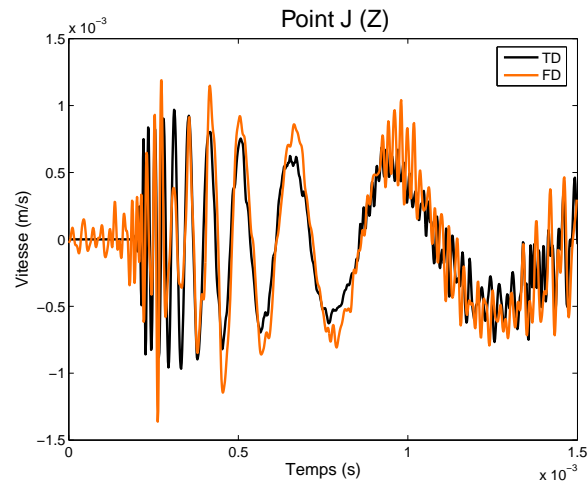


(a) Déformation ZZ

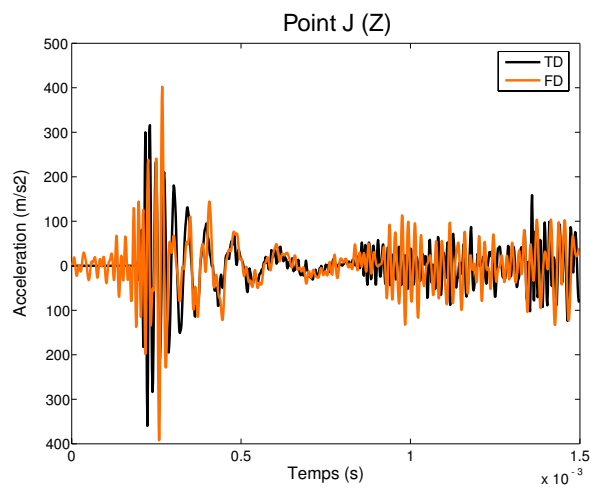


(b) Déplacement selon Z

Figure 5.7 Comparaison des déformations de la jauge placée en J (de surface $S = 1 \text{ mm}^2$) et des déplacements hors plan en J obtenus par les approches temporelle (TD) et fréquentielle (FD)



(a) Vitesse selon Z



(b) Accélération selon Z

Figure 5.8 Comparaison des vitesses et des accélérations hors plan en J obtenues par les approches temporelle (TD) et fréquentielle (FD)

3.3.2 Propagation des ondes planes

La vitesse de découpe génère deux familles d'ondes dans le plan de la plaque :

- les ondes de pression ou ondes primaires, appelées ondes P,
- les ondes de cisaillement (shear) ou ondes secondaires, appelées ondes S.

Ces deux types d'onde se propagent à des vitesses différentes et leur vitesse de propagation en contraintes planes dans la plaque mince est :

$$\text{– pour les ondes P : } c_p = \sqrt{\frac{4\mu(\mu + \lambda)}{\rho(2\mu + \lambda)}} = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}},$$

$$\text{– pour les ondes S : } c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

avec λ et μ les coefficients de Lamé.

[Graff 1991] montre qu'au sein des ondes de chaque type, les ondes de mode égal à 0 ont la même vitesse de propagation : elles ne sont pas dispersives. Seules les ondes de modes supérieurs sont dispersives. Par exemple pour les ondes S, la condition de fréquence minimale pour l'existence des ondes de mode n est $f > f_n$ avec :

$$f_n = \frac{nc_s}{2e}$$

Pour le cas de la plaque en aluminium d'épaisseur $e = 6$ mm et $c_s = 3101$ m.s⁻¹, on a $f_1 = 258$ kHz. Cette fréquence est bien supérieure à la plage de fréquences qui nous intéresse. Il peut être montré qu'il en est de même pour les ondes P. Par conséquent, dans notre étude seules les ondes non dispersives de mode 0 seront considérées pour la propagation des ondes pyrotechniques planes.

Lors de la découpe, les ondes P et S se propagent avec une pente qui est égale au rapport des vitesses de propagation et de la vitesse de découpe $V = 7100$ m.s⁻¹. Pour la plaque en aluminium étudiée, on obtient :

- $C_p = 5268$ m.s⁻¹, l'onde de pression a une pente égale à 0.74 ;
- $C_s = 3101$ m.s⁻¹, l'onde de cisaillement a une pente de 0.44.

Ces pentes sont schématisées sur la Figure 5.9 qui montre la propagation des ondes planes obtenue par les deux méthodes, temporelle (TD) et fréquentielle (FD).

Les déformations, déplacements, vitesses et accélérations dans le plan sont tracés sur les Figures 5.10 à 5.13.

Les courbes issues des deux approches TD et FD ont des allures similaires, toutefois celles obtenues avec l'approche fréquentielle présentent plus d'oscillations tant sur les déformations et déplacements que sur les quantités dérivées.

