



**HAL**  
open science

## Déterminant microlocal d'un faisceau pervers

Raphaël Bondu

► **To cite this version:**

Raphaël Bondu. Déterminant microlocal d'un faisceau pervers. Mathématiques [math]. Université Nice Sophia Antipolis, 2002. Français. NNT: . tel-00011209

**HAL Id: tel-00011209**

**<https://theses.hal.science/tel-00011209>**

Submitted on 15 Dec 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS  
FACULTÉ DES SCIENCES  
Laboratoire J. A. Dieudonné  
U.M.R. du C.N.R.S. No 6621

## THÈSE

présentée pour obtenir le titre de  
Docteur en Sciences  
spécialité : Mathématiques  
par  
Raphaël BONDU

# Déterminant microlocal d'un faisceau pervers

Soutenue le 20 décembre 2002 devant le jury composé de :

M. Yves LAURENT	Directeur de Recherche CNRS	Rapporteur
M. Philippe MAISONOBE	Professeur à l'Université de Nice	Directeur de Thèse
M. Bernard MALGRANGE	Directeur de Recherche CNRS	Examineur
M. Michel MERLE	Professeur à l'Université de Nice	Examineur
M. Claude SABBAH	Directeur de Recherche CNRS	Rapporteur
M. Carlos SIMPSON	Directeur de Recherche CNRS	Examineur



# Remerciements

Le 20 novembre de chaque année, les vietnamiens fêtent le "ngày nhà giáo" (la "journée des professeurs"). Ce jour là, ils rendent visite à leurs anciens enseignants : ils leur offrent des présents et passent un peu de temps avec eux ; c'est l'occasion de leur rendre hommage et de les remercier pour le savoir transmis.

Cette fête n'a pas d'équivalent en France : je voudrais profiter de ces quelques pages pour rendre hommage à mes "maîtres".

Tout d'abord, je veux remercier mon chef, mon directeur de thèse, Philippe Maisonobe : sa compétence, sa rigueur, sa disponibilité et son enthousiasme juvénile ont été des soutiens précieux au cours de ces années. Il a guidé mes premiers pas en perversité et m'a transmis son savoir et sa passion pour ces belles mathématiques. Il a su m'insuffler un peu de sa formidable énergie pour me pousser à me dépasser et à surmonter les difficultés.

Je veux ensuite remercier mon directeur de thèse officieux, Bernard Malgrange. C'est une chance et un plaisir rares que de le cotoyer. Les idées qui sont présentées ici sont les siennes : il connaissait depuis longtemps la construction et la démonstration de l'existence du déterminant microlocal. Grâce à lui, j'ai eu le grand plaisir d'effectuer ce long voyage dans l'étude microlocale des faisceaux pervers : encore maintenant je continue à être frappé par la beauté du résultat et de sa démonstration.

Je tiens aussi à remercier Yves Laurent et Claude Sabbah qui ont accepté de lire avec soin et rapporter cette thèse : ils ont su passer outre la lourdeur de ma rédaction pour me faire beaucoup de remarques constructives qui n'apparaissent malheureusement pas toutes dans le présent mémoire.

Michel Merle, dont la porte du bureau face au mien a toujours été ouverte, et Carlos Simpson me font le plaisir et l'honneur de prendre part à mon jury de thèse : je les en remercie sincèrement.

Je veux aussi remercier tous les professeurs, mathématiciens et collègues thésards -de Nice et d'ailleurs- qui par leurs cours, leurs exposés, leurs conversations informelles et amicales ont apporté leur pierre à l'édifice : il m'est impossible d'en dresser une liste exhaustive et j'aurais trop peur d'en oublier

pour essayer de tous les citer. J'ai néanmoins une pensée particulière pour ceux qui ont dû supporter de m'avoir comme co-bureau.

J'ai profité à Nice d'un cadre et d'une ambiance de travail idylliques et c'est en grande partie grâce au personnel du laboratoire Dieudonné : il est agréable de travailler avec des gens sympathiques et compétents.

Quand on commence une thèse, on le fait avant tout par passion. Pour avancer, il faut que cette passion tourne à l'obsession : on ne cesse pas de penser à ses mathématiques parce qu'on quitte son bureau pour rentrer chez soi.

Aussi, je remercie mes amis et surtout mes parents qui ont enduré avec patience mes sautes d'humeur et mon renfermement. Ils m'ont de plus apporté un soutien indéfectible au moment où choisir cette voie semblait relever de la folie.

Je tiens à faire un clin d'œil à un léger parfum qui m'a entouré pendant ces années.

Enfin, j'ai une pensée pour Denise qui n'aura malheureusement pas assisté à l'achèvement de cette thèse.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>Notations</b>	<b>15</b>
<b>1 Préliminaires techniques</b>	<b>17</b>
1.1 Quelques résultats techniques sur les faisceaux homogènes . . .	19
1.2 Spécialisation des faisceaux . . . . .	22
1.3 Transformation de Fourier faisceautique . . . . .	28
1.4 Microlocalisation de Sato . . . . .	33
1.5 Systèmes locaux de rang 1 sur $Z$ et $H^1(Z, \mathbb{C}^*)$ . . . . .	36
1.6 Un résultat de dualité . . . . .	40
<b>2 Le déterminant microlocal</b>	<b>51</b>
2.1 La construction. Enoncé du théorème . . . . .	53
2.2 Le problème est microlocal et le prolongement, s'il existe, est unique . . . . .	56
2.3 Le prolongement en dehors d'un sous-ensemble de codimension 2 suffit . . . . .	59
2.4 Plan de la démonstration . . . . .	60
2.5 Le cas de la dimension 1 . . . . .	62
2.6 Comportement du déterminant microlocal par image inverse par projection $\mathbb{C}^m \times X \longrightarrow X$ . . . . .	66
2.7 Le prolongement sur la section nulle . . . . .	71
2.8 Un peu de géométrie symplectique . . . . .	73
2.9 Comportement des faisceaux constants par transformation de Legendre . . . . .	78
2.10 Comportement du microlocalisé par transformation canonique	96
2.11 Ramener le problème du prolongement en position générique .	101

2.12	En position générique, se ramener à un faisceau pervers en dimension 2 avec paramètres . . . . .	103
2.13	Analyse du problème du prolongement en position générique en dimension 2 . . . . .	108
2.14	Le prolongement en dimension 2 . . . . .	113

<b>Bibliographie</b>		<b>135</b>
----------------------	--	------------

# Introduction

Soit  $X$  une variété analytique complexe lisse de dimension  $n$  et  $\pi : T^*X \rightarrow X$  son fibré cotangent.

Considérons la catégorie des *faisceaux pervers* sur  $X$  : c'est une catégorie abélienne contenue dans  $D_{\mathbb{C}\text{-const.}}^b(X)$ , la catégorie dérivée des complexes de faisceaux de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels à cohomologie constructible.

Si  $\mathcal{F}$  est un objet de  $D_{\mathbb{C}\text{-const.}}^b(X)$  alors  $\mathcal{F}$  est pervers si il est concentré dans les degrés 0 à  $n$  et si il vérifie de plus des conditions dites de *support* et de *cosupport*.

On sait associer à un faisceau pervers  $\mathcal{F}$  sa *variété caractéristique*  $Ch(\mathcal{F})$  qui est une lagrangienne homogène de  $T^*X$ . Cela peut se faire de deux façons : soit en regardant les codirections dans lesquelles  $\mathcal{F}$  se "propage", soit en regardant les codirections dans lesquelles  $\mathcal{F}$  a des cycles évanescents.

Dans la correspondance de Riemann-Hilbert, si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{D}$ -module holonome régulier tel que  $Sol(\mathcal{M}) := \mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}) = \mathcal{F}$  alors on a  $Ch(\mathcal{F}) = Ch(\mathcal{M})$ .

$Ch(\mathcal{F})$  s'écrit comme une réunion de conormaux  $Ch(\mathcal{F}) = \bigcup_{\alpha \in A} T_{X_\alpha}^* X$ , où les  $X_\alpha$  sont liés à une stratification relativement à laquelle  $\mathcal{F}$  est constructible : les  $X_\alpha$  sont des réunions de strates.

D'après les conditions de support d'un faisceau pervers  $\mathcal{F}$ , il existe un ouvert  $X_n$  dense dans  $X$  (la strate de dimension maximale de  $\mathcal{F}$ ) en restriction auquel  $\mathcal{F}$  est réduit à un système local :

$$\mathcal{F}|_{X_n} = h^0(\mathcal{F})|_{X_n}$$

Un premier regard naïf pourrait amener à penser que cette strate dense joue un rôle prépondérant : un faisceau pervers est "presque" un système local. L'expérience montre que ce n'est pas le cas : des choses essentielles se cachent dans les strates de petite dimension.

Le point de vue microlocal accorde la même importance à toutes les strates puisque ce sont les conormaux  $T_{X_\alpha}^* X$  qui y interviennent et non pas seulement les strates : les  $T_{X_\alpha}^* X$  ont tous la même dimension.



Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau pervers sur  $X$ . Sa variété caractéristique  $Ch(\mathcal{F})$  est le premier invariant qui lui est associé. Cet invariant peut se raffiner : on peut construire le *cycle caractéristique* de  $\mathcal{F}$  qui est une somme formelle à coefficients entiers de conormaux :

$$CC(\mathcal{F}) = \sum_{\alpha \in A} m_\alpha T_{X_\alpha}^* X$$

La variété et le cycle caractéristique contiennent beaucoup d'informations sur  $\mathcal{F}$ . Par exemple on peut déduire de  $Ch(\mathcal{F})$  une stratification de  $X$  par rapport à laquelle  $\mathcal{F}$  est constructible.

Toutefois, du point de vue des  $\mathcal{D}$ -modules, la variété caractéristique  $Ch(\mathcal{M})$  n'est qu'une approximation "commutative" du  $\mathcal{D}$ -module  $\mathcal{M}$ .

Un phénomène essentiel dont le cycle caractéristique ne rend pas bien compte est celui des différentes monodromies associées à un faisceau pervers.

Ainsi, si  $\mathcal{F}$  est pervers avec  $CC(\mathcal{F}) = d.T_X^* X$  alors on sait que  $\mathcal{F}$  est un système local de rang  $d$  (c'est-à-dire du côté des  $\mathcal{D}$ -modules un fibré vectoriel à connexion plate) mais on ne sait pas dire grand chose de la représentation de monodromie du système local  $\mathcal{F}$  à partir de son seul cycle caractéristique.

Si  $Ch(\mathcal{F}) = \bigcup_{\alpha \in A} T_{X_\alpha}^* X$  et si on note  $\Lambda_\alpha = T_{X_\alpha}^* X$  et

$$\Lambda_\alpha^\circ := \Lambda_\alpha \setminus \bigcup_{\beta \in A, \beta \neq \alpha} \Lambda_\beta$$

alors on sait associer naturellement à  $\mathcal{F}$  un système local  $\mathcal{L}_\alpha$  sur chaque  $\Lambda_\alpha^\circ$ .  $\mathcal{L}_\alpha$  est la restriction à  $\Lambda_\alpha^\circ$  du microlocalisé de Sato le long de  $X_\alpha$  :  $\mathcal{L}_\alpha$  s'obtient par spécialisation le long de  $X_\alpha$  puis transformation de Fourier.

Si  $\xi \in \Lambda_\alpha^\circ$ , et si  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est une application telle que  $f|_{X_\alpha \cap U} = 0$ ,  $df_{\pi(\xi)} = \xi$  et  $U$  est un voisinage de  $\pi(\xi)$  alors  $\mathcal{L}_{\alpha, \xi} = \phi_f(\mathcal{F})_{\pi(\xi)}$ , où  $\phi_f$  est le foncteur des cycles évanescents de Deligne.

Si l'on désire récupérer des informations sur les monodromies de  $\mathcal{F}$  avec en tête le principe d'accorder la même importance à toutes les strates, il est naturel de travailler avec les systèmes locaux  $\mathcal{L}_\alpha$ .

Si on a un système local  $\mathcal{L}$  sur  $X$  (c'est-à-dire un fibré plat) alors on connaît des classes caractéristiques qui rendent compte de la monodromie de  $\mathcal{L}$  : ce sont les classes caractéristiques secondaires construites par Cheeger et Simons.

Ces classes vivent dans la cohomologie en degré impair de  $X$  à coefficients dans  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  :

$$c_p(\mathcal{L}) \in H^{2p-1}(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$$

Dans ce mémoire, en suivant des idées de B. Malgrange (voir [S]), on présente la construction d'un nouvel invariant pour les faisceaux pervers : le *déterminant microlocal* qui est une généralisation aux faisceaux pervers de la première classe caractéristique secondaire des fibrés plats.

La construction est la suivante.

Soit  $X$  une variété analytique complexe de dimension  $n$  et soit  $\mathcal{F}$  un faisceau pervers sur  $X$ .

$\Lambda$  désigne la variété caractéristique de  $\mathcal{F}$  :  $\Lambda := Ch(\mathcal{F}) \subset T^*X$ .

Dans  $\Lambda$ , on définit une partie régulière  $\Lambda^\circ \subset \Lambda$  ;  $Z := \Lambda \setminus \Lambda^\circ$  est un fermé analytique de codimension 1 dans  $\Lambda$ .

$\Lambda^\circ$  est l'ensemble des points lisses de  $\Lambda$  au voisinage desquels la projection  $\pi|_\Lambda : \Lambda \rightarrow X$  est de rang constant.

Avec les notations précédentes, on a :  $\Lambda^\circ := \sqcup_\alpha \Lambda_\alpha^\circ$

Sur  $\Lambda^\circ$ , on a le système local donné par les  $\mathcal{L}_\alpha$  dont on considère le déterminant qui donne une classe en cohomologie dans  $H^1(\Lambda^\circ, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ .

En regardant les monodromies du système local modulo  $\pm 1$ , on obtient une classe dans  $H^1(\Lambda^\circ, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  que l'on transporte par isomorphisme de Thom en  $\lambda_{\mathcal{F}} \in H_{\Lambda^\circ}^{2n+1}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ .

Le résultat principal est le suivant (théorème 2.1.4) :

THÉORÈME : *Cette classe se prolonge en une classe*

$$\lambda_{\mathcal{F}} \in H_{\Lambda}^{2n+1}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$$

*que l'on appelle "déterminant microlocal" de  $\mathcal{F}$ .*

Signalons aussi que dans la preuve du théorème précédent on démontre un autre résultat important : les systèmes locaux  $\mathcal{L}_\alpha$  se comportent bien modulo  $\pm 1$  par une transformation canonique de Legendre qui ramène  $\Lambda_\alpha$  en position générique (voir le théorème 2.10.2 pour un énoncé précis). Comme le fait remarquer Y. Laurent, ce résultat n'est sans doute pas particulier à la transformation de Legendre : il offre des perspectives intéressantes sur la description microlocale des faisceaux pervers.

Revenons brièvement sur le fait de quotienter les coefficients par  $\pm 1$ .

D'une part, ce problème de signe apparaît dans la démonstration quand on utilise les transformations canoniques pour se ramener en position générique. Le comportement des systèmes locaux par transformation canonique n'est contrôlé que modulo un signe. En toute généralité, une transformation canonique peut faire apparaître dans la base à l'arrivée des singularités qui n'existaient pas au départ et ces nouvelles singularités vont donner naissance à des  $+$  ou  $-$ .

Par exemple, en dimension 2, la transformation de Legendre envoie le conormal à une cubique lisse sur le conormal à un cusp. A l'arrivée, on a une singularité (l'origine du cusp) dans la base (hors section nulle, le conormal au cusp est lisse) qui n'était pas présente au départ.

D'autre part, des exemples explicites (le cusp en position générique dans la partie 2.14 et l'exemple donné dans [S]) montrent que le prolongement n'existe qu'après avoir quotienté les coefficients par  $\pm 1$ .

Ces exemples montrent que l'ambiguïté de signe n'est pas un avatar de la démonstration.

Le déterminant microlocal est une généralisation de la première classe caractéristique secondaire  $c_1(\cdot)$  aux sens suivants :

- si  $\mathcal{L}$  est un système local sur  $X$  alors son déterminant microlocal en tant que faisceau pervers redonne  $c_1(\mathcal{L}) \in H^1(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$  (au signe près)
- si  $\mathcal{F}$  est un faisceau pervers sur  $X$  et si  $X_n$  est sa strate de dimension maximale (strate ouverte) alors le déterminant microlocal de  $\mathcal{F}$  "contient" la classe  $c_1(h^0(\mathcal{F})|_{X_n}) \in H^1(X_n, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$  (au signe près)
- si  $Y$  est une sous-variété lisse de  $X$  et que  $\mathcal{L}_Y$  est un système local sur  $Y$  alors à un décalage près le système local  $\mathcal{L}_Y$  étendu par zéro à  $X$  est un faisceau pervers sur  $X$  dont le déterminant microlocal est  $c_1(\mathcal{L}_Y) \in H^1(Y, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$  (au signe près)

Le déterminant microlocal exprime le fait que les systèmes locaux  $\mathcal{L}_\alpha$  ne sont pas indépendants : ils sont liés entre-eux car ils proviennent du même faisceau pervers ; on a une relation entre  $\mathcal{L}_\alpha$  et  $\mathcal{L}_\beta$  si l'intersection  $\Lambda_\alpha \cap \Lambda_\beta$  est de codimension 1 dans  $\Lambda$ .

Précisons ce qui se passe en dimension 2.

Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau pervers sur  $X = \mathbb{C}^2$  relativement à une courbe plane  $C$  à singularité isolée en  $0$ .

On a :  $Ch(\mathcal{F}) \subset T_X^*X \cup T_C^*X \cup T_0^*X$ .

Notons comme précédemment  $Z$  le complémentaire dans  $Ch(\mathcal{F})$  de la partie régulière de  $Ch(\mathcal{F})$ .

On a  $Z = (T_X^*X \cap T_C^*X) \cup (T_C^*X \cap T_0^*X)$ .

Soient  $\{C_i\}_{i=1\dots K}$  les composantes irréductibles de  $C$ .

Le déterminant microlocal est construit sur les microlocalisés suivants :

- $\mu_X(\mathcal{F})$  qui donne le système local  $\mathcal{L}_X$  sur  $T_X^*X$
- les  $\mu_{C_i}(\mathcal{F})$  qui donnent les systèmes locaux  $\mathcal{L}_i$  sur  $T_{C_i}^*X \setminus Z$
- $\mu_0(\mathcal{F})$  qui donne le système local  $\mathcal{L}_0$  sur  $T_0^*X \setminus Z$

On note  $\ell_X$ ,  $\ell_i$  et  $\ell_0$  les déterminants des systèmes locaux précédents.

$Z \cap T_0^*X$  contient un nombre fini de codirections  $\{\delta_j\}_{1 \leq j \leq K'}$ .

On a la partition  $Z = Z_X \cup Z_0 \cup \{0\}$ , où

•  $Z_X = T_X^*X \cap Z \setminus \{(0; 0)\} \simeq C \setminus \{0\} = \sqcup_i C_i^\circ$  sont les points de la section nulle hors origine

•  $Z_0 = T_0^*X \cap Z \setminus \{(0; 0)\} = \sqcup_j (\delta_j \setminus \{0\})$  sont les codirections à l'origine hors section nulle

•  $\{0\}$  désigne l'origine dans la section nulle.

$\{0\}$  est trop petit (de codimension 2) pour intervenir dans le prolongement.

En tout point de  $Z_X = \sqcup_i C_i^\circ$ , le prolongement concerne  $\ell_X$  et un seul des  $\ell_i$  : le recollement en ces points provient du fait que les cycles proches et cycles évanescents le long de  $C_i$  viennent équipés des automorphismes naturels " $Id + \text{Var} \circ \text{Can}$ " et " $Id + \text{Can} \circ \text{Var}$ " qui ont mêmes déterminants.

En tout point de  $Z_0 = \sqcup_j (\delta_j \setminus \{0\})$  le prolongement concerne  $\ell_0$  et certains des  $\ell_i$ .

Si on fixe  $j$  dans  $\{1, \dots, K'\}$ , les composantes de  $C$  qui interviennent sont les  $C_i$  telles que  $\delta_j \subset T_{C_i}^*X$ .

A posteriori, on peut dire que le système local  $\ell_0$  a autour de  $\delta_j$  exactement le déterminant de la monodromie qui compense le produit des déterminants des monodromies des  $\ell_i$  concernés.

Plus précisément, soit  $j \in \{1, \dots, K'\}$  fixé et soit  $\gamma_j$  un petit lacet de  $T_0^*X \setminus Z$  qui entoure la codirection  $\delta_j$ . A  $\gamma_j$  est associé par le système local  $\ell_0$  un nombre  $\alpha_j \in \mathbb{C}^*$ .

Soit  $I_j := \{i \in \{1, \dots, K\} / \delta_j \subset T_{C_i}^* X\}$ . Pour tout  $i$  dans  $I_j$  le système local  $\ell_i$  a une monodromie  $\beta_{i,j}$  autour de la codirection  $\delta_j$  dans  $T_{C_i}^* X \setminus Z$ . L'égalité qui permet de prolonger le déterminant microlocal sur  $\delta_j$  est :

$$\alpha_j = \prod_{i \in I_j} \beta_{i,j}$$

Dans le cas particulier d'un faisceau pervers sur  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , on peut donc interpréter le déterminant microlocal comme suit.

$\mathcal{L}_X = h^0(\mathcal{F})|_{X \setminus C}$  est un système local sur  $X \setminus C$ .

Si  $\{C_i\}_{i=1 \dots K}$  désigne les composantes irréductibles de  $C$ , le foncteur "cycles évanescents le long de  $C_i$ " fournit un faisceau  $\phi_{C_i} \mathcal{F}$  pervers sur  $C_i$  relativement à l'origine.

$\tilde{\mathcal{L}}_i := h^0(\phi_{C_i} \mathcal{F})|_{C_i^\circ}$  est un système local sur  $C_i^\circ := C_i \setminus \{0\}$ .

Le déterminant microlocal de  $\mathcal{F}$  contient au signe près les déterminants des systèmes locaux  $\mathcal{L}_X$  et  $\tilde{\mathcal{L}}_i$ ,  $1 \leq i \leq K$ , et aucune autre information.

Le système local  $\mathcal{L}_0$  sur  $T_0^* X \setminus Z$  n'apporte pas d'élément nouveau : en un certain sens, il est exactement le système local dont le déterminant compense les déterminants des systèmes locaux  $\tilde{\mathcal{L}}_i$ .

On peut penser aux  $\tilde{\mathcal{L}}_i$  comme à des systèmes locaux sur des disques époinés  $D_i^*$ , disques qui sont tous attachés en leur centre. Le système local  $\mathcal{L}_0$  est là pour "visser" les  $\tilde{\mathcal{L}}_i$  entre-eux.

Ce mémoire est rédigé comme suit.

La première partie regroupe un certain nombre de résultats techniques et de rappels qui seront utilisés dans la suite.

La deuxième partie est consacrée à la construction et à la démonstration de l'existence du déterminant microlocal d'un faisceau pervers.

Le découpage de cette deuxième partie suit linéairement les étapes de la démonstration.

On commence par montrer que le problème du prolongement est local sur  $T^* X$  et que si le prolongement existe, il est unique (partie 2.2) puis que le

prolongement en dehors d'un sous-ensemble de codimension 2 dans  $\Lambda$  suffit (partie 2.3).

Le problème du prolongement sur les points de la section nulle  $T_X^*X$  (partie 2.7) hors codimension 2 se ramène grâce à 2.6 au cas  $\dim X = 1$  qui est traité dans la partie 2.5.

Pour traiter le prolongement hors section nulle, on ramène le problème en position générique (partie 2.11).

Pour se ramener en position générique, la transformation canonique de Legendre suffit (partie 2.8).

On contrôle alors le comportement des microlocalisés de Sato d'un faisceau pervers par la transformation canonique faisceautique associée à la transformation de Legendre (partie 2.10) en examinant dans un premier temps ce qui se passe pour les faisceaux constants  $\underline{\mathbb{Z}}_M$ , où  $M$  est un sous-espace de  $X$  (partie 2.9).

Se limiter au cas de  $\mathbb{Z}$  permet d'attrapper les  $\pm 1$  que l'on souhaite qui proviennent alors d'une formule de Picard-Lefschetz puisque les seules singularités qui apparaissent quand une transformation canonique ramène en position générique sont quadratiques.

On utilise alors le foncteur  $\mu hom$  de [KS] pour étendre le résultat à un faisceau pervers quelconque ramené en position générique par la transformation de Legendre.

En position générique, hors codimension 2, le problème se ramène par 2.6 à celui de  $\dim X = 2$  (partie 2.12).

Le problème en dimension 2 en position générique revient à montrer qu'un certain produit de déterminants de monodromies vaut  $\pm 1$  (partie 2.13), ce qui est fait dans la partie 2.14, où l'on utilise les descriptions combinatoires des faisceaux pervers en termes de catégories de représentations de carquois de Ph. Maisonobe.



# Notations

La plupart des notations utilisées ici sont courantes et sont presque toutes celles de [KS]. Signalons toutefois que :

- Si  $X$  est un espace topologique,  $D^b(X)$  désigne la catégorie dérivée bornée des faisceaux de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels sur  $X$  ou celle des faisceaux de  $\mathbb{Z}$ -modules sur  $X$
- Si  $X$  est une variété analytique complexe, si  $S$  est un sous-espace analytique de  $X$  alors  $T_S^*X$  désigne l'adhérence dans  $T^*X$  du conormal à la partie lisse de  $S$  :  $T_S^*X = \overline{T_{S^{reg}}^*X}$
- Si  $Y \subset X$  est un sous-ensemble localement fermé de l'espace topologique  $X$ , si  $\mathcal{F}$  est un objet de  $D^b(X)$ , alors  $\mathbf{R}\Gamma_Y \mathcal{F}$  désigne :
  - si  $Y$  est fermé dans  $X$ , le complexe des sections de  $\mathcal{F}$  à support dans  $Y$
  - si  $Y$  est ouvert dans  $X$ , si  $j : Y \hookrightarrow X$  est l'inclusion ouverte, alors  $\mathbf{R}\Gamma_Y \mathcal{F} = \mathbf{R}j_* j^{-1} \mathcal{F}$
  - si  $Y$  est localement fermé,  $Y = U \cap Z$ , où  $U$  est ouvert et  $Z$  fermé avec  $j : U \hookrightarrow X$  l'inclusion, alors  $\mathbf{R}\Gamma_Y \mathcal{F}$  est la composée :  $\mathbf{R}\Gamma_Y \mathcal{F} = \mathbf{R}j_* j^{-1} \mathbf{R}\Gamma_Z \mathcal{F}$ .
- Si  $\mathcal{F}$  est un objet de  $D^b(X)$ , où  $X$  est une variété analytique, alors  $Ch(\mathcal{F})$  désigne la variété caractéristique de  $\mathcal{F}$  ou son *support singulier* (voir la définition 5.1.2 de [KS])





# Chapitre 1

## Préliminaires techniques



## 1.1 Quelques résultats techniques sur les faisceaux homogènes

Les résultats qui suivent sont classiques (voir [KS], §3.7, [M3] § VI.1, [BMV1]).

Soit  $X$  un espace topologique séparé muni d'une action du groupe  $\mathbb{R}^{+*}$  :

$$\mu : X \times \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow X.$$

On notera  $p : X \times \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow X$  la première projection.

Dans la suite, on supposera que les orbites de l'action de  $\mathbb{R}^{+*}$  sont toutes soit réduites à un point  $\{0\}$ , soit homéomorphes à des demi-droites  $]0, +\infty[$ .

Typiquement, on pense à la situation géométrique suivante :

$\pi : X \rightarrow Z$  fibré vectoriel réel (ou complexe) localement trivial, et l'action du groupe  $\mathbb{R}^{+*}$  sur  $X$  est la multiplication par un scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$  dans les fibres de  $\pi$ .

- Un faisceau  $\mathcal{F}$  de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels sur  $X$  est dit *homogène* si pour toute orbite  $b$  de l'action de  $\mathbb{R}^{+*}$  sur  $X$ , le faisceau  $\mathcal{F}|_b$  est un faisceau constant.

- Un complexe de faisceaux  $\mathcal{F} \in \text{Ob}(D^b(X))$  est dit *homogène* si pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , ses faisceaux de cohomologie  $h^i(\mathcal{F})$  sont homogènes. On note  $D_{\text{hom}}^b(X)$  la sous-catégorie pleine de  $D^b(X)$  dont les objets sont des complexes de faisceaux homogènes.

On rappelle les résultats suivants :

LEMME 1.1.1 *Soit  $\mathcal{G} \in \text{Ob}(D^b(X \times \mathbb{R}^{+*}))$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , le faisceau  $h^k(\mathcal{G})$  est constant sur les fibres  $\{x\} \times \mathbb{R}^{+*}$ .*

*Alors, le morphisme naturel  $p^{-1}\mathbf{R}p_*\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$  est un isomorphisme.*

Ce lemme est le lemme VI.1.1 de [M3], ou encore la proposition 2.7.8 de [KS].

LEMME 1.1.2 *Soit  $\mathcal{G} \in \text{Ob}(D^b(X))$ .*

*Alors le morphisme naturel  $\mathcal{G} \longrightarrow \mathbf{R}p_*p^{-1}\mathcal{G}$  est un isomorphisme.*

Il suffit d'appliquer le corollaire 2.7.7 (ii) de [KS].

LEMME 1.1.3 *Soit  $\mathcal{F}$  un complexe de faisceaux homogène sur  $X$ .*

*Alors, pour tout entier  $j$ ,  $h^j(\mu^{-1}\mathcal{F})|_{p^{-1}(x)}$  est un faisceau constant pour tout  $x$  dans  $X$ .*

*Preuve.*

Par dévissage, on peut se ramener au cas où  $\mathcal{F}$  est un faisceau. Il suffit de regarder le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \{x\} \times \mathbb{R}^{+*} & \xrightarrow{\mu|_{p^{-1}(x)}} & b_x \\ \downarrow i & & \downarrow i' \\ X \times \mathbb{R}^{+*} & \xrightarrow{\mu} & X \end{array}$$

où  $b_x$  désigne l'orbite du point  $x$ ,  $i$  et  $i'$  les inclusions.

On a :  $\mu^{-1}\mathcal{F}|_{p^{-1}(x)} = i^{-1}\mu^{-1}\mathcal{F} = \mu|_{p^{-1}(x)}^{-1}i'^{-1}\mathcal{F}$  qui est un faisceau constant sur  $p^{-1}(x)$  puisque par hypothèse,  $\mathcal{F}|_{b_x}$  est constant.  $\square$

LEMME 1.1.4 *Si  $\mathcal{F} \in Ob(D_{hom}^b(X))$ , alors on a un isomorphisme canonique  $\mu^{-1}\mathcal{F} \simeq p^{-1}\mathcal{F}$ .*

*Preuve.*

On regarde les applications  $X \xrightarrow{j} X \times \mathbb{R}^{+*} \xrightarrow{p} X$  où  $j$  est l'injection de niveau 1,  $j(x) = (x, 1)$ .

On a pour tout  $\mathcal{F} \in Ob(D^b(X))$  les morphismes naturels :

$$\mu^{-1}\mathcal{F} \xleftarrow{\alpha} p^{-1}\mathbf{R}p_*\mu^{-1}\mathcal{F} \xrightarrow{\beta} p^{-1}\mathcal{F}$$

où le morphisme  $\beta$  provient du morphisme d'adjonction

$$\mathbf{R}p_*\mu^{-1}\mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{R}p_*\mathbf{R}j_*j^{-1}\mu^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}$$

Le morphisme  $\alpha$  est un isomorphisme naturel : d'après le lemme 1.1.3, on peut appliquer le lemme 1.1.1, ce qui donne le résultat.

Concernant le morphisme  $\beta$ , on peut le voir comme la composée :

$$\begin{aligned} p^{-1}\mathbf{R}p_*\mu^{-1}\mathcal{F} &= p^{-1}(\mathbf{R}(p \circ j)_*(p \circ j)^{-1})\mathbf{R}p_*\mu^{-1}\mathcal{F} \\ &= p^{-1}\mathbf{R}p_*\mathbf{R}j_*j^{-1}(p^{-1}\mathbf{R}p_*)\mu^{-1}\mathcal{F} \\ &\rightarrow p^{-1}\mathbf{R}p_*\mathbf{R}j_*j^{-1}\mu^{-1}\mathcal{F} \\ &= p^{-1}\mathbf{R}(p \circ j)_*(\mu \circ j)^{-1}\mathcal{F} \\ &= p^{-1}\mathcal{F} \end{aligned}$$

où la première égalité vient de  $p \circ j = Id_E$ , la seconde est la composition des foncteurs dérivés, la flèche est un isomorphisme puisque d'après le lemme

1.1.3 on peut appliquer le lemme 1.1.1, la dernière égalité provenant de  $p \circ j = \mu \circ j = Id_E$ .  $\square$

LEMME 1.1.5 *Soit  $U$  un ouvert de  $X$ . On suppose que pour toute orbite  $b$  de l'action de  $\mathbb{R}^{+*}$  sur  $X$ ,  $b \cap U$  est contractile (en particulier, non vide). Alors, pour  $\mathcal{F} \in Ob(D_{hom}^b(X))$ , le morphisme de restriction  $\Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$  est un isomorphisme.*

*Preuve.*

C'est le corollaire 3.7.3 de [KS] dont on reprend exactement la démonstration. Soit  $\mu' : U \times \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow X$  la restriction de  $\mu$ .  $\mu'$  est surjective, à fibres contractiles et on peut utiliser la remarque 3.3.10 de [KS] et appliquer la proposition 3.3.9 de [KS]. On a donc l'isomorphisme naturel  $\mathcal{F} = \mathbf{R}\mu'_* \mu'^{-1} \mathcal{F}$  et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\Gamma(X, \mathcal{F}) &= \mathbf{R}\Gamma(X, \mathbf{R}\mu'_* \mu'^{-1} \mathcal{F}) \\ &= \mathbf{R}\Gamma(U \times \mathbb{R}^{+*}, \mu'^{-1} \mathcal{F}) \\ &= \mathbf{R}\Gamma(U \times \mathbb{R}^{+*}, p^{-1} \mathcal{F}) \text{ (par 1.1.4)} \\ &= \mathbf{R}\Gamma(U, \mathbf{R}p_* p^{-1} \mathcal{F}) \\ &= \mathbf{R}\Gamma(U, \mathcal{F}) \text{ (par 1.1.2)}. \end{aligned}$$

$\square$

## 1.2 Spécialisation des faisceaux

Cette section rassemble un certain nombre de résultats sur la spécialisation des faisceaux introduite par Verdier ([V]). Elle suit presque mot à mot le début du chapitre 4 de [KS].

Soit  $X$  une variété réelle lisse, séparée, de classe  $C^\infty$  et soit  $Y$  une sous-variété lisse, fermée de  $X$ . On définit un foncteur appelé foncteur de spécialisation le long de  $Y$ , noté  $\nu_Y : D^b(X) \rightarrow D_{hom}^b(T_Y X)$ .

Pour le définir, on construit une nouvelle variété, la déformation normale de  $Y$  dans  $X$ , notée  $\tilde{X}_Y$ .

C'est une variété  $C^\infty$  munie de deux applications :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_Y & \xrightarrow{t} & \mathbb{R} \\ \downarrow p & & \\ X & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{telles que : } p^{-1}(X \setminus Y) & \text{ isomorphe à } (X \setminus Y) \times \mathbb{R}^* \\ t^{-1}(\mathbb{R}^*) & \text{ isomorphe à } X \times \mathbb{R}^* \\ t^{-1}(0) & \text{ isomorphe à } T_Y X \end{aligned}$$

$\tilde{X}_Y$  est définie comme suit.

On pose  $\dim_{\mathbb{R}} X = n$  et  $\text{codim}_X Y = d$ .

Soit une carte de  $X$ ,  $\phi_i : U_i \rightarrow \phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$  telle que  $U_i \cap Y = \phi_i^{-1}(\{0\}^d \times \mathbb{R}^{n-d})$ .

On définit  $V_i = \{(x', x'', t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{R} ; (tx', x'') \in \phi(U_i)\}$

et deux applications  $t_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}$  et  $p_i : V_i \rightarrow U_i$

par  $p_i(x', x'', t) = \phi_i^{-1}(tx', x'')$  et  $t_i(x', x'', t) = t$ .

Pour deux cartes  $(U_i, \phi_i)$  et  $(U_j, \phi_j)$ , on définit l'application

$$\psi_{ij} : V_i \times_{U_i} (U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

où  $\psi_{ij}(x, t) = (\psi'_{ij}(x, t), \psi''_{ij}(x, t)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$  avec

$$(t\psi'_{ij}(x, t), \psi''_{ij}(x, t)) = \phi_j \phi_i^{-1}(tx', x'').$$

Ceci est toujours possible puisque les  $d$  premières coordonnées de  $\phi_j \phi_i^{-1}(tx', x'')$  s'annulent quand  $t = 0$ .

Soit  $\mathcal{R}$  la relation d'équivalence qui identifie  $(x_i, t_i) \in V_i$  et  $(x_j, t_j) \in V_j$  si  $t_i = t_j$  et  $x_j = \psi_{ij}(x_i, t_i)$ .

On pose

$$\tilde{X}_Y = \left( \bigsqcup_i V_i \right) / \mathcal{R}$$

On vérifie que  $\tilde{X}_Y$  est bien une variété  $C^\infty$  et possède les propriétés annoncées.

L'isomorphisme entre  $t^{-1}(0)$  et  $T_Y X$  est réalisé dans la carte  $V_i$  en identifiant  $(x', x'', 0)$  avec le vecteur normal  $x'$  au point  $(0, x'') \in Y$ .

On peut alors définir le spécialisé  $\nu_Y(\mathcal{F})$  de  $\mathcal{F}$  le long de  $Y$ , pour  $\mathcal{F} \in \text{Ob}(D^b(X))$ .

Soit  $\Omega = t^{-1}(\mathbb{R}^{+*})$  et soit  $j : \Omega \hookrightarrow \tilde{X}_Y$  l'inclusion ouverte.

On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T_Y X & \xrightarrow{s} & \tilde{X}_Y \xleftarrow{j} \Omega \\ \downarrow \pi & & \downarrow p \\ Y & \longrightarrow & X \end{array} \quad \swarrow \tilde{p}=p|_\Omega$$

et on pose :

$$\nu_Y(\mathcal{F}) = s^{-1} \mathbf{R}j_* \tilde{p}^{-1} \mathcal{F}$$

On a ainsi défini un foncteur de spécialisation dans un cadre réel.

Citons quelques résultats sur ce foncteur.

- Un autre foncteur de spécialisation a été défini par Verdier ([V]) dans un cadre plus général. En particulier dans un cadre analytique complexe, on obtient un foncteur  $\nu_Y^{\mathbb{C}}$ .

Si  $X$  est une variété analytique complexe,  $Y$  une sous variété analytique et que  $\mathcal{F}$  est un complexe  $\mathbb{C}$ -constructible de faisceaux alors on a la comparaison :  $\nu_Y^{\mathbb{C}}(\mathcal{F}) = \nu_Y(\mathcal{F})$  ([TMF], p. 300).

- Dans un cadre analytique complexe, avec la perversité moitié,  $\nu_Y$  envoie faisceaux pervers sur faisceaux pervers. ([KS], proposition 10.3.19).

- On dispose d'une estimation du microsupport de  $\nu_Y(\mathcal{F})$  en fonction du microsupport de  $\mathcal{F}$ . ([KS], théorème 6.4.1)

- Il existe une construction algébrique du spécialisé dans un cadre analytique complexe, c'est-à-dire en termes de  $\mathcal{D}$ -modules (voir par exemple [K2], [LM] ou [TMF]).

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -Module régulier le long de  $Y$ . Il existe une filtration dite "  $V$ -filtration de Kashiwara-Malgrange le long de  $Y$ ". Rappelons juste qu'elle est construite à partir de la  $b$ -fonction et d'une section de la projection  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  (voir [K2], [M1]).



On note  $gr_V(\mathcal{M})$  le gradué associé à  $\mathcal{M}$  pour la  $V$ -filtration de Kashiwara-Malgrange le long de  $Y$ .

$gr_V(\mathcal{D}_X)$  s'identifie naturellement à  $\mathcal{D}_{[T_Y X]}$ , où  $\mathcal{D}_{[T_Y X]}$  désigne le faisceau des opérateurs différentiels sur  $T_Y X$  analytiques en  $Y$  et polynômiaux dans les fibres de  $T_Y X \rightarrow Y$ .

$gr_V(\mathcal{M})$  est un faisceau de  $\mathcal{D}_{[T_Y X]}$ -Modules et on définit le spécialisé algébrique de  $\mathcal{M}$  par :

$$\underline{\nu}_Y^{alg}(\mathcal{M}) = \mathcal{D}_{T_Y X} \otimes_{\mathcal{D}_{[T_Y X]}} gr_V(\mathcal{M})$$

On a alors le résultat :

**THÉORÈME 1.2.1** ([K2], [LM] théorème 10.2.3)

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -Module holonome régulier le long de  $Y$ . On a un isomorphisme canonique dans  $D^b(T_Y X)$  :

$$\nu_Y(\mathcal{S}ol_X(\mathcal{M})) \simeq \mathcal{S}ol_{T_Y X}(\underline{\nu}_Y^{alg}(\mathcal{M}))$$

où si  $Z$  est une variété analytique complexe et  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{D}_Z$ -Module,  $\mathcal{S}ol_Z(\mathcal{N})$  désigne  $\mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_Z}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_Z)$ .

- Spécialisé et cycles proches de Deligne.

Dans un cadre analytique complexe, quand  $Y$  est une hypersurface lisse de  $X$  admettant une équation globale  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , on dispose alors du complexe des cycles proches de Deligne ([D.K])  $\Psi_f(\mathcal{F}) \in Ob(D^b(Y))$  où  $Y = f^{-1}(0)$  et  $\mathcal{F} \in Ob(D^b(X))$ .

$df$  induit alors une application  $\tilde{f} : T_Y X \rightarrow \mathbb{C}$ .

Soit  $\tilde{s}$  la section de  $T_Y X \rightarrow Y$  définie par  $\tilde{f}^{-1}(1)$ .

Si  $\mathcal{F}$  est  $\mathbb{C}$ -constructible, on a alors un isomorphisme dans  $D^b(Y)$  ([KS], proposition 8.6.3) :

$$\Psi_f(\mathcal{F}) \cong \tilde{s}^{-1} \nu_Y(\mathcal{F}).$$

### Un exercice : spécialisation le long de la section nulle d'un fibré vectoriel

Soient  $Z$  une variété analytique complexe lisse séparée et  $\pi : E \rightarrow Z$  un fibré vectoriel réel de rang  $d$ .

Dans la suite, on identifiera  $Z$  avec la section nulle de  $\pi : E \rightarrow Z$ .

On a le résultat suivant ([KS], exercice IV.5) :

**LEMME 1.2.2** Si  $\mathcal{F} \in Ob(D_{hom}^b(E))$ , alors on a un isomorphisme canonique  $\nu_Z(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}$ .

*Preuve.* Tout d'abord, remarquons qu'il existe un isomorphisme canonique  $E \cong T_Z E$ . En effet,  $T_Z E$  est défini comme le troisième terme d'une suite exacte courte de fibrés vectoriels sur  $Z$  :

$$0 \rightarrow TZ \rightarrow Z \times_E TE \rightarrow T_Z E \rightarrow 0$$

Et il suffit de vérifier que la suite de fibrés vectoriels

$$0 \rightarrow TZ \rightarrow Z \times_E TE \rightarrow E \rightarrow 0$$

munie des applications canoniques est bien une suite exacte courte.

La déformation normale de  $Z$  dans  $E$  vient équipée d'une application

$$p : \tilde{E}_Z \rightarrow E.$$

Dans la situation topologique  $\pi : E \rightarrow Z$ , on peut définir une autre application  $pr : \tilde{E}_Z \rightarrow E$ .

