N° d'ordre : 7958

UNIVERSITE DE PARIS–SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THESE

présentée
pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris XI - ORSAY

Spécialité : *Physique Théorique*

par

JONATHAN ROCHER

Sujet :

Contraintes cosmologiques sur la physique de l'univers primordial

Soutenue le 19 septembre 2005 devant la Commission d'examen :

M.	Francis BERNARDEAU	Rapporteur
M.	Pierre BINETRUY	Rapporteur
M.	François R. BOUCHET	Co-Directeur
M.	Ulrich ELLWANGER	Président
M.	Patrick PETER	Directeur
Mme.	Mairi SAKELLARIADOU	Examinatrice

Remerciements

Mes premiers remerciements vont naturellement à Patrick Peter pour avoir dirigé ma thèse, pour ses conseils constants et avisés, pour son soutien permanent et son intérêt dans mon travail pendant ces trois ans. Je voudrais aussi remercier François Bouchet pour m'avoir fait confiance, pour avoir guidé une part de ce travail avec beaucoup de compétences, et pour sa patience. J'ai appris beaucoup à leur contact et notamment ce qu'est le métier de chercheur et pour cela je leur en suis extrêmement reconnaissant. J'ai aussi eu la chance de travailler sur des sujets qui m'ont passionné, et de jouir d'une grande liberté de travail et d'organisation.

Je suis très reconnaissant à Pierre Binétruy, Francis Bernardeau et Ulrich Ellwanger pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse, et ainsi avoir contribué à améliorer cette thèse et en valider la qualité scientifique.

Je veux aussi remercier chaleureusement ma principale collaboratrice Mairi Sakellariadou auprès de qui j'ai appris beaucoup, pour son amitié et sa confiance, ses encouragements constants, son enthousiasme. J'ai aussi eu la chance de travailler avec Rachel Jeannerot, Karim Benabed, et Simon Prunet avec qui le contact a été très formateur.

Je remercie aussi les gens avec qui j'ai interagi par de nombreuses discussions et grâce à qui j'ai appris énormément : en premier lieu Jérôme Martin, mais aussi Philippe Brax, Gilles Esposito-Farèse, Julien Lesgourgues, Ulrich Ellwanger, Martin Lemoine, Jean-Philippe Uzan, Christophe Ringeval, Cédric Deffayet, David Langlois, Günter Sigl, Benoît Revenu, Elisabeth Vangioni. Je voudrais remercier les deux directeurs de l'IAP que j'ai connu, Bernard Fort et Laurent Vigroux car ils ont créé à l'IAP un espace qui concentre une très grande quantité de compétences : c'est une vraie chance de pouvoir faire sa thèse dans ces conditions.

Outside France, I have interacted with Goran Senjanovic, Tom Kibble, Ana Achucarro, Tanmay Vachaspati, Dominik Schwarz, Andreï Linde, Jon Urestilla, Laura Covi, Robert Brandenberger and I would like to thank them for very fruitfull discussions.

Enfin je voudrais remercier tous les étudiants avec qui j'ai eu de nombreuses discussions qui m'ont beaucoup éclairé : Nicolas Chatillon, Carlo Schimd, Tristan Brunier, Marcello Musso, Laurence Perotto, Bruno Marcos, Guillaume Michel, Delphine Marcillac, François Limousin.

Il y a aussi un certain nombre de personnes qui ont fait les frais de mon niveau en informatique initialement très bas et qui m'ont malgré tout permis de survivre : Christophe Ringeval, Karim Benabed, Stéphane Colombi, François Legrand, Frédéric Magnard et Vianney Lebouteiller. Je voudrais aussi remercier Christophe en sa qualité de fournisseur officiel d'images, figures et animations en tout genre utilisées dans cette thèse comme pendant certaines de mes présentations. Merci aussi à Patrick et Jérôme pour certaines des images de cette thèse.

On garde toujours en mémoire les gens qui nous ont donné le goût pour la recherche, et je veux remercier Hubert Reeves et Jean Audouze pour leurs talents de vulgarisateurs. Plus tard, Achille Stocchi, Corinne Augier, et Stéphane Brillant ont guidé mes premiers pas dans ce monde aussi magique qu'inquiétant ou m'ont aidé à trouver ma voie et à y entrer. Merci à eux. Il en est de même de Yves Charon et Pierre Binétruy en temps que responsables de mon école doctorale pour le soutien qu'ils ont montré et la qualité de leurs conseils.

Il me faut remercier mes amis (de prépas, de DEA et les autres) dont la bonne humeur m'a permis de passer d'excellents moments pendant la thèse malgré les difficultés de ces trois années. Parmi eux, il y a ceux qui ont eu le malheur de devoir partager mon bureau et qui ont donc subit mes questions intempestives, mes réactions a chaud, mes discussions passionnantes, mes moments lyriques ou stressés, bref tout ce qui crée de forts liens : Claudia Isola, Carlo Schimd, Rodney Guimarães, Samaya Nissanke, Jean-philippe Bruneton, Esther Rodriguez.

Je voudrais aussi remercier les gens qui m'ont aidé à faire de ce manuscrit quelque chose de présentable, en le relisant et par leur conseils avisés. En particulier, un grand merci (encore) à Patrick, François, Carlo, Mairi et Karim. Je remercie par avance ceux qui le liront de me pardonner pour les erreurs et typographies qui seront inévitablement restées.

Enfin je veux remercier toute ma famille, dont le soutien et l'intérêt a toujours été sans faille, et notamment mes parents et mes frères. Une pensée toute spéciale aussi pour mes grand-parents que je sais si fiers et que je remercie pour leur soutien, leur intérêt et leur curiosité.

Je terminerai par un grand merci à Delphine pour partager ma vie, supporter mes défauts (topologiques comme personnels !), pour m'avoir encouragé et soutenu pendant cette thèse et surtout pour les trop rares bons moments que nos thèses nous ont permis de partager ensemble. C'est bien là l'essentiel.

A mes parents.

A Delphine.

Résumé

Cette thèse présente plusieurs aspects de l'interaction entre la physique des hautes énergies et la cosmologie. Elle étudie en détail les prédictions d'une classe de théories de physique des particules au-delà du Modèle Standard concernant la formation des défauts topologiques (cordes cosmiques en particulier). Ce cadre de travail permet aussi de définir des modèles d'inflation bien motivés qui sont eux aussi étudiés. Dans le cadre des théories de Grande Unification supersymétrique, on construit une classe de modèles en accord avec la phénoménologie de la physique des particules et les observations de la cosmologie. Ces modèles doivent en particulier être en accord avec les mesures sur la durée de vie du proton, doivent expliquer les oscillations des neutrinos, et l'asymétrie matière/antimatière. Une phase d'inflation hybride doit, par ailleurs, permettre de résoudre les problèmes de la cosmologie. Dans ce cadre motivé, la généricité de la formation des cordes cosmiques est démontrée. Ces cordes sont stables et génériquement formées à la fin de la dernière phase d'inflation. Cela montre qu'elles sont très massives et ont un rôle potentiellement important dans la génération des fluctuations de température du fond diffus cosmologique. Comme les observations cosmologiques indiquent une rôle faible voire négligeable, cela contraint fortement les modèles théoriques.

Une étude de la contribution relative de ces cordes cosmiques aux anisotropies de température pour les deux modèles standards d'inflation hybride supersymétrique permet de montrer qu'ils sont tous deux en accord avec les observations, contrairement à ce que l'on pensait. Les contraintes fortes sur la contribution admissible des cordes aux CMB se traduisent alors en contraintes fortes sur tous les paramètres des modèles inflationnaires : constantes de couplage et échelle d'énergie de l'inflation. A la lumière de ces nouvelles contraintes, il devient possible de s'exprimer quant à l'aspect naturel de ces théories. On montre ainsi qu'ils souffrent de la nécessité d'ajuster finement leurs constantes de couplage : ceci est définitivement reconnu comme non naturel.

La contrainte sur la phase inflationnaire est aussi étudiée du point de vue de l'extraction de ses paramètres à partir des données d'expériences futures d'observation de la polarisation du CMB. Des outils statistiques permettant de mesurer les paramètres cosmologiques et d'estimer l'erreur sur ces estimations sont numériquement implémentés. L'effet de lentille gravitationnelle sur ces outils est ensuite étudié analytiquement et numériquement. Cela permet de valider l'approximation usuelle qui consiste à négliger l'effet de lentille sur la non gaussianité des données du CMB, à travers leur fonction de corrélation à quatre points.

Mots-clés : Défauts topologiques, Théories de Grande Unification supersymétriques, Inflation hybride, Contraintes cosmologiques sur les paramètres inflationnaires, Fond diffus cosmologique et effet de lentille gravitationnelle.

Abstract

This PhD thesis presents several aspects of the interplay between high energy physics and cosmology. We study in details the predictions of a class of theories of particle physics beyond the Standard Model concerning the formation of topological defects (and more especially cosmic strings). Within supersymmetric Grand Unified Theories (GUT), we define a class of models that take into account phenomenological constraints from particle physics and cosmology. These models have to be in agreement with proton decay measurements, and have to explain the neutrinos oscillation and the matter/antimatter asymmetry. A phase of hybrid inflation is well motivated in this framework and is also necessary to solve several major problems of the standard model of cosmology. In this framework, the genericity of cosmic string formation is shown. These strings are stable and generically form during the symmetry breaking that ends the (last) hybrid inflationary phase. Therefore, their mass is of the GUT scale, and they can have an important cosmological role. As experimental data show a weak or even negligible role, we can constrain strongly theoretical models.

We have analysed the prediction of string contribution to the Cosmic Microwave Background (CMB) for the two standard models of supersymmetric hybrid inflation. We have shown that they are both in agreement with CMB data, contrary to what was previously thought. The strong limit on the allowed cosmic strings contribution can be translated into constraints on all parameters of the inflationary models : couplings constants, energy scales of inflation. These constraints show that both models suffer from the fine tuning of their superpotential coupling constant, and this tends to reduce the naturalness and the attractivity of these models.

Constraining inflationary physics can also be done through the extraction of parameters from futur CMB experiments measuring polarisation. Several statistical tools exist to estimate cosmological parameters and the errors on these estimations. We have implemented one of these tools in a numerical code and studied analytically and numerically the effect of weak lensing on such analysis. It allows us to validate the usual approximation consisting on neglecting the weak lensing effect on the non-gaussianity (or the four point correlation function) of the CMB signal.

Key words : Topological defects, Supersymmetric Grand Unified Theories, Hybrid inflation, Cosmological constraints on inflationary parameters, Cosmic microwave background and weak lensing effect.

Table des matières

II. Grande Unification supersymétrique

III. Fond diffus cosmologique

Annexe

Listes

Bibliographie

"*Before I came here I was confused about this subject.*
Having listened to your lecture I am still confused.
But on a higher level."
Enrico Fermi

Introduction

Les résultats récents de la cosmologie observationnelle, au premier rang desquels ceux du satellite américain *WMAP*, ainsi que les observations à venir notamment avec le satellite *Planck*, atteignent des précisions qui permettent d'espérer pouvoir poser des contraintes fortes sur la physique de l'univers primordial et plus généralement sur la physique des hautes énergies. Inversement, la physique des hautes énergies doit être utilisée pour prédire les mécanismes susceptibles de se réaliser durant les phases primordiales de l'histoire de l'univers. Les travaux présentés dans cette thèse illustrent deux aspects de cette interaction afin de contraindre les théories de la Grande Unification ainsi que les théories inflationnaires en utilisant les données cosmologiques venant du fond diffus cosmologique (CMB) et de la formation des défauts topologiques en général et les cordes cosmiques en particulier.

L'univers à grande échelle et pour des moments postérieurs à la nucléosynthèse primordiale, est très bien décrit par le modèle standard de la cosmologie. Pour décrire l'univers à plus haute énergie et jusqu'à la centaine de GeV, on peut sans problème utiliser le Modèle Standard (MS) de la physique des particules puisque c'est une des théories physiques testées avec la plus grande précision en accélérateur. Il est basé sur un groupe de symétrie élargi par rapport aux symétries de l'univers actuel et sur la brisure spontanée de ces symétries par la dynamique d'un champ de Higgs. A plus haute énergie, ce Modèle Standard souffre cependant de plusieurs problèmes et ne donne vraisemblablement plus une description suffisante de la nature. La récente détection de l'oscillation des neutrinos est la première indication qu'il est nécessaire de le plonger dans une théorie nouvelle puisque le MS ne prévoit pas de masse (nécessaire pour expliquer les oscillations) pour le neutrino.

Le cadre de la Grande Unification supersymétrique est une des extensions les plus motivées de ce MS à ce jour. En effet, l'évolution des constantes de couplage des groupes de symétrie du MS suggère que ces groupes soient plongés dans un groupe de plus grande taille $G_{\rm GUT}$ de telle sorte que les trois interactions microscopiques (faible, forte et électromagnétique) soient unifiées à haute énergie (de l'ordre de $M_{\rm GUT} \simeq 10^{16}$ GeV). Ces énergies ne sont pas accessibles en accélérateur, du moins avec les technologies actuelles et les travaux présentés ici illustrent comment utiliser la cosmologie afin de contraindre ces théories. Une première conséquence phénoménologique majeure de ces théories est l'introduction de nouvelles interactions qui violent le nombre baryonique et qui rendent donc les baryons et notamment le proton instable. Cependant, ces interactions sont transportées par des bosons ayant des masses de l'ordre de $M_{\rm GUT}$ ce qui peut les rendre suffisamment peu fréquentes pour être en accord avec les mesures sur la durée de vie du proton.

Les théories de Grande Unification prédisent que l'univers a connu une série de brisures de symétrie afin que l'univers passe d'un état invariant sous $G_{\rm GUT}$ à un état invariant sous les symétries du MS. Ces brisures de symétrie sont accompagnées de transitions de phase lors desquelles, d'après le mécanisme de Kibble, des défauts topologiques se forment génériquement. Ces sont des régions de l'espace dans laquelle est concentrée une très grande densité d'énergie. Leur nature, c'est-à-dire leur dimension spatiale dépend de la topologie de l'ensemble des vides accessibles au champ de Higgs. Ces défauts sont stables et s'ils ne sont pas dilués par un mécanisme, ils ont des effets observables sur la cosmologie. Les défauts ponctuels, et surfaciques (respectivement appelés monopôles et murs de domaine) sont tellement massifs qu'ils en viendraient à dominé rapidement la dynamique de l'univers en désaccord avec les observations. Les défauts topologiques linéaires, les *cordes cosmiques*, sont compatibles avec la cosmologie et génèrent des fluctuations de température dans le CMB. Les monopôles étant inévitables dans le cadre de la Grande Unification, un mécanisme d'expansion accélérée de l'univers, *l'inflation*, a été proposé pour les diluer et éviter une catastrophe cosmologique et résoudre plusieurs autres problèmes du modèle standard de la cosmologie. Du statut d'hypothèse, l'inflation est devenue un paradigme lorsque les anisotropies de température mesurées se sont révélées en parfait accord avec les prédictions de l'inflation, ce qui impose que l'effet des cordes cosmiques, si elles existent, sur ces anisotropies est sous-dominant. On peut, de ce fait, se demander s'il est théoriquement motivé de supposer leur existence et de continuer à les étudier.

La première contribution originale de cette thèse est d'étudier la généricité des cordes cosmiques dans le cadre de la Grande Unification [1]. Pour ce faire, nous définirons une classe de modèles en accord avec les contraintes phénoménologiques majeures de la cosmologie et de la physique des particules. Nous imposerons que ces modèles résolvent de manière standard le problème des monopôles, qu'ils expliquent l'asymétrie matière/antimatière de notre univers, et la masse des neutrinos, et enfin qu'ils soient en accord avec les mesures sur la durée de vie du proton. Nous considérerons un grand nombre de groupes de Grande Unification et étudierons la formation de défauts topologiques dans tous les schémas de brisure compatibles avec la phénoménologie. Nous quantifierons ainsi la probabilité d'avoir formation de cordes cosmiques après la dernière phase d'inflation.

Nous allons montrer que ces cordes cosmiques sont très génériques puisque, sous les hypothèses faites, elles se forment *toujours*. Nous montrerons que si l'on relaxe ces hypothèses, leur formation est encore très générique (dans au moins 80% des modèles) et qu'elle se produit génériquement à la fin d'une phase d'inflation hybride. Elles pourraient donc un rôle potentiellement important dans la génération des anisotropies de température du CMB en apparente contradiction avec les observations.

La deuxième contribution de cette thèse est motivée par ce résultat et présente une étude des contributions relatives de l'inflation et des cordes cosmiques pour les deux classes d'*inflation hybride supersymétrique* standards : l'inflation par terme F et l'inflation par terme D. Les contraintes existantes sur l'inflation par terme F venaient des gravitinos, dont la surproduction serait en désaccord avec la phase de nucléosynthèse primordiale mais ces contraintes sont faibles. Plusieurs études récentes des données WMAP contraignent la contribution des cordes cosmiques à être plus petite que $10-15\%$. Cela nous permet de contraindre fortement l'espace des paramètres pour les deux modèles d'inflation, et notamment les constantes de couplage et les échelles d'énergie. On peut ainsi statuer sur leur compatibilité avec les données observationnelles et sur la naturalité de ces deux modèles [2, 3]. Nous montrerons que l'inflation par terme D est toujours un modèle compatible avec les observations contrairement à ce que l'on pensait et que les deux modèles nécessitent cependant un réglage fin de leur constante de couplage, ce qui atténue un peu leur attractivité. Il a récemment été proposé pour éviter les problèmes de naturalité dans les modèles inflationnaires de découpler la dynamique de l'expansion et la génération des fluctuations primordiales par l'introduction d'un second champ scalaire, le *curvaton*, différent de l'inflaton afin de générer les anisotropies de température. Nous allons donc étudier cette possibilité et montrer que dans ce cas, le problème de naturalité disparait.

Dans la dernière partie de cette thèse, une approche différente sera utilisée pour contraindre la phase inflationnaire grâce aux futures expériences de détection du signal polarisé dans le CMB. En effet, une partie des photons du CMB se polarisent par diffusion Thomson sur les électrons et suivant les propriétés de parité du signal, on définit un signal polarisé E ou B. L'énergie à laquelle s'est produite l'inflation est aujourd'hui totalement inconnue mais peut être déterminée, dans les modèles les plus simples, par la mesure de l'amplitude des modes de perturbation tensoriels c'est-à-dire dus aux perturbations tensorielles de la métrique. Ces modes sont sous-dominants par rapport aux modes scalaires et donc indétectables hormis dans le signal polarisé B où ils sont l'unique contribution. Leur détection est donc primordiale pour savoir à quelle énergie s'est produite l'inflation mais aussi si une phase d'inflation a bien eu lieu ou encore pour savoir si un ou plusieurs champs y ont contribué. Grace à la détection de ce signal, il sera possible d'en extraire la valeur des différents paramètres cosmologiques et inflationnaires. La première étape est de mesurer le rapport des amplitudes entre les contributions tensorielles et scalaire, ce qui est directement relié à l'énergie à laquelle s'est produite l'inflation.

Plusieurs outils statistiques existent pour étudier la détectabilité d'un paramètre cosmologique. La méthode de Fisher est une méthode légère et rapide qui permet de relier les limitations instrumentales d'une expérience mesurant les anisotropies du CMB aux contraintes que l'on peut mettre notamment sur les paramètres inflationnaires du modèle cosmologique choisi. Cette méthode repose sur le calcul de la matrice de covariance de l'information disponible c'est à dire dans le cas présent la covariance des spectres de puissance du CMB polarisés ou non. Cette matrice de covariance est proportionnelle au moment à quatre points des champs d'anisotropie du CMB. Or ce rayonnement subit, d'après la relativité générale, une déviation de la trajectoire des photons par les potentiels gravitationnels des grandes structures de notre univers (galaxies, amas de galaxies) : on parle d'*effet de lentille faible*. Il a pour conséquence de générer de nouveaux modes B qui viennent s'ajouter au signal primordial : ils sont même dominants à petites échelles.

La seconde conséquence de cet effet de lentille est de rendre la distribution des anisotropies de température non gaussienne et donc d'introduire de nouvelles contributions à la fonction de corrélation à quatre points. La dernière partie de cette thèse est le calcul de ces nouvelles contributions et l'étude des conséquences sur la détectabilité du signal primordial et des paramètres inflationnaires. Ce travail fait l'objet d'une publication en préparation [4].

Cette thèse est organisée de la manière suivante. La première partie présentera les modèles standards de la cosmologie et de la physique des particules (chapitre 1 et 2). Leurs limitations seront mises en avant en fin de chapitres, ce qui motive le cadre de travail ultérieur. Le chapitre 3 étudiera en détail le mécanisme de brisure de symétrie par le mécanisme de Higgs et le lien entre brisure de symétrie et représentation du champ de Higgs. Il présentera ensuite les outils mathématiques nécessaires à une analyse systématique de la formation des défauts topologiques lors de ces brisures de symétrie et passera en revue les conséquences cosmologiques des différentes classes de défauts (topologiques et non topologiques). L'inflation est devenue une extension standard du modèle cosmologique et est donc présentée dans cette partie. Le chapitre 4 traite de la dynamique de l'inflation, de la résolution des différents problèmes de la cosmologie et abordera la génération des fluctuations primordiales dans ces modèles.

La seconde partie est dédiée au cadre de travail principal de la thèse à savoir la Grande Unification supersymétrique. La chapitre 5 en fera une présentation générale et completera les notions du chapitre 3 à la construction de schémas de brisures successives. Le chapitre 6 listera lui les contraintes phénoménologiques majeures à imposer à ces modèles et présentera les mécanismes standards permettant d'en rendre compte. On construira de cette manière une classe de modèles phénoménologiquement viables dans lesquels la formation des défauts topologiques sera étudiée au chapitre 7. Ce chapitre concluera sur la généricité des cordes cosmiques et motivera l'analyse du chapitre 8 sur les contraintes sur les modèles d'inflation hybride supersymétrique.

Enfin, la troisième partie présentera l'extraction de paramètres inflationnaires du fond diffus cosmologique grâce à la méthode de Fisher. L'effet de lentille gravitationnelle par les grandes structures sur le signal est toujours négligé sur cette extraction ; on présentera et quantifiera cet effet dans le chapitre 9.

Les notations et les conventions utilisées sont présentées dans un chapitre préliminaire. On y trouvera aussi quelques valeurs numériques utiles. En fin de thèse, dans une annexe A consacrée aux groupes de Lie, sont rassemblées un certain nombre d'informations utiles pour la construction de schémas de brisure de symétrie pour la Grande Unification. On trouvera notamment les sous-groupes maximaux de groupes de Lie candidat à être des groupes de Grande unification, des décompositions de certaines représentation du groupe $SU(5)$ et les générateurs de certains groupes étudiés dans cette thèse.

Notations, Conventions et Valeurs numériques utiles

Voici ici quelques précisions à propos des notations et conventions utilisées dans cette thèse. En troisième partie, il est rappelé quelques valeurs numériques pour les grandeurs usuelles utilisées.

0.1 Notations

Les grandeurs mathématiques en gras sont des vecteurs tandis que leur norme est notée en caractère normal, ie $x = |\boldsymbol{x}|$.

Les grandeurs évoluant au cours du temps qui sont indicées par 0 sont évaluées aujourd'hui, ie $H_0 = H(t_0)$.

On définit les opérateurs $\boldsymbol{\nabla} \equiv \partial/\partial x^i$, $i = 1, 2, 3$ et $\Box \equiv \partial^\mu \partial_\mu$.

Dans une expression c.c. désigne le complexe conjugué de ce qui précède. c.c. désigne le hermitique conjugué.

Si M désigne une matrice ou un vecteur, M^* désigne son conjugué complexe, et ${}^tM$ son transposé. Si on considère un spineur à quatre composantes ψ, alors $\psi^\dagger \equiv {}^t\psi^*$ et $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$.

Enfin, on désignera par I_n la matrice identité de taille n.

0.2 Conventions

Concernant les unités, nous travaillerons dans la convention des unités “naturelles” où la vitesse de la lumière, la constante de Planck et la constante de Boltzmann sont posées à 1,

$$c = \hbar = k_\mathrm{B} = 1 \ .$$

Pour les applications numériques, un raisonnement aux dimensions permet de ré-introduire ces constantes.

On choisit comme convention pour les métriques la signature $(-1, 1, 1, 1)$. La métrique de Minkowski décrivant un espace temps plat et statique $\eta_{\mu\nu}$ s'écrit donc

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{0.2.1}$$

Nous adopterons les conventions d'Einstein sur les indices covariants qui veut que tout indice répété dans une expression soit implicitement sommé. Par exemple le produit scalaire de deux 4-vecteurs x^i, et y^j s'écrit $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_i x^i y^i = \delta_{ij}\, x^i\, y^i \equiv x^i x_i$.

Il y a plusieurs conventions pour la dimension du facteur d'échelle $a(t)$ (voir chapitre 1) ce qui a une conséquence sur la définition des grandeurs comobiles comme sur la valeur de a_0. Nous choisirons la convention selon laquelle $a(t)$ possède la dimension d'une longueur. Il en résulte que le paramètre k qui décrit la courbure de l'univers peut être redéfini pour prendre les valeurs $0, \pm 1$ tandis que les coordonées χ ou r ne sont pas dimensionnés. Dans la deuxième convention possible, $a(t)$ n'est pas dimensionné, on peut normaliser sa valeur à 1 à un temps donné (souvent t_0) et les coordonnées comobiles r ou χ ont la dimension d'une longueur ce qui implique que le paramètre k a la dimension de l'inverse d'une longueur au carré.

Pour les transformées de Fourier, la convention utilisée est, pour un espace à n dimensions,

$$F(\mathbf{k}) = \mathcal{F}_{[f]} = \int f(\mathbf{x}) \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}]\, \mathrm{d}^n\mathbf{x} \ , \tag{0.2.2}$$

pour la transformée de fourier directe, tandis que la transformée de Fourier inverse est donnée par

$$f(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}_{[F]} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int F(\mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}]\, \mathrm{d}^n\mathbf{k} \ . \tag{0.2.3}$$

Dans cette convention, on peut montrer que

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})]\, \mathrm{d}^n\mathbf{k} \ , \tag{0.2.4}$$

puis

$$\mathcal{F}_{[f \cdot g]} = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}_{[f]} * \mathcal{F}_{[g]} \ , \tag{0.2.5}$$

où $*$ est le produit de convolution. Concernant la transformée de la dérivée, on vérifie que

$$\mathcal{F}_{[f']} = i\mathbf{k}\mathcal{F}_{[f]} \ . \tag{0.2.6}$$

0.2.1 Matrices γ de Dirac

Les matrices de Dirac $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^i)$, avec $i = 1, 2, 3$, sont définies par leur anticommutateur

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = -2g^{\mu\nu} I_4 \ , \tag{0.2.7}$$

où $g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique de l'espace-temps dans lequel les champs évoluent. Notons que le signe $-$ vient du choix de la convention pour la signature de la métrique. On définit aussi une cinquième matrice

$$\gamma^5 \equiv i\, \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \ . \tag{0.2.8}$$

de telle sorte que $(\gamma^5)^2 = I_4$ et $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$. Pour descendre les indices, il faut utiliser le tenseur métrique de la théorie, $\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$, ce qui signifie que le choix de signature fait précédemment affecte la forme des matrices γ avec l'indice en bas uniquement.

Deux représentations permettent d'expliciter les matrices γ, dans un espace-temps à 4 dimension décrit par la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Dans la représentation *de Dirac*, on a

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{0.2.9}$$

Dans la représentation dite *de Weyl*, ou encore *chirale*,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}. \tag{0.2.10}$$

Les matrices de Pauli σ^i sont données en annexe A.

0.3 Valeurs numériques

Les distances astrophysiques se mesure en parsec (pc) avec 1 $pc = 3.01 \times 10^{16}\ m$. Un an correspond à 3.15×10^7 secondes.

Les mesures expérimentales et observationnelles sont données avec des marges d'erreur. Ces marges d'erreur sont données avec une probabilité, ou un degré de confiance, ce qui représente la probabilité que la mesure soit contenue dans cette marge d'erreur. Ces probabilités s'expriment en terme de pourcentage ou en terme de l'écart-type σ de la distribution de probabilité. Une erreur a 1 σ signifie que pour un grand nombre de répétition de la mesure, les résultats se trouvent, 68.3% du temps à moins d'un écart-type de la valeur moyenne : le degré de confiance est de 68.3%. Des erreurs à 2 σ et à 3 σ correspondent respectivement à un degré de confiance de 95.4% et 99.7%.

Quelques valeurs numériques et conversions utiles.

Constante	symbole	valeur
Constante de Hubble	H_0	$\simeq 72$ km.s$^{-1}/Mpc$
Constante de Hubble réduite	h	$\simeq 0.72$
Densité critique aujourd'hui	$\rho_{\rm crit}$	$1.88\, h^2 \times 10^{-29}$ g.cm^{-3}
		$8.10\, h^2 \times 10^{-47}$ (GeV)^4.
Vitesse de la lumière	c	2.998×10^8 m.s^{-1}
Constante de Boltzman	$k_{\rm B}$	1.38×10^{-23} J.K^{-1}
Constante de Planck réduite	$\hbar$	1.05×10^{-34} J.s
Charge de l'électron	$-e$	-1.60×10^{-19} C

Constante	symbole	valeur (SI)
Masse de Planck	$m_{\rm Pl}$	1.22×10^{19} GeV
Masse de Planck réduite	$M_{\rm Pl}$	2.43×10^{18} GeV
Constante de Fermi	$G_{\rm F}$	1.17×10^{-5} GeV^{-2}

Nature	Unité naturelle	Unité SI
Energie	1 GeV	1.60×10^{-10} J
Température	1 GeV	1.16×10^{13} K
Masse	1 GeV	1.78×10^{-27} Kg
Longeur	1 GeV^{-1}	1.97×10^{-16} m
Temps	1 GeV^{-1}	6.65×10^{-25} s

Nature	symbole	Unité SI
Masse de Planck	m_{Pl}	2.17×10^{-8} kg
Longueur de Planck	l_{Pl}	1.62×10^{-35} m
Temps de Planck	t_{Pl}	5.39×10^{-44} s

Première partie

L'univers primordial

Chapitre 1
Le modèle standard de cosmologie

Sommaire

1.1 Introduction

L'objet de cette thèse concernant la physique de l'univers primordial, il est nécessaire d'introduire le cadre théorique dans lequel nous allons travailler. Ce chapitre nous permettra d'introduire certaines notions très générales correspondant au modèle standard de la cosmologie afin d'en introduire le cadre et les concepts de base. Pour plus de détails et plus de références sur toutes les notions abordées ici, nous renvoyons le lecteur aux livres et revues standards notamment pour la relativité générale [5], pour la cosmologie [6, 7, 8], ou pour la physique des particules [21, 22].

1.2 Décrire un Univers homogène isotrope

1.2.1 Quelques rappels de relativité générale

Pour décrire l'univers dans son ensemble, il est nécessaire de se placer dans le cadre de la relativité générale d'Einstein. Celle-ci permet de décrire les trajectoires des particules dans un univers courbe. La distance $\mathrm{d}s$ entre deux points de l'espace-temps s'exprime alors en fonction de la métrique $g_{\mu\nu}$ et du système de coordonnées x^μ, $\mu = 0, ..., 3$ par

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \ . \tag{1.2.1}$$

L'exemple le plus simple est celui d'une métrique de Minkowski décrivant un espace plat et statique[1] $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$. Les événements de l'espace temps sont donc repérés par la donnée de ses quatre coordonnées d'espace-temps x^μ. Dans cet espace temps, on peut définir une dérivée covariante par D_λ dont l'action sur un tenseur à un indice covariant et un indice contravariant $T^\mu{}_\nu$ s'écrit

$$D_\lambda T^\mu{}_\nu = \partial_\lambda T^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} T^\sigma{}_\nu - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} T^\mu{}_\sigma \ , \tag{1.2.2}$$

où les Γ sont les symboles de Christoffel définis à partir du tenseur métrique par

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right) \ . \tag{1.2.3}$$

L'information sur la courbure de l'espace-temps est totalement contenue dans le tenseur de Riemann qui se définit à partir de ces symboles de Christoffel

$$R_{\lambda\mu\nu}{}^\rho = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \partial_\lambda \Gamma^\rho_{\mu\nu} + \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\lambda} \ . \tag{1.2.4}$$

On définit aussi le tenseur de Ricci comme une contraction du tenseur de Riemann

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}{}^\sigma \ , \tag{1.2.5}$$

et le scalaire de Ricci par la trace du tenseur de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu{}_\mu \ . \tag{1.2.6}$$

Une fois ces notions introduites, les équations d'Einstein relient la métrique de l'espace temps $g_{\mu\nu}$ au contenu matériel de l'univers

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = 8\pi G_\mathrm{N} T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \ , \tag{1.2.7}$$

où $T^{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion du contenu matériel de l'espace temps. Ces équations d'Einstein seront utilisées pour décrire dans la section qui suit l'évolution globale de l'univers. Dans la suite, nous noterons parfois

$$\kappa_\mathrm{N} \equiv 8\pi G_\mathrm{N} = 8\pi/m_\mathrm{Pl}^2 = 1/M_\mathrm{Pl}^2 \ , \tag{1.2.8}$$

où G_N est la constante de gravitation de Newton, $m_\mathrm{Pl} = 1.2 \times 10^{19}$ GeV est la masse de Planck et $M_\mathrm{Pl} = 2.4 \times 10^{18}$ GeV est la masse de Planck réduite.

Notons que l'on a introduit dans l'Eq. (1.2.7) une constante Λ appelée *constante cosmologique* qui est en toute généralité présente. Sa présence a longtemps fait l'objet de débat mais elle est aujourd'hui communément admise car pouvant rendre compte de l'accélération actuelle de l'univers, accélération récemment mise en évidence notamment par les observations de supernovae. Nous en reparlerons à la section 1.3.
Les 10 équations indépendantes (1.2.7) peuvent être vues comme issues d'un principe de moindre action à partir de l'action de Hilbert-Einstein[2]

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa_\mathrm{N}} \int \sqrt{-g}(R - 2\Lambda)\, \mathrm{d}^4 x + \int \sqrt{-g}\mathcal{L}_\mathrm{mat}\, \mathrm{d}^4 x \tag{1.2.9}$$

où g est le déterminant de la métrique $g^{\mu\nu}$. Le tenseur énergie-impulsion du contenu en énergie est défini par la variation du lagrangien de matière $\mathcal{L}_\mathrm{mat}$

$$T^{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\mathrm{mat})}{\delta g_{\mu\nu}} \ . \tag{1.2.10}$$

[1]Notons que nous venons d'illustrer le fait que nous utilisons la convention d'écriture des relativistes différente de celle des physiciens des particules pour qui il est d'usage de poser la signature $(+,-,-,-)$.

[2]Il est souvent utile de connaître la relation $\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$.

1.2.2 Dynamique de l'évolution de l'univers

Le modèle standard de la cosmologie part d'une hypothèse simplificatrice (il faut se demander par la suite si cette hypothèse est effectivement réalisée) que l'on appelle *Principe Cosmologique*. Celui-ci postule que **l'univers est homogène et isotrope** aux grandes échelles. Une conséquence directe de cette hypothèse est que l'on obtient la métrique de Friedmann - Lemaître - Robertson - Walker (FLRW), qui s'écrit en coordonnées sphériques,

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2 \left[\mathrm{d}\chi^2 + f_k(\chi)^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \,\mathrm{d}\phi^2\right)\right] \tag{1.2.11}$$

où

$$f_k(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & k = +1 \\ \chi & k = 0 \\ \sinh\chi & k = -1\ . \end{cases} \tag{1.2.12}$$

Dans cette métrique, t est le temps cosmique, et nous choisissons que $a(t)$ est un facteur ayant la dimension d'une longueur et χ est la distance radiale comobile, sans dimension. Cette métrique permet de décrire un univers fermé, plat ou ouvert suivant que l'on a respectivement $k = 1, 0, -1$. Une alternative standard pour la métrique de FLRW est de poser le changement de variable $r = f_k(\chi)$ et ainsi de pouvoir écrire

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2 \left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right)\right] \tag{1.2.13}$$

Nous utiliserons dans la suite principalement la forme (1.2.11) pour la métrique de RW.

On remarque que ces métriques sont de la forme $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2\mathrm{d}\boldsymbol{l}^{\,2}$ où l'élément de longueur $\mathrm{d}\boldsymbol{l}^{\,2}$, représentant la métrique des sections spatiales, est multipliée par un facteur $a(t)$ ne dépendant que du temps que l'on appelle *facteur d'échelle*. On voit donc que l'on est sur le point de décrire un univers qui peut être en expansion ou en contraction.

On peut introduire une grandeur qui nous servira ultérieurement qui est le *temps conforme* τ. Il est relié au temps cosmique t par $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t/a(t)$ et il permet notamment d'écrire cette métrique de RW sous la forme

$$\mathrm{d}s^2 = a(\tau)^2(-\mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}\boldsymbol{l}^{\,2}). \tag{1.2.14}$$

Les trajectoires vérifiant $\mathrm{d}s^2 = 0$ s'appellent *trajectoires de genre lumière* car empruntées uniquement par des particules de masse nulle. Toute particule massive voyageant plus lentement que la vitesse de la lumière emprunte une trajectoire de genre temps $\mathrm{d}s^2 < 0$. Une trajectoire de genre espace $\mathrm{d}s^2 > 0$ ne peut correspondre à un événement physique.

Dans l'hypothèse d'un univers homogène et isotrope et donc de métrique de RW, les équations d'Einstein prennent la forme simplifiée des *équations de Friedmann Lemaître Robertson Walker* (FLRW). Si l'on suppose que l'univers est rempli par un fluide parfait de densité d'énergie ρ et de pression P, le facteur d'échelle évolue selon

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 &= \frac{\kappa_{\mathrm{N}}}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}\ , \\ \left(\frac{\ddot a}{a}\right) &= -\frac{\kappa_{\mathrm{N}}}{2}\left(\frac{\rho}{3} + P\right) + \frac{\Lambda}{3}\ . \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

Ces équations permettent de connaître la dynamique du facteur d'échelle $a(t)$ ou du paramètre de Hubble, défini par $H(t) \equiv \dot a/a$ en fonction du contenu de l'univers. Intéressons nous maintenant à ce contenu.

1.2.3 Contenu de l'Univers

Le contenu le plus simple est un fluide parfait, décrit par 2 paramètres, sa densité d'énergie ρ et sa pression P. Dans ce cas, le tenseur énergie-impulsion prend la forme

$$T^{\mu}_{\nu} = diag(-\rho, P, P, P) \tag{1.2.16}$$

Sa conservation $D_\nu T^{\mu\nu} = 0$ s'écrit désormais

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \ , \tag{1.2.17}$$

équation équivalente à la seconde équation de FLRW Eq. (1.2.15). En utilisant cette propriété et en introduisant l'équation d'état du fluide $P = w\rho$, on peut connaître l'évolution de la densité d'énergie en fonction du facteur d'échelle

$$\rho(a) \propto a^{-3(1+w)} \ , \tag{1.2.18}$$

puis l'évolution du facteur d'échelle en fonction du temps[3]

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{2/3} & \text{pour } w = 0 \ , \\ t^{1/2} & \text{pour } w = 1/3 \ , \\ e^{Ht} & \text{pour } w = -1 \ \text{(avec } H = \text{cste) .} \end{cases} \tag{1.2.19}$$

Ces trois évolutions correspondent à une univers dominé respectivement par la matière non relativiste ($w = 0$), par la radiation ($w = 1/3$), ou par une constante cosmologique ($w = -1$) : on parle alors d'un univers de de Sitter.

Dans le cas où l'on écrit les équations de Friedmann en prenant en compte toutes les formes d'énergie, il est d'usage d'introduire la densité totale critique à une date t, $\rho_{\text{crit}} = 3H^2/\kappa_{\text{N}}$ au-delà de laquelle l'univers doit se refermer dans le futur. Cela permet de définir $\Omega_i \equiv \rho_i/\rho_{\text{crit}}$, $\Omega_\Lambda \equiv \Lambda/3H_0^2 = \rho_\Lambda/\rho_{\text{crit}}$ et $\Omega_k \equiv -k/[a(t)H(t)]^2$, ce qui représente le contenu de l'univers à une date t. La dépendance de la densité d'énergie en fonction du temps, Eq. (1.2.18), permet de ré-écrire la première équation de Friedmann sous la forme

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \sum_i \Omega_i^0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w_i)} + \Omega_k^0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2} + \Omega_\Lambda \ , \tag{1.2.20}$$

La première équation de Friedmann aboutit aussi à la relation de consistence

$$\sum_i \Omega_i + \Omega_\Lambda + \Omega_k = \Omega_{\text{tot}} + \Omega_k = 1 \ , \tag{1.2.21}$$

et ce, à tout temps. Cela illustre le sens physique de ρ_{crit} : si $\rho_{\text{tot}} > \rho_{\text{crit}}$, nécessairement $k = +1$ et l'univers est donc fermé. Les données actuelles tendent à montrer que l'univers est proche de la platitude $\Omega_k^0 \simeq 0$. Nous en reparlerons ultérieurement. La définition de Ω_k^0 permet aussi d'établir la valeur actuelle du facteur d'échelle [4]

$$a_0 = \frac{1}{H_0}\frac{1}{\sqrt{|1 - \Omega_{\text{tot}}^0|}} \ . \tag{1.2.22}$$

[3] Il faut pour cela supposer une courbure spatiale nulle $k = 0$ ce qui est proche de ce qui est observé et utiliser la première équation de Friedmann sous la forme $H(t) = \frac{\kappa_{\text{N}}}{3}\rho$.

[4] Avec nos conventions, $a(t)$ est dimensioné. Lorsque l'on choisit qu'il ne l'est pas, il est d'usage de poser $a_0 = 1$. Voir discussion à la section 0.2.

1.2.4 Temps, distances, horizons et redshift

Une des grandeurs centrales en cosmologie pour parler de distances ou de temps est le paramètre de Hubble défini par

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a} \ , \tag{1.2.23}$$

où le point signifie une dérivation par rapport au temps cosmique t. Notons que l'on définit souvent le paramètre de Hubble comobile $\mathcal{H} \equiv a'/a$ où $'$ désigne la dérivation par rapport au temps conforme τ ; ils vérifient la relation $\mathcal{H} = aH$.
Il est d'usage d'introduire h pour écrire la valeur numérique de la constante de Hubble H_0

$$H_0 = 100\, h \ \mathrm{km.s}^{-1}/\mathrm{Mpc} \ , \tag{1.2.24}$$

avec h de l'ordre de 0.7. Notons que $H(t)$ a la dimension de l'inverse d'un temps, ce qui permet de définir un temps de Hubble t_H et un rayon de Hubble R_H associés,

$$t_H = \frac{1}{H(t)} \quad \text{et} \quad R_H = \frac{1}{H(t)} \ . \tag{1.2.25}$$

Ces grandeurs interviendront dans les définitions de ce paragraphe. Enfin notons que le temps de Hubble aujourd'hui $t_{H_0} \simeq 9.77\, h^{-1} \times 10^9$ ans. Le rayon de Hubble aujourd'hui est de l'ordre de $R_H = 3000\, h^{-1}$ Mpc.

En astrophysique, le meilleur moyen d'avoir une information sur un objet est de collecter des signaux (principalement des photons mais aussi des particules massives ou des ondes de gravitation) venant de cet objet. Cela signifie que l'on est sensible à la manière dont les particules se propagent dans un univers de métrique $g_{\mu\nu}$ générale. Dans cet espace courbe, le mouvement $x^\mu(\lambda)$ (λ étant un paramètre défini plus loin) d'une particule test libre c'est-à-dire soumise à aucune autre force que la gravitation, suit une trajectoire appelée *géodésique*. Cette trajectoire définie le plus court chemin ie minimise l'action $\mathcal{S} = \int \mathrm{d}s$, ce qui revient à

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0 \ , \tag{1.2.26}$$

avec $\dot{x}^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\lambda$ le vecteur tangent à cette trajectoire. Dans le cas où la particule test est massive, il est d'usage de choisir comme paramètre λ le temps propre ce qui donne une forme simplifiée à l'équation qui régit le vecteur $u^\mu = \dot{x}^\mu$ tangent à la trajectoire : $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$. Si la particule test est sans masse, alors le vecteur k^μ tangent à la trajectoire vérifie $g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0$ et l'on rappelle en outre que dans ce cas, l'intervalle d'espace temps $\mathrm{d}s^2 = 0$.

Les notions de temps, de distance ne sont pas aussi triviales lorsque l'on parle de taille cosmologique, que lors d'expériences locales. En effet, les tailles et les durées sont telles que l'on devient sensible à différents effets tel que le moyen de collecter de l'information sur une région de l'univers ou la finitude de la vitesse de la lumière.

- La dynamique de l'univers, est caractérisée par une expansion comme le montrent les équations qui régissent le facteur d'échelle (voir le paragraphe précédent). Il en découle que l'on introduit aussi la notion de *décalage vers le rouge* (en anglais *redshift*) z caractérisant à la fois une distance radiale d'un objet par rapport à l'observateur ou une époque de l'histoire de l'univers. Supposons qu'un objet (une galaxie par exemple) émette deux signaux lumineux aux temps t_e et $t_e + \delta t_e$, et qu'un observateur sur la Terre les reçoive aux temps t_r et $t_r + \delta t_r$. Du fait de l'expansion de l'univers, l'émetteur en mouvement va avoir une fréquence d'émission différente de la fréquence de reception par simple effet doppler. Le redshift $z \equiv (\nu_e - \nu_r)/\nu_r$ mesure cette modification de fréquence. Le trajet emprunté par les photons est de genre lumière donc d'après Eq. (1.2.11)

$$\frac{\mathrm{d}t}{a(t)} = \pm \mathrm{d}\chi \ . \tag{1.2.27}$$

Ainsi, en intégrant le long de la trajectoire des photons émis en t_e et en $t_e + \delta t_e$,

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} = \int_{t_e+\delta t_e}^{t_r+\delta t_r} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} = \int_{\chi_e}^{\chi_r} \mathrm{d}\chi \ , \tag{1.2.28}$$

puisque le coté droit de l'égalité ne fait intervenir des grandeurs comobiles donc inchangées dans le temps. Grâce à une relation de Chasles adéquate sur la première égalité et en supposant que $a(t) \simeq$ cste sur $[t_*, t_* + \delta t_*]$, on en conclue que

$$1 + z = \frac{\nu_e}{\nu_r} = \frac{\delta t_r}{\delta t_e} = \frac{a_0}{a_e} \ . \tag{1.2.29}$$

– L'expansion de l'univers fait que la distance entre deux objets non liés gravitationnellement augmente sous le simple effet de la dynamique de l'espace-temps. C'est pourquoi, on définit une distance physique l_{phys} et une *distance comobile* l_{com} telle que $l_{\mathrm{phys}} = a(t) l_{\mathrm{com}}$. Cette dernière représente donc la distance de deux objets dans un espace qui ne serait pas en expansion. Le premier exemple de distance comobile est la *distance radiale comobile* χ_e d'un objet émettant un signal observé en $\chi = 0$. Elle peut être reliée au facteur d'échelle a_e à l'époque de l'emission ou au redshift z_e de l'émetteur de la manière suivante. Grâce à la métrique Eq. (1.2.11) on voit que

$$\chi_e = \int_{a_0}^{a_e} \frac{\mathrm{d}a}{a^2 H(a)} = \frac{R_{H_0}}{a_0} \int_0^{z_e} \frac{dz}{H(z)/H_0} \ . \tag{1.2.30}$$

On a utilisé le fait que $\mathrm{d}\chi = \mathrm{d}t/a = \mathrm{d}a/a^2 H$ et que $a/a_0 = 1/(1+z)$. Notons que $H(a)$ est donné par l'Eq. (1.2.20).

– Une conséquence de la finitude de la vitesse de la lumière et de l'âge de l'univers est l'existence de la notion d'horizon. En premier lieu, un observateur placé en $\chi = 0$, au temps t peut posséder un *horizon comobile des événements* $\chi_h^+(t)$ donné par

$$\chi_h^+(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} \ . \tag{1.2.31}$$

c'est-à-dire telle qu'un photon émis en χ_h^+ au temps t attendra $\chi = 0$ à la date $t = \infty$. Au delà de cette limite, aucune information ne pourra jamais parvenir à l'observateur en un temps fini sans sortir du cone de lumière c'est-à-dire sans emprunter une trajectoire de genre espace.

Un second horizon appelé *horizon comobile des particules* délimite l'ensemble des régions dont un observateur placé en $\chi = 0$ a pu recevoir une information avant une date t. Cet horizon χ_h^- est donné par

$$\chi_h^-(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} \ . \tag{1.2.32}$$

Si un objet situé en $\chi > \chi_h^-$ a émis un photon dans la direction de l'observateur en $\chi = 0$, celui n'a pas encore eu le temps d'arriver jusqu'à l'observateur au temps t. Notons que pour le calcul de cet horizon passé, le comportement du facteur d'échelle près de la limite $t \to 0$ est fondamental. Suivant l'histoire de $a(t)$, χ_h^- peut être fini ou infini.

- L'observateur est confiné à faire ses observations à partir d'un unique point, la position de la Terre, dès que les distances sont grandes devant la taille du système solaire. C'est pourquoi on introduit la notion de *distance angulaire comobile* ou *diamètre angulaire comobile* D_A définie par le rapport ${D_A}^2 \equiv dS^{com}/\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{obs}}$, où $\mathrm{d}S$ est la surface comobile transverse d'un objet et $\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{obs}}$ l'angle solide sous le lequel il est observé. En utilisant le fait que la surface d'une sphère de rayon comobile χ est $4\pi f_k(\chi)^2$, il est clair que $D_A(z) = f_k[\chi(z)]$. Cette grandeur est très utile pour la description de l'effet de lentille gravitationnelle (voir chapitre 9).

- L'âge de l'univers est aussi une question délicate pour un observateur cantonné à ses mesures depuis la Terre. Une manière simple de donner une estimation est de modéliser le temps nécessaire pour la formation des plus vieux objets de notre galaxie. On obtient ainsi une fourchette autour de 12 milliards d'années mais les différentes méthodes ne sont pas toujours compatibles les unes avec les autres (voir [9] et leurs références). Une manière théorique de répondre à la question est de supposer qu'un photon parti depuis la naissance de l'univers puisse voyager sur une géodésique jusqu'à l'observateur aujourd'hui. Si l'on définit le début de l'histoire de l'univers comme le moment où le facteur d'échelle s'annule[5], on peut évaluer l'âge de l'univers $\mathcal{A}_{\mathrm{univ}}$ par intégration de la dynamique du facteur d'échelle. En intégrant $\mathrm{d}t = \mathrm{d}a/aH$ pour un facteur d'échelle entre 0 et a_0 ou un redshift entre 0 et ∞,

$$\mathcal{A}_{\mathrm{univ}} = t_{H_0} \int_0^{a_0} \frac{\mathrm{d}a}{a} \frac{H_0}{H(a)} = t_{H_0} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{(1+z)} \frac{H_0}{H(z)} \tag{1.2.33}$$

mais cela repose là encore sur beaucoup d'inconnues et notamment l'histoire de la dynamique de l'univers pour $t \to 0$. Notons que cet âge de l'univers n'est que proportionnel à t_{H_0}. Dans ce qui suit, et notamment lors de l'histoire thermique de l'univers, nous allons donner pour les étapes mentionnées un âge. Il est obtenu en supposant que l'univers contient uniquement de la matière et de la radiation jusqu'à l'échelle du TeV, en extrapolant cette ère jusqu'à $a \to 0$. En utilisant les équations de Friedmann Eq. (1.2.20), on peut écrire que

$$\mathcal{A}_{\mathrm{univ}}(t) = t_{H_0} \int_0^{a(t)} \frac{\mathrm{d}a/a}{\sqrt{\Omega^0_{\mathrm{mat}}(a/a_0)^{-3} + \Omega^0_{\mathrm{rad}}(a/a_0)^{-4}}} \,, \tag{1.2.34}$$

Notons que cela n'est qu'une estimation car si l'univers a été dominé par d'autres formes d'énergie plus tôt, (ce qui est le cas d'après les modèles inflationnaires par exemple, voir chapitre 4), l'âge de l'univers est totalement inconnu et peut même être infini. Pour des moments antérieurs à 1 TeV, nous ne ferons que donner un temps caractéristique par simple raisonnement dimensionnel.

[5]Cette hypothèse ne correspond qu'à une extrapolation de l'évolution du facteur d'échelle pour $z \to \infty$. Celle suppose donc une singularité, ce qui pose des problèmes mathématiques : l'Eq. (1.2.18) montre qu'alors, la densité d'énergie serait infinie. Plusieurs modèles ont été proposés pour éviter cette singularité, dont les plus récents, les modèles *ekpyrotiques* ou avec rebond par exemple (voir [10] et ses références).

Afin d'évaluer le comportement de ces grandeurs pour des objets ou des événements assez proches, il est utile de connaître le comportement du paramètre de Hubble avec le redshift. En écrivant un développement limité du facteur d'échelle pour des temps proches de t_0,

$$a(t) = a_0 \left\{ 1 + H_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \mathcal{O}\left[(t - t_0)^3\right] \right\} , \tag{1.2.35}$$

on introduit le facteur de *décélération* actuel de l'univers q_0 défini par[6] $q(t) \equiv -\ddot{a}/aH^2$. La seconde équation de Friedmann permet d'écrire ce paramètre en fonction du contenu matériel de l'univers. En utilisant l'Eq. (1.2.20), on peut vérifier que pour $z \ll 1$ et en négligeant le contenu en radiation actuel,

$$H(z)/H_0 = 1 + \frac{1}{2} (3\Omega_m + 2\Omega_k)\, z + \mathcal{O}(z^2) = 1 + (q_0 + 1) z + \mathcal{O}(z^2) . \tag{1.2.36}$$

où Ω_m est le contenu actuel en matière non relativiste de l'univers. Evidemment, ce qui est beaucoup moins connu est le comportement de la dynamique de l'univers pour des redshifts très grands car comme nous allons le voir dans la section suivante, l'histoire primordiale de l'univers est dictée par une physique moins établie (physique des hautes énergies) voire encore en construction (théories des cordes et théories à dimensions supplémentaires).

1.3 Histoire thermique de l'Univers

L'histoire de l'univers peut être décrite en deux étapes. Tout d'abord, l'histoire de la géométrie de l'univers étudie l'évolution de son facteur d'échelle en fonction de son contenu global. La seconde étape est l'étude du comportement des particules à l'intérieur de cette géométrie. De la thermodynamique en espace-temps en expansion est nécessaire pour une description rigoureuse de ces mécanismes (voir [6, 7] et leurs références). Nous ne ferons qu'utiliser ses conclusions pour mentionner les grandes étapes de l'histoire de l'univers. Notons que les notions de physique des particules assez nombreuses dans cette section seront introduites dans les sections 2.2 et 2.4 du chapitre prochain. Notons encore que de plus amples détails seront donnés au chapitre 9 en ce qui concerne le fond diffus cosmologique.

1.3.1 Expansion et refroidissement

En 1929, l'astronome américain Edwin Hubble mesure la distance d'une vingtaine de galaxies proches ainsi que leur redshift, ce dernier étant proportionnel à la vitesse radiale de ces galaxies puisque traduisant un effet Doppler. Il remarque que les galaxies s'éloignent de la nôtre avec un vitesse v vérifiant $v = d \times H_0$. C'est l'origine de la constante de Hubble, simple facteur de proportionnalité de la relation et c'est la raison de l'unité originale de H_0. Cela est lourd de conséquence car c'est la première preuve que notre univers est en expansion, c'est à dire que le facteur d'échelle $a(t)$ est une fonction croissante du temps. C'est le début de la construction du modèle standard de la cosmologie, ou modèle du Big Bang chaud selon lequel l'univers s'expand et se refroidit au cours du temps. De multiples preuves directes ou indirectes ont été vérifiées depuis cette période. Il est aujourd'hui la trame incontournable de tout modèle cosmologique.

L'analyse du fond diffus cosmologique (CMB[7]) ainsi que l'étude de supernovae lointaines ont notamment permis de confirmer cette hypothèse et de montrer que l'univers a été dominé

[6] Notons qu'historiquement, c'est un paramètre de décélération (d'où le signe -) qui avait été introduit car on pensait que cela rendrait compte de la situation actuelle de l'univers. Mais comme il a été récemment mesuré une accélération de l'expansion de l'univers, ce paramètre est actuellement négatif.

[7] L'acronyme vient de l'anglais "Cosmic Microwave Background", puisque des fonds dans d'autres longueurs d'onde ont été mis en évidence.

par la radiation puis la matière puis récemment une énergie "noire" dont la nature reste encore à déterminer même si elle semble proche de la constante cosmologique Λ introduite à l'Eq. (1.2.7).

L'histoire thermique de l'univers se résume principalement à l'évolution de la température des différentes espèces qui le compose en rapport avec l'évolution d'une température de référence. Tant qu'une espèce i de température T_i est en interaction avec le bain thermique à la température T, c'est-à-dire tant que son taux d'interaction avec le bain de photons est plus rapide que le taux d'expansion de l'univers, $\Gamma \gtrsim H$, alors l'espèce est thermalisée et $T_i \simeq T$. Pour un système de volume a^3, l'entropie du système est donnée par

$$S = \frac{2\pi}{45} q_*(T) T^3 a^3, \tag{1.3.37}$$

avec

$$q_*(T) = \sum_{i=\text{bosons}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermions}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 . \tag{1.3.38}$$

On en déduit tout d'abord que, au cours de l'évolution adiabatique[8] de l'univers, la température de l'univers évolue selon la loi

$$T \equiv T_\gamma \propto q_\gamma^{-1/3} \frac{1}{a(t)} , \tag{1.3.39}$$

q_γ étant indépendant de la température. Il est donné par l'Eq. (1.3.38) en ne sommant que sur les espèces en équilibre thermique avec les photons. L'expansion de l'univers entraine donc son refroidissement ainsi que le refroidissement de toutes les espèces qui le compose. Si une espèce i devient découplée du bain thermique ($\Gamma_i \lesssim H$), une expression identique à l'Eq. (1.3.37) peut être écrite pour l'espèce i et cette entropie est séparément conservée. Il en résulte qu'après le découplage d'une espèce i, le nombre q_* est modifié et les températures T et T_i évolueront différemment.

Pour étudier le découplage d'une espèce, il faut calculer le taux de réaction qui permet à l'espèce de rester thermalisée, $\Gamma \sim n\langle\sigma v\rangle$, n, et $\langle\sigma v\rangle$ étant respectivement la densité de l'espèce qui se désintègrent, et la section efficace de désintégration. Pour une interaction via un boson sans masse (interaction électromagnétique par exemple) de constante de couplage α, la section efficace $\sigma \sim \alpha^2/T^2$ tandis que pour une interaction via un boson X (les bosons de l'interaction faible par exemple) de masse $m_X \gtrsim T$, la section efficace $\sigma \sim G_X^2 T^2 \sim \alpha^2 T^2/m_X^4$. Notons de plus que la densité n des particules évolue comme $n \propto a^{-3} \propto T^3$. On en déduit que l'évolution en température du taux d'interaction dans le cas d'interaction via des bosons sans masse ou de masse négligeable devant T vérifie $\Gamma \propto T$ tandis que lors de l'ère dominée par la radiation, la première équation de Friedmann permet de montrer que $H \sim T^2/M_{\text{Pl}}$. Les espèces doivent donc toutes découpler à un moment donné. Cela va entraîner un certain nombre de moments où le nombre effectif de degrés de liberté relativistes évolue brusquement (Fig. 1.1). Ces changements brusques s'accompagnent d'une modification profonde de la forme sous laquelle se trouve le contenu matériel de l'univers.

Une autre classe de phénomènes se produit au cours de ce refroidissement. Au fur et à mesure que la température T diminue, lorsque $T \ll m_i$ où m_i est la masse d'une particule, celle-ci passe du statut de relativiste au statut de matière non relativiste. Son entropie est alors transférée au bain de photons relativistes et aux autres particules relativistes puisque d'après l'Eq. (1.3.39), une diminution du nombre de particules relativistes augmente la température du bain de photon. Nous verrons que ce mécanisme est par exemple à l'origine de la

[8]Lors d'une transformation thermodynamique adiabatique l'entropie est conservée.

différence de température aujourd'hui entre les photons et les neutrinos.

Pour étudier la thermodynamique des espèces, commençons par rappeler que l'on définit la densité d'énergie ρ_i d'une espèce en équilibre grâce à la fonction de partition $f_\pm(\mathbf{p})$ suivant que l'espèce satisfait à la statistique de Fermi-Dirac (signe +) ou de Bose-Einstein (signe −)

$$\rho_i = \frac{g_i}{(2\pi^3)} \int E(\mathbf{p}) f_\pm(\mathbf{p}) \mathrm{d}^3\mathbf{p} \ , \tag{1.3.40}$$

où on rappelle que

$$f_\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{\exp[(E-\mu_i)/T_i] \pm 1} \ . \tag{1.3.41}$$

Dans ces expressions, $E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2$ est l'énergie relativiste d'un état d'impulsion $\mathbf{p}$, g_i est le nombre de degrés de liberté relativistes et μ_i et T_i sont le potentiel chimique et la température moyenne de l'espèce. Cela permet de calculer la densité d'énergie de radiation en fonction de la température du bain thermique,

$$\rho_{\mathrm{rad}} = g_*(T) \left(\frac{\pi^2}{30}\right) T^4 \ , \tag{1.3.42}$$

où g_* est le nombre effectif de degrés de liberté relativistes. Celui-ci peut avoir des contributions fermioniques comme bosoniques et est donné de manière générale par

$$g_*(T) = \sum_{i=\mathrm{bosons}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=\mathrm{fermions}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 \ . \tag{1.3.43}$$

C'est donc une fonction du temps et son évolution (voir Fig. 1.1) illustre les transitions que l'univers a subit au cours de son histoire. Aujourd'hui, seuls les photons ($g_\gamma = 2$) et 3 familles de neutrinos [$g_\nu = 2$ et $T_\nu/T_\gamma = (4/11)^{1/3}$] sont relativistes, ce qui entraine que $g_*^0 = 3.36$. Cela permet de calculer le contenu en radiation actuel $\Omega_0^{\mathrm{rad}} = 8.31 \times 10^{-5}$.

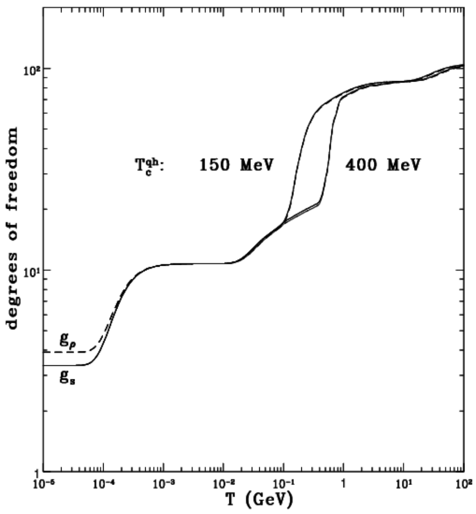

FIG. 1.1: Evolution de g_* et q_* au cours de l'histoire de l'univers. Figure tirée de [12].

Nous allons maintenant utiliser les notions introduites pour présenter les faits les plus marquants de l'histoire thermique par ordre inversement chronologique.

• Situation actuelle.
Le point de départ est donc aujourd'hui, quand notre univers a une température de $T_0 \simeq 2.73$ K $\simeq 2.35 \times 10^{-4}$ eV ; il est actuellement dominé par un fluide de type “constante cosmologique” ou une autre forme d'“énergie noire”. Les plus récentes observations dans les trois domaines complémentaires du CMB, des relevés de structures à grande échelle et des détections de supernovae (SN) Ia indiquent que la situation actuelle concernant le contenu de l'univers est la suivante : $\Omega_\Lambda^0 \simeq 0.72$, $\Omega_{\rm mat}^0 \simeq 0.28$, dont une quantité de matière baryonique de $\Omega_{\rm baryon}^0 = 0.047$. Le reste du contenu en matière semble non baryonique et non relativiste au moment du découplage (voir plus loin). C'est la raison pour laquelle on parle de *matière noire froide*. La densité totale d'énergie permettant de contraindre la géométrie de l'univers est $\Omega_{\rm tot}^0 = 1.02 \pm 0.02$, ce qui est compatible avec un univers plat.

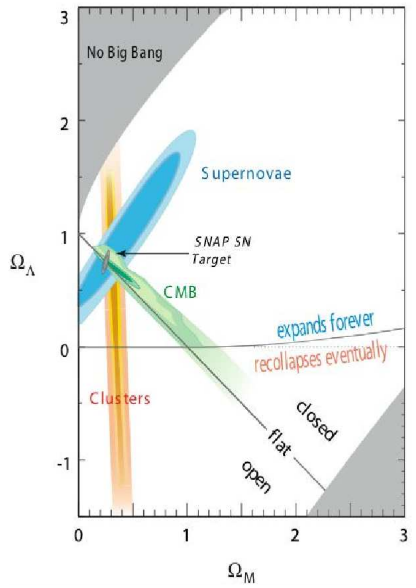

FIG. 1.2: Contraintes sur le contenu de l'univers venant du CMB, des supernovae et des relevés de galaxies. Figure tirée de [8].

• Transition matière/constante cosmologique.
S'il semble que l'univers est dominé par une énergie noire aujourd'hui, il était encore récemment dominé par la matière non relativiste, phase pendant laquelle, a eu lieu toute la formation des structures. Si l'on suppose qu'une constante cosmologique Λ est responsable de l'accélération actuelle de l'univers, et sachant que la densité d'énergie de la matière évolue comme $\rho_{\rm mat} \propto a^{-3} \propto (1+z)^3$ tandis que $\rho_\Lambda =$ cste, le redshift z_Λ de cette transition doit vérifier

$$1 + z_\Lambda = \left(\frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_{\rm mat}^0}\right)^{1/3} \quad \Longleftrightarrow \quad z_\Lambda \simeq 0.33 \ . \qquad (1.3.44)$$

• Découplage photon-matière et émission du CMB.
Lorsque la température descend en dessous de l'énergie de liaison de l'atome d'hydrogène (~ 13.6 eV), l'agitation thermique ne peut plus empêcher la formation d'atomes d'hydrogène et l'on observe un déplacement de la réaction

$$e^- + p \rightleftarrows H + \gamma \qquad (1.3.45)$$

vers la droite. A l'issus de cette transition, les électrons désormais liés aux protons n'interagissent quasiment plus avec les photons par diffusion élastique et par annihilation

$$e^- + \gamma \rightleftarrows e^- + \gamma \quad \text{et} \quad e^- + e^+ \to \gamma + \gamma \ , \tag{1.3.46}$$

ce qui a pour effet de rendre le libre parcours moyen de ces derniers subitement plus grand que le rayon de Hubble. L'univers devient alors "transparent" et les photons se propagent librement. Ils constituent le rayonnement fossile ou fond diffus cosmologique. De notre point de vue, ils ont été émis sur une sphère autour de nous appelée *surface de dernière diffusion*, sphère dont les mesures du satellite WMAP[9] [143] montrent qu'elle se situe à un redshift de $z_{\rm dec} = 1089 \pm 2$. Cela permet de déterminer la température du CMB au moment de son émission en utilisant le fait qu'il est aujourd'hui à la température de $T_0 \simeq 2.73$ K. Ces photons sont aujourd'hui collectés et analysés : ils constituent la plus vieille image électro-magnétique que l'on puisse recevoir de notre univers. La température à ce moment est de

$$T_{\rm dec} = T_0(1 + z_{\rm dec}) \simeq 2976 \text{ K} \simeq 0.26 \text{ eV} \ . \tag{1.3.47}$$

ce qui correspond grâce à l'Eq. (1.2.34) à un âge de $t_{\rm dec} \simeq 360\,000$ ans.
Notons que cela correspond aussi à une température inférieure à 13.6 eV car la densité relative de photons par rapport au baryons étant très grande, elle a tendance à déplacer la réaction Eq. (1.3.45) vers la gauche et à retarder le découplage. Le CMB a été détecté pour la première fois par Penzias et Wilson en 1964, en temps qu'un "bruit" de fond parasite détectable dans toutes les directions. Il a plus récemment été mesuré avec précision grâce au satellite COBE[10], ce qui a permis de vérifier que ce rayonnement vérifie une loi de corps noir jusqu'à une précision jamais observée ailleurs (voir Fig. 1.3), à une température de

$$T_0 = 2.728 \pm 0.004 \ \text{ K} \ . \tag{1.3.48}$$

Cette observation permet de justifier a posteriori l'hypothèse cosmologique d'un univers homogène et isotrope, car les anisotropies de température ne sont détectables qu'avec une expérience précise à 10^{-5}. Depuis COBE, plusieurs expériences ont analysé le CMB et mesuré précisément ces écarts à l'isotropie et leurs statistiques. Leur analyse sera détaillée plus amplement au chapitre 9.

- **Transition rayonnement-matière.**

Cette transition, comme la transition matière/constante cosmologique, n'est pas due au refroidissement de l'univers mais simplement à la différence de solutions des équations de Friedmann pour un univers dominé par la radiation ou la matière. On peut remarquer à partir des solutions de l'Eq. (1.2.19) que la densité d'énergie pour la radiation évolue comme $\rho_{\rm rad} \propto a^{-4} \propto (1+z)^4$ tandis que celle de la matière évolue comme $\rho_{\rm mat} \propto a^{-3} \propto (1+z)^3$. On peut directement en déduire que même si initialement la radiation domine la densité d'énergie dans l'univers, au fur et à mesure que le facteur d'échelle augmente avec le temps, la matière va de plus en plus contribuer à la densité totale de l'univers. On appelle "*égalité matière-rayonnement*" le moment où les deux contributions sont égales. Avant cette date $t_{\rm eq}$, on parle de l'ère de la radiation tandis qu'après l'univers passe dans l'aire dominée par la matière. Cette transition a eu lieu à un redshift vérifiant

$$\rho_{\rm rad} = \rho_{\rm mat} \Leftrightarrow 1 + z_{\rm eq} = \frac{\Omega_0^{\rm mat}}{\Omega_0^{\rm rad}} \simeq 3369 \ . \tag{1.3.49}$$

[9]WMAP pour "Wilkinson Microwave Anisotropy Probe" est un satellite de la NASA lancé en 2002. Voir `http ://map.gsfc.nasa.gov/`.

[10]COBE pour "COsmic Background Explorer", est un satellite de la NASA lancé en 1990, voir `http ://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/`.

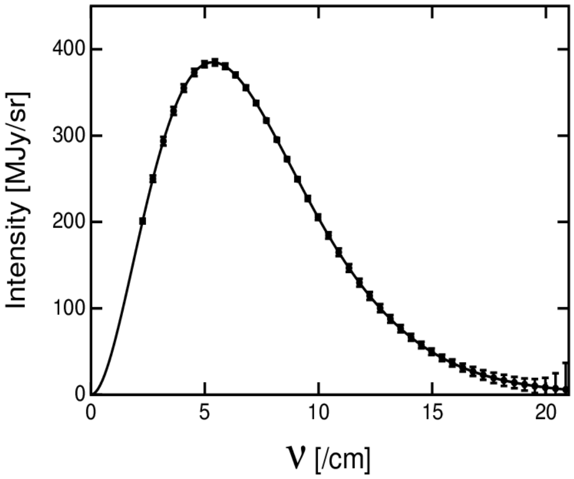

FIG. 1.3: Spectre du fond diffus cosmologique mesuré par l'instrument FIRAS à bord de COBE. Notons que les erreurs représentées sont les erreurs à 400σ. Figure tirée de [11].

ce qui correspond (Eq. (1.2.34)) à un âge de $t_{\rm eq} \simeq 51\,000$ ans.

- **Nucléosynthèse primordiale.**

Lorsque la température est passée en dessous de $T_{\rm BBN} \simeq 0.1$ MeV, l'énergie des photons est devenue trop faible pour la dissociation des noyaux atomiques légers (l'énergie de liaison du noyau d'hélium est 28.3 MeV), ce qui a permis la formation des premiers noyaux, les plus légers après l'hydrogène : deutérium, tritium, hélium-3, hélium-4, et lithium (voir par exemple [6, 12]). Ce mécanisme se produit à un redshift de l'ordre de $z_{\rm BBN} \simeq 3\times 10^8$, l'univers est alors dominé par la radiation, et il fait passer le nombre de degrés de liberté effectifs de $g_* = 10.75$ à sa valeur actuelle. La situation initiale ($T \gg 1$ MeV) est la suivante. Les électrons, les positrons, les neutrinos, et les photons sont en interaction les uns avec les autres via des réactions d'interaction faible

$$\nu_e + n \rightleftarrows p + e^- \ , \quad e^+ + n \rightleftarrows p + \bar{\nu}_e \ , \quad n \rightleftarrows p + e^- + \bar{\nu}_e \ , \tag{1.3.50}$$

ainsi que des créations-annihilation de positrons-électrons

$$e^- + e^+ \rightleftarrows \gamma + \gamma \ . \tag{1.3.51}$$

Cela permet de maintenir toutes ces particules en équilibre thermique et le rapport proton-neutron est de l'ordre de 1. Aux alentours de 1 MeV, les neutrinos se découplent (voir point suivant) ce qui entraine une asymétrie entre les protons et les neutrons. A partir de $T_{\rm BBN}$, le deuterium qui a une énergie de cet ordre de grandeur ne sera plus photo-dissocié et permet la formation par différentes réactions en chaîne d'éléments plus lourds : ^{3}H, ^{3}He, ^{4}He, ^{7}Li, ^{7}Be. Parmi ces éléments, le plus stable est l'^{4}He, qui va ainsi être produit en quantité assez grande en comparaison du D par exemple. Au delà, les éléments Li et Be sont produits en très faible quantité du fait de l'instabilité de noyau tel que $A = 5$ ou $A = 8$. Les autres éléments du tableau périodique jusqu'au Fe et au-delà ne seront produits que bien plus tard au sein des étoiles par réactions thermonucléaires ; on parle alors de nucléosynthèse stellaire.
Les mécanismes de la nucléosynthèse primordiale (BBN[11]) étant assez bien compris, les modèles ont fait des prédictions très précises sur les abondances relatives des différents éléments, prédictions confirmées par les observations. Cela apporte notamment des contraintes fortes sur

[11] Cet acronyme vient de l'anglais *Big Bang Nucleosynthesis*.

le nombre de familles de neutrinos, ou sur la densité de baryons dans l'univers. Cela permet aujourd'hui de placer cette période, avec le CMB parmi les observations les plus contraignantes sur les modèles de physique des hautes énergies proposés pour la description de l'univers plus primordial. Notons que depuis récemment, les nouvelles précisions sur la mesure de venant de WMAP entraînent un désaccord entre les mesures d'abondances du Lithium 7, les prédictions des modèles théoriques et les mesures de WMAP sur la densité baryonique dans l'univers [13]. Cela est illustré sur la Fig. 1.4 et n'est pour le moment pas expliqué.

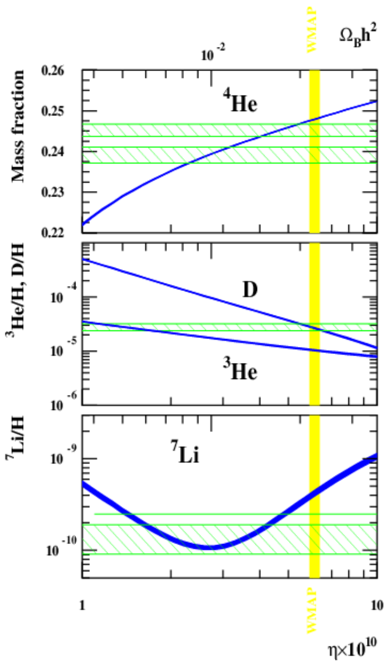

FIG. 1.4: Comparaison entre les prédictions par les modèles de nucléosynthèse primordiale (courbes bleues), les mesures d'abondance relative des éléments (courbes vertes) et la mesure sur la densité baryonique par WMAP (courbe jaune). Figure tirée de [13].

• **Découplage des neutrinos et annihilation e^+e^-.**
Lorsque la température passe en dessous de $T_\nu \sim 1$ MeV, le taux des interactions qui maintenaient les neutrinos en équilibre thermique avec le fond de photons devient plus petit que le paramètre de Hubble. En effet, si les neutrinos n'interagissent pas directement avec les photons car ils ne sont pas chargés, ils interagissent avec les électrons via les réactions

$$e^- + e^+ \rightleftarrows \nu + \bar{\nu} \quad , \quad e^- + \nu \rightleftarrows \nu + e^- \ . \tag{1.3.52}$$

Ces particules interagissent via l'interaction faible et à ces énergies, le taux de réaction vérifie $\Gamma \simeq G_F T^5$ ce qui permet de vérifier que la température critique pour ce genre de processus est bien 1 MeV. A cette température donc, les neutrinos vont découpler du plasma thermique ambient. Peu de temps après, lorsque T atteint $m_e = 511$ keV, les électrons et positrons deviennent non relativistes, s'annihilent pour donner des photons si bien que la réaction

$$e^- + e^+ \rightleftarrows \gamma + \gamma \ , \tag{1.3.53}$$

ne se produit plus que vers la droite. Ils ne contribueront donc plus à q_γ qui passe de $2 + \frac{7}{8}(2\times 2) = \frac{11}{2}$ (photons, électrons et positrons) à 2 (photons). La température des neutrinos étant donnée par la température des photons avant le découplage, on obtient que $T_\gamma = (11/4)^{1/3} T_\nu$.

1.3.2 L'Univers très primordial

Nous avons arbitrairement choisi de parler d'univers très primordial pour des énergies à partir desquelles la description nécessite l'emploi unique de la physique des particules, des énergies qui sont étudiées dans les accélérateurs de particules. Notons que là encore les mécanismes mis en jeu pour les étapes de l'histoire de l'univers sont succinctement décrits. Certaines notions seront approfondies dans les sections et chapitre suivants : quelques notions basiques sont introduites dans la section 2.2 et 2.4 du chapitre 2, les transitions de phase décrites par le mécanisme de Higgs sont présentées en détails dans le chapitre 3, et enfin une présentation de la Grande Unification est donnée au chapitre 5.
Nous continuons donc à remonter le temps, et donc à augmenter la température du bain thermique de l'univers.

- **Transition quark-hadron.**

Le fait marquant suivant intervient aux alentours de $T_{\rm QCD} \sim 150$ MeV, température à laquelle le contenu de l'univers passe d'un plasma quarks-gluons à un plasma composé de hadrons (protons et neutrons). Cette température marque en effet la transition de phase qui accompagne la brisure de la symétrie chirale, brisure à partir de laquelle les quarks restent confinés dans des nucléons et où le pion devient médiateur de l'interaction forte (voir [14] pour une revue sur cette transition).
Cependant, bien que ce mécanisme ne se soit produit qu'à une température de 100 fois celle de la nucléosynthèse primordiale, le mécanisme est nettement moins bien compris. La raison en est que la ChromoDynamique Quantique (QCD[12]) est moins bien comprise que la théorie électro-faible du fait que l'interaction est non perturbative. Il en résulte que l'étude de phénomènes mettant en jeu cette interaction nécessite des simulations sur réseau complexes et les calculateurs actuels ne peuvent faire des simulations fidèles aux propriétés connues de la QCD. Une meilleure compréhension de ce phénomène est pourtant indispensable puisque responsable des conditions initiales pour la nucléosynthèse primordiale.

Deux modèles sont aujourd'hui encore compatibles avec les contraintes venant de la BBN. Dans le modèle le plus simple, la transition quark-hadron n'est pas une transition de phase mais un "contournement"[13] (crossover) entraînant une nucléosynthèse homogène. Une transition de phase du second ordre est fortement improbable d'après les plus récentes simulations de QCD sur réseau (voir [15] pour une revue sur les simulations de QCD pour réseau et voir la figure 1 de cette référence pour la détermination de l'ordre de la transition en fonction des masses des quarks). Les simulations les plus réalistes à ce jour tendent à montrer que la situation la plus probable est une transition de phase du premier ordre [14]. Elle dure $t_H/10$ et se fait par nucléation de bulles d'univers à l'intérieur desquelles la transition de phase s'est produite. Ces bulles grandissent très rapidement pendant le premier pourcent du temps total de la transition puis grandissent lentement sous le simple effet de l'expansion.

Parmi les conséquences détectables mentionnons notamment le fait que la BBN pourrait se produire de manière inhomogène ce qui modifierait les mécanismes de formation des éléments de manière significative, allant jusqu'à permettre la formation de noyaux plus lourd comme le ^{12}C. Une autre conséquence possible est la formation "QCD balls", c'est-à-dire de quarks piégés dans un défaut topologique surfacique, et pouvant contribuer à la matière noire. Witten a encore suggéré qu'une transition de phase fortement du premier ordre puisse entraîner la génération d'ondes gravitationnelles lorsque la vitesse des bulles est plus grande que la vitesse

[12] Cet acronyme vient de l'anglais "Quantum ChromoDynamics".
[13] Ce qui est contourné est un point multiple dans le diagramme des phases. Le système passe donc de manière continue d'une phase à l'autre.

du son dans le plasma.

• **Transition électro-faible.**
Autour de $T_{\rm MS} \sim 300$ GeV, une nouvelle transition de phase affecte fortement à la fois le contenu de l'univers mais aussi la manière dont les particules interagissent. En effet, cette transition de phase dite électro-faible, déclenchée par une brisure de la symétrie électro-faible fait passer l'univers d'un état de symétrie du Modèle Standard $G_{\rm MS} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ dans l'état actuel des symétries $SU(3)_C \times U(1)_{em}$. Cette brisure de symétrie est déclenchée par le refroidissement de l'univers et la dynamique d'un champ scalaire : le champ de Higgs. Elle a pour conséquence que les particules couplées à ce champ de Higgs acquièrent une masse par le mécanisme de Higgs. C'est notamment le cas des bosons de jauge ($W^{\pm}$ et Z_0) transmettant l'interaction faible ainsi que des fermions du Modèle Standard (MS). En conséquence, après cette transition de phase, l'interaction faible est transmise par des particules massives. Cette transition de phase du point de vue de ses conséquences sur la physique des particules comme du point de vue de sa description précise en terme de mécanisme de Higgs sera détaillée dans les sections et chapitres suivants.

Avertissement : Jusqu'à présent, ce qui était décrit faisait partie de ce qui est appelé modèle standard c'est à dire ce qui est communément admis car ayant été observé ou testé dans les accélérateurs de particules. Des énergies supérieures à 1 TeV n'ont pas encore été atteintes en accélérateur ; au-delà, on ne peut plus parler que de modèles théoriques plus ou moins motivés. Il est alors nécessaire de motiver le cadre théorique dans lequel on se place.

• **Transitions de Grande Unification et intermédiaires.**
Si les théories de Grande Unification décrivent effectivement la physique des hautes énergies comme on le pense aujourd'hui, (voir le chapitre 5 pour une présentation et les motivations de ces théories), l'univers était, à des énergies de l'ordre de $M_{\rm GUT} \sim 10^{16}$ GeV, dans un état de symétrie bien plus grand. Toutes les interactions étaient *unifiées*, ce qui se traduit notamment par le fait qu'elles avaient la même constante de couplage. Dans ces théories, les symétries du MS étaient contenues dans un groupe de symétrie plus grand $G_{\rm GUT}$. L'univers a donc connu une succession de transitions de phase associées aux brisures de symétrie permettant de passer de $G_{\rm GUT}$ à $G_{\rm MS}$. Tout comme pour la transition électro-faible, lors de ces transitions de phase certains bosons de jauge ainsi que d'autres particules acquièrent une masse par couplage avec les champs de Higgs responsables de ces brisures de symétrie.

Ces transitions de phase, leur conséquences cosmologiques et les contraintes que l'on peut établir feront l'objet d'un étude approfondie dans cette thèse.

• **Au-delà de $M_{\rm GUT}$.**
Au delà de l'énergie de 10^{16} GeV, peu de choses sont connues pour des raisons évidentes. Par un raisonnement dimensionnel, on peut construire pourtant une autre énergie qui marque probablement un tournant dans la manière dont le contenu de l'univers doit être décrit. En effet, construisant la masse de Planck avec les constantes fondamentales $G_{\rm N}$, c et $\hbar$, $m_{\rm Pl} = (\hbar c^5/G_{\rm N})$, on définit une limite au delà de laquelle une description de la gravitation à l'échelle quantique est nécessaire. La communauté ne s'est pas à ce jour mise d'accord sur une telle description même si deux théories, en développement actif sont actuellement proposées. La première est la gravité quantique ("Loop Quantum Gravity") (voir [16] pour des revues générales), qui propose une quantification canonique de la relativité générale. Sa concurrente directe est la théorie des supercordes, basée sur la supersymétrie, une symétrie additionnelle entre les bosons et les fermions, et sur le concept d'une corde fondamentale dont les différents niveaux d'excitation donneraient lieu aux différentes particules de la nature (voir [17] pour des

livres généraux sur cette théorie). Cette théorie requiert l'existence de 6 dimensions spatiales supplémentaires (dans sa version minimale), et peut donner lieu à basse énergie aux théories de GUT. Il existe 5 familles de théorie des supercordes, comme 5 versions d'une hypothétique théorie encore plus fondamentale, la M-théorie.

1.4 Limites du modèle standard de Cosmologie

Nous avons vu précédemment que le modèle standard de la cosmologie, basé sur une métrique de RW en expansion donne une description de l'univers qui a été confirmée par plusieurs observations qui avait été prédites : le fond diffus cosmologique, les accords très bons entre le modèle de nucléosynthèse primordiale et les observations d'abondances, les accords entre les différentes classes d'expériences (CMB, supernovae, cartographie des grandes structures, etc...) sur le contenu en énergie de l'univers (voir la Fig. 1.2). Cependant, hormis les zones d'ombre de la description précédente à très haute énergie, le modèle standard tel que décrit ici présente un certain nombre de problèmes dont voici une rapide description.

1.4.1 Le problème de l'homogénéité du CMB

Comme nous l'avons vu précédemment, un des piliers observationnels du modèle standard est l'observation du CMB. Son homogénéité permet de justifier de travailler avec une métrique de RW. Pour comprendre cette homogénéité, il est nécessaire que les photons du CMB aient été en contact causal les uns avec les autres avant la surface de dernière diffusion, surface à partir de laquelle, ils sont propagés quasi librement. Mais pour qu'ils aient pu thermaliser, il faut qu'ils fassent partie de la même sphère causale. Si l'on utilise le rayon de Hubble pour donner une estimation de cette sphère causale, on peut voir que le rayon de cette sphère est vue aujourd'hui sous un angle de 1°. Il est difficile de ce fait d'expliquer pourquoi le CMB est isotrope jusqu'à 10^{-5} sur l'ensemble du ciel.

1.4.2 L'origine des perturbations

Le fait que le ciel à 3 Kelvin soit presque parfaitement à la même température pose une problème de causalité. Mais le rayonnement de fond cosmologique observé par les différentes expériences notamment la plus récente WMAP [143] montre des anisotropies de température à une échelle de 10^{-5}. Ces anisotropies possèdent un spectre de puissance représenté sur la Fig. 1.5. Il présente des pics acoustiques et une forme générale qui plébiscite une origine

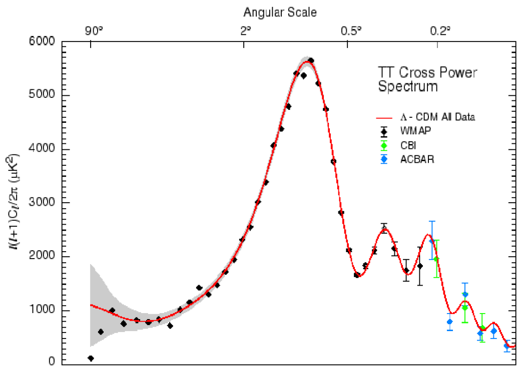

FIG. 1.5: Spectre de puissance observé par le satellite WMAP. Figure tirée de [143].

principalement adiabatique des fluctuations primordiales. Cela signifie que les zones de surdensité de matière (c'est à dire les puits de potentiel gravitationnels) correspondent aux zones de sur-densité de photons. De plus, il traduit un spectre de puissance de ces fluctuations quasiment invariant d'échelle [$k^{-3}P(k) \propto \mathrm{cste}$]. Il est nécessaire de trouver une origine à ces fluctuations.

1.4.3 Le problème de la platitude

On a vu que les mesures actuelles notamment venant du CMB montre que la densité d'énergie totale, Ω^0_{tot}, est très proche de 1, ce qui signifie que la densité de l'univers est très proche de la densité critique et que la courbure Ω_k est très proche de 0. Cependant, si l'on ré-écrit les équations de Friedmann en temps conforme, on peut montrer qu'elle se ramène à l'équation de Raychaudhuri

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Omega^0_{\mathrm{tot}} - 1) = \mathcal{H}(1 + 3w)\Omega^0_{\mathrm{tot}}(\Omega^0_{\mathrm{tot}} - 1) \ . \tag{1.4.54}$$

Cela illustre donc que pour un contenu vérifiant $w > -1/3$, ce qui inclut la radiation, et la matière mais pas un fluide de type constante cosmologique, Ω^0_{tot} évolue en s'écartant de la valeur 1. Cela signifie que si l'univers dans son passé a toujours été dominé par la radiation ou la matière, il fallait que $\Omega^0_{\mathrm{tot}} = 1$ à 10^{-60} près à l'échelle de Planck ce qui n'est pas naturel et requiert un ajustement fin des paramètres pour comprendre l'état actuel de notre univers. Notons que la constante cosmologique qui domine aujourd'hui l'univers ne peut résoudre ce problème car sa densité d'énergie est constante au cours du temps ce qui signifie qu'elle n'a pas pu dominer l'univers dans le passé.

1.4.4 Le problème des monopôles

Le groupe de symétrie qui décrit l'univers au delà de 300 GeV est $G_{\mathrm{MS}} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Dans le cadre des théories de Grande Unification, les symétries de l'univers aux alentours de 10^{16} GeV étaient décrites par un seul groupe G_{GUT} et toutes les interactions étaient donc unifiées. Cela impose que l'univers ait subit un certain nombre de transitions de phase entre 10^{16} GeV et 300 GeV pour passer de G_{GUT} à G_{MS}. Lors de ces transitions de phase, il est obligatoire d'avoir eu une brisure de la forme

$$G \to H \times U(1) \ . \tag{1.4.55}$$

brisure qui entraîne (voir le chapitre 3) la formation de défauts topologiques ponctuels appelés monopôles. Pour avoir unification des couplages des trois interactions du MS, ils faut que G_{GUT} se soit brisé à haute énergie en G_{MS} ce qui donne un masse de l'ordre de M_{GUT} aux monopôles. Or ceci est incompatible avec les observations actuelles puisque ces viendraient rapidement à dominer l'énergie de l'univers et le refermerait rapidement [7].

1.4.5 Le problème du secteur sombre, de la coïncidence et du vide

Un des secteurs encore incertain de ce modèle est la nature de ce qui représente la majorité du contenu en énergie de l'univers à savoir l'énergie noire et la matière noire. La première compte pour $\sim 72\%$ du contenu et la seconde pour $\sim 23\%$. Pour plus de précisions, on pourra consulter [19].

L'énergie noire a pour le moment été présentée comme une composante de “type constante cosmologique”, ce qui est la manière la plus simple de rendre compte de l'accélération actuelle de l'expansion. Dans l'absolu, pour rendre compte d'une accélération positive de l'univers, il faut et il suffit qu'il soit dominé par un fluide dont l'équation d'état vérifie $w < -1/3$. Une constante cosmologique vérifie $w = -1$, ce qui est en accord avec les mesures de supernovae qui contraignent l'équation d'état à vérifier [18] $-1.48 \lesssim w \lesssim -0.72$ à 95% de confiance.

Lorsque que l'on cherche une origine à cette constante cosmologique dans la physique des particules, on voit que les contributions à cette constante cosmologique viennent de l'énergie des fluctuations du vide, fluctuations fermioniques ou bosoniques, et cette énergie diverge. En régularisant la théorie avec une coupure (*cutoff* en anglais) ultra-violette de l'ordre de la masse de Planck, ce qui est le plus naturel, on obtient une densité d'énergie de l'ordre de $m_{\mathrm{Pl}}^4 \sim 10^{76}$ GeV^4, soit 123 ordres de grandeur au dessus de la valeur mesurée aujourd'hui. Dans tous les cas, la théorie doit être régularisée avec une coupure supérieure à 1 TeV, ce qui donne au minimum une densité d'énergie 35 ordres de grandeur au dessus de la valeur observée. Cela soulève donc le problème suivant appelé *problème de la constante cosmologique*. Si la valeur mesurée est si faible, il faut trouver un mécanisme qui annulent ces contributions gigantesques.

On pourrait imaginer qu'il existe un mécanisme pour annuler totalement cette énergie du vide. Après tout, la supersymétrie (voir chapitre 5) permet mais à haute énergie un mécanisme similaire par introduction de nouvelles particules qui par symétrie annule exactement les contributions des particules connues aux fluctuations de la masse des particules scalaires. En revanche trouver un mécanisme qui introduit une contribution négative très légèrement différente (à au moins 35 décimales près) de celle que l'on connaît demande un ajustement très fin de paramètres. Dernier problème, si la valeur de Λ est si petite, sa densité d'énergie a toujours été complètement négligeable, ce qui rend la période actuelle très originale. Cette coïncidence qui fait que toutes les composantes de l'univers ont aujourd'hui une contribution du même ordre de grandeur ressemble là encore à une réglage fin des paramètres. On parle de *problème de la coïncidence*.

L'alternative la plus étudiée à une constante cosmologique, est une grandeur dynamique comme un champ scalaire, appelé champ de quintessence. Son équation d'état dépend du temps ce qui en fait une composante radicalement différente de la constante cosmologique. Soumis à un potentiel adapté, il est possible de rendre compte des observations tout en réglant le problème de la coïncidence grâce à des attracteurs dans la théorie. Notons que cette classe de modèles n'explique pas comment la densité d'énergie actuelle peut être inférieure aux contributions venant des fluctuations du vide données par la physique des particules. Mais si un argument est trouvé pour annuler exactement les contributions des fluctuations du vide, ces modèles introduisent un mécanisme différent pour expliquer une petite valeur de Ω_Λ.

La seconde composante qualifiée de sombre dans le contenu de l'univers est la matière noire. Sa nature est encore inconnue bien qu'elle doive satisfaire un certain nombre de propriétés d'après les observations faites. Elle a été proposée à la suite de l'étude des courbes de rotation des galaxies et des amas qui indiquaient une distribution en masse bien plus étendue que ce que laissait supposer la matière visible. L'appuis des mesures de CMB laisse à penser que :

- La matière noire est de nature différente de l'énergie noire puisqu'elle exerce une force attractive et non répulsive.
- Cette matière noire est non baryonique, n'interagissant pas avec la lumière.
- Les simulations numériques de formation des structures indiquent que la matière noire doit être non relativiste au moment du découplage (on parle de "Cold Dark Matter" par opposition à la "Hot Dark Matter") et doit être composée de particules stables.

Parmi les particules du MS (voir chapitre suivant), aucune ne peut satisfaire ces contraintes. Pour être plus précis, nous savons que les neutrinos contribuent à cette matière noire mais ne peut rendre compte que d'une toute petite fraction de celle-ci. Il est donc nécessaire de trouver d'autre candidat. La physique des hautes énergies a d'abord proposé un candidat dans le cadre de la supersymétrie, la particule supersymétrique la plus légère (*LSP*[14]). Nous y reviendrons aux chapitres 5 et 6. La physique des hautes énergies propose un grand nombre

[14] Cet acronyme vient de l'anglais "Lightest Supersymmetric Particle".

d'autres candidats [102] notamment, pour les théories de Kaluza-Klein basées sur un univers à $p \geq 5$ dimensions [20], exactement sur le même principe que la *LSP*, l'existence d'une symétrie qui rendrait stable la particule de Kaluza-Klein la plus légère (on parle de LKP). Les recherches, via détection directe de ces nouvelles particules sont en cours, notamment avec les expériences Edelweiss[15] ou CDMS[16]. Pour le moment, elles n'ont pu mettre en évidence que des domaines exclus de l'espace des paramètres. On pourra consulter [102] pour une revue récente sur les recherches de matière noire issue des théories de particules.

[15] `http ://edelweiss.in2p3.fr/` .
[16] `http ://cdms.berkeley.edu/` .

Chapitre 2

Le Modèle Standard de physique des particules

Sommaire

2.1 Introduction

Le chapitre précédent nous a montré combien il est nécessaire de connaître précisément la physique de l'infiniment petit lorsque l'on cherche à décrire les moments les plus primordiaux de l'histoire de l'univers. Nous en venons donc à une présentation du Modèle Standard de la physique des particules (MS). Au cours de ce chapitre je ferais abondamment référence à [6] et [7] pour la cosmologie, [23] pour la théorie quantique des champs, [21, 22] pour la physique des particules, mais aussi [88], et [91] pour la grande unification et enfin [24] pour la théorie des groupes.

2.2 Contenu en particules de l'Univers

Dans la nature, deux types de particules sont observés : les particules de spin entier (les bosons) et les particules de spin demi-entier (les fermions). Alors que ces derniers sont constitutifs de la matière, les bosons, eux transportent les interactions entre les particules. Un peu à part, le MS prévoit l'existence d'un boson de Higgs (pas encore observé aujourd'hui) dont la dynamique serait responsable de la brisure de symétrie électro-faible, correspondant à la transition électro-faible décrite lors de l'histoire de l'univers au chapitre précédent. Les autres particules du MS ont acquis une masse par couplage avec ce boson de Higgs, lors de cette brisure de symétrie.

A l'échelle sub-millimétrique, trois interactions dominent sur l'interaction gravitationnelle, si bien que cette dernière est toujours négligée lorsque l'on parle d'interaction entre particules élémentaires. Cela se justifie lorsque l'on compare les intensités des forces des quatre interactions qui sont rappelées dans la table ci-dessous.

Interaction	Intensité de la force	Ordre de grandeur
Forte	$g^2_{NN\pi}/4\pi$	15
Electromagnétique	$e^2/4\pi$	1/137
Faible	$G_F\, m_p^2$	10^{-5}
Gravitation	$G_\mathrm{N}\, m_p^2$	10^{-39}

Les grandeurs données dans ce tableau pour évaluer l'intensité de la force sont les constantes de couplage pour une interaction mettant en jeu deux protons de masse $m_p \sim 1$ GeV. Notons que la domination de la force de gravitation à grande échelle vient du fait qu'à la différence des interactions électromagnétique ou forte, il n'y a pas de phénomène d'écrantage gravitationnel qui veut que globalement un corps soit neutre.

2.2.1 Les fermions

Les fermions se divisent en deux familles : les leptons sont sensibles à l'interaction électromagnétique et l'interaction faible tandis que les particules constituées de quarks sont sensibles à l'interaction forte en plus. Il existe dans le MS trois leptons chargés négativement (e^-, μ^-, et τ^-) et trois leptons neutres associés (ν_e, ν_μ, et ν_τ). Ces leptons sont usuellement rangés en doublets pour traduire leur charge sous l'interaction faible, charge qui dans le cas d'un groupe non abélien est donné par la représentation dans laquelle ils sont (voir section suivante) et donc la manière dont ils se transforment. Ainsi, on parle des doublets suivants

$$\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \;, \tag{2.2.1}$$

respectivement la première, deuxième et troisième famille de leptons.

Six quarks existent en trois versions de couleur (l'équivalent de la charge pour l'interaction forte) : u, d, c, s, t, b pour *up, down, charm, strange, top* et *bottom*. Les charges électromagnétiques des quarks u, c, et t sont $2/3$ et $-1/3$ pour d, s, b et possède aussi une couleur. Ils ne sont jamais observés seuls, à des énergies inférieures à la transition quarks/hadrons[1]. Ils sont regroupés (pour former un hadron) en trois quarks (baryon) ou en un quark et un anti-quark (méson) de telle sorte à être de charge électromagnétique entière et globalement neutre du point de vue de l'interaction forte. De la même manière que les leptons, les quarks sont aussi des doublets de l'interaction faible,

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \;, \tag{2.2.2}$$

faisant chacun partie d'une famille différente. Notons que dans les deux cas, seule la première famille contient des particules stables ; les familles suivantes possèdent des nombres quantiques identiques à la première mais les particules sont de plus en plus massives. Par analogie avec leur charge (doublet) sous l'interaction faible, on peut aussi mentionner que les quarks font partie

[1] Comme nous le verrons ultérieurement, rien dans le MS n'oblige une particule a être de charge électromagnétique entière. C'est un fait observé et non expliqué par le MS.

de triplets de couleur, où les trois versions de couleur d'un même quark sont regroupées dans un triplet de l'interaction forte. Par exemple, le quark u apparaît dans le triplet (u_r, u_b, u_g), pour *red, blue, green.* En revanche les leptons ne ressentant pas l'interaction forte, ils sont tous singlets sous cette interaction, c'est-à-dire non chargés.

Le fait d'avoir détecté l'existence du nombre exact de particules pour pouvoir les ranger en doublet sous l'interaction faible ou en triplet sous l'interaction forte permet de supposer quelque chose de fondamental dans la théorie et non le simple hasard. Cette structure est idéalement décrite par la théorie des groupes comme nous allons le voir dans ce chapitre. Ainsi, avant même la détection du neutrino ν_τ ou du quark *top*, leur existence ne faisaient plus de doute. Cela se reflétera ultérieurement dans la description des interactions du MS.

2.2.2 Les bosons de jauge

Continuons le tour d'horizon des particules fondamentales du MS. Les particules interagissent entres elles par échange d'autre particules dites médiatrices : les bosons. Ainsi, le médiateur de l'interaction électro-magnétique est le photon γ, les trois bosons Z^0 et $W^\pm$ transmettent l'interaction faible et les 8 gluons g^a_b l'interaction forte. Le nombre de ces bosons trouvera lui aussi une explication dans la formulation en terme de groupes de symétrie des théories de jauge.

2.3 De la théorie des groupes aux groupes de jauge

Depuis toujours, on a compris l'importance des symétries dans la description des problèmes physiques. Elles sont le reflet d'une propriété du système étudié et nous enseignent aussi sur les invariants de notre théorie. Les outils mathématiques pour décrire correctement ces symétries sont dans la théorie des groupes.

2.3.1 Un peu de théorie des groupes

Commençons donc par quelques rappels élémentaires de théorie des groupes pour présenter les notions employées dans la description des théories de GUT dans les chapitres suivants. Nous présenterons plus particulièrement les groupes du MS.

Définitions générales

Définition : On appelle *groupe* tout ensemble $G = \{a, b, c, \dots\}$ munis d'une loi $*$, qui vérifie les propriétés suivantes.

- si $a, b \in G$, alors $a * b \in G$.
- $a * (b * c) = (a * b) * c$.
- $\exists\, e \in G$, $\forall a \in G$, tel que $e * a = a = a * e$, e étant appelé élément neutre de G.
- $\forall a \in G$, $\exists\, b \in G$ tel que $a * b = e$, b étant appelé l'inverse de a.

Définition : Tout groupe vérifiant $\forall a, b$, $a * b = b * a$ est dit commutatif ou abélien.
Par exemple, le groupe discret cyclique $Z_n = \{a, a^2, \dots, a^n = e\}$ est abélien.

Définition : Les groupes "unitaires" $U(n)$, sont assimilables aux matrices $n \times n$ vérifiant $U^\dagger U = UU^\dagger = I_n$. Ils sont non abéliens dès que $n \geq 2$. Les groupes "spéciaux unitaires" $SU(n)$ sont unitaires et vérifient $\forall U \in SU(n)$, $\det(U) = 1$. Une autre classe de groupes intéressante est $SO(n)$ l'ensemble des matrices $n \times n$ orthogonales c'est-à-dire que $\forall A \in SO(n)$, ${}^tAA = A^tA = I$. L'exemple le plus familier est $SO(3)$ le groupe des rotations dans l'espace à trois dimensions.

Définition : On définit le *produit direct* de deux groupes $G \times H$ par l'ensemble des couples $\{g_i, h_j\}_{i,j}$, ce groupe étant munis de la loi $*$ telle que $\{g_i, h_j\} * \{g_k, h_l\} = \{g_i * g_k, h_j * h_l\}$.

L'étude d'un groupe est considérablement simplifiée si ce groupe peut être décomposé en produit direct d'autres groupes. Si cette décomposition n'est pas possible, le groupe est dit *simple*. Par exemple, $SU(n)$ est un groupe simple mais $U(n)$ ne l'est pas car $U(n) = SU(n) \times U(1)$. Un groupe est dit *semi-simple* si il peut s'écrire comme produit direct de groupes simples sans aucun facteur abélien.[2]

Définition : Particulièrement intéressants pour la description de la physique, les groupes de Lie peuvent être dans un premier temps définis comme des groupes dont les éléments sont libellés par un ou plusieurs paramètres continus (un angle par exemple dans le cas d'une rotation). Ces paramètres notés ultérieurement $\{\epsilon_a\}_{a=1,\ldots,N}$ peuvent être indépendants des coordonnées d'espace-temps, on parle alors d'un *groupe global* ou dépendants de l'espace-temps, $\epsilon_a = \epsilon_a(x^\mu)$ et dans ce cas, la *symétrie* est *locale*. Le nombre N de paramètres du groupe définit l'*ordre* ou la *dimension* du groupe.

Représentations

Une *représentation* d'un groupe est habituellement un ensemble de matrices tel que à chaque élément a de G est associée une matrice $M(a)$. Cela donne une manière de visualiser la notion abstraite d'élément d'un groupe. Ainsi le produit de groupe devient le produit matriciel ie $a * b = c$ devient $M(a) \times M(b) = M(c)$. L'utilisation de représentations matricielles pour les groupes amène souvent à identifier le groupe avec une de ses représentations possibles ce qui est bien pratique mais mathématiquement abusif. Cette équivalence étant tellement usuelle, c'est ce qui a été fait dans la présentation plus haut dans la définition des groupes $SU(n)$ ou $SO(n)$.

On peut considérer les matrices carrées comme des applications linéaires d'un espace vectoriel, ce qui permet de comprendre la dimension d'une représentation comme étant la taille des vecteurs dans cet espace.

Définition : Si une représentation $M(a)$ peut être mise sous la forme d'une matrice diagonal par bloc, dont les blocs sont les $M_i(a)$, alors la représentation est dite réductible et est notée $M(a) = M_1(a) \times M_2(a) \times \ldots$. Dans le cas contraire on parle de *représentation irréductible*. Si $M(a)$ est une représentation, l'ensemble $M^*(a)$ des matrices conjuguées est aussi une représentation, appelée *représentation complexe conjuguée*.

Nous allons détailler maintenant un peu plus les groupes $SU(2)$ et $SU(3)$ pour deux raisons : ils apparaissent dans la description du MS et illustrent simplement des propriétés très générales des groupes de GUT qu'il est difficile de se représenter dans des dimensions plus grandes.

Les groupes $\mathrm{SU(n)}$

Pour être plus précis que précédemment, disons que les groupes $SU(n)$ ont une représentation irréductible qui est l'ensemble des matrices U, $n \times n$, unitaires et spéciales.

---

[2]Pour savoir si un groupe est simple ou semi-simple, on peut utiliser une autre définition. Définissons tout d'abord un sous-groupe invariant H de G si $\forall\ h \in H$, $\forall\ g \in G$, $g * h * g^{-1} \in H$. Alors un groupe simple ne possède pas de sous groupe invariant, et une groupe semi-simple ne possède pas de sous-groupe abélien invariant. En effet on peut remarquer que chaque élément d'un produit direct est un sous-groupe invariant.

Propriété : Toute matrice unitaire peut être mise sous la forme de $U = e^{iH}$ où H est une matrice hermitienne ($H^\dagger = H$).
Sachant que $\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}\,A}$, on voit que les matrices hermitiennes permettant de développer les matrices de $SU(n)$ sont de trace nulle. Il y a n^2-1 matrices $n\times n$ de trace nulle. Ces matrices sont appelées *générateurs* de $SU(n)$ notées J_a. Elles permettent d'écrire tout élément U sous la forme

$$U(\epsilon_a) = \exp\left(i\sum_{a=1}^{n^2-1}\epsilon_a J_a\right) , \tag{2.3.3}$$

où les ϵ_a sont les paramètres de la transformation U.
Propriété : Un groupe est complètement caractérisé la relation de fermeture de ses générateurs,

$$[J_a,\, J_b] = i\,\lambda^c_{ab} J_c , \tag{2.3.4}$$

c'est-à-dire la donnée de ses *constantes de structure* λ^c_{ab}. Elles sont réelles et vérifient $\lambda^c_{ab} = -\lambda^c_{ba}$.

On peut remarquer d'après l'Eq. (2.3.3) que si les matrices J_a sont des générateurs de $SU(n)$ dans une représentation M, les matrices $-J_a^*$ vérifient les mêmes propriétés. Si les J_a et les $-J_a^*$ sont équivalents c'est-à-dire s'il existe une matrice unique S telle que

$$S\,J_a\,S^{-1} = -J_a^* , \tag{2.3.5}$$

alors la représentation est dite réelle.
Définition : Tous les groupes $SU(n)$ possède une représentation particulière, dite *adjointe*, de dimension n^2-1. Elle est générée par les constantes de structure du groupe, c'est-à-dire que dans cette représentation, les éléments de matrice des générateurs sont donnés par

$$(J_a)_{bc} = \frac{1}{i}\lambda_{abc} , \tag{2.3.6}$$

puisque ces générateurs satisfont à la relation de fermeture Eq. (2.3.4). Nous allons voir que cette représentation a un rôle important dans la description des interactions du MS.
Définition : On définit le *rang* d'un groupe par le nombre de ses générateurs qui commutent entre eux. Les groupes $SU(n)$ possède $n-1$ générateurs diagonaux d'où $\mathrm{rg}[SU(n)] = n-1$.

Le groupe SU(2)

D'après ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, on voit que $SU(2)$ possède trois générateurs, et trois paramètres. Dans la représentation des matrices 2×2, les générateurs de ce groupe sont proportionnels aux matrices de Pauli (voir Annexe A). Pour pouvoir écrire la relation de fermeture pour les générateurs de $SU(2)$, on définit les générateurs par $J_a = \sigma_a/2$ et ainsi

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k . \tag{2.3.7}$$

Les constantes de structure ε_{ijk} sont ici données par le tenseur de Levi-Civita (tenseur totalement anti-symétrique et tel que $\varepsilon_{123} = 1$).