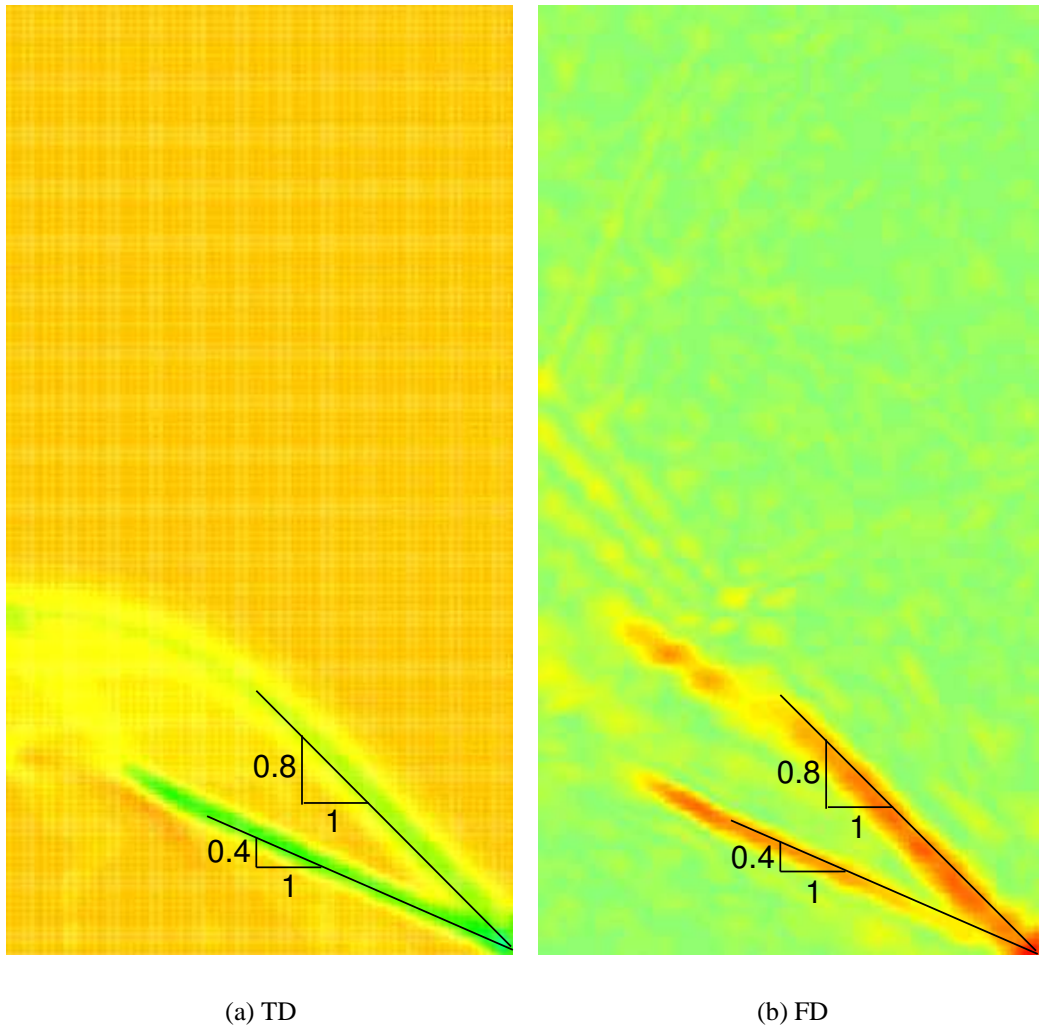
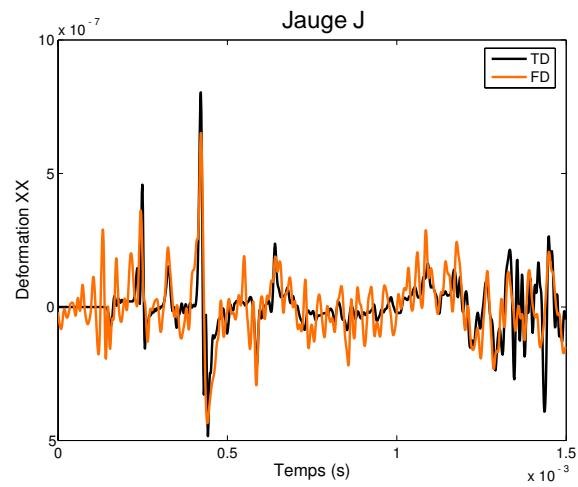
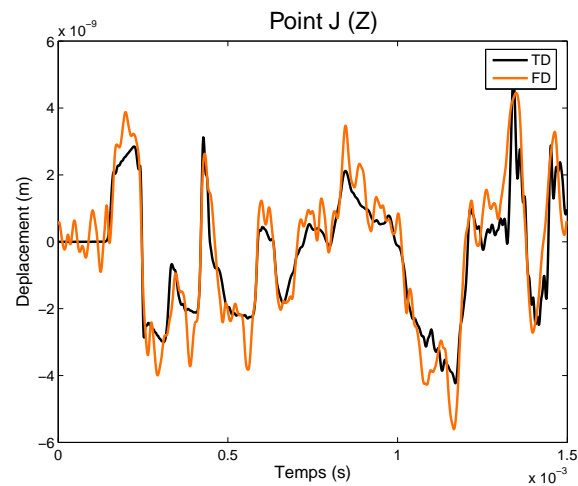
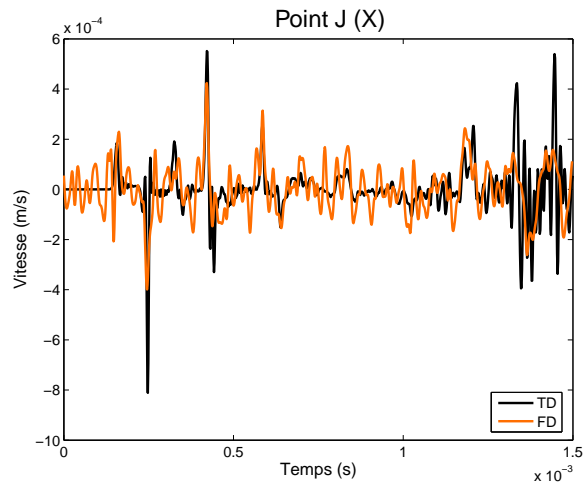


Figure 5.9 Propagation des ondes pyrotechniques planes à l'instant $t = 0.15$ ms

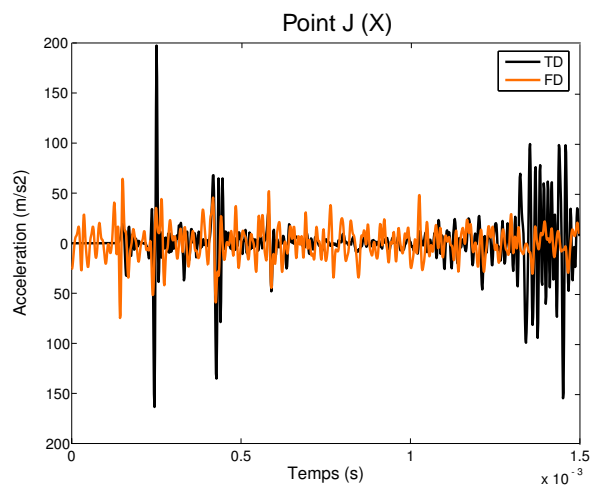
(a) Déformation XX 

(b) Déplacement selon X

Figure 5.10 Comparaison des déformations de la jauge placée en J (de surface $S = 1 \text{ mm}^2$) et des déplacements plans selon X en J obtenus par les approches temporelle (TD) et fréquentielle (FD)

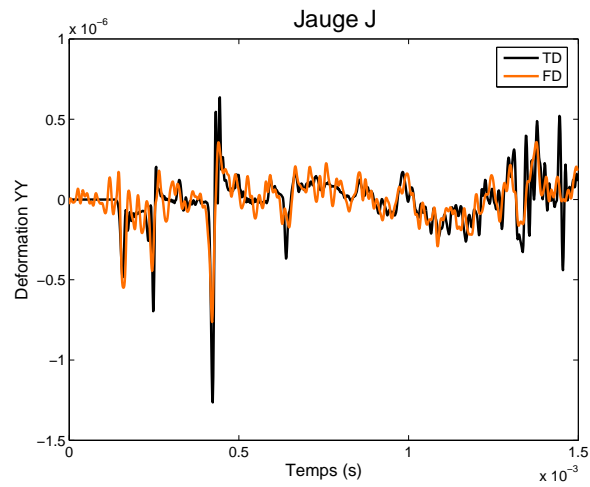


(a) Vitesse selon X

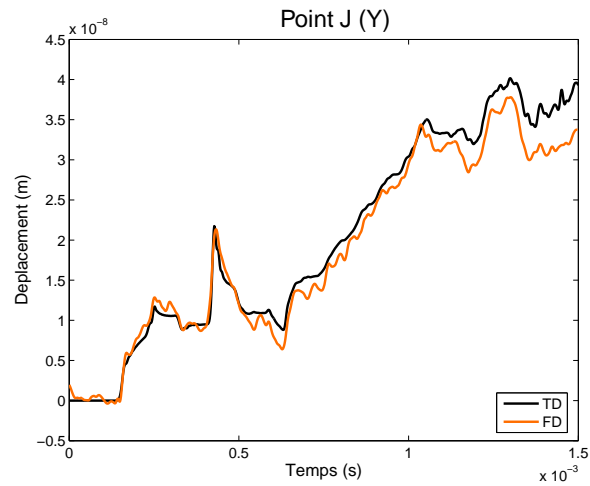


(b) Accélération selon X

Figure 5.11 Comparaison des vitesses et des accélérations plans selon X en J obtenues par les approches temporelle (TD) et fréquentielle (FD)