Pour une carte de  $E$ ,  $\phi_i : U_i \rightarrow \phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$

telle que  $U_i \cap Z = \phi_i^{-1}(\{0\}^d \times \mathbb{R}^{n-d})$ , on définit la carte  $V_i$  de  $\tilde{E}_Z$  par

$$V_i = \{(x', x'', t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{R} ; (tx', x'') \in \phi(U_i)\}.$$

Donc, si on prend pour carte  $U_i$  une carte trivialisante du fibré vectoriel, on a  $V_i = \{(v, z, t) \in \mathbb{R}^d \times W_i \times \mathbb{R}\}$ , où  $W_i$  est une carte de la variété  $Z$ .

On peut alors définir  $pr : \tilde{E}_Z \rightarrow E$  par  $pr_i : V_i = \mathbb{R}^d \times W_i \times \mathbb{R} \rightarrow U_i = \mathbb{R}^d \times W_i$ , en posant  $pr(v, z, t) = (v, z)$ . On vérifie que  $pr$  est bien définie sur  $\tilde{E}_Z$ .

D'autre part,  $\Omega = t^{-1}(\mathbb{R}^{+*})$  est isomorphe à  $E \times \mathbb{R}^{+*}$  et  $pr|_\Omega$  est la première projection tandis que  $\tilde{p} = p|_\Omega$  est simplement l'action du groupe  $\mathbb{R}^{+*}$  dans les fibres de  $E$  (voir par exemple [LM], p. 1384).

On a donc le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{s} & \tilde{E}_Z \xleftarrow{j} E \times \mathbb{R}^{+*} \\ \downarrow & & \downarrow p \\ Z & \longrightarrow & E \end{array} \begin{array}{l} \swarrow \tilde{p}, pr|_\Omega \end{array}$$

On a  $\nu_Z(\mathcal{F}) = s^{-1}\mathbf{R}j_*\tilde{p}^{-1}\mathcal{F}$ . Comme on part de  $\mathcal{F}$  homogène, on a  $\tilde{p}^{-1}\mathcal{F} = (pr|_\Omega)^{-1}\mathcal{F}$  (lemme 1.1.4) et donc  $\nu_Z(\mathcal{F}) = s^{-1}\mathbf{R}j_*(pr|_\Omega)^{-1}\mathcal{F} = s^{-1}\mathbf{R}j_*j^{-1}pr^{-1}\mathcal{F}$ .

Enfin, il faut constater que le morphisme naturel issu de l'adjonction

$$\mathcal{F} = (pr \circ s)^{-1}\mathcal{F} = s^{-1}pr^{-1}\mathcal{F} \longrightarrow s^{-1}\mathbf{R}j_*j^{-1}pr^{-1}\mathcal{F} = \nu_Z(\mathcal{F})$$

est un isomorphisme.

Pour cela, on peut se limiter à regarder ce qui se passe pour un faisceau  $\mathcal{F}$  au dessus d'un ouvert trivialisant  $W_i \times \mathbb{R}^d$  de  $E$ , où  $W_i$  est un ouvert de  $Z$ . On a alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
W_i \times \mathbb{R}^d \times \{0\} & \xrightarrow{s} & W_i \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} & \xleftarrow{j} & W_i \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{+*} \\
\downarrow \pi & & \downarrow pr & \swarrow pr|_{\Omega} & \\
W_i \times \{0\}^d & \longrightarrow & W_i \times \mathbb{R}^d & & 
\end{array}$$

En un point  $(w, v, 0) \in W_i \times \mathbb{R}^d \times \{0\} \subset T_Z E = E$ , la fibre du faisceau  $\mathcal{F}$  est :

$$s^{-1}pr^{-1}\mathcal{F}_{(w,v,0)} = \varinjlim_{W \times V \times ]-t, t[} \Gamma(W \times V \times ]-t, t[, pr^{-1}\mathcal{F})$$

puisque les  $\{W \times V \times ]-t, t[\}$ , où  $W$  est un voisinage ouvert de  $w$ ,  $V$  voisinage ouvert de  $v$ ,  $t \in \mathbb{R}^{+*}$ , forment un système fondamental de voisinages de  $(w, v, 0)$  dans  $\tilde{E}_Z$ .

$$D'autre part, on a  $s^{-1}\mathbf{R}j_*j^{-1}pr^{-1}\mathcal{F}_{(w,v,0)} = \varinjlim_{W \times V \times ]-t, t[} \Gamma(W \times V \times ]0, t[, pr^{-1}\mathcal{F})$$$

et la fibre du morphisme d'adjonction

$$s^{-1}pr^{-1}\mathcal{F}_{(w,v,0)} \longrightarrow s^{-1}\mathbf{R}j_*j^{-1}pr^{-1}\mathcal{F}_{(w,v,0)}$$

se lit sur les limites inductives comme un morphisme de restriction, qui est un isomorphisme puisque le faisceau  $pr^{-1}\mathcal{F}$  est constant sur les fibres  $\{w\} \times \{v\} \times \mathbb{R}$ .  $\square$

### Application : calcul du spécialisé d'un faisceau pervers le long d'une hypersurface de la stratification

Soit  $X$  une variété analytique complexe lisse, soit  $\mathcal{F}$  un faisceau pervers sur  $X$  et soit  $Y$  sa strate fermée de dimension maximale, c'est-à-dire que  $Y$  est le plus petit fermé de  $X$  tel que  $\mathcal{F}|_{X \setminus Y}$  soit réduit à un système local.

Soit  $Y^\circ$  l'ouvert des points lisses de  $Y$  et  $Y^{sing}$  sa partie singulière. Alors  $Y^\circ$  est un fermé lisse de  $X \setminus Y^{sing}$  et on peut donc calculer le spécialisé  $\nu_{Y^\circ}(\mathcal{F}|_{X \setminus Y^{sing}})$ .

Soit  $\mathcal{T}$  un voisinage tubulaire de  $Y^\circ$  dans  $X \setminus Y^{sing}$ . Alors  $\mathcal{T}$  s'identifie à un voisinage  $\mathcal{T}'$  de la section nulle du fibré normal  $T_{Y^\circ}(X \setminus Y^{sing})$  (voir par exemple [GM], [MV2], ou le théorème 11.1 de [MS]). Puisque le spécialisé  $\nu_{Y^\circ}(\mathcal{F}|_{X \setminus Y^{sing}})$  est un faisceau homogène sur  $T_{Y^\circ}(X \setminus Y^{sing})$ , il suffit de le connaître sur  $\mathcal{T}'$  pour le connaître complètement (lemme 1.1.5).

LEMME 1.2.3 *En utilisant l'identification  $\mathcal{T} \simeq \mathcal{T}'$ , on a :*

$$\nu_{Y^\circ}(\mathcal{F}_{|X \setminus Y^{sing}})|_{\mathcal{T}'} = \mathcal{F}_{|\mathcal{T}}$$

*Preuve.* Il suffit de remarquer que puisque  $\mathcal{F}_{|X \setminus Y}$  est un système local, modulo l'identification entre  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  puis la dilatation qui permet d'identifier  $\mathcal{T}'$  et  $T_{Y^\circ}(X \setminus Y^{sing})$ ,  $\mathcal{F}_{|\mathcal{T}}$  est un faisceau homogène sur  $T_{Y^\circ}(X \setminus Y^{sing})$  auquel on peut donc appliquer le lemme 1.2.2.  $\square$

### 1.3 Transformation de Fourier faisceautique

On rappelle ici la construction et quelques propriétés de la transformée de Fourier pour les faisceaux. La plupart des résultats exposés ici sont extraits de [KS], § 3.7, [M3] § VI.1, [BMV1], [BMV2], [Br2].

Soit  $X$  un espace topologique localement compact et  $p : E \rightarrow X$  un fibré vectoriel réel sur  $X$ , localement trivial, de rang constant  $d$ .

On note  $\pi : E' \rightarrow X$  le fibré dual de  $E$ .

La transformation de Fourier est un foncteur, noté ici  $(\cdot)^\wedge$ , qui à  $\mathcal{F} \in \text{Ob}(D_{\text{hom}}^b(E))$  associe  $(\mathcal{F})^\wedge \in \text{Ob}(D_{\text{hom}}^b(E'))$ .

Si  $\mathcal{I}$  est un complexe borné inférieurement de faisceaux injectifs homogènes sur  $E$ , on note  $\mathcal{I}^\wedge$  le complexe de faisceaux associé au complexe de préfaisceaux sur  $E'$  :

$$U \longmapsto \Gamma_{U^\circ}(p^{-1}\pi(U), \mathcal{I}_{|p^{-1}\pi(U)})$$

où  $U^\circ$  désigne le polaire de  $U$ ,  $U^\circ := \{x \in E \text{ tels que } p(x) \in \pi(U) \text{ et } \langle x, \xi \rangle \geq 0 \text{ pour tout } \xi \in U \text{ tel que } \pi(\xi) = p(x)\}$ .

On vérifie qu'on a bien défini un complexe de préfaisceaux, que la construction précédente passe aux catégories dérivées et que le complexe obtenu est bien homogène sur  $E'$ .

- Transformation de Fourier algébrique

Quand on part d'un fibré  $\mathbb{C}$ -vectoriel la transformation de Fourier admet une autre description et son pendant algébrique.

Exprimons-le dans le cas d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  pour simplifier. On note  $B_E$  le complété en boules de  $E$  (c'est-à-dire que l'on rajoute un point à l'infini dans chaque demi-droite réelle  $[0, \infty[$ ) et  $k : E \hookrightarrow B_E$  l'inclusion.

On note encore  $E'$  le dual de  $E$  et  $\bar{k} = k \times \text{Id}_{E'} : E \times E' \hookrightarrow B_E \times E'$  l'inclusion.

Dans  $B_E \times E'$ , on définit la partie  $Q^- = \{\Re(\langle x, \xi \rangle) \leq 0\}$  comme l'adhérence dans  $B_E \times E'$  de la partie analogue dans  $E \times E'$  :

$$Q^- = \overline{\bar{k}(\{(x, \xi) \in E \times E'; \Re(\langle x, \xi \rangle) \leq 0\})}.$$

On pose alors  $Q^+ = (B_E \times E') \setminus Q^-$  et enfin  $L^+ = (E \times E') \cup Q^+$ .

On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
E \times E' & \xrightarrow{\bar{k}} & B_E \times E' \\
\downarrow p_1 & & \downarrow q_2 \\
E & & E'
\end{array}$$

Et, pour tout faisceau  $\mathcal{F} \in \text{Ob}(D^b(E))$ , on définit

$$\mathcal{F}^\wedge = \mathbf{R}q_{2*}(p_1^{-1}\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}_{B_E \times E'}}^{\mathbb{L}} \mathbb{C}_{L^+})$$

On définit une transformation de Fourier sur les  $\mathcal{D}_E$ -Modules de la manière suivante.

Sur  $\mathbb{C}$ , on considère le fibré trivial  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$  muni de la connexion :  $\nabla : \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}}^1$ ,  $\nabla(P) = dP - Pdt$ . On désigne par  $\tilde{\mathcal{L}}$  le  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ -Module à gauche correspondant. C'est un  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ -Module holonome, isomorphe à  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}/\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\frac{d}{dt} + 1)$ .

On note  $\sigma : E \times E' \rightarrow \mathbb{C}$  l'application de dualité et on considère :

$$\mathcal{L} := \sigma^! \tilde{\mathcal{L}}[-(2n-1)] = \mathcal{O}_{E \times E'} \otimes_{\sigma^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}}}^{\mathbb{L}} \sigma^{-1} \tilde{\mathcal{L}}.$$

$\mathcal{L}$  est un  $\mathcal{D}_{E \times E'}$ -Module concentré en degré 0, ensemblistement égal à  $\mathcal{O}_{E \times E'}$ .

Si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{D}_{E \times E'}$ -Module à gauche,  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{E \times E'}}^{\mathbb{L}} \mathcal{L}$  est alors ensemblistement égal à  $\mathcal{M}$  avec l'action de  $\mathcal{D}_{E \times E'}$  donnée par :

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i}(m \otimes 1) &= (\partial_{x_i} - \xi_i)m \otimes 1 \\
\partial_{\xi_i}(m \otimes 1) &= (\partial_{\xi_i} - x_i)m \otimes 1.
\end{aligned}$$

Avec les deux projections

$$\begin{array}{ccc}
& E \times E' & \\
p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\
E & & E'
\end{array}$$

on définit, pour tout  $\mathcal{D}_E$ -Module  $\mathcal{M}$ ,

$$\mathcal{M}^\wedge = \int_{p_{2*}} (p_1^! \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{E \times E'}}^{\mathbb{L}} \mathcal{L}[-n].$$

Dans la correspondance de Riemann-Hilbert, les transformations de Fourier se correspondent :

**THÉORÈME 1.3.1** (*[M2], [Da]*) *Si  $\mathcal{M}$  est un complexe borné de  $\mathcal{D}_E$ -Modules à gauche, 1-spécialisable à l'infini, il existe un isomorphisme canonique dans  $D^b(E')$  :*

$$(\text{Sol}(\mathcal{M}))^\wedge = \text{Sol}(\mathcal{M}^\wedge)$$

où  $\text{Sol}(\cdot)$  désigne les foncteurs solutions  $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}(\cdot)}(\cdot, \mathcal{O}_{(\cdot)})$ .

REMARQUE 1.3.2 *Ce théorème est énoncé dans un cadre bien plus général que le nôtre où nous n'utilisons la transformation de Fourier que pour des faisceaux homogènes.*

- On revient à la situation initiale où  $\tau : E \rightarrow Z$  est un fibré vectoriel. Si on limite les objets de départ aux complexes de faisceaux homogènes sur  $E$ , la transformée de Fourier admet d'autres descriptions.

On considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & E \times_Z E' & \\
 p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\
 E & & E' \\
 \tau \searrow & & \swarrow \pi \\
 & Z &
 \end{array}$$

où  $p_1$  et  $p_2$  désignent les projections.

Et on définit :

$$P = \{(x, \xi) \in E \times_Z E'; \langle x, \xi \rangle \geq 0\}$$

$$P' = \{(x, \xi) \in E \times_Z E'; \langle x, \xi \rangle \leq 0\}$$

Si on part de  $\mathcal{F} \in \text{Ob}(D_{hom}^b(E))$ , on a alors :

$$\mathcal{F}^\wedge = \mathbf{R}p_{2!}(p_1^{-1}\mathcal{F})_{P'} = \mathbf{R}p_{2*}\mathbf{R}\Gamma_P(p_1^{-1}\mathcal{F})$$

La transformation de Fourier établit alors une équivalence de catégories de  $D_{hom}^b(E)$  vers  $D_{hom}^b(E')$ .

- Si on reprend la première construction de la transformation de Fourier, on obtient alors une description des sections du transformé de Fourier  $\mathcal{F}^\wedge$  : si  $U$  est un ouvert convexe de  $E'$  (c'est-à-dire que pour tout  $z \in \pi(U)$ ,  $\pi^{-1}(z) \cap U$  est convexe) on a :

$$\mathbf{R}\Gamma(U, \mathcal{F}^\wedge) = \mathbf{R}\Gamma_{U^\circ}(\tau^{-1}\pi(U), \mathcal{F}|_{\tau^{-1}\pi(U)})$$

## Transformation de Fourier et faisceaux pervers en dimension 1

Plaçons nous dans le cas où  $Z$  est réduit à un point et où  $E = \mathbb{C}$  et considérons un faisceau pervers  $\mathcal{F}$  sur  $\mathbb{C}$  relativement à 0 ( $\mathcal{F}$  est un complexe de faisceaux homogène).

On a alors ([KS], proposition 10.3.18) :  $\mathcal{F}^\wedge[1]$  est un faisceau pervers sur  $E'$ .

On rappelle qu'un faisceau pervers sur  $\mathbb{C}$  relativement à 0 est entièrement décrit par un couple

$$E \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{v} \end{array} F$$

où  $E, F$  sont deux espaces vectoriels complexes de dimensions finies et  $u, v$  sont deux applications linéaires telles que  $Id + vu$  est inversible.

Une telle description peut s'obtenir de la manière suivante (voir par exemple [PhM1], [GGM]).

Soit  $\mathcal{F} \in Ob(Perv^{\{0\}}(\mathbb{C}))$ . On considère le triangle distingué de  $D^b(\mathbb{C})$  :

$$\mathbf{R}\Gamma_{\mathbb{R}^+} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{R}i_* i^{-1} \mathcal{F} \xrightarrow{+1}$$

où  $i$  désigne l'inclusion ouverte  $i : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ \hookrightarrow \mathbb{C}$ .

On remarque que le premier et le dernier terme de ce triangle sont des complexes de faisceaux concentrés en un seul degré, constructibles relativement à la stratification  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*}, \{0\}$ .

On a :  $\mathbf{R}\Gamma_{\mathbb{R}^+} \mathcal{F} = \mathbf{R}^1\Gamma_{\mathbb{R}^+} \mathcal{F}[-1]$  et  $\mathbf{R}i_* i^{-1} \mathcal{F} = i_* i^{-1} h^0(\mathcal{F})$ .

On pose  $E = \Gamma(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+, h^0(\mathcal{F}))$  et  $F = (\mathbf{R}^1\Gamma_{\mathbb{R}^+} \mathcal{F})_0$ .

$v$  désigne alors le morphisme de  $E$  vers  $F$  qui permet de recoller le faisceau de fibre  $F$  sur  $\{0\}$  et le faisceau constant de fibre  $E$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  en un faisceau isomorphe à  $\mathbf{R}^1\Gamma_{\mathbb{R}^+} \mathcal{F}$ .

Enfin,  $u$  désigne le morphisme de  $E$  vers  $F$  donné par la fibre à l'origine du morphisme de connexion  $i_* i^{-1} h^0(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbf{R}^1\Gamma_{\mathbb{R}^+} \mathcal{F}$  issu du triangle distingué.

La monodromie du système local  $h^0(\mathcal{F})|_{\mathbb{C}^*}$  quand on tourne dans le sens positif est alors donnée par  $Id + vu$ .

A partir de la donnée  $E \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{v} \end{array} F$ , on peut alors construire un complexe de faisceaux quasi-isomorphe au faisceau pervers  $\mathcal{F}$  de départ de la façon suivante.



On commence par construire deux faisceaux  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  constructibles relativement à la stratification  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*}, \{0\}$ .

On pose  $\mathcal{A} = i_* \underline{E}$  où  $\underline{E}$  désigne le faisceau constant de fibre  $E$  sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ .  $\mathcal{B}$  désigne le faisceau supporté par  $\mathbb{R}^+$ , constant de fibre  $E$  en restriction à  $\mathbb{R}^{+*}$ , de fibre  $F$  à l'origine, les deux strates étant recollées par le morphisme  $v : E \rightarrow F$ .

Puis on construit un morphisme  $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ .

Ce morphisme est nul en restriction à  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ .

En tout point de  $\mathbb{R}^{+*}$ , il est défini par

$$E \oplus E \rightarrow E, (e, f) \mapsto M.f - e$$

où  $M = Id + vu$ , morphisme qui consiste à faire franchir la coupure  $\mathbb{R}^+$  à une section qui se trouve "sous" cette coupure et à la comparer à une section "au-dessus" de la coupure.

Enfin, à l'origine le morphisme  $U$  est donné par  $u : E \rightarrow F$ .

On a ainsi défini un complexe à deux termes  $0 \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{U} \mathcal{B} \rightarrow 0$  qui est quasi-isomorphe au faisceau pervers  $\mathcal{F}$  de départ.

Partons de  $\mathcal{F} \in Ob(Perv^{\{0\}}(\mathbb{C}))$ , décrit par un diagramme  $E \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{v} \end{array} F$ .

On sait qu'alors  $\mathcal{F}^\wedge[1]$  est pervers sur  $\mathbb{C}'$  (le dual de  $\mathbb{C}$ ), homogène sur  $\mathbb{C}'$  donc pervers relativement à l'origine.

**THÉORÈME 1.3.3** ([BMV2], [M3]) *Une fois choisie l'orientation inverse sur  $\mathbb{C}'$ , le faisceau pervers  $\mathcal{F}^\wedge[1]$  est donné par le diagramme  $F \begin{array}{c} \xrightarrow{v} \\ \xleftarrow{u} \end{array} E$*

**COROLLAIRE 1.3.4** *Le système local  $h^0(\mathcal{F}^\wedge[1])|_{\mathbb{C} \setminus \{0\}}$  est isomorphe au système local de fibre  $F$  et de monodromie  $(Id + uv)^{-1}$  quand on tourne dans le sens positif autour de l'origine.*

## 1.4 Microlocalisation de Sato

Soit  $X$  une variété lisse, séparée, de classe  $C^\infty$  et soit  $Y$  une sous-variété lisse, fermée de  $X$ . On définit le foncteur microlocalisation de Sato le long de  $Y$ , noté  $\mu_Y : D^b(X) \longrightarrow D_{hom}^b(T_Y^*X)$ .

$\mu_Y$  est construit par spécialisation le long de  $Y$ , puis transformation de Fourier :  $\forall \mathcal{F} \in Ob(D^b(X))$ ,

$$\mu_Y(\mathcal{F}) = (\nu_Y(\mathcal{F}))^\wedge$$

Citons quelques résultats sur la microlocalisation de Sato.

- Dans un cadre analytique complexe, si  $Y$  est une sous-variété de codimension complexe  $d$  dans  $X$ , le foncteur  $\mu_Y(\cdot)[d]$  envoie faisceau pervers sur faisceau pervers ([KS], proposition 10.3.19).
- On dispose d'une estimation du microsupport de  $\mu_Y(\mathcal{F})$  en fonction de celui de  $\mathcal{F}$ .
- Signalons que d'après ce qu'on a vu précédemment, on dispose d'une construction algébrique en termes de  $\mathcal{D}$ -Modules du microlocalisé de Sato.
- On a une autre description algébrique du microlocalisé de Sato : si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{D}$ -module tel que  $Sol(\mathcal{M}) = \mathcal{F}$  alors

$$\mu_Y(\mathcal{F}) = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}}(\pi^{-1}\mathcal{M} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}} \mathcal{E}, \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}})$$

où  $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$  désigne le faisceau des microfonctions sur  $T_Y^*X$  (voir par exemple [K])

- Microlocalisé et cycles évanescents.

Dans un cadre analytique complexe, quand  $Y$  est une hypersurface lisse de  $X$  admettant une équation globale  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , on dispose alors du complexe des cycles évanescents défini par Deligne ([D.K])  $\Phi_f(\mathcal{F}) \in Ob(D^b(Y))$  où  $Y = f^{-1}(0)$  et  $\mathcal{F} \in Ob(D^b(X))$ .

$df$  définit une section  $s'$  de  $T_Y^*X \rightarrow Y$ .

Si  $\mathcal{F}$  est  $\mathbb{C}$ -constructible, alors on a un isomorphisme dans  $D^b(Y)$  ([KS], proposition 8.6.3) :  $\Phi_f(\mathcal{F}) \simeq s'^{-1}\mu_Y(\mathcal{F})$ .

## Systèmes locaux associés à un faisceau pervers

On revient sur l'estimation de la variété caractéristique du microlocalisé  $\mu_Y(\mathcal{F})$ .

On rappelle que si  $Y$  est une sous-variété lisse, fermée de  $X$ , que  $S$  est un sous-ensemble de  $X$ , on définit le cône normal de  $S$  le long de  $Y$ , noté  $C_Y(S)$ , est un sous-ensemble de  $T_Y X$  défini à partir de  $\tilde{X}_Y$ , la déformation normale de  $Y$  dans  $X$  qui permet de définir la spécialisation le long de  $Y$ .

On rappelle que  $\tilde{X}_Y$  est une variété munie du diagramme suivant (voir la partie 1.2) :

$$\begin{array}{ccc} T_Y X & \xrightarrow{s} & \tilde{X}_Y \xleftarrow{j} \Omega \\ \downarrow \pi & & \downarrow p \\ Y & \longrightarrow & X \end{array} \quad \begin{array}{l} \swarrow \\ \tilde{p} = p|_{\Omega} \end{array}$$

Et on définit :  $C_Y(S) = T_Y X \cap \overline{\tilde{p}^{-1}(S)}$ .

On peut également définir  $C_Y(S)$  en termes de coordonnées.

On choisit des coordonnées locales  $(x) = (x', x'')$  sur  $X$  telles que  $Y$  soit donné par  $Y = \{x; x' = 0\}$ .

Si on choisit  $x_0 = (0, x''_0)$  dans  $Y$ ,  $(x_0, v_0)$  dans  $T_Y X$ , alors  $(x_0, v_0) \in C_Y(S)$  si et seulement si il existe une suite  $\{x_n, c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $S \times \mathbb{R}^{+*}$  telle que si on pose  $x_n = (x'_n, x''_n)$ , on ait  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \cdot x'_n = v_0$ .

On peut alors énoncer le théorème ([KS], théorème 6.4.1) :

**THÉORÈME 1.4.1** *Si  $Y$  est une sous-variété lisse, fermée de  $X$ , si  $\mathcal{F} \in \text{Ob}(D^b(X))$ ,*

$$Ch(\mu_Y(\mathcal{F})) = Ch(\nu_Y(\mathcal{F})) \subset C_{T_Y^* X}(Ch(\mathcal{F}))$$

Dans cet énoncé, on a identifié  $T_{T_Y^* X} T^* X$ ,  $T^* T_Y^* X$  et  $T^* T_Y X$ .

Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau pervers sur  $X$  variété analytique complexe, si on note  $\pi : T^* X \rightarrow X$  son fibré cotangent, alors le lieu singulier de  $\mathcal{F}$  est  $\pi(Ch(\mathcal{F}) \setminus T_X^* X)$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{F}|_{X \setminus \pi(Ch(\mathcal{F}) \setminus T_X^* X)}$  est un système local sur  $X \setminus \pi(Ch(\mathcal{F}) \setminus T_X^* X)$ .

Si on part d'un faisceau pervers  $\mathcal{F}$ , alors  $\mu_Y(\mathcal{F})[\text{codim } Y]$  est un faisceau pervers sur  $T_Y^* X$ , et on peut utiliser le théorème précédent pour borner son lieu singulier.

COROLLAIRE 1.4.2 *Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau pervers sur  $X$ , avec  $Ch(\mathcal{F}) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} T_{M_i}^* X$ , si on fixe  $i \in \mathcal{I}$  et que l'on note  $M_i^\circ$  l'ensemble des points lisses de  $M_i$ ,  $M_i^{sing}$  l'ensemble de ses points singuliers et  $X_i = X \setminus M_i^{sing}$ , alors  $\mu_{M_i^\circ}(\mathcal{F}|_{X_i})[\text{codim } M_i]$  est un faisceau pervers sur  $T_{M_i^\circ}^* X_i$  et de plus  $\mu_{M_i^\circ}(\mathcal{F}|_{X_i})[\text{codim } M_i]|_{T_{M_i^\circ}^* X_i \setminus \bigcup_{j \in \mathcal{I}, j \neq i} T_{M_j}^* X_i}$  est un système local sur  $T_{M_i^\circ}^* X_i \setminus \bigcup_{j \in \mathcal{I}, j \neq i} T_{M_j}^* X_i$ .*

REMARQUE 1.4.3 *Notons  $\mathcal{L}_i$  le système local du corollaire précédent. Si  $\xi$  est un point de  $T_{M_i^\circ}^* X_i \setminus \bigcup_{j \in \mathcal{I}, j \neq i} T_{M_j}^* X_i$ , si  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est une application telle que  $f|_{M_i \cap U} = 0$ ,  $df_{\pi(\xi)} = \xi$  et  $U$  est un voisinage de  $\pi(\xi)$  alors  $\mathcal{L}_{i, \xi} = \phi_f(\mathcal{F})_{\pi(\xi)}$ , où  $\phi_f$  est le foncteur des cycles évanescents de Deligne (voir par exemple [MV1], remarque p. 422).*

## 1.5 Systèmes locaux de rang 1 sur $Z$ et $H^1(Z, \mathbb{C}^*)$

Soit  $Z$  un espace connexe, localement simplement connexe.

Dans cette section, on fixe une fois pour toutes un recouvrement ouvert  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  de  $Z$  tel que  $\forall i \in I, U_i$  soit simplement connexe.

On rappelle la définition du premier groupe de cohomologie de Čech  $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}^*)$ .

Comme d'habitude, pour  $(i_1, \dots, i_k) \in I^k$ , on note  $U_{i_1, \dots, i_k}$  pour  $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}$ . Un 1-cocycle de Čech du recouvrement  $\mathcal{U}$  est la donnée pour tout  $(i, j) \in I^2$  de  $g_{i,j} \in \Gamma(U_{i,j}, \underline{\mathbb{C}}_Z^*)$ , vérifiant la condition de cocycle :

$$\forall (i, j, k) \in I^3, \text{ on a dans } \Gamma(U_{i,j,k}, \underline{\mathbb{C}}_Z^*) : g_{i,k} = g_{i,j} \cdot g_{j,k} \quad (*)$$

(dans ce qui précède,  $\underline{\mathbb{C}}_Z^*$  désigne le faisceau constant de groupes abéliens de fibre  $\mathbb{C}^*$  et on a noté  $g_{i,k}$  pour  $g_{i,k}|_{U_{i,j,k}}$ ,  $g_{i,j}$  pour  $g_{i,j}|_{U_{i,j,k}}$  et  $g_{j,k}$  pour  $g_{j,k}|_{U_{i,j,k}}$ ).

Un 1-cobord de Čech du recouvrement  $\mathcal{U}$  est un 1-cocycle  $\{g_{i,j}\}_{(i,j) \in I^2}$  tel qu'il existe des sections  $s_i \in \Gamma(U_i, \underline{\mathbb{C}}_Z^*)$  pour tout  $i \in I$ , telles que  $g_{i,j} = \frac{s_i}{s_j}$  pour tout  $(i, j) \in I^2$ .

On pose alors  $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}^*) = \{1 - \text{cocycles}\} / \{1 - \text{cobords}\}$ .

D'après le théorème du recouvrement acyclique de Leray, puisqu'on a choisi les ouverts  $U_i$  simplement connexes, on a l'isomorphisme naturel :

$$H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}^*) \simeq H^1(Z, \mathbb{C}^*)$$

Soit maintenant  $\mathcal{L}$  un système local de rang 1 sur  $Z$ . On va associer à  $\mathcal{L}$  une classe  $c(\mathcal{L}) \in H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}^*)$ .

Comme les ouverts  $U_i$  sont simplement connexes,  $\mathcal{L}|_{U_i} \simeq \underline{\mathbb{C}}_{U_i}$  et on peut choisir pour tout  $i \in I$  une section  $\alpha_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{L})$ , telle que  $\alpha_i \neq 0$ .

Supposons un tel choix  $\{\alpha_i\}_{i \in I}$  fait. On construit alors un 1-cocycle de Čech de  $\mathcal{U}$  de la manière suivante : pour tout  $(i, j) \in I^2$ , on dispose des deux sections  $\alpha_i|_{U_{i,j}}$  et  $\alpha_j|_{U_{i,j}}$  de  $\Gamma(U_{i,j}, \mathbb{C}^*)$ . Comme  $\mathcal{L}$  est un système local de rang 1, il existe alors un nombre  $\frac{\alpha_i}{\alpha_j} \in \mathbb{C}^*$  bien défini tel que  $\alpha_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \cdot \alpha_j$ .

On pose alors  $g_{i,j} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \in \Gamma(U_{i,j}, \mathbb{C}^*)$ . Les  $\{g_{i,j}\}_{(i,j) \in I^2}$  ainsi définis vérifient la condition de cocycle (\*).

On a donc un élément de  $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}^*)$ .

Montrons que cet élément ne dépend pas du choix des sections  $\alpha_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{L})$ . Supposons que l'on ait fait un autre choix  $\beta_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{L})$  qui conduit au 1-cocycle  $\{h_{i,j}\}_{(i,j) \in I^2}$ . Comme  $\mathcal{L}$  est un système local de rang 1, on a des nombres bien définis  $\frac{\alpha_i}{\beta_i} \in \Gamma(U_i, \mathbb{C}^*)$  tels que  $\alpha_i = \frac{\alpha_i}{\beta_i} \cdot \beta_i$ . Ces nombres définissent

alors un 1-cobord de  $\mathcal{U}$  et on vérifie que les deux 1-cocycles  $\{g_{i,j}\}$  et  $\{h_{i,j}\}$  diffèrent du 1-cobord  $\{\frac{\alpha_i}{\beta_i}\}$ .

Ceci est évident puisque

$$g_{i,j} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} = \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right) \cdot \left(\frac{\beta_i}{\beta_j}\right) \cdot \left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)^{-1} = \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right) \cdot (h_{i,j}) \cdot \left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)^{-1}.$$

On a donc défini comment à tout système local  $\mathcal{L}$  de rang 1, on associe une classe  $c(\mathcal{L}) \in H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}^*)$ .

Montrons que  $c(\mathcal{L})$  ne dépend que de la classe d'isomorphisme de  $\mathcal{L}$ .

Soient  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{M}$ , deux systèmes locaux de rang 1 isomorphes par  $\phi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ . Choisissons, pour tout  $i \in I$  une section non nulle  $\alpha_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{L})$ , les  $\{\alpha_i\}_{i \in I}$  définissant le 1-cocycle de  $\mathcal{U} : \{g_{i,j}\}_{(i,j) \in I^2}$ . Posons  $\beta_i = \phi_{U_i}(\alpha_i) \in \Gamma(U_i, \mathcal{M})$ . Comme  $\phi$  est un isomorphisme,  $\beta_i$  est une section non nulle de  $\mathcal{M}$  sur  $U_i$  et définit un 1-cocycle  $\{h_{i,j}\}_{(i,j) \in I^2}$ . Comme  $\phi$  est un isomorphisme de faisceaux, c'est-à-dire compatible aux restrictions  $U_{i,j} \subset U_i$  et  $U_{i,j} \subset U_j$ , on a donc  $\alpha_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \cdot \alpha_j \iff \beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \cdot \beta_j$  et donc on a l'égalité  $\{g_{i,j}\}_{(i,j) \in I^2} = \{h_{i,j}\}_{(i,j) \in I^2}$ .

Donc si  $\mathcal{L} \simeq \mathcal{M}$ , alors  $c(\mathcal{L}) = c(\mathcal{M})$  dans  $H^1(Z, \mathbb{C}^*)$ .

## Lien avec la représentation de la monodromie

On rappelle que pour se donner à isomorphisme près un système local de rang 1, il suffit de se donner une représentation complexe de dimension 1 de  $\pi_1(Z, z_0)$ , c'est-à-dire un morphisme de groupes  $\rho : \pi_1(Z, z_0) \rightarrow \mathbb{C}^*$  (voir par exemple [MN]).

Si on se donne le système local  $\mathcal{L}$ , si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow Z$  est un lacet de base  $z_0$ ,  $\gamma^*\mathcal{L}$  est un faisceau constant sur  $[0, 1]$ ; par l'isomorphisme naturel entre les sections globales  $\Gamma([0, 1], \gamma^*\mathcal{L})$  et les fibres  $(\gamma^*\mathcal{L})_0$  et  $(\gamma^*\mathcal{L})_1$  (isomorphisme fourni par les restrictions  $(\gamma^*\mathcal{L})_0 \xleftarrow{\simeq} \Gamma([0, 1], \gamma^*\mathcal{L}) \xrightarrow{\simeq} (\gamma^*\mathcal{L})_1$ ), on en déduit un isomorphisme  $\gamma^*\mathcal{L}_0 \xrightarrow{\sim} \gamma^*\mathcal{L}_1$  qui ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet  $\gamma$ .

Etant donné un système local  $\mathcal{L}$ , on va décrire le rapport entre

$$c(\mathcal{L}) \in H^1(Z, \mathbb{C}^*) \text{ et } \rho_{\mathcal{L}} : \pi_1(Z, z_0) \rightarrow \mathbb{C}^*.$$

Si on part d'un système local  $\mathcal{L}$  donné par  $c(\mathcal{L}) \in H^1(Z, \mathbb{C}^*)$ , pour trouver la représentation associée  $\rho_{\mathcal{L}}$ , on procède comme suit : étant donné un lacet  $\gamma$  de  $Z$ , de base  $z_0 \in Z$ , pour connaître  $\rho_{\mathcal{L}}(\gamma)$ , il suffit de suivre une base de  $\mathcal{L}_{z_0}$  le long du lacet  $\gamma$ .

Il existe une subdivision  $\{t_1 = 0, t_2, \dots, t_{s-1}, t_s = 1\}$  de  $[0, 1]$  et une application  $\alpha : \{1, \dots, s\} \rightarrow I$  telle que :

$\forall j \in \{1, \dots, s\}$  on a  $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subset U_{\alpha(j)}$ , avec la convention  $s + 1 \equiv 1$ .

Alors, une section non nulle  $s_{\alpha(1)} \in \Gamma(U_{\alpha(1)}, \mathcal{L})$  fournit une base de  $\mathcal{L}_{z_0}$  et si on suit cette base le long du lacet  $\gamma$  on trouve que :

$$\rho_{\mathcal{L}}(\gamma)(s_{\alpha(1)}) = \prod_{j=1..s} g_{\alpha(j), \alpha(j+1)}.$$

Dans l'autre sens, on peut passer par la cohomologie singulière.

On rappelle qu'une fois construit le complexe des chaînes singulières (dont la composante  $C_i(Z)$  de degré  $i \in \mathbb{N}$  est le  $\mathbb{Z}$ -module libre engendré par les applications continues  $\Delta^i \rightarrow Z$ , où  $\Delta^i$  désigne le simplexe de dimension  $i$  et  $H_i(Z, \mathbb{Z}) = H_i(C_i(Z))$ ), pour définir le complexe des cochaînes singulières à coefficients dans  $G$  groupe abélien, on regarde le complexe  $C^i(Z, G) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_i(Z), G)$  et on définit  $H^i(Z, G) := H^i(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(Z), G))$ . Par des résultats classiques d'algèbre homologique, on en déduit une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{i-1}(Z, \mathbb{Z}), G) \rightarrow H^i(Z, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_i(Z, \mathbb{Z}), G) \rightarrow 0$$

Si le groupe  $G$  est divisible, c'est-à-dire si  $G$  est un  $\mathbb{Z}$ -module injectif, on en déduit un isomorphisme naturel :  $H^i(Z, G) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_i(Z, \mathbb{Z}), G)$ .

En particulier, dans notre situation, on a

$$H^i(Z, \mathbb{C}^*) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_i(Z, \mathbb{Z}), \mathbb{C}^*)$$

Soit  $\mathcal{L}$  un système local donné par la représentation  $\rho_{\mathcal{L}} : \pi_1(Z, z_0) \rightarrow \mathbb{C}^*$ .

On rappelle le morphisme d'Hurewicz  $\phi : \pi_1(Z, z_0) \rightarrow H_1(Z, \mathbb{Z})$ , qui envoie le lacet  $\gamma : [0, 1] \rightarrow Z$  sur la classe de  $\gamma$  dans  $H_1(Z, \mathbb{Z})$  grâce à l'identification évidente  $\Delta^1 \simeq [0, 1]$ .

$\phi$  est un morphisme de groupes et si  $Z$  est connexe par arcs, alors  $\phi$  est surjectif et  $H_1(Z, \mathbb{Z})$  est l'abélianisé de  $\pi_1(Z, z_0)$ .

Donc, si on part de  $\rho_{\mathcal{L}} : \pi_1(Z, z_0) \rightarrow \mathbb{C}^*$ , on en déduit par le morphisme d'Hurewicz, un morphisme  $\tilde{\rho}_{\mathcal{L}} : H_1(Z, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^*$  (d'ailleurs, puisque  $\mathbb{C}^*$  est abélien, il revient au même de se donner  $\rho_{\mathcal{L}}$  ou  $\tilde{\rho}_{\mathcal{L}}$ ).

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Z, z_0) & & \mathbb{C}^* \\ \downarrow \text{Hurewicz} & \searrow \rho_{\mathcal{L}} & \nearrow \tilde{\rho}_{\mathcal{L}} \\ H_1(Z, \mathbb{Z}) & & \end{array}$$

Par l'identification  $H^i(Z, \mathbb{C}^*) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_i(Z, \mathbb{Z}), \mathbb{C}^*)$ ,  $\tilde{\rho}_{\mathcal{L}}$  fournit une classe  $c(\mathcal{L}) \in H^1(Z, \mathbb{C}^*)$  et, modulo l'identification entre cohomologie singulière et

cohomologie des faisceaux, on retrouve notre première description en termes de cohomologie de Čech du système local  $\mathcal{L}$ .

Pour terminer cette partie, signalons que si l'on part d'un système  $\mathcal{L}$  de rang  $d$  sur  $Z$ , on peut construire un système local de rang 1 sur  $Z$  en regardant sa puissance extérieure maximale  $\bigwedge^d \mathcal{L}$ .

Si  $\mathcal{L}$  est donné par sa représentation de monodromie  $\rho_{\mathcal{L}} : \pi_1(Z) \longrightarrow GL(d, \mathbb{C})$ , alors la représentation de monodromie associée à  $\bigwedge^d \mathcal{L}$  est donnée par la composition

$$\rho_{\bigwedge^d \mathcal{L}} = \det \circ \rho_{\mathcal{L}} : \pi_1(Z) \longrightarrow GL(d, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

Donc, si on part de  $\mathcal{L}$  de rang  $d$  et que l'on regarde la classe  $c(\bigwedge^d \mathcal{L}) \in H^1(Z, \mathbb{C}^*)$ , cette classe consiste simplement à suivre le déterminant des monodromies de  $\mathcal{L}$  le long des éléments de  $H_1(Z, \mathbb{Z})$  pour obtenir le morphisme  $c(\bigwedge^d \mathcal{L}) : H_1(Z, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$  (voir par exemple [So], 1.5.a p. 414).

**REMARQUE 1.5.1** *Dans la suite du mémoire, pour utiliser des notations additives, on travaillera avec le  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  plutôt qu'avec  $\mathbb{C}^*$  : ces deux groupes sont isomorphes par l'exponentielle :  $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $t \mapsto e^{2i\pi t}$*



## 1.6 Un résultat de dualité

On montre quelques résultats de dualité qui seront utilisés par la suite.

On note  $G$  le groupe abélien  $G = \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ .

Si  $Z$  désigne un espace topologique et  $M$  un groupe abélien, alors  $\underline{M}_Z$  désigne le faisceau constant de fibre  $M$  sur  $Z$ .

**THÉORÈME 1.6.1** *Soient  $Y$  une variété topologique, orientable, de dimension réelle  $n$  et  $X$  une sous-variété topologique, orientable, fermée dans  $Y$  de dimension réelle  $m$ .*

*On note  $d = n - m$  la codimension de  $X$  dans  $Y$ .*

*Notons aussi  $i$  l'inclusion fermée  $i : X \hookrightarrow Y$ .*

*On a un isomorphisme naturel de faisceaux sur  $Y$  :*

$$i_* \underline{G}_X \simeq \mathbf{R}\Gamma_X \underline{G}_Y[d]$$

**REMARQUE 1.6.2** *Dans la suite du texte, cet isomorphisme faisceutique sera désigné sous le nom d' "isomorphisme de Thom".*

*Preuve.*

Rappelons quelques résultats de la dualité de Verdier (voir par exemple [KS], §3.3).

Soit  $f : X \longrightarrow Y$  une application continue entre espaces localement compacts.

On dit que  $f$  est une *submersion topologique avec fibres de dimension  $\ell$*  si pour tout point  $x$  de  $X$  il existe un voisinage  $V$  de  $x$  tel que  $U = f(V)$  est ouvert dans  $Y$  et il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{h} & U \times \mathbb{R}^\ell \\ & \searrow f|_V & \swarrow pr \\ & & U \end{array}$$

où  $h$  est un homéomorphisme et  $pr$  désigne la première projection.

Si  $f : X \longrightarrow Y$  est une submersion topologique avec fibres de dimension  $\ell$  alors le faisceau  $f^! \underline{\mathbb{Z}}_Y$  est concentré en degré  $\ell$  et localement isomorphe au faisceau constant de fibre  $\mathbb{Z}$ .