L'ordre du groupe étant trois, sa représentation adjointe est de dimension trois. D'après la définition donnée précédemment, Eq. (2.3.6) on peut construire les générateurs de cette représentation et vérifier que (voir annexe A)

$$(J_i)_{jk} = -i\varepsilon_{ijk}. \tag{2.3.8}$$

Représentations irréductibles de SU(2)

La représentation des matrices 2×2 n'est pas la seule représentation de $SU(2)$. Pour trouver toutes les représentations de ce groupe, on peut utiliser le formalisme des états propres du moment angulaire. On définit $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ un opérateur commutant avec les trois opérateurs J_1, J_2 et J_3. Définissons aussi les opérateurs $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$. Ces opérateurs agissent sur la base des états $|j, m\rangle$ avec les valeurs propres

$$\begin{aligned} J^2|j,m\rangle &= j(j+1)|j,m\rangle \ , \\ J_3|j,m\rangle &= m|j,m\rangle \ . \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Les opérateurs $J_\pm$ agissent sur cette base en passant d'un état à un autre

$$J_\pm|j,m\rangle = [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{1/2}|j, m \pm 1\rangle \ . \tag{2.3.10}$$

Pour une valeur de j donnée, les vecteurs $|j,m\rangle$, $m = -j, \ldots, j$ forment une base pour la représentation "j" de $SU(2)$. La représentation est donc de dimension $2j+1$. Notons que j est nécessairement entier ou demi-entier.

Exemple 1 : $j = 1/2$. La base des états est alors $\{|1/2, 1/2\rangle \ ; \ |1/2, -1/2\rangle\}$ notés respectivement $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Dans ce cas, peut vérifier d'après les valeurs propres de J_3 et les définitions de J_1 et J_2 en fonction de $J_\pm$ que nécessairement les matrices J_a sont les matrices données par $J_a = \frac{1}{2}\sigma_a$. Les représentations sont souvent notées par leur dimension et celle-ci sera notée **2** dans la suite.

Exemple 2 : $j = 1$. La base des vecteurs de cet espace est

$$|1,1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad |1,0\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad |1,-1\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{2.3.11}$$

On peut vérifier là encore en construisant les matrices J_3, puis $J_\pm$ puis J_1 et J_2 que l'on retrouve bien les matrices données en annexe A. Notons que toutes les représentations de $SU(2)$ sont réelles en utilisant l'Eq. (2.3.5). Dans le cas de la représentation **2**, $S = \sigma_2$ et dans le cas de la représentation **3**,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{2.3.12}$$

De manière générale, les états de bases d'une représentation décrite par j peuvent être représenté sur un axe bornée par les valeurs j et $-j$ et m variant par pas de $1/2$.

La représentation $j = 1/2$ est appelée *représentation fondamentale* car on peut construire à partir d'elle les autres représentations de plus grande dimension par produit de représentations. Pour $SU(2)$ ce produit fonctionne comme l'addition de moment cinétique et ainsi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0 \oplus 1 \\ &\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \\ &\ldots \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Le groupe SU(3)

Ce groupe est de rang deux, et possède huit générateurs dont deux sont diagonaux. La représentation fondamentale est de dimension trois, et dans cette représentation, ses générateurs notés $\{\lambda_a\}_{a=1,\ldots,8}$ sont les matrices de Gell-Mann rappelées en annexe A.

Il y a deux manières de construire les représentations irréductibles de $SU(3)$. La première est de généraliser la démarche effectuée pour $SU(2)$ au paragraphe précédent. Dans ce cas, on introduit deux valeurs propres y et t_3 des générateurs λ_3 et λ_8 pour caractériser une état, ce qui remplace le nombre m. Les états seront donc représentés dans un plan (t_3, y). Il faut introduire pour décrire une représentation deux entiers (p, q), analogues de j, qui détermineront les limites de l'espace du plan (t_3, y) accessible. Si les valeurs de t_3 et y sont correctement normalisées, p et q représentent les longueurs entières des cotés d'un hexagone centré sur 0.

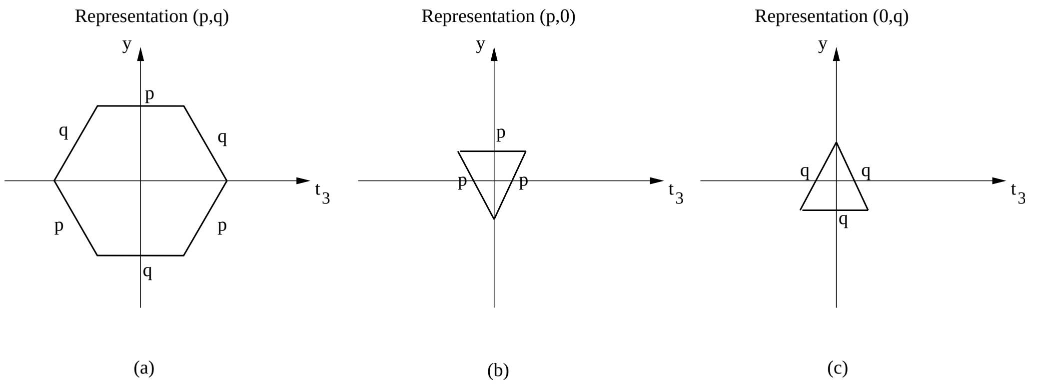

FIG. 2.1: Illustration graphique des représentations irréductible de SU(3). En (a), représentation (p, q) générale. En (b) et (c) représentation des représentations fondamentales $\mathbf{3}$ et $\bar{\mathbf{3}}$.

On voit qu'il y a deux représentations fondamentales c'est-à-dire de taille minimale et qui sont $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Elles se représentent par deux triangles pointant vers le bas ou le haut respectivement sur la Fig. 2.1. La dimension d'une représentation (p, q) est donnée par

$$d(p, q) = (p + 1)(q + 1)\frac{p + q + 2}{2} , \tag{2.3.14}$$

donc on peut vérifier que les deux représentations fondamentales sont de dimension trois et sont notées $\mathbf{3}$ et $\bar{\mathbf{3}}$. Ces représentations sont fondamentales car elles permettent comme pour $SU(2)$ par produit direct de construire les représentations de plus grande dimension. Une méthode graphique[3] permet de calculer le produit $\mathbf{3} \times \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ où "$8 = (1, 1)$" et "$1 = (0, 0)$".

Il est clair cependant que cette méthode graphique pour représenter et manipuler les représentations est rapidement limitée lorsque l'on voudra travailler avec des groupes de rang plus grand (ce sera le cas pour la GUT). On peut alors employer une autre méthode basée sur les *tableaux de Young*. On trouvera un explication pédagogique de cette méthode dans [21].

[3] Il faut pour cela placer le barycentre d'un des triangles sur les sommets du second. Chaque point de ce premier triangle définit alors un état de base. Voir Fig. 4.7 de [21].

2.3.2 Les symétries de jauge

Cas d'une symétrie abélienne

L'intérêt d'avoir étudié des groupes de symétrie réside dans le fait que les symétries d'une théorie influence énormément sa forme. On peut même dire qu'elles la caractérise. A titre d'exemple, on va voir que les grandes lignes de l'électrodynamique quantique (QED) qui décrit l'interaction électromagnétique peuvent être écrites simplement en imposant une invariance de la théorie sous une symétrie $U(1)$ locale.

Supposons que l'on veuille décrire un champ fermionique $\Psi(x)$ de masse m. Son lagrangien s'écrit [23]

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(x)\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\Psi(x) \; . \tag{2.3.15}$$

γ_μ sont les matrices de Dirac rappelées en début de cette thèse. Ce lagrangien est clairement invariant sous $U(1)$ globale $\Psi(x) \to e^{i\alpha}\Psi(x)$ mais pas sous $U(1)$ locale $\Psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\Psi(x)$. Pour éliminer le problème, il est nécessaire d'introduire un boson vecteur (boson de jauge) A^μ et de remplacer ∂_μ par une dérivée covariante $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Si ce champ de jauge se transforme suivant $A_\mu \to A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)$, alors le lagrangien

$$\mathcal{L}_1 = \bar{\Psi}(x)\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\Psi(x) \; , \tag{2.3.16}$$

est bien invariant sous $U(1)$ locale. Il suffit pour obtenir le lagrangien complet de la QED d'ajouter un terme cinétique invariant de jauge pour le boson vecteur A_μ. Si $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est le tenseur du champ force électromagnétique, alors on peut écrire le lagrangien total

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} = \bar{\Psi}(x)\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\Psi(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \; . \tag{2.3.17}$$

Notons qu'un terme de masse explicite $m^2 A^\mu A_\mu$ briserait l'invariance de jauge et est donc interdit. Deux possibilités s'offre à nous pour décrire une théorie de jauge : (i) le boson de jauge est sans masse, ou (ii) il acquiert une masse par un mécanisme externe. Pour l'interaction électromagnétique, c'est le cas (i) qui est vérifié puisque le photon n'a pas de masse. Pour d'autres interactions, la possibilité (ii) sera utilisée et le mécanisme en question est le mécanisme de Higgs, explicité au paragraphe 2.5.

Cas d'une symétrie non abélienne (théorie de Yang-Mills)

Dans le cas d'une symétrie non abélienne [par exemple $SU(2)$, $SU(3)$], la démarche est similaire. Supposons donc que l'on veuille construire un lagrangien symétrique sous $SU(n)$ locale par exemple, c'est-à-dire invariant sous les transformations $\Psi(x) \to U(\epsilon_a)\Psi(x)$ avec

$$U(\epsilon_a) = \exp\left[-i\sum_a J^a \epsilon_a(x)\right] \; ,$$

ce qui traduit le fait que $U(\epsilon_a)$ est une transformation du groupe $SU(n)$. Si les paramètres de la transformation $\epsilon_a(x)$ sont dépendants de l'espace-temps, le lagrangien $\mathcal{L}_0$ donné à l'Eq. (2.3.15) n'est pas invariant de jauge là encore. La dérivée covariante qui doit être introduite est maintenant

$$D_\mu = \partial_\mu - igJ_a A^a_\mu \; ,$$

où g est la constante de couplage de l'interaction. Notons qu'il y a nécessairement *autant de champ de jauge que de générateurs du groupe de symétrie.* L'objectif est que le lagrangien suivant soit invariant de jauge

$$\mathcal{L}_{SU(n)} = \bar{\Psi}(x)i\gamma^\mu D_\mu \Psi(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}_a F^a_{\mu\nu} - m\bar{\Psi}(x)\;\Psi(x) \; , \tag{2.3.18}$$

où il a fallu introduire autant de tenseur $F^a_{\mu\nu}$ que de champs de jauge A^a_μ, et définis par

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\mu - \partial_\mu A^a_\mu + g\,\lambda^{abc}\,A^b_\mu A^c_\nu \ . \tag{2.3.19}$$

Dans une représentation $M(a)$, la taille des matrices M définit la dimension n de cette représentation. Dans ce cas les champs décrivant les particules sont regroupés dans des *multiplets*, c'est-à-dire des vecteurs de taille n, noté ici Ψ. On voit donc d'après le lagrangien précédent que les différentes composantes des multiplets sont traités identiquement.

Regardons maintenant un peu plus précisément comment se transforment les champs de jauge. On peut vérifier que pour que $D_\mu\Psi \to U(\epsilon_a)D_\mu\Psi$, il faut que $J_a A^a_\mu$ se transforme selon

$$A^a_\mu J_a \to U(\epsilon_a)A^a_\mu J_a U^{-1}(\epsilon_a) - \frac{i}{g}[\partial_\mu U(\epsilon_a)]U^{-1}(\epsilon_a) \tag{2.3.20}$$

Si on considère une transformation infinitésimale, (ie $\epsilon_a \ll 1$), on peut vérifier que la transformation des champs de jauge devient

$$A^a_\mu \to A^a_\mu + \lambda^{abc}\epsilon_b A^c_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu \epsilon^a \ , \tag{2.3.21}$$

où l'on rappelle que les λ^{abc} sont les constantes de structure du groupe de symétrie.
Remarquons tout d'abord que dans le cas d'un symétrie globale, si le troisième terme disparaît, ce n'est pas le cas du second terme. Les bosons de jauge se transforment donc non trivialement même dans le cas d'un symétrie $SU(n)$ globale. Le second terme faisant intervenir les constantes de structure du groupe, on voit que les bosons de jauge se transforment par action des générateurs dans la représentation adjointe donnés à l'Eq. (2.3.6) et que donc *les bosons doivent appartenir à la représentation adjointe.*

2.4 Les interactions du Modèle Standard

On a présenté dans la section précédente une description d'une théorie de jauge, dans les cas où celle-ci est basée sur le groupe abélien $U(1)$ ou basé sur un groupe $SU(n)$. La raison est que l'interaction électro-faible est aujourd'hui comprise comme une théorie de jauge basée sur le groupe $SU(2)_L \times U(1)_Y$ et l'interaction forte comme basée sur le groupe $SU(3)_C$ (les indices L, Y et C seront expliqués par la suite). Globalement, la théorie du Modèle Standard est donc associée au groupe de symétrie $G_{\rm MS} \equiv SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Voyons comment cela se traduit dans la description de chacune des interactions.

2.4.1 L'interaction forte

L'interaction forte semble être la moins bien comprise des théories du MS. Elle se décrit en effet de 2 manières différentes suivant le régime dans lequel on se trouve, c'est-à-dire suivant l'énergie.

A basse énergie, les quarks sont confinés et se regroupent en plusieurs quarks de telle sorte que l'ensemble soit neutre sous[4] $SU(3)_{\rm C}$. On les trouve donc sous le forme de quark/antiquark, on parle alors de *mésons* (par exemple le pion π^0 formé de $d\bar{d}$), ou sous la forme de trois quarks, c'est alors un *baryon* (par exemple le proton formé de udd). On ne peut trouver de quark seul pour la raison suivante : si l'on tente de séparer deux quarks, l'énergie de l'ensemble augmente avec la distance, à tel point qu'à partir d'une certaine distance, l'énergie

[4]Neutre sous $SU(3)_C$ signifie être de couleur blanche. Une particule est de couleur blanche si elle est composé de trois quark de trois couleur différente ou d'un quark et d'un anti-quark de la même couleur.

est telle que des paires quark/antiquark sont créées à partir du vide afin de créer des mésons ou des hadrons. On parle d'*hadronisation*.

Dans ce cas, ces particules non élémentaires que sont les baryons et les mésons n'ont pas de couleur et l'interaction forte n'est qu'une interaction résiduelle entre particules globalement neutre composées de particules non neutres. Une analogie particulièrement éclairante est celle de la force de Van der Waals qui est une interaction résiduelle entre molécules globalement neutre électriquement mais formées de particules chargées. L'interaction est dans ce régime transmise par des particules elles aussi neutres en couleur : les pions $\pi^\pm$ et π^0. Le pion est une particule instable de masse entre 135 MeV (π^0) et 139 MeV ($\pi^\pm$) dont la durée de vie $\tau_\pi \sim \hbar/(m_\pi c^2) \sim 8 \times 10^{-23}$ s. Il en résulte une interaction à très courte distance de l'ordre de 1 fermi. La constante de couplage est alors $\alpha_{NN\pi} = g^2_{NN\pi}/4\pi \sim 15$. Puisque $\alpha_{NN\pi} > 1$, on n'est pas dans un régime perturbatif. Cela signifie que les fluctuations quantiques ont un rôle dominant devant le régime classique et le développement perturbatif usuel dans la constante de couplage ne peut approximer l'interaction. Il en résulte la nécessité d'étudier cette interaction par simulations numériques sur réseau.

Dans le second régime, à haute énergie c'est-à-dire au dessus de l'échelle d'énergie de la transition quarks/hadrons, l'interaction forte est alors une interaction entre des particules fondamentales, les quarks, et est transmise par des gluons. Le modèle standard décrit l'interaction forte dans ce régime là. La théorie est appelée QCD pour *Quantum ChromoDynamics* et est basée sur des particules portant une charge appelée *couleur*, ne pouvant prendre que 3 valeurs : *rouge* (r), *bleu* (b) et *vert* (g). Les quarks possèdent une couleur ; on parle ainsi des trois versions du quark *up* par exemple : u^r_L, u^b_L, u^g_L. Les huit gluons $g^\beta_\alpha = g^a$ transportent deux couleurs et, en interagissant avec un quark, modifient sa couleur. La constante de couplage g_s de la théorie est distincte de celle l'interaction forte $g_{NN\pi}$. La QCD est décrite à l'aide d'une théorie basée sur le groupe $SU(3)_\mathrm{C}$, c'est-à-dire avec un lagrangien [26]

$$\mathcal{L}_\mathrm{QCD} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + i \sum_q \bar{\psi}^i_q \gamma^\mu (D_\mu)_{ij} \psi^j_q \ , \tag{2.4.22}$$

avec

$$\begin{aligned} F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu g^a_\nu - \partial_\nu g^a_\mu - g_s \lambda_{abc} g^b_\mu g^c_\nu \ , \\ (D_\mu)_{ij} &= \delta_{ij} \partial_\mu + i g_s \sum_a \frac{\lambda^a_{ij}}{2} g^a_\mu \ . \end{aligned} \tag{2.4.23}$$

Dans les expressions précédentes, q désigne la saveur des quarks (c'est-à-dire *up* ou *down* si on se restreint à la première famille), $a, b, c = 1, \ldots 8$, $i, j = 1, 2, 3$, et f_{abc} et λ^a sont respectivement les constantes de structure et les générateurs de $SU(3)$ dans la représentation **3** (voir annexe A).

Il est important de noter que cette théorie, à haute énergie, peut se décrire en terme d'une théorie perturbative. Cela est dû au fait que la constante de couplage diminue à mesure que l'énergie μ des particules mises en jeu augmente. On parle de *liberté asymptotique* : $\alpha_s \underset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} 0$. C'est dans ce régime que des tests de précision, similaires à ceux fait sur la force électromagnétique peuvent être réalisés. La conséquence étonnante de ce point est que l'interaction est mieux connue à haute énergie, c'est-à-dire à courte distance qu'à basse énergie.

2.4.2 L'interaction électro-faible

Secteur bosonique

D'après ce que l'on a vu à la section précédente, il est immédiat d'écrire le secteur de jauge de la théorie. Il y a nécessairement 3 bosons de jauge pour la partie interaction faible [$SU(2)$]

et un boson pour la partie $U(1)$, noté respectivement A^a_μ, $a = 1, 2, 3$, et B_μ. Le lagrangien cinétique s'écrit naturellement

$$\mathcal{L}_{\text{boson}} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \ , \tag{2.4.24}$$

avec $F^a_{\mu\nu}$ donné par l'Eq. (2.3.19) avec pour constantes de structure le tenseur de Levi-Civita. $G_{\mu\nu}$ est donné par son équivalent pour le cas d'une symétrie abélienne. Remarquons que pour le moment cette théorie introduit 4 bosons de jauge de masse nulle. Nous ne pouvons pas introduire de termes de masse explicites pour les bosons de jauge sans perdre l'invariance de jauge de $\mathcal{L}_{\text{boson}}$ et la renormalisabilité de la théorie.

Secteur fermionique

On se restreindra dans ce paragraphe à la première famille de fermions pour simplifier la description. Les deux familles suivantes s'incorporent de manière identique. L'effet de leur introduction est mentionné à la fin de la section.
Comme l'ont montré les premiers développements des théories de l'interaction faible, l'état de chiralité des fermions est fondamental dans leur manière d'interagir via cette interaction. On peut définir des projecteurs P_L et P_R (pour *Left* et *Right*) par

$$P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \ , \tag{2.4.25}$$

où la matrice de Dirac γ^5 est donnée au début de cette thèse. Ces opérateurs projettent un fermion (spineur de Dirac à quatre composantes) Ψ dans son état de chiralité gauche $\Psi_L = P_L \Psi$ et droite $\Psi_R = P_R \Psi$, ce qui est aisément identifiable en utilisant la représentation chirale pour les matrices de Dirac. Les interactions de jauge conservant la chiralité, il est nécessaire de traiter différemment chacune des projections des fermions. La première famille contient donc 15 fermions : e^-_L, e^-_R, ν_{eL}, u_L, u_R, d_L, d_R, ces quatres dernières particules existant sous trois versions de couleur chacunes. Les charges associées à l'interaction faible permettent de montrer que

$$l_L = \begin{pmatrix} e^-_L \\ \nu_{eL} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \tag{2.4.26}$$

sont des doublets de $SU(2)$ tandis que u_R, d_R, et e^-_R sont des singlets. Cette manière dont les fermions se transforment représente leur "charge" faible.

Le générateur Y de $U(1)_Y$ doit être une combinaison de la charge électrique Q (le générateur de la symétrie électromagnétique $U(1)_{EM}$) et de T_3 le générateur diagonal de $SU(2)_L$. C'est le cas de l'*hYpercharge* $Y = 2(Q - T_3)$, qui possède les bonnes propriétés de commutation pour définir une charge. Les valeurs de ces charges sont rappelées dans le tableau 2.1.

Le lagrangien purement fermionique d'un fermion Ψ en interaction électro-faible avec les quatre bosons de jauge s'écrit donc

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = \bar{\Psi} i \gamma^\mu D_\mu \Psi \ , \tag{2.4.27}$$

avec

$$D_\mu \Psi = \left(\partial_\mu - i g J^a \, A^a_\mu - i g' \frac{Y}{2} B_\mu \right) \Psi \ , \tag{2.4.28}$$

où les J^a sont les générateurs de $SU(2)$ dans la représentation **2** si Ψ décrit un fermion faisant partie d'un doublet et sont nuls dans le cas d'un singlet. On désignera par Y l'opérateur (générateur) d'hypercharge ou encore la valeur propre de cet opérateur pour un fermion Ψ

Particules	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	Y	Q_{EM}
e_L	singlet	doublet l_L	-1	-1
ν_e	singlet	doublet l_L	-1	0
e_R	singlet	singlet	-2	-1
u_L^α	triplet	doublet q_L	$1/3$	$2/3$
d_L^α	triplet	doublet q_L	$1/3$	$-1/3$
u_R^α	triplet	singlet	$4/3$	$2/3$
d_R^α	triplet	singlet	$-2/3$	$-1/3$
gluons g_α^β	octuplet	singlet	0	0
$W_\mu^\pm$	singlet	triplet W	0	± 1
Z_μ	singlet	triplet W	0	0
photon	singlet	singlet	0	0
ϕ^+	singlet	doublet Φ	1	1
ϕ^0	singlet	doublet Φ	1	0

TAB. 2.1: Charges des particules de la première famille sous les générateurs du MS. α et β prennent trois valeurs possibles pour les trois versions de couleurs des quarks. Les triplets de $SU(3)_C$ sont formés chaque fois des mêmes quarks dans leur trois états de couleur.

(voir Table. 2.1). On a aussi défini $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$ afin que $\bar{\Psi}\Psi$ soit un scalaire de Lorentz, c'est à dire un objet invariant sous les transformations de Lorentz [7].

Avec les définitions précédentes pour les spineurs de chiralité gauche et droite, on peut vérifier que

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi &= \bar{\Psi}_L\gamma_\mu\Psi_L + \bar{\Psi}_R\gamma_\mu\Psi_R \ , \\ \bar{\Psi}\Psi &= \bar{\Psi}_L\Psi_R + \bar{\Psi}_R\Psi_L \\ \bar{\Psi}_L\Psi_L &= \bar{\Psi}_R\Psi_R = 0 \ . \end{aligned} \tag{2.4.29}$$

Cela montre que tout terme de masse $\bar{\Psi}\Psi$ (explicite ou induit par mécanisme de Higgs) sera de la forme $\bar{\Psi}_L\Psi_R$ et que tout fermion qui n'existe que dans un seul état de chiralité ne peut avoir de terme de masse. Dans le MS c'est le cas du neutrino.

D'après l'Eq. (2.4.28), on voit que deux constantes de couplage a priori distinctes g et g' sont nécessaires pour décrire cette théorie électro-faible. Notons aussi qu'aucun terme de masse ni pour les fermions ni pour les bosons n'a été introduit pour rester invariant de jauge. Nous allons voir dans la section suivante comment les masses des particules apparaissent dans le MS sans perdre l'invariance de jauge et la renormalisabilité.

2.5 Le secteur du Higgs

La description précédente des théories de jauge ne ressemble pas du tout à la réalité pour le moment et ce pour plusieurs raisons : pour le moment les masses des bosons doivent être nulles pour garantir l'invariance de jauge des lagrangiens. Cela signifie que l'interaction faible du MS a une portée infinie alors que dans la nature à notre énergie, cette interaction est à très courte portée. Il manque aussi dans la description précédente à rendre compte de la masse des fermions, masse qui est très différente d'une famille à l'autre et d'un fermion à l'autre.

Le moyen de rendre compte de ces caractéristique relatives aux masses des particules dans le MS est le secteur du Higgs. Un champ scalaire est introduit, le champ de Higgs, dont la dynamique permet de générer la brisure de la symétrie électro-faible $SU(2)_{\rm L} \times U(1)_{\rm Y} \longrightarrow$

$U(1)_{\mathrm{EM}}$. Cette brisure de symétrie permet de donner une masse aux bosons de jauge Z et W et de donner une masse aux fermions couplés à ce champ. Pour se faire il est nécessaire d'introduire un champ de Higgs qui soit un doublet de $SU(2)$ et dont l'hypercharge $Y(\Phi) = 1$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_+ \end{pmatrix} .$$

Le lagrangien total de l'interaction électro-faible est donné par

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EW}} = \mathcal{L}_{\mathrm{boson}} + \mathcal{L}_{\mathrm{fermion}} + \mathcal{L}_{\mathrm{Higgs}} + \mathcal{L}_{\mathrm{Yukawa}} , \tag{2.5.30}$$

où les deux premiers termes sont donnés dans la section précédente et où les deux derniers sont explicités maintenant.
Le terme $\mathcal{L}_{\mathrm{Higgs}}$ décrit la dynamique du champ scalaire, dynamique qui doit être invariante de jauge sous $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Un champ scalaire obéit à l'équation de Klein-Gordon ce qui donne un lagrangien général composé d'un terme cinétique $(\partial_\mu \Phi)^\dagger \partial^\mu \Phi$ et un terme de potentiel $-V(\Phi, \Phi^\dagger)$, une fonction libre d'ordre inférieur à 4 si l'on impose d'avoir une théorie renormalisable. Pour avoir un lagrangien invariant de jauge, il est nécessaire de remplacer ∂_μ par la dérivée covariante donnée à l'Eq. (2.4.28). On obtient donc pour la dynamique de ce champ scalaire le lagrangien

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Higgs}} = (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - V(\Phi) . \tag{2.5.31}$$

Usuellement on utilise un potentiel de la forme

$$V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 . \tag{2.5.32}$$

ce qui permet de générer la brisure de symétrie. En toute généralité il est possible d'avoir un lagrangien de couplage entre ce champ de Higgs et les fermions sous la forme de *couplages de Yukawa* ou couplages trilinéaires,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Yukawa}} = f^{(e)} \bar{l_L} \Phi e_R + f^{(u)} \bar{q_L} \tilde{\Phi} u_R + f^{(d)} \bar{q_L} \Phi d_R + h.c. , \tag{2.5.33}$$

où les constantes f sont les couplages de Yukawa, paramètres libres du MS et où $\tilde{\Phi} = i\sigma_2 \Phi^*$.

La description mathématique précise de la brisure d'un groupe $SU(2)$ par un doublet est donnée au chapitre prochain et la description précise du cas qui nous occupe est très bien détaillée dans [21]. Donnons ici une description des grandes lignes du mécanisme. Dans le cas où le paramètre $\mu^2 > 0$ dans le potentiel Eq. (2.5.32), le potentiel en “chapeau mexicain” (illustration Fig. 3.1 page 53) oblige le champ scalaire à choisir un état fondamental $\langle\Phi\rangle_0$ (on parle de VEV pour Vacuum Expectation Value) qui ne sera plus invariant sous $SU(2)_L$. Une fois la VEV choisie, par exemple

$$\langle\Phi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

avec $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$, il faut introduire quatre champs scalaires à un degré de liberté chacun (puisque le champ de Higgs avait quatre degrés de liberté) pour décrire les oscillations du champ autour de sa VEV. Trois de ces degrés de liberté seront “avalés” par les champs de jauge A_μ^a qui deviennent après redéfinition des champs massifs. Ils joueront essentiellement le rôle des bosons vecteurs $W^\pm$ et Z_0. En effet, à partir des termes de masses pour les champs A_μ^a et B_μ, il faut diagonaliser la matrice de masse pour connaître les états propres de masse donc les particules physiques. Les bosons $W_\mu^\pm$, Z_μ^0 et le boson sans masse associé au photon A'_μ sont donc reliés aux champs précédents en introduisant un angle de mélange θ_W

$$\begin{aligned} W_\mu^\pm &= A_\mu^1 \mp \frac{i}{\sqrt{2}} A_\mu^2 , \\ Z_\mu &= \cos\theta_W A_\mu^3 - \sin\theta_W B_\mu , \\ A'_\mu &= \sin\theta_W A_\mu^3 + \cos\theta_W B_\mu \end{aligned} \tag{2.5.34}$$

avec

$$\tan\theta_W = \frac{g'}{g} \ . \tag{2.5.35}$$

Comme les masses de Z^0 et $W^\pm$ s'expriment en fonction de cet angle (on montre que $M_W^2 = M_Z^2 \cos^2\theta_W$), on a mesuré dans les collisionneurs LEP et SLAC que [88] $\sin^2\theta_W \simeq 0.23161 \pm 0.00018$.

Le quatrième degré de liberté devient une particule physique, le boson de Higgs, de masse

$$m_h = \sqrt{2}\mu = \sqrt{2\lambda}v \ .$$

Cette particule fait toujours l'objet d'actives recherches en vue de sa détection dans les collisionneurs de particules notamment au Fermilab[5], et au futur LHC[6]. La VEV v étant directement reliée à la constante de Fermi G_F ou aux masses des bosons électro-faible, il a été mesuré [26] que $v = 247$ GeV. Mais la constante d'auto-couplage λ étant inconnue, le MS ne prédit pas la masse du boson de Higgs. Le collisionneur LEP et LEP2 au CERN a permis cependant de contraindre à 95% de confiance

$$m_h \gtrsim 114.4 \text{ GeV} \ . \tag{2.5.36}$$

Pour plus de détails sur les méthodes de production et de détection du bosons de Higgs, on pourra consulter les Refs. [93, 26].

En ré-exprimant le lagrangien $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$ en termes des nouveaux champs, on voit que les termes trilinéaires de Yukawa deviennent des termes de masse pour les fermions mis en jeu (tous sauf le neutrino puisque dans le MS, il n'existe pas de neutrino de chiralité droite. Nous y reviendrons). Les fermions e, u et d acquièrent une masse donnée par $f^{(e,u,d)}v/\sqrt{2}$, masse qui est donc propre à chacun des fermions.

Notons que l'introduction des deux familles de fermions manquante introduit un peu de complexité dans la description. En effet l'invariance de jauge autorise des matrices de masses non diagonale et les états propres de masses ne sont pas forcément états propres de jauge. Il en résulte l'introduction de nouveaux paramètres pour décrire un "mélange entre les états". La matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) décrit le mélange entre les trois familles de quarks et contient au minimum quatre paramètres libres.

2.6 Limites du Modèle Standard de physique des particules

Le Modèle Standard de la physique des particules est une théorie qui a été testée et vérifié à une très grande précision dans les accélérateurs de particules. Il suffit pour le vérifier de consulter le "Particle Data Group" [26] qui recense les mesures les plus récentes en physique des particules. Nous allons cependant donner une brève description des principaux problèmes de ce modèle qui font qu'il est nécessaire d'aller au-delà pour décrire la physique des particules à des énergies grandes devant le TeV. Parmi ces problèmes, un grand nombre trouvent une solution dans les théories de Grande Unification supersymétriques (chapitre 5).

2.6.1 Une théorie limitée en énergie ?

Notons Λ_{MS} l'échelle d'énergie limite au-delà de laquelle le MS n'est plus valable et étudions les conséquences d'une coupure Λ infinie. Dans l'approche du groupe de renormalisation, une constante de couplage λ n'est pas une constante mais dépend de l'énergie μ des particules mises en jeu. Nous en reparlerons dans le chapitre 5 à propos de l'évolution des couplages du

[5] `http ://www.fnal.gov/` .
[6] `http ://lhc-new-homepage.web.cern.ch/lhc-new-homepage/` .

MS. Ainsi la constante de couplage λ de l'Eq. (2.5.32) évolue suivant les équations du groupe de renormalisation [27]

$$\mu \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu} = \beta(\lambda) = \frac{3}{2\pi^2}\lambda^2 + \cdots \tag{2.6.37}$$

si l'on ne considère que la contribution à une boucle. Ce qui est mesurable est la valeur de cette constante à l'échelle d'énergie v par exemple. La solution est une fonction $\lambda(\mu)$ monotone et croissante

$$\lambda^{-1}(\mu) = \lambda^{-1}(v) - \frac{3}{2\pi^2} \ln \frac{\mu}{v} \ . \tag{2.6.38}$$

La théorie est correctement définie tant que cette constante de couplage reste finie

$$\lambda(\mu) < \infty \ \Leftrightarrow \ \mu \leq \Lambda_{\mathrm{MS}} \ .$$

Définissons le *pôle de Landau* $\Lambda_{\mathrm{landau}}$ comme la limite supérieure de l'échelle de coupure Λ_{MS} de validité du MS et défini par $\lambda^{-1}(\Lambda_{\mathrm{landau}}) = 0$. Grâce à l'équation précédente,

$$\Lambda_{\mathrm{landau}} \sim v\, e^{2\pi^2/3\lambda(v)} \ . \tag{2.6.39}$$

On voit donc que pour que le pôle de Landau soit infini et que donc le MS ne soit pas limité en énergie, il faut que la théorie soit *triviale* à basse énergie c'est-à-dire que $\lambda(v) = 0$. En pratique, cela signifie que à une énergie inférieure au pôle de Landau, il y a nécessairement une échelle de nouvelle physique.

Le pôle de Landau peut être ré-exprimé en fonction de la masse du boson de Higgs

$$\Lambda_{\mathrm{landau}} \sim v\, e^{4\pi^2 v^2/3m_h^2} \ , \tag{2.6.40}$$

et la limite inférieure sur la masse du Higgs donnée à l'Eq. (2.5.36) permet de donner une limite supérieure sur l'échelle de nouvelle physique au delà de laquelle le MS n'est plus valide. On trouve que cette échelle

$$\Lambda_{\mathrm{MS}} \lesssim \Lambda_{\mathrm{landau}} \lesssim 6 \times 10^{28} \ \mathrm{GeV} \ , \tag{2.6.41}$$

ce qui est très supérieur à la masse de Planck.

De plus, le MS n'inclut pas une description quantique de la gravitation ce qui est le premier de ses problème. Par un raisonnement dimensionnel, on s'attend à ce que ce manque deviennent crucial pour des énergies approchant ou dépassant la masse de Planck. La description quantique de la gravité est un problème non résolu même si les théories des supercordes [17] ou de la gravité quantique à boucles [16] sont des candidats intéressants. Dans tous les cas, on peut dire que la limite en énergie de validité du MS vérifie

$$\Lambda_{\mathrm{MS}} < m_{\mathrm{Pl}} \ .$$

Il n'y a donc a priori pas de raison de considérer que le MS ne soit pas valide jusqu'à la masse de Planck. Nous allons voir dans la section suivante que cela pose un gros problème de naturalité.

2.6.2 Les problèmes du secteur du Higgs

Le secteur du Higgs pose d'autres problèmes : l'emploi de champs scalaires n'est en effet pas sans danger pour la théorie. Le problème le plus évident de ce secteur est le fait que pour le moment aucune particule scalaire fondamentale n'a encore été détectée. Or le mécanisme de Higgs est basé sur l'existence de telles particules.

Le second problème est appelé "*problème de hiérarchie*" et concerne la masse des champs scalaires. Cette masse possède des contributions quantiques qui tendent à la pousser à des énergies de l'ordre de l'échelle Λ_{MS} de coupure de la théorie. En effet, la masse du champ de Higgs présente des contributions similaires à celle donnée en Fig. 2.2.

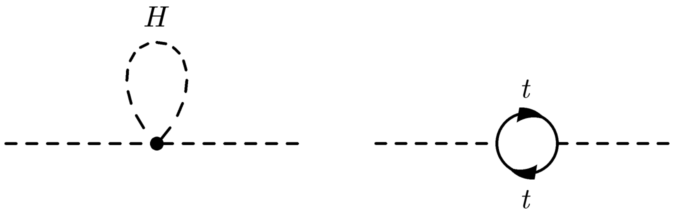

FIG. 2.2: Graphes de Feynman à une boucle contribuant à la masse du champ de Higgs. Ce sont les contributions dominantes car le Higgs se désintègre principalement dans les particules de grande masse. A gauche, une boucle du champ de Higgs lui-même (interaction ϕ^4), à droite une boucle de quark *top* permise par les couplage de Yukawa entre le Higgs et les fermions.

Cela qui a pour conséquence de générer des corrections à la masse fondamentale m_0 (inconnue) du champ scalaire de l'ordre de Λ. Plusieurs corrections contribuent à la masse effective du champ de Higgs. Il y a des contributions positives, car venant d'une boucle fermionique, notamment celle du quark *top* et des contributions négatives venant des bosons W, Z et du boson de Higgs lui même, de telle sorte que [27]

$$\delta m_h^2 = \frac{3\Lambda^2}{8\pi^2 v^2}\left[4m_t^2 - 2M_W^2 - 4M_Z^2 - m_h^2 + O\left(\log\frac{\Lambda}{\mu}\right)\right] . \qquad (2.6.42)$$

Seule la contribution du Higgs est utilisée dans la suite. A basse énergie, la masse effective est donc la différence

$$m_h^2 = m_0^2 + \delta m_h^2 \simeq m_0^2 - \alpha\,\frac{\lambda\Lambda^2}{16\pi^2} , \qquad (2.6.43)$$

où m_0 est la masse du Higgs dans la théorie fondamentale à haute énergie et α est de l'ordre de l'unité.

Supposons maintenant que cette échelle est de l'ordre de la masse de Planck. Il n'est alors pas naturel que la masse du champ de Higgs soit de l'ordre de 100 GeV. Pour que ce soit le cas, il faut que m_0^2 soit ajusté à une valeur donnée avec une précision de 30 ordres de grandeur ce qui n'est pas satisfaisant. Cela pose un problème de naturalité au sens où t'Hooft l'a énoncé :
Une théorie est naturelle si, pour tous ses paramètres p petits devant l'échelle fondamentale Λ, la limite $p \to 0$ correspond à une augmentation de la symétrie du système.
Or ce n'est pas le cas du paramètre m_h.

Pour régler ce problème, on pourrait poser que l'échelle de nouvelle physique est de l'ordre de l'échelle de brisure électro-faible ce qui est du même ordre de grandeur que la masse du boson de higgs. Dans ce cas, effectivement le problème disparaît. Mais nous allons voir que cette solution n'est plus valable dans le cadre de la GUT, où l'on tente de décrire les interactions jusqu'à $M_{\text{GUT}} \sim 10^{16}$ GeV. Dans ce cas (et ce cadre), le problème reste entier : il est reformulé à la section 5.3.

Ce problème du MS ou de la GUT est naturellement résolu dans le cadre supersymétrique (voir chapitre 5) car de nouvelles contributions apparaissent parfaitement égales (par symétrie) mais de signe opposé. Elles viennent alors compenser exactement les corrections existantes.

2.6.3 Masse des neutrinos

On a longtemps cru que les neutrinos étaient de masse nulle. Il est encore aujourd'hui difficile de sonder ces particules du fait qu'elles interagissent très faiblement avec les autres particules de matière. Il a cependant été mis en évidence récemment que les neutrinos oscillent [116] c'est-à-dire peuvent changer de saveur au cours du temps. Ces oscillations ont été observées dans les neutrinos venant du soleil et les neutrinos créés dans l'atmosphère. Ce qui est plus intéressant est que le fait qu'ils oscillent implique qu'il y a une différence de masse entre les différentes particules physiques. Ces différences de masse mesurées

$$\begin{aligned} \Delta m_{12}^2 &= (1.4 - 3.3) \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \ , \\ \Delta m_{23}^2 &= (7.2 - 9.1) \times 10^{-5} \text{ eV}^2 \ , \end{aligned} \tag{2.6.44}$$

où les barres d'erreurs sont données à trois σ. En utilisant ces résultats ainsi que d'autres exclusions obtenues par des expériences complémentaires, il est aujourd'hui possible d'écrire que

$$0.05 \text{ eV} \lesssim \sum_{\text{saveur}} m_\nu \lesssim 0.23 \text{ eV} \ , \tag{2.6.45}$$

la limite supérieure étant obtenue à 95% de confiance par l'expérience WMAP[143]. Cette contrainte doit être remontée à quelques eV pour avoir une contrainte qui ne soit pas indépendante des modèles théoriques. Notons que l'interprétation de ces résultats nécessiterait plus de détails, notamment sur les différents scenarios de masse possibles. Voir le chapitre 6 pour plus de détails et de références.

Le plus économique pour expliquer ces observations serait a priori d'étendre le MS en introduisant trois nouveaux singlets de $SU(2)_L$: ν_R^e, ν_R^μ et ν_R^τ. Mais dans ce cas, il n'est pas naturel d'observer une telle différence de masse entre les neutrinos et les autres fermions du MS, si ces neutrinos possèdent des masses de Dirac via le mécanisme de Higgs comme les autres fermions. Cela nécessiterait une valeur très petite pour les couplages de Yukawa correspondants, ce qui pose la encore un problème de naturalité. Une solution, le mécanisme de “see-saw” est présentée au chapitre 6.

2.6.4 Complexité du MS et paramètres libres

Le MS possède aussi des problèmes d'arbitraire. En effet, sa formulation nécessite en tout l'introduction de 19 paramètres voire 26 si l'on introduit un neutrino droit additionnel. Tous ces paramètres sont totalement libres et doivent être mesurés expérimentalement, ce qui ne décrit pas une théorie très prédictive.
De plus, il est basé sur un grand nombre de postulats qu'il n'explique pas :

- Pourquoi trois familles de particules ?
- Pourquoi le MS est-il basé sur un groupe non simple, constitué de trois facteurs, avec trois constantes de couplage totalement différentes ?
- Pourquoi existe t-il une hiérarchie de masse entre les trois familles de fermions ?

Une autre observation non expliquée est celle de la quantification de la charge électromagnétique. Les charges de la symétrie électromagnétique basée sur le groupe $U(1)_{\text{EM}}$ sont a priori totalement libres d'être réelles. Rien n'empêche donc a priori une charge du proton de α fois celle de l'électron, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. En réalité, les charges observées dans la nature sont quantifiées, $Q(p) = -Q(e)$, $Q(\mu) = Q(e)$, $\dots$. Ceci sera très simplement expliqué dans le cadre de la GUT par des raisons de symétries (voir chapitre 5).

Pour tous ces problèmes, il est aujourd'hui clair que pour décrire l'univers primordial à des énergies grandes devant le TeV, il est nécessaire de se placer dans un cadre plus large qui englobe le MS et résout ses problèmes majeurs. Dans la suite de ce travail, le cadre de la Grande Unification supersymétrique est utilisé pour décrire la physique à des énergies entre le TeV et la masse de Planck. Il est présenté au chapitre 5. Ce cadre peut naturellement être plongé dans une théorie des cordes afin de décrire la physique des énergies au-delà de la masse de Planck.

Chapitre 3

Brisures de symétrie et défauts topologiques

Sommaire

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'illustrer le mécanisme des brisures de symétrie et d'introduire les outils qui permettent d'étudier la formation et la nature des défauts topologiques qui se forment lors de ces brisures de symétrie. Le but est de pouvoir construire des schémas de brisure de symétrie dans le cadre de la GUT et d'étudier la formation de défauts topologiques dans ce cadre.

Nous allons dans un premier temps montrer le lien entre représentations du champ de Higgs et génération de brisures de symétrie. Dans un second temps, nous illustrerons la formation de défauts topologiques lors de ces brisures de symétrie et nous introduirons le formalisme des groupes d'homotopie pour l'étude de leur formation. Ensuite nous présenterons les conséquences observationnelles des défauts topologiques. Enfin, nous présenterons une autre classe de défauts, non topologiques, défauts qui peuvent aussi se former lors des brisures de symétrie dans le cadre de la GUT.

Je ferai référence aux quelques ouvrages suivants : [21] et [36] pour les méthodes de théorie des groupes, [31] pour le formalisme de la théorie des champs à température finie, [30] pour une revue générale sur les défauts topologiques, [35] et [92] pour les outils plus avancés concernant les diagrammes de Dynkin. On pourra consulter [32], [33] et [34] pour des bases mathématiques concernant les groupes d'homotopie et la topologie.

3.2 Représentations de Higgs et brisures de symétrie

Dans cette section, les calculs suivent ceux fait dans les références [21] et [30]. Nous allons par quelques exemples illustrer des propriétés importantes des brisures de symétrie et notamment leur liens avec les représentations du Higgs. Nous le ferons en explicitant quelques cas très simple. Pour aller plus loin, il est conseillé de consulter [101] pour approche similaire à celle suivie dans cette section mais appliquée à des groupes utiles pour la GUT [$SU(n)$, $SO(n)$] ou [92] pour les techniques des diagrammes de Dynkin. Un certain nombre de notions utiles sont introduites à la section 2.3.1 du chapitre précédent.

3.2.1 Cas abélien : $U(1) \to I$

Commençons par illustrer le mécanisme de Higgs[1] sur l'exemple le plus simple possible : celui de la brisure d'une symétrie $U(1) \to I$. Cette brisure de symétrie qui est la plus simple à décrire est une brisure très courante dans les modèles de Grande Unification (GUT) puisque tous les groupes de Lie sur lesquels sont basées les théories de GUT contiennent et donc peuvent être brisés en $U(1)$. Ces facteurs abéliens doivent en général être ensuite brisés pour obtenir le MS, hormis s'il s'agit du facteur $U(1)_Y$.

Lagrangien et potentiel

Le groupe $U(1)$ local rassemble toutes les transformations qui modifient la phase d'un champ par un paramètre $\epsilon(x^\mu)$ qui dépend de l'espace-temps. On a vu dans le chapitre précédent comment construire un lagrangien invariant sous cette symétrie, décrivant un champ scalaire ϕ de charge q en interaction avec un champ de jauge A^μ, ces champs se transformant sous $U(1)$ via $\phi \to e^{iq\epsilon(x)}\phi$ et $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \epsilon(x)$. On a obtenu

$$\mathcal{L} = (D^\mu \phi)^*(D_\mu \phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V(\phi) \ , \tag{3.2.1}$$

avec

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= (\partial_\mu - iqA_\mu)\phi \ , \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ . \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

La brisure de symétrie peut être générée par un potentiel $V(\phi)$ usuel dit en "chapeau mexicain"

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^* \phi + \lambda(\phi^*\phi)^2 \ . \tag{3.2.3}$$

Ce potentiel est représenté sur la Fig. 3.1 pour une valeur positive (courbe jaune) et négative (courbe bleue) de μ^2.

[1]Malgré cette dénomination, ce mécanisme a été suggéré pour la première fois par Anderson (1958) dans le cadre de système de matière condensée. Il a ensuite été développé par de nombreux autres physiciens dont Englert et Brout, Guralnik, Hagen et Kibble, Higgs [28] dans le cadre de la théorie des champs.

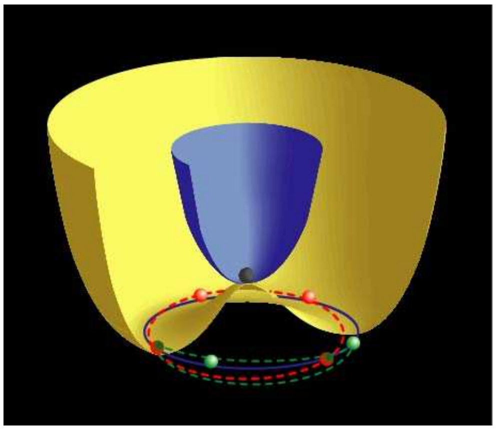

FIG. 3.1: Potentiel subit par un champs de Higgs abélien complexe avant (bleu) et après (jaune) la brisure d'une symétrie $U(1)$. Cela illustre que l'état fondamental $\langle 0|\phi|0\rangle$ passe de 0 à une valeur non nulle. L'ensemble des vides possibles forme un cercle à $|\phi|$ constant. Figure de P. Peter et A. Gangui.

Corrections thermiques au potentiel

La brisure de symétrie est induite lorsque l'on passe d'une configuration où $\mu^2 < 0$ (potentiel bleu sur la Fig. 3.1) au cas $\mu^2 > 0$ (potentiel jaune sur la Fig. 3.1). Cette transition apparaît naturellement lors du refroidissement de l'univers (voir section 1.3) : la théorie des champs à température finie (voir [31]) permet de montrer que les corrections thermiques aboutissent à un potentiel [30]

$$V_{\rm eff}(\phi, T) = -\mu_{\rm eff}^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4 \ , \tag{3.2.4}$$

avec

$$\mu_{\rm eff}^2 = \frac{\lambda}{3}\left(12v^2 - T^2\right) \ . \tag{3.2.5}$$

On peut donc définir une température critique $T_{\rm crit} \equiv \sqrt{12}v = \sqrt{12\mu^2/\lambda}$ en dessous de laquelle la transition de phase se produit. En dessous de cette température, la norme du champ de Higgs dans le nouvel état fondamental doit vérifier

$$|\langle\phi\rangle_0| = \frac{v}{\sqrt{2}} \quad \text{avec} \quad v \equiv \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \ , \tag{3.2.6}$$

où $\langle\phi\rangle_0$ désigne la VEV[2] du champ, c'est-à-dire la valeur du champ dans le minimum du potentiel. Si on note $|0\rangle$ l'état fondamental, alors $\langle\phi\rangle_0 \equiv \langle 0|\phi|0\rangle$. La phase du champ quant à elle est libre. Une fois un "choix" de phase fait, le nouvel état fondamental n'est donc plus invariant sous une transformation de $U(1)$ et la symétrie est spontanément brisée.

Spectre des particules

Pour étudier le spectre (les masses) des particules après la transition de phase, il est utile de reparamétrer le problème en introduisant deux champs réels $\rho(x)$ et $\xi(x)$ afin de décrire séparément les deux degrés de liberté du champ initial. Posons donc

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[v + \rho(x)\right] e^{i\xi(x)/v} \ . \tag{3.2.7}$$

[2]Cet acronyme vient de l'anglais *Vacuum Expectation Value.*

On peut maintenant ré-écrire le lagrangien précédent en terme des nouveaux champs. On peut vérifier que

$$D_\mu\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\xi(x)/v}\left[\partial_\mu\rho(x) - ie(\rho+v)\right]B_\mu \ . \tag{3.2.8}$$

où l'on a défini $B_\mu = A_\mu - \frac{1}{ev}\partial_\mu\xi(x)$. Dans ce cas le lagrangien précédent s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\rho)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\rho^2 - \lambda v\rho^3 - \frac{1}{4}\lambda\rho^4 \\ + \frac{1}{2}(ev)^2B_\mu B^\mu - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2B_\mu B^\mu\rho\,(2v-\rho)\ ,\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

où l'on a défini $B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$. On voit que le champ $\xi(x)$ a disparu de la description (pas de terme de masse, pas de terme cinétique) ce qui montre que ce boson n'est pas physique : on parle de *pseudo-boson de Goldstone*. En réalité il est devenu la composante longitudinale du nouveau champ de jauge B_μ, ce qui en fait un champ massif, de masse $M_B = \sqrt{2}ev$, à la différence du champ de jauge initial A_μ. En ce qui concerne le degré de liberté associé au champ $\rho(x)$, il possède un terme cinétique et est massif : il correspond donc à une particule physique, appelée *boson de Higgs*. Sa masse est $m_h = \sqrt{2}\mu$. On dit alors que le groupe $U(1)$ est totalement brisé puisque tous les bosons de jauge (ici il n'y en a qu'un seul) sont devenu massifs.

3.2.2 Cas non abélien : brisures de $SU(2)$

Pour voir le lien entre représentation et schémas de brisure, il est nécessaire d'étudier en détail la brisure d'un groupe non-abélien, le plus simple étant $SU(2)$. En effet, un champ de Higgs dans la représentation fondamentale **2** brise $SU(2)$ en l'identité I, cela se note $SU(2) \xrightarrow{\mathbf{2}} I$ tandis qu'un Higgs dans la représentation adjointe **3** brise $SU(2)$ en sont sous-groupe $U(1)$, ce qui est noté $SU(2) \xrightarrow{\mathbf{3}} U(1)$. C'est ce que nous allons illustrer maintenant.

$\mathbf{SU(2) \xrightarrow{2} I}$

On peut facilement généraliser le mécanisme de Higgs au cas non abélien. Dans le cas d'une théorie invariante sous $SU(2)$ et d'un champ de Higgs dans la représentation fondamentale **2**, les champs sont des doublets de champs complexes $\phi = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$ et le lagrangien de la théorie s'écrit

$$\mathcal{L} = (D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - V(\phi)\ , \tag{3.2.10}$$

avec

$$\begin{aligned}V(\phi) &= -\mu^2(\phi^\dagger\phi) + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2\ ,\\ D^\mu\phi &= \left(\partial_\mu - ig\frac{\sigma_a}{2}A^a_\mu\right)\phi\ ,\\ F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\lambda^{abc}A^b_\nu A^c_\mu\ ,\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

où a, b, c prennent les valeurs $1, 2, 3$ et où λ^{abc} sont les constantes de structure de $SU(2)$ (voir section 2.3.1) et les σ^a sont les trois matrices de Pauli génératrices de $SU(2)$.

Là encore, lorsque $\mu^2 > 0$, le potentiel $V(\phi)$ possède un minimum qui vérifie

$$\langle\phi^\dagger\phi\rangle_0 = v^2/2 \quad \text{avec} \quad v = \sqrt{\mu^2/\lambda}. \tag{3.2.12}$$

On peut choisir que le vide sera de la forme

$$\langle\phi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix} . \tag{3.2.13}$$

Comme dans le cas abélien, pour étudier les conséquences phénoménologiques de la brisure de symétrie, il faut procéder comme suit [21].

1. Définir quatre nouveaux champs $\eta(x)$ et $\xi^a(x)$ pour décrire les fluctuations autour du vide et introduire une matrice $U(x)$ de rotation pour se placer dans la jauge unitaire telle que

$$\phi = U^{-1}\phi^u = \exp\left(i\frac{\sigma_a}{v}\cdot\xi^a\right)\begin{pmatrix}0\\ \frac{v+\eta(x)}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} . \tag{3.2.14}$$

2. Ecrire le lagrangien avec les nouveaux champs $\phi^u = U(x)\phi$, et B^a_μ tels que

$$\sigma_a B^a_\mu = U\frac{\sigma_a}{2}A^a_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}[\partial_\mu U(x)]U^{-1} \tag{3.2.15}$$

l'intérêt étant qu'alors les expressions des dérivées covariantes et du tenseur éléctromagnétique restent inchangées en remplaçant A^a_μ par B^a_μ, et D_μ devient $U^{-1}(x)D_\mu$. Le lagrangien de l'Eq. (3.2.10) prend la forme

$$\mathcal{L} = (D^\mu\phi^u)^\dagger(D_\mu\phi^u) + \frac{\mu^2}{2}(v+\eta)^2 - \frac{\lambda}{4}(v+\eta)^4 - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} . \tag{3.2.16}$$

3. Pour compter le nombre de degré de liberté qui ont acquis une masse, il faut constater que le terme cinétique fait apparaître un terme quadratique en $B^a_\mu B^{a\mu}$: tous les degrés de liberté ont acquit une masse : le groupe $SU(2)$ est totalement brisé.

Une autre manière de voir que le groupe est totalement brisé est d'utiliser la propriété suivante :

<u>*Propriété*</u> 3.1 : *Soit un groupe G sous lequel est invariant un lagrangien donné. L'ordre de G est le nombre N de ses générateurs J_a. Un degré de liberté est brisé par la VEV $\langle\phi\rangle_0$ d'un champ de Higgs lorsque pour un générateur J_a donné,*

$$J_a\langle\phi\rangle_0 \neq 0 . \tag{3.2.17}$$

Si on note par N_{B} le nombre de degré de liberté brisés, l'ordre du groupe non brisé après la brisure de symétrie est donné par $N_{\mathrm{NB}} = N - N_{\mathrm{B}}$.

On peut aller plus loin et regarder précisemment quel est le groupe laissé non brisé après la brisure de G.
<u>*Définition*</u> : On définit le groupe non brisé H comme celui qui laisse invariant la VEV $\langle\phi\rangle_0$. Ce groupe (appelé "little group" en anglais) dépend évidemment de la VEV choisie. Parmis les générateurs J_a du groupe G, certains seront générateurs du groupe H. Si on note K_a ces générateurs, et U un élément quelconque de H,

$$\begin{aligned} U\langle\phi\rangle_0 = \langle\phi\rangle_0 \;&\Leftrightarrow\; \exp\left[-i\sum_{a=1}^{N_{\mathrm{NB}}}\varepsilon_a K_a\right]\langle\phi\rangle_0 = \langle\phi\rangle_0 \ ,\\ &\Leftrightarrow\; \forall\, a \leq N_{\mathrm{NB}} \ ,\ K_a\langle\phi\rangle_0 = 0 \ , \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

où ε_a sont les paramètres de la transformation U. Cela montre que les générateurs vérifiant l'Eq. (3.2.17) sont les générateurs du groupe qui laisse la VEV invariante et qui est donc non brisé.

Pour conclure l'étude de la brisure de $SU(2)$ par un doublet, pour le vide $\langle\phi\rangle_0$ donné à l'Eq. (3.2.13), toutes les matrices de Pauli satisfont à l'Eq.(3.2.17) et $SU(2)$ est totalement brisé, ie brisé en l'identité.

$\mathbf{SU(2) \overset{3}{\to} U(1)}$

On a vu dans le paragraphe précédent que dans le cas où le Higgs est dans la représentation **2**, le groupe $SU(2)$ est totalement brisé. Mais dans le cas où le champ de Higgs est dans la représentation **3**, le champ de Higgs n'est plus un vecteur à deux composantes complexes mais un vecteur à trois composantes réelles

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \ .$$

Cette représentation existe du fait que $SU(2)$ est isomorphe à $SO(3)$ [on note $SU(2) \sim SO(3)$] ce dernier étant le groupe des rotations dans l'espace à trois dimensions. En minimisant le potentiel de l'Eq. (3.2.11), on obtient la contrainte que $|\langle\phi\rangle_0| = v/\sqrt{2}$. On peut choisir d'écrire l'état fondamental comme

$$\langle\phi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \ , \tag{3.2.19}$$

et remarquer qu'il n'est effectivement plus invariant sous $SO(3)$ car il pointe dans une direction privilégiée quoique choisie arbitrairement.

Pour voir si le groupe $SU(2)$ est brisé, il faut définir $\phi'(x) = \phi(x) - \langle\phi\rangle_0$ et développer le terme cinétique $[D_\mu\phi]^2$ où es dérivées covariantes ne s'écrivent plus avec les matrices de Pauli mais les générateurs de $SU(2)$ en représentation **3** donnés en annexe A. On peut alors voir qu'il n'apparaît aucun terme quadratique en ${A^3}_\mu$. On peut suivre la méthode de la propriété 3.1 et vérifier qu'un degré de liberté est non brisé puisque

$$J_3\langle\phi\rangle_0 = 0 \ .$$

J_3 est diagonal donc est générateur d'un groupe non brisé $U(1) \subset SU(2)$.

La comparaison avec le paragraphe précédent illustre une propriété importante des brisures de symétrie : l'emploi d'un champ de Higgs dans une représentation ou une autre permet d'obtenir des schémas de brisure différents. Nous verrons cependant à la section 5.3.4 qu'une même représentation peut aboutir à deux schémas de brisure distincts pourvu que les potentiels des champs de Higgs soient choisis de manière appropriée.

$\mathbf{SU(2) \overset{3}{\to} U(1) \overset{3}{\to} Z_2}$

Cet exemple permet d'illustrer l'apparition de groupes discrets dans les brisures de symétrie. Ces groupes discrets ont plusieurs application à la cosmologie comme nous allons le voir au cours de cette thèse : formation de murs de domaine (voir plus loin), et stabilité du proton et de la particule supersymétrique la plus stable dans les SUSY GUTs.

Précisons tout de suite que la notation usuelle $SU(2) \overset{\mathbf{3}}{\to} U(1) \overset{\mathbf{3}}{\to} Z_2$ peut paraître ambiguë. Evidemment le triplet qui permet la seconde brisure de symétrie et qui permet d'obtenir un groupe discret n'est pas un triplet de $U(1)$ mais bien du groupe initial $SU(2)$. Cela n'aurait d'ailleur aucun sens de parler d'un triplet de $U(1)$. Cet exemple illustre donc la manière de construire un schémas de brisure utilisant plusieurs champs de Higgs.

> Propriété 3.2 : *Tous les champs de Higgs utilisés pour construire un schémas contenant plusieurs brisures sont contenus dans une représentation du groupe initial.*

La première étape a déjà été donnée au paragraphe précédent. Le premier triplet de Higgs (notons le φ) permet de briser $SU(2)$ via la VEV

$$\langle\varphi\rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_\varphi \end{pmatrix} . \tag{3.2.20}$$

Introduisons un second triplet de Higgs ψ et définissons un champ de Higgs global $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ et des générateurs étendus

$$L_a = \begin{pmatrix} \sigma_a/2 & 0 \\ 0 & \sigma_a/2 \end{pmatrix} .$$

Si l'on considère un lagrangien pour les deux champs de Higgs, en toute généralité, celui-ci peut introduire un couplage entre les deux

$$V(\varphi, \psi) = -\mu_\varphi^2(\varphi^\dagger\varphi) + \lambda_\varphi(\varphi^\dagger\varphi)^2 - \mu_\psi^2(\psi^\dagger\psi) + \lambda_\psi(\psi^\dagger\psi)^2 + g(\varphi\cdot\psi)^2. \tag{3.2.21}$$

Pour minimiser le dernier terme de ce lagrangien, on doit choisir pour le champ ψ une VEV orthogonale à celle de φ par exemple

$$\langle\psi\rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_\psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \langle\Phi\rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_\varphi \\ 0 \\ v_\psi \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{3.2.22}$$

Pour étudier le nombre de degrés de liberté brisés, on peut vérifier qu'aucun des générateurs L_a n'annule la VEV de Φ. On en déduit qu'aucun groupe de Lie reste non brisé. Si l'identité est le seul élément de $SO(3)$ (groupe des rotations dans l'espace) qui laisse $\langle\Phi\rangle_0$ invariant il n'en est pas de même pour les éléments de $SU(2)$. Si un élément $U \in SU(2)$ correspond à une rotation $R(U) \in SO(3)$, alors

$$R_{ij}(U) = \mathrm{Tr}[U\sigma_i U^{-1}\sigma_j] , \tag{3.2.23}$$

et $-U \in SU(2)$ est associé à la même rotation $R(U) \in SO(3)$. On en déduit que si $I \in SO(3)$ est le seul élément laissant $\langle\Phi\rangle_0$ invariant, alors $\{I, -I\} \equiv Z_2$ de $SU(2)$ laisse invariant la VEV de Φ. Cela illustre sur un exemple simple la possibilité de générer par brisure de symétrie des groupes discrets tels que Z_2. Les groupes discrets Z_n et ce groupe en particulier présente un intérêt pour la construction de modèles de GUT réalistes comme nous le verrons au chapitre 6.

3.2.3 Pour aller plus loin : les diagrammes de Dynkin

Dans la section précédente, nous avons explicité différentes brisures de symétrie pour des groupes très petits. Pour des schémas de brisure de symétrie de groupes plus complexes tels que ceux qui apparaissent en GUT, ces dérivations "pédestres" ne sont pas assez puissantes.

Les diagrammes de Dynkin associés aux labels de Dynkin permettent un traitement plus automatique des brisures de symétrie pour des groupes de rang supérieur à 4. Ce formalisme permet de

- trouver les sous-groupes (réguliers) d'un groupe de symmétrie G donné. Cela est nécessaire pour savoir à partir de quel groupe de GUT, il est possible d'obtenir le groupe du MS.
- décomposer une représentation de G dans les représentations de chacun de ses sous-groupes. Cela permet de savoir quelle représentation utiliser pour générer un brisure de symétrie donnée. Cela permet aussi de savoir dans quelle représentation il est possible de ranger les fermions du MS afin de retrouver les bons nombres quantiques des particules sous le groupe du MS.

Ce formalisme est expliqué en détail dans la revue de R. Slansky [92] ainsi que dans [35]. Dans la première référence, on trouve aussi un grand nombre de résultats de l'utilisation de ces diagrammes pour les groupes et les représentations usuels. Nous utiliserons ces résultats et quelques-uns d'entres eux sont rappelés en annexe A.

3.3 Brisure de symétrie et formation des défauts topologiques

Le but de cette section est d'étudier la formation des défauts topologiques et de la relier à la physique des brisures de symétrie. On suivra le livre de Vilenkin et Shellard [30] et le livre de Nakahara [32] pour le formalisme mathématique nécessaire.

3.3.1 Rappels de topologie

Dans cette section, nous allons utiliser certains concepts d'ensemble et de topologie qu'il faut définir [32]. Nous introduisons aussi les propriétés utiles pour la suite de ce chapitre.

Applications

<u>*Définition*</u> : Une application f d'un ensemble X vers un ensemble Y, $X \xrightarrow{f} Y$ associe à tout élément $x \in X$, un élément $y \in Y$ appelé image de x. Inversement x est appelé antécédent de y.

<u>*Définition*</u> :
(a) Une application f est dite *injective* si tout élément $y \in Y$ possède au plus un antécédent.
(b) f est dite *surjective* si tout élément $y \in Y$ possède au moins un antécédent.
(c) f est dite *bijective* si elle est injective et surjective. Dans ce cas tout élément de Y possède exactement un antécédent dans X.

<u>*Définition*</u> : une application f entre deux groupes X et Y qui préserve la structure de groupe de X et Y est appelée *homomorphisme*. Si de plus et qui est bijective, cette application est un *isomorphisme* et X et Y sont dit *isomorphe*, ce qui sera noté par la suite $X \sim Y$.

<u>*Propriété*</u> : Une application f entre deux ensembles X et Y est bijective si et seulement si l'image de l'application $\mathrm{Im}(f) \equiv f(X)$ est égale à Y et que le noyau de f, $\mathrm{Ker}(f) \equiv \{x \in X | f(x) = 0\}$ se restreint à l'élément nul 0.

Classe d'équivalence et groupe quotient

Définition : Une relation d'équivalence $\sim$ est une relation qui vérifie

- $a \sim a$,
- Si $a \sim b$, alors $b \sim a$,
- Si $a \sim b$, et $b \sim c$, alors $a \sim c$.

Soit un ensemble X, muni d'une relation d'équivalence $\sim$. X est composé de sous-ensemble mutuellement disjoint appelés *classes d'équivalence*. Pour tout élément $a \in X$, la classe $[a]$ est définie par l'ensemble des éléments x tels que $x \sim a$

$$[a] \equiv \{x \in X | x \sim a\} \ . \tag{3.3.24}$$

Tout élément quelconque de $[a]$, par exemple a, est un représentant de la classe.

Définition : Un *espace quotient* $X/\sim$ est défini par une relation d'équivalence $\sim$ dans l'ensemble X par un ensemble contenant un représentant de chaque classe d'équivalence.

Définition : Considérons un groupe G et un de ses sous-groupes H. On introduit une relation d'équivalence $\sim$ entre deux éléments g, g' de G par

$$g \sim g' \ \Leftrightarrow \ \exists h \in H \ , \quad g' = g * h \ .$$

La classe $[g]$, notée gH, est donc

$$gH \equiv \{g * h | h \in H\} \ . \tag{3.3.25}$$

Pour une classe gH donnée, toute autre classe $g'H$ vérifie $gH = g'H$ ou $gH \cap g'H = 0$.
On note G/H l'espace quotient de G pour cette relation d'équivalence (forcément dépendant de H). Cet espace est un groupe, le *groupe quotient*, si H est un *sous-groupe normal*, c'est-à-dire si

$$\forall g \in G \ , \forall h \in G \ , \quad ghg^{-1} \in H \ ,$$

et en munissant l'ensemble d'une opération $*$ telle que $(gH) * (g'H) = (g * g')H$.

Définition : Soit un groupe G. On peut définir son groupe de recouvrement universel $\tilde{G}$ par le fait que [34] $\widetilde{G}$ contient un sous-groupe invariant discret N tel que $G \sim \widetilde{G}/N$.

Variété et connexité

Définition : Une variété est un espace localement isomorphe à $\mathbb{R}^n$ c'est à dire un espace qui peut se déformer continuement en un espace euclidien. Cependant, elle n'est pas forcément isomorphe à $\mathbb{R}^n$ globalement.

Définition :
(a) Une variété X est dite *connexe* si elle ne peut être écrite comme la réunion d'ensembles ouverts d'intersection nulle.
(b) Un ensemble X est dit *connexe par arc* lorsque pour tout point x_0 et $x_1 \in X$, il existe un chemin α (c'est-à-dire une application de $[0, 1]$ dans X) restant dans X et tel que $\alpha(0) = x_0$ et $\alpha(1) = x_1$.
Un théorème assure [32] que tout groupe connexe par arc est connexe. A quelques cas pathologiques près, la réciproque est vraie.

Définition : Une variété X est *simplement connexe* si toute boucle f est contractible en un point ce qui signifie que f peut être continuement déformée en un point. Si X possède un “trou” ce ne sera plus le cas car une boucle qui entoure ce “trou” n'est pas contractible en 1 point. C'est le cas des boucles rouges sur la figure 3.2. Une définition de la simple connexité faisant appel au groupe d'homotopie π_1 sera donnée plus loin.

Définition : Une variété X est *multiplement connexe* si elle est connexe mais pas simplement connexe.

Par exemple, $\mathbb{R}^2 - \mathbb{R}$ n'est pas connexe par arc, $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ est connexe par arc mais pas simplement connexe et $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ est connexe par arc et simplement connexe.

3.3.2 Le mécanisme de Kibble

Les défauts topologiques sont des reliques des transitions de phase qui accompagnent les brisures de symétrie. Leur formation et leur nature sont conditionnées par les propriétés topologiques du vide (c'est à dire les propriétés géométriques de la variété formée par les états fondamentaux accessibles au champ de Higgs). Cette variété sera notée $\mathcal{M}$ dans la suite.

Définition : La variété des vides $\mathcal{M}$ est définie comme l'ensemble des configurations du champ de Higgs qui correspondent à un état fondamental (vide) possible

$$\mathcal{M} \equiv \{\langle\phi\rangle_0 \mid \langle 0|\phi|0\rangle = \langle\phi\rangle_0\}. \tag{3.3.26}$$

> *Propriété* 3.3 : *Lors d'une brisure de symétrie $G \to H$, la variété des vides $\mathcal{M}$ est reliée aux groupes de symétrie G et H ; elle s'écrit comme le groupe quotient $\mathcal{M} = G/H$ de ces deux groupes.*

Nous allons maintenant illustrer sur deux exemples pourquoi la brisure de symétrie peut donner lieu à la formation de défauts topologiques et en quoi les propriétés de $\mathcal{M}$ sont directement reliées à la nature des défauts formés.

Formation de mur de domaine

Supposons dans un premier temps la brisure spontanée d'une symétrie discrète Z_2. On peut la décrire avec le potentiel de l'Eq. (3.2.3), si le champ de Higgs qui engendre la brisure de symétrie est réel. Les deux états fondamentaux sont alors

$$\langle\phi\rangle_0 = \pm\eta = \pm\sqrt{\mu^2/2\lambda}\ , \quad \text{soit} \quad \mathcal{M} = \{+\eta, -\eta\} \sim Z_2\ . \tag{3.3.27}$$

Si l'on considère deux régions de l'espace dont la distance entre les deux est plus grande que la longueur de corrélation, il n'y a aucune raison que le champ de Higgs choisisse le même état fondamental. Les régions $+\eta$ seront alors nécessairement séparées des régions $-\eta$ par une région de l'espace, de dimension 2, où $\langle\phi(x)\rangle = 0$, et ce par continuité du champ. En ces points singuliers, le champ de Higgs est dans l'état fondamental de la théorie *avant* la brisure, ce qui est permit par interaction avec ses voisins. C'est ce qui défini un *défaut topologique*. Dans cet exemple, la région où le champ de Higgs s'annule est surfacique : c'est pourquoi on parle de *mur de domaine*. Sa formation traduit le fait que $\mathcal{M}$ est non connexe.

Formation de cordes cosmiques

Considérons maintenant le potentiel de l'Eq. (3.2.3) avec un champ de Higgs complexe. Le potentiel est invariant sous une symétrie $U(1)$. Mais lorsque la température passe en dessous de la température critique, les vides possibles de la théorie sont

$$\mathcal{M} = \{\phi \mid \phi = \eta e^{i\theta},\, \theta \in [0, 2\pi]\} \sim S^1, \tag{3.3.28}$$

variété qui est isomorphe à S^1, le cercle, comme l'illustre la Fig. 3.1. Lorsque le Higgs prend une VEV appartenant à $\mathcal{M}$, la symétrie $U(1)$ est brisée.

Si l'on considère un chemin dans l'espace réel de taille plus grande que la longueur de corrélation, en trois points opposés sur ce chemin, les choix de phase sont décorrélés les uns des autres. Si la phase du champ de Higgs parcourt le long de ce chemin une ou plusieurs fois le segment $[0, 2\pi]$ (la probabilité est supérieure à $1/2$), il y a forcément par continuité de la phase du champ[3]) un point dans le plan de ce chemin pour lequel le champ de higgs ne peut choisir de phase et doit donc rester dans l'ancien état fondamental tel que $\langle\phi\rangle_0 = 0$. Ce sont donc des défauts linéaires (des cordes cosmiques) qui se forment. Cela traduit le fait que la variété des vides n'est pas *simplement connexe* car $\phi = 0$ ne fait pas partie de $\mathcal{M}$.

Les cordes cosmiques sont nécessairement des objets infinis (c'est-à-dire de taille grande devant le rayon de Hubble) ou des boucles fermées. En effet si on considère une région linéaire de taille finie se forment, et un chemin le long duquel la phase est constante (cas $n = 0$) sur la Fig. 3.3, on peut passer continuement de la situation où le chemin n'entoure pas la corde à la situation où le chemin entoure la corde. Cela signifie que l'enroulement de phase autour de la corde n'est pas stable. Entre la température critique et la température dite de Ginzburg T_G, les fluctuations thermiques sont suffisamment énergétiques pour permettre au champ de Higgs de passer d'un état fondamental à un autre. Une fois la température descendue en dessous de T_G, les fluctuations thermiques ne permettent plus au champ de Higgs de changer d'état fondamental et le défaut topologique est stable.

Deux classe de défauts topologiques existe suivant les symétries $G \to H$ mises en jeu pour leur formation. Ils sont dit *globaux* lorsque les symétries G et H sont globales et *locaux* si les symétries sont locales. Dans le cadre de la physique des particules, les groupes de symétrie mis en jeu sont génériquement locaux, donc les défauts locaux sont les plus génériques.

3.3.3 Le formalisme des groupes d'homotopie

Pour une étude plus systématique de la topologie des variétés de vide $\mathcal{M}$, le formalisme adapté est celui des groupes d'homotopie que l'on va maintenant détailler et appliquer.

Le premier groupe d'homotopie : le groupe fondamental

On définit tout d'abord le premier groupe d'homotopie ou *groupe fondamental* π_1. Considérons deux chemins fermés f et g sur la variété $\mathcal{M}$ ayant le même point x de départ et d'arrivé. Mathématiquement, ces chemins sont des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathcal{M}$ vérifiant $f(0) = f(1) = x$ et $g(0) = g(1) = x$. On dit que ces deux chemins sont homotopiques si l'on peut les déformer continuement l'un en l'autre (voir la Fig. 3.2). On peut ainsi définir des classes d'équivalence de boucles de $\mathcal{M}$ où toutes les boucles homotopiques à f feraient partie de la même classe d'équivalence que l'on notera $[f]$. Les éléments de $\pi_1[\mathcal{M}, x]$ sont les différentes classes d'équivalence qui existent dans $\mathcal{M}$ lorsque les boucles sont définies à partir de x. L'élément constant I de cet ensemble est la boucle constante qui se réduit au point x. Pour définir le groupe $\pi_1[\mathcal{M}, x]$, il faut encore le munir d'une opération de produit $*$ sur ses éléments. Commençons par définir une opération $*$ sur deux boucles f et g par :

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \tag{3.3.29}$$

[3]Si en un point le champ choisit une phase θ_1, alors en un point très proche, la phase aura une grande probabilité de prendre une valeur proche de θ_1.

Intuitivement cela revient à dire que le chemin-produit parcourt la boucle f puis la boucle g. Ensuite on peut définir le produit pour les éléments $[f]$ et $[g]$ de π_1 par

$$[f] * [g] = [f * g]. \tag{3.3.30}$$

Lorsque la variété $\mathcal{M}$ est connexe par arc, le groupe $\pi_1[\mathcal{M}, x]$ ne dépend pas de x. On peut donc noter ce groupe $\pi_1[\mathcal{M}]$: c'est le *groupe fondamental* de la variété $\mathcal{M}$.

Ce groupe est dit trivial (on note $\pi_1[\mathcal{M}] \sim I$) lorsqu'il ne contient qu'une seule classe d'équivalence c'est à dire que toutes les boucles sont homotopiques à un point. Cela signifie que $\mathcal{M}$ est simplement connexe. On peut appliquer cette propriété au cas où la variété $\mathcal{M} = G/H$ est la variété des vides après une brisure de symétrie $G \to H$, $\mathcal{M} = G/H$. Dans ce cas, on en conclut que si $\pi_1[\mathcal{M}] \nsim I$, alors il y a formation de cordes cosmiques lors de la brisure de symétrie.

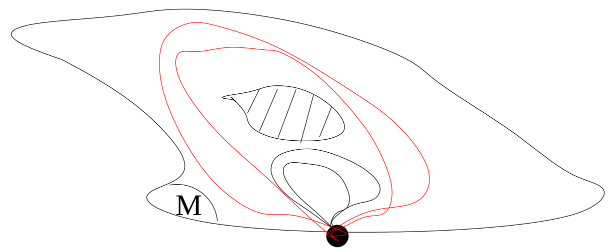

Fig. 3.2: Représentation d'une variété $\mathcal{M}$. La partie hachurée représente une région ne faisant pas partie de $\mathcal{M}$. Les boucles de même couleur sont homotopiques. La variété $\mathcal{M}$ présente donc plusieurs classes d'équivalence si la relation d'équivalence est "est homotopique à".

Exemple 1 : Le groupe fondamental de S^1 est isomorphe à $\mathbb{Z}$ le groupe des entiers relatifs,

$$\pi_1[S^1] \sim \mathbb{Z} \; . \tag{3.3.31}$$

Cela permet de retrouver grâce à l'Eq. (3.3.28) que la brisure de $U(1)$ en l'identité produit des cordes cosmiques puisque le premier groupe d'homotopie de $\mathcal{M} = U(1)/I = U(1)$ est non trivial. Ce résultat est illustré grâce à la Fig. 3.3 où l'on peut voir que le groupe fondamental de $\mathcal{M}$ contient plusieurs classes d'équivalence de boucles fermées. Les élements de ce groupe $\pi_1[S^1]$ sont usuellement repérés par leur nombre d'enroulement comme illustré sur la Fig. 3.3. Chacune de ces classes d'équivalence peut aussi être vue comme une configuration de la phase du champ de Higgs autour du défaut. C'est ce qu'illustre la Fig. 3.3.

Exemple 2 : Pour les sphères de dimension plus grande, toute boucle est homotopique à un point, ce qui permet d'écrire

$$\forall n \geq 2 \; , \quad \pi_1[S^n] \sim I \; . \tag{3.3.32}$$

Ainsi, toute brisure de symétrie dont la variété des vides est isomorphe à S^n ne donne pas lieu à la formation de cordes cosmiques. C'est le cas de la brisure électro-faible puisque dans ce cas, cette variété s'écrit $\mathcal{M} \sim SU(2)/I \sim SU(2) \sim S^3$.

Les autres groupes d'homotopie

De la même manière que le premier groupe d'homotopie teste l'existence de boucles non homotopiques à un point, le groupe d'homotopie $\pi_2[\mathcal{M}]$ teste l'existence de surfaces à deux

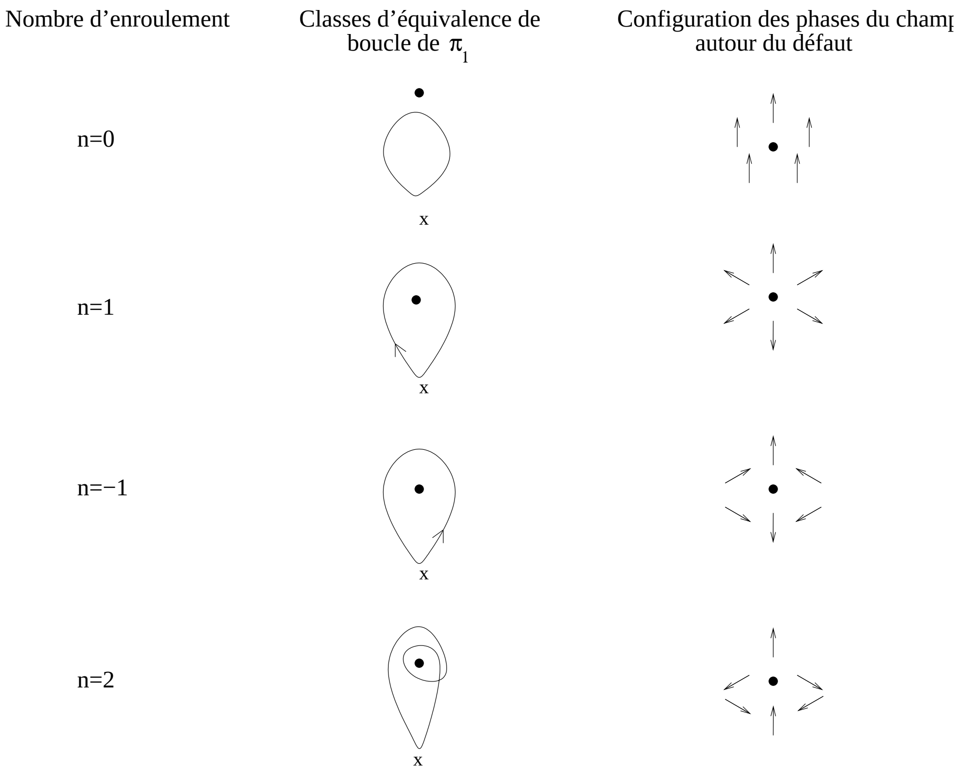

Fig. 3.3: Illustration des classes d'équivalence de $\mathcal{M}$ dans le cas d'une brisure de $U(1)$ dans le double langage des chemins fermés lorsque l'on identifie $\mathcal{M}$ avec $\mathbb{R}^2$ et dans le langage des configuration des phases du champ autour du défaut.

Groupe non trivial	Type de défauts formés	Dimension
$\pi_0[\mathcal{M}]$	Mur de domaine	2
$\pi_1[\mathcal{M}]$	Corde cosmique	1
$\pi_2[\mathcal{M}]$	monopôle	0
$\pi_3[\mathcal{M}]$	Texture	-

Tab. 3.1: Lien entre les propriétés topologiques de la variété des vides d'une brisure de symétrie et la nature des défauts topologiques formés lors de la brisure de symétrie.

dimension fermées qui ne sont pas contractibles en un point. C'est le cas par exemple de la sphère S^2 pour laquelle le deuxième groupe d'homotopie ne sera pas trivial. Le groupe $\pi_0[\mathcal{M}]$ quant à lui n'est trivial que lorsque $\mathcal{M}$ est connexe (ce qui n'est pas le cas de Z_2 par exemple). $\pi_0 \not\approx I$ est donc la condition pour former des murs de domaine. Ces résultats sont rassemblés dans le tableau 3.1.

L'étude de la formation de défauts topologiques revient donc à évaluer les groupes d'homotopie des groupes quotients introduits par les brisures de symétrie. Dans l'objectif de l'étude de brisures de symétrie dans le cadre du Modèle Standard ou de la Grande Unification, il est utile de donner un certain nombre de propriétés des groupes d'homotopie dans le cas de brisures mettant en jeu des groupes de Lie [30, 33, 32].

Théorèmes fondamentaux

Une première propriété des groupes d'homotopie utile pour les schémas de brisure qui nous intéresseront concerne les groupes d'homotopie de groupes du type $G \times F$.

> *Propriété* 3.4 : *Lorsque G et F sont connexes par arc, le groupe d'homotopie du produit s'exprime*
>
> $$\pi_n[G \times F] \sim \pi_n[G] \oplus \pi_n[F]. \qquad (3.3.33)$$
>
> *où $\oplus$ est la somme direct entre les groupes.*

Théorème 1 : *Dans le cas où G est un groupe connexe et simplement connexe, on peut écrire que*[4]

$$\pi_1[G/H] \sim \pi_0[H] \ . \qquad (3.3.34)$$

L'étude de la formation ou non de cordes cosmique devient donc bien plus simple dans ce cas car elle revient à savoir si le groupe des symétries non brisées est connexe ou non.

Exemple 3 : $SU(2) \xrightarrow{\mathbf{3}} U(1)$
$SU(2)$ étant connexe et simplement connexe, on peut appliquer le théorème 1. Comme $U(1)$ est connexe ($\pi_0[U(1)] \sim I$), cette brisure de symétrie ne produit pas de cordes.

Exemple 4 : $U(1) \xrightarrow{\mathbf{1}} I$
Une application naïve du théorème 1 aboutirait à un résultat faux car $U(1)$ n'est pas simplement connexe. Il faut dans ce cas remplacer $U(1)$ par son groupe de recouvrement universel pour retrouver le résultat de l'exemple 1 $\pi_1[U(1)] = \mathbb{Z}$. Dans le cas où le groupe G de l'Eq. (3.3.34) n'est que multiplement connexe, il doit être remplacé par son groupe de recouvrement universel $\widetilde{G}$. L'intervalle $[2\pi(n-1), 2\pi n] = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est isomorphe à $U(1)$, connexe et simplement connexe donc $\pi_1[U(1)] \sim \pi_1[\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}] \sim \pi_0[\mathbb{Z}] \sim \mathbb{Z}$. En conclusion cette brisure de symétrie donne bien lieu à la formation de cordes.

On peut énoncer un second théorème équivalent au premier pour le groupe d'homotopie de rang 2.
Théorème 2 : *Si G est connexe et vérifie $\pi_1[G] \sim I$, et $\pi_2[G] \sim I$*[5] *et si H est un de ses sous-groupes,*

$$\pi_2[G/H] \sim \pi_1[H_0] \ , \qquad (3.3.35)$$

où H_0 est la partie du sous-groupe H contenant l'identité.
Une des conséquences intéressante de ce théorème 2 est que

> *Propriété* 3.5 : *Toute brisure du type*
>
> $$G \to H \times U(1) \ , \qquad (3.3.36)$$
>
> *où G est connexe et simplement connexe, s'accompagne de la formation de monopôles.*

[4]Pour la preuve de ce théorème, voir [30].
[5]Cette dernière hypothèse est automatiquement vérifiée lorsque G est un groupe de Lie d'après un théorème de Cartan, cf Eq. (3.3.43).

<u>*Exemple*</u> 5 : $SU(2) \xrightarrow{\mathbf{3}} U(1)$
$SU(2)$ étant simplement connexe [$SU(2) \sim S^3$], on peut immédiatement appliquer le théorème (3.3.35) et écrire que $\pi_2[SU(2)/U(1)] \sim \pi_1[U(1)] \sim \mathbb{Z}$ ce qui implique qu'il y aura formation de monopôles.

<u>*Exemple*</u> 6 : $SU(2) \xrightarrow{\mathbf{5}} U(1) \times Z_2$
Là encore on peut appliquer le théorème 2 mais cet exemple en illustre une utilisation plus fine. Dans ce cas en effet, $\pi_2[SU(2)/U(1) \times Z_2] \sim \pi_1[U(1)] \sim \mathbb{Z}$ car c'est $U(1)$ qui est la partie de H connexe à l'identité. Cette brisure formera donc des monopôles. Notons qu'il y aura aussi formation des cordes cosmiques puisque $\pi_1[SU(2)/U(1) \times Z_2] \sim \pi_0[U(1)] \oplus \pi_0[Z_2] \sim Z_2$.

<u>*Exemple*</u> 7 : $U(1) \rightarrow Z_2$
Pour cet exemple, on ne peut pas appliquer le théorème 2, $U(1)$ n'ayant pas les propriétés requises. Il faut comme dans l'exemple 4, mettre le groupe quotient sous une forme qui permette de calculer les groupes d'homotopie. On peut montrer que[6] $U(1)/Z_2 \sim \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \sim U(1)$ ce qui permet de conclure à la présence de cordes cosmiques ($\pi_1[U(1)/Z_2] \sim \pi_1[\mathbb{R}/\mathbb{Z}] \sim \pi_0[\mathbb{Z}] \sim \mathbb{Z}$) mais à l'absence de monopôles ($\pi_2[U(1)/Z_2] \sim \pi_2[\mathbb{R}/\mathbb{Z}] \sim \pi_1[\mathbb{Z}] \sim I$) ou de murs de domaine ($\pi_0[U(1)/Z_2] \sim \pi_0[U(1)] \sim I$).

Généralisation et propriétés des groupes d'homotopie

On peut être plus général et énoncer les théorèmes précédents dans le cas du $n^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie.

> <u>*Théorème*</u> 3 : *Pour tout groupe G, et H sous groupe de G,*
>
> $$\pi_n[G/H] \sim \pi_{n-1}[H] \ , \tag{3.3.37}$$
>
> *si $\pi_n[G] \sim \pi_{n-1}[G] \sim I$.*

Rappelons que lorsque G n'est pas simplement connexe, pour utiliser les théorèmes 1,2 et 3, il faut remplacer G par son groupe de recouvrement universel.

Le théorème 3 se démontre dans le cas des groupes de Lie en utilisant les *séquences exactes*. Considérons la séquence suivante :

$$\cdots \rightarrow \pi_n[G] \xrightarrow{f_1} \pi_n[G/H] \xrightarrow{f_2} \pi_{n-1}[H] \xrightarrow{f_3} \pi_{n-1}[G] \rightarrow \cdots \tag{3.3.38}$$

où une flèche entre un groupe A et un groupe B signifie qu'il existe un homomorphisme qui va de A vers B. Cette séquence d'application est dite *exacte* lorsque $\forall n,\ Im(f_n) = Ker(f_{n+1})$, ce qui est le cas pour des groupes de Lie compacts.
Un cas particulier intéressant pour démontrer le théorème 3 est lorsque $\pi_n[G] = \pi_{n-1}[G] = I$. Dans ce cas, on peut vérifier que ces deux conditions imposent que f_2 est injectif [car $Ker(f_2) = 0$] et surjectif [car $Im(f_2) = \pi_{n-1}[H]$] donc que f_2 est bijectif. Les deux groupes sont donc isomorphes $\pi_n[G/H] \sim \pi_{n-1}[H]$.

[6]Cela se justifie par le fait que $\forall\ (a, b) \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}/a\mathbb{Z} \sim \mathbb{R}/b\mathbb{Z}$ et au fait que $U(1) \sim \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tandis que $U(1)/Z_2 \sim \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.

3.3.4 Résultats utiles sur les groupes d'homotopie

On concluera ce chapitre par quelques résultats utiles [30, 32] pour pouvoir appliquer les théorèmes précédents. Tout d'abord, concernant les propriétés des sphères de dimension n, on peut voir que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \ \pi_n[S^n] \sim \mathbb{Z}\ , \tag{3.3.39}$$

et

$$\forall n, m \in \mathbb{N}\ ,\ \ \pi_n[S^m] \sim I \quad \text{si} \quad m > n\ . \tag{3.3.40}$$

Ci-dessous, nous allons étudier les propriétés des groupes suivants : $SO(n)$ pour $n \geq 2$, $Spin(n)$ pour $n \geq 3$, $U(n)$ pour $n \geq 1$, $SU(n)$ pour $n \geq 2$, S^2, S^3, S^4, $\mathbb{Z}$, Z_2 et les groupes de Lie exceptionnels G_2, F_4, E_6, E_7 et E_8.

Les groupes $SO(n)$ et $O(n)$ n'étant pas simplement connexes, on introduit leur groupes de recouvrement universel respectivement $Spin(n)$ et $Pin(n)$ qui s'identifie pour certains à des groupes semi-simples. Par exemple, $Spin(3) = SU(2)$, $Spin(4) = SU(2) \times SU(2)$, $Spin(6) = SU(4)$ ou encore $Pin(2) = U(1) \times Z_2$.

Tout d'abord à propos de la connexité, on peut montrer que

$$\pi_0[G] \sim \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z}, & \text{pour } G = \mathbb{Z}, \\ Z_2, & \text{pour } G = Z_2, \\ I, & \text{pour les autres groupes.} \end{array} \right. \tag{3.3.41}$$

Pour les groupes d'homotopie d'ordre supérieurs,

$$\pi_1[G] \sim \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z}, & \text{pour } G = U(n)\ (n \geq 1),\ SO(2), \\ Z_2, & \text{pour } G = SO(n)\ (n \geq 3), \\ I, & \text{pour les autres groupes.} \end{array} \right. \tag{3.3.42}$$

$$\pi_2[G] \sim \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z}, & \text{pour } S^2 \\ I, & \text{pour les autres groupes sauf } \mathbb{Z} \text{ et } \mathrm{Z}_2. \end{array} \right. \tag{3.3.43}$$

$$\pi_3[G] = \left\{ \begin{array}{ll} I, & \text{pour } G = U(1),\ SO(2),\ S^4 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{pour } G = SO(4) \\ \mathbb{Z}, & \text{pour les autres groupes sauf } \mathbb{Z} \text{ et } \mathrm{Z}_2. \end{array} \right. \tag{3.3.44}$$

A l'aide de ces propriétés sur les groupes d'homotopie, il est maintenant possible de prédire quel type de défauts seront produits lors d'une brisure de symétrie mettant en jeu ces groupes. Ces résultats seront abondamment utilisés au chapitre 7.

3.4 Défauts topologiques et conséquences observationnelles

Nous avons vu précédemment que lors des brisures de symétrie qu'à connus l'univers, il est possible que des défauts topologiques se soit formés. La propriété 3.5 montre que la formation des monopôles est aussi inévitable au cause du facteur $U(1)_Y$ de $G_{\rm MS}$. De plus la formation de murs de domaine est plausible du fait de l'existence de symétries discrètes dans les modèles réalistes de physique des hautes énergies (voir chapitre 6). Enfin au chapitre 7 nous montrerons que les cordes cosmiques se forment de manière générique dans le cadre de la Grande Unification supersymétrique.

Il est donc nécessaire de mentionner rapidement les conséquences cosmologiques de la formation de ces défauts topologiques pour voir en quoi la formation de ces défauts et donc les brisures de symétrie peuvent être contraintes par les observations cosmologiques. Un étude complète de la configuration des champs dans et autour des défauts topologiques est nécessaire pour étudier l'impact cosmologique de leur formation. Celle-ci est faite dans [30] et [7], et nous allons ici uniquement utiliser les résultats et présenter leur conséquences sur la cosmologie. Outre les deux ouvrages précédents, mentionnons aussi une revue de M. Sakellariadou [37] sur les conséquences observationnelles des défauts et des cordes en particulier.

Les grandeurs centrales pour l'étude de l'impact cosmologique des défauts sont leur densité, et leur masse tandis que le paramètre dimensionné central est la température critique $T_{\rm crit}$ à laquelle ils se forment ou de manière équivalente la VEV v du champ de Higgs. Les caractéristiques des défauts doivent aussi dépendre des autres paramètres du lagrangien du champ de higgs à savoir la constante d'auto-couplage λ ou la constante de couplage g du groupe de jauge.

3.4.1 Densité de défauts

Concernant leur densité, il est possible de l'évaluer en connaissant leur longueur de corrélation ξ, puisque en moyenne, comme le montre le raisonnement fait au paragraphe 3.3.2 sur la formation des cordes ou des murs de domaine, il y a un défaut qui se forme par sphère de rayon ξ. On en déduit que la densité initiale de défaut $n_i = p\xi^{-3}$, où p est la probabilité de formation d'un défaut dans une sphère de longueur de corrélation. A priori, cette probabilité $p \simeq 1/2$. De plus, nécessairement la longueur de corrélation est plus petite que le rayon de Hubble $\xi \lesssim R_H(t_i)$.

Dimensionnellement, on peut écrire que la longueur de corrélation est donnée par l'inverse de la masse du propagateur, ce qui est du même ordre que la température critique

$$\xi \simeq \frac{1}{T_{\rm crit}} \; . \tag{3.4.45}$$

Cela donne une approximation raisonnable pour faire des prédictions sur le rôle cosmologique de tels objets. Mathématiquement on peut vérifier cette évaluation en calculant par exemple la distance physique entre deux vides opposés lors de la formation d'un mur de domaine. C'est ce qui est fait dans la section suivante.

Notons que pour une étude rigoureuse de ce point, des simulations de transition de phase sur réseau sont nécessaires. Elles seules permettent de prendre en compte de la micro-physique des défauts, les paramètres de la transition de phase (son ordre, les exposants critiques du problème. etc...).

3.4.2 Murs de domaine

Les murs de domaine sont des défauts surfaciques, qui comme nous l'avons vu dans les sections précédentes sont formés lors de la brisure de symétries discrètes (par exemple la symétrie Z_2) par un champ de Higgs ϕ réel soumis au lagrangien

$$\mathcal{L}_{\rm mur} = \partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + \mu^2\phi^2 - \lambda\phi^4 \; . \tag{3.4.46}$$

Ce lagrangien impose un état fondamental $\langle\phi\rangle_0 = \pm\eta = \pm\sqrt{\mu^2/2\lambda}$. En cherchant les configurations de champ $\phi(x^\mu)$ satifaisant aux équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\rm mur}}{\partial\phi} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}_{\rm mur}}{\partial[\partial_\mu\phi]} \; , \tag{3.4.47}$$

ce qui impose pour une solution statique [7]

$$4\lambda\phi(\phi^2 - \eta^2) = \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \; , \tag{3.4.48}$$

si on a supposé un mur plat et où z est la direction transverse au mur.

On peut étudier la distribution du champ dans l'espace et la solution de l'Eq. (3.4.48) est

$$\phi(z) = \eta\,\mathrm{th}\left(\frac{z}{z_c}\right) \ , \quad \text{avec} \quad z_c = \left(\sqrt{2\lambda}\eta\right)^{-1} = \mu^{-1} \ . \tag{3.4.49}$$

On voit que le champ s'annule bien en $z = 0$ ce qui donne la position du mur et asymptotiquement, le champ vaut $\pm\eta$ ce qui correspond aux deux minima du potentiel. La distance typique entre les deux vides distincts est donnée par $d \simeq 4z_c \simeq T_{\text{crit}}^{-1}$. Cela donne une évaluation de la distance typique entre deux vides distincts et donc de la distance typique entre deux defauts. Cela justifie l'évaluation de la longueur de corrélation ξ de l'Eq. (3.4.45).

On peut aussi calculer la densité d'énergie d'un mur de domaine. Dans le cas d'une solution statique, l'énergie par unité de surface est obtenue par intégration de la densité d'énergie sur la coordonnée transverse au mur z et [7]

$$U_{\text{mur}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\eta^3 \ . \tag{3.4.50}$$

Pour une brisure de symétrie à l'échelle de Grande Unification ($\mu \sim M_{\text{GUT}} \sim 10^{16}$ GeV comme nous le verrons au chapitre 5), un mur de la taille du rayon de Hubble possède une masse de 10^{13} masses solaires par millimètre carré. Inversement on peut contraindre l'échelle de brisure de symétrie η à être inférieure à 100 MeV pour qu'un mur de la taille du rayon de Hubble ne referme pas l'univers. Une autre contrainte vient du fait qu'un mur de domaine par interaction avec les photons induirait dans le CMB des anisotropies [7]

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right) \sim 10^{-6}\left(\frac{\eta}{1\ \text{MeV}}\right)^3 \ , \tag{3.4.51}$$

ce qui contraint l'échelle de brisure à être encore plus petite pour être en accord avec les observations, à des échelles d'énergie très bien contraintes par les expériences en accélérateurs.

L'existence de murs de domaine est donc aujourd'hui quasiment exclue, ce qui contraint les schémas de brisure de GUT à ne pas les produire ou à utiliser un mécanisme capable de les diluer suffisamment pour expliquer leur inexistence dans notre sphère de Hubble aujourd'hui.

3.4.3 Monopôles

Nous avons vu que la masse des murs de domaine est telle qu'ils sont incompatibles avec les observations. La présence des monopôles est elle aussi incompatible pour une large fenêtre de paramètres en raison non pas de leur masse mais de leur nombre cette fois. Cela permet d'expliquer en quoi le problème des monopôles présenté en fin de chapitre 1 est crucial. Nous avons vu dans les sections précédentes que d'après la propriété 3.5, tout brisure de symétrie de la forme

$$G \to H \times U(1) \ ,$$

donne lieu à la formation de monopôles. Or dans le MS, il reste une symétrie $U(1)_Y$ non brisée à basse énergie. Dans le cadre des théories de GUT, les groupes de jauge du MS sont plongés dans un groupe G_{GUT} simple, et dans ce contexte, il est inévitable de donner lieu à une brisure de symétrie du type de celle donnée ci-dessus.

La formation des monopôles se produit par exemple lors de la brisure $SU(2) \xrightarrow{\mathbf{3}} U(1)$ (détaillée à la section 3.2), et l'on peut là encore chercher des configurations pour les champs de Higgs et de jauge, qui soient solutions des équations d'Euler-Lagrange. Le calcul du tenseur énergie-impulsion permet de montrer [7] que la masse de monopôles statiques (appelés monopôles de 't Hooft-Polyakov) est donnée par

$$m_{\mathrm{mon}} = 4\pi\eta \, \frac{(q^2/\lambda)^{-0.53}}{\sqrt{\lambda}} \, . \tag{3.4.52}$$

Dans la limite où $q^2/\lambda \to \infty$ (on parle de "limite BPS [39]"), la masse des monopôles s'écrit $m_{\mathrm{mon}} \simeq 4\pi\eta/q$. La configuration des champs, solutions des équations, permet de calculer la taille à partir de laquelle les champs scalaires et les champs de jauge ont atteint leur valeur asymptotique. Par comparaison de cette taille avec leur longueur d'onde Compton, on peut montrer [30] que les monopôles peuvent être traités comme des objets classiques.

Les monopôles possèdent, en plus de leur masse, une charge magnétique (raison pour laquelle on parle de "monopôles magnétiques"). On montre [30], dans le cas précédent d'un monopôle de 't Hooft-Polyakov, que le champ magnétique autour du monopôle est

$$B = -\frac{q\mathbf{r}}{4\pi r^3} \, , \tag{3.4.53}$$

ce qui correspond à un monopôle de charge

$$q = 4\pi/g \, . \tag{3.4.54}$$

De manière générale, la charge des monopôles est nécessairement quantifiée en multiple de la charge fondamentale g de la théorie de jauge sous-jacente. Un anti-monopôle est un monopôle de charge opposée.

Pour connaître leur influence sur la cosmologie, il reste a étudier leur densité initiale et leur évolution cosmologique afin de calculer leur densité d'énergie aujourd'hui.
La densité initiale de monopôles dépend de la manière dont s'est passée la transition de phase, c'est à dire de son ordre et des paramètres de la transition. Par exemple pour une transition de phase du premier ordre, c'est-à-dire par formation de bulles de phases différentes qui grandissent, les paramètres de transition peuvent donner lieu à une probabilité de formation très faible, ce qui donne une première solution au problème des monopôles.

Une transition de phase du second ordre donne lieu à la formation de nombreux monopôles : toujours avec l'argument standard du mécanisme de Kibble (voir section 3.4.1), la densité initiale s'écrit

$$n_{\mathrm{mon}}(t_i) \simeq p\,\xi^{-3} \, , \tag{3.4.55}$$

où p est la probabilité de former un monopôle et ξ est la longueur de corrélation. Dans le cas de la brisure $SU(2) \to U(1)$, T. Kibble a montré [40] que $p \sim 10^{-1}$. De plus, on a vu que $\xi \lesssim R_H(t_i)$. Juste après leur formation, les monopôles peuvent s'annihiler avec des anti-monopôles : ces mécanismes d'annihilation et l'expansion régissent l'évolution du réseau de monopôles-antimonopôles

$$\frac{\mathrm{d}n_{\mathrm{mon}}}{\mathrm{d}t} = -3Hn_{\mathrm{mon}} - Dn_{\mathrm{mon}}^2 \, , \tag{3.4.56}$$

où D est le coefficient de diffusion, grandeur qui caractérise la probabilité d'annihilation et où le premier terme du coté droit décrit la dilution des monopôles due à l'expansion. On peut calculer leur rapport à l'entropie totale n_{mon}/s où $s \propto q_*(T)T^3$ (voir chapitre 1). On peut montrer [30] que si, comme cela semble inévitable dans le cadre de la GUT, les monopôles sont formés à des températures de l'ordre de 10^{15} GeV, leur densité actuelle est

$$n_{\mathrm{mon}}(t_0)/s \sim 10^{-12} \frac{m_{\mathrm{mon}}}{10^{16}\ \mathrm{GeV}} \, , \tag{3.4.57}$$

si $m_{\rm mon} \sim 10^{16}$ GeV et

$$n_{\rm mon}(t_0)/s \gtrsim 10^{-12}\left(\frac{m_{\rm mon}}{10^{16}\ \rm GeV}\right)^3 , \tag{3.4.58}$$

sinon. Or ces valeurs donnent lieu à un conflit important avec les observations. La première des contraintes observationnelle est d'imposer que $m_{\rm mon}n_{\rm mon}(t_0) < \rho_{\rm crit}$, ce qui aboutit à

$$n_{\rm mon}(t_0) \lesssim 10^{-21}\left(\frac{m_{\rm mon}}{10^{16}\ \rm GeV}\right)^{-1}\ \rm cm^{-3} . \tag{3.4.59}$$

Cela se traduit en une contrainte plus basse de plusieurs ordres de grandeur par rapport à la prédiction sur la densité de monopôles [7]. Autrement dit, leur formation à des énergies de Grande Unification aurait rapidement donné lieu à la fermeture de l'univers. Une autre contrainte importante est d'imposer que les monopôles ne dominent pas l'univers au moment de la nucléosynthèse primordiale car cela serait en violent désaccord avec les observations. Là encore les prédictions pour des monopôles de GUT aboutissent à des densités de l'ordre de 9 ordres de grandeur trop élevées.

Il existe des solutions plus ou moins naturelles à ce problème des monopôles. La solution la plus attrayante est celle d'un phase d'*inflation*, c'est-à-dire d'expansion accélérée de l'univers qui diluerait les monopôles et ce faisant réduirait exponentiellement leur contribution au contenu en énergie de l'univers. Cette solution est attractive car une phase d'inflation est aussi la manière le plus simple de résoudre les problèmes de l'horizon, et de la platitude (chapitre 1), de donner une origine aux fluctuations primordiales en rendant compte du spectre du CMB observé aujourd'hui. Nous y reviendrons au chapitre 4.

Mentionnons que d'autres mécanismes ont été proposés pour résoudre le problème des monopôles. Par exemple, un mécanisme, proposé par Langacker et Pi [38] est la formation de *défauts topologiques hybrides*. La formation des monopôles pourrait être suivie de la formation de cordes par une suite de brisures de la forme

$$G \to K \times U(1) \to K . \tag{3.4.60}$$

La première transition de phase donne lieu à la formation de monopôles et la seconde forme des cordes cosmiques. Dans ce type de scénario, les paires monopôles/anti-monopôles peuvent alors être reliées par les cordes cosmiques ce qui entrainerait leur annihilation avec une grande efficacité. Le problème de ce scénario est sa grande dépendance dans la microstructure et les paramètres du secteur de Higgs (représentations, température critique notamment).

Une autre solution, plus drastique, serait d'abandonner la notion de GUT et de plongement du MS dans un groupe de symétrie simple à haute énergie. Dans ce cas, il n'y a pas nécessairement de brisure de symétrie qui donne lieu à la formation de monopôles. Cette solution ne sera pas considérée dans cette thèse puisque le cadre de la Grande Unification supersymétrique est choisi comme cadre de travail. La solution la plus naturelle est alors celle d'une phase d'inflation (voir chapitre 4).

3.4.4 Cordes cosmiques

Un mécanisme de Higgs donnant lieu à la formation de cordes cosmiques est détaillé dans la section 3.2, cas abélien. Les cordes cosmiques se forment typiquement lors de la brisure d'une symétrie $U(1)$ ou lors de toute brisure de la forme $G \to H \times Z_n$. Dans le premier cas, on parle de cordes "abéliennes" tandis que dans le second cas on parle de formation de "cordes Z_n". Nous venons de voir que les monopôles et les murs de domaine sont très difficilement compatibles avec les observations cosmologiques. Ils correspondent à des défauts topologiques de dimension spatiale 0 et 2 respectivement. Etudions maintenant les conséquences cosmologiques de la formation de défauts topologiques linéaires.

Evolution cosmologique

Les signatures observationnelles et les conséquences cosmologiques des cordes cosmiques ont une évolution radicalement différente de celle des monopôles. Voyons dans un premier temps quelle est la distribution initiale des cordes juste après leur formation puis l'action régissant l'évolution d'une ou plusieurs cordes et enfin les conséquences des intercommutations entre cordes.

Peu de temps après la transition de phase, une fois la température T inférieure à la température de Ginzburg, les configurations du champ de Higgs sont figées. En ordre de grandeur il y a une corde cosmique par régions séparées par la longueur de corrélation ξ. La distribution initiale est bien modèlisée par l'algorithme de T. Vachaspati et A. Vilenkin [41] qui aloue, sur une grille cubique de pas ξ, une phase aléatoire parmis les valeurs 0, $2\pi/3$, $4\pi/3$. Suivant l'enroulement de la phase il est ensuite possible d'identifier les cubes à l'intérieur desquels passe une corde cosmique. On aboutit à une situation initiale similaire à celle de la Fig. 3.6 page 79. Initiallement, la distribution compte 80% de cordes "infinies"[7] et 20% de boucles.