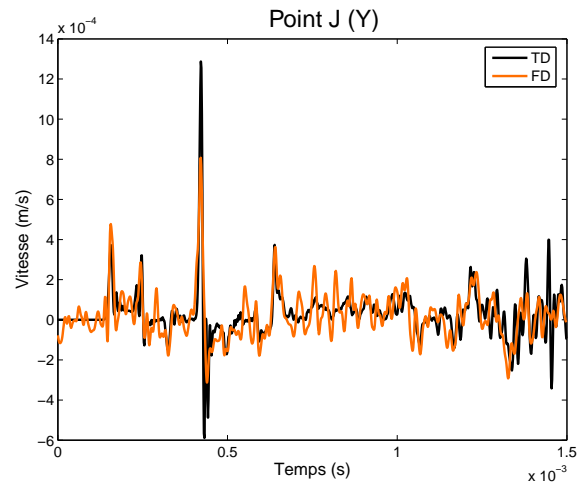


(a) Déformation YY

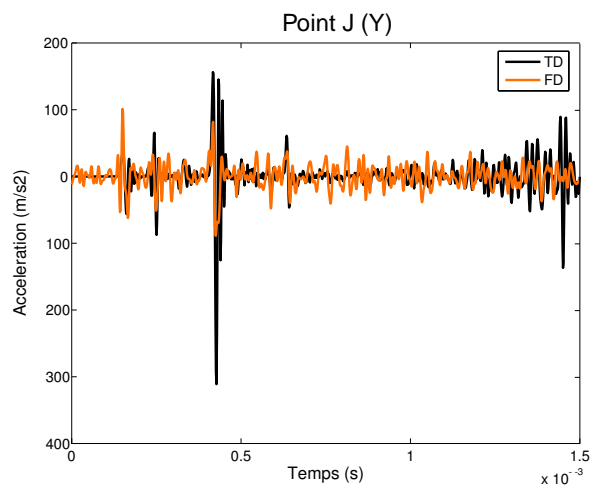


(b) Déplacement selon Y

Figure 5.12 Comparaison des déformations de la jauge placée en J (de surface $S = 1 \text{ mm}^2$) et des déplacements plans selon Y en J obtenus par les approches temporelle (TD) et fréquentielle (FD)



(a) Vitesse selon Y



(b) Accélération selon Y

Figure 5.13 Comparaison des vitesses et des accélérations plans selon Y en J obtenues par les approches temporelle (TD) et fréquentielle (FD)

3.3.3 Coût des simulations

La démarche dans le domaine des fréquences permet d'obtenir la réponse sur une durée $T_o = 2$ s. Pour chaque approche, le coût du calcul pour atteindre le temps d'observation de 2 s est résumé dans le Tableau 5.3.

Approche	TD		FD	
	MEF	Base réduite	TVRC	
DDL	213 10^3	516	360	
Nombre de calculs	1333 10^3	4 10^3	16 10^3	

Tableau 5.3 Taille des problèmes pour les approches temporelle (TD) et fréquentielle (FD) sur une durée d'observation $T_o = 2$ s

La simulation doit être effectuée sur un temps T_o assez long pour prédire les perturbations au pied de la charge utile dans le lanceur. Dans ce cas l'approche fréquentielle apparaît bien moins coûteuse au vu du Tableau 5.3 puisqu'il s'agit d'effectuer, pour $T_o = 2$ s :

- plus d'un million de résolutions du problème d'évolution en temps sur un maillage de 213 10^3 DDL pour l'approche temporelle,
- 20 10^3 résolutions de problèmes de vibration forcée pour l'approche fréquentielle dont 4 10^3 grâce à une base réduite formée des 516 premiers modes propres et 16 10^3 grâce à la TVRC avec 360 rayons complexes.

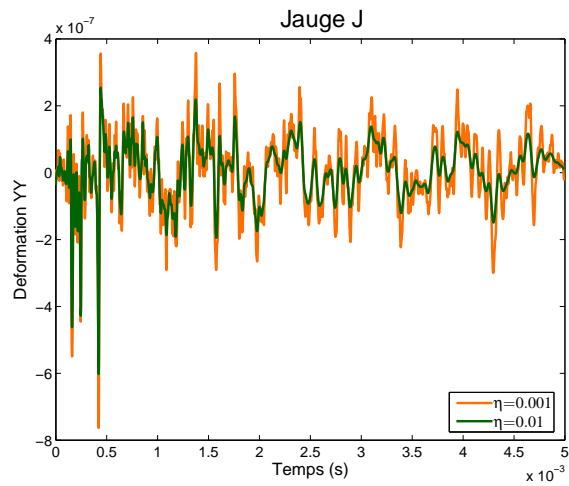
3.3.4 Influence de l'amortissement

Dans l'approche fréquentielle, il est possible de faire varier l'amortissement hystérique η et d'observer l'influence de celui-ci sur la réponse. Sur la Figure 5.14 sont tracées les déformations et les accélérations dans le plan de la plaque selon Y pour deux valeurs différentes de l'amortissement : $\eta = 0.001$ et $\eta = 0.01$.

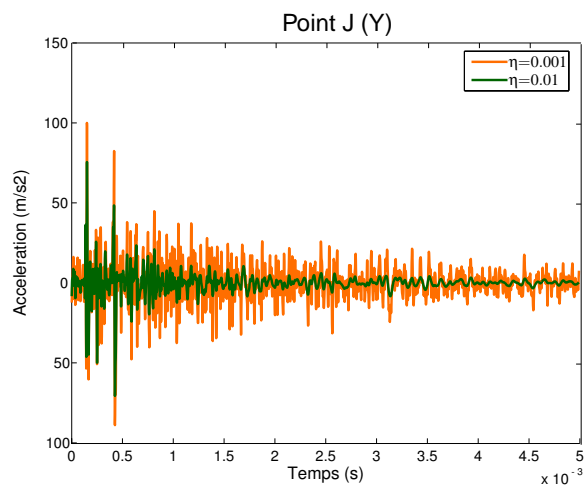
Il est évident que l'amortissement joue un rôle important dans l'évanouissement des ondes propagatives : il doit donc être pris en considération dans les simulations des chocs pyrotechniques pour prédire correctement l'énergie qui arrivera en pied de charge utile dans le lanceur.

3.3.5 Influence de la taille de la jauge

Les jauges utilisées pour les essais de chocs pyrotechniques ont une surface active d'environ $S = 1$ mm². Au vu de la Figure 5.15, l'utilisation d'une jauge



(a) Déformation YY



(b) Accélération selon Y

Figure 5.14 Influence de l'amortissement η sur la déformation YY de la jauge de 1 mm^2 et sur l'accélération selon Y

plus grande, $S \sim 1 \text{ cm}^2$, centrée sur le même point n'affecte pas visiblement la déformation YY.