On note  $or_{X|Y} = f^! \underline{\mathbb{Z}}_Y[-\ell]$  : c'est le faisceau d'orientation relative de  $X$  sur  $Y$  dont la restriction à chaque fibre donne une orientation des fibres de  $f$ .

Si  $Y$  est réduit à un point, alors on note le faisceau précédent  $or_X$ , c'est le faisceau d'orientation classique de  $X$ . Si  $X$  est une variété topologique de dimension  $m$ , sa fibre  $or_{X,x}$  est canoniquement isomorphe à  $H_{\{x\}}^m(X, \mathbb{Z})$ .

Si de plus  $X$  est orientable, choisir une orientation de  $X$ , c'est fixer un isomorphisme avec le faisceau constant :  $or_X \simeq \underline{\mathbb{Z}}_X$ .

Si  $f : X \rightarrow Y$  est une submersion topologique avec fibres de dimension  $\ell$  alors on a un isomorphisme naturel de foncteurs :

$$f^!(.) = f^{-1}(.) \otimes_{or_{X|Y}} [\ell]$$

D'autre part, on a un isomorphisme canonique  $or_{X|Y} \otimes_{or_{X|Y}} = \underline{\mathbb{Z}}_Y$ .

Si  $i : X \hookrightarrow Y$  est une immersion fermée alors on a l'isomorphisme de foncteurs :

$$i^!(.) = i^{-1} \mathbf{R}\Gamma_X(.)$$

Dans notre situation, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ p_X \searrow & & \swarrow p_Y \\ & \{*\} & \end{array}$$

où  $X$  est une variété de dimension  $m$ ,  $Y$  une variété de dimension  $n$  et  $i$  une immersion fermée.

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } (p_Y \circ i)^!(.) &= p_X^!(.) = p_X^{-1}(.) \otimes_{or_X} [m] \\ &= i^!(p_Y^!(.)) = i^!(p_Y^{-1}(.) \otimes_{or_Y} [n]) \end{aligned}$$

En utilisant le morphisme de foncteurs ([KS], proposition 3.1.11)

$$i^!(.) \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}_X}^{\mathbf{L}} i^{-1}(.) \longrightarrow i^!(. \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}_Y}^{\mathbf{L}} .)$$

on montre alors l'isomorphisme de foncteurs ([KS] proposition 3.3.4 (iii))

$$i^!(p_Y^{-1}(.)) = p_X^{-1}(.) \otimes_{or_X} \otimes i^{-1} or_Y [m - n]$$

En appliquant ce résultat à  $\underline{G}_{\{*\}}$ , on obtient alors :

$$i^! \underline{G}_Y \simeq \underline{G}_X \otimes_{or_X} \otimes i^{-1} or_Y [m - n]$$

c'est-à-dire :

$$i^{-1}\mathbf{R}\Gamma_X \underline{G}_Y \simeq \underline{G}_X \otimes or_X \otimes i^{-1}or_Y[-d]$$

ce qui donne, en tenant compte des orientations de  $X$  et de  $Y$ , l'isomorphisme naturel cherché :

$$i_*\underline{G}_X \simeq \mathbf{R}\Gamma_X \underline{G}_Y[d]$$

□

**COROLLAIRE 1.6.3** *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on a un isomorphisme pour tout  $j \in \mathbb{N}$  :*

$$H^j(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \simeq H_X^{j+d}(Y, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$$

*Preuve.*

Il suffit d'appliquer le foncteur  $\mathbf{R}\Gamma(Y, \cdot)$  à l'isomorphisme de faisceaux précédent et de prendre la cohomologie. □

**REMARQUE 1.6.4** *En topologie, l'isomorphisme précédent s'appelle "isomorphisme de Thom" ou "dualité d'Alexander"*

On a vu que l'isomorphisme  $i_*\underline{G}_X \simeq \mathbf{R}\Gamma_X \underline{G}_Y[d]$  du théorème 1.6.1 est donné par le choix des orientations de  $X$  et de  $Y$ , c'est-à-dire par une orientation relative de  $X$  dans  $Y$ .

On peut interpréter cette orientation relative de la façon suivante.

Si  $x$  est un point de  $X$ , alors le choix d'une orientation de  $X$  (c'est-à-dire d'un isomorphisme de  $or_X$  vers  $\underline{\mathbb{Z}}_X$ ) donne une identification :

$$\mathbf{R}^m\Gamma_{\{x\}}(X, G) \simeq G$$

De même, le choix d'une orientation de  $Y$  donne une identification :

$$\mathbf{R}^n\Gamma_{\{x\}}(Y, G) \simeq G$$

Une fois les orientations de  $X$  et de  $Y$  fixées, on a l'isomorphisme :

$$i_*\underline{G}_X \simeq \mathbf{R}\Gamma_X \underline{G}_Y[d]$$

On a :  $\mathbf{R}\Gamma_{\{x\}}\mathbf{R}\Gamma_X\underline{G}_Y[d] = \mathbf{R}\Gamma_{\{x\}}\underline{G}_Y[d]$

et  $\mathbf{R}\Gamma_{\{x\}}\mathbf{R}\Gamma_X\underline{G}_Y[d] \simeq \mathbf{R}\Gamma_{\{x\}}i_*\underline{G}_X = i_*\mathbf{R}\Gamma_{\{x\}}\underline{G}_X$ .

On a donc un isomorphisme :  $i_*\mathbf{R}\Gamma_{\{x\}}\underline{G}_X \simeq \mathbf{R}\Gamma_{\{x\}}\underline{G}_Y[d]$ .

En appliquant le foncteur  $\mathbf{R}\Gamma(Y, \cdot)$ , on a alors un isomorphisme :

$$\mathbf{R}\Gamma_{\{x\}}(X, G) \simeq \mathbf{R}\Gamma_{\{x\}}(Y, G)[d]$$

c'est-à-dire un isomorphisme :

$$\mathbf{R}^m\Gamma_{\{x\}}(X, G) \simeq \mathbf{R}^n\Gamma_{\{x\}}(Y, G)$$

isomorphisme induit par l'isomorphisme de faisceaux du théorème 1.6.1.

LEMME 1.6.5 *L'isomorphisme  $\mathbf{R}^m\Gamma_{\{x\}}(X, G) \simeq \mathbf{R}^n\Gamma_{\{x\}}(Y, G)$  précédent est l'isomorphisme qui fait commuter le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^m\Gamma_{\{x\}}(X, G) & \xrightarrow{\text{orientation de } X} & G \\ \simeq \downarrow & & \downarrow Id \\ \mathbf{R}^n\Gamma_{\{x\}}(Y, G) & \xrightarrow{\text{orientation de } Y} & G \end{array}$$

On peut avoir une vision plus géométrique (en homologie singulière par exemple) de l'isomorphisme précédent, via l'isomorphisme de Thom pour les fibrés vectoriels (voir par exemple [MS], §9 et 10 ou bien [Bre], §VI.11).

Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré vectoriel réel de rang  $d$ .

On appelle *orientation du fibré  $E$*  la donnée pour toute fibre  $F (\simeq \mathbb{R}^d)$  de  $E$  d'une orientation de l'espace vectoriel  $F$ , ces orientations devant vérifier la condition de continuité décrite ci-après.

Soit  $U \subset B$  un ouvert trivialisant de  $E$  ; on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{h} & \pi^{-1}(U) \\ & \searrow pr_1 & \swarrow \pi \\ & & U \end{array}$$

Pour tout  $b \in U$ , on note  $F_b = \pi^{-1}(b) \simeq \mathbb{R}^d$  la fibre de  $E$  en  $b$ , et  $h_b$  l'isomorphisme linéaire  $h_b = h(b, \cdot) : \{b\} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow F_b$ .

Soient  $b$  et  $b'$  deux points de  $U$ .

On demande que l'isomorphisme linéaire  $h_b \circ h_{b'}^{-1} : F_{b'} \longrightarrow F_b$  envoie l'orientation de  $F_{b'}$  sur celle de  $F_b$ .

En termes de cohomologie, si on note  $F_b^\circ = F_b \setminus \{0\}$ , se donner une orientation de l'espace vectoriel  $F_b$ , c'est se donner un générateur privilégié  $u_b$  de  $H^d(F_b, F_b^\circ; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ .

La condition de continuité des orientations des fibres de  $E$  s'écrit alors comme la donnée de  $u \in H^d(\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(U)^\circ; \mathbb{Z})$  tel que pour tout point  $b$  de  $U$ , on ait  $u|_{F_b} = u_b$  dans  $H^d(F_b, F_b^\circ; \mathbb{Z})$  (on a noté  $\pi^{-1}(U)^\circ$ , pour  $\pi^{-1}(U) \setminus U$ ,  $\pi^{-1}(U)$  privé de la section nulle).

On a alors le résultat suivant (théorème 9.1 et corollaire 10.7 de [MS]) :

**THÉORÈME 1.6.6** *Soit  $E \xrightarrow{\pi} B$  un fibré vectoriel réel orienté de rang  $d$ . Il existe une unique classe  $u \in H^d(E, E^\circ; \mathbb{Z})$  tel que pour toute fibre  $F$  de  $E$ ,  $u|_F$  donne l'orientation de  $F$ .*

*De plus, le cup-produit par  $u$  induit des isomorphismes en cohomologie pour tout entier  $j$  :*

$$H^j(B; \mathbb{Z}) = H^j(E; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot \cup u} H^{j+d}(E, E^\circ; \mathbb{Z})$$

*et le cap-produit par  $u$  induit des isomorphismes en homologie pour tout entier  $j$  :*

$$H_{j+d}(E, E^\circ; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot \cap u} H_j(E; \mathbb{Z}) = H_j(B; \mathbb{Z})$$

*(on a noté  $E^\circ$  pour  $E \setminus B$ ,  $E$  privé de la section nulle)*

Si la base  $B$  est une variété, si l'espace total  $E$  et  $B$  sont orientables au sens des variétés, alors le fibré  $E$  est orientable : l'orientation des fibres  $F$  de  $E$  est alors uniquement déterminée, c'est l'orientation telle que l'orientation de la base  $B$  suivie de celle d'une fibre  $F$  redonne l'orientation de l'espace total  $E$ .

Pour retrouver l'isomorphisme de 1.6.3 à partir du théorème précédent, il suffit de prendre un voisinage tubulaire  $\mathcal{T}$  de  $X$  dans  $Y$  et d'utiliser l'isomorphisme entre  $\mathcal{T}$  et le fibré normal  $T_X Y$ .

Le théorème précédent fournit un isomorphisme pour tout entier  $j$  :

$$H_{j+d}(\mathcal{T}, \mathcal{T} \setminus X; \mathbb{Z}) \simeq H_j(X; \mathbb{Z})$$

Par excision, on a  $H_{j+d}(\mathcal{T}, \mathcal{T} \setminus X; \mathbb{Z}) = H_{j+d}(Y, Y \setminus X; \mathbb{Z})$ .

Enfin, puisque  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  est un  $\mathbb{Z}$ -module injectif, on a pour tout entier  $j$  :

$$H_X^{j+d}(Y, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{j+d}(Y, Y \setminus X; \mathbb{Z}), \mathbb{C}/\mathbb{Z})$$

$$H^j(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_j(X; \mathbb{Z}), \mathbb{C}/\mathbb{Z})$$

ce qui redonne l'isomorphisme du corollaire 1.6.3.

## Quelques résultats techniques autour de l'isomorphisme de Thom

### • Cohomologie locale et isomorphisme de Thom

Considérons la situation suivante.

Soient  $Z$ ,  $X$  et  $\tilde{X}$  trois espaces topologiques,  $Z$  étant fermé dans  $X$  et  $\tilde{X}$  étant fermé dans  $\tilde{X}$ .

On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & X \setminus Z \\ \parallel & & \downarrow k & & \downarrow \tilde{k} \\ Z & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{X} & \xleftarrow{\tilde{j}} & \tilde{X} \setminus Z \end{array}$$

LEMME 1.6.7 Soit  $\mathcal{F} \in \text{Ob}(D^b(X))$ . Le foncteur  $k_*(.)$  envoie le triangle de  $D^b(X)$  :

$$\mathbf{R}\Gamma_Z \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{X \setminus Z} \mathcal{F} \xrightarrow{+1}$$

sur le triangle de  $D^b(\tilde{X})$  :

$$\mathbf{R}\Gamma_Z k_* \mathcal{F} \longrightarrow k_* \mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\tilde{X} \setminus Z} k_* \mathcal{F} \xrightarrow{+1}$$

*Preuve.*

On a les égalités :

$$k_! \mathbf{R}j_* j^{-1} \mathcal{F} = \mathbf{R}\tilde{j}_* \tilde{k}_! \tilde{j}^{-1} \mathcal{F} = \mathbf{R}\tilde{j}_* \tilde{j}^{-1} k_! \mathcal{F}$$

(la dernière égalité est un changement de base propre)

On peut donc considérer le diagramme de morphismes d'adjonction :

$$\begin{array}{ccc} & & k_! \mathbf{R}j_* j^{-1} \mathcal{F} \\ & \nearrow & \parallel \\ k_! \mathcal{F} & & \mathbf{R}\tilde{j}_* \tilde{j}^{-1} k_! \mathcal{F} \end{array}$$

Ce diagramme est commutatif car il est construit sur un changement de base propre, lui-même provenant d'un morphisme d'adjonction.

D'autre part, on a les égalités :

$$k^{-1} \tilde{i}_! \tilde{i}^! k_! \mathcal{F} = k^{-1} \tilde{i}_! i^! \mathcal{F} = i_! i^! \mathcal{F}$$

(on a utilisé les égalités de [KS] proposition 3.1.9)

On peut donc considérer le diagramme de morphismes d'adjonction :

$$\begin{array}{ccc} k^{-1} \tilde{i}_! \tilde{i}^! k_! \mathcal{F} & \longrightarrow & k^{-1} k_! \mathcal{F} \\ \parallel & & \parallel \\ i_! i^! \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \end{array}$$

On vérifie que ce diagramme est lui aussi commutatif.

Le triangle de  $D^b(X)$  peut se réécrire :

$$i_! i^! \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{R}j_* j^{-1} \mathcal{F} \xrightarrow{+1}$$

En appliquant le foncteur  $k_*(.)$  à ce triangle et en utilisant ce qui précède, on obtient le triangle :

$$\tilde{i}_! \tilde{i}^! k_* \mathcal{F} \longrightarrow k_* \mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{R}\tilde{j}_* \tilde{j}^{-1} k_* \mathcal{F} \xrightarrow{+1}$$

c'est-à-dire le triangle de  $D^b(\tilde{X})$ . □

LEMME 1.6.8 *Supposons de plus que  $X$  et  $\tilde{X}$  soient des variétés topologiques orientables. Soit  $m$  la codimension de  $X$  dans  $\tilde{X}$ .*

$G$  désigne le  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ .

Le triangle de  $D^b(X)$  :

$$\mathbf{R}\Gamma_{\mathbb{Z}} \underline{G}_X \longrightarrow \underline{G}_X \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{X \setminus \mathbb{Z}} \underline{G}_X \xrightarrow{+1}$$

est envoyé par le foncteur  $k_*(.)[-m]$  composé avec l'isomorphisme de Thom sur le triangle de  $D^b(\tilde{X})$  :

$$\mathbf{R}\Gamma_Z \underline{G}_{\tilde{X}} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_X \underline{G}_{\tilde{X}} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{X \setminus Z} \underline{G}_{\tilde{X}} \xrightarrow{+1}$$

*Preuve.*

Il suffit d'appliquer le lemme précédent au faisceau  $\underline{G}_X$  et d'utiliser ensuite l'isomorphisme de Thom :

$$k_* \underline{G}_X \simeq \mathbf{R}\Gamma_X \underline{G}_{\tilde{X}}[m]$$

□

On considère la même situation que précédemment ( $X$  et  $\tilde{X}$  ne sont plus forcément des variétés) et on considère de plus une variété topologique  $T$  homéomorphe à  $\mathbb{R}^r$ .

On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} Z \times T & \xrightarrow{i'} & X \times T & \xrightarrow{k'} & \tilde{X} \times T & \xleftarrow{\tilde{j}'} & (\tilde{X} \setminus Z) \times T \\ \downarrow q & & \downarrow q & & \downarrow q & & \downarrow q \\ Z & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{k} & \tilde{X} & \xleftarrow{\tilde{j}} & \tilde{X} \setminus Z \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales sont les inclusions évidentes et les flèches verticales les projections.

On considère les deux triangles suivants.

On a le triangle de  $D^b(\tilde{X})$  :

$$\mathbf{R}\Gamma_Z \underline{G}_{\tilde{X}} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_X \underline{G}_{\tilde{X}} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{X \setminus Z} \underline{G}_{\tilde{X}} \xrightarrow{+1}$$

On a le triangle de  $D^b(\tilde{X} \times T)$  :

$$\mathbf{R}\Gamma_{Z \times T} \underline{G}_{\tilde{X} \times T} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{X \times T} \underline{G}_{\tilde{X} \times T} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{(X \setminus Z) \times T} \underline{G}_{\tilde{X} \times T} \xrightarrow{+1}$$

LEMME 1.6.9 *Le foncteur  $q^{-1}(.)$  envoie le triangle de  $D^b(\tilde{X})$  sur celui de  $D^b(\tilde{X} \times T)$ .*

*Preuve.*

Le premier triangle se réécrit :

$$\mathbf{R}k_! \mathbf{R}i_! i^! k^! \underline{G}_{\tilde{X}} \longrightarrow \mathbf{R}k_! k^! \underline{G}_{\tilde{X}} \longrightarrow \mathbf{R}j_* j^{\sim -1} \mathbf{R}k_! k^! \underline{G}_{\tilde{X}} \xrightarrow{+1}$$



On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} q^{-1}\mathbf{R}k_! \mathbf{R}i_! i^! k^! \underline{G}_{\tilde{X}} &= \mathbf{R}k'_! \mathbf{R}i'_! q^{-1} i^! k^! \underline{G}_{\tilde{X}} \text{ (changement de base propre)} \\ &= \mathbf{R}k'_! \mathbf{R}i'_! i'^! k'^! q^{-1} \underline{G}_{\tilde{X}} \end{aligned}$$

(on utilise le morphisme de [KS] prop. 3.1.9 (iii) qui est un isomorphisme dans notre situation)

$$\begin{aligned} q^{-1}\mathbf{R}k_! k^! \underline{G}_{\tilde{X}} &= \mathbf{R}k'_! k'^! q^{-1} \underline{G}_{\tilde{X}} \\ \text{(changement de base propre et [KS] prop. 3.1.9 (iii))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^{-1}\mathbf{R}\tilde{j}_* \tilde{j}^{-1} \mathbf{R}k_! k^! \underline{G}_{\tilde{X}} &= \mathbf{R}\tilde{j}'_* q^{-1} \tilde{j}'^{-1} \mathbf{R}k_! k^! \underline{G}_{\tilde{X}} = \mathbf{R}\tilde{j}'_* \tilde{j}'^{-1} q^{-1} \mathbf{R}k_! k^! \underline{G}_{\tilde{X}} \\ &= \mathbf{R}\tilde{j}'_* \tilde{j}'^{-1} \mathbf{R}k'_! k'^! q^{-1} \underline{G}_{\tilde{X}} \end{aligned}$$

Où la première égalité est donnée par le morphisme naturel pour tout  $\mathcal{F} \in \text{Ob}(D^b(\tilde{X}))$  :

$$q^{-1}\mathbf{R}\tilde{j}_* \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}\tilde{j}'_* \tilde{j}'^{-1} q^{-1} \mathbf{R}\tilde{j}_* \mathcal{F} = \mathbf{R}\tilde{j}'_* q^{-1} \tilde{j}'^{-1} \mathbf{R}\tilde{j}_* \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}\tilde{j}'_* q^{-1} \mathcal{F}$$

qui est un isomorphisme dans notre situation.

On peut alors considérer le diagramme de morphismes d'adjonction :

$$\begin{array}{ccccc} q^{-1}\mathbf{R}k_! \mathbf{R}i_! i^! k^! \underline{G}_{\tilde{X}} & \longrightarrow & q^{-1}\mathbf{R}k_! k^! \underline{G}_{\tilde{X}} & \longrightarrow & q^{-1}\mathbf{R}\tilde{j}_* \tilde{j}^{-1} \mathbf{R}k_! k^! \underline{G}_{\tilde{X}} \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \mathbf{R}k'_! \mathbf{R}i'_! i'^! k'^! q^{-1} \underline{G}_{\tilde{X}} & \longrightarrow & \mathbf{R}k'_! k'^! q^{-1} \underline{G}_{\tilde{X}} & \longrightarrow & \mathbf{R}\tilde{j}'_* \tilde{j}'^{-1} \mathbf{R}k'_! k'^! q^{-1} \underline{G}_{\tilde{X}} \end{array}$$

On vérifie que le diagramme précédent est commutatif.

La première ligne est  $q^{-1}(\cdot)$  du triangle de  $D^b(\tilde{X})$  et la seconde est le triangle de  $D^b(\tilde{X} \times T)$ , ce qui achève donc la démonstration du lemme.  $\square$

Supposons de plus que  $T$  soit un fermé de  $\tilde{T}$ , variété topologique homéomorphe à  $\mathbb{R}^{\tilde{r}}$ .

On note  $t : T \hookrightarrow \tilde{T}$  l'inclusion fermée et on note  $d$  la codimension de  $T$  dans  $\tilde{T}$ .

Notons  $\tilde{t}$  l'inclusion évidente  $\tilde{t} : \tilde{X} \times T \hookrightarrow \tilde{X} \times \tilde{T}$ .

On considère les deux triangles suivants.

On a le triangle de  $D^b(\tilde{X})$  :

$$\mathbf{R}\Gamma_Z \underline{G}_{\tilde{X}} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_X \underline{G}_{\tilde{X}} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{X \setminus Z} \underline{G}_{\tilde{X}} \xrightarrow{+1}$$

On a le triangle de  $D^b(\tilde{X} \times \tilde{T})$  :

$$\mathbf{R}\Gamma_{Z \times T} \underline{G}_{\tilde{X} \times \tilde{T}} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{X \times T} \underline{G}_{\tilde{X} \times \tilde{T}} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{(X \setminus Z) \times T} \underline{G}_{\tilde{X} \times \tilde{T}} \xrightarrow{+1}$$

LEMME 1.6.10 *Supposons que  $\tilde{X}$  soit une variété topologique orientable. Le foncteur  $\mathbf{R}\tilde{t}_* q^{-1}(\cdot)[-d]$ , composé avec un isomorphisme de Thom envoie le triangle de  $D^b(\tilde{X})$  sur celui de  $D^b(\tilde{X} \times \tilde{T})$ .*

*Preuve.*

D'après le lemme 1.6.9, le foncteur  $q^{-1}(\cdot)$  appliqué au triangle de  $D^b(\tilde{X})$  donne le triangle de  $D^b(\tilde{X} \times T)$  :

$$\mathbf{R}\Gamma_{Z \times T} \underline{G}_{\tilde{X} \times T} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{X \times T} \underline{G}_{\tilde{X} \times T} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{(X \setminus Z) \times T} \underline{G}_{\tilde{X} \times T} \xrightarrow{+1}$$

D'après le lemme 1.6.7, on obtient que le foncteur  $\tilde{t}_*(\cdot)$  envoie le triangle précédent sur le triangle :

$$\mathbf{R}\Gamma_{Z \times T} \tilde{t}_* \underline{G}_{\tilde{X} \times T} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{X \times T} \tilde{t}_* \underline{G}_{\tilde{X} \times T} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{(X \setminus Z) \times T} \tilde{t}_* \underline{G}_{\tilde{X} \times T} \xrightarrow{+1}$$

Il suffit alors d'utiliser l'isomorphisme de Thom :  $\tilde{t}_* \underline{G}_{\tilde{X} \times T} \simeq \mathbf{R}\Gamma_{\tilde{X} \times T} \underline{G}_{\tilde{X} \times \tilde{T}}[d]$  pour terminer la preuve du lemme.  $\square$

LEMME 1.6.11 *Dans la situation du lemme 1.6.10, on a des isomorphismes pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$  :*

$$H_X^\ell(\tilde{X}, G) \simeq H_{X \times T}^{\ell+d}(\tilde{X} \times \tilde{T}, G)$$

*Preuve.*

Dans le lemme 1.6.10, on a montré l'isomorphisme de faisceaux :

$$\mathbf{R}\tilde{t}_* q^{-1} \mathbf{R}\Gamma_X \underline{G}_{\tilde{X}} \simeq \mathbf{R}\Gamma_{X \times T} \underline{G}_{\tilde{X} \times \tilde{T}}[d]$$

En appliquant le foncteur  $\mathbf{R}\Gamma(\tilde{X} \times \tilde{T}, \cdot)$  à l'isomorphisme précédent et en utilisant la contractibilité de  $T$ , on obtient l'isomorphisme du lemme.  $\square$

#### • Composition d'isomorphismes de Thom

Revenons à notre situation initiale.

On a les inclusions fermées :

$$Z \xrightarrow{i} X \xrightarrow{k} \tilde{X}$$

Supposons que  $Z$ ,  $X$  et  $\tilde{X}$  soient tous des variétés topologiques orientables.

On note  $\tilde{i}$  la composée  $\tilde{i} : Z \hookrightarrow \tilde{X}$ .

On note  $m$  la codimension de  $Z$  dans  $X$  et  $n$  la codimension de  $X$  dans  $\tilde{X}$ .

On a alors les isomorphismes de Thom :

$$i_* \underline{G}_Z = \mathbf{R}\Gamma_Z \underline{G}_X [m]$$

$$k_* \underline{G}_X = \mathbf{R}\Gamma_X \underline{G}_{\tilde{X}} [n]$$

$$\tilde{i}_* \underline{G}_Z = \mathbf{R}\Gamma_Z \underline{G}_{\tilde{X}} [m+n]$$

On peut alors décomposer ce dernier isomorphisme de Thom en deux temps :

$$\tilde{i}_* \underline{G}_Z \simeq k_* \mathbf{R}\Gamma_Z \underline{G}_X [m] = \mathbf{R}\Gamma_Z k_* \underline{G}_X [m] \simeq \mathbf{R}\Gamma_Z \mathbf{R}\Gamma_X \underline{G}_{\tilde{X}} [m+n] = \mathbf{R}\Gamma_Z \underline{G}_{\tilde{X}} [m+n]$$

On rappelle que ces isomorphismes de Thom dépendent de choix des orientations des variétés  $Z$ ,  $X$  et  $\tilde{X}$ .

**LEMME 1.6.12** *Quel que soit le choix de l'orientation de  $X$ , le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{i}_* \underline{G}_Z & \xrightarrow{\simeq} & k_* \mathbf{R}\Gamma_Z \underline{G}_X [m] & \xrightarrow{\simeq} & \mathbf{R}\Gamma_Z \underline{G}_{\tilde{X}} [m+n] \\ \parallel & & & & \parallel \\ \tilde{i}_* \underline{G}_Z & \xrightarrow{\simeq} & & \xrightarrow{\simeq} & \mathbf{R}\Gamma_Z \underline{G}_{\tilde{X}} [m+n] \end{array}$$

*Preuve.*

Il s'agit juste d'utiliser l'identité  $or_X \otimes or_X = \underline{\mathbb{Z}}_X$ . □

## Chapitre 2

# Le déterminant microlocal



## 2.1 La construction. Enoncé du théorème

Soient  $X$  une variété analytique complexe lisse de dimension complexe  $n$ ,  
 $\pi : T^*X \rightarrow X$  son fibré cotangent.

Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau pervers sur  $X$ .

On note  $\Lambda = Ch(\mathcal{F})$  sa variété caractéristique.

$\Lambda$  est une réunion de conormaux à des sous-espaces analytiques de  $X$ ,

$$\Lambda = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} T_{M_i}^* X$$

où les  $M_i$  désignent des fermés analytiques irréductibles de  $X$ .

On définit un ouvert  $\Lambda^\circ$  de  $\Lambda$ , que l'on appelle "partie régulière" de  $\Lambda$ .

Pour cela, on définit la partie irrégulière  $Z = \Lambda \setminus \Lambda^\circ$  qui est un fermé de  $\Lambda$ .

$Z$  est défini comme étant la réunion de fermés de 2 types :

- les intersections  $T_{M_i}^* X \cap T_{M_j}^* X$  si  $i \neq j$
- s'ils ne sont pas contenus dans les intersections précédentes, les  
 $\pi^{-1}(M_i^{sing}) \cap T_{M_i}^* X$ , où  $M_i^{sing}$  désigne l'ensemble des points singuliers du  
 sous-espace analytique  $M_i$ .

REMARQUE 2.1.1 *Une manière intrinsèque de décrire l'ensemble  $\Lambda^\circ$  est la suivante :*

$\Lambda^\circ = \{ \text{points lisses de } \Lambda \text{ au voisinage desquels } \pi|_\Lambda : \Lambda \rightarrow X \text{ est de rang} \\ \text{localement constant} \}.$

*Il n'est pas clair que les deux définitions coïncident puisque la première dépend du choix des  $M_i$ . Toutefois, pour notre problème, la première définition convient.*

REMARQUE 2.1.2  *$\Lambda^\circ$  est contenu dans l'ouvert des points lisses de  $\Lambda$ , et cette inclusion est stricte en général, comme le montre l'exemple du conormal au cusp. On a  $(T_{\{y^2-x^3=0\}}^* \mathbb{C}^2)^{sing} = (0, 0; 0, 0) \in T^* \mathbb{C}^2$  alors que la partie irrégulière de  $T_{\{y^2-x^3=0\}}^* \mathbb{C}^2$  est  $T_{\{y^2-x^3=0\}}^* \mathbb{C}^2 \cap \pi^{-1}(0, 0)$ .*

Pour tout  $i \in \mathcal{I}$ , posons  $\Lambda_i = T_{M_i}^* X$  et  $\Lambda_i^\circ = \Lambda_i \setminus Z$ .

$\Lambda^\circ$  est la réunion disjointe  $\Lambda^\circ = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \Lambda_i^\circ$ .

Sur chaque composante connexe  $\Lambda_i^\circ$ , on sait associer à  $\mathcal{F}$  un système local  $\mathcal{L}_i$  :

$$\mathcal{L}_i = (\mu_{M_i^{reg}}(\mathcal{F}|_{X \setminus M_i^{sing}})[\text{codim } M_i])|_{T_{M_i}^* X \setminus Z}$$

(voir le corollaire 1.4.2)

REMARQUE 2.1.3 *Le système local associé à un faisceau pervers sur la section nulle est très simple : il s'agit de la restriction de  $\mathcal{F}$  à la strate ouverte de  $\mathcal{F}$*

$$\mathcal{L}_X = \mathcal{F}|_{X \setminus \bigcup_i M_i} = h^0(\mathcal{F})|_{X \setminus \bigcup_i M_i}$$

Sur chaque composante connexe  $\Lambda_i^\circ$ , le système local  $\mathcal{L}_i$  a un rang  $d_i$ . On en prend la puissance extérieure maximale  $\ell_i = \bigwedge^{d_i} \mathcal{L}_i$ .

Sur chaque  $\Lambda_i^\circ$ , on a donc un système local  $\ell_i$  de rang 1 naturellement associé au faisceau pervers  $\mathcal{F}$ .

On en déduit donc une classe  $\lambda_i \in H^1(\Lambda_i^\circ, \mathbb{C}^*)$ . Puisque  $\Lambda_i^\circ$  est un fermé lisse, orientable de codimension complexe  $n$  dans la variété lisse, orientable  $T^*X \setminus Z$ , on en déduit par l'isomorphisme de Thom, une classe notée encore  $\lambda_i$  dans la cohomologie à support :  $\lambda_i \in H_{\Lambda_i^\circ}^{2n+1}(T^*X \setminus Z, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$  (ici, on a utilisé l'exponentielle pour écrire  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ ).

Puisque  $\Lambda^\circ$  est la réunion disjointe  $\Lambda^\circ = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \Lambda_i^\circ$ , on peut regarder la somme :

$$\lambda_{\mathcal{F}} = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i \in H_{\Lambda^\circ}^{2n+1}(T^*X \setminus Z, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$$

C'est cette classe  $\lambda_{\mathcal{F}}$  que l'on essaye de prolonger à  $H_{\Lambda}^{2n+1}(T^*X, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ .

En fait, on obtient un résultat un peu plus faible. Il faut reprendre la construction précédente en remplaçant les coefficients  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  par  $\mathbb{C}^*/\{\pm 1\} = \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ , c'est-à-dire en regardant les monodromies de nos systèmes locaux modulo  $\pm 1$ .

On obtient de la même manière une classe  $\lambda_{\mathcal{F}} \in H_{\Lambda^\circ}^{2n+1}(T^*X \setminus Z, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ .

THÉORÈME 2.1.4 *La classe  $\lambda_{\mathcal{F}} \in H_{\Lambda^\circ}^{2n+1}(T^*X \setminus Z, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  se prolonge de manière unique en une classe*

$$\lambda_{\mathcal{F}} \in H_{\Lambda}^{2n+1}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$$

*que l'on appelle "déterminant microlocal" du faisceau pervers  $\mathcal{F}$ .*

REMARQUE 2.1.5 *Il est nécessaire de quotienter les coefficients par  $\pm 1$  comme le montre l'exemple du cusp (voir l'exemple à la fin de la partie 2.14 ou l'exemple plus simple en position non générique de  $[S]$ ).*

*D'autre part, cette ambiguïté de signe apparaît à un autre endroit de la démonstration, quand on veut contrôler le comportement du microlocalisé par transformation canonique.*

Citons un premier résultat sur le déterminant microlocal :

**COROLLAIRE 2.1.6** *Soit*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

*une suite exacte courte de faisceaux pervers sur  $X$ .*

*Notons  $\lambda_{\mathcal{F}}$ ,  $\lambda_{\mathcal{G}}$  et  $\lambda_{\mathcal{H}}$  les déterminants microlocaux des faisceaux pervers  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$ . On a :*

$$\lambda_{\mathcal{G}} = \lambda_{\mathcal{F}} + \lambda_{\mathcal{H}} \in H_{Ch(\mathcal{G})}^{2n+1}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$$

*Preuve.*

Les foncteurs de microlocalisation de Sato étant  $t$ -exact ([KS], proposition 10.3.19), on déduit de la suite exacte courte précédente les suites exactes courtes correspondantes pour les systèmes locaux qui permettent de définir le déterminant microlocal.

Comme la première classe caractéristique secondaire se comporte de manière additive par suite exacte courte (voir par exemple [So], 1.5.b p.414), le corollaire est évident une fois que l'on sait que le déterminant microlocal existe.  $\square$

Le reste de ce mémoire est consacré à la démonstration du théorème 2.1.4.



## 2.2 Le problème est microlocal et le prolongement, s'il existe, est unique

On va montrer que le problème du prolongement de  $H_{\Lambda \setminus Z}^{2n+1}(T^*X \setminus Z, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  à  $H_{\Lambda}^{2n+1}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  est un problème local sur le fibré cotangent  $T^*X$ , c'est-à-dire un problème microlocal, et que le prolongement, s'il existe, est unique.

Dans ce qui suit,  $G$  désigne un  $\mathbb{Z}$ -module et si  $Y$  désigne un espace topologique,  $\underline{G}_Y$  désigne le faisceau constant de fibre  $G$  sur  $Y$ .

On commence par montrer le résultat classique :

LEMME 2.2.1 *Si  $Z$  est un localement fermé analytique complexe de codimension complexe  $d$  dans une variété analytique lisse  $X$  de dimension  $n$ ,  $\forall 0 \leq i \leq (2d - 1)$*

$$\mathbf{R}^i \Gamma_Z \underline{G}_X = 0$$

et le préfaisceau  $U \mapsto H_{U \cap Z}^{2d}(U, G)$  est un faisceau.

*Preuve.* On raisonne par récurrence sur la dimension de  $Z$ .

Si  $Z$  est de dimension 0, alors  $Z$  est réunion de points  $Z = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \{x_j\}$ .

En utilisant le lemme 1.6.1, on obtient que

$$\forall i, 0 \leq i \leq (2n - 1), \mathbf{R}^i \Gamma_{\{x_j\}} \underline{G}_X = 0$$

Donc, si  $Z$  est de dimension 0, on a bien le résultat annoncé.

Maintenant  $Z$  est un localement fermé analytique de codimension complexe  $d$  dans  $X$ . Soit  $Z^{reg}$  l'ouvert de  $Z$  constitué des points lisses de  $Z$ , et soit  $Z^{sing}$  le fermé de  $Z$  constitué des points singuliers de  $Z$ . On regarde le triangle distingué de  $D^b(X)$  :

$$\mathbf{R} \Gamma_{Z^{sing}} \underline{G}_X \longrightarrow \mathbf{R} \Gamma_Z \underline{G}_X \longrightarrow \mathbf{R} \Gamma_{Z^{reg}} \underline{G}_X \xrightarrow{+1}$$

Par récurrence, on a  $\forall i, 0 \leq i \leq (2d + 1), \mathbf{R}^i \Gamma_{Z^{sing}} \underline{G}_X = 0$ .

On déduit de la suite exacte longue associée au triangle distingué :

$$\forall i, 0 \leq i \leq 2d,$$

$$\mathbf{R}^i \Gamma_Z \underline{G}_X \simeq \mathbf{R}^i \Gamma_{Z^{reg}} \underline{G}_X$$

Ensuite, on montre par récurrence sur  $i$  que  $\mathbf{R}^i \Gamma_{Z^{reg}} \underline{G}_X = 0$  pour

$0 \leq i \leq 2d - 1$ .

On a, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\Gamma(U, \mathbf{R}^0\Gamma_{Z^{reg}}\underline{G}_X) = \mathbf{R}^0\Gamma_{Z^{reg}}(U, G)$

$$\mathbf{R}^0\Gamma_{Z^{reg}}(U, G) = \mathbf{R}^0\Gamma_{U \cap Z^{reg}}(U \setminus Z^{sing}, G)$$

$\mathbf{R}^0\Gamma_{U \cap Z^{reg}}(U \setminus Z^{sing}, G) = \mathbf{R}^{0-2d}\Gamma(Z^{reg} \cap U, G)$  d'après le corollaire 1.6.3.

On en déduit  $\Gamma(U, \mathbf{R}^0\Gamma_{Z^{reg}}\underline{G}_X) = 0$ .

Ensuite, on suppose qu'on a démontré pour  $0 \leq i \leq k$ ,  $k \leq 2d - 2$  que  $\Gamma(U, \mathbf{R}^i\Gamma_{Z^{reg}}\underline{G}_X) = 0$ .

Alors, par composition des foncteurs dérivés  $\mathbf{R}\Gamma(U, .)$  et  $\mathbf{R}\Gamma_{Z^{reg}}(.)$  on a  $\Gamma(U, \mathbf{R}^{k+1}\Gamma_{Z^{reg}}\underline{G}_X) = \mathbf{R}^{k+1}\Gamma_{Z^{reg}}(U, G)$ .

$$\begin{aligned} \text{Or } \mathbf{R}^{k+1}\Gamma_{Z^{reg}}(U, G) &= \mathbf{R}^{k+1}\Gamma_{U \cap Z^{reg}}(U \setminus Z^{sing}, G) \\ &= \mathbf{R}^{k+1-2d}\Gamma(Z^{reg} \cap U, G) \text{ d'après le corollaire 1.6.3.} \end{aligned}$$

On en déduit  $\Gamma(U, \mathbf{R}^{k+1}\Gamma_{Z^{reg}}\underline{G}_X) = 0$ .

Donc  $\mathbf{R}^i\Gamma_{Z^{reg}}\underline{G}_X = 0$  pour  $0 \leq i \leq 2d - 1$  et alors  $\mathbf{R}^i\Gamma_Z\underline{G}_X = 0$  pour  $0 \leq i \leq 2d - 1$ . □

On revient au problème de départ.

On part d'un faisceau pervers  $\mathcal{F}$ , avec  $\Lambda = Ch(\mathcal{F}) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} T_{M_i}^*X$ .

On a défini dans  $\Lambda$  un sous-ensemble

$$Z = \left( \bigcup_{i, j \in \mathcal{I}, i \neq j} T_{M_i}^*X \cap T_{M_j}^*X \right) \cap \left( \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \pi^{-1}(M_i^{sing}) \cap T_{M_i}^*X \right)$$

Associée à  $\mathcal{F}$ , on a une classe dans  $H_{\Lambda \setminus Z}^{2n+1}(T^*X \setminus Z, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  que l'on cherche à prolonger en une classe dans  $H_{\Lambda}^{2n+1}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ .

On regarde le triangle distingué :

$$\mathbf{R}\Gamma_Z\mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\Lambda}\mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\Lambda \setminus Z}\mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z} \xrightarrow{+1}$$

$T^*X$  est une variété analytique de dimension complexe  $2n$ . Les  $T_{M_i}^*X$  sont des fermés analytiques irréductibles de codimension complexe  $n$ .

D'après sa définition,  $Z$  est fermé analytique de  $T^*X$ , de codimension complexe  $\geq (n + 1)$ .

D'après le lemme 2.2.1, le complexe  $\mathbf{R}\Gamma_Z\mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}$  ne commence qu'en degré  $2n + 2$ .

Pour tout ouvert  $U$  de  $T^*X$ , on obtient par composition des foncteurs dérivés  $\mathbf{R}\Gamma(U, .)$  et  $\mathbf{R}\Gamma_Z(.)$  :

$$H_Z^i(U, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) = 0, \text{ pour } 0 \leq i \leq 2n + 1$$

$$H_Z^{2n+2}(U, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) = \Gamma(U, \mathbf{R}^{2n+2}\Gamma_Z\mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$$

Pour tout ouvert  $U$  de  $T^*X$ , si on applique le foncteur  $\mathbf{R}\Gamma(U, \cdot)$  au triangle distingué précédent, on en déduit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H_{\Lambda}^{2n+1}(U, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{\Lambda \setminus Z}^{2n+1}(U, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \longrightarrow H_Z^{2n+2}(U, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$$

En particulier, si on choisit  $U = T^*X$ , l'injectivité de la flèche naturelle  $H_{\Lambda}^{2n+1}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{\Lambda \setminus Z}^{2n+1}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  fournit l'unicité du prolongement annoncée.

On a donc démontré le lemme suivant :

**LEMME 2.2.2** *Si le prolongement du déterminant microlocal existe, il est unique.*

Enfin, pour vérifier qu'une classe  $\lambda \in H_{\Lambda \setminus Z}^{2n+1}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  se prolonge à  $H_{\Lambda}^{2n+1}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ , il faut vérifier qu'elle est envoyée sur 0 par le morphisme de connexion  $\delta : H_{\Lambda \setminus Z}^{2n+1}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \longrightarrow H_Z^{2n+2}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ .

Pour tout ouvert  $U$  de  $T^*X$ , on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_{\Lambda \setminus Z}^{2n+1}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & H_Z^{2n+2}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \\ \downarrow (\cdot)|_U & & \downarrow (\cdot)|_U \\ H_{\Lambda \setminus Z}^{2n+1}(U, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta|_U} & H_Z^{2n+2}(U, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \end{array}$$

Donc si on a un recouvrement ouvert  $\{U_j\}_{j \in \mathcal{J}}$  de  $T^*X$  et une classe  $\lambda \in H_{\Lambda \setminus Z}^{2n+1}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  telle que  $\forall j \in \mathcal{J}, \delta|_{U_j}(\lambda|_{U_j}) = 0$ , alors comme le préfaisceau  $(U \mapsto H_Z^{2n+2}(U, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}))$  est un faisceau, c'est que  $\delta(\lambda) = 0$  dans  $H_Z^{2n+2}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ .

On a donc démontré le lemme suivant :

**LEMME 2.2.3** *Le problème du prolongement du déterminant microlocal est un problème local sur  $T^*X$ , c'est-à-dire microlocal.*

## 2.3 Le prolongement en dehors d'un sous-ensemble de codimension 2 suffit

Dans la construction, on part d'un faisceau pervers  $\mathcal{F}$  sur  $X$  de dimension complexe  $n$ , on pose  $\Lambda = Ch(\mathcal{F}) \subset T^*X$ , et on définit un ensemble d'irrégularité de  $\Lambda$ , qui est un sous-espace analytique  $Z \subset \Lambda$  au moins de codimension complexe 1 dans  $\Lambda$ .