Les cordes de Nambu-Goto (NG) sont les cordes cosmiques les plus simples, c'est-à-dire sans structure interne et infiniment fines. Elles sont décrites par un lagrangien très simple $\mathcal{L} = -\mu_{\mathrm{str}}$, où μ_{str} est l'énergie par unité de longueur de la corde. On montre que cette énergie est [30]

$$\mu = 2\pi\eta^2\, \alpha_{\mathrm{str}}(\lambda/2e^2) \ , \tag{3.4.61}$$

où η est la valeur du module du champ de Higgs dans l'état fondamental défini au début de la section 3.2 et où $\alpha_{\mathrm{str}}(\lambda/2e^2)$ est une fonction faiblement croissante, proche de l'unité [30]. De manière équivalente, on introduit usuellement la grandeur sans dimension $G_{\mathrm{N}}\,\mu_{\mathrm{str}} = (\eta/m_{\mathrm{Pl}})^2$ pour désigner la masse des cordes. Pour une corde formée à une énergie de GUT ($\eta \sim 10^{16}$ GeV), on a donc $G_{\mathrm{N}}\,\mu_{\mathrm{str}} \sim 10^{-6}$. C'est le paramètre naturel pour décrire les effets gravitationnels d'une ou de plusieurs cordes cosmiques.

La surface balayée par une corde cosmique peut être repérée par deux coordonnées, une temporelle ζ^0 et une spatiale ζ^1. On peut définir dans l'espace-temps du fond de métrique $g_{\mu\nu}$, une métrique induite

$$\gamma_{ab} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^a}\frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta^b} \ ,$$

avec $a, b = 0, 1$. L'action d'une corde de Nambu-Goto s'écrit

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{-\gamma}\,\mathcal{L}\,\mathrm{d}^2\zeta = -\mu_{\mathrm{str}}\int \sqrt{-\gamma}\,\mathrm{d}^2\zeta \ , \tag{3.4.62}$$

où γ est le déterminant de la métrique γ_{ab}. A partir de cette action, il est possible de tirer les équations du mouvement, par différentiation vis à vis de $x^\mu(\zeta^a)$, ou le tenseur énergie-impulsion par différentiation vis à vis de la métrique $g_{\mu\nu}$. Cela permet de calculer l'énergie par unité de longueur μ_{str} par intégration de sa composante temporelle sur les coordonnées autres que longitudinale. Cela permet aussi de définir la tension de la corde, T_{str}, comme la composante zz du tenseur énergie-impulsion intégré sur les mêmes coordonnées. On montre que, tant que l'invariance de Lorentz le long de la corde est conservé, c'est-à-dire tant que la corde n'est pas parcourue par des courants, cette tension est nécessairement égale à la masse par unité de longueur $T_{\mathrm{str}} = \mu_{\mathrm{str}}$.

Les équations du mouvement des cordes requièrent une résolution numérique pour l'étude de l'évolution d'un réseau de cordes cosmiques. A ce jour, il existe deux codes pour l'étude de cordes cosmiques locales (issue de la brisure d'une symétrie locale) décrivant leur évolution en

[7] On appelle corde infinie une corde de taille supérieure au rayon de Hubble.

espace-temps de FLRW [45] : celui de B. Allen et P. Shellard repris par C. Martins et celui de D. Bennett et F. Bouchet, amélioré et parallélisé par C. Ringeval. Il existe en outre plusieurs codes permettant l'étude de l'évolution de réseaux de cordes en espace temps de Minkowski (voir par exemple [46]). Cela donne une information sur la manière dont évoluent ces objets mais ne peut être utilisé pour une étude cosmologique. Notons enfin que cette évolution est différente dans la phase dominée par le rayonnement ou la phase dominée par la matière.

Si deux cordes cosmiques se coupent, elles échangent leur brins avec une probabilité qui dépend de la micro-structure des cordes. Pour des cordes qui ne sont parcourues par aucun courant, cordes de NG, cette probabilité est égale à 1. Lors de ces intercommutations, il y a formation de boucles de cordes de plus en plus petites, à partir de cordes initialement infinies. Cela donne lieu à des boucles présentant des points anguleux (*kink* en anglais), régions à partir desquelles, les cordes cosmiques émettent du rayonnement gravitationnel fort. Cette émission entraine une perte d'énergie des boucles de cordes qui décroissent et disparaissent au cours du temps sous l'effet de leur tension. Notons que les cordes infinies aussi présente au cours de leur évolution des *kinks* et émettent donc des ondes gravitationnelles.

Dans le cas de cordes parcourues par des courants (possibilité proposée par E. Witten [42]), un grand nombre de phénomènes électromagnétiques enrichissent la phénoménologie de tels objets (voir par exemple [44]). Une première propriété importante est que la tension de la cordes équilibre parfaitement la force centrifuge de la corde due à l'existence d'un moment cinétique. Ces boucles de cordes sont des états d'équilibre : elles sont appelées *vortons*. Leur stabilité est fortement dépendante du modèle et en particulier des particules qui forment les courants, leurs couplages, de l'histoire des brisures de symétrie après leur formation [43]. Leur existence, en cas de trop grande stabilité, peut être incompatible avec les contraintes observationnelles actuelles si ils venaient à dominer l'univers aujourd'hui ou à l'époque de la nucléosynthèse primordiale par exemple.

Les codes d'évolution des cordes ont montré [44] dans un premier temps, que les réseaux de cordes cosmiques produit par intercommutations successives des boucles de cordes à partir de cordes infinies. Ces boucles forment par le même mécanisme des boucles encore plus petites. Ces boucles, une fois de taille plus petite que la longueur de Hubble, perdent de l'énergie par émission de rayonnement gravitationnel (et peut être émission d'autres particules) par leurs points anguleux. A la fin de l'ère de matière, les cordes cosmiques sont en quasi-totalité des boucles, avec quelques cordes de taille cosmologique. La seconde conclusion est que le réseau de cordes atteint un *régime d'échelle* ce qui signifie que la densité d'énergie des cordes par rapport à la densité totale d'énergie devient stationnaire. Cela est fondamental car cela permet aux cordes de jouer un rôle cosmologique non négligeable sans pour autant en venir à dominer l'univers (cas des monopôles) ce qui obligerait à trouver des mécanismes pour les éliminer. Cette évolution est modèlisée et représentée sur la Fig. 3.6 en fin de chapitre.

Ondes gravitationnelles

Comme nous l'avons présenté dans la section précédente, lors des intercommutations de deux cordes, il y a échange des brins au point d'intersection. Au cours de son évolution, les boucles de cordes oscillent sous l'effet de leur tension. Elles produisent un fond d'ondes gravitationnelles stochastique, émis sur une large fenêtre en fréquence. En effet, pour une boucle de corde de masse M et d'énergie par unité de longueur μ, on définit la "longueur invariante" $L \equiv M/\mu$. Les fréquences d'émission de cette boucle sont alors données par

$$\omega_n = 4\pi n/L \ . \tag{3.4.63}$$

Une réseau de cordes qui évolue et forme à toutes les époques des boucles de cordes de toutes tailles, émet un fond d'ondes gravitationnelles de fréquences très variées. Le calcul de l'intensité de ce fond requiert l'étude de la quantité d'énergie des boucles de cordes qui est transféré en émission gravitionelle. Le taux de perte d'énergie est donné par [30]

$$\dot{E} = \Gamma_{\rm rad} G_{\rm N}\, \mu^2 \ . \tag{3.4.64}$$

Le facteur numérique $\Gamma_{\rm rad}$ est indépendant de la taille de la boucle qui oscille ; il vaut en moyenne $\Gamma_{\rm rad} \sim 50-100$. On peut de ce fait construire le temps de vie d'une boucle de masse M et taille $L \equiv M/\mu$ par le rapport

$$\tau = \frac{M}{\dot{E}} = \frac{L}{\Gamma_{\rm rad} G_{\rm N}\, \mu} \ .$$

Les détecteurs d'ondes gravitationnelles actuels VIRGO[8], LIGO[9] et surtout futurs (LISA[10] par exemple) pourraient permettre d'atteindre des seuils de sensibilité suffisant pour mesurer ce fond d'ondes gravitationnelles [48].

Fond Diffus Cosmologique

Un second effet gravitationnel d'une corde cosmique est son interaction avec les photons du CMB et donc la génération d'anisotropies de température. L'origine de ce phénomène est la forme de la métrique autour de la corde cosmique (voir Fig. 3.5 et section suivante). Cette figure illustre le fait que si deux corps se déplacent perpendiculairement à la corde et avec une vitesse relative nulle, en passant autour d'une corde, leurs trajectoires sont modifiées et leur vitesse relative devient non nulle : les deux coprs se rapprochent. N. Kaiser et A. Stebbins ont appliqué ce phénomène au cas où les deux corps sont l'observateur et un photon du CMB. Ils ont montré [47] que par simple effet Doppler, si une corde alignée suivant le vecteur unitaire $\boldsymbol{t}$ se déplace à la vitesse $\boldsymbol{v}$ (par rapport au photons du CMB) et passe entre l'observateur et les photons du CMB, alors la vitesse relative des deux (photons et observateur) est modifiée. Cela implique une modification de la fréquence du photon reçu soit une anisotropie

$$\frac{\delta T}{T}(\boldsymbol{n}) = 8\pi G_{\rm N}\mu\gamma\, \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{t}) \ , \tag{3.4.65}$$

où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur unitaire le long de la ligne de visée, $v = |\boldsymbol{v}|$ et $\gamma = (1-v^2)^{-1/2}$ est le facteur de Lorentz de la corde. La carte des anisotropies dues à un réseau de cordes cosmiques évoluant entre nous et la surface de dernière diffusion peut être obtenue en superposant toutes les contributions de toutes les cordes cosmiques présentes entre les redshifts 0 et $z_{\rm dec}$.

Ces anisotropies du CMB peuvent être étudiée par leur statistique c'est à dire la connaissance de leurs fonctions de corrélation. C'est la fonction à deux points qui est principalement étudiée même si les fonctions d'ordre plus élevée seraient plus adaptée pour la recherche de signature. La raisons est que les cordes cosmiques génerent des anisotropies non gaussiennes. Pour définir la fonction de corrélation à deux points, on décompose les anisotropies sur la base des harmoniques sphériques Y_ℓ^m

$$\frac{\delta T}{T}(\boldsymbol{n}) = \sum_{\ell=2}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_\ell^m \ . \tag{3.4.66}$$

On peut ainsi calculer le moment multipolaire C_ℓ

$$C_\ell = \frac{1}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}|^2 \ . \tag{3.4.67}$$

[8]http ://www.virgo.infn.it/
[9]http ://www.ligo.caltech.edu/
[10]http ://lisa.jpl.nasa.gov/

Le spectre de puissance C_ℓ pour un réseau de cordes locales en espace de FLRW, et pour une évolution cosmologique complète est un calcul très complexe. Différents travaux ont pour le moment permis de mettre en évidence certaines caractéristiques générales de ce spectre. On sait que les cordes cosmiques génèrent des fluctuations de température qui ne possèdent pas une statistique gaussienne. Cela a pour effet de mélanger la puissance entre différents multipôles et le spectre qui en résulte est plus étalé que dans le cas d'une origine inflationnaire qui génère des fluctuations gaussiennes. Il est possible de comparer un spectre de cordes globales avec les données de CMB [49], comparaison représentée sur la Fig. 3.4.

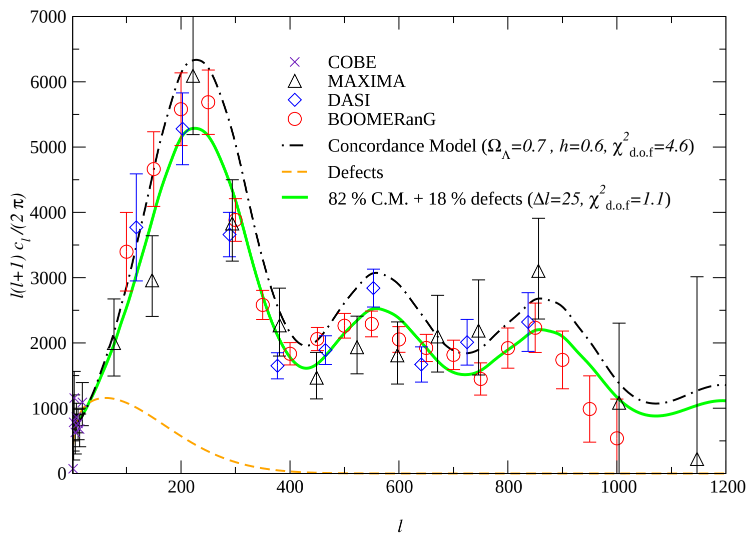

FIG. 3.4: Comparaison entre les données Boomerang, Maxima, et Dasi et comparaison avec un spectre de cordes cosmiques globales. Figure tirée de [49].

M. Landriau et P. Shellard ont étudié plus récemment [50] l'évolution partielle d'un réseau de cordes locales et prédit le spectre de puissance à très grandes échelles (petits ℓ) pour des cordes locales dans une cosmologie réaliste. Des études sont en cours [51] pour connaitre le spectre de cordes globales complet simulé pour un espace de FLRW. Cette étude permettra de connaitre l'effet des grandes et des petites échelles grace à une analyse de l'évolution d'un réseau de cordes dans les deux ères de radiation et de matière ainsi que lors de la transition entre les deux ères.

En conclusion, il est aujourd'hui clair que les cordes cosmiques, étant des sources d'anisotropies non gaussiennes, ne peuvent à elles seules rendre compte du spectre observé, et ce depuis que des pics accoustiques ont été mis en évidence par COBE (voir Fig. 3.4). Ceci traduit une origine adiabatique pour les fluctuations primordiales, ce qui favorise les scénarios inflationnaire pour les fluctuations primordiales. Cependant rien n'empêche que les cordes cosmiques *contribuent* au spectre de puissance des fluctuations. Comme l'ont initié les auteurs de [49], le plus intéressant est de contraindre la contribution $\mathcal{A}_{\rm cs}$ de cordes cosmiques à l'anisotropie quadrupolaire ($\ell = 2$) par exemple. A partir des plus récentes données CMB du satellite WMAP [143], combinées aux données de l'expérience SDSS, une analyse Monte-Carlo sur 8 paramètres dont six paramètres cosmologiques [52] a montré que, à 95% de degré de confiance,

$$\mathcal{A}_{\rm cs} \lesssim 14\% \ . \tag{3.4.68}$$

Une analyse indépendante, plus récente vient d'être proposée par A. Fraisse [53] avec une analyse Monte-Carlo sur sept paramètres. Elle conclue à une contrainte moins forte (à 95%

de degré de confiance)

$$\mathcal{A}_{\rm cs} \lesssim 23\% \, , \tag{3.4.69}$$

et une contribution nulle est compatible avec les données à ce degré de confiance. Une contribution nulle n'est exclue qu'à 1 σ (68%) et le meilleur ajustement des données est obtenue pour $\mathcal{A}_{\rm cs} \simeq 4\%$. Ces deux études obtiennent des résultats compatibles malgré le fait que la seconde étude utilise un spectre de cordes globales alors que la première utilise un spectre de cordes locales à partir du code à une échelle de Martins et Shellard [45]. Les données CMB ne peuvent donc pour le moment pas exclure une contribution sous-dominante mais non négligable de cordes cosmiques aux fluctuations de température du CMB. Comme nous le montrerons au chapitre 8, cela permet en effet de contraindre fortement les paramètres de l'histoire de l'univers primordial.

Lentille gravitationnelle et rayons cosmiques

Notons que d'autres effets observables existent pour la détection de cordes cosmiques dans l'univers. Une corde cosmique infinie peut jouer le rôle de lentille gravitationnel [54], en exploitant le fait que la métrique autour de la corde est conique, c'est-à-dire plate avec un angle manquant. On montre [30] que cet angle est proportionnel à l'énergie par unité de longueur de corde

$$\delta\theta \sim 8\pi G_{\rm N}\, \mu \, . \tag{3.4.70}$$

Ainsi les rayons lumineux qui passe à proximité d'une corde de taille cosmologique sont déviés par sa métrique comme l'illustre la Fig. 3.5.

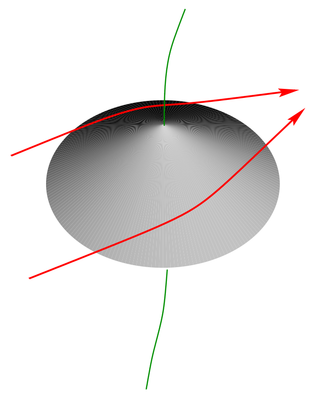

FIG. 3.5: Illustration de la forme conique de la métrique autour d'une corde cosmique. Elle est plate mais présente un angle manquant proportionnel au paramètre de masse de la corde $G_{\rm N}\, \mu$. Image de C. Ringeval.

La signature de l'effet de lentille par une corde cosmique est unique par rapport à un effet de lentille par une distribution de matière non linéaire. En effet dans le cas d'un effet de lentille par une corde, seules deux images identiques d'un objet plus lointain sont formées. L'angle de séparation des images permet de remonter au paramètre de masse de la corde $G_{\rm N}\, \mu$. En outre, plusieurs effets de lentille doivent pouvoir être observés tout au long de la corde. Récemment des investigations sur de larges champs de données optiques ont été lancées.

Un second effet observable des cordes cosmique est celui de source pour l'émission de rayons cosmique de ultra-haute énergie [56]. Il est en effet difficile d'expliquer que les détecteurs de l'expérience AGASA aient détecté [55] des rayons cosmiques à des énergies au-delà de limite GZK (du nom des trois chercheurs qui l'ont introduite Greisen, Zatsepin et Kuz'min). Au-delà d'une énergie de 5×10^{19} eV, un rayon cosmique supposé être un proton interagit avec forcément avec les photons du CMB et perd son énergie pour former des pions ou autres particules. En conséquence un rayon cosmique de cette énergie ne peut être observé que s'il est émit dans notre voisinage (à moins de 10 Mpc). Or dans cette région, aucune source astrophysique ne semble pouvoir expliquer des rayons cosmiques d'une telle énergie.

Les cordes supraconductrice sont parcourues par des courants et ont une distribution homogène autour de la Terre. Elles peuvent émettre des particules à des énergies au-delà de la limite GZK. Si les cordes sont responsables de l'émission de ces rayons cosmiques, elles peuvent émettre [56] des états liés de particules massives, et leur signature est unique (spectre de raies et origine isotrope des rayons cosmiques) ce qui rend le modèle falsifiable et donc intéressant. D'autres signatures existent pour identifier si les cordes cosmiques sont responsables des rayons cosmiques de ultra hautes énergies, notamment la nature des rayons cosmiques primaires (ceux qui créent la gerbe en arrivant dans l'atmosphère). Les données venant du projet Auger[11] en Argentine devrait dans les années qui viennent être en mesure d'infirmer ou confirmer l'existence de la coupure GZK et ce modèle.

Nous conclurons ce chapitre en insistant sur le fait que malgré la richesse des signatures observables de la présence de cordes cosmiques, aucune détection ferme n'a été faite. Récemment, certaines équipes ont émis l'hypothèse d'une observation de corde cosmique par effet de lentille gravitationnelle [57] ou dans le CMB [58] mais l'état actuel reste de l'ordre de l'hypothèse. C'est la raison pour laquelle nous allons étudier au chapitre 7 la généricité des cordes cosmiques dans les modèles théoriques, dans le cadre de la Grande Unification supersymétrique (SUSY GUTs).

3.5 Défauts non topologiques

Il existe une classe de défauts dont nous n'avons pas encore parlés car ils ne font pas partie à proprement parler des défauts topologiques. Ces "défauts de plongement" (traduction de *embedded defects*) [59] ne sont pas produits sous les mêmes critères que les défauts topologiques et n'ont pas, de ce fait, la même stabilité ce qui influe sur leur rôle en cosmologie [60]. L'intérêt de l'étude fine des ces objets est que leur formation est prédite lors de la brisure électro-faible même si aucun défaut vraiment topologique ne se forme. Dans ce cas, des défauts linéaires se forment, appelé *cordes électro-faibles* ou *cordes semi-locales*. Nous verrons aussi au chapitre 7 que ces défauts se forment aussi fréquemment dans les GUT. Nous allons rapidement dans cette section présenter la manière dont ces objets se forment et leurs conséquences observationnelles.

3.5.1 Formation

L'étude de la formation de défauts de plongement ne fait que partiellement appel aux outils de la topologie introduits à la section 3.3. Considérons une brisure de symétrie $G \to H$ réalisée par un champ de Higgs Φ soumis à un potentiel $V(\Phi)$. Le groupe G n'est pas forcément simple. Pour illustrer le propos, on peut consulter les exemples donnés dans la seconde référence de [59]. La première étape est d'identifier deux sous-groupes $G_{\rm emb} \subset G$ et $H_{\rm emb} \subset H$. Parmis les générateurs de G, on note J_α ceux qui sont aussi générateurs de $G_{\rm emb}$ et J_β les autres. Nous allons nous intéresser à la situation où, lorsque Φ acquiert une VEV non nulle $\langle\Phi\rangle_0$, il entraine la brisure de G, et celle de $G_{\rm emb}$

$$\begin{aligned} G &\overset{\langle\Phi\rangle_0}{\to} H \ , \\ G_{\rm emb} &\overset{\langle\Phi\rangle_0}{\longrightarrow} H_{\rm emb} \ , \end{aligned} \tag{3.5.71}$$

[11] `http ://auger.cnrs.fr/`.

et nous allons considérer le cas où cette seconde brisure de symétrie entraine la formation de défauts topologiques

$$\pi_n[G_{\mathrm{emb}}/H_{\mathrm{emb}}] \not\sim I \ , \quad \text{pour} \quad 0 \leq n \leq 3 \ . \tag{3.5.72}$$

Il est possible de décomposer le champ de Higgs en deux composantes $\Phi = \psi + \phi_\perp$ telles que ψ soit dans une représentation irréductible non triviale de G_{emb}. La brisure de ce groupe par la composante ψ, puisqu'elle forme des défauts, donne lieu à une configuration des champs de higgs ψ_{emb} et de jauge $[A_\mu^\alpha]_{\mathrm{emb}}$ décrivant le défaut. La seconde étape est d'écrire une configuration de champ pour décrire la solution de défaut.

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathrm{emb}} &= \psi_{\mathrm{emb}} \ , \\ A_\mu^\alpha &= [A_\mu^\alpha]_{\mathrm{emb}} \ , \\ A_\mu^\beta &= 0 \ , \end{aligned} \tag{3.5.73}$$

où l'indice α correspond aux champs associés aux générateurs de G_{emb} et β aux autres générateurs.

La dernière étape consiste à vérifier [59] que cette configuration satisfait aux équations du mouvement de la théorie complète. La première est une condition d'énergie minimale

$$\frac{\partial V(\Phi_{\mathrm{emb}})}{\partial \phi_\perp} = 0 \ . \tag{3.5.74}$$

Cela signifie que cette configuration de champ candidate doit représenter un minimum du potentiel pour qu'il y ait bien formation du défaut de plongement. La seconde contrainte impose une condition d'orthogonalité entre les composantes ψ et les transformations de la configuration Φ_{emb} par les générateurs J_β.

D'après T. Vachaspati, les contraintes de la dernière étape sont facilement réalisées. De plus, il est aisé de trouver une brisure $G_{\mathrm{emb}} \to H_{\mathrm{emb}}$ qui donne des cordes car tous les groupes de Lie sur qui il est possible de construire une théorie de GUT possèdent $G_{\mathrm{emb}} = U(1)$ comme sous-groupe. En choisissant donc $H_{\mathrm{emb}} = I$, on voit que *la formation de cordes de plongement est très générique*.

Mais la formation de ces défauts ne présume en rien de leur stabilité. En effet, la topologie de la variété de vide étant globalement triviale, ces défauts de plongement souffrent d'instabilité ce qui a des conséquences sur leurs effets cosmologiques.

3.5.2 Conséquences observationnelles

La formation de défauts de plongement est différente du cas topologique dans le sens où globalement la variété des vides a une topologie triviale. Il en résulte une instabilité de la configuration de champ donnant lieu au défaut. Leur dynamique a aussi tendance à les rendre instables [61].

Il a été montré que les monopôles de plongement souffre de l'instabilité de "Brandt-Neri-Coleman" [62]. Il en est de même de tout les défauts globaux de plongement [59]. Si ces objets sont instables, il semble clair que sans un mécanisme qui les stabiliserait, ils ne peuvent jouer aucun rôle en cosmologie.

Les cordes locales de plongement sont quant à elles instables génériquement hormis pour certaines valeurs des paramètres de la micro-physique. Ainsi, les cordes électro-faibles pourraient pour certaines valeurs de l'angle de mélange θ_W être stables. De manière générale, la micro-physique n'est pas connue si l'on considère des défauts qui se forment lors des brisures de symétrie à plus haute énergie. Indépendamment de la micro-physique, un mécanisme a été proposé pour stabiliser ces cordes de plongement [63] par des effets d'interaction avec le plasma de photons. Ce mécanisme semble assez générique mais des études manquent pour quantifier la durée de vie qui en résulte pour les cordes. Si cette durée de vie est de taille cosmologique, les cordes auraient alors des conséquences similaires à celui des cordes cosmiques (topologiques). Pour cette raison, au chapitre 7, leur formation dans les modèles de GUT sera étudiée au même titre que les cordes cosmique tout en sachant que les contraintes qui peuvent être tirée dépendent des paramètres de la théorie.

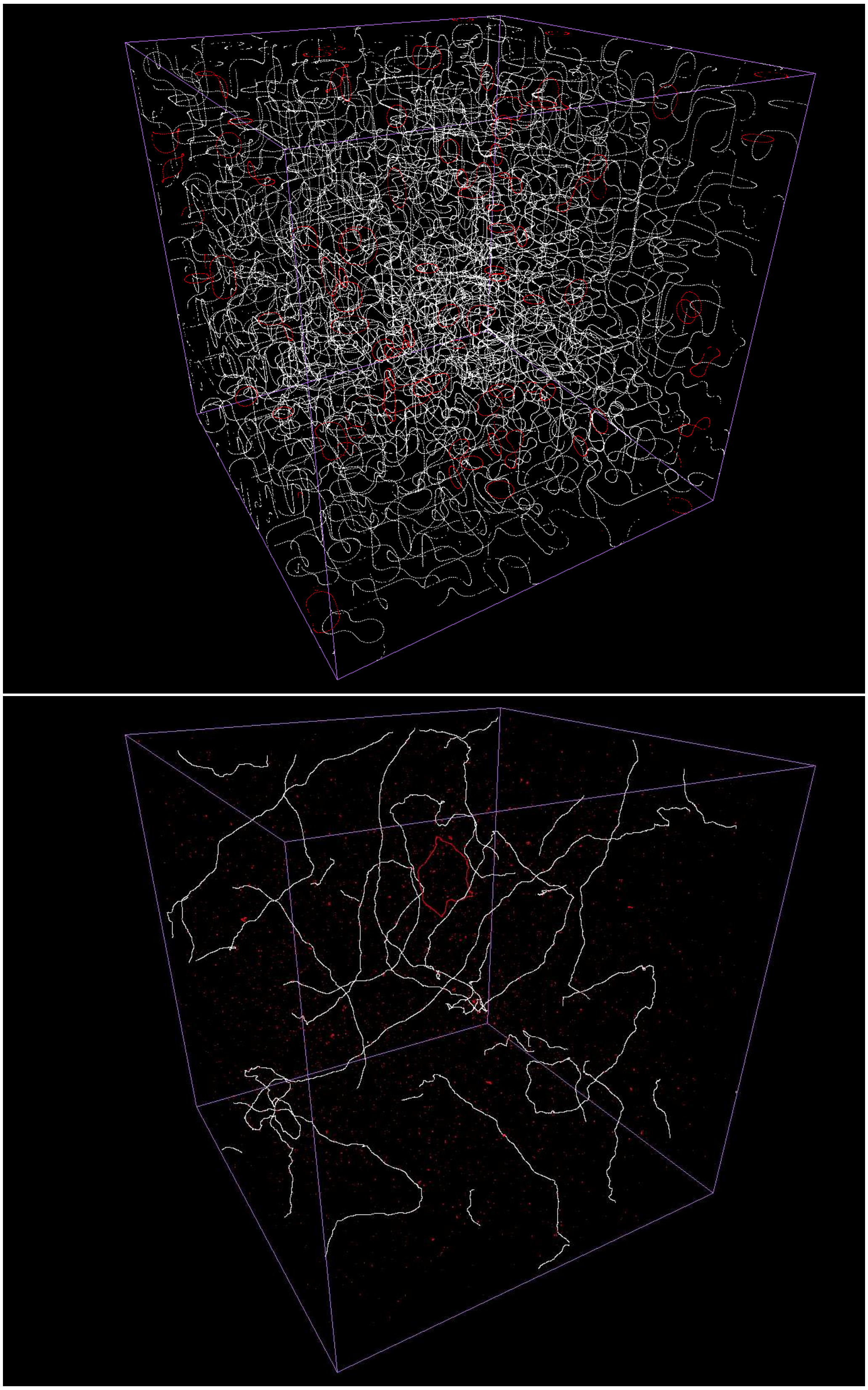

Fig. 3.6: En haut, situation initiale pour un réseau de cordes cosmique issus de l'algorithme de Vachaspati Vilenkin. La taille de la simulation est 18ξ. En bas, réseau de cordes cosmiques une fois avoir évolué jusqu'à la fin de l'ère de matière. La simulation est ici arretée lorsque la taille comobile d'univers atteint la taille de Hubble. En rouge sont représentées les boucles de cordes tandis que les cordes plus grande que la taille de Hubble sont représentées en blanc. Cela illustre la formation massive au cours de l'évolution de boucle de cordes de toutes tailles. C'est de cette manière puis par émission de rayonnement gravitationnel que le réseau perd de l'énergie et atteint une régime d'"échelle". Images de C. Ringeval.

Chapitre 4
L'inflation

Sommaire

L'inflation [64] est une période supposée de l'histoire de l'univers où celui-ci a été en expansion accélérée. Elle paraît aujourd'hui incontournable tant le nombre de problème de la cosmologie qu'elle permet de résoudre est grand. En outre, elle permet la génération de fluctuations de densité qui par croissance ont donné lieu aux grandes structures. Ces modèles ont prédit certaines propriétés des fluctuations primordiales, prédictions qui se sont révélées vérifiées par différentes expériences de détection des fluctuations du fond diffus cosmologique (CMB) : origine principalement adiabatique des fluctuations primordiales, platitude de l'univers, spectre des fluctuations invariant d'échelle.

L'inflation est générée par un champ scalaire, l'inflaton, dont la dynamique est décrite par un potentiel devant simplement être très plat. Tout comme le mécanisme de Higgs, l'inflation est donc basée sur l'existence de champs scalaires qui n'ont pour le moment pas encore été découverts. Le potentiel dans lequel se trouve l'inflaton peut aujourd'hui être contraint avec la précision croissante des mesures des anisotropies du CMB.

Dans ce chapitre, nous allons présenter dans un premier temps le paradigme de l'inflation en roulement lent puis nous montrerons comment cette phase d'inflation permet de résoudre un certain nombre de problème de la cosmologie. Ensuite nous présenterons trois grandes classes de modèles avec leurs prédictions. Dans un second temps nous présenterons la génération des fluctuations de densité de matière dans l'univers primordial et nous ferons le lien entre les prédictions des modèles et les observables du fond diffus cosmologique.

Je ferai abondamment référence à [65, 66] pour le mécanisme de l'inflation en général et sur les aspects de construction de modèles. On trouvera dans [67, 68, 71] des présentations générales plus rapides et pédagogiques. Pour la description des perturbations générées par l'inflation, je ferais référence à [77, 81]. Pour faire le lien entre les perturbations générées par l'inflation et le spectre du CMB détecté aujourd'hui, on pourra consulter [83, 7].

4.1 Dynamique de l'inflation

4.1.1 Accélération de l'expansion

Pour avoir une phase d'expansion accélérée, il faut trouver une forme d'énergie dominant la dynamique de l'univers qui permette d'obtenir un facteur de décélération négatif

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{\rho + 3P}{2\rho_{\rm crit}} < 0 \ . \tag{4.1.1}$$

La seconde égalité est obtenue grâce aux équations de Friedmann Eqs. (1.2.15). Il est donc nécessaire de trouver un fluide dont l'équation d'état contenu de l'univers vérifie $\rho < -3P$.

Nous avons vu au chapitre 1 que la domination d'une constante cosmologique satisfait à cette inégalité car dans ce cas, $P = -\rho$. Cependant une phase dominée par une constante cosmologique donne lieu à une expansion exponentielle éternelle de l'univers puisque durant cette période la densité d'énergie de la radiation et de la matière diminue tandis que la densité d'énergie de la constante cosmologique est constante. Il n'est donc pas possible de terminer l'inflation ni d'obtenir ensuite une ère dominée par la radiation pour reprendre l'évolution standard de l'univers.

Dans le modèle d'inflation, la forme d'énergie qui domine la dynamique de l'univers est un champ scalaire ϕ, l'inflaton, plongé dans un potentiel $V(\phi)$ devant satisfaire certaines contraintes. Supposons donc que le champ ϕ est décrit par un lagrangien

$$\mathcal{L}_{\rm libre} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \ . \tag{4.1.2}$$

Son tenseur énergie-impulsion s'écrit

$$T_\mu^\nu = -\partial_\mu\phi\partial^\nu\phi + \delta_\mu^\nu\left[\frac{1}{2}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi - V(\phi)\right] \ , \tag{4.1.3}$$

ce qui permet de définir un densité d'énergie $\rho \equiv -T_0^0$ et une pression P telle que $T_i^j = P\delta_i^j$. Cela permet de montrer que

$$\rho = \dot{\phi}^2/2 + V(\phi) \ , \quad P = \dot{\phi}^2/2 - V(\phi) \ . \tag{4.1.4}$$

Si on suppose que le potentiel $V(\phi)$ est très plat, l'énergie potentiel est très supérieure à l'énergie cinétique $\dot{\phi} \ll V(\phi)$, alors l'inflaton peut être assimilé à un fluide parfait de densité d'énergie et de pression respectivement proche de $V(\phi)$ et $-V(\phi)$, ce qui vérifie bien l'Eq. (4.1.1). On en déduit que pendant l'inflation, la première équation de Friedmann s'écrit

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}V[\phi(t)] \ . \tag{4.1.5}$$

Dans l'hypothèse où le potentiel est très plat, $V[\phi(t)] \simeq$ cste et l'évolution du facteur d'échelle au cours du temps est proche de celle d'un espace-temps de de Sitter $a(t)/a(t_i) \simeq \exp[H(t-t_i)]$ et le paramètre de Hubble est presque constant .

4.1.2 Champ d'inflaton en roulement lent

Pour connaître l'évolution du champ $\phi(t)$, il faut varier son action

$$\mathcal{S}_\phi = \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g}\,(\mathcal{L}_{\text{libre}} + \mathcal{L}_{\text{coupl}}) \ , \tag{4.1.6}$$

où l'on a introduit en plus du lagrangien précédent, un terme de couplage $\mathcal{L}_{\text{coupl}}$ du champ ϕ avec les autres particules du MS. On supposera que ce lagrangien permet à l'inflaton de se désintégrer en des particules dites “légères” puisque nécessairement plus légères que l'inflaton. La variation de l'action permet d'établir l'équation d'évolution complète

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \Gamma\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \ , \tag{4.1.7}$$

où le $'$ désigne la dérivation par rapport à ϕ, et où le $\dot{}$ désigne la dérivation par rapport au temps cosmique t et où Γ est la largeur de désintégration issue du lagrangien $\mathcal{L}_{\text{coupl}}$. On va supposer que cette largeur de désintégration induit un temps de désintégration $t_d \equiv \Gamma^{-1}$ très grand devant le temps de Hubble H^{-1}. Dans ce cas le terme proportionnel à Γ peut être négligé et l'équation précédente devient

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \ . \tag{4.1.8}$$

Supposons en outre que l'inflaton possède un potentiel tellement plat que sa variation est très faible et que de ce fait le terme $\ddot{\phi}$ est négligeable devant le terme de friction proportionnel à $\dot{\phi}$. L'équation d'évolution Eq. (4.1.8) se réduit alors à

$$3H\dot{\phi} = -V'(\phi) \ , \tag{4.1.9}$$

ce qui permet d'écrire

$$\ddot{\phi} = -\frac{V''(\phi)\dot{\phi}}{3H(\phi)} + \frac{V'(\phi)}{3H^2(\phi)}H'(\phi)\dot{\phi} \ . \tag{4.1.10}$$

L'hypothèse précédente de négliger le terme en $\ddot{\phi}$ n'est donc valide que si

$$\epsilon \equiv \frac{m_{\rm Pl}^2}{16\pi}\left[\frac{V'(\phi)}{V(\phi)}\right]^2 \ll 1 \ , \quad |\eta| \equiv \frac{m_{\rm Pl}^2}{8\pi}\left|\frac{V''(\phi)}{V(\phi)}\right| \ll 1 \ . \tag{4.1.11}$$

Les paramètres ϵ et η sont appelés *paramètres de roulement lent*[1] : ils décrivent l'écart du potentiel inflationnaire par rapport à la platitude parfaite. Pour qu'une phase d'inflation en roulement lent puisse avoir lieu, il faut et il suffit que ces paramètres soient petits devant l'unité. Dans tous les cas, $\epsilon \sim 1$ entraîne nécessairement la fin de l'inflation. Pour décrire la dynamique de ces deux paramètres il est utile de définir un troisième paramètre de roulement lent,

$$\xi \equiv M_{Pl}^2\frac{\sqrt{V'V'''}}{V} \ . \tag{4.1.12}$$

La fin de l'inflation en roulement lent se produit dès que l'un de ces paramètres est de l'ordre de 1, et on notera ϕ_f la valeur du champ à ce moment. On peut définir un temps de

[1]Traduction de *slow roll*.

fin d'inflation $t_f \sim H^{-1}(\phi_f)$. On mesure usuellement la durée de l'inflation par le *nombre d'e-fold* N entre le début et la fin de l'inflation défini par

$$N(\phi_i \to \phi_f) \equiv \ln\left[\frac{a(t_f)}{a(t_i)}\right] . \tag{4.1.13}$$

ce qui correspond au nombre de facteur e dont augmente le facteur d'échelle pendant l'inflation, $a(t_f) = a(t_i)e^N$. On montre que ce nombre N peut être exprimer en fonction du potentiel

$$N(\phi_i \to \phi_f) = \int_{t_i}^{t_f} H \mathrm{d}t = -8\pi G_\mathrm{N} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} \mathrm{d}\phi . \tag{4.1.14}$$

Un autre ensemble de paramètres de roulement lent peut être utilisé pour paramétrer le potentiel inflationnaire [69]. Ils sont définis par

$$\epsilon_0 \equiv \frac{H(N_i)}{H(N)} , \quad \epsilon_{n+1} \equiv \frac{\mathrm{d}\ln|\epsilon_n|}{\mathrm{d}N} \tag{4.1.15}$$

où N_i est le nombre d'e-fold à une date t_i donnée et N est le nombre d'e-fold entre entre t_i et une date t. On peut vérifier que $\epsilon_1 = \epsilon$ et que les paramètres suivants paramétrisent les dérivées successives du potentiel. Ainsi, les correspondances s'écrivent

$$\epsilon_1 = \epsilon , \quad \epsilon_2 = 2\epsilon - 2\eta , \quad \epsilon_2\epsilon_3 = 4\epsilon^2 - 6\epsilon\eta + 2\xi^2 , \ \ldots . \tag{4.1.16}$$

Dans cette paramétrisation, les ϵ_n sont tous du même ordre de grandeur et la condition de roulement lent s'écrit $|\epsilon_n| \ll 1$, pour tout $n > 0$. L'intérêt de cette paramétrisation est de définir les paramètres à partir de grandeurs géométrique indépendante du modèle : les ϵ_n sont en effet le rayon de Hubble et ses dérivées successives. De ce fait, cette paramétrisation est par exemple toujours valable même dans le cas d'un modèle à plusieurs champs.

4.1.3 Fin de l'inflation et réchauffage post-inflationnaire

A la fin de l'inflation, le terme $\ddot{\phi}$ devient dominant sur le terme de friction en $\dot{\phi}$ dans l'Eq.(4.1.8). L'équation d'évolution se ramène donc à celle d'un oscillateur amorti. L'énergie perdue par friction est donnée par

$$\dot{\rho} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right] = -3H\dot{\phi}^2 = -3H(\rho + P) , \tag{4.1.17}$$

en utilisant l'Eq.(4.1.8) et le fait que $\rho = \dot{\phi}^2/2 + V$ et $P = \dot{\phi}^2/2 - V$. En moyennant P sur une oscillation de ϕ, on peut en déduire que $\rho \propto a^{-3(1+w)}$ où $P = w\rho$ est l'équation d'état du fluide à la fin de l'inflation. En supposant un potentiel $V(\phi)$ symétrique, on peut exprimer cette équation d'état en fonction des caractéristiques de l'oscillation

$$1 + w = \frac{\int_0^T \dot{\phi}^2 \, \mathrm{d}t}{\int_0^T \rho \, \mathrm{d}t} = \frac{\int_0^{\phi_\mathrm{max}} \dot{\phi} \, \mathrm{d}\phi}{\int_0^{\phi_\mathrm{max}} (\rho/\dot{\phi}) \, \mathrm{d}\rho} , \tag{4.1.18}$$

où ϕ_max est la valeur du champ au maximum de l'oscillation.

Réintroduisons maintenant le terme de désintégration de l'Eq. (4.1.7). La perte d'énergie de l'inflaton est maintenant due à une friction et une désintégration,

$$\dot{\rho} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right] = -(3H + \Gamma)\dot{\phi}^2 , \tag{4.1.19}$$

dont la solution est [67]

$$\rho(t) = \rho(t_f) \left[\frac{a(t)}{a(t_f)} \right]^{-3(1+w)} \exp[-(1+w)\Gamma(t-t_f)] \ . \tag{4.1.20}$$

Le second et troisième facteur dans le coté droit de l'égalité sont les effets de l'expansion et de la désintégration de l'inflaton en particules légères du MS. Toutes les particules présentes avant l'inflation ont été diluées par un facteur $\left(e^N\right)^3$ et ne contribuent plus significativement à la densité d'énergie totale (on parle de vieille radiation). La désintégration de l'inflaton génére une "nouvelle radiation" dont la densité d'énergie vérifie

$$\dot{\rho}_r = -4H\rho_r + (1+w)\Gamma\rho \ . \tag{4.1.21}$$

Les deux termes du coté droit représentent respectivement l'effet de la dilution et le transfer d'énergie venant de l'inflaton. Si on pose $\rho_r(t_f) = 0$, on peut résoudre cette équation et obtenir le densité d'énergie en fonction du temps. Dans le cas d'un potentiel $V(\phi) = m^2\phi^2$, on montre que [67]

$$\rho_r(t) = \frac{3}{5}\rho\Gamma t \left[1 + \frac{3}{8}\Gamma t + \frac{9}{88}(\Gamma t)^2 + \dots \right] \ , \tag{4.1.22}$$

avec $\rho = \rho(t_f)(t/t_f)^{-2}\exp(-\Gamma t)$. La densité d'énergie de radiation croit relativement à la densité d'énergie de l'inflaton en oscillation. Les deux densités deviennent du même ordre au temps $t_d = \Gamma^{-1}$. Après ce moment, l'univers entre dans une ère dominée par la radiation et le modèle standard de la cosmologie est retrouvé. La température à ce moment définit la *température de réchauffage post-inflationnaire* $T_{RH} \equiv T(t_d)$. Il est possible d'évaluer cette température à partir de la conservation de l'entropie Eq. (1.3.39) et de l'évolution du facteur d'échelle dans l'ère de radiation. On obtient [67]

$$T_{RH} = \left(\frac{45}{16\pi^3 g_*} \right)^{1/4} (\Gamma m_{\mathrm{Pl}})^{1/2} \ , \tag{4.1.23}$$

où g_* est le nombre de degrés de liberté relativistes effectifs, donné au chapitre 1, Eq. (1.3.43). Il existe des contraintes sur cette température de réchauffage post-inflationnaire. En effet, elle fixe le niveau de production thermique des particules dans ce bain de radiation. Or la composition des éléments dans l'univers est fortement contrainte par la nucléosynthèse primordiale. Dans le cadre supersymétrique, il existe notamment le danger d'une trop grande production de gravitinos (le partenaire supersymétrique du graviton). Dans ce cadre, cette température de réchauffage est limitée à $T_{RH} \lesssim 10^9$ GeV [120].

4.2 Inflation et problèmes de la cosmologie

Un certain nombre de problèmes du modèle standard de la cosmologie ont été mis en évidence à la fin du chapitre 1. Nous allons montré dans cette section qu'un grand nombre d'entre eux sont résolus par une phase d'inflation.

4.2.1 Problème de la platitude

La problème de la platitude avait montré [voir Eq. (1.4.54)] que $\Omega_k = 0$ était une solution instable des équations de Friedmann mises sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Omega^0_{\mathrm{tot}} - 1) = \mathcal{H}(1+3w)\Omega^0_{\mathrm{tot}}(\Omega^0_{\mathrm{tot}} - 1) \ . \tag{4.2.24}$$

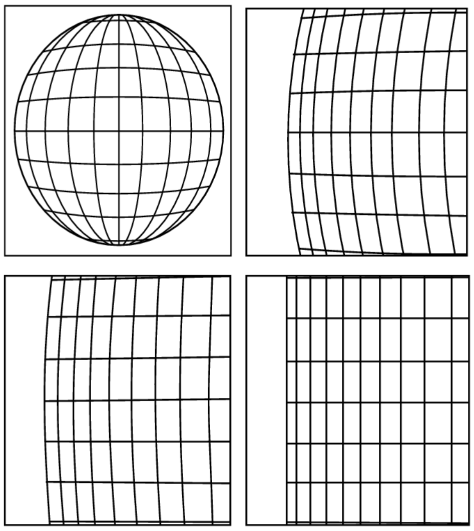

FIG. 4.1: Lorsqu'un objet initialement de courbure non nulle subit une inflation, sa géométrie tend à devenir euclidienne. Figure tirée de [65].

Cependant cette conclusion est modifiée si l'univers est dominé pendant un temps par un fluide vérifiant $w < -1/3$. Dans ce cas le membre de droite de l'Eq. (4.2.24) devient négatif et la situation $\Omega_k = 0$ devient alors un attracteur. La platitude de l'univers est donc une prédiction de l'inflation. C'est ce que représente la Fig. 4.1.

Notons que inversement, mesurer un écart à cette platitude serait difficile à rendre compatible avec une phase d'inflation. Pour le moment les mesures de WMAP imposent à 68% de degré de confiance [143]

$$1 + \Omega_k = \Omega_{\rm tot} = 1.02 \pm 0.02 \; . \tag{4.2.25}$$

ce qui est totalement compatible avec la platitude.

4.2.2 Problème de l'horizon

L'observation du CMB montre que tout le ciel était à la même température (à 10^{-5} près) au moment du découplage et de l'émission des photons du fond diffus cosmologique. Or le calcul de l'horizon des particules [Eq.(1.2.32)] à cette période, dans l'hypothèse d'une domination de l'univers par la radiation, donne une taille vue maintenant sous un angle de $0.86\,^\circ$ sur le ciel. Cela pose donc un problème de causalité pour comprendre comment il est possible que toutes ces sphères de causalité (environ 14000 sur le ciel) soient thermalisées sans contact causal.

Supposons maintenant qu'une phase d'inflation ait précédé le moment du découplage. Pendant la phase d'inflation, l'horizon des particules $\chi_h^-(t)$ s'écrit

$$\chi_h^-(t) = e^{Ht} \int\limits_{t_i}^{t} \frac{\mathrm{d}t'}{e^{Ht'}} \simeq H_{\rm inf}^{-1} \left\{ \exp[H(t-t_i)] - 1 \right\} \; . \tag{4.2.26}$$

Cet horizon grandit donc exponentiellement pendant l'inflation et la fin de l'inflation ($t = t_f$), $\chi_h^-(t_f) \simeq H^{-1} e^N$, où $N \approx H_{\rm inf}(t_f - t_i)$ est le nombre d'e-fold total. Pendant l'oscillation de l'inflaton et le réchauffage, l'horizon est multiplié par un facteur $\sim 10^9$ [67], dépendant des détails de la phase de réchauffage, notamment de sa température. Enfin, entre le réchauffage à la température T_{RH} et aujourd'hui, cette longueur est encore modifiée d'un facteur T_{RH}/T_0, puisqu'alors l'univers est dominé par une cosmologie standard. Pour résoudre le problème de l'horizon il est nécessaire d'avoir suffisamment d'inflation (en terme du nombre d'e-fold) pour rendre cet horizon au moins de la taille du rayon de hubble aujourd'hui (en fait $2H_0^{-1}$) ce qui correspond à l'échelle la plus grande auxquelles une expérience mesurant les anisotropies du CMB est sensible. En conclusion, la taille de l'horizon des particules au moment de l'inflation, vu aujourd'hui, d_h doit satisfaire

$$d_h = H_{\text{inf}}^{-1} e^N 10^9 \left(\frac{T_{RH}}{T_0}\right) \geq 2H_0^{-1} \ , \tag{4.2.27}$$

H_{inf} étant le facteur de Hubble pendant l'inflation. On en déduit un nombre d'e-fold devant vérifier $N \gtrsim 60$, si l'on suppose une inflation due à un potentiel $V \sim M^4$, avec $M \sim 10^{16}$ GeV.

4.2.3 Problème des monopôles

Le problème des monopoles a déjà été discuté à la fin du chapitre 1 et au chapitre 3. Le principe est que si à haute énergie les symétries du MS sont plongées dans un groupe simple G_{GUT}, lors de la succession de brisure de symétrie qui permettent d'aboutir à G_{MS}, il y a nécessairement une brisure de la forme

$$G \to H \times U(1) \ . \tag{4.2.28}$$

Or ce type de brisure donne lieu à la formation de monopôles (voir prop. 3.5 page 64). Nous avons vu cependant, au chapitre 3 que la formation des monopôles donne lieu à une catastrophe cosmologique puisque leur densité d'énergie tend à refermer l'univers rapidement.

Cependant, une phase d'inflation qui dure environ $N \gtrsim 60$ e-fold entraîne une augmentation du facteur d'échelle d'un facteur $e^{60} \simeq 10^{26}$. Ainsi, le volume est augmenté d'un facteur 10^{78} et les densités d'énergie sont donc divisées par le même facteur. Il est donc clair que les monopôles ne peuvent plus dominer la dynamique de l'univers après plus de 60 e-fold d'inflation.

En conclusion, nous avons montré qu'une phase d'inflation qui se produirait avant le découplage et qui durerait au moins 60 e-fold si elle se produit à une énergie de l'ordre de 10^{16} GeV permet de résoudre les trois problèmes précédents. Les contraintes sont de supposer que l'inflaton évolue dans un potentiel très plat mais pas parfaitement plat, et que son lagrangien possède des termes de couplage avec la matière ordinaire de telle manière qu'à la fin de l'inflation l'inflaton se désintègre en particules ce qui donne lieu à une ère de radiation. Il existe aussi des contraintes sur la température de réchauffage post-inflationnaire afin d'éviter un conflit avec les observations de la nucléosynthèse primordiale, dans le cadre supersymétrique [120].

4.3 Quelques modèles d'inflation

Il existe un grande nombre de modèles d'inflation distincts basés sur des potentiels pour l'inflaton différents. On peut en classer un grand nombre dans les trois familles présentées maintenant.

4.3.1 Modèles à grandes valeurs de l'inflaton

Ces modèles sont basés sur un potentiel pouvant se mettre sous la forme

$$V(\phi) = M^4 \left(\frac{\phi}{m_{\text{Pl}}}\right)^p \ . \tag{4.3.29}$$

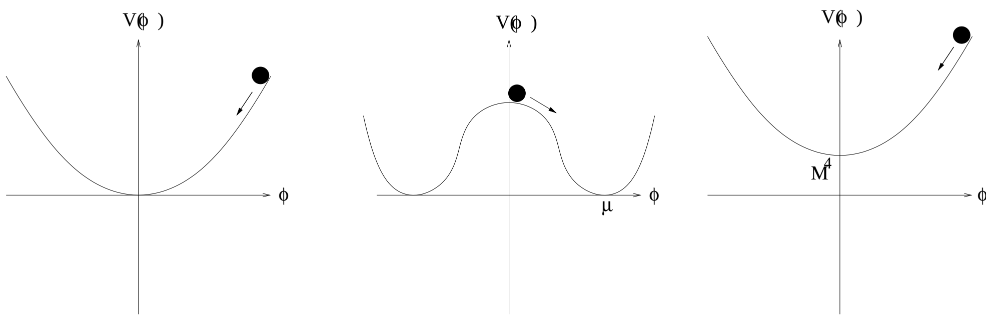

FIG. 4.2: Trois classes de modèles d'inflation. De gauche à droite, les modèles à grandes valeur du champ, les modèles à petite valeurs du champ, et les modèles hybrides.

Tous les potentiels en loi de puissance sont donc regroupés dans cette classe. L'exemple typique de ces modèles est "$\lambda\phi^4$". Les paramètres de roulement lent s'écrivent

$$\epsilon = \frac{p^2}{16\pi}\left(\frac{\phi}{m_{\mathrm{Pl}}}\right)^{-2} \quad , \quad \delta = \frac{p(p-2)}{16\pi}\left(\frac{\phi}{m_{\mathrm{Pl}}}\right)^{-2} \quad , \tag{4.3.30}$$

On peut aussi calculer le nombre d'e-fold

$$N_* = \ln\left(\frac{a_f}{a_*}\right) = -\frac{8\pi}{m_{\mathrm{Pl}}^2}\frac{1}{p}\int_{\phi_*}^{\phi_f}\phi'\mathrm{d}\phi' \ . \tag{4.3.31}$$

En conséquence, on peut calculer les paramètres de roulement lent

$$\epsilon_1 = \frac{p}{4(N_* + p/4)} \ , \quad \epsilon_2 = \frac{1}{(N_* + p/4)} \ , \tag{4.3.32}$$

donc ces modèles sont représentés par des droites dans le plan (ϵ_1, ϵ_2) de la Fig. 4.3.

Ces modèles, proposé par A. Linde [72] sont l'exemple typique de potentiel ne possédant pas de limite supérieure. Linde a montré que pour que pour ce type de modèles, le champ doit initialement avoir une très grande valeur, $\phi \gtrsim m_{\mathrm{Pl}}$. Pour motiver cette grande valeur de l'inflaton, il a été suggéré que l'univers soit initialement dans un état *chaotique* c'est à dire que les champs scalaires et l'inflaton en particulier possède des valeurs aléatoires très différentes d'un endroit à l'autre.

Cependant la nécessité d'une valeur supérieure à la masse de Planck pour la valeur initiale pose un problème de cadre théorique (de physique des particules) pour la description du modèle. De plus, pour pouvoir rendre compte des données du CMB avec ce modèle, il est nécessaire que $M/m_{\mathrm{Pl}} \ll 1$ ce qui n'est pas naturel dans certain cas. Par exemple, pour $p = 4$, il est nécessaire d'imposer $\lambda = (M/m_{\mathrm{Pl}})^4 \sim 10^{-13}$.

4.3.2 Modèles à petites valeurs de l'inflaton

Pour ces modèles le potentiel est similaire à un potentiel de champ de Higgs puisque l'inflaton va, à la fin, se trouver dans un état fondamental non nul, $\phi = \mu$ (voir Fig. 4.2). Le potentiel peut génériquement se mettre sous la forme

$$V(\phi) = M^4\left[1 - \left(\frac{\phi}{\mu}\right)^p\right] \ . \tag{4.3.33}$$

L'inflation se déroule lorsque l'inflaton a des valeurs petites devant μ. Pour le potentiel précédent les paramètres de roulement lent sont donnés par

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{p^2}{16\pi}\left(\frac{m_{\mathrm{Pl}}}{\mu}\right)^2 \frac{(\phi/\mu)^{2p-2}}{[1-(\phi/\mu)^p]^2}\ , \\ \delta &= -\epsilon - \frac{p(p-1)}{8\pi}\left(\frac{m_{\mathrm{Pl}}}{\mu}\right)^2 \frac{(\phi/\mu)^{p-2}}{[1-(\phi/\mu)^p]}\ . \end{aligned} \tag{4.3.34}$$

4.3.3 Modèles d'inflation hybride

L'inflation hybride introduit un champ auxiliaire ψ couplé à l'inflaton ϕ, champ qui permet uniquement de terminer l'inflation. Le premier modèle de ce type a été proposé par A. Linde [74]

$$V(\phi,\psi) = \frac{1}{4}\lambda(\psi^2 - M^2)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\lambda'\phi^2\psi^2. \tag{4.3.35}$$

Les valeurs initiales des champs scalaires sont un problème délicat puisque cela demande une connaissance précise de la manière de décrire la physique autour et au-delà de la masse de Planck et de connaître l'état de l'univers avant l'inflation. Pour une étude de cette question, on peut consulter [75]. Une seconde contrainte concernant les valeurs initiales des champs scalaires est de réaliser une inflation suffisamment longue pour résoudre les problème de l'horizon et des monopôles. Plusieurs études [76] semblent montrer que les valeurs initiales qui le permettent ne sont pas génériques hormis si ψ est initialement nul. Ceci semble être un problème de ces modèles inflationnaires.

Supposons cependant que, comme pour l'inflation en loi de puissance, l'inflaton possède initialement une valeur grande devant sa valeur critique $\phi_c \equiv M\sqrt{\lambda/\lambda'}$ et que le champs ψ a une valeur initiale proche de 0. Pendant la phase inflationnaire, le champ auxiliaire ψ s'annule et le potentiel se met sous la forme

$$V(\phi,\psi) = \frac{1}{4}\lambda M^4 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\ . \tag{4.3.36}$$

L'inflation se déroule donc dans un minimum local du potentiel, ce qui explique la dénomination de *False vacuum inflation* [134].

De manière générale tous les potentiels d'inflation hybride peuvent être mis sous la forme

$$V(\phi) = M^4\left[1 + \left(\frac{\phi}{\mu}\right)^p\right]\ , \tag{4.3.37}$$

où M est l'échelle d'énergie caractéristique de l'inflation et $\mu \gg \phi$. Grâce au potentiel complet de l'Eq. (4.3.35), on peut vérifier que la fin de l'inflation est déclenchée lorsque l'inflaton atteint une valeur critique $\phi_c = M\sqrt{\lambda/\lambda'}$. Le champ ψ développe alors une VEV non nulle, ce qui entraîne la fin des conditions de roulement lent.

Ces modèles prédisent des paramètres de roulement lent qui vérifient

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = 2 - \frac{4(p-1)}{p}\left(\frac{\mu}{\phi_*}\right)\ , \tag{4.3.38}$$

On peut vérifier que ces modèles prédisent un paramètre $\epsilon_2 < 0$ et un indice spectral $n_s > 1$ ce qui fait leur particularité. Nous verrons cependant au chapitre 6 que la version supersymétrique de ce modèle prédit un indice spectral scalaire inférieur à 1.

Les prédictions de ces différentes classes de modèles concernant les paramètres de roulement lent sont rassemblées et représentées sur la Fig. 4.3.

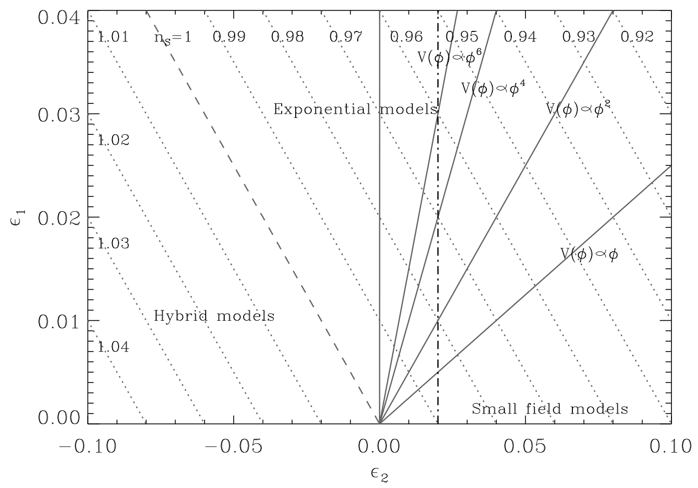

FIG. 4.3: Les trois classes de modèles et leur prédictions quant aux paramètres de roulement lent ϵ_1 et ϵ_2 définis à l'Eq. (4.1.15). Figure tirée de [71].

4.3.4 Autres modèles

De nombreux autres modèles d'inflation existent [66, 70] suivant le champ utilisé pour l'inflaton, suivant le cadre de physique des particules dans lequel on se place, suivant le potentiel utilisé, suivant l'existence de contraintes sur la présence de termes renormalisables dans le potentiel, suivante le nombre de champs scalaires contribuant à l'inflation, ...

Dans le cadre de la Grande Unification supersymétrique (présentée au chapitre 5), nous verrons que l'inflation hybride supersymétrique est un modèle bien motivé du point de vue de la physique des particules. Ce modèle sera présenté plus en détail au chapitre 6 et sera le cadre de travail du chapitre 8.

4.4 Génération des fluctuations primordiales

Les perturbations cosmologiques sont issues des fluctuations quantiques lors de l'inflation, fluctuations dont l'ordre de grandeur est donné par le paramètre de Hubble $\Delta\phi \sim H/2\pi$. Par instabilité gravitationnelle, elles ont donné lieu par la suite aux grandes structures actuelles. Nous allons maintenant introduire la description d'inhomogénéités dans l'univers et montrer comment l'inflation peut générer ces perturbations. On suivra la description des Ref. [81, 71].

4.4.1 Perturbations cosmologiques

La métrique plate ($k = 0$) de FLRW en temps conforme τ,

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\tau)(-\mathrm{d}\tau^2 + \delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j) \ , \tag{4.4.39}$$

où les indices $i, j = 1, 2, 3$ sont des indices spatiaux, décrit un espace-temps homogène et isotrope (principe cosmologique). Dans cette section nous allons décrire des écarts à cette homogénéité. Les mesures d'anisotropie du CMB, $\delta T/T$ montre que ces écarts sont faibles et qu'une théorie perturbative est adaptée. Pour décrire des perturbations, la première étape est de perturber cette métrique

$$ds^2 = \left[g_{\mu\nu}(\tau) + \epsilon_p \ell_{\mu\nu}(\tau, \boldsymbol{x}) + \epsilon_p^2 m_{\mu\nu}(\tau, \boldsymbol{x}) + \cdots\right] \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \ . \tag{4.4.40}$$

où ϵ_p est un paramètre quelconque petit devant l'unité paramétrant le développement perturbatif.

De même que la métrique, les champs décrivant la matière au sens général, c'est à dire le contenu en énergie de l'univers sont perturbés. Dans le cas qui nous intéresse, nous allons considérer uniquement un champ scalaire quelconque, possédant une valeur homogène $\varphi(\tau)$ dont la perturbation s'écrit

$$\varphi(\tau, \boldsymbol{x}) = \varphi(\tau) + \epsilon_p \delta\varphi(\tau, \boldsymbol{x}) + \epsilon_p^2 \delta^{(2)}\varphi(\tau, \boldsymbol{x}) + \cdots \ . \tag{4.4.41}$$

De manière général, tout le tenseur énergie-impulsion peut être perturbé de manière analogue au tenseur métrique

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(0)} + \epsilon_p T_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon_p^2 T_{\mu\nu}^{(2)} + \cdots \ . \tag{4.4.42}$$

Les équations du mouvement qui permettent de décrire l'évolution des perturbations $\ell_{\mu\nu}$ et $\delta\varphi$ sont les équations d'Einstein perturbées. Elles nécessitent l'introduction de perturbations au tenseur d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(0)} + \epsilon_p G_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon_p^2 G_{\mu\nu}^{(2)} + \cdots \ , \tag{4.4.43}$$

ce qui permet d'écrire

$$G_{\mu\nu}^{(0)} = \frac{\kappa_{\mathrm{N}}}{3} T_{\mu\nu}^{(0)} \ , \quad G_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{\kappa_{\mathrm{N}}}{3} T_{\mu\nu}^{(1)} \ , \quad \cdots \ . \tag{4.4.44}$$

Dans la suite, nous ne considérerons que les perturbations du premier ordre c'est à dire proportionnelle à ϵ_p. Le tenseur de perturbation $\ell_{\mu\nu}$ peut être décomposé en composantes scalaires, vectorielles et tensorielles [77]

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = a^2(\tau)\Big\{ &-(1-2\phi)\mathrm{d}\tau^2 + 2(\partial_i B - S_i)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}\tau + [(1-2\psi)\delta_{ij} \\ &+ 2\partial_i\partial_j E + \partial_i F_j + \partial_j F_i + h_{ij}]\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \Big\} \ . \end{aligned} \tag{4.4.45}$$

D'après ce que l'on a vu sur la résolution du problème de platitude, nous avons considéré ici les perturbations à une métrique spatialement plate. Des perturbations scalaires sont décrites par les fonctions ϕ, ψ, E et B. Les grandeurs S_i et F_i vérifient $\partial^i S_i = \partial^i F_i = 0$ et décrivent des perturbations vectorielles. Enfin h_{ij} satisfait à $h_i^i = 0$ et $\partial h_{ij}/\partial x_j = 0$ et décrit des perturbations tensorielles c'est-à-dire des ondes gravitationnelles. Les perturbations vectorielles, ne pouvant pas être générées par l'inflation, seront négligées dans la suite de ce chapitre.

Dans le secteur scalaire, il existe un degré de liberté non physique que l'on peut éliminer en choisissant une jauge particulière ou en travaillant avec des grandeurs invariantes de jauge. Cette démarche est adoptée dans ce qui suit. Deux grandeurs invariantes de jauge peuvent être introduites pour les composantes scalaires, appelés *potentiels de Bardeen* et définis par

$$\Phi = \phi + \frac{1}{a}[a(B - E')]' \ , \quad \Psi = \psi - \frac{a'}{a}(B - E') \ , \tag{4.4.46}$$

où $'$ désigne la dérivation par rapport au temps conforme τ. On peut montrer que dans le cas où la matière est décrite par un champ scalaire, les deux potentiels de Bardeen sont égaux et le problème se ramène à l'étude unique de Φ. Dans le secteur de la matière, on peut définir la grandeur invariante de jauge

$$\delta\varphi^{(\mathrm{inv})} = \delta\varphi + \varphi'(B - E') \ , \tag{4.4.47}$$

Puisqu'on a considéré que les sections spatiales de la métrique sont plates et que l'on travaille au premier ordre en perturbation (ordre linéaire), il est utile de décomposer les potentiels en mode de Fourier $\Phi(\tau, \boldsymbol{x}) = \int \Phi(\tau, \boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$, car chaque mode évoluent de manière indépendante. Il en est de même pour les perturbations tensorielles et les perturbations de l'inflaton.

La dynamique des deux grandeurs Φ et $\delta\varphi^{\rm inv}$ sont reliées par les équations d'Einstein perturbées Eq. (4.4.44). La description des perturbations scalaires peut se réduire [77] à la dynamique d'une unique variable [71] $\mu_S \propto (\delta\varphi^{\rm inv} + \phi'\Phi/\mathcal{H})$. De même dans le secteur tensoriel, une variable similaire $\mu_T \propto h_{ij}$ permet de décrire la dynamique des perturbations. Les deux types de perturbations, de nombre d'onde comobile k donné, obéissent au même type d'équation [71]

$$\mu''_{S,T} + \omega^2_{S,T}(k,\tau)\mu_{S,T} = \mu''_{S,T} + \left[k^2 - U_{S,T}(\tau)\right]\mu_{S,T} = 0 \; . \qquad (4.4.48)$$

où

$$\omega_T^2 = \left[k^2 - \frac{a''}{a}\right] \; , \quad \omega_S^2 = \left[k^2 - \frac{(a\sqrt{\gamma})''}{(a\sqrt{\gamma})}\right] \; , \quad \gamma = 1 - \mathcal{H}'/\mathcal{H}^2 \; .$$

Elle peut s'interpréter comme l'équation d'un oscillateur paramétrique dont la fréquence est une fonction dépendante explicitement du temps, ou comme une équation de Schrödinger de potentiel $U_{S,T}$. Les variables $\mu_{S,T}$ sont intéressantes car les spectres de puissance des perturbations scalaire $\mathcal{P}_\zeta(k)$ et tensorielles $\mathcal{P}_h(k)$, quantités directement observables, s'expriment

$$k^3\mathcal{P}_\zeta(k) = \frac{k^3}{8\pi^2}\left|\frac{\mu_S}{a\sqrt{\gamma}}\right|^2 \; , \quad k^3\mathcal{P}_h(k) = \frac{2k^3}{\pi^2}\left|\frac{\mu_T}{a}\right|^2 \; . \qquad (4.4.49)$$

On peut en effet vérifier que si l'on introduit la variable[71]

$$\zeta \equiv \frac{\mu_S}{2a\sqrt{\gamma}} = \frac{2}{3}\frac{\mathcal{H}^{-1}\Phi' + \Phi}{1+w} + \Phi \qquad (4.4.50)$$

où w est l'équation d'état du fluide, alors on a bien défini de manière standard un spectre de puissance $(2\pi^2)\delta(k-k')\mathcal{P}_\zeta(k) \equiv \langle\zeta^*(k)\zeta(k')\rangle$. On définit des indices spectraux afin de paramétrer la dépendance en k de ces spectres

$$n_s - 1 \equiv \left.\frac{\mathrm{d}\ln k^3\mathcal{P}_\zeta}{\mathrm{d}\ln k}\right|_{k=k_*} \quad \text{et} \quad n_T \equiv \left.\frac{\mathrm{d}\ln k^3\mathcal{P}_h}{\mathrm{d}\ln k}\right|_{k=k_*} \; . \qquad (4.4.51)$$

En conséquence, même si l'inflation génère une spectre invariant d'échelle à l'ordre zéro $k^3\mathcal{P}(k) = $ cste, au premier ordre dans les paramètres de roulement lent, on peut écrire les spectres de puissance comme

$$k^3\mathcal{P}_\zeta(k) = A_S\,k^{n_s-1} \; , \quad k^3\mathcal{P}_h(k) = A_T\,k^{n_T} \; . \qquad (4.4.52)$$

On peut peut continuer à paramétrer la dépendance des spectres en fonction du nombre d'onde en définissant

$$\alpha_s \equiv \left.\frac{\mathrm{d}^2\ln k^3\mathcal{P}_\zeta}{\mathrm{d}(\ln k)^2}\right|_{k=k_*} \quad \text{et} \quad \alpha_T \equiv \left.\frac{\mathrm{d}^2\ln k^3\mathcal{P}_h}{\mathrm{d}(\ln k)^2}\right|_{k=k_*} \; . \qquad (4.4.53)$$

Dans les expressions précédentes, k_* représente une échelle arbitraire appelée *échelle pivot.*

4.4.2 Solutions des perturbations

Etudions le comportement des solutions des Eqs. (4.4.48). Trois longueurs caractéristiques existent dans ce problème. Tout d'abord la longueur d'onde physique correspondant à un mode k et donnée par $\lambda(\tau) = (2\pi/k)a(\tau)$. Ensuite, il y a la longueur de Hubble $l_H \equiv \mathcal{H}^{-1} = a^2/a'$. Enfin il y a la longueur associée au potentiel $U_{S,T}$ de l'équation d'évolution Eq. (4.4.48), définie par $l_U \equiv a(\tau)U_{S,T}^{-1/2}$. A titre d'illustration, supposons que l'évolution du facteur d'échelle est parfaitement de Sitter pendant l'inflation [c'est une bonne approximation pendant l'inflation en roulement lent d'après l'Eq. (4.1.4)], et que donc $a(\tau) \propto |\tau|^{-1}$. Le rayon de Hubble est donc constant pendant l'inflation, évolue donc comme a^2 pendant l'ère dominée par la radiation et comme $a^{3/2}$ pendant l'ère dominée par la matière. Ces évolutions sont représentées sur la Fig. 4.4. Initialement, les longueurs d'onde physique sont plus petites que la longueur de Hubble (et même plus petites que la longueur de Planck ce qui permet l'existence d'effets transplanckiens [78] et motive la recherche de physique transplanckienne dans les données CMB [79]). En conséquence, pendant l'inflation les longueurs d'onde des perturbations deviennent tour à tour super-Hubble (on dit qu'elles sortent du rayon de hubble) et ré-entrerons dans la sphère de Hubble ultérieurement.

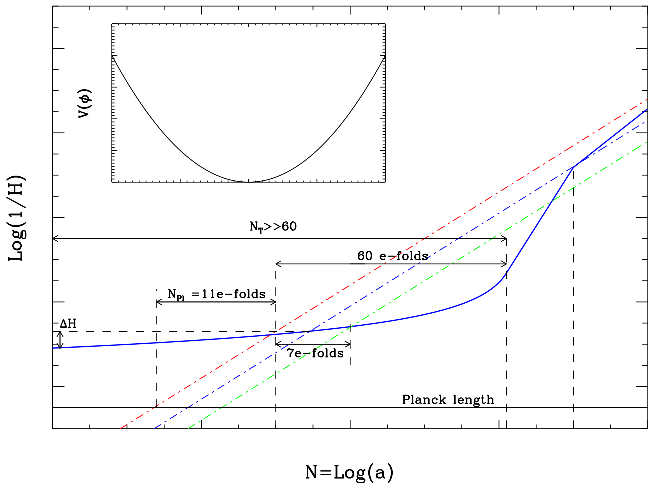

FIG. 4.4: Evolution des longueurs de Hubble, de trois longueurs d'onde de perturbation (droite rouge, bleue et verte) en fonction du temps ou de manière équivalente en fonction du nombre d'e-fold pendant l'inflation, et les ères de radiation et de matière. La courbe bleue en trais plein représente l'évolution du paramètre de Hubble quasiment plat pendant l'inflation puis pendant les phase dominées par la radiation et la matière. L'auteur a représenté notamment la durée (7 e-fold) pendant laquelle les échelles accessibles accessibles dans le CMB deviennent super-Hubble, et la durée entre le moment où l'échelle de Hubble actuelle devient super-Hubble et la fin de l'inflation (60 e-fold). Figure tirée de [81].

L'équation d'onde Eq. (4.4.48) met en jeu la longueur l_U. C'est elle qui contrôle donc le comportement des solutions et non la longueur de Hubble. Si on suppose une phase purement de Sitter, le potentiel s'écrit simplement [71] $U_{S,T} \simeq \tau^{-2} \simeq \mathcal{H}^2$. Par conséquent, on voit que les longueurs l_U et l_H ont une évolution (représentée en trait plein sur la Fig. 4.4) similaire pendant les différentes périodes ce qui entraîne parfois une confusion entre les deux. Initialement, un mode de perturbation k donné est plus grand que le potentiel (situation correspondant à la longueur d'onde sub-Hubble). Puis pendant l'inflation, le mode traverse le potentiel (le longueur d'onde devient super-Hubble). Ces deux régimes se traduisent par des comportement différents des modes de perturbation. Dans le premier cas, $k^2 \gg U(\tau)$ (mode sub-Hubble) et la solution est oscillante

$$\mu_{S,T} \simeq A_1(k)e^{-ik\tau} + A_2(k)e^{+ik\tau} \ . \tag{4.4.54}$$

Dans le second cas, le potentiel domine $U(\tau) \gg k^2$ (mode super-Hubble), et les solutions sont de la forme

$$\mu_S \simeq C_1(k)a\sqrt{\gamma} + C_2 a\sqrt{\gamma}\int^{\tau} \frac{\mathrm{d}\tau'}{a^2(\tau')\gamma}\ , \tag{4.4.55}$$

décrivant une composante croissante et une composante décroissante. Pour les ondes gravitationnelles, la solution est identique en posant $\gamma = 1$.

Il ne reste plus qu'à fixer les constantes d'intégration $A_{1,2}(k)$ grâce au calcul des conditions initiales des solutions. Cela nécessite [81, 84] une description quantique des perturbations. Dans ce cadre uniquement, des conditions initiales bien motivées peuvent être établies. Des conditions initiales *adiabatiques* pour les solutions permettent de fixer les constantes [71]

$$A_1 \propto \frac{1}{\sqrt{2k}}\ , \quad A_2 = 0\ .$$

4.4.3 Spectres de puissance issus de l'inflation

Nous allons maintenant évaluer $\mathcal{P}_\zeta$ et montrer que l'inflation donne lieu à un *spectre invariant d'échelle*, c'est à dire vérifiant $k^3\mathcal{P}_\zeta = \text{cste}$.

Pour un mode super-Hubble pendant l'inflation, le mode croissant est donné par $\mu_S \simeq C_1(k)a\sqrt{\gamma}$, ce qui permet d'écrire, d'après la définition du spectre de puissance,

$$k^3\mathcal{P}_\zeta \propto k^3|C_1(k)|^2\ . \tag{4.4.56}$$

Il est possible d'exprimer la fonction C_1 en fonction de $A_1(k)$ par simple continuité d'une solution dans les deux régimes, c'est à dire au moment τ_j où $k^2 = U(\tau_j)$

$$A_1(k)e^{-ik\tau_j} = C_1(k)(a\sqrt{\gamma})(\tau_j)\ . \tag{4.4.57}$$

Avec l'hypothèse d'une inflation en loi de puissance, $a(\tau) \propto |\tau|^{1+\beta}$, et le potentiel est donné par $U(\tau) \propto \tau^{-2}$, ce qui permet d'écrire $\tau_j \propto k^{-1}$. En sachant que pour une inflation en loi de puissance, γ est une constante,

$$k^3\mathcal{P}_\zeta \propto k|A_1(k)|^2 \propto k^0\ , \tag{4.4.58}$$

puisque les conditions initiales imposent $A_1 \propto k^{-1/2}$.

Une analyse plus fine notamment de la jonction entre les différents régimes entre le moment où les modes sont super-hubble et sub-hubble permet d'obtenir les écarts au spectre invariant d'échelle décrit précédemment. On montre en effet que le potentiel s'écrit [71]

$$U_S(\tau) \equiv \frac{(a\sqrt{\gamma})''}{(a\sqrt{\gamma})} = \frac{2 + 6\epsilon - 3\delta}{\tau^2}\ , \tag{4.4.59}$$

où $\delta = \eta - \epsilon$ est une combinaison des paramètres de roulement lent. Pour les modes tensoriels, on obtient une expression similaire

$$U_T = \frac{2 + 3\epsilon}{\tau^2}\ .$$

Ces expressions permettent une résolution analytique des équations Eqs. (4.4.48), et permettent d'écrire, au premier ordre en paramètres de roulement lent

$$k^3\mathcal{P}_\zeta \simeq \frac{H_{\rm inf}^2}{\pi\epsilon m_{\rm Pl}^2}\left[1 - 2(C+1)\epsilon - 2C(\epsilon - \delta) - 2(2\epsilon - \delta)\ln\frac{k}{k_*}\right]\ , \tag{4.4.60}$$

et

$$k^3\mathcal{P}_h = \frac{16H_{\rm inf}^2}{\pi m_{\rm Pl}^2}\left[1 - 2(C+1)\epsilon - 2\epsilon\ln\frac{k}{k_*}\right]\ , \tag{4.4.61}$$

La constante numérique vaut $C \simeq -0.73$ et $H_{\rm inf}$ est la valeur du paramètre de Hubble pendant la période où les échelles accessibles dans les données CMB redeviennent sub-Hubble. Cette période dure environ 7 e-fold et commence 60 e-fold avant la fin de l'inflation [81]. Cette valeur du paramètre de Hubble peut être très différente de sa valeur au début de l'inflation. Nous pouvons vérifier qu'au premier ordre dans les paramètres de roulement lent, l'inflation génére bien des spectres de fluctuations invariants d'échelle.

4.5 Fluctuations de température du CMB

4.5.1 Fluctuations de densité

Les spectres des perturbations du champ d'inflaton génèrent à la fin de l'inflation des fluctuations de densité d'énergie de radiation $\delta_r = \delta\rho_r/\rho_r$ et de matière $\delta_m = \delta\rho_m/\rho_m$. Elles représentent les perturbations à l'homogénéité d'un univers de FLRW standard. Ces fluctuations de densité d'énergie évoluent d'après les équations d'Einstein perturbées présentées précédemment mais désormais le contenu du tenseur énergie-impulsion est de la radiation et de la matière. On parle de *fluctuations adiabatiques* lorsque les conditions initiales de cette évolution conserve l'entropie. On a vu au chapitre 1 que $S \propto T^3 a^3$. De plus, la loi de Stephan permet d'écrire $\rho_r \propto T^4$ et on a vu que $\rho_m \propto a^{-3}$. On en déduit que la fluctuation d'entropie

$$\frac{\delta S}{S} \propto \frac{3}{4}\delta_r - \delta_m \ .$$

La conservation de l'entropie $\delta S/S = 0$ impose que les fluctuations de radiation et de matière soit couplées c'est-à-dire que les deux formes d'énergie soit en équilibre. Les zones de sur-densité de photons correspondent donc aux zones de sur-densité de matière et donc aux puits de potentiel. L'inflation à un champ ne produit que ce type de conditions initiales pour les fluctuations. Un second type de conditions initiales existe, les *fluctuations isocourbes* et sont générées notamment par les modèles inflationnaires possédant plusieurs champs en roulement lent [82]. Dans ce cas, les fluctuations de densité se compensent globalement de telle sorte qu'en tout point, la sur-densité totale et donc la courbure sont nulles.

4.5.2 Fluctuations de température

Le signal du CMB reçu aujourd'hui contient cette information sur les fluctuations (primordiales) de densité, combinée à un grand nombre de mécanismes électromagnétiques et gravitationnels subis par les photons entre la surface de dernière diffusion et l'observateur (voir [7, 83]). Ces mécanismes seront présentés succinctement au chapitre 9. Les modes de perturbation devenus récemment sub-Hubble ne sont quasiment pas sensibles aux paramètres cosmologiques. Dans ce cas, le calcul de la fonction de transfert entre les fluctuations primordiales de densité et les fluctuations de température du CMB peut être fait analytiquement. Le seul effet subi par les photons associés à ces modes est l'effet Sachs-Wolfe, c'est à dire une modification de leur énergie due au puits de potentiel gravitationnel ressenti dans la région d'émission. On montre que pour les grandes échelles l'anisotropie de température due aux perturbations scalaires, ce qui est la principale contribution, est simplement proportionnelle au potentiel de Bardeen [81]

$$\frac{\delta T}{T}(\boldsymbol{n}) \simeq \frac{1}{3}\Phi(\tau_{CMB}, \boldsymbol{x}_E) \ . \tag{4.5.62}$$

où τ_{CMB} est le temps conforme d'émission du CMB et $\boldsymbol{x}_E$ est la position d'émission. Cela permet de calculer le spectre de puissance de ces anisotropies pour les grandes échelles c'est-à-dire pour les bas multipôle ℓ,

$$C_\ell^T = \frac{4\pi}{25} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{k} j_\ell^2(k) k^3 \mathcal{P}_\zeta \ , \tag{4.5.63}$$

où j_ℓ est la fonction de Bessel sphérique d'ordre ℓ. En utilisant l'Eq. (4.4.60) et en négligeant le terme logarithmique, on obtient

$$C_\ell^T = \frac{2H_{\mathrm{inf}}^2}{25\epsilon m_{\mathrm{Pl}}^2} \frac{1}{\ell(\ell+1)} \ , \quad \text{pour} \quad \ell \ll 20 \ . \tag{4.5.64}$$

Pour le calcul du reste du spectre du CMB, il est très difficile de conserver l'approche analytique. Pour une précision comparable à celle des mesures expérimentales, il est nécessaire d'employer un code numérique. Il en existe deux actuellement d'égale précision et publiques : CAMB[2] et CMBfast[3]. Notons qu'une approche semi-analytique intéressante est proposée par [80] pour la dérivation du spectre des fluctuations de température.

4.5.3 Paramètres de roulement lent et observables

Les expériences de détection des anisotropies de température du CMB sont sensibles aux paramètres du spectre de puissance scalaire (et tensoriel lorsque l'on détectera le signal polarisé B). La précision des récentes et futures expériences CMB permet de contraindre les indices spectraux n_s, n_T, et leur dérivée α_s, α_T de ces spectres de puissance des perturbations. Une cinquième observable est le rapport tenseur/scalaire primordial r défini par

$$r \equiv \frac{k^3\mathcal{P}_h}{k^3\mathcal{P}_\zeta} = \frac{A_T}{A_S} \ , \tag{4.5.65}$$

la seconde égalité n'étant vraie qu'au premier ordre dans les paramètres de roulement lent.

Les paramètres de roulement lent ϵ, η, ξ (ou de manière équivalente ϵ_n) quant à eux décrivent chacun une dérivée du potentiel scalaire dans lequel évolue l'inflaton. La détection du CMB permet de donc de discriminer parmi les différents types de potentiel existants. A partir des Eqs. (4.4.60) et (4.4.61), on peut relier les paramètres de roulement lent aux paramètres des spectres de puissance [66]

$$n_s - 1 = -6\,\epsilon + 2\,\eta \ , \tag{4.5.66}$$

$$\alpha_s = -16\,\epsilon\,\eta + 24\,\epsilon^2 + 2\,\xi^2 \ , \tag{4.5.67}$$

$$n_T = -2\,\epsilon \ . \tag{4.5.68}$$

Concernant le rapport tenseur/scalaire défini précédemment, il s'écrit très simplement au premier ordre dans les paramètres de roulement lent

$$r = 16\,\epsilon \ , \tag{4.5.69}$$

ce qui montre que dans l'approximation du roulement lent, les perturbations tensorielles sont sous-dominantes en comparaison des perturbations scalaires puisque $\epsilon \ll 1$.

Sur la Fig. 4.5 sont représentées les contraintes mises par le satellite WMAP sur les paramètres de roulement lent. Ces contours peuvent être comparés aux prédictions des différents modèles représentées sur la Fig. 4.3. Les données actuelles contraignent fortement les modèles basé sur un potentiel en loi de puissance $V(\phi) \propto \phi^p$. Seuls les modèles tels que $p \leq 4$ sont encore compatibles avec les données, le cas $p = 4$ étant fortement contraint. En revanche les modèles hybrides sont en revanche plutôt favorisés [73, 143].

[2]Ce code, en langage FORTRAN 90 a été développé par A. Lewis et A. Chalinor et est accessible à `http ://camb.info/`.

[3]Ce code, en FORTRAN 77 a été développé par U. Seljak et M. Zaldarriaga et est accessible à `http ://www.cmbfast.org/`.

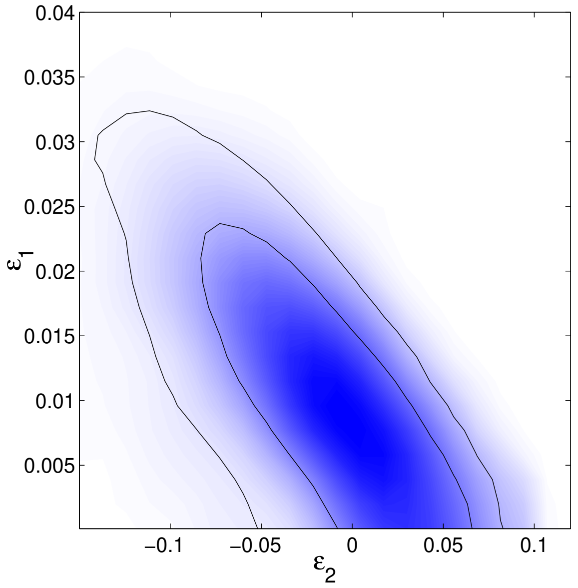

FIG. 4.5: Contraintes sur les paramètres de roulement lent imposés par le satellite WMAP. Les courbes interne et externe représentent respectivement les contraintes à 68% et 95% de degré de confiance. Figure tirée de la première Ref. de [73].

4.5.4 Ondes gravitationnelles primordiales

Nous avons vu que la détection des fluctuations de température du CMB offre un moyen de contraindre la phase inflationnaire. Une seconde source d'informations sur les fluctuations primordiales vient des fluctuations tensorielles c'est à dire des ondes gravitationnelles primordiales. Il est nettement plus difficile de détecter le signal de ces fluctuations. Leur détection est cependant d'un grand intérêt pour deux raisons.

La première est qu'elle fournirait le seul test réel que l'origine des fluctuations est bien inflationnaire et non un quelconque mécanisme générant des fluctuations adiabatiques. Cela nécessite de vérifier la relation de consistence, valable si l'inflation est généré par la dynamique de deux champs au maximum

$$r = -8 n_T \sin^2 \Delta \ . \tag{4.5.70}$$

Dans le cas d'une inflation à un champ, $\sin^2 \Delta = 1$ et on peut vérifier cette relation avec les expressions précédentes de r et n_T. Dans le cas d'une inflation à deux champs, $\Delta \neq \pi/2$ et ce paramètre [85] mesure la corrélation entre les deux champs, corrélation responsable de la génération de perturbations non adiabatiques.

La seconde raison est liée à la relation entre l'échelle d'énergie à laquelle a eu lieu l'inflation et le rapport tenseur/scalaire. On peut définir un rapport tenseur/scalaire observé T/S, défini comme le rapport des contributions scalaire et tensorielle au spectre de puissance des fluctuations de température

$$\left(\frac{T}{S}\right)_Q \equiv \frac{C_2^T}{C_2^S} \simeq -f n_T \simeq 2 f \epsilon \ , \tag{4.5.71}$$

où f est une fonction dépendante des paramètres cosmologiques, $f = f(h, \Omega_m, \Omega_\Lambda, \dots)$. Ce rapport est directement mesurable mais dépend des paramètres cosmologiques. Pour un modèle cosmologique ajustant au mieux les données actuelles, c'est à dire une modèle possédant de la matière noire et une constante cosmologique, $f(h, \Omega_m, \Omega_\Lambda, \dots) \simeq 5$. La mesure de ce rapport donne une mesure de ϵ et donc de la valeur du paramètre de Hubble pendant l'inflation $H_{\rm inf}$. Il faut pour cela utiliser l'Eq. (4.5.64) et la mesure de l'amplitude absolue de l'anisotropie de température faite par COBE et WMAP ($T \simeq 2.7$ K)

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_Q = \sqrt{\frac{5C_2}{4\pi}} \simeq 6.7 \times 10^{-6} \ . \tag{4.5.72}$$

Cette anisotropie est reliée au paramètre de Hubble pendant l'inflation

$$\frac{H_{\rm inf}^2}{m_{\rm Pl}^2} = 60\pi\epsilon \left(\frac{\delta T}{T}\right)_Q^2 \ . \tag{4.5.73}$$

Ce paramètre de Hubble $H_{\rm inf}$ renseigne directement sur la valeur du potentiel $V_{\rm inf}$ pendant l'inflation grâce à l'équations de Friedmann et donc à l'échelle d'énergie à laquelle cette inflation s'est produite $M_{\rm inf} \equiv V_{\rm inf}^{1/4}$.

Malheureusement, la détection de ces ondes gravitationnelles primordiales est très difficile. Elles sont fortement sous-dominantes dans le spectre de température et l'effet de lentille gravitationnel est une source de de bruit de fond puissante dans le spectre polarisé du CMB. Nous en reparlerons au chapitre 9.

Deuxième partie

Grande Unification supersymétrique

Chapitre 5

Grande Unification et supersymétrie

Sommaire

5.1 Introduction et motivations

Nous allons maintenant présenter le cadre principal du travail à suivre, à savoir la Grande Unification supersymétrique (SUSY GUTs). Ce cadre permet d'aller au-delà du Modèle Standard (MS) de physique des particules et du modèle standard de la cosmologie, et de résoudre naturellement un grand nombre de leurs problèmes mentionnés aux chapitres 1 et 2. Nous allons montrer comment l'introduction d'une nouvelle symétrie, la supersymétrie (SUSY), bien que pour le moment non observée permet de résoudre naturellement le problème de hiérarchie du MS. Cette symétrie nécessite l'introduction d'autant de nouvelles particules que celles que nous connaissons déjà, et la plus légère d'entre elles est un candidat naturel de matière noire.

La seconde composante du cadre de travail est la Grande Unification dont l'idée maîtresse est de continuer l'unification des interactions et des particules à haute énergie. Dans le MS, même si les trois interactions microscopiques présentent de grandes similitudes, il existe trois constantes de couplage différentes associées à trois groupes de symétrie distincts. Dans les modèles de GUT, ces trois interactions sont unifiées en une seule à haute énergie, transportée par de nouveaux bosons portant des charges faible, forte, et électromagnétique. Cela a des conséquences potentiellement catastrophiques pour la cosmologie. Ces conséquences permettent de placer des contraintes fortes sur les théories, contraintes qui seront étudiées au chapitre 6.

Pour présenter ces théories, nous allons illustrer le propos sur l'exemple de GUT le plus simple à savoir une unification basée sur $SU(5)$. C'est le premier modèle de GUT historiquement proposé par H. Georgi et S. Glashow [86], suivant ainsi la tentative d'unification partielle de J. Pati et A. Salam [87]. Unifier la physique des particules dans ce groupe correspond à suivre une approche minimale puisque $SU(5)$ est de rang 4 le même que celui de $G_{\rm MS}$. Ce modèle semble aujourd'hui, sinon exclu (il existe une controverse à ce sujet), du moins fortement défavorisé [128, 99] par les données récentes sur la durée de vie du proton notamment (voir chapitre 6 et 7). Les modèles basés sur les groupes $SO(10)$ ou E_6 satisfont eux aux contraintes actuelles (voir chapitre 6). Cependant, le modèle de Georgi-Glashow illustre très bien les caractéristiques principales de la GUT. Pour une présentation de $SO(10)$ en version non supersymétrique et supersymétrique, on peut consulter [88]. Dans le cadre de la supergravité, certains aspects de la GUT basée sur $SU(5)$ sont présentés dans la Ref. [95].

Pour une présentation générale spécifiquement sur les SUSY GUTs, on pourra consulter l'ouvrages et la revue de R. Mohapatra [88, 89]. Nous ferons aussi référence à [95, 96] pour la supersymétrie et la supergravité, et à [21, 91] pour les théories de GUT. Les notes de cours de F. Cuypers [93] introduisent simplement les bases de GUT et de SUSY. Pour les outils mathématiques, on consultera le livre de H. Georgi [90] (méthodes dans $SU(n)$, tableaux de Young) et la revue de R. Slansky [92] (diagrammes de Dynkin, sous-groupes, décompositions de représentations) pour l'étude des brisures de symétrie dans les GUTs. On pourra consulter [101] pour la construction de schémas de brisures de symétrie. Enfin, à propos de la phénoménologie de ces théories, on pourra consulter [128, 99, 127] et les autres références du chapitre 6. On trouvera en annexe A certains résultats utiles sur $SU(5)$, notamment les générateurs dans la représentation fondamentale, et la décomposition de certaines représentations sous deux sous-groupes de ce groupe.

5.2 Fermions, bosons et représentations en GUT

5.2.1 Représentations fermioniques

Etudions maintenant plus en détail les différents aspects de la Grande Unification sur l'exemple du modèle de Georgi-Glashow basé sur $SU(5)$. Une fois le groupe de symétrie choisi, il faut choisir une représentation adaptée à laquelle appartiennent les fermions du MS. La représentation fondamentale de $SU(5)$ est la $\mathbf{5}$; elle est complexe ($\bar{\mathbf{5}} \neq \mathbf{5}$). Les représentations de $SU(5)$ de plus petite taille se décomposent de la manière suivante dans les représentations de $SU(3) \times SU(2)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{5} &= (\mathbf{3},\mathbf{1}) + (\mathbf{1},\mathbf{2}) \ , \\
\bar{\mathbf{5}} &= (\bar{\mathbf{3}},\mathbf{1}) + (\mathbf{1},\bar{\mathbf{2}}) \ , \\
\mathbf{10} &= (\bar{\mathbf{3}},\mathbf{1}) + (\bar{\mathbf{3}},\mathbf{2}) + (\mathbf{1},\mathbf{1}) \ .
\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

La représentation adaptée pour ranger les fermions est soumise à un certain nombre de contraintes fortes (représentation complexe, absence d'anomalies, etc ... Voir chapitre 6). Pour le groupe $SU(5)$, c'est le cas de la combinaison $\bar{\mathbf{5}} + \mathbf{10}$ qui permet de classer les fermions de la première famille dans deux représentations distinctes

$$\Psi(\bar{\mathbf{5}}) = \begin{pmatrix} d_1^c \\ d_2^c \\ d_3^c \\ e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix}_L \quad , \quad \chi(\mathbf{10}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & u_1 & d_1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & u_2 & d_2 \\ u_2^c & -u_1^c & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^+ \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^+ & 0 \end{pmatrix}_L \tag{5.2.2}$$

Dans la matrice précédente, l'exposant "c" signifie "conjugué de charge". Il désigne l'image par un opérateur de conjugaison de charge C défini par $C^{-1}\gamma_\mu C = -{}^t\gamma_\mu$. Dans la représentation de Dirac, $C = -C^{-1} = -{}^tC = i\gamma^2\gamma^0$. Il agit sur spineur de Dirac selon

$$\psi^c = C\ \left({}^t\bar{\psi}\right) = C\ \left({}^t\gamma^0\right)\psi^* = i\gamma^2\psi^*\ , \tag{5.2.3}$$

la dernière égalité n'étant valable que dans la représentation de Dirac des matrices γ. Grâce à cette définition, la particule u_L^c par exemple décrit les mêmes degrés de liberté que u_R puisque les deux types de fermions sont reliés par la bijection

$$\psi_{L,R}^c = C\ \left({}^t\bar{\psi}_{R,L}\right)\ . \tag{5.2.4}$$

On en conclut que dans la repartition de l'Eq. (5.2.2), on a placé tous les fermions du MS et qu'il n'est pas de place pour un fermion additionnel.

Les décompositions des représentations de $SU(5)$ sous $SU(3)\times SU(2)$ données à l'Eq. (5.2.1) permettent de vérifier que le fait de ranger les fermions comme précédemment assigne les bons nombres quantiques sous $SU(3)_C$ et $SU(2)_L$ une fois le groupe $SU(5)$ brisé. Par exemple, la décomposition de $\bar{\mathbf{5}}$ permet de voir que les trois premières composantes du multiplet se transformeront comme un triplet de $SU(3)$ et les deux suivantes comme un doublet de $SU(2)$. Pour le dernier nombre quantique (l'hypercharge), il reste à construire un opérateur Y à partir des générateurs de $SU(5)$ afin de rendre compte des charges observées pour les particules du MS. Nous verrons que pour ce groupe, Y est simplement proportionnel au générateur λ_{24}. Pour des modèles basés sur un groupe quelconque, cette dernière contrainte n'est pas triviale. Globalement cette démarche permet de voir comment le MS (avec ses caractéristiques et ses nombres quantiques) est plongé dans le groupe de Grande Unification.

Dans la version minimale du modèle de Georgi-Glashow, il n'y a pas présence d'un fermion droit, ce qui permettrait de rendre compte des oscillations de neutrinos observés [116]. De ce point de vue, une grande unification basée sur $SU(5)$ ne résout pas ce problème. Il est possible bien entendu d'ajouter un singlet de $SU(5)$ supplémentaire pour inclure cette particule. On voit cependant que l'on ne peut pas (avec ou sans neutrino droit) placer toutes les particules du MS dans une représentation fermionique unique. Ce point est plus élégamment traité pour une GUT basée sur le groupe $SO(10)$, pour lequel les quinze fermions sont placés dans une représentation unique (la représentation $\mathbf{16}$) et il reste la place d'une "nouvelle" particule, place que pourrait occuper le neutrino droit puisque les nombres quantiques de cette particule sont compatibles avec cette particule. On peut même dire que l'unification dans $SO(10)$ *prédit* l'existence du neutrino droit.

5.2.2 Quantification de la charge

Dans la présentation du MS faite au chapitre 2, nous avons montré qu'un des problèmes de ce modèle est que le nombre quantique sous une symétrie $U(1)$ est libre d'être réel (donc pas forcément un entier naturel). Or, les expériences nous montrent que la charge électromagnétique est quantifiée. Nous allons voir que ce point est une conséquence naturelle des théories de GUT.

L'opérateur de charge électromagnétique Q, diagonal, est nécessairement une combinaison linéaire des opérateurs T_3 et Y. Ces générateurs sont eux-même combinaison linéaire des générateurs λ_3 et λ_{24} de $SU(5)$. On peut donc écrire que $Q = a\lambda_3 + b\lambda_{24}$. Le fait que les générateurs de $SU(5)$ soit de trace nulle implique donc qu'il en est de même pour Q. Le plus simple est de calculer

$$\mathrm{Tr}[Q(\bar{\mathbf{5}})] = 0 \;\Leftrightarrow\; 3Q(d^c) + Q(e) + Q(\nu) = 0 \;\Leftrightarrow\; Q(d) = -\frac{1}{3}Q(e) \; . \tag{5.2.5}$$

Ainsi, les quarks possèdent une charge de 1/3 simplement car ils ont trois couleurs possibles.

5.2.3 Anomalies des représentations fermioniques

Une fois faite la répartition des fermions dans les représentations fermioniques, il est simple d'étudier si ce choix, à savoir $\bar{\mathbf{5}} + \mathbf{10}$ possède ou non des anomalies [94]. Elles rendraient la théorie instable en entraînant des interactions brisant la renormalisabilité de la théorie. Pour un choix de représentation fermionique R, l'anomalie $\mathcal{A}(R)$ est proportionnelle à la trace [21]

$$\mathrm{Tr}\left[\left\{T^a(R), T^b(R)\right\}\, T^c(R)\right] = \frac{1}{2}\mathcal{A}(R) d^{abc} \; , \tag{5.2.6}$$

où T^a est un générateur dans la représentation R et où d^{abc} est une matrice symétrique de constantes introduite par l'anti-commutateur des générateurs de $SU(5)$

$$\{\lambda^a, \lambda^b\} = 2d^{abc}\lambda^c \; . \tag{5.2.7}$$

Notons que la définition de l'anomalie dans l'équation précédente ne dépend que de la représentation et non des générateurs. De plus, elle est normalisée à 1 pour la représentation fondamentale. On peut donc choisir $T^a = T^b = T^c = Q$ et calculer [21]

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}(\bar{\mathbf{5}})}{\mathcal{A}(\mathbf{10})} &= \frac{\mathrm{Tr}[Q^3(\bar{\mathbf{5}})]}{\mathrm{Tr}[Q^3(\mathbf{10})]} \\ &= \frac{3(1/3)^3 + (-1)^3 + 0^3}{3(-2/3)^3 + 2(2/3)^3 + 3(-1/3)^3 + 1^3} = -1 \; , \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

ce qui permet de vérifier que $\mathcal{A}\left(\bar{\mathbf{5}} + \mathbf{10}\right) = 0$. La théorie est donc stable du point de vue des anomalies fermioniques.

5.2.4 Représentation bosonique

Le groupe $SU(5)$ possède $5^2 - 1 = 24$ générateurs et le même nombre de bosons. Ceux-ci sont forcément rangés dans la représentation adjointe $\mathbf{24}$ de $SU(5)$ [voir Eq. (2.3.21)]. Cette représentation se décompose sous $SU(3) \times SU(2)$ de la manière suivante

$$\mathbf{24} = (\mathbf{8}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{3}) + (\mathbf{1}, \mathbf{1}) + (\mathbf{3}, \mathbf{2}) + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2}) \tag{5.2.9}$$

dont les composantes s'interprètent de la manière suivante :

- $(\mathbf{8}, \mathbf{1})$ est l'octuplet de $SU(3)$ de gluons g_α^β,
- $(\mathbf{1}, \mathbf{3})$ est le triplet de $SU(2)$ de jauge $W^\pm$, W^3,
- $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ est le boson B_μ de $U(1)$ essentiellement le photon.

On voit que les autres bosons sont non trivialement chargés sous $SU(3)_C$ et sous $SU(2)_L$. Ils sont au nombre de douze, et sont usuellement notés $(\mathbf{3},\mathbf{2})$: (X_α, Y_α), $(\bar{\mathbf{3}},\mathbf{2})$: (X^α, Y^α). Ils jouent un rôle fondamental dans la phénoménologie de la Grande Unification puisque qu'ils sont, du fait de leurs nombres quantiques, médiateurs de nouvelles interactions qui **ne conservent pas le nombre baryonique**. Il résulte de ces interactions une possible désintégration des nucléons, ce qui peut devenir problématique si leur durée de vie n'est pas compatible avec les mesures expérimentales. Ce qui peut protéger cette durée de vie est une masse de bosons médiateurs X, Y suffisamment élevée pour diminuer la probabilité de ces désintégrations. La masse de ces bosons de jauge étant fortement reliée à l'échelle de brisure du groupe $SU(5)$ en G_{GUT}, les données observationnelles permettent de contraindre cette dernière. Ceci sera étudié plus en détail dans le chapitre 6.

Les générateurs λ_a dans la représentation fondamentale sont rappelés en annexe A. Les 24 bosons peuvent être écrits en représentation matricielle [21, 91],

$$
\begin{aligned}
A_\mu &= \sum_{a=1}^{24} \frac{A_\mu^a \lambda^a}{2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} g_1^1 & g_2^1 & g_3^1 & \bar{X}_1 & \bar{Y}_1 \\ g_1^2 & g_2^2 & g_3^2 & \bar{X}_2 & \bar{Y}_2 \\ g_1^3 & g_2^3 & g_3^3 & \bar{X}_3 & \bar{Y}_3 \\ X^1 & X^2 & X^3 & \frac{W^3}{\sqrt{2}} & W^+ \\ Y^1 & Y^2 & Y^3 & W^- & -\frac{W^3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \frac{B_\mu}{2\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2 & & & & \\ & -2 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & +3 & \\ & & & & +3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{5.2.10}
$$

5.2.5 Lagrangiens fermioniques et bosoniques

Une fois les fermions et les bosons placés dans une (des) représentation(s), et écrits sous forme matricielle, il est plus aisé d'écrire leur lagrangien d'interaction. En effet, de manière similaire aux théories de jauge basées sur des groupes de rang inférieurs, le lagrangien fermionique s'écrit [93]

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{fermion}} &= \bar{\Psi}\gamma_\mu D^\mu \Psi + \text{Tr}(\bar{\chi}\gamma_\mu D^\mu \chi) \\
&= \bar{\Psi}^i \gamma_\mu (D^\mu)_i^j \Psi_j + \bar{\chi}^{ij}\gamma_\mu (D^\mu)_j^k \chi_{ki} \ ,
\end{aligned}
\tag{5.2.11}
$$

avec $i, j, k = 1, \ldots, 5$.
Les dérivées covariantes sont construites avec une contribution des bosons afin de conserver l'invariance de jauge

$$
\begin{aligned}
D_\mu \Psi &= \partial_\mu \Psi + i g_5 A_\mu \Psi \\
&= \partial_\mu \Psi + \frac{i g_5}{2} A_\mu^a \lambda_a \Psi \ ,
\end{aligned}
\tag{5.2.12}
$$

avec g_5 le couplage de jauge de $SU(5)$, tandis que

$$
\begin{aligned}
D_\mu \chi &= \partial_\mu \chi + i g_5 A_\mu \chi \\
&= \partial_\mu \chi + i g_5 (A_\mu^a)_k^l \lambda_a \chi_{kl} \ ,
\end{aligned}
\tag{5.2.13}
$$

où $a = 1, \ldots, 24$. Ces expressions peuvent être développées pour écrire les couplages possibles entre les fermions et les bosons. Il est possible à partir de ces expressions d'expliciter par exemple les nouveaux couplages faisant intervenir les bosons X et Y afin d'illustrer l'origine de la désintégration du proton. On obtient à partir du lagrangien de l'Eq. (5.2.11) des termes couplant trilinéairement des quarks et des leptons via les bosons X et Y. Par exemple, pour $i = 1, 2, 3$ et $j = 4$, on obtient

$$ig\left[\bar{\Psi}^1\gamma^\mu(A_\mu)_1^4 + \bar{\Psi}^2\gamma^\mu(A_\mu)_2^4 + \bar{\Psi}^3\gamma^\mu(A_\mu)_3^4\right]\Psi_4 = \frac{ig}{\sqrt{2}}X_\mu \bar{d}^c\gamma^\mu e_L \ , \qquad (5.2.14)$$

ce qui donne lieu à des vertex comme ceux des graphes de désintégration du proton de la Fig. 6.3 page 144. Puisque ces bosons X, Y couplent des leptons et des quarks, ils sont appelés des *lepto-quarks*.

Le lagrangien de $SU(5)$ possède aussi une composante purement bosonique sous la forme [91]

$$\mathcal{L}_{\text{boson}} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^j_i(F^{\mu\nu})^i_j \ , \qquad (5.2.15)$$

avec

$$(F_{\mu\nu})^j_i = \partial_\mu(A_\nu)^j_i - \partial_\nu(A_\mu)^j_i + ig_5\left[(A_\mu)^k_i(A_\nu)^j_k - (A_\nu)^k_i(A_\mu)^j_k\right] \ . \qquad (5.2.16)$$

5.3 Brisures de symétrie dans les GUT

5.3.1 Schémas de brisure et champs de Higgs

Si l'on part de l'hypothèse qu'à haute énergie, les interactions étaient unifiées en un seul groupe de symétrie $SU(5)$, le secteur de Higgs permet de comprendre comment à basse énergie, nous observons les symétries $SU(3)_{\mathrm{C}} \times U(1)_{\mathrm{EM}}$. On souhaite donc réaliser le schéma de brisure

$$SU(5) \xrightarrow[M_{\mathrm{GUT}}]{\langle H\rangle} SU(3)_{\mathrm{C}} \times SU(2)_{\mathrm{L}} \times U(1)_{\mathrm{Y}} \xrightarrow[M_{\mathrm{EW}}]{\langle\Phi\rangle} SU(3)_{\mathrm{C}} \times U(1)_{\mathrm{EM}} \ . \qquad (5.3.17)$$

Tout d'abord, les données expérimentales imposent clairement d'utiliser deux champs de Higgs distincts pour réaliser ces deux brisures puisqu'elles doivent être réalisées à des énergies totalement différentes, deux échelles que l'on note $M_{\mathrm{GUT}} \sim 10^{16}$ GeV et $M_{\mathrm{EW}} \sim 10^2$ GeV. Cela est nécessaire afin de rendre compte de la masse des bosons de jauge observés et du fait que les bosons X et Y doivent être très massifs afin d'être compatibles avec les données sur la durée de vie du proton.