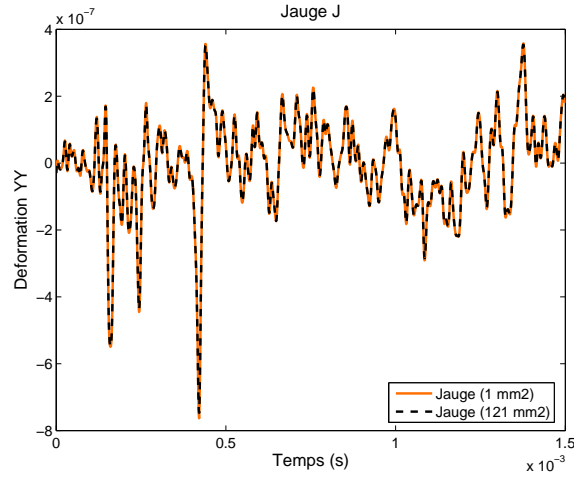


Figure 5.15 Déformation YY pour deux tailles de jauge, $S = 1 \text{ mm}^2$ et $S = 121 \text{ mm}^2$

Sur la Figure 5.16 est tracée la variation relative $\xi(S)$ de la déformation obtenue avec une jauge de taille S par rapport à une jauge de taille $S_1 = 1 \text{ mm}^2$:

$$\xi(S) = \frac{\varepsilon(S) - \varepsilon(S_1)}{\varepsilon(S_1)} \quad (5.4)$$

avec $\varepsilon(S)$ la déformation moyenne XX ou YY sur une jauge de taille S .

Les déformations sur la jauge de surface 1 cm^2 ne diminue environ que de 2% par rapport à celles obtenues sur une jauge de 1 mm^2 .

3.4 Conclusion

L'analyse du cas très simple de la plaque a montré les possibilités de l'approche fréquentielle dans le cas d'impact défilant comme les chocs pyrotechniques et a mis en évidence l'efficacité de cette méthode pour des durées d'observation relativement longues en terme de coût de calcul.

Néanmoins l'étude demande à être approfondie puisque l'utilisation d'une seule sous-structure dans la TVRC est insuffisante. L'influence du partitionnement en plusieurs sous-structures fait actuellement l'objet de travaux.

Les essais effectués au sein du pôle « chocs pyrotechniques » permettront de valider les modélisations concernant l'amortissement et les chocs à la source.

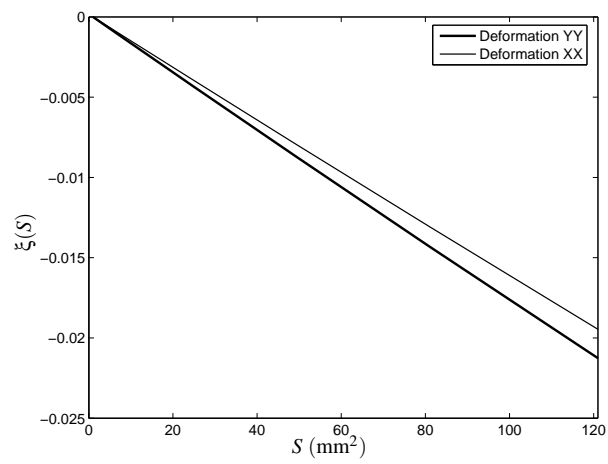


Figure 5.16 Influence de la taille de la jauge sur la mesure des déformations

Conclusion et perspectives

DANS CE DOCUMENT nous avons utilisé une approche fréquentielle pour calculer la partie transitoire de la réponse d'une structure linéaire soumise à un choc à large contenu en fréquence, cette approche nous laissant la possibilité d'intégrer dans la solution le contenu basses fréquences par des méthodes éléments finis classiques mais également et surtout le contenu moyennes fréquences grâce à la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes qui est une technique dédiée et prédictive pour le calcul des vibrations forcées en moyennes fréquences.

Il a été montré que tenir compte des moyennes fréquences par la méthode des éléments finis est coûteux et toutefois nécessaire pour la conception des structures. C'est dans ce contexte que l'utilisation de la TVRC s'est révélée être une alternative intéressante pour le besoin de la prise en compte à coût réduit des MF. En effet c'est une méthode qui tient compte des caractéristiques des MF et qui reproduit leur caractère oscillant grâce à l'introduction *a priori* d'ondes propagatives et permet de réduire considérablement le nombre de degrés de liberté nécessaires à la prédiction de la réponse.

L'accent a été mis sur la démarche pour maîtriser le calcul et ses paramètres de discrétisation. Des critères sont nés de cette étude pour faciliter l'utilisation de l'approche fréquentielle proposée. Nous avons également mis en place des méthodes pour réduire le nombre de calculs de vibration forcée à effectuer, imposé par le théorème de Shannon, en exploitant d'une part les propriétés des moyennes fréquences et d'autre part en étendant la TVRC à l'analyse large bande rendant la méthode véritablement efficace.

Les chocs pyrotechniques présents lors des étapes de séparation d'un lanceur sont des exemples types de structures soumises à des impacts rapides à large spectre. Le dernier chapitre montre le potentiel de la présente approche pour l'application aux chocs pyrotechniques. Cette étude demande à être approfondie avec des comparaisons expérimentales.

Au cours de la thèse, la méthode a été introduite dans le logiciel prototype CO-

RAY MF initialement développé dans le code de calcul Castem 2000 pour l'analyse prédictive des vibrations MF par la TVRC, puis entièrement reprogrammé sous l'environnement MATLAB.

À ce stade de l'étude, de nombreux points sont à développer :

- La simulation des chocs pyrotechniques doit encore être exploitée pour confronter les résultats numériques aux résultats expérimentaux et étudier l'influence de la sous-structuration de la plaque. L'utilisation de l'extension de la TVRC aux coques [Riou *et al.* 2004] permettra de calculer la propagation des chocs pyrotechniques sur la structure cylindrique, plus proches de la géométrie des Sylda, envisagée pour la prochaine campagne d'essais du pôle « chocs pyrotechniques » (cf. Figure 5.17).

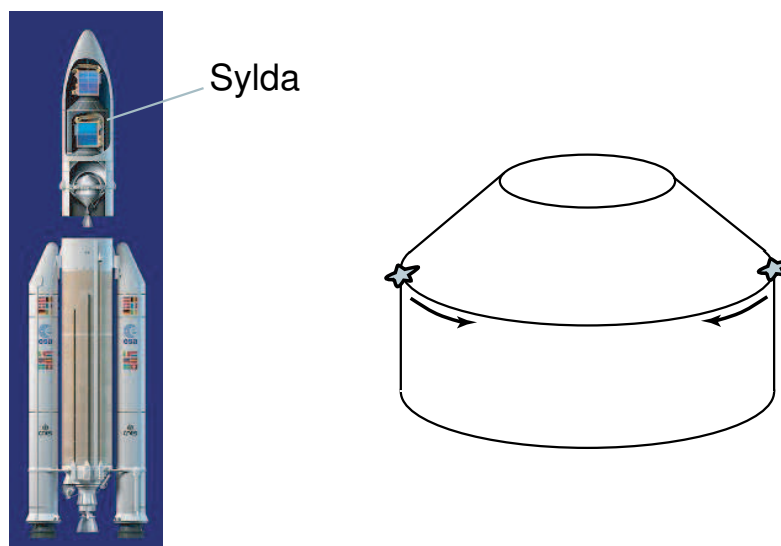


Figure 5.17 Nouvelle campagne d'essais de chocs pyrotechniques

- Jusqu'à présent seules les non-linéarités exprimées dans le domaine fréquentiel telles que l'amortissement sont prises en compte, la structure demeurant linéaire par ailleurs. L'extension aux non-linéarités exprimées dans le domaine temporel, telles que les relations de comportement en visco-plasticité, fait l'objet de futurs développements. L'idée est d'utiliser la LATIN méthode, introduite dans [Ladevèze 1998], dans le domaine espace-fréquence : l'effort est alors concentré au niveau des étapes locales au cours desquelles les quantités mises en jeu sont transformées en fonction du temps grâce aux transformées de Fourier inverses pour vérifier exactement les relations de comportement.