Ensuite, on associe à  $\mathcal{F}$  des systèmes locaux sur les composantes connexes de  $\Lambda \setminus Z$ , on en déduit une classe  $\lambda_{\mathcal{F}} \in H_{\Lambda \setminus Z}^{2n+1}(T^*X \setminus Z, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  et on cherche à faire traverser à  $\lambda_{\mathcal{F}}$  l'ensemble d'irrégularité  $Z$  pour la prolonger en une classe dans  $H_{\Lambda}^{2n+1}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ .

Le lemme suivant montre que pour prolonger  $\lambda_{\mathcal{F}}$ , il suffit de savoir la prolonger en dehors d'un sous-ensemble de codimension complexe 2 contenu dans  $\Lambda$ .

**LEMME 2.3.1** *Supposons qu'il existe un sous-espace analytique  $\tilde{Z}$ ,  $\tilde{Z} \subset Z \subset \Lambda$ , de codimension complexe 2 dans  $\Lambda$  tel que l'on sache prolonger  $\lambda_{\mathcal{F}}$  de  $H_{\Lambda \setminus Z}^{2n+1}(T^*X \setminus Z, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  à  $H_{\Lambda \setminus \tilde{Z}}^{2n+1}(T^*X \setminus \tilde{Z}, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ .*

*Alors, on sait prolonger  $\lambda_{\mathcal{F}}$  à  $H_{\Lambda}^{2n+1}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ .*

*Preuve.* Il s'agit juste d'utiliser le lemme 2.2.1.

Par hypothèse,  $\tilde{Z}$  est un sous-espace analytique de  $T^*X$  de codimension complexe  $\geq n+2$ . D'après le lemme 2.2.1, le complexe  $\mathbf{R}\Gamma_{\tilde{Z}}\mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}$  ne commence au plus tôt qu'en degré  $2n+4$ , c'est-à-dire que pour  $0 \leq i \leq 2n+3$ ,  $\mathbf{R}^i\Gamma_{\tilde{Z}}\mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z} = 0$ . On en déduit alors, comme dans la partie 2.2 que, pour tout ouvert  $U \subset T^*X$ , on a  $H_{\tilde{Z}}^{2n+1}(U, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) = H_{\tilde{Z}}^{2n+2}(U, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) = 0$ .

Donc, si on regarde le triangle distingué

$$\mathbf{R}\Gamma_{\tilde{Z}}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\Lambda}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\Lambda \setminus \tilde{Z}}(T^*X \setminus \tilde{Z}, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \xrightarrow{+1}$$

On en déduit alors, en regardant la suite exacte longue issue du triangle précédent que :  $H_{\Lambda}^{2n+1}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \simeq H_{\Lambda \setminus \tilde{Z}}^{2n+1}(T^*X \setminus \tilde{Z}, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ , d'où le lemme.  $\square$

## 2.4 Plan de la démonstration

Nous présentons maintenant le plan de la preuve du théorème 2.1.4.

$\mathcal{F}$  est un faisceau pervers sur  $X$ .

On conserve les notations précédentes :  $\Lambda = Ch(\mathcal{F})$ ,  $Z \subset \Lambda$  la partie irrégulière de  $\Lambda$ .

### • Réduction à un problème local hors section nulle

Si  $p \in Z$  est un point de la section nulle,  $p \in Z \cap T_X^*X$  alors, hors codimension 2, on est ramené au cas de la dimension 1 à paramètres (partie 2.7), c'est-à-dire au cas de la dimension 1 (proposition 2.6.1) qui est traité dans la proposition 2.5.1.

On est donc ramené au problème du prolongement hors section nulle. On fixe  $p \in Z \setminus T_X^*X$  et on travaille sur un voisinage  $\Omega_X$  de  $p$  dans  $T^*X$ .

### • Réduction à la position générique

On fixe une transformation canonique  $\varphi$  au voisinage de  $p$  telle que  $\varphi(\Lambda)$  soit en position générique au point  $\varphi(p)$  : une transformation de Legendre convient (lemme 2.8.2).

On quantifie la transformation de Legendre de la façon la plus simple : on prend pour noyau le faisceau constant  $\mathbb{Z}$ .

Il existe un fermé analytique  $Z' \subset \Lambda \cap \Omega_X$  de codimension 1 dans  $\Lambda$  tel que en restriction à  $\varphi(\Omega_X \cap \Lambda \setminus (Z \cup Z'))$  on ait (théorème 2.10.2) :

$$\varphi_*(\mathcal{L}_{\mathcal{F}}) = \mathcal{L}_{\tilde{\varphi}\mathcal{F}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_1$$

où  $\tilde{\varphi}\mathcal{F}$  est le transformé canonique de  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  et  $\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}\mathcal{F}}$  sont les systèmes locaux qui donnent respectivement naissance à  $\lambda_{\mathcal{F}}$  et  $\lambda_{\tilde{\varphi}\mathcal{F}}$  et  $\mathcal{L}_1$  est un système local de fibre  $\mathbb{Z}$ .

Ce théorème se démontre en deux temps. On commence par traiter le cas d'un faisceau pervers constant de fibre  $\mathbb{Z}$  : on est alors ramené à un calcul de cycles évanescents pour une singularité quadratique et un signe apparaît par une formule de Picard-Lefschetz (proposition 2.9.9). Ensuite, ce résultat est étendu aux faisceaux pervers ramenés en position générique en utilisant le foncteur  $\mu hom$ .

A partir de maintenant, la démonstration implique de travailler avec les coefficients  $\mathbb{C}^* / \pm 1$  : si la classe  $\lambda_{\tilde{\varphi}\mathcal{F}}$  se prolonge modulo  $\pm 1$  alors  $\lambda_{\mathcal{F}}$  se prolonge modulo  $\pm 1$ .

- **Réduction au cas de la dimension 2**

En position générique, hors codimension 2, par une section plane générique, on se ramène à la situation de la dimension 2 à paramètres. On est donc ramené au cas de la dimension 2.

- **Le calcul fondamental** s'effectue dans le cas d'un faisceau pervers sur  $(\mathbb{C}^2, 0)$  (partie 2.14). On peut alors utiliser les descriptions de faisceaux pervers en termes de carquois.

Par réduction à la position générique, on peut supposer que le conormal  $T_0^*\mathbb{C}^2$  n'apparaît pas. Dans cette situation, on peut constater par les carquois que le déterminant microlocal se prolonge.

On termine en donnant un exemple explicite (celui du cusp en position générique) qui montre qu'il est nécessaire de quotienter les coefficients par  $\pm 1$  pour prolonger.

## 2.5 Le cas de la dimension 1

Regardons le cas de la dimension 1.

Soit  $X$  une variété analytique complexe lisse de dimension 1.

Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau pervers sur  $X$

Le lieu singulier de  $\mathcal{F}$  est une réunion de points  $\bigcup_{j \in \mathcal{J}} \{x_j\}$ .

On a alors 3 cas à examiner dont 2 sont triviaux.

- $Ch(\mathcal{F}) = T_X^*X$ . Alors le lieu singulier de  $\mathcal{F}$  est vide. Autrement dit  $\mathcal{F}$  est réduit à un système local sur  $X$  et il n'y a aucun problème de prolongement.

- $Ch(\mathcal{F}) = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} T_{\{x_j\}}^*X$ . La section nulle n'apparaît pas dans la variété caractéristique de  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{F}|_{X \setminus \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \{x_j\}} = 0$ . Autrement dit  $\mathcal{F}$  est un faisceau supporté par les points  $\{x_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ . Là encore, il n'y a aucun problème de prolongement.

- $Ch(\mathcal{F}) = T_X^*X \cup \bigcup_{j \in \mathcal{J}} T_{\{x_j\}}^*X$ .

Si on note comme précédemment  $Z$  l'ensemble d'irrégularité de  $Ch(\mathcal{F})$  qu'il faut faire traverser à la classe caractéristique pour la prolonger, on a

$Z = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} (T_X^*X \cap T_{\{x_j\}}^*X)$ , c'est-à-dire  $Z = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \{(x_j; 0)\}$ .

**Puisque le problème du prolongement est microlocal, le seul cas à traiter est alors celui de  $X = \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{F}$  faisceau pervers sur  $\mathbb{C}$ , relativement à  $\{0\}$ .**

On a alors  $T^*X \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ,  $Ch(\mathcal{F}) = \mathbb{C} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{C} = \{(x; \xi); x\xi = 0\}$ ,  $Z = \{(0; 0)\}$ .

On a  $Ch(\mathcal{F}) \setminus Z = \mathbb{C}^* \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{C}^* = \{(x; \xi); x\xi = 0, (x; \xi) \neq (0; 0)\}$ .

On regarde alors les 2 systèmes locaux associés à  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{L}_X$  sur  $T_X^*X \setminus \{(0; 0)\}$  et  $\mathcal{L}_0$  sur  $T_{\{0\}}^*X \setminus \{(0; 0)\}$ .

On a  $\mathcal{L}_X = \mathcal{F}|_{\mathbb{C}^*}$  et  $\mathcal{L}_0 = \mu_{\{0\}}(\mathcal{F})|_{T_{\{0\}}^*X \setminus \{(0; 0)\}}$ .

On a vu dans la section 1.3, comment un tel faisceau pervers est entièrement

décrit par un diagramme  $E \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{v} \end{array} F$ .

Dans cette description, le système local  $\mathcal{L}_X$  est le système local de fibre  $E$  et de monodromie  $Id + vu$  quand on tourne dans  $\mathbb{C}^* \times \{0\}$  dans le sens positif et le système local  $\mathcal{L}_0$  est le système local de fibre  $F$  et de monodromie  $(Id + uv)^{-1}$  quand on tourne dans  $\{0\} \times \mathbb{C}^*$  dans le sens positif (voir le corollaire 1.3.4).

On prend la puissance extérieure maximale de chacun de ces 2 systèmes locaux :  $\ell_X = \bigwedge^{\dim E} \mathcal{L}_X$  et  $\ell_0 = \bigwedge^{\dim F} \mathcal{L}_0$ .  
 $\ell_X$  est le système local de fibre  $\mathbb{C}$  et de monodromie  $\det(Id + vu)$  sur  $\mathbb{C}^* \times \{0\}$  et  $\ell_0$  est le système local de fibre  $\mathbb{C}$  et de monodromie  $\det(Id + uv)^{-1}$  sur  $\{0\} \times \mathbb{C}^*$ .

On obtient une classe  $\lambda_X \in H^1(\mathbb{C}^* \times \{0\}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$  et une classe  $\lambda_0 \in H^1(\{0\} \times \mathbb{C}^*, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ .

Par l'isomorphisme de Thom (corollaire 1.6.3), on en déduit 2 classes, notées encore  $\lambda_X$  et  $\lambda_0$ ,

$$\lambda_X \in H_{\mathbb{C}^* \times \{0\}}^3(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \text{ et } \lambda_0 \in H_{\{0\} \times \mathbb{C}^*}^3((\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}), \mathbb{C}/\mathbb{Z}).$$

Si on note  $\Lambda = Ch(\mathcal{F}) = \mathbb{C} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{C}$ , on peut alors regarder la somme  $\lambda = \lambda_X \oplus \lambda_0 \in H_{\Lambda \setminus \{(0, 0)\}}^3(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ .

**PROPOSITION 2.5.1** *La classe  $\lambda$  se prolonge en une classe  $\tilde{\lambda} \in H_{\Lambda}^3(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ .*

*Preuve.*

Pour cela, on regarde le triangle distingué :

$$\mathbf{R}\Gamma_{\{(0, 0)\}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\Lambda}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\Lambda \setminus \{(0, 0)\}}(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{+1}$$

On en déduit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H_{\Lambda}^3(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{\Lambda \setminus \{(0, 0)\}}^3(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{\{(0, 0)\}}^4(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$$

Et il s'agit de voir que  $\lambda \in H_{\Lambda \setminus \{(0, 0)\}}^3(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$  est envoyé sur zéro par le morphisme de connexion

$$\delta : H_{\Lambda \setminus \{(0, 0)\}}^3(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{\{(0, 0)\}}^4(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$$

somme des deux morphismes de connexion :

$$\delta_X : H_{\mathbb{C}^* \times \{0\}}^3(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{\{(0, 0)\}}^4(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$$

$$\delta_0 : H_{\{0\} \times \mathbb{C}^*}^3(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{\{(0, 0)\}}^4(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$$

issus des deux triangles distingués :

$$\mathbf{R}\Gamma_{\{(0, 0)\}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\mathbb{C} \times \{0\}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\mathbb{C}^* \times \{0\}}(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{+1}$$

$$\mathbf{R}\Gamma_{\{(0, 0)\}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\{0\} \times \mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\{0\} \times \mathbb{C}^*}(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{+1}$$

Le groupe  $H_{\{(0, 0)\}}^4(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$  s'identifie naturellement à  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  par l'orientation naturelle de  $\mathbb{C}^2$ .



Le groupe  $H_{\mathbb{C}^* \times \{0\}}^3(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0; 0)\}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$  s'identifie naturellement à  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  de la façon suivante : par l'isomorphisme de Thom, on a  $H_{\mathbb{C}^* \times \{0\}}^3(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0; 0)\}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) = H^1(\mathbb{C}^* \times \{0\}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$  et ce dernier groupe s'identifie à  $H_{\{(0,0)\}}^2(\mathbb{C} \times \{0\}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$  par le morphisme de connexion issu du triangle distingué :

$$\mathbf{R}\Gamma_{\{(0,0)\}}(\mathbb{C} \times \{0\}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma(\mathbb{C} \times \{0\}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma(\mathbb{C}^* \times \{0\}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{+1}$$

Enfin  $H_{\{(0,0)\}}^2(\mathbb{C} \times \{0\}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$  est identifié à  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  par l'orientation naturelle de  $\mathbb{C} \times \{0\}$ .

De la même manière,  $H_{\{0\} \times \mathbb{C}^*}^3(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0; 0)\}, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$  s'identifie naturellement à  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ .

Dans les identifications précédentes, les classes  $\lambda_0$  et  $\lambda_X$  donnent deux nombres dans  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ .

Ces deux nombres sont simplement les déterminants des monodromies des systèmes locaux  $\mathcal{L}_0$  et  $\mathcal{L}_X$  quand on suit la monodromie le long du générateur positif des groupes d'homologie  $H_1(\{0\} \times \mathbb{C}^*, \mathbb{Z})$  et  $H_1(\mathbb{C}^* \times \{0\}, \mathbb{Z})$ .

**LEMME 2.5.2** *Avec les identifications précédentes, les morphismes  $\delta_0$  et  $\delta_X$  coïncident avec l'identité  $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ .*

*Preuve.*

Montrons-le pour  $\delta_0$ .

On considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \{x=0\} & \xrightarrow{b} & \mathbb{C}^2 \\ \uparrow a & & \uparrow \tilde{a} \\ \{x=0\} \setminus \{(0; 0)\} & \xrightarrow{\tilde{b}} & \mathbb{C}^2 \setminus \{(0; 0)\} \end{array}$$

Notons  $G = \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ . Pour un espace topologique  $Y$ ,  $\underline{G}_Y$  désignera le faisceau constant de fibre  $G$  sur  $Y$ .

D'après le lemme 1.6.8, le triangle

$$\mathbf{R}\Gamma_{\{(0,0)\}}\underline{G}_{\mathbb{C}^2} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\{0\} \times \mathbb{C}}\underline{G}_{\mathbb{C}^2} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\{0\} \times \mathbb{C}^*}\underline{G}_{\mathbb{C}^2} \xrightarrow{+1}$$

est l'image par le foncteur  $b_*(.)[-2]$  du triangle sur  $\{x=0\}$  :

$$\mathbf{R}\Gamma_{\{(0,0)\}}\underline{G}_{\{x=0\}} \longrightarrow \underline{G}_{\{x=0\}} \longrightarrow \mathbf{R}a_*a^{-1}\underline{G}_{\{x=0\}} \xrightarrow{+1}$$

Le morphisme  $\delta_0$  est donc le morphisme de la suite exacte longue obtenue en appliquant le foncteur  $\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{C}^2, b_*(.))[-2]$  au triangle précédent.

Or, on a  $\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{C}^2, b_*(.))[-2] = \mathbf{R}\Gamma(\{x = 0\}, .)[-2]$ .

Donc,  $\delta_0$  est (au décalage  $[-2]$  près) le morphisme :

$$H^1(\{x = 0\} \setminus \{(0; 0)\}, G) \longrightarrow H^2_{\{(0;0)\}}(\{x = 0\}, G)$$

c'est-à-dire le morphisme qui permet d'identifier naturellement

$H^1(\{x = 0\} \setminus \{(0; 0)\}, G)$  à  $G$ .

Donc, d'après le lemme 1.6.5,  $\delta_0$  se lit comme le morphisme identité

$$G \longrightarrow G.$$

□

On revient à la démonstration de la proposition 2.5.1.

La classe  $\lambda = \lambda_0 + \lambda_X$  se prolonge si et seulement si  $\delta_0(\lambda_0) + \delta_X(\lambda_X) = 0$ .

D'après le lemme précédent, pour montrer que  $\delta_0(\lambda_0) + \delta_X(\lambda_X) = 0$ , il suffit de montrer que le produit des déterminants des systèmes locaux  $\ell_0$  et  $\ell_X$  vaut 1, c'est-à-dire que :

$$\det(Id + vu) \cdot \det(Id + uv)^{-1} = 1$$

Ceci se montre grâce à la correspondance entre les polynômes caractéristiques  $\chi_{uv}(X)$  et  $\chi_{vu}(X)$ .

Ces deux polynômes diffèrent d'un facteur  $X^p$  et donc  $\chi_{uv}(1) = \chi_{vu}(1)$ , c'est-à-dire que  $\det(Id + vu) = \det(Id + uv)$ . □

**REMARQUE 2.5.3** *En dimension 1, il n'est pas nécessaire de quotienter par  $\pm 1$  les coefficients pour définir le déterminant microlocal.*

## 2.6 Comportement du déterminant microlocal par image inverse par projection

$$\mathbb{C}^m \times X \longrightarrow X$$

Soit  $X$  une variété analytique complexe de dimension  $n$ .

On considère la projection  $p : \mathbb{C}^m \times X \longrightarrow X$ .

Associé à  $p$ , on a le diagramme cotangent :

$$T^*(\mathbb{C}^m \times X) \xleftarrow{{}^t p'} (\mathbb{C}^m \times X) \times_X T^*X \xrightarrow{p_\pi} T^*X$$

Soit  $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\text{Perv}(X))$  un faisceau pervers sur  $X$ .

On considère le faisceau pervers sur  $\mathbb{C}^m \times X$ ,  $\mathcal{G} := p^{-1}\mathcal{F}$ .

Notons  $\Lambda = \text{Ch}(\mathcal{F})$ . On a  $\text{Ch}(\mathcal{G}) = {}^t p'(p_\pi^{-1}(\Lambda))$ .

**Dans cette partie, on montre que l'existence du déterminant microlocal de  $\mathcal{F}$  implique l'existence de celui de  $\mathcal{G}$  et qu'alors le déterminant microlocal se transporte comme la variété caractéristique, au travers du diagramme cotangent.**

En utilisant l'identification canonique  $T^*(\mathbb{C}^m \times X) = (T^*\mathbb{C}^m) \times (T^*X)$  on peut réécrire le diagramme cotangent associé à  $p$  :

$$T^*\mathbb{C}^m \times T^*X \xleftarrow{{}^t p'} T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times T^*X \xrightarrow{p_\pi} T^*X$$

où  ${}^t p'$  est induite par l'inclusion fermée  $T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \hookrightarrow T^*\mathbb{C}^m$ .

Notons  $G$  le  $\mathbb{Z}$ -module  $G = \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ .

En appliquant le lemme 1.6.11, on obtient un isomorphisme :

$$H_\Lambda^{2n+1}(T^*X, G) \simeq H_{T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times \Lambda}^{2(m+n)+1}(T^*(\mathbb{C}^m \times X), G)$$

Le déterminant microlocal de  $\mathcal{F}$  est une classe dans  $H_\Lambda^{2n+1}(T^*X, G)$  et celui de  $\mathcal{G} := p^{-1}\mathcal{F}$  est une classe dans  $H_{T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times \Lambda}^{2(m+n)+1}(T^*(\mathbb{C}^m \times X), G)$ .

**PROPOSITION 2.6.1** *Si le déterminant microlocal de  $\mathcal{F}$  existe alors celui de  $\mathcal{G}$  existe et se déduit de celui de  $\mathcal{F}$  par l'isomorphisme précédent.*

*Preuve.*

Soit  $\Lambda_i = T_{M_i}^* X \subset T^* X$  une composante irréductible de  $\Lambda = Ch(\mathcal{F})$ , la variété caractéristique de  $\mathcal{F}$ .

On note  $Z$  la partie irrégulière de  $\Lambda$ .

On considère le système local  $\mathcal{L}_i$  sur  $\Lambda_i \setminus Z$ , système local associé à  $\mathcal{F}$  :

$$\mathcal{L}_i = \mu_{M_i^{reg}}(\mathcal{F}|_{X \setminus M_i^{sing}})|_{\Lambda_i \setminus Z}$$

Comme  $Ch(\mathcal{G}) = {}^t p'^{-1}(p_\pi(Ch(\mathcal{F})))$ , si on note  $\tilde{\Lambda} = Ch(\mathcal{G})$ , on a

$$\tilde{\Lambda} = T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times \Lambda$$

Alors,  $\tilde{Z}$ , la partie irrégulière de  $\tilde{\Lambda}$  s'écrit  $\tilde{Z} = T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times Z$  et  $\tilde{\Lambda}_i$ , la composante irréductible de  $\tilde{\Lambda}$  qui correspond à  $\Lambda_i = T_{M_i}^* X$  s'écrit aussi

$$\tilde{\Lambda}_i = T_{\mathbb{C}^m \times M_i}^*(\mathbb{C}^m \times X) = T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times \Lambda_i$$

On a donc  $\tilde{\Lambda}_i \setminus \tilde{Z} = T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times (\Lambda_i \setminus Z)$ .

A  $\mathcal{G}$  est associé un système local  $\tilde{\mathcal{L}}_i$  sur  $\tilde{\Lambda}_i \setminus \tilde{Z}$  :

$$\tilde{\mathcal{L}}_i = \mu_{\mathbb{C}^m \times M_i^{reg}}(\mathcal{G}|_{\mathbb{C}^m \times (X \setminus M_i^{sing})})|_{\tilde{\Lambda}_i \setminus \tilde{Z}}$$

Notons  $p_{\pi_i}$  la projection  $\tilde{\Lambda}_i \setminus \tilde{Z} = T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times (\Lambda_i \setminus Z) \longrightarrow \Lambda_i \setminus Z$ .

LEMME 2.6.2 *On a un isomorphisme :*

$$\tilde{\mathcal{L}}_i \simeq (p_{\pi_i})^{-1} \mathcal{L}_i$$

*Preuve.*

Notons  $M_i^\circ = M_i^{reg}$ .

On a le diagramme d'applications cotangentes :

$$\begin{array}{ccccc} T^*(\mathbb{C}^m \times X) & \xleftarrow{{}^t p'} & (\mathbb{C}^m \times X) \times_X T^* X & \xrightarrow{p_\pi} & T^* X \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ T_{\mathbb{C}^m \times M_i^\circ}^*(\mathbb{C}^m \times X) & \xleftarrow{{}^t p'_i} & (\mathbb{C}^m \times M_i^\circ) \times_{M_i^\circ} T_{M_i^\circ}^* X & \xrightarrow{p_{\pi_i}} & T_{M_i^\circ}^* X \end{array}$$

Qui peut se réécrire dans notre situation :

$$\begin{array}{ccccc}
(T^*\mathbb{C}^m) \times (T^*X) & \xleftarrow{t p'_i} & T^*\mathbb{C}^m \times T^*X & \xrightarrow{p_\pi} & T^*X \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
T^*\mathbb{C}^m \times T^*_{M_i^\circ} X & \xleftarrow{t p_i} & T^*\mathbb{C}^m \times T^*_{M_i^\circ} X & \xrightarrow{p_{\pi_i}} & T^*_{M_i^\circ} X
\end{array}$$

Pour tout  $\mathcal{F} \in Ob(D^b(X))$  on a alors un morphisme canonique ([KS], proposition 4.3.5. (iii)) :

$$\mathbf{R}(t p'_i)_* p_{\pi_i}^{-1} \mu_{M_i^\circ}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mu_{\mathbb{C}^m \times M_i^\circ}(p^{-1}\mathcal{F})$$

Dans notre cas, la situation géométrique est particulièrement simple : l'application  $t p'_i$  est un isomorphisme et les fibrés normal et conormal de  $\mathbb{C}^m \times M_i^\circ$  dans  $\mathbb{C}^m \times X$  sont les images inverses par l'application  $p|_{\mathbb{C}^m \times M_i^\circ}$  des fibrés correspondants pour  $M_i^\circ$  dans  $X$ .

Le morphisme précédent est alors un isomorphisme d'après les propositions 4.2.5 et 3.7.13 de [KS].  $\square$

Associées aux systèmes locaux  $\mathcal{L}_i$  et  $\tilde{\mathcal{L}}_i$ , on a les classes

$$\lambda_i \in H^1(\Lambda_i \setminus Z, G)$$

$$\tilde{\lambda}_i \in H^1(\tilde{\Lambda}_i \setminus \tilde{Z}, G)$$

Puisque  $\tilde{\Lambda}_i \setminus \tilde{Z} = T^*\mathbb{C}^m \times (\Lambda_i \setminus Z) = p_{\pi_i}^{-1}(\Lambda_i \setminus Z)$ , que  $p_{\pi_i}$  est à fibres contractiles, d'après le lemme 2.6.2, les classes  $\lambda_i$  et  $\tilde{\lambda}_i$  se correspondent dans l'isomorphisme induit par  $p_{\pi_i}$  :

$$p_{\pi_i}^{-1} : H^1(\Lambda_i \setminus Z, G) \longrightarrow H^1(\tilde{\Lambda}_i \setminus \tilde{Z}, G)$$

$$\tilde{\lambda}_i = p_{\pi_i}^{-1} \lambda_i$$

On utilise ensuite les isomorphismes de Thom :

$$H^1(\Lambda_i \setminus Z, G) \simeq H_{\Lambda_i \setminus Z}^{2n+1}(T^*X \setminus Z, G)$$

$$H^1(\tilde{\Lambda}_i \setminus \tilde{Z}, G) \simeq H_{\tilde{\Lambda}_i \setminus \tilde{Z}}^{2(m+n)+1}(T^*(\mathbb{C}^m \times X) \setminus \tilde{Z}, G)$$

pour transporter les classes  $\lambda_i$  et  $\tilde{\lambda}_i$  et obtenir :

$$\lambda_i \in H_{\Lambda_i \setminus Z}^{2n+1}(T^*X \setminus Z, G)$$

$$\tilde{\lambda}_i \in H_{\tilde{\Lambda}_i \setminus \tilde{Z}}^{2(m+n)+1}(T^*(\mathbb{C}^m \times X) \setminus \tilde{Z}, G)$$

En appliquant le lemme 1.6.11, on obtient un isomorphisme :

$$H_{\Lambda_i \setminus Z}^{2n+1}(T^*X \setminus Z, G) \simeq H_{\tilde{\Lambda}_i \setminus \tilde{Z}}^{2(m+n)+1}(T^*(\mathbb{C}^m \times X) \setminus \tilde{Z}, G)$$

LEMME 2.6.3 *Les classes  $\lambda_i$  et  $\tilde{\lambda}_i$  se correspondent par l'isomorphisme précédent.*

*Preuve.*

On démarre avec une classe  $\lambda_i \in H^1(\Lambda_i \setminus Z, G)$  et une classe

$$\tilde{\lambda}_i \in H^1(\tilde{\Lambda}_i \setminus \tilde{Z}, G).$$

On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times (\Lambda_i \setminus Z) & \xrightarrow{\tilde{j}_i} & T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times (T^*X \setminus Z) \\ \downarrow p_{\pi i} & & \downarrow p_{\pi} \\ \Lambda_i \setminus Z & \xrightarrow{j_i} & T^*X \setminus Z \end{array}$$

Puisque  $T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m$  est une variété contractile, quand on applique le foncteur  $\mathbf{R}\Gamma(T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times (T^*X \setminus Z), \cdot)$  à l'isomorphisme du changement de base propre :

$$(\tilde{j}_i)_* \underline{G}_{T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times (\Lambda_i \setminus Z)} = p_{\pi}^{-1} (j_i)_* \underline{G}_{\Lambda_i \setminus Z}$$

on obtient l'isomorphisme  $H^1(T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times (\Lambda_i \setminus Z), G) = H^1(\Lambda_i \setminus Z, G)$  induit par la contraction de  $T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m$ .

D'après le lemme 2.6.2, les classes  $\lambda_i$  et  $\tilde{\lambda}_i$  se correspondent dans cet isomorphisme.

Ensuite, on commence par transporter par isomorphisme de Thom  $\lambda_i$  dans  $H_{\Lambda_i \setminus Z}^{2n+1}(T^*X \setminus Z, G)$  et  $\tilde{\lambda}_i$  dans  $H_{T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times (\Lambda_i \setminus Z)}^{2n+1}(T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times (T^*X \setminus Z), G)$ .

Les deux classes  $\lambda_i$  et  $\tilde{\lambda}_i$  se correspondent alors dans l'isomorphisme induit par l'égalité des faisceaux

$$p_{\pi}^{-1} \mathbf{R}\Gamma_{\Lambda_i \setminus Z} \underline{G}_{T^*X \setminus Z} = \mathbf{R}\Gamma_{T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times (\Lambda_i \setminus Z)} \underline{G}_{T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times (T^*X \setminus Z)}$$

du lemme 1.6.9.

Enfin, notons que l'inclusion fermée  $T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \hookrightarrow T^*\mathbb{C}^m$  induit l'inclusion fermée :

$$T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times (T^*X \setminus Z) \hookrightarrow T^*(\mathbb{C}^m \times X) \setminus \tilde{Z}$$

et induit un isomorphisme de Thom qui permet de transporter la classe  $\tilde{\lambda}_i$  dans  $H_{\tilde{\Lambda}_i \setminus \tilde{Z}}^{2(m+n)+1}(T^*(\mathbb{C}^m \times X) \setminus \tilde{Z}, G)$  et que d'après le lemme 1.6.12, on retombe bien sur la même classe  $\tilde{\lambda}_i$  que si on était passé directement par un isomorphisme de Thom de  $H^1(\tilde{\Lambda}_i \setminus \tilde{Z}, G)$  à  $H_{\tilde{\Lambda}_i \setminus \tilde{Z}}^{2(m+n)+1}(T^*(\mathbb{C}^m \times X) \setminus \tilde{Z}, G)$ . On en déduit le lemme.  $\square$

On peut maintenant démontrer la proposition 2.6.1.

Pour étudier l'existence du déterminant microlocal de  $\mathcal{F}$ , on regarde le triangle distingué :

$$\mathbf{R}\Gamma_Z \underline{G}_{T^*X} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\Lambda} \underline{G}_{T^*X} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\Lambda \setminus Z} \underline{G}_{T^*X} \xrightarrow{+1}$$

Pour étudier l'existence du déterminant microlocal de  $\mathcal{G}$ , on regarde le triangle distingué :

$$\mathbf{R}\Gamma_{T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times Z} \underline{G}_{T^*(\mathbb{C}^m \times X)} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times \Lambda} \underline{G}_{T^*(\mathbb{C}^m \times X)} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{T_{\mathbb{C}^m}^* \mathbb{C}^m \times (\Lambda \setminus Z)} \underline{G}_{T^*(\mathbb{C}^m \times X)} \xrightarrow{+1}$$

On passe du premier triangle au second en appliquant le foncteur  $\mathbf{R}^t p'_* p_{\pi}^{-1}(\cdot)$  (lemme 1.6.10).

D'après le lemme 2.6.3, puisque les différentes classes  $\lambda_i$  et  $\tilde{\lambda}_i$  se correspondent, si le déterminant microlocal de  $\mathcal{F}$  existe, alors celui de  $\mathcal{G}$  existe aussi et se déduit de celui de  $\mathcal{F}$  par l'isomorphisme induit par le foncteur  $\mathbf{R}^t p'_* p_{\pi}^{-1}(\cdot)$ .  $\square$

## 2.7 Le prolongement sur la section nulle

Dans cette partie, on s'intéresse au prolongement sur la section nulle : on montre qu'en dehors d'un sous-ensemble de codimension 2, on peut se ramener au cas de la dimension 1 déjà traité.

Soit  $X$  une variété analytique complexe de dimension  $n$ , et soit  $\mathcal{F}$  un faisceau pervers sur  $X$ .

$\pi : T^*X \longrightarrow X$  désigne le fibré cotangent.

On pose  $\Lambda = Ch(\mathcal{F})$  et on note comme précédemment  $Z \subset \Lambda$  la partie irrégulière de  $\Lambda$ .

On a une classe  $\lambda_{\mathcal{F}} \in H_{\Lambda \setminus Z}^{2n+1}(T^*X \setminus Z, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ , que l'on cherche à prolonger à  $H_{\Lambda}^{2n+1}(T^*X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ .

Le problème du prolongement étant microlocal, on se focalise dans cette partie sur les points de  $Z \cap T_X^*X$ .

Notons  $S$  l'ensemble des points singuliers de  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire  $S = \pi(\Lambda \setminus T_X^*X)$ . Autrement dit,  $S$  est le plus petit fermé analytique de  $X$  tel  $\mathcal{F}|_{X \setminus S}$  soit un système local en degré 0 sur  $X \setminus S$  (c'est-à-dire que  $X \setminus S$  est la "strate ouverte" de  $\mathcal{F}$ ).

On a l'égalité :  $S = Z \cap T_X^*X$ , si  $S$  est vu comme un sous-ensemble de  $T_X^*X$ .

Pour le problème du prolongement, on peut négliger un sous-ensemble de  $Z$ , de codimension 2 dans  $\Lambda$  (lemme 2.3.1), c'est-à-dire un ensemble de dimension inférieure ou égale à  $n - 2$ .

Si  $S$  n'est pas une hypersurface de  $X$ , alors la dimension de  $S$  est inférieure ou égale à  $n - 2$  et donc on peut négliger entièrement  $S$  dans le problème du prolongement : la section nulle ne "compte" pas.

Si  $S$  est une hypersurface alors on peut supposer qu'on se trouve en un point lisse de  $S$ .

En effet, l'ensemble des points singuliers de  $S$  est de dimension inférieure ou égale à  $n - 2$  (de codimension au moins 1 dans  $S$ ) et peut donc être négligé. Comme on se trouve en un point lisse de l'hypersurface  $S$ , on choisit alors un système de coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$  sur  $X$  dans lesquelles  $S$  s'écrit  $S = \{(x_1, \dots, x_n) / x_1 = 0\}$ .

On se retrouve alors localement dans la situation suivante :  $X = \mathbb{C}^n$  et  $\mathcal{F}$  est un faisceau pervers sur  $\mathbb{C}^n$  relativement à  $\{0\} \times \mathbb{C}^{n-1}$ .

Notons  $q$  la projection  $q : \mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}$ .



LEMME 2.7.1 *Il existe un faisceau pervers  $\tilde{\mathcal{F}}$  sur  $\mathbb{C}$  relativement à  $\{0\}$  tel que  $\mathcal{F} = q^{-1}\tilde{\mathcal{F}}$ .*

*Preuve.*

D'après sa stratification,  $\mathcal{F}$  est un complexe de faisceaux à cohomologie constante sur les fibres contractiles de  $q$ .

On peut donc appliquer la proposition 2.7.8 de [KS], et le morphisme naturel  $q^{-1}\mathbf{R}q_*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$  est un isomorphisme.

Si on note  $i$  l'inclusion de niveau 0,  $i : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $i(x) = (x, 0, \dots, 0)$ , on en déduit donc que le morphisme naturel  $\mathbf{R}q_*\mathcal{F} = i^{-1}q^{-1}\mathbf{R}q_*\mathcal{F} \longrightarrow i^{-1}\mathcal{F}$  est un isomorphisme.

Ainsi, on peut écrire que  $\mathcal{F} = q^{-1}\mathbf{R}q_*\mathcal{F} = q^{-1}i^{-1}\mathcal{F}$ .

Enfin, comme le sous-espace  $\mathbb{C} \times \{0\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$  est non caractéristique pour  $\mathcal{F}$ , on en déduit que  $\tilde{\mathcal{F}} := i^{-1}\mathcal{F}$  est un faisceau pervers sur  $\mathbb{C}$ , relativement à  $\{0\}$ .

On a donc bien écrit  $\mathcal{F} = q^{-1}\tilde{\mathcal{F}}$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{F}$  est le faisceau pervers  $\tilde{\mathcal{F}}$  sur  $\mathbb{C}$  avec le paramètre  $\mathbb{C}^{n-1}$ .  $\square$

LEMME 2.7.2 *Le déterminant microlocal de  $\mathcal{F}$  se prolonge au-dessus des points de la section nulle en dehors d'un sous-ensemble de codimension 2.*

*Preuve.*

D'après le lemme précédent, en dehors d'un sous-ensemble de dimension inférieure ou égale à  $n - 2$ , le problème du prolongement du déterminant microlocal se ramène localement à celui d'un faisceau pervers  $\mathcal{F} = q^{-1}\tilde{\mathcal{F}}$  où  $\tilde{\mathcal{F}}$  est un faisceau pervers en dimension 1 et  $q$  est une projection du type  $\mathbb{C}^m \times X \longrightarrow X$ .

Il suffit alors d'appliquer la proposition 2.6.1 et les résultats en dimension 1 pour terminer la démonstration du lemme.  $\square$

## 2.8 Un peu de géométrie symplectique

Dans cette partie, on présente quelques résultats de géométrie symplectique qui seront utilisés par la suite.

Soit  $X$  une variété analytique complexe lisse. On note  $T^*X$  son fibré cotangent et  $\pi_X : T^*X \rightarrow X$  la projection. On note  $\alpha_X$  la 1-forme de Liouville et  $\sigma_X$  la 2-forme symplectique sur  $T^*X$ . Si on choisit des coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$  sur  $X$  et que l'on note  $(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$  les coordonnées associées sur  $T^*X$  (c'est-à-dire que  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  sont les coordonnées dans la fibre relativement à la base  $(dx_1, \dots, dx_n)$ ), alors  $\alpha_X$  s'écrit localement  $\alpha_X = \sum_{i=1..n} \xi_i dx_i$  et  $\sigma_X$  s'écrit localement  $\sigma_X = \sum_{i=1..n} d\xi_i \wedge dx_i$ .

### Lagrangienne en position générique

Soit  $\Lambda$  une variété lagrangienne homogène, c'est-à-dire que  $\Lambda$  est un sous-ensemble analytique réduit de  $T^*X$ , que la 1-forme  $\omega_X$  s'annule sur l'ouvert des points lisses de  $\Lambda$ , que  $\Lambda$  est de même dimension que  $X$  et que  $\Lambda$  est homogène pour l'action de  $\mathbb{C}^*$  dans les fibres de  $T^*X$ .

Soit  $p$  un point de  $\Lambda \setminus T_X^*X$ . On dit que  $\Lambda$  est en position générique au point  $p$ , si au voisinage de  $p$ , on a  $\Lambda \cap \pi_X^{-1}(\pi_X(p)) = \mathbb{C}^* \cdot p$ .

Par exemple, si  $H \subset X$  est une hypersurface lisse de  $X$ , alors  $T_H^*X$  est en position générique en tout point  $p$  de  $T_H^*X \setminus H$ .

**REMARQUE 2.8.1** Si l'on note  $(t, x_1, \dots, x_n)$  les coordonnées sur  $\mathbb{C}^{n+1}$ , si  $\Lambda$  est une lagrangienne en position générique au point  $p = (0; dt)$ , alors  $\Lambda$  s'écrit localement en  $p$  comme le conormal à une hypersurface  $Y$  définie par un polynôme de Weierstrass  $f(t, \underline{x}) = t^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i(\underline{x})t^i$  (voir [ABG], II.2.4; [Bj], A.VII.4.11).

### Transformations symplectiques homogènes

Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés analytiques complexes.

Soient  $\Omega_X$  un ouvert de  $T^*X$  et  $\Omega_Y$  un ouvert de  $T^*Y$ .

Soit  $\varphi : \Omega_X \rightarrow \Omega_Y$  une application.  $\varphi$  est appelée *transformation symplectique homogène* ou *transformation canonique* si  $\varphi$  est un isomorphisme analytique,  $\varphi$  envoie  $\alpha_Y$  sur  $\alpha_X$ ,  $\varphi$  est homogène pour l'action de  $\mathbb{C}^*$  dans les fibres de  $T^*X$  et  $T^*Y$ .

Une autre manière de traduire que  $\varphi$  est une transformation canonique est de supposer que  $\varphi$  est un isomorphisme et de demander à son co-graphe

$$\Gamma_\varphi^a = \{(\underline{x}, -\underline{\xi}; \underline{y}, \underline{\eta}) \in \Omega_X \times \Omega_Y; \varphi(x, \xi) = (y, \eta)\}$$

d'être une lagrangienne homogène de  $T^*(X \times Y) = T^*X \times T^*Y$  ([P1], 4.7.2 page 294).

Ainsi, une classe importante de transformations canoniques est celles dont le co-graphe est le conormal à une hypersurface lisse  $S \subset X \times Y$  :

$\Gamma_\varphi^a = T_S^*(X \times Y) \cap (\Omega_X^a \times \Omega_Y)$ . On peut montrer que toute transformation canonique se décompose localement comme le produit d'au plus deux transformations canoniques de ce type ([KS], corollaire A.2.8 page 486).

Par exemple, si  $X = \mathbb{C}^{n+1}$  avec les coordonnées  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  sur  $X$  et  $(x_0, x_1, \dots, x_n; \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$  sur  $T^*X$  et  $Y = \mathbb{C}^{n+1}$  avec les coordonnées  $(y_0, y_1, \dots, y_n)$  sur  $Y$  et  $(y_0, y_1, \dots, y_n; \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n)$  sur  $T^*Y$ , on définit la transformation canonique de Legendre comme suit.

Dans  $X \times Y$  on regarde l'hypersurface

$$S = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in X \times Y; x_0 - y_0 + \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = 0\}$$

On définit alors la transformation de Legendre comme étant la transformation canonique  $\varphi : T^*X \setminus \{\xi_0 = 0\} \longrightarrow T^*Y \setminus \{\eta_0 = 0\}$  dont le co-graphe est le conormal  $T_S^*(X \times Y)$ .

En coordonnées, la transformation de Legendre s'écrit :

$$y_0 = x_0 + \frac{1}{\xi_0} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \xi_i$$

$$y_i = \frac{\xi_i}{\xi_0}, \text{ pour } i = 1 \text{ à } n$$

$$\eta_0 = \xi_0$$

$$\eta_i = -\xi_0 \cdot x_i, \text{ pour } i = 1 \text{ à } n.$$

Par définition, une transformation canonique envoie variété lagrangienne homogène sur variété lagrangienne homogène.

## Se ramener en position générique

Soit  $\Lambda$  une variété lagrangienne homogène de  $T^*X$ . Soit  $p \in \Lambda \setminus T_X^*X$ . Dans [KK] (pages 859-860), il est montré qu'il existe toujours une transformation canonique  $\varphi$  telle que  $\varphi(\Lambda)$  soit en position générique au point  $\varphi(p)$ .

La démonstration est la suivante.

Soit  $\Lambda$  une variété lagrangienne homogène de  $T^*X$  et  $p \in \Lambda \setminus T_X^*X$ .

La 2-forme canonique sur  $T^*X$  munit l'espace tangent  $T_p(T^*X)$  à  $T^*X$  au point  $p$  d'une structure de  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel symplectique.