On pourrait penser à première vue que le mécanisme de Higgs exposé au chapitre 2 lors de la description du MS peut être ré-utilisé ici pour réaliser la dernière partie de ce schéma de brisure. En réalité ce n'est pas possible car les champs de Higgs, comme les toutes les particules, doivent être dans des représentations de $SU(5)$ (prop. 3.2). Pour que $SU(5)$ soit un groupe de symétrie sur lequel on peut baser un modèle, il est nécessaire que $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ soit un sous-groupe de $SU(5)$, ce qui est le cas (voir la table A.1 de l'annexe A). Il faut ensuite étudier comment se décomposent les différentes représentations de $SU(5)$ et trouver les représentations appropriées qui permettent de réaliser les brisures voulues.

5.3.2 Brisure de Grande Unification

Pour suivre la démarche minimale, le schéma de brisure Eq. (5.3.17) est réalisé avec un champ H dans la représentation **24** et un champ Φ dans la représentation**5**. Le champ H étant dans la représentation adjointe, il peut être mis sous la forme d'une matrice 5×5 de trace nulle,

$$H = \sum_{a=1}^{24} \frac{H^a\lambda^a}{2} \ . \qquad (5.3.18)$$

Le lagrangien de ce champ scalaire est supposé, dans un premier temps, découplé du champ Φ. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(H) &= \mathrm{Tr}|D_\mu H|^2 - V_1(H)\ , \\ V_1(H) &= -m_1^2\left(\mathrm{Tr}H^2\right) + \lambda_1\left(\mathrm{Tr}H^2\right)^2 + \lambda_2\left(\mathrm{Tr}H^4\right) + \lambda_2'\left(\mathrm{Tr}H^3\right)\ .\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

En pratique, on souhaite imposer que ce lagrangien soit aussi invariant sous[1] $H \to -H$, d'où la contrainte $\lambda_2' = 0$. Si les deux secteurs de Higgs sont indépendants, il faudrait introduire un lagrangien pour le champ Φ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\Phi) &= |D_\mu \Phi|^2 - V_2(\Phi)\ , \\ V_2(\Phi) &= -m_2^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda_3(\Phi^\dagger\Phi)^2\ .\end{aligned} \tag{5.3.20}$$

Mais cela aboutirait [91] à une phénoménologie différente de celle observée : elle introduirait un boson neutre sans masse, chargé sous $SU(3)_\mathrm{C}$. La solution est de considérer un potentiel couplant H et Φ

$$V(H,\Phi) = V_1(H) + V_2(\Phi) + \lambda_4\left(\mathrm{Tr}H^2\right)(\Phi^\dagger\Phi) + \lambda_5\left(\Phi^\dagger H^2\Phi\right)\ . \tag{5.3.21}$$

Ainsi les termes de couplage entre H et Φ permettront au boson problématique précédent d'acquérir une masse. En toute généralité [101], une fois le potentiel $V(H,\Phi)$ établi, il faut le minimiser et étudier à chaque minimum par lequel passe le système, quelle est la symétrie du système. Evidemment cette dérivation dépend des valeurs numériques des paramètres λ. L'objectif lors de la construction de modèles est de trouver un espace des paramètres pour lequel le modèle standard soit un minimum absolu de la théorie. Plaçons nous dans un premier temps dans le cas où les couplages λ_4 et λ_5 sont petits devant 1, et où le minimum de $V(H,\Phi)$ est celui de $V_1(H)$. Pour $\lambda_2 < 0$, on montre [101] que le minimum du potentiel est

$$\langle H\rangle_0 = v_1\,\mathrm{diag}(2,2,2,2,-8) \tag{5.3.22}$$

et la symétrie du système est $SU(4)\times U(1)$. En revanche pour $\lambda_2 > 0$ et $\lambda_1 > -\frac{7}{30}\lambda_2$, le minimum du potentiel est

$$\langle H\rangle_0 = v_1\,\mathrm{diag}(2,2,2,-3,-3)\ . \tag{5.3.23}$$

avec

$$v_1^2 = \frac{m_1^2}{60\lambda_1 + 14\lambda_2}\ . \tag{5.3.24}$$

Dans ce second cas, la symétrie du système est $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ et c'est donc cet espace des paramètres qui nous intéresse. La démarche pour étudier le spectre des particules est similaire en tous points aux raisonnements faits pour le MS. Elle passe par l'étape centrale de définir un nouveau champ $H'(x)$ décrivant les oscillations du Higgs autour du vide de l'Eq. (5.3.23)

$$\begin{aligned}H' &\equiv H - \langle H\rangle_0 \\ &= \begin{pmatrix} [H_8]^1_1 & [H_8]^1_2 & [H_8]^1_3 & H_{X1} & H_{Y1} \\ [H_8]^2_1 & [H_8]^2_2 & [H_8]^2_3 & H_{X2} & H_{Y2} \\ [H_8]^3_1 & [H_8]^3_2 & [H_8]^3_3 & H_{X3} & H_{Y3} \\ H^\dagger_{X1} & H^\dagger_{X2} & H^\dagger_{X3} & \frac{H^3}{\sqrt{2}} & H_+ \\ H^\dagger_{Y1} & H^\dagger_{Y2} & H^\dagger_{Y3} & H^- & -\frac{H^3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \frac{H_0}{2\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -2 & & & & \\ & -2 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & +3 & \\ & & & & +3 \end{pmatrix}\ .\end{aligned} \tag{5.3.25}$$

[1] Cela revient finalement à considérer une théorie basée non plus sur $SU(5)$ mais sur $SU(5)\times Z_2$.

Les masses de chacun de ces champs sont évaluées en calculant la dérivée seconde du potentiel par rapport à ces champs. Les degrés de liberté H_X et H_Y sont sans masse et permettent une redéfinition des bosons de jauge X et Y qui acquièrent de ce fait des masses

$$M_X = M_Y = \sqrt{\frac{25}{2}} g_5 v_1 \ , \tag{5.3.26}$$

où g_5 est la constante de couplage de $SU(5)$.

Notons que si l'on ne suppose plus $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$ pour le calcul de la VEV de H, celle-ci est modifiée d'un paramètre $\epsilon \propto v_2/v_1$, avec v_2, la VEV de la brisure électro-faible. Ce paramètre vérifie $\epsilon \ll 1$ dans la limite où $v_2 \ll v_1$ et nous allons voir que c'est nécessairement le cas. Cela brise aussi la dégénérescence de masse entre les bosons X et Y.

5.3.3 Brisure électro-faible

Lorsque le champ H prend sa VEV [Eq. (5.3.23)], le champ Φ acquiert lui aussi une masse par couplage avec H (termes λ_4 et λ_5). Si on réécrit

$$\Phi = \left(\begin{array}{c} \phi_t^1 \\ \phi_t^2 \\ \phi_t^3 \\ \hline \phi_d^1 \\ \phi_d^2 \end{array}\right) \ ,$$

en séparant la composante ϕ_t : $(\mathbf{3}, \mathbf{1})$ triplet de $SU(3)$ de la composante ϕ_d : $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$, doublet de $SU(2)$, on peut établir leurs masses respectives

$$\begin{aligned} m_t^2 &= -m_2^2 + (30\lambda_4 + 4\lambda_5)\, v_1^2 \ , \\ m_d^2 &= -m_2^2 + (30\lambda_4 + 9\lambda_5)\, v_1^2 \ . \end{aligned} \tag{5.3.27}$$

Le doublet ϕ_d jouera le rôle du doublet de Higgs du MS qui permet de briser $G_{\mathrm{MS}} \to SU(3)_{\mathrm{C}} \times U(1)_{\mathrm{EM}}$. En effet, le potentiel effectif de ce champ est

$$V_{\mathrm{eff}}(\phi_d) = -m_d^2 \phi_d^\dagger \phi_d + \lambda_3 (\phi_d^\dagger \phi_d)^2 \ , \tag{5.3.28}$$

et la brisure de symétrie est réalisée lorsque ce champ prend la VEV

$$\langle \phi_d \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \ , \tag{5.3.29}$$

avec

$$v_2 = \sqrt{\frac{m_d^2}{\lambda_3}} \simeq 250 \text{ GeV} \ . \tag{5.3.30}$$

Cette dernière égalité est imposée par les mesures expérimentales. Mais elle illustre deux problèmes des modèles de GUT. Nous allons voir dans la section 5.4 comme au chapitre 6, qu'il est nécessaire de trouver un mécanisme pour expliquer que

$$v_1 \gtrsim 10^{12}\, v_2 \ . \tag{5.3.31}$$

C'est en réalité une autre manière de formuler le problème de hiérarchie mentionné au chapitre 2. Une troisième manière de le formuler est de comprendre par quel mécanisme la masse m_d^2 dans l'Eq. (5.3.27) peut vérifier $m_d^2 \ll v_1^2$.

Le second problème du mécanisme décrit précédemment est de comprendre comment il est possible de rendre le champ ϕ_t très massif ($m_t \sim v_1$) par rapport au champ ϕ_d. Cela est nécessaire car ce champ ϕ_t contribue à la désintégration du proton via les opérateurs de dimension 5 (voir chapitre 6). Il faut donc trouver un mécanisme qui traite différemment le triplet de Higgs et le doublet, et qui sépare leur masse sur plus de dix ordres de grandeur alors qu'ils font partie du même multiplet Φ. Ce problème, est appelé en anglais *doublet-triplet splitting problem*. Plusieurs mécanismes existent [89] pour le résoudre.

5.3.4 Schémas de brisures et représentation de Higgs

L'exemple développé dans cette section pour la réalisation de la brisure

$$SU(5) \xrightarrow{\mathbf{24}} SU(3)_{\mathrm{C}} \times SU(2)_{\mathrm{L}} \times U(1)_{\mathrm{Y}} \xrightarrow{\mathbf{5}} SU(3)_{\mathrm{C}} \times U(1)_{\mathrm{EM}} \ , \tag{5.3.32}$$

illustre le fait que la situation décrite au chapitre 3 pour briser des groupes de petite taille [$U(1)$, $SU(2)$] se complique pour des groupes de GUT réalistes.

Dans ce cadre, si l'on veut réaliser une brisure donnée $G \to H$, la première étape est de regarder les décompositions des représentations de G sous H.

> Propriété 5.1 : *Pour qu'un groupe G puisse être brisé en un de ses sous-groupes H, il faut que G possède une représentation R dont la décomposition sous H contienne l'identité, i.e. une partie trivialement chargée sous H. On rappelle qu'une partie trivialement chargée signifie de charge nulle sous tous les facteurs $U(1)$ et singlet sous tous les autres facteurs.*

Il convient d'ajouter qu'une fois choisie la représentation, il reste à trouver un potentiel permettant de réaliser la brisure. D'après T. Kibble, si aucune restriction n'est faite sur ce potentiel, il est toujours possible d'en trouver un. Par contre, si on se restreint à des potentiels de degré inférieur à quatre (pour être renormalisables), il se peut que certaines brisures ne soient pas possibles.

La propriété précédente s'inverse pour se demander quel groupe H *peut* rester non brisé à partir de l'emploi d'un champ de Higgs dans une représentation R d'un groupe G.

> Propriété 5.2 : *Soit un groupe G, et une de ses représentations non triviale R. Pourvu qu'un potentiel adapté soit trouvé, le sous-groupe H peut rester non brisé si et seulement si la décomposition de R sous H possède une composante triviale.*

On peut illustrer l'emploi de la prop. 5.1 sur l'exemple de $SU(5)$ précédent. En effet la première brisure à été réalisée par une représentation **24**. En annexe A, sont données quelques décompositions de certaines représentations de $SU(5)$ sous deux de ses sous-groupes. On vérifie donc que sous $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, $\mathbf{24} = (1,1)(0) + \cdots$. Notons que c'est aussi le cas de la **75** et il existe [100] des études de la brisure de $SU(5)$ via cette représentation.

Mais on peut aussi vérifier que la décomposition de **24** possède aussi une composante trivialement chargée sous $SU(4) \times U(1)$. Cela illustre que

> <u>Propriété</u> 5.3 : *La représentation de Higgs ne fixe pas forcément à elle seule le schéma de brisure d'un groupe. Celui-ci dépend de la VEV développée par le Higgs (voir prop. 3.1) qui dépend des paramètres du potentiel. Ce dernier peut donc présenter des minima invariants sous différentes symétries.*

L'exemple de la brisure de $SU(5)$ illustre un dernier point concernant les brisures de symétrie successives. Nous pouvons voir de la décomposition de **5** (voir annexe A) qu'un champ de Higgs Φ dans cette représentation possède une composante trivialement chargée sous $SU(3)_C$ mais pas sous $SU(2)_L$ ni $U(1)_Y$. Une fois le groupe $SU(5)$ brisé en G_{MS}, la décomposition précédente nous donne les charges de Φ sous G_{MS}. Le champ permet donc de briser le groupe électro-faible $SU(2)_L \times U(1)_Y$. L'autre composante de Φ étant chargée sous $SU(3)_C$, il faut que la VEV de Φ soit nulle pour ces composantes afin de laisser $SU(3)_C$ non brisée.

On conclura cette section en donnant une méthode générale (à partir de la Ref. [101]) pour construire un schéma de brisure afin de rassembler toutes les propriétés sur la question. La Ref. [100] illustre cette méthode sur une brisure non-standard de $SU(5)$ (brisure via la représentation **75**). Supposons donc que l'on souhaite briser un groupe G en un de ses sous-groupes H. Il faut

1. Lister les représentations M_i de G et étudier leur décomposition sous le groupe H. Pour pouvoir réaliser la brisure, il faut que M_i contienne une composante trivialement chargée sous H. Cette représentation est alors choisie pour le champ de Higgs Φ.
2. Ecrire le potentiel $V(\Phi)$ le plus général qui soit invariant sous G. Son degré peut être restreint à quatre pour garder une théorie renormalisable.
3. Chercher le minimum ou les minima de ce potentiel $V(\Phi)$ en résolvant $\partial V/\partial\Phi = 0$. Il faut distinguer les minima locaux et globaux. Notons $\langle\Phi\rangle_0$ le minimum choisi par le système.
4. Parmi les générateurs J_a de G, ceux qui vérifie $J_a\langle\Phi\rangle_0 = 0$ seront générateurs du groupe laissé non brisé après la brisure de symétrie. Il faut vérifier que ce groupe non brisé est bien le groupe H voulu.

On peut consulter [101] pour une étude large de la construction de schémas de brisure à partir des groupes $SU(n)$ et $SO(n)$.

5.3.5 Formation de défauts topologiques dans $SU(5)$

On peut rapidement voir quels types de défauts se forment lors du schéma de brisure de l'Eq. (5.3.17). Nous savons déjà que la deuxième partie de ce schéma ne donne aucun défaut topologique (mais donne en revanche des défauts de plongement, voir section 3.5) puisque le formalisme des groupes d'homotopie (voir chapitre 3) permet d'écrire que

$$\pi_k[SU(3) \times SU(2) \times U(1)/SU(3) \times U(1)] \sim \pi_k[SU(2)] \sim I \ , \tag{5.3.33}$$

pour $k = 0, 1, 2$.

La formation des défauts de la première partie du schéma est encore plus simple puisque l'on peut directement utiliser la propriété 3.5. On en déduit que cette brisure de symétrie donne lieu à des monopôles. C'est une illustration du problème des monopôles.

5.4 Unification des constantes de couplage

Le principe de la Grande Unification est d'avoir une théorie qui, à haute énergie, unifie les trois interactions. De ce fait, les trois constantes de couplage doivent s'unifier en une seule valeur, celle du groupe G_{GUT}. Nous allons maintenant illustrer comment évoluent les constantes de couplage avec l'énergie, pour voir à quelle énergie M_{GUT} se fait l'unification. Ce point est fondamental pour la phénoménologie des GUTs puisque cette énergie donne l'ordre de grandeur de la masse des bosons X, Y et donc un ordre de grandeur de l'inverse du temps de vie du proton.

A basse énergie (c'est à dire autour de 100 GeV), les constantes de couplage de la théorie sont les constantes forte g_s et électro-faible g, g'. On continuera à désigner par g_5 la constante de couplage du groupe $SU(5)$. En conséquences, les dérivées covariantes s'écrivent

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s \sum_{\alpha=1}^{8} g_\mu^\alpha \lambda_\alpha/2 + ig \sum_{a=1}^{3} W_\mu^a \sigma^a/2 + ig' B_\mu Y/2 \ , \tag{5.4.34}$$

dans le MS et

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_5 \sum_{\alpha=1}^{24} A_\mu^a \lambda_a/2 \ , \tag{5.4.35}$$

à haute énergie où la symétrie du lagrangien est $SU(5)$.

Les couplages dépendent des normalisations des générateurs. Nous imposerons ici que $\mathrm{Tr}\left(\lambda^a \lambda^b\right) = 2\delta^{ab}$. On doit donc redéfinir

$$g_3 = g_s, \quad g_2 = g, \quad g' = r g_1 \ , \tag{5.4.36}$$

où r est un facteur numérique à déterminer afin que g_1 décrivent le sous-groupe $U(1)$ de $SU(5)$ et non plus le facteur $U(1)_Y$. [On n'a pas eu le même problème pour g_2 et g_3 car les matrices de Gell-Mann de $SU(5)$ généralisent directement les matrices de Gell-Mann 3×3 et les matrices de Pauli.] Le générateur associé à g' est $Y(\mathbf{5}) = \mathrm{diag}(-2/3, -2/3, -2/3, 1, 1)$ tandis que le générateur associé à g_1 est $\lambda_{24} = \frac{1}{\sqrt{15}}\mathrm{diag}(2, 2, 2, -3, -3)$. On en déduit que $r = -(3/5)^{1/2}$ afin que $g'Y = g_1 \lambda_{24}$. Enfin la constante de couplage g_5 de $SU(5)$ est définie par la condition aux limites

$$g_5 = g_1(M_{\mathrm{GUT}}) = g_2(M_{\mathrm{GUT}}) = g_3(M_{\mathrm{GUT}}) \ , \tag{5.4.37}$$

ce qui illustre le principe de la Grande Unification. On définit usuellement les constantes de structure fine

$$\alpha_n \equiv \frac{g_n^2}{4\pi} \ , \tag{5.4.38}$$

et nous allons étudier leur évolution avec l'énergie, ce qui est strictement équivalent aux constantes g_n.

Tous les paramètres d'un lagrangien, notamment les constantes de couplage, évoluent en fonction de l'échelle d'énergie μ (en anglais on parle de *running*). Cela vient du fait que l'on ne connaît pas la théorie ultime à toutes les énergies. On utilise donc à basse énergie des théories effectives dont les paramètres sont donnés par les mesures expérimentales. C'est le cas du Modèle Standard. La renormalisation consiste à reparamétrer la théorie en termes de quantités adaptées à l'échelle d'énergie considérée. Cette dépendance des constantes de couplage est donnée par les équations de groupe de renormalisation [23]. Elles donnent α_n à une énergie $\mu \leq M_{\mathrm{GUT}}$,

$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial \ln \mu} = \beta_n(\alpha_n) = -\frac{b_n}{2\pi}\alpha_n^2 \ , \quad n = 1, 2, 3 \ . \tag{5.4.39}$$

où b_n sont des constantes et β_n sont appelées "fonctions β". Il en résulte l'évolution suivante,

$$\frac{1}{\alpha_n(\mu)} = \frac{1}{\alpha_n(M_{\rm GUT})} + \frac{b_n}{2\pi} \ln \frac{M_{\rm GUT}}{\mu} \ , \quad n = 1, 2, 3 \ . \tag{5.4.40}$$

Les coefficients b_n sont données par[2] [93]

$$\begin{aligned} b_1 &= \qquad\quad \frac{4}{3} N_f + \frac{1}{10} N_H = \frac{41}{10} > 0 \ , \\ b_2 &= -\frac{22}{3} + \frac{4}{3} N_f + \frac{1}{6} N_H = -\frac{19}{6} < 0 \ , \\ b_3 &= -\frac{33}{3} + \frac{4}{3} N_f \qquad\quad = -7 < 0 \ . \end{aligned} \tag{5.4.41}$$

Le premier terme des coefficients b_n est une contribution bosonique, donnée par $-11N/3$ pour un groupe $SU(N)$, et nulle pour les groupes abéliens. Les termes suivants font intervenir le nombre de génération de fermions N_f et de doublet de Higgs N_H. Si l'on ne prend en compte que les particules du MS, alors $N_f = 3$ et $N_H = 1$. On verra dans les sections suivantes que l'introduction de la SUSY modifie ces nombres et donc l'évolution des constantes de couplage.

L'évolution donnée par les équations Eq. (5.4.39) doit être en accord avec les mesures faites à basse énergie (de l'ordre de la masse du boson Z) grâce aux expériences faites au LEP et à SLAC notamment, à savoir [88]

$$\begin{aligned} \alpha_1^{-1}(M_Z) &= 58.97 \pm 0.05 \ , \\ \alpha_2^{-1}(M_Z) &= 29.61 \pm 0.05 \ , \\ \alpha_3^{-1}(M_Z) &= 8.47 \pm 0.22 \ . \end{aligned} \tag{5.4.42}$$

Cela apporte une autre condition aux limites, donnée cette fois par les mesures expérimentales. Cela permet de tester si l'unification des trois constantes de couplage se fait vraiment et à quelle énergie. Les trois équations linéaires Eq. (5.4.39) à trois inconnues peuvent être résolues numériquement, et l'on obtient

$$\begin{aligned} M_{\rm GUT} &\simeq 2.1 \times 10^{14} \ {\rm GeV} \ , \\ \alpha_5 &\simeq \frac{1}{42} \ , \\ \sin^2\theta_W(M_Z) &\simeq 0.214 \ . \end{aligned} \tag{5.4.43}$$

On observe tout d'abord sur la Fig. 5.1 que les constantes de couplage convergent bien vers une valeur unique à haute énergie. Ce résultat est une des motivations les plus forte en faveur de des théories de GUT. La prédiction ci-dessus concernant $\sin^2\theta_W$ est proche de la valeur mesurée ($\sin^2\theta_W \simeq 0.23$) ce qui est un premier succès des théories de GUT. On voit cependant sur la Fig. 5.1 que l'unification n'est pas parfaite et qu'elle se fait à relativement basse énergie ($M_{\rm GUT} \sim 10^{14}$ GeV). On verra au chapitre 6 que cette énergie est effectivement légèrement trop basse pour être en accord avec les mesures de durée de vie du proton.

Notons qu'au-delà de $M_{\rm GUT}$, il n'y a plus qu'une constante de couplage α_5 qui possède une fonction β similaire à celles données précédemment. Elle diminue jusqu'à $m_{\rm Pl}$. Au-delà, une théorie permettant de prendre en compte la gravité dans la description est nécessaire.

Il convient de mentionner que l'unification sur $SU(5)$ possède un grand nombre de problèmes [89, 91] ce qui pousse la communauté à considérer des groupes d'unification plus

[2]Attention, dans la littérature, on trouve parfois des valeurs différentes pour le coefficient b_1 car certains considèrent l'évolution de $\alpha' \equiv g'^2/4\pi$ au lieu de α_1. Les coefficients diffèrent donc d'un facteur 3/5.

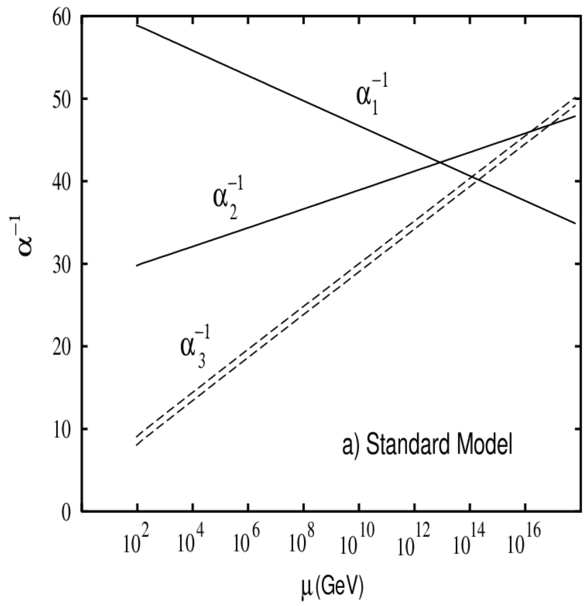

FIG. 5.1: Evolution des constantes de couplage avec l'énergie μ. Dans le cadre de la grande unification standard avec le spectre standard des particules, l'unification n'est qu'approximative et à une énergie de l'ordre de 10^{14} GeV. Cette figure est à comparer à la Fig. 5.2, traitant de l'unification supersymétrique. Figure tirée de [93].

grands tels que $SO(10)$ ou E_6. De nombreux aspects phénoménologiques manquent à la description précédente. Certains d'entre eux seront détaillés au chapitre 6, et ces conséquences cosmologiques seront utilisées comme contraintes sur les modèles. Cependant ces contraintes dépendent du cadre précis dans lequel nous allons travailler. Il est donc nécessaire d'introduire la seconde composante de notre cadre de travail, la supersymétrie (SUSY). Dans les sections qui suivent, on attachera de l'importance surtout à l'influence de la SUSY sur la cosmologie, notamment sur la description des modèles inflationnaires, sur le MS et la Grande Unification.

5.5 Eléments de supersymétrie

La supersymétrie (SUSY) est une symétrie additionnelle entre les deux grandes classes de particules, les bosons et les fermions. En effet les transformations de SUSY permettent de passer d'un boson à un fermion, ce qui est souvent noté

$$\bar{Q}|\mathrm{boson}\rangle = |\mathrm{fermion}\rangle\ , \quad Q|\mathrm{fermion}\rangle = |\mathrm{boson}\rangle\ , \tag{5.5.44}$$

où Q et $\bar{Q}$ représente des opérateurs de SUSY. Nous allons voir que l'on peut générer avec ces opérateurs une symétrie, la SUSY. Dans ce cadre, il est nécessaire d'introduire autant de particules que celles que l'on connaît déjà, des particules supersymétriques (appelées *sparticules*). Pour chacune des particules du MS, son partenaire supersymétrique possède les mêmes nombres quantiques et possède, tant que la symétrie est exacte, la même masse. Nous voyons immédiatement que du fait que les sparticules n'ont jamais été observées, cette brisure de symétrie doit nécessairement intervenir à une énergie $M_{\mathrm{SUSY}} \geq 100$ GeV.

5.5.1 Motivations

Les motivations à introduire cette nouvelle symétrie, sont variées, venant tant de la théorie que de la cosmologie. La première motivation est sans conteste celle de résoudre le problème de hiérarchie (voir sous-section 2.6.2). L'introduction de nouvelles particules de masse identique mais de spin différent entraîne de nouvelles contributions identiques mais de signe opposé aux corrections radiatives à la masse du boson de Higgs. Notons que si la SUSY est brisée aujourd'hui, elle permet tout de même de résoudre le problème de hiérarchie tant que l'échelle $M_{\rm SUSY}$ est proche de 1 TeV. Dans ce cas, la déviation est faible et on ne peut plus parler de problème de naturalité.

La seconde motivation concerne la Grande Unification. Nous avons vu que l'unification des couplages à haute énergie est une des motivations de ces théories. Cependant, on vient de montrer que cette unification n'est qu'approximative et se produit à une énergie trop basse aux vues des plus récentes mesures sur la durée de vie des protons (voir le chapitre 6). La SUSY modifie l'évolution des couplages pour deux raisons : elle introduit de nouvelles particules ce qui modifie les fonctions β et possède une nouvelle échelle d'énergie $M_{\rm SUSY}$, qui est pour le moment libre de toute observation. On montre à la Fig. 5.2 page 123 que l'unification devient plus précise et à une énergie compatible avec les données expérimentales (10^{16} GeV). Cette meilleure convergence des constantes de couplage est obtenue pour $M_{\rm SUSY} \sim 1$ TeV.

Les autres motivations viennent de la cosmologie. La première est le fait que la supersymétrie propose naturellement un candidat de matière noire, joué par la particule supersymétrique la plus légère (souvent noté LSP[3]). Nous y reviendrons au chapitre 6. Mentionnons juste, pour le moment, que pour que cette particule puisse contribuer de manière significative à la matière noire, il faut que sa masse soit supérieure à ~ 100 GeV.
De plus la SUSY introduit autant de champs scalaires que de fermions du MS. Tout ces champs scalaires sont très utiles pour la cosmologie moderne qui leur fait jouer des rôles variés et importants. Le premier exemple le plus immédiat est l'inflaton qui génére une phase d'expansion accélérée de l'univers primordial (voir chapitre 4). En outre, pour obtenir une inflation qui rendent compte des observations, le plus simple est de plonger l'inflaton dans un potentiel très plat, ce qui est générique dans un cadre supersymétrique.

Voilà les principales raisons qui poussent les cosmologistes et physiciens des particules à se placer dans un cadre supersymétrique et à supposer $M_{\rm SUSY} \sim 1$ TeV. Cette théorie manque cependant d'une confirmation observationnelle. On en attend venant des futurs accélérateurs de particules et de la cosmologie : détection de particules massives interagissant faiblement (WIMP[4]) par des détecteurs sur Terre (c'est le cas des expériences Edelweiss[5] ou CDMS[6]), ou détection de photons gamma produits par annihilation de particules supersymétriques (voir [102] pour une revue récente sur les recherches de matière noire issue des théories des hautes énergies).

5.5.2 Algèbre de supersymétrie

L'algèbre de la SUSY étend l'algèbre des transformations de Poincaré sous lesquelles toute théorie des champs relativiste est invariante. Cette algèbre de Poincaré basée sur le groupe de Lie $SO(3,1)$ contient des transformations de l'espace-temps (symétrie externe) à la différence des transformations de jauge qui agissent sur les champs. Elle rassemble les transformations de Lorentz (rotations et "boost") et les translations de l'espace-temps [24, 25]. Ses générateurs sont ceux du groupe de Lorentz $M_{\mu\nu}$ et ceux des translations P_μ.

[3]Cet acronyme vient de l'anglais *Lightest Supersymmetric Particle.*
[4]Cet acronyme vient de l'anglais *Weakly Interacting Massive Particle.*
[5]`http ://edelweiss.in2p3.fr/` .
[6]`http ://cdms.berkeley.edu/` .

La SUSY étend cette algèbre en y ajoutant des générateurs spinoriels Q^i_α et $\bar{Q}^i_{\dot\beta}$, avec $\alpha = 1, 2$, $\dot\beta = 1, 2$ et où $i = 1, \ldots, N$. Dans la suite, nous nous restreindrons au cas le plus simple d'une "SUSY $N = 1$" : on introduit donc quatre nouveaux générateurs. Ces transformations vérifient notamment les relations de commutation et anti-commutation suivantes :

$$\begin{aligned}
[P^\mu, Q_\alpha] &= [P^\mu, \bar{Q}_{\dot\beta}] = 0 \ , \\
[M^{\mu\nu}, Q_\alpha] &= -i\sigma^{\mu\nu\beta}_\alpha Q_\beta \ , \\
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 0 \ , \\
\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} &= -2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} P_\mu \ ,
\end{aligned} \tag{5.5.45}$$

ce qui définit l'algèbre dite de *Lie graduée.* On a défini $\sigma^\mu \equiv (I_2, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ et $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, σ^i étant les matrices de Pauli (voir annexe A) et γ^μ étant les matrices de Dirac en représentation de Weyl (voir chapitre *Notations, conventions et valeurs numériques* en début de thèse).

Cette algèbre agit dans un espace étendu, repéré par les coordonnées d'espace-temps et quatre nouvelles coordonnées θ_α et $\bar\theta_{\dot\alpha}$ appelées *coordonnées de Grassman.* Elles vérifient

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = 0 \ , \quad \{\bar\theta_{\dot\alpha}, \bar\theta_{\dot\beta}\} = 0 \ , \qquad \theta^2_\alpha = 0 \ , \quad \bar\theta^2_{\dot\alpha} = 0 \ , \tag{5.5.46}$$

où $\alpha, \beta, \dot\alpha, \dot\beta = 1, 2$. Les éléments de cette algèbre généralisent la notion de translation dans l'espace temps et s'écrivent

$$G(x, \theta, \bar\theta) = e^{i(-x^\mu P_\mu + \theta Q + \bar\theta \bar{Q})} \ , \tag{5.5.47}$$

ce qui entraîne une transformation

$$\begin{aligned}
\theta &\to \theta + \epsilon \ , \\
\bar\theta &\to \bar\theta + \bar\epsilon \ , \\
x_\mu &\to x_\mu + a_\mu + i\theta\sigma_\mu\bar\epsilon - i\epsilon\sigma_\mu\bar\theta \ ,
\end{aligned} \tag{5.5.48}$$

où a_μ, ϵ et $\bar\epsilon$ sont les paramètres de transformation. Cela permet d'expliciter l'action des générateurs Q et $\bar{Q}$

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} - i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu, \quad \bar{Q}_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta_{\dot\alpha}} + i\theta_\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu \ . \tag{5.5.49}$$

5.5.3 Supermultiplets

Il existe deux types de superchamps sur lesquels agissent les opérateurs de la SUSY. Les superchamps *chiraux* contiennent des champs fermioniques et leur superpartenaires bosoniques. Les superchamps *vectoriels* contiennent des champ de jauge et leurs superpartenaires fermioniques.

Pour le visualiser, on peut développer en puissance des coordonnées de Grassman un superchamp chiral, ce qui se réduit d'après l'Eq. (5.5.46) à

$$\begin{aligned}
\Phi(y, \theta) &= A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \ . \\
&= A(x) + i\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu A(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta \,\Box A(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) \\
&\qquad - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi(x)\sigma_\mu\bar\theta + \theta\theta F(x) \ ,
\end{aligned} \tag{5.5.50}$$

où l'on a posé $y = x + i\theta\sigma\theta$. et où les sommations sur les indices de Grassman sont implicites. Dans l'expression précédente, les degrés de liberté du superchamp sont contenus dans les champs $A(x)$, $\psi(x)$ et $F(x)$, appelés *composantes* du superchamp. Le premier est un champ scalaire complexe à deux degrés de liberté, partenaire bosonique du champ fermionique ψ, un spineur de Weyl[7]. Enfin $F(x)$ est un champ auxiliaire ne correspondant pas à un degré de liberté physique. Il peut être ré-exprimé en fonction des deux autres champs grâce à ses équations du mouvement. Un superchamp chiral possède donc autant de degrés de liberté bosoniques que fermioniques. Une transformation de SUSY permet de passer de l'un à l'autre

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon A &= \sqrt{2}\epsilon\psi \ , \\ \delta_\epsilon \psi &= i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar{\epsilon}\partial_\mu A + \sqrt{2}\epsilon F \ , \\ \delta_\epsilon F &= i\sqrt{2}\bar{\epsilon}\sigma^\mu\partial_\mu\psi \ . \end{aligned} \tag{5.5.52}$$

Un superchamp chiral vérifie $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0$ où $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ est la dérivée covariante généralisée

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \equiv -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} - i(\theta\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}\partial_\mu \ .$$

On peut aussi construire un superchamp *antichiral* $\Phi^\dagger$ vérifiant

$$D_\alpha\Phi^\dagger = 0 \quad \text{avec} \quad D_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} + i(\sigma^\mu\bar{\theta})_\alpha\partial_\mu \ . \tag{5.5.53}$$

Notons enfin que le produit de deux superchamps chiraux est un superchamp chiral.

Un superchamp vectoriel V se développe aussi en composantes et dans la jauge de Wess-Zumino,

$$V(x,\theta,\bar{\theta}) = -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\, D(x) \ . \tag{5.5.54}$$

Il a la propriété d'être réel $V^* = V$. Les degrés de liberté physiques sont contenus dans les champs $v_\mu(x)$, un boson vecteur de jauge, et $\lambda(x)$, un spineur de Majorana[8]. Notons que ce superchamp possède la particularité (dans la jauge de Wess-Zumino) que tous ses termes sont des puissances non nulles des coordonnées de Grassman. En conséquence, grâce à l'Eq. (5.5.46), on voit que

$$V^2 = -\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\, v_\mu(x)v^\mu(x) \ , \quad \text{et} \quad V^n = 0 \ , n \geq 3 \ .$$

5.5.4 Lagrangiens supersymétriques

On peut construire à partir des superchamps chiraux et vectoriels, les lagrangiens les plus généraux, invariants de SUSY. L'objectif est d'obtenir les lagrangiens usuels pour les composantes de ces superchamps. A partir de superchamps chiraux Φ_i et antichiraux $\Phi_i^\dagger$, on peut construire le lagrangien

$$\mathcal{L}_{\text{chiral}} = \int \mathrm{d}^2\theta \mathrm{d}^2\bar{\theta}\, \Phi_i^\dagger\Phi_i + \int \mathrm{d}^2\theta\, \mathcal{W}(\Phi_i) + \text{h.c.} \ , \tag{5.5.56}$$

[7] Un spineur de Weyl, à deux composantes, est relié aux habituels spineurs de Dirac par le fait que dans la représentation de Weyl, il représente les deux degrés de liberté de chiralité donnée du spineur de Dirac Ψ_D

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \ . \tag{5.5.51}$$

[8] Un spineur de Majorana possède quatre composantes mais seulement deux degrés de liberté. Il est défini comme un spineur de Dirac vérifiant $\Psi_M^c = \Psi_M$, ce qui permet de l'écrire avec un seul spineur de Weyl ψ_α sous la forme

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \ . \tag{5.5.55}$$

où le premier terme correspond aux termes cinétiques des composantes des superchamps Φ_i. $\mathcal{W}(\Phi_i)$ est appelé le *superpotentiel* de la théorie. C'est un polynôme dans les superchamps

$$\mathcal{W}(\Phi_i) = c_i\Phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}y_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k + \cdots \ . \tag{5.5.57}$$

Les pointillés correspondent à des termes d'ordre supérieur à trois ce qui induiraient des termes non renormalisables. On a introduit une *intégrale de Grassman* qui est une manière élégante de sélectionner des composantes du superchamp chiral qui est intégré. Par exemple, $\int \mathrm{d}^2\theta \mathrm{d}^2\bar{\theta}$ est équivalent à prendre la composante proportionnelle à $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ dans le développement en série de l'Eq.(5.5.50). Pour les règles d'intégration qui permettent de le montrer, voir [95, 96].
Une fois l'intégration sur les variables de Grassman faite, le lagrangien $\mathcal{L}_{\text{chiral}}$ se développe en composantes selon

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{chiral}} =& i\partial_\mu\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\psi_i + A_i^*\Box A_i - \frac{1}{2}m_{ij}\psi_i\psi_j - \frac{1}{2}m_{ij}^*\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j \\ &- y_{ijk}\psi_i\psi_j A_k - y_{ijk}^*\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j A_k^* + V_F(A_i) \ .\end{aligned} \tag{5.5.58}$$

où V_F est une partie du potentiel des champs scalaires A_i, dont la première contribution vient du terme $F_k^\dagger F_k$. Cette forme pour le lagrangien est obtenue en utilisant les équations du mouvement pour les champs F et $F^\dagger$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{chiral}}}{\partial F_k} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{chiral}}}{\partial F_k^\dagger} = 0 \ , \tag{5.5.59}$$

équation du mouvement qui permettent d'éliminer F_k et $F_k^\dagger$ au profit de leur expression en fonction des champs physiques. Le lagrangien $\mathcal{L}_{\text{chiral}}$ contient donc les termes cinétiques et les interactions entre les composantes des superchamps chiraux.

Pour être complet, il faut construire des lagrangiens qui soient aussi invariants de jauge. Considérons donc une symétrie de jauge de constante de couplage g, de constantes de structure f_{abc} et de générateur J_a. On introduit un superchamp vectoriel V généralisé $V = \sum_a V^a J_a$. Le lagrangien doit contenir un terme cinétique pour le champ de jauge et un terme d'interaction avec la matière (contenue dans les superchamps chiraux Φ_i). Introduisons dans un premier temps l'équivalent du tenseur $F^{\mu\nu}$ grâce à [9]

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 e^V D_\alpha e^{-V} \ , \quad \bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}D^2 e^V \bar{D}_{\dot{\alpha}} e^{-V} \ ,$$

où $e^{gv} = 1 + gV + g^2V^2$. On peut vérifier en développant W_α en composantes, qu'il contient un terme proportionnel à θ de la forme $J_a F^a_{\mu\nu}$ avec $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu v^a_\nu - \partial_\nu v^a_\mu + f^a_{bc}v^b_\mu v^c_\nu$. Ainsi, le lagrangien le plus général invariant SUSY et invariant de jauge s'écrit donc pour une théorie abélienne

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{U(1)}_{\text{SUSY}} = \frac{1}{4}\int \mathrm{d}^2\theta W^\alpha W_\alpha + \frac{1}{4}\int \mathrm{d}^2\bar{\theta}\bar{W}^{\dot{\alpha}}\bar{W}_{\dot{\alpha}} + \int \mathrm{d}^2\theta\mathrm{d}^2\bar{\theta}\,\Phi_i^\dagger e^{gV}\Phi_i \\ + \int \mathrm{d}^2\theta\mathrm{d}^2\bar{\theta}\,\xi V + \int \mathrm{d}^2\theta\,\mathcal{W}(\Phi_i) + \text{h.c.} \ .\end{aligned} \tag{5.5.60}$$

Pour une théorie de Yang-Mills, la généralisation est immédiate,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\text{YM}}_{\text{SUSY}} = \frac{1}{4}\int \mathrm{d}^2\theta\,\mathrm{Tr}(W^\alpha W_\alpha) + \frac{1}{4}\int \mathrm{d}^2\bar{\theta}\,\mathrm{Tr}(\bar{W}^{\dot{\alpha}}\bar{W}_{\dot{\alpha}}) + \int \mathrm{d}^2\theta\mathrm{d}^2\bar{\theta}\,\bar{\Phi}^\dagger_{ia}\left(e^{gV}\right)^a_b\Phi^b_i \\ + \int \mathrm{d}^2\theta\,\mathcal{W}(\Phi_i) + \int \mathrm{d}^2\bar{\theta}\,\bar{\mathcal{W}}(\bar{\Phi}_i) \ .\end{aligned} \tag{5.5.61}$$

[9]Notons que dans le cas d'une invariance sous un groupe abélien, les expressions de ces tenseurs est simplifiée à $W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha V$ et $\bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}D^2\bar{D}_{\dot{\alpha}}V$.

Cependant une grande différence existe : le terme dit de Fayet-Iliopoulos (FI) $\int \mathrm{d}^2\theta \mathrm{d}^2\bar{\theta}\,\xi V$ n'est plus invariant de jauge et est donc interdit dans une théorie de Yang-Mills. Il sera utile pour la suite de développer le lagrangien général d'une théorie de Yang-Mills en composantes, ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm SUSY}^{\rm YM} = &-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - i\lambda^a\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda}^a + \frac{1}{2}D^aD^a + (\partial_\mu A_i - igv^a_\mu J^a A_i)^\dagger(\partial_\mu A_i - igv^a_\mu J^a A_i)\\ &- \bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu(\partial_\mu\psi_i - igv^a_\mu J^a\psi_i) + gD^aA_i^\dagger J^aA_i - i\sqrt{2}A_i^\dagger J^a\lambda^a\psi_i + i\sqrt{2}\bar{\psi}_iJ^aA_i\bar{\lambda}^a\\ &+ F_i^\dagger F_i + \frac{\partial\mathcal{W}}{\partial A_i}F_i + \frac{\partial\bar{\mathcal{W}}}{\partial A_i^\dagger}F_i^\dagger - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial A_i\partial A_j}\psi_i\psi_j - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{\mathcal{W}}}{\partial A_i^\dagger\partial A_j^\dagger}\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j\end{aligned} \tag{5.5.62}$$

Notons que dans l'expression précédente, la notation $\partial\mathcal{W}/\partial A_i$ signifie en réalité prendre la composante scalaire ($\theta = \bar{\theta} = 0$) de $\partial\mathcal{W}/\partial\Phi_i$.
Pour obtenir le lagrangien final, il est nécessaire de calculer les équations du mouvement pour les champs auxiliaires D^a et F_i. Cela permet notamment de vérifier que toutes les composantes d'un superchamp Φ_i, c'est-à-dire les fermions ψ_i et les bosons A_i ont la même masse. Pour le voir, il faut calculer le potentiel scalaire, ce qui est fait dans la sous-section suivante. Il faut aussi calculer le terme de masse fermionique, contenu dans les deux derniers termes de l'Eq. (5.5.62). On rappelle que ψ_i sont des spineurs de Weyl et que donc un terme de masse pour un fermion de Dirac $m_D\bar{\Phi}_D\Phi_D$ devient $m_D(\psi_1\psi_2+\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)$ si ψ_1 et ψ_2 sont les composantes de Ψ_D :

$$\Psi_D = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \bar{\psi}_2\end{pmatrix} .$$

5.5.5 Potentiels scalaires

Etudions maintenant le potentiel des champs scalaires A_i, contenus dans les superchamps chiraux Φ_i. Contrairement aux théories non supersymétriques où le potentiel est une fonction libre, en supersymétrie ce potentiel est déterminé par le superpotentiel $\mathcal{W}(\Phi_i)$. Pour que la théorie soit renormalisable, c'est à dire pour que $V(A_i)$ soit de degré inférieur ou égal à 4, il faut que W soit de degré inférieur ou égal à 3. Si on suppose un superpotentiel général de la forme de l'Eq. (5.5.57), deux termes contribuent au potentiel scalaire

$$V(A_i) = V_F + V_D\ , \tag{5.5.63}$$

termes que l'on appelle respectivement "termes F" et "termes D". Ces contributions sont calculées en résolvant les équations du mouvement pour F_i, $F_i^\dagger$ et D^a.

Le calcul de V_F est le plus rapide. En utilisant l'Eq. (5.5.62), les équations du mouvement Eq. (5.5.59) s'écrivent

$$F_i^\dagger = -\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial A_i} \quad F_i = -\frac{\partial\bar{\mathcal{W}}}{\partial A_i^\dagger}\ , \tag{5.5.64}$$

ce qui permet de réécrire le potentiel

$$V_F = -\mathcal{L}_F = \sum_i F_i^\dagger F_i = \sum_i \left|\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial A_i}\right|^2 . \tag{5.5.65}$$

Pour le calcul de V_D, il faut résoudre les équations du mouvement pour les champs D^a. On peut extraire le lagrangien contenant tous les termes où D intervient à partir de l'Eq (5.5.62).

On obtient $\mathcal{L}_D = \frac{1}{2}D^a D^a + gD^a(J^a)_{ij}A_i^* A_j$ et donc des équations du mouvement $\partial\mathcal{L}_D/\partial D^a = 0$ qui imposent

$$D^a = -g(J^a)_{ij}A_i^* A_j \ . \tag{5.5.66}$$

En utilisant ces expressions, on obtient $\mathcal{L}_D = -\frac{1}{2}D^a D^a$ et donc

$$V_D = \frac{1}{2}D^a D^a \ . \tag{5.5.67}$$

Notons que dans le cas d'un lagrangien invariant sous une symétrie $U(1)$, il est possible d'avoir un terme additionnel de la forme ξD dans $\mathcal{L}_D$ et la solution de l'équation du mouvement donne alors

$$D^a = -gJ_{ij}A_i^* A_j + \xi \ . \tag{5.5.68}$$

J est le générateur de la symétrie $U(1)_\xi$ et est donc une matrice diagonale contenant les charges q_i des superchamps Φ_i, $J_{ij} = q_i\delta_{ij}$. Ces résultats sont utilisés pour décrire l'inflation hybride supersymétrique aux chapitres 4 et 8.

Mentionnons enfin que les formules précédentes donnent le potentiel scalaire à l'ordre des arbres. Pour plus de précision, il est nécessaire de prendre en compte les corrections quantiques (ou corrections radiatives). Si on suppose que les champs évoluent dans un espace-temps de Minkowski[10], la formule de Coleman-Weinberg [104] s'applique et la correction à une boucle au potentiel s'écrit

$$\Delta V_{1-\mathrm{loop}} = \frac{1}{64\pi^2}\sum_i (-1)^{F_i} m_i^4 \ln\frac{m_i^2}{\Lambda^2} \ , \tag{5.5.69}$$

où la sommation est faite sur tous les états i de chiralité, F_i est leur nombre fermionique, m_i leur masse et Λ est l'échelle de coupure ultra-violette de la théorie. Il faut remarquer que tant que la SUSY n'est pas brisée, les différentes composantes des supermultiplets sont de même masse et la correction est nulle. Cela illustre la manière dont la SUSY résout le problème de hiérarchie.

5.5.6 Brisure de SUSY

Nous avons vu que si la SUSY est une symétrie de la nature, elle doit nécessairement être brisée à une énergie supérieure à 100 GeV. En effet, tant que la SUSY est exacte, les particules et leurs partenaires supersymétriques ont la même masse ce qui est en contradiction avec les observations. Il existe 2 classes de mécanismes qui permettent de briser la supersymétrie. La première rassemble les *brisures spontanées* de SUSY tandis que la seconde est une *brisure explicite*, qui introduit des termes dans le lagrangien violant explicitement la SUSY. Nous commençons par les brisures spontanées.

Brisures spontanées de SUSY

L'état fondamental de la théorie étant noté $|0\rangle$, son énergie est donnée par $E_0 \equiv \langle 0|H|0\rangle$, le hamiltonien H étant donné par l'opérateur de Poincaré P_0. En utilisant les relations d'anti-commutation Eq. (5.5.45), on peut montrer que

$$E_0 = \frac{1}{4}\sum_{\alpha=1,2}\langle 0|\{Q_\alpha, \bar{Q}_\alpha\}|0\rangle = \frac{1}{4}\sum_\alpha |Q_\alpha|0\rangle|^2 \geq 0 \ . \tag{5.5.70}$$

Pour qu'il y ait brisure spontanée de SUSY, il faut que l'état fondamental $|0\rangle$ ne soit pas invariant de SUSY, c'est-à-dire que $Q_\alpha|0\rangle \neq 0$ ou $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}|0\rangle \neq 0$, ce qui revient à $E_0 > 0$ ou encore

[10] Ce qui n'est pas réaliste lorsque l'on décrit une phase inflationnaire. Cependant peu de travaux sont faits sur les calculs de corrections radiatives en espace de de Sitter. Voir [103].

$\langle V\rangle_0 > 0$. Dès lors, la brisure de SUSY ne peut avoir que deux origines : une contribution des termes F (mécanisme de O'Raifeartaigh [105]), ou D (mécanisme de Fayet-Iliopoulos [106]) doit être non nulle dans l'état fondamental.
Voici un exemple de brisure via un terme F. Supposons un superpotentiel de la forme

$$\mathcal{W}(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3) = \lambda_1\Phi_1(\Phi_3^2 - M^2) + \mu\Phi_2\Phi_3 \ . \tag{5.5.71}$$

Les équations du mouvement imposent les expressions suivantes

$$\begin{aligned} -F_1^\dagger &= \frac{\partial\mathcal{W}}{\partial A_1} = \lambda_1(A_3^2 - M^2) \ , \\ -F_2^\dagger &= \frac{\partial\mathcal{W}}{\partial A_2} = \mu A_3 \ , \\ -F_3^\dagger &= \frac{\partial\mathcal{W}}{\partial A_3} = 2\lambda_1 A_1 A_3 + \mu A_2^2 \ . \end{aligned} \tag{5.5.72}$$

On peut voir qu'il n'existe pas de solution où tous les champs $F_1^\dagger$ s'annulent en même temps (si $M \neq 0$). Pour vérifier explicitement que la SUSY est brisée on peut écrire explicitement le potentiel, en trouver le minimum et vérifier que $\langle V_F\rangle \neq 0$.

On peut aussi vérifier que les masses des différentes composantes des superchamps chiraux ne sont pas égales. On montre en effet que dans ce modèle, les fermions associés aux A_i ont une masse μ tandis que les termes quadratiques en A_i dans le potentiel montrent que les états propres de masse sont donnés par $\sqrt{\mu^2 \pm 2\lambda_1 M}$.

Pour réaliser une brisure de SUSY via un terme D, il faut supposer une théorie invariante sous une symétrie $U(1)_\xi$ contenant un terme de Fayet-Iliopoulos ξ non nul. Supposons par exemple, trois superchamps chiraux Φ_i de charges q_i sous $U(1)_\xi$ de telle sorte que $(J)_{ij} = \mathrm{diag}(0,0,q_3)$. Le potentiel s'écrira

$$V_D(A_i) = \frac{1}{2}D^2 = \frac{g^2}{2}\left(\xi + q_3 A_3^2\right)^2 \tag{5.5.73}$$

Dans le cas où $\xi q_3 > 0$, le minimum du potentiel est obtenu pour $\langle A_3\rangle_0 = 0$. Le potentiel n'est donc pas nul dans l'état fondamental $\langle V_D\rangle_0 = g^2\xi/2$ et la SUSY est brisée. Notons que si $\xi q_3 < 0$, le champ A_3 développe une VEV non nulle $\langle A_3\rangle_0 = \sqrt{-\xi/q_3}$. Il génère une mécanisme de Higgs, brisant ainsi la symétrie $U(1)_\xi$.

Dans l'exemple précédent, on remarque que $\mathrm{Tr}J = \sum_i q_i \neq 0$. La symétrie $U(1)_\xi$ est alors dite *anormale*[11]. Il est possible de réaliser le même mécanisme avec une symétrie sans anomalie. Pour cela on peut considérer un potentiel général

$$V_D(A_i) = \frac{g^2}{2}\left(\xi + \sum_i q_i A_i^2\right)^2 \ , \tag{5.5.74}$$

et supposer que les champs A_i possèdent un masse élevée, via le superpotentiel par exemple. Dans ce cas, le potentiel total est encore minimisé par $\langle A_i\rangle_0 = 0$ et même avec $\mathrm{Tr}J = 0$, on obtient le même résultat.

Ce mécanisme ne peut fonctionner que dans le cas d'un lagrangien invariant sous une symétrie $U(1)$. Mais la symétrie $U(1)_Y$ du MSSM[12] (l'extension supersymétrique minimale

[11] La théorie des cordes faiblement couplée [107] génére naturellement des symétries $U(1)$ anormales : un terme de Fayet-Iliopoulos existe alors, $\xi \propto \mathrm{Tr}JM_{\mathrm{Pl}}^2$. Voir [108] pour illustrer un mécanisme de FI via une symétrie anormale.

[12] Cet acronyme vient de l'anglais *Minimal Supersymetric Standard Model.*

du MS) ne peut jouer ce rôle. Les champs du MSSM (squark ou sleptons notamment) n'ont pas de termes de masse venant d'un superpotentiel qui imposeraient une VEV nulle. Certains de ces champs pourraient donc acquérir une VEV non nulle pour minimiser le potentiel de l'Eq. (5.5.74). Cela entraînerait la brisure des symétries sous lesquelles sont chargés ces champs, c'est-à-dire $U(1)_Y$ mais aussi $SU(3)_C$. Cela pose le problème de l'origine de cette symétrie $U(1)_\xi$ [135]. Elle ne peut pas être un sous-groupe d'un groupe simple (non abélien) de Grande Unification, car dans ce cas, tout terme de FI ne serait pas invariant de jauge. Usuellement, cette symétrie doit appartenir à un "secteur caché" qui n'est que peu couplé au secteur du MSSM.

Secteur caché et brisures explicites de SUSY

Mentionnons l'existence d'autres mécanismes pour briser la SUSY. Ces mécanismes ont été introduits car les champs du MSSM ne peuvent réaliser une brisure spontanée de SUSY sans être en conflit [97] avec la phénoménologie observée (brisure des symétries du MSSM dans le cas d'une brisure via des termes D et spectre des particules incompatible dans le cas d'une brisure via des termes F).

Il a donc été proposé que la brisure de SUSY ait lieu dans un secteur caché n'ayant pas (ou de très faibles) de couplage avec le secteur du MSSM. Dans ce secteur caché, une brisure spontanée de SUSY peut avoir lieu, sans poser de problèmes phénoménologiques. Il faut ensuite trouver un "médiateur" qui transmet la brisure de supersymétrie du secteur caché au secteur visible. Ces messagers peuvent être de différentes origines : secteur de jauge ou secteur de la gravité notamment [97].

Par un mécanisme ou un autre, considérons donc que des termes non invariants de SUSY doivent apparaître dans le lagrangien effectif de la théorie. Ceci peut être décrit en considérant une brisure de SUSY dite *explicite* ou *douce*. Dans ce cas, des termes (de masse) sont ajoutés "à la main" dans le lagrangien. Les possibilités pour ces termes de brisure explicite sont limitées car ils doivent vérifier les symétries de jauge du MS et ne doivent pas introduire de nouvelles divergences quadratiques qui détruiraient la solution supersymétrique au problème de hiérarchie. Ce peut être des termes de masse pour les jauginos (partenaires supersymétriques des bosons de jauge) λ^a, pour les squarks $\tilde{q}$ ou les sleptons $\tilde{l}$, ou encore des termes de masse pour les multiplets de Higgs. Ces termes de masse doivent être de l'ordre de l'échelle $M_{\mathrm{SUSY}} \sim 1$ TeV de brisure de SUSY.

5.6 Supersymétrie et Grande Unification

Nous allons mentionner quelques aspects des modifications de la SUSY sur la GUT basée sur le groupe $SU(5)$.

5.6.1 Superchamps et représentations de GUT

Comme nous l'avons vu à la section précédente, les fermions du MSSM sont les composantes fermioniques de superchamps chiraux. Ce sont donc désormais ces superchamps chiraux ψ et T qui appartiennent à des représentations du groupe de GUT. Comme dans le cas non supersymétrique, les représentations nécessaires sont Ψ : $\bar{\mathbf{5}}$ et T : $\mathbf{10}$.

Le MSSM nécessite l'introduction de deux superchamps de Higgs doublets sous $SU(2)_L$ contrairement au MS non supersymétrique

$$H_u = \begin{pmatrix} h_u^0 \\ h_u^- \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_d = \begin{pmatrix} h_d^+ \\ h_d^0 \end{pmatrix} \ .$$

Cela est dû au fait qu'un lagrangien invariant par supersymétrie ne peut être construit avec un seul superchamp. Ces deux superchamps appartiennent aux représentations **5** et $\bar{\mathbf{5}}$. Pour la brisure de symétrie de $SU(5)$, un superchamp de Higgs additionnel Φ dans la représentation **24** est nécessaire.

La description du modèle découle de l'écriture du superpotentiel de la théorie, $\mathcal{W}(H_u, H_d, \Phi, \Psi, T)$. Ce superpotentiel est soumis aux contraintes suivantes.

– Il doit réaliser la brisure de $SU(5)$ en G_{MS},

– Il doit donner une masse aux quarks et aux leptons.

Le choix usuel est [88]

$$\begin{aligned}\mathcal{W} = h_u \varepsilon^{ijklm} T_{ij} T_{kl} (H_u)_m + h_d T_{ij} \Psi^i H_d^j + z \mathrm{Tr}\Phi + x \mathrm{Tr}\Phi^2 + y \mathrm{Tr}\Phi^3 \\ + \lambda_1 \left[(H_u)_i H_d^j \phi_j^i + m' (H_u)_i H_d^i \right] \ .\end{aligned} \tag{5.6.75}$$

Dans cette équation, ε^{ijklm} est le tenseur de Levi-Civita d'ordre 5 : les indices $i, j, k, l, m = 1, \ldots, 5$. h_u, h_d, x, y, z, λ_1 et m' sont les paramètres du superpotentiel.
Ce potentiel aboutit à une dégénérescence dans les vides possible pour Φ. Dans les trois vides possibles, les symétries non brisées sont respectivement $SU(5)$, $SU(4) \times U(1)$ ou $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Il est possible d'ajouter dans la description un superchamp chiral X supplémentaire en interaction avec Φ de la forme

$$\mathcal{W}_X = \lambda_2 X (\mathrm{Tr}\Phi^2 - \mu^2) \ ,$$

superpotentiel qui remplacerait le secteur Φ dans l'Eq. (5.6.75), afin d'éliminer le vide invariant sous $SU(5)$. Cependant il n'est pas possible de séparer les dégénérescences entre les deux autres. C'est un des problèmes du modèle $SU(5)$ supersymétrique.

5.6.2 L'unification des constantes de couplage

Comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, la SUSY affecte les équations d'évolution des constantes de couplage du MS pour plusieurs raisons. La théorie possède une nouvelle échelle d'énergie M_{SUSY} à laquelle la SUSY est brisée. Les constantes β impliquées dans ces équations dépendent en outre du contenu en champs (plus précisément des degrés de liberté) de la théorie. Pour un groupe $SU(N)$ les contributions bosoniques passent de $11N/3$ à $3N$. Notons que l'on a du introduire un second doublet de Higgs ($N_H = 2$). Enfin, les contributions fermioniques sont aussi modifiées et l'on obtient

$$\frac{1}{\alpha_n(\mu)} = \frac{1}{\alpha_n(M_{\mathrm{GUT}})} + \frac{b_n}{2\pi} \ln \frac{M_{\mathrm{GUT}}}{\mu} \ , \quad n = 1, 2, 3 \tag{5.6.76}$$

avec [109] (à comparer avec l'Eq. (5.4.41))

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{2} N_f + \frac{3}{10} N_H = \frac{21}{10} > 0 \ , \\ b_2 &= -6 + 2N_f + \frac{1}{2} N_H = 1 > 0 \ , \\ b_3 &= -9 + 2N_f = -3 < 0 \ . \end{aligned} \tag{5.6.77}$$

Notons qu'avec $N_f = 3$, b_2 est maintenant positif. La résolution des équations permet d'obtenir avec les valeurs précédentes (pour $N_f = 3$ et $N_H = 2$),

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{GUT}} &\simeq 10^{16} \ \mathrm{GeV} \ , \\ \alpha_{\mathrm{GUT}} &\simeq \frac{1}{25} \ , \\ \sin\theta_W &\simeq 0.236 \pm 0.002 \ . \end{aligned} \tag{5.6.78}$$

On obtient l'évolution de constantes de structure fine représentée sur la Fig. 5.2. On voit que l'effet de la supersymétrie (aux échelles d'énergie où elle est exacte) est de diminuer la pente de l'évolution des constantes α_n, ce qui retarde l'unification. L'unification se fait désormais à une énergie de l'ordre de 10^{16} GeV. L'unification est aussi plus précise, ce qui est permis par le degré de liberté associé à l'échelle $M_{\rm SUSY}$ de brisure de la SUSY (point d'inflexion dans les courbes). Cette échelle est fixée autour de 1 TeV. L'amélioration de l'unification des couplages peut être quantifiée par le paramètre [89],

$$\Delta\alpha \equiv \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{b} \tag{5.6.79}$$

avec $\boldsymbol{a} = (\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \alpha_3^{-1})$, $\boldsymbol{u} = \alpha_{\rm GUT}^{-1} I_3$ et $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Dans le cas d'une unification parfaite, $\Delta\alpha = 0$. Pour l'unification non supersymétrique avec le contenu en particule du MS [89], $(\Delta\alpha)_{\rm MS} = -11.7$, tandis que dans le cas du MSSM, $(\Delta\alpha)_{\rm MSSM} = -0.5 \pm 3.5$.

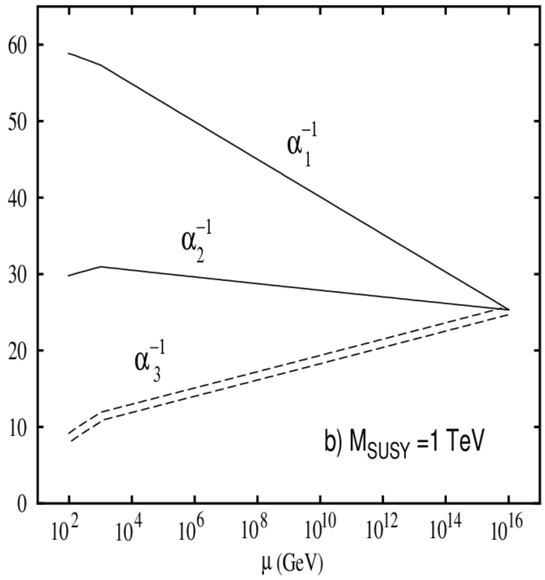

FIG. 5.2: Evolution des constantes de couplage avec l'énergie μ en SUSY GUTs. A la différence de la Fig. 5.1, il est supposé comme spectre de particules, outre celle du MS, leur partenaires supersymétrique. Figure tirée de [93].

5.7 Eléments de supergravité

5.7.1 Supersymétrie locale

La plupart des symétries de la physique des particules sont des symétries locales. Il est donc naturel de se demander ce qu'une formulation locale de la SUSY modifie dans la théorie. Introduisons donc une dépendance des paramètres de transformation $\epsilon(x^\mu)$ et $a^\mu(x^\mu)$ dans l'Eq. (5.5.48) dans les coordonnées d'espace-temps. On obtient alors une théorie *non renormalisable* (du moins à quatre dimension) mettant en jeu des particules de spin 2 et 3/2, particules qui peuvent jouer le rôle de graviton $h_{\mu\nu}$ et gravitino Ψ_μ (son partenaire supersymétrique). Elles sont regroupées dans un supermultiplet de la gravité. C'est la raison de la dénomination de *supergravité* (SUGRA). La supergravité est une théorie non-renormalisable. Il est donc clair qu'elle ne peut être vue que comme une théorie effective "à basse énergie" d'une théorie renormalisable la contenant.

Le graviton $h_{\mu\nu}$ décrit les excitations de la métrique

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa_{\rm N} h_{\mu\nu} \tag{5.7.80}$$

où $\eta_{\mu\nu}$ désigne la métrique de Minkowski. L'action de ce secteur gravitationnel généralise donc celle de la relativité générale avec [95]

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2\kappa_{\mathrm{N}}} \int \mathrm{d}^4x \, |\det e| R - \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^4x \, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\Psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \tilde{D}_\rho \Psi_\sigma \ . \tag{5.7.81}$$

où R est le scalaire de Ricci (voir chapitre 1), $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ est le tenseur de Levi-Civita totalement anti-symétrique tel que $\varepsilon^{0123} = 1$ et $\tilde{D}$ généralise la dérivée covariante de la relativité générale en prenant en compte l'existence du gravitino. Le second terme correspond à l'action de Rarita-Schwinger qui décrit une particule de spin 3/2. $|\det e|$ est le déterminant du vierbein, $e^a_\mu(x)$, avec $a = 1, \ldots, 4$. Ces champs de vecteurs définissent une base orthonormée locale. C'est une généralisation de la métrique qui lui est reliée par [110]

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu(x) e^b_\nu(x) \eta_{ab} \ . \tag{5.7.82}$$

On en déduit la relation $\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} = |\det e^a_\mu|$.

La SUSY globale peut être vue comme la limite de la supergravité lorsque l'on fait tendre la masse de Planck m_{Pl} vers l'infini. Cela implique que ses effets se ressentent principalement à l'approche de m_{Pl} même s'il est possible de trouver des effets à des énergies bien plus basses voire même de l'ordre de la brisure électro-faible. La question de la limite de validité de la SUSY globale et de la SUGRA est donc délicate. De manière effective, la démarche usuelle consiste à comparer les VEV v des champs étudiés à m_{Pl}. Si $v/m_{\mathrm{Pl}} \ll 1$ alors la SUSY est suffisante. Dans le cas contraire, tant que $v/m_{\mathrm{Pl}} \leq 1$, la SUGRA doit être employée. Lorsque $v/m_{\mathrm{Pl}} > 1$, la supergravité ne peut être utilisée que si les corrections de gravité quantique sont négligeables [214][13]. Ces corrections pour un potentiel scalaire $V(\phi)$ sont données par [214]

$$\Delta V_{\mathrm{grav}} = C_1 \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\phi^2} \frac{V}{m_{\mathrm{Pl}}^2} + C_2 \frac{V}{m_{\mathrm{Pl}}^4} \ , \tag{5.7.83}$$

où C_1 et C_2 ont des valeurs de l'ordre de l'unité. Cela signifie que la SUGRA peut être utilisée tant que

$$\begin{aligned} m_\phi = \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\phi^2} &\ll m_{\mathrm{Pl}}^2 \\ V(\phi) &\ll m_{\mathrm{Pl}}^4 \ . \end{aligned} \tag{5.7.84}$$

5.7.2 Couplage de la supergravité à la matière

Le but de cette section est de généraliser le lagrangien de SUSY, en prenant en compte les couplages du secteur de la gravité avec des superchamps chiraux et des superchamps vectoriels. Puisque la SUGRA n'est pas renormalisable, il est possible d'autoriser le superpotentiel $\mathcal{W}(\Phi_i)$ à avoir un degré supérieur à 3. De plus, si la SUSY était décrite en terme d'une fonction libre $\mathcal{W}(\Phi_i)$ uniquement, la SUGRA autorise l'introduction d'une seconde fonction libre des superchamps chiraux $J(\Phi_i^\dagger, \Phi_i)$ afin de généraliser le terme cinétique

$$\int \Phi_i^\dagger \Phi_i \quad \text{par} \quad \int \mathrm{d}^2\theta J(\Phi_i^\dagger, \Phi_i) \ .$$

En réalité le lagrangien ne dépend que d'une certaine fonction de $J(\Phi_i^\dagger, \Phi_i)$ et $\mathcal{W}(\Phi_i)$. On définit le *potentiel de Kähler*[14] comme la fonction sans dimension suivante

$$G(\Phi^\dagger, \Phi) = \frac{K}{M_{\mathrm{Pl}}^2} + \ln \frac{|\mathcal{W}|^2}{M_{\mathrm{Pl}}^6} \ , \tag{5.7.85}$$

[13] Il faut noter qu'il y a un désaccord à ce sujet entre A. Linde et D. Lyth. Ce dernier considère que si la VEV des champs dépasse m_{Pl}, seule une théorie renormalisable peut être employée.

[14] Ce terme de potentiel de Kähler désigne parfois la fonction K de l'Eq. (5.7.85) uniquement. Ce sera le cas au chapitre 8.

où la fonction K est reliée à la fonction J par $K = -3\ln(-J/3)$. Dans sa version minimale, la fonction $K(\Phi_i^\dagger, \Phi_i) = \sum_i \Phi_i^\dagger \Phi_i$.

Le lagrangien total peut être divisé en plusieurs parties

$$\mathcal{L}_{\text{SUGRA}} = \mathcal{L}_{\text{B}} + \mathcal{L}_{\text{F}} + \mathcal{L}_{\text{FK}} \ . \tag{5.7.86}$$

Ces trois termes contiennent respectivement le secteur bosonique, fermionique et les termes cinétiques des fermions. Nous allons expliciter les lagrangiens bosoniques et fermioniques qui seront utilisés par la suite. Tout d'abord,

$$|\det e|^{-1}\mathcal{L}_{\text{B}} = -\frac{1}{2}R + G_i^j D_\mu A_i D^\mu (A^j)^* - V_F(G) \ . \tag{5.7.87}$$

La contribution des termes F au potentiel des champs scalaires est une fonction de G uniquement, mais peut aussi être développée en termes des fonctions K et $\mathcal{W}$

$$\begin{aligned} V_F(G) &= e^G \left[G_i (G^{-1})^i_j G^j - 3\right] \\ &= e^{K/M_{\text{Pl}}^2} \left[\left(\mathcal{W}_i + M_{\text{Pl}}^{-2}\mathcal{W}K_i\right)(K^j)^{*i}\left(\mathcal{W}_j + M_{\text{Pl}}^{-2}\mathcal{W}K_j\right)^* - 3M_{\text{Pl}}^{-2}|W|^2\right] \ , \end{aligned} \tag{5.7.88}$$

où l'on utilise les notations suivantes (valable pour G, K ou $\mathcal{W}$)

$$G^i \equiv \frac{\partial G}{\partial A_i} \ , \quad G_i \equiv \frac{\partial G}{\partial A^{i*}} \ , \quad G^i_j \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial A_i \partial A^{j*}} \ , \ldots \ . \tag{5.7.89}$$

Le lagrangien fermionique donne accès aux termes de masse pour les fermions des superchamps chiraux duquel il est possible d'extraire les termes de masse pour les fermions des superchamps chiraux. On montre que le développement en composantes donne le lagrangien fermionique [95]

$$\begin{aligned} |\det e|^{-1}\mathcal{L}_{\text{fermion}} = -e^{G/2}\bar{\Psi}_\mu \sigma^{\mu\nu}\Psi_\nu &+ \left[\frac{1}{2}e^{G/2}\left(-G^{ij} - G^i G^j + G^{ij}_k (G^{-1})^k_l G^l\right)\bar{\Psi}_{iL}\Psi_{jR}\right] \\ &+ \frac{i}{\sqrt{2}}e^{G/2}G^i \bar{\Psi}_{\mu L}\gamma^\mu \Psi_{iL} + c.c. \ . \end{aligned} \tag{5.7.90}$$

Dans cette expression Ψ_μ désigne le gravitino, Ψ_i désigne un spineur de Majorana construit à partir du spineur de Weyl, contenu dans le superchamp Φ_i.

Lorsqu'on introduit des couplages de la SUGRA avec le secteur de jauge, une troisième fonction libre $f_{ab}(\Phi_i)$ doit être introduite, la *fonction cinétique de jauge* afin de généraliser

$$\int \mathrm{d}^2\theta W_a^\alpha (W_a)_\alpha \quad \text{par} \quad \int \mathrm{d}^2\theta f_{ab}(\Phi_i) W_a^\alpha (W_b)_\alpha \ ,$$

où a, b sont des indices de jauge et α est un indice spinoriel. Dans sa version minimale (renormalisable), $f_{ab} = \delta_{ab}$. Le couplage à un secteur de jauge introduit de nouvelles contributions au trois lagrangiens précédents puisque de nouveaux champs bosoniques et fermioniques sont introduits. Les termes cinétiques des lagrangiens sont aussi modifiés dans le sens où les dérivées covariantes doivent désormais être covariantes par rapport aux groupes de jauge en plus d'être covariantes par rapport aux symétries de la gravité. Enfin le potentiel de Kähler précédent est encore généralisé à

$$\int \mathrm{d}^2\theta J(\Phi_i^\dagger e^{gV}, \Phi_i) \ .$$

Avec un secteur de jauge, le lagrangien bosonique comprend d'autres nouveaux termes. En particulier, une contribution au potentiel scalaire venant des termes D apparaît. Elle s'exprime par [95]

$$V_D = \frac{g^2}{2}(\mathrm{Re}f_{ab}^{-1})G^i(J_a)_{ij}A_jG^k(J_b)_{kl}A_l \ . \tag{5.7.91}$$

Cette contribution est regroupée avec les termes cinétiques pour les champs de jauge dans un second lagrangien bosonique,

$$\mathcal{L}'_{\mathrm{boson}} = -\frac{1}{4}(\mathrm{Re}f_{ab})(F_a)_{\mu\nu}F_b^{\mu\nu} + \frac{i}{4}(\mathrm{Im}f_{ab})(F_a)_{\mu\nu}\tilde{F}_b^{\mu\nu} - V_D \ . \tag{5.7.92}$$

avec

$$(F_a)_{\mu\nu} = \partial_\mu V_{\nu a} - \partial_\nu V_{\mu a} - g\lambda_{abc}V_{\mu b}V_{\nu c} \ . \tag{5.7.93}$$

et $\tilde{F}$ est son dual $\left(\tilde{F}_a\right)_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_a^{\rho\sigma}$.

Pour les expressions des autres lagrangiens, il est suggéré de consulter la Ref. [95].

Chapitre 6

Contraintes phénoménologiques sur les modèles de GUTs SUSY

Sommaire

Une fois le cadre théorique défini, nous allons présenter les différentes contraintes phénoménologiques qui doivent être prises en compte pour construire un modèle de SUSY GUTs. Le but de ce chapitre est de construire une liste de modèles en accord avec ces contraintes : ils seront étudiés du point de vue de la formation de défauts topologiques au chapitre 7. Pour chaque contraintes, nous allons présenter les modèles usuels dans le cadre des SUSY GUTs qui permettent d'en tenir compte. Deux classes de contraintes sont prises en compte : celles venant de la physique des particules et celles venant de la cosmologie (pour autant que cette séparation soit possible). Elles concernent la durée de vie des protons [91, 128, 127], la phénoménologie du MS [26], la physique des neutrinos [112, 111, 114] et le mécanisme de "see-saw" [132, 113], la génération d'une asymétrie baryon/anti-baryon [119], le problème des monopôles et les données du CMB.

Groupes	Fenêtre en $n \in \mathbb{N}^*$	Ordre	Rang
$SU(n+1)$	$n \geq 1$	$n(n+2)$	n
$SO(2n+1)$	$n \geq 2$	$n(2n+1)$	n
Sp_{2n}	$n \geq 3$	$n(2n+1)$	n
$SO(2n)$	$n \geq 4$	$n(2n-1)$	n
G_2		14	2
F_4		52	4
E_6		78	6
E_7		133	7
E_8		248	8

TAB. 6.1: Groupes de Lie classifiés par Cartan. Sont donnés leur ordre (nombre de générateurs), et leur rang (nombre de générateurs diagonalisables simultanément). Certains groupes sont omis s'ils sont équivalents à d'autres. C'est le cas de $SO(6) \sim SU(4)$, $SO(4) \sim SU(2) \times SU(2)$, $SO(3) \sim SU(2)$, $Sp_4 \sim SO(5)$, et $Sp_2 \sim SU(2)$.

6.1 Contraintes sur les groupes de symétrie et les représentations

6.1.1 Contraintes sur $\mathrm{G}_{\mathrm{GUT}}$

Du point de vue du groupe de symétrie sur lequel la grande unification sera basée, un certain nombre de contraintes peuvent être posées.

Une seule constante de couplage

On peut utiliser la définition de P. Langacker [91] de la Grande Unification, à savoir une théorie ne possédant au haute énergie qu'une seule constante de couplage. Ceci est automatiquement réalisé en considérant des théories basées sur un groupe de symétrie G simple. L'unique autre possibilité est de considérer des groupes non simples mais semi-simples, produits directs de groupes simples identiques de la forme $G = H \times H \times \ldots$. Il faut en outre imposer une symétrie dans l'échange des facteurs de telle sorte que leurs constantes de couplage soient toutes égales. Par souci de simplicité nous allons considérer uniquement des modèles basés sur un groupe simple.

Cartan a montré que les groupes de Lie simples peuvent être classés en quatre familles infinies [$SU(n+1)$, $SO(2n+1)$, $Sp(2n)$ et $SO(2n)$] où n est le rang du groupe et 5 groupes simples dit exceptionnels car ils n'appartiennent pas à une famille infinie : G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 où l'indice correspond au rang du groupe. Leur propriétés sont rassemblées dans la Table. 6.1.

Rang

Pour construire une théorie unifiée des interactions englobant le MS, il est nécessaire d'utiliser un groupe de rang supérieur ou égal à celui du groupe sur lequel repose le MS [$G_{\mathrm{MS}} = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$] ie quatre. Cela exclut d'ores et déjà le groupe G_2 et les premiers groupes de chacune des familles infinies.
Les groupes de rang 4 sont $SU(5)$, $SO(9)$, $Sp(8)$, $SO(8)$, F_4 pour les groupes simples, et $SU(3) \times SU(3)$ noté $[SU(3)]^2$, $[G_2]^2$, $[SU(2)]^4$, $[SO(5)]^2$ pour les groupes semi-simples n'ayant que des facteurs identiques. Les deux derniers groupes ne sont pas acceptables car ils ne contiennent pas de facteur $SU(3)$ [92]. Parmi tous ces groupes, seuls $SU(5)$ et $[SU(3)]^2$ possèdent des représentations complexes nécessaires pour décrire l'interaction électro-faible telle qu'on la connaît (voir plus loin). Cependant $[SU(3)]^2$ ne peut décrire des particules de charge

électromagnétiques entières et fractionnaires [91] à la fois ce qui le rend phénoménologiquement inutilisable. Le seul groupe de rang quatre qui soit acceptable est donc $SU(5)$. Le modèle de Georgi-Glashow (présenté chapitre précédent) est donc le modèle minimal de GUT.

Si l'on a comme objectif d'être exhaustif, il reste encore un nombre infini de groupes possibles : il est donc nécessaire d'imposer une limite supérieure sur le rang des groupes considérés. Imposer que les modèles de SUSY GUTs puissent être inclus dans une théorie des cordes peut sembler raisonnable. Deux de ces théories sont basées sur les groupes de symétrie $E_8 \times E_8$ [187] et $SO(32)$, tous les deux de rang 16. Cependant, en toute généralité, la théorie des cordes ne peut imposer une limite plus ferme que rg ≤ 22 [188], limite qui passe à rg $\leq 10^5$ [189] dans le cadre de la M-théorie. Nous choisirons de limiter le rang à 8 pour plusieurs raisons. La première est que plus le rang augmente, moins la théorie est prédictive. La seconde est que pour les groupes de rang plus grand, trop peu d'études existent pour savoir comment (et si) il est possible de plonger le MS dans la théorie.

6.1.2 Contraintes sur les représentations fermioniques

Représentations réelles et Représentations complexes

La théorie électro-faible est basée sur la chiralité c'est à dire la différence entre les fermions droits et gauches. Pour pouvoir en rendre compte, il est nécessaire [91] que le groupe de symétrie choisi possède des représentations complexes pour placer les fermions. [La distinction entre représentation réelle et complexe est présentée au chapitre 2, Eq. (2.3.5).] Ainsi, si l'on place les fermions gauches dans une représentation M_L, alors les fermions droits[1] $\psi_R = C\,\overline{{}^t\psi_L^c}$ appartiennent à la représentation conjuguée complexe $M_R = M_L^*$. Si M_L est réelle, les deux représentations M_R et M_L sont équivalentes ($M_R \sim M_L$) tandis que si la représentation est complexe, $M_R \nsim M_L$. Nous allons donc imposer que la représentation fermionique soit complexe. Une classification de M. Mehta et P. Srivastava a recensé les groupes possédant des représentations complexes : $SU(l)$ (avec $l > 2$), $SO(4l+2)$ et E_6.

Anomalies

Une *anomalie* [94, 91] est une singularité dans des contributions au vertex à trois courants (diagrammes en triangle). Elle entraîne des divergences dans les courants en théorie des perturbations et dans le cas où les courants en question sont associés à des symétries de jauge, la divergence ne peut être régularisée tout en respectant l'invariance de jauge : on perd donc l'invariance de jauge et la renormalisabilité. On peut calculer le coefficient de l'anomalie $\mathcal{A}(R)$ d'une représentation R donnée

$$\mathrm{Tr}\left[\{T^a(R), T^b(R)\}\, T^c(R)\right] = \frac{1}{2}\mathcal{A}(R) d^{abc} \ , \tag{6.1.1}$$

où T^a est un générateur dans la représentation R et où d^{abc} est une matrice symétrique de constantes introduite par l'anticommutateur des générateurs λ^a du groupe

$$\{\lambda^a, \lambda^b\} = 2 d^{abc} \lambda^c \ . \tag{6.1.2}$$

Pour qu'une représentation fermionique puisse être utilisée, il est nécessaire qu'elle ne présente pas d'anomalie globalement [$\mathcal{A}(R) = 0$]. Pour certains groupes, toutes les représentations introduisent des anomalies. C'est ainsi qu'on peut éliminer $SO(6)$. En revanche pour tous les autres groupes $SO(4l+2)$, Georgi et Glashow ont montré qu'ils ne présentent pas

[1] L'opérateur C de conjugaison de charge est défini au chapitre 5. On rappelle que dans la représentation de Dirac, $C = i\gamma^2\gamma^0$ et que $\psi^c = C\ \left({}^t\bar{\psi}\right)$.

d'anomalies. Gürsey, Ramond et Sikivie en ont fait de même avec E_6.
Concernant $SU(n)$, les choses sont plus complexes car certaines représentations sont sans anomalie mais pas toutes. Utiliser un tel groupe nécessite de n'utiliser que des représentations sans anomalie ou une combinaison de plusieurs représentations dont les anomalies s'annulent. C'est le cas de $\bar{\mathbf{5}} + \mathbf{10}$ dans $SU(5)$ (voir chapitre 5). Cette annulation n'est pas le fruit du hasard mais est due au fait que $SU(5)$ est un sous-groupe de $SO(10)$ qui n'a pas d'anomalies.

6.1.3 Groupes de Grande Unification

On pense désormais que $SU(5)$ même supersymétrique ne peut convenir [99, 128] à cause notamment des contraintes expérimentales sur la durée de vie du proton[2]. Il existe encore une controverse à ce sujet donc nous ne l'écarterons pas a priori. Pour résoudre certains problèmes du modèle de Georgi-Glashow, il a été proposé un modèle appelé "flipped $SU(5)$"[99] [noté $\widetilde{SU(5) \times U(1)}$] ; il est basé sur le groupe $SU(5) \times U(1)$ et est très proche de $SU(5)$ hormis une disposition différente des particules dans les multiplets $\bar{\mathbf{5}}$, $\mathbf{10}$ et l'introduction d'un singlet additionnel. L'extension est attractive car minimale, mais comme il a été choisi de ne considérer que des groupes simples, ce groupe ne sera étudié que comme un sous groupe de $SO(10)$.

Concernant $SU(6)$, $SU(7)$, $SU(8)$ et $SU(9)$, nous allons dans un premier temps utiliser ces groupes comme s'ils ne présentaient pas d'anomalie. Pour construire une théorie complète avec ces groupes, il faudrait prendre soin de vérifier ce point pour chaque cas.

Dans la famille $SO(4l+2)$, le premier groupe utilisable est $SO(10)$. C'est un des groupes les plus intéressants du point de vue des SUSY GUTs. Son premier intérêt est de placer les fermions dans une représentation fermionique complexe, irréductible, sans anomalie, et de taille 16, ce qui "prédit" l'existence d'un neutrino droit. Il possède de plus la symétrie $U(1)_{\mathrm{B-L}}$ ce qui est très utile du point de vue phénoménologique (voir sections suivantes). Il a été étudié en détail autant du point de vue de la physique des hautes énergies que de la cosmologie [91, 132, 88]. Si on passe à des rangs plus grands, seul $SO(14)$ possède un rang inférieur à 8. Le seul groupe exceptionnel qui satisfasse aux contraintes précédentes est E_6, dont l'un des sous-groupe est $[SU(3)]^3$. Certaines théories des cordes débouchent naturellement sur ces deux groupes de GUT.

6.1.4 Contraintes sur les schémas de brisure

Sous-groupes réguliers et spéciaux

Pour un groupe de symétrie G_{GUT} donné, les sous-groupes peuvent être classés en deux catégories : les sous-groupes *réguliers* et les sous-groupes *spéciaux*. La définition rigoureuse des sous-groupe réguliers et spéciaux est donnée dans [92] et est basée sur le formalisme des diagramme de Dynkin. Elle se traduit de la manière suivante en termes de générateurs. Un sous-groupe régulier H présente la caractéristique d'être naturellement identifiable à partir du groupe initial G. Ses générateurs sont en effet obtenus en identifiant dans les générateurs de G des blocs qui sont générateurs d'une symétrie. L'exemple le plus simple est $SU(3)$ dont $SU(2) \times U(1)$ est un sous-groupe régulier tandis que que $SU(2)$ est un sous-groupe spécial. Pour le visualiser, il suffit d'identifier dans les trois premiers générateurs de $SU(3)$ (donnés

[2] De nombreux problèmes ont été mis en avant à propos de ce modèle : la durée de vie du proton, la dégénérescence entre les différents vides pour le champ de Higgs Φ_{24}, l'absence de neutrinos droit à priori et l'absence d'explication de la hiérarchie entre leur masse et celle des autres fermions, le fait que les fermions doivent être placés dans une représentation réductible $\bar{\mathbf{5}} + \mathbf{10}$ et enfin une formation de monopôles inévitablement à une masse de l'ordre de 10^{16} GeV.

en annexe A) un bloc 2×2 identique aux matrices de Pauli et un bloc nul de taille 1×1. Le sous-groupe $SU(2) \times U(1)$ est donc généré par λ_j, $j = 1, 2, 3$ et λ_8, ce dernier, diagonal, permettant de générer le facteur $U(1)$. En revanche pour générer le sous-groupe spécial $SU(2)$, il faut utiliser les générateurs λ_2, λ_5, et λ_7. Le même raisonnement peut être fait pour les sous-groupe $SU(5)$. Il est très difficile de retrouver simplement la phénoménologie du MS en utilisant des sous-groupes spéciaux et seul les sous-groupes réguliers seront utilisés pour construire des modèles de GUT. Les sous-groupes réguliers maximaux des groupes de GUT utilisé sont donnés en annexe A.

Sous-groupes discrets

Nous avons montré au chapitre 3 que la brisure de groupe de Lie peut donner lieu à l'apparition de groupes discrets. De plus, certains de ces groupes discrets sont intéressants pour la construction de modèles réalistes. L'étude détaillée des groupes $SO(10)$ et E_6 montre que les groupes discrets contenus de manière générique sont les Z_n [190, 191]. Parmi eux, seuls deux groupes peuvent être non brisés à basse énergie : la Z_2 de R-parité que nous allons présenter plus en détail à la section 6.5 et une symétrie Z_3 appelée “baryon parity”. Cependant nous ne considérerons pas cette dernière dans l'étude du chapitre 7 et toutes les symétries discrètes autres que la R-parité ne seront pas considérées. En effet elles devront forcément être brisées à basse énergie, ce qui entraînerait la formation de murs de domaine. Cette brisure de symétrie devra donc intervenir avant une phase d'inflation afin de résoudre un potentiel problème cosmologique : son apparition et leur brisure n'auront donc aucune conséquence observable.

Champs de Higgs

Il n'y a pas de raison à priori de limiter le nombre de brisures de symétries entre l'échelle de GUT et l'échelle d'énergie du Modèle Standard. Cela signifie que l'on peut avoir a priori autant de champs de Higgs que l'on veut et que l'on ne peut rien dire sur le nombre d'échelles de nouvelle physique entre M_{GUT} et l'énergie du MS.

Dans ce qui suit, nous allons supposer qu'il y a toujours une représentation de Higgs et un potentiel qui permettent de réaliser n'importe quel schéma de brisure (voir section 5.3). Même si aucun théorème ne permet de l'affirmer, il semble toujours possible de trouver une représentation de Higgs adéquate pour toute brisure de symétrie entre un groupe et un sous-groupe (celle-ci peut cependant être de très grande taille). Cependant, plus le nombre de champs de Higgs est élevé, plus il est difficile de trouver un potentiel adéquat pour ces champs et plus le modèle est complexe. Parmi les schémas de brisure du chapitre 7, certains seront donc plus réalistes que d'autres lorsqu'ils minimisent le nombre de champs de Higgs nécessaires. Il s'agit néanmoins d'une contrainte plus esthétique que réellement physique.

6.1.5 Retrouver la phénoménologie du Modèle Standard

Tout modèle de GUT doit pouvoir à basse énergie être en accord avec le MS. Cela signifie que le groupe de symétrie doit posséder G_{MS} parmi ses sous-groupes. Cela signifie aussi qu'il faut trouver une manière de plonger les particules du MS dans des représentations fermioniques de telle sorte à pouvoir rendre compte de leurs nombres quantiques (charges sous G_{MS}).
Pour cela, il est nécessaire de regarder les décompositions des représentations de G_{GUT} au cours des brisures successives de symétrie. La Ref. de Slansky [92] est très utile pour cela. Le plus délicat est de pouvoir expliquer les valeurs des hypercharges des particules. Il est nécessaire de trouver un “plongement” de la symétrie $U(1)_Y$ dans le groupe G_{GUT}. Cela signifie

concrètement trouver une expression analytique de l'opérateur Y d'hypercharge [le générateur de $U(1)_Y$] en fonction des générateurs de G_{GUT}. Dans la suite, lorsque l'on considérera un modèle basé sur un groupe, il faudra savoir quelles sont les différentes manières de plonger le MS dans le groupe considéré. Dans le chapitre précédent, nous avons illustré cette contrainte pour le cas d'une GUT basée sur $SU(5)$ et montré que le choix de représentation fermionique $\bar{\mathbf{5}}+\mathbf{10}$ et l'expression $Y=-(5/3)^{1/2}\lambda_{24}$ était en accord avec les charges observées. Pour les autres groupes, nous nous baserons sur les études existantes. Pour les groupes très étudiés [tels que $SO(10)$ et E_6] ceci ne pose aucun problème et de nombreux plongements possibles sont connus. En revanche ce sera une limitation pour les groupes de la famille $SU(N)$, nettement moins étudiés.

6.2 Inflation hybride supersymétrique

Un grand nombre des notions abordées ici concernant l'inflation en général sont introduites au chapitre 4. Dans ce même chapitre, ont été abordées les motivations qui justifient de supposer que l'univers a connu une phase d'inflation.

6.2.1 Motivations pour l'inflation hybride supersymétrique

Un des modèles historiques d'inflation proposait de placer le champ d'inflaton ϕ dans un potentiel V en loi de puissance d'ordre quatre [65]

$$V=\frac{1}{2}m^2\phi^2+\frac{1}{4}\lambda\phi^4 \tag{6.2.3}$$

Les prédictions de ce modèle concernant la valeur des paramètres de roulement lent sont cependant défavorisées pour le cas $m=0$ par les données CMB les plus récentes WMAP [73]. Le cas $\lambda=0$ est encore en accord avec les données même si ce n'est pas le modèle qui ajuste le mieux les contraintes existante. Ces données sont en revanche plus en faveur des modèles d'inflation hybride.

De plus ce modèle souffre d'un problème de naturalité depuis que le satellite COBE a mesuré une anisotropie de température à une échelle de 10^{-6}. La comparaison avec les prédictions du modèle imposait des paramètres de potentiel vérifiant [67, 134]

$$\left(\frac{\delta T}{T_0}\right)_Q\simeq 6.6\times 10^{-6}\Leftrightarrow\lambda\simeq 6\times 10^{-14}\ ,\quad \text{et}\quad m\lesssim 10^{13}\ \text{GeV}\ . \tag{6.2.4}$$

Cette contrainte sur la constante d'auto-couplage, une paramètre sans dimension à priori de l'ordre de l'unité ne paraît pas très naturelle.

L'inflation hybride [74, 134] a été introduite pour pouvoir rendre compte de l'anisotropie de température sans la nécessité de paramètres sans dimension très petits devant l'unité. Le modèle est basé sur le couplage de l'inflaton avec un second champ scalaire ψ

$$V(\phi,\psi)=\frac{1}{4}\lambda(\psi^2-M^2)^2+\frac{1}{2}m^2\phi^2+\frac{1}{2}\lambda'\phi^2\psi^2. \tag{6.2.5}$$

Dans ce modèle, l'inflaton ϕ est le champ en roulement lent dans le potentiel tandis que le champ ψ est responsable de la déstabilisation du potentiel qui termine l'inflation. Lors de l'inflation, il est dans un minimum *local* du potentiel en $\psi=0$ ce qui permet au potentiel d'être non nul et donc génère une énergie du vide (c'est pourquoi on parle de “false vacuum inflation”). Lorsque l'inflaton atteint une valeur critique, le champ ψ tombe dans le minimum global du potentiel, en prenant une VEV non nulle. Ce champ est donc un champ de Higgs et peut être responsable de la brisure d'une symétrie. L'intérêt est de pouvoir rendre compte de la petitesse des anisotropies du CMB avec des constantes de couplage du potentiel ayant des valeurs plus naturelles ($\lambda, \lambda' \sim \mathcal{O}(1)$).

Dans la version supersymétrique de l'inflation hybride, nous allons voir que les prédictions concernant les paramètres observables sont en accord avec les plus récents résultats. Nous avons vu que le principe de l'inflation est d'avoir un potentiel non nul dans l'état fondamental pendant la phase d'inflation. Or comme nous l'avons montré dans le chapitre 5, dans le cadre de la supersymétrie, le potentiel contient des contributions venant des termes F et des termes D. De ce fait, deux classes d'inflation hybride existent suivant l'origine de la contribution non nulle au potentiel, termes F ou termes D. Ces deux classes de modèles sont présentées maintenant. Ces modèles d'inflation, couplant une paires de superchamps de Higgs $\Phi_\pm$ avec un superchamp S contenant l'inflaton, paraissent plus naturels dans le cadre des SUSY GUTs.

6.2.2 Inflation hybride venant des termes F

L'inflation "hybride F"[3] [133] est la généralisation de la version non supersymétrique décrite par le potentiel Eq. (6.2.5) mais contient uniquement deux constantes libres dans le potentiel au lieu de quatre. Dans cette section, on notera $\Phi_\pm$ deux superchamps chiraux de Higgs et $\phi_\pm$ leurs composantes scalaires. On notera par S à la fois le superchamp d'inflaton et sa composante scalaire. L'inflation hybride F est basée sur le superpotentiel

$$\mathcal{W}_F = \kappa S(\Phi_+\Phi_- - M^2) \ , \qquad (6.2.6)$$

contenant deux constantes libres : une constante de couplage κ et une échelle d'énergie M. Supposons que les superchamps $\Phi_\pm$ soient dans deux représentations non triviales, conjuguées et de dimensionnalité $\mathcal{N}$ du groupe G et le brisent lorsqu'ils prennent une VEV non nulle. Ils sont couplés à l'inflaton S, singlet sous G. La forme du superpotentiel ci-dessus peut être protégée par une symétrie. Usuellement, on impose l'existence d'une symétrie $U(1)_R$ sous laquelle les superchamps se transforment de la manière suivante :

$$S \to e^{i\gamma} S \ , \quad \Phi_+\Phi_- \to \Phi_+\Phi_- \ , \quad \mathcal{W} \to e^{i\gamma}\mathcal{W} \ .$$

Cette contrainte est la seule manière [133] de protéger la forme du superpotentiel afin d'obtenir une phase d'inflation. Elle permet notamment d'interdire des termes S^n avec $n \geq 2$ tout en autorisant le terme linéaire à S.

Le potentiel à l'ordre des arbres qui en dérive est donné par la somme des termes F et des termes D,

$$V(\phi_+, \phi_-, S) = V_F + V_D = \kappa^2|M^2 - \phi_+\phi_-|^2 + \kappa^2|S|^2(|\phi_+|^2 + |\phi_-|^2) + V_D. \qquad (6.2.7)$$

Dans ce modèle, on supposera que les termes D ne jouent aucun rôle (ils peuvent être rendu nuls par exemple pendant la phase inflationnaire) et ne sont donc pas explicités. Le potentiel scalaire est représenté sur la Fig. 6.1.

En supposant des conditions initiales chaotiques, le champ scalaire S est très grand devant sa valeur critique $S_c \equiv M$ au début de l'inflation. Dans ce régime, le minimum du potentiel est local et est obtenu lorsque $\phi_\pm = 0$. Dans cette vallée inflationnaire (voir Fig. 6.1), l'inflaton est en roulement lent et le potentiel est non nul, $V = \kappa^2 M^4$: il est donc responsable d'une phase d'inflation. Pendant cette phase, il faut aussi noter que la supersymétrie est brisée puisque $\langle V_F \rangle_0 \neq 0$. Nous reviendrons plus loin sur les conséquences de cette brisure de SUSY. Lorsque l'inflaton S atteint la valeur critique, S_c, on peut vérifier que le minimum du potentiel Eq. (6.2.7) est alors pour $\phi_\pm = M$ ce qui génére la brisure de la symétrie G. Cette brisure

[3]En anglais on parle de *F-term inflation*.

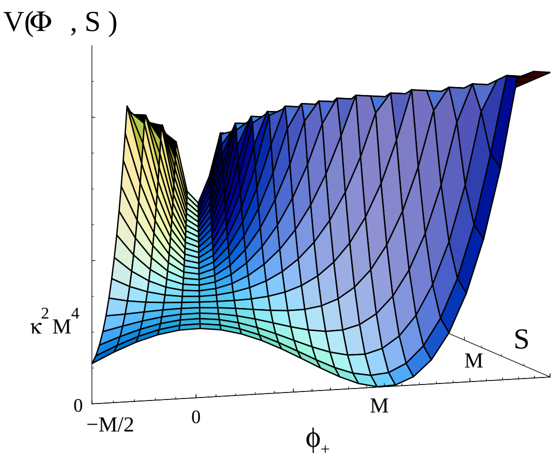

FIG. 6.1: Tracé du potentiel $V(\phi_+, \phi_-, S)$ en posant $\phi_+ = \phi_-$.

de symétrie entraîne la fin des conditions de roulement lent de l'inflaton et donc la fin de l'inflation. La supersymétrie est restaurée car le potentiel devient nul dans l'état fondamental.

Lors de la phase inflationnaire, le potentiel à l'ordre des arbres est constant $V_0 = \kappa^2 M^4$, illustrant ainsi la propriété de la supersymétrie de générer naturellement des potentiels plats, propriété intéressante pour réaliser un potentiel inflationnaire. Cependant si le potentiel est *parfaitement* plat, ceci empêche tout roulement de l'inflaton et la phase d'inflation serait alors éternelle. Heureusement les corrections radiatives à une boucle, créent une légère pente[4] dans le potentiel. Nous avons vu que la valeur non nulle du potentiel entraîne la brisure spontanée de la SUSY (voir chapitre 5). Cela entraîne une brisure de la dégénérescence des masses entre les composantes fermioniques et bosoniques des superchamps $\Phi_\pm$. On peut facilement vérifier grâce à l'Eq. (5.5.62) et au superpotentiel (6.2.6) que la composante fermionique (spineur de Weyl à deux degrés de liberté) de chacun des superchamps $\Phi_\pm$ possède une masse $m_{\text{fermion}} = \kappa|S|$. Le potentiel Eq. (6.2.7) permet de vérifier que les deux degrés de liberté bosoniques de chacun des superchamps $\Phi_\pm$ possèdent eux des masses $m_\pm = \sqrt{\kappa^2|S|^2 \pm \kappa^2 M^4}$. On peut donc appliquer la formule de Coleman-Weinberg [104] pour calculer les corrections radiatives à une boucle au potentiel

$$\Delta V_{1-\text{loop}} = \frac{1}{64\pi^2}\sum_i (-1)^{F_i} m_i^4 \ln\frac{m_i^2}{\Lambda^2} \ , \tag{6.2.8}$$

où la sommation est faite sur les degrés de liberté i, ces états étant de masse m_i, de nombre fermionique F_i. Λ désigne l'échelle de renormalisation de la théorie (m_{Pl} typiquement) et $\mathcal{N}$ est la dimensionnalité des champs de Higgs $\Phi_\pm$. On obtient pour la vallée inflationnaire le potentiel effectif

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} &= V_0 + \Delta V_{1-\text{loop}} \\ &= \kappa^2 M^4 \left\{1 + \frac{\kappa^2\mathcal{N}}{32\pi^2}\left[2\ln\frac{|S|^2\kappa^2}{\Lambda^2} + (z+1)^2\ln(1+z^{-1}) + (z-1)^2\ln(1-z^{-1})\right]\right\} \ . \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

Dans l'expression précédente, on a défini la variable $z = |S|^2/M^2$. Dans la littérature, il est souvent utilisé au lieu de ce potentiel effectif, son développement lorsque l'inflaton $S \gg S_c$

[4]Ce n'était a priori pas évident : les corrections radiatives peuvent dans certains cas rendre le modèle incapable de produire la quantité d'inflation requise en générant des pentes trop fortes par exemple.

donné par

$$V_{\text{eff}}(|S|) \simeq \kappa^2 M^4 \left[1 + \frac{\kappa^2 \mathcal{N}}{16\pi^2}\left(\ln\frac{|S|^2\kappa^2}{\Lambda^2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{12\,z^2} + \cdots\right)\right] . \qquad (6.2.10)$$

Cependant l'approximation $S \gg M$ n'est pas toujours valable car cette inflation hybride présente la particularité de pouvoir être réalisée avec des valeurs l'inflaton toujours très proches de sa valeur critique M. Il est donc nécessaire, dans le cas général, de travailler avec le potentiel complet. A partir de ce potentiel effectif, l'étude du modèle et de ses prédictions peut être fait.

Un point important à noter dans ce modèle est qu'un groupe G est brisé à la fin de l'inflation. Il est donc nécessaire que cette brisure ne produise ni monopôles ni murs de domaine afin de ne pas créer de catastrophe cosmologique. Dans le cadre de la GUT, cette brisure est une des étapes du schémas qui permet de passer de G_{GUT} à G_{MS}. Nous allons voir au chapitre 7 que cette brisure donne génériquement lieu à la formation de cordes cosmiques. Les conséquences de cette formation seront étudiées au chapitre 8.

Notons que les points forts de ce modèle inflationnaire sont nombreux [133, 67, 135] :

- Il prend en compte le couplage de deux champs nécessairement présents dans la théorie : un champ de Higgs de GUT et l'inflaton. Ce couplage est profitable aux deux mécanismes : les champs de Higgs permettent à l'inflation de se terminer tandis que le roulement lent permet de générer dynamiquement la brisure de symétrie.
- *A priori*, il n'y a pas besoin de réglage fin du paramètre de couplage κ pour pouvoir rendre compte de l'anisotropie de température observée. C'est ce que l'on montre[210] en normalisant les contributions inflationnaires scalaire et tensorielle à la mesure de COBE. Ce point sera ré-étudié au chapitre 8.
- Il est basé sur le superpotentiel le plus général qui soit (i) renormalisable (ii) invariant sous la symétrie G, et enfin (iii) invariant sous la symétrie $U(1)_R$.
- Le modèle est stable après prise en compte des corrections radiatives à une boucle.
- Les corrections de supergravité (pour une supergravité minimal c'est-à-dire avec un potentiel de Kähler $K = |\Phi_+|^2 + |\Phi_-|^2 + |S|^2)$ ne modifient pas les caractéristiques essentielles de ce modèle. Notons [134] qu'usuellement une inflation basée sur un terme F est instable dans le cadre de la supergravité car le paramètre de slow-roll η (voir chapitre 4) acquiert une contribution de l'ordre de l'unité ce qui entraîne la fin de l'inflation en roulement lent. Ceci ne se produit pas dans ce modèle grâce à la forme particulière du superpotentiel et du potentiel de Kähler. Ceci peut être considéré [134] comme un réglage fin des potentiels.

6.2.3 Inflation hybride par termes D

L'inflation hybride par termes D[5] [136, 137] possède des avantages et des inconvénients par rapport à l'inflation hybride F. Elle nécessite l'introduction d'une symétrie $U(1)_\xi$, symétrie qui ne peut être [135] un sous-groupe des groupes de GUT, si l'on veut autoriser une constante de Fayet-Iliopoulos non nulle (voir [66, 135] pour une étude sur l'origine de cette symétrie). En revanche, dans ce modèle, la supergravité ne risque pas de détruire le roulement lent (comme c'est génériquement dans le cas d'une inflation hybride F) puisque seuls les termes F contribuant au potentiel scalaire sont modifiés. Ceci est vrai pour n'importe quelle forme du potentiel de Kähler, potentiel a priori libre. Ajoutons aussi que l'inflation hybride D est naturellement implémentée dans le cadre des théories des cordes [66].

[5] En anglais on parle de *D-term inflation*.

Dans l'inflation hybride D, on introduit là encore deux superchamps de Higgs $\Phi_\pm$ dont la VEV non nulle brise une symétrie $U(1)_\xi$. Dans cette section, nous désignerons par $\phi_\pm$ les composantes scalaires des superchamps $\Phi_\pm$. Ils sont couplés à un inflaton S

$$\mathcal{W}_D = \lambda S \Phi_+ \Phi_- \ . \tag{6.2.11}$$

Les superchamps $\Phi_\pm$ et S sont de charges respectives ± 1 et 0 sous $U(1)_\xi$, et on suppose en outre que la théorie, invariante sous ce facteur abélien, possède un terme de Fayet-Iliopoulos constant ξ. Comme nous le reverrons au chapitre 8, cette inflation doit être décrite dans le cadre de la supergravité car la valeur des champs peut être non négligeable devant la masse de Planck. Dans la suite on supposera une SUGRA minimale c'est à dire avec une potentiel de Kähler

$$K = |\Phi_-|^2 + |\Phi_+|^2 + |S|^2 \ , \tag{6.2.12}$$

et une fonction cinétique de jauge $f_{ab} = \delta_{ab}$. On rappelle (voir chapitre 5) que en SUGRA, le potentiel scalaire s'écrit

$$V = \frac{e^G}{M_{\rm Pl}^4}\left[G_i (G^{-1})^i_j G^j - 3\right] + \frac{1}{2}[{\rm Re} f_{ab}(\Phi_i)]^{-1} g^2 D^2 \ , \tag{6.2.13}$$

avec

$$G = \frac{K}{M_{\rm Pl}^2} + \ln \frac{\mathcal{W}_D^2}{M_{\rm Pl}^6} \ , \quad D = \phi_i (T)^i{}_j K^j + \xi \ . \tag{6.2.14}$$

Dans ces équations et les suivantes, les indices et exposants i pour les fonctions G et K désignent des dérivations par rapport aux composantes scalaires des superchamps, à savoir

$$G^i \equiv \frac{\partial G}{\partial \phi_i} \ , \quad G_i \equiv \frac{\partial G}{\partial \phi^{i*}} \ , \quad G^i_j \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial \phi_i \partial \phi^{j*}} \ , \dots \ . \tag{6.2.15}$$

Dans le cas de l'inflation par terme D, $T = {\rm diag}(+1, -1, 0)$ et on obtient finalement [136, 137]

$$\begin{aligned} V_{\rm SUGRA}^{\rm D} = \lambda^2 \exp\left(\frac{|\phi_-|^2 + |\phi_+|^2 + |S|^2}{M_{\rm Pl}^2}\right) \\ \times \left[|\phi_+\phi_-|^2\left(1 + \frac{|S|^4}{M_{\rm Pl}^4}\right) + |\phi_+ S|^2\left(1 + \frac{|\phi_-|^4}{M_{\rm Pl}^4}\right) + |\phi_- S|^2\left(1 + \frac{|\phi_+|^4}{M_{\rm Pl}^4}\right)\right. \\ \left. + 3\frac{|\phi_-\phi_+ S|^2}{M_{\rm Pl}^2}\right] + \frac{g^2}{2}\left(|\phi_+|^2 - |\phi_-|^2 + \xi\right)^2 \ . \end{aligned} \tag{6.2.16}$$

Le déroulement de l'inflation est très similaire au cas de l'inflation hybride F. Pour des conditions initiales chaotiques $S \gg \sqrt{\xi}$, le minimum local du potentiel est une vallée définie par $\phi_+ = \phi_- = 0$ dans laquelle l'inflaton S est en roulement lent. Le potentiel à l'ordre des arbres est constant $V_0 = g^2\xi^2/2$. La brisure de supersymétrie dans la vallée inflationnaire est encore responsable d'une brisure de la dégénérescence entre les masses des composantes fermioniques et bosoniques des superchamps $\Phi_\pm$. Les masses de ces composantes peuvent être calculées à partir du potentiel Eq. (6.2.16) pour les masses bosoniques et à partir du lagrangien Eq. (5.7.90) pour les composantes fermioniques. Un potentiel effectif est alors construit à partir de la formule de Coleman-Weinberg Eq. (6.2.8). Rappelons que la formule de Coleman-Weinberg [233] a été obtenue en espace-temps de Minkowski. Cette formule est donc peu adaptée pour décrire les corrections quantiques pendant l'inflation en espace temps de de Sitter. Cependant le calcul des corrections radiative n'a pas été fait en espace-temps de de Sitter même si l'analyse de [103] est prometteuse dans cette direction. On montre au chapitre 8 que le potentiel effectif pendant la phase d'inflation s'écrit

$$V_{\rm eff}^{\rm D-SUGRA} = \frac{g^2\xi^2}{2}\left\{1 + \frac{g^2}{16\pi^2}\left[2\ln\frac{|S|^2\lambda^2}{\Lambda^2}\exp\left(\frac{|S|^2}{M_{\rm Pl}^2}\right) + (z+1)^2\ln(1+z^{-1}) + (z-1)^2\ln(1-z^{-1})\right]\right\}, \tag{6.2.17}$$

avec $z = [\lambda^2|S|^2/(g^2\xi)]\exp(|S|^2/M_{\rm Pl}^2)$.