- En présence de non-linéarités dans la structure, un signal de fréquence donnée peut générer une réponse à une fréquence très supérieure, dans ce cas le choix du contenu fréquentiel $[0, \omega'_c]$ dans la réponse est à réanalyser.
- Une version complètement multi-échelle et donc parallèle de la TVRC est envisageable pour remplacer avantageusement la version actuelle pour les structures complexes.
- Une autre perspective est d'introduire les aspects stochastiques qui peuvent concerner les charges ou la description des paramètres de structure et de liaison [Blanzé et Rouch 2005].

Bibliographie

[Arnaud 2000]

L. Arnaud. *Modélisation et simulation des vibrations moyennes fréquences par la théorie variationnelle des rayons complexes*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2000.

[Aubry et al. 1999]

D. Aubry, D. Lucas et B. Tie. Adaptive strategy for transient/coupled problems. applications to thermoelasticity and elastodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176 : 41–50, 1999.

[Babuška et al. 1995]

I. Babuška, F. Ihlenburg, E. T. Paik et S. A. Sauter. A generalized finite element method for solving the Helmholtz equation in two dimensions with minimal pollution. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 128 : 325–359, 1995.

[Babuška et Rheinboldt 1979]

I. Babuška et W. C. Rheinboldt. Adaptive approaches and reliability estimators in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17/18 : 519–540, 1979.

[Banerjee et Butterfield 1981]

P. K. Banerjee et R. Butterfield. *Boundary element method in engineering science*. McGraw-Hill, London, 1981.

[Bathe 1995]

K. J. Bathe. *Finite element procedures*. Prentice Hall ; 2nd edition, 1995.

[Belov et al. 1977]

V. D. Belov, S. A. Ryback et B. D. Tartakovskii. Propagation of vibrational energy in absorbing structures. *Journal of the Soviet Physics Acoustics*, 23(2) : 115–119, 1977.

[Belytschko et al. 2000]

T. Belytschko, W. K. Liu et B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley and Sons, 2000.

[Belytschko et al. 1994]

T. Belytschko, Y. Y. Lu et I. Gu. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 : 229–256, 1994.

[Belytschko et al. 2001]

T. Belytschko, N. Moës, S. Usui et C. Parimi. Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(4) : 993–1013, 2001.

[Ben Dhia et Rateau 2005]

H. Ben Dhia et G. Rateau. The arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(11) : 1442–1462, 2005.

[Bennighof et al. 2000]

J. K. Bennighof, M. F. Kaplan, M. B. Muller et M. Kim. Meeting the nvh computational challenge : automated multi-level substructuring. Dans *18th International Modal Analysis Conference*, pages 909–915, San Antonio, États Unis, 2000.

[Beslin et Nicolas 1997]

O. Beslin et J. Nicolas. A hierarchical functions set for predicting very high order plate bending modes with any boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 202(5) : 633–655, 1997.

[Blanzé et Rouch 2005]

C. Blanzé et P. Rouch. Analysis of structures with stochastic interfaces in the medium-frequency range. *Journal of Computational Acoustics*, 2005. À paraître.

[Boucard et al. 2003]

P.-A. Boucard, M. Derumaux, P. Ladevèze et P. Roux. Macro-meso models for joint submitted to pyrotechnic shock. Dans *Second MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, pages 139–142, 2003.

[Bouillard et Ihlenburg 1999]

P. Bouillard et F. Ihlenburg. Error estimation and adaptivity for the finite element solution in acoustics : 2d and 3d applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 174(1-4) : 147–163, 1999.

[Bouillard et Suleau 1998]

P. Bouillard et S. Suleau. Element-free Galerkin solutions for Helmholtz problems : formulation and numerical assessment of the pollution effect. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 162(1-4) : 317–335, 1998.

[Bouthier et Bernhard 1995]

O. M. Bouthier et R. J. Bernhard. Simple models of the energetics of transversely vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration*, 182(1) : 149–164, 1995.

[Brigham 1988]

E. O. Brigham. *The fast Fourier transform and its applications*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1988.

[Buvailo et Ionov 1980]

L. E. Buvailo et A. V. Ionov. Application of the finite element method to the investigation of the vibroacoustical characteristics of structures at high audio frequencies. *Journal of the Soviet Acoustics*, 26 : 277–279, 1980.

[Casimir et Duforet 1997]

J. B. Casimir et C. Duforet. éléments continus de poutres courbes en analyse harmonique. Dans *Troisième colloque national en calcul de structure*, pages 87–92, Giens, France, 1997.

[Chadwick et Bettess 1997]

E. A. Chadwick et P. Bettess. Modelling of progressive short waves using wave envelopes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14 : 3229–3246, 1997.

[Chae et Ih 2001]

S. Chae et J. G. Ih. Prediction of vibrational energy distribution in the thin plate at high-frequency bands by using the ray tracing method. *Journal of Sound and Vibration*, 240(2) : 263–292, 2001.

[Champaney et al. 1997]

L. Champaney, J.-Y. Cognard, D. Dureisseix et P. Ladevèze. Large scale application on parallel computers of a mixed decomposition method. *Computational Mechanics*, 19 : 253–263, 1997.

[Chevreuil et Ladevèze 2005]

M. Chevreuil et P. Ladevèze. Transient dynamics analysis over the low and medium frequency ranges for engineering structures. Dans *Third MIT conference*, Boston, United States, 2005.

[Chevreuil *et al.* 2004]

M. Chevreuil, P. Ladevèze et P. Rouch. On a new computational approach for transient dynamics over the low and medium frequency ranges for complex engineering structures. Dans *CST 2004 - 7th International Conference on Computational Structures Technology*, Lisbonne, Portugal, 2004.

[Chevreuil *et al.* 2005]

M. Chevreuil, P. Ladevèze et P. Rouch. Une nouvelle stratégie de calcul en dynamique transitoire recouvrant les basses et moyennes fréquences pour des structures complexes. Dans *7e Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, France, 2005.

[Clough et Penzien 1993]

R. W. Clough et J. Penzien. *Dynamics of structures*. McGraw-Hill Education, 2nd edition, 1993.

[Cochelin et Compain 2000]

B. Cochelin et C. Compain. An asymptotic numerical method for non-linear transient dynamics. *Revue européenne des éléments finis*, 9(1-2-3) : 113–128, 2000.