Soit  $C_p(\Lambda)$  le cône tangent (complexe) à  $\Lambda$  au point  $p$ .

On note  $\mu$  la droite de l'espace vectoriel  $T_p(T^*X)$ ,  $\mu = T_p(\mathbb{C} \cdot p)$  et on note  $E$  le quotient  $E = \mu^\perp / \mu \subset T_p(T^*X) / \mu$ .

$E$  est muni d'une structure symplectique héritée de celle de  $T_p(T^*X)$ .

On a  $C_p(\Lambda) \subset \mu^\perp$  et  $C_p(\Lambda) / \mu$  est une variété lagrangienne de  $E$  (voir [KK], page 860).

De plus,  $C_p(\Lambda) / \mu$  est conique dans  $E$ .

Alors, on peut trouver un sous-espace lagrangien linéaire  $\bar{\lambda} \subset E$  tel que  $\bar{\lambda} \cap (C_p(\Lambda) / \mu) = \{0\}$ . ([KK], proposition 1.6.1).

En outre, le choix d'un tel  $\bar{\lambda}$  est générique au sens au sens suivant : si on note  $Lag(E)$  l'espace de tous les sous-espaces lagrangiens linéaires de  $E$ , alors

$$Y = \{\lambda \in Lag(E) / \lambda \cap (C_p(\Lambda) / \mu) \not\subset \{0\}\}$$

est un sous-espace algébrique, propre, fermé de  $Lag(E)$  ([KK], corollaire 1.6.2).

Soit  $\bar{\lambda}$  un tel sous-espace.

Alors  $\bar{\lambda}$  se remonte en  $\lambda$ , sous-espace lagrangien linéaire de  $T_p(T^*X)$  tel que  $\lambda \cap C_p(\Lambda) = \mu$ .

Une transformation canonique  $\varphi$  telle que  $D\varphi_p(\lambda) = T_{\varphi(p)}(\pi_Y^{-1}\pi_Y(\varphi(p)))$  ramène  $\Lambda$  en position générique au point  $p$ . Une telle transformation existe toujours.

Plus précisément, on a le résultat suivant :

LEMME 2.8.2 (Voir [Bj], A.VII.4.8 page 561)

Dans  $\mathbb{C}^{n+1}$ , quitte à faire un changement quadratique de coordonnées de la forme

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_0 + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} \cdot x_i \cdot x_j, x_1, \dots, x_n)$$

la transformation de Legendre ramène en position générique au point  $(0; dy_0)$  n'importe quelle lagrangienne homogène contenant le point  $p = (0; dx_0)$ .

*Preuve.* La transformation de Legendre est liée à la dualité projective, et les conormaux à des sous-espaces linéaires se comportent mal par transformation de Legendre : un changement quadratique de coordonnées permet d'introduire suffisamment de courbure pour éviter ce défaut.

Pour cela, on introduit des transformations de Legendre généralisées. Ce sont les transformations

$$\varphi_A : T^*\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\xi_0 = 0\} \longrightarrow T^*\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\eta_0 = 0\}$$

dont le co-graphe est le conormal à l'hypersurface

$$S_A = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}; x_0 - y_0 + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = 0\}.$$

La transformation  $\varphi_A$  s'écrit alors en coordonnées :

$$y_0 = x_0 + \frac{1}{\xi_0}(\underline{x} \cdot \underline{\xi}) - \underline{x} \cdot A \underline{x}$$

$$\underline{y} = \frac{1}{\xi_0} \cdot \underline{\xi} - 2 \cdot A \underline{x}$$

$$\eta_0 = \xi_0$$

$$\underline{\eta} = -\xi_0 \cdot \underline{x}$$

où  $\underline{x}$ ,  $\underline{\xi}$ ,  $\underline{y}$  et  $\underline{\eta}$  désignent respectivement les vecteurs de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $(y_1, \dots, y_n)$  et  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ ,

et  $A$  désigne la matrice symétrique  $n \times n$ ,  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ ,

$$a_{i,i} = a_{i,i}, 1 \leq i \leq n \quad \text{et} \quad a_{i,j} = a_{j,i} = \frac{1}{2}a_{i,j}, 1 \leq i < j \leq n.$$

On a  $\varphi_A(p_X) = p_Y$  où  $p_X = (\underline{0}, dx_0)$  et  $p_Y = (\underline{0}, dy_0)$ .

La différentielle  $(D\varphi_A)_{p_X}$  est donnée par la matrice symplectique

$2(n+1) \times 2(n+1)$  :

$$(D\varphi_A)_{p_X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & & 0 & & \\ \vdots & & -2 \cdot A & & \vdots & & Id_{n \times n} & \\ 0 & & & & 0 & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & 0 & & & \\ \vdots & & -Id_{n \times n} & & \vdots & & 0_{n \times n} & \\ 0 & & & & 0 & & & \end{pmatrix}$$

La démonstration du fait que l'on peut toujours ramener une variété lagrangienne  $\Lambda$  en position générique passe par le choix d'un sous-espace lagrangien  $\bar{\lambda}$  de  $\mu^\perp/\mu$  ( où  $\mu = T_{p_X}(\mathbb{C}^* p_X)$  ) tel que  $\bar{\lambda} \cap C_{p_X}(\Lambda)/\mu = \{0\}$ .

La différentielle  $(D\varphi_A)_{p_X}$  induit l'application  $(\widetilde{D\varphi_A})_{p_X}$  sur l'espace vectoriel  $\mu^\perp/\mu$  dont la matrice s'écrit :

$$(\widetilde{D\varphi_A})_{p_X} = \begin{pmatrix} -2.A & Id_{n \times n} \\ -Id_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{pmatrix}$$

Pour montrer qu'il existe une transformation du type  $\varphi_A$  qui ramène  $\Lambda$  en position générique, il suffit de montrer que l'on peut trouver  $\bar{\lambda}$  et  $A$  tels que  $\bar{\lambda} \cap C_{p_X}(\Lambda)/\mu = \{0\}$  et  $(\widetilde{D\varphi_A})_{p_X}(\bar{\lambda}) = T_{p_Y}(\pi_Y^{-1}\pi_Y(p_Y))/\mu$ .

Or un sous-espace lagrangien linéaire  $\bar{\lambda}$  de  $\mu^\perp/\mu$  s'écrit :

$$\bar{\lambda} = \{ (\underline{x}, \underline{\xi}) / M\underline{x} = N\underline{\xi} \}$$

où  $(\underline{x}, \underline{\xi}) = (x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$  désignent les coordonnées symplectiques sur  $\mu^\perp/\mu$  héritées de celles de  $T_{p_X}(T^*X)$ , et  $M, N$  désignent des matrices  $n \times n$  telles que  $(M, N)$  soit de rang  $n$  et  $M^t N$  soit symétrique (voir [KS] page 480).

On a alors

$$(\widetilde{D\varphi_A})_{p_X}(\bar{\lambda}) = \{ (\underline{y}, \underline{\eta}) / N\underline{y} = (-M + 2NA)\underline{\eta} \}$$

$$\text{et } (\widetilde{D\varphi_A})_{p_X}(\bar{\lambda}) = T_{p_Y}(\pi_Y^{-1}\pi_Y(p_Y))/\mu = \{ (\underline{y}, \underline{\eta}) / \underline{y} = 0 \}$$

si  $N$  est inversible et  $A = \frac{1}{2}N^{-1}M$ .

Or, le fait d'avoir  $N$  inversible est une condition générique sur les sous-espaces lagrangiens linéaires puisque cela correspond à avoir  $\bar{\lambda} \cap \{\underline{x} = 0\} = \{0\}$  ([KS], Appendice, page 480).  $\square$

## 2.9 Comportement des faisceaux constants par transformation de Legendre

On se place dans la situation suivante.

$X, Y$  sont deux copies de  $\mathbb{C}^{n+1}$ , avec les coordonnées respectives  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ .

On note  $\pi_X : T^*X \rightarrow X$  et  $\pi_Y : T^*Y \rightarrow Y$  les fibrés cotangents, munis des coordonnées  $(x_0, x_1, \dots, x_n; \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$  et  $(y_0, y_1, \dots, y_n; \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n)$ .

$\varphi : T^*X \setminus \{\xi_0 = 0\} \rightarrow T^*Y \setminus \{\eta_0 = 0\}$  désigne la transformation de Legendre, dont le cographe est le conormal à la variété d'incidence

$$S = \{x_0 - y_0 + \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = 0\} \subset X \times Y.$$

$q_1, q_2$  désignent les deux projections

$$\begin{array}{ccc} & X \times Y & \\ q_1 \swarrow & & \searrow q_2 \\ X & & Y \end{array}$$

$\underline{\mathbb{Z}}_S$  désigne le faisceau constant de fibre  $\mathbb{Z}$  sur  $S$  étendu par zéro à  $X \times Y$ .

On regarde le foncteur  $\tilde{\varphi} : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$  défini pour tout  $\mathcal{F} \in \text{Ob}(D^b(X))$ , par :

$$\tilde{\varphi}\mathcal{F} = \mathbf{R}q_{2!}(q_1^{-1}\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}} \underline{\mathbb{Z}}_S)$$

$\tilde{\varphi}(\cdot)$  est une transformation faisceautique associée à la transformation de Legendre (voir [KS], §7.2).

On pose  $p_X = (0; dx_0) \in T^*X$  et  $p_Y = (0; dy_0) = \varphi(p_X) \in T^*Y$ .

Soit  $M$  un sous-espace analytique réduit de  $X$ .

$\underline{\mathbb{Z}}_M$  désigne le faisceau constant de fibre  $\mathbb{Z}$  sur  $M$  étendu par zéro à  $X$ .

A  $M$  correspond par  $\varphi$  un sous-espace analytique  $N$  de  $Y$ .

Précisément,  $N$  est défini par  $\varphi(T_M^*X \cap \{\xi_0 \neq 0\}) = T_N^*Y \cap \{\eta_0 \neq 0\}$ .

Dans cette partie, on va montrer que si  $T_N^*Y$  est en position générique au point  $p_Y$ , alors il existe un voisinage  $\Omega_Y$  de  $p_Y$  et un fermé analytique  $Q$  de codimension 1 dans  $T_N^*Y$  tel que  $\mu_N(\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_M)|_{(T_N^*Y \setminus Q) \cap \Omega_Y}$  est un faisceau localement constant de fibre  $\mathbb{Z}$  sur  $(T_N^*Y \setminus Q) \cap \Omega_Y$  (proposition 2.9.9).

Pour cela, on remarque que l'étude de  $\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_M$  se ramène à celle du faisceau  $\mathbf{R}q_*\underline{\mathbb{Z}}_Z$ , où  $q : Z \rightarrow Y$  et la restriction à  $Z = q_1^{-1}(M^{reg}) \cap S$  de la projection  $q_2$ .

L'hypothèse " $T_N^*Y$  en position générique au point  $p_Y$ " se traduit sur l'application  $q$  par le fait que  $q$  n'a que des points critiques quadratiques qui se projettent tous sur  $N$  (lemmes 2.9.3, 2.9.5, 2.9.6).

Le calcul du microlocalisé  $\mu_N(\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_M)$  se ramène alors au calcul classique des cycles évanescents d'une singularité quadratique.

### Un exemple introductif

Dans  $\mathbb{C}^2$ , si  $M$  désigne le cusp  $M = \{(x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2 / x_0^2 = x_1^3\}$ , alors on a :

$$\varphi(T_M^*\mathbb{C}^2 \cap \{\xi_0 \neq 0\}) = T_N^*\mathbb{C}^2 \cap \{\eta_0 \neq 0\}$$

où  $N$  désigne la cubique lisse  $N = \{(y_0, y_1) \in \mathbb{C}^2 / 27y_0 = 4y_1^3\}$ .

Inversement, le conormal à la cubique lisse d'équation  $x_0 = x_1^3$  est envoyé par la transformation de Legendre sur le conormal à un cusp.

Cet exemple montre que même si la transformation de Legendre est un isomorphisme sur des ouverts du fibré cotangent et même si les conormaux  $T_M^*X$  et  $T_N^*Y$  se correspondent par Legendre, on peut se trouver au-dessus d'un point singulier de  $M$  et être envoyé au-dessus d'un point lisse de  $N$  et inversement.

Comme on veut calculer le transformé  $\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_M$  en vue de contrôler le comportement du foncteur microlocalisation de Sato  $\mu_M(\cdot)$  par transformation canonique, on ne va s'intéresser à  $\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_M$  qu'aux points lisses de  $N$  qui proviennent de points lisses de  $M$ .

C'est-à-dire qu'au départ on va enlever les points singuliers de  $M$  et à l'arrivée les points singuliers de  $N$ .

Ainsi, sur notre exemple, on travaille au départ sur  $M \setminus \{(0, 0)\}$  et à l'arrivée sur  $N \setminus \{y_0 = 0\} = N \setminus \{(0, 0)\}$  (puisque  $M^{sing} = \{(0, 0)\}$  et  $\varphi(T_{0,0}^*\mathbb{C}^2) = T_{\{y_0=0\}}^*\mathbb{C}^2$ ).

On suppose que  $p_X \in T_M^*X$ .

On peut raffiner la stratification de  $X$ ,  $\{X \setminus M, M\}$  en une stratification de Whitney :  $\{X \setminus M, M_m = M^{reg} = M \setminus M^{sing}, M_{m-1}, \dots, M_0\}$ , où  $M_i$  ( $0 \leq i \leq m-1$ ) désigne la strate de dimension  $i$  ( $m$  désigne la dimension de  $M$ ). Notons  $\Lambda_M = \bigcup_{0 \leq i \leq m} T_{M_i}^*X$ . On a  $Ch(\underline{\mathbb{Z}}_M) \subset \Lambda_M$ .

**On suppose que  $\varphi(\Lambda_M \cap \{\xi_0 \neq 0\})$  est en position générique en  $p_Y$ .**

$N$  désigne l'hypersurface analytique de  $Y$  telle que

$$\varphi(T_M^*X \cap \{\xi_0 \neq 0\}) = T_N^*Y \cap \{\eta_0 \neq 0\}$$



On va étudier microlocalement le faisceau  $\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_M$ , au voisinage de  $T_N^*Y$  et seulement au-dessus des points lisses de  $N$  qui proviennent de points lisses de  $M$  : on va donc s'intéresser au faisceau  $\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_{M^{reg}}$ , où  $M^{reg}$  désigne l'ouvert des points lisses de  $M$ .

Le lemme suivant permet de contrôler la variété caractéristique de ce que l'on néglige en passant de  $\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_M$  à  $\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_{M^{reg}}$ .

LEMME 2.9.1 *Soit  $\mathcal{F}$  un objet de  $D^b(X)$ . On a :*

$$Ch(\tilde{\varphi}\mathcal{F}) \cap \{\eta_0 \neq 0\} = \varphi(Ch(\mathcal{F}) \cap \{\xi_0 \neq 0\})$$

*Preuve.*

On utilise le bifoncteur  $\mu hom(., .)$  de [KS] qui se comporte bien par transformation canonique.

Pour  $\mathcal{F} \in Ob(D^b(X))$ , on a ([KS] corollaire 6.1.3) :

$$\text{supp } \mu hom(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = Ch(\mathcal{F})$$

D'autre part, pour  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in Ob(D^b(X))$ , on a ([KS], théorème 7.2.1) :

$$\varphi_*(\mu hom(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_{\{\xi_0 \neq 0\}}) = \mu hom(\tilde{\varphi}\mathcal{F}, \tilde{\varphi}\mathcal{G})|_{\{\eta_0 \neq 0\}}$$

La combinaison de ces deux résultats donne le lemme. □

Dans toute cette partie, on va travailler dans les catégories microlocales  $D^b(X; \Omega)$  de [KS], paragraphe 6.1.

Rappelons que si  $\Omega$  est un sous-ensemble de  $T^*X$ , la catégorie  $D^b(X; \Omega)$  est obtenue en localisant  $D^b(X)$  par rapport au système multiplicatif  $\mathcal{S}_\Omega$  des morphismes dont la variété caractéristique du cône ne rencontre pas le sous-ensemble  $\Omega$  :

$$\mathcal{S}_\Omega = \{s \in Hom_{D^b(X)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}), \mathcal{F}, \mathcal{G} \in Ob(D^b(X)) / Ch(\text{cône}(s)) \cap \Omega = \emptyset\}$$

Ainsi, si l'on a un triangle distingué  $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{+1}$  dans  $D^b(X)$ , si  $Ch(\mathcal{H}) \cap \Omega = \emptyset$ , alors les faisceaux  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont isomorphes dans  $D^b(X; \Omega)$ .

Revenons à notre situation.

LEMME 2.9.2 Si  $\Omega_Y$  est un sous-ensemble de  $T^*Y$  tel que  $\Omega_Y \subset \{\eta_0 \neq 0\} \setminus \varphi(\bigcup_{0 \leq i \leq m-1} T_{M_i}^*X)$ , alors on a un isomorphisme dans  $D^b(Y; \Omega_Y)$  :

$$\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_{M^{reg}} \simeq \tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_M$$

*Preuve.*

On a la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_{M^{reg}} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_M \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_{M^{sing}} \longrightarrow 0$$

On en déduit un triangle distingué :

$$\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_{M^{reg}} \longrightarrow \tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_M \longrightarrow \tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_{M^{sing}} \xrightarrow{+1}$$

On a  $Ch(\underline{\mathbb{Z}}_{M^{sing}}) \subset \bigcup_{0 \leq i \leq m-1} T_{M_i}^*X$ .

Puisque l'on travaille sur un sous-ensemble  $\Omega_Y \subset \{\eta_0 \neq 0\} \setminus \varphi(\bigcup_{0 \leq i \leq m-1} T_{M_i}^*X)$ , on a alors d'après le lemme 2.9.1 un isomorphisme dans  $D^b(Y; \Omega_Y)$  :

$$\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_{M^{reg}} \simeq \tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_M$$

□

On étudie donc  $\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_{M^{reg}}$ .

On a :  $\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_{M^{reg}} = \mathbf{R}q_{2!}(\underline{\mathbb{Z}}_{M^{reg}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \underline{\mathbb{Z}}_S) = \mathbf{R}q_{2!}\underline{\mathbb{Z}}_{q_1^{-1}(M^{reg}) \cap S}$

On pose donc  $Z = q_1^{-1}(M^{reg}) \cap S \subset X \times Y$  et  $q = q_{2|Z}$ .

On a alors  $\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_{M^{reg}} = \mathbf{R}q_!\underline{\mathbb{Z}}_Z$ .

### Un cas particulier : si $M$ est réduit à un point

Quand  $M = \{\underline{0}\}$ , on a  $\varphi(T_{\{\underline{0}\}}^*X \cap \{\xi_0 \neq 0\}) = T_{\{y_0=0\}}^*Y \cap \{\eta_0 \neq 0\}$ .

C'est-à-dire, avec les notations précédentes  $N = \{y_0 = 0\}$ .

On a alors  $Z = q_1^{-1}(\underline{0}) \cap S = \{x_0 = x_1 = \dots = x_n = y_0 = 0\} \subset X \times Y$ .

L'application  $p : \mathbb{C}^n \longrightarrow X \times Y$

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto ((0, \dots, 0); (0, y_1, \dots, y_n))$$

est une paramétrisation de  $Z$ .

L'application  $q = q_{2|Z}$  se lit alors via  $p$  :

$$q : \mathbb{C}^n \longrightarrow Y = \mathbb{C}^{n+1} \\ (y_1, \dots, y_n) \mapsto (0, y_1, \dots, y_n)$$

On a donc  $\tilde{\varphi}\mathbb{Z}_{\{0\}} = \mathbf{R}q:\mathbb{Z}_{\mathbb{C}^n} = \mathbb{Z}_{\{y_0=0\}}$ .

### Cas général : $\dim M \geq 1$

#### Etude géométrique de $q$

$q$  est l'application  $q = q_2|_Z : Z = q_1^{-1}(M^{reg}) \cap S \longrightarrow Y$ .

On rappelle que  $N \subset Y$  est tel que  $\varphi(T_M^*X \cap \{\xi_0 \neq 0\}) = T_N^*Y \cap \{\eta_0 \neq 0\}$ .

LEMME 2.9.3 Soit  $(a, b) \in Z \subset X \times Y$ .

$(a, b)$  est un point critique de  $q$  si et seulement si il existe  $\alpha \in T_a^*X$ ,  $\beta \in T_b^*Y$  tels que  $(a; \alpha) \in T_{M^{reg}, a}^*X \cap \{\xi_0 \neq 0\}$  et  $\varphi(a; \alpha) = (b; \beta)$ .

REMARQUE 2.9.4 Puisque  $\varphi(T_M^*X \cap \{\xi_0 \neq 0\}) = T_N^*Y \cap \{\eta_0 \neq 0\}$ , on a alors  $(b; \beta) \in T_N^*Y$  : les seuls points critiques de l'application  $q$  se trouvent au-dessus de  $N$ ; autrement dit, le discriminant de  $q$  est contenu dans  $N$ .

*Preuve.*

L'hypersurface  $S \in X \times Y = \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$  peut être paramétrée par :

$$f : \quad \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow X \times Y = \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$$

$$((x_0, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto ((x_0, \dots, x_n), (y_0 = x_0 + \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i, y_1, \dots, y_n))$$

On peut alors voir  $g = q_2|_S$  de la manière suivante :

$$g : \quad \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow Y = \mathbb{C}^{n+1}$$

$$((x_0, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto (y_0 = x_0 + \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i, y_1, \dots, y_n)$$

Alors, l'application  $q = q_2|_{q_1^{-1}(M^{reg}) \cap S}$  se lit simplement comme la restriction de  $g : \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$  à  $M^{reg} \times \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^n$  :

$$\begin{array}{ccc} M^{reg} \times \mathbb{C}^n & \hookrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^n \\ & \searrow q & \downarrow g \\ & & \mathbb{C}^{n+1} \end{array}$$

Dans cette interprétation  $q = g|_{M^{reg} \times \mathbb{C}^n}$ , le point

$(a, b) = ((a_0, \dots, a_n), (b_0, \dots, b_n)) \in Z \subset X \times Y$  correspond au point

$(a, \tilde{b}) = ((a_0, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \in M^{reg} \times \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^n$ .

On note  $(g_0(\underline{x}, \tilde{y}), g_1(\underline{x}, \tilde{y}), \dots, g_n(\underline{x}, \tilde{y}))$  les applications coordonnées associées à  $g$  (c'est-à-dire que  $g_0(\underline{x}, \tilde{y}) = x_0 + \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$  et  $g_j(\underline{x}, \tilde{y}) = y_j$ ,

pour  $j = 1$  à  $n$ ).

Dans cette écriture, le point  $(a, \tilde{b}) \in M^{reg} \times \mathbb{C}^n$  est un point critique de la restriction de  $g$  à  $M^{reg} \times \mathbb{C}^n$  si et seulement si il existe des coefficients complexes  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$  non tous nuls tels que

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i \cdot dg_i(a, \tilde{b}) \in T_{M^{reg} \times \mathbb{C}^n, (a, \tilde{b})}^* \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^n$$

$$\text{Or } T_{M^{reg} \times \mathbb{C}^n}^* \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^n = T_{M^{reg}}^* \mathbb{C}^{n+1} \times T_{\mathbb{C}^n}^* \mathbb{C}^n \subset T^*(\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^n) \\ = (T^* \mathbb{C}^{n+1}) \times (T^* \mathbb{C}^n).$$

On a donc forcément  $\lambda_0 \neq 0$  ( $\lambda_0 = 0$  impose  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ ),  $\lambda_i = -a_i \cdot \lambda_0$ , pour  $i = 1$  à  $n$ , et  $\lambda_0(dx_0 + \sum_{i=1}^n b_i \cdot dx_i) \in T_{M^{reg}, a}^* \mathbb{C}^{n+1}$ .

On vérifie qu'alors  $\varphi(a_0, \dots, a_n; \lambda_0, \lambda_0 \cdot b_1, \dots, \lambda_0 \cdot b_n)$   
 $= (b_0 = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i, b_1, \dots, b_n; \lambda_0, -\lambda_0 \cdot a_1, \dots, -\lambda_0 \cdot a_n)$  : ce sont les couples  $(a, \alpha)$  et  $(b, \beta)$  de l'énoncé.

Réciproquement, si on se donne 2 couples  $(a, \alpha)$  et  $(b, \beta)$  comme dans l'énoncé, si on pose  $\lambda_0 = \alpha_0$  et  $\lambda_i = -\alpha_0 \cdot a_i$ , alors  
 $\sum_{i=0}^n \lambda_i \cdot dg_i(a, \tilde{b}) \in T_{M^{reg} \times \mathbb{C}^n, (a, \tilde{b})}^* \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^n$  et  $(a, b)$  est bien un point critique de  $q$ .  $\square$

On écrit une sorte de réciproque de ce lemme. Toutefois, on ne peut travailler qu'aux points lisses de  $N$  qui proviennent par  $\varphi$  de points lisses de  $M$ .

On pose donc  $\tilde{N} = N \setminus (N^{sing} \cup \pi_Y(\varphi((\bigcup_{0 \leq i \leq m-1} T_{M_i}^* X) \cap \{\xi_0 \neq 0\})))$   
(à  $N$ , on enlève les points singuliers de  $N$  et les points de  $N$  qui proviennent de points singuliers de  $M$ ).

**LEMME 2.9.5** *Soit  $b \in \tilde{N}$ . Il existe un unique point  $(a, b) \in Z \subset X \times Y$  point critique de  $q$ .*

*Preuve.* Puisque  $T_N^* Y$  est supposé être en position générique au point  $p_Y$ ,  $N$  est une hypersurface de  $Y$ . Comme  $b$  est un point lisse de  $N$ , à un coefficient multiplicatif non nul près, il existe un unique  $\beta \in T_b^* Y$  tel que  $(b, \beta) \in T_{N, b}^* Y$ . Quitte à se placer dans un voisinage de l'origine, puisque  $p_Y \in T_N^* Y$ , on a  $(b, \beta) \in \{\eta_0 \neq 0\}$ . On pose  $(a, \alpha) = \varphi^{-1}(b, \beta)$ . D'après le lemme précédent,  $(a, b)$  est un point critique de  $q$ . L'unicité du couple  $(a, b)$  provient de l'unicité de la droite  $\mathbb{C}^* \cdot \beta$  et de l'homogénéité de  $\varphi$ .  $\square$

On montre maintenant que l'hypothèse de position générique faite sur  $T_N^* Y$

entraîne que les singularités au-dessus de  $\tilde{N}$  sont les plus simples possibles : elles sont quadratiques.

LEMME 2.9.6 Soit  $b \in \tilde{N}$ . Soit  $(a, b) \in Z$  l'unique point critique de  $q$  au-dessus de  $b$ .

Soit  $m = \dim_{\mathbb{C}} M$ . Au voisinage de  $(a, b)$ , il existe des coordonnées locales sur  $Z$ ,  $(s_1, \dots, s_m; t_1, \dots, t_n)$  et des coordonnées locales  $(u_0, \dots, u_n)$  sur  $Y$  au voisinage de  $b$  telles que  $q$  s'écrive dans ces coordonnées :

$$(s_1, \dots, s_m; t_1, \dots, t_n) \xrightarrow{q} \left( \sum_{i=1}^m s_i^2, t_1, \dots, t_n \right)$$

*Preuve.*

Notons  $Sing(q) \subset Z$  le lieu singulier de  $q$ .

En suivant [L] page 46, puisque  $q$  est équidimensionnelle, il suffit de montrer que :

- ◇  $Sing(q)$  est lisse, réduit, de dimension  $n$
- ◇  $q|_{Sing(q)} : Sing(q) \rightarrow q(Sing(q))$  est une immersion.

$M \subset X$  est de codimension complexe  $r$ . Comme on est au voisinage de l'origine dans  $X = \mathbb{C}^{n+1}$ , et que l'on a supposé que  $p_X = (\underline{0}; dx_0) \in T_M^* X$ , on peut, quitte à permuter les coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  supposer qu'aux points de  $M^{reg}$ , il existe un plongement  $\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow X$  qui paramètre  $M$  :

$$\begin{aligned} x_0 &= \phi_0(x_1, \dots, x_n) \\ x_1 &= \phi_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_{r-1} &= \phi_{r-1}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Une permutation des coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  ne change pas l'expression de la transformation de Legendre.

Localement, l'application  $q : Z \rightarrow Y$  s'écrit :

$$\begin{aligned} q : \mathbb{C}^{n-r+1} \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ (x_1, \dots, x_{n-r+1}; y_1, \dots, y_n) &\mapsto \left( \phi_0(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{r-1} \phi_i(\underline{x}) \cdot y_i + \sum_{i=r}^n x_i \cdot y_i, y_1, \dots, y_n \right) \end{aligned}$$

Posons  $q_0(\underline{x}, \underline{y}) = \phi_0(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{r-1} \phi_i(\underline{x}) \cdot y_i + \sum_{i=r}^n x_i \cdot y_i$ .

La matrice jacobienne de  $q$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial q_0}{\partial x_r} & \cdots & \frac{\partial q_0}{\partial x_n} & \frac{\partial q_0}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial q_0}{\partial y_n} \\ & & 0_{(n-r+1) \times n} & & & Id_{n \times n} \end{pmatrix}$$

$Sing(q)$  est donc déterminé par les  $n - r + 1$  équations

$$\frac{\partial q_0}{\partial x_r} = \dots = \frac{\partial q_0}{\partial x_n} = 0$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_r} + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_r} \cdot y_i + y_r &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_n} \cdot y_i + y_n &= 0 \end{aligned}$$

D'après ces équations,  $Sing(q)$  est lisse, réduit. De plus, les équations étant clairement indépendantes,  $Sing(q)$  est bien de dimension  $n$ .

Pour montrer le lemme, il reste à voir que  $q|_{Sing(q)}$  est une immersion.

Rappelons le diagramme du lemme 2.9.3 :

$$\begin{array}{ccc} M^{reg} \times \mathbb{C}^n & \hookrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^n \\ & \searrow q & \downarrow g \\ & & \mathbb{C}^{n+1} \end{array}$$

Rappelons aussi que le point

$$(\underline{a}, \tilde{\underline{b}}) = (a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in M^{reg} \times \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^n$$

est un point critique de  $q$  si et seulement si

$$\underline{a} \in M^{reg} \text{ et } (dx_0 + \sum_{i=1}^n b_i \cdot dx_i) \in T_{M^{reg}, \underline{a}}^* \mathbb{C}^{n+1}$$

Remarquons que si  $(\underline{a}, \tilde{\underline{b}})$  est un point critique de  $q$ , alors on a :

$$(a_0, \dots, a_n; 1, b_1, \dots, b_n) \in T_{M^{reg}}^* \mathbb{C}^{n+1} \cap \{\xi_0 = 1\}$$

et qu'alors

$$\varphi(a_0, \dots, a_n; 1, b_1, \dots, b_n) = (a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i, b_1, \dots, b_n; 1, -a_1, \dots, -a_n) \in T_N^* \mathbb{C}^{n+1} \cap \{\eta_0 = 1\}$$

avec

$$(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i, b_1, \dots, b_n) = q(a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$$

Ainsi, l'application  $q|_{\text{Sing}(q)}$  peut se lire au travers de  $\varphi$  de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Sing}(q) & \longrightarrow & T_{M^{\text{reg}}}^* X \cap \{\xi_0 = 1\} & \xrightarrow{\varphi|_{\{\xi_0=1\}}} & T_N^* Y \cap \{\eta_0 = 1\} & \xrightarrow{\pi_N} & N \\ (\underline{a}, \underline{\tilde{b}}) & \longmapsto & (\underline{a}; 1, \underline{\tilde{b}}) & \longmapsto & \varphi(\underline{a}; 1, \underline{\tilde{b}}) & \longmapsto & (a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i, b_1, \dots, b_n) \end{array}$$

Puisque l'on a supposé que l'on se trouve au-dessus d'un point lisse de  $N$ , que  $N$  est en position générique, la projection

$$\pi_N|_{\{\eta_0=1\}} : T_N^* Y \cap \{\eta_0 = 1\} \longrightarrow N$$

est un isomorphisme de sorte que les trois applications du diagramme précédent sont toutes des difféomorphismes.

Ainsi,  $q|_{\text{Sing}(q)}$ , composée de ces trois applications, est bien une immersion, ce qui conclut la démonstration du lemme.  $\square$

### Calcul du microlocalisé $\mu_N(\mathbf{R}q! \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}})$

On va calculer le microlocalisé  $\mu_N(\mathbf{R}q! \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}})$  et montrer que c'est un système local de fibre  $\mathbb{Z}$  sur un ouvert dense de  $T_N^* Y$  : ses seules monodromies sont donc  $+$  ou  $-1$ .

Dans un premier temps, on va se ramener à une situation locale : on va montrer que sur un voisinage  $U$  d'un point de  $N$  et dans une catégorie microlocale  $D^b(U, \pi^{-1}(U) \cap \tilde{\Omega}_Y)$  le faisceau  $(\mathbf{R}q! \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}})|_U$  ne dépend que des singularités de  $q$ .

Pour cela, il faut contrôler le comportement du microsupport de certains faisceaux par image directe.

Dans ce but, on va montrer que l'on peut se ramener à une situation propre afin de pouvoir utiliser la majoration de Kashiwara ([KS], proposition 5.4.4).

Soit  $\Omega_Y$  un voisinage du point  $(0; dy_0)$  dans  $T^* Y$ .

$\overline{B}(0, r)$  désigne la boule fermée de  $X = \mathbb{C}^{n+1}$ , centrée à l'origine, de rayon  $r$ .

LEMME 2.9.7 *Quitte à réduire  $\Omega_Y$ , on a un isomorphisme dans  $D^b(Y; \Omega_Y)$  :*

$$\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_{M \cap \overline{B}(0,r)} \simeq \tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_M$$

*Preuve.*

On considère la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_{M \setminus \overline{B}(0,r)} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_M \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_{M \cap \overline{B}(0,r)} \longrightarrow 0$$

qui donne le triangle distingué :

$$\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_{M \setminus \overline{B}(0,r)} \longrightarrow \tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_M \longrightarrow \tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_{M \cap \overline{B}(0,r)} \xrightarrow{+1}$$

Il s'agit de montrer que  $Ch(\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_{M \setminus \overline{B}(0,r)}) \cap \Omega_Y = \emptyset$

Or  $Ch(\underline{\mathbb{Z}}_{M \setminus \overline{B}(0,r)}) \subset \pi_X^{-1}(X \setminus B(0,r))$ , où  $B(0,r)$  désigne la boule ouverte.

Donc  $Ch(\underline{\mathbb{Z}}_{M \setminus \overline{B}(0,r)})$  évite un voisinage du point  $(0; dx_0)$  dans  $T^*X$ .

Puisque  $\varphi$  est un isomorphisme et que  $\varphi(0; dx_0) = (0; dy_0)$ , on en déduit d'après le lemme 2.9.1 que  $Ch(\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_{M \setminus \overline{B}(0,r)})$  évite un voisinage de  $(0; dy_0)$  d'où le lemme.  $\square$

On est donc ramené à une situation propre : on s'intéresse au faisceau

$$\mathbf{R}q_2! \underline{\mathbb{Z}}_{q_1^{-1}(M \cap \overline{B}(0,r)) \cap S}$$

Dans la suite, afin d'éviter d'une part les points singuliers de  $M$  (lemme 2.9.2) et pour travailler d'autre part dans une situation propre (lemme 2.9.7), on va travailler dans la catégorie microlocale  $D^b(Y; \tilde{\Omega}_Y)$  où

$\tilde{\Omega}_Y = (\Omega_Y \cap \{\eta_0 \neq 0\}) \setminus \varphi(\bigcup_{0 \leq i \leq m-1} T_{M_i}^*X)$ ,  $\Omega_Y$  étant un voisinage de  $(0; dy_0)$  dans  $T^*Y$ .

On se place en un point  $y$  de  $\tilde{N}$ , c'est-à-dire en un point lisse de  $N$  qui provient par  $\varphi$  d'un point lisse de  $M$ .

Au dessus de  $y$ , il existe un unique  $z \in q^{-1}(y)$ , point critique de l'application  $q$  (lemme 2.9.5).

Soient  $U$  un voisinage de  $y$  et  $V$  un voisinage de  $z$  tels que  $U \simeq \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$  et  $V \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$  et dans lesquels l'application  $q$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \\ (s_1, \dots, s_m; t_1, \dots, t_n) &\longmapsto (\sum s_i^2, t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

Soit  $B(0, \varepsilon)$  la boule ouverte centrée à l'origine de rayon  $\varepsilon$  dans  $\mathbb{C}^m$ .



LEMME 2.9.8 *Quitte à réduire  $\tilde{\Omega}_Y$  en un voisinage de  $T_N^*Y$ , on a un isomorphisme dans  $D^b(U; \tilde{\Omega}_Y \cap \pi_Y^{-1}(U))$  :*

$$(\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_M)|_U \simeq \mathbf{R}(q|_{B(0,\varepsilon)\times\mathbb{C}^n})!\underline{\mathbb{Z}}_{B(0,\varepsilon)\times\mathbb{C}^n}$$

*Preuve.*

Notons  $\tilde{q}$  l'application  $q_1^{-1}(M \cap \overline{B}(0, r)) \cap S \longrightarrow Y$ , c'est-à-dire l'application  $q$  après s'être ramené à une situation propre (lemme 2.9.7).

On a la suite exacte courte de faisceaux sur  $\tilde{q}^{-1}(U)$  :

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_{B(0,\varepsilon)\times\mathbb{C}^n} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_{\tilde{q}^{-1}(U)} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_{\tilde{q}^{-1}(U)\setminus B(0,\varepsilon)\times\mathbb{C}^n} \longrightarrow 0$$

Il s'agit maintenant de contrôler le comportement du microsupport du faisceau  $\underline{\mathbb{Z}}_{\tilde{q}^{-1}(U)\setminus B(0,\varepsilon)\times\mathbb{C}^n}$  par l'image directe  $\tilde{q}_!$  en utilisant la majoration de Kashiwara ([KS], proposition 5.4.4).

Dans le microsupport de  $\underline{\mathbb{Z}}_{\tilde{q}^{-1}(U)\setminus B(0,\varepsilon)\times\mathbb{C}^n}$ , il y a trois types de codirections :

- ◊ les codirections au-dessus du bord  $\partial q_1^{-1}(\overline{B}(0, r))$
- ◊ la section nulle  $T_{\tilde{q}^{-1}(U)}^*(\tilde{q}^{-1}(U)) \cap (\tilde{q}^{-1}(U) \setminus B(0, \varepsilon) \times \mathbb{C}^n)$
- ◊ les codirections au-dessus du bord  $(\partial B(0, \varepsilon)) \times \mathbb{C}^n$

Concernant les codirections au-dessus du bord  $\partial q_1^{-1}(\overline{B}(0, r))$ , elles ont déjà été traitées dans le lemme 2.9.7.

La section nulle  $T_{\tilde{q}^{-1}(U)}^*(\tilde{q}^{-1}(U)) \cap (\tilde{q}^{-1}(U) \setminus B(0, \varepsilon) \times \mathbb{C}^n)$  ne va donner par la majoration de Kashiwara que des codirections contenues dans la section nulle  $T_Y^*Y$  puisqu'en tout point de  $\tilde{q}^{-1}(U) \setminus (B(0, \varepsilon) \times \mathbb{C}^n)$ , l'application  $\tilde{q}$  est une submersion.

Reste à traiter le cas des codirections au-dessus du bord  $(\partial B(0, \varepsilon)) \times \mathbb{C}^n$ .

Notons  $f$  l'application donnée par le carré de la distance à l'origine dans  $\mathbb{C}^m$  :

$$f : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Notons  $a_i$  et  $b_i$  les parties réelle et imaginaire de  $s_i$ , pour  $1 \leq i \leq m$ .

$f$  est donc l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a_1, b_1, \dots, a_m, b_m; t_1, \dots, t_n) &\longmapsto \sum (a_i^2 + b_i^2) \end{aligned}$$

Le microsupport de  $\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{C}^n \setminus (B(0,\varepsilon)\times\mathbb{C}^n)}$  est l'ensemble ([KS], proposition 5.3.3) :

$$\{(\underline{a}, \underline{b}, \underline{t}; \lambda \cdot df_{(\underline{a}, \underline{b}, \underline{t})}) \in T^*(\mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{C}^n) / \lambda \cdot (f(\underline{a}, \underline{b}, \underline{t}) - \varepsilon^2) = 0, \lambda \geq 0, f(\underline{a}, \underline{b}, \underline{t}) \geq \varepsilon^2\}$$

Dans les coordonnées  $(a_1, b_1, \dots, a_m, b_m; t_1, \dots, t_n)$ , l'application  $q$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^n \\ (a_1, b_1, \dots, a_m, b_m; t_1, \dots, t_n) &\longmapsto (\sum (a_i^2 - b_i^2), 2 \sum a_i \cdot b_i, t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

Les coordonnées  $(t_1, \dots, t_n)$  du paramètre  $\mathbb{C}^n$  ne jouant qu'un rôle accessoire, on va les omettre pour simplifier.

L'application cotangente  ${}^t q'$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{2m} \times_{\mathbb{R}^2} T^*\mathbb{R}^2 &\longrightarrow T^*\mathbb{R}^{2m} \\ (\underline{a}, \underline{b}); (u, v; \mu, \nu) &\longmapsto (\underline{a}, \underline{b}; \underline{\alpha}, \underline{\beta}) \end{aligned}$$

avec, pour  $1 \leq i \leq m$  :  $\alpha_i = 2a_i \cdot \mu + 2b_i \cdot \nu$  et  $\beta_i = -2b_i \cdot \mu + 2a_i \cdot \nu$

Appliquons la majoration de Kashiwara.

On a le diagramme cotangent :

$$T^*\mathbb{R}^{2m} \xleftarrow{{}^t q'} \mathbb{R}^{2m} \times_{\mathbb{R}^2} T^*\mathbb{R}^2 \xrightarrow{q_\pi} T^*\mathbb{R}^2$$

On a alors pour tout  $\mathcal{F} \in \text{Ob}(D^b(\mathbb{R}^{2m}))$  :  $Ch(\mathbf{R}q_*\mathcal{F}) \subset q_\pi({}^t q'^{-1}(Ch(\mathcal{F})))$

Il s'agit de vérifier que  $q_\pi({}^t q'^{-1}(Ch(\mathbb{Z}_{\mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{C}^n \setminus (B(0, \varepsilon) \times \mathbb{C}^n)}))) \cap (T_N^*Y \cap \tilde{\Omega}_Y) = \emptyset$

c'est-à-dire que la condition de transversalité :

$${}^t q'(\mathbb{R}^{2m} \times_{\mathbb{R}^2} T_{0,0}^*\mathbb{R}^2) \cap \{(\underline{a}, \underline{b}; \lambda \cdot df_{(\underline{a}, \underline{b})}) / f(\underline{a}, \underline{b}) = \varepsilon^2, q(\underline{a}, \underline{b}) = (0, 0)\} \subset T_{\mathbb{R}^{2m}}^*\mathbb{R}^{2m}$$

est vérifiée.

Notons  $A$  le vecteur  $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_m \\ b_m \end{pmatrix}$ ,  $B$  le vecteur  $\begin{pmatrix} a_1 \\ -b_1 \\ \vdots \\ a_m \\ -b_m \end{pmatrix}$  et  $C$  le vecteur  $\begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \\ \vdots \\ b_m \\ a_m \end{pmatrix}$

Autrement dit, il s'agit de voir avec  $f(\underline{a}, \underline{b}) = \varepsilon^2$  et  $q(\underline{a}, \underline{b}) = (0, 0)$  si  $A$  est dans le plan vectoriel engendré par  $B$  et  $C$ .

Or, puisque  $q(\underline{a}, \underline{b}) = (0, 0)$ , le vecteur  $A$  est orthogonal à  $B$  et à  $C$ .