La fin de l'inflation est provoquée lorsque l'inflaton atteint sa valeur critique $S_c = \sqrt{\xi}$, car le champ de Higgs ϕ_+ prend une VEV $\langle\phi_+\rangle_0 = \sqrt{\xi}$ et l'inflaton entre dans une phase de roulement rapide qui termine l'inflation. Le système atteint le minimum global du potentiel ($\langle\phi_-\rangle_0 = \langle S\rangle_0 = 0$, $\langle\phi_+\rangle_0 = \sqrt{\xi}$), minimum qui est nul : la SUSY est restaurée. Lorsque le champ de Higgs prend une VEV non nulle, il brise la symétrie $U(1)_\xi$ car il est chargé sous cette symétrie. La brisure de cette symétrie s'accompagne forcément de la formation de cordes cosmiques comme toute brisure d'une symétrie $U(1)$ (voir chapitre 3). Nous verrons au chapitre 8 comment utiliser cette formation de cordes pour contraindre le modèle inflationnaire.

6.3 Masse des neutrinos

6.3.1 Oscillation des neutrinos

De nombreuses expériences, notamment Superkamiokande, KamLAND, CHOOZ, ou SNO, ont mesuré le flux de neutrinos venant du soleil et venant de l'interaction des rayons cosmiques de haute énergie avec l'atmosphère. Elles ont toutes observé une oscillation des neutrinos c'est-à-dire le fait que des neutrinos changent de saveur (neutrinos μ qui devient un neutrino τ par exemple). Cela ne peut s'interpréter que s'il existe une différence entre leurs masses et que la matrice de masse n'est pas diagonale dans la base des états de saveur. Il y a alors oscillations car les états physiques sont des combinaisons linéaires des états propres de saveur. Des données venant de la cosmologie (CMB) et des désintégrations de tritium apportent des observations indépendantes. Ces observations sont les premières preuves de l'existence d'une physique au-delà du MS.

Pour décrire ces oscillation introduisons donc des états physiques ν_1, ν_2, ν_3, de masse m_i ainsi qu'une matrice de mélange U entre les états de saveurs avec $i, j = 1, 2, 3$ correspondant aux états propres de masse [112]

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\\ \nu_\tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}U_{e1} & U_{e2} & U_{e3}\\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3}\\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\\ \nu_3\end{pmatrix} \tag{6.3.18}$$

Les oscillations permettent de mesurer les grandeurs $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$, ainsi que certains angles de mélange θ_{ij} qui sont une autre manière de paramétrer la matrice U. Ainsi venant des oscillations atmosphériques et solaires respectivement on mesure

$$\begin{aligned}\Delta m_{12}^2 &= (1.4 - 3.3)\times 10^{-3}\ {\rm eV}^2\ ,\\ \Delta m_{23}^2 &= (8.1 \pm 1.1)\times 10^{-5}\ {\rm eV}^2\ .\end{aligned} \tag{6.3.19}$$

Plusieurs configurations sont compatibles avec ces observations, qui donnent lieu à trois types de scénario : le scénario hiérarchique $m_1 < m_2 \ll m_3$, le scénario hiérarchique inverse $m_1 \simeq$

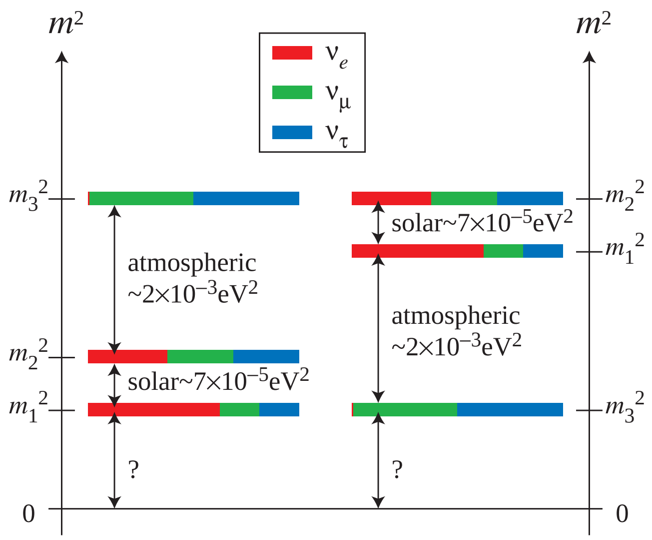

FIG. 6.2: Masses et mélanges des neutrinos dans les deux modèles, hiérarchique et hiérarchique inverse, selon les mesures d'oscillation de neutrinos atmosphérique et solaires. Figure tirée de [111].

$m_2 \gg m_3$ ou dégénéré $m_1 \simeq m_2 \simeq m_3$. Les deux premiers scénario sont schématisés sur la Fig. 6.2.

Pour le moment, les dégénérescences entre tous les paramètres de masse et de la matrice de mélange n'ont pas toutes été levées. Cependant, les limites venant de la cosmologie (expériences WMAP et SDSS) sont sensibles à la somme des masses des états physiques et permettent de contraindre [111]

$$\sum_i m_i \lesssim (0.7 - 2) \text{ eV} . \tag{6.3.20}$$

Il faut donc pouvoir expliquer (i) pourquoi les neutrinos ont une masse et (ii) pourquoi cette masse est extrêmement petite devant celle des autres fermions du MS [par exemple, pour l'électron qui est dans le même doublet, $m(e) = 511$ keV].

6.3.2 Modèles de neutrinos massifs

Pour rendre compte des observations précédente, il suffit de permettre au neutrinos d'être massif, ce qui n'est pas la cas dans le MS. La solution minimale consiste à introduire un nouveau spineur de Dirac N_R, singlet sous $SU(2)_L$. C'est ce qui peut être fait dans le MSSM ou pour étendre le modèle de Georgi-Glashow basé sur $SU(5)$. Mais dans ce cas, rien ne peut expliquer la différence de masse entre les neutrinos et les autres fermions du MS.

Dans le cadre des SUSY GUTs le mécanisme le plus naturel[6] est celui du *see-saw* [117]. Ce mécanisme est basé sur l'introduction d'un neutrino droit ν_R et l'hypothèse que les neutrinos sont des particules de Majorana (ie vérifiant $\Psi_M = \Psi_M^c$). On peut construire à partir des composantes droite et gauche d'un spineur de Dirac Ψ deux spineurs de Majorana, $\Psi_{M_L} = \Psi_L + \Psi_R^c$ et $\Psi_{M_R} = \Psi_R + \Psi_L^c$. On rappelle que les deux contributions à chacun des spineurs de Majorana ne sont pas indépendantes car liées par

$$\psi_{L,R}^c = C \left({}^t\bar{\psi}_{R,L} \right) . \tag{6.3.21}$$

[6]Le but est de ne pas devoir introduire des paramètres sans dimension anormalement petits

Les fermions de Majorana ont des termes de masse propre

$$\begin{aligned} M_L\overline{\Psi_{M_L}}\Psi_{M_L} &= M_L(\bar{\Psi}_L\Psi_R^c + h.c.)\ , \\ M_R\overline{\Psi_{M_R}}\Psi_{M_R} &= M_R(\bar{\Psi}_R\Psi_L^c + h.c.)\ . \end{aligned} \tag{6.3.22}$$

Ces termes de masse peuvent donner lieu à des processus violant le nombre leptonique. Cela sera utilisé à la section 6.4 pour la leptogénèse. Le lagrangien de masse des neutrinos comporte alors un terme de masse de Dirac (M_D) et des termes de masse de Majorana (M_L, M_R),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\nu = \bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L + \bar{\nu}_R\gamma^\mu\partial_\mu\nu_R + M_D(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_L\nu_R) \\ + \frac{M_L}{2}(\overline{\nu_R^c}\nu_L + h.c.) + \frac{M_R}{2}(\overline{\nu_L^c}\nu_R + h.c.) \end{aligned} \tag{6.3.23}$$

Introduisons deux champs $f \equiv (\nu_L + \nu_R^c)/\sqrt{2}$ et $F \equiv (\nu_R + \nu_L^c)/\sqrt{2}$. Le lagrangien précédent peut alors se récrire

$$\mathcal{L}_\nu = \bar{f}_L\gamma^\mu\partial_\mu f + \bar{F}\gamma^\mu\partial_\mu F + \begin{pmatrix}\bar{f} & \bar{F}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_L & M_D \\ M_D & M_R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f \\ F\end{pmatrix}\ , \tag{6.3.24}$$

où

$$M_\nu = \begin{pmatrix}M_L & M_D \\ M_D & M_R\end{pmatrix}$$

est appelée matrice de masse des neutrinos. Le principe du mécanisme est de supposer que

- la masse de Dirac M_D est générée par la brisure électro-faible ($M_D \sim M_{\text{lepton}}$),
- la masse de Majorana M_L est nulle,
- la masse de Majorana M_R est générée par un couplage de Yukawa avec un champ de Higgs Φ_{B-L} brisant la symétrie $U(1)_{\text{B}-\text{L}}$ à une échelle de Grande Unification (couplage $\lambda\Phi_{B-L}(\nu_L^c\nu_R + h.c.)$ d'où $M_R = \lambda\langle\Phi_{B-L}\rangle$).

Pourquoi le champ de Higgs qui donne lieu à la masse de Majorana est celui qui brise la symétrie $U(1)_{\text{B}-\text{L}}$? Si l'on introduit trois neutrinos droits de Majorana, la symétrie du secteur électro-faible est élargie [113] à $SU(2)_L\times U(1)_R\times U(1)_{\text{B}-\text{L}}$ ou un groupe qui le contient[7]. Dans ces modèles la symétrie d'hypercharge Y est une combinaison linéaire des groupes abéliens $U(1)_R$ et $U(1)_{\text{B}-\text{L}}$. Dans tous les cas cependant, les neutrinos droits portent une charge non triviale sous la symétrie $U(1)_{\text{B}-\text{L}}$ et un terme de masse de Majorana brise cette symétrie. Cette masse ne peut donc être générée qu'au moment de la brisure de la symétrie $U(1)_{\text{B}-\text{L}}$ (c'est le cas minimal) ou plus tard[8].

Pour connaître les états propres de masse, il faut diagonaliser la matrice M_ν. Les vecteurs propres sont

$$\begin{aligned} N_R &= F + \frac{M_D}{M_R}f \\ \nu' &= f - \frac{M_D}{M_R}F \end{aligned} \tag{6.3.25}$$

correspondant respectivement aux valeurs propres (il faut supposer $M_D \ll M_R$)

$$\begin{aligned} M_N &\simeq M_R \\ M_{\nu'} &\simeq -\frac{M_D^2}{M_R}\ . \end{aligned} \tag{6.3.26}$$

[7] C'est le cas notamment des modèles "droite-gauche" de la forme $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{\text{B}-\text{L}}$, groupe contenu dans le modèle de Pati-Salam $G_{\text{PS}} \equiv SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ lui même contenu dans $SO(10)$ et E_6.

[8] Il existe des modèles où la masse de Majorana est obtenue par couplage avec une symétrie horizontale $SU(2)_H$ [113].

En redéfinissant $\nu = \gamma^5\nu'$, on obtient une masse positive pour le neutrino léger

$$M_\nu \simeq \frac{M_D^2}{M_R} \ .$$

Avec des masses M_R [ou de manière équivalente M_{B-L} l'échelle de brisure de $U(1)_{\rm B-L}$] à des échelles de Grande Unification et une masse M_D de l'ordre de l'échelle électro-faible, on peut rendre compte de neutrinos légers de masses très inférieures aux autres fermions du MS. Notons que l'échelle de brisure de la symétrie $U(1)_{\rm B-L}$ est totalement inconnue. Suivant le modèle dans lequel est réalisé le mécanisme de see-saw, il est possible d'utiliser les observations sur les neutrinos légers pour prédire la masse des neutrinos lourds. Par exemple, pour le cas d'une Grande Unification basée sur $SO(10)$ ou sur $G_{\rm PS} \equiv SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$, on montre que [128]

$$\begin{aligned} M_{N_3} &\simeq M_R \simeq (0.5-1)\times 10^{15}\ \text{GeV} \\ M_{N_2} &\simeq (1-2.5)\times 10^{12}\ \text{GeV} \\ M_{N_1} &\simeq (2.5-20)\times 10^{9}\ \text{GeV}\ . \end{aligned} \tag{6.3.27}$$

Dans certains modèles issus de la compactification des théories de cordes, la symétrie $U(1)_{\rm B-L}$ peut être brisée à l'échelle du TeV. Dans ce cas, la petitesse de la masse des neutrinos légers peut être expliquée par un mécanisme de “double see-saw” [118] faisant intervenir une échelle de masse de GUT et une échelle de masse issue de la théorie des cordes.

6.4 Implémenter un mécanisme de baryogénèse

6.4.1 Asymétrie matière/anti-matière

Le simple fait que l'univers observé soit constitué uniquement de matière et non d'anti-matière nécessite l'introduction d'un mécanisme générant une asymétrie des interactions mettant en jeu les baryons et les anti-baryons si on ne veut pas devoir régler précisément les conditions initiales. Du fait que l'on a pas détecté de quantité significative d'anti-baryons, l'asymétrie est directement donné par le rapport de la densité de baryon n_B sur celle des photons n_γ, ce rapport étant donné de façon théorique par les modèles de nucléosynthèse primordiale (voir [26], chapitre 20)

$$\frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma} \simeq \eta_B \equiv \frac{n_B}{n_\gamma} = (3.4-6.9)\times 10^{-10}\ , \tag{6.4.28}$$

où $n_\gamma \sim 400/\text{cm}^3$. Cette valeur est en accord avec celle obtenue par l'analyse des données d'observations, notamment venant du CMB [143]

$$\frac{n_B}{n_\gamma} = (6.1^{+0.3}_{-0.2})\times 10^{-10}\ . \tag{6.4.29}$$

Une asymétrie matière/anti-matière peut être dynamiquement générée dans un espace en expansion si les interactions entre particules et l'évolution cosmologique vérifient les *conditions de Sakharov* :

- Existence de réactions violant le nombre baryonique B,
- Existence de réactions violant les symétries[9] C et CP,
- Etre en dehors de l'équilibre thermique.

[9]Nous avons introduit l'opérateur de conjugaison de charge C au chapitre 5. L'opérateur de parité P agit sur les spineurs de Dirac par $\Psi(x,t) \underset{P}{\longrightarrow} \Psi(-x,t)$.

6.4.2 Mécanismes de baryogénèse

Il existe principalement quatre classes de modèles de *baryogénèse* (voir [119] pour une courte présentation de chacun de ces modèles et des modèles alternatifs). Le premier est la baryogénèse électro-faible. Le MS (ou le MSSM) possède en effet tous les ingrédients pour réaliser les conditions de Sakharov, même si les nombres baryoniques et leptoniques sont conservés à basse énergie. En effet, à hautes températures, au-delà de la brisure électro-faible, des effets quantiques induisent des processus violant le nombre baryonique ("transitions de sphalérons" [123]). De plus une transition de phase électro-faible fortement du premier ordre permet un écart à l'équilibre thermique. Cependant, dans le cadre du MS, les termes de violation de CP présents dans la matrice CKM ne sont pas suffisants pour rendre compte de l'asymétrie observée. En outre, les limites inférieures sur la masse du boson de Higgs électro-faible excluent désormais ce mécanisme dans le cadre du MS. Dans le MSSM en revanche, le modèle est encore viable pour certaines régions de l'espace des paramètres, car la SUSY introduit de nouvelles sources de violation de CP. Cependant même dans ce cadre, il est difficile de générer une asymétrie aussi élevée.

Dans le second mécanisme de baryogénèse de Grande Unification, l'écart à l'équilibre thermique est réalisé lors de désintégration de particules très massives (couplées aux champs de Higgs de GUT). Les nouvelles interactions portées par les nouveaux bosons de jauge violent inévitablement le nombre baryonique et la symétrie CP. Lorsque la température passe en dessous de la masse des bosons X et Y de GUT (de masse de l'ordre de M_{GUT}), leur production n'est plus assez rapide pour maintenir l'équilibre thermodynamique et les conditions de Sakharov sont satisfaites. Cependant, on pense aujourd'hui que le mécanisme ne peut fonctionner : une phase d'inflation doit nécessairement avoir lieu, diluant ainsi toute asymétrie baryonique précédemment créée. Pour éviter une production de gravitinos incompatible avec la nucléosynthèse primordiale, la température de réchauffage post-inflationnaire doit être assez basse, de l'ordre de 10^9 GeV [120], ce qui est bien plus bas que la masse des bosons X et Y.

Le troisième mécanisme est le modèle de Affleck-Dine. Ce modèle nécessite l'existence de la SUSY car il est basé sur la dynamique des champs scalaires partenaires supersymétriques des quarks et des leptons, particules portant donc des charges baryoniques et leptoniques. Si ces champs sont dans un potentiel suffisamment plat (on a vu que la SUSY produit naturellement des potentiels plats), ils peuvent produire des baryons en nombre important par oscillation cohérente. Ce mécanisme produit en outre de la matière noire sous la forme de corps composés de squarks (*Q-balls*) interagissant avec la matière uniquement via la QCD. Ce peut être un test important de ce modèle. Un autre test est la nécessité d'un neutrino léger ultra-léger ($m_1 \sim 10^{-9}$ eV). C'est, avec le mécanisme de leptogénèse discuté ci-après, le modèle le plus plausible. Ce mécanisme est décrit en détails dans [119].

6.4.3 Baryogénèse via leptogénèse

Dans le cadre des SUSY GUTs, le modèle le plus naturel est celui de la baryogénèse via leptogénèse [121, 122], car il est basé sur les mêmes hypothèses que le see-saw décrit à la section 6.3.2. Nous en donnons les grandes lignes ci-dessous. On supposera que les ingrédients pour implémenter le see-saw sont réunis.

6.4.4 Leptogénèse thermique

Comme nous l'avons mentionné à la section précédente, les termes de masse de Majorana Eq. (6.3.22) ne conservent pas le nombre leptonique. Si trois neutrinos droits super-massifs sont introduits et si les couplages nécessaires sont présents dans le superpotentiel, l'un d'entre eux, N_1, peut se désintégrer en des paires leptons-Higgs, lorsque la température du bain thermique descend en dessous de sa masse M_1

$$\begin{aligned} N_1 &\to l + H \ , \\ N_1 &\to \bar{l} + \bar{H} \ . \end{aligned} \tag{6.4.30}$$

A l'ordre des arbres, les deux désintégrations ne créent pas d'asymétrie. Mais si l'on prend en compte les corrections quantiques, il y a génération d'une *asymétrie leptonique* proportionnelle à la partie imaginaire ϵ (terme responsable de la violation de CP) du couplage de Yukawa entre les neutrinos N_1 et le champ de Higgs

$$\begin{aligned} \Gamma_+[N_1 \to lH] &= \frac{1}{2}(1+\epsilon)\Gamma \ , \\ \Gamma_-[N_1 \to \bar{l}\bar{H}] &= \frac{1}{2}(1-\epsilon)\Gamma \ . \end{aligned} \tag{6.4.31}$$

où Γ est la largeur de désintégration totale.

La génération d'une asymétrie baryonique à partir de l'asymétrie leptonique se fait ensuite par des processus non perturbatifs, des transitions de sphalérons [123], qui se produisent dans la théorie électro-faible à haute température (entre l'échelle électro-faible et 10^{12} GeV). Ces processus violent le nombre leptonique et baryonique mais préservent $B-L$. Ainsi une asymétrie leptonique $Y_L \equiv (n_L - n_{\bar{L}})/s$ est partiellement transformée en une asymétrie baryonique Y_B. Une analyse des potentiels chimiques mis en jeu montre que [119]

$$Y_B = \alpha Y_{B-L} = \frac{\alpha}{\alpha-1} Y_L \tag{6.4.32}$$

où $\alpha = \frac{8N_\nu+4}{22N_\nu+13} = 28/79$ pour un nombre de générations de neutrinos $N_\nu = 3$.

Cette leptogénèse thermique, pour être efficace, doit se produire après l'inflation. Il est donc nécessaire que la température de réchauffement $T_{RH} \gtrsim M_1$. Il existe cependant des contraintes fortes venant de la nucléosynthèse primordiale sur cette température. Une température T_{RH} trop élevée, ie $T_{RH} \gtrsim 10^9$ GeV [120], aboutirait à une production de gravitinos incompatible avec la nucléosynthèse primordiale. Or on voit que 10^9 GeV correspond à l'ordre de grandeur du neutrinos droit le plus léger comme on le voit sur l'exemple de $SO(10)$ à l'Eq. (6.3.27). Cela entraine donc une tension dans la valeur des paramètres pour être en accord à la fois avec la masse des neutrinos legers et avec la contrainte venant des gravitinos.

6.4.5 Leptogénèse non thermique

Dans cette variante [124] du modèle précédent, le mécanisme de leptogénèse est couplé au modèle d'inflation hybride supersymétrique présenté à la section 6.2. L'intérêt est d'éviter la tension sur les paramètres du modèle décrite ci-dessus. On rappelle que le superpotentiel de l'inflation hybride F s'écrit

$$\mathcal{W}_1 = \kappa S(\Phi_+\Phi_- - \mu^2) \ , \tag{6.4.33}$$

où S est le superchamp d'inflaton et Φ_+ et Φ_- sont deux doublets de Higgs brisant une symétrie à une énergie de GUT. Dans le modèle de leptogénèse non thermique, les neutrinos de Majorana acquiert leur masse M_R par couplage avec ce superchamp de Higgs,

$$\mathcal{W}_2 = \lambda_N \Phi_+ N_R N_R \ , \tag{6.4.34}$$

ce champ de Higgs étant donc responsable de la brisure de la symétrie $U(1)_{\mathrm{B-L}}$ (*ou d'un groupe la contenant*[10]). A la fin de la phase d'inflation hybride, la brisure de symétrie induit un terme de masse pour les neutrinos droits. Lors du réchauffage post-inflationnaire, l'inflaton et le champ de Higgs oscillent et se désintègrent notamment en paires de neutrinos droits [125, 126]. C'est ensuite la désintégration de ces neutrinos qui donne lieu à la leptogénèse. La tension due aux contraintes venant des gravitinos est relaxée car, dans ce modèle, ce n'est plus la température de réchauffage post-inflationnaire qui doit être supérieure à la masse des neutrinos droits mais la masse de l'inflaton qui se désintègre en neutrinos

$$m_{\mathrm{infl}} = \sqrt{2}\,\kappa\mu \geq 2M_1 \ , \tag{6.4.35}$$

pour que le mécanisme soit cinématiquement possible. La fin du mécanisme est identique à la leptogénèse thermique. Voir [126] pour une étude large et indépendante des relations entre leptogénèse et inflation. En conclusion, on peut dire que pour une large fenêtre pour la masse du gravitino $m_{3/2} \in [100 \text{ GeV} - 1 \text{ TeV}]$, la leptogénèse non thermique ne présente aucun désaccord [126] avec les contraintes actuelles de la nucléosynthèse primordiale.

6.5 Désintégration du proton et mécanismes de protection

6.5.1 Origines de la désintégration du proton

Nous avons vu dans le chapitre 5 que, dans le cadre de la GUT, de nouveaux bosons de jauge sont nécessairement introduits et ce même pour un groupe de GUT de taille minimale [$SU(5)$]. Ces bosons étant chargés sous $SU(2)_L$ et sous $SU(3)_C$, ils transmettent des interactions pouvant violer la conservation du nombre baryonique B. Le proton n'est donc plus une particule stable et peut se désintégrer par échange de ces bosons X, Y. Evidemment, une durée de vie trop petite serait en désaccord évident avec nos observations.

Des expériences de détection de produits de désintégration de protons ou neutrons, notamment Soudan II[11] et Super-Kamiokande[12] n'ont jamais observé de désintégration significative de nucléons. Elles ont donc seulement pu mettre des limites inférieures sur leur durée de vie [128],

$$\Gamma^{-1}(p \to e^+ + \pi^0) \gtrsim 6 \times 10^{33} \text{ ans} \ , \quad \left[\sum_l \Gamma(p \to \bar{\nu}_l K^+)\right]^{-1} \gtrsim 1.9 \times 10^{33} \text{ ans} \ . \tag{6.5.36}$$

Il existe *quatre* origines possibles de désintégration du proton dans les SUSY GUTs, classifiées selon la “dimension de l'opérateur” responsable des interactions violant le nombre baryonique. Cette dimension des opérateurs désigne la dimension en masse du terme responsable de la désintégration dans le lagrangien. Elle peut se visualiser sur les graphes de Feynman en comptant le nombre de pattes fermioniques qui contribuent pour 3/2 et le nombre de pattes bosoniques qui contribuent pour 1. On trouvera une bonne présentation de trois types d'opérateurs sur les quatre dans la Ref. [128].

Tout d'abord, la Grande Unification introduit de nouveaux bosons X,Y transmettant une interaction qui viole le nombre baryonique. Le mode dominant pour ces opérateurs est $p \to e^+ + \pi^0$. Des exemples de graphes de Feynman de cette interactions sont donnés sur la

---

[10] Cette remarque permet de comprendre que la leptogénèse non thermique ne s'accompagne pas inévitablement de la formation de cordes cosmiques a priori. La brisure de la symétrie $U(1)_{\mathrm{B-L}}$ peut par exemple être réalisée par exemple lors de la brisure $SU(4)_C \to SU(3)_C$ qui ne forme pas de défauts. Tout dépend de la manière de plonger le MS dans le groupe de GUT. Voir chapitre 7.

[11] `http ://www.hep.umn.edu/soudan/` .

[12] `http ://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/sk/` .

Fig. 6.3. On voit que ces opérateurs sont de dimension 6, les quatre pattes externes contribuant pour 3/2.

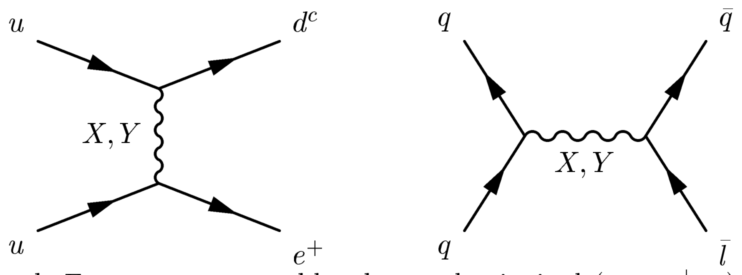

FIG. 6.3: Graphes de Feynman responsables du canal principal ($p \to e^+\pi_0$) de désintégration du proton via les opérateurs de dimension 6.

Plus les masses des bosons X et Y sont basses, plus la probabilité de ces interactions est grande et plus la durée de vie du proton est courte. On voit donc que la masse des bosons X et Y étant donnée par l'échelle de GUT, cet opérateur va permettre de mettre une limite inférieure sur l'échelle $M_{\rm GUT}$.

La deuxième classe d'opérateurs qui contribuent à la désintégration du proton sont les opérateurs [127, 26] de dimension[13] 4. Ils sont potentiellement très dangereux : ils prédisent une désintégration très rapide du proton puisqu'alors celle-ci est due à l'échange de squarks. Ceux-ci ont en effet une masse bien plus faible que la masse de GUT : elle est reliée à la brisure de la SUSY et celle-ci semble être de l'ordre de 1 TeV. Un exemple de ces opérateurs est donné sur la Fig. 6.4 ci-dessous.

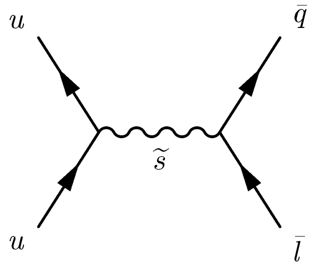

FIG. 6.4: Exemple de graphes de Feynman responsables de la désintégration du proton via les opérateurs de dimension 4.

Enfin, il existe des désintégrations du proton par échange de higgsinos, triplet de couleur. Suivant la représentation dans laquelle se trouve les higgsinos, les opérateurs diffèrent. Dans le cas "standard", les higgsinos échangés font partie des superchamps de Higgs couplés aux fermions du MS (représentation **5** et $\bar{\mathbf{5}}$ pour le cas de $SU(5)$, voir chapitre 5). Dans le cas des "nouveaux" opérateurs, les higgsinos échangés font partie des superchamps de Higgs qui donnent lieu à la masse des neutrinos droits (voir section 6.3.2). Les deux classes d'opérateurs sont d'égale importance. Ils provoquent des opérateurs de dimension[14] 5 dont un exemple dans le cas standard est donné à la Fig. 6.5.

[13] La dimension quatre se comptabilise avec les trois pattes d'un des deux vertex de la Fig. 6.4 : $4 = 3/2 + 3/2 + 1$.
[14] La dimension est donné par les contributions des pattes externes d'un demi-graphe de la Fig. 6.5. Ici on a deux squarks $\tilde{q}$ $(1+1)$ et deux quarks q $(3/2+3/2)$.

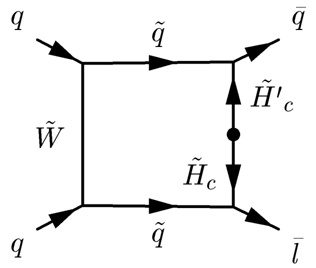

FIG. 6.5: Graphe de Feynman responsable du canal principal ($p \to e^+\pi_0$) de désintégration du proton via les opérateurs de dimension 5.

Les modes dominants via ce type d'opérateurs sont $p \to \bar{\nu}_l K^+$ et $p \to \bar{\nu}_l \pi^+$. En présence de ces opérateurs, il est nécessaire d'implémenter un mécanisme efficace de séparation doublet-triplet[15] afin de donner à ces Higgs triplets de couleur une masse de l'ordre de M_{GUT} (au chapitre 5 nous avons mentionné ce mécanisme pour expliquer qu'à basse énergie seul le doublet de Higgs soit observé.). Cela est nécessaire afin d'avoir une suppression suffisante de ce canal de désintégration. Ces opérateurs doivent être étudiés pour chaque modèle afin de calculer les prédictions de probabilité de désintégration.

6.5.2 Mécanismes de protection de la duré de vie du proton

Pour protéger le proton d'une désintégration trop rapide, deux mécanismes sont connus pour le moment. Ils permettent de limiter l'effet des opérateurs de dimension quatre et six. Ces mécanismes n'existent pas pour les opérateurs de dimension cinq. Il faudra donc regarder les prédictions pour chaque modèle.

Une unification à suffisamment haute énergie permet tout d'abord de contrôler les opérateurs $d = 6$. On peut illustrer ces contraintes dans le cas de la grande unification basée sur $SU(5)$ présentée au chapitre précédent. Dans la section 5.3 présentant le secteur de Higgs, nous avons calculé les masses des bosons X, Y par couplage avec le champ Φ_{24}

$$M_X \simeq M_Y \simeq \sqrt{\frac{25}{2}} g_5 v_1 \ , \tag{6.5.37}$$

où g_5 est la constante de couplage de $SU(5)$ et v_1 est la VEV du champ de Higgs Φ_{24}. La probabilité de désintégration est donnée par [7]

$$\Gamma(p \to e^+\pi^0) \simeq \frac{g_5^4 m_p^5}{m_X^4} \ , \tag{6.5.38}$$

où $m_p \simeq 938$ MeV désigne la masse du proton. Cette probabilité donne directement la durée de vie du proton $\tau_p \equiv \Gamma^{-1}$. Imposer $\tau_p > 6 \times 10^{33}$ ans se traduit en une limite inférieure sur la masse des bosons X, Y

$$m_{X,Y} \gtrsim 1.6 \times 10^{16} \text{ GeV} \ . \tag{6.5.39}$$

Cela impose une échelle de grande unification du même ordre de grandeur et montre que la version non supersymétrique de la grande unification ne semble pas être un modèle réaliste. Cela montre la nécessité d'une unification à une échelle de l'ordre de 2×10^{16} GeV, et motive l'existence de la SUSY. Celle-ci, en retour, suggère que la désintégration du proton pourrait être bientôt détectée.

[15] En anglais on parle de *doublet-triplet splitting*.

Concernant les opérateurs de dimension 4, il est communément proposé ([26] chapitre 16 et [127]) de conserver la R-parité non brisée à basse énergie. La R-parité [129, 130]) est une symétrie discrète Z_2 dont la valeur est donnée par

$$R = (-1)^{2S}(-1)^{3(B-L)} \; , \tag{6.5.40}$$

On peut noter que la parité des particules du MS est $+1$ tandis que celle des superpartenaires est -1. Imposer qu'elle ne soit pas brisée à basse énergie à des conséquences sur le superpotentiel du MSSM ou de la théorie en générale en interdisant certains couplages de Yukawa, tels que ceux de la forme [98, 131]

$$\mathcal{W}_{\rm NR}^{(B)} = \lambda_1 udd \; , \quad \mathcal{W}_{\rm NR}^{(L)} = \mu' L\bar{H} + \lambda_2 QLd + \lambda_3 LLe \; . \tag{6.5.41}$$

Dans les expressions précédentes, Q et L désigne les superchamps doublets de $SU(2)_L$ contenant les quark et les leptons respectivement. u, d, e désigne eux les singlets de $SU(2)_L$. Des limites expérimentales sévères existent d'ores et déjà sur les constantes de couplage de Yukawa, à savoir $\lambda_1 < 10^{-9}$, $\lambda_2, \lambda_3 < 10^{-4}$ car ces termes violent le nombre baryonique B $\left[\mathcal{W}_{\rm NR}^{(B)}\right]$ ou leptonique $\left[\mathcal{W}_{\rm NR}^{(L)}\right]$ alors que ces processus ne sont pas observés. Pour plus de détails, voir la Ref. [130].

Si la R-parité est conservée, les deux superpotentiels précédents sont interdits par symétrie, et les particules supersymétriques doivent être créées par paires, et s'annihilent par paires aussi. La première conséquence est d'interdire les opérateurs de dimension 4 puisque la réaction $q + q \to \tilde{s}$ (voir Fig. 6.4) est désormais interdite.

La R-parité interdit aussi toute désintégration d'une particule supersymétrique en un particule du MS. En conséquence la particule supersymétrique la plus légère (LSP), appelée *neutralino* car c'est une combinaison linéaire des jauginos neutres, est une *particule stable*. Cela a un grand intérêt cosmologique puisqu'elle peut dans ce cas jouer le rôle de matière noire. Pour plus de détails, consulter [102].

La symétrie Z_2 sous-groupe de $U(1)_{\rm B-L}$ peut jouer ce rôle [131] de R-parité comme le suggère l'expression de la R-parité Eq. (6.5.40). Elle peut donc exister dans des modèles basés notamment sur $SO(10)$, E_6, ou $SU(N)$ avec $N \geq 8$ puisque ces groupes contiennent $U(1)_{\rm B-L}$. Il n'est cependant pas systématique de conserver la R-parité non brisée lors de la succession de brisure de symétrie, car $U(1)_{\rm B-L}$ doit être brisée puisque ne faisant pas partie de $G_{\rm MS}$. Il faut pour cela remplir certains critères quant aux représentations de Higgs utilisées [131]. Par exemple, pour préserver la R-parité lors de la brisure du groupe $SO(10)$, la **16** ne peut être utilisée. En revanche, les représentations $\mathbf{45}, \mathbf{54}, \mathbf{126} + \overline{\mathbf{126}}, \mathbf{210}$ notamment, préservent la symétrie. Cette contrainte motive la construction de modèles de GUT basés sur des groupes contenant $U(1)_{\rm B-L}$ et l'emploi de représentations de Higgs permettant de garder non brisée la R-parité.

6.5.3 Conséquence sur les modèles de GUT

Comparons maintenant les prédictions de certains modèles de GUT aux données expérimentales [128].

Concernant tout d'abord les opérateurs $d = 6$, les versions supersymétriques de $SU(5)$ et $SO(10)$ permettent une masse d'unification suffisamment élevée pour être en accord avec les limites expérimentales.

En revanche les canaux de désintégration via les opérateurs $d = 5$ standards impliquent que le MSSM contenu dans $SU(5)$ prédit une durée de vie

$$\Gamma^{-1}(p \to \bar{\nu} K^+) \lesssim 1.2 \times 10^{31} \text{ ans} , \tag{6.5.42}$$

ce qui est exclu par les expériences. De plus, ce groupe ne contient pas la symétrie $B - L$: il ne peut donc pas posséder de R-parité qui protège le proton des opérateurs $d = 4$.

Pour le MSSM contenu dans $SO(10)$ les choses sont différentes puisque ce modèle prédit

$$\Gamma^{-1}(p \to \bar{\nu} K^+) \lesssim 1 \times 10^{33} \text{ ans} . \tag{6.5.43}$$

Cela reste en accord avec les limites expérimentales même si le modèle pourrait être exclu si la désintégration du proton n'est pas détectée dans un avenir proche [128]. Inversement, on peut dire que la GUT basée sur $SO(10)$ prédit que la désintégration du proton sera bientôt observée. Les contraintes venant nouveaux opérateurs $d = 5$ ne permettent pas d'exclure d'autres modèles.

CHAPITRE 7

Généricité des cordes cosmiques dans les GUTs SUSY (Article)

Sommaire

7.1 Présentation du travail, résultats et discussion

7.1.1 Présentation du travail

Nous avons vu dans les chapitres précédent que le cadre de la Grande Unification supersymétrique (SUSY GUTs) est un cadre intéressant et motivé pour aller au-delà du Modèle Standard (MS) pour la description de la physique des hautes énergies. Mais si l'on base la théorie sur le plongement des symétries du MS dans un groupe simple, il est nécessaire d'avoir un certain nombre de brisures de symétries. Nous avons vu au chapitre 3 qu'elles s'accompagnent de la formation de défauts topologiques. La formation de monopôles et de murs de domaine donne lieu à des catastrophes cosmologiques : cela va permettre de contraindre les schémas de brisure compatibles avec les observations cosmologiques. De plus, les cordes cosmiques ne sont pas détectées dans les données du CMB. Dans ce premier travail de thèse, nous allons chercher à quantifier la probabilité que de tels objets se forment dans le cadre des SUSY GUTs.

Pour cela nous chercherons à être le plus exhaustif possible quant aux groupes de GUT choisis pour lesquels nous étudierons tous les schémas de brisure que l'on peut construire qui permettent d'obtenir le MS à basse énergie. Tout schémas de brisure doit être basé sur un plongement précis et connu du MS dans le groupe $G_{\rm GUT}$. Nous limiterons le rang du groupe à 8 afin d'avoir un nombre fini de schémas de brisure à étudier. Avec les contraintes présentées au chapitre précédent, cela restreint l'étude aux groupes suivants : $SO(10)$, $SU(5)$, $SU(6)$, $SU(7)$, $SU(8)$, E_6, $SO(14)$, et $SU(9)$. Nous imposerons aux modèles que l'on étudie d'être en accord avec un certain nombre de contraintes observationnelles et expérimentales venant de la cosmologie (problèmes des monopôles, observations du CMB, génération d'une asymétrie baryonique) et de la physique des particules (masse des neutrinos, durée de vie du proton, phénoménologie du MS). Les mécanismes choisis pour rendre compte de ces contraintes sont les mécanismes les plus standards dans le cadre des SUSY GUTs. Ils sont présentés au chapitre 6. Ainsi, nous imposerons une phase d'inflation hybride supersymétrique après la dernière formation de monopôles, une phase de leptogénèse non thermique, et la conservation de la R-parité à basse énergie.

Une fois la liste des groupes à étudier définie, il faut lister tous les schémas de brisure de symétrie qui permettent de passer d'un univers invariant sous la symétrie initiale $G_{\rm GUT}$ et le groupe de symétrie du Modèle Standard $G_{\rm MS}$ voire $G_{\rm MS} \times Z_2$ si l'on impose que la R-parité soit non brisée à basse énergie. Illustrons le propos en choisissant une théorie basée sur $SO(10)$. L'écriture de tous les schémas de brisure admissibles est dictée par les sous-groupes que possède le groupe initial puis de chacuns des facteurs à chaque étape du schémas de brisure. Les sous-groupes maximaux des groupes utiles sont donnés en annexe A. Par exemple, $SO(10)$ peut être brisé en ses sous-groupes maximaux $SU(5) \times U(1)$ ou $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$ ou l'un de leurs sous-groupes. Pour être sur de considérer tous les schémas de brisure possible on peut dans un premier temps écrire des schémas de brisure maximaux, c'est-à-dire dans lesquels un seul facteur est brisé en un de ses sous-groupes maximaux. C'est par exemple le cas de

$$SO(10) \to 4_{\rm C}\, 2_{\rm L}\, 2_{\rm R} \to 3_{\rm C}\, 1_{\rm B-L}\, 2_{\rm L}\, 2_{\rm R} \to 3_{\rm C}\, 1_{\rm B-L}\, 2_{\rm L}\, 1_{\rm R} \to G_{\rm MS} \times Z_2 \tag{7.1.1}$$

où l'on note $SU(n)$ par n, et $U(1)$ par 1. Les indices permettent d'identifier la manière dont le groupe $G_{\rm MS}$ est plongé dans le groupe de Grande Unification ou permettent de nommer les générateurs des facteurs abéliens. On voit par exemple que le facteur $SU(3)$ de couleur du MS est contenu dans le facteur $SU(4)$ sous-groupe de $SO(10)$.

Ensuite, on doit considérer des schémas de brisure plus directs dans lesquels on réalise plusieurs étapes des schémas précédent en une seule fois. Le schémas de brisure précédent permet donc d'écrire

$$SO(10) \begin{cases} \to & 3_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 2_{\rm R}\ 1_{\rm B-L} & \to & \cdots \\ \to & 3_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 1_{\rm R}\ 1_{\rm B-L} & \to & {\rm G_{MS}}\ (Z_2) \\ \to & {\rm G_{MS}}\ (Z_2) & & \end{cases} \tag{7.1.2}$$

Il existe de nombreux autres schémas de brisures de symétrie possibles pour le groupe $SO(10)$. En effet, il existent d'autres schémas plus directs non plus à partir de $SO(10)$ mais à partir des sous-groupes de chacunes des étapes. Mais SO(10) possède aussi un second sous-groupe maximal $SU(5) \times U(1)$ avec plusieurs plongements possibles du MS, ce qui engendre de nombreux schémas maximaux comme plus directs.

Comme nous l'avons présenté à la section 5.3.4 du chapitre 5, cette démarche ne donne qu'un ensemble contenant les schémas de brisures possibles. Il faudrait pour s'assurer qu'un schémas est réaliste trouver un contenu en champs de Higgs et des potentiels pour ces champs qui permettent de réaliser les brisures de symétrie. Dans la section 5.3.4 du chapitre 5, une méthode générale a été présentée pour mettre en œuvre cette démarche.

Un second point fondamental pour ne pas écrire des schémas de brisure incompatible avec la phénoménologie des particules est de connaître les plongements du générateur d'hypercharge Y et du générateur de la symétrie $U(1)_{\mathrm{B-L}}$ noté $B-L$ et cela afin de garder non brisées les symétries du MS, ou la R-parité. L'exemple de l'Eq. (7.1.1) ne peut être écrit que si l'on sait que le générateur de l'hypercharge du MS est combinaison linéaire du générateur diagonal de $SU(2)_R$ et du générateur de $U(1)_{\mathrm{B-L}}$

$$\frac{\mathrm{Y}}{2} = \pm I^3_{\mathrm{R}} + \frac{1}{2}(\mathrm{B-L}) \ , \tag{7.1.3}$$

et que cette symétrie $U(1)_{\mathrm{B-L}}$ est contenue dans le facteur $SU(4)_{\mathrm{C}}$ et est orthogonale au facteur $SU(3)_{\mathrm{C}}$. Cela nécessite donc de connaître un ou plusieurs plongements possibles du MS dans les groupes de GUT étudiés, ce qui repose sur les études existantes de ces plongements. Tous les plongements connus que l'on a trouvé dans la littérature sont étudiés dans ce chapitre.

Une fois les schémas de brisures écrits pour tous les groupes de symétrie, la dernière étape est de calculer grace au formalisme des groupes d'homotopie rappelé au chapitre 3. La formation de défaut est dans la suite de ce chapitre noté par un chiffre au dessus des brisures de symétrie, 0,1,2 ou 3 signifiant respectivement pas de défaut, formation de monopôles, de cordes cosmiques ou de murs de domaine. Les conséquences de tous ces défauts topologiques ont été étudié au chapitre 3. Un peu à part, $2'$ signifie la formation de cordes de plongement, présentée elles aussi au chapitre 3. Elles sont a priori instables donc sans effets détectables sur la cosmologie mais des mécanismes assez génériques existent pour stabiliser leur durée de vie, et elles pourraient avoir un rôle équivalent aux cordes cosmiques topologiques si leur durée de vie est stabilisée suffisamment. C'est la raison pour laquelle leur formation est mentionnée lorsqu'aucun autre défauts ne se forment. Dans l'exemple précédent de l'Eq. (7.1.1), on obtiendra

$$SO(10) \xrightarrow{0} 4_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,2_{\mathrm{R}} \xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,1_{\mathrm{B-L}}\,2_{\mathrm{L}}\,2_{\mathrm{R}} \xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,1_{\mathrm{B-L}}\,2_{\mathrm{L}}\,1_{\mathrm{R}} \xrightarrow{2\,(2)} G_{\mathrm{MS}}(\times Z_2) \ . \tag{7.1.4}$$

La notation $\xrightarrow{a\,(b)} G_{\mathrm{MS}}(\times Z_2)$ signifie que deux modèles existent suivant que Z_2 est ou non brisée. Pour la formation de défauts topologiques, a se rapporte au cas où le groupe discret est brisé tandis que b se rapporte au cas où il ne l'est pas. Dans les deux cas pour ce modèle, il y a formation de cordes topologiques[1].

La dernière étape de l'étude est de placer un phase d'inflation hybride terminée par l'une des brisures de symétrie écrites précédemment. La seule contrainte est que cette phase doit intervenir après la dernière formation de défauts topologiques donnant lieu à des catastrophes cosmologiques. Dans ce cas, le modèle, c'est-à-dire l'ensemble d'un schémas de brisure et d'un moment pour l'inflation sera considéré comme admissible. C'est uniquement le cas pour le scénario suivant,

$$SO(10) \xrightarrow{0} 4_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,2_{\mathrm{R}} \xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,1_{\mathrm{B-L}}\,2_{\mathrm{L}}\,2_{\mathrm{R}} \xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,1_{\mathrm{B-L}}\,2_{\mathrm{L}}\,1_{\mathrm{R}} \xrightarrow[\mathrm{Infl}]{2\,(2)} G_{\mathrm{MS}}(\times Z_2) \ . \tag{7.1.5}$$

où Infl signifie que l'inflation hybride est couplée à cette brisure de symétrie.

La généricité des cordes cosmiques est alors quantifiée en comparant le nombre de modèles formant des cordes cosmiques topologiques après la phase d'inflation au nombre de modèles admissibles par les contraintes observationnelles et expérimentales.

[1] Il y a, a priori, aussi formation de cordes de plongement.

7.1.2 Résultats et discussion

Avec les hypothèses de travail listées précédemment, il y a formation de cordes cosmiques après l'inflation pour 100% des schémas de brisure. Génériquement, cette formation se produit lors de la brisure de symétrie à la fin de la phase d'inflation hybride. Ceci est même inévitable pour les groupes les plus petits tels que $SO(10)$, ou $SU(6)$. En conséquence, la masse par unité de longueur de ces cordes cosmiques est directement reliée à l'échelle de masse de l'inflation. Elle est donc nécessairement de l'ordre de la masse de Grande Unification ce qui peut avoir des conséquences sur les modèles inflationnaires. Voir l'étude du chapitre 8.

Parmi tous les schémas de brisure données dans la suite de ce chapitre, il faut mentionner qu'un certain nombre d'entre eux sont plus réalistes que d'autres. En effet, nous n'avons pas fait une étude complète de chacun afin de voir quels sont le nombre et les représentations des champs de Higgs nécessaires pour les réaliser. Il est plus réaliste de considérer des modèles contenant un nombre limité de champs de Higgs et avec des champs dans des représentation de taille réduite. En effet, plus le modèle contient un grand nombre de champs et des représentations de grande taille, moins le modèle est prédictif.

Il est intéressant et instructif, pour comprendre l'origine de ces résultats, d'étudier leur dépendance dans les hypothèses faites. On peut en effet considérer d'autres mécanismes de baryogénèse que celui de la leptogénèse non thermique voire même relaxer certaines hypothèses même si des mécanisme alternatifs n'existent pas encore. Les comptages ont été refaits pour E_6 en relaxant deux hypothèses qui semblaient cruciales.

On pourrait penser que l'emploi de la leptogénèse non thermique biaise l'analyse puisque, pour ne pas diluer l'asymétrie produite par la désintégration des neutrinos droits, il faut briser la symétrie $U(1)_{\mathrm{B-L}}$ après l'inflation. On a déjà mentionné au chapitre précédent que la brisure de $U(1)_{\mathrm{B-L}}$ peut a priori se produire lors de brisure qui ne forment pas de cordes cosmiques (lors de $SU(4)_{\mathrm{C}} \to SU(3)_{\mathrm{C}}$ par exemple). Si on autorise une leptogénèse thermique, tout en conservant la R-parité non brisée à basse énergie, on obtient 98% de schémas de E_6 qui forment des cordes après la phase d'inflation.

La seconde hypothèse que l'on peut relaxer est celle qui impose que la R-parité est non brisée à basse énergie. Il faut alors absolument trouver un nouveau mécanisme de protection de la durée de vie du proton vis à vis des opérateurs de dimension 4 (voir chapitre 6). Nous ne connaissons pas de tel mécanisme mais supposons que l'on peut en trouver. Dans ce cas, et en autorisant en outre une leptogénèse thermique, on obtient 80% de schémas de E_6 qui forment des cordes après la phase d'inflation.

Les autres hypothèses n'ont a priori pas d'effet sur le résultat. On voit donc que la formation des cordes cosmiques est principalement due à la manière dont les symétries du Modèle Standard sont plongées dans le groupe de Grande Unification. Cela montre que la formation de cordes cosmiques est **générique.**

L'étude présentée ci-après est publiée dans *Physical Review D* en 2003 [1].

How generic is cosmic string formation in SUSY GUTs

Rachel Jeannerot[2]
The Abdus Salam ICTP, strada costiera 11, 34100 Trieste, Italy
Jonathan Rocher[3]
Institut d'Astrophysique de Paris, $\mathcal{G}\mathbb{R}\varepsilon\mathbb{C}\mathcal{O}$, FRE 2435-CNRS, 98bis boulevard Arago, 75014 Paris, France
Mairi Sakellariadou[4]
Division of Astrophysics, Astronomy, and Mechanics, Department of Physics, University of Athens, Panepistimiopolis, GR-15784 Zografos (Athens), Hellas
and *Institut d'Astrophysique de Paris, 98bis boulevard Arago, 75014 Paris, France*

Abstract

We study cosmic string formation within supersymmetric grand unified theories. We consider gauge groups having a rank between 4 and 8. We examine all possible spontaneous symmetry breaking patterns from the GUT down to the standard model gauge group. Assuming standard hybrid inflation, we select all the models which can solve the GUT monopole problem, lead to baryogenesis after inflation and are consistent with proton lifetime measurements. We conclude that in all acceptable spontaneous symmetry breaking schemes, cosmic string formation is unavoidable. The strings which form at the end of inflation have a mass which is proportional to the inflationary scale. Sometimes, a second network of strings form at a lower scale. Models based on gauge groups which have rank greater than 6 can lead to more than one inflationary era ; they all end by cosmic string formation.

Pacs 12.10.Dm, 98.80.Cq, 11.27+d

7.2 Introduction

The interface between high energy physics and cosmology is very fruitful. Both high energy physics and cosmology enter the description of the evolution of the early universe, at microscopic and macroscopic levels respectively. However, cosmological models such as inflation must originate from the particle physics model describing interactions of the constituents of the early universe plasma. Cosmology provides the ground to test fundamental theories at energies far beyond the ones accessible by any terrestrial accelerator.

The particle physics Standard Model (SM) has been tested to a very high precision. However, evidence of neutrino masses [138, 139, 140] proves that one must go beyond this model. The simplest explanation of the data is that neutrino get masses via the see-saw mechanism [117] which results from the breaking of some left-right symmetry. This is the first hint suggesting an extension of the SM gauge group, although this is not strictly needed since right-handed neutrinos could be present without invoking any extra gauge symmetry. At present, Supersymmetry (SUSY) is the only viable theory for solving the gauge hierarchy problem. In addition, in the supersymmetric standard model the gauge coupling constants of the strong, weak and electromagnetic interactions, with SUSY broken at the TeV-scale, meet in a single point at around $M_{\rm GUT} \simeq (2-3)\times 10^{16}$ GeV. This strengthens the idea that there may be a gauge group G with a single gauge coupling constant, which describes the interactions between particles above the scale $M_{\rm GUT}$. These are the so-called Supersymmetric

[2]E-mail :rachelj@ictp.trieste.it
[3]E-mail :rocher@iap.fr
[4]E-mail :msakel@cc.uoa.gr

Grand Unified Theories (SUSY GUTs). From the point of view of cosmology, SUSY GUTs can provide the scalar field needed for inflation, they can explain the matter-antimatter asymmetry of the universe, and they can provide a candidate for cold dark matter, namely the lightest superparticle (LSP).

An acceptable SUSY GUT model should be in agreement with both the standard model and cosmology. The grand unified gauge group must be broken at the GUT scale down to the standard model gauge group. The GUT gauge group must therefore contain the SM gauge group $\mathrm{SU}(3)_{\mathrm{C}} \times \mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}$, and it must predict the phenomenology that has been observed at accelerators [141]. Constraining SUSY GUTs at accelerators is a challenge which will be undertaken in the future. On the other hand, even if accelerators can find SUSY particles and constrain the Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM), they will probably say only very little about GUTs and symmetry breaking patterns. Luckily, a number of new astrophysical data can be used to constrain the various schemes of Spontaneously Symmetry Breaking (SSB) from a grand unified gauge group down to the standard model.

In building SUSY GUTs, one faces the appearance of undesirable stable topological defects, mainly monopoles, but also domain walls, according to the Kibble mechanism [142]. To get rid of the unwanted topological defects, one employs the mechanism of inflation. Inflation is also the most promising mechanism for generating density perturbations which lead to structure formation and Cosmic Microwave Background (CMB) temperature anisotropies, as confirmed by the recent Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) measurements [143]. On the other hand, inflation usually requires fine-tuning of its parameters, leading to the naturalness issue. These fine-tuning problems can be circumvented in SUSY models. In principle, we could build an inflationary scenario using a random scalar field with a given potential, which has nothing to do with either the SM, or a gauge theory containing the SM. This could come, for example, from a hidden sector. An interesting possibility is that inflation comes from extensions of the SM, such as a GUT model, which is then self-consistent : monopoles form, inflation originates from the GUT itself and solves the monopole problem, and in addition it fits with CMB data, as well as other data such as the baryon asymmetry which is generated by oscillations of the inflaton field. Models along these lines have been constructed [173, 174, 175]. This scheme is the philosophy which we follow here.

Given an inflationary scenario, we investigate the topological defects which may be produced at subsequent phase transitions. We consider all possible symmetry breaking schemes and examine which kind of topological defects are left after inflation, if any. In all schemes, only local topological defects can arise, since we only consider gauge symmetries. If monopoles or domain walls are produced after inflation, then these SSB patterns are discarded, since these defects should have closed the universe. The only acceptable SSB patterns are those which, after the inflationary stage, either lead to the formation of cosmic strings or to no defects at all. If cosmic strings (topological defects) are formed, we should examine their type (Nambu-Goto strings, superconducting strings) and then check their compatibility with the constraint coming from the recent measurements of the CMB temperature anisotropies [143], [144]. If embedded strings are formed, then we should examine their stability (they are in general unstable under small perturbations). The symmetry breaking patterns leading to the formation of textures cannot be constrained, since local textures decay very fast [145] and therefore play no role in cosmology.

We organize the rest of the paper as follows : In Section 2, we discuss the theoretical framework of our study. We discuss the various kinds of topological defects which may form, and the criterion for their formation. We briefly review the standard model for inflation in SUSY GUTs, and we comment on leptogenesis. In Section 3, we discuss the choice of the gauge groups which we consider. In Section 4, we list all possible SSB patterns from the selected GUT gauge groups down to the standard model gauge group. We review the most common embeddings of the standard model in each GUT. Each embedding leads to specific SSB patterns. We list them all, giving the type of defect which is formed at each phase transition. We then discuss which of the SSB patterns are allowed from cosmology and we count for each group the number of schemes where strings are formed after inflation, as compared to the number of schemes with no defect. We round up with our conclusions in Section 5. Finally, in Appendix A, we list the maximal sub-algebras which we employ for the groups considered in our study.

7.3 Theoretical framework

7.3.1 Topological Defects

The assumption of a GUT implies that our universe has undergone a series of phase transitions associated with the spontaneous symmetry breaking of the GUT gauge group $\mathrm{G}_{\mathrm{GUT}}$ down to the standard model gauge group $\mathrm{G}_{\mathrm{SM}} = \mathrm{SU}(3)_{\mathrm{C}} \times \mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}$ at $M_{\mathrm{GUT}} \sim 3 \times 10^{16}$ GeV. The last phase transition of the SSB pattern is the electroweak phase transition which takes place at $M_{\mathrm{EW}} \sim 10^2$ GeV as G_{SM} breaks down to $\mathrm{SU}(3)_{\mathrm{C}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{Q}}$. There might be one, more than one, or none intermediate symmetry group between $\mathrm{G}_{\mathrm{GUT}}$ and G_{SM}. The important cosmological consequence of these SSB schemes is the formation of topological defects via the Kibble mechanism [142].

If we have a system with a topologically non-trivial vacuum manifold, then fields in different spatial regions fall into different ground states, and thus SSB may be followed by the emergence of a network of topological defects during the associated phase transition. (For a review on topological defects the reader is referred to Refs. [146], [147]). This leads to the GUT monopole problem : all GUTs based on simple gauge groups lead to the formation of topologically stable monopoles whose density is about 10^{18} times greater than the experimental limit. Homotopy theory tells us that topologically stable monopoles always form. Moreover, a wide variety of other defects may also form, leading to important astrophysical and cosmological implications.

In this paper, we study the formation of topological defects in realistic GUTs considering all possible SSB patterns of a given group. Allowing for standard hybrid inflation we can then throw away all schemes which lead to the formation of unwanted defects and check whether strings form at the end of inflation or after inflation has completed.

Let us consider the symmetry breaking of a group G down to a sub-group H of G. In order to see whether topological defects form during the phase transition associated with the breaking of G down to H, we can study the homotopy groups $\pi_{\mathrm{k}}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$ of the vacuum manifold $\mathcal{M}_n = \mathrm{G}/\mathrm{H}$. If $\pi_{\mathrm{k}}(\mathrm{G}/\mathrm{H}) \neq 0$, then topological defects are formed ; if $k = 0$ then domain walls form, if $k = 1$ then cosmic strings form, if $k = 2$ then monopoles form, and if $k = 3$ then textures appear.

Spontaneous symmetry breaking patterns which lead to the formation of monopoles or domain walls are ruled out since they are incompatible with our universe, except if an inflationary era took place after their formation. The reason for which monopoles and domain walls are undesirable, is that in both cases they soon dominate the energy density of our universe and close it. The textures are not studied in this work because in the local case, their relative contribution to the energy density of the universe decreases rapidly with time [145]. Thus, we cannot constrain SSB patterns with textures because they cannot play a significant role in cosmology.

In addition to topological defects, a gauge field theory may have non-topological defects. It is possible to obtain a sub-manifold $\mathcal{M}_m$ $(m < n)$, of the original vacuum manifold $\mathcal{M}_n$, by freezing out some combinations of the original fields. If the topology of the $\mathcal{M}_m$ is such that the theory admits topological defects, then one can create configurations of the unconstrained fields which correspond to topological defects. Provided these configurations satisfy the equations of motion of the unconstrained theory, then embedded defects appear [148], [149]. More precisely, if we have a symmetry breaking G$\rightarrow$ H and $\mathrm{G_{emb}} \rightarrow \mathrm{H_{emb}}$, with $\mathrm{G_{emb}} \subset$ G and $\mathrm{H_{emb}} \subset$ H, we examine whether $\pi_k(\mathrm{G_{emb}}/\mathrm{H_{emb}}) \neq 0$, which is the criterion for the appearance of embedded $(2-k)$-dimensional defects.

Embedded defects are not topologically stable and in general they are not dynamically stable either [150]. However, a number of mechanisms have been proposed in the literature, which may stabilize the embedded strings and therefore, they may play an important role in cosmology. For example, the pion string in the theory of strong interactions, and the electroweak Z-string in the standard electroweak theory can be stabilized in the early universe via finite-temperature plasma effects [151]. In addition, an electroweak Z-string can be also stabilized by the presence of bound states of a complex scalar field [152]. Embedded gauge monopoles always suffer [153] from a long range instability (the Brandt-Neri-Coleman instability [154]), and therefore, we do not consider them.

7.3.2 Inflation in Supersymmetric Unified Theories

Inflation is at present the most appealing theory which describes the early universe. Inflation essentially consists of a phase of accelerated expansion which took place at a very high energy scale. Even though only special initial conditions eventually lead to successfully inflationary cosmologies, it has been argued [155] that these initial conditions are precisely the likely outcomes of quantum events occurred before the inflationary era. Thus, inflation is itself generic [155]. In addition, when the principles of quantum mechanics are taken into account, inflation provides a natural explanation for the origin of the large scale structures and the associated temperature anisotropies in the CMB radiation. With the increasing data on the CMB, which seem to confirm an early inflationary era [143], one needs to find the most natural framework for inflation which can match the data. Inflation is most naturally realized in SUSY models. (For a review on inflation in SUSY models the reader in referred to Ref. [157].) The most natural scenario for inflation, up-to-date, is the so-called standard hybrid inflation (the reader is referred to Refs. [158], [134], [159]).

Let us summarize how inflation arises naturally in SUSY GUTs based on gauge groups with rank greater or equal to five. By naturally we mean that no extra-field, nor any extra-symmetry, are needed for inflation except those needed to build the GUT itself. In order to satisfy COBE data the inflationary scale has to be $\sim 10^{15.5}$ GeV [159] which is close to the GUT scale. Note that the problem of initial conditions is not completely solved, but the argument is that all the fields would come out from the quantum gravity period taking values which are of the order of the cut-off scale of the ultimate theory, which can be taken to be the Planck scale $M_{\rm Pl}$ or the string scale [160]. The horizon problem is solved for coupling constants of the order of 10^{-2}. The spectral index is predicted to be very close to one (we usually get $n \simeq 0.98$). Supergravity (SUGRA) corrections can be kept small [161].

The superpotential for hybrid inflation in SUSY GUTs is given by :

$$W = \alpha S\overline{\Phi}\Phi - \mu^2 S \ , \tag{7.3.6}$$

where S is a GUT singlet, $\overline{\Phi}$ and Φ are GUT Higgs fields in complex conjugate representations which lower the rank of the group by one unit when acquiring non-zero VEV, and α and μ are two constants (μ has dimensions of mass) which can both be taken positive with field redefinition. The superpotential given in Eq. (7.3.6) is the most general superpotential consistent with an R-symmetry under which $W \rightarrow e^{i\beta} W$, $\overline{\Phi} \rightarrow e^{-i\beta}\overline{\Phi}$, $\Phi \rightarrow e^{i\beta}\Phi$, and $S \rightarrow e^{i\beta}$.

The potential has two minima : one valley of local minima, for S greater than its critical value $S_{\rm c} = \mu/\sqrt{\alpha}$, $\overline{\Phi} = \Phi$, and one global supersymmetric minimum (V=0) at $S = 0$ and

$\overline{\Phi} = \Phi = \mu/\sqrt{\alpha}$. Imposing chaotic initial conditions, i.e. $S \gg S_c$, the fields quickly settle down the valley of local minima. The potential $V = \mu^4 \neq 0$ and inflation can take place. SUSY is broken and the one-loop corrections to the effective scalar potential can be calculated [159]. This gives a little tilt to the scalar potential which helps the scalar field S to slowly roll down the valley of minima. The last 50 or so e-folds of inflation take place much below the Planck scale. When S falls below its critical value S_c, inflation stops by a waterfall regime, and the fields quickly settle down to the global minimum of the potential and supersymmetry is restored. SSB occurs at the end of inflation ($\overline{\Phi}$ and Φ acquire non zero VEVs after inflation, or at most during the last e-fold ; this is GUT model dependent). This is very important for cosmology because it implies that topological defects (if any) form at the end of inflation with a mass per unit length $\propto \mu/\sqrt{\alpha}$. Henceforth no monopole nor domain walls should be associated with the SSB induced by the $\overline{\Phi}$ and Φ VEVs. They should not form at any subsequent phase transition either. We shall use this argument to constraint all SSB of a given G_{GUT}. It was already done for supersymmetric SO(10) models [162]. It was found that among all the SSB patterns from SO(10) down to the standard model gauge group involving at most one intermediate symmetry breaking scale, only three are in agreement with observations. The proton is "stable" (R-parity is conserved) and no unwanted defects form after inflation. In all these three SSB patterns, cosmic strings form at the end of inflation. They imply a mixed scenario with inflation and cosmic strings to account for the CMB temperature anisotropies. We shall generalize this to all GUTs predicting neutrinos masses via the see-saw mechanism.

Let us comment on CMB anisotropies from inflation and cosmic strings in SUSY GUTs models. In these scenarios, the multipole moments C_l add quadratically and they are proportional to the same scale $\Lambda_{\rm infl} = \mu/\sqrt{\alpha}$ with a proportionality constant which is model dependent [163]. This can be rewritten as $C_l^{\rm tot} = (1-x)C_l^{\rm infl} + xC_l^{\rm str}$ where $C_l^{\rm infl}, C_l^{\rm str} \propto (\Lambda_{\rm infl}/M_{\rm Pl})$. Here x depends on the CMB normalization for each scenario, on the coupling constant α of the trilinear term $\alpha S\overline{\Phi}\Phi$ in Eq. (7.3.6), on the dimension of Φ, and on the GUT itself. Local cosmic string predictions are unfortunately not very well established in detail and range from an almost flat spectrum [164] to a single wide bump at $\ell \sim 500$ [165] with extremely rapidly decaying tail. Recent numerical simulations of local string networks [166] confirm the existence of a bump at around $\ell \sim 600$. It seems that the microphysics of the string network plays a crucial role in the height and in the position of the bump [167], [168]. Studies of mixed perturbation models (inflation + cosmic strings) impose strong constraints on the maximum contribution of the string network [165, 144]. The initial condition is also not taken into account (the distribution of strings forming at the end of inflation and their micro-structure may be very different from those concerning strings formed at standard phase transitions). What we can conclude is that the effect of cosmic strings on the CMB power is to lower the height of the first acoustic peak, and to displace it to smaller angular scales, as well as to wash out any secondary peaks [169]. In addition, topological defects induce non-Gaussian statistics, due to their non-linear evolution [169].

So far, we have been discussing F-term inflation. D-term inflation [170] requires the existence (in addition to the GUT) of a U(1) factor with a non-vanishing Fayet-Iliopoulos term which can only appear if $TrQ \neq 0$, where Q stands for the U(1) charge [171]. D-term inflation occurs in the following way : If one assumes an appropriate set of discrete and continuous symmetries, the linear term in Eq. (7.3.6) can be forbidden. The VEV of the fields $\overline{\Phi}$ and Φ can be then forced to equal the Fayet-Iliopoulos term which also sets the scale of inflation. This is the so-called D-term inflation [172]. The main advantage of D-term inflation is that it works for general Khäler potentials. However, if this extra U(1) is anomalous coming from string theory (this would be the best way to justify its presence), the F-term is calculated using the Green-Schwarz mechanism and would be at the string scale which is far too high for inflation. At the end of D-term inflation cosmic strings always form (this is easy to understand since we are breaking a U(1) gauge symmetry). In this case they satisfy the Bogolomny bound and their contribution to the C_l's is $x = 0.75$ [163]. The string contribution is smaller in the F-term case [163] and as mentioned above, model dependent. We conclude that D-term inflation is not consistent with observations [144], but it does not concern us anyway, since we are interested in GUTs based on simple gauge groups.

Since topological defects always form at the end of standard hybrid inflation, it is easy to conclude that at least one intermediate symmetry breaking is needed between $\mathrm{G_{GUT}}$ and $\mathrm{G_{SM}}$. One way to avoid the monopole problem in single step breaking GUTs is to consider the first non-renormalisable term in Eq. (7.3.6) [173]. Its effect on the scalar potential is to "shift" the inflationary valley of local minima to a valley in which the GUT Higgs have already a non-vanishing VEV, implying that the GUT is already broken during inflation so that no topological defects form at the end of inflation [173], [174]. Note that non-renormalisable terms of all orders are in general present in the superpotential if no R-symmetry is invoked to cancel them. However, their effect on the scalar potential is usually negligible. The way one can solve the monopole problem with SUSY GUTs hybrid inflation has been discussed in Ref. [175].

We thus assume standard hybrid inflation which can only occur when the rank of the group is lowered by (at least) one unit. We can then discuss how frequently cosmic strings form at the end of inflation with a mass proportional to the inflationary scale as discussed above, so that both inflation and cosmic strings contribute to the CMB temperature anisotropies. We point out that for GUTs based on gauge groups with rank strictly greater than five, more than one stage of inflation can occur. This could lead to a multiple inflationary scenario with or without cosmic strings at each stage. If more than one stage of the SSB pattern lowers the rank of the group, there can be a succession of short bursts of inflation [176] which occur at different scales below the Planck scale and leave behind a distinctive signature in the spectrum of the generated scalar density perturbations [177]. In our scenarios, i.e. in the selected SSB which lead to various stages of inflation as well as to cosmic string formation at the end of each stage, multiple inflation combined with multiple string networks arises.

7.3.3 Leptogenesis

A cosmological scenario is incomplete if it does not discuss baryogenesis which has to occur after inflation has taken place. GUT baryogenesis is washed out by inflation and the window left for electroweak baryogenesis is very small. The most appealing scenario today for baryogenesis is that of leptogenesis [121] which requires non-zero neutrino masses. This scenario is strongly favored since the discovery of non-zero neutrino masses [138, 139, 140]. (For a review on baryogenesis scenarios and on the cosmological arguments which they render most of them unlikely, the reader is refered to Ref. [182].)

The most economical way for getting neutrino masses is the see-saw mechanism [117]. This requires the existence of SM gauge singlets (the right-handed neutrinos), which must get masses around $M_{\mathrm{R}} \sim 10^{14}$ GeV from data on neutrino oscillations [138, 139, 140]. This means, that there exist a superpotential mass term for the right-handed neutrinos of the form $M_{\mathrm{R}} N_i N_j$, where $i, j = 1, 2, 3$ and M_{R} is a 3×3 mass matrix. The N_i's are SM singlets which couple with the MSSM lepton doublets L and electroweak up-type Higgs H_{u} via the superpotential term $h_{ij} l_i H_{\mathrm{u}} N_j$, where h_{ij} is a 3×3 complex Yukawa matrix. This gives rise to a non-zero mass matrix M_ν for the left-handed neutrinos. The basic idea of letogenesis [121], is that when the universe cools down and its temperature falls below $T \sim M_{\mathrm{R}}$, the right-handed (s)neutrinos stop being in thermal equilibrium with the surrounding plasma and decay into (s)leptons and electroweak Higgs (higgsinos) ; lepton number and CP are violated [183]. A net lepton asymmetry is produced which is then transformed into a baryon asymmetry via sphaleron transitions, which are effective between 10^{12} and 10^{2} GeV [123]. The reheating temperature in supersymmetric models is bounded by above, i.e. $T_{\rm RH} < 10^{10}$ GeV, to avoid an overproduction of gravitinos which would overclose the universe.

The most effective way for leptogenesis is therefore non-thermal. This happens for example if the inflaton field decays into right-handed neutrinos and sneutrinos (see for example Ref. [184]). The resulting lepton asymmetry is then proportional to the reheating temperature, inversely proportional to the inflaton mass, and depends on neutrino mass parameters. Constraints from successful inflation, reheating and neutrino masses can be satisfied. In these scenarios, the right-handed neutrino masses come from a superpotential term $\kappa_{ij}\Phi N_i N_j$, where the GUT Higgs field Φ is identified with the GUT Higgs field entering the inflationary superpotential given in Eq. (7.3.6). This is the same Higgs field which breaks B-L (B and L are respectively baryon and lepton numbers) in GUTs, predicting right-handed neutrinos. Such GUTs contain a $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{B-L}}$ gauge symmetry and the scale of neutrino masses is proportional to the B-L breaking scale.

Another non-thermal process for leptogenesis is via decaying B-L cosmic strings [185]. The Higgs field responsible for string formation is the same Higgs field which is used to break B-L. Since it gives mass to the right-handed neutrinos, there are right-handed neutrino zero modes trapped in B-L cosmic string cores. These are released when cosmic string loops decay and leptogenesis takes place. If the superpotential given in Eq. (7.3.6) is used for inflation, as well as to break B-L, then B-L cosmic strings form at the end of inflation. Such models were discussed in Ref. [186]. In this case both processes contribute to the lepton asymmetry of the universe : the non-thermal process from reheating after inflation and the decay of cosmic strings.

In any case, the SSB patterns which can explain the baryon asymmetry of the universe have the B-L gauge symmetry broken at the end or after inflation. If inflation takes place at the B-L breaking scale, both non-thermal scenarios will compete, somehow in the same way that both strings and inflation can contribute to CMB anisotropies. It would be very interesting to calculate in which proportion they contribute to the net baryon asymmetry of the universe today.

7.4 Grand Unified Theories

GUTs can solve many of the SM problems, such as the quantization of the electric charge, the quarks and leptons masses, and the origin of neutrino masses. On the other hand, SUSY solves the gauge hierarchy problem. In the MSSM with SUSY broken at around 10^3 GeV the strong, weak, and electromagnetic gauge coupling constants run with energy and reach the same value at $M_{\rm GUT} \sim 3\times 10^{16}$ GeV. Hence SUSY GUTs can describe particle interactions at energies above $M_{\rm GUT}$ and it must be broken down to the standard model gauge group. In this section, we select GUT gauge groups which lead to the correct SM phenomenology without fine-tuning [178], [179], [180].

A single value for the three gauge coupling constants of the standard model can be obtained with a simple group or with a group which is the direct product of n identical simple groups with the addition of a discrete symmetry Z_n. Simple groups are divided into four infinite families, $\mathrm{SU}(n+1), \mathrm{SO}(2n+1), \mathrm{Sp}(2n)$ and $\mathrm{SO}(2n)$, where n denotes the rank of the group. In addition there are five simple exceptional groups, $\mathrm{G}_2, \mathrm{F}_4, \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8$, where the index corresponds to the rank of the group. The basic requirement for a GUT is that it must contain the standard model gauge group $\mathrm{G_{SM}} = \mathrm{SU}(3)_{\mathrm{C}} \times \mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}$ as a sub-group. Its rank must therefore be greater or equal to 4, which is the rank of $\mathrm{G_{SM}}$. Simple groups of rank 4 are SU(5), SO(9), Sp(8), SO(8), F_4 and we can add the semi-simple group $\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(3)$. Among these groups of rank 4, only SU(5) and $\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(3)$ have complex representations, which are needed in order to describe electroweak interactions. However, $SU(3) \times SU(3)$ cannot describe particles of integer and fractional charge and therefore it is also excluded. Thus, the only group of rank 4 which remains is SU(5) [178].

In selecting GUT gauge groups, we have two additional constraints : the group must include a complex representation which is necessary to describe the standard model fermions, and it must be anomaly free. In principle, $SU(n)$ may not be anomaly free [181] ; more precisely it depends on the chosen fermionic representation [178]. We assume that the $SU(n)$ groups which we use have indeed a fermionic representation that certifies that the model is anomaly free. With these constraints taken into account (we do not yet require see-saw mechanism for neutrino masses), only $SO(4n+2)$ with $n \geq 2$, $SU(n)$ with $n \geq 5$, and E_6 can be kept. We also point out that minimal SUSY SU(5) is ruled out by proton lifetime measurements.

The last constraint comes from neutrino masses. The fairly recent discovery of neutrino oscillations at Superkamiokande [138] implies that neutrino have a mass. The Sudbury Neutrino Observatory (SNO) [139] results and the KamLAND [140] direct measurement of neutrino mixing have confirmed the existence of non zero neutrino masses. Since the standard model does not predict the existence of mass for the neutrino, we must go beyond. The simplest possibility is to add a singlet which plays the role of right-handed neutrino. One can also add a triplet of Higgs to the SM. But neutrino masses are predicted in GUTs which contain a $U(1)_{B-L}$ gauge symmetry [117]. The requirement of see-saw mechanism is our next constraint on the choice of the group. We point out that these models can also automatically lead to R-parity conservation [131] and baryogenesis via leptogenesis [121]. SUSY GUT models that we shall select at the end are self-consistent : they predict neutrino masses and R-parity conservation, they solve their own monopole problem with inflation, and at the end of inflation baryogenesis via leptogenesis can take place.

Regarding the upper bound on the rank, we limit our study to groups with rank, r, less than or equal to 8. Clearly, the choice of the maximum rank is in principle arbitrary. The choice of $r \leq 8$ could, in a sense, be motivated by the Horava-Witten [187] model, based on $E_8 \times E_8$. Each factor E_8 (rank $r = 8$) can be seen as confined in one brane. Thus, within a four-dimensional theory (no extra dimensions), the rank can be limited to $r = 8$. To be more precise, within the framework of five consistent string theories in ten-dimensions (i.e., type I open strings, type IIA and IIB closed strings and the two closed heterotic strings), the rank of the gauge group is bounded to $r \leq 22$ [188]. However, it is at present believed that the five string theories are related by strong-weak coupling dualities, and they can be seen as different limits of one underlying theory, the M-theory. In this context, one gets non-perturbative strings which have their own non-perturbative gauge group, thus enhancing, by a really a lot, the maximum rank required in perturbation theory [188] (a few years ago, the upper bound of the rank was found to be 10^5 [189]). Even though we limit our study to $r \leq 8$, we believe that we still capture the main results. Indeed, higher rank groups lead (as one can see in the next sections) to similar SSB patterns as the one considered for groups of smaller rank. At last, but not least, a fully exhaustive analysis is clearly impossible.

7.5 Spontaneous Symmetry Breaking Patterns

In the previous section, we showed that a number of constraints restrict the choice of symmetry groups G_{GUT}. In this section, we study all possible spontaneous symmetry breaking patterns from G_{GUT} down to the standard model gauge group G_{SM} (or $G_{SM} \times Z_2$) and we look for defect formation. Here Z_2 is a sub-group of the $U(1)_{B-L}$ gauge symmetry which is contained in various gauge groups such as SO(10), E(6) and SU(8). It plays the role of R-parity. Recall that R-parity in SUSY forbids all dimensions 3 and 4 (even dimension 5) baryon and lepton number violating operators, therefore forbidding fast proton decay. This discrete

Z_2 symmetry can be left unbroken down to low energy when appropriate representations are used to implement the SSB pattern [131]. R-parity is thus an automatic consequence of SUSY GUTs which contain $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{B-L}}$. Only models with unbroken Z_2 at low energy are consistent with the proton lifetime measurements. Therefore when it appears in a SSB scheme, we keep it unbroken down to low energy.

We only consider maximal regular sub-groups [180]; they are listed explicitly in Appendix 7.7. We disregard special maximal sub-groups because it is then really non trivial to get G_{SM} with the correct phenomenology. We write down SSB schemes which are consistent with both group theory and particle physics phenomenology. Some of the SSB schemes may be extremely complicated for model building. For example, non-trivial Higgs representations may be needed. In fact, in model building with a minimal set of Higgs, we do not usually get many intermediate SSB scales. Also, in going beyond one or two intermediate SSB scales, the model loses its predictability. However, this is beyond the scope of the systematic search we are aiming to.

For each group, there may be different ways of embedding G_{SM} in a given maximal sub-group. We use different indices to refer to the embedding that we consider. The three indices $\mathrm{C}, \mathrm{L}, \mathrm{Y}$ stand for Color, Left and Hypercharge respectively, but we use more generally the index C (respectively L) when $\mathrm{SU}(n)_{\mathrm{C}} \supset \mathrm{SU}(3)_{\mathrm{C}}$ (respectively $\mathrm{SU}(n)_{\mathrm{L}} \supset \mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}$). We use several other indices which correspond to different possible embeddings of G_{SM} in maximal sub-groups of $\mathrm{G}_{\mathrm{GUT}}$. They are explained below when we list the various SSB patterns for each group. The definition of the weak hypercharge is given where needed. The microstructure of cosmic strings is very much dependent on these assignments, which can imply different cosmological and astrophysical effects such as superconductivity, non-thermal production of baryons, lepton asymmetry or dark matter.

In order to simplify the notation, we write $4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}$ which stands for $\mathrm{SU}(4)_{\mathrm{C}} \times \mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}} \times \mathrm{SU}(2)_{\mathrm{R}}$, $3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}}$ for $\mathrm{SU}(3)_{\mathrm{C}} \times \mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}} \times \mathrm{SU}(2)_{\mathrm{R}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{B-L}}$, etc. We also use the numbers $1, 2, 2', 3$ over an arrow to distinguish the type of gauge defect which is formed during the corresponding phase transition : 1 stands for monopoles, 2 for topological cosmic strings, $2'$ for embedded strings and 3 for domain walls ; 0 indicates that no defect forms. If the number is given in brackets, it stands for the type of defect formed during the SSB of the same gauge group down to the same sub-group $\times\ Z_2$. As an example, $\mathrm{G} \stackrel{1\ (1,2)}{\rightarrow} \mathrm{H}\ (Z_2)$, means that monopoles form when G breaks down to H, while both monopoles and cosmic strings form when G breaks down to $\mathrm{H} \times Z_2$. If (Z_2) appears but there is no number in brackets, it is because the Z_2 appeared during a previous transition and the type of defect which forms in the SSB with unbroken Z_2 is identical the one without it. Finally, $\mathrm{G} \rightarrow \ldots$ means that the SSB patterns of G down to G_{SM} have already been given.

7.5.1 Discrete Symmetries

We briefly discuss various discrete symmetries which may appear during the SSB patterns. The Z_2 sub-group of $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{B-L}}$ which plays the role of R-parity is the only discrete symmetry that we shall consider in the SSB patterns. It must be there by naturalness for keeping the proton lifetime above the experimental limits, since we do not consider the existence of any other symmetry than $\mathrm{G}_{\mathrm{GUT}}$ at the GUT scale.

Nevertheless, we point out that some discrete Z_n symmetries may be left unbroken when the rank of the group is lowered. This depends on the Higgs representation which is used to implement the SSB. However, only two discrete symmetries, the standard Z_2 parity and one Z_3 parity, are anomaly free and can remain unbroken at low energy [190]. (Note that by adding some gauge singlets and/or doublets two more Z_3 could be allowed.) Also, in order to get the Z_3 symmetry some very high Higgs dimensional representations are needed [191].

For example, in order to get a residual Z_3 from E_6, one has to choose a 3003-dim Higgs representation. To simplify our work, we disregard these Z_n. They must be broken at some stage during the SSB pattern, so that they are broken today. From a cosmological point of view, when these discrete symmetries break, unwanted domain walls form. In a full model, they must therefore appear and be broken before inflation.

Another discrete symmetry, Z_2^{C}, can also be left unbroken when Pati-Salam or Left-Right symmetry groups appear. This leads to the formation of Z_2-strings which get connected via domain walls when Z_2^{C} breaks [192]. (This is not coming from the breaking of a gauge U(1) symmetry and hence does not enter in the comments above.) The Z_2^{C} symmetry is also known as D-parity [193]. The scale of breaking of Z_2^{C} and $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{R}}$ may be, in principle, separated. We discuss all the SSB patterns for SUSY SO(10) with and without unbroken D-parity at high scale. Although the unbroken D-parity may also appear in E_6 models, for reasons of simplification, we do not discuss it. The important issue is that it must be broken before inflation takes place.

7.5.2 SU(5)

The discussion of SU(5) GUT is very short, since SU(5) has rank 4 and can only break directly down to the standard model gauge group. This SSB leads to the formation of topologically stable monopoles which are inconsistent with observations. One way to solve the monopole problem in SUSY SU(5) is to introduce an extra singlet and to give non-trivial initial conditions to the fields in the Higgs potential [194]. In the following section we discuss GUT gauge groups with rank greater or equal to five.

7.5.3 SO(10)

SO(10) is a gauge group of rank 5, which contains as maximal sub-groups $\mathrm{SU}(5)\times\mathrm{U}(1)$ and the Pati-Salam gauge group $\mathrm{G_{PS}}=\mathrm{SU}(4)_{\mathrm{C}}\times\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{R}}\times\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}$, where $\mathrm{SU}(4)_{\mathrm{C}}\supset\mathrm{SU}(3)_{\mathrm{C}}\times\mathrm{U}(1)_{\mathrm{B-L}}$.

In order to give explicit definition for the hypercharge, we consider the following decomposition [195]

$$\mathrm{SO}(10)\supset\mathrm{SU}(5)\times\mathrm{U}(1)_{\mathrm{V}}\supset\mathrm{SU}(3)_{\mathrm{C}}\times\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}\times\mathrm{U}(1)_{\mathrm{Z}}\times\mathrm{U}(1)_{\mathrm{V}}. \tag{7.5.7}$$

There are two possible assignments for the hypercharge Y that reproduce the SM and they depend on whether it is only included in SU(5) or also in SO(10). In the first case

$$\frac{Y}{2}=Z. \tag{7.5.8}$$

It is used for SSB via the Georgi-Glashow model [196] ; we add no subscript to SU(5). In the second case

$$\frac{Y}{2}=-\frac{1}{5}(Z+V), \tag{7.5.9}$$

and it is used for the breakings via the flipped SU(5) model [197], in which case we add the subscript F, i.e. we write 5_{F}. In SO(10), all the standard model fermions of each family plus a right-handed neutrino belong to the 16-dimensional representation. The decomposition of the 16 under SU(5) and $\mathrm{SU}(5)_{\mathrm{F}}$ is given in Refs. [196, 197].

Thus, there are two ways of embedding $\mathrm{SU}(5)\times\mathrm{U}(1)_{\mathrm{V}}\supset\mathrm{SU}(3)_{\mathrm{C}}\times\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}\times\mathrm{U}(1)_{\mathrm{Z}}$ in minimal SO(10) GUT, but there is only one way for $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{R}}$ [195]. Here V is related to the third component I_{R}^3 of $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{R}}$ and to B − L, which is contained in SO(10) by

$$\mathrm{V}=-4I_{\mathrm{R}}^3-3(\mathrm{B}-\mathrm{L})\ , \tag{7.5.10}$$

and to Z by

$$\mathrm{Z} = -I_{\mathrm{R}}^{3} + \frac{1}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{L}) \ . \tag{7.5.11}$$

Thus, in the first case,

$$\frac{\mathrm{Y}}{2} = -I_{\mathrm{R}}^{3} + \frac{1}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{L}) \ , \tag{7.5.12}$$

while in the second case

$$\frac{\mathrm{Y}}{2} = I_{\mathrm{R}}^{3} + \frac{1}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{L}) \ . \tag{7.5.13}$$

We list below the SSB schemes of SO(10) via SU(5) sub-groups. We indicate the type of defect(s) formed at each phase transition

$$\mathrm{SO}(10) \left\{ \begin{array}{llll} \xrightarrow{1} & 5\ 1_{\mathrm{V}} & \left\{ \begin{array}{llll} \xrightarrow{2\ (2)} & 5\ (Z_2) & \xrightarrow{1} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) \\ \xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{Z}}\ 1_{\mathrm{V}} & \xrightarrow{2\ (2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) \\ \xrightarrow{1,2\ (1,2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) & & \end{array} \right. & \\ \xrightarrow{1} & 5_{\mathrm{F}}\ 1_{\mathrm{V}} & \xrightarrow{2'\ (2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) \\ \xrightarrow{0\ (2)} & 5\ (Z_2) & \xrightarrow{1} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) \end{array} \right. \tag{7.5.14}$$

In Ref. [198] it has already been shown that if a 126-dimensional Higgs field is used, SO(10) is broken down to $\mathrm{SU}(5)\times Z_2$ and stable cosmic strings arise. However, since the next SSB leads to monopole formation, this model is incompatible with cosmology.

SO(10) can also break via the left-right symmetric groups $\mathrm{G_{PS}} \supset \mathrm{SU}(3)_{\mathrm{C}} \times \mathrm{SU}(2)_{\mathrm{R}} \times \mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{B-L}}$, in which case the assignment of the hypercharge is given by Eq. (7.5.13). As explained in the previous section, a discrete symmetry know as D-parity (noted as Z_2^{C}) can appear, leading to the formation of walls bounded by strings ; such configurations are not problematic for cosmology. However, if inflation takes place before the formation of domain walls, then these would become cosmologically catastrophic ; this situation is forbidden. Another Z_2 appears when SO(10) is breaking via $\mathrm{G_{PS}}$ [192] ; indeed, it is not SO(10) but its universal covering group Spin(10) which is really broken to $[(\mathrm{Spin}(6) \times \mathrm{Spin}(4))/Z_2](\times Z_2^{\mathrm{C}})$ (We remind to the reader that $\mathrm{SU}(4) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \sim \mathrm{Spin}(6) \times \mathrm{Spin}(4)$.) The quotient Z_2 results from the non-trivial intersection of Spin(6) and Spin(4) and implies the formation of monopoles.

The SSB patterns of $\mathrm{G_{PS}}$ and $\mathrm{G_{PS}}$ with D-parity down to $\mathrm{G_{SM}}\ (Z_2)$ are respectively given by

$$4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}} \left\{ \begin{array}{lll} \xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \left\{ \begin{array}{llll} \xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2\ (2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) \\ \xrightarrow{2'\ (2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) & & \end{array} \right. \\ \xrightarrow{1} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}} & \left\{ \begin{array}{llll} \xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2\ (2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) \\ \xrightarrow{2'\ (2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) & & \end{array} \right. \\ \xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2\ (2)} \ \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) \\ \xrightarrow{1\ (1,2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) & \end{array} \right. \tag{7.5.15}$$

and

$$4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ Z_2^{\mathrm{C}} \left\{ \begin{array}{lll}
\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}}\ Z_2^{\mathrm{C}} & \left\{ \begin{array}{lll} \xrightarrow{3} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \longrightarrow \ \cdots \\ \xrightarrow{1,3} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2\ (2)} \ \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) \\ \xrightarrow{2',3\ (2,3)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) & \end{array} \right. \\
\xrightarrow{1} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ Z_2^{\mathrm{C}} & \left\{ \begin{array}{lll} \xrightarrow{3} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}} & \longrightarrow \ \cdots \\ \xrightarrow{1,3} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2\ (2)} \ \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) \\ \xrightarrow{3\ (2,3)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) & \end{array} \right. \\
\xrightarrow{3} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}} & \longrightarrow \ \text{Eq. (7.5.15)} \\
\xrightarrow{1} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}} & \longrightarrow \ \cdots \\
\xrightarrow{1,3} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \longrightarrow \ \cdots \\
\xrightarrow{1,3} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2\ (2)} \ \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{1,3\ (1,2,3)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2). &
\end{array} \right. \tag{7.5.16}$$

The SSB schemes of SO(10) via the left-right groups with associated defect formation are

$$\mathrm{SO}(10) \left\{ \begin{array}{lcll}
\xrightarrow{1} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.15)} \\
\xrightarrow{1,2} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ Z_2^{\mathrm{C}} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.16)} \\
\xrightarrow{1,2} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ Z_2^{\mathrm{C}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1,2} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}}\ Z_2^{\mathrm{C}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2\ (2)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{1\ (1,2)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) & &
\end{array} \right. \tag{7.5.17}$$

The SSB patterns listed above and the type of defect indicated above the arrows, contain all the information one needs to address the question of whether cosmic strings (topological or embedded) are expected to exist in models which are compatible with both particle physics and cosmology. The acceptable models must be consistent with proton lifetime measurements, solve the GUT monopole problem with inflation, and explain the baryon asymmetry of the universe. Inflation takes place when the rank of the group is lowered and non-thermal leptogenesis (i.e. B-L breaks at the end of inflation) is efficient. For GUTs based on gauge groups which have rank less or equal to five such as SO(10) or SU(6), in each SSB pattern, there is one single choice for the phase transition where hybrid inflation can take place. In SO(10), non-thermal leptogenesis always takes place at the end of inflation. On the other hand, for GUTs based on gauge groups which have rank greater than five, there may be more than one choice for the phase transition which leads to inflation. In these GUTs where inflation can take place at different stages in the SSB patterns, B-L is not necessarily broken at the end of inflation. Models satisfying all constraints must lead to efficient leptogenesis ; B-L must be broken at the end of inflation.

Since in standard hybrid inflation SSB takes place at the end of inflation, in the schemes which are consistent with cosmology from a defect point of view, inflation can only take place during a given phase transition, with no monopoles or domain walls at this or at a subsequent phase transition.

For SO(10), we find that there are 68 SSB patterns which do not lead to formation of unwanted defects after inflation and all these models lead to the formation of topological strings or embedded ones, at the end of inflation. More precisely, we find that there are 34 SSB patterns with topological strings and unbroken matter parity, i.e. $\mathrm{G_{SM}} \times Z_2$. There are 21 SSB patterns leading to the formation of topological strings, but with broken R-parity. Finally, there are 13 SSB schemes with embedded strings. In SO(10), when embedded strings are formed, R-parity is always broken. In all these models, B-L is broken at the end of inflation and leptogenesis is efficient. As discussed earlier, the proton lifetime measurements require unbroken R-parity. There are therefore only 34 SSB patterns which satisfy all the constraints and they all lead to the formation of topological cosmic strings at the end of inflation.

7.5.4 SU(6)

SU(6) is the second group of rank 5. The maximal sub-groups of SU(6) are given in Table 7.7. Recall that SU(6) does not contain B-L and, therefore it cannot accommodate the data on neutrino oscillations. There are only few possibilities for the spontaneous symmetry breaking patterns from SU(6) down to the $\mathrm{G_{SM}}$. We list them below, indicating also the type of defects, if any, formed at each phase transition.

$$
\mathrm{SU}(6)\left\{
\begin{array}{lll}
\xrightarrow{1}\ 5\ 1_6 & \left\{\begin{array}{ll} \xrightarrow{2}\ 5 & \xrightarrow{1}\ \mathrm{G_{SM}} \\ \xrightarrow{1}\ 3_\mathrm{C}\ 2_\mathrm{L}\ 1\ 1 & \xrightarrow{2}\ \mathrm{G_{SM}} \\ \xrightarrow{1,2}\ \mathrm{G_{SM}} & \end{array}\right. \\
\xrightarrow{1}\ 4_\mathrm{C}\ 2_\mathrm{L}\ 1 & \left\{\begin{array}{ll} \xrightarrow{1}\ 3_\mathrm{C}\ 2_\mathrm{L}\ 1\ 1 & \xrightarrow{2}\ \mathrm{G_{SM}} \\ \xrightarrow{2'}\ \mathrm{G_{SM}} & \end{array}\right. \\
\xrightarrow{1}\ 3_\mathrm{C}\ 3_\mathrm{L}\ 1 & \left\{\begin{array}{ll} \xrightarrow{1}\ 3_\mathrm{C}\ 2_\mathrm{L}\ 1\ 1 & \xrightarrow{2}\ \mathrm{G_{SM}} \\ \xrightarrow{2'}\ \mathrm{G_{SM}} & \end{array}\right. \\
\xrightarrow{1}\ 3_\mathrm{C}\ 2_\mathrm{L}\ 1\ 1 & \xrightarrow{2}\ \mathrm{G_{SM}} & \\
\xrightarrow{0}\ 5 & \xrightarrow{1}\ \mathrm{G_{SM}} & \\
\xrightarrow{1}\ \mathrm{G_{SM}} & &
\end{array}\right. \tag{7.5.18}
$$

Following the same approach as in the case of SO(10), one finds that there are six cosmologically allowed SSB schemes (from a defect point of view). They all lead to the formation of topological strings or embedded ones, at the end of inflation. There are four schemes with topological strings and two with embedded ones. However, SU(6) does not contain $\mathrm{U(1)_{B-L}}$, data on neutrino oscillations cannot be accommodated without extension of the minimal version and R-parity is not there. Thus, minimal SU(6) is not an acceptable group for particle physics.

7.5.5 E_6

E_6 is a group of rank 6 and it has three regular maximal sub-groups which can accommodate the standard model

$$\mathrm{SO(10) \times U(1)_{V'}}$$

$$\mathrm{SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_{(R)}}$$

$$\mathrm{SU(6) \times SU(2)}$$

We study the SSB patterns of E_6 via each of them in the following sections. (We follow the notation of Ref. [195]).

Breaking $\mathbf{E}_6$ via $\mathrm{SO}(10)\times\mathrm{U}(1)$

Let us start with $\mathrm{E}_6 \supset \mathrm{SO}(10)\times\mathrm{U}(1)_{\mathrm{V}'}$ and $\mathrm{SO}(10)\supset\mathrm{SU}(5)\times\mathrm{U}(1)_{\mathrm{V}}$. There are three possible assignments for the hypercharge Y which reproduce the SM depending on whether $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}\subset\mathrm{SU}(5)$, or $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}\subset\mathrm{SO}(10)$, or $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}\subset\mathrm{E}_6$. They are respectively given by [195]

$$\frac{Y}{2}=Z \tag{7.5.19}$$

$$\frac{Y}{2}=-\frac{1}{5}(Z+V) \tag{7.5.20}$$

$$\frac{Y}{2}=-\frac{1}{20}(4Z-V-5V') \tag{7.5.21}$$

So the $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}$ with hypercharge given in Eq. (7.5.19) is only contained in SU(5) and is valid for the breakings through the Georgi-Glashow model. The hypercharge in Eq. (7.5.20) is contained in SO(10) and is the one appearing in the breakings through flipped SU(5). Finally the last assignment of Y in Eq. (7.5.21) correspond to $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{Y}}\subset\mathrm{E}_6$. This is the sub-group which appears in the breaking of E_6 through the E-twisted SU(5) model for example. We distinguish the SU(5) of each of these three cases by writing it as 5, 5_{F}, or 5_{E} respectively. The SSB patterns for $5\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V}'}$ and $5_{\mathrm{F}}\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V}'}$ are respectively given by

$$
5\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V}'}\left\{\begin{array}{lll}
\xrightarrow{2\ (2)} & 5\ 1_{\mathrm{V}'}\ (Z_2) & \left\{\begin{array}{llll}\xrightarrow{2} & 5\ (Z_2) & \xrightarrow{1} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2)\\ \xrightarrow{1} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ 1_{\mathrm{V}'}\ (Z_2) & \xrightarrow{2} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2)\\ \xrightarrow{1,2} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) & & \end{array}\right.\\
\xrightarrow{1} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \left\{\begin{array}{llll}\xrightarrow{2} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ 1_{\mathrm{V}} & \xrightarrow{2\ (2)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2)\\ \xrightarrow{2\ (2)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ 1_{\mathrm{V}'}\ (Z_2) & \xrightarrow{2} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2)\end{array}\right.\\
\xrightarrow{2} & 5\ 1_{\mathrm{V}} & \longrightarrow\quad \cdots\\
\xrightarrow{1,2\ (1,2)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) &
\end{array}\right. \tag{7.5.22}
$$

where the hypercharge is given by Eq. (7.5.19), and

$$
5_{\mathrm{F}}\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V}'}\left\{\begin{array}{llll}
\xrightarrow{2} & 5_{\mathrm{F}}\ 1_{\mathrm{V}} & \xrightarrow{2'\ (2)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2)\\
\xrightarrow{2,2'\ (2)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) & &
\end{array}\right. \tag{7.5.23}
$$

where the hypercharge is given by Eq. (7.5.20). In the E-twisted case the hypercharge is given by Eq. (7.5.21) and $5_{\mathrm{E}}\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V}'}$ can only break down to $\mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2)$.

The SSB patterns with $\mathrm{E}_6\supset\mathrm{SO}(10)\times\mathrm{U}(1)_{\mathrm{V}'}\supset\mathrm{SU}(5)\times\mathrm{U}(1)_{\mathrm{V}}\times\mathrm{U}(1)_{\mathrm{V}'}$ are therefore given by

$$
\mathrm{E}_6 \xrightarrow{1} 10\ 1_{\mathrm{V}'} \left\{
\begin{array}{llll}
\xrightarrow{2} & 10 & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} & 5\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.22)} \\
\xrightarrow{1} & 5_{\mathrm{F}}\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.23)} \\
\xrightarrow{1} & 5_{\mathrm{E}}\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \xrightarrow{2'\ (2)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{0\ (2)} & 5\ 1_{\mathrm{V}'}\ (Z_2) & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1,2} & 5\ 1_{\mathrm{V}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{2\ (2)} & 5\ (Z_2) & \xrightarrow{1} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{1} & 5_{\mathrm{F}}\ 1_{\mathrm{V}} & \xrightarrow{2'\ (2)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{1} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ 1_{\mathrm{V}} & \xrightarrow{2\ (2)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{1\ (1,2)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ 1_{\mathrm{V}'}\ (Z_2) & \xrightarrow{2} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{1} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) & &
\end{array}
\right. \tag{7.5.24}
$$

SO(10) in $\mathrm{E}_6 \supset \mathrm{SO}(10) \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{V}'}$ can also break via SU(4) × SU(2) × SU(2) which can be the Pati-Salam group G_{PS}, or $\mathrm{SU}(4)_{\mathrm{C}'} \times \mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}} \times \mathrm{SU}(2)_{\mathrm{G}}$ [199]. In the first case, $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{V}'}$ is orthogonal to G_{SM}, and the hypercharge assignment is exactly the same as in the SO(10) case (Eq. (7.5.13)). In the second case, the hypercharge is given by

$$
Y = \frac{1}{4}V' - \frac{1}{12}C' \tag{7.5.25}
$$

where C' is the fifteenth generator of $\mathrm{SU}(4)_{\mathrm{C}'}$.

The SSB patterns with $\mathrm{E}_6 \supset \mathrm{SO}(10) \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{V}'} \supset \mathrm{SU}(4) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{V}'}$ with associated defects are

$$
\mathrm{E}_6 \xrightarrow{1} 10\ 1_{\mathrm{V}'} \left\{
\begin{array}{llll}
\xrightarrow{1,2} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.27)} \\
\xrightarrow{0} & 4_{\mathrm{C}'}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{G}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.28)} \\
\xrightarrow{1} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.15)} \\
\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}
\right. \tag{7.5.26}
$$

where

$$
4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{V}'}\ \left\{
\begin{array}{lll}
\xrightarrow{2} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}} & \longrightarrow\ \text{Eq. (7.5.15)} \\
\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \left\{
\begin{array}{lll}
\xrightarrow{2} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2\ (2)}\ \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{2\ (2)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}} 1_{\mathrm{V}'}\ (Z_2) & \xrightarrow{2}\ \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{2\ (2)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) &
\end{array}\right. \\
\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \left\{
\begin{array}{lll}
\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \longrightarrow\ \cdots \\
\xrightarrow{2} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \longrightarrow\ \cdots \\
\xrightarrow{2'\ (2)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}} 1_{\mathrm{V}'}\ (Z_2) & \xrightarrow{2}\ \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{1,2} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2\ (2)}\ \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2)
\end{array}\right. \\
\xrightarrow{1} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}} 1_{\mathrm{V}'} & \left\{
\begin{array}{lll}
\xrightarrow{2} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}} & \longrightarrow\ \cdots \\
\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \longrightarrow\ \cdots \\
\xrightarrow{2'\ (2)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}} 1_{\mathrm{V}'}\ (Z_2) & \xrightarrow{2}\ \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{1,2} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2\ (2)}\ \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{2\ (2)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) &
\end{array}\right. \\
\xrightarrow{1\ (1,2)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}} 1_{\mathrm{V}'}\ (Z_2) & \xrightarrow{2}\ \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{1,2} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \longrightarrow\ \cdots \\
\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2\ (2)}\ \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{1,2\ (1,2)} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ (Z_2) &
\end{array}\right.
\tag{7.5.27}
$$

and

$$
4_{\mathrm{C}'}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{G}}\ 1_{\mathrm{V}'}\ \left\{
\begin{array}{lll}
\xrightarrow{1} & 4_{\mathrm{C}'}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{G}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \left\{
\begin{array}{ll}
\xrightarrow{2} & 4_{\mathrm{C}'}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{V}'} \xrightarrow{2'} \mathrm{G}_{\mathrm{SM}} \\
\xrightarrow{2'} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}
\end{array}\right. \\
\xrightarrow{0} & 4_{\mathrm{C}'}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \xrightarrow{2'}\ \mathrm{G}_{\mathrm{SM}} \\
\xrightarrow{2'} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}} &
\end{array}\right.
\tag{7.5.28}
$$

There are also more direct schemes with these embeddings :

$$
E_6 \left\{ \begin{array}{llll}
\xrightarrow{1} & 5\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V'}} & \longrightarrow & \text{Eq.(7.5.22)} \\
\xrightarrow{1} & 5_{\mathrm{F}}\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V'}} & \longrightarrow & \text{Eq.(7.5.23)} \\
\xrightarrow{1} & 5_{\mathrm{E}}\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V'}} & \xrightarrow{2'\ (2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{1} & 5\ 1_{\mathrm{V}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} & 5\ 1_{\mathrm{V'}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{0} & 5 & \xrightarrow{1} & \mathrm{G_{SM}} \\
\xrightarrow{1} & 5_{\mathrm{F}}\ 1_{\mathrm{V}} & \xrightarrow{2'\ (2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{1} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{V'}} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.27)} \\
\xrightarrow{1} & 4_{\mathrm{C'}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{G}}\ 1_{\mathrm{V'}} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.28)} \\
\xrightarrow{1} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.15)} \\
\xrightarrow{1} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{V'}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} & 4_{\mathrm{C'}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{V'}} & \xrightarrow{2'} & \mathrm{G_{SM}} \\
\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}}\ 1_{\mathrm{V'}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}}\ 1_{\mathrm{V'}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2\ (2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{1} & \mathrm{G_{SM}}\ 1_{\mathrm{V}} & \xrightarrow{2\ (2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{1\ (1,2)} & \mathrm{G_{SM}}\ 1_{\mathrm{V'}}\ (Z_2) & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{1\ (1,2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) & &
\end{array} \right. \qquad (7.5.29)
$$

E(6) is a group of rank six, and therefore there are a priori two possible choices for the onset of inflation in each SSB pattern. We consider first the SSB schemes which are compatible with observations from a defect point of view and then we add the constraint coming from leptogenesis. We recall that for non-thermal leptogenesis, B-L must break at the end of inflation. Our results are the following : we find that there are in total 382 SSB patterns which are consistent from a defect point of view, 184 leading to topological strings and conserved R-parity, 146 with topological strings and broken R-parity and 51 with embedded strings. There is 1 SSB scheme with no defect fomation after the inflationary era ; however R-parity is broken. Once non-thermal leptogenesis constraint is included, there remain 146 schemes with topological strings and conserved R-parity, 101 with topological strings and broken R-parity and 51 with embedded strings. The total number of SSB patterns which satisfy all constraints is 146. All of them lead to the formation of topologically stable cosmic strings whose mass per unit length can be computed and is proportional to the inflationary scale.

Breaking E_6 via $\mathrm{SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R}$

We proceed with $\mathrm{E_6 \supset SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R \supset SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_{Y_L} \times SU(3)_R}$. There exist three different SU(2) sub-groups of $\mathrm{SU(3)_R}$, namely $\mathrm{SU(3)_R \supset SU(2)_R \times U(1)_{Y_R}}$, $\mathrm{SU(3)_R \supset SU(2)'_R \times U(1)_{Y'_R}}$ and $\mathrm{SU(3)_R \supset SU(2)_E \times U(1)_{Y_E}}$. Following Ref. [195], we use the notation $\mathrm{SU(2)_{(R)}}$ which can stand for any of the the three groups $\mathrm{SU(2)_R}$, $\mathrm{SU(2)'_R}$, or $\mathrm{SU(2)_E}$. Identically, $\mathrm{U(1)_{Y_{(R)}}}$ can stand for $\mathrm{U(1)_{Y_R}}$, or $\mathrm{U(1)_{Y'_R}}$ or $\mathrm{U(1)_{Y_R}}$.

There are again three possible assignments for the hypercharge which are given in Eqs. (7.5.19), (7.5.20) and (7.5.21). They can also be expressed in terms of $I^3_{(\mathrm{R})}$, the third component of

$SU(2)_{(R)}$, and Y_L, and $Y_{(R)}$, the quantum numbers of $U(1)_{Y_L}$ and $U(1)_{Y_{(R)}}$ (we refer the reader to Ref. [195] for details).