[Combescure et Gravouil 2002]

A. Combescure et A. Gravouil. A numerical scheme to couple subdomains with different time steps for predominantly linear transient analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 : 1129–1157, 2002.

[Combescure *et al.* 2003]

A. Combescure, A. Gravouil et B. Herry. An algorithm to solve transient structural non-linear problems for non-matching time-space domains. *Computers and Structures*, 81 : 1211–1222, 2003.

[Coorevits 1993]

P. Coorevits. *Maillage adaptatif anisotrope : application aux problèmes de dynamique*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 1993.

[Craig et Bampton 1968]

R. Craig et M. Bampton. Coupling of substructures of dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7) : 1313–1319, 1968.

[De Langre 1991]

E. De Langre. Formulation de transfert de plaques en flexion par équations intégrales. Test de validation et de performances. Rapport technique DMT/90/395, CEA, 1991.

[Deraemaeker et al. 1999]

A. Deraemaeker, I. Babuška et P. Bouillard. Dispersion and pollution of the FEM solution for the Helmholtz equation in one, two and three dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46 : 471–499, 1999.

[Deraemaeker et al. 2002]

A. Deraemaeker, P. Ladevèze et P. Leconte. Reduced basis for model updating in structural dynamics based on constitutive relation error. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 : 2427–2444, 2002.

[Derumaux 2004]

M. Derumaux. *Sur la modélisation et la simulation de liaisons soumises à des chocs pyrotechniques*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2004.

[Desmet 1998]

W. Desmet. *A wave based prediction technique for coupled vibro-acoustic analysis*. Thèse de doctorat, Université Catholique de Louvain, Belgique, 1998.

[Desmet et al. 2002]

W. Desmet, B. Van Hal, P. Sas et D. Vandepitte. A computationally efficient prediction technique for the steady-state dynamic analysis of coupled vibro-acoustic systems. *Advances in Engineering Software*, 33(7-10) : 527–540, 2002.

[Dey 2003]

S. Dey. Evaluation of p-FEM approximations for mid-frequency elasto-acoustics. *Journal of Computational Acoustics*, 11(2) : 195–225, 2003.

[Farhat et al. 1994]

C. Farhat, L. Crivelli et F.-X. Roux. A transient FETI methodology for large-scale parallel implicit computations in structural mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 : 1945–1975, 1994.

[Farhat et Geradin 1994]

C. Farhat et M. Geradin. On a component mode synthesis method and its application to incompatible substructures. *Computers and Structures*, 51(5) : 459–473, 1994.

[Farhat et al. 2001]

C. Farhat, I. Harari et L. P. Franca. The discontinuous enrichment method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 : 6455–6479, 2001.

[Farhat et al. 2003]

C. Farhat, I. Harari et U. Hetmaniuk. A discontinuous Galerkin method with Lagrange multipliers for the solution of Helmholtz problems in the mid-frequency

regime. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 : 1389–1419, 2003.

[Farhat et Mandel 1998]

C. Farhat et J. Mandel. The two-level FETI method for static and dynamic plate problems. Part 2 : extension to shell problems, parallel implementation and performance results. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155 : 153–179, 1998.

[Farhat et Roux 1991]

C. Farhat et F.-X. Roux. A method for finite element tearing and inter connecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32 : 1205–1227, 1991.

[Fleuret et Duforet 1997]

J. S. Fleuret et C. Duforet. Éléments continus de plaques en régime harmonique. Dans *Troisième colloque national en calcul de structure*, Giens, France, 1997.

[Franca et al. 1997]

L. P. Franca, C. Farhat, A. P. Macedo et M. Lesoinne. Residual-free bubbles for the helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 : 4003–4009, 1997.

[Franca et Macedo 1998]

L. P. Franca et A. P. Macedo. A two-level finite element method and its application to the helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43 : 23–32, 1998.

[Gibert 1984]

P. Gibert. Contribution of the linear dynamic analysis of slender bodies in the low and medium frequency ranges. *Journal of Sound and Vibration*, 97(3) : 499–511, 1984.

[Girard et Defosse 1990]

A. Girard et H. Defosse. Frequency response smoothing, matrix assembly and structural paths : a new approach for structural dynamics up to high frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 137(1) : 53–68, 1990.

[Girard et Defosse 1993]

A. Girard et H. Defosse. Frequency response smoothing and structural path analysis : application to beam trusses. *Journal of Sound and Vibration*, 165(1) : 165–170, 1993.

[Glowinski et Le Tallec 1990]

R. Glowinski et P. Le Tallec. Augmented Lagrangian interpretation of the non-overlapping Schwarz alternating method. Dans T. F. Chan, R. Glowinski, J. Périaux et O. B. Widlund, éditeurs, *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, 1990. SIAM.

[Gourgeon et Herrera 1981]

H. Gourgeon et I. Herrera. *Boundary methods. C-complete systems for biharmonic equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[Graff 1991]

K. F. Graff. *Wave Motion in Elastic Solids*. Dover Publications, New York, 1991.

[Gravouil et Combescure 2001]

A. Gravouil et A. Combescure. Multi-time-step explicit-implicit method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 : 199–225, 2001.

[Greenstadt 1999]

J. Greenstadt. Solution of wave propagation problems by the cell discretization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 174 : 1–21, 1999.

[Grosh et Pinsky 1998]

K. Grosh et P. M. Pinsky. Galerkin generalized least square finite element methods for time harmonic structural acoustics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 154(3-4) : 299–318, 1998.

[Guyan 1965]

R. J. Guyan. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, 3(2) : 380, 1965.

[Hall et Beck 1993]

J. F. Hall et J. L. Beck. Linear system response by dft : Analysis of a recent modified method. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 22 : 599–615, 1993.

[Harari et al. 1999]

I. Harari, P. Barai et P. E. Barbone. Numerical and spectral investigations of Trefftz infinite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(4) : 553–577, 1999.

[Harari et al. 2001]

I. Harari, P. Barai, P. E. Barbone et M. Slavutin. Threedimensional infinite elements based on a Trefftz formulation. *Journal of Computational Acoustics*, 9(2) : 381–394, 2001.

[Harari et al. 1996]

I. Harari, K. Gosh, T. Hughes, M. Malhotra, P. Pinsky, J. Stewart et L. Thompson. Recent developments in finite element methods for structural acoustics. *Archives of Computational Methods in Engineering - State of the art reviews*, 3 : 131–309, 1996.

[Harari et Haham 1998]

I. Harari et S. Haham. Improved finite element method for elastic waves. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166 : 143–164, 1998.

[Harari et Hughes 1992]

I. Harari et T. Hughes. Galerkin/least-squares finite element method for the reduced wave equation with non reflecting boundary condition in unbounded domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 98(3) : 411–454, 1992.

[Herrera 1984]

I. Herrera. *Boundary methods. An algebraic theory*. Pitman, Boston, 1984.

[Hilber et al. 1977]

H. Hilber, T. Hughes et R. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.*, 5 : 283–292, 1977.

[Hochard et al. 1993]

C. Hochard, P. Ladevèze et L. Proslie. A simplified analysis of elastic structures. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 12(4) : 509–535, 1993.