Puisque  $f(\underline{a}, \underline{b}) = \varepsilon^2$ , le vecteur  $A$  est non nul et donc il est impossible que  $A$  soit dans le plan vectoriel  $(B, C)$ .  $\square$

On connaît maintenant le faisceau  $(\mathbf{R}q_!\underline{\mathbb{Z}}_Z)|_U$  dans  $D^b(U, \pi^{-1}(U) \cap \tilde{\Omega}_Y)$ .  
On va maintenant calculer son microlocalisé  $\mu_N(\mathbf{R}q_!\underline{\mathbb{Z}}_Z)$ .

Même si on ne connaît  $(\mathbf{R}q_!\underline{\mathbb{Z}}_Z)|_U$  que dans une catégorie microlocale, cela ne pose pas de problème puisque le foncteur  $\mu_N(\cdot)|_{\pi^{-1}(U) \cap \tilde{\Omega}_Y}$  est bien défini de  $D^b(U, \pi^{-1}(U) \cap \tilde{\Omega}_Y)$  vers  $D^b(T_N^*Y \cap \pi^{-1}(U) \cap \tilde{\Omega}_Y)$  (il suffit d'utiliser la proposition 4.4.3 et le point 6.1.3 page 250 de [KS]).

On commence par examiner un peu plus précisément le faisceau  $\mathbf{R}(q_{|B(0,\varepsilon) \times \mathbb{C}^n})_!\underline{\mathbb{Z}}_Z$ .

On commence par séparer deux cas.

$$\underline{1^{er} \text{ cas} : \dim_{\mathbb{C}} M = 1}$$

Soit  $b$  un point de  $\tilde{N}$ . Soit  $(a, b)$  l'unique point critique de  $q$  au-dessus de  $b$ .  
Dans un système de coordonnées locales, l'application  $q$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \\ (s; t_1, \dots, t_n) &\mapsto (s^2; t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

Autrement dit, on a un morphisme fini et la singularité est juste un pli et en dehors du pli, on a un revêtement à 2 feuillets.

Puisque pour tout point  $y$  de  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ ,  $q^{-1}(y)$  est une réunion finie de points, le complexe  $\mathbf{R}(q_{|B(0,\varepsilon) \times \mathbb{C}^n})_!\underline{\mathbb{Z}}_Z$  est concentré en degré 0.

Un point  $(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$  a deux antécédents  $(\pm\sqrt{t_0}, t_1, \dots, t_n)$ .

On peut décrire le faisceau  $\mathbf{R}^0(q_{|B(0,\varepsilon) \times \mathbb{C}^n})_!\underline{\mathbb{Z}}_Z$  comme suit :

- Sur  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$  on a le système local de fibre  $\mathbb{Z}^2$  dont la monodromie est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

(quand on suit le long d'un relèvement d'un lacet générateur du groupe fondamental de  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$  les deux antécédents sont échangés ( $+\sqrt{t_0}$  est envoyé sur  $-\sqrt{t_0}$ , et  $-\sqrt{t_0}$  sur  $+\sqrt{t_0}$ )).

- Sur  $\{0\} \times \mathbb{C}^n$ ,  $(\mathbf{R}^0(q_{|B(0,\varepsilon) \times \mathbb{C}^n})_!\underline{\mathbb{Z}}_Z)|_{\{0\} \times \mathbb{C}^n}$  est le faisceau constant  $\underline{\mathbb{Z}}_{\{0\} \times \mathbb{C}^n}$

• Le recollement entre les strates  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$  et  $\{0\} \times \mathbb{C}^n$  est donné par le morphisme :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ a &\longrightarrow (a, a) \end{aligned}$$

On va "extraire" le faisceau constant  $\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n}$  de  $\mathbf{R}^0(q_{|B(0,\varepsilon) \times \mathbb{C}^n})_!\underline{\mathbb{Z}}_Z$ .

Pour cela, on construit un morphisme de faisceaux  $u : \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n} \longrightarrow \mathbf{R}^0(q_{|B(0,\varepsilon) \times \mathbb{C}^n})! \underline{\mathbb{Z}}_Z$  de la manière suivante :

- Sur  $\{0\} \times \mathbb{C}^n$ ,  $u$  est donné par  $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$   
 $a \longrightarrow a$
- $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$ ,  $u$  est donné par  $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$   
 $a \longrightarrow (a, a)$

On vérifie que  $u$  est bien un morphisme de faisceaux (pour  $y \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$ ,  $u_y$  commute aux monodromies et  $u$  est bien compatible au morphisme de recollement entre strates).

On a alors le triangle  $\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n} \xrightarrow{u} \mathbf{R}^0(q_{|B(0,\varepsilon) \times \mathbb{C}^n})! \underline{\mathbb{Z}}_Z \longrightarrow C(u) \xrightarrow{+1}$

Puisque  $Ch(\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n}) = T_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n}^* \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ , on a alors

$$\mathbf{R}^0(q_{|B(0,\varepsilon) \times \mathbb{C}^n})! \underline{\mathbb{Z}}_Z \simeq C(u)$$

dans  $D^b(U, \pi_Y^{-1}(U) \cap \tilde{\Omega}_Y)$  ( $U$  désigne le voisinage dans  $Y$  isomorphe à  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ ).

$C(u)|_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n}$  est un système local de fibre  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$ . En restriction à  $\{0\} \times \mathbb{C}^n$ ,  $C(u)|_{\{0\} \times \mathbb{C}^n}$  est le faisceau nul sur  $\{0\} \times \mathbb{C}^n$ .

Sur  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$ ,  $C(u)|_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n}$  a la monodromie  $-1$ .

On peut suivre cette monodromie dans le triangle distingué associé au morphisme  $u$ .

En un point  $y \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$ , le triangle

$$(\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n})_y \xrightarrow{u} (\mathbf{R}^0(q_{|B(0,\varepsilon) \times \mathbb{C}^n})! \underline{\mathbb{Z}}_Z)_y \longrightarrow (C(u))_y \xrightarrow{+1}$$

se réduit à la suite exacte courte :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \\ a &\longrightarrow (a, a) \\ (a, b) &\longrightarrow b - a \end{aligned}$$

Puisque la monodromie est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , alors sur  $(C(u))_y$ , la monodromie envoie  $(b - a)$  sur  $(a - b)$  et est donc  $-1$ .

En résumé, si on note  $\mathcal{L}$  le système local sur  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$  de fibre  $\mathbb{Z}$  et de monodromie  $-1$ , et si on note  $j : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$  l'inclusion ouverte, on a :

$$(\mathbf{R}q_! \underline{\mathbb{Z}}_Z)|_U \simeq j_! \mathcal{L}$$

dans  $D^b(U, \pi_Y^{-1}(U) \cap \tilde{\Omega}_Y)$ .

2<sup>ème</sup> cas :  $\dim_{\mathbb{C}} M \geq 2$

Dans ce cas là, le faisceau constant et le système local  $\mathcal{L}$  ne se "mélangent" pas : ils ne vivent pas dans le même degré.

On note  $m = \dim_{\mathbb{C}} M$ . Soit  $b$  un point de  $\tilde{N}$  et soit  $(a, b)$  l'unique point critique de  $q$  au-dessus de  $b$ .

Il existe des coordonnées locales dans lesquelles l'application  $q$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \\ (s_1, \dots, s_m; t_1, \dots, t_n) &\mapsto (\sum_{i=1}^m s_i^2, t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

Notons  $f : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$  l'application précédente.

Pour calculer  $\mathbf{R}f_! \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n}$ , on utilise la formule :

$$\mathbf{R}f_! \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n} = \mathbf{D}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n} (\mathbf{R}f_* (\mathbf{D}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n} \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n}))$$

où, si  $X$  est un espace topologique,  $\mathbf{D}_X(\cdot)$  désigne la dualité  $\mathbf{R}\mathcal{H}om(\cdot, \omega_X)$ ,  $\omega_X$  étant le complexe dualisant  $\omega_X = p_X^! \underline{\mathbb{Z}}_{\{*\}}$ , avec  $p_X : X \rightarrow \{*\} = \{point\}$ .

On a :  $\mathbf{D}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n} \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n} = \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n} [2(m+n)]$   
et donc

$$\mathbf{R}f_! \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n} = \mathbf{D}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n} \mathbf{R}f_* \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n} [2(m+n)]$$

La fibre générique de  $f$  est isomorphe au produit  $TS^{m-1} \times \mathbb{C}^n$ , où  $TS^{m-1}$  désigne le fibré tangent de la sphère  $S^{m-1}$  (voir par exemple [La]) : elle est donc homotope à la sphère  $S^{m-1}$ . La fibre singulière à l'origine est contractile.

Ainsi le complexe  $\mathbf{R}f_* \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n}$  est concentré en 2 degrés : 0 et  $(m-1)$ .

- en degré 0  $\mathbf{R}^0 f_* \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n}$  est simplement le faisceau constant de fibre  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{C}$
- en degré  $(m-1)$   $\mathbf{R}^{m-1} f_* \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n}$  est un faisceau  $\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n}^{\varepsilon}$  : c'est le système local de fibre  $\mathbb{Z}$  et de monodromie  $(-1)^m$  sur  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$ , étendu par zéro à  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$

Il reste à calculer le dual :  $\mathbf{D}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n} \mathbf{R}f_* \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n}$ .

En utilisant les foncteurs de troncature, on a le triangle distingué de  $D^b(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n)$  (voir [KS], remarque 1.7.6) :

$$\tau^{\leq 0}(\mathbf{R}f_* \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n}) \longrightarrow \mathbf{R}f_* \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n} \longrightarrow \tau^{\geq 1}(\mathbf{R}f_* \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n}) \xrightarrow{+1}$$

Comme le complexe  $\mathbf{R}f_*\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n}$  est concentré en degrés 0 et  $(m - 1)$ , le triangle précédent se réécrit :

$$\mathbf{R}^0 f_*\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n} \longrightarrow \mathbf{R}f_*\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n} \longrightarrow \mathbf{R}^{m-1} f_*\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n} [1 - m] \xrightarrow{+1}$$

Par dualité, on a alors le triangle :

$$\mathbf{D}(\mathbf{R}^{m-1} f_*\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n} [1 - m]) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{R}f_*\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n}) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{R}^0 f_*\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n}) \xrightarrow{+1}$$

Or,  $\mathbf{R}^0 f_*\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n}$  est le faisceau constant de fibre  $\mathbb{Z}$ , donc son dual est aussi un faisceau constant et donc  $Ch(\mathbf{D}(\mathbf{R}^0 f_*\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n})) = T_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n}^*(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n)$ .

Comme l'on travaille hors section nulle, on a l'isomorphisme dans  $D^b(\mathbb{C}^{n+1}, \dot{T}^*\mathbb{C}^{n+1})$  :

$$\mathbf{D}(\mathbf{R}^{m-1} f_*\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n} [1 - m]) \simeq \mathbf{R}f_!\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n} [-2(m + n)]$$

On note  $\mathcal{L}^\varepsilon$  le système local sur  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$  de fibre  $\mathbb{Z}$  et de monodromie

$$\varepsilon = (-1)^m; \text{ notons encore } j \text{ l'inclusion ouverte } j : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n.$$

On doit donc calculer le dual :  $\mathbf{D}(j_!\mathcal{L}^\varepsilon)$ .

$$\begin{aligned} \text{Or } \mathbf{D}(j_!\mathcal{L}^\varepsilon) &= \mathbf{R}\mathcal{H}om(j_!\mathcal{L}^\varepsilon, \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n} [2(1 + n)]) \\ &\simeq \mathbf{R}j_*\mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{L}^\varepsilon, j^!\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n} [2(1 + n)]). \end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbf{D}(j_!\mathcal{L}^\varepsilon) \simeq \mathbf{R}j_*\mathcal{L}^\varepsilon [2(1 + n)]$$

$$\begin{aligned} \text{puisque } \mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{L}^\varepsilon, j^!\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n} [2(1 + n)]) &= \mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{L}^\varepsilon, \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n} [2(1 + n)]) \\ &\simeq \mathcal{L}^\varepsilon [2(1 + n)] \end{aligned}$$

On est donc ramené au calcul de  $\mathbf{R}j_*\mathcal{L}^\varepsilon$ .

2 cas se présentent, suivant que  $\varepsilon = 1$  (i.e.  $m$  est pair) ou que  $\varepsilon = -1$  (i.e.  $m$  est impair).

- $\varepsilon = 1$

Alors  $\mathbf{R}j_*\mathcal{L}^\varepsilon = \mathbf{R}j_*\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n}$ .

Puisque  $\forall y \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, \forall i \in \mathbb{N}$ , on a :

$$(\mathbf{R}^i j_*\mathcal{L}^\varepsilon)_y = \lim_{U \ni y} H^i(U \cap (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n), \mathcal{L}^\varepsilon) = \lim_{U \ni y} H^i(U \cap (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n), \mathbb{Z})$$

on voit que  $\mathbf{R}j_*\mathcal{L}^\varepsilon$  vit en degrés 0 et 1 et que :

- ◊ en degré 0,  $\mathbf{R}^0j_*\mathcal{L}^\varepsilon = \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n}$ , faisceau constant sur  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$  ;
- ◊ en degré 1,  $\mathbf{R}^1j_*\mathcal{L}^\varepsilon = \underline{\mathbb{Z}}_{\{0\} \times \mathbb{C}^n}$ , faisceau constant sur  $\{0\} \times \mathbb{C}^n$ , étendu par zéro à  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ .

La variété caractéristique de  $\mathbf{R}^0j_*\mathcal{L}^\varepsilon$  est donc contenue dans la section nulle, d'où un isomorphisme dans  $D^b(\mathbb{C}^{n+1}, T^*\mathbb{C}^{n+1})$  :

$$\mathbf{R}j_*\mathcal{L}^\varepsilon \simeq \mathbf{R}^1j_*\mathcal{L}^\varepsilon = \underline{\mathbb{Z}}_{\{0\} \times \mathbb{C}^n}$$

- $\varepsilon = -1$

Toujours en utilisant que :  $\forall y \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, \forall i \in \mathbb{N}$ ,

$$(\mathbf{R}^i j_* \mathcal{L}^\varepsilon)_y = \varinjlim_{U \ni y} H^i(U \cap (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n), \mathcal{L}^\varepsilon)$$

on voit par un calcul à la Čech que  $\mathbf{R}j_*\mathcal{L}^\varepsilon$  vit encore en degrés 0 et 1 et que :

- ◊ en degré 0,  $\mathbf{R}^0j_*\mathcal{L}^\varepsilon = j_*\mathcal{L}^\varepsilon$ , c'est-à-dire le système local de fibre  $\mathbb{Z}$  et de monodromie -1 sur  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$  étendu par zéro à  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$  ;
- ◊ en degré 1,  $\mathbf{R}^1j_*\mathcal{L}^\varepsilon = \underline{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{\{0\} \times \mathbb{C}^n}$ , faisceau constant de fibre  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur  $\{0\} \times \mathbb{C}^n$ , étendu par zéro à  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ .

En tenant compte des décalages, on a donc l'isomorphisme dans  $D^b(\mathbb{C}^{n+1}, T^*\mathbb{C}^{n+1})$  :

$$\mathbf{R}f_!\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n} \simeq \mathbf{R}j_*\mathcal{L}^\varepsilon[1 - m]$$

ce qui donne :

- si  $m$  est pair :  $\mathbf{R}f_!\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n} \simeq \underline{\mathbb{Z}}_{\{0\} \times \mathbb{C}^n}[-m]$
- si  $m$  est impair :  $\mathbf{R}f_!\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n} \simeq \begin{cases} j_*\mathcal{L}^\varepsilon & \text{en degré } m - 1 \\ \underline{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{\{0\} \times \mathbb{C}^n} & \text{en degré } m \end{cases}$

Calculons maintenant le microlocalisé de Sato  $\mu_N$  du faisceau précédent.

**PROPOSITION 2.9.9** *Le microlocalisé  $\mu_N(\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_M)$  restreint à  $T_N^*Y \cap \tilde{\Omega}_Y$  est un système local de fibre  $\mathbb{Z}$ .*

*Preuve.*

Le calcul est local.

On fixe un voisinage  $U$  d'un point de  $\tilde{N}$  et en utilisant les notations précédentes, dans tous les cas, on s'est ramené à calculer le microlocalisé :

$$\mu_{\{0\} \times \mathbb{C}^n}(\mathbf{R}j_*\mathcal{L}^\varepsilon)$$

Remarquons tout d'abord que d'après le lemme 1.2.2, il suffit de calculer le transformé de Fourier  $(\mathbf{R}j_*\mathcal{L}^\varepsilon)^\wedge$  par rapport à la première variable  $\mathbb{C}$ .

Notons ensuite que le complexe  $\mathbf{R}j_*\mathcal{L}^\varepsilon$  est co-évanescant, c'est-à-dire que l'on a :

$$\mathbf{R}\Gamma_{\{0\} \times \mathbb{C}^n} \mathbf{R}j_*\mathcal{L}^\varepsilon = 0$$

On peut alors utiliser [M3] § VI.2.10 page 95 : un complexe co-évanescant est envoyé par transformation de Fourier sur un complexe évanescant, c'est-à-dire que l'on aura :

$$((\mathbf{R}j_*\mathcal{L}^\varepsilon)^\wedge)_{|\{0\} \times \mathbb{C}^n} = 0$$

De tels complexes sont alors entièrement définis par leur restriction à la sphère unité  $S \times \mathbb{C}^n$  et la transformation de Fourier peut se lire en restant uniquement dans les sphères unités.

Comme précédemment, le paramètre  $\mathbb{C}^n$  ne joue aucun rôle ; on va donc l'omettre pour simplifier les écritures.

La transformation de Fourier pour les complexes évanescents/co-évanescents sur la sphère unité se lit ainsi.

On note  $S$  la sphère unité dans  $\mathbb{C}$  et  $S'$  la sphère unité dans le dual.

On définit dans  $S \times S'$  la partie :  $\Gamma^+ = \{\langle x, \xi \rangle > 0\}$ .

Notons respectivement  $p$  et  $p'$  les projections de  $\Gamma^+$  sur  $S$  et  $S'$ .

On a alors :

$$((\mathbf{R}j_*\mathcal{L}^\varepsilon)^\wedge)_{|S'} = \mathbf{R}p'_! p^{-1}(\mathcal{L}_{|S}^\varepsilon)$$

Un rapide calcul montre qu'alors  $((\mathbf{R}j_*\mathcal{L}^\varepsilon)^\wedge)_{|S'}$  est un complexe concentré en degré 1 : c'est le système local de fibre  $\mathbb{Z}$  et de monodromie  $\varepsilon$  sur  $S'$ .

On a donc montré qu'en tout point  $T_N^*Y \cap \tilde{\Omega}_Y$ , le complexe  $\mu_N(\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_M)$  est un faisceau localement constant de fibre  $\mathbb{Z}$ .  $\square$



## 2.10 Comportement du microlocalisé par transformation canonique

On reprend les mêmes notations que précédemment.

$X$  et  $Y$  désignent 2 copies de  $\mathbb{C}^{n+1}$  ;  $\pi_X : T^*X \rightarrow X$  et  $\pi_Y : T^*Y \rightarrow Y$  désignent les fibrés cotangents sur lesquels les coordonnées sont

$(x_0, \dots, x_n; \xi_0, \dots, \xi_n)$  et  $(y_0, \dots, y_n; \eta_0, \dots, \eta_n)$ .

$\varphi : T^*X \setminus \{\xi_0 = 0\} \rightarrow T^*Y \setminus \{\eta_0 = 0\}$  désigne la transformation de Legendre.

Soit  $M \subset X$  un sous-espace analytique tel que  $p_X = (\underline{0}; dx_0) \in T_M^*X$ .

Soit  $N \subset Y$  le sous-espace analytique tel que

$$\varphi(T_M^*X \cap \{\xi_0 \neq 0\}) = T_N^*Y \cap \{\eta_0 \neq 0\}.$$

On suppose que  $T_N^*Y$  est en position générique au point  $p_Y = (\underline{0}; dy_0)$ .

Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau pervers sur  $X$  tel que  $T_M^*X \subset Ch(\mathcal{F})$ .

Le but de cette partie est de contrôler le comportement du microlocalisé de Sato de  $\mathcal{F}$ ,  $\mu_M(\mathcal{F})$  par la transformation canonique  $\varphi$ .

Autrement dit, à  $\varphi$  est associée une transformation canonique faisceautique  $\tilde{\varphi}$  définie dans la partie précédente, et on souhaite comparer  $\varphi_*(\mu_M(\mathcal{F}))$  à  $\mu_N(\tilde{\varphi}\mathcal{F})$ .

Il existe un sous-ensemble  $Q \subset T_M^*X \setminus \pi_X^{-1}(M^{sing})$ , tel que

$$\mathcal{L} = \mu_{M^{reg}}(\mathcal{F}|_{X \setminus M^{sing}})|_{(T_{M^{reg}}^*X \setminus Q) \cap \{\xi_0 \neq 0\}}$$

soit un système local sur  $(T_{M^{reg}}^*X \setminus Q) \cap \{\xi_0 \neq 0\}$ .

On pose  $S_X = \pi_X^{-1}(M^{sing}) \cap T_M^*X$ .

$\mathcal{L}$  est donc un système local sur  $(T_M^*X \setminus (Q \cup S_X)) \cap \{\xi_0 \neq 0\}$ .

On pose  $S_Y = \pi_Y^{-1}(N^{sing}) \cap T_N^*Y$ .

D'après la proposition 7.1.5 de [W2], les transformations canoniques faisceautiques préservent la caractérisation microlocale des faisceaux pervers de [KS], définition 10.3.7. Il existe donc un voisinage ouvert  $U_Y$  du point  $p_Y$  dans  $T^*Y$  tel que :

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mu_{N^{reg}}(\tilde{\varphi}\mathcal{F}|_{Y \setminus N^{sing}})|_{(T_N^*Y \setminus (\varphi(Q) \cup S_Y)) \cap \{\eta_0 \neq 0\} \cap U_Y}$$

est un système local sur  $(T_N^*Y \setminus (\varphi(Q) \cup S_Y)) \cap \{\eta_0 \neq 0\} \cap U_Y$ .

REMARQUE 2.10.1 *Il faut prendre garde que  $S_X$  et  $S_Y$  ne se correspondent pas par  $\varphi$ .*

*Ainsi, dans  $\mathbb{C}^3$ , avec  $M = \{x_0 = 0, x_2^2 = x_1^3\}$ , on a  $\varphi(T_M^*X) = T_N^*Y$  où  $N = \{y_0y_2^2 = \frac{4}{27}y_1^3\}$ .*

*On a alors  $M^{sing} = \{(0, 0, 0)\}$  et  $N^{sing} = \{y_1 = y_2 = 0\}$ .*

*On a  $\varphi(S_X \cap \{\xi_0 \neq 0\}) = \{(0, 0, \mu; \lambda, 0, 0); \lambda \neq 0\}$  qui se trouve au-dessus de points lisses de  $N$  si  $\mu \neq 0$ .*

*D'autre part  $\varphi^{-1}(S_Y \cap \{\eta_0 \neq 0\}) = \{(0, t^2, t^3; \lambda, 0, 0); \lambda \neq 0\}$  qui se trouve au-dessus de points lisses de  $M$  si  $t \neq 0$ .*

*Cela provient du fait que les points lisses de  $T_M^*X$  peuvent être au-dessus de points singuliers de  $M$  et que seuls les points lisses (ou les points singuliers) de  $T_M^*X$  et  $T_N^*Y$  se correspondent par  $\varphi$ .*

On pose  $U_X = \varphi^{-1}(U_Y)$  : c'est un voisinage de  $p_X$  dans  $T^*X$ .

Posons  $V_X = (T_M^*X \setminus (Q \cup S_X \cup \varphi^{-1}(S_Y))) \cap \{\xi_0 \neq 0\} \cap U_X$  et

$$V_Y = (T_N^*Y \setminus (\varphi(Q) \cup S_Y \cup \varphi(S_X))) \cap \{\eta_0 \neq 0\} \cap U_Y.$$

On a donc  $\varphi(V_X) = V_Y$ .

On a 2 systèmes locaux  $\mathcal{L}|_{V_X}$  et  $\tilde{\mathcal{L}}|_{V_Y}$  que l'on souhaite comparer.

On peut alors énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 2.10.2 *Il existe un système local  $\mathcal{A}$  sur  $V_Y$  de la forme  $\underline{\mathbb{Z}}_{V_Y}^\epsilon$ , c'est-à-dire un système local de fibre  $\mathbb{Z}$  sur  $V_Y$  dont les seules monodromies sont  $+$  ou  $-1$ , et un isomorphisme de faisceaux :*

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \varphi_*(\mathcal{L}|_{V_X}) \simeq \tilde{\mathcal{L}}|_{V_Y}$$

*Preuve.* Le principe de la démonstration est le suivant : il s'agit d'utiliser le foncteur  $\mu hom(\cdot, \cdot)$  de [KS], qui est une généralisation du microlocalisé de Sato et qui se comporte bien par transformation canonique, pour ramener la démonstration au contrôle du transformé canonique de  $\underline{\mathbb{Z}}_M$ , contrôle effectué dans la proposition 2.9.9.

On rappelle que  $\mu hom(\cdot, \cdot)$  est un bifoncteur :  $D^b(X)^{op} \times D^b(X) \longrightarrow D^b(T^*X)$  défini comme suit :

on note  $q_1$  et  $q_2$  les 2 projections de  $X \times X$  sur  $X$  ;

pour  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  dans  $Ob(D^b(X))$ , on pose alors  $\mu hom(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mu_{\Delta_X} \mathbf{R}\mathcal{H}om(q_2^{-1}\mathcal{F}, q_1^!\mathcal{G})$ , où  $\Delta_X$  désigne la diagonale dans  $X \times X$ .

Pour un ensemble  $\Omega_X \subset T^*X$ , on peut montrer que  $\mu hom(\cdot, \cdot)|_{\Omega_X}$  est un bifoncteur bien défini de  $D^b(X, \Omega_X)^{op} \times D^b(X, \Omega_X) \longrightarrow D^b(\Omega_X)$ .

On a aussi les 2 résultats suivants :

◊ Si  $M \subset X$  est une sous-variété lisse fermée, alors pour tout  $\mathcal{F} \in \text{Ob}(D^b(X))$ , on a  $\mu\text{hom}(\underline{\mathbb{Z}}_M, \mathcal{F}) \simeq j_*\mu_M(\mathcal{F})$ , où  $j$  est l'inclusion fermée  $T_M^*X \hookrightarrow T^*X$  ([KS], prop. 4.4.3).

◊ Le bifoncteur  $\mu\text{hom}(\cdot, \cdot)$  se comporte bien par transformation canonique. Si  $\varphi : \Omega_X \subset T^*X \rightarrow \Omega_Y \subset T^*Y$  est une transformation canonique homogène et si on note  $\tilde{\varphi}$  une transformation canonique faisceautique associée à  $\varphi$ , alors pour tous  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  dans  $\text{Ob}(D^b(X, \Omega_X))$ , on a l'isomorphisme naturel dans  $D^b(\Omega_Y) : \varphi_*(\mu\text{hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_{\Omega_X}) \simeq \mu\text{hom}(\tilde{\varphi}\mathcal{F}, \tilde{\varphi}\mathcal{G})|_{\Omega_Y}$  ([KS], théorème 7.2.1).

D'autre part, on a la construction suivante ([KS], corollaire 4.4.10).

Si on considère  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}_3$  dans  $\text{Ob}(D^b(X))$ , alors il existe un morphisme naturel dans  $D^b(T^*X)$  :

$$\mu\text{hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mu\text{hom}(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3) \longrightarrow \mu\text{hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_3)$$

Si on part d'un faisceau pervers  $\mathcal{F}$  sur  $X$ , on peut alors regarder le morphisme dans  $D^b(U_Y)$  :

$$\mu\text{hom}(\underline{\mathbb{Z}}_N, \tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_M)|_{U_Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mu\text{hom}(\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_M, \tilde{\varphi}\mathcal{F})|_{U_Y} \longrightarrow \mu\text{hom}(\underline{\mathbb{Z}}_N, \tilde{\varphi}\mathcal{F})|_{U_Y}$$

En utilisant les résultats précédents, puisque  $U_X$  ne se trouve au-dessus d'aucun point singulier de  $M$  et  $U_Y$  ne se trouve au-dessus d'aucun point singulier de  $N$ , le morphisme se réécrit :

$$j_*^N \mu_N(\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_M)|_{U_Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \varphi_*(j_*^M \mu_M(\mathcal{F})|_{U_X}) \longrightarrow j_*^N \mu_N(\tilde{\varphi}\mathcal{F})|_{U_Y}$$

où  $j^M$  et  $j^N$  désignent les inclusions fermées  $T_M^*X \hookrightarrow T^*X$  et  $T_N^*Y \hookrightarrow T^*Y$ , et où on a noté  $\mu_M(\cdot)$  pour  $\mu_{M^{\text{reg}}}(\cdot)|_{X \setminus M^{\text{sing}}}$  et  $\mu_N(\cdot)$  pour  $\mu_{N^{\text{reg}}}(\cdot)|_{Y \setminus N^{\text{sing}}}$ .

Ce qui induit le morphisme :

$$\mu_N(\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_M)|_{V_Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \varphi_*(\mu_M(\mathcal{F})|_{V_X}) \longrightarrow \mu_N(\tilde{\varphi}\mathcal{F})|_{U_Y}$$

C'est-à-dire :

$$\mu_N(\tilde{\varphi}\underline{\mathbb{Z}}_M)|_{V_Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \varphi_*(\mathcal{L}|_{V_X}) \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}|_{V_Y}$$

Pour terminer la démonstration du théorème, il reste à utiliser que

$\mu_N(\tilde{\varphi}\mathbb{Z}_M)|_{V_Y}$  est un faisceau du type  $\mathbb{Z}_{V_Y}^\varepsilon$  (proposition 2.9.9) et à montrer que ce morphisme est un isomorphisme, ce qui est fait ci-après.  $\square$

### La composition des $\mu hom$ est un isomorphisme

Soient  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}_3 \in Ob(D^b(X))$ .

Dans [KS], corollaire 4.4.10, est construit un morphisme naturel :

$$\mu hom(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mu hom(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3) \longrightarrow \mu hom(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_3)$$

Le problème étant de nature microlocale, d'après la proposition 7.1.5 de [W2], on peut utiliser la caractérisation microlocale des faisceaux pervers de [KS], définition 10.3.7 et supposer alors que l'on se trouve à un décalage près dans la situation suivante :

$X = \mathbb{C}^n$ , avec les coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $N = \{x_1 = 0\}$ ,  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathbb{Z}_N$  et  $\mathcal{F}_3 = \underline{G}_N$ , où  $G$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Notons  $p$  la projection  $p : X = \mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}$ ,  $p(x_1, \dots, x_n) = x_1$ .

On a :  $\mathbb{Z}_N = p^{-1}\mathbb{Z}_{\{0\}}$  et  $\underline{G}_N = p^{-1}\underline{G}_{\{0\}}$

On a les isomorphismes naturels ([KS] point 4.4.5 et proposition 4.4.7 (i)) :

$$\mu hom(p^{-1}\mathbb{Z}_{\{0\}}, p^{-1}\mathbb{Z}_{\{0\}}) \simeq \mathbf{R}^t p'_! p_\pi^{-1} \mu hom(\mathbb{Z}_{\{0\}}, \mathbb{Z}_{\{0\}})$$

$$\mu hom(p^{-1}\mathbb{Z}_{\{0\}}, p^{-1}\underline{G}_{\{0\}}) \simeq \mathbf{R}^t p'_! p_\pi^{-1} \mu hom(\mathbb{Z}_{\{0\}}, \underline{G}_{\{0\}})$$

où  ${}^t p'$  et  $p_\pi$  sont les applications du diagramme cotangent :

$$T^*\mathbb{C}^n \xleftarrow{{}^t p'} \mathbb{C}^n \times_{\mathbb{C}} T^*\mathbb{C} \xrightarrow{p_\pi} T^*\mathbb{C}$$

diagramme qui se réécrit ici :

$$T^*\mathbb{C}^{n-1} \times T^*\mathbb{C} \xleftarrow{{}^t p'} T_{\mathbb{C}^{n-1}}^* \mathbb{C}^{n-1} \times T^*\mathbb{C} \xrightarrow{p_\pi} T^*\mathbb{C}$$

Le morphisme naturel de composition des  $\mu hom$  commute aux deux isomorphismes précédents et on est donc ramené au cas de la dimension 1.

On doit montrer que la composition de  $\mu hom$  suivante est un isomorphisme :

$$\mu hom(\mathbb{Z}_{\{0\}}, \mathbb{Z}_{\{0\}}) \otimes \mu hom(\mathbb{Z}_{\{0\}}, \underline{G}_{\{0\}}) \longrightarrow \mu hom(\mathbb{Z}_{\{0\}}, \underline{G}_{\{0\}})$$

Notons  $i$  l'inclusion fermée  $i : \{0\} \hookrightarrow \mathbb{C}$ . Si  $\mathbb{Z}$  et  $G$  désignent les faisceaux sur le point  $\{0\}$ , on a :  $\underline{\mathbb{Z}}_{\{0\}} = i_*\mathbb{Z}$  et  $\underline{G}_{\{0\}} = i_*G$ .

D'après la proposition 4.4.7 (ii) de [KS], on a les isomorphismes :

$$\mu hom(i_*\mathbb{Z}, i_*\mathbb{Z}) \simeq \mathbf{R}i_{\pi!} {}^t i'^{-1} \mu hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$$

$$\mu hom(i_*\mathbb{Z}, i_*G) \simeq \mathbf{R}i_{\pi!} {}^t i'^{-1} \mu hom(\mathbb{Z}, G)$$

La composition des  $\mu hom$  commute aux isomorphismes précédents et on est ramené au cas trivial de la composition des  $\mu hom$  pour des faisceaux sur le point : dans cette situation les  $\mu hom$  sont les  $Hom$  classiques et la composition précédente est celle des  $Hom$ .

On a donc vérifié que dans notre situation la composition des foncteurs  $\mu hom$  est un isomorphisme.  $\square$

## 2.11 Ramener le problème du prolongement en position générique

Dans cette partie, on montre comment, en utilisant le théorème 2.10.2, on peut ramener le problème du prolongement hors section nulle pour un faisceau pervers quelconque à un problème de prolongement hors section nulle pour un faisceau pervers en position générique.

Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau pervers sur  $X \simeq \mathbb{C}^{n+1}$ . On suppose que  $p_X = (0; dx_0) \in Ch(\mathcal{F})$ .

On peut trouver un voisinage  $\Omega_X$  de  $p_X$  dans  $T^*X$  tels que  $Ch(\mathcal{F}) \cap \Omega_X = \bigcup_{i \in I} T_{M_i}^* X \cap \Omega_X$ , où les  $M_i$  sont des sous-espaces analytiques de  $X$  tels que  $p_X \in T_{M_i}^* X$ .

Comme précédemment, on note  $Z$  la partie irrégulière de  $Ch(\mathcal{F}) \cap \Omega_X$ , c'est-à-dire l'ensemble des points de  $Ch(\mathcal{F}) \cap \Omega_X$  où la restriction de la projection sur  $X$  n'est pas localement de rang constant.

Pour tout  $i$  dans  $I$ , on associe à  $\mathcal{F}$  sa classe

$$\lambda_i \in H_{(T_{M_i}^* X \cap \Omega_X) \setminus Z}^{2n+3}(\Omega_X \setminus Z, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$$

On note  $Y$  une autre copie de  $\mathbb{C}^{n+1}$ . On suppose que la transformation de Legendre, restreinte à  $\Omega_X$ ,  $\varphi : \Omega_X \rightarrow \Omega_Y$ , ramène  $Ch(\mathcal{F})$  en position générique au point  $p_Y = (0; dy_0)$ .

On note  $N_i$ , où  $i \in I$  les sous-espaces analytiques de  $Y$  tels que  $\forall i \in I, \varphi(T_{M_i}^* X \cap \Omega_X) = T_{N_i}^* Y \cap \Omega_Y$ .

On note encore  $\tilde{\varphi}(\cdot)$  la transformation faisceautique associée à  $\varphi$ .

D'après les résultats de [W1] (proposition 7.1.5 et remarque 6.1.6), quitte à réduire  $\Omega_Y$ , il existe un faisceau pervers  $\mathcal{G}$  sur  $\pi_Y(\Omega_Y)$  tel que  $\tilde{\varphi}\mathcal{F} \simeq \mathcal{G}$  dans la catégorie  $D^b(Y, \Omega_Y)$ . On peut donc supposer que  $\tilde{\varphi}\mathcal{F}$  est un faisceau pervers sur  $Y$ .

Au faisceau pervers  $\tilde{\varphi}\mathcal{F}$ , on applique la même construction qu'à  $\mathcal{F}$ .

On note  $\tilde{Z}$  la partie irrégulière de  $Ch(\tilde{\varphi}\mathcal{F}) \cap \Omega_Y = \varphi(Ch(\mathcal{F})) \cap \Omega_Y$ . Pour tout  $i$  dans  $I$ , on associe à  $\tilde{\varphi}\mathcal{F}$  sa classe  $\tilde{\lambda}_i \in H_{(T_{N_i}^* Y \cap \Omega_Y) \setminus \tilde{Z}}^{2n+3}(\Omega_Y \setminus \tilde{Z}, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ .

On a vu dans la partie précédente (théorème 2.10.2) que les 2 ensembles  $Z$  et  $\tilde{Z}$  ne se correspondent pas forcément par  $\varphi$  mais que, quitte à rajouter à  $Z$  un sous-ensemble analytique  $Q$  de codimension 1 dans  $Ch(\mathcal{F}) \cap \Omega_X$ , on a d'une part  $\varphi(Z \cup Q) = \tilde{Z} \cup \varphi(Q)$  et d'autre part

$$\varphi_*(\lambda_{i|(T_{M_i}^* X \cap \Omega_X) \setminus (Z \cup Q)}) = \tilde{\lambda}_{i|(T_{N_i}^* Y \cap \Omega_Y) \setminus (\tilde{Z} \cup \varphi(Q))}$$

Autrement dit, après avoir éventuellement enlevé à gauche et à droite un ensemble de codimension 1, et après avoir restreint les classes à ces 2 nouveaux ensembles, les classes se correspondent par l'isomorphisme  $\varphi$ .

On pose  $\Lambda = Ch(\mathcal{F}) \cap \Omega_X$  et  $\tilde{\Lambda} = Ch(\tilde{\varphi}\mathcal{F}) \cap \Omega_Y = \varphi(\Lambda)$ .

On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
0 \longrightarrow & H_{\Lambda}^{2n+3}(\Omega_X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_{\Lambda \setminus Z}^{2n+3}(\Omega_X \setminus Z, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_Z^{2n+4}(\Omega_X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \longrightarrow & H_{\Lambda}^{2n+3}(\Omega_X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_{\Lambda \setminus (Z \cup Q)}^{2n+3}(\Omega_X \setminus (Z \cup Q), \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_{Z \cup Q}^{2n+4}(\Omega_X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \\
& \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* \\
0 \longrightarrow & H_{\tilde{\Lambda}}^{2n+3}(\Omega_Y, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_{\tilde{\Lambda} \setminus (\tilde{Z} \cup \varphi(Q))}^{2n+3}(\Omega_Y \setminus (\tilde{Z} \cup \varphi(Q)), \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_{\tilde{Z} \cup \varphi(Q)}^{2n+4}(\Omega_Y, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 \longrightarrow & H_{\tilde{\Lambda}}^{2n+3}(\Omega_Y, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_{\tilde{\Lambda} \setminus \tilde{Z}}^{2n+3}(\Omega_Y \setminus \tilde{Z}, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_{\tilde{Z}}^{2n+4}(\Omega_Y, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})
\end{array}$$

Comme les 2 applications  $H_Z^{2n+4}(\Omega_X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{Z \cup Q}^{2n+4}(\Omega_X, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  et  $H_{\tilde{Z}}^{2n+4}(\Omega_Y, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{\tilde{Z} \cup \varphi(Q)}^{2n+4}(\Omega_Y, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  sont injectives (pour des raisons de codimension les complexes  $\mathbf{R}\Gamma_Z \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ ,  $\mathbf{R}\Gamma_{\tilde{Z}} \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ ,  $\mathbf{R}\Gamma_{Z \cup Q} \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}$  et  $\mathbf{R}\Gamma_{\tilde{Z} \cup \varphi(Q)} \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}$  ne commencent qu'en degré  $2n+4$  (voir le lemme 2.2.1)), il revient au même de savoir prolonger les restrictions des classes ou les classes elles-mêmes.

Comme les morphismes  $\varphi_*$  induits par  $\varphi$  sur les restrictions envoient classes du côté  $X$  sur classes du côté  $Y$ , les 2 problèmes de prolongement des restrictions sont équivalents, donc les 2 problèmes de prolongement originels sont eux aussi équivalents.

Ainsi le problème du prolongement hors section nulle pour un faisceau pervers quelconque peut toujours se ramener à un problème de prolongement hors section nulle pour un faisceau pervers en position générique.

## 2.12 En position générique, se ramener à un faisceau pervers en dimension 2 avec paramètres

Dans cette partie, on s'intéresse au problème du prolongement hors section nulle pour un faisceau pervers en position générique sur  $X$  de dimension  $n + 1$ .

On montre que dans cette situation le problème du prolongement se ramène à un problème en dimension 2.

Soit  $X = \mathbb{C}^{n+1}$ , avec les coordonnées  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  et  $\pi : T^*X \rightarrow X$  son fibré cotangent, muni des coordonnées  $(x_0, x_1, \dots, x_n; \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ .

Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau pervers sur  $X$ .

**On suppose que  $\Lambda = Ch(\mathcal{F})$  est en position générique au point  $p = (0; dx_0)$ .**

LEMME 2.12.1 (voir par exemple, [Bj], Proposition A.VII.4.11))

*Il existe un voisinage  $\Omega$  de  $p$  dans  $T^*X$  et  $S$  une hypersurface de  $X$  définie dans un voisinage de l'origine tel que :  $\Lambda \cap \Omega = T_S^*X \cap \Omega$ .*

$\mathcal{F}$  est un faisceau pervers que l'on connaît bien **microlocalement** au voisinage de  $p$ , on commence par le remplacer par un faisceau pervers que l'on connaît bien **localement** au voisinage de  $\pi(p) = 0$  : il s'agit de "nettoyer" la variété caractéristique de  $\mathcal{F}$  dans  $\pi^{-1}(\Omega)$ .

LEMME 2.12.2 *Il existe un faisceau pervers  $\mathcal{G}$  sur  $\pi(\Omega)$  tel que :*

- $Ch(\mathcal{G}) \subset (T_X^*X \cup T_S^*X) \cap \pi^{-1}(\pi(\Omega))$
- $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  ont mêmes microlocalisés de Sato en restriction à  $\Omega$ .

*Preuve.*

Pour cela, on utilise le théorème de la position générique ([KK], [Bj], Théorème 8.6.3, [ABG] ).

Par la correspondance de Riemann-Hilbert, à  $\mathcal{F}$  correspond un  $\mathcal{D}$ -module holonome régulier  $\mathcal{M}$ .

D'après les résultats cités précédemment, puisque  $Ch(\mathcal{M})$  est en position générique au point  $p$ , il existe un  $\mathcal{D}$ -module holonome régulier  $\mathcal{N}$  défini au voisinage de l'origine tel que  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  aient mêmes microlocalisés au point  $p$  et  $Ch(\mathcal{N}) \subset T_X^*X \cup T_S^*X$  au voisinage de l'origine.

Plus précisément, si  $\mathcal{E}$  désigne l'anneau des opérateurs microdifférentiels, on a un isomorphisme dans  $\mathcal{E}_p$  :



$$(\pi^{-1}\mathcal{M} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}} \mathcal{E})_p \simeq (\pi^{-1}\mathcal{N} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}} \mathcal{E})_p$$

et il existe  $U$  voisinage de l'origine dans  $X$  tel que

$$Ch(\mathcal{N}) \subset T_U^*U \cup T_{S \cap U}^*U$$

Notons  $\mathcal{G} = \mathcal{S}ol_X(\mathcal{N}) = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_X)$

Comme  $(\pi^{-1}\mathcal{M} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}} \mathcal{E})_p \simeq (\pi^{-1}\mathcal{N} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}} \mathcal{E})_p$ ,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  ont mêmes microlocalisés de Sato au voisinage du point  $p$ .