If $U(1)_{B-L} \subset E_6$ is imposed, there are also three possible assignments of B-L [195] :

$$\mathrm{B-L} = -\frac{1}{5}(V-4Z) = \frac{2}{3}Y_L + \frac{2}{3}Y_R \ , \tag{7.5.30}$$

or

$$\mathrm{B-L} = \frac{1}{20}(16Z+V+5V') = \frac{2}{3}Y_L + \frac{2}{3}Y'_R \ , \tag{7.5.31}$$

or

$$\mathrm{B-L} = -\frac{1}{20}(8Z+3V-5V') = \frac{2}{3}Y_L + \frac{2}{3}Y_E \ . \tag{7.5.32}$$

It was shown in Ref. [195] that among these $3 \times 3 = 9$ possible assignements for the hypercharge Y and B-L only 6 are consistent with the standard model because $U(1)_{B-L}$ and $U(1)_Y$ cannot be orthogonal to the same $SU(2)_{(R)}$ sub-group of $SU(3)_R$. The possible relations between Y, and B-L can be expressed in terms of $I^3_{(R)}$. We have the following 6 possibilities :

$$\frac{Y}{2} = -I^3_R + \frac{1}{2}(\mathrm{B-L}) = -I^{3'}_R + \frac{1}{2}(\mathrm{B-L}) \ , \tag{7.5.33}$$

where B − L is respectively given by Eqs. (7.5.30), (7.5.31),

$$\frac{Y}{2} = I^3_R + \frac{1}{2}(\mathrm{B-L}) = -I^3_E + \frac{1}{2}(\mathrm{B-L}) \ , \tag{7.5.34}$$

where B − L is respectively given by Eqs. (7.5.30), (7.5.32), and

$$\frac{Y}{2} = -I^{3'}_R + \frac{1}{2}(\mathrm{B-L}) = I^3_E + \frac{1}{2}(\mathrm{B-L}) \ , \tag{7.5.35}$$

where B − L is respectively given by Eqs. (7.5.31), (7.5.32).

In the SSB patterns of E_6 via $SU(3)^3$ there will therefore often appear the intermediate symmetry group $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_{(R)} \times U(1)_{Y_L} \times U(1)_{Y_{(R)}}$. This intermediate group can break down to $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_{(R)} \times U(1)_{B-L}$ and the SSB patterns which follow are just a generalisation of those written previously for $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$.

The SSB of $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_{(R)} \times U(1)_{Y_L} \times U(1)_{Y_{(R)}}$ down to G_{SM} with associated defects formation are given by

$$3_C\ 2_L\ 2_{(R)}\ 1_{Y_L}\ 1_{Y_{(R)}} \left\{ \begin{array}{lll} \xrightarrow{1} & 3_C\ 2_L\ 2_{(R)}\ 1_{B-L} & \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{1}\ 3_C\ 2_L\ 1_{(R)}\ 1_{B-L} \xrightarrow{2\ (2)} G_{SM}\ (Z_2) \\ \xrightarrow{2'\ (2)}\ G_{SM}\ (Z_2) \end{array} \right. \\ \xrightarrow{1} & 3_C\ 2_L\ 1_{(R)}\ 1_{Y_{(R)}}\ 1_{Y_L} & \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{2}\ 3_C\ 2_L\ 1_{(R)}\ 1_{B-L} \xrightarrow{2\ (2)} G_{SM}\ (Z_2) \\ \xrightarrow{2\ (2)}\ G_{SM}\ (Z_2) \end{array} \right. \\ \xrightarrow{1,2} & 3_C\ 2_L\ 1_{(R)}\ 1_{B-L} & \xrightarrow{2\ (2)}\ G_{SM}\ (Z_2) \\ \xrightarrow{2'\ (2)} & G_{SM}\ (Z_2) & \end{array} \right. \tag{7.5.36}$$

We must count six times each SSB when we evaluate the number of allowed schemes.

We also have

$$3_C\ 3_L\ 2_{(R)} 1_{(Y_R)} \left\{ \begin{array}{lll} \xrightarrow{1} & 3_C\ 2_L\ 2_{(R)}\ 1_{Y_{(R)}}\ 1_{Y_L} & \longrightarrow \text{Eq. (7.5.36)} \\ \xrightarrow{1} & 3_C\ 2_L\ 1_{(R)}\ 1_{Y_{(R)}}\ 1_{Y_L} & \longrightarrow \cdots \\ \xrightarrow{1} & 3_C\ 2_L\ 2_{(R)}\ 1_{B-L} & \longrightarrow \cdots \\ \xrightarrow{1} & 3_C\ 2_L\ 1_{(R)}\ 1_{B-L} & \xrightarrow{2\ (2)} G_{SM}\ (Z_2) \\ \xrightarrow{2'\ (2)} & G_{SM}\ (Z_2) & \end{array} \right. \tag{7.5.37}$$

and

$$3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 3_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{Y_L}}\ \left\{\begin{array}{llll}\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{(R)}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{Y_L}}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.36)}\\ \xrightarrow{2'} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{(R)}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \longrightarrow & \cdots\\ \xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{(R)}}\ 1_{\mathrm{Y_L}}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}} & \longrightarrow & \cdots\\ \xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{(R)}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2\ (2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2)\\ \xrightarrow{2'\ (2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) & & \end{array}\right. \tag{7.5.38}$$

also

$$3_{\mathrm{C}}\ 3_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{(R)}}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}}\ \left\{\begin{array}{llll}\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{Y_L}}\ 1_{\mathrm{(R)}}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}} & \longrightarrow & \cdots\\ \xrightarrow{2'} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{(R)}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2\ (2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2)\\ \xrightarrow{2'\ (2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) & & \end{array}\right. \tag{7.5.39}$$

The SSB patterns of E_6 via $\mathrm{SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R}$ with associated deftects formation are given by

$$E_6 \xrightarrow{0} 3_{\mathrm{C}}\ 3_{\mathrm{L}}\ 3_{\mathrm{R}}\ \left\{\begin{array}{llll}\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{(R)}}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}}\ 1_{\mathrm{Y_L}} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.36)}\\ \xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 3_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{(R)}}1_{\mathrm{(Y_R)}} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.37)}\\ \xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 3_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{Y_L}} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.38)}\\ \xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 3_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{(R)}}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.39)}\\ \xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{(R)}}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}}\ 1_{\mathrm{Y_L}} & \longrightarrow & \cdots\\ \xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{(R)}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \longrightarrow & \cdots\\ \xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{(R)}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2\ (2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2)\\ \xrightarrow{1\ (1,2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) & & \end{array}\right. \tag{7.5.40}$$

There are more direct breakings which are given by

$$E_6\ \left\{\begin{array}{llll}\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{(R)}}\ 1_{\mathrm{Y_L}}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.36)}\\ \xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 3_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{(R)}}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.37)}\\ \xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 3_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{Y_L}} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.38)}\\ \xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{(R)}}\ 1_{\mathrm{Y_L}}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}} & \longrightarrow & \cdots\\ \xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{(R)}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \longrightarrow & \cdots\\ \xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{(R)}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2\ (2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2)\end{array}\right. \tag{7.5.41}$$

There is now the possibility of having inflation and embedded strings forming at the end of inflation together with R-parity conservation. The total number of schemes satisfying cosmological constraints for defects is 1086, with 522 schemes leading to the formation of topological strings at the end of inflation with conserved R-parity, 384 with topological strings and broken R-parity, 162 models with embedded strings and broken R-parity and 18 schemes with embedded strings and conserved R-parity. When the constraint of leptogenesis is added, we find 444 schemes leading to the formation of topological strings at the end of inflation with conserved R-parity, 312 with topological strings and broken R-parity and 138 models with embedded strings and broken R-parity. There is not any model with embedded strings and R-parity. In conclusion, there are 444 models satisfying all constraints, and they all lead to the formation of topological cosmic strings at the end of inflation.

Breaking E_6 **via** $\mathrm{SU}(6)\times\mathrm{SU}(2)$

We end with $\mathrm{E}_6 \supset \mathrm{SU}(6)\times\mathrm{SU}(2)$. There are two possibilities, namely $\mathrm{SU}(6)\times\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ or $\mathrm{SU}(6)\times\mathrm{SU}(2)_\mathrm{R}$. A third possibility would be $\mathrm{SU}(6)\times\mathrm{SU}(2)_\mathrm{I}$ where $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{I}$ is called *inert* [200] because it is orthogonal to G_SM which is embedded completely inside SU(6). However, since in SUSY models this embedding is not compatible with the proton lifetime, we do not study it.

We first study $\mathrm{E}_6 \supset \mathrm{SU}(6)\times\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$. We consider the following SSB patterns of E_6 via $\mathrm{SU}(6)\times\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ which we write together with the more direct breakings :

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{E}_6 & \xrightarrow{0} & 6\ 2_\mathrm{L} \\
 & \text{or} & \mathrm{E}_6
\end{array}
\left\{
\begin{array}{lllll}
\xrightarrow{1} & 3_\mathrm{C}\ 3_\mathrm{R}\ 2_\mathrm{L}\ 1_{\mathrm{Y_L}} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.38)} \\
\xrightarrow{1} & 4_\mathrm{C}\ 2_\mathrm{L}\ 2_\mathrm{R}\ 1_{\mathrm{V'}} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.27)} \\
\xrightarrow{1} & 4_{\mathrm{C'}}\ 2_\mathrm{L}\ 2_\mathrm{G}\ 1_{\mathrm{V'}} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.28)} \\
\xrightarrow{0} & 4_\mathrm{C}\ 2_\mathrm{L}\ 2_\mathrm{R} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} & 4_\mathrm{C}\ 2_\mathrm{L}\ 1_\mathrm{R}\ 1_{\mathrm{V'}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} & 4_\mathrm{C}\ 2_\mathrm{L}\ 1_\mathrm{R} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} & 3_\mathrm{C}\ 2_\mathrm{L}\ 2_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{Y_L}}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.28)} \\
\xrightarrow{1} & 3_\mathrm{C}\ 2_\mathrm{L}\ 2_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} & 3_\mathrm{C}\ 2_\mathrm{L}\ 1_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{Y_L}}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} & 3_\mathrm{C}\ 2_\mathrm{L}\ 1_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2\ (2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{1\ (1,2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) & &
\end{array}
\right.
\qquad (7.5.42)
$$

The $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ of G_SM can also be contained in SU(6), so that E_6 breaks down to $\mathrm{SU}(6)\times\mathrm{SU}(2)_\mathrm{R}$. We consider the following SSB schemes of E_6 via $\mathrm{SU}(6)\times\mathrm{SU}(2)_\mathrm{R}$ which we write together with the more direct breakings :

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{E}_6 & \xrightarrow{0} & 6\ 2_\mathrm{R} \\
 & \text{or} & \mathrm{E}_6
\end{array}
\left\{
\begin{array}{llll}
\xrightarrow{1} & 4_\mathrm{C}\ 2_\mathrm{L}\ 2_\mathrm{R}\ 1_{V'} & \longrightarrow & \text{Eq. (7.5.27)} \\
\xrightarrow{1} & 4_\mathrm{C}\ 2_\mathrm{L}\ 1_\mathrm{R}\ 1_{\mathrm{V'}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{0} & 4_\mathrm{C}\ 2_\mathrm{L}\ 2_\mathrm{R} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} & 4_\mathrm{C}\ 2_\mathrm{L}\ 1_\mathrm{R} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} & 3_\mathrm{C}\ 2_\mathrm{L}\ 2_\mathrm{R}\ 1_{\mathrm{B-L}}\ 1_{\mathrm{V'}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} & 3_\mathrm{C}\ 2_\mathrm{L}\ 2_\mathrm{R}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} & 3_\mathrm{C}\ 2_\mathrm{L}\ 1_\mathrm{R}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2\ (2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) \\
\xrightarrow{1\ (1,2)} & \mathrm{G_{SM}}\ (Z_2) & &
\end{array}
\right.
\qquad (7.5.43)
$$

The total number of schemes satisfying cosmological constraints for defects is 1270, with 664 schemes leading to the formation of topological strings at the end of inflation with conserved R-parity, 422 with topological strings and broken R-parity, 170 models with embedded strings and broken R-parity and 12 schemes with embedded strings and conserved R-parity. When the constraint of leptogenesis is added, we find 534 models satisfying all constraints, and they all lead to the formation of topological cosmic strings at the end of inflation.

7.5.6 SU(7)

SU(7) is the second group of rank 6. The embeddings which one can choose are

$$\mathrm{SU}(7) \supset \mathrm{SU}(6)_\mathrm{SM}\times\mathrm{U}(1) \quad \text{with} \quad \mathrm{SU}(6)_\mathrm{SM} \supset \mathrm{G}_\mathrm{SM},$$

$$\mathrm{SU}(7) \supset \mathrm{SU}(6) \times \mathrm{U}(1) \quad \text{with} \quad \mathrm{SU}(6) \times \mathrm{U}(1) \supset \mathrm{G_{SM}},$$
$$\mathrm{SU}(7) \supset \mathrm{SU}(4)_\mathrm{C} \times \mathrm{SU}(3)_\mathrm{L} \times \mathrm{U}(1),$$
$$\mathrm{SU}(7) \supset \mathrm{SU}(5)_\mathrm{C} \times \mathrm{SU}(2)_\mathrm{L} \times \mathrm{U}(1) \quad \text{with} \quad \mathrm{SU}(5)_\mathrm{C} \times \mathrm{SU}(2)_\mathrm{L} \times \mathrm{U}(1) \supset \mathrm{G_{SM}},$$
$$\mathrm{SU}(7) \supset \mathrm{SU}(5)_\mathrm{SM} \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1) \quad \text{with} \quad \mathrm{SU}(5)_\mathrm{SM} \supset \mathrm{G_{SM}}.$$

In the first and later cases $\mathrm{G_{SM}}$ is completely embedded in the SU(6) (SU(5)) factor.

The only possibility for getting inflation without defect formation at the end or after, is if we have the later scheme, where the SU(2) factor is orthogonal to $\mathrm{G_{SM}}$. The SSB patterns which could accommodate an epoch of inflation with no defect (of any kind) formation at a later stage are

$$\mathrm{SU}(7) \xrightarrow{1} 5_\mathrm{SM}\ 2\ 1 \begin{cases} \xrightarrow{2} & 5_\mathrm{SM}\ 2 & \xrightarrow{1} \mathrm{G_{SM}}\ 2 \xrightarrow{0} \mathrm{G_{SM}} \\ \xrightarrow{1} & \mathrm{G_{SM}}\ 2\ 1 & \xrightarrow{2} \mathrm{G_{SM}}\ 2 \xrightarrow{0} \mathrm{G_{SM}} \\ \xrightarrow{1,\,2} & \mathrm{G_{SM}}\ 2 & \xrightarrow{0} \mathrm{G_{SM}} \end{cases} \tag{7.5.44}$$

However, these models are inconsistent with proton lifetime measurements and minimal SU(7) does not predict neutrino masses. These models are therefore incompatible with high energy physics phenomenology.

7.5.7 Higher Rank Groups

There are two groups of rank 7, namely SO(14) and SU(8). These groups are particularly interesting since they both contain $\mathrm{U}(1)_\mathrm{B-L}$. In what follows, we discuss the embeddings of the $\mathrm{G_{SM}}$ in these groups and we then comment on the SSB patterns, without writing down explicitely all of them. We just aim to extract those scenarios which can lead to inflation without cosmic string formation at the end of inflation or afterwards.

SO(14) has only two maximal sub-algebras,

$$\mathrm{SU}(7) \times \mathrm{U}(1),$$
$$\mathrm{SO}(10) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)\ .$$

The only possibility for getting inflation without strings in the first case, is to embed the standard model in $\mathrm{SU}(5)_\mathrm{SM} \subset \mathrm{SU}(7)$ in $\mathrm{SU}(5)_\mathrm{SM} \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1) \subset \mathrm{SU}(7)$ so that the SU(2) and the two U(1)s in $\mathrm{SU}(5)_\mathrm{SM} \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1) \subset \mathrm{SO}(14)$ are orthogonal to $\mathrm{G_{SM}}$. These models are also inconsistent with observations from both particle physics and cosmological point of view.

If we consider the maximal sub-algebra $\mathrm{SO}(10) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$, then the only way would be to embed $\mathrm{G_{SM}}$ in SO(10) so that the two SU(2) factors are inert, and break SU(2) down to identity after the breaking of SO(10). These models are also inconsistent with observations.

SU(8) maximal sub-groups are $\mathrm{SU}(7) \times \mathrm{U}(1)$ and $\mathrm{SU}(m) \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{U}(1)$ where $m + n = 8$. One may have $\mathrm{SU}(m) \supset \mathrm{SU}(3)_\mathrm{C}$ and $\mathrm{SU}(n) \supset \mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ or for m $(n) \geq 5$ embed $\mathrm{G_{SM}}$ in $\mathrm{SU}(m)$ so that $\mathrm{SU}(n) \times \mathrm{U}(1)$ is orthogonal to it. The only way to get inflation without strings in the first case is to embed $\mathrm{G_{SM}}$ entirely in SU(7), break U(1) before inflation and we are left with the SU(7) cases mentioned above. These models are inconsistent from both the cosmological and particle physics requirements that we have. One can easily show that in the second case where $\mathrm{SU}(m,n) \supset \mathrm{SU}(3)_\mathrm{C}$ and $\mathrm{SU}(n,m) \supset \mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ all SSB patterns with inflation and leptogenesis lead to the formation of cosmic strings at the end of inflation (topological or embedded ones) and if unbroken R-parity is required, the strings are topological and topologically stable down to low energies. The only possibility for having inflation without strings might be the last case where m or $n > 5$ and to embed $\mathrm{G_{SM}}$ in $\mathrm{SU}(m,n)$. But here again, it seems impossible to fit leptogenesis after inflation. Therefore all SU(8) models with standard hybrid inflation and baryogenesis lead to the formation of cosmic strings at the end of inflation.

Finally, there is one group of rank 8, SU(9). Following the same procedure as for the SU(8) case, we conclude that none of the SSB schemes lead to inflation without strings after the end of the inflationary era.

7.6 Conclusion and Discussion

Current data from the realm of cosmology strongly support an early inflationary era. In addition, current CMB temperature anisotropies data minimize a possible contribution from cosmic strings. On the other hand, many GUTs naturally lead to cosmic string formation. We are thus faced with a crucial quest, namely how often GUTs lead to cosmic string formation ? Or, in other words, which is a natural inflationary scenario ? Answering these questions is the motivation of our study.

In the context of SUSY GUTs, we have studied the cosmological implications of SSB patterns from grand unified gauge groups G_{GUT} down to the standard model gauge group G_{SM}. The aim is to select all the schemes which can satisfy both cosmological and particle physics constraints, among them : lead to inflation and solve the GUT monopole problem, explain the baryon asymmetry of the universe, predict neutrino masses and lead to automatic R-parity conservation. To perform this analysis, we limit ourselves to simple gauge groups which contain G_{SM}, have a complex representation, are anomaly free, and have a rank not greater than 8. Such gauge groups are : SU(5), SO(10), SU(6), E_6, SU(7), SO(14), SU(8), and SU(9). We take a large number of possible embeddings of G_{SM} in G_{GUT} and we list in detail all possible SSB patterns of G_{GUT} down to G_{SM}. We also investigate whether defects are formed during the SSB schemes and of which kind they are. We assume standard hybrid inflation which emerges naturally in SUSY GUTs, the inflaton field being a linear combination of a singlet field and one component of the complex GUT Higgs fields which are used to lower the rank of the group by one unit. We then examine whether monopoles or domain walls are formed after the end of inflation. We disregard such SSB patterns. We also disregard SSB schemes with broken R-parity. To be consistent with leptogenesis, we require that the gauged $B-L$ symmetry, which is contained in GUTs which predict neutrino masses via the see-saw mechanism and unbroken R-parity, is broken at the end inflation. This, for example, implies that we throw away SU(6) or SU(7). We then compare the SSB patterns where topological cosmic strings or embedded strings are formed after inflation with respect to the SSB patterns where there are no defects at all after the end of the inflationary era.

Among the SSB schemes which are compatible with high energy physics and cosmology, we did not find any without strings after inflation. One should thus only consider mixed models, where inflation co-exists with cosmic strings. On the other hand, various cosmological issues, and in particular the CMB temperature anisotropies, set bounds to the cosmic string contribution. This can help constraining or ruling out realistic GUT models where the string contribution can always be computed. One may also have to reconsider the validity of the whole theoretical framework.

We also find the existence of SSB patterns, for GUTs based on gauge groups which have rank greater than six, which predict the formation of secondary string networks at lower energies. Finally, in all models with strings and inflation, the strings forming at the end of inflation are the so-called B-L cosmic strings [185]. Their contribution to the baryon assymmetry of the universe is non-negligible and may compete with the non-thermal process of leptogenesis from reheating.

7.7 Appendix : Maximal Sub-groups

We list the maximal sub-groups of each GUT which is studied in this paper. They are necessary for finding the SSB patterns. Most of the information given here is taken from Ref. [180]. We only consider maximal regular sub-groups because it is very difficult and unatural to get $\mathrm{G_{SM}}$ via maximal special sub-groups. As discussed in Sec. 7.5.1 some discrete symmetries may also appear during the SSB patterns, they do not appear here. Sometimes, there is more than one possibilities to embbed a maximal regular sub-group in the GUT, and we add indices to make this explicit to the reader. In general, a subscript C means that this groups contains $\mathrm{SU(3)_C}$ as a sub-group and subscript L means that this groups contains $\mathrm{SU(2)_L}$ as a sub-group. Definitions of indices for each maximal sub-group will be obvious to the reader in each section dedicated to a given GUT.

Rank	Group	Maximal sub-algebras
4	SU(5)	$\mathrm{SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y}$
		$\mathrm{SU(4) \times U(1)}$
5	SO(10)	$\mathrm{SU(5) \times U(1)_V}$
		$\mathrm{SU(5)_F \times U(1)_V}$
		$\mathrm{SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R = G_{PS}}$
	SU(6)	$\mathrm{SU(5) \times U(1)_6}$
		$\mathrm{SU(4)_C \times SU(2)_L \times U(1)}$
		$\mathrm{SU(3)_C \times SU(3)_L \times U(1)}$
6	$\mathrm{E_6}$	$\mathrm{SO(10) \times U(1)_{V'}}$
		$\mathrm{SU(6) \times SU(2)_R}$
		$\mathrm{SU(6) \times SU(2)_L}$
		$\mathrm{SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_{(R)}}$
	SU(7)	$\mathrm{SU(6)_{SM} \times U(1)}$
		$\mathrm{SU(5)_C \times SU(2)_L \times U(1)}$
		$\mathrm{SU(5)_{SM} \times SU(2) \times U(1)}$
		$\mathrm{SU(4)_C \times SU(3)_L \times U(1)}$
7	SO(14)	$\mathrm{SU(7) \times U(1)}$
		$\mathrm{SO(10) \times SU(2) \times SU(2)}$
	SU(8)	$\mathrm{SU(7) \times U(1)}$
		$\mathrm{SU(6) \times SU(2) \times U(1)}$
		$\mathrm{SU(5) \times SU(3) \times U(1)}$
		$\mathrm{SU(4) \times SU(4) \times U(1)}$
8	SU(9)	$\mathrm{SU(8) \times U(1)}$
		$\mathrm{SU(7) \times SU(2) \times U(1)}$
		$\mathrm{SU(6) \times SU(3) \times U(1)}$
		$\mathrm{SU(5) \times SU(4) \times U(1)}$

TAB. 7.1: Maximal regular sub-groups of grand unification gauge groups with rank not greater than 8.

Acknowledgments

We would like to thank U. Ellwanger, I. Gogoladze, A. Perez-Lorenzana, P. Peter, M. Postma, G. Senjanovič and C.-M. Viallet for useful discussions. The work of R.J. and J.R. was partially supported by the EC network HPRN-CT-2000-00152. M.S. acknoweledges financial support from E.L.K.E. (*Special Account for Reasearch*), University of Athens, Hellas.

CHAPITRE 8

Contraintes sur l'inflation hybride SUSY (Articles)

Sommaire

8.1 Présentation du travail et résultats

Le but de ce travail est d'étudier, plus en détails, les conséquences cosmologiques de la formation de cordes à la fin de la phase d'inflation. Cela est justifié par le travail du chapitre 7 [1], où l'on montre que cette formation est générique dans les modèles de SUSY GUTs et intervient usuellement lors de la brisure de symétrie qui termine la phase d'inflation hybride supersymétrique.

La démarche est de considérer que l'inflation *et* les cordes cosmiques participe nécessairement à la génération des anisotropies de température du CMB. Dans un premier temps donc les deux contributions sont exprimée en fonction des paramètres libres des modèles : échelle de masse, constantes de couplage, et valeur de l'inflaton associé à l'échelle du quadrupôle (multipôle $\ell = 2$) des anisotropies de température. Les expressions de ces contribution sont rappelées dans les chapitres 3 et 4. Rappelons que les contributions inflationnaires sont déterminée par la valeur du potentiel de l'inflation et de sa première dérivée tandis que la contribution des cordes cosmiques est déterminée par l'échelle d'énergie à laquelle se forment les cordes. Dans le cas présent où les cordes se forment à la fin de l'inflation, cette échelle d'énergie est celle de l'inflation.

Ensuite, on peut établir que la durée de l'inflation entre la valeur de l'inflaton responsable de l'anisotropie du quadrupôle et la fin de l'inflation est d'environ 60 *efold*. Cela permet de réduire le nombre de paramètre libre à deux, l'échelle d'énergie M et la constante de couplage de superpotentiel. La seconde contrainte observationnelle vient de la mesure par COBE (et plus récemment WMAP) de l'anisotropie absolue au quadruôle. Le point important est que cette normalisation doit être faite sur la somme de toutes les contributions. Cela permet d'introduire une relation entre l'échelle d'énergie et la constante de couplage.

On peut vérifier que la contribution relative des cordes cosmiques à l'anisotropie, uniquement donnée par leur masse par unité de longueur, est une fonction bijective et croissante de l'échelle d'énergie M. Elle peut donc aussi s'exprimer comme une fonction de la constante de couplage du superpotentiel. Or la contribution admissible des cordes cosmiques dans les données observées est fortement contraintes. Depuis l'expérience *Boomerang*, il a été montré [49] qu'elle est au plus de 18%. Les récentes données du satellite *WMAP* restent en très bon accord avec un modèle "ΛCDM" standard et, comme nous l'avons présenté dans le chapitre 3, la part possible de cordes cosmiques est aujourd'hui contrainte en dessous de 14% avec un coefficient de confiance de 95% (voir la seconde référence de [52]). A l'époque de la rédaction de l'article, les contraintes étaient plus faibles, autour de 9% (voir la première référence de [52]) ce qui est donc la valeur utilisée dans la suite de ce chapitre. Les calculs ont été refaits avec la valeur de 14% et l'effet sur les conclusions est très faible.

Dans ce chapitre nous étudierons les conséquences de ces contraintes sur les modèles inflationnaires et notamment sur les valeurs admissibles de l'échelle d'énergie de l'inflation et de la brisure de symétrie M et de la constante de couplage du superpotentiel.

Les premières sections (8.2 à 8.5) concernent l'inflation par terme D et les contraintes que l'on peut mettre sur les paramètres libres de ce modèle : les constantes de couplage de superpotentiel et de jauge et le terme de Fayet-Iliopoulos. La seconde partie (sections 8.6 à 8.11) est plus détaillée et traite de l'inflation hybride supersymétrique en générale, par terme F et D.

Les conclusions de ces études sont multiples. Elles montrent tout d'abord que l'inflation par terme D doit nécessairement être étudiée dans le cadre de la supergravité puisque le champ d'inflaton atteint au début de l'inflation des valeurs supérieures à la masse de Planck tandis que la densité d'énergie reste nettement en dessous de $m_{\rm Pl}^4$. Notre étude permet de montrer que même si l'inflation par terme D forme inévitablement des cordes cosmiques en fin d'inflation, elle reste compatible avec les observations les plus récentes contrairement à ce qui avait été avancé précédemment. Elle reste donc un modèle intéressant et motivé. Il est montré cependant que la constante de couplage de superpotentiel est contrainte à être très basse

$$\lambda \lesssim 10^{-5} \ , \tag{8.1.1}$$

ce qui introduit un problème de naturalité pour ce modèle. On peut traduire cette contrainte en une limite supérieure sur l'échelle d'énergie de l'inflation donnée par le terme de Fayet-Iliopoulos

$$M_{D-\rm term} \equiv \sqrt{\xi} \lesssim 2 \times 10^{15} \quad \mathrm{GeV} \ . \tag{8.1.2}$$

Concernant l'inflation par terme F, on montre que l'étude dans le cadre supersymétrique est suffisant puisque les champs restent toujours nettement en dessous de la masse de Planck.

On montre que pour l'inflation par terme F aussi, un réglage fin des constantes de couplage est nécessaire pour être en accord avec les observations du CMB. On peut aussi contraindre l'échelle d'énergie de brisure de symétrie associée à la formation de cordes cosmique et à la phase d'inflation. On obtient une limite similaire au cas de l'inflation par terme D,

$$M_{F-\mathrm{term}} \lesssim 2.2 \times 10^{15} \text{ GeV} \tag{8.1.3}$$

Une particularité de ce modèle est la dépendance de la contribution des cordes avec la représentation de Higgs générant la brisure de symétrie. Cela pourrait permettre de relier une grandeur observable à un paramètre discret lié de façon univoque au groupe de GUT initial. En tout état de cause, la contrainte obtenue sur la constante de couplage de superpotentiel dépend en conséquence du groupe de Grande Unification choisi sur lequel est basée la théorie. Des valeurs de la dimensionnalité du champ de Higgs pour une théorie basée sur $SO(10)$ et E_6 ont été étudiées ($\mathcal{N} = \mathbf{126}$ pour $SO(10)$ et $\mathcal{N} = \mathbf{27}$ ou $\mathcal{N} = \mathbf{351}$ pour E_6). Dans les deux cas, la conclusion est que cette constante de couplage doit être anormalement petite pour est en accord avec les contraintes observationnelles sur la contribution des cordes cosmiques dans la génération des anisotropies de température. Par exemple, dans le cas de $SO(10)$,

$$\kappa \lesssim 7 \times 10^{-7} \; . \tag{8.1.4}$$

On peut conclure de ces études que l'inflation hybride supersymétrique, contrairement à ce que l'on pensait, souffre de fine tuning, c'est-à-dire que la constante de couplage du superpotentiel doit être très inférieure à l'unité, ce qui pose un problème de naturalité. La contrainte sur les échelles d'énergie contribue à qualibrer en énergie les schémas de brisure de symétrie du chapitre précédent. Cette échelle d'énergie correspond à une brisure de symétrie tardive puisque celle-ci doit se produire après la dernière formation de monopôles. En tout état de cause, la contrainte obtenue est incompatible avec la contrainte venant de la durée de vie du proton sur l'échelle d'énergie minimum de la première brisure de symétrie (voir chapitre 6). Dans ce cadre, il est donc nécessaire que le schémas de brisures mette en jeu au moins deux brisures de symétrie disctinctes. A haute énergie, la brisure de symétrie de GUT doit être de l'ordre de 10^{16} GeV et à plus basse énergie, une seconde brisure de symétrie, par exemple associée à la brisure de la symétrie $U(1)_{\mathrm{B-L}}$ doit avoir lieu au plus à 2×10^{15} GeV. Cela est nécessaire aussi pour résoudre le problème des monopôles dans ce contexte. C'est ce qu'illustre le fait qu'aucun schémas de brisures à une seule brisure ne soit admissible parmis les modèles présentés au chapitre 7.

Les sections suivantes, en anglais, présentent les travaux publiés lors de cette thèse dans *Phys. Rev. Lett.* ***94****, 011303 (2005)* et *JCAP* ***0503****, 004 (2005)*.

8.2 D-term Inflation, Cosmic Strings, and consistency with Cosmic Microwave Background Measurements (Article)

D-term inflation, cosmic strings, and consistency with cosmic microwave background measurement

Jonathan Rocher[1]

Institut d'Astrophysique de Paris, $\mathcal{G}\mathbb{R}\varepsilon\mathbb{C}\mathcal{O}$, FRE 2435-CNRS, 98bis boulevard Arago, 75014 Paris, France

Mairi Sakellariadou[2]

Division of Astrophysics, Astronomy, and Mechanics, Department of Physics, University of Athens, Panepistimiopolis, GR-15784 Zografos, Hellas, and
Department of Theoretical Physics, University of Geneva, 24 quai E. Ansermet, CH-122 Geneva, Switzerland.

Abstract

Standard D-term inflation is studied in the framework of supergravity. D-term inflation produces cosmic strings, however it can still be compatible with CMB measurements without invoking any new physics. The cosmic strings contribution to the CMB data is not constant, nor dominant, contrary to some previous results. Using current CMB measurements, the free parameters (gauge and superpotential couplings, as well the Fayet-Iliopoulos term) of D-term inflation are constrained.

Pacs 12.10.Dm, 98.80.Cq, 11.27+d

8.3 Introduction

The inflationary paradigm [201] offers simple answers to the shortcomings of the standard hot big bang model. In addition, simple inflationary models offer successful candidates for the initial density fluctuations leading to the observed structure formation. One crucial question though is to answer how generic is the onset of inflation [202] and to find consistent and natural models of inflation from the point of view of particle physics. One can argue that the initial conditions which favor successful inflationary models are the likely outcome of the quantum era before inflation [202]. It is more difficult however to find natural ways to guarantee the flatness of the inflaton potential.

The early history of the Universe at energies below the Planck scale is described by an effective N=1 supergravity theory. Since inflation should have taken place at an energy scale $V^{1/4} \lesssim 4 \times 10^{16}$ GeV, this implies that inflationary models should be constructed in the framework of supergravity. Here is where the problem arises : it is difficult to implement slow-roll inflation within supergravity. The positive false vacuum of the inflaton field breaks spontaneously global supersymmetry, which gets restored after the end of inflation (when V disappears). In supergravity theories, the supersymmetry breaking is transmitted to all fields by gravity, and thus any scalar field, which could play the rôle of the inflaton, gets an effective mass $\sim \sqrt{8\pi V}/M_{\rm Pl} \sim H$, where H stands for the expansion rate during inflation, and $M_{\rm Pl}$ denotes the reduced Planck mass. This problem, known as the problem of "Hubble-induced mass", originates from F-term interactions and thus it is resolved if we consider the vacuum energy as being dominated by non-zero D-terms of some superfields [203]. This result led to a dramatic interest in D-term inflation, since in addition this model can easily be implemented

[1]E-mail :rocher@iap.fr
[2]E-mail :msakel@cc.uoa.gr

in string theory. However, later on D-term inflation in its turn was though to be plagued with problems.

In D-term inflation, the inflationary era ends when a U(1) gauge symmetry is spontaneously broken by a vacuum expectation value of some scalar field, leading to the formation of gauge cosmic strings. As it was explicitly shown in Ref. [1], cosmic strings are generically expected to be formed at the end of a hybrid inflation phase, in the context of supersymmetric grand unified theories. It was claimed [204] that the cosmic strings contribution to the angular power spectrum of the Cosmic Microwave Background (CMB) temperature anisotropies is constant and dominant (75%). From the observational point of view however, strong constraints [205] are placed on the allowed cosmic strings contribution to the CMB : it can not exceed $\sim 10\%$. Thus, standard D-term inflation was thought to be inconsistent with cosmology. To rescue D-term inflation there have been proposed different mechanisms which either consider more complicated models, or they require additional ingredients so that cosmic strings are not produced at the end of hybrid inflation. For example [206], one can add a nonrenorlisable term in the potential, or add an additional discrete symmetry, or consider GUT models based on non-simple groups. More recently, a new pair of charged superfields has been introduced in D-term inflation so that cosmic strings formation is avoided [207].

The aim of our study is to show that standard D-term inflation leading to the production of cosmic strings is still compatible with cosmological data, and in particular CMB, without invoking any new physical mechanisms. We find that in D-term inflation the cosmic strings contribution to the CMB data depends on the free parameters, as for F-term inflation [208]. The maximum allowed cosmic strings contribution to the CMB measurements places upper limits on the inflationary scale (which is also the cosmic string energy scale), or equivalently on the coupling of the superpotential.

We first review the results for F-term hybrid inflation, in which case the supersymmetric renormalisable superpotential reads

$$W^{\rm F}_{\rm infl} = \kappa S(\Phi_+\Phi_- - M^2) \ , \tag{8.3.5}$$

where S, Φ_+, Φ_- are three chiral superfields, and κ, M are two constants. The cosmic strings contribution to the CMB is a function of the coupling κ, or equivalently of the mass scale M. It can be consistent with the most recent measurements, which require that it is at most equal to 9% [205], provided [208]

$$M \lesssim 2\times 10^{15}{\rm GeV} \quad \Leftrightarrow \quad \kappa \lesssim 7\times 10^{-7} \ . \tag{8.3.6}$$

The above limit was obtained in the context of SO(10) gauge group. Upper limits of the same order of magnitude are found for other gauge groups [208].

This result implies that F-term inflation leading to the production of cosmic strings of the GUT scale can be compatible with measurements, provided the coupling is sufficiently small. Thus, hybrid supersymmetric inflation losses some of its appeal since it is required some amount of fine tuning of its free parameter, κ should be of the order of 10^{-6} or smaller. This constraint on κ is in agreement with the one given in Ref. [209]. The parameter κ is also subject to the gravitino constraint which imposes an upper limit to the reheating temperature, to avoid gravitino overproduction. Within supersymmetric GUTs, and assuming a see-saw mechanism to give rise to massive neutrinos, the inflaton field will decay during reheating into pairs of right-handed neutrinos. Using the constraints on the see-saw mechanism it is possible [210, 208] to convert the constraint on the reheating temperature to a constraint on the coupling parameter κ, namely $\kappa \lesssim 8\times 10^{-3}$, which is clearly a weaker constraint.

The superpotential coupling κ is allowed to get higher values, namely it can approach the upper limit permitted by the gravitino constraint, if one employs the curvaton mechanism [211]. Such a mechanism can be easily accommodated within supersymmetric theories, where one expects to have a number of scalar fields. For fixed κ, the cosmic strings contribution decreases rapidly as the initial value of the curvaton field, $\psi_{\rm init}$, decreases. Thus, the WMAP measurements lead to an upper limit on $\psi_{\rm init}$, namely $\psi_{\rm init} \lesssim 5 \times 10^{13}(\kappa/10^{-2})$ GeV [208]. This limit holds for κ in the range $[5 \times 10^{-5}, 1]$; for lower values of κ, the cosmic strings contribution is always suppressed and thus lower than the WMAP limit.

The above results hold also if one includes supergravity corrections. This is expected since the value of the inflaton field is several orders of magnitude below the Planck scale.

8.4 D-term inflation

D-term inflation is derived from the superpotential

$$W^{\rm D}_{\rm infl} = \lambda S \Phi_+ \Phi_- \ , \tag{8.4.7}$$

where S, Φ_-, Φ_+ are three chiral superfields and λ is the superpotential coupling. D-term inflation requires the existence of a nonzero Fayet-Illiopoulos term ξ, permitted only if an extra U(1) symmetry beyond the GUT framework, is introduced. In the context of supersymmetry we calculate the radiative corrections leading to the effective potential,

$$V^{\rm D-SUSY}_{\rm eff}(|S|) = \frac{g^2\xi^2}{2}\left\{1 + \frac{g^2}{16\pi^2}\left[2\ln\frac{|S|^2\lambda^2}{\Lambda^2} + (z+1)^2\ln(1+z^{-1}) + (z-1)^2\ln(1-z^{-1})\right]\right\} \ , \tag{8.4.8}$$

where $z = \lambda^2|S|^2/(g^2\xi)$, with g the gauge coupling of the U(1) symmetry and ξ the Fayet-Illiopoulos term, chosen to be positive; Λ stands for a renormalisation scale. In the absence of the curvaton mechanism, the quadrupole anisotropy is the sum of the inflaton field (scalar and tensor parts) and cosmic strings contributions and we normalise it to the COBE data.

We compute the mass scale of the symmetry breaking, given by $\sqrt{\xi}$, and we find that it increases with λ. We then calculate the cosmic strings contribution to the temperature anisotropies. We find that within supersymmetry D-term inflation is consistent with CMB data provided the superpotential coupling λ is quite small, namely $\lambda \lesssim 3 \times 10^{-5}$.

However, the dependence of $z_{\rm Q}$ (the index Q denotes the scale corresponding to the quadrupole anisotropy) on the superpotential coupling λ results to values of the inflaton field $S_{\rm Q}$ above the Planck mass. This implies that the correct analysis has to be done in the framework of supergravity. For small values of the gauge coupling g, the study in the context of supergravity becomes just the analysis within supersymmetry. Some previous studies [204, 212] found in the literature kept only the first term of the radiative corrections. We find that it is necessary to perform the analysis using the *full* effective potential, which for minimal supergravity reads [208]

$$V^{\rm D-SUGRA}_{\rm eff} = \frac{g^2\xi^2}{2}\left\{1 + \frac{g^2}{16\pi^2}\left[2\ln\frac{|S|^2\lambda^2}{\Lambda^2}\exp\left(\frac{|S|^2}{M^2_{\rm Pl}}\right) + (z+1)^2\ln(1+z^{-1}) + (z-1)^2\ln(1-z^{-1})\right]\right\} \ , \tag{8.4.9}$$

where $z = [\lambda^2|S|^2/(g^2\xi)]\exp(|S|^2/M^2_{\rm Pl})$. The number of e-foldings is

$$N_{\rm Q} = \frac{2\pi^2}{g^2}\int_1^{z_{\rm Q}} \frac{{\rm W}(c\,\tilde{z})}{\tilde{z}^2 f(\tilde{z})[1+{\rm W}(c\,\tilde{z})]^2}\,{\rm d}\tilde{z} \ , \tag{8.4.10}$$

where ${\rm W}(x)$ denotes the "W-Lambert function" defined by ${\rm W}(x)\exp[{\rm W}(x)] = x$, and $c \equiv (g^2\xi)/(\lambda^2 M^2_{\rm Pl})$. The number of e-foldings $N_{\rm Q}$ is thus a function of c and $z_{\rm Q}$, for g fixed. Setting $N_{\rm Q} = 60$ we obtain a numerical relation between c and $z_{\rm Q}$ which allows us to construct a function $z_{\rm Q}(\xi)$ and express the three contributions to the CMB only as a function of ξ. The total $(\delta T/T)$ is given by

$$\left[\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm Q-tot}\right]^2 \sim \left(\frac{\xi}{M_{\rm Pl}^2}\right)^2 \left\{\frac{\pi^2}{90g^2} z_{\rm Q}^{-2} f^{-2}(z_{\rm Q}) \frac{{\rm W}(c\, z_{\rm Q})}{[1+{\rm W}(c\, z_{\rm Q})]^2} + \left(\frac{0.77g}{8\sqrt{2}\pi}\right)^2 + \left(\frac{9\pi}{4}\right)^2\right\} , \tag{8.4.11}$$

where the three contributions come from the scalar and tensor parts of the inflaton field, and the cosmic strings, respectively. We normalise the *l.h.s.* of Eq. (8.4.11) to the COBE data, i.e., $(\delta T/T)_{\rm Q}^{\rm COBE} \sim 6.3 \times 10^{-6}$, and we solve it numerically to obtain ξ, and thus, the three contributions for given values of g and λ.

The cosmic strings contribution to the CMB data, is found to be an increasing function of the mass scale $\sqrt{\xi}$, as shown in Fig. 8.1 below.

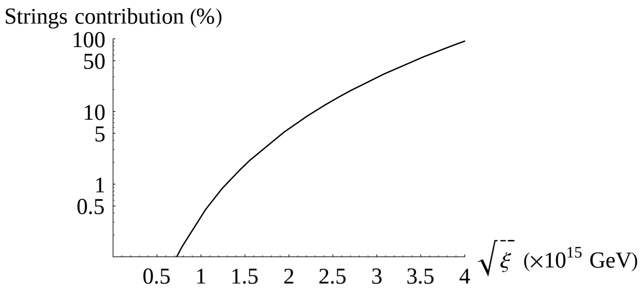

FIG. 8.1: The cosmic strings contribution to the CMB data, as a function of the mass scale $\sqrt{\xi}$ in units of 10^{15} GeV.

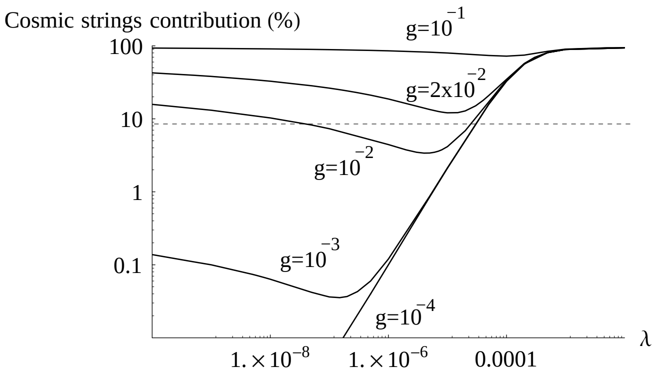

FIG. 8.2: Cosmic strings contribution to the CMB temperature anisotropies as a function of the superpotential coupling λ for different values of the gauge coupling g. The maximal contribution allowed by WMAP is represented by a dotted line.

Our results, summarized in Fig. 8.2, differ from the results obtained in the framework of supersymmetry unless $\lambda \gtrsim 10^{-3}$ or $g \lesssim 10^{-4}$. The cosmic strings contribution to the CMB turns out to be dependent on the free parameters, with however the robust result that the cosmic strings contribution is not constant, nor is it always dominant, in contradiction to Ref. [204]. This implies that contrary to what is often assumed, the simplest D-term inflation is still an open possibility and one does not need to consider more complicated models. Our analysis shows that $g \gtrsim 1$ necessitates multiple-stage inflation, since otherwise we cannot have sufficient e-foldings to resolve the horizon problem of standard cosmology, while $g \gtrsim 2 \times 10^{-2}$ is incompatible with the WMAP measurements. For $g \lesssim 2 \times 10^{-2}$, we can also constrain the superpotential coupling λ and get $\lambda \lesssim 3 \times 10^{-5}$. This limit was already found in the framework of supersymmetry [208] and it is in agreement with the constraint $\lambda \lesssim \mathcal{O}(10^{-4} - 10^{-5})$ of Ref. [212]. Supergravity corrections impose in addition a lower limit to the coupling λ. If for example $g = 10^{-2}$, the cosmic strings contribution imposes $10^{-8} \lesssim \lambda \lesssim 3 \times 10^{-5}$. The constraint induced by CMB measurements is expressed as a single constraint on the Fayet-Iliopoulos term ξ, namely $\sqrt{\xi} \lesssim 2 \times 10^{15}$ GeV.

As a next step we examine whether there is a mechanism to allow more natural values of the couplings. Assuming the existence of a scalar field, that is subdominant during inflation as well as at the beginning of the radiation dominated era, such a field (the curvaton) gives an additional contribution to the temperature anisotropies, which we calculate below for the case of D-term inflation. The curvaton contribution, in terms of the metric perturbation, reads [213]

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm curv} \equiv \frac{\Psi_{\rm curv}}{3} = \frac{4}{9}\frac{\delta\psi_{\rm init}}{\psi_{\rm init}} \ . \tag{8.4.12}$$

The initial quantum fluctuations of the curvaton field are given by $\delta\psi_{\rm init} = H_{\rm inf}/(2\pi)$. The expansion rate during inflation, $H_{\rm infl}$, is a function of the inflaton field and it is given by the Friedmann equation : $H^2_{\rm infl}(\varphi) = (8\pi/3)V(\varphi)$. Thus, for the D-term tree-level effective potential, the additional curvaton contribution to the total temperature anisotropies is given by [212]

$$\left[\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm curv}\right]^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{27\pi}\right)^2\left(\frac{g\xi}{M_{\rm Pl}\psi_{\rm init}}\right)^2 \ . \tag{8.4.13}$$

Normalising the total $(\delta T/T)$ to COBE we then obtain the contributions of the different sources (inflaton field splitted into scalar and tensor parts, cosmic strings, curvaton field) to the CMB as a function of one of the three parameters $\psi_{\rm init}, \lambda, g$, keeping the other two fixed. We show in Fig. 8.3 the three contributions as a function of $\psi_{\rm init}$, for $\lambda = 10^{-1}$ and $g = 10^{-1}$. Clearly, there are values of $\psi_{\rm init}$ which allow bigger values of the superpotential coupling λ and of the gauge coupling g.

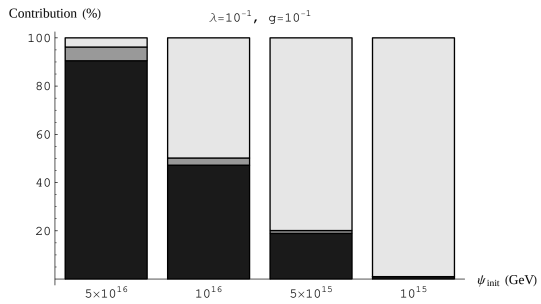

FIG. 8.3: The cosmic strings (dark gray), curvaton (light gray) and inflaton (gray) contributions to the CMB temperature anisotropies as a function of the the initial value of the curvaton field $\psi_{\rm init}$, for $\lambda = 10^{-1}$ and $g = 10^{-1}$.

More explicitely, the fine tuning on the couplings can be avoided provided

$$\psi_{\rm init} \lesssim 3 \times 10^{14}\left(\frac{g}{10^{-2}}\right) \ \text{GeV} \quad \text{for} \ \ \lambda \in [10^{-1}, 10^{-4}] \ . \tag{8.4.14}$$

Clearly, for smaller values of λ, the curvaton mechanism is not necessary.

We would like to bring to the attention of the reader that in the above study we have neglected the quantum gravitational effects, which would lead to a contribution to the effective potential, even though $S_{\rm Q} \sim \mathcal{O}(10 M_{\rm Pl})$. Our analysis is however still valid, since the effective potential given in Eq. (8.4.9) satisfies the conditions [214] $V(|S|) \ll M_{\rm Pl}^4$ and $m_S^2 = {\rm d}^2V/{\rm d}S^2 \ll M_{\rm Pl}^2$, and thus the quantum gravitational corrections $[\Delta V(|S|)]_{\rm QG}$ are negligible when compared to the effective potential $V_{\rm eff}^{\rm D-SUGRA}$.

8.5 Conclusions

D-term inflation gained a lot of interest since it was shown that it avoids the problem of "Hubble-induced mass", but it was later thought to be plagued with an inconcistency with the data. Standard D-term inflation ends with the formation of cosmic strings which was claimed to lead to a constant and dominant contribution to the CMB data, much higher than the one allowed by measurements. In this study, we show that this is not the case, and therefore, standard D-term hybrid inflation can still be compatible with cosmological data.

We consider standard D-term inflation in its simplest form and without any additional ingredients. We perform our analysis in the framework of supergravity, since we reach scales above the Planck scale, and we consider all one-loop radiative corrections. We show that the cosmic strings produced at the end of D-term inflation can lead to a contribution to the CMB data which is allowed by the measurements. The price to be paid is that the couplings must be small. However, this constraint can be less severe if one invokes the curvaton mechanism.

Acknowledgements

It is a pleasure to thank G. Esposito-Farèse, A. Linde and P. Peter for discussions and comments.

8.6 Constraints on supersymetric Grand Unified Theories from cosmology (Article)

Constraints on Supersymmetric Grand Unified Theories from Cosmology

Jonathan Rocher[3]

Institut d'Astrophysique de Paris, $\mathcal{G}\mathbb{R}\varepsilon\mathbb{C}\mathcal{O}$, FRE 2435-CNRS, 98bis boulevard Arago, 75014 Paris, France

Mairi Sakellariadou[4]

Division of Astrophysics, Astronomy and Mechanics, Department of Physics, University of Athens, Panepistimiopolis, GR-15784 Zografos (Athens), Hellas and Institut d'Astrophysique de Paris, 98bis boulevard Arago, 75014 Paris, France.

Abstract

Within the context of SUSY GUTs, cosmic strings are generically formed at the end of hybrid inflation. However, the WMAP CMB measurements strongly constrain the possible cosmic strings contribution to the angular power spectrum of anisotropies. We investigate the parameter space of SUSY hybrid (F- and D- term) inflation, to get the conditions under which theoretical predictions are in agreement with data. The predictions of F-term inflation are in agreement with data, only if the superpotential coupling κ is small. In particular, for SUSY SO(10), the upper bound is $\kappa \lesssim 7 \times 10^{-7}$. This fine tuning problem can be lifted if we employ the curvaton mechanism, in which case $\kappa \lesssim 8 \times 10^{-3}$; higher values are not allowed by the gravitino constraint. The constraint on κ is equivalent to a constraint on the SSB mass scale M, namely $M \lesssim 2 \times 10^{15}$ GeV.

The study of D-term inflation shows that the inflaton field is of the order of the Planck scale ; one should therefore consider SUGRA. We find that the cosmic strings contribution to the CMB anisotropies is not constant, but it is strongly dependent on the gauge coupling g and on the superpotential coupling λ. We obtain $g \lesssim 2 \times 10^{-2}$ and $\lambda \lesssim 3 \times 10^{-5}$. SUGRA corrections induce also a lower limit for λ. Equivalently, the Fayet-Iliopoulos term ξ must satisfy $\sqrt{\xi} \lesssim 2 \times 10^{15}$ GeV. This constraint holds for all allowed values of g.

Keywords : cosmological phase transitions, inflation, cosmology of theories beyond the SM, physics of the early universe

8.7 Introduction

High energy physics and cosmology are two complementary areas with a rich and fruitful interface. They both enter the description of the physical processes during the early stages of our Universe. High energy physics leads to the notion of topological defects, which imply a number of cosmological consequences. Once we compare the theoretical predictions of models motivated by high energy physics against cosmological data, we induce constraints or, in other words, we fix the free parameters of the models. This is the philosophy of our study.

Even though the particle physics Standard Model (SM) has been tested to a very high precision, evidence of neutrino masses [138, 139, 140] proves that one should go beyond this model. An extension of the SM gauge group can be accomplished in the framework of Supersymmetry (SUSY). At present, SUSY is the only viable theory for solving the gauge hierarchy problem. Moreover, in the supersymmetric standard model the gauge coupling constants of

[3]E-mail :rocher@iap.fr

[4]E-mail :msakel@cc.uoa.gr

the strong, weak and electromagnetic interactions, with SUSY broken at the TeV-scale, meet at a single point $M_{\rm GUT} \simeq (2-3)\times 10^{16}$ GeV. These are called Supersymmetric Grand Unified Theories (SUSY GUTs). An acceptable SUSY GUT model should be consistent with the standard model as well as with cosmology. SUSY GUTs can provide the scalar field needed for inflation, they can explain the matter-antimatter asymmetry of the Universe, and they can provide a candidate for cold dark matter, known as the lightest superparticle.

Usually models of SUSY GUTs suffer from the appearance of undesirable stable topological defects, which are mainly monopoles, but also domain walls. Topological defects appear via the Kibble mechanism [142]. A common mechanism to get rid of the unwanted topological defects, is to introduce one or more inflationary stages. Inflation essentially consists of a phase of accelerated expansion which took place at a very high energy scale. In addition, inflation provides a natural explanation for the origin of the large scale structure and the associated temperature anisotropies in the Cosmic Microwave Background (CMB) radiation. On the other hand, one has to address the question of whether it is needed fine-tuning of the parameters of the inflationary model. This is indeed the case in some nonsupersymmetric versions of inflation and it leads to the naturalness issue. Even though SUSY models of hybrid inflation were for long believed to circumvent these fine-tuning issues, our study shows that this may not be the case, unless we invoke the curvaton mechanism for the origin of the initial density fluctuations.

The study we present here is the continuation of Ref. [1], where they were examined all possible Spontaneously Symmetry Breaking (SSB) schemes from a large gauge group down to the SM gauge group, in the context of SUSY GUTs. Assuming standard supersymmetric hybrid inflation, there were found all models which are consistent with high energy physics and cosmology. Namely, there were selected all models which can solve the GUT monopole problem, lead to baryogenesis after inflation and are consistent with proton lifetime measurements. That study led to the conclusion that in all acceptable SSB patterns, the formation of cosmic strings is unavoidable, and some times it is accompanied by the formation of embedded strings. The strings which form at the end of inflation have a mass which is proportional to the inflationary scale. Here, we find the inflationary scale, which coincides with the string mass scale. Since our analysis is within global supersymmetry, we examine whether the value of the inflaton is at least a few orders of magnitude smaller than the Planck scale. As we show, global supersymmetry is sufficient in the case of F-term inflation, while D-term inflation necessitates the supergravity framework.

We organise the rest of the paper as follows : In Section II, we discuss the theoretical framework of our study. We briefly review the choice of the gauge groups we consider and we state the results about SSB schemes allowed from particle physics and cosmology as well as the topological defects left after the last inflationary era. We briefly review the theory of CMB temperature fluctuations. We then discuss inflation within N=1 SUSY GUTs, first in the context of F-term and then in the context of D-term inflation. In Section III, we describe our analysis as well as our findings for the mass scale and the strings contribution to the CMB. We first discuss F-term and then that of D-term inflation. We show that F-term inflation can be addressed in the context of global supersymmetry. We then show that D-term inflation has to be studied within local supersymmetry and we give the scalar potential for D-term inflation, taking into account radiative and supergravity (SUGRA) corrections. We round up with our conclusions in Section IV. In Appendix A, we list the allowed SSB schemes of large gauge groups down to the standard model, found in Ref. [1], which are allowed by particle physics and cosmology.

8.8 Theoretical Framework

8.8.1 Hybrid inflation within supersymmetric grand unified theories

Grand Unified Theories imply a sequence of phase transitions associated with the SSB of the GUT gauge group $\mathrm{G_{GUT}}$ down to the standard model gauge group $\mathrm{G_{SM}} = \mathrm{SU(3)_C} \times \mathrm{SU(2)_L} \times \mathrm{U(1)_Y}$. The energy scale at which this sequence of SSBs starts is $M_{\mathrm{GUT}} \sim 3 \times 10^{16}$ GeV. As our Universe has undergone this series of phase transitions, various kinds of topological defects may have been left behind as the consequence of SSB schemes, via the Kibble mechanism [142]. Among the various kinds of stable topological defects, monopoles and domain walls are undesirable, since they lead to catastrophic cosmological implications, while textures do not have important cosmological consequences. To get rid of the unwanted topological defects one may employ the mechanism of cosmological inflation.

Considering supersymmetric grand unified theories is motivated by several constraints, coming from both particle physics and cosmology. It is indeed the only viable framework to solve the hierarchy problem. In addition, it allows for a unification of strong, weak and electromagnetic interactions at a sufficiently high scale to be compatible with proton lifetime measurements. From the point of view of cosmology, SUSY GUTs can provide a good candidate for dark matter, namely the lightest supersymmetric particle. Moreover, it offers various candidates for playing the rôle of the inflaton field and it can give naturally a flat direction for slow-roll inflation.

Supersymmetry can be formulated either as a global or as a local symmetry, in which case gravity is included and the theory is called supergravity. Global supersymmetry can be seen as a limit of supergravity and it is a good approximation provided the Vacuum Expectation Values (VEVs) of all relevant fields are much smaller than the Planck mass.

In a supersymmetric theory, the tree-level potential for a scalar field is the sum of an F-term and a D-term. These two terms have rather different properties and in all proposed hybrid inflationary models only one of the two terms dominates. In supersymmetric hybrid inflation, the superpotential couples an inflaton field to a pair of Higgs fields that are responsible for one symmetry breaking in the SSB scheme. This class of inflationary models is considered natural [215] within SUSY GUTs in the sense that the only extra field which is added, except the fields needed to build the GUT itself, is a singlet scalar field. This extra field is however likely to be anyway needed to build the GUT model, so that it constraints the Higgs fields to acquire a VEV. Moreover, it is not spoiled by radiative corrections and supergravity corrections can be kept small for F-term inflation. We would like to mention that generically, F-term inflation suffers from the so-called η-problem, because usually, the supergravity corrections induce contribution of order unity to the slow roll parameter $\eta \equiv M_{\mathrm{Pl}}^2 V''/V$. This effective mass term for the inflaton field would spoil the slow roll condition [216]. However, in the case of a minimal Kahler potential, which is what is considered hereafter, this problem is lifted by a cancelation of the problematic mass terms. This can however be seen as a fine tunning since a minimal kahler potential is not well motivated for example from the point of view of the string theory [216]. Finally it has been stated that such inflationary models are successful in the sense that they do not require any fine tuning, but we show that this last point has to be revisited.

F-term inflation can occur naturally within the GUTs framework when for example, a GUT gauge group G_{GUT} is broken down to the SM at an energy M_{GUT} according to

$$G_{\mathrm{GUT}} \stackrel{M_{\mathrm{GUT}}}{\longrightarrow} H_1 \xrightarrow[\Phi_+\Phi_-]{M_{\mathrm{infl}}} H_2 \longrightarrow G_{\mathrm{SM}}\ , \tag{8.8.15}$$

where Φ_+, Φ_- is a pair of GUT Higgs superfields in nontrivial complex conjugate representations, which lower the rank of the group by one unit when acquiring nonzero VEV. The inflationary phase takes place at the beginning of the symmetry breaking $H_1 \stackrel{M_{\rm infl}}{\longrightarrow} H_2$.

F-term inflation is based on the globally supersymmetric renormalisable superpotential

$$W^{\rm F}_{\rm infl} = \kappa S(\Phi_+\Phi_- - M^2) \ , \tag{8.8.16}$$

where S is a GUT gauge singlet left handed superfield and Φ_+, Φ_- are as defined above, with κ and M two constants (M has dimensions of mass) which can both be taken positive with field redefinition. The chiral superfields S, Φ_+, Φ_- are taken to have canonical kinetic terms. The above superpotential is the most general superpotential consistent with an R-symmetry under which $W \rightarrow e^{i\beta}W$, $\Phi_- \rightarrow e^{-i\beta}\Phi_-$, $\Phi_+ \rightarrow e^{i\beta}\Phi_+$, and $S \rightarrow e^{i\beta}S$. We note that an R-symmetry can ensure that the rest of the renormalisable terms are either absent or irrelevant.

D-term inflation is derived from the superpotential

$$W^{\rm D}_{\rm infl} = \lambda S\Phi_+\Phi_- \ , \tag{8.8.17}$$

where S, Φ_-, Φ_+ are three chiral superfields and λ is the superpotential coupling. D-term inflation requires the existence of a nonzero Fayet-Iliopoulos term ξ, which can be added to the lagrangian only in the presence of a U(1) gauge symmetry, under which, the three chiral superfields have charges $Q_S = 0$, $Q_{\Phi_+} = +1$ and $Q_{\Phi_-} = -1$, respectively. Thus, D-term inflation requires a scheme, like

$$G_{\rm GUT} \times U(1) \stackrel{M_{\rm GUT}}{\longrightarrow} H \times U(1) \underset{\Phi_+\Phi_-}{\stackrel{M_{\rm infl}}{\longrightarrow}} H \longrightarrow G_{\rm SM} \ , \tag{8.8.18}$$

This extra U(1) gauge symmetry symmetry can be of a different origin [215]. In what follows, we consider a nonanomalous U(1) gauge symmetry. We note however that one could instead consider a situation realised in heterotic string theories, where there is an anomalous D-term arising from an anomalous $\mathrm{U(1)_A}$, which can contribute to the vacuum energy [217]. Clearly, the symmetry breaking at the end of the inflationnary phase implies that cosmic strings are always formed at the end of D-term hybrid inflation.

In the SSB schemes studied in Ref. [1], one can naturally incorporate an era of F-/D-term inflation. All SSB schemes from grand unified gauge groups $\mathrm{G_{GUT}}$ of rank at the most equal to 8 down to the standard model gauge group $\mathrm{G_{SM}} \times Z_2$ have been considered. Initially, the group $\mathrm{G_{GUT}}$ was chosen to be one of the following ones : SU(5), SO(10), SU(6), $\mathrm{E_6}$, SU(7), SO(14), SU(8), and SU(9). In addition, the choice of $\mathrm{G_{GUT}}$ was limited to simple gauge groups which contain $\mathrm{G_{SM}}$, have a complex representation, are anomaly free and take into account some of the major observationnal constraints of particle physics and cosmology. The above Z_2 symmetry is a sub-group of the $\mathrm{U(1)_{B-L}}$ gauge symmetry which is contained in various gauge groups and it plays the rôle of R-parity. R-parity can only appear in grand unified gauge groups which contain $\mathrm{U(1)_{B-L}}$. There were considered as many possible embeddings of $\mathrm{G_{SM}}$ in $\mathrm{G_{GUT}}$ as one can find in the literature and it was examined whether defects are formed during the SSB patterns of $\mathrm{G_{GUT}}$ down to $\mathrm{G_{SM}}$, and of which kind they are. Assuming standard hybrid F-term inflation there were disregarded all SSB patterns where monopoles or domain walls are formed after the end of the last possible inflationary era. In addition, there were disregarded SSB schemes with broken R-parity since the proton would decay too rapidly as compared to Super-Kamiokande measurements. It was also required that the gauged $\mathrm{U(1)_{B-L}}$ symmetry, is broken at the end of inflation so that a non thermal leptogenesis can explain the baryon/antibaryon asymmetry in the Universe. SU(5), SU(6), SU(7) are thus not acceptable groups for particle physics, since SU(5) leads to the formation of stable monopoles, while minimal SU(6) and minimal SU(7) do not contain $\mathrm{U(1)_{B-L}}$.

The SSB schemes compatible with high energy physics and cosmology, as given in detail in Ref. [1], are listed in Appendix A.

It was concluded that within the framework of the analysis of Ref. [1], there are not any acceptable SSB schemes without cosmic strings after the last inflationary era. The analysis we present below can therefore be applied to all these models. We would like to note that even if we relax the requirement that the gauged B − L symmetry is broken at the end of inflation, the results of Ref. [1] remain unchanged.

Even if one also allows for patterns with broken R-parity at low energy, cosmic strings formation is still very generic. To consider these cases, one should however find a mechanism to protect proton lifetime from very dangerous dimension 4 operators. Strings formed during the SSB phase transitions leading from a large gauge group $\mathrm{G}_{\mathrm{GUT}}$ down to the $\mathrm{G}_{\mathrm{SM}} \times Z_2$ are of two types : topological strings, called cosmic strings, and embedded strings which are not topologically stable and in general they are not dynamically stable either.

Clearly, as we discussed earlier, in the case of D-term inflation, cosmic strings are always present at the end of the inflationary era.

8.8.2 Cosmic microwave background temperature anisotropies

The CMB temperature anisotropies provide a powerful test for theoretical models aiming at describing the early Universe. The characteristics of the CMB multipole moments, and more precisely the position and amplitude of the acoustic peaks, as well as the statistical properties of the CMB temperature anisotropies, can be used to discriminate among theoretical models, as well as to constrain the parameters space.

The spherical harmonic expansion of the cosmic microwave background temperature anisotropies, as a function of angular position, is given by

$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}) = \sum_{\ell m} a_{\ell m} \mathcal{W}_\ell Y_{\ell m}(\mathbf{n}) \tag{8.8.19}$$

with

$$a_{\ell m} = \int \mathrm{d}\Omega_{\mathbf{n}} \frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}) Y^*_{\ell m}(\mathbf{n}) \ , \tag{8.8.20}$$

where $\mathcal{W}_\ell$ stands for the ℓ-dependent window function of the particular experiment.

The angular power spectrum of CMB anisotropies is expressed in terms of the dimensionless coefficients C_ℓ, which appear in the expansion of the angular correlation function in terms of the Legendre polynomials P_ℓ :

$$\left\langle 0 \left| \frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}) \frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}') \right| 0 \right\rangle \Big|_{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'=\cos\vartheta)} = \frac{1}{4\pi} \sum_\ell (2\ell+1) C_\ell P_\ell(\cos\vartheta) \mathcal{W}_\ell^2 \ . \tag{8.8.21}$$

It compares points in the sky separated by an angle ϑ. Here, the brackets denote spatial average, or expectation values if perturbations are quantised [5]. The value of C_ℓ is determined by fluctuations on angular scales of order π/ℓ. The angular power spectrum of anisotropies observed today is usually given by the power per logarithmic interval in ℓ, plotting $\ell(\ell+1)C_\ell$ versus ℓ. The coefficients C_ℓ are related to $a_{\ell m}$ by

$$C_\ell = \frac{\langle \sum_m |a_{\ell m}|^2 \rangle}{2\ell+1} \ . \tag{8.8.22}$$

On large angular scales, the main contribution to the temperature anisotropies is given by the Sachs-Wolfe effect, implying

$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}) \simeq \frac{1}{3} \Phi[\eta_{\mathrm{lss}}, \mathbf{n}(\eta_0 - \eta_{\mathrm{lss}})], \tag{8.8.23}$$

[5] We emphasise that Eq. (8.8.21) holds only if the initial state for cosmological perturbations of quantum-mechanical origin is the vacuum [218, 219].

where $\Phi(\eta, \mathbf{x})$ is the Bardeen potential, while η_0 and $\eta_{\rm lss}$ denote respectively the conformal times now and at the last scattering surface. Note that the previous expression is only valid for the standard cold dark matter model.

If we assume that the initial density perturbations are due to "freezing in" of quantum fluctuations of a scalar field during an inflationary period, then the quadrupole anisotropy reads

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm Q-infl} = \left[\left(\frac{\delta T}{T}\right)^2_{\rm Q-scal} + \left(\frac{\delta T}{T}\right)^2_{\rm Q-tens}\right]^{1/2} , \tag{8.8.24}$$

where the quadrupole anisotropy due to the scalar Sachs-Wolfe effect is

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm Q-scal} = \frac{1}{4\sqrt{45}\pi} \frac{V^{3/2}(\varphi_Q)}{M^3_{\rm Pl} V'(\varphi_Q)} , \tag{8.8.25}$$

and the tensor quadrupole anisotropy is

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm Q-tens} \sim \frac{0.77}{8\pi} \frac{V^{1/2}(\varphi_Q)}{M^2_{\rm Pl}}. \tag{8.8.26}$$

We note that V is the potential of the inflaton field φ, with $V' \equiv {\rm d}V(\varphi)/{\rm d}\varphi$, while $M_{\rm Pl}$ denotes the reduced Planck mass, $M_{\rm Pl} = (8\pi G)^{-1/2} \simeq 2.43 \times 10^{18}$ GeV, and $\varphi_{\rm Q}$ is the value of the inflaton field when the comoving scale corresponding to the quadrupole anisotropy became bigger than the Hubble radius.

The number of e-foldings of inflation between the initial value of inflaton φ_i and the final value φ_f is given by

$$N(\varphi_i \to \varphi_f) = -8\pi G \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{V(\varphi)}{V'(\varphi)} {\rm d}\varphi . \tag{8.8.27}$$

The primordial fluctuations could also be generated from the quantum fluctuations of a late-decaying scalar field other than the inflaton, known as the curvaton field ψ [211, 220, 221, 222], whose nonvanishing initial amplitude is denoted by $\psi_{\rm init}$. During inflation the curvaton potential is very flat and ψ acquires quantum fluctuations [220]

$$\delta\psi_{\rm init} = \frac{H_{\rm inf}}{2\pi} , \tag{8.8.28}$$

where $H_{\rm infl}$ denotes the expansion rate during inflation, which is a function of the inflaton field, and it is given by the Friedmann equation

$$H^2_{\rm infl}(\varphi) = \frac{8\pi G}{3} V(\varphi) . \tag{8.8.29}$$

We assumed that the effective curvaton mass is much smaller than $H_{\rm infl}$, since otherwise the quantum fluctuations of the curvaton field during inflation would be very small and the CMB power spectrum would remain the same as in the standard adiabatic case.

At the end of the inflationary era, $\delta\psi_{\rm init}$ generates an entropy fluctuation. At later times, the curvaton field first dominates the energy density of the Universe, and then (during the RDE) it decays and reheats the Universe. Since the primordial fluctuations of the curvaton field are converted to purely adiabatic density fluctuations, the effect of $\delta\psi_{\rm init}$ in the CMB angular power spectrum, which can be parametrised by the metric perturbation induced by the curvaton fluctuation, is given by [213]

$$\Psi_{\rm curv} = -\frac{4}{9} \frac{\delta\psi_{\rm init}}{\psi_{\rm init}} . \tag{8.8.30}$$

There is no correlation between the primordial fluctuations of the inflaton and curvaton fields.

As we have explicitely shown in Ref. [1], the end of the inflationary era is accompanied by strings formation [6], which are cosmic strings (topological defects), sometimes accompagnied by embedded strings (not topologically stable and in general not dynamically stable either). Let us first calculate the contribution to the quadrupole temperature anisotropy coming from the cosmic strings network.

At this point, we would like to bring to the attention of the reader that since the calculation of the angular power spectrum induced by a cosmic strings network relies on heavy numerical simulations, this issue remains still open. More precisely, to obtain the power spectrum from numerical simulations with cosmic strings, one must take into account the "three-scale model" [226] of cosmic strings networks, the small-scale structure (wiggliness) of the strings, the microphysics of the strings network, as well as the expansion of the Universe. This is indeed a rather difficult task, and to our knowledge no currently available simulation leading to the $C_\ell^{\rm strings}$ includes all of them. Moreover, all simulations of cosmic strings are referred to Nambu-Goto strings, and this is probably the most unrealistic case [7] At least, but not last, there is the issue of the appropriate initial conditions for the time evolution of the cosmic strings network. More precisely, we do not know of any numerical simulation leading to the $C_\ell^{\rm strings}$, where the initial configuration of the strings network was other than the one obtained by assigning at random values to a phase variable on a cubic lattice. One should probably study whether the strings network is in the low or high density regime [8].

Nevertheless, in what follows we use recent results [232] based on Nambu-Goto local strings simulations in a Friedmann–Lemaître–Roberston–Walker spacetime and we assume

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm cs} \sim (9-10)G\mu \quad \text{with} \quad \mu = 2\pi\langle\chi\rangle^2 \ , \tag{8.8.31}$$

where $\langle\chi\rangle$ is the Vacuum Expectation Value (VEV) of the Higgs field responsible for the formation of cosmic strings.

8.8.3 Inflation in supersymmetric grand unified theories

In what follows, we first discuss inflation where the F-term dominates (F-term inflation) and then we address inflation where the D-term dominates (D-term inflation).

F-term inflation

F-term inflation is based on the globally supersymmetric renormalisable superpotential Eq. (8.8.16). The scalar potential V can be obtained from Eq. (8.8.16) and it reads

$$V(\phi_+, \phi_-, S) = |F_{\Phi_+}|^2 + |F_{\Phi_-}|^2 + |F_S|^2 + \frac{1}{2}\sum_a g_a^2 D_a^2 \ , \tag{8.8.32}$$

[6] Some authors have proposed mechanisms which could avoid cosmic strings production at the end of hybrid inflation. This is for example realised by adding a nonrenormalisable term in the superpotential [173], or by adding an additional discrete symmetry [223], or by considering GUTs models based on nonsimple and more complicated groups [224]. Moreover, by introducing a new pair of charged superfields in the framework of an $N = 2$ supersting version of D-term inflation the strings which form are nontopological [225]. This last model was shown [225] to satisfy the CMB constraints.

[7] The nature of cosmic strings formed in the context of our models within SUSY GUTs and their cosmological rôle is studied in Ref. [227]. One has to examine whether the fermion zero modes which are intrinsic in supersymmetric models of cosmic strings lead to the production of vortons, which may result to a cosmological problem [228]. The microphysics of cosmic string solutions to N=1 supersymmetric abelian Higgs models has been studied in Ref. [229].

[8] When the energy density of the strings network is low, the dominant part of the strings is in the form of closed loops of the smallest allowed size. At a certain critical density the strings network undergoes a phase transition characterised by the formation of *infinite* strings [230, 231].

where the F-term is such that[9] $F_{\Phi_i} \equiv |\partial W/\partial\Phi_i|_{\theta=0}$, with $\Phi_i = \Phi_+, \Phi_-, S$, and

$$D_a = \bar{\phi}_i \, (T_a)^i{}_j \, \phi^j + \xi_a \ , \tag{8.8.33}$$

with a the label of the gauge group generators T_a, g_a the gauge coupling, and ξ_a the Fayet-Iliopoulos term. By definition, in the F-term inflation the real constant ξ_a is zero ; it can only be nonzero if T_a generates a U(1) group.

In the case of F-term inflation, the potential V as a function of the complex scalar component of the respective chiral superfields Φ_+, Φ_-, S reads

$$V^{\rm F}(\phi_+, \phi_-, S) = \kappa^2 |M^2 - \phi_-\phi_+|^2 + \kappa^2 |S|^2 (|\phi_-|^2 + |\phi_+|^2) + {\rm D-terms} \ . \tag{8.8.34}$$

Assuming that the F-terms give rise to the inflationary potential energy density, while the D-terms are flat along the inflationary trajectory, one may neglect them during inflation. The D-terms may play an important rôle in determining the trajectory and in stabilising the noninflaton fields.

The potential has two minima : one valley of local minima ($V = \kappa^2 M^4 \equiv V_0$), for S greater than its critical value $S_{\rm c} = M$ with $\phi_+ = \phi_- = 0$, and one global supersymmetric minimum ($V = 0$) at $S = 0$ and $\phi_+ = \phi_- = M$. Imposing chaotic initial conditions, i.e. $S \gg S_{\rm c}$, the fields quickly settle down the valley of local minima. In the slow roll inflationary valley ($\phi_+ = \phi_- = 0$, $|S| \gg M$), the ground state of the scalar potential is different from zero, meaning that SUSY is broken. In the tree level, along the inflationary valley the potential $V = V_0$ is constant and thus it is perfectly flat. A slope along the potential can be generated by including the one-loop radiative corrections which are small as compared to V_0. Thus, the scalar potential acquires a little tilt which helps the scalar field S to slowly roll down the valley of minima. The SSB of SUSY along the inflationary valley by the vacuum energy density $\kappa^2 M^4$ leads to a mass splitting in the superfields Φ_+, Φ_-. One gets [133] a Dirac fermion with a mass squared term $\kappa^2|S|^2$ and two complex scalars with mass squared terms $\kappa^2|S|^2 \pm \kappa^2 M^2$. This implies that there are one-loop radiative corrections to V along the inflationary valley, which can be calculated using[10] the Coleman-Weinberg expression [233]

$$\Delta V_{1-{\rm loop}} = \frac{1}{64\pi^2} \sum_i (-1)^{F_i} m_i^4 \ln \frac{m_i^2}{\Lambda^2} \ , \tag{8.8.35}$$

where the sum extends over all helicity states i, with fermion number F_i and mass squared m_i^2 ; Λ stands for a renormalisation scale. Thus, the effective potential reads [133, 234, 235, 67, 210]

$$\begin{aligned} V_{\rm eff}^{\rm F}(|S|) &= V_0 + [\Delta V(|S|)]_{1-{\rm loop}} \\ &= \kappa^2 M^4 \left\{ 1 + \frac{\kappa^2 \mathcal{N}}{32\pi^2} \left[2 \ln \frac{|S|^2 \kappa^2}{\Lambda^2} + (z+1)^2 \ln(1+z^{-1}) + (z-1)^2 \ln(1-z^{-1}) \right] \right\} \ , \end{aligned} \tag{8.8.36}$$

where

$$z = \frac{|S|^2}{M^2} \equiv x^2 \ , \tag{8.8.37}$$

[9] The notation $|\partial W/\partial\Phi_i|_{\theta=0}$ means that one has to take the scalar component (with $\theta = \bar{\theta} = 0$ in the superspace) of the superfields once one differentiates with respect to the superfields Φ_i. This is the reason for which the potential V is a function of the scalar fields ϕ_i.

[10] This expression has been derived in the case of a Minkowski background. However, during inflation the background geometry is given by the De Sitter metric, and therefore, strictly speaking, one should not use the standard Coleman-Weinberg expression, but one should instead find the corresponding expression in a De Sitter background.

and $\mathcal{N}$ stands for the dimensionality of the representations to which the fields ϕ_+, ϕ_- belong.

Employing the above found expression, Eq. (8.8.36), for the effective potential we calculate in the next section the inflaton and cosmic strings contributions to the CMB temperature anisotropies.

D-term inflation

In the context of global supersymmetry, D-term inflation is derived from the superpotential Eq. (8.8.17). In the global supersymmetric limit, Eqs.(8.8.32), (8.8.17) lead to the following expression for the scalar potential

$$V^{\rm D}(\phi_+,\phi_-,S) = \lambda^2\left[\,|S|^2(|\phi_+|^2+|\phi_-|^2)+|\phi_+\phi_-|^2\right]+\frac{g^2}{2}(|\phi_+|^2-|\phi_-|^2+\xi)^2\ , \qquad (8.8.38)$$

where g is the gauge coupling of the U(1) symmetry and ξ is a Fayet-Iliopoulos term, chosen to be positive.

The potential has two minima. There is one global minimum at zero, reached for $|S| = |\phi_+| = 0$ and $|\phi_-| = \sqrt{\xi}$. There is also one local minimum, found by minimising the potential for fixed values of S with respect to the other fields. This local minimum is equal to $V_0 = g^2\xi^2/2$, reached for $|\phi_+| = |\phi_-| = 0$, with $|S| > S_{\rm c} \equiv g\sqrt{\xi}/\lambda$. As in the previous discussed case (F-term inflation), also here the SSB of supersymmetry in the inflationary valley introduces a splitting in the masses of the components of the chiral superfields Φ_+ and Φ_-. As a result, we obtain two scalars with squared masses $m_\pm^2 = \lambda^2|S|^2 \pm g^2\xi$ and a Dirac fermion with squared mass $\lambda^2|S|^2$.

For arbitrary large S the tree level value of the potential remains constant and equal to $V_0 = (g^2/2)\xi^2$, thus S plays naturally the rôle of an inflaton field. Assuming chaotic initial conditions $|S| \gg S_{\rm c}$ one can see the onset of inflation. Along the inflationary trajectory the F-term vanishes and the Universe is dominated by the D-term, which splits the masses in the Φ_+ and Φ_- superfields, resulting to the one-loop effective potential for the inflaton field.

The radiative corrections given by the Coleman-Weinberg expression Eq. (8.8.35) lead to the following effective potential for D-term inflation

$$\begin{aligned} V^{\rm D}_{\rm eff}(|S|) &= V_0+[\Delta V(|S|)]_{1-\rm loop}\\ &= \frac{g^2\xi^2}{2}\left\{1+\frac{g^2}{16\pi^2}\left[2\ln\frac{|S|^2\lambda^2}{\Lambda^2}+(z+1)^2\ln(1+z^{-1})+(z-1)^2\ln(1-z^{-1})\right]\right\}\ , \end{aligned} \qquad (8.8.39)$$

with

$$z = \frac{\lambda^2|S|^2}{g^2\xi} \equiv x^2\ . \qquad (8.8.40)$$

Employing the above found expression for the effective potential, Eq. (8.8.39), we calculate in the next section the inflaton and cosmic strings contributions to the CMB temperature anisotropies.

8.9 Energy scale of inflation and inflaton/cosmic strings contributions to the CMB

8.9.1 F-term inflation in global supersymmetry

Assuming $V \simeq \kappa^2M^4$, while using the exact expression for the potential as given in Eq. (8.8.36) for calculating $V' \equiv {\rm d}V/{\rm d}S$, we obtain

$$V'(|S|) = \frac{2a}{|S|}z\,f(z)\ , \qquad (8.9.41)$$

with

$$a = \frac{\kappa^4 M^4 \mathcal{N}}{16\pi^2} , \tag{8.9.42}$$

and

$$f(z) = (z+1)\ln(1+z^{-1}) + (z-1)\ln(1-z^{-1}) . \tag{8.9.43}$$

Equation (8.8.25) implies [67, 210]

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\mathrm{Q-scal}} \sim \frac{1}{\sqrt{45}}\sqrt{\frac{N_{\mathrm{Q}}}{\mathcal{N}}}\frac{M^2}{M_{\mathrm{Pl}}^2} x_{\mathrm{Q}}^{-1} y_{\mathrm{Q}}^{-1} f^{-1}(x_{\mathrm{Q}}^2) , \tag{8.9.44}$$

and Eq. (8.8.27) leads to

$$N_Q = \frac{4\pi^2}{\kappa^2 \mathcal{N}}\frac{M^2}{M_{\mathrm{Pl}}^2} y_{\mathrm{Q}}^2 , \tag{8.9.45}$$

with

$$y_{\mathrm{Q}}^2 = \int_1^{x_{\mathrm{Q}}^2} \frac{\mathrm{d}z}{z f(z)} , \tag{8.9.46}$$

and

$$x_{\mathrm{Q}} = \frac{|S_{\mathrm{Q}}|}{M} . \tag{8.9.47}$$

We remind to the reader that the index $_{\mathrm{Q}}$ denotes the scale responsible for the quadrupole anisotropy in the CMB.

The coupling κ is related to the mass scale M, through the relation

$$\frac{M}{M_{\mathrm{Pl}}} = \frac{\sqrt{N_{\mathrm{Q}}\mathcal{N}}\,\kappa}{2\,\pi\, y_{\mathrm{Q}}} . \tag{8.9.48}$$

Equation (8.8.26) implies [67, 210]

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\mathrm{Q-tens}} \sim \frac{0.77}{8\pi}\kappa\frac{M^2}{M_{\mathrm{Pl}}^2} . \tag{8.9.49}$$

Employing Eq. (8.8.31) in the case of F-term inflation, we express the cosmic strings contribution as

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\mathrm{cs}} \sim \frac{9}{4}\left(\frac{M}{M_{\mathrm{Pl}}}\right)^2 . \tag{8.9.50}$$

Therefore, the total quadrupole anisotropy

$$\left[\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\mathrm{Q-tot}}\right]^2 = \left[\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\mathrm{scal}}\right]^2 + \left[\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\mathrm{tens}}\right]^2 + \left[\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\mathrm{cs}}\right]^2 \tag{8.9.51}$$

is explicitely given by

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\mathrm{Q-tot}} \sim \left\{ y_{\mathrm{Q}}^{-4}\left(\frac{\kappa^2\mathcal{N}\,N_{\mathrm{Q}}}{32\pi^2}\right)^2 \left[\frac{64N_{\mathrm{Q}}}{45\mathcal{N}} x_{\mathrm{Q}}^{-2} y_{\mathrm{Q}}^{-2} f^{-2}(x_Q^2) + \left(\frac{0.77\kappa}{\pi}\right)^2 + 324\right]\right\}^{1/2} , \tag{8.9.52}$$

where the $(\delta T/T)_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{tot}}$ is normalised to the Cosmic Background Explore (COBE) data [236], namely $(\delta T/T)_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{COBE}} \sim 6.3 \times 10^{-6}$. For given values of $\kappa, N_{\mathrm{Q}}, \mathcal{N}$, the above equation can be solved numerically for x_{Q}, and then employing Eqs. (8.9.46) and (8.9.48), one obtains y_{Q} and M. We assume $N_{\mathrm{Q}} = 60$ and we find the inflationary scale M which is proportional to the

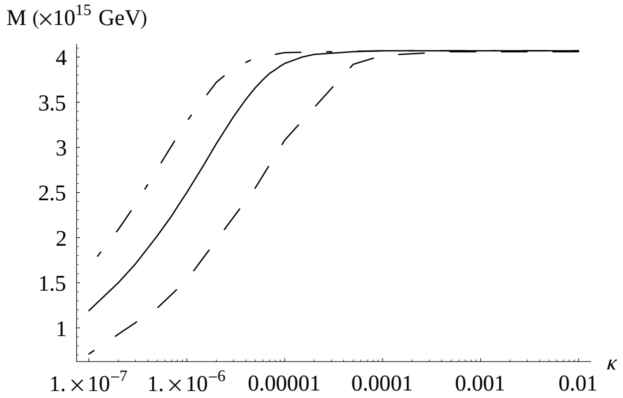

FIG. 8.4: Evolution of the inflationary scale M in units of 10^{15} GeV as a function of the dimensionless coupling κ. The three curves correspond to $\mathcal{N} = \mathbf{27}$ (curve with broken line), $\mathcal{N} = \mathbf{126}$ (full line) and $\mathcal{N} = \mathbf{351}$ (curve with lines and dots).

string mass scale, as a function of the superpotential coupling κ for three values of $\mathcal{N}$. We choose $\mathcal{N} = \mathbf{27}, \mathbf{126}, \mathbf{351}$, which correspond to realistic SSB schemes in SO(10) or E_6 models. The results are shown in Fig. 8.4 below.

Clearly, the mass scale is of the order of 10^{15} GeV, and it grows very slowly with $\mathcal{N}$. Since it will be useful later to know approximately the evolution of the mass parameter M with respect to the coupling κ, we fit the curve for $\mathcal{N} = \mathbf{126}$, which is shown in Fig. 8.4, by

$$M(\kappa) \sim \begin{cases} 4.1 \times 10^{15} + 5.3 \times 10^{12} \ln(\kappa) \text{ GeV} & \text{if} \quad \kappa \in [2 \times 10^{-5}, 10^{-2}] \ , \\ 1.1 \times 10^{16} + 6.3 \times 10^{14} \ln(\kappa) \text{ GeV} & \text{if} \quad \kappa \in [10^{-7}, 2 \times 10^{-5}] \ . \end{cases} \tag{8.9.53}$$

The dimensionless coupling κ is subject to the gravitino constraint, as well as to the constraint imposed by the CMB temperature anisotropies. As we show below, the strongest constraint on κ is imposed by the measured CMB temperature anisotropies ; the cosmic strings contribution to the power spectrum should be strongly suppressed in order not to contradict the data.

Firstly, we calculate the upper bound on the dimensionless superpotential coupling κ, as imposed by the gravitino constraint. After the inflationary era, our Universe enters the high entropy radiation dominated phase via the reheating process, during which the inflaton energy density decays perturbatively into normal particles. This process is characterised by the reheating temperature $T_{\rm RH}$. In order to have a successful reheating it is important not to create too many gravitinos.

Within the Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM), and assuming a see-saw mechanism to give rise to massive neutrinos, the reheating temperature is [237]

$$T_{\rm RH} \approx \frac{(8\pi)^{1/4}}{7} (\Gamma M_{\rm Pl})^{1/2} \ , \tag{8.9.54}$$

with Γ the decay width of the oscillating inflaton and the Higgs fields into right-handed neutrinos [237],

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{M_i}{M}\right)^2 m_{\rm infl} \ , \tag{8.9.55}$$

$m_{\rm infl}$ the inflaton mass, and M_i the right handed neutrino mass eigenvalues. Eqs. (8.9.48), (8.9.54), (8.9.55) lead to

$$T_{\rm RH} \sim \frac{1}{12} \left(\frac{60}{N_{\rm Q}}\right)^{1/4} \left(\frac{1}{\mathcal{N}}\right)^{1/4} y_{\rm Q}^{1/2} M_i \ . \tag{8.9.56}$$

The reheating temperature must satisfy the gravitino constraint $T_{\rm RH} \leq 10^9$ GeV [120]. This constraint implies strong bounds on the M_i's, which satisfy the inequality $M_i < m_{\rm infl}/2$, where the inflaton mass is

$$m_{\rm infl} = \sqrt{2}\kappa M \ . \tag{8.9.57}$$

The strong bounds on M_i lead to quite small corresponding dimensionless couplings γ_i. The two heaviest neutrino are expected to have masses of the order of $M_3 \simeq 10^{15}$ GeV and $M_2 \simeq 2.5 \times 10^{12}$ GeV respectively [128]. This implies that for $y_{\rm Q}$ of the order of 1, M_i in Eq. (8.9.54) cannot be identified with the heaviest or the next to heaviest right handed neutrino, otherwise the reheating temperature would be higher than the upper limit imposed by the gravitino bound. Thus, M_i is M_1, with $M_1 \sim 6 \times 10^9$ GeV [128]. (This value is in agreement with the mass suggested in Ref. [237] for the mass of the right handed neutrino into which the inflaton disintegrates.)

Therefore, using Eqs. (8.9.54), (8.9.55) and (8.9.57), the gravitino constraint on the reheating temperature implies,

$$\frac{\sqrt{2}}{14\pi^{1/4}} M_1 \left[\frac{M_{\rm Pl}}{M(\kappa)}\right]^{1/2} \sqrt{\kappa} \leq 10^9 {\rm GeV} \ . \tag{8.9.58}$$

Using the fit of the function $M(\kappa)$ given in Eq. (8.9.53), it is possible to evaluate numerically $\sqrt{\kappa/M(\kappa)}$ and find an upper limit on the allowed values for the coupling of the superpotential,

$$\kappa \lesssim 8 \times 10^{-3} \ , \tag{8.9.59}$$

in agreement with the upper bound found in Ref. [238].

Secondly, we proceed with a strongest constraint on κ, imposed from the measurements on the CMB temperature anisotropies. The cosmic strings contribution to the quadrupole can be calculated from

$$\mathcal{A}_{\rm cs} \sim \left[\frac{\left(\frac{\delta T}{T}\right)^{\rm cs}_{\rm Q}}{\left(\frac{\delta T}{T}\right)^{\rm COBE}_{\rm Q}}\right]^2 \ , \tag{8.9.60}$$

and it is shown in Fig. 8.5.

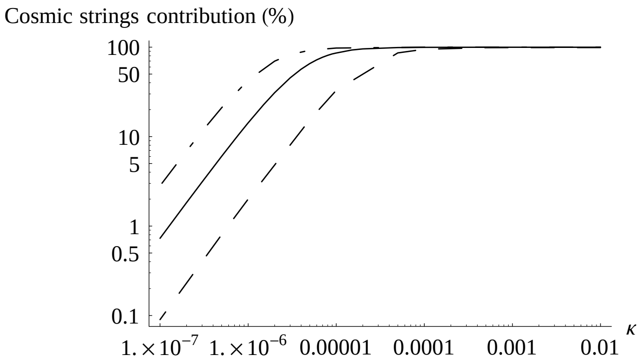

FIG. 8.5: Evolution of the cosmic strings contribution to the quadrupole anisotropy as a function of the coupling of the superpotential, κ. The three curves correspond to $\mathcal{N} = \mathbf{27}$ (curve with broken line), $\mathcal{N} = \mathbf{126}$ (full line) and $\mathcal{N} = \mathbf{351}$ (curve with lines and dots).

As one can see, for small values of the coupling κ the cosmic strings contribution depends on the value of $\mathcal{N}$. Thus, we should find the value of $\mathcal{N}$ required for the allowed SSB patterns

leading to $G_{SM} \times Z_2$.
Within the framework of our study, the SSB schemes allowed from particle physics and cosmology are explicitely found in Ref. [1] and we recall them in Appendix A. The parameter $\mathcal{N}$ is the dimensionality of the Higgs fields representation that generate the SSB ; these fields are coupled to the inflaton. As explained in Ref. [1], the inflationary era should take place after the last formation of monopoles and/or domain walls since these objects are incompatible with cosmology. Therefore, there are just very few choices for the SSB stage where inflation can be placed. The value of the parameter $\mathcal{N}$ depends on the GUT gauge group and the SSB scheme where inflation takes place. For SO(10), under the requirement that R-parity is conserved down to low energies, $\mathcal{N} = \mathbf{126}$. For E_6, the Higgs representations can be $\mathcal{N} = \mathbf{27}$ or $\mathcal{N} = \mathbf{351}$. Our results depend slightly on the choice of $\mathcal{N}$ and in what follows, we focus mainly on $\mathcal{N} = \mathbf{126}$.

Comparing the results we obtained for the cosmic strings contribution to the CMB fluctuations as a function of the superpotential coupling κ, (see, Fig. 8.5) against the cosmic strings contribution allowed from the measurements, we can constrain κ. Already BOOMERanG [239], MAXIMA [240] and DASI [241] experiments imposed [144] an upper limit on $\mathcal{A}_{\rm cs}$, which is $\mathcal{A}_{\rm cs} \lesssim 18\%$. Clearly, the limit set by the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) measurements [143] should be stronger. A recent Bayesian analysis in a three dimensional parameter space [52] have shown that a cosmic strings contribution to the primordial fluctuations $\mathcal{A}_{\rm cs}$ higher than 9% is excluded up to 99% confidence level.

We state below the constraint we found for the dimensionless parameter κ, as a function of $\mathcal{N}$,

$$\kappa \lesssim 7 \times 10^{-7} \times \frac{126}{\mathcal{N}} , \tag{8.9.61}$$

which holds for $\mathcal{N} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{16}, \mathbf{27}, \mathbf{126}, \mathbf{351}\}$. This constraint on κ, Eq. (8.9.61), is in agreement with the one found in Ref. [209].

Both, the CMB lower bound and the gravitino upper bound on κ are summarised in Fig. 8.6.

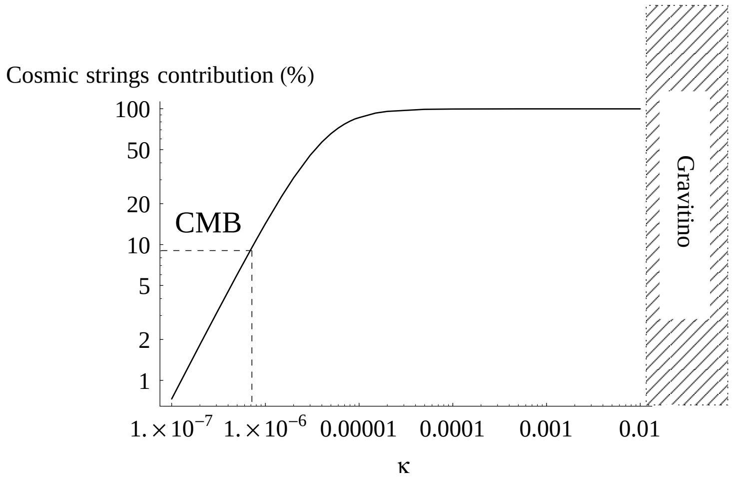

FIG. 8.6: Constraints on the single parameter κ of the model. The gravitino constraint implies $\kappa \leq 8 \times 10^{-3}$. The allowed cosmic strings contribution to the CMB angular power spectrum implies $\kappa \lesssim 7 \times 10^{-7}$, for $\mathcal{N} = \mathbf{126}$.

The implications of this constraint on the single free parameter of the F-term inflationary model are important. Hybrid F-term inflation was known to have an appealing feature as compared to the most elegant inflationary scenario within nonsupersymmetric theories, i.e.

chaotic inflation. Namely, it was believed that there was no need of fine tuning which will set a very small value for the coupling of the superpotential. This nice feature has been disappeared once we compare theoretical predictions against cosmological data. As we show below, one possible way out is to employ the curvaton mechanism. Another implication of this constraint, quite important for cosmology, is the fact that this constraint on κ can be converted into a constraint on the mass parameter M. We would like to remind to the reader that this parameter controls the mass of the strings formed, as well as the inflationary scale. Using the CMB limit on the cosmic strings contribution, we can also obtain that, up to 99% of confidence level,

$$M \lesssim 2 \times 10^{15}\ \mathrm{GeV}\ . \tag{8.9.62}$$

As we show below, this constraint is robust since it holds even when the curvaton mechanism is involved, and for all values of $\mathcal{N}$.

In the curvaton scenario, the curvaton field is responsible for the generation of the primordial fluctuations. The curvaton is a scalar field, that is subdominant during the inflationary era as well as at the beginning of the radiation dominated era which follows the inflationary phase. The effective curvaton mass is assumed to be much smaller that the Hubble parameter during the inflationary phase. Within the framework of supersymmetry, which is the context of our study, one expects the existence of scalar fields. Thus, it is reasonable to expect that one of them could indeed play the rôle of the curvaton field. In addition, in the class of models we are considering, one may expect that it may exist a natural candidate for the curvaton field. As we have shown in Ref. [1], in many acceptable SSB schemes apart from the formation of topological cosmic strings we have the formation of embedded strings, which are topologically and dynamically unstable. If the decay product of embedded strings can give a scalar field before the onset of inflation, then such a scalar field could play the rôle of the curvaton field.

Assuming the existence of a curvaton field, there is an additional contribution to the temperature anisotropies. Thus,

$$\left[\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\mathrm{tot}}\right]^2 = \left[\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\mathrm{infl}}\right]^2 + \left[\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\mathrm{cs}}\right]^2 + \left[\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\mathrm{curv}}\right]^2 . \tag{8.9.63}$$

The inflaton contribution has a scalar and a tensor part, however since the tensor part in the supersymmetric hybrid inflation is always much smaller than the scalar one, we neglect it.

Since the primordial curvaton fluctuation is converted to purely adiabatic density fluctuations, the curvaton contribution in terms of the metric perturbation reads

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\mathrm{curv}} \equiv \frac{\Psi_{\mathrm{curv}}}{3} , \tag{8.9.64}$$

and from Eq. (8.8.30) we have

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\mathrm{curv}} = -\frac{4}{27}\frac{\delta\psi_{\mathrm{init}}}{\psi_{\mathrm{init}}} . \tag{8.9.65}$$

For $V \simeq \kappa^2 M^4$, Eqs. (8.8.28), (8.8.29), (8.9.48) and (8.9.65) imply

$$\left[\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\mathrm{curv}}\right]^2 = y_Q^{-4}\left(\frac{\kappa^2 \mathcal{N} N_{\mathrm{Q}}}{32\pi^2}\right)^2 \left[\left(\frac{16}{81\pi\sqrt{3}}\right)\kappa\left(\frac{M_{\mathrm{Pl}}}{\psi_{\mathrm{init}}}\right)\right]^2 , \tag{8.9.66}$$

We solve Eq. (8.9.63) using Eq. (8.9.66) and we obtain the different contributions of the three sources of anisotropies : inflaton, cosmic strings and curvaton. Their respective contributions as a function of κ, or ψ_{init}, are shown in Fig. 8.7. for a fixed value of κ, the cosmic strings contribution decreases as ψ_{init} decreases, while the curvaton contribution becomes

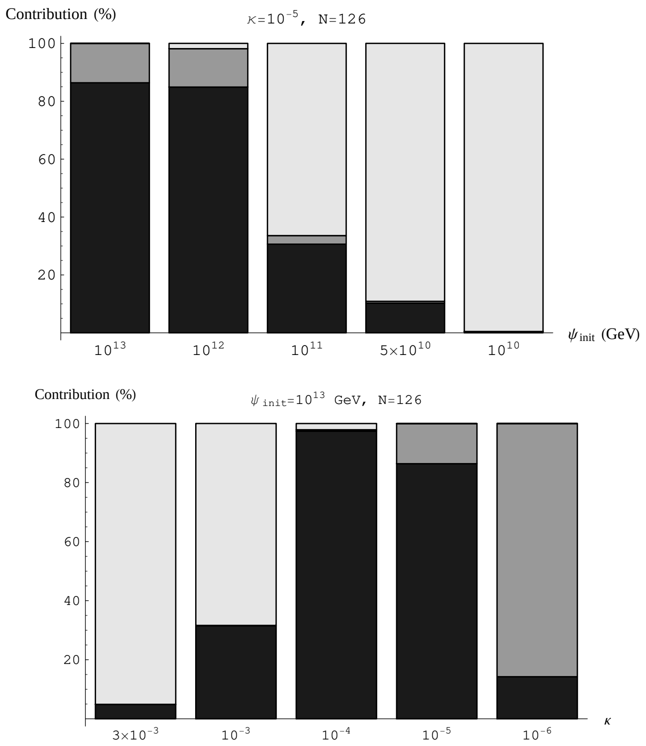

FIG. 8.7: The cosmic strings (dark gray), curvaton (light gray) and inflaton (gray) contributions to the CMB temperature anisotropies as a function of the the initial value of the curvaton field $\psi_{\rm init}$, and the superpotential coupling κ, for $\mathcal{N} = \mathbf{126}$.

dominant. It is thus possible to use the WMAP constraint to limit $\psi_{\rm init}$. The upper bound on $\psi_{\rm init}$ depends on the coupling κ. In addition, one has to impose the gravitino constraint. Therefore, a coupling bigger than 10^{-2} is excluded. More precisely,

$$\psi_{\rm init} \lesssim 5 \times 10^{13} \left(\frac{\kappa}{10^{-2}}\right) \mathrm{GeV} \ . \tag{8.9.67}$$

The above constraint is valid only if κ is in the range $[10^{-6},\ 1]$, while for smaller values of κ, the cosmic strings contribution is smaller than the WMAP limit for any value of the curvaton field (see, Fig. 8.7).

8.9.2 F-term inflation and supergravity corrections

We proceed with the supergravity corrections. The scalar potential in supergravity has the general form [242]

$$V = \frac{e^G}{M_{\rm Pl}^4}\left[G_i (G^{-1})^i_j G^j - 3\right] \quad \text{with} \quad G = \frac{K}{M_{\rm Pl}^2} + \ln\frac{|W|^2}{M_{\rm Pl}^6} \ , \tag{8.9.68}$$

where the Kähler potential $K(\phi, \phi^*)$ is a real function of the complex scalar fields ϕ_i, and their Hermitian conjugates $\phi_i{}^*$. The ϕ_i are scalar components of the chiral superfields Φ_i. We adopted the following notations

$$G^i \equiv \frac{\partial G}{\partial \phi_i} \ , \quad G_j \equiv \frac{\partial G}{\partial \phi^{j\,*}} \ . \tag{8.9.69}$$

Assuming that the D-term is flat along the inflationary trajectory, one can ignore it during F-term inflation. Thus, we only consider the F-term in the above equation. If we expand $K = \sum_i |\phi_i|^2 + \cdots$, the corrections we get to the lowest order inflationary potential lead to the scalar potential

$$V = \sum_i \left|\frac{\partial W}{\partial \phi_i}\right|^2 \left(1 + \frac{1}{M_{\rm Pl}^2}\sum_i |\phi_i|^2 + \cdots\right) + \text{other terms} . \tag{8.9.70}$$

As it was shown in Ref. [216], assuming the minimal form for the Kähler potential K and minimising the scalar potential V with respect to ϕ_- and ϕ_+ for $|S| > M$, we obtain that the SUGRA correction to the scalar potential is

$$V_{\rm SUGRA} = \kappa^2 M^4 \left[\frac{1}{8}\frac{|S|^4}{M_{\rm Pl}^4} + \cdots\right] . \tag{8.9.71}$$

The effective scalar potential becomes

$$\begin{aligned} V_{\rm eff} = \kappa^2 M^4 \Bigg\{1 + \frac{\kappa^2 \mathcal{N}}{32\pi^2}\Bigg[2\ln\frac{|S|^2\kappa^2}{\Lambda^2} + (z+1)^2\ln(1+z^{-1}) \\ + (z-1)^2\ln(1-z^{-1})\Bigg] + \frac{1}{8}\frac{|S|^4}{M_{\rm Pl}^4}\Bigg\} . \end{aligned} \tag{8.9.72}$$

In the literature (e.g., see Ref. [133]), some authors consider only two terms for the scalar potential. Namely, they consider only the first term of the radiative corrections and the term coming from the SUGRA correction. However, this assumption holds only if $x_{\rm Q} \gg 1$. In our study we have found that the order of magnitude for $x_{\rm Q}$ is $\mathcal{O}(1)$ except for high values of the superpotential coupling κ (namely $\kappa \geq 10^{-2}$), but those are forbidden by the gravitino constraint. In conclusion, we find that all terms coming from the radiative corrections have to be taken into account.

Since $|S_{\rm Q}|/M_{\rm Pl} \lesssim 10^{-3}$, the potential and its first derivative is not significantly affected by the SUGRA corrections. Thus, including these corrections we do not expect to find any difference in the $\delta T/T$. This is indeed what one expects, since the value of the inflaton field, in the absence of SUGRA corrections, stays far below the Planck mass.

In conclusion, one can indeed neglect the supergravity corrections in the framework of F-term inflation.

8.9.3 D-term inflation in global supersymmetry

In what follows, we derive in the framework of global SUSY the cosmic strings contribution to the temperature anisotropies of the CMB. We use $V \simeq V_0 = g^2\xi^2/2$, while we employ Eq. (8.8.39) to derive the exact expression for $V' \equiv \partial V(|S|)/\partial|S|$, which reads

$$V'(|S|) = \frac{2b}{|S|} z\, f(z) , \tag{8.9.73}$$

where $f(z)$ is the same as in the F-term, Eq. (8.9.43), and

$$b = \frac{g^4\xi^2}{16\pi^2}. \tag{8.9.74}$$

The next step is to express the number of e-foldings $N_{\rm Q}$. Employing the expressions written above for V and V' and using Eq. (8.8.27), we obtain

$$N_{\rm Q} = \frac{2\pi^2}{\lambda^2}\frac{\xi}{M_{\rm Pl}^2}\int_{z_{\rm end}}^{z_Q}\frac{{\rm d}z}{zf(z)} , \tag{8.9.75}$$

with

$$z_{\rm end} = \frac{\lambda^2|S_{\rm end}|^2}{g^2\xi} \ . \tag{8.9.76}$$

One has to evaluate the value of the inflaton field at the end of inflation. The inflationary era ends when one of the two following conditions is reached :

- In the global minimum of the potential, $\langle\phi_+\rangle$ or $\langle\phi_+\rangle$ is not zero anymore. This means that one of the two fields acquires a positive effective mass squared. Let us call $z_{\rm SB}$ the value of z for which this condition is realized.
- The slow roll conditions cease to be satisfied. Within supersymmetric hybrid inflation, the slow roll parameter ϵ is generically very small, and the slow roll condition becomes just $\eta \sim 1$. We denote by $z_{\rm SR}$ the value of z for which the slow roll condition ceases to be satisfied.

Thus,

$$z_{\rm end} = \max(z_{\rm SB}, z_{\rm SR}) \ . \tag{8.9.77}$$

Let us calculate the values of $z_{\rm SB}$ and $z_{\rm SR}$. Firstly, $z_{\rm SB}$ can be read from the quadratic part (for the fields ϕ_+ and ϕ_-) of the potential as it is given by Eq. (8.8.38). Namely, from the Lagrangian

$$\mathcal{L} = \lambda^2|S|^2(|\phi_+|^2 + |\phi_-|^2) + g^2\xi(|\phi_+|^2 - |\phi_-|^2) \ , \tag{8.9.78}$$

we get $z_{\rm SB} = 1$.
Secondly, the end of the slow roll phase of inflation is reached when the slow roll parameter η becomes of the order of unity,

$$\eta \equiv M_{\rm Pl}^2 \left[\frac{V''(S)}{V(S)}\right] \sim 1 \ . \tag{8.9.79}$$

For our model,

$$\eta = \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\left(\frac{M_{\rm Pl}^2}{\xi}\right) g(z) \ , \tag{8.9.80}$$

where

$$g(z) = (3z+1)\ln(1+z^{-1}) + (3z-1)\ln(1-z^{-1}) \ . \tag{8.9.81}$$

Equation (8.9.79) can be solved provided $\lambda \lesssim 4\times10^{-3}$. This is a reasonable condition since higher values of λ would be forbidden by the gravitino constraint (see discussion in III.A). For $\lambda \lesssim 4\times10^{-3}$, $\xi/\lambda^2 \gtrsim 10^{36}$ and as one can see from the shape of the function $g(z)$, the two solutions of Eq. (8.9.79) are very close to 1. This implies $z_{\rm SR} \sim 1$, and the number of e-foldings reads

$$N_{\rm Q} = \frac{2\pi^2}{\lambda^2}\frac{\xi}{M_{\rm Pl}^2} y_{\rm Q}^2 \ , \tag{8.9.82}$$

where $y_{\rm Q}$ is given by Eq. (8.9.46) with $x_{\rm Q} = \lambda|S_{\rm Q}|/(g\sqrt{\xi})$.