[Hughes 1995]

T. J. R. Hughes. Multiscale phenomena : Green's functions, the dirichlet-to-neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127(1-4) : 387–401, 1995.

[Humar et Xia 1993]

J. L. Humar et H. Xia. Dynamic response analysis in the frequency domain. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 22 : 1–12, 1993.

[Hurty 1965]

W. C. Hurty. Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA Journal*, 37(4) : 678–685, 1965.

[Ichchou et al. 2001]

M. N. Ichchou, A. Le Bot et L. Jézéquel. A transient local energy approach as an alternative to transient SEA : wave and telegraph equations. *Journal of Sound and Vibration*, 246(5) : 829–840, 2001.

[Ichchou et Jezequel 2001]

M. N. Ichchou et L. Jezequel. équation énergétique locale pour la prévision des niveaux vibratoires et acoustiques instationnaires. *Comptes Rendus Académie des Sciences Paris*, 329(663-670), 2001. Série IIb.

[Ilhenburg et Babuška 1995]

F. Ilhenburg et I. Babuška. Dispersion analysis and error estimation of Galerkin finite element methods for Helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38 : 3745–3774, 1995.

[Irimie et Bouillard 2001]

S. Irimie et P. Bouillard. A residual *a posteriori* error estimation for the finite element solution of the Helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(31) : 4027–4042, 2001.

[Irons 1965]

B. M. Irons. Structural eigenvalue problems : elimination of unwanted variables. *AIAA Journal*, 3(5) : 961–962, 1965.

[Jirousek et Wroblewski 1996]

J. Jirousek et A. Wroblewski. T-elements : state of the art and future trends. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 3(4) : 323–434, 1996.

[Krokstadt 1968]

U. R. Krokstadt. Calculating the acoustical room response by the use of a ray tracing technique. *Journal of Sound and Vibration*, 8 : 118–125, 1968.

[Lacroix et Bouillard 2003]

D. Lacroix et P. Bouillard. Improved sensitivity analysis by a coupled FE-EFG method. *Computers and Structures*, 81(26-27) : 2431–2439, 2003.

[Ladevèze 1983]

P. Ladevèze. R.D.M. tridimensionnelle. Rapport technique, LMT-Cachan, 1983.

[Ladevèze 1996]

P. Ladevèze. A new computational approach for structure vibrations in the medium frequency range. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Iib*, 322(12) : 849–856, 1996.

[Ladevèze 1998]

P. Ladevèze. *Nonlinear Computational Structural Methods : New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag, 1998.

[Ladevèze 2003]

P. Ladevèze. A new computational method for medium-frequency vibrations and its extension to transient dynamics. Dans D. R. J. Owen, E. Oñate et B. Suárez, éditeurs, *Proceedings of the seventh International Conference on Computational Plasticity - Complas 2003, CIMNE, Barcelona, Spain*. on CD-ROM, 7-10 April 2003.

[Ladevèze et Arnaud 2000]

P. Ladevèze et L. Arnaud. A new computational method for structural vibrations in the medium frequency range. *Comput. Ass. Mech. Engrg. Sci.*, 7 : 219–226, 2000.

[Ladevèze et al. 2001]

P. Ladevèze, L. Arnaud, P. Rouch et C. Blanzé. The variational theory of complex rays for the calculation of medium-frequency vibrations. *Engrg. Comput.*, 18 (1) : 193–214, 2001.

[Ladevèze et al. 2003a]

P. Ladevèze, L. Blanc, P. Rouch et C. Blanzé. A multiscale computational method for medium-frequency vibrations of assemblies of heterogeneous plates. *Computers and Structures*, 81(12) : 1267–1276, 2003.

[Ladevèze et Chevreuil 2005]

P. Ladevèze et M. Chevreuil. A new computational method for transient dynamics including the low- and the medium-frequency ranges. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64 : 503–527, 2005.

[Ladevèze et al. 2002]

P. Ladevèze, O. Loiseau et A. Nouy. A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(43) : 4869–4891, 2002.

[Ladevèze et Pelle 2001]

P. Ladevèze et J.-P. Pelle. *La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non-linéaire*. Hermes Science, 2001. Version anglaise, Springer 2004.

[Ladevèze et Riou 2005]

P. Ladevèze et H. Riou. Calculation of medium-frequency vibrations over a wide frequency range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(27-29) : 3167–3191, 2005.

[Ladevèze et al. 2003b]

P. Ladevèze, P. Rouch, H. Riou et X. Bohineust. Analysis of medium-frequency vibrations in a frequency range. *Journal of Computational Acoustics*, 11(2) : 255–283, 2003.

[Lancaster et Salkhaushaus 1981]

P. Lancaster et K. Salkhaushaus. Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of computation*, 37 : 141–158, 1981.

[Langley 1992]

R. S. Langley. A wave intensity technique for the analysis of high frequency vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 159 : 483–502, 1992.

[Langley 1995]

R. S. Langley. On the vibrational conductivity approach to high frequency dynamics for two-dimensional structural components. *Journal of Sound and Vibration*, 182(4) : 637–657, 1995.

[Lase et al. 1996]

Y. Lase, M. N. Ichchou et L. Jézéquel. Energy flow analysis of bars and beams : theoretical formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 192(1) : 281–305, 1996.

[Le Bot 1998]

A. Le Bot. A vibroacoustic model for high frequency analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 211(4) : 537–654, 1998.

[Leclère 2001]

J. M. Leclère. *Modélisation parallèle de la propagation d’ondes dans les structures par éléments finis adaptatifs*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2001.

[Lemoussu et al. 2002]

H. Lemoussu, P.-A. Boucard et P. Ladevèze. A 3-D shock computational strategy for real assembly and shock attenuator. *Advances in Engineering Software*, 33 : 517–526, 2002.

[Leung et Chan 1998]

A. Y. T. Leung et J. K. W. Chan. Fourier p-element for the analysis of beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*, 212(1) : 179–195, 1998.

[Lyon et Maidanik 1962]

R. H. Lyon et G. Maidanik. Power flow between linearly coupled oscillators. *JASA*, 35(5) : 623–639, 1962.

[Mace 1994]

B. R. Mace. On the statistical energy analysis hypothesis of coupling power proportionality and some implications of its failure. *Journal of Sound and Vibration*, 178(1) : 95–112, 1994.

[Mandel 1993]

J. Mandel. Balancing domain decomposition. *Communications in Applied Numerical Methods*, 9 : 233–241, 1993.

[Mansur et al. 2000]

W. J. Mansur, J. A. M. Carrer, W. G. Ferreira, A. M. Claret De Gouveia et F. Venancio-Filho. Time-segmented frequency-domain analysis for non-linear multi-degree-of-freedom structural systems. *Journal of Sound and Vibration*, 237(3) : 457–475, 2000.

[Maxit et Guyader 2001]

L. Maxit et J.-L. Guyader. Estimation of SEA coupling loss factors using a dual information and FEM modal information. Part I : theory. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5) : 907–930, 2001.