En effet, par la définition du microlocalisé de Sato en termes de  $\mathcal{E}$ -modules, on a pour toute variété lisse fermée  $M$  de  $X$  :

$$\begin{aligned} \mu_M(\mathcal{F}) &= \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\pi^{-1}\mathcal{M} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}} \mathcal{E}, \mathcal{C}_{M|X}^{\mathbb{R}}) \\ &\simeq \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\pi^{-1}\mathcal{N} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}} \mathcal{E}, \mathcal{C}_{M|X}^{\mathbb{R}}) = \mu_M(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

□

**REMARQUE 2.12.3** *Il est sans doute possible de démontrer le lemme précédent en utilisant la proposition 6.5 de [MV1] : cela permettrait alors de rester complètement du côté de la géométrie pour toute la démonstration du prolongement du déterminant microlocal.*

Donc, prolonger la classe caractéristique de  $\mathcal{G}$  au point  $p$  revient à prolonger celle de  $\mathcal{F}$  au point  $p$ .

Les problèmes de prolongement de  $\mathcal{G}$  hors section nulle se situent au-dessus des points singuliers de  $S$  : si on note comme précédemment  $Z$  l'ensemble d'irrégularité de  $Ch(\mathcal{G})$ ,  $Z$  est contenu dans  $\pi^{-1}(S^{sing})$ , c'est-à-dire au-dessus des points singuliers d'une composante irréductible  $S_i$  de  $S$  ou au-dessus de  $S_i \cap S_j$  intersection de deux composantes irréductibles de  $S$ .

On doit donc prolonger la classe caractéristique de  $\mathcal{G}$  sur  $\pi^{-1}(S^{sing}) \cap T_S^*X$ .

**LEMME 2.12.4** *Si  $Y \subset S$  est de codimension  $\geq 2$  dans  $S$ , alors  $\pi^{-1}(Y) \cap T_S^*X$  est encore de codimension  $\geq 2$  dans  $T_S^*X$ .*

*Preuve.*

$T_S^*X$  étant en position générique au point  $p$ , la restriction de la projection  $\pi$  à  $\{\xi_0 = 1\} \cap T_S^*X$  est un isomorphisme local de  $\{\xi_0 = 1\} \cap T_S^*X$  sur  $S$  au voisinage du point  $p$ .

Localement au voisinage du point  $p$ ,  $\pi^{-1}(Y) \cap T_S^*X$  est donc le cône engendré par la multiplication par  $\mathbb{C}^*$  dans les fibres sur  $\pi^{-1}(Y) \cap T_S^*X \cap \{\xi_0 = 1\}$  et est donc de dimension  $\dim_{\mathbb{C}} Y + 1$ .  $\square$

On rappelle (lemme 2.3.1) que pour prolonger, il suffit de prolonger en dehors d'un sous-ensemble de codimension 2 dans  $Ch(\mathcal{G})$ .

Si  $S^{sing}$  est de codimension strictement supérieure à 1 dans  $S$ , alors il n'y a aucun problème de prolongement d'après le lemme 2.12.4.

Si  $S^{sing}$  est de codimension 1 dans  $S$ , alors on peut négliger tout ce qui se passe au-dessus de  $\tilde{S} \subset S^{sing}$  de codimension 1 dans  $S^{sing}$  : on peut donc se placer en un point générique de  $S^{sing}$ , c'est-à-dire en dehors d'un fermé analytique de  $S^{sing}$ , de codimension 1 dans  $S^{sing}$ .

Soit  $x$  un point générique de  $S^{sing}$ . En un point générique de  $S^{sing}$ , on peut supposer que  $S^{sing}$  est lisse et que  $S \setminus S^{sing}$ ,  $S^{sing}$  vérifient les conditions de régularité de Whitney ( $S \setminus S^{sing}$ ,  $S^{sing}$  sont deux strates d'une stratification de Whitney de  $S$ ).

Comme on a une stratification de Whitney de  $S$ , d'après le premier lemme d'isotopie de Thom-Mather (voir par exemple [LT], théorème 1.2.8), il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $X$  et un homéomorphisme  $\phi$  :

$$\phi : U \longrightarrow (S^{sing} \cap U) \times (H \cap U)$$

où  $H$  est un espace analytique complexe lisse de  $X = \mathbb{C}^{n+1}$  qui coupe transversalement  $S^{sing}$  en  $x$  (c'est-à-dire que  $S^{sing} \cap H = \{x\}$ ) :  $H$  peut être choisi quelconque du moment que la condition de transversalité est satisfaite.

Par exemple, on peut prendre pour  $H$  un plan vectoriel  $\simeq \mathbb{C}^2$ .

De plus, l'homéomorphisme  $\phi$  induit des homéomorphismes :

$$\begin{aligned} U \setminus S &\xrightarrow{\simeq} (S^{sing} \cap U) \times (H \cap U \setminus H \cap S) \\ U \cap (S \setminus S^{sing}) &\xrightarrow{\simeq} (S^{sing} \cap U) \times (H \cap S \cap U \setminus H \cap S^{sing}) \\ U \cap S^{sing} &\xrightarrow{\simeq} (S^{sing} \cap U) \times (H \cap S^{sing} \cap U) \end{aligned}$$

Si on a choisi pour  $H$  un plan vectoriel, alors  $C := H \cap S$  est une courbe plane et puisque  $S^{sing}$  est lisse de codimension 1 dans  $S$ , on a  $S^{sing} \simeq \mathbb{C}^{n-1}$ . Donc,  $\phi$  induit des homéomorphismes :

$$\begin{aligned} U \setminus S &\xrightarrow{\simeq} (\mathbb{C}^{n-1}) \times (\mathbb{C}^2 \setminus C) \\ U \cap (S \setminus S^{sing}) &\xrightarrow{\simeq} (\mathbb{C}^{n-1}) \times (C \setminus \{(0, 0)\}) \\ U \cap S^{sing} &\xrightarrow{\simeq} (\mathbb{C}^{n-1}) \times (\{(0, 0)\}) \end{aligned}$$

Autrement dit,  $\phi$  induit un homéomorphisme de triplets :

$$\phi : (U, U \cap S, U \cap S^{sing}) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^{n-1} \times C, \mathbb{C}^{n-1} \times \{(0, 0)\})$$

où  $C$  est une courbe plane.

On a donc deux espaces analytiques stratifiés qui sont homéomorphes et dont les strates sont échangées par l'homéomorphisme.

$\phi_*\mathcal{G}$  est donc un faisceau pervers sur  $\mathbb{C}^{n+1}$ , relativement à  $\mathbb{C}^{n-1} \times C$ .

On a alors le lemme :

**LEMME 2.12.5** *Par l'homéomorphisme précédent, les variétés caractéristiques et les microlocalisés de Sato se correspondent.*

*Preuve.*

$\phi_*\mathcal{G}$  est un faisceau pervers, constructible relativement à la stratification de Whitney :  $\mathbb{C}^{n-1} \times (\mathbb{C}^2 \setminus C)$ ,  $\mathbb{C}^{n-1} \times (C \setminus \{(0, 0)\})$ ,  $\mathbb{C}^{n-1} \times \{(0, 0)\}$ .

On a donc  $Ch(\phi_*\mathcal{G}) \subset T_{\mathbb{C}^{n+1}}^*\mathbb{C}^{n+1} \cup T_{\mathbb{C}^{n-1} \times C}^*\mathbb{C}^{n+1} \cup T_{\mathbb{C}^{n-1} \times \{(0,0)\}}^*\mathbb{C}^{n+1}$ .

On commence par montrer que les variétés caractéristiques se correspondent, c'est-à-dire que le conormal  $T_{\mathbb{C}^{n-1} \times \{(0,0)\}}^*\mathbb{C}^{n+1}$  n'apparaît pas dans  $Ch(\phi_*\mathcal{G})$ .

Soit  $i : H \hookrightarrow X$  l'inclusion du plan  $H \simeq \mathbb{C}^2$  dans  $X$ . L'application  $i$  est lisse, non-caractéristique pour  $\mathcal{G}$ .

En appliquant le lemme 10.3.9 de [KS] (voir aussi la proposition 5.4.5), on obtient que  $i^{-1}\mathcal{G}$  est pervers sur  $H$  et  $Ch(i^{-1}\mathcal{G}) \subset T_H^*H \cup T_C^*H$  : le conormal au point n'apparaît pas, puisque  $T_{Y^{sing}}^*X$  n'apparaît pas dans  $Ch(\mathcal{G})$ .

D'autre part,  $\phi|_H$  est l'identité donc  $(\phi|_H)_*(i^{-1}\mathcal{G})$  est pervers sur  $\phi|_H(H)$  sans le conormal au point. Mais  $(\phi|_H)_*(i^{-1}\mathcal{G}) = j^{-1}(\phi_*\mathcal{G})$ , où  $j$  est l'inclusion de niveau 0 :  $j : H \hookrightarrow \mathbb{C}^{n-1} \times H$ .

Comme  $j$  est non caractéristique pour  $\phi_*\mathcal{G}$ , si le conormal au point n'apparaît pas dans  $Ch(j^{-1}(\phi_*\mathcal{G}))$ , c'est que  $T_{\mathbb{C}^{n-1} \times \{(0,0)\}}^*\mathbb{C}^{n+1}$  n'apparaît pas dans  $Ch(\phi_*\mathcal{G})$ .

Ainsi les seuls microlocalisés qui interviennent sont les  $\mu_{C_i \times \mathbb{C}^{n-1}}(\tilde{\mathcal{G}})$ , où  $C_i$  désigne une composante irréductible de  $C$ .

Ces microlocalisés peuvent alors être définis de façon purement topologique. On peut les obtenir par restriction à un voisinage tubulaire de  $C_i \times \mathbb{C}^{n-1}$ , puis identification du voisinage tubulaire avec le fibré normal  $T_{C_i \times \mathbb{C}^{n-1}}\mathbb{C}^{n+1}$  et enfin transformation de Fourier géométrique.

Puisque les voisinages tubulaires sont échangés par  $\phi$ , on en déduit le lemme.

□

On est donc ramené à travailler avec le faisceau pervers  $\tilde{\mathcal{G}} := \phi_* \mathcal{G}$ .  
Notons  $q$  la projection  $q : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ .

LEMME 2.12.6 *Il existe un faisceau pervers  $\tilde{\mathcal{F}}$  sur  $\mathbb{C}^2$  tel que  $\tilde{\mathcal{G}} = q^{-1} \tilde{\mathcal{F}}$ .*

*Preuve.*

Par définition de sa stratification ( il y a 3 strates :  $(\mathbb{C}^2 \setminus C) \times \mathbb{C}^{n-1}$ ,  $(C \setminus \{(0, 0)\}) \times \mathbb{C}^{n-1}$ ,  $\{(0, 0)\} \times \mathbb{C}^{n-1}$ ), on voit que le faisceau pervers  $\tilde{\mathcal{G}}$  est un complexe de faisceaux à cohomologie constante sur les fibres  $q^{-1}(x)$ .  
D'après la proposition 2.7.8 de [KS], le morphisme naturel  $q^{-1} \mathbf{R}q_* \tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}$  est un isomorphisme.

Si on note  $i$  l'inclusion de niveau 0,  $i : \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n-1}$ ,  $i(x) = (x, \underline{0})$ , on en déduit donc que le morphisme naturel  $\mathbf{R}q_* \tilde{\mathcal{G}} = i^{-1} q^{-1} \mathbf{R}q_* \tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow i^{-1} \tilde{\mathcal{G}}$  est un isomorphisme.

Ainsi, on peut écrire que  $\tilde{\mathcal{G}} = q^{-1} \mathbf{R}q_* \tilde{\mathcal{G}} = q^{-1} i^{-1} \tilde{\mathcal{G}}$ . Enfin, comme le sous-espace  $\mathbb{C}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n-1}$  est non caractéristique pour  $\tilde{\mathcal{G}}$ , on en déduit que  $\tilde{\mathcal{F}} := i^{-1} \tilde{\mathcal{G}}$  est un faisceau pervers sur  $\mathbb{C}^2$ , relativement à  $C$ .

On a donc bien écrit  $\tilde{\mathcal{G}} = q^{-1} \tilde{\mathcal{F}}$ , c'est-à-dire que  $\tilde{\mathcal{G}}$  est le faisceau pervers  $\tilde{\mathcal{F}}$  sur  $\mathbb{C}^2$  avec le paramètre  $\mathbb{C}^{n-1}$ . □

PROPOSITION 2.12.7 *Si le déterminant microlocal existe pour tout faisceau pervers en dimension 2, alors le déterminant microlocal se prolonge hors section nulle pour tout faisceau pervers en dimension quelconque en position générique.*

*Preuve.*

La proposition découle immédiatement du travail précédent et du comportement du déterminant microlocal par une projection  $\mathbb{C}^m \times X \longrightarrow X$  (proposition 2.6.1). □

## 2.13 Analyse du problème du prolongement en position générique en dimension 2

Soit  $X = \mathbb{C}^2$ , avec les coordonnées  $(x_0, x_1)$ ,  $\pi : T^*X \longrightarrow X$  son fibré cotangent, muni des coordonnées  $(x_0, x_1; \xi_0, \xi_1)$ .

Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau pervers sur  $X$ , relativement à  $C = \bigcup_{i=1 \dots \ell} C_i$ , réunion de courbes planes  $C_i$ . On suppose que  $p = (0; dx_0) \in Ch(\mathcal{F})$  et que  $Ch(\mathcal{F})$  est en position générique au point  $p$ .

Autrement dit, on a  $Ch(\mathcal{F}) = T_{\mathbb{C}^2}^* \mathbb{C}^2 \cup \bigcup_{i=1 \dots \ell} T_{C_i}^* \mathbb{C}^2$ , et les courbes  $C_i$  sont toutes tangentes en  $(0, 0)$  à  $\{x_0 = 0\}$ .

On note  $\Lambda = Ch(\mathcal{F})$ .

Si on note  $Z$  l'ensemble d'irrégularité de  $\Lambda$  hors section nulle, on a :

$$Z = \{(0, 0; \xi_0, 0) \in T^*\mathbb{C}^2, \xi_0 \neq 0\} = \mathbb{C}^* \cdot (0; dx_0).$$

Soit  $\Omega$  un voisinage du point  $p$  dans  $T^*\mathbb{C}^2$ .

On note  $\Lambda_i = T_{C_i}^* \mathbb{C}^2 \cap \Omega$ , pour  $i = 1 \dots \ell$ .

Associés à  $\mathcal{F}$ , on a les  $\ell$  systèmes locaux  $\mathcal{L}_i = \mu_{C_i^\circ}(\mathcal{F}|_{\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}})|_{\Lambda_i \setminus Z}[1]$ .

$\mathcal{L}_i$  est de rang  $d_i$ , et on regarde les systèmes locaux  $\ell_i = \bigwedge^{d_i} \mathcal{L}_i$ . Ce sont des systèmes locaux sur  $\Lambda_i \setminus Z$ , de rang 1.

Pour tout  $i = 1 \dots \ell$ , on associe à  $\ell_i$  une classe

$$\lambda_i \in H^1(\Lambda_i \setminus Z, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$$

Puis, par l'isomorphisme de Thom (1.6.3), une classe notée encore  $\lambda_i$ ,

$$\lambda_i \in H_{\Lambda_i \setminus Z}^5(\Omega \setminus Z, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$$

Analysons un peu mieux la topologie de  $\Lambda_i \setminus Z = (T_{C_i}^* \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{C}^* \cdot (0; dx_0)) \cap \Omega$ . On a  $T_{C_i}^* \mathbb{C}^2 \setminus Z = T_{C_i}^* \mathbb{C}^2 \setminus \pi^{-1}(0) = T_{C_i^\circ}^*(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\})$ . Comme  $C_i$  est à singularités isolées à l'origine,  $C_i^\circ = C_i \setminus \{(0,0)\}$  est lisse et donc  $T_{C_i^\circ}^*(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\})$  est isomorphe à  $C_i^\circ \times \mathbb{C}$ . Donc pour un ouvert  $\Omega$  bien choisi,  $\Lambda_i \setminus Z$  va être isomorphe à  $C_i^\circ \times V$ , où  $V$  est un ouvert contractile de  $\mathbb{C}$ .  $C_i^\circ$  est une variété complexe isomorphe à  $\mathbb{C}^*$  et donc  $H_1(C_i^\circ, \mathbb{Z})$  a un générateur privilégié. Donc, le système local  $\mathcal{L}_i$  est simplement décrit par une monodromie  $M_i \in GL(d_i, \mathbb{C})$ , qui est la monodromie du système local  $\mathcal{L}_i$  quand on tourne autour de l'origine dans le sens positif dans la base  $C_i^\circ \simeq \mathbb{C}^*$ .

**Le système local  $\ell_i$  est simplement décrit par le nombre  $m_i = \det(M_i) \in \mathbb{C}^*$ .**

Le problème du prolongement au-dessus de  $Z$  hors section nulle est alors le suivant.

On a  $Ch(\mathcal{F}) \cap \Omega = \Lambda \cap \Omega = \bigcup_{i=1 \dots \ell} \Lambda_i$ .

Comme  $(\Lambda \setminus Z) \cap \Omega$  est la réunion disjointe des  $\Lambda_i \setminus Z$ , la somme  $\bigoplus_{i=1 \dots \ell} \lambda_i$  donne une classe

$$\lambda \in \bigoplus_{i=1 \dots \ell} H_{\Lambda_i \setminus Z}^5(\Omega \setminus Z, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) = H_{\Lambda \setminus Z}^5(\Omega \setminus Z, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$$

On cherche à prolonger  $\lambda$  au-dessus de  $Z$ , c'est-à-dire à prolonger  $\lambda$  en une classe

$$\tilde{\lambda} \in H_{\Lambda}^5(\Omega, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$$

LEMME 2.13.1  *$\lambda$  se prolonge en  $\tilde{\lambda}$  si et seulement si*

$$\prod_{i=1 \dots \ell} \det(M_i) = \pm 1$$

*Preuve.*

Comme on s'intéresse à ce qui se passe au voisinage du point  $p = (0; dx_0)$ , que tous les espaces considérés sont homogènes pour la multiplication par  $\mathbb{C}^*$  dans les fibres, on peut tout contracter sur  $\{\xi_0 = 1\}$ .

La contraction pour  $T_{C_i}^* \mathbb{C}^2$  et  $\mathbb{C}^* \cdot (0; dx_0)$  consiste à "écraser" le paramètre des fibres sur  $\{\xi_0 = 1\}$ .

Pour cela, il faut bien choisir l'ouvert ambiant  $\Omega$ .

On peut regarder l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^* &\longrightarrow T^* \mathbb{C}^2 \setminus \{\xi_0 = 0\} \\ \psi(x_0, x_1, \alpha, \beta) &= (x_0, x_1, \beta, \alpha \cdot \beta) \end{aligned}$$

Si on restreint  $\psi$  à  $B(0, \varepsilon) \times U$ , où  $U$  est un voisinage ouvert contractile de 1 dans  $\mathbb{C}^*$  et  $B(0, \varepsilon)$  désigne une petite boule de  $\mathbb{C}^3$  centrée à l'origine, alors  $\psi(B(0, \varepsilon) \times U)$  est bien un voisinage ouvert de  $p = (0, dx_0)$  et on peut contracter à gauche  $U$  sur 1, ce qui donne une contraction de  $\psi(B(0, \varepsilon) \times U)$  sur  $\psi(B(0, \varepsilon) \times U) \cap \{\xi_0 = 1\}$ , contraction qui respecte l'homogénéité dans les fibres.

On choisit donc un ouvert  $\Omega$  de la forme  $\psi(B(0, \varepsilon) \times U)$ .

Une fois cette contraction réalisée, on se retrouve dans la situation suivante :

$\Lambda_i \setminus Z$  est contracté sur  $(\Lambda_i \setminus Z) \cap \{\xi_0 = 1\} \simeq C_i^\circ$ , et  $\Omega \setminus Z$  est contracté sur  $(\Omega \setminus Z) \cap \{\xi_0 = 1\} \simeq \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ .

Notons  $D_i = \Lambda_i \cap \{\xi_0 = 1\}$  pour  $i = 1 \dots \ell$ .

Les  $D_i$  sont des disques topologiques.

En effet, l'hypothèse  $(0; dx_0) \in T_{C_i}^* \mathbb{C}^2$  implique que les courbes  $C_i$  sont en position de Weierstrass et que l'on peut donc les paramétrer par :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow C_i \subset \mathbb{C}^2 \\ t &\longmapsto (\varphi_i(t), t^{n_i}) \end{aligned}$$

où  $\varphi_i(t)$  est holomorphe avec  $\text{val}_t \varphi_i(t) > n_i$ .

Alors on peut paramétrer  $T_{C_i}^* \mathbb{C}^2$  par :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\longrightarrow T_{C_i}^* \mathbb{C}^2 \subset T^* \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^4 \\ (t, \mu) &\longmapsto \left( \varphi_i(t), t^{n_i}; \mu, \mu \cdot \frac{-\varphi_i'(t)}{n_i t^{n_i-1}} \right) \end{aligned}$$

$D_i = \Lambda_i \cap \{\xi_0 = 1\}$  est alors paramétré par :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow D_i \subset \{\xi_0 = 1\} = \mathbb{C}^3 \\ t &\longmapsto \left( \varphi_i(t), t^{n_i}, \frac{-\varphi_i'(t)}{n_i t^{n_i-1}} \right) \end{aligned}$$

Donc  $D_i$  est bien un disque topologique.

Géométriquement on a donc une réunion de disques topologiques  $D_i$  plongés de manière non triviale dans  $\mathbb{C}^3$ , attachés par leur centre commun, l'origine de  $\mathbb{C}^3$ .

On note  $D_i^\circ = D_i \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ,  $D = \bigcup_{i=1 \dots \ell} D_i$  et  $D^\circ = D \setminus \{(0, 0, 0)\}$ .

Après contraction, on a des classes  $\lambda_i \in H^1(D_i^\circ, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) = H_{D_i^\circ}^5(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ .

On cherche à quelle condition la classe  $\lambda = \bigoplus_{i=1 \dots \ell} \lambda_i \in H_D^5(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  se prolonge en une classe  $\tilde{\lambda} \in H_D^5(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ .

Pour cela, on regarde la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H_D^5(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \longrightarrow \bigoplus_{i=1 \dots \ell} H_{D_i^\circ}^5(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{\{0\}}^6(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$$

Pour que  $\lambda$  se prolonge, il faut et il suffit que la classe  $\lambda = \bigoplus_{i=1 \dots \ell} \lambda_i$  soit envoyée sur zéro par le morphisme de connexion :

$$\delta : \bigoplus_{i=1..l} H_{D_i^\circ}^5(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{\{0\}}^6(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$$

Le morphisme  $\delta$  est la somme des morphismes de connexion :

$$\delta_i : H_{D_i^\circ}^5(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{\{0\}}^6(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$$

Les groupes de cohomologie précédents s'identifient naturellement à  $\mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}$  de la façon suivante.

$H_{\{0\}}^6(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  s'identifie à  $\mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}$  par l'orientation naturelle de  $\mathbb{C}^3$ .

Concernant les  $H_{D_i^\circ}^5(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ , par l'isomorphisme de Thom, on a  $H_{D_i^\circ}^5(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) = H^1(D_i^\circ, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  et ce dernier groupe s'identifie à  $H_{\{0\}}^2(D_i, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  par l'isomorphisme naturel  $H^1(D_i^\circ, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{\{0\}}^2(D_i, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ .

Enfin, le groupe  $H_{\{0\}}^2(D_i, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  est identifié à  $\mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}$  par l'orientation naturelle de  $D_i$  (on rappelle que  $D_i^\circ$  est un disque holomorphe épointé).

Dans l'identification  $H_{D_i^\circ}^5(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}, \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}) = \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ , la classe  $\lambda_i$  correspond à  $\det(M_i)/\pm 1$  puisque  $M_i$  est la monodromie du système local  $\mathcal{L}_i$  le long d'un lacet tournant dans le sens positif.

Pour terminer la démonstration du lemme, il suffit donc de montrer qu'avec les identifications précédentes, les morphismes  $\delta_i$  se lisent tous comme l'identité :  $\mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ .

Soit  $i$  fixé,  $1 \leq i \leq l$ .

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} D_i \hookrightarrow & \xrightarrow{b_i} & \mathbb{C}^3 \\ a_i \uparrow & & \uparrow a \\ D_i^\circ \hookrightarrow & \xrightarrow{\tilde{b}_i} & \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \end{array}$$

Notons  $G = \mathbb{C}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ . Pour un espace topologique  $Y$ ,  $\underline{G}_Y$  désignera le faisceau constant de fibre  $G$  sur  $Y$ .

Le morphisme  $\delta_i$  est un morphisme de connexion dans la suite exacte longue issue du triangle distingué :

$$\mathbf{R}\Gamma_{\{0\}}(\mathbb{C}^3, G) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{D_i}(\mathbb{C}^3, G) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{D_i^\circ}(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}, G) \xrightarrow{+1}$$

Ce dernier triangle est l'image par le foncteur  $\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{C}^3, .)$  du triangle de faisceaux sur  $\mathbb{C}^3$  :



$$\mathbf{R}\Gamma_{\{0\}}\underline{G}_{\mathbb{C}^3} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{D_i}\underline{G}_{\mathbb{C}^3} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{D_i^\circ}\underline{G}_{\mathbb{C}^3} \xrightarrow{+1}$$

qui est d'après le lemme 1.6.10 l'image par le foncteur  $b_{i*}(\cdot)[-4]$  du triangle de faisceaux sur  $D_i$  :

$$\mathbf{R}\Gamma_{\{0\}}\underline{G}_{D_i} \longrightarrow \underline{G}_{D_i} \longrightarrow \mathbf{R}a_{i*}a_i^{-1}\underline{G}_{D_i} \xrightarrow{+1}$$

Ainsi le morphisme  $\delta_i$  est un morphisme de connexion dans la suite exacte longue obtenue après application du foncteur  $\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{C}^3, b_{i*}(\cdot))[-4]$  au triangle précédent.

Or, on a  $\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{C}^3, b_{i*}(\cdot))[-4] = \mathbf{R}\Gamma(D_i, \cdot)[-4]$ .

Donc  $\delta_i$  est (au décalage  $[-4]$  près) le morphisme de connexion obtenu en appliquant le foncteur  $\mathbf{R}\Gamma(D_i, \cdot)$  au triangle précédent.

Autrement dit,  $\delta_i$  est le morphisme :

$$H^1(D_i^\circ, G) \longrightarrow H_{\{0\}}^2(D_i, G)$$

c'est-à-dire précisément le morphisme qui identifie naturellement  $H^1(D_i^\circ, G)$  à  $G$ .

Donc, avec les identifications naturelles définies précédemment, d'après le lemme 1.6.5, le morphisme  $\delta_i$  se lit comme l'identité  $G \longrightarrow G$ , ce qui termine la preuve du lemme.  $\square$

## 2.14 Le prolongement en dimension 2

Comme on l'a vu précédemment, pour terminer la démonstration du prolongement, il reste à montrer qu'en dimension 2, un certain produit de déterminants de monodromies vaut  $\pm 1$ .

On part de  $\mathcal{F}$  faisceau pervers sur  $\mathbb{C}^2$ , relativement à  $C = \bigcup_{i=1 \dots \ell} C_i$ , réunion de courbes planes à singularité isolée à l'origine.

$(x_0, x_1)$  sont les coordonnées sur  $\mathbb{C}^2$ .

$Ch(\mathcal{F})$  est supposé en position générique au point  $(0; dx_0) \in T^*\mathbb{C}^2$  : c'est-à-dire que le conormal à l'origine  $T_0^*\mathbb{C}^2$  n'apparaît pas dans  $Ch(\mathcal{F}) = T_{\mathbb{C}^2}^*\mathbb{C}^2 \cup \bigcup_{i=1 \dots \ell} T_{C_i}^*\mathbb{C}^2$ . Comme on regarde le problème du prolongement sur la codirection  $(0; dx_0)$ , on peut supposer que toutes les courbes  $C_i$  sont tangentes à  $\{x_0 = 0\}$  à l'origine.

En dimension 2, une fois la courbe  $C$  fixée, on a des résultats explicites d'équivalences de catégories entre la catégorie des faisceaux pervers sur  $\mathbb{C}^2$  relativement à  $C$  et une certaine catégorie de représentations de carquois ([PhM2], [PhM3], [MV2], [N]).

Dans une telle équivalence de catégories, le fait d'être en position générique se traduit par une condition sur la dimension des espaces vectoriels qui interviennent dans la représentation de carquois et les différentes monodromies qui nous intéressent sont explicitement calculables en termes des applications linéaires de la représentation de carquois.

Dans cette partie nous rappellerons l'équivalence de catégories construite par Ph. Maisonobe entre les faisceaux pervers en dimension 2 et certaines catégories de représentations de carquois.

Ensuite, nous calculerons dans ce langage les monodromies qui nous intéressent, puis nous rappellerons les conséquences de l'hypothèse de la position générique dans le langage des carquois.

Enfin nous démontrerons qu'en position générique, le produit des déterminants des différentes monodromies vaut  $\pm 1$ , ce qui achèvera la démonstration du théorème.

### Equivalence de catégories entre faisceaux pervers en dimension 2 et catégories de représentation de carquois

Fixons  $C$  une courbe plane de  $\mathbb{C}^2$ .

On note  $Perv^C(\mathbb{C}^2)$  la catégorie des faisceaux pervers sur  $\mathbb{C}^2$  relativement à la courbe  $C$ .

Soit  $L$  l'entrelac associé à la courbe plane  $C : L = S_\varepsilon^3 \cap C$ , où  $S_\varepsilon^3$  désigne la sphère de rayon  $\varepsilon$  centrée à l'origine de  $\mathbb{C}^2$ . Notons que  $L$  peut être vu comme un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3 \simeq S_\varepsilon^3 \setminus \{\infty\}$ .

On note  $\omega$  l'origine de  $\mathbb{R}^3$ . Quitte à faire un homéomorphisme de la paire  $(\mathbb{R}^3, L)$  on peut supposer que la projection de centre  $\omega$  sur une sphère n'a que des points doubles ordinaires. Soit  $\delta$  le nombre de ces points doubles.

On note  $\mathcal{C}(C)$  la catégorie suivante.

Les objets de  $\mathcal{C}(C)$  sont constitués de  $(\delta+2)$   $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels de dimension finie, reliés par des morphismes

$$E \begin{array}{c} \xrightarrow{u_k} \\ \xleftarrow{v_k} \end{array} F_k \begin{array}{c} \xrightarrow{u'_k} \\ \xleftarrow{v'_k} \end{array} G$$

où  $k$  décrit l'ensemble  $\{1, \dots, \delta\}$ , avec les conditions :

- 1)  $v_k u_k + 1d := N_k$  est un isomorphisme
- 2)  $v'_k u'_{a(k)} = u_k v_{a(k)}$   
 $v'_k u'_{b(k)} := -\alpha_{b(k),k}$  est un isomorphisme  
 $v'_k u'_k = 1d$   
 $v'_k u'_c = 0$  si  $k \notin \{k, a(k), b(k)\}$
- 3)  $N_{a(k)} v_{b(k)} = v_k \alpha_{b(k),k}$
- 4)  $\sum_{k=1}^{\delta} \tilde{N}_k v_k v'_k = 0$
- 5)  $\sum_{k=1}^{\delta} u'_k u_k = 0$

où  $a$  et  $b$  sont des applications de  $\{1, \dots, \delta\}$  dans lui-même, définies par la topologie de  $C$  et la numérotation des points doubles, et  $\tilde{N}_k$  est un certain produit de  $N_k$ .

Les morphismes de  $\mathcal{C}(C)$  sont des morphismes de diagrammes

$$E \begin{array}{c} \xrightarrow{u_k} \\ \xleftarrow{v_k} \end{array} F_k \begin{array}{c} \xrightarrow{u'_k} \\ \xleftarrow{v'_k} \end{array} G$$

assujettis aux conditions de commutativité évidentes.

**THÉORÈME 2.14.1** (*[PhM2], [PhM3]*)

*Les catégories  $Perv^C(\mathbb{C}^2)$  et  $\mathcal{C}(C)$  sont équivalentes.*

Le résultat précédent s'obtient de la manière suivante.

Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau pervers en dimension 2, relativement à la courbe plane  $C$ .

L'idée de la construction de [PhM2] est de trouver des coupures adaptées à la topologie de  $\mathcal{F}$  qui jouent le même rôle que la coupure  $\mathbb{R}^+$  en dimension 1 (pour le cas de la dimension 1, voir [PhM1], [GGM]).

Pour cela, on introduit une coupure  $H$  de la manière suivante.

Soit  $L$  l'entrelac associé à la courbe plane  $C : L = S_\varepsilon^3 \cap C$ . Rappelons que si  $C(L)$  désigne le cône sur  $L$  de sommet l'origine de  $\mathbb{C}^2$ , on a l'homéomorphisme de paires :  $(\mathbb{C}^2, C) \simeq (\mathbb{C}^2, C(L))$ .

On note  $\omega$  l'origine de  $\mathbb{R}^3$ . On suppose que la projection de centre  $\omega$  sur une sphère n'a que des points doubles ordinaires.

On note  $(t_1, \dots, t_\delta)$  les  $\delta$  points de  $L$  associés à ces points doubles (voir la figure suivante). On note  $c(L)$  le cône compact sur  $L$  de sommet  $\omega : c(L)$  est la réunion de tous les segments  $[\omega, l]$ , pour  $l$  décrivant  $L$ .

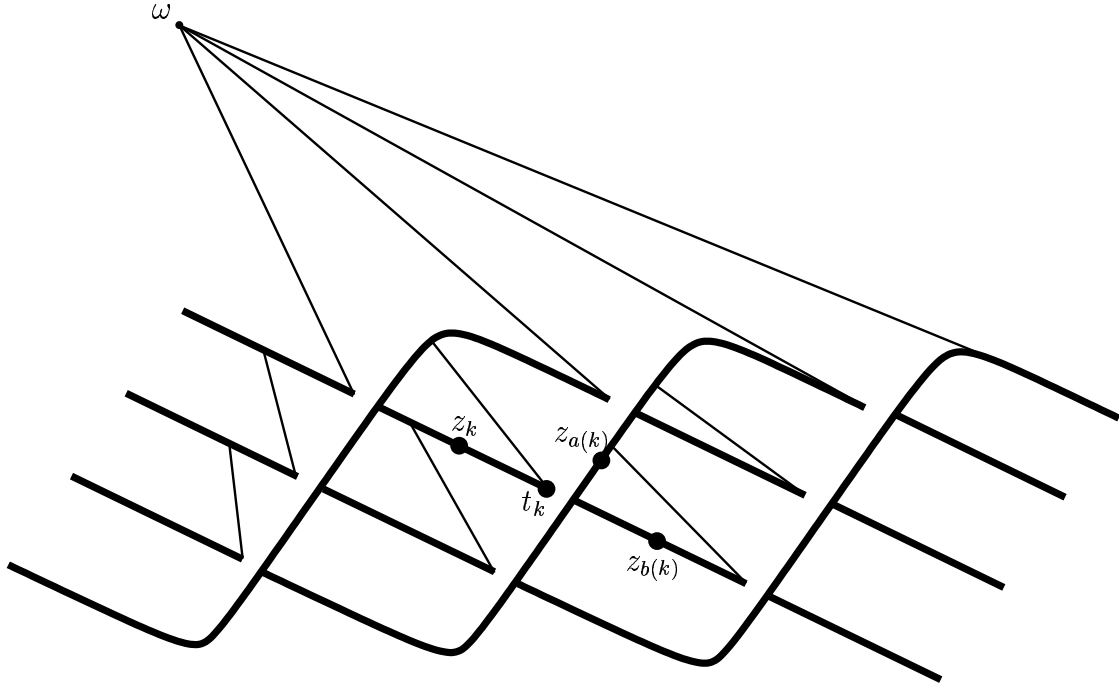
On note et on appelle *coupure associée à  $C$*  l'ensemble  $H = C(c(L))$ , c'est-à-dire le cône sur  $c(L)$  de sommet l'origine de  $\mathbb{C}^2$ .

On note et on appelle *accident de la coupure  $H$*  l'ensemble  $M = C(\bigcup_{i=1 \dots \delta} [\omega, t_i])$ , c'est-à-dire le cône de sommet l'origine de  $\mathbb{C}^2$  tracé sur les segments  $[\omega, t_i]$  quand  $t_i$  décrit l'ensemble  $\{t_1, \dots, t_\delta\}$ .

La numérotation s'effectue de la façon suivante : on commence par numéroter les  $\delta$  points  $\{t_1, \dots, t_\delta\}$ .

$z_k$  désigne le point générique de  $L$  qui "arrive" sur le point  $t_k$ .

Les applications  $a, b : \{1, \dots, \delta\} \rightarrow \{1, \dots, \delta\}$  sont les suivantes : pour passer du point  $z_k$  au point  $z_{b(k)}$ , on franchit la coupure créé par le cône sur  $z_{a(k)}$ . (Pour des définitions précises, on renvoie à [PhM2]).



On a les résultats suivants :

- les 3 complexes  $\mathbf{R}\Gamma_{\mathbb{C}^2 \setminus H} \mathcal{F}$ ,  $\mathbf{R}\Gamma_{H \setminus M} \mathcal{F}$ ,  $\mathbf{R}\Gamma_M \mathcal{F}$  sont concentrés en un seul degré, respectivement en degrés 0, 1 et 2
- ces trois faisceaux sont contractibles relativement à une stratification réelle de  $\mathbb{C}^2$ , qui est un raffinement de la stratification  $\mathbb{C}^2 \setminus H$ ,  $H \setminus M$ ,  $M$ .
- à  $\mathcal{F}$ , on associe un complexe  $\alpha(\mathcal{F})$  construit sur ces trois faisceaux :

$$0 \longrightarrow \mathbf{R}^0 \Gamma_{\mathbb{C}^2 \setminus H} \mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{R}^1 \Gamma_{H \setminus M} \mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{R}^2 \Gamma_M \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

Les morphismes de  $\alpha(\mathcal{F})$  sont construits sur les morphismes issus des deux triangles :

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{R}\Gamma_M \mathcal{F} \\
 \downarrow \\
 \mathbf{R}\Gamma_H \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\mathbb{C}^2 \setminus H} \mathcal{F} \xrightarrow{+1} \\
 \downarrow \\
 \mathbf{R}\Gamma_{H \setminus M} \mathcal{F} \\
 \downarrow +1
 \end{array}$$

Il existe un morphisme naturel de  $\mathcal{F}$  vers  $\alpha(\mathcal{F})$  qui est un quasi-isomorphisme.

On peut décrire ces trois faisceaux et les flèches du complexe  $\alpha(\mathcal{F})$  en termes de certains espaces vectoriels et applications linéaires.

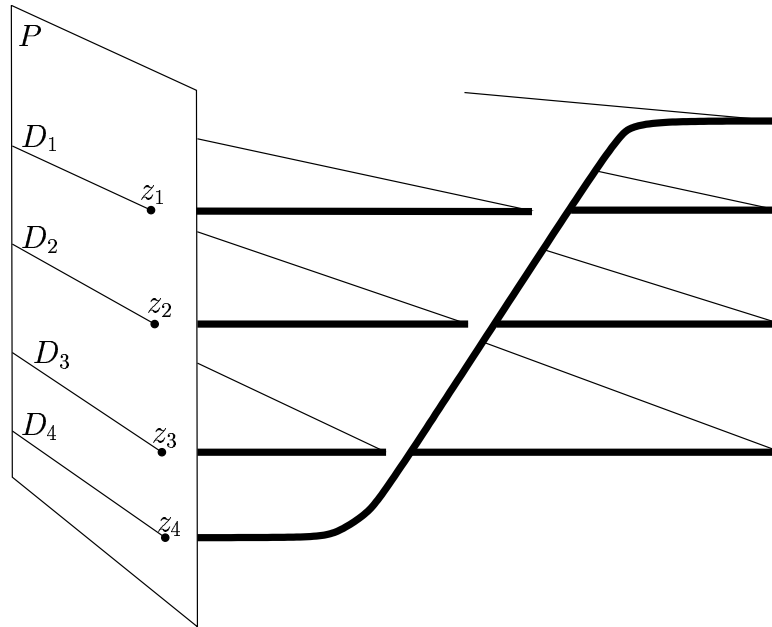
C'est ainsi que l'on construit un foncteur de la catégorie des faisceaux pervers sur  $\mathbb{C}^2$  vers la catégorie  $\mathcal{C}(C)$ .

Pour construire un foncteur quasi-inverse, on reconstruit à partir des données combinatoires les trois faisceaux  $\mathbf{R}^0\Gamma_{\mathbb{C}^2 \setminus H}\mathcal{F}$ ,  $\mathbf{R}^1\Gamma_{H \setminus M}\mathcal{F}$ ,  $\mathbf{R}^2\Gamma_M\mathcal{F}$  et le complexe  $\alpha(\mathcal{F})$  qui est un faisceau pervers quasi-isomorphe au faisceau pervers de départ.

Heuristiquement, cette coupure généralise la coupure de dimension 1 de la façon suivante.

Soit  $P$  un rectangle de  $\mathbb{R}^3 = S_\varepsilon^3 \setminus \{\infty\}$  qui coupe transversalement le cône compact  $c(L)$  comme sur la figure suivante.

Dans le rectangle  $P$ , on retrouve le cas de la dimension 1.



Dans  $P$ , on a  $N$  points ( $N$  est la multiplicité de  $C$  à l'origine)  $\{z_1, \dots, z_N\}$  et  $c(L)$  induit des coupures dans  $P$  qui sont des demi-droites  $D_1, \dots, D_N$  issues respectivement des points  $z_1, \dots, z_N$ .

L'espace vectoriel  $E$  est la fibre en un point du système local  $h^0(\mathcal{F})|_{\mathbb{C}^2 \setminus C}$ .  $E$  correspond aussi aux sections globales de la restriction de  $h^0(\mathcal{F})$  à  $P$  en dehors de  $D_1, \dots, D_N$  :  $E = \Gamma(P \setminus \bigcup_i D_i, h^0(\mathcal{F})|_P)$ .

Les monodromies du système local  $h^0(\mathcal{F})|_{\mathbb{C}^2 \setminus C}$  sont les applications  $N_k := 1d + v_k u_k$  : dans le rectangle  $P$ , chaque  $N_k$  correspond comme en dimension 1 au franchissement de la coupure  $D_k$  issue du point  $z_k$ .

Les espaces vectoriels  $F_k$  sont donnés par  $F_k := (R^1 \Gamma_{H \setminus M} \mathcal{F})_{z_k}$ .

Dans le rectangle  $P$ , on peut lire les  $F_k$  comme en dimension 1 :

$$F_k = (R^1 \Gamma_{D_k}(\mathcal{F}|_P))_{z_k}.$$

Les  $F_k$  correspondent aux cycles évanescents de  $\mathcal{F}$  le long de  $C_k$ , où  $C_k$  est la composante irréductible de  $C$  à laquelle le point  $z_k$  appartient.