To measure the weight of the cosmic strings contribution, we suppose three sources for the quadrupole anisotropy of the CMB, namely

$$\left[\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm tot}\right]^2 = \left[\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm scal}\right]^2 + \left[\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm tens}\right]^2 + \left[\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm cs}\right]^2 \ , \tag{8.9.83}$$

and we calculate each term using Eqs. (8.8.25), (8.8.26), (8.8.31) respectively. In this last equation, the VEV of the Higgs field responsible of the cosmic strings formation is $\sqrt{\xi}$. Thus, eliminating ξ with Eq. (8.9.82), we obtain

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm Q-tot} \sim \left\{ y_{\rm Q}^{-4}\left(\frac{\lambda^2 N_{\rm Q}}{16\pi^2}\right)^2 \left[\frac{16N_{\rm Q}}{45}x_Q^{-2}y_Q^{-2}f^{-2}(x_Q^2) + \left(\frac{0.77g}{\sqrt{2}\pi}\right)^2 + 324\right]\right\}^{1/2} \ , \tag{8.9.84}$$

where $(\delta T/T)_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{tot}}$ is normalised to the COBE data, i.e., $(\delta T/T)_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{COBE}} \sim 6.3 \times 10^{-6}$. For given values of λ and N_{Q} we solve numerically Eq. (8.9.84) to get x_{Q}.

Regarding D-term inflation we find that, as in the F-term case, the tensor contribution to the $\delta T/T$ is negligible. For $\lambda \lesssim 4 \times 10^{-3}$, one can compute the mass scale $M_{\mathrm{D}} = \sqrt{\xi}$ as a function of λ. We find that ξ, which can be seen as a *mass parameter*, has a very similar shape as the one found for M in the case of F-term inflation (see, Fig. 8.4). Moreover, we obtain that the contribution of the cosmic strings to the quadrupole anisotropy is very similar to the F-term case. In addition, to be consistent with the CMB data, λ in D-term inflation should obey a similar limit to the one found for κ in F-term inflation, namely $\lambda \lesssim 3 \times 10^{-5}$. These results are summarised in Fig. 8.8.

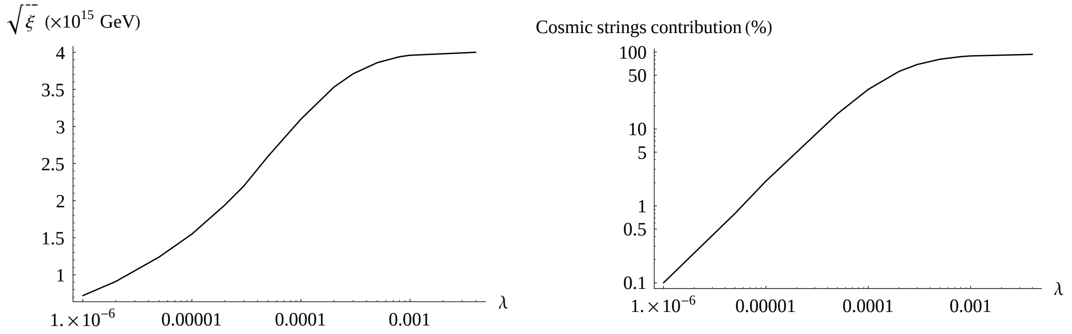

FIG. 8.8: On the left, evolution of the mass scale $\sqrt{\xi}$ as a function of the coupling λ. On the right, evolution of the cosmic strings contribution to the quadrupole anisotropy as a function of the coupling of the superpotential, λ. These plots are derived in the framework of SUSY.

At this point we would like to bring to the attention of the reader that our findings regarding D-term inflation in SUSY, disagree with some results stated in previous studies[11] (see eg., Ref. [215]). The reason is that in our analysis, we take into account *all terms of the radiative corrections* and, as we have already shown in our discussion on F-term inflation, these terms have an essential impact on the determination of the cosmic strings contribution to the CMB.

Knowing x_{Q}, one can compute from Eq. (8.8.40) the order of magnitude of the corresponding inflaton field S_{Q}. Even though Eq. (8.9.84) is very similar to the one we had in the case of F-term hybrid inflation, i.e., Eq. (8.9.52), the conclusions for the value of the inflaton field as compared to the Planck mass are quite different. This is due to the dependence of x_{Q} on the coupling λ, which makes the inflaton field S_{Q} to be of the order of the Planck mass or higher.

The analysis we presented above implies that global supersymmetry is insufficient to study D-term inflation. It is clear that only in the context of supergravity one can treat correctly the issue of D-term inflation and its cosmological implications.

8.9.4 D-term inflation in supergravity

The case of D-term inflation has to be addressed within the framework of supergravity, since as we have shown in the previous subsection, the fields are not negligible as compared to the Planck mass.

Inflation is still derived from the superpotential

$$W_{\mathrm{infl}}^{\mathrm{D}} = \lambda S \Phi_+ \Phi_- \ . \tag{8.9.85}$$

[11] More precisely, we disagree with the statement that *in the context of D-term inflation cosmic strings contribute to the C_ℓ's up to the level of* 75%.

The F-term part of the scalar potential is given by Eq. (8.9.68). Considering also the D-term, the total scalar potential reads

$$V = \frac{e^G}{M_{\rm Pl}^4}\left[G_i(G^{-1})^i_j G^j - 3\right] + \frac{1}{2}[{\rm Re}f(\Phi_i)]^{-1}\sum_a g_a^2 D_a^2 \ , \tag{8.9.86}$$

where $f(\Phi_i)$ is the gauge kinetic function and

$$G = \frac{K}{M_{\rm Pl}^2} + \ln\frac{|W|^2}{M_{\rm Pl}^6} \ . \tag{8.9.87}$$

The Kähler potential $K(\phi_i, \phi_i^*)$ is a real function of the complex scalar fields ϕ_i, and their Hermitian conjugates $\phi_i{}^*$ where the ϕ_i are scalar components of the chiral superfields Φ_i. Upper (lower) indices (i, j) denote derivatives with respect to ϕ_i (ϕ^{i*}). For the D-term part, ξ_a is the Fayet-Iliopoulos term, g_a the coupling of the $U(1)^a$ symmetry, which is generated by T_a and under which the chiral superfields S, Φ_+ and Φ_- have charges 0, +1 and −1 respectively. Finally,

$$D_a = \phi_i (T_a)^i{}_j K^j + \xi_a \ . \tag{8.9.88}$$

In what follows, we assume[12] the minimal structure for $f(\Phi_i)$ (i.e., $f(\Phi_i) = 1$) and take the minimal Kähler potential given by

$$K = |\phi_-|^2 + |\phi_+|^2 + |S|^2 \ . \tag{8.9.89}$$

Therefore, as it was found in [136, 137], the scalar potential reads

$$\begin{aligned} V_{\rm SUGRA}^{\rm D} &= \lambda^2 \exp\left(\frac{|\phi_-|^2 + |\phi_+|^2 + |S|^2}{M_{\rm Pl}^2}\right)\left[|\phi_+\phi_-|^2\left(1 + \frac{|S|^4}{M_{\rm Pl}^4}\right)\right. \\ &+ \left. |\phi_+ S|^2\left(1 + \frac{|\phi_-|^4}{M_{\rm Pl}^4}\right) + |\phi_- S|^2\left(1 + \frac{|\phi_+|^4}{M_{\rm Pl}^4}\right) + 3\frac{|\phi_-\phi_+ S|^2}{M_{\rm Pl}^2}\right] \\ &+ \frac{g^2}{2}\left(|\phi_+|^2 - |\phi_-|^2 + \xi\right)^2 \ . \end{aligned} \tag{8.9.90}$$

As in the case of global supersymmetry, for $S > S_{\rm c}$ the potential is minimised for $|\phi_+| = |\phi_-| = 0$ and therefore, at the tree level, the potential in the inflationary valley is constant, $V_0 = g^2\xi^2/2$. However, despite what is sometines claimed, this does not mean that the effective inflationary potential is identical to the one found in the case of global supersymmetry. One has to compute the radiative corrections, and must first calculate the effective masses of the components of the superfields Φ_+ and Φ_-. Extracting the quadratic terms from the potential, given by Eq. (8.9.90), the scalar components ϕ_+ and ϕ_- get squared masses

$$m_\pm^2 = \lambda^2|S|^2\exp\left(\frac{|S|^2}{M_{\rm Pl}^2}\right) \pm g^2\xi \ . \tag{8.9.91}$$

To calculate the masses of the fermionic components Ψ_+ and Ψ_-, one has to use the Lagrangian of the fermionic sector,

$$\mathcal{L}_{\rm fermion} = \frac{1}{2}e^{G/2}\left[-G^{ij} - G^i G^j + G^{ij}_k (G^{-1})^k_l G^l\right]\bar{\Psi}_{iL}\Psi_{jR} + {\rm h.c.} \ , \tag{8.9.92}$$

[12]This is the simplest supergravity model and in general the Kähler potential can be a more complicated function of the superfields. This is generally the case for supergravity theories derived from superstring theories.

where Ψ_{iL} and Ψ_{jR} are left and right components of the Majorana spinors Ψ_+ and Ψ_-. Using Eq. (8.9.89), one gets a Dirac fermion with squared mass

$$m_{\rm f}^2 = \lambda^2 |S|^2 \exp\left(\frac{|S|^2}{M_{\rm Pl}^2}\right) . \tag{8.9.93}$$

We calculate the radiative corrections $[\Delta V(|S|)]_{1-\rm loop}$ using the Coleman-Weinberg expression, Eq. (8.8.35). Thus, we compute the full effective scalar potential during D-term inflation, within the context of SUGRA

$$\begin{aligned} V_{\rm eff}^{\rm D-SUGRA} &= V_0 + [\Delta V(|S|)]_{1-\rm loop} \\ &= \frac{g^2\xi^2}{2}\left\{1 + \frac{g^2}{16\pi^2}\left[2\ln\frac{\lambda^2|S|^2}{\Lambda^2}\exp\left(\frac{|S|^2}{M_{\rm Pl}^2}\right)\right.\right. \\ &\quad \left.\left. +(z+1)^2\ln(1+z^{-1}) + (z-1)^2\ln(1-z^{-1})\right]\right\} \end{aligned} \tag{8.9.94}$$

with

$$z = \frac{\lambda^2|S|^2}{g^2\xi}\exp\left(\frac{|S|^2}{M_{\rm Pl}^2}\right) \equiv x^2 . \tag{8.9.95}$$

The above potential is a generalisation of the SUSY D-term potential given by Eq. (8.8.39). The end of inflation is achieved when one of the two conditions is satisfied : (i) the symmetry is spontaneously broken, or (ii) the slow roll condition is violated. By definition of the variable z, the symmetry breaking condition is still

$$z_{\rm SB} = 1 . \tag{8.9.96}$$

For the slow roll condition, one has to compute the slow roll parameter η and then to solve $\eta \sim 1$. With the effective potential given by Eq. (8.9.94), one can compute its first derivative

$$V'(|S|) = \frac{2b}{|S|} z f(z)\left(1 + \frac{|S|^2}{M_{\rm Pl}^2}\right) . \tag{8.9.97}$$

Assuming $V \simeq V_0$ and using the exact expression for V', the η parameter reads

$$\eta(z) = \left(\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{M_{\rm Pl}^2}{|S|^2}\right) z\left[g(z) + \frac{|S|^2}{M_{\rm Pl}^2}h_3(z) + \frac{|S|^4}{M_{\rm Pl}^4}h_4(z)\right] , \tag{8.9.98}$$

where $g(z)$ has been introduced for D-term inflation in Eq. (8.9.81), and $h_3(z), h_4(z)$ are given by

$$\begin{aligned} h_3(z) &= (9z+5)\ln(1+z^{-1}) + (9z-5)\ln(1-z^{-1}) , &(8.9.99)\\ h_4(z) &= (4z+2)\ln(1+z^{-1}) + (4z-2)\ln(1-z^{-1}) . &(8.9.100)\end{aligned}$$

Supergravity corrections become essential for S at least one order of magnitude bigger that $M_{\rm Pl}$, and under this condition the solutions of $\eta(z) = 1$ are $z_{\rm SR}^{(1)} = 1^+$ and $z_{\rm SR}^{(2)} = 1^-$. Thus, z at the end of inflation, as defined by Eq. (8.9.77), is $z_{\rm end} = 1$.

The more complicated expression for $z(|S|)$ makes the calculation of the different contributions to the CMB power spectrum trickier. The cosmic strings contribution remains the same as the one computed in the case of SUSY D-term inflation, since it depends only on the scale $\sqrt{\xi}$. Concerning the inflaton contribution, we can use the dominant term of the potential $V \simeq V_0$ and the exact expression for the first derivative, Eq. (8.9.97), to write the number of e-foldings

$$N_{\rm Q} = \frac{2\pi^2}{g^2}\tilde{y}_{\rm Q}(x_{\rm Q}, \lambda, \xi, g) , \tag{8.9.101}$$

where

$$\tilde{y}_{\rm Q}(x_{\rm Q},\lambda,\xi,g) = \int_1^{x_{\rm Q}^2} \frac{{\rm W}(z(g^2\xi)/(\lambda^2 M_{\rm Pl}^2))}{z^2 f(z)[1+{\rm W}(z(g^2\xi)/(\lambda^2 M_{\rm Pl}^2))]^2}\,{\rm d}z\ . \tag{8.9.102}$$

We note that in the above definition of $\tilde{y}_{\rm Q}$, the function ${\rm W}(x)$ is the "W-Lambert function", i.e., the inverse of the function $F(x) = xe^x$. Setting $c \equiv (g^2\xi)/(\lambda^2 M_{\rm Pl}^2)$, the number of e-foldings $N_{\rm Q}$ becomes a function of only c and $x_{\rm Q}$, once g is fixed, and it is shown in Fig. 8.9. Imposing $N_{\rm Q} = 60$ allows us to find a numerical relation between c and $x_{\rm Q}$, as illustrated in Fig. 8.9.

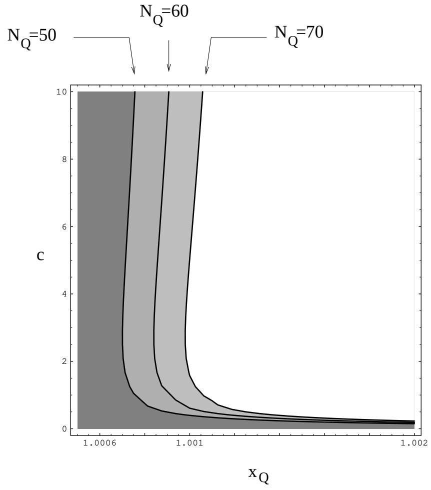

FIG. 8.9: Iso-contours of $N_{\rm Q}$ for $N_{\rm Q} = 50, 60, 70$ in the plan $(x_{\rm Q}, c \equiv (g^2\xi)/(\lambda^2 M_{\rm Pl}^2))$. This graph is obtained for $g = 10^{-2}$.

Using this relation between c and $x_{\rm Q}$, it is possible to construct a function $x_{\rm Q}(\xi)$ and then express the three contributions (scalar, tensor and cosmic strings) to the CMB temperature anisotropies only as a function of the Fayet-Iliopoulos term ξ. Thus, we obtain that the total quadrupole temperature anisotropy reads

$$\begin{aligned}\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm Q}^{\rm tot} \sim\ & \frac{\xi}{M_{\rm Pl}^2}\left\{\frac{\pi^2}{90g^2}x_{\rm Q}^{-4}f^{-2}(x_{\rm Q}^2)\frac{{\rm W}(x_{\rm Q}^2(g^2\xi)(\lambda^2 M_{\rm Pl}^2))}{\left[1+{\rm W}(x_{\rm Q}^2(g^2\xi)(\lambda^2 M_{\rm Pl}^2))\right]^2}\right.\\ & \left. + \left(\frac{0.77g}{8\sqrt{2}\pi}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2\right\}^{1/2}\ ,\end{aligned} \tag{8.9.103}$$

where the only unknown is ξ, for given values of g and λ. We normalise the quadrupole anisotropy to COBE and we calculate numerically ξ, and thus $x_{\rm Q}$ using the function $x_{\rm Q}(\xi)$, as well as the various contributions as a function of the couplings λ and g.

Our results are listed below. Firstly, as previously, it is straightforward to see that the tensor contribution, even for $g = 1$, is completely negligible. Second, the inflaton field $S_{\rm Q}$ is of the order of $10 M_{\rm Pl}$ for the studied parameter space in λ and g whereas $M_{\rm D} = \sqrt{\xi}$ is still of the order of 2×10^{15} GeV. Concerning cosmic strings contribution to the CMB, we can see from Fig. 8.10 that it is not constant : it depends strongly on the value of the gauge coupling g and the superpotential coupling λ. For $g \gtrsim 1$, it is not possible that the D-term inflationary era lasts 60 e-foldings. Thus, a multiple stage inflation is necessary to solve the horizon problem. For $g \gtrsim 2\times 10^{-2}$, the cosmic strings contribution is always greater than the WMAP limit, thus, it is ruled out.

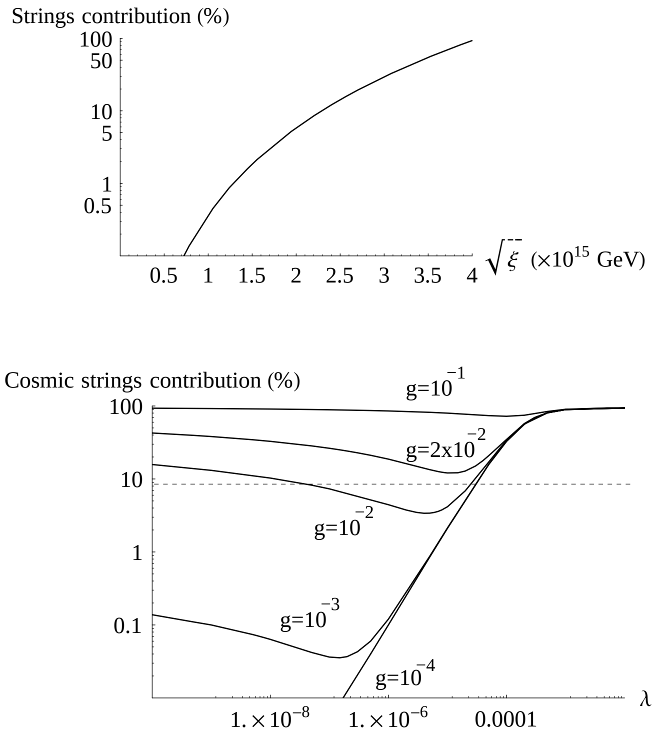

FIG. 8.10: On the left, cosmic strings contribution as a function of the mass scale $\sqrt{\xi}$. This holds for all studied values of g. On the right, cosmic strings contribution to the CMB temperature anisotropies, as a function of the superpotential coupling λ, for different values of the gauge coupling g. The maximal contribution alowed by WMAP is represented by a dotted line. The plots are derived in the framework of SUGRA.

For high values of the superpotential coupling $\lambda \gtrsim 10^{-3}$, or for small values of the gauge coupling g (namely $g \lesssim 10^{-4}$), our findings are very similar to the ones obtained for D-term inflation within the SUSY context. This is expected since in these limits,

$$\mathrm{W}\left(\frac{g^2\xi}{\lambda^2 M_{\rm Pl}^2}\,z\right) = \frac{|S|^2}{M_{\rm Pl}^2} \ll 1 \ . \tag{8.9.104}$$

On the other hand, SUGRA corrections cannot be neglected for small values of λ, in which case the cosmic strings contribution rises again. It is thus possible to specify, for a given value of g, the allowed window for the superpotential coupling λ. As we stated earlier, our analysis shows that the allowed cosmic strings contribution to the CMB temperature anisotropies, as imposed by the WMAP measurements, leads to the constraint

$$g \lesssim 2 \times 10^{-2} \ . \tag{8.9.105}$$

Provided the above condition is satisfied, the CMB constraint sets an upper bound to the allowed window for the superpotential coupling λ, namely

$$\lambda \lesssim 3 \times 10^{-5} \ , \tag{8.9.106}$$

up to a confidence level of 99%. This upper limit on λ is the same as our previous limit found in the framework of SUSY. Note that the upper bound we found for λ, Eq. (8.9.106), is in agreement with the one found in Ref.[209] in a slightly different model, where the gauge coupling g is related to the Yukawa coupling λ through the relation $\lambda = \sqrt{2}g$. Our constraint on λ, Eq. (8.9.106), is also in agreement with the finding $\lambda \lesssim \mathcal{O}(10^{-4} - 10^{-5})$ of Ref. [243].

Supergravity corrections induce a lower bound for λ but for $g \lesssim 2 \times 10^{-3}$ it must be very small and it is therefore uninteresting, if one wants to avoid fine tuning of the parameters. However, this lower limit is interesting for g in the range of $[2 \times 10^{-3},\ 2 \times 10^{-2}]$. As an example, for $g = 10^{-2}$, the CMB constraint imposes

$$10^{-8} \lesssim \lambda \lesssim 3 \times 10^{-5} \ . \tag{8.9.107}$$

This allowed window for λ shrinks as g goes from $g = 10^{-2}$ to $g = 2 \times 10^{-2}$. This is the most important contribution from supergravity. This fine tuning can be less severe if one invokes the curvaton mechanism [3].

As in the case of F-term inflation, it is also possible to convert this constraint into a constraint on the mass scale, which is given by the Fayet-Iliopoulos term ξ and we get

$$\sqrt{\xi} \lesssim 2 \times 10^{15}\ \mathrm{GeV} \ . \tag{8.9.108}$$

The above constraint on ξ is independent of the value of the gauge coupling g, provided Eq. (8.9.105) is satisfied.

We would like to bring to the attention of the reader that in the above study we have neglected the quantum gravitational effects, i.e., a contribution [214]

$$[\Delta V(|S|)]_{\mathrm{QG}} = C_1 \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}S^2} \frac{V}{M_{\mathrm{Pl}}^2} + C_2 \frac{V^2}{M_{\mathrm{Pl}}^4} \tag{8.9.109}$$

(with C_1, C_2 numerical coefficients of the order of 1), to the effective potential, even though $S_{\mathrm{Q}} \sim \mathcal{O}(10 M_{\mathrm{Pl}})$. Our analysis is however still valid, since the effective potential given in Eq. (8.9.94) satisfies the conditions $V(|S|) \ll M_{\mathrm{Pl}}^4$ and $m_S^2 = \mathrm{d}^2V/\mathrm{d}S^2 \ll M_{\mathrm{Pl}}^2$, and thus the quantum gravitational corrections $[\Delta V(|S|)]_{\mathrm{QG}}$ are very small as compared to the effective potential $V_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{D-SUGRA}}$ [214].

8.10 Conclusions and discussion

In the context of SUSY GUTs, cosmic strings — occasionally accompanied by embedded strings — are the outcome of SSB schemes, compatible with high energy physics and cosmology. As it was explicitely shown in Ref. [1], strings are generically formed at the end of a supersymmetric hybrid inflationary era, which can be either F-term or D-term type, as we follow the patterns of SSBs from grand unified gauge groups $\mathrm{G}_{\mathrm{GUT}}$ down to the standard model gauge group $\mathrm{G}_{\mathrm{SM}} \times Z_2$. One should keep in mind, that there are mechanisms to avoid cosmic strings formation, which are not considered here since we focus on the most standard GUT and hybrid inflation models. The strings forming at the end of inflation have a mass which is proportional to the inflationary scale. However, current CMB temperature anisotropies data limit the contribution of cosmic strings to the angular power spectrum. The aim of this study is to use the data given by the realm of cosmology to constrain the parameters of supersymmetric hybrid inflationary models.

More precisely, in the framework of generic SUSY GUTs, we study the consequences of simple hybrid inflation models in the context of some realistic cosmological scenario. We then compare the observational predictions of these models in order to constrain the parameter's space. We perform our calculations within SUSY or SUGRA, whenever this is needed.

For F-term inflation, the symmetry breaking scale M associated with the inflaton mass scale (and the strings scale) is a slowly varying function of the superpotential coupling κ, and of the dimensionality $\mathcal{N}$ of the representations to which the scalar components of the chiral Higgs superfields belong. For SO(10), under the requirement that R-parity is conserved down to low energies, $\mathcal{N} = \mathbf{126}$. For E_6, the Higgs representations can be $\mathcal{N} = \mathbf{27}$ or $\mathcal{N} = \mathbf{351}$. The dependence of a measurable quantity (the cosmic strings contribution) on this discrete parameter $\mathcal{N}$ can provide an interesting tool to discriminate among different grand unified gauge groups.

The unique free parameter of the model, the dimensionless coupling κ, should obey two constraints. Namely, it should satisfy the gravitino constraint, and it should also obey to the CMB constraint. We found that the CMB constraint on the coupling κ is the strongest one : it imposes $\kappa \lesssim 7 \times 10^{-7} \times (126/\mathcal{N})$, for $\mathcal{N} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{16}, \mathbf{27}, \mathbf{126}, \mathbf{351}\}$ whereas the gravitino constraint reads $\kappa \lesssim 8 \times 10^{-3}$.

The WMAP constraint on the superpotential coupling κ can be expressed into a constraint on the mass scale, namely $M \lesssim 2 \times 10^{15}$ GeV. The value of the inflaton field is of the same order of magnitude, and since it is below the Planck scale, it implies that global supersymmetry is sufficient for our analysis. Thus, it is not necessary to take into account supergravity corrections.

The implications of this finding are quite strong. Supersymmetric hybrid inflation was advertised to circumvent the naturalness issue appearing in the most elegant nonsupersymmetric inflationary model, i.e., chaotic inflation. Namely, chaotic inflation needed a very small coupling ($\lambda \sim 10^{-14}$). Cosmology taught us that supersymmetric hybrid inflation also suffers from the fine tuning issue when embedded within the class of cosmological models considered here.

In this study we also employed a mechanism where this problem can be lifted. This is done if we use the curvaton mechanism. In this case another scalar field, called the curvaton, could generate the initial density perturbations whereas the inflaton field is only responsible for the dynamics of the Universe. Within supersymmetric theories such scalar fields are expected to exist. In this case, the coupling κ is only constrained by the gravitino limit.

We performed the same analysis for D-term inflation. In this case we found that the value of the inflaton field is of the order of the Planck scale or higher. One should therefore consider local supersymmetry, taking into account all the one-loop radiative corrections. To our knowledge, this was never considered in previous studies. Our analysis gives a nonconstant contribution of cosmic strings to the CMB temperature anisotropies, which is strongly dependent on the gauge coupling g and the superpotential λ. We claim that the D-term inflationary model is still an open possibility, since it does not always imply that the cosmic strings contribution to the CMB is above the upper limit allowed by WMAP. To avoid contradiction with the data, the free parameters of the model are strongly constrained. More precisely, we found that the gauge coupling must satisfy the constraint $g \lesssim 2 \times 10^{-2}$, and the superpotential coupling must obey the condition $\lambda \lesssim 3 \times 10^{-5}$. This is the same limit as the one found in the SUSY framework. The supergravity corrections also give a lower limit on the value of this parameter. As an example, for $g = 10^{-2}$ we found $10^{-8} \lesssim \lambda \lesssim 10^{-8}$. This allowed window for λ shrinks as g goes from $g = 10^{-2}$ to $g = 2 \times 10^{-2}$. The conditions imposed by the CMB data on the couplings λ, g can be expressed as a single constraint on the Fayet-Iliopoulos term ξ, namely $\sqrt{\xi} \lesssim 2 \times 10^{15}$ GeV, which remains valid independently of g.

To conclude, we would like to emphasise that cosmic strings of the GUT scale are in agreement with observationnal data and can play a rôle in cosmology. CMB data do not rule out cosmic strings ; they impose strong constraints on their possible contribution. One should use these constraints to test high energy physics such as supersymmetric grand unified theories. This is indeed the philosophy of our paper.

Acknowledgements

It is a pleasure to thank P. Brax, N. Chatillon, G. Esposito-Farèse, J. Garcia-Bellido, R. Jeannerot, A. Linde, J. Martin, P. Peter, and C. -M. Viallet for discussions and comments.

8.11 Appendix

We list below the SSB schemes compatible with high energy physics and cosmology, as given in detail in Ref. [1]. Let us remind to the reader that every $\xrightarrow{n}$ represent an SSB during which there is formation of topological defects. Their nature is given by n : 1 for monopoles, 2 for topological cosmic strings, $2'$ for embedded strings, 3 for domain walls. Please note also that for e.g. $3_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 2_{\rm R}\ 1_{\rm B-L}$ stands for the group $\mathrm{SU(3)_C}\times\mathrm{SU(2)_L}\times\mathrm{SU(2)_R}\times\mathrm{U(1)_{B-L}}$. We refer the reader to Ref. [1] for more details.

We first give the SSB schemes of SO(10) down to the $\mathrm{G_{SM}}\times Z_2$.

$$\mathrm{SO(10)}\left\{\begin{array}{llllll}
\xrightarrow{1} & 5\ 1_{\rm V} & \xrightarrow{1} & 3_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 1_{\rm Z}\ 1_{\rm V} & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\ Z_2 \\
\xrightarrow{1} & 4_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 2_{\rm R} & \longrightarrow & \text{Eq. (8.11.111)} & & \\
\xrightarrow{1,2} & 4_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 2_{\rm R}\ Z_2^{\rm C} & \longrightarrow & \text{Eq. (8.11.112)} & & \\
\xrightarrow{1,2} & 4_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 1_{\rm R}\ Z_2^{\rm C} & \longrightarrow & \cdots & & \\
\xrightarrow{1} & 4_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 1_{\rm R} & \longrightarrow & \cdots & & \\
\xrightarrow{1,2} & 3_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 2_{\rm R}\ 1_{\rm B-L}\ Z_2^{\rm C} & \longrightarrow & \cdots & & \\
\xrightarrow{1} & 3_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 2_{\rm R}\ 1_{\rm B-L} & \longrightarrow & \cdots & & \\
\xrightarrow{1} & 3_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 1_{\rm R}\ 1_{\rm B-L} & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\ Z_2 & &
\end{array}\right. \qquad (8.11.110)$$

where

$$4_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 2_{\rm R}\left\{\begin{array}{lll}
\xrightarrow{1} & 3_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 2_{\rm R}\ 1_{\rm B-L} & \left\{\begin{array}{llll} \xrightarrow{1} & 3_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 1_{\rm R}\ 1_{\rm B-L} & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\ Z_2 \\ \xrightarrow{2',2} & \mathrm{G_{SM}}\ Z_2 & & \end{array}\right. \\
\xrightarrow{1} & 4_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 1_{\rm R} & \left\{\begin{array}{llll} \xrightarrow{1} & 3_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 1_{\rm R}\ 1_{\rm B-L} & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\ Z_2 \\ \xrightarrow{2',2} & \mathrm{G_{SM}}\ Z_2 & & \end{array}\right. \\
\xrightarrow{1} & 3_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 1_{\rm R}\ 1_{\rm B-L} & \quad\xrightarrow{2}\ \mathrm{G_{SM}}\ Z_2
\end{array}\right. \qquad (8.11.111)$$

and

$$4_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 2_{\rm R}\ Z_2^{\rm C}\left\{\begin{array}{lll}
\xrightarrow{1} & 3_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 2_{\rm R}\ 1_{\rm B-L}\ Z_2^{\rm C} & \left\{\begin{array}{llll} \xrightarrow{3} & 3_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 2_{\rm R}\ 1_{\rm B-L} & \longrightarrow & \cdots \\ \xrightarrow{1,3} & 3_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 1_{\rm R}\ 1_{\rm B-L} & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\ Z_2 \end{array}\right. \\
\xrightarrow{1} & 4_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 1_{\rm R}\ Z_2^{\rm C} & \left\{\begin{array}{llll} \xrightarrow{3} & 4_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 1_{\rm R} & \longrightarrow & \cdots \\ \xrightarrow{1,3} & 3_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 1_{\rm R}\ 1_{\rm B-L} & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\ Z_2 \end{array}\right. \\
\xrightarrow{3} & 4_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 2_{\rm R} & \longrightarrow\ \text{Eq. (8.11.111)} \\
\xrightarrow{1} & 4_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 1_{\rm R} & \longrightarrow\ \cdots \\
\xrightarrow{1,3} & 3_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 2_{\rm R}\ 1_{\rm B-L} & \longrightarrow\ \cdots \\
\xrightarrow{1,3} & 3_{\rm C}\ 2_{\rm L}\ 1_{\rm R}\ 1_{\rm B-L} & \xrightarrow{2}\ \mathrm{G_{SM}}\ Z_2
\end{array}\right. \qquad (8.11.112)$$

We then proceed with the list of the SSB schemes of $\mathrm{E_6}$ down to the $\mathrm{G_{SM}}\times Z_2$. We first give the SSB patterns where $\mathrm{E_6}$ is broken via $\mathrm{SO(10)}\times\mathrm{U(1)}$.

$$
\mathrm{E}_6 \xrightarrow{1} 10\ 1_{\mathrm{V}'} \left\{ \begin{array}{lll}
\xrightarrow{2} & 10 & \longrightarrow \quad \cdots \\
\xrightarrow{1} & 5\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \longrightarrow \quad \text{Eq. (8.11.115)} \\
\xrightarrow{1} & 5_{\mathrm{F}}\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \longrightarrow \quad \text{Eq. (8.11.116)} \\
\xrightarrow{1} & 5_{\mathrm{E}}\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \xrightarrow{2',2} \quad \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ Z_2 \\
\xrightarrow{2} & 5\ 1_{\mathrm{V}'}\ Z_2 & \longrightarrow \quad \cdots \\
\xrightarrow{1,2} & 5\ 1_{\mathrm{V}} & \longrightarrow \quad \cdots \\
\xrightarrow{1} & 5_{\mathrm{F}}\ 1_{\mathrm{V}} & \xrightarrow{2',2} \quad \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ Z_2 \\
\xrightarrow{1} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ 1_{\mathrm{V}} & \xrightarrow{2} \quad \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ Z_2 \\
\xrightarrow{1,2} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ 1_{\mathrm{V}'}\ Z_2 & \xrightarrow{2} \quad \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ Z_2 \\
\xrightarrow{1,2} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \longrightarrow \quad \text{Eq. (8.11.117)} \\
\xrightarrow{1} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}} & \longrightarrow \quad \text{Eq. (8.11.111)} \\
\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \longrightarrow \quad \cdots \\
\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \longrightarrow \quad \cdots
\end{array} \right. \tag{8.11.113}
$$

with more direct schemes

$$
\mathrm{E}_6 \left\{ \begin{array}{lll}
\xrightarrow{1} & 5\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \longrightarrow \quad \text{Eq.(8.11.115)} \\
\xrightarrow{1} & 5_{\mathrm{F}}\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \longrightarrow \quad \text{Eq.(8.11.116)} \\
\xrightarrow{1} & 5_{\mathrm{E}}\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \xrightarrow{2',2} \quad \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ Z_2 \\
\xrightarrow{1} & 5\ 1_{\mathrm{V}} & \longrightarrow \quad \cdots \\
\xrightarrow{1} & 5\ 1_{\mathrm{V}'} & \longrightarrow \quad \cdots \\
\xrightarrow{1} & 5_{\mathrm{F}}\ 1_{\mathrm{V}} & \xrightarrow{2',2} \quad \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ Z_2 \\
\xrightarrow{1} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \longrightarrow \quad \text{Eq. (8.11.117)} \\
\xrightarrow{1} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}} & \longrightarrow \quad \text{Eq. (8.11.111)} \\
\xrightarrow{1} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}} & \longrightarrow \quad \cdots \\
\xrightarrow{1} & 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \longrightarrow \quad \cdots \\
\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \longrightarrow \quad \cdots \\
\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \longrightarrow \quad \cdots \\
\xrightarrow{1} & 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2} \quad \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ Z_2 \\
\xrightarrow{1} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ 1_{\mathrm{V}} & \xrightarrow{2} \quad \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ Z_2 \\
\xrightarrow{1,2} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ 1_{\mathrm{V}'}\ Z_2 & \xrightarrow{2} \quad \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ Z_2
\end{array} \right. \tag{8.11.114}
$$

where

$$
5\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V}'} \left\{ \begin{array}{lll}
\xrightarrow{2} & 5\ 1_{\mathrm{V}'}\ Z_2 & \left\{ \xrightarrow{1} \ \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ 1_{\mathrm{V}'}\ Z_2 \ \xrightarrow{2} \ \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ Z_2 \right. \\
\xrightarrow{1} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V}'} & \left\{ \begin{array}{lll} \xrightarrow{2} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ 1_{\mathrm{V}} & \xrightarrow{2} \ \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ Z_2 \\ \xrightarrow{2} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ 1_{\mathrm{V}'}\ Z_2 & \xrightarrow{2} \ \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ Z_2 \end{array} \right. \\
\xrightarrow{2} & 5\ 1_{\mathrm{V}} & \longrightarrow \quad \cdots
\end{array} \right. \tag{8.11.115}
$$

$$
5_{\mathrm{F}}\ 1_{\mathrm{V}}\ 1_{\mathrm{V}'} \left\{ \begin{array}{lll}
\xrightarrow{2} & 5_{\mathrm{F}}\ 1_{\mathrm{V}} & \xrightarrow{2',2} \quad \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ Z_2 \\
\xrightarrow{2',2} & \mathrm{G}_{\mathrm{SM}}\ Z_2 &
\end{array} \right. \tag{8.11.116}
$$

$$
4_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,2_{\mathrm{R}}\,1_{\mathrm{V'}} \left\{\begin{array}{lll}
\xrightarrow{2} 4_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,2_{\mathrm{R}} & \longrightarrow & \text{Eq. (8.11.111)} \\
\xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,1_{\mathrm{R}}\,1_{\mathrm{B-L}}\,1_{\mathrm{V'}} & \left\{\begin{array}{lll}
\xrightarrow{2} 3_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,1_{\mathrm{R}}\,1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\,Z_2 \\
\xrightarrow{2',2} \mathrm{G_{SM}}1_{\mathrm{V'}}\,Z_2 & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\,Z_2 \\
\xrightarrow{2',2} \mathrm{G_{SM}}\,Z_2 & &
\end{array}\right. & \\
\xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,2_{\mathrm{R}}\,1_{\mathrm{B-L}}\,1_{\mathrm{V'}} & \left\{\begin{array}{lll}
\xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,1_{\mathrm{R}}\,1_{\mathrm{B-L}}\,1_{\mathrm{V'}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{2} 3_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,2_{\mathrm{R}}\,1_{\mathrm{B-L}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{2',2} \mathrm{G_{SM}}1_{\mathrm{V'}}\,Z_2 & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\,Z_2 \\
\xrightarrow{1,2} 3_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,1_{\mathrm{R}}\,1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\,Z_2 \\
\xrightarrow{2',2} \mathrm{G_{SM}}\,Z_2 & &
\end{array}\right. & \\
\xrightarrow{1} 4_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,1_{\mathrm{R}}\,1_{\mathrm{V'}} & \left\{\begin{array}{lll}
\xrightarrow{2} 4_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,1_{\mathrm{R}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,1_{\mathrm{R}}\,1_{\mathrm{B-L}}\,1_{\mathrm{V'}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{2',2} \mathrm{G_{SM}}1_{\mathrm{V'}}\,Z_2 & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\,Z_2 \\
\xrightarrow{1,2} 3_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,1_{\mathrm{R}}\,1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\,Z_2 \\
\xrightarrow{2} \mathrm{G_{SM}}\,Z_2 & &
\end{array}\right. & \\
\xrightarrow{1,2} \mathrm{G_{SM}}1_{\mathrm{V'}}\,Z_2 & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\,Z_2 \\
\xrightarrow{1,2} 3_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,2_{\mathrm{R}}\,1_{\mathrm{B-L}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,1_{\mathrm{R}}\,1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\,Z_2
\end{array}\right. \tag{8.11.117}
$$

We proceed with the allowed SSB patterns of E_6 down to the $\mathrm{G_{SM}} \times Z_2$ via $\mathrm{SU(3)_C} \times \mathrm{SU(3)_L} \times \mathrm{SU(3)_R}$.

$$
\mathrm{E}_6 \xrightarrow{0} 3_{\mathrm{C}}\,3_{\mathrm{L}}\,3_{\mathrm{R}} \left\{\begin{array}{lll}
\xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,2_{\mathrm{(R)}}\,1_{\mathrm{Y_{(R)}}}\,1_{\mathrm{Y_L}} & \longrightarrow & \text{Eq. (8.11.120)} \\
\xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,3_{\mathrm{L}}\,2_{\mathrm{(R)}}1_{\mathrm{(Y_R)}} & \longrightarrow & \text{Eq. (8.11.121)} \\
\xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,3_{\mathrm{R}}\,1_{\mathrm{Y_L}} & \longrightarrow & \text{Eq. (8.11.122)} \\
\xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,3_{\mathrm{L}}\,1_{\mathrm{(R)}}\,1_{\mathrm{Y_{(R)}}} & \longrightarrow & \text{Eq. (8.11.123)} \\
\xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,1_{\mathrm{(R)}}\,1_{\mathrm{Y_{(R)}}}\,1_{\mathrm{Y_L}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,2_{\mathrm{(R)}}\,1_{\mathrm{B-L}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,1_{\mathrm{(R)}}\,1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\,Z_2
\end{array}\right. \tag{8.11.118}
$$

with more direct breakings

$$
\mathrm{E}_6 \left\{\begin{array}{lll}
\xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,2_{\mathrm{(R)}}\,1_{\mathrm{Y_L}}\,1_{\mathrm{Y_{(R)}}} & \longrightarrow & \text{Eq. (8.11.120)} \\
\xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,3_{\mathrm{L}}\,2_{\mathrm{(R)}}\,1_{\mathrm{Y_{(R)}}} & \longrightarrow & \text{Eq. (8.11.121)} \\
\xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,3_{\mathrm{R}}\,1_{\mathrm{Y_L}} & \longrightarrow & \text{Eq. (8.11.122)} \\
\xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,1_{\mathrm{(R)}}\,1_{\mathrm{Y_L}}\,1_{\mathrm{Y_{(R)}}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,2_{\mathrm{(R)}}\,1_{\mathrm{B-L}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1} 3_{\mathrm{C}}\,2_{\mathrm{L}}\,1_{\mathrm{(R)}}\,1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\,Z_2
\end{array}\right. \tag{8.11.119}
$$

where

$$
3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{Y_L}}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}}
\left\{
\begin{array}{ll}
\xrightarrow{1}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{B-L}} &
\left\{
\begin{array}{lll}
\xrightarrow{1}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\ Z_2 \\
\xrightarrow{2',2}\ \mathrm{G_{SM}}\ Z_2 & &
\end{array}
\right. \\
\xrightarrow{1}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}}\ 1_{\mathrm{Y_L}} &
\left\{
\begin{array}{lll}
\xrightarrow{2}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\ Z_2 \\
\xrightarrow{2}\ \mathrm{G_{SM}}\ Z_2 & &
\end{array}
\right. \\
\xrightarrow{1,2}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2}\ \mathrm{G_{SM}}\ Z_2 \\
\xrightarrow{2',2}\ \mathrm{G_{SM}}\ Z_2 &
\end{array}
\right.
\tag{8.11.120}
$$

$$
3_{\mathrm{C}}\ 3_{\mathrm{L}}\ 2_{(\mathrm{R})} 1_{(\mathrm{Y_R})}
\left\{
\begin{array}{lll}
\xrightarrow{1}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}}\ 1_{\mathrm{Y_L}} & \longrightarrow & \text{Eq. (8.11.120)} \\
\xrightarrow{1}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}}\ 1_{\mathrm{Y_L}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\ Z_2 \\
\xrightarrow{2',2}\ \mathrm{G_{SM}}\ Z_2 & &
\end{array}
\right.
\tag{8.11.121}
$$

$$
3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 3_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{Y_L}}
\left\{
\begin{array}{lll}
\xrightarrow{1}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{(\mathrm{R})}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{Y_L}}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}} & \longrightarrow & \text{Eq. (8.11.120)} \\
\xrightarrow{2'}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{(\mathrm{R})}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{Y_L}}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\ Z_2 \\
\xrightarrow{2',2}\ \mathrm{G_{SM}}\ Z_2 & &
\end{array}
\right.
\tag{8.11.122}
$$

and

$$
3_{\mathrm{C}}\ 3_{\mathrm{L}}\ 1_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}}
\left\{
\begin{array}{lll}
\xrightarrow{1}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{Y_L}}\ 1_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{2'}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\ Z_2 \\
\xrightarrow{2',2}\ \mathrm{G_{SM}}\ Z_2 & &
\end{array}
\right.
\tag{8.11.123}
$$

Finally, we list below the SSB schemes of $\mathrm{E_6}$ down to the $\mathrm{G_{SM}} \times Z_2$ via $\mathrm{SU(6)} \times \mathrm{SU(2)}$. These are :

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{E_6}\ \xrightarrow{0}\ 6\ 2_{\mathrm{L}} \\
\text{or}\quad \mathrm{E_6}
\end{array}
\left\{
\begin{array}{lll}
\xrightarrow{1}\ 3_{\mathrm{C}}\ 3_{\mathrm{R}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{Y_L}} & \longrightarrow & \text{Eq. (8.11.122)} \\
\xrightarrow{1}\ 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{V'}} & \longrightarrow & \text{Eq. (8.11.117)} \\
\xrightarrow{0}\ 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1}\ 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{V'}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1}\ 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{Y_L}}\ 1_{\mathrm{Y_{(R)}}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{(\mathrm{R})}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\ Z_2
\end{array}
\right.
\tag{8.11.124}
$$

and

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{E_6}\ \xrightarrow{0}\ 6\ 2_{\mathrm{R}} \\
\text{or}\quad \mathrm{E_6}
\end{array}
\left\{
\begin{array}{lll}
\xrightarrow{1}\ 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{V'} & \longrightarrow & \text{Eq. (8.11.117)} \\
\xrightarrow{1}\ 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{V'}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{0}\ 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1}\ 4_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}}\ 1_{\mathrm{V'}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 2_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \longrightarrow & \cdots \\
\xrightarrow{1}\ 3_{\mathrm{C}}\ 2_{\mathrm{L}}\ 1_{\mathrm{R}}\ 1_{\mathrm{B-L}} & \xrightarrow{2} & \mathrm{G_{SM}}\ Z_2
\end{array}
\right.
\tag{8.11.125}
$$

As it was shown in Ref. [1], the SSB schemes of SU(6) and SU(7) down to the standard model which could accommodate an inflationary era with no defect (of any kind) at later times are inconsistent with proton lifetime measurements and minimal SU(6) and SU(7) does not predict neutrino masses. Thus, these models are incompatible with high energy physics phenomenology.

Troisième partie

Fond diffus cosmologique

Chapitre 9

Extraction de paramètres inflationnaires et effet de lentille

Sommaire

Le travail présenté dans ce chapitre fait l'objet d'une publication encore en préparation [4]. Il représente une collaboration avec Karim Benabed et François Bouchet.

9.1 Introduction

Le fond diffus cosmologique (CMB) est le reflet des fluctuations primordiales de densité. Ces fluctuations peuvent avoir été générées par une phase d'inflation (voir chapitre 4), phase sur laquelle beaucoup d'information nous manque : a t-elle vraiment eu lieu ? A quelle énergie a t-elle eu lieu ? En ce sens, le CMB nous offre une manière de sonder la physique de l'univers primordial : spectres de puissance de densité et d'ondes gravitationnelles, paramètre de Hubble pendant l'inflation H_{inf}, paramètres de roulement lent, etc .... Cependant, les photons du CMB ont parcouru, avant d'être détectés, tout le trajet qui sépare la surface de dernière diffusion (LSS[1]) et l'observateur. Ils possèdent en outre une dépendance dans les paramètres

[1]Cet acronyme vient de l'anglais *Last Scattering Surface.*

cosmologiques tels que la courbure spatiale, le contenu en énergie de l'univers, la valeur actuelle du paramètre de Hubble, etc .... Du fait de cette dépendance dans un grand nombre de paramètres, il existe des dégénérescence entre les valeurs de ces paramètres. Cela signifie que plusieurs jeux de valeurs prédisent les mêmes données observées et cela augmente les barres d'erreur que l'on en a sur ces paramètres.

En outre, ces photons sont aussi déviés par les grandes structures formés après leur émission et qui se situent entre la surface de dernière diffusion et l'observateur. Cette effet de lentille faible affecte le signal sur les petites échelles, et introduit une modification de sa statistique : les fluctuations deviennent non gaussiennes. En conséquence, les fonctions de corrélation d'ordre supérieur à 2 possèdent une information indépendante des fonctions de corrélation à deux points usuellement étudiées. Comme les propriétés de l'effet de lentille entraînent une annulation des fonctions de corrélation d'ordres impaires, la première de ces fonctions à posséder une information nouvelle est la fonction de corrélation à quatres points, qui sera étudiée dans ce chapitre.

Les récents résultats du satellite WMAP, les caractéristiques de l'expérience Planck, prévue pour 2007, et les projets futurs de la NASA et de l'ESA nous font attendre une amélioration importantes de nos connaissances sur les paramètres de l'univers primordial et nous laissent espérer de répondre aux questions précédentes sur l'inflation. Une première démarche possible est de rechercher la combinaison des paramètres cosmologiques qui ajuste le mieux les données observées. Dans ce chapitre, nous allons plutôt nous placer dans une optique de prospective : quelle type d'expérience permettrait une détection des ondes gravitationnelles primordiales ? La réponse dépend de la valeur des paramètres inflationnaires et notamment du rapport tenseur/scalaire r introduit au chapitre 4.

Il existe des outils statistiques qui permettent une telle prospective, parmi eux la méthode de la matrice de Fisher que nous allons développer ici. Elle est basée sur l'estimation des fonctions de corrélation à deux et quatres points. Dans ce chapitre, nous allons mettre en oeuvre cette méthode en prenant en compte l'effet de lentille faible dû aux grandes structures.

Dans un premier temps, nous allons faire une présentation générale de la physique du CMB puis nous allons présenter le formalisme de la matrice de Fisher qui permet l'extraction de paramètres cosmologiques à partir de données observées ou simulées. Nous allons montrer que cette méthode est basée sur le calcul de la fonction de corrélation à quatre points des anisotropies mesurées. Nous allons ensuite étudier l'effet de lentille sur les fonctions de corrélation à deux points puis quatre points des anisotropies.

Pour les généralités sur le fond diffus cosmologique, nous ferons référence à [244, 7, 83, 245]. Pour les outils statistiques utilisés dans ce chapitre, une bonne introduction peut être trouvée dans [248, 249]. Une bonne présentation du formalisme de la matrice de Fisher peut aussi être trouvé dans [256, 255]. Enfin concernant l'effet de lentille, nous ferons référence aux Refs. [251, 269].

9.2 Fond diffus cosmologique et paramètres inflationnaires

9.2.1 Contribution scalaire : effets primaires, secondaires et avant-plans

Dans ce chapitre nous allons présenter les données qu'une expérience mesurant le CMB possède. Comme nous l'avons déjà présenté au chapitre 1, le fond diffus cosmologique est composé des photons "émis" sur la LSS à un redshift $z_{\rm dec} \simeq 1089 \pm 2$ [143]. Le plasma cosmologique avant la recombinaison est composé d'un fluide photons-baryons fortement couplés du fait des diffusions Thomson des photons sur les électrons libres. Les propriétés physiques de ce plasma permettent de comprendre presque entièrement les observations du CMB. Avant la recombinaison, du fait des interactions photons-électrons, le libre parcours moyen des photons est négligeable devant le rayon de Hubble. Au moment de la recombinaison, les électrons s'associent avec des protons pour former des atomes d'Hydrogène. L'univers devient alors transparent aux photons, c'est-à-dire que leur libre parcours moyen devient subitement[2]

La température de ces photons est déterminée par différents phénomènes physique que l'on peut classer en deux catégories : les effets primaires qui se produisent avant et pendant le découplage et les effets secondaires qui se produisent entre la LSS et l'observateur. Le signal mesuré est la somme de ces deux effets ainsi que de sources extérieures de rayonnement micro-onde, appelées *avant-plans*. Les avant-plans les plus importantes sont l'émission des poussières galactiques, l'emission synchrotron des électrons en mouvement dans des champs magnétiques et enfin l'émission de sources extra-galactiques très énergétiques (noyaux actifs de galaxies, quasars, ...). Ces sources externes seront dans la suite considérées comme du bruit de fond même si leur détection et leur analyse est d'un grand intérêt pour la compréhension de certains phénomènes astrophysiques.

Il existe trois principaux effets primaires qui génèrent des fluctuations de température sur la surface de dernière diffusion. Pour plus de détails on pourra consulter [7].

- Le premier est relié aux perturbations de densité de la radiation $\delta_\gamma \equiv \delta\rho_\gamma/\rho_\gamma$. Avant le découplage, les photons et les baryons sont fortement couplés. En conséquence les fluctuations de baryon $\delta_b \equiv \delta\rho_b/\rho_b$, générées à la fin de la phase d'inflation, produisent des fluctuations de densité de radiation δ_γ. Les zones de sur-densité apparaissent plus chaudes et les zones de sous-densité moins chaudes.
- Le second effet est un effet Doppler dû à la vitesse particulière des baryons dans le plasma. Si la vitesse $\boldsymbol{v_b}$ est dirigé dans la direction de l'observateur, les photons de cette région apparaîtront plus chaud.
- Le dernier effet est appelé effet Sachs-Wolfe et est lié au potentiel de Bardeen Φ. Ce potentiel crée des puits dont les photons doivent s'extraire afin d'évoluer librement, ce qui entraîne une perte d'énergie.

La somme de ces trois effets génèrent une anisotropie dans la direction $\boldsymbol{n}$ donnée, dans la jauge de feuilletage plat, par [7, 83]

$$\frac{\Delta T}{T_0}(\boldsymbol{n}) = \left[\frac{1}{4}\delta_\gamma - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v_b} + \Phi + \Psi\right](\tau_{\rm CMB}, \boldsymbol{x}_E)\ , \tag{9.2.1}$$

où Φ et Ψ sont les potentiels de Bardeen introduits au chapitre 4. Les coordonnées d'émission sont données par le temps conforme $\tau_{\rm CMB}$ et la position $\boldsymbol{x}_E$. Notons que dans le cas de perturbations initiales adiabatiques, $\delta_\gamma = -\frac{20}{3}\Phi$ et $\Psi = \Phi$. Dans ce cas on retrouve bien

$$\frac{\Delta T}{T_0}(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{3}\Phi(\tau_{\rm CMB}, \boldsymbol{x}_E)\ ,$$

pour les grandes longueurs d'onde telles que $k\tau_{\rm CMB} \ll 1$ pour lesquelles le terme Doppler est négligeable $\boldsymbol{v_b} = \boldsymbol{v_r} \ll \delta_\gamma$, où $\boldsymbol{v_r}$ est la vitesse particulière de la radiation. Dans ce cas, Φ est aussi appelé *potentiel gravitationnel*.

Le principal effet secondaire est l'effet Sachs-Wolfe intégré (ISW). Il est dû à l'évolution temporelle du potentiel gravitationnel Φ le long de la trajectoire d'un photon. Il ajoute à

[2]Subitement signifie que la durée de ce processus est petite devant le temps de Hubble. Cependant, la recombinaison n'est pas un phénomène instantané et la surface de dernière diffusion n'est pas infiniment mince. Cela a pour conséquence de réduire la puissance du spectre du CMB aux petites échelle.

l'expression de l'Eq. (9.2.1) une contribution [83]

$$\left.\frac{\Delta T}{T_0}\right|_{\rm ISW} = \int_{\tau_{CMB}}^{\tau_0} \left(\Phi' + \Psi'\right)[\tau, \boldsymbol{x}(\tau)]\mathrm{d}\tau \ , \tag{9.2.2}$$

où le $'$ désigne la dérivée par rapport au temps conforme τ et où $\boldsymbol{x}(\tau)$ est le vecteur position du photon au temps τ vu par un observateur en $\boldsymbol{x_0}$. Les potentiels de Bardeen sont constants pour les modes super-Hubble, et pour un univers dominé par la matière. Cela n'est plus vrai dans le cas d'une contribution non négligeable de radiation, de courbure ou de constante cosmologique.

Ils existent un grand nombre d'autres effet secondaires. Mentionnons parmi eux la réionisation de l'hydrogène à bas redshift $z_{\rm reio}$ par des sources énergétiques telles que des étoiles chaudes. Cela entraîne une nouvelle diffusion des photons sur les électrons. Le redshift et la profondeur optique $\tau_{\rm reio}$ de cette région (ou pour être plus précis l'histoire de la réionisation) ont donc une influence sur les anisotropies polarisées de température, en augmentant la puissance aux grandes échelles. L'effet Sunyaev-Zel'dovich est un autre des effets secondaires majeurs. Il consiste en la diffusion Compton des photons du CMB sur les électrons libres du gaz chaud ionisé des amas de galaxies. Leur température entraîne une agitation thermique, agitation qui induit un effet doppler lors de l'interaction avec les photons du CMB : c'est l'effet *SZ thermique*. Puisque les amas de galaxies sont en mouvement, un effet doppler vient s'ajouter à celui décrit précédemment : c'est l'effet *SZ cinétique*. L'effet de lentille gravitationnelle est aussi un effet secondaire qui modifie les anisotropies de température. Par cet effet, les trajectoires des photons sont déviées par la déformation de la métrique due aux grandes structures. Nous y reviendrons plus en détail à la section 9.4 puisque nous étudierons dans ce chapitre son effet sur l'extraction de paramètres cosmologiques. Cette liste d'effets secondaires n'est pas exhaustive et on peut consulter les Refs. [246, 244] pour une présentation de tous les effets secondaires et les avant-plans qui affectent le CMB.

9.2.2 Signal polarisé

La diffusion Thomson des photons par les électrons n'est pas isotrope. En conséquence même si un flux de photons est non polarisé, après diffusion le flux est en partie polarisé. Usuellement, la polarisation est décrite par les paramètres de Stokes. Si on considère une onde plane électromagnétique se propageant dans la direction $\boldsymbol{n}$, son champ électrique s'écrit de manière générale

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = E_1\boldsymbol{e_1} + E_2\boldsymbol{e_2}e^{i\omega(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}-t)} \ , \tag{9.2.3}$$

où les trois vecteurs $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{e_1}$ et $\boldsymbol{e_2}$ forment une base orthonormée. On peut paramétrer les amplitudes $E_{1,2}$ par

$$E_1 = a_1 e^{i\theta_1} \ , \quad E_2 = a_2 e^{i\theta_2} \ . \tag{9.2.4}$$

On définit alors les paramètres de Stokes par

$$\begin{aligned} I &= a_1^2 + a_2^2 \ , \\ Q &= a_1^2 - a_2^2 \ , \\ U &= 2a_1a_2\cos(\theta_2 - \theta_1) \ , \\ V &= 2a_1a_2\sin(\theta_2 - \theta_1) \ . \end{aligned} \tag{9.2.5}$$

I est l'intensité de l'onde plane, Q et U mesure l'intensité de la polarisation linéaire et V mesure l'intensité de la polarisation circulaire. Cette dernière quantité ne sera pas considérée par la suite car la diffusion Thomson ne peut produire de polarisation circulaire.

Sous une rotation dans le plan $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$, les grandeurs I et V restent inchangées mais pas Q et U. On peut construire à partir de ces dernières, deux grandeurs se transformant comme des tenseurs de spin 2, ${}_{\pm}X(\boldsymbol{n}) \equiv Q(\boldsymbol{n}) \pm iU(\boldsymbol{n})$.

9.2.3 Spectres de puissance

La région d'émission du CMB étant sphérique, on développe les anisotropies sur la base des harmoniques sphériques Y_ℓ^m

$$\frac{\Delta T}{T_0}(\boldsymbol{x_0}, \tau_0, \boldsymbol{n}) = \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^T(\boldsymbol{x_0}, \tau_0) Y_\ell^m(\boldsymbol{n}) \ , \tag{9.2.6}$$

et les coefficients du développement s'expriment par

$$a_{\ell m}^T = \frac{1}{T_0} \int T(\boldsymbol{n})\, [Y_\ell^m(\boldsymbol{n})]^* \ . \tag{9.2.7}$$

Par la suite, on omettra le fait que l'anisotropie et les coefficients $a_{\ell m}$ dépendent de la position de l'observateur $\boldsymbol{x_0}$ et le moment d'observation τ_0.

On définit le spectre de puissance de température C_ℓ^T comme le corrélateur à deux points des coefficients $a_{\ell m}$

$$\left\langle (a_{\ell m}^T)^* a_{\ell' m'}^T \right\rangle = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}\, C_\ell^T \ , \tag{9.2.8}$$

où $\langle \dots \rangle$ désigne la moyenne d'ensemble (ou l'espérance mathématique, voir section suivante). Cette moyenne d'ensemble est la moyenne sur le résultat de l'ensemble des réalisations d'une même expérience. Cependant, nous ne pouvons observer qu'une seule réalisation du CMB. Usuellement, pour palier à ce problème, nous faisons l'hypothèse que le système est *ergodique*, c'est à dire que l'on peut remplacer la moyenne d'ensemble par une moyenne spatiale pour *estimer* le spectre de puissance

$$\hat{C}_\ell^T \equiv \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (a_{\ell m}^T)^* a_{\ell m}^T \ , \tag{9.2.9}$$

Concernant la polarisation, comme nous l'avons vu précédemment, les grandeurs $Q \pm iU$ sont des grandeurs de spin 2 donc ne peuvent pas être développées sur les Y_ℓ^m précédents mais sont développées sur les harmoniques de spin 2 ${}_{\pm 2}Y_\ell^m$

$${}_{\pm}X(\boldsymbol{n}) = \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} {}_{\pm 2}a_{\ell m}\ {}_{\pm 2}Y_\ell^m(\boldsymbol{n}) \ . \tag{9.2.10}$$

Les coefficients d'expansion ${}_{\pm 2}a_{\ell m}$ peuvent être regroupé de manière a construire une grandeur invariante sous une transformation de parité (grandeur scalaire) $a_{\ell m}^E$ et une grandeur transformée en son opposé par la même transformation (grandeur pseudo-scalaire) $a_{\ell m}^B$,

$$a_{\ell m}^E = -\frac{1}{2}\left({}_{2}a_{\ell m} + {}_{-2}a_{\ell m}\right) \ , \quad a_{\ell m}^B = \frac{i}{2}\left({}_{2}a_{\ell m} - {}_{-2}a_{\ell m}\right) \ . \tag{9.2.11}$$

Ces grandeurs sont notées E et B par analogie avec les champs électrique (scalaire) et magnétique (pseudo-scalaire). On définit donc des spectres faisant intervenir ces grandeurs polarisées

$$\begin{aligned}
\left\langle (a_{\ell m}^E)^* a_{\ell' m'}^E \right\rangle &= \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}\, C_\ell^E \ , \\
\left\langle (a_{\ell m}^B)^* a_{\ell' m'}^B \right\rangle &= \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}\, C_\ell^B \ , \\
\left\langle (a_{\ell m}^T)^* a_{\ell' m'}^E \right\rangle &= \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}\, C_\ell^{TE} \ , \\
\left\langle (a_{\ell m}^T)^* a_{\ell' m'}^B \right\rangle &= \left\langle (a_{\ell m}^E)^* a_{\ell' m'}^B \right\rangle = 0 \ .
\end{aligned} \tag{9.2.12}$$

Les deux dernières égalités sont nécessairement vérifiées par symétrie. En effet, un hypothétique spectre de puissance C_ℓ^{TB} (resp. C_ℓ^{EB}) est une grandeur scalaire, donc invariante sous une transformation de parité. En revanche, $a_{\ell m}^T$ (resp. $a_{\ell m}^E$) est une grandeur scalaire tandis que $a_{\ell' m'}^B$ est une grandeur pseudo-scalaire donc transformée en son opposé. Ainsi le produit des deux est transformé en son opposé. On a donc $C_\ell^{TB} = -C_\ell^{TB}$ (resp. $C_\ell^{EB} = -C_\ell^{EB}$) donc les deux spectres sont nuls.

Ces spectres sont représentés sur la Fig. 9.1. Ils sont fortement dépendants du modèle cosmologique choisi ainsi que du spectre de puissance primordial issu de l'inflation. La dépendance du spectre de température dans les paramètres cosmologiques est obtenue par des codes numériques. Dans la suite de ce travail, on utilise le code CAMB. Ce code, en langage FORTRAN 90 a été développé par A. Lewis et A. Challinor et est accessible à `http ://camb.info/`. Cependant, on trouvera dans [83] une analyse qualitative de l'effet des paramètres cosmologiques principaux sur le spectre de température. La Ref. [80] propose une analyse analytique de l'estimation du spectre de température avec une bonne précision. Pour les spectres polarisés, une démarche équivalente est développée dans [258].

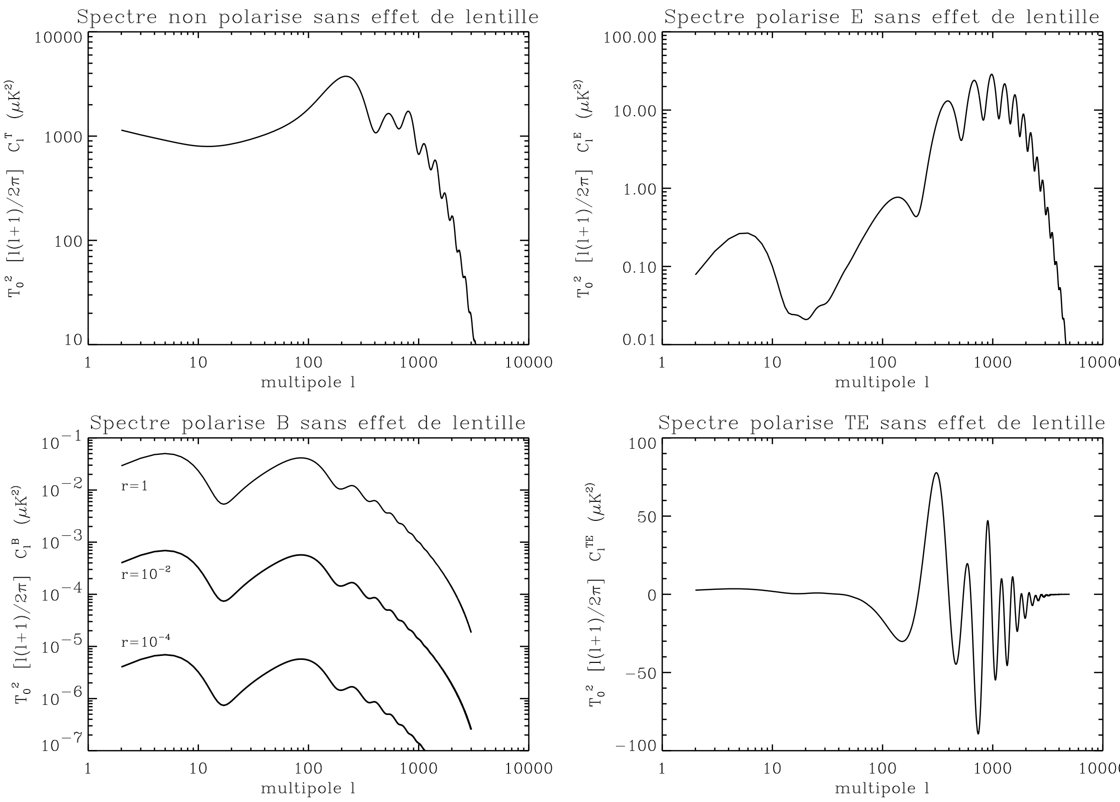

FIG. 9.1: Spectre de puissance non polarisé et polarisés E, B, et TE pour les paramètres cosmologiques standards mesurés par WMAP. Le spectre polarisé B est représenté pour différentes valeurs du rapport tenseur/scalaire r. Pour les autres spectres, $r = 1$.

9.2.4 Contribution tensorielle et paramètres inflationnaires

A la section 9.2.1, nous avons présenté les contributions à l'anisotropie de température issue des fluctuations scalaires de la métrique. Comme nous l'avons vu au chapitre 4, une phase d'inflation génére aussi des fluctuations tensorielles. Elles sont reliées à la perturbation h_{ij} de l'Eq. (4.4.45). La contribution tensorielle au spectre des anisotropie de température fait donc principalement intervenir le spectre de puissance $\mathcal{P}_h \simeq A_T k^{n_T}$ introduit au chapitre 4. On montre que [254]

$$C_\ell^{\text{tens}} = \frac{9}{8\pi}\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}\int \frac{\mathrm{d}k}{k} k^3 \mathcal{P}_h(k) \left[\int_{\tau_{\text{CMB}}}^{\tau_0} \frac{j_\ell(k(\tau_0-\tau))}{(k(\tau_0-\tau))^2}\frac{j_2(k\tau)}{k\tau}\right]^2 , \tag{9.2.13}$$

où les j_ℓ sont les fonctions de Bessel sphériques.

Ces modes tensoriels contribuent aux anisotropies non polarisées comme polarisées. Pour le spectre polarisé TT, cette contribution est non négligeable à grande échelle ($\ell \lesssim 60$). Mais les anisotropies observées sont la somme des spectres de puissance scalaire et tensorielle si on suppose que ces deux grandeurs sont non corrélées. Or, nous avons vu dans le chapitre 4 que les fluctuations tensorielles sont sous-dominantes dans l'approximation du roulement lent, comme le montre l'Eq. (4.5.71). La détection des modes tensoriels n'est donc possible que dans le spectre polarisé B car elles sont les seules à pouvoir contribuer à cette anisotropie. En effet les perturbations scalaire n'y contribuent pas pour des raisons de comportement sous la transformation de parité. En conclusion, la mesure de l'amplitude A_T des modes tensoriels et donc du rapport tenseur-scalaire r ne peut se faire qu'en mesurant précisément le spectre de puissance polarisé B. Sur la Fig. 9.1 est représenté la dépendance du spectre de puissance polarisé B en fonction du paramètre r. On définit l'*énergie d'inflation* par

$$M_{\text{infl}} \equiv V_{\text{infl}}^{1/4} ,$$

en supposant être dans le régime de roulement lent pendant lequel le potentiel est quasiment constant, égal à une valeur notée V_{infl}. La dépendance du spectre de puissance polarisé B peut donc se traduire en terme de cette énergie d'inflation. En effet, l'Eq. (4.5.73) et l'équation de Friedmann pendant l'inflation Eq. (4.1.5) nous permet d'écrire que

$$\frac{M_{\text{infl}}}{m_{\text{Pl}}} \equiv \frac{V_{\text{infl}}^{1/4}}{m_{\text{Pl}}} = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/4}\left(\frac{H_{\text{infl}}^2}{m_{\text{Pl}}^2}\right)^{1/4} \simeq 7.1\times 10^{-4} r^{1/4} . \tag{9.2.14}$$

On voit donc que l'énergie d'inflation évolue comme la puissance $1/4$ de r et que $r = 1$ correspond à une énergie $M_{\text{infl}} \simeq 8.6\times 10^{15}$ GeV. En conséquence, on verra que lorsque l'on ajoute la contribution venant de l'effet de lentille (voir Fig. 9.8), le signal primordial est presque totalement sous-dominant pour une énergie inférieure à $M_{\text{infl}} \sim 8.6\times 10^{14}$ GeV, ce qui correspond à $r = 10^{-4}$.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons donc supposer être en possession de données CMB sous la forme des $a_{\ell m}^{T,E,B}$ afin d'extraire les paramètres cosmologiques ou inflationnaires.

9.3 Méthodes d'extractions des paramètres cosmologiques

Le principe général de l'extraction de paramètres [247] est de construire une fonction de vraisemblance d'un modèle cosmologique à partir des données d'observation. Les valeurs des paramètres cosmologiques extraites des données est celle qui maximise cette fonction de vraisemblance. Quantifier l'erreur sur cette estimation est une tache bien plus ardue puisque qu'elle est dépendant de la fonction de distribution et que celle-ci est inconnue. La méthode de Fisher est une méthode exacte pour reconstruire cette erreur si la distribution est gaussienne et une bonne approximation si la distribution est proche de la gaussianité. On supposera dans la suite de ce chapitre que tel est bien le cas même une fois pris en compte l'effet de lentille.

9.3.1 La méthode de la matrice de Fisher

Etant données les caractéristiques d'une expérience, cette méthode permet donc d'évaluer la précision avec laquelle cette expérience va contraindre un espace des paramètres. Quelques rappels [248] de statistique sont nécessaires.

Fonction de vraisemblance

Considérons une expérience qui fournit un échantillon (supposé indépendant et identiquement réparti) de variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$. On appelle "données de l'expérience" une réalisation $(x_1, \ldots, x_n)$ de ces variables aléatoires. Elles possèdent en outre une densité de probabilité $f(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_m)$, où les $\theta_1, \ldots, \theta_m$ sont les paramètres de la loi à laquelle obéissent les données $(x_1, \ldots, x_n)$. Par exemple, si les x_i suivent des lois gaussiennes, ces paramètres θ_j sont les moyennes et les écarts-type de ces lois.

A partir de là, deux approches sont possibles. L'approche probabiliste suppose connues les lois auxquelles les variables aléatoires obéissent et étudie la probabilité que l'on obtienne un jeu de données particulier. Ce qui nous intéresse est de faire le raisonnement inverse. On suppose connu les données x_i. $f(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_m)$ devient alors une fonction des θ_j et prend le nom de fonction de vraisemblance[3] notée $L(x_1, \ldots, x_n \,|\, \theta_1, \ldots, \theta_m)$ ou encore $L(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})$. En temps que densité de probabilité, L est positive ou nulle. Il est donc équivalent de considérer $\mathcal{L} = -\ln L(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})$.

Moments empiriques

On définit les moments empiriques à partir des variables aléatoires X_i par la moyenne empirique

$$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ , \tag{9.3.15}$$

souvent notée par la suite $\langle X \rangle$, et les moments d'ordres supérieurs

$$M_k \equiv E\left\{(X - E\{X\})^k\right\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^k \quad k \geq 2 \ . \tag{9.3.16}$$

où $E\{\}$ est *l'espérance mathématique* (appelé aussi la moyenne d'ensemble).
Définition : L'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète X dont les réalisations successive sont les x_i, $i \in \mathbb{N}$ avec une probabilité p_i est définie comme [248]

$$E\{X\} \equiv \sum_i x_i p_i \ , \tag{9.3.17}$$

si cette série converge absolument. Dans la suite, cette espérance mathématique $E\{X\}$ sera aussi notée $\langle X \rangle$. Parmi les moments empiriques, on distingue M_2 la *variance empirique* et il est utile aussi de définir une variance modifiée

$$S^2 \equiv \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2 \ . \tag{9.3.18}$$

[3]En anglais, on parle de "likelihood function".

Estimation et estimateur

Les estimations ont pour but de trouver une grandeur $\hat{\theta}$ (qu'on appelle *estimateur*) permettant d'évaluer la valeur d'un paramètre θ. Deux types d'estimation peuvent être utile. Suivant que l'objectif est de trouver une valeur numérique de θ, ou un intervalle pour ce paramètre, on parlera d'estimation ponctuelle ou d'estimation d'intervalle. Un estimateur est une fonction des variables aléatoires X_i.

Un bon estimateur $\hat{\theta}$ doit posséder certaines propriétés :

- Convergence : si l'on augmente la taille de l'échantillon, l'écart entre l'estimation et la valeur réelle doit tendre vers 0.
- Biais : un estimateur est dit non biaisé si $\left\langle\hat{\theta}\right\rangle = \theta$. On définit le biais comme la différence entre l'espérance mathématique de l'estimateur et la valeur réelle du paramètre $b \equiv \left\langle\hat{\theta}\right\rangle - \theta$.

L'exemple le plus simple d'estimateur convergent et non biaisé est la moyenne empirique M ou la variance empirique modifiée S^2 qui sont des estimateurs convergents et non biaisés de la moyenne et de la variance σ^2 d'une loi gaussienne sous-jacente. Ce n'est en revanche pas le cas de la variance M_2. De manière générale, il n'est pas toujours possible de ne travailler qu'avec des estimateurs non-biaisés.

L'estimateur non biaisé *optimal* est l'estimateur qui a la plus petite variance. Il existe cependant une variance limite en dessous de laquelle est n'est pas possible de trouver un estimateur. C'est l'inégalité de Rao-Cramér. Si un estimateur atteint cette borne, il est dit *efficace* ou MVB[4].

Matrice de Fisher

Pour obtenir une expression simple de cette limite de Rao-Cramér, il faut définir l'information de Fisher contenue dans le n-échantillon. Elle est reliée à la fonction de vraisemblance $L(\boldsymbol{x}\,|\boldsymbol{\theta})$ par,

$$I_n(\theta) \equiv E\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L\right)^2\right\} = E\left\{-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln L\right\} \;. \tag{9.3.19}$$

A plusieurs paramètres, l'information de Fisher devient une matrice carrée dont la taille est donnée par le nombre de paramètres

$$F_{ij} = \left\langle\frac{-\partial^2 \ln L}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right\rangle_{\boldsymbol{x}} \;. \tag{9.3.20}$$

Dans ce cas l'inégalité de Rao-Cramér s'écrit

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_i) \geq (F_{ii})^{-1} \;. \tag{9.3.21}$$

$(F_{ii})^{-1}$ est donc la variance minimale ou dit autrement l'erreur statistique minimale sur le paramètre θ_i si l'on suppose que les autres paramètres sont connus. Si tel n'est pas le cas, et que l'on veut tenir compte de l'erreur sur les autres paramètres, l'inégalité de Rao-Cramér s'écrit

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_i) \geq \left(F^{-1}\right)_{ii} \;. \tag{9.3.22}$$

[4]Cet acronyme vient de l'anglais *Minimum Variance Bound.*

Il sera utile ultérieurement de connaître comment s'exprime cette inégalité dans le cas où l'on veut connaître la variance d'un estimateur T d'une fonction $\tau(\theta_1, \ldots, \theta_m)$

$$\mathrm{Var}(T) \geq \sum_{i,j} \frac{\partial \tau}{\partial \theta_i} (F^{-1})_{ij} \frac{\partial \tau}{\partial \theta_j} \ . \tag{9.3.23}$$

Les inégalités Eqs. (9.3.21), (9.3.22) et (9.3.23) de Rao-Cramér ne deviennent des égalités que dans le cas où $\hat{\theta}_i$ ou T sont des estimateurs MVB.

On utilise parfois l'écart type $\Delta\theta_i = \sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\theta}_i)}$ pour parler de l'erreur sur le paramètre θ_i. L'écart-type correspond à une erreur à 1 σ. Dans l'espace des erreurs sur les N paramètres, cela définit un ellipsoïde à N dimensions contenant les valeurs des paramètres ayant une probabilité supérieure à 68% [257]

$$\sum_{i,j} \Delta\theta_i \Delta\theta_j F_{ij} = 9.3 \ . \tag{9.3.24}$$

Méthode du maximum de vraisemblance

Il existe trois méthodes classiques pour construire des estimateurs efficaces : la méthode des moments, la méthode du maximum de vraisemblance (ML[5]), et la méthode des moindres carrés. La seconde méthode est détaillée ici. Les autres méthodes sont présentées dans les Refs. [248, 247].

Le principe est de rechercher un estimateur $\hat{\theta}$ pour lequel la fonction de vraisemblance est maximale : $\forall \theta, L(\boldsymbol{x}|\hat{\theta}) \geq L(\boldsymbol{x}|\theta)$. Cela se traduit en général par la recherche des solutions de

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} < 0 \ . \tag{9.3.25}$$

Cette méthode présente les caractéristiques suivantes :

- Si $\hat{\theta}$ est un estimateur de θ alors $\tau(\hat{\theta})$ est un estimateur de $\tau(\theta)$. En conséquence, il faut s'attendre à ce que l'estimateur ML soit biaisé. S'il l'est, il est possible de trouver une fonction $\tau(\hat{\theta})$ qui soit un estimateur non biaisé de $\tau(\theta)$.
- La méthode ML fournit l'estimateur MVB si celui-ci existe.
- L'estimateur ML est convergent et donc asymptotiquement non-biaisé.

Notons enfin que l'estimateur $\hat{\theta}$ a une densité de probabilité $f(\hat{\theta})$ asymptotiquement gaussienne de moyenne θ et de variance $I^{-1}(\theta)$. Ces propriétés font de cet estimateur un outil très fréquemment utilisé.

Les directions de dégénérescence

L'estimation de l'erreur à 1 σ que donne l'Eq. (9.3.22) tient compte des erreurs maximales sur les autres paramètres, ce qui est le plus réaliste. Cela signifie que si l'un des paramètres est très mal contraint par une expérience, toutes les valeurs d'incertitude vont être augmentées artificiellement. Une expérience complémentaire qui mesurerait précisément ce paramètre ou une combinaison de paramètres différente pourrait permettre d'améliorer fortement l'ensemble des mesures.

C'est pourquoi il est intéressant de rechercher les degrés de dégénérescence [259] c'est-à-dire les paramètres ou combinaison de paramètres pour lesquels les incertitudes sont très grandes. La méthode [264] pour cela est de diagonaliser F_{ij} (ou ce qui revient au même la

[5]Cet acronyme vient de l'anglais *Maximum Likelihood.*

grandeur adimensionnée $\widetilde{F_{ij}} = \theta_i \theta_j F_{ij}$). Ainsi les valeurs propres sont les inverses des carrés des erreurs dans les directions des vecteurs propres (qui sont des combinaisons linéaires des paramètres θ_i). Comme exemple de direction de dégénérescence, une expérience de CMB permet de contraindre très efficacement $\Omega_m h^2$ mais très mal Ω_m ou h^2. Il existe des dégénérescences connues entre l'indice spectral n_S et le redshift de réionisation z_{reion} ou entre Ω_m et Ω_Λ. La complémentarité des autres expériences comme les relevés de galaxies [255, 260], les relevés de supernovae [259] ou avec les mesures d'effet de lentille [261] permet une réduction substantielle des contraintes finales.

9.3.2 Méthode de Fisher appliquée au CMB en l'absence de lentillage

On va maintenant utiliser le formalisme de Fisher pour estimer la plus petite erreur que l'on peut atteindre sur les paramètres cosmologiques ou plus précisément la variance du meilleur estimateur possible (voir section précédente). Dans cette section, nous allons supposer négligeable l'effet de lentille sur les anisotropies. Dans la section 9.7, nous étudierons l'effet du lentillage sur cette analyse.

Supposons que notre expérience hypothétique mesure les anisotropies non polarisées et polarisées : les données contiennent les $a_{\ell m}$ polarisés T, E et B. Les estimateurs construits à la section 9.2.3 n'étaient pas réalistes car suppose un détecteur parfait, sans bruit de fond, couvrant tout le ciel et ayant une résolution infinie. En réalité, on n'observe pas uniquement les $a_{\ell m}^{\mathrm{prim}}$ primordiaux mais la somme de $a_{\ell m}^{\mathrm{obs}} = a_{\ell m}^{\mathrm{prim}} + n_{\ell m}^T$ où le second terme est un terme de bruit du détecteur. Ce bruit peut être décrit par un seuil de sensibilité en température σ_T. On définit un spectre de puissance pour ce bruit détecteur $\langle n_{\ell m}^T n_{\ell' m'}^T \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} N_\ell^T$. Il est d'usage d'introduire aussi l'inverse du bruit de détecteur $w_T^{-1} = N_\ell^T$. Pour la polarisation, on introduit aussi une sensibilité σ_P et un spectre de puissance $\langle n_{\ell m}^P n_{\ell' m'}^P \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} N_\ell^P$. Là encore, on peut introduire l'inverse du bruit de détecteur polarisé $w_P = \left(N_\ell^P\right)^{-1}$.

La seconde limitation expérimentale est l'effet de la taille du faisceau qui peut être décrit par une convolution des C_ℓ avec une gaussienne

$$B_\ell = \exp[-\ell(\ell+1)\theta_{\mathrm{beam}}^2/8\ln 2] \ , \tag{9.3.26}$$

de largeur à mi-hauteur θ_{beam}. La taille du faisceau θ_{beam} a aussi une conséquence sur l'échelle minimale et donc sur le multipôle ℓ maximal au-delà duquel le signal mesuré sera dominé par le bruit de fond.

On peut alors exprimer les spectres de puissance **observés** en fonction des spectres de puissance **théoriques** :

$$\left\langle a_{\ell m}^{T\ *} a_{\ell' m'}^T \right\rangle_{\mathrm{obs}} = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \left(C_\ell^T B_\ell + w_T^{-1}\right) \ , \tag{9.3.27}$$

$$\left\langle a_{\ell m}^{E\ *} a_{\ell' m'}^E \right\rangle_{\mathrm{obs}} = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \left(C_\ell^E B_\ell + w_P^{-1}\right) \ , \tag{9.3.28}$$

$$\left\langle a_{\ell m}^{B\ *} a_{\ell' m'}^B \right\rangle_{\mathrm{obs}} = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \left(C_\ell^B B_\ell + w_P^{-1}\right) \ , \tag{9.3.29}$$

$$\left\langle a_{\ell m}^{E\ *} a_{\ell' m'}^T \right\rangle_{\mathrm{obs}} = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \left(C_\ell^{TE} B_\ell + w_P^{-1}\right) \ , \tag{9.3.30}$$

$$\left\langle a_{\ell m}^{T\ *} a_{\ell' m'}^B \right\rangle_{\mathrm{obs}} = \left\langle a_{\ell m}^{E\ *} a_{\ell' m'}^B \right\rangle_{\mathrm{obs}} = 0 \ . \tag{9.3.31}$$

On supposera pour cela qu'il n'y a pas de corrélation entre les bruits de détecteur polarisé et non polarisé ni entre les signaux et les bruits.

Pour le calcul de la matrice de Fisher, le plus simple est de repartir de l'inégalité de Rao-Camér Eq. (9.3.23) dans le cas d'un estimateur des C_ℓ^X. Les meilleurs estimateurs $\hat{C}_\ell^X$ que l'on peut construire sont [256]

$$\hat{C}_\ell^T = \left[\frac{1}{2\ell+1}\sum_m |a_{\ell m}^T|^2 - w_T^{-1}\right] B_\ell^{-1} \;, \tag{9.3.32}$$

$$\hat{C}_\ell^E = \left[\frac{1}{2\ell+1}\sum_m |a_{\ell m}^E|^2 - w_P^{-1}\right] B_\ell^{-1} \;, \tag{9.3.33}$$

$$\hat{C}_\ell^B = \left[\frac{1}{2\ell+1}\sum_m |a_{\ell m}^B|^2 - w_P^{-1}\right] B_\ell^{-1} \;, \tag{9.3.34}$$

$$\hat{C}_\ell^{TE} = \left[\frac{1}{2\ell+1}\sum_m \frac{\left(a_{\ell m}^T\right)^* a_{\ell' m'}^E + \left(a_{\ell m}^E\right)^* a_{\ell' m'}^T}{2}\right] B_\ell^{-1} \;. \tag{9.3.35}$$

Ces estimateurs sont optimaux de sorte que l'inégalité de Rao-Camér Eq. (9.3.23) devient une égalité. Ainsi la matrice de covariance s'écrit

$$Cov(\hat{C}_\ell^{XY}, \hat{C}_\ell^{UV}) = \sum_{i,j} \frac{\partial C_\ell^{XY}}{\partial \theta_i}(F^{-1})_{ij}\frac{\partial C_\ell^{UV}}{\partial \theta_j} \tag{9.3.36}$$

En inversant l'expression précédente, la matrice de fisher totale s'écrit

$$F_{ij} = \sum_{\ell=2}^{\ell_{max}} \sum_{X,Y} \frac{\partial C_\ell^{XY}}{\partial \theta_i} Cov(\ell)^{-1}_{XY-UV}\frac{\partial C_\ell^{UV}}{\partial \theta_j}, \tag{9.3.37}$$

où

- X, Y, U, V sont les polarisations des a_{lm} mesurées parmi $\{T, E, B\}$,
- Cov est la matrice de covariance des $\hat{C}_\ell^X$,
- $\{\theta_i\}_{i=1,\ldots,N}$ sont les N paramètres testés par l'expérience,
- ℓ_{max} est le multipôle maximal au-delà duquel le signal mesuré sera dominé par le bruit de fond. Il est donné par la résolution de l'expérience θ_{beam}.

On voit dans l'Eq. (9.3.37) que l'information dans la matrice de Fisher possède deux origines. Elle est une fonction croissante de la dérivée des spectres de puissance par rapport aux paramètres cosmologiques, ce qui est intuitif. Plus les données varient fortement avec les paramètres cosmologiques, plus les données y sont sensibles et plus l'information est importante. La matrice de Fisher est en revanche une fonction décroissante de la matrice de covariance Cov, dans laquelle sont regroupées les informations relatives aux limitations dues à l'instrument prise en compte précédemment dans la construction des estimateurs et à la variance cosmique due au fait que toutes les échelles ℓ n'ont pas le même nombre de réalisations dans le ciel. C'est une matrice symétrique carrée 4×4 si l'on a quatre types X de signaux polarisés possibles (T, E, B et TE) et dépendante du multipôle ℓ. On peut calculer les différents termes de cette matrice en utilisant la définition de la covariance entre deux estimateurs de C_ℓ

$$\begin{aligned} Cov(\ell,\ell')_{UV-XY} &\equiv \left\langle \left(\hat{C}_\ell^{UV} - \left\langle \hat{C}_\ell^{UV}\right\rangle\right)\left(\hat{C}_{\ell'}^{XY} - \left\langle \hat{C}_{\ell'}^{XY}\right\rangle\right)\right\rangle \\ &= \left\langle \hat{C}_\ell^{UV}\hat{C}_{\ell'}^{XY}\right\rangle - \left\langle \hat{C}_\ell^{UV}\right\rangle\left\langle \hat{C}_{\ell'}^{XY}\right\rangle \;. \end{aligned} \tag{9.3.38}$$

Pour calculer chacun des termes de cette matrice, la démarche est la suivante :

– Le calcul du terme $\left\langle \hat{C}_\ell^{UV} \hat{C}_{\ell'}^{XY} \right\rangle$ utilise les formules (9.3.32). Il contient toutes les contributions au corrélateur à quatre points

$$\sum_{m,m'} \left\langle a_{\ell m}^{U}{}^{*} a_{\ell m}^{V} a_{\ell' m'}^{X}{}^{*} a_{\ell' m'}^{Y} \right\rangle \ . \tag{9.3.39}$$

Les contributions à ce corrélateur s'écrivent, dans le cas présent, comme des produits de deux corrélateurs à deux points [249] car en l'absence d'effet de lentille, on peut supposer que les champs $a_{\ell m}$ ont une statistique gaussienne[6] et sont de moyenne nulle.

– Les corrélateurs à quatre points peuvent être représentés graphiquement [249] par un croix pour chaque champ $a_{\ell m}$ de l'Eq. 9.3.39. Deux de ces croix sont en ℓ et deux en ℓ'. Les différentes contributions à la fonction de corrélation s'obtiennent en écrivant toutes les manières de corréler ces croix (une corrélation est représentée par une liaison entre deux points). Toutes ces contributions sont représentées sur la Fig. 9.2. Si l'on suppose que les alm sont des champs gaussiens, et de moyenne nulle, les corrélateurs à un, trois et quatre points sont nulles et seules différentes combinaisons de corrélations à deux points sont non nulles. Parmi les différentes contributions, certaines sont dites *connexes* lorsqu'il existe une corrélation entre deux champs en deux multipôles ℓ et ℓ' différents.

– Le terme $\left\langle \hat{C}_\ell^{X} \right\rangle \left\langle \hat{C}_{\ell'}^{Y} \right\rangle$ en revanche comptabilise les contributions des termes non connexes uniquement.

– La différence des deux revient à ne **garder que les graphes connexes**. Seuls ces derniers vont contribuer à la matrice de covariance. En l'absence d'effet de lentille, la matrice de covariance est **toujours diagonale** $[Cov(\ell,\ell') = \delta(\ell,\ell')Cov(\ell)]$ et l'on obtient toujours une expression de la forme

$$\begin{aligned} Cov(\ell)_{UV-XY} &= \frac{B_\ell^{-2}}{(2\ell+1)^2 f_{\rm sky}} \left(\sum_{m,m'} \left\langle a_{\ell m}^{U}{}^{*}\, a_{\ell m}^{V}\, a_{\ell m'}^{X}{}^{*}\, a_{\ell m'}^{Y} \right\rangle \right. \\ &\qquad \left. - \left\langle a_{\ell m}^{U}{}^{*}\, a_{\ell m}^{V} \right\rangle \left\langle a_{\ell m'}^{X}{}^{*}\, a_{\ell m'}^{Y} \right\rangle \right) \\ &= \frac{B_\ell^{-2}}{(2\ell+1)^2 f_{\rm sky}} \left(\sum \text{graphes 4 points connexes} \right) \end{aligned} \tag{9.3.40}$$

On vérifie donc que la matrice de covariance s'écrit sur la diagonale [256]

$$Cov(\ell)_{TT-TT} = \frac{2}{(2\ell+1) f_{\rm sky}} \left[C_\ell^T + (w_T B_\ell)^{-1} \right]^2 \ , \tag{9.3.41}$$

$$Cov(\ell)_{EE-EE} = \frac{2}{(2\ell+1) f_{\rm sky}} \left[C_\ell^E + (w_P B_\ell)^{-1} \right]^2 \ , \tag{9.3.42}$$

$$Cov(\ell)_{BB-BB} = \frac{2}{(2\ell+1) f_{\rm sky}} \left[C_\ell^B + (w_P B_\ell)^{-1} \right]^2 \ , \tag{9.3.43}$$

$$Cov(\ell)_{TE-TE} = \frac{1}{(2\ell+1) f_{\rm sky}} \left\{ C_\ell^{TE^2} + \left[C_\ell^T + (w_T B_\ell)^{-1} \right] \times \left[C_\ell^E + (w_P B_\ell)^{-1} \right] \right\} \ . \tag{9.3.44}$$

[6] En réalité ceci n'est qu'une approximation puisque cela n'est vrai que s'ils ont une origine purement inflationnaire, pour un modèle inflationnaire à un champ et cela n'est valable qu'au premier ordre dans les perturbations. Pour une étude de la formation de non gaussianités dans les modèles inflationnaire, voir la Ref. [253]

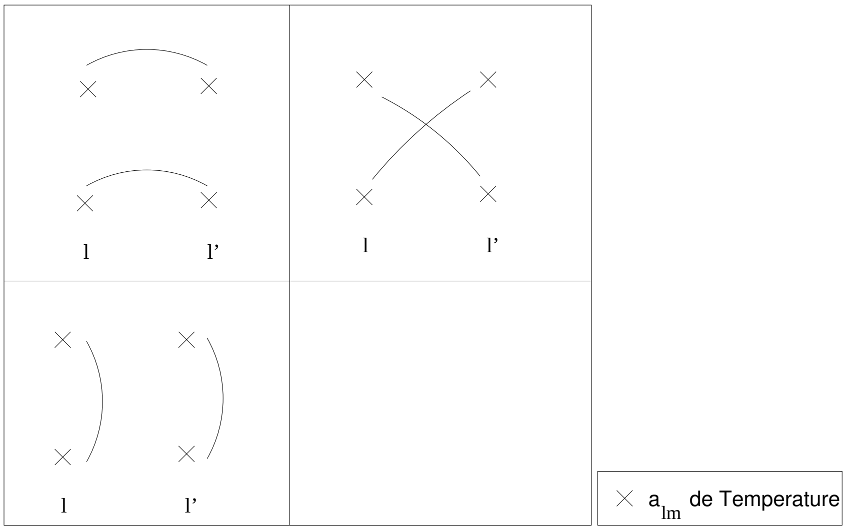

FIG. 9.2: Contributions au corrélateur à quatre points de température en l'absence d'effet de lentille. La première ligne contient deux contributions connexes et la seconde une contribution non connexe.

En ce qui concerne les éléments non diagonaux de la matrice,

$$Cov(\ell)_{TT-EE} = \frac{2}{(2\ell+1)f_{\rm sky}} C_\ell^{TE^2}, \tag{9.3.45}$$

$$Cov(\ell)_{TT-TE} = \frac{2}{(2\ell+1)f_{\rm sky}} C_\ell^{TE} \left[C_\ell^T + (w_T B_\ell)^{-1}\right], \tag{9.3.46}$$

$$Cov(\ell)_{EE-TE} = \frac{2}{(2\ell+1)f_{\rm sky}} C_\ell^{TE} \left[C_\ell^E + (w_P B_\ell)^{-1}\right], \tag{9.3.47}$$

$$Cov(\ell)_{TT-BB} = Cov(\ell)_{EE-BB} = Cov(\ell)_{TE-BB} = 0. \tag{9.3.48}$$

Dans ces formules, les spectres de bruits s'expriment $w_{(T,P)} = [\theta_{\rm beam}\sigma_{(T,P)}]^{-2}$. Notons que si les valeurs des sensibilités $\sigma_{(T,P)}$ sont en μK, dans les formules de matrice de covariance, les spectres de puissance doivent être en $(\mu K)^2$. Pour un détecteur qui possède plusieurs canaux en fréquence, $\left[w_{(T,P)}B_\ell\right]$ doit être remplacé par une somme sur les fréquences de cette grandeur. Le facteur $1/(2\ell+1)$ donne l'erreur due à la variance cosmique : plus ℓ est petit, moins il y a de réalisations dans le ciel observé puisque l'on est aux grandes échelles. Sachant que $m \in [-\ell, \ell]$, le nombre de modes indépendants pour un ℓ donné est $(2\ell+1)$. Dans le cas d'une expérience qui n'observe pas la totalité du ciel, l'effet de variance cosmique est approximé en remplaçant $1/(2\ell+1)$ par $1/(2\ell+1)f_{\rm sky}$ où $f_{sky} \in [0,1]$ est la fraction du ciel observée effectivement. Dans la pratique à cause de la présence de notre galaxie, environ 20% du ciel n'est pas observable et $f_{\rm sky} \leq 0.8$.

Un code numérique, *Simulation for COnstraints On Parameters* (SCOOP), a été écrit en Fortran 90 pour calculer les matrices de Fisher et les contraintes sur les paramètres pour différents types d'expériences. Il utilise le code CAMB[7] de A. Lewis et A. Challinor pour générer des spectres de puissance. L'analyse de Fisher doit être faite autour d'un modèle cosmologique standard. Les valeurs des paramètres utilisées sont données dans le tableau 9.1. Les caractéristiques de certaines expériences futures, projets d'expériences ou extrapolation à long terme sont rassemblées dans la Tab. 9.2 et peuvent être utilisées pour calculer la matrice de covariance associée à une expérience donnée.

[7] `http ://camb.info/`.

TAB. 9.1: Valeurs des paramètres cosmologiques du modèle standard ("*fiducial model*") autour duquel est faite l'analyse de Fisher. Il correspondent aux valeurs des paramètres d'un modèle ΛCDM dit "de concordance", telles que mesurées par WMAP [143].

$\Omega_{\rm tot}$	1
Ω_Λ	0.71
$\Omega_{\rm CDM}$	0.243
$\Omega_{\rm b}$	0.047
$\Omega_{\rm k}$	0
Ω_ν	0
$H_0/100$	0.72
T_0	2.726 K
$\tau_{\rm reion}$	0.166
$Y_{\rm He}$	0.24
$r = A_T/A_S$	1
n_s	0.99
n_T	0

TAB. 9.2: Caractéristiques expérimentales de plusieurs expériences futures ou projet d'expérience. Pour chaque expérience, sont données la résolution $\theta_{\rm beam}$ [définie à l'Eq. (9.3.26)], la sensibilité en température σ_T et en polarisation σ_P et la couverture du ciel $f_{\rm sky}$.

Expériences	Fréquences (GHz)	$\theta_{\rm beam}$ (arcmin)	σ_T (μK)	σ_P (μK)	$f_{\rm sky}$
Planck[a]	100	9.5	6.8	10.9	0.80
	143	7.1	6.0	11.5	0.80
	217	5.0	13.1	26.8	0.80
CMBpol[b]	217	3.0	1.0	1.4	0.65
IDEAL	217	0.2	0.1	0.1	0.80
SPTpol[c]	217	0.9	12	17	0.10
SPTpol2	217	0.5	0.2	0.2	0.10

[a] `http ://www.rssd.esa.int/index.php?project=PLANCK&page=perf_top`.

[b] `http ://universe.nasa.gov/program/inflation.html`.

[c] `http ://astro.uchicago.edu/spt/`.

Ce paragraphe nous a permis de montrer l'importance du calcul de la matrice de covariance pour l'extraction de paramètres cosmologiques par la méthode de Fisher. Nous avons aussi montré que le calcul de cette matrice de covariance est essentiellement donné par les différentes contributions à la fonction de corrélation à quatre points. Dans le cas où l'on suppose avoir accès directement aux fluctuations de température primaires, les données peuvent être supposées gaussienne, ce qui a pour conséquence que l'ensemble de l'information statistique est contenue dans le spectre de puissance c'est-à-dire la fonction de corrélation à deux points. Nous allons dans la suite de ce chapitre prendre en compte l'effet de lentille du rayonnement du fond diffus cosmologique. Nous verrons que cela a pour conséquence de modifier le signal et d'introduire de nouvelles contribution à la fonction de corrélation à quatre points.

9.4 Effet de lentille par les grandes structures sur le CMB

Dans cette section, nous allons présenter les structures à grande échelle de l'univers et leur interaction avec le rayonnement du CMB. Cette interaction est un exemple d'effet de lentille gravitationnel faible, et son influence sur le CMB et ses fonctions de corrélation sera étudié dans les sections suivantes.

9.4.1 Formation des structures à grandes échelles

Les fluctuations de densité générées à la fin de l'inflation

$$\delta_m(\boldsymbol{x}, a) \equiv \frac{\rho_m(\boldsymbol{x}, a) - \bar{\rho}_m(a)}{\bar{\rho}_m(a)} , \tag{9.4.49}$$

où $\bar{\rho}_m(a) = \rho_0(a/a_0)^{-3}$, ont évolué pour donner lieu à la formation des grandes structures de notre univers. Initialement de faible amplitude, ces fluctuations de densité ont grandi par instabilité gravitationnelle. La majorité de l'évolution de ces fluctuations peut être décrite par la théorie des perturbations car $\delta_m \lesssim 1$: on est dans le régime linéaire. La fin de leur évolution est non linéaire : des structures se forment (galaxies, amas de galaxies par ex.) pour lesquelles $\delta_m \sim 10^2$.

La croissance des perturbations est donné en fonction du facteur d'échelle par

$$\delta_m(a) \propto a^{1+3w} = \begin{cases} a^2 , & \text{pour} \quad a < a_{\rm eq} \\ a , & \text{pour} \quad a > a_{\rm eq} \end{cases} \tag{9.4.50}$$

avec $w = P/\rho = 1/3$ pendant l'ère de radiation et $w = 0$ pendant l'ère de matière. Cette dépendance est valable hormis pour les époques récentes $a \gg a_{\rm eq}$, cette évolution est modifiée car Ω_Λ n'est plus négligeable [251]

$$\delta(a) = \delta_0 a \frac{g'(a)}{g'(a_0)} , \tag{9.4.51}$$

où la fonction de croissance linéaire $g'(a)$ est bien évaluée par

$$g'(a, \Omega_{\rm tot}, \Omega_\Lambda) = \frac{5}{2}\Omega_{\rm tot}(a) \left[\Omega_{\rm tot}^{4/7} - \Omega_\Lambda(a) + \left(1 + \frac{\Omega_{\rm tot}}{2}\right)\left(1 + \frac{\Omega_\Lambda}{70}\right)\right]^{-1} . \tag{9.4.52}$$

Les fluctuations du CMB nous donne une première mesure de l'amplitude $\delta_b \sim 10^{-5}$ des fluctuations de densité des baryons (puisque fortement couplé au électrons et aux photons) à un redshift de l'ordre de 1100. Si l'ensemble de la matière était constitué de baryon, les fluctuations de matière aujourd'hui auraient une amplitude de l'ordre de $\delta_0 \sim 10^{-2}$ ce qui est en contradiction avec les structures observées ($\delta_m \sim 10^2$). Pour résoudre ce paradoxe, il faut introduire une matière noire froide faiblement couplée électromagnétiquement. Cette matière doit donc connaître un effondrement gravitationnel plus important et plus tôt (avant l'égalité matière-rayonnement) afin de pouvoir rendre compte des structures actuelles.

Il est utile de décomposer $\delta_m(\boldsymbol{x})$ en modes de Fourier

$$\delta_m(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta_m(\boldsymbol{k})\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \mathrm{d}^3\boldsymbol{k} \ , \tag{9.4.53}$$

car lors de la croissance linéaire, chaque mode évolue de manière indépendante. On définit alors le spectre de puissance des perturbations

$$\langle \delta_m(\boldsymbol{k})\delta_m^*(\boldsymbol{k'})\rangle = (2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})\mathcal{P}_\delta(\boldsymbol{k}) \ . \tag{9.4.54}$$

Du fait que la croissance des perturbations, ce spectre de puissance est une fonction dépendante du temps ou de manière équivalente du redshift ou du facteur d'échelle. Si l'on considère la phase d'évolution linéaire, on peut définir une fonction de transfer $T(\boldsymbol{k}, a)$ pour relier le spectre de puissance primordial issu de l'inflation au spectre de puissance à un moment t donné. On désignera par $T_0(\boldsymbol{k})$ la fonction $T(\boldsymbol{k}, a_0)$. Le spectre de puissance actuel $\mathcal{P}^0_\delta(\boldsymbol{k})$ est représenté sur la Fig. 9.3. Il a été mesuré par plusieurs classes d'observations : fond diffus cosmologique, cartographie des grandes structures, détection de raies Lyman α, notamment.

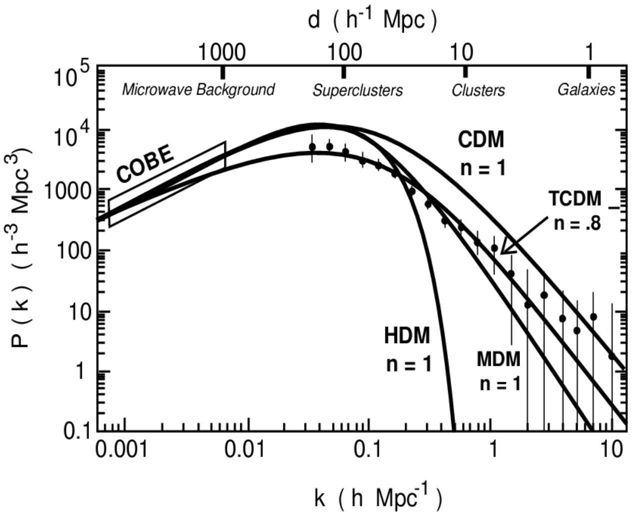

FIG. 9.3: Spectre de puissance des perturbations aujourd'hui. Figure tirée de [8].

La quantité de matière noire dans l'univers peut être déduit du spectre de puissance actuel des perturbations. Pour comprendre la forme de ce spectre, il faut définir un nombre d'onde particulier

$$k_{\mathrm{eq}} \equiv R_H(a_{\mathrm{eq}}) \simeq 0.083(\Omega_m h) \ \ h\,\mathrm{Mpc}^{-1} \ . \tag{9.4.55}$$

Une fluctuation de densité de nombre d'onde comobile k devient "sub-Hubble" lorsque $k \simeq R_H^{-1}(a)$. Si une perturbation de longueur d'onde $\lambda = k^{-1} < R_H(a_{\mathrm{eq}})$ devient sub-Hubble avant l'égalité matière-rayonnement, l'expansion rapide pendant l'ère de radiation empêche la perturbation de grandir. Il y a donc une suppression de la croissance des perturbations due à la radiation de facteur [251] $f_{\mathrm{sup}} = (k_{\mathrm{eq}}/k)^2$. En conséquence, le spectre de puissance actuel aura la forme suivante

$$\mathcal{P}(k) \propto \begin{cases} k \ , & \text{pour} \quad k \ll k_{\mathrm{eq}} \\ k^{-3} \ , & \text{pour} \quad k \gg k_{\mathrm{eq}} \end{cases} \tag{9.4.56}$$

Plusieurs méthodes permettent une normalisation de ce spectre [251]. La première est une normalisation pour les grandes échelles par les données du CMB grace à la mesure de la fluctuation de température absolue par les données de COBE, qui peut être traduite en une normalisation du spectre $\mathcal{P}_\delta$. Une seconde normalisation possible à petite échelle est le comptage de galaxie dans un volume donné en supposant que ces galaxies sont des traceurs biaisés de la matière noire et en supposant une certaine forme pour le biais. Usuellement, ce volume est de 8 h^{-1} Mpc et la grandeur mesurée est la variance du comptage de galaxies $\sigma_8^{\rm gal}$. Sa valeur est proche de l'unité mais le biais suivi par ces traceurs est toujours en débat. Il est intéressant de noter que ces deux méthodes donnent des résultats similaires et en tout état de cause compatible.

Dans les dernières étapes, la croissance des fluctuations à petites échelles devient non-linéaire. La connaissance de cette évolution non linéaire est cruciale pour l'étude des effets de lentille dû aux grandes structures. Cette évolution requiert un traitement numérique, du type simulation à N corps. Cependant, des formules analytiques de l'évolution non linéaire de $\mathcal{P}_\delta$ existent [268] et fonctionnent remarquablement bien.

9.4.2 Effet de lentille par les grandes structures

La relativité générale prévoit la déflexion des rayons lumineux si ceux-ci se propagent dans un espace dont le potentiel gravitationnel est inhomogène, par exemple lorsque la métrique est déformée par la présence d'un corps massif.

L'effet de lentille gravitationnelle est la déviation des rayons lumineux émis par une source éloignée par un corps massif. Si le corps est suffisamment massif, plusieurs rayons peuvent atteindre l'observateur et plusieurs images d'un même objet sont observées. Des anneaux d'Einstein et des arcs sont observés si les déflecteurs (les lentilles) sont des amas de galaxies et lorsque la source se situe dans une région de l'espace ou l'amplification est importante. Dans le cas d'images multiples ou d'arcs, on parle d'un effet de lentille fort, dont la déviation des rayons lumineux par une corde cosmique décrite au chapitre 3 est un exemple.