[McNeal 1971]

R. McNeal. A hybrid method of component mode synthesis. *Computers and Structures*, 1(43) : 581–601, 1971.

[Melenk et Babuška 1997a]

J. M. Melenk et I. Babuška. Approximation with harmonic and generalized harmonic polynomials in the partition of unity method. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 4 : 607–632, 1997.

[Melenk et Babuška 1997b]

J. M. Melenk et I. Babuška. The partition of unity finite element method : basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139 : 289–314, 1997.

[Mercier 1993]

F. Mercier. Prévisions moyennes fréquences à l'aide de modèles aux éléments finis. Rapport technique, CNES, RA/TE/AE/MTE/SM, 1993.

[Moës et al. 1999]

N. Moës, J. Dolbow et T. Belytschko. A finite element method for crack growth

without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1) : 131–150, 1999.

[Monk et Wang 1999]

P. Monk et D. Q. Wang. A least-squares method for the Helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 175 : 121–136, 1999.

[Morand 1992]

J.-P. H. Morand. A modal hybridization method for the reduction of dynamic models. Dans P. Ladevèze et O. C. Zienkiewicz, éditeurs, *New Advances in Computational Structural Mechanics*, pages 347–365. Elsevier, 1992.

[Nefske et Sung 1989]

D. J. Nefske et S. H. Sung. Power flow finite element analysis of dynamic systems : basic theory and application to beams. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 111 : 94–100, 1989.

[Oberai et Pinski 1998]

A. A. Oberai et P. M. Pinski. A multiscale finite element method for the Helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 154 : 281–297, 1998.

[Ohayon 1989]

R. Ohayon. Local and global effects in the vibration of structures. A review synthesis. Dans *ESTEC : ESA Workshop proceedings on Modal Representation of Flexible Structures by Continuum Methods*, pages 29–54, Noordwijk, Pays-Bas, 1989.

[Ohayon et Soize 1998]

R. Ohayon et C. Soize. *Structural acoustics and vibrations*. Academic Press, 1998.

[Pluymers et al. 2002]

B. Pluymers, W. Desmet, D. Vandepitte et P. Sas. Application of the wave based prediction technique for the analysis of the coupled vibro-acoustic behaviour of a 3D cavity. Dans *International Conference on Noise and Vibration Engineering*, Belgique, 2002. ISMA.

[Qin 2000]

Q. H. Qin. *The Trefftz Finite and Boundary Element*. Method WIT Press, Southampton, 2000.

[Rethoré et al. 2005]

J. Rethoré, A. Gravouil et A. Combescure. An energy-conserving scheme for

dynamic crack growth using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63 : 631–659, 2005.

[Riou et al. 2004]

H. Riou, P. Ladevèze et P. Rouch. Extension of the variational theory of complex rays to shells for medium-frequency vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 272 : 341–360, 2004.

[Rixen et Farhat 1999]

D. Rixen et C. Farhat. A simple and efficient extension of a class of sub-structure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44 : 489–516, 1999.

[Rouch et Ladevèze 2003]

P. Rouch et P. Ladevèze. The variational theory of complex rays : a predictive tool for medium-frequency vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 : 3301–3315, 2003.

[Roux 1990]

F.-X. Roux. Methodes de résolution par sous-domaine en statique. *La Recherche Aéronautique*, 1 : 37–48, 1990.

[Sandberg et al. 2001]

G. E. Sandberg, P. A. Hansson et M. Gustavsson. Domain decomposition in acoustic and structure-acoustic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(24-25) : 2979–2988, 2001.

[Sen Gupta et al. 2005]

J. Sen Gupta, O. Allix, P.-A. Boucard, A. Fanget et P. Hereil. Fracture prediction of a 3D C/C material under impact. *Composites Science and Technology*, 65(1) : 375–386, 2005.

[Sestieri et Carcaterra 2001]

A. Sestieri et A. Carcaterra. On the spurious solution in complex envelope displacement analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 240(2) : 293–302, 2001.

[Skudrzyk 1980]

E. J. Skudrzyk. The mean-value method of predicting the dynamic response of complex vibrators. *Journal of the Acoustical Society of America*, 67(5) : 1105–1135, 1980.

[Soize 1986]

C. Soize. Probabilistic structural modeling in linear dynamic analysis of complex mechanical systems. *La Recherche Aéronautique*, 5 : 65–87, 1986.

[Soize 1998]

C. Soize. Reduced models in the medium frequency range for general dissipative structural-dynamics systems. *European Journal of Mechanics, A/Solids* 17(4) : 657–685, 1998.

[Sourcis 2005]

B. Sourcis. La TVRC et l'intégration des effets de membrane dans les plaques. Mémoire de Master II Recherche, École Normale Supérieure de Cachan, 2005.

[Stojek 1998]

M. Stojek. Least squares Trefftz-type elements for the Helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41 : 831–849, 1998.

[Strouboulis et al. 2001]

T. Strouboulis, K. Copps et I. Babuška. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 : 4081–4193, 2001.

[Suleau et al. 2000]

S. Suleau, A. Deraemaeker et P. Bouillard. Dispersion and pollution of meshless solutions for the Helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(5-7) : 639–657, 2000.

[Tezaur et al. 2001]

R. Tezaur, A. Macedo et C. Farhat. Iterative solution of large-scale acoustic scattering problems with multiple right hand-sides by a domain decomposition method with Lagrange multipliers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51 : 1175–1193, 2001.

[Tie et al. 2003]

B. Tie, D. Aubry et A. Bouillard. Adaptive computation for elastic wave propagation in plate/shell structures under moving loads. *Revue européenne des éléments finis*, 12(6) : 717–736, 2003.

[Trochet et al. 1995]

B. Trochet, N. Mathiot, M. O. Schott et P. Rivière. Prediction of structure-borne noise in launch vehicles and aircrafts. Dans *EURO-NOISE 95*, Lyon, 1995.

[Veletsos et Kumar 1983]

A. S. Veletsos et A. Kumar. Steady-state and transient responses of linear structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 109(5) : 1215–1230, 1983.

[Veletsos et Ventura 1984]

A. S. Veletsos et C. E. Ventura. Efficient analysis of dynamic response of linear systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 127 : 521–536, 1984.

[West et al. 1997]

L. J. West, N. S. Bardell, J. M. Dundon et P. M. Loasby. Some limitations associated with the use of k-orthogonal polynomials in hierarchical version of the finite element formulation. Dans *Local effects in the analysis of structures, 6th International conference on recent advances in structural dynamics*, Southampton, Angleterre, 1997.

[Wohlever et Bernhard 1992]

J. C. Wohlever et R. J. Bernhard. Mechanical energy flow models of rods and beams. *Journal of Sound and Vibration*, 153(1) : 1–19, 1992.

[Zienkiewics et Zhu 1987]

O. C. Zienkiewics et J. Z. Zhu. A simple error estimator and adaptative procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24 : 337–357, 1987.

[Zienkiewicz et Taylor 1984]

O. Zienkiewicz et R. Taylor. *The finite element method*. McGraw-Hill, London, 4th édition, 1984.

[Zienkiewicz et Taylor 2000]

O. Zienkiewicz et R. Taylor. *The finite element method*. Butterworth-Heinemann, 5th édition, 2000.