L'effet de lentille des photons du CMB par les grandes structures, schématisé sur la Fig. 9.4, est un effet de lentille faible car la déviation $\boldsymbol{\xi}$ des rayons lumineux est très petite devant la taille caractéristique des objets étudiés, la taille des structures du CMB dans le cas présent. Dans ce cas, les effets sont moins visibles que dans le cas d'effet fort. Ils se résument à des déformations de l'image de la source, ici la surface de dernière diffusion et est donc étudié à travers ses propriétés statistiques. Comme l'illustre la Fig. 9.4, la conséquence de l'effet de lentille est d'observer dans une direction $\boldsymbol{n}$ l'anisotropie générée dans la direction $\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\xi}$. On notera

$$\widetilde{\Theta}(\boldsymbol{n}) = \Theta(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\xi}) \ . \tag{9.4.57}$$

Dans cette expression comme dans toute la suite de ce chapitre, $\widetilde{\Theta}(\boldsymbol{n})$ désigne l'anisotropie observée dans la direction $\boldsymbol{n}$ et $\Theta(\boldsymbol{n})$ l'anisotropie générée dans la direction $\boldsymbol{n}$. Si la déviation est faible on peut développer la relation précédente et écrire

$$\widetilde{\Theta}(\boldsymbol{n}) = \Theta(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\xi}) = \Theta(\boldsymbol{n}) + \xi_i \nabla^i \Theta(\boldsymbol{n}) + \frac{1}{2}\xi_i \xi_j \nabla^i \nabla^j \Theta(\boldsymbol{n}) + \cdots \ . \tag{9.4.58}$$

Le calcul de la déviation $\boldsymbol{\xi}$ fera nécessairement intervenir la position de la lentille par rapport à la source, et la masse de la source [252, 251].

Il est particulièrement utile pour évaluer la relation précédente d'introduire le potentiel ϕ dont dérive la déviation $\boldsymbol{\xi}$ de telle sorte que $\xi_i = \nabla_i \phi$. Ce potentiel doit contenir l'information sur toutes les lentilles qui peuvent influencer la trajectoire du rayon lumineux reçu. Il est

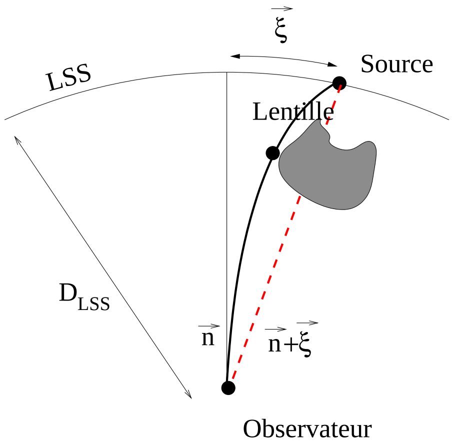

FIG. 9.4: Illustration du déplacement $\boldsymbol{\xi}$ dû à l'effet de lentille par un corps L. La conséquence est que l'anisotropie générée dans la direction $\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\xi}$ est observée dans la direction $\boldsymbol{n}$.

donné par le potentiel gravitationnel Φ le long du trajet du rayon lumineux [269]

$$\phi(\boldsymbol{n}) = -2\int g_\phi(D)\,\Phi[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{n}),D]\,\mathrm{d}D\ , \tag{9.4.59}$$

A priori l'intégration précédente se fait sur la trajectoire réelle. On se placera dans la suite de ce chapitre dans l'*approximation de Born* qui consiste à se ramener à une intégration sur la trajectoire non perturbée par l'effet de lentille, c'est à dire sur la distance radiale D variant entre 0 (notre position) et $D_{\rm LSS}$ (la position de la surface de dernière diffusion). Notons que cette trajectoire n'est rectiligne que dans le cas où $\Omega_k = 0$. Le potentiel gravitationnel est pondéré par une fonction qui, pour une distribution de sources approximée par une distribution de Dirac $\delta(D - D_{\rm LSS})$, prend la forme

$$g_\phi(D) = \frac{D_A(D_{\rm LSS}-D)}{D_A(D)D_A(D_{\rm LSS})}\ . \tag{9.4.60}$$

Cette fonction représente l'efficacité de déflexion d'une lentille située à une distance D. $D_A(D)$ est la distance angulaire d'un objet à la distance radiale D, $D_A(D) = f_k(D)$ avec f_k donnée au chapitre 1, Eq. (1.2.12).

Si l'effet de lentille est faible, il agit sur les petites échelles et son étude peut se faire en supposant que $D_{\rm LSS} \to \infty$. On parle de *l'approximation plate*. Dans cette approximation, les fluctuations de température peuvent être décomposée sur la base de Fourier au lieu de la base des Y_ℓ^m comme à l'Eq. (9.2.6)

$$\Theta(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_S \Theta(\mathbf{l})\,e^{i\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{n}}\mathrm{d}^2\boldsymbol{l} \tag{9.4.61}$$

où la surface d'intégration S est un plan infini à deux dimensions qui approxime la LSS. Dans l'approximation plate, on peut aussi développer le potentiel de lentille $\phi(\boldsymbol{n})$ sur la base de Fourier

$$\phi(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_S \phi(\mathbf{l})\,e^{i\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{n}}\mathrm{d}^2\boldsymbol{l}\ . \tag{9.4.62}$$

Cela permet de définir un spectre de puissance $C_l^{\phi\phi}$

$$\langle\phi^*(\mathbf{l})\phi(\mathbf{l}')\rangle = (2\pi)^2\delta(\mathbf{l}-\mathbf{l}')C_l^{\phi\phi}\ . \tag{9.4.63}$$

Ce spectre de puissance du "champ de lentille" $C_l^{\phi\phi}$ peut être obtenu grace à CAMB. On obtient le spectre de la figure 9.5.

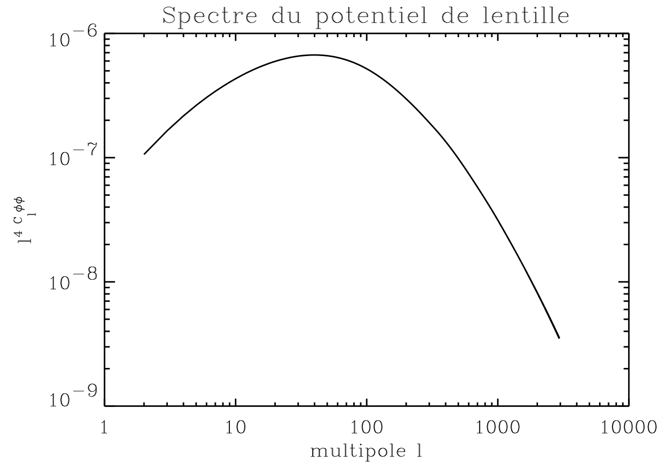

FIG. 9.5: Spectre de puissance du "champ de lentille", $l^4\, C_l^{\phi\phi}$, calculé par CAMB pour des paramètres cosmologiques proche des mesures de WMAP.

9.5 Effet de lentille sur les fluctuations de température et de polarisation

9.5.1 Effet de lentille sur l'anisotropie de température

On a vu à la section précédente que dans le cas d'un effet de lentille faible, on peut développer l'anisotropie observée en $\boldsymbol{n}$ à l'ordre 2 en effet de lentille

$$\widetilde{\Theta}(\boldsymbol{n}) = \Theta(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\xi}) = \Theta(\boldsymbol{n}) + \xi_i \nabla^i \Theta(\boldsymbol{n}) + \frac{1}{2}\xi_i\xi_j \nabla^i\nabla^j\Theta(\boldsymbol{n}) + \cdots \,. \tag{9.5.64}$$

En passant à la transformée de Fourier, et en utilisant les relations de la section 0.2, on obtient les termes de l'anisotropie aux différents ordres en ϕ, de telle sorte que, si l'on se restreint à l'ordre 4,

$$\widetilde{\Theta_{\mathbf{l}}} = \sum_{i=0}^{4} \widetilde{\Theta_{\mathbf{l}}}^{(i)} \,. \tag{9.5.65}$$

Les différents ordre sont donnés par les expressions suivantes.

$$\widetilde{\Theta_{\mathbf{l}}}^{(0)} = \Theta_{\mathbf{l}} \tag{9.5.66}$$

$$\widetilde{\Theta_{\mathbf{l}}}^{(1)} = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int \Theta(\mathbf{l_1})\,\phi(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})\,[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_1} \tag{9.5.67}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\Theta_{\mathbf{l}}}^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^4}\iint\ & \Theta(\mathbf{l_1})\,\phi(\mathbf{l_2})\phi(\mathbf{l}-\mathbf{l_1}-\mathbf{l_2}) \\ & \times(\mathbf{l_1}\cdot\mathbf{l_2})[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1}-\mathbf{l_2})]\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_1}\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_2}\end{aligned} \tag{9.5.68}$$

A l'ordre 2, on retrouve la formule donnée par Hu [269] (formules (35) et (36)). Les ordres suivants sont donnés par

$$\begin{aligned}\widetilde{\Theta_{\mathbf{l}}}^{(3)} = -\frac{1}{6}\frac{1}{(2\pi)^6}\iiint\ & \Theta(\mathbf{l_1})\,\phi(\mathbf{l_2})\,\phi(\mathbf{l_3})\,\phi(\mathbf{l}-\mathbf{l_1}-\mathbf{l_2}-\mathbf{l_3}) \\ & \times(\mathbf{l_1}\cdot\mathbf{l_2})(\mathbf{l_1}\cdot\mathbf{l_3})[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1}-\mathbf{l_2}-\mathbf{l_3})]\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_1}\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_2}\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_3}\end{aligned} \tag{9.5.69}$$

$$\widetilde{\Theta}_{\mathbf{l}}^{(4)} = \frac{1}{24}\frac{1}{(2\pi)^8}\iiiint \Theta(\mathbf{l_1})\,\phi(\mathbf{l_2})\,\phi(\mathbf{l_3})\,\phi(\mathbf{l_4})\,\phi(\mathbf{l}-\mathbf{l_1}-\mathbf{l_2}-\mathbf{l_3}-\mathbf{l_4}) \\ \times(\mathbf{l_1}\cdot\mathbf{l_2})(\mathbf{l_1}\cdot\mathbf{l_3})(\mathbf{l_1}\cdot\mathbf{l_4})[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1}-\mathbf{l_2}-\mathbf{l_3}-\mathbf{l_4})] \\ \mathrm{d}^2\mathbf{l_1}\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_2}\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_3}\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_4} \tag{9.5.70}$$

9.5.2 Effet de lentille sur la polarisation

Pour la polarisation, les grandeurs mesurées sont les paramètres de Stockes $Q(\mathbf{n})$ et $U(\mathbf{n})$ ou de manière équivalente les grandeurs

$$_{\pm}X(\mathbf{n}) = Q(\mathbf{n}) \pm i\,U(\mathbf{n}) \ . \tag{9.5.71}$$

Ces grandeurs sont de spin 2. Il faut donc introduire un transformée de Fourier de spin 2 de telle sorte que

$$_{\pm}X(\mathbf{n}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int {}_{\pm}X(\mathbf{l})\exp[\pm 2i(\varphi_l-\varphi)]\exp[i\mathbf{l}\cdot\mathbf{n}]\,\mathrm{d}^2\mathbf{l} \ , \tag{9.5.72}$$

avec

$$_{\pm}X(\mathbf{l}) = \int {}_{\pm}X(\mathbf{n})\exp[\pm 2i(\varphi_l-\varphi)]\exp[-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{n}]\,\mathrm{d}^2\mathbf{n} \ . \tag{9.5.73}$$

On rappelle que $E(\mathbf{l})$ et $B(\mathbf{l})$ leurs sont reliées par

$$\begin{aligned} E(\mathbf{l}) &= \mathrm{Re}[{}_{+}X(\mathbf{l})] = \frac{1}{2}\Big({}_{+}X(\mathbf{l}) + {}_{-}X(\mathbf{l})\Big) \\ B(\mathbf{l}) &= \mathrm{Im}[{}_{+}X(\mathbf{l})] = \frac{1}{2i}\Big({}_{+}X(\mathbf{l}) - {}_{-}X(\mathbf{l})\Big) \end{aligned} \tag{9.5.74}$$

Les champs $\widetilde{E}$ et $\widetilde{B}$ s'écrivent donc de la manière suivante.

$$\widetilde{E}_{\mathbf{l}}^{(0)} = E_{\mathbf{l}} \ , \tag{9.5.75}$$

$$\widetilde{E}_{\mathbf{l}}^{(1)} = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int [E(l_1)\cos(2\varphi_1) - B(l_1)\sin(2\varphi_1)]\,\phi(l-l_1)\,[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_1} \ , \tag{9.5.76}$$

avec (ceci sera vrai dans toute la suite)

$$\varphi_1 = \varphi_{l_1} - \varphi_l = \varphi_{l_1} \ , \tag{9.5.77}$$

par une redéfinition des angles. Les ordres suivants sont donnés par

$$\widetilde{E}_{\mathbf{l}}^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^4}\iint [E(l_1)\cos(2\varphi_1) - B(l_1)\sin(2\varphi_1)]\,\phi(\mathbf{l_2})\phi(\mathbf{l}-\mathbf{l_1}-\mathbf{l_2}) \\ \times(\mathbf{l_1}\cdot\mathbf{l_2})[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1}-\mathbf{l_2})]\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_1}\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_2} \ , \tag{9.5.78}$$

$$\widetilde{E}_{\mathbf{l}}^{(3)} = -\frac{1}{6}\frac{1}{(2\pi)^6}\iiint [E(l_1)\cos(2\varphi_1) - B(l_1)\sin(2\varphi_1)]\,\phi(\mathbf{l_2})\,\phi(\mathbf{l_3}) \\ \times\ \phi(\mathbf{l}-\mathbf{l_1}-\mathbf{l_2}-\mathbf{l_3})(\mathbf{l_1}\cdot\mathbf{l_2})(\mathbf{l_1}\cdot\mathbf{l_3})[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1}-\mathbf{l_2}-\mathbf{l_3})] \\ \mathrm{d}^2\mathbf{l_1}\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_2}\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_3} \ , \tag{9.5.79}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_{\mathbf{l}}^{(4)} = \frac{1}{24}\frac{1}{(2\pi)^8} \iiiint & [E(l_1)\cos(2\varphi_1) - B(l_1)\sin(2\varphi_1)] \\ & \times \phi(\mathbf{l_2})\,\phi(\mathbf{l_3})\,\phi(\mathbf{l_4})\,\phi(\mathbf{l}-\mathbf{l_1}-\mathbf{l_2}-\mathbf{l_3}-\mathbf{l_4}) \\ & \times (\mathbf{l_1}\cdot\mathbf{l_2})(\mathbf{l_1}\cdot\mathbf{l_3})(\mathbf{l_1}\cdot\mathbf{l_4})[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1}-\mathbf{l_2}-\mathbf{l_3}-\mathbf{l_4})] \\ & \mathrm{d}^2\mathbf{l_1}\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_2}\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_3}\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_4}\ .\end{aligned} \tag{9.5.80}$$

Pour la polarisation de type B, les expressions donnant les champs ayant subit un effet de lentille sont identiques aux expressions précédentes en remplaçant $E(l)$ par $B(l)$ et $B(l)$ par $-E(l)$.

9.6 Effet de lentille sur les moments à deux points

Dans la section précédente, nous avons calculé l'effet de lentille sur les champs de température et de polarisation. Nous avons donc relié les anisotropies générées X aux anisotropies observées $\widetilde{X}$ après l'effet de lentille. Dans cette section, nous allons calculer les moments à deux points de ces champs observés en fonction des spectres de puissance des anisotropies générées. Définissons le spectre de puissance observé $\widetilde{C_l^{XY}}$ pour X et Y parmi $\{T, E, B\}$, donné à l'ordre N par

$$(2\pi)^2\delta(l-l')\,\widetilde{C_l^{XY}} = \langle \widetilde{X_l}^*\widetilde{Y_{l'}}\rangle = \sum_{i+j\leq N} \langle\, \widetilde{X_l}^{(i)}\widetilde{Y_l}^{(j)}\rangle = \sum_{i+j\leq N}\Gamma_{ij}^{XY}\ , \tag{9.6.81}$$

où $i, j \in \mathbb{N}$ désigne l'ordre en effet de lentille de l'anisotropie $\tilde{X}$.

Nous supposerons dans ce chapitre que les champs d'anisotropie $X(l)$ primordiaux (ceux qui seraient observés en l'absence d'effet de lentille) ainsi que le potentiel d'effet de lentille ont une statistique gaussienne et sont de moyenne nulle, $\langle X\rangle = 0$ et $\langle\phi\rangle = 0$. On supposera en outre que les anisotropies primordiale sont indépendantes du potentiel d'effet de lentille, de telle sorte que $\langle X_l\phi_{l'}\rangle = 0$.

Cas de la température

Grace à ces relations on peut calculer les corrélateurs au différents ordres dans un premier temps pour l'anisotropie de température. Par définition de C_l^T, on peut écrire

$$\Gamma_{00}^{TT} = (2\pi)^2\delta(l-l')C_l^T. \tag{9.6.82}$$

A l'ordre 1, le seul champ de lentille présent ne peut être corrélé et puisqu'il est de moyenne nulle,

$$\Gamma_{01}^{TT} = \Gamma_{10}^{TT} = 0. \tag{9.6.83}$$

En revanche, à l'ordre 2, il existe trois contributions non nulles

$$\Gamma_{11}^{TT} = \delta(l-l')\int C_{l_1}^T\, C_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}^{\phi\phi}[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]^2\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_1}\ , \tag{9.6.84}$$

$$\Gamma_{02}^{TT} = \Gamma_{20}^{TT} = -\frac{1}{2}\,\delta(l-l')\,C_l^T\,\mathcal{R}_l \tag{9.6.85}$$

avec

$$\mathcal{R}_l \equiv \int C_{l_1}^{\phi\phi} (\mathbf{l} \cdot \mathbf{l_1})^2 \, \mathrm{d}^2\mathbf{l_1} \ . \tag{9.6.86}$$

On voit donc que la première contribution non nulle de l'effet de lentille est d'ordre 2. En se restreignant à cet ordre, on obtient le spectre

$$\widetilde{C_l^T} = C_l^T \left(1 - \frac{l^2}{4\pi}\mathcal{R}\right) + \frac{1}{(2\pi)^2} \int C_{l_1}^T \, C_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}^{\phi\phi} [\mathbf{l_1} \cdot (\mathbf{l} - \mathbf{l_1})]^2 \mathrm{d}^2\mathbf{l_1} \ , \tag{9.6.87}$$

où l'on définit

$$\mathcal{R} \equiv \int_0^\infty l_1^3 \, C_{l_1}^{\phi\phi} \mathrm{d}l_1 \ . \tag{9.6.88}$$

Notons que dans le dernier terme de l'Eq. (9.6.87), l'intégration en φ_1 ne se fait pas de manière analytique car $|\mathbf{l} - \mathbf{l_1}|$ en dépend.

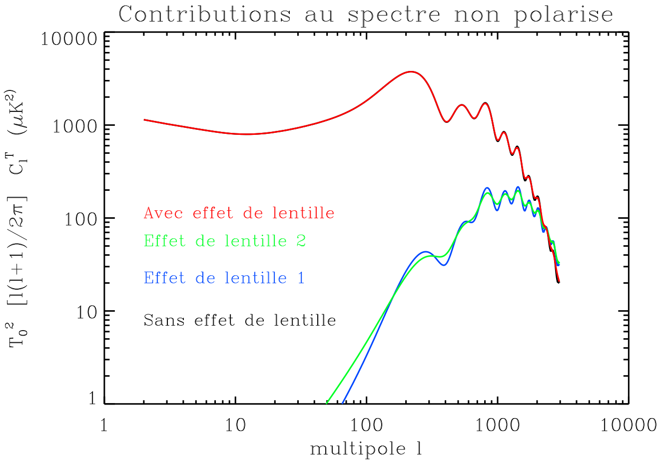

FIG. 9.6: Spectre de puissance de température avec (rouge) et sans (noir) lentillage pour des paramètres cosmologiques proches des mesures de WMAP. L'unité est le μK^2. Les termes contribuant au spectre lentillé sont représentés en bleu (contribution négative) et vert (contribution positive) (Voir Eq. 9.6.87). On voit que l'effet de lentille est de lisser les pics acoustiques ([267]).

A l'ordre 3, tous les corrélateurs sont nuls pour les mêmes raisons qu'à l'ordre 1.

$$\Gamma_{30}^{TT} = \Gamma_{03}^{TT} = \Gamma_{21}^{TT} = \Gamma_{12}^{TT} = 0. \tag{9.6.89}$$

A l'ordre 4, les corrélations sont non nulles et les contributions de l'effet de lentille s'écrivent

$$\Gamma_{04}^{TT} = \Gamma_{40}^{TT} = \frac{1}{8}\frac{1}{(2\pi)^2}\,\delta(l - l')\, C_l^T \, (\mathcal{R}_l)^2 \tag{9.6.90}$$

$$\Gamma_{13}^{TT} = \Gamma_{31}^{TT} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^2}\,\delta(l - l') \int C_{l_1}^T \, [\mathbf{l_1} \cdot (\mathbf{l} - \mathbf{l_1})]^2 \, C_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}^{\phi\phi} \, \mathcal{R}_{l_1} \mathrm{d}^2\mathbf{l_1} \tag{9.6.91}$$

$$\Gamma_{22}^{TT} = \frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^2}\,\delta(l - l') \left\{ C_l^T \, (\mathcal{R}_l)^2 + 2 \iint C_{l_1}^T \, [\mathbf{l_1} \cdot (\mathbf{l} - \mathbf{l_1} - \mathbf{l_2})]^2 \right. \\ \left. C_{l_2}^{\phi\phi} \, C_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}-\mathbf{l_2}|}^{\phi\phi} \mathrm{d}^2\mathbf{l_1}\mathrm{d}^2\mathbf{l_2} \right\} \tag{9.6.92}$$

Cas de C_l^{EE}

A l'ordre 0, comme pour la température, $\Gamma_{00}^{EE} = (2\pi)^2\delta(l-l')C_l^E$ tandis qu'à l'ordre 1 les contributions sont nulles. A l'ordre 2, la première contribution de l'effet de lentille

$$\Gamma_{11}^{EE} = \delta(l-l') \int [C_{l_1}^E \cos^2(2\varphi_1) + C_{l_1}^B \sin^2(2\varphi_1)]\, C_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}^{\phi\phi} [\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]^2\, \mathrm{d}^2\mathbf{l_1} \tag{9.6.93}$$

$$\Gamma_{02}^{EE} = \Gamma_{20}^{EE} = -\frac{1}{2}\,\delta(l-l')\, C_l^E\, \mathcal{R}_l\ . \tag{9.6.94}$$

En se restreignant à l'ordre 2, on obtient donc que

$$\widetilde{C_l^E} = C_l^E\left(1-\frac{l^2}{4\pi}\mathcal{R}\right) + \frac{1}{(2\pi)^2}\int \left[C_{l_1}^E \cos^2(2\varphi_1) + C_{l_1}^B \sin^2(2\varphi_1)\right]\ C_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}^{\phi\phi}[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]^2\mathrm{d}^2\mathbf{l_1}\ . \tag{9.6.95}$$

A l'ordre 3, toutes les contributions sont nulles pour les mêmes raisons que précédemment et à l'ordre 4,

$$\Gamma_{04}^{EE} = \Gamma_{40}^{EE} = \frac{1}{8}\frac{1}{(2\pi)^2}\,\delta(l-l')\, C_l^E\,(\mathcal{R}_l)^2\ , \tag{9.6.96}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{13}^{EE} = \Gamma_{31}^{EE} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^2}\,\delta(l-l') \int &[C_{l_1}^E \cos^2(2\varphi_1) + C_{l_1}^B \sin^2(2\varphi_1)] \\ &[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]^2\, C_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}^{\phi\phi}\, \mathcal{R}_{l_1}\mathrm{d}^2\mathbf{l_1}\ ,\end{aligned} \tag{9.6.97}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^{EE} = \frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^2}\,\delta(l-l') \Big\{ C_l^E\,(\mathcal{R}_l)^2 + 2\iint &[C_{l_1}^E \cos^2(2\varphi_1) + C_{l_1}^B \sin^2(2\varphi_1)] \\ &[\mathbf{l_1}\cdot\mathbf{l_2}]^2[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1}-\mathbf{l_2})]^2\, C_{l_2}^{\phi\phi}\, C_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}-\mathbf{l_2}|}^{\phi\phi}\mathrm{d}^2\mathbf{l_1}\mathrm{d}^2\mathbf{l_2}\Big\}\ .\end{aligned} \tag{9.6.98}$$

Cas de C_l^{BB}

Les formules pour Γ_{ij}^{BB} sont identiques à celle de Γ_{ij}^{EE} en remplaçant B par E. Mais dans le cas du spectre polarisé B, il peut être intéressant d'écrire le développement à l'ordre 4 en effet de lentille en prévision du fait que pour le calcul de la matrice de covariance, les contributions d'ordre 4 ne seront pas forcément négligeable devant celle d'ordre 2. On y reviendra. Le calcul du moment à deux points jusqu'à l'ordre 4 est donc une étape de calcul préliminaire puisque certains termes contribuent aux deux fonctions de corrélation.

Le spectre observé $\widetilde{C_l^B}$ peut s'écrire comme la somme de tous les graphes de la Fig. 9.7 ci-dessous. Par rapport à la Fig. 9.2, ce que l'on calcule maintenant est une fonction de corrélation à deux points uniquement mais en présence d'effet de lentille. En conséquence, les $\tilde{a}_{lm}$ (ici représentés par un "$-$" qui symbolise la polarisation B) sont le produit d'un a_{lm} primordial et d'un effet de lentille (symbolisé par un "o") en accord avec la formule Eq. 9.5.76 et les suivantes. Là encore, le calcul des différentes contributions aux $\widetilde{C_l^B}$ nécessite de trouver toutes les manières possibles de corréler tous les champs présents. Les graphes de la première ligne donne l'ordre 2 tandis que les autres sont d'ordre 4. Les graphes de la seconde ligne contribuent à Γ_{22}^{BB} tandis que la dernière ligne représente les contributions de Γ_{31}^{BB} et Γ_{40}^{BB}.

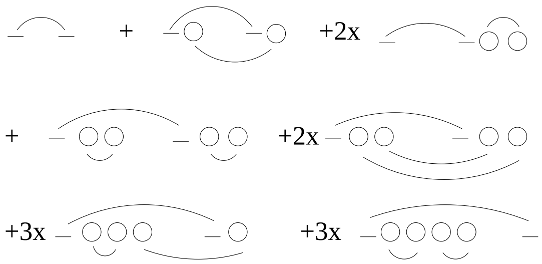

FIG. 9.7: Graphes contribuant à $\widetilde{C_l^B}$. Les signe "$-$" symbolisent les a^B_{lm}, tandis que les signes "o" représentent le champ de lentille ϕ. Les courbes qui relient deux signes signifient que l'on considère dans le développement le terme qui corrèle ces deux champs.

En calculant chaque terme de la Fig. 9.7, on peut montrer qu'à l'ordre 4, le spectre s'écrit

$$\begin{aligned}\widetilde{C_l^B} =& C_l^B\left(1-\frac{l^2}{4\pi}\mathcal{R}+\frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^4}(\mathcal{R}_l)^2\right)\\ &+\frac{1}{(2\pi)^2}\int\left[C_{l_1}^B\cos^2(2\varphi_1)+C_{l_1}^E\sin^2(2\varphi_1)\right]\,C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]^2\mathrm{d}^2\mathbf{l_1}\\ &-\frac{1}{(2\pi)^4}\int\left[C_{l_1}^B\cos^2(2\varphi_1)+C_{l_1}^E\sin^2(2\varphi_1)\right]\,\mathcal{R}_{l_1}\,C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]^2\mathrm{d}^2\mathbf{l_1}\\ &+\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^4}\iint[C_{l_1}^B\cos^2(2\varphi_1)+C_{l_1}^E\sin^2(2\varphi_1)]\,[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1}-\mathbf{l_2})]^2\\ &\qquad\qquad[\mathbf{l_1}\cdot\mathbf{l_2}]^2\,C^{\phi\phi}_{l_2}\,C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}-\mathbf{l_2}|}\mathrm{d}^2\mathbf{l_1}\mathrm{d}^2\mathbf{l_2}\ .\end{aligned} \tag{9.6.99}$$

Cas de C_l^{TE}

A l'ordre 0, il est clair que

$$\Gamma^{TE}_{00}=(2\pi)^2\delta(l-l')C_l^{TE}\ . \tag{9.6.100}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, les termes d'ordre 1 sont nuls. A l'ordre 2,

$$\Gamma^{TE}_{11}=\delta(l-l')\int[C_{l_1}^{TE}\cos(2\varphi_1)]\,C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]^2\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_1}\ , \tag{9.6.101}$$

$$\Gamma^{TE}_{02}=\Gamma^{TE}_{20}=-\frac{1}{2}\,\delta(l-l')\,C_l^{TE}\,\mathcal{R}_l\ . \tag{9.6.102}$$

En se restreignant à l'ordre 2, on obtient donc que

$$\widetilde{C_l^{TE}}=C_l^{TE}\left(1-\frac{l^2}{4\pi}\mathcal{R}\right)+\frac{1}{(2\pi)^2}\int C_{l_1}^{TE}\cos(2\varphi_1)\,C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]^2\mathrm{d}^2\mathbf{l_1}\ , \tag{9.6.103}$$

A l'ordre 3, comme précédemment, tous les corrélations sont nulles,

$$\Gamma^{TE}_{30}=\Gamma^{TE}_{03}=\Gamma^{TE}_{21}=\Gamma^{TE}_{12}=0\ . \tag{9.6.104}$$

Enfin, à l'ordre 4, toutes les corrélations sont non nulles.

$$\Gamma^{TE}_{04}=\Gamma^{TE}_{40}=\frac{1}{8}\frac{1}{(2\pi)^2}\,\delta(l-l')\,C_l^{TE}\,(\mathcal{R}_l)^2 \tag{9.6.105}$$

$$\Gamma_{13}^{TE} = \Gamma_{31}^{TE} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^2}\,\delta(l-l')\int [C_{l_1}^{TE}\cos(2\varphi_1)]\,[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]^2\, C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}\,\mathcal{R}_{l_1}\mathrm{d}^2\mathbf{l_1} \tag{9.6.106}$$

$$\Gamma_{22}^{TE} = \frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^2}\,\delta(l-l')\left\{C_l^{TE}\,(\mathcal{R}_l)^2 + 2\iint [C_{l_1}^{TE}\cos(2\varphi_1)]\,[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1}-\mathbf{l_2})]^2 \right. \\ \left. C^{\phi\phi}_{l_2}\,C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}-\mathbf{l_2}|}\mathrm{d}^2\mathbf{l_1}\mathrm{d}^2\mathbf{l_2}\right\} \tag{9.6.107}$$

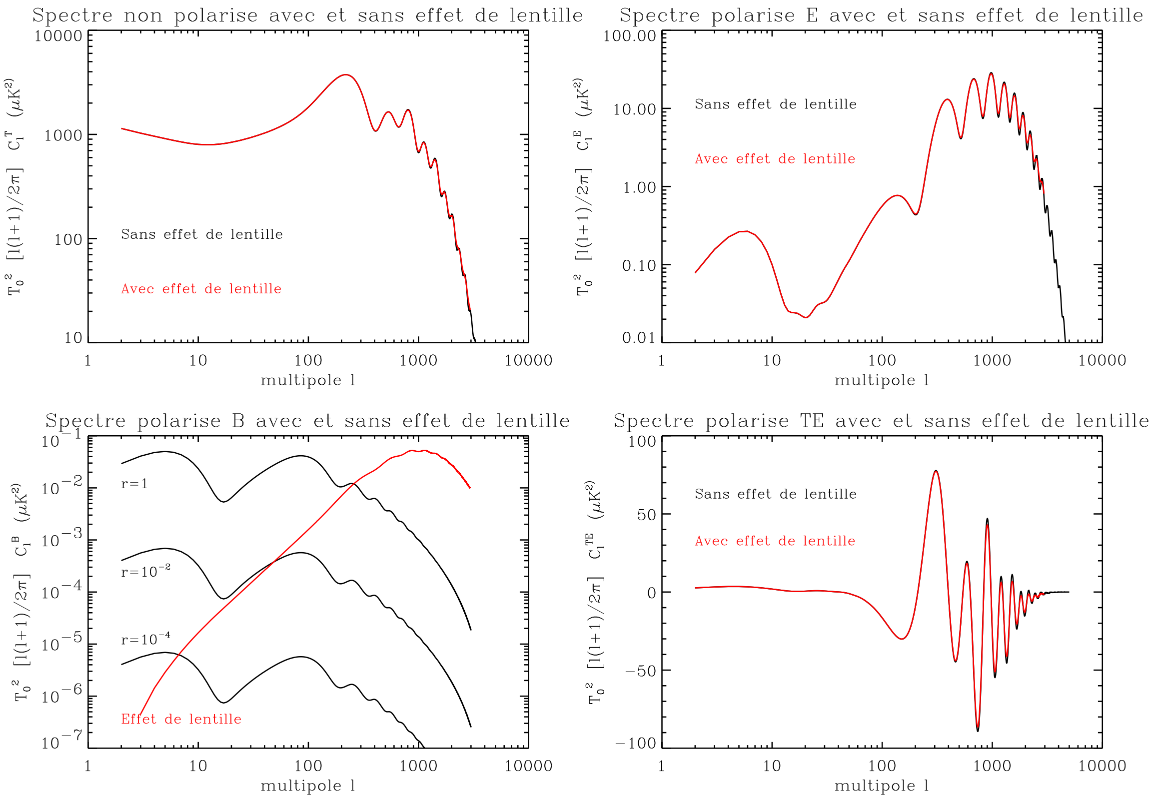

FIG. 9.8: Spectres de puissance standards en présence d'effet de lentille.

Cas de C_l^{TB} et C_l^{EB}

Procédons de la même manière qu'auparavant pour étudier les corrélations $\langle \widetilde{T}_l \widetilde{B}_{l'}\rangle$. A l'ordre 0, nous savons déjà que $\Gamma_{00}^{TB} = 0$. A l'ordre 1, pour les mêmes raisons que pour les autres polarisations, les corrélation sont nulles $\Gamma_{01}^{TB} = \Gamma_{10}^{TB} = 0$. A l'ordre 2, il semble possible d'écrire une contribution non nulle grace à la composante polarisée E dans le signal B lentillé

$$\Gamma_{11}^{TB} = \delta(l-l')\int [C_{l_1}^{TE}\sin(2\varphi_1)\,C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]^2\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_1} = \mathbf{0}\;, \tag{9.6.108}$$

Ce dernier terme est cependant nul une fois l'intégrale sur ϕ faite puisque $\sin(2\varphi_1)$ est impaire tandis que les autres termes sont pairs et périodiques en φ_1 (en remarquant que $|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|^2 = (\mathbf{l}-\mathbf{l_1})^2 = l^2 + l_1^2 - 2l_1 l\cos\varphi_1$). En réalité, toutes les contributions à $\widetilde{C_l^{TB}}$ à tous les ordres en effet de lentille sont nuls pour la même raison qui fait que le terme d'ordre 2 est nul. Il en va de même pour $\widetilde{C_l^{EB}}$.

9.7 Effet de lentille sur la matrice de covariance

On va se baser sur les résultats précédents pour calculer les corrélateurs à quatre points. Ils se développent en la somme de produit de C_l et en un terme non trivial appelé tri-spectre relié comme suit avec nos conventions [270],

$$\begin{aligned}\left\langle \tilde{X}_1(l_1)\,\tilde{X}_2^*(l_2)\,\tilde{X}_3(l_3)\,\tilde{X}_4^*(l_4)\right\rangle &= (2\pi)^4\,[\delta(l_{12})\delta(l_{34})C_{l_1}C_{l_2} + \delta(l_{13})\delta(l_{24})C_{l_1}C_{l_3} \\ &\quad +\delta(l_{14})\delta(l_{23})C_{l_1}C_{l_4}] + (2\pi)^2\delta(l_{1234})\,\tilde{T}^{X_1X_2X_3X_4}\ ,\end{aligned} \tag{9.7.109}$$

où $\delta(l_{ij}) = \delta(l_j - l_i)$. Pour ce qui nous intéresse, $l_1 = l_2 = l$, $l_3 = l_4 = l'$. Les termes contribuant à $\tilde{T}^{UV-XY}_{\mathbf{l},\mathbf{l}'}$ peuvent être regroupés par ordre en effet de lentille. A l'ordre 0 par exemple, les contributions à la fonction de corrélation à quatre points ne fait intervenir que des produits de C_l [à savoir $C_l^{UX}C_{l'}^{VY} + C_l^{UY}C_{l'}^{VX}$] et $\tilde{T}^{(0)} = 0$. Dit autrement, sans effet de lentille, les a_{lm} sont gaussiens et le trispectre pur est nul. Les termes d'ordre inférieur ou égaux à 2 sont donnés ci-dessous. Notons encore que si certaines contributions contiennent un $\delta(\ell - \ell')$, ce ne sera pas toujours le cas car un des effets du lentillage est de mélanger les multipôles. Nous allons dans ce qui suit écrire séparément les contributions diagonales D_ℓ^{UV-XY} et les contributions non diagonales $N^{UV-XY}_{\mathbf{l},\mathbf{l}'}$, de telle sorte que

$$\tilde{T}^{UV-XY}_{\mathbf{l},\mathbf{l}'} = D_\ell^{UV-XY} + N^{UV-XY}_{\mathbf{l},\mathbf{l}'}\ . \tag{9.7.110}$$

Notons que si pour les corrélateurs à deux points il est possible de négliger les conjugaisons d'un terme sur deux en faisant valoir que si $\left\langle \tilde{X}(l_1)^*\,\tilde{X}(l_2)\right\rangle = (2\pi)^2\,\delta(l_1 - l_2)\,C^X_{l_1}$, on peut écrire $\left\langle \tilde{X}(l_1)\,\tilde{X}(l_2)\right\rangle = (2\pi)^2\,\delta(l_1 + l_2)\,C^X_{l_1}$, cela n'est plus le cas lors du calcul des corrélateur à quatre points.

Corrélateurs connexes à 4 points jusqu'à l'ordre 2

Commençons par le calcul des corrélateurs à quatre points jusqu'à l'ordre 2. Ceux qui nous intéresse ici ne sont que les graphes connexes (c'est-à-dire reliant des champs en des multipôles différents), et pour chaque polarisation, peu de graphes sont non nuls et seront explicités. Pour la température tout d'abord, certains des graphes responsables de ce terme est donné en Fig. 9.9.

Là encore, pour trouver à un ordre donné toutes les contributions à une fonction de corrélation à quatre points, il faut choisir une convention, par exemple supposé que les champs de droite sont en $\mathbf{l}$ et ceux de gauche en $\mathbf{l}'$, et supposé par exemple que les champs du bas des graphes sont les champs conjugués a^*_{lm}. Une fois cela fixé il faut choisir toutes les manières possible de placer les champs de lentille et écrire toutes les manières possibles de corréler tous ces champs deux par deux (puisque l'on a supposer ces champs non corrélés gaussiens et de moyenne nulle). Ensuite, les expressions de l'effet de lentille sur les signaux T, E et B sont utilisés et l'on rappelle que dans notre convention, chaque corrélation introduit un facteur $(2\pi)^2\delta(\mathbf{l_1} - \mathbf{l_2})$. Notons enfin que la forme de l'estimateur nécessite de faire une intégration sur les angles des vecteurs $\mathbf{l}$ et $\mathbf{l}'$ mais la première intégration est nécessairement triviale puisque les résultats doivent être invariants par une redéfinition globale des angles.

Ainsi, en utilisant les formules données à la section précédente, on trouve que pour la température,

$$D_l^{TT-TT} = 2\left(C_l^T\right)^2\left(1 - \frac{l^2}{2\pi}\mathcal{R}\right) + \frac{4}{(2\pi)^2}C_l^T\iint C^T_{l_1}C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]^2\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_1}\ , \tag{9.7.111}$$

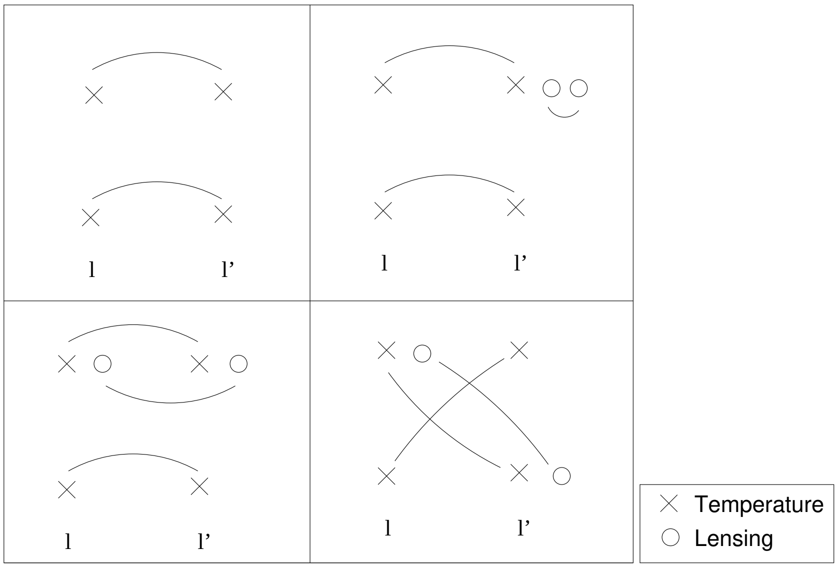

FIG. 9.9: Certains des graphes responsables des contributions diagonales pour le trispectre de température. Ces graphes correspondent à ceux qui contribuent au corrélateur à 4 points et qui peuvent être obtenus par produit de $\tilde{C}_l$. Ils contribuent donc à D^{TT-TT}_ℓ.

et pour la partie non diagonale,

$$\mathcal{N}^{TT-TT}_{\mathbf{l},\mathbf{l}'} = \frac{2}{2\pi}\int \left\{ \left(C^T_{l'}\right)^2 \left[\mathbf{l}'\cdot\left(\mathbf{l}-\mathbf{l}'\right)\right]^2 + \left(C^T_{l}\right)^2 \left[\mathbf{l}\cdot\left(\mathbf{l}'-\mathbf{l}\right)\right]^2 \right\} C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l}'|}\mathrm{d}\varphi' \ . \tag{9.7.112}$$

Dans l'expression précédente comme dans les suivantes, l'angle φ' représente l'angle entre ℓ et ℓ'. Notons que l'intégration $\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}$ sur l'angle de ℓ est triviale, puisque les expressions ne dépendent pas de cet angle : on peut toujours redéfinir les angles de telle sorte que $\varphi = 0$.

Pour les rayonnements polarisés on a le même type de graphes pour les termes non nuls. Ainsi,

$$\begin{aligned} D^{EE-EE}_\ell &= 2\left(C^E_l\right)^2\left(1-\frac{l^2}{2\pi}\mathcal{R}\right) \\ &\quad + \frac{4}{(2\pi)^2}C^E_l \iint \left[C^E_{l_1}\cos^2(2\varphi_1) + C^B_{l_1}\sin^2(2\varphi_1)\right] C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]^2\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_1} \ . \end{aligned} \tag{9.7.113}$$

$$\mathcal{N}^{EE-EE}_{\mathbf{l},\mathbf{l}'} = \frac{2}{2\pi}\int \left\{ \left(C^E_{l'}\right)^2 \left[\mathbf{l}'\cdot\left(\mathbf{l}-\mathbf{l}'\right)\right]^2 + \left(C^E_{l}\right)^2 \left[\mathbf{l}\cdot\left(\mathbf{l}'-\mathbf{l}\right)\right]^2 \right\} C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l}'|}\mathrm{d}\varphi' \ . \tag{9.7.114}$$

Les contribution pour BB-BB sont identiques en remplaçant E par B et B par E. Les contributions du dernier terme sur la diagonale s'écrivent

$$\begin{aligned} D^{TE-TE}_\ell &= \left(C^{TE}_l\right)^2\left(1-\frac{2\,l^2}{4\pi}\mathcal{R}\right) + C^T_l C^E_l\left(1-\frac{2\,l^2}{4\pi}\mathcal{R}\right) \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^2}C^E_l \int C^T_{l_1}C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]^2\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_1} \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^2}C^T_l \int \left[C^E_{l_1}\cos^2(2\varphi_1) + C^B_{l_1}\sin^2(2\varphi_1)\right] C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]^2\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_1} \\ &\quad + \frac{2}{(2\pi)^2}C^{TE}_l \int C^{TE}_{l_1}\cos(2\varphi_1)C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]^2\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_1} \ . \end{aligned} \tag{9.7.115}$$

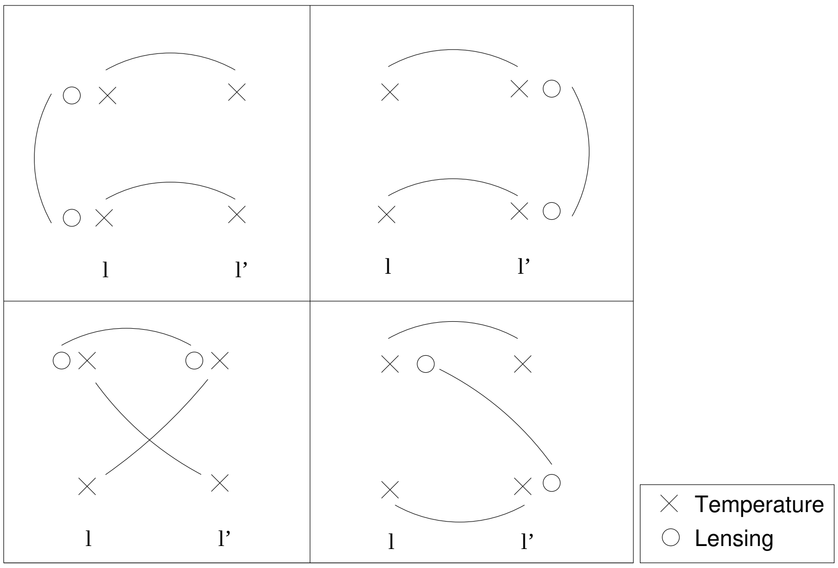

FIG. 9.10: Certains des graphes responsables des contributions non diagonales pour le trispectre de température. Ces graphes contribuent donc à $\mathcal{N}^{TT-TT}_{\mathbf{l},\mathbf{l}'}$.

En utilisant la forme des estimateurs des C_l^{TE}, on vérifie que la contribution non diagonale s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^{TE-TE}_{\mathbf{l},\mathbf{l}'} = \frac{1}{2\pi}\int \Big\{ &\left[\left(C_{l'}^{TE}\right)^2 + C_{l'}^{E} C_{l'}^{T}\right] \left[\mathbf{l}'\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l}')\right]^2 \\ &+ \left[\left(C_{l}^{TE}\right)^2 + C_{l}^{E} C_{l}^{T}\right] \left[\mathbf{l}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l}')\right]^2 \Big\} C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l}'|}\cos(2\varphi')\mathrm{d}\varphi' \ .\end{aligned} \quad (9.7.116)$$

Vient ensuite le calcul des contribution pour les six termes non diagonaux de la matrice de covariance. Les termes diagonaux sont donnés par les expressions suivantes.

$$\begin{aligned}D_\ell^{TT-EE} = &\,2\left(C_l^{TE}\right)^2\left(1-\frac{l^2}{2\pi}\mathcal{R}\right) \\ &+\frac{4}{(2\pi)^2}C_l^{TE}\int C_{l_1}^{TE}\cos(2\varphi_1)C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]^2\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_1} \ ,\end{aligned} \quad (9.7.117)$$

$$\begin{aligned}D_\ell^{TT-TE} = &\,2\,C_l^{T}C_l^{TE}\left(1-\frac{l^2}{2\pi}\mathcal{R}\right)+\frac{2}{(2\pi)^2}C_l^{TE}\int C_{l_1}^{T}C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]^2\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_1} \\ &+\frac{2}{(2\pi)^2}C_l^{T}\int C_{l_1}^{TE}\cos(2\varphi_1)C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]^2\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_1} \ ,\end{aligned} \quad (9.7.118)$$

$$\begin{aligned}D_\ell^{EE-TE} = &2\,C_l^{TE}C_l^{E}\left(1-\frac{l^2}{2\pi}\mathcal{R}\right) \\ &+\frac{2}{(2\pi)^2}C_l^{TE}\int\left[C_{l_1}^{E}\cos^2(2\varphi_1)+C_{l_1}^{B}\sin^2(2\varphi_1)\right]C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]^2\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_1} \\ &+\frac{2}{(2\pi)^2}C_l^{E}\int C_{l_1}^{TE}\cos(2\varphi_1)C^{\phi\phi}_{|\mathbf{l}-\mathbf{l_1}|}[\mathbf{l_1}\cdot(\mathbf{l}-\mathbf{l_1})]^2\,\mathrm{d}^2\mathbf{l_1} \ ,\end{aligned}$$

(9.7.119)

9.8 Conclusion et discussion

Le travail présenté dans ce chapitre fait l'objet d'une publication encore en préparation. L'objectif est d'étudier l'effet de lentille sur une analyse de Fisher en vue de la mesure de l'énergie à laquelle s'est produite l'inflation. Dans ce cadre, les contributions non triviales de l'effet de lentille à la matrice de covariance via la fonction de corrélation à quatre point sont toujours négligées si bien que la fonction de corrélation à quatre points est calculée comme le produit de fonction de corrélation à deux points. Le but de cette étude est de quantifier l'erreur faite en négligeant l'effet non gaussien du lentillage sur la fonction de corrélation à quatre points en calculant analytiquement puis numériquement toutes les contributions à cette fonction de corrélation.

Le calcul numérique de tous les termes de la matrice de covariance est en cours à l'aide du programme *SCOOP*. Celui-ci est développé pour prendre en compte le calcul des contributions dues à l'effet de lentille sur la matrice de covariance, et ce ordre par ordre. Il utilise un algorithme d'intégration numérique par la méthode de Romberg adaptée de *qromb* de Numerical Recipes [257]. La méthode a été testé par comparaison avec le résultat de CAMB sur le calcul des fonctions de corrélation à deux points avec effet de lentille.

Pour améliorer cette étude, il faudrait évaluer les contributions nouvelle jusqu'à l'ordre 4 en effet de lentille pour la raison suivante. Comme nous l'avons dit plusieurs fois, l'effet de lentille est faible par rapport au signal polarisé $_{\pm}X$ comme non polarisé Θ. Mais dans le cas du signal polarisé, on opère une projection pour définir le signal E et le signal B. On peut voir sur la Fig. 9.8 que cette projection implique que la contribution de l'effet de lentille est non négligeable devant le signal primordial, ce qui peut se traduire par $\widetilde{C_l^B}^{(2)} \sim \widetilde{C_l^B}^{(0)}$. Si l'énergie d'inflation est en dessous de $M_{\rm GUT}$ de plus d'un ordre de grandeur, on est même dans la configuration où $\widetilde{C_l^B}^{(2)} \gg \widetilde{C_l^B}^{(0)}$. En conséquence, les contributions à la fonction de corrélation à quatre points d'ordre 4 sous la forme du produit de spectre de puissance peuvent être dominante par rapport à celles d'ordre deux. Dans ce cas, il est nécessaire pour être consistent, de calculer toutes les contributions non triviales d'ordre 4. C'est dans cette optique qu'on été écrit les expressions jusqu'à l'ordre 4 des anisotropies $\Theta(l)$, $E(l)$, $B(l)$ et le spectre de puissance de B jusqu'à l'ordre 4.

Conclusions et perspectives

Cette thèse présente deux aspects de l'interaction entre les théories de physique des hautes énergies et les contraintes de la cosmologie. La majeure partie de ce travail se situe dans le cadre des théories de Grande Unification supersymétriques et les contraintes cosmologiques sur la formation de défauts topologiques.

Les données récentes venant de la cosmologie et plus précisément du fond diffus cosmologique (CMB) contraignent fortement la contribution des cordes cosmiques dans la génération des fluctuations de température. On ne fait état pour le moment d'aucune détection ferme de cordes cosmiques que ce soit dans les données d'effet de lentille gravitationnelle ou dans les donnée du CMB. Cependant, les théories de physique des hautes énergies et en particulier les théories de Grande Unification suggèrent a priori leur formation lors des transitions de phase qu'a subit l'univers primordial.

La première contribution de cette thèse a été une évaluation de la généricité des cordes cosmiques dans une classe de modèles théoriques en accord avec les contraintes expérimentales de la physique des particules et observationnelles de la cosmologie. Nous avons imposé que ces modèles soient en accord avec les mesures sur la durée de vie du proton et les différentes propriétés de la physique des particules à basse énergie, qu'ils expliquent de manière standard la génération d'une asymétrie matière/antimatière ou la masse des neutrinos, et qu'ils résolvent les différents problèmes de la cosmologie, notamment celui de la formation des monopôles. Cette dernière contrainte nécessite une phase d'inflation après la dernière formation de monopôles afin de les diluer. Nous avons alors étudié tous les groupes de Grande Unification de rang inférieur à 8 sur lesquels il est possible de baser de tels modèles. Cela inclut les groupes de la famille $SU(n)$, avec $n \leq 9$, $SO(10)$, E_6 et $SO(14)$ mais aussi $[SU(3)]^3$ et "flipped $SU(5)$". Pour ces groupes, nous avons établi tous les schémas de brisure compatibles avec les contraintes énoncées ci-dessus et fait une étude systématique de la formation de défauts topologiques lors de ces brisures de symétrie afin de quantifier la probabilité de formation de cordes cosmiques *après* la phase d'inflation.

Nous avons montré que cette formation de cordes est inévitable sous nos hypothèses de travail et que cette formation de cordes arrive génériquement à la fin de la phase d'inflation hybride. Cette propriété est même inévitable dans le cas de groupes petits tels que $SO(10)$. Dans cette thèse nous avons aussi étudié la dépendance de ces résultats avec les hypothèses faites en recalculant la probabilité de formation de cordes pour $SO(10)$ en relaxant une à une les différentes hypothèses faites concernant la leptogénèse puis la durée de vie du proton (ce qui pose un grave problème de compatibilité avec les observations et nécessite de trouver de nouveaux mécanismes). Dans ces cas, les probabilités de formation de cordes cosmiques topologiques descendent respectivement à 98% puis 80%. Pour les modèles qui ne donnent pas de cordes cosmiques, il y a formation de cordes "de plongement".

Le résultat précédent de la formation générique de cordes à la fin de la phase d'inflation hybride suggère que ces cordes aient une masse du même ordre que l'échelle d'énergie de l'inflation. On s'attend donc à ce que les cordes jouent une rôle similaire à l'inflation dans la génération des fluctuations de température ce qui semble en désaccord avec les observations.

Le second travail de cette thèse est une étude des deux modèles standards de l'inflation hybride c'est-à-dire l'inflation par terme F et l'inflation par terme D. Pour chacun de ces modèles nous avons étudié la dépendance de la contribution des cordes cosmiques à l'anisotropie de température en fonction des paramètres des modèles. La limite sur cette contribution permet de poser des contraintes fortes sur l'échelle d'énergie et les constantes de couplage de chacun des modèles. Nous sommes arrivé à la conclusion que l'inflation par terme D peut être, contrairement à ce que l'on pensait précédemment, en accord avec les données malgré la formation inévitable de cordes cosmiques. Ce modèle doit cependant nécessairement être étudié dans le cadre de la supergravité et non la supersymétrie globale. Les deux modèles (par terme F et D) sont fortement contraints, ce qui se traduit par une limite supérieure sur l'échelle d'énergie de l'ordre de 2×10^{15} GeV. On obtient aussi une limite sur la constante de couplage qui doit désormais être très petite devant l'unité (de l'ordre de 10^{-5} ou plus basse). L'un des atouts majeurs de ces modèles d'inflation hybride supersymétrique était de pouvoir rendre compte de l'amplitude des anisotropies du CMB avec des constantes de couplage de l'ordre de l'unité. Notre conclusion apporte donc un éclairage nouveau sur la naturalité de ces modèles.

Enfin, nous avons montré que cette dernière conclusion peut être évitée dans le cadre du modèle du "curvaton" c'est-à-dire en introduisant un champ scalaire supplémentaire qui génère les fluctuations de densité tandis que l'inflaton entraine la dynamique de l'expansion. Dans ce cas, la contrainte sur la contribution des cordes se traduit en une contrainte sur la valeur initiale du champ de curvaton.

Une partie indépendante concerne les informations que l'on peut extraire du rayonnement de fond diffus cosmologique concernant les paramètres inflationnaires. La détection de la polarisation B pourrait nous renseigner en effet sur la physique inflationnaire : a t-elle véritablement eu lieu ? A quelle énergie ? Combien de champs y ont participé ? Ces objectifs à long terme sont cependant difficiles à atteindre car l'information contenue dans ce signal est au mieux du même ordre de grandeur, au pire fortement sous-dominante devant une seconde source de mode B : l'effet de lentille gravitationnelle faible. En effet, durant leur trajet entre la surface de dernière diffusion et l'observateur, les photons du CMB subissent le potentiel gravitationnel des grandes structures de l'univers (galaxies, amas de galaxie, ...). Cela a pour effet de déformer l'image reçue de la surface de dernière diffusion et de générer du signal polarisé B à partir de signal polarisé E.

La méthode de la matrice de Fisher fait partie des formalisme de maximum de vraisemblance. Elle permet d'extraire les paramètres cosmologiques et les barres d'erreur sur ces estimations à partir des données du CMB ou de tout autres sources d'informations. Un code numérique, *SCOOP* (pour *Simulation for COstraints On Parameters*), a été réalisé pour étudier les contraintes futures sur la détection de l'énergie d'inflation. Il apporte la nouveauté d'étudier l'influence complète du lentillage sur la matrice de corrélation à quatre points. Une étude analytique puis numérique a été conduite pour tester l'approximation usuellement faite consistant à négliger les termes non diagonaux dus à l'effet de lentille. Les résultats préliminaires de cette étude semblent montrer que ces termes sont effectivement négligeables.

Ce travail, en cours, doit être achevé et plusieurs pistes sont à poursuivre dans cette direction. Tout d'abord, il sera peut être nécessaire d'aller au-delà de l'ordre 2 en effet de lentille pour être complet. Je souhaite aussi que les outils développés servent à l'étude d'autres aspects de la contrainte cosmologique sur la physique des hautes énergies. Je prévois notamment de les employer pour prévoir la détection d'une contribution de cordes cosmiques dans le CMB si les données continuent à privilégier une contribution non nulle autour de 4%. La physique des neutrinos ou de l'énergie noire sont d'autres aspects intéressants de la physique des hautes énergies où les outils développés peuvent servir.

Cette thèse a ouvert un grand nombre de pistes de travail concernant les aspects en lien avec la physique des hautes énergies, piste que je souhaite poursuivre à l'avenir. L'étude des modèles de Grande Unification supersymétrique nous a permis de définir une classe de modèles motivés par les données existantes. D'autres études dans ce cadre sont donc intéressantes. Parmis elles, je projette de considérer un schéma de brisure représentatif et d'affiner l'étude du modèle : contenu en champs et couplages, représentations et potentiels de Higgs. Cela permettrait d'étudier plus en détails les caractéristiques de ce modèle, notamment concernant la nature des cordes cosmiques formées, d'abord sur un exemple puis dans un second temps de manière aussi générique que possible.

Concernant l'inflation hybride, je souhaite continuer à étudier la naturalité de ces modèles du point de vue des conditions initiales des champs. Il semble en effet que ces modèles souffrent du fait que les conditions initiales propices à une inflation suffisamment longue ne soient pas génériques. Il serait intéressant d'élargir l'espace des paramètres pour tester la robustesse de cette conclusion et d'étudier plusieurs modèles d'inflation. Je souhaite aussi étudier les développements récents concernant l'inflation par terme D, car il semble que le cadre de la supergravité standard ne soit pas complètement consistent, ce qui peut demander de se placer dans un cadre motivé par la théorie des cordes. Concernant l'inflation par terme F, je souhaite étudier si l'on peut exploiter la dépendance de la contribution de cordes en fonction de la dimensionnalité $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$ du champ de Higgs. En effet cette dimensionnalité peut renseigner de façon univoque sur le groupe de Grande Unification initial, ce qui est assez rare. Cela nécessite cependant de trouver des contraintes orthogonales sur les paramètres du modèle d'inflation.

Annexe A
Compléments sur les groupes de Lie

Sommaire

A.1 Sous-groupes utiles pour la GUT

Pour écrire ces tables, il a été nécessaire de trouver tous les sous-groupes des groupes qui satisfont aux contraintes établies au paragraphe 6.1. Dans la Ref. [92], tables 14 et 15, sont référencés les sous-groupes de Lie maximaux[1]. Nous n'avons conservé que les sous-groupes réguliers des groupes de GUT étudiés ici car il est hautement non trivial de plonger le MS dans des groupes spéciaux.

A.2 Quelques décompositions de représentations utiles

Ici, sont rassemblées quelques résultats tirés de la Ref. [92], table 30, qui servent dans les calculs développés dans cette thèse. Le tableau ci-dessous donne les décompositions de quelques représentations de $SU(5)$ parmis les plus petites sous le sous groupe $SU(2)\times SU(3)\times U(1)$. Le résultats se présente sous la forme $(a,b)(c)$ avec a la représentation sous $SU(2)$, b la représentation sous $SU(3)$ et c la charge sous $U(1)$.

$$
\begin{array}{rcl}
SU(5) & \supset & SU(2)\times SU(3)\times U(1) \\
\mathbf{5} & = & (\mathbf{2},\mathbf{1})(3)+(\mathbf{1},\mathbf{3})(-2) \\
\mathbf{10} & = & (\mathbf{1},\mathbf{1})(6)+(\mathbf{1},\bar{\mathbf{3}})(-4)+(\mathbf{2},\mathbf{3})(1) \\
\mathbf{15} & = & (\mathbf{3},\mathbf{1})(6)+(\mathbf{2},\mathbf{3})(1)+(\mathbf{1},\mathbf{6})(-4) \\
\mathbf{24} & = & (\mathbf{1},\mathbf{1})(0)+(\mathbf{3},\mathbf{1})(0)+(\mathbf{2},\mathbf{3})(-5)+(\mathbf{2},\bar{\mathbf{3}})(5)+(\mathbf{1},\mathbf{8})(0) \\
\dots & & \\
\mathbf{75} & = & (\mathbf{1},\mathbf{1})(0)+(\mathbf{1},\mathbf{3})(10)+(\mathbf{2},\mathbf{3})(-5)+(\mathbf{1},\bar{\mathbf{3}})(-10)+(\mathbf{2},\bar{\mathbf{3}})(5) \\
 & & +(\mathbf{2},\bar{\mathbf{6}})(-5)+(\mathbf{2},\mathbf{6})(5)+(\mathbf{1},\mathbf{8})(0)+(\mathbf{3},\mathbf{8})(0) \\
\dots & &
\end{array}
$$

[1]Un sous-groupe H de G est dit maximal lorsqu'il n'existe pas de sous-groupe H' tel que l'on puisse avoir le schéma de brisure $G\to H'\to H$.

Rang	Groupe	rep. fond.	rep. adj.	Sous-groupes de taille maximale
4	$SU(5)$	**5**	**24**	$SU(4) \times U(1)$ $SU(2) \times SU(3) \times U(1)$
5	$SU(6)$	**6**	**35**	$SU(5) \times U(1)$ $SU(2) \times SU(4) \times U(1)$ $SU(3) \times SU(3) \times U(1)$
	$SO(10)$			$SU(5) \times U(1)$ $SU(2) \times SU(2) \times SU(4) \equiv PS$
6	$SU(7)$	**7**	**48**	$SU(6) \times U(1)$ $SU(2) \times SU(5) \times U(1)$ $SU(3) \times SU(4) \times U(1)$
	E_6			$SO(10) \times U(1)$ $SU(2) \times SU(6)$ $SU(3)^3$
7	$SU(8)$	**8**	**63**	$SU(7) \times U(1)$ $SU(2) \times SU(6) \times U(1)$ $SU(3) \times SU(5) \times U(1)$ $SU(4) \times SU(4) \times U(1)$
	$SO(14)$			$SU(7) \times U(1)$ $SU(2) \times SU(2) \times SO(10)$
8	$SU(9)$	**9**	**80**	$SU(8) \times U(1)$ $SU(2) \times SU(7) \times U(1)$ $SU(3) \times SU(6) \times U(1)$ $SU(4) \times SU(5) \times U(1)$

TAB. A.1: Sous-groupes des groupes de Grande Unification candidats. On donne ici en outre la représentation fondamentale (rep. fond.) et la représentation adjointe (rep. adj.)

Nous donnons aussi quelques décompositions des représentations de $SU(5)$ dans les représentation de se deuxième sous-groupe régulier $SU(4)\times U(1)$. Le second chiffre entre parenthèse correspond à la charge sous $U(1)$ tandis que le premier chiffre en gras est la représentation de $SU(4)$.

$$\begin{array}{ccl} SU(5) & \supset & SU(4) \times U(1) \\ \mathbf{5} & = & \mathbf{1}(4) + \mathbf{4}(-1) \\ \mathbf{10} & = & \mathbf{4}(3) + \mathbf{6}(-2) \\ \mathbf{15} & = & \mathbf{1}(8) + \mathbf{4}(3) + \mathbf{10}(-2) \\ \mathbf{24} & = & \mathbf{1}(0) + \mathbf{4}(-5) + \bar{\mathbf{4}}(5) + \mathbf{15}(0) \\ \ldots & & \end{array}$$

A.3 Générateurs usuels

A.3.1 $SU(2)$

Les générateurs de $SU(2)$ en représentation **2** sont les matrices de Pauli,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.3.1}$$

Les générateurs de $SO(3)$ [c'est à dire de $SU(2)$ dans la représentation **3**] s'ecrivent quant

Rang	Groupe	rep. fond.	rep. adj.	Sous-groupes
1	$U(1)$	**1**	**1**	I Z_2
1	$SU(2)$	**2**	**3**	I Z_2 $U(1) \times Z_2$ $U(1)$
2	$SU(3)$	**3**	**8**	$SU(2) \times U(1)$
3	$SU(4)$	**4**	**15**	$SU(3) \times U(1)$ $SU(2) \times SU(2) \times U(1)$

TAB. A.2: Sous-groupes utiles pour décomposer les facteurs de rangs inférieurs. Les sous-groupes présentés sont tirés de [92] et [30]. Ils font parfois intervenir des facteurs Z_2 qui ne sont pas répertoriés par Slansky car Z_2 n'est pas un groupe de Lie mais doit figurer ici comme faisant partie des schémas de brisure possibles.

à eux

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{A.3.2}$$

A.3.2 $SU(3)$

Les générateurs de $SU(3)$, dans l'espace des matrices 3×3 de trace nulle, sont proportionels aux matrices de Gell-Mann λ_i, $i = 1, \ldots, 8$. Parmis elles, deux sont diagonales,

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} , \tag{A.3.3}$$

tandis que les six autres sont données par

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{A.3.4}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} . \tag{A.3.5}$$

On définit en général les générateurs de $SU(3)$ par $T_a = \lambda_a/2$ pour qu'ils soient correctement normalisés. Ainsi les générateurs vérifient

$$[T_a, T_b] = i f^{abc} T_c , \tag{A.3.6}$$

où f^{abc} est totalement anti-symétrique et dont les termes non nuls sont

$$f^{123} = 1, \; f^{147} = 1/2, \; f^{156} = -1/2, \; f^{257} = 1/2 ,$$

$$f^{345} = 1/2, \; f^{367} = -1/2, \; f^{458} = \sqrt{3/2}, \; f^{678} = \sqrt{3/2} . \tag{A.3.7}$$

A.3.3 $SU(5)$

Ici encore, il est possible de représenté les générateurs de $SU(5)$ dans l'espace des matrices 5×5 de trace nulle (représentation **5**). Ils sont normalisées de telle manière que

$$\mathrm{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab} \ . \tag{A.3.8}$$

Ils se construisent pour les 8 premiers à partir des matrices de Gell-Mann (voir ci-dessus).

$$\lambda_i = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & \lambda_i & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad i = 1,..,8 \tag{A.3.9}$$

où les λ_i sont les générateurs du groupe $SU(3)$ donnés à la section précédente.

Les seize générateurs suivants sont donnés par

$$\lambda_9 = \begin{pmatrix} & & & 1 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{10} = \begin{pmatrix} & & & -i & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{11} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 1 \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.3.10}$$

$$\lambda_{12} = \begin{pmatrix} & & & 0 & i \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{13} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & 0 & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{14} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & 0 & & -i & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.3.11}$$

$$\lambda_{15} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{16} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & -i \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{17} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.3.12}$$

$$\lambda_{18} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{19} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{20} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.3.13}$$

$$\lambda_{20+j} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^j & \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad j = 1,2,3, \quad \lambda_{24} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{pmatrix}. \tag{A.3.14}$$

Table des figures

Liste des tableaux

Bibliographie

[1] R. Jeannerot, J. Rocher, M. Sakellariadou, *How generic is cosmic string formation in SUSY GUTs ?*, Phys. Rev. D**68**, 103514 (2003), [hep-ph/0308134].

[2] J. Rocher, M. Sakellariadou, *Constraints on Supersymmetric Grand Unified Theories from Cosmology*, JCAP **0503**, 004 (2005), [hep-ph/0406120].

[3] J. Rocher, M. Sakellariadou, *D-term inflation, cosmic strings, and consistency with cosmic microwave background measurement*, Phys. Rev. Lett. **94**, 011303 (2005), [hep-ph/0412143].

[4] J. Rocher, K. Benabed, F.R. Bouchet, en préparation.

Références pour le chapitre 1

[5] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley and Sons, New York, (1972) ; B. Schutz, *A first course in general relativity*, Cambridge University Press, Cambridge, England, (1985).

[6] E. Kolb, M. Turner, *The early universe*, Adison-Wesley, Reading, USA, (1990)

[7] P. Peter, J.P. Uzan, *Cosmologie primordiale*, Coll. Echelles, Ed. Belin (2005).

[8] J. Garcia-Bellido, *Cosmology and Astrophysics*, [astro-ph/0502139].

[9] L.M. Krauss, B. Chaboyer, *New Globular Cluster Age Estimates and Constraints on the Cosmic Equation of State and The Matter Density of the Universe*, [astro-ph/0111597] ; L.M. Krauss, *Dark Energy and the Hubble Age*, Astrophys. J. **604**, 481 (2004), [astro-ph/0212369] ; L. Knox, N. Christensen, C. Skordis, *The Age of the Universe and the Cosmological Constant Determined from Cosmic Microwave Background Anisotropy Measurements*, Astrophys. J. **563**, L95 (2001), [astro-ph/0109232].

[10] P. Peter, N. Pinto-Neto, Phys. Rev. D**65**, 023513 (2002), [gr-qc/0109038].

[11] G.F. Smoot, *The Cosmic Microwave Background Spectrum*, [astro-ph/9705101].

[12] S. Sarkar, *Big Bang nucleosynthesis and physics beyond the Standard Model*, [hep-ph/9602260].

[13] A. Coc, E. Vangioni-Flam, P. Descouvemont, A. Adahchour, C.Angulo, *Updated Big Bang Nucleosynthesis confronted to WMAP observations and to the Abundance of Light Elements*, Astrophys. J. **600**, 544 (2004), [astro-ph/0309480].

[14] D.J. Schwarz, Annalen Phys. **12**, 220 (2003), [astro-ph/0303574].

[15] F. Karsch, Lect. Notes Phys. **583**, 209 (2002), [hep-lat/0106019].

[16] L. Smolin, *An invitation to loop quantum gravity*, [hep-th/0408048] ; C. Rovelli, *Loop Quantum Gravity*, [gr-qc/9710008].

[17] J. Polchinsky, *String theory*, Cambridge University Press, Cambridge, England, (1998) ; D. Bailin, A. Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory* , Institute of Physics Publishing, (1994).

[18] A.V. Filippenko, *The accelerating Universe and the dark energy : evidence from type Ia supernovae*, [astro-ph/0309739].

[19] V. Sahni, *Dark Matter and Dark Energy*, [astro-ph/0403324].

[20] J.M. Overduin, P. S. Wesson, Phys. Rept. **283**, 303 (1997), [gr-qc/9805018].

Références pour le chapitre 2

[21] T. Cheng, L. Li, *Gauge theory of elementary particle physics*, Oxford University Press, Oxford, England, (1992).

[22] D. Bailin, A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory*, Institute of Physics Publishing, (1993) ; C. Quigg, *The electroweak theory*, [hep-ph/0204104].

[23] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, *An introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books, Cambridge, USA (1995) ;

[24] B. Delamotte, *Un soupçon de théorie des groupes : groupe des rotations et groupe de Poincaré*, cours de DEA accessible à l'adresse http ://www.lpthe.jussieu.fr/DEA/.

[25] F. Laloe, *Les symétries en mécanique quantique*, cours de DEA accessible à l'adresse http ://cel.ccsd.cnrs.fr/cours/cel-26/cel-26.html.

[26] K. Hagiwara et al., Phys. Rev. D**66**, 010001 (2002), http ://pdg.lbl.gov/pdg_2002.html.

[27] P.M.R. Binétruy, *Particle physics and cosmology : the interface*, Proceedings de l'école d'été de Cargèse 2003, Ed. D. Kazakov et G. Smadja, Spinger, NATO Science series, vol II/188.

Références pour le chapitre 3

[28] P.W. Anderson Phys. Rev.**112**, 1900 (1958) ; F. Englert, R. Brout, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964) ; G. S. Guralnik, C.R. Hagen, T.W.B. Kibble, Phys. Rev. Lett. **13**, 585 (1964) ; P. Higgs, Phys. Lett. **12**, 132 (1964) ; Phys. Rev.**145**, 1156 (1966) ; T.W.B. Kibble, Phys. Rev.**155**, 1554 (1967).

[29] T.W.B. Kibble, *Some implications of a cosmological phase transition*, Phys. Rept. **67**, 183 (1980).

[30] A. Vilenkin, E.P.S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press, Cambridge, England, (1994).

[31] J.I. Kapusta, *Finite-temperature field theory*, Cambridge University Press, Cambridge, England, (1989).

[32] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, (Institut of Physics Publishing, Bristol, Great Britain, 1990) ; C. Nash, S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists*, Academic Press (1988).

[33] N.D. Mermim, *Topological Theory of Defects*, Rev. Mod. Phys. **51**, 625 (1979).

[34] M. Hamermesh, *Group Theory and its Appplication to Physical Problems*, Dover Publication, New York, USA, (1962).

[35] R.N. Cahn, *Semi-Simple Lie Algebras and their Representations"*, Benjamin-Cummings (1984), accessible à http ://www-physics.lbl.gov/ rncahn/book.html ; M. Flohr, *Physical Applications of Group Theory*, accessible à http ://www.itp.uni-hannover.de/∼flohr/lectures/

[36] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, Benjamin-Cummings (1982), Frontiers in Physics vol. 54.

[37] M. Sakellariadou, *The role of topologigal defects in cosmology*, [hep-ph/0212365].

[38] P. Langacker, S.-Y. Pi, Phys. Rev. Lett. **45**, 1 (1980).

[39] E.B. Bogomol'nyi, Soviet Journal of Nuclear Physics **24**, 449 (1976) ; M.K. Prasad, C.M. Sommerfeld, Phys. Rev. Lett. **35**, 760 (1975).

[40] T.W.B. Kibble, J. Phys. **A9**, 1387 (1976).

[41] T. Vachaspati, A. Vilenkin, Phys. Rev. D**30**, 2036 (1984).

[42] E. Witten, *Superconducting strings*, Nucl. Phys. **B249**, 557 (1985).

[43] R. Brandenberger, B. Carter, A.-C. Davis, M. Trodden, Phys. Rev. D**54**, 6059 (1996), [hep-ph/9605382].

[44] C. Ringeval, *Etude des courants fermioniques sur les objets étendus*, thèse de doctorat, [hep-ph/0211126].

[45] D.P. Bennett, F.R. Bouchet, Phys. Rev. Lett. **60**, 257 (1988) ; B. Allen, P. Shellard, Phys. Rev. Lett. **64**, 119 (1990) ; C.J.A.P. Martins, E.P.S. Shellard, *Quantitative string evolution*, Phys. Rev. D**54**, 2535 (1996), [hep-ph/9602271].

[46] M. Sakellariadou, A. Vilenkin, *Numerical experiments with cosmic strings in flat space-time*, Phys. Rev. D**37**, 885 (1988)

[47] N. Kaiser, A. Stebbins, Nature **310**, 391 (1984).

[48] T. Damour, A. Vilenkin, Phys. Rev. Lett. **85**, 3761 (2000), [gr-qc/0004075].

[49] F.R. Bouchet, P. Peter, A. Riazuelo, M. Sakellariadou, *Evidence against or for topological defects in the BOOMERang data*, Phys. Rev. D**65**, 021301 (2002), [astro-ph/0005022].

[50] M. Landriau, E.P.S. Shellard, Phys. Rev. D**69**, 023003 (2004), [astro-ph/0302166] ; Phys. Rev. D**67**, 103512 (2003), [astro-ph/0208540].

[51] C. Ringeval, A. Riazuelo, en préparation.

[52] L. Pogosian, M. Wyman, and I. Wasserman, JCAP **0409**, 008 (2004), [astro-ph/0403268] ; M. Wyman, L. Pogosian, I. Wasserman, *Bounds on Cosmic Strings from WMAP and SDSS*, Phys. Rev. D**72**, 023513 (2005), [astro-ph/0503364].

[53] A. A. Fraisse, *Constraints on topological defects energy density from first year WMAP results*, [astro-ph/0503402].

[54] J.-P. Uzan, F. Bernardeau, Phys. Rev. D**63**, 023004 (2001) ; Phys. Rev. D**63**, 023005 (2001).

[55] M. Takeda et al., *Energy determination in the Akeno Giant Air Shower Array experiment*, Astropart. Phys. **19**, 447 (2003), [astro-ph/0209422].

[56] S. Bonazzola, P. Peter, Astropart. Phys. **7**, 161 (1997), [hep-ph/9701246].

[57] M. Sazhin, et al., Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **343**, 353 (2003) , [astro-ph/0302547] ; R. Schild, I Masnyak, B. Hnatyk, V. Zhdanov, [astro-ph/0406434].

[58] E. Jeong, G. Smoot, *Search for Cosmic Strings in CMB Anisotropies*, [astro-ph/0406432].

[59] T. Vachaspati, M. Barriola, Phys. Rev. Lett. **69**, 1867 (1992) ; M. Barriola, T. Vachaspati, M. Bucher, Phys. Rev. D**50**, 2819 (1994), [hep-th/9306120].

[60] A. Achucarro, T. Vachaspati, Phys. Rept. **327**, 347 (2000) [hep-ph/9904229] ; A.-C. Davis, N.F. Lepora, Phys. Rev. D**52**, 7265 (1995), [hep-ph/9504411].

[61] M. Goodband, M. Hindmarsh, Phys. Lett. B**363**, 58 (1995), [hep-ph/9505357]

[62] R.A. Brandt, F. Neri, Nucl. Phys. B**161**, 253 (1979) ; Coleman, "The magnetic monopole : 50 years after", Erice Lecture (1981).

[63] M. Nagasawa, R. Brandenberger, Phys. Lett. B**467**, 205 (1999).

Références pour le chapitre 4

[64] A. Guth, *Inflationary universe : a possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. D**23**, 347 (1981) ; A. Linde, Phys. Lett B**108**, 389 (1982) ; A. Albrecht, P. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **48**, 1220 (1982) ; A. Linde, Phys. Lett. B**129**, 177 (1983).

[65] A. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood Academic Publisher, London, 1990, `[hep-th/0503203]`.

[66] D.H. Lyth, A. Riotto, *Particle Physics Models and the cosmological Density Perturbation*, Phys. Rept. **314**, 1 (1999), `[hep-th/0405053]`.

[67] G. Lazarides, *Inflationary cosmology*, `[hep-ph/0111328]`.

[68] D. Langlois, *Particle physics and cosmology : the interface*, Proceedings de l'école d'été de Cargèse 2003, Ed. D. Kazakov et G. Smadja, Spinger, NATO Science series, vol II/188, `[hep-th/0405053]`.

[69] D.J. Schwarz, C. A. Terrero-Escalante, A. A. Garcia, *Higher order corrections to primordial spectra from cosmological inflation*, Phys. Lett. B**517**, 243 (2001), `[astro-ph/0106020]`.

[70] D. Lyth, *Which is the best inflation model ?*, `[hep-th/0311040]`.

[71] J. Martin, *Inflation and precision cosmology*, Braz. J. Phys. **34**,1307 (2004), `[astro-ph/0312492]`.

[72] A. Linde, Phys. Lett. B**129**, 177 (1983).

[73] S.M. Leach, A.R. Liddle, *Constraining slow-roll inflation with WMAP and 2dF*, Phys. Rev. D**68**, 123508 (2003), `[astro-ph/0306305]` ; W.H. Kinney, E.W. Kolb, A. Melchiorri, A. Riotto, *WMAPping inflationary physics*, Phys. Rev. D**69**, 103516 (2004), `[hep-ph/0305130]`.

[74] A. Linde, Phys. Lett. B**259**, 38 (1991) ; Phys. Rev. D**49**, 748 (1994).

[75] D.S. Goldwirth, T. Piran, *Initial conditions for inflation*, Phys. Rept. **214**, 223 (1992).

[76] N. Tetradis, *Fine tuning of the initial conditions for hybrid inflation*, Phys. Rev. D**57**, 5997 (1998), `[astro-ph/9707214]` ; G. Lazarides, N.D. Vlachos, *Initial Conditions for Supersymmetric Inflation*, Phys. Rev. D**56**, 4562 (1997), `[hep-ph/9707296]` ; L.E. Mendes, A.R. Liddle, *Initial conditions for hybrid inflation*, Phys. Rev. D**62**, 103511 (2000), `[astro-ph/0006020]`.

[77] V.F. Mukhanov, H.A. Feldman, R.H. Brandenberger, *Particle Physics Models and the cosmological Density Perturbation*, Phys. Rept. **314**, 1 (1999), `[hep-th/0405053]`.

[78] J. Martin, R.H. Brandenberger, *The Trans-Planckian Problem of Inflationary Cosmology*, Phys. Rev. D**63**, 123501 (2001), `[hep-th/0005209]`.

[79] J. Martin, C. Ringeval, *Superimposed Oscillations in the WMAP Data ?*, Phys. Rev. D**69**, 083515 (2004), `[astro-ph/0310382]`.

[80] V. Mukhanov, *CMB-slow, or How to Estimate Cosmological Parameters by Hand*, `[astro-ph/0303072]`.

[81] J. Martin, *Inflationary cosmological perturbations of quantum-mechanical origin*, Lect. Notes Phys. **6**, 69, Springer, Berlin Heidelberg (2005), `[hep-th/0406011]`.

[82] C. Gordon, D. Wands, B.A. Bassett, R. Maartens, *Adiabatic and entropy perturbations from inflation*, Phys. Rev. D**63**, 023506 (2001), [astro-ph/0009131].

[83] R. Durrer, *The theory of CMB anisotropies*, J. Phys. Stud. **5**, 177 (2001), [astro-ph/0109522].

[84] J. Martin, D.J. Schwarz, *WKB approximation for inflationary cosmological perturbations*, Phys. Rev. D**67**, 083512 (2003), [astro-ph/0210090].

[85] D. Wands, N. Bartolo, S. Matarrese, A. Riotto, *An Observational Test of Two-field Inflation*, Phys. Rev. D**66**, 043520 (2002),

Références pour le chapitre 5

[86] H. Georgi, S.L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **32**, 438 (1974).

[87] J.C. Pati, A. Salam, Phys. Rev. D**10**, 275 (1974).

[88] R.N. Mohapatra, *Unification and Supersymetry*, Springer-Verlag, New York, (2003).

[89] R.N. Mohapatra, *Supersymmetric Grand Unification : An Update*, [hep-ph/9911272].

[90] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, Perseus Books Group (1999).

[91] P. Langacker, *Grand unified theories and proton decay*, Phys. Rept. **72**, 185 (1981).

[92] R. Slansky, *Group theory for unified model building*, Phys. Rept. **79**, 1 (1981).

[93] F. Cuypers, *Au delà du Modèle Standard*, Notes de cours postdoctoral, [hep-ph/9706255].

[94] S. Adler, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969) ; J. Bell, R. Jackiw, Nuovo Cimento. **51A**, 47 (1969) ; W. Bardeen, Phys. Rev. **184**, 1848 (1969).

[95] D. Bailin, A. Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*, Institute of Physics Publishing, (1994).

[96] P.M.R. Binétruy, *Supersymmetry*, Oxford University Press (2004) ; J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press, (1983).

[97] S.P. Martin, *A supersymmetry primer*, [hep-ph/9709356] ; I.J.R. Aitchison, *Supersymmetry and the MSSM : An Elementary Introduction*, [hep-ph/0505105].

[98] D. Kazakov, *Particle physics and cosmology : the interface*, Proceedings de l'école d'été de Cargèse 2003, Ed. D. Kazakov et G. Smadja, Spinger, NATO Science series, vol II/188.

[99] D.V. Nanopoulos, *F-enomenology*, [hep-ph/0211128].

[100] C.J. Cummins, R.C. King, *Absolute Minima of the Higgs Potential for the 75 of SU(5)*, J. Phys. A **19**, 161 (1986).

[101] L.-F. Li, Phys. Rev. D**9**, 1723 (1974).

[102] G. Bertone, D. Hooper, J. Silk, Phys. Rept. **405**, 279 (2005), [hep-ph/0404175].

[103] T. Brunier, F. Bernardeau, J.-P. Uzan, *Radiative corrections to scalar masses in de Sitter space*, Phys. Rev. D**71**, 063529 (2005), [hep-th/0412186].

[104] C. Coleman, and E. Weinberg, Phys. Rev. D**7**, 1888 (1973).

[105] L. O'Raifeartaigh, Nucl. Phys. B**96**, 331 (1975).

[106] P. Fayet, J. Iliopoulos, Phys. Lett. **B51**, 461 (1995).

[107] M.B. Green, J. Schwarz, Phys. Lett. **B149**, 117 (1984).

[108] G. Dvali, A. Pomarol, *Anomalous U(1) as a mediator of Supersymmetry Breaking*, Phys. Rev. Lett. **77**, 3728 (1996), [hep-ph/9607383] ; P. Binétruy, E.A. Dudas, *Gaugino condensation and the anomalous* $U(1)$, Phys. Lett. **B389**, 503 (1996), [hep-th/9607172].

[109] D.V. Nanopoulos, *Supersymmetric GUTs*, Phys. Rept. **105**, 71 (1984).

[110] S.M. Carroll, *Lecture notes on General Relativity*, [gr-qc/9712019].

Références pour le chapitre 6

[111] R.N. Mohapatra et al., *Theory of Neutrinos*, [hep-ph/0412099].

[112] A. de Gouvéa, *Neutrinos Have Mass - So What ?*, Mod. Phys. Lett. **A19**, 2799 (2004), [hep-ph/0503086].

[113] R.N. Mohapatra, *ICTP Lectures on Theoretical Aspects of Neutrino Masses and Mixings*, [hep-ph/0211252].

[114] W. Buchmüller, *Neutrinos, Grand Unification and Leptogenesis*, [hep-ph/0204288].

[115] K. Hamaguchi, *Cosmological Baryon Asymmetry and Neutrinos : Baryogenesis via Leptogenesis in Supersymmetric Theories*, thèse de doctorat, [hep-ph/0212305].

[116] Y. Fukuda *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998) ; K. Eguchi *et al.* [KamLAND Collaboration], Phys. Rev. Lett. **90**, 021802 (1998).

[117] M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, in : Supergravity, eds. P. van Nieuwenhuizen and D. Freeman (North Holland, Amsterdam, 1979) p. 315 ; T. Yanagida, Prog. Th. Phys. B **135**, 66 (1979) ; R.N. Mohapatra and G. Senjanovic, *Neutrino mass and spontaneous parity violation*, Phys. Rev. Lett. **44**, 912 (1980).

[118] H. Georgi, D.V. Nanopoulos, Nucl. Phys. B**155**, 52 (1979) ; R.N. Mohapatra, J.W.F. Valle, Phys. Rev. D**34**, 1642 (1986).

[119] M. Dine, A. Kusenko, *The origin of the matter-antimatter asymmetry*, [hep-ph/0303065].

[120] M. Y. Khlopov, A. Linde, *Is it easy to save the gravitino ?*, Phys. Lett. B **138**, 265 (1984) ; M. Lemoine, *Gravitational production of gravitinos*, Phys. Rev. D**60**, 103522 (1999), [hep-ph/9908333] et Refs.

[121] M. Fukugita, T. Yanagida, Phys. Lett. B **174**, 45 (1986).

[122] W. Buchmüller and M. Plumacher, *Neutrino masses and the baryon asymmetry*, Int. J. Mod. Phys. A**15**, 5047 (2000), [hep-ph/0007176].

[123] V.A. Kuzmin, V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B**155**, 36 (1985).

[124] G. Lazarides, Q. Shafi, Phys. Lett. B**258**, 305 (1991) ; G. Lazarides, C. Panagiotakopoulos, Q. Shafi, Phys. Lett. B**315**, 325 (1993) ; **317**, 661 (1993).

[125] G. Lazarides, N.D. Vlachos, *Hierarchical Neutrinos and Supersymmetric Inflation*, Phys. Lett. B**459**, 482 (1999), [hep-ph/9903511] ; G. Lazarides, *Leptogenesis in Supersymmetric Hybrid Inflation*, Springer Tracts Mod. Phys. **163**, 227 (2000), [hep-ph/9904428].

[126] T. Asaka, K. Hamaguchi, M. Kawasaki, T. Yanagida, *Leptogenesis in Inflationary Universe*, Phys. Rev. D**61**, 083512 (2000), [hep-ph/9907559] ; K. Hamaguchi, Cosmological baryon asymetry and neutrinos, thèse de doctorat, DESY - Hamburg, Allemagne (2002), [hep-ph/0212305].

[127] S. Raby, *Proton Decay*, [hep-ph/0211024].

[128] J.C. Pati, *Probing Grand Unification Through Neutrino Oscillations, Leptogenesis, and Proton Decay*, Int. J. Mod. Phys. A**18**, 4135 (2003), [hep-ph/0305221].

[129] G. Farrar, P. Fayet, Phys. Lett. B**76**, 575 (1978) ; P. Fayet, *About R-parity and the Supersymmetric Standard Model*, [hep-ph/9912413].

[130] R. Barbier, et al., *R-parity violating supersymmetry*, [hep-ph/0406039].

[131] S.P. Martin, Phys. Rev. D**46**, R2769 (1992), [hep-ph/9207218].

[132] R. Jeannerot, *Grand unified models and cosmology*, Thèse de doctorat, DAMTP - Cambridge, Royaume-Uni (1996).

[133] G. Dvali, Q. Shafi, R. Schaefer, *Large scale structure and supersymmetric inflation without fine tuning*, Phys. Rev. Lett. **73**, 1886 (1994), [hep-ph/9406319].

[134] E.J. Copeland, A.R. Liddle, D.H. Lyth, E.D. Stewart and D. Wands, Phys. Rev. D**49**, 6410 (1994), [astro-ph/9401011].

[135] R. Jeannerot, *Inflation in supersymetric unified theories*, Phys. Rev. D**56**, 6205 (1997).

[136] P. Binétruy, G. Dvali, *D-Term Inflation*, Phys. Lett. B**388**, 241 (1996), [hep-ph/9606342].

[137] E. Halyo, *Hybrid Inflation from Supergravity D Terms*, Phys. Lett. B**387**, 43 (1996), [hep-ph/9606423].

Références pour le chapitre 7

[138] Y. Fukuda *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998).

[139] Q. R. Ahmad *et al.* [SNO Collaboration], Phys. Rev. Lett. **87**, 071301 (2001).

[140] K. Eguchi *et al.* [KamLAND Collaboration], Phys. Rev. Lett. **90**, 021802 (2003).

[141] K. Hogiwara *et al.*, Phys. Rev. D**66**, 010001 (2002).

[142] T. W. B. Kibble, J. Phys. A**9**, 387 (1976).

[143] C. L. Bennett, et al. *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Preliminary Maps and Basic Results*, [astro-ph/0302207] ; G. Hinshaw *et al.*, *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Angular Power Spectrum*, astro-ph/0302217 (2003).

[144] F. R. Bouchet, P. Peter, A. Riazuelo, and M. Sakellariadou, Phys. Rev. D**65**, 021301 (2002).

[145] N. Turok, Phys. Rev. Lett. **63**, 2625 (1989).

[146] A. Vilenkin and E.P.S. Shellard, *"Cosmic strings and other topological defects"*, Cambridge monographs on mathematical physics, Cambridge University Press, England, 1994.

[147] M. B. Hindmarsh and T. W. B. Kibble, Rept. Prog. Phys. **58**, 477 (1995).

[148] T. Vachaspati and M. Barriola, Phys. Rev. Lett. **69**, 1867 (1992).

[149] T. Vachaspati, Phys. Rev. Lett. **78**, 1977 (1992) ; Nucl. Phys. **B397**, 648 (1993).

[150] M. James, L. Perivolaropoulos, and T. Vachaspati, Phys. Rev. D**46**, 5232 (1992) ; Nucl. Phys. **B395**, 534 (1993) ; M. Goodband and M. Hindmarsh, Phys. Lett. **B363**, 58 (1995).

[151] M. Nagasawa and R. Brandenberger, Phys. Rev. D**67**, 043504 (2003).

[152] T. Vachaspati and R. Watkins, Phys. Lett. B**318** 163 (1993).

[153] M. Barriola, T. Vachaspati, and M. Bucher, Phys. Rev. D**50** 2819 (1994).

[154] R. A. Brandt and F. Neri, Nucl. Phys. **B161**, 253 (1979) ; S. Coleman, Erice Lectures (1981).

[155] E. Calzetta and M. Sakellariadou, Phys. Rev. D**45**, 2802 (1992) ; E. Calzetta and M. Sakellariadou, Phys. Rev. D**47**, 3184 (1993).

[156] M. Sakellariadou, (astro-ph/9911497), in "Recent Developments in Gravitation", Proceedings of the Spanish Relativity Meeting, ERE-99, Bilbao (Spain), 7-10 Septembre 1999, J. Ibanez, ed., 113 (2000).

[157] D. H. Lyth and A. Riotto, Phys. Rept. **314**, 1 (1999)

[158] A. D. Linde, Phys. Rev. D**49**, 748 (1994).

[159] G. Dvali, Q. Shafi and R. Schaefer, Phys. Rev. Lett. **73**, 1886 (1994).

[160] A. D. Linde, Phys. Lett. B **129**, 177 (1983).

[161] W. Buchmüller, L. Covi and D. Delepine, Phys. Lett. B**491**, 183 (2000).

[162] A-C. Davis and R. Jeannerot, Phys. Rev. D**52**, 7220 (1995).

[163] R. Jeannerot, Phys. Rev. D**56**, 6205 (1997).

[164] B. Allen, R.R. Caldwell, S. Dodelson, L. Knox, E.P.S. Shellard and A. Stebbins, *Phys. Rev. Lett.* **79** (19,) 2624 (1997).

[165] C. Contaldi, M. Hindmarsh and J. Magueijo, Phys. Rev. Lett. **82**, 679 (1999).

[166] A. Riazuelo and C. Ringeval, *private communication* (2003).

[167] G. R. Vincent, M. Hindmarsh and M. Sakellariadou, Phys. Rev. D**56**, 637 (1997).

[168] L. Pogosian and T. Vachaspati, Phys. Rev. D**60**, 083504 (1999).

[169] L. Perivoralopoulos, Phys. Rev. D**48**, 1530 (1993) ; M. Sakellariadou, Int. J. of Theor. Phys. **36**, No. 11, 847 (1997) ; A. Gangui, L. Pogosian and S. Winitzk, Phys. Rev. D**64**, 043001 (2001).

[170] W. Fishler, H. P. Nilles, J. Polchinski, S. Raby, and L. Susskind, Phys. Rev. Lett. **47**, 757 (1981).

[171] P. Fayet, and J. Iliopoulos, Phys. Lett. **51B**, 461 (1974).

[172] P. Binétruy and G. R. Dvali, Phys. Lett. B388, 241 (1996).

[173] R. Jeannerot, S. Khalil, G. Lazarides and Q. Shafi, JHEP **0010**, 012 (2000).

[174] R. Jeannerot, S. Khalil and G. Lazarides, JHEP **0207**, 069 (2002).

[175] R. Jeannerot, S. Khalil and G. Lazarides, Proceedings of Cairo International Conference on High-Energy Physics (CICHEP 2001), Cairo, Egypt, 9-14 Jan 2001.

[176] J. A. Adams and S. Sarkar, Nucl. Phys. B**503**, 405 (1997).

[177] N. Tetradis and M. Sakellariadou, `hep-ph/9806461` (1998).

[178] P. Langacker, Phys. Rept. **72**, 185 (1981).

[179] G. G. Ross, "Grand Unified Theories", Reading, Usa : Benjamin/cummings (1984) 497 P. (Frontiers In Physics, 60).

[180] R. Slansky, Phys. Rep. **79**,1 (1981).

[181] M. Dubois-Violette, M. Talon and C. M. Viallet, Com. in Math. Phys. **102**, 105 (1985) ; M. Dubois-Violette, M. Talon and C. M. Viallet, Annales de l'Inst. Henri Poincaré **44**, 103 (1986).

[182] M. Dine and A. Kusenko, "The origin of the matter-antimatter asymmetry", hep-ph/0303065 (2003).

[183] W. Buchmüller and M. Plumacher, Phys. Rep. **320**, 329 (1999) and Refs. therein.

[184] G. Lazarides, R. K. Schaefer and Q. Shafi, Phys. Rev. D**56**, 1324 (1997) ; G. Lazarides, Q. Shafi, N. D. Vlachos, Phys. Lett. B**427**, 53 (1998).

[185] R. Jeannerot, Phys. Rev. Lett. **77**, 3292 (1996).

[186] R. Jeannerot, Proceedings de COSMO-97, International Workshop on *Particle Physics and the Early Universe*, 15-19 September 1997, Ambleside, Lake district, England.

[187] P. Horava and E. Witten, Nucl. Phys. B**460**, 506 (1996).

[188] F. Quevedo, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **62**, 134 (1998).

[189] P. Candelas, E. Perevalov and G. Rajesh, Nucl. Phys. B**507** 445 (1997).

[190] L. E. Ibanez, G. G. Ross, Nucl. Phys. **B368**, 3 (1992).

[191] M. de Montigny, M. Masip, Phys. Rev. D**49**, 3734 (1994).

[192] T. W. B. Kibble, G. Lazarides and Q. Shafi, Phys. Rev. D **26**, 435 (1982).

[193] D. Chang, R. N. Mohapatra and M. K. Parida, Phys. Rev. Lett. **52**, 1072 (1984).

[194] L. Covi, G. Mangano, A. Masiero, G. Miele, Phys. Lett. B **424**, 25 (1998).

[195] J. Harada, Submitted to JHEP, hep-ph/0305015.

[196] H. Georgi and S.L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **32**, 438 (1974).

[197] S. M. Barr, Phys. Lett. B**112**,219 (1982) ; J. P. Derendinger, J. E. Kim and D. V. Nanopoulos, Phys. Lett. B**139**,170 (1984) ; I. Antoniadis, J. Ellis, J. S. Hagelin and D. V. Nanopoulos, Phys. Lett. B**194**,231 (1987) ; J. Ellis, J. L. Lopez and D. V. Nanopoulos, Phys. Lett. B**371**, 65 (1996).

[198] T. W. B. Kibble, G. Lazarides and Q. Shafi, Phys. Lett. B **113**, 237 (1982).

[199] J. Sato, Prog. Theor. Phys. **96**, 597 (1996).

[200] D. London and J. Rosner, Phys. Rev. D **34**, 435 (1986).

Références pour le chapitre 8

[201] A. Guth, Phys. Rev. D**23**, 347 (1981) ; A. Linde, Phys. Lett. B**108**, 389 (1982).

[202] E Calzetta and M. Sakellariadou, Phys. Rev. D**45**, 2802 (1992) ; Phys. Rev. D**47**, 3184 (1993).

[203] E. Halyo, Phys. Lett. B**387**, 43 (1996) ; P. Binetruy and D. Dvali, Phys. Lett. B**388**, 241 (1996).

[204] R. Jeannerot, Phys. Rev. D**56**, 6205 (1997).

[205] F. R. Bouchet, P. Peter, A. Riazuelo, and M. Sakellariadou, Phys. Rev. D**65**, 021301 (2002) ; L. Pogosian, M. Wyman, and I. Wasserman, *Observational constraints on cosmic strings : Bayesian analysis in a three dimensional parameter space*, [arXiv :astro-ph/0403268].

[206] R. Jeannerot, S. Khalil, G. Lazarides, and Q. Shafi, JHEP**0010**,012 (2000) ; G. Lazarides, and C. Panagiotakopoulos, Phys. Rev. D**52**, 559 (1995) ; T. Watari, and T. Yanagida, Phys. Lett. B**589**, 71 (2004).

[207] J. Urrestilla, A. Achúcarro and A. C. Davis, Phys. Rev. Lett. **92**, 251302 (2004).

[208] J. Rocher and M. Sakellariadou, *Supersymmetric grand unified theories and cosmology*, [arXiv :hep-ph/0406120].

[209] R. Kallosh and A. Linde, JCAP **0310**, 008 (2003).

[210] V. N. Senoguz, and Q. Shafi, Phys. Lett. B**567**, 79 (2003).

[211] D. H. Lyth and D. Wands, Phys. Lett. B**524**, 5 (2002) ; T. Moroi, and T. Takahashi, Phys. Lett. B**522**, 215 (2001) ; Erratum-ibid. B**539**, 303 (2002).

[212] M. Endo, M. Kawasaki, and T. Moroi, Phys. Lett. B.**569**,73 (2003).

[213] T. Moroi, and T. Takahashi, Phys. Rev. D**66**, 063501 (2002).

[214] A. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Contemporary Concepts in Physics, **5** (1990), Hardwood Academic Publishers.

[215] R. Jeannerot, Phys. Rev. D**56**, 6205 (1997).

[216] E. J. Copeland, A. R. Liddle, D. H. Lyth, E. D. Stewart, and D. Wands, Phys. Rev. D**49**, 6410 (1994).

[217] M. Dine, N. Seiberg, and E. Witten, Nucl. Phys. B**289**, 585 (1987).

[218] J. Martin, A. Riazuelo, and M. Sakellariadou, Phys. Rev. D **61**, 083518 (2000).

[219] A. Gangui, J. Martin, and M. Sakellariadou, Phys. Rev. D **66**, 083502 (2002).

[220] T. Moroi, and T. Takahashi, Phys. Lett. B**522**, 215 (2001), Erratum-ibid. B**539**, 303 (2002).

[221] K. Enqvist, S. Kasuya, and A. Mazumdar, Phys. Rev. Lett. **90**, 091302 (2003).

[222] K. Dimopoulos and D. Lyth, Phys. Rev. D**69**, 123509 (2004).

[223] G. Lazarides, and C. Panagiotakopoulos, Phys. Rev. D**52**, 559 (1995).

[224] T. Watari, and T. Yanagida, Phys. Lett. B **589**, 71 (2004).

[225] J. Urrestilla, A. Achúcarro, and A. C. Davis, Phys. Rev. Lett. **92**, 251302 (2004).

[226] D. Austin, E. J. Copeland, and T. W. B. Kibble, Phys. Rev. D**48**, 5594 (1993).

[227] J. Rocher, and M. Sakellariadou, *The nature of cosmic strings within SUSY GUTs* (in preparation).

[228] A. -C. Davis, *private communication*.

[229] S. C. Davis, A. -C. Davis, M. Trodden, Phys. Lett. B **405**, 257 (1997).

[230] M. Sakellariadou, and A. Vilenkin, Phys. Rev. D**37**, 885 (1988).

[231] M. Sakellariadou, Nucl. Phys. B**468**, 319 (1996).

[232] M. Landriau, and E. P. S. Shellard, Phys. Rev. D**69**, 023003 (2004).

[233] C. Coleman, and E. Weinberg, Phys. Rev. D**7**, 1888 (1973).

[234] D. Lyth and A. Riotto, Phys. Rep. **314**, 1 (1999).

[235] A. -C. Davis and M. Majumdar, Phys. Lett. B **460**, 257 (1999).

[236] C. L. Bennett, et. al. Astrophys. J. **464**, 1 (1996).

[237] G. Lazarides, R. K. Schafer, and Q. Shafi, Phys. Rev. D**56**, 1324 (1997).

[238] V. N. Senoguz, Q. Shafi, Phys. Lett. B **82**, 6 (2004).

[239] C. B. Netterfield, et. al., Astrophys. J. **571**, 604 (2002) ; P. de Bernardis, et. al., Astrophys. J. **564**, 559 (2002).

[240] A. T. Lee, Astrophys. J. **561**, L1 (2001) ; R. Stompor, Astrophys. J. **561**, L7 (2001).

[241] N. W. Halverson, et. al., Astrophys. J. **568**, 38 (2002) ; C. Pryke, et. al. , Astrophys. J. **568**, 46 (2002).

[242] P. Nilles, Phys. Rep. **110**, 1 (1984).

[243] M. Endo, M. Kawasaki, and T. Moroi, Phys. Lett. B**569**, 73 (2003).

Références pour le chapitre 9

[244] W. Hu, S. Dodelson, *Cosmic Microwave Background anisotropies*, Annu. Rev. Astron. and Astrophys. **40**, 171 (2002), [astro-ph/0110414].

[245] M. Kamionkowski, A. Kosowsky, *The Cosmic Microwave Background and Particle Physics*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **49**, 77 (1999), [astro-ph/9904108].

[246] M. Sorel, *Les fluctuations du fond diffus extragalactique et ses avant-plans, de l'infrarouge au domaine millimétrique*, thèse de doctorat, IAS-Orsay (2005).

[247] R. Trotta, *Cosmic Microwave Background anisotropies : Beyond Standard Parameters*, thèse de doctorat, Genève, (2004).

[248] D. Pelat, *Bruits et signaux*, cours de DEA de l'école doctorales d'Ile-de-France, accessible à `http ://www.lpthe.jussieu.fr/DEA/pelat.html`.

[249] F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztanaga, R. Scoccimarro, *Large-Scale Structure of the Universe and Cosmological Perturbation Theory*, Phys. Rept. **367**, 1 (2002), `[astro-ph/0112551]`.

[250] A. R. Liddle, D.H. Lyth, *Cosmological inflation and large-scale structure*, Cambridge University Press, Cambridge, England, (2000).

[251] M. Bartelmann, P. Schneider, *Weak Gravitational lensing*, Phys. Rept. **340**, 291 (2001), `[astro-ph/9912508]`.

[252] K. Benabed, *Effets de lentille gravitationnelle sur le rayonnement de fond cosmique*, thèse de doctorat, CEA-Saclay (2001).

[253] N. Bartolo, E. Komatsu, S. Matarrese, A. Riotto, *Non-Gaussianity from Inflation : Theory and Observations*, Phys. Rept. **402**, 103 (2004), `[astro-ph/0406398]`.

[254] A. Riazuelo, *Signature de divers modèles d'Univers primordial dans les anisotropies du rayonnement fossile*, thèse de doctorat, DARC-Meudon (2000).

[255] D.J. Eisenstein, W. Hu, M. Tegmark, ApJ **518**, 2 (1998), `[astro-ph/9807130]`.

[256] M. Zaldarriaga, U. Seljak, Phys. Rev. **D55**, 1830 (1997), `[astro-ph/9609170]`.

[257] W. H. Press, et al., *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, (1992), accessible à `http ://www.nr.com/`.

[258] J.R. Pritchard, M. Kamionkowski, *Cosmic Microwave Background Fluctuations from Gravitational Waves : An Analytic Approach*, Annals Phys. **318**, 2 (2005), `[astro-ph/0412581]`.

[259] G. Efstathiou, J.R. Bond, *Cosmic Confusion : Degeneracies among Cosmological Parameters Derived from Measurements of Microwave Background Anisotropies*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **304**, 75 (1999), `[astro-ph/9807103]`.

[260] M. Tegmark, *Measuring cosmological parameters with galaxy surveys*, Phys. Rev. Lett. **79**, 3806 (1997), `[astro-ph/9706198]`.

[261] C.R. Contaldi, H. Hoekstra, A. Lewis, *Joint CMB and Weak Lensing Analysis; Physically Motivated Constraints on Cosmological Parameters*, Phys. Rev. Lett. **90**, 221303 (2003), `[astro-ph/0302435]`.

[262] M. Tegmark, A.N. Taylor, A.F. Heavens, ApJ **480**, 22 (1997), `[astro-ph/9603021]`.

[263] L. Knox, Phys. Rev. D**52**, 4307 (1995), `[astro-ph/9504054]`.

[264] J. Lesgourgues, S. Prunet, D. Polarski, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **303**, 45 (1999), `[astro-ph/9807020]`.

[265] J. Lesgourgues, S. Pastor, S. Prunet, Phys. Rev. **D62**, 023001 (2000), `[hep-ph/9912363]`.

[266] M. Zaldarriaga, D.N. Spergel, U. Seljak, ApJ **488**, 1 (1997), `[astro-ph/9702157]`.

[267] M. Zaldarriaga, U. Seljak, Phys. Rev. **D58**, 023003 (1998), `[astro-ph/9803150]`.

[268] B. Jain, H.J. Mo, S.D.M. White, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 276, L25 (1995) ; J.A. Peacock, S.J. Dodds, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 280, L19 (1996).

[269] W. Hu, Phys. Rev. D**62**, 043007 (2000), `[astro-ph/0001303]`.

[270] W. Hu, Phys. Rev. D**64**, 083005 (2001), `[astro-ph/0105117]`.

[271] J. Lesgourgues, S. Pastor, L. Perotto, Phys. Rev. D**70**, 045016 (2004), `[astro-ph/0403296]`.

[272] L. Knox, Y.-S. Song, Phys. Rev. Lett. **89**, 011303 (2002), [astro-ph/0202286].

[273] U. Seljak, C. M. Hirata, Phys. Rev. D**69**, 043005 (2004), [astro-ph/0310163].

[274] I. S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Academic Press, New York and London, (1972).