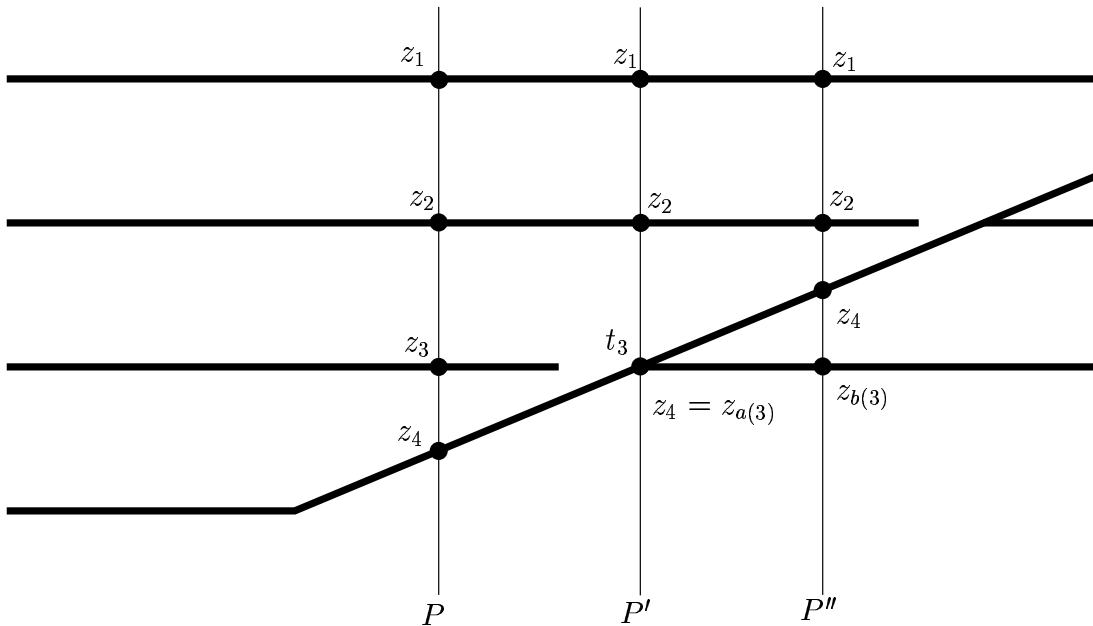
Comme en dimension 1, dans le rectangle  $P$ ,  $(R^1 \Gamma_{D_k}(\mathcal{F}|_P))|_{D_k \setminus \{z_k\}}$  est un faisceau constant sur  $D_k \setminus \{z_k\}$  de fibre  $E$  et  $v_k : F_k \rightarrow E$  est le morphisme qui permet de recoller le faisceau constant de fibre  $E$  avec le faisceau gratte-ciel  $F_k$  sur  $z_k$ .

Le morphisme  $u_k : E \rightarrow F_k$  est la fibre en  $z_k$  d'un certain morphisme issu d'un triangle distingué.

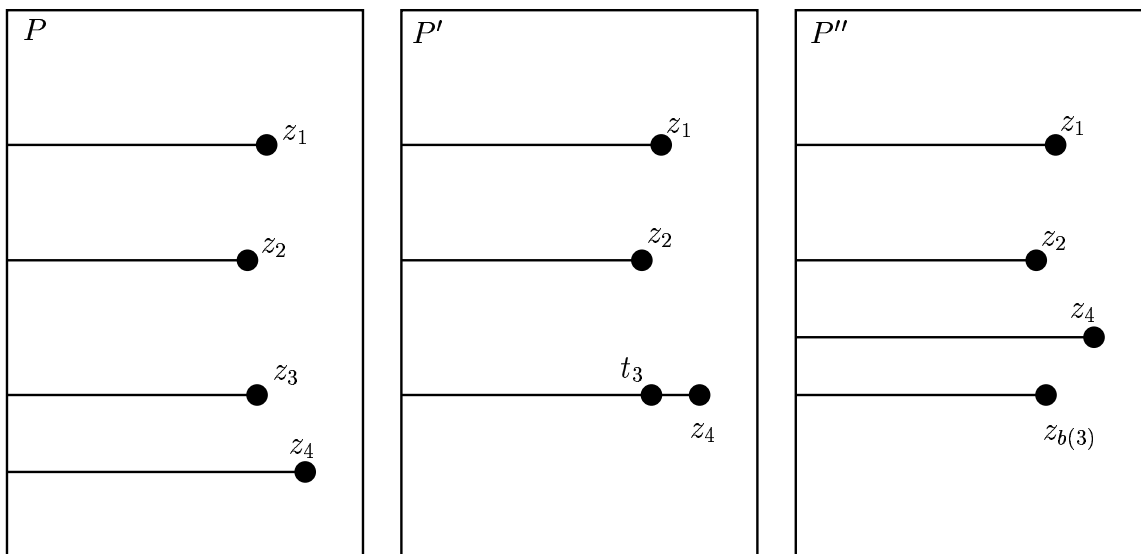
Ceci décrit la partie de gauche du diagramme 
$$E \begin{array}{c} \xrightarrow{u_k} \\ \xleftarrow{v_k} \end{array} F_k \begin{array}{c} \xrightarrow{u'_k} \\ \xleftarrow{v'_k} \end{array} G$$

La partie droite du diagramme rend compte d'un phénomène qui n'apparaît pas en dimension 1.

Si on coupe dans  $S_\varepsilon^3$  la coupure  $c(L)$  par trois rectangles  $P$ ,  $P'$  et  $P''$  comme sur la figure suivante, alors apparaît ce qui ressemble à un phénomène de Stokes.



Sur la figure suivante, on représente ce qu'on obtient dans les trois rectangles  $P$ ,  $P'$  et  $P''$ .



accident de coupure

Quand on fait varier continument le rectangle de  $P$  à  $P''$ , il apparaît un *accident de coupure* : sur le rectangle  $P'$  deux demi-droites se chevauchent. L'hypothèse sur le fait que la projection de l'entrelac  $L$  sur une sphère n'a que des point doubles ordinaires est là pour assurer qu'il n'y a que des phénomènes de Stokes "élémentaires".

Sur l'exemple du dessin, dans le rectangle  $P$ , on a un faisceau pervers en dimension 1, qui est décrit par un diagramme  $E \begin{matrix} \xrightarrow{u_k} \\ \xleftarrow{v_k} \end{matrix} F_k$  avec  $k=1,2,3$  et 4.

Dans le rectangle  $P''$ , on a un faisceau pervers en dimension 1, qui est décrit par un diagramme  $E \begin{matrix} \xrightarrow{u_k} \\ \xleftarrow{v_k} \end{matrix} F_k$  avec  $k=1,2,b(3)$  et 4.

La partie droite du diagramme  $E \begin{matrix} \xrightarrow{u_k} \\ \xleftarrow{v_k} \end{matrix} F_k \begin{matrix} \xrightarrow{u'_k} \\ \xleftarrow{v'_k} \end{matrix} G$  décrit ce que l'on ne voit pas

avec les rectangles (c'est-à-dire ce qui se passe à l'origine de  $\mathbb{C}^2$  et au sommet  $\omega$  du cône compact) mais aussi et surtout le phénomène de Stokes quand deux demi-droites réelles se chevauchent : la partie droite exprime comment

on passe de la représentation  $E \begin{matrix} \xrightarrow{u_k} \\ \xleftarrow{v_k} \end{matrix} F_k$  avec  $k=1,2,3$  et 4 à la représentation



$$E \begin{array}{c} \xrightarrow{u_k} \\ \xleftarrow{v_k} \end{array} F_k \text{ avec } k=1,2,b(3) \text{ et } 4.$$

Par exemple, les deux espaces vectoriels  $F_3$  et  $F_{b(3)}$  représentent la même chose : ce sont les cycles évanescents de  $\mathcal{F}$  le long de la composante irréductible  $C_3$  de la courbe  $C$ . D'une certaine manière, l'isomorphisme  $\alpha_{b(3),3} := -v'_k u'_{b(k)}$ ,  $\alpha_{b(3),3} : F_{b(3)} \rightarrow F_3$  exprime le changement de représentation du même objet.

### Expression des monodromies dans le langage de $\mathcal{C}(C)$

Soit  $C_i$  une composante irréductible de  $C$ . On note  $C_i^\circ := C_i \setminus \{(0,0)\}$ . On doit calculer les monodromies associées aux différents systèmes locaux  $\mathcal{L}_i$  obtenu à partir des microlocalisés  $\mu_{C_i^\circ}(\mathcal{F}|_{\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}})$ .

Pour calculer le microlocalisé  $\mu_{C_i^\circ}(\mathcal{F}|_{\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}})$ , on doit d'abord calculer le spécialisé  $\nu_{C_i^\circ}(\mathcal{F}|_{\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}})$ .

Soit  $\mathcal{T}_i$  un voisinage tubulaire de  $C_i^\circ$  dans  $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , qui évite toutes les autres composantes  $\{C_j\}_{j \neq i}$  de  $C$ . On a (lemme 1.2.3) :

$$\nu_{C_i^\circ}(\mathcal{F}|_{\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}}) = \mathcal{F}|_{\mathcal{T}_i}$$

$C_i^\circ$  est une sous-variété analytique lisse de  $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , isomorphe à un disque épointé  $\mathbb{C}^*$ .

Le fibré normal à  $C_i^\circ$  dans  $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$  est isomorphe à  $C_i^\circ \times \mathbb{C}$ , donc à  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ . On a un isomorphisme entre  $\mathcal{T}_i$  et un voisinage de la section nulle dans le fibré normal  $T_{C_i^\circ}(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\})$ . Par dilatation, on a un isomorphisme :  $\mathcal{T}_i \simeq C_i^\circ \times \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ .

$\mathcal{F}|_{\mathcal{T}_i}$  est un faisceau pervers sur  $\mathcal{T}_i$ , c'est-à-dire sur  $C_i^\circ \times \mathbb{C}$ . Vu la stratification,  $\mathcal{F}|_{\mathcal{T}_i}$  est pervers sur  $C_i^\circ \times \mathbb{C}$  relativement à  $C_i^\circ \times \{0\}$ . On peut donc voir  $\mathcal{F}|_{\mathcal{T}_i}$  comme un faisceau pervers sur  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ , relativement à  $\mathbb{C}^* \times \{0\}$ .

Ainsi, le microlocalisé  $\mu_{C_i^\circ}(\mathcal{F}|_{\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}}) = (\mathcal{F}|_{\mathcal{T}_i})^\wedge$  est un faisceau pervers (à un décalage près) sur  $T_{C_i^\circ}^* \mathbb{C}^2 \simeq C_i^\circ \times \mathbb{C}$  et peut lui aussi être vu comme un faisceau pervers sur  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$  relativement à  $\mathbb{C}^* \times \{0\}$ .

**LEMME 2.14.2** *Soit  $\mathcal{G}$  un faisceau pervers sur  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$  relativement à  $\mathbb{C}^* \times \{0\}$ .  $\mathcal{G}$  est décrit par un diagramme :*

$$\tilde{M}_i \left( \tilde{E}_i \begin{array}{c} \xrightarrow{U_i} \\ \xleftarrow{V_i} \end{array} \tilde{F}_i \right) \tilde{N}_i$$

où  $\widetilde{E}_i, \widetilde{F}_i$  sont deux  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $U_i, V_i$  sont deux applications linéaires telles que  $1d + V_i.U_i$  est un isomorphisme et  $\widetilde{M}_i \in GL(\widetilde{E}_i), \widetilde{N}_i \in GL(\widetilde{F}_i)$  vérifient les relations de commutativité :  $U_i.\widetilde{M}_i = \widetilde{N}_i.V_i$  et  $\widetilde{N}_i.U_i = V_i.\widetilde{M}_i$ .

*Preuve.*

La description d'un faisceau pervers  $\mathcal{G}$  sur  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$  relativement à  $\mathbb{C}^* \times \{0\}$  est classique : il s'agit d'un faisceau pervers en dimension 1, relativement à l'origine, avec un paramètre  $\mathbb{C}^*$ . Il est donc décrit comme en dimension 1, par un couple :

$$\widetilde{E}_i \begin{array}{c} \xrightarrow{U_i} \\ \xleftarrow{V_i} \end{array} \widetilde{F}_i$$

auquel viennent se rajouter deux monodromies  $\widetilde{M}_i \in GL(\widetilde{E}_i)$  et  $\widetilde{N}_i \in GL(\widetilde{F}_i)$  qui rendent compte de la monodromie introduite par le paramètre  $\mathbb{C}^*$ .

Une telle description peut s'obtenir en calquant le procédé utilisé en dimension 1 avec la coupure  $\mathbb{R}^+$ .

On peut montrer que les deux complexes  $\mathbf{R}\Gamma_{\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+)} \mathcal{G}$  et  $\mathbf{R}\Gamma_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^+} \mathcal{G}$  sont concentrés en un seul degré, respectivement 0 et 1.

En utilisant la suite exacte longue en cohomologie associée au triangle distingué

$$\mathbf{R}\Gamma_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^+} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+)} \mathcal{G} \xrightarrow{+1}$$

on obtient un morphisme naturel de faisceaux  $\mathbf{R}^0\Gamma_{\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+)} \mathcal{G} \longrightarrow \mathbf{R}^1\Gamma_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^+} \mathcal{G}$ .

On obtient ainsi un complexe à deux termes

$$0 \rightarrow \mathbf{R}^0\Gamma_{\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+)} \mathcal{G} \longrightarrow \mathbf{R}^1\Gamma_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^+} \mathcal{G} \rightarrow 0$$

complexe de faisceaux constructibles relativement à la stratification réelle :  $\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+), \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^+, \mathbb{C}^* \times \{0\}$ .

Ce complexe se décrit donc de manière combinatoire par un diagramme de la forme précédente.

On pose par exemple

$$\widetilde{E}_i = \Gamma(\{1\} \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+), (\mathbf{R}^0\Gamma_{\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+)} \mathcal{G})_{|\{1\} \times \mathbb{C}}) \text{ et } \widetilde{F}_i = (\mathbf{R}^1\Gamma_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^+} \mathcal{G})_{(1,0)}.$$

$V_i$  est le morphisme  $\tilde{F}_i \longrightarrow \tilde{E}_i$  qui permet de recoller entre les deux strates adjacentes  $\{1\} \times \{0\}$  et  $\{1\} \times \mathbb{R}^{+*}$ , les faisceaux constants  $\tilde{F}_i$  et  $\tilde{E}_i$  en un faisceau isomorphe à  $(\mathbf{R}^1\Gamma_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^+} \mathcal{G})|_{\{1\} \times \mathbb{R}^+}$ .

$U_i$  est la fibre en  $(1, 0)$  du morphisme de connexion

$$\mathbf{R}^0\Gamma_{\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+)} \mathcal{G} \longrightarrow \mathbf{R}^1\Gamma_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^+} \mathcal{G}$$

issu du triangle distingué associé à la paire  $\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+)$ ,  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^+$ .

Enfin, les monodromies  $\tilde{M}_i$  et  $\tilde{N}_i$  sont obtenues à partir des systèmes locaux  $(\mathbf{R}^0\Gamma_{\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+)} \mathcal{G})|_{\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+)}$  et  $(\mathbf{R}^1\Gamma_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^+} \mathcal{G})|_{\mathbb{C}^* \times \{0\}}$ .

On obtient ainsi le diagramme associé à  $\mathcal{G}$ . □

On calcule maintenant le système local  $\mathcal{L}_i$  issu du microlocalisé  $\mu_{C_i^\circ}(\mathcal{F})$  en termes du diagramme précédent.

Supposons que l'on ait la description du spécialisé  $\nu_{C_i^\circ}(\mathcal{F})$  par le diagramme

$$\tilde{M}_i \circlearrowleft \tilde{E}_i \begin{array}{c} \xrightarrow{U_i} \\ \xleftarrow{V_i} \end{array} \tilde{F}_i \circlearrowright \tilde{N}_i$$

Le système local  $\mathcal{L}_i$  est obtenu en regardant la restriction de  $\mu_{C_i^\circ}(\mathcal{F})$  à  $T_{C_i^\circ}^* \mathbb{C}^2 \setminus Z$ . Ici, comme on a déjà enlevé ce qui se passe au-dessus de l'origine (on travaille sur  $C_i^\circ$ ), il reste à enlever la section nulle à  $T_{C_i^\circ}^* \mathbb{C}^2$ .

$\mathcal{L}_i$  est donc un système local sur  $C_i^\circ \times \mathbb{C}^* \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ .

**LEMME 2.14.3** *Le système local  $\mathcal{L}_i$  est décrit par la représentation de monodromie donnée par l'espace vectoriel  $\tilde{F}_i$  et les deux automorphismes  $(Id + U_i V_i)^{-1}$  et  $\tilde{N}_i$ .*

*Preuve.*

$\mathcal{L}_i$  étant un système local sur  $C_i^\circ \times \mathbb{C}^* \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ , il est décrit par un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et deux monodromies (chacune correspondant à un tour autour de l'origine dans l'un des facteurs  $\mathbb{C}^*$ , c'est-à-dire à l'un des deux lacets  $(e^{2i\pi t}, 1)$  ou  $(1, e^{2i\pi t})$ , quand  $t$  décrit l'intervalle  $[0, 1]$ ) qui doivent commuter.

Il faut calculer le transformé de Fourier du spécialisé, c'est-à-dire  $(\mathcal{F}|_{\tau_i})^\wedge$ . Puisque la transformée de Fourier commute aux changements de base sur les fibrés (voir par exemple [BMV1] point (2.2)), on peut appliquer le lemme 1.3.4 pour calculer le système local  $\mathcal{L}_i$ .

$\mathcal{L}_i$  est le système local sur  $C_i^\circ \times \mathbb{C}^*$ , de fibre  $\tilde{F}_i$  et de monodromies  $(Id + U_i V_i)^{-1}$  et  $\tilde{N}_i$ .

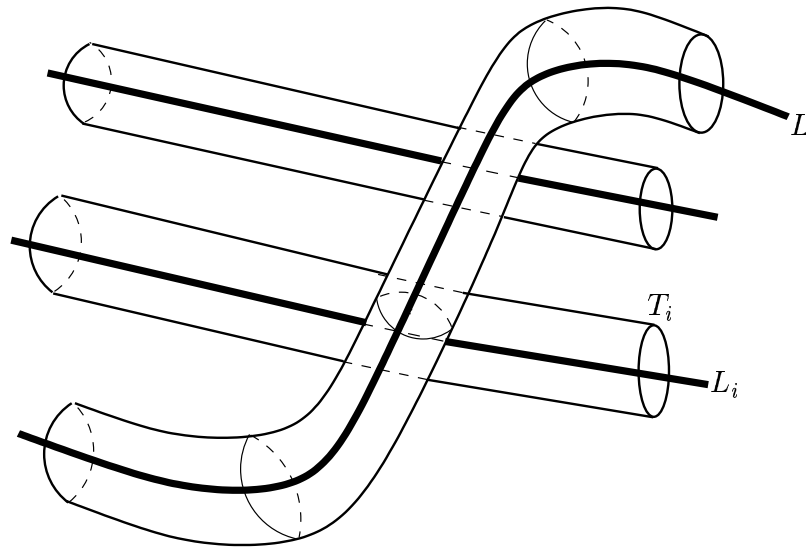
$(Id + U_i V_i)^{-1}$  consiste à tourner autour de la section nulle dans  $C_i^\circ \times \mathbb{C}$  (c'est-à-dire le long d'un lacet  $(x_0, e^{2i\pi t})$  où  $x_0$  est un point de  $C_i^\circ$  fixé) et  $\tilde{N}_i$  consiste à tourner autour de l'origine dans le facteur  $C_i^\circ$  (c'est-à-dire le long d'un lacet  $(\gamma(t), 1)$  dans  $C_i^\circ \times \{1\}$ ).  $\square$

Les monodromies qui nous intéressent dans le problème du prolongement au voisinage du point  $(0; dx_0)$  sont les  $\tilde{N}_i$ .

Pour exprimer les monodromies  $\tilde{N}_i$  du diagramme précédent en fonction des données d'un objet de  $\mathcal{C}(C)$ , il faut relier la coupure  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^+$  à la coupure  $H$ .

Un voisinage tubulaire  $\mathcal{T}_i$  de  $C_i^\circ$  dans  $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  peut se construire de la manière suivante : dans  $S_\varepsilon^3$  on choisit  $T_i$  voisinage tubulaire du nœud  $L_i$  associé à la courbe  $C_i$  qui ne rencontre aucune des autres composantes.

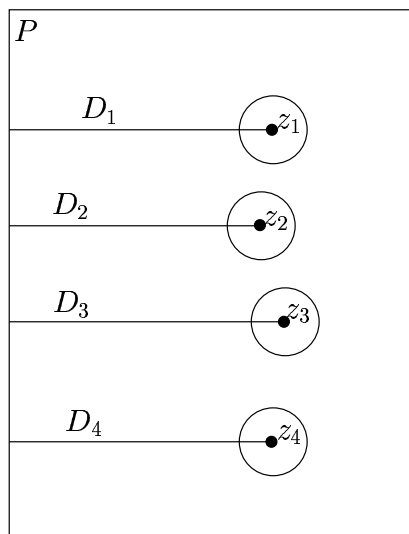
On pose alors  $\mathcal{T}_i = C(T_i)$ , le cône de sommet  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$  sur  $T_i$ .



Quand on regarde dans  $\mathbb{R}^3 = S_\varepsilon^3 \setminus \{\infty\}$  l'intersection  $T_i \cap c(L)$ , on voit que  $\mathcal{T}_i \cap H$  contient la coupure " $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^+$ " et que  $\mathcal{T}_i \cap H$  contient en plus de cette coupure des "parois"  $P_{a(k)} = \{t_k\} \times \mathbb{C}$  pour chaque accident de coupure  $t_k \in L_i$ .

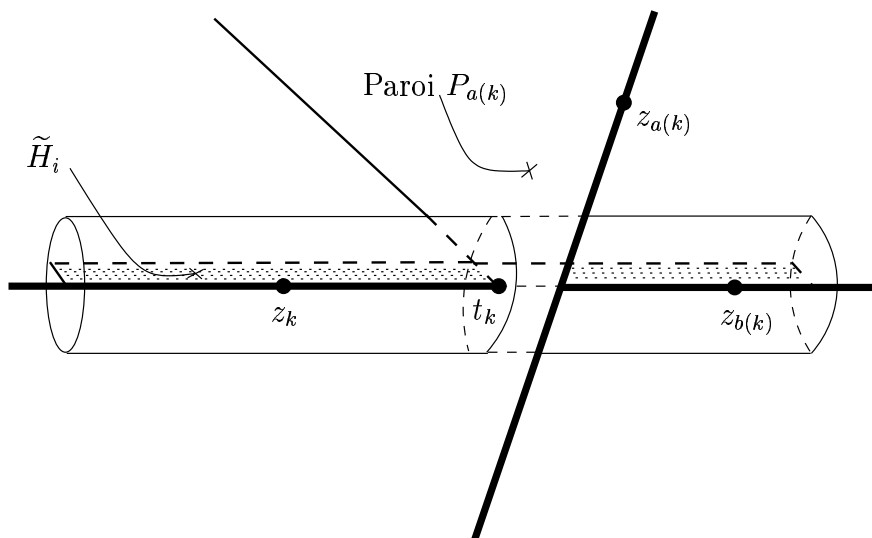
L'affirmation précédente se voit bien si on regarde ce qui se passe dans un rectangle  $P$  comme précédemment.

La trace du voisinage tubulaire dans le rectangle  $P$  est une réunion de disques centrés sur les  $z_k$ ; on voit alors que la coupure dont la trace sur  $P$  est la réunion des  $D_k$  contient la coupure  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^+$



On note  $I \subset \{1, \dots, \delta\}$  l'ensemble des indices  $k$  tels que  $t_k \in L_i$  : on se concentre sur la composante  $C_i$ .

On note  $\tilde{H}_i = ((H \setminus \bigcup_{k \in I} P_{a(k)}) \cup (\bigcup_{k \in I} [\omega, t_k])) \cap \mathcal{T}_i$  : à  $H \cap \mathcal{T}_i$ , on enlève les parois et on rajoute les demi-droites  $D_k = [\omega, t_k]$  qui étaient contenues dans les parois;  $\tilde{H}_i$  est la coupure  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^+$ .



Pour obtenir alors  $\tilde{F}_i$  et la monodromie  $\tilde{N}_i$ , il faut procéder comme suit.

Tout d'abord, on fixe un point  $x_i$  de  $L_i$  qui n'est pas un accident de coupure. Alors  $\tilde{F}_i$  est donné par la fibre  $(\mathbf{R}^1\Gamma_{\tilde{H}_i}\mathcal{F})_{x_i} = (\mathbf{R}^1\Gamma_{H\setminus M}\mathcal{F})_{x_i} = (\mathbf{R}^1\Gamma_H\mathcal{F})_{x_i}$ , c'est donc un certain  $F_k$  en termes de la catégorie  $\mathcal{C}(C)$ , l'indice  $k$  dépendant de la numérotation choisie des accidents  $\{t_1, \dots, t_\delta\}$ .

Ensuite, il s'agit de suivre la fibre  $(\mathbf{R}^1\Gamma_{\tilde{H}_i}\mathcal{F})_{x_i(t)}$  quand le point  $x_i(t)$  décrit le nœud  $L_i \simeq S^1$ .

C'est exactement le calcul qui est fait dans [PhM2], partie II.5.2.

En reprenant ce calcul, on voit que quand on franchit la paroi  $P_{a(k)}$  en allant de la strate numérotée  $b(k)$  vers la strate  $k$ , on a un isomorphisme de franchissement de paroi :  $\alpha_{b(k),k} : F_{b(k)} \longrightarrow F_k$ , isomorphisme qui est donné en termes d'objets de  $\mathcal{C}(C)$  par la formule  $\alpha_{b(k),k} = -v'_k u'_{b(k)}$ .

Enfin, pour calculer la monodromie  $\tilde{N}_i$  ou son inverse  $\tilde{N}_i^{-1}$ , il faut franchir une fois chaque paroi, ce qui revient à regarder le produit des  $\alpha_{b(k),k}$ , où  $k$  décrit un certain ensemble d'indices.

Pour décrire cet ensemble d'indices, on peut procéder comme suit.

On choisit arbitrairement un point base sur  $L_i$ . On le numérote 1.

On regarde l'ensemble d'indices  $\{1, b(1), b(b(1)) = b^2(1), b^3(1), \dots, b^p(1), \dots\}$ .

Cet ensemble d'indices est fini, c'est-à-dire qu'il existe une période, *i.e.* un entier positif  $p$  tel que  $b^p(1) = 1$  : on revient à notre point base.

**LEMME 2.14.4** *La monodromie  $\tilde{N}_i$  ou son inverse  $\tilde{N}_i^{-1}$  est donnée par le produit :*

$$\alpha_{1,b^{p-1}(1)} \cdot \alpha_{b^{p-1}(1),b^{p-2}(1)} \cdot \alpha_{b^{p-2}(1),b^{p-3}(1)} \cdot \dots \cdot \alpha_{b^2(1),b(1)} \cdot \alpha_{b(1),1}$$

On en déduit donc la formule :

$$(\det \tilde{N}_i)^{\pm 1} = \prod_{k=0}^{p-1} \det(\alpha_{b^k(1),b^{k+1}(1)})$$

Si on regarde le produit des déterminants de toutes les monodromies  $\tilde{N}_i$  sur toutes les composantes irréductibles de  $C = \bigcup_{i=1}^{\ell} C_i$ , chaque accident de coupure  $\{t_1, \dots, t_\delta\}$  apparaît alors exactement une fois et on a :

**LEMME 2.14.5**

$$\left( \prod_{i=1}^{\ell} \det \tilde{N}_i \right)^{\pm 1} = \prod_{k=1}^{\delta} \det(\alpha_{b(k),k})$$

REMARQUE 2.14.6 Ici, on a laissé une ambiguïté sur  $\tilde{N}_i$  ou  $\tilde{N}_i^{-1}$ . Elle pourrait être levée en utilisant le sens de parcours du noeud  $L_i$  qui est donné dans [PhM2].

## La position générique et ses conséquences dans le langage de $\mathcal{C}(C)$

Grâce au théorème de l'indice de Kashiwara, on sait relier le cycle caractéristique d'un faisceau pervers aux différentes caractéristiques d'Euler de  $\mathcal{F}_x$ , où  $x$  désigne le point générique des différentes strates de  $\mathcal{F}$ .

Ici, on peut remplacer le complexe  $\mathcal{F}$  par  $\alpha(\mathcal{F})$  et ainsi calculer les différentes caractéristiques  $\mathcal{F}_x$  en terme des données de  $\mathcal{C}(C)$ .

Si on note  $m_0$  la multiplicité du conormal au point  $T_0^*\mathbb{C}^2$  dans le cycle caractéristique de  $\mathcal{F}$ ,  $N_i$  la multiplicité de la composante  $C_i$  de  $C$ ,  $\mu_i$  le nombre de Milnor de  $C_i$  et  $\mu(C_i, C_j)$  la multiplicité d'intersection de  $C_i$  et  $C_j$ . On pose alors  $\delta_i = N_i + \mu_i + \sum_{i \neq j} \mu(C_i, C_j)$ .

On a le résultat suivant ([PhM3], IV.2) :

$$m_0 = \dim_{\mathbb{C}} G - \sum_{i=1}^{\ell} (\delta_i - N_i) \dim_{\mathbb{C}} F_{k(i)}$$

Ce calcul permet alors de montrer l'analogie en termes de faisceaux pervers de la proposition 4.6.1 page 921 de [KK] (voir aussi [P2]).

Si on fixe un  $x_0 \in \mathbb{C}$  petit, non nul, générique, que l'on note  $pr$  la projection :  $pr : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $pr(x_0, x_1) = x_0$ , alors  $pr^{-1}(x_0) \cap C$  est composé de  $N$  points distincts, où  $N$  est la multiplicité de  $C$  à l'origine.

Alors,  $pr^{-1}(x_0) \cap H$  est composé de  $N$  demi-droites distinctes.

A  $x_0$  fixé, on note  $z_{c(1)}^{x_0}, \dots, z_{c(N)}^{x_0}$  les  $N$  points dont sont issues ces  $N$  demi-droites.

Les points  $z_{c(k)}^{x_0}$  sont des points de  $L$ . Ils appartiennent chacun à une strate de la stratification par rapport à laquelle le faisceau  $\mathbf{R}^1\Gamma_H\mathcal{F}$  est constructible. Ces strates sont adjacentes à la strate  $\{(0, 0)\}$ .

On a donc un morphisme de recollement entre strates

$$sp_{c(k)} : (\mathbf{R}^1\Gamma_H\mathcal{F})_0 \longrightarrow (\mathbf{R}^1\Gamma_H\mathcal{F})_{z_{c(k)}^{x_0}}.$$

On peut regarder alors le morphisme de "spécialisation des microsolutions" en  $x_0$  :

$$sp_{x_0} = \bigoplus_{k=1}^N sp_{c(k)} : (\mathbf{R}^1\Gamma_H\mathcal{F})_0 \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^N (\mathbf{R}^1\Gamma_H\mathcal{F})_{z_{c(k)}^{x_0}}$$

PROPOSITION 2.14.7 ([PhM3], IV.3)

Quand  $m_0 = 0$ , c'est-à-dire quand le faisceau pervers  $\mathcal{F}$  est en position générique, ce morphisme est un isomorphisme.

D'autre part, quand  $\mathcal{F}$  est en position générique, on a la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow (\mathbf{R}^1\Gamma_H\mathcal{F})_0 \longrightarrow (\mathbf{R}^1\Gamma_{H\setminus M}\mathcal{F})_0 \longrightarrow (\mathbf{R}^2\Gamma_M\mathcal{F})_0 \longrightarrow 0$$

En les points  $z_{c(k)}^{x_0}$ , on a l'isomorphisme (puisque  $z_{c(k)}^{x_0} \notin M$ ) :

$$(\mathbf{R}^1\Gamma_H\mathcal{F})_{z_{c(k)}^{x_0}} \xrightarrow{\simeq} (\mathbf{R}^1\Gamma_{H\setminus M}\mathcal{F})_{z_{c(k)}^{x_0}}$$

On a donc le diagramme commutatif de recollement entre strates :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\mathbf{R}^1\Gamma_H\mathcal{F})_0 & \longrightarrow & (\mathbf{R}^1\Gamma_{H\setminus M}\mathcal{F})_0 & \longrightarrow & (\mathbf{R}^2\Gamma_M\mathcal{F})_0 \longrightarrow 0 \\ & & \simeq \downarrow sp_{x_0} & & \downarrow & & \\ & & \bigoplus_{k=1}^N (\mathbf{R}^1\Gamma_H\mathcal{F})_{z_{c(k)}^{x_0}} & \xrightarrow{\simeq} & \bigoplus_{k=1}^N (\mathbf{R}^1\Gamma_{H\setminus M}\mathcal{F})_{z_{c(k)}^{x_0}} & & \end{array}$$

Dans le langage de la catégorie  $\mathcal{C}(C)$ , ce diagramme se traduit de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\mathbf{R}^1\Gamma_H\mathcal{F})_0 & \longrightarrow & \bigoplus_{k=1}^{\delta} F_k & \xrightarrow{\oplus_k u'_k} & G \longrightarrow 0 \\ & & \simeq \downarrow sp_{x_0} & & \downarrow & & \\ & & \bigoplus_{k=1}^N F_{c(k)} & \xrightarrow{\simeq} & \bigoplus_{k=1}^N F_{c(k)} & & \end{array}$$

où la flèche verticale  $\bigoplus_{k=1}^{\delta} F_k \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^N F_{c(k)}$  est une projection puisque  $\{c(1), \dots, c(N)\} \subset \{1, \dots, \delta\}$ .

Les  $N$  valeurs  $\{c(1), \dots, c(N)\} \subset \{1, \dots, \delta\}$  dépendent du choix du point  $x_0$ .

On a vu qu'on pouvait supposer qu'il n'y a que des points doubles  $\{t_1, \dots, t_\delta\}$  associés à l'entrelac  $L$ .

On peut alors choisir une autre valeur  $x'_0$ , voisine de  $x_0$  telle que les deux ensembles d'indices  $\{c(1), \dots, c(N)\}$  et  $\{c'(1), \dots, c'(N)\}$  ne diffèrent que d'un indice, un certain  $c(i)$  étant remplacé par un certain  $b(c(i))$  : ceci signifie que pour passer de  $pr^{-1}(x_0) \cap H$  à  $pr^{-1}(x'_0) \cap H$  on n'a franchi qu'un seul accident de la coupure  $H$ , ou encore que pour passer de  $pr^{-1}(x_0) \cap L$  à  $pr^{-1}(x'_0) \cap L$ , on



peut suivre un certain nombre de segments sur  $L$ , ces segments ne contenant qu'un seul point  $t_i$ .

Associé à ce changement (le point  $x_0$  est remplacé par  $x'_0$ ), on a un diagramme d'isomorphismes de spécialisation des microsolutions :

$$\begin{array}{ccc} & (\mathbf{R}^1 \Gamma_H \mathcal{F})_0 & \\ \swarrow^{sp_{x_0}} & & \searrow^{sp_{x'_0}} \\ \bigoplus_{k=1}^N F_{c(k)} & \xrightarrow{\phi_{x_0, x'_0}} & \bigoplus_{k=1}^N F_{c'(k)} \end{array}$$

$\phi_{x_0, x'_0}$  étant la composition des isomorphismes  $sp_{x'_0} \circ (sp_{x_0})^{-1}$  qui fait commuter le diagramme.

On va calculer cet isomorphisme de changement de spécialisation, ou plutôt son inverse :  $\phi_{x_0, x'_0}^{-1} = sp_{x_0} \circ (sp_{x'_0})^{-1}$ .

On regarde donc le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} & \bigoplus_{k=1}^N F_{c(k)} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{k=1}^N F_{c(k)} & & & \\ & \uparrow^{sp_{x_0}} & & \uparrow & & & \\ 0 & \longrightarrow & (\mathbf{R}^1 \Gamma_H \mathcal{F})_0 & \longrightarrow & \bigoplus_{k=1}^{\delta} F_k & \xrightarrow{\bigoplus_k u'_k} & G \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow^{sp_{x'_0}} & & \downarrow & & \\ & \bigoplus_{k=1}^N F_{c'(k)} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{k=1}^N F_{c'(k)} & & & \end{array}$$

Ce diagramme se réécrit :

$$\begin{array}{ccccccc} & \bigoplus_{k=1}^N F_{c(k)} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{k=1}^N F_{c(k)} & & & \\ & \uparrow^{sp_{x_0}} & & \uparrow & & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker(\bigoplus_{k=1}^{\delta} u'_k) & \longrightarrow & \bigoplus_{k=1}^{\delta} F_k & \xrightarrow{\bigoplus_k u'_k} & G \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow^{sp_{x'_0}} & & \downarrow & & \\ & \bigoplus_{k=1}^N F_{c'(k)} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{k=1}^N F_{c'(k)} & & & \end{array}$$

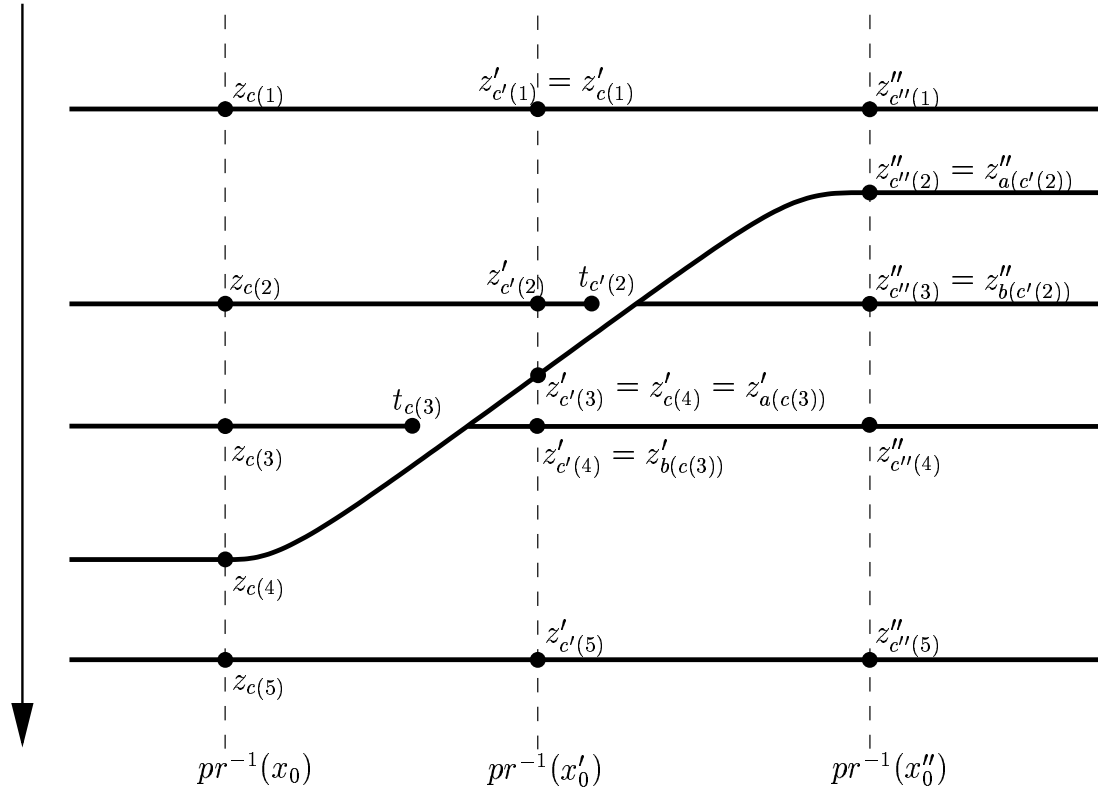
On a deux manières différentes de représenter un élément de  $\ker(\bigoplus_{k=1}^{\delta} u'_k) \subset \bigoplus_{k=1}^{\delta} F_k$  : soit en ne donnant que les composantes de cet élément sur  $\bigoplus_{k=1}^N F_{c'(k)} \subset \bigoplus_{k=1}^{\delta} F_k$  (c'est exactement le morphisme  $sp_{x'_0}$ ), soit en donnant ses composantes sur  $\bigoplus_{k=1}^N F_{c(k)} \subset \bigoplus_{k=1}^{\delta} F_k$  (c'est exactement

le morphisme  $sp_{x_0}$ ).

Faire le changement de spécialisation  $\phi_{x_0, x'_0}^{-1}$  revient à dire quel est l'isomorphisme  $\bigoplus_{k=1}^N F_{c'(k)} \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^N F_{c(k)}$  qui correspond aux deux manières de représenter le même élément de  $\ker(\bigoplus_{k=1}^{\delta} u'_k)$ .

Les deux ensembles d'indices ne diffèrent que d'un seul indice (un certain  $c(i)$  étant remplacé par  $c'(i) = b(c(i))$ ) : on décide de numérotter de l'intérieur vers l'extérieur comme sur le dessin.

Les deux ensembles d'indices  $\{c(1), \dots, c(N)\}$  et  $\{c'(1), \dots, c'(N)\}$  coïncident jusqu'à un certain entier  $j - 1$ ,  $1 \leq j \leq N - 2$ , c'est-à-dire que  $c(k) = c'(k)$ , pour  $k = 1, \dots, (j - 1)$ ; puis on a l'accident provoqué par  $c(j + 1) = a(c(j))$  qui donne  $c'(j) = c(j + 1)$  et  $c'(j + 1) = b(c(j))$ ; ensuite, les deux ensembles d'indices coïncident à nouveau, c'est-à-dire que  $c(k) = c'(k)$  pour  $k = j + 2, \dots, N$ .



On a alors pour  $pr^{-1}(x_0)$  la somme directe d'espaces vectoriels :

$$\bigoplus_{k=1}^N F_{c(k)} = \bigoplus_{k=1}^{j-1} F_{c(k)} \oplus F_{c(j)} \oplus F_{a(c(j))} \bigoplus_{k=j+2}^N F_{c(k)}$$

et pour  $pr^{-1}(x'_0)$

$$\bigoplus_{k=1}^N F_{c'(k)} = \bigoplus_{k=1}^{j-1} F_{c(k)} \oplus F_{a(c(j))} \oplus F_{b(c(j))} \bigoplus_{k=j+2}^N F_{c(k)}$$

Soit  $e_{x'_0} = (e_{c(1)}, \dots, e_{c(j-1)}, e_{a(c(j))}, e_{b(c(j))}, e_{c(j+2)}, \dots, e_N) \in \bigoplus_{k=1}^N F_{c'(k)}$ .

On remonte  $e_{x'_0}$  en un élément  $e = (e_1, \dots, e_\delta)$  de  $\ker(\bigoplus_{k=1}^\delta u'_k) \subset \bigoplus_{k=1}^\delta F_k$ .

On a donc l'égalité :  $\sum_{i=1}^\delta u'_i(e_i) = 0$ .

Si on applique à l'égalité précédente l'application linéaire  $v'_{c(j)}$ , on obtient en utilisant les relations dans  $\mathcal{C}(C)$  :

$$e_{c(j)} - \alpha_{b(c(j)),c(j)}(e_{b(c(j))}) + u_{c(j)}v_{a(c(j))}(e_{a(c(j))}) = 0$$

$$\text{c'est-à-dire : } e_{c(j)} = \alpha_{b(c(j)),c(j)}(e_{b(c(j))}) - u_{c(j)}v_{a(c(j))}(e_{a(c(j))}).$$

LEMME 2.14.8 *Le morphisme de changement de spécialisation est :*

$$\phi_{x_0, x'_0}^{-1} : \bigoplus_{k=1}^{j-1} F_{c(k)} \oplus F_{a(c(j))} \oplus F_{b(c(j))} \bigoplus_{k=j+2}^N F_{c(k)} \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^{j-1} F_{c(k)} \oplus F_{c(j)} \oplus F_{a(c(j))} \bigoplus_{k=j+2}^N F_{c(k)}$$

donné par la matrice "presque diagonale" :

$$\begin{pmatrix} Id_{F_{c(1)}} & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & Id_{F_{c(2)}} & 0 & & \dots & \\ \vdots & & \dots & & & \vdots \\ & \vdots & 0 & -u_{c(j)}v_{a(c(j))} & \alpha_{b(c(j)),c(j)} & 0 \\ & & 0 & Id_{F_{a(c(j))}} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & Id_{F_{c(j+2)}} & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & & & 0 & 0 & Id_{F_N} \end{pmatrix}$$

On remarque que cette matrice a même déterminant que la matrice :

$$\begin{pmatrix} -u_{c(j)}v_{a(c(j))} & \alpha_{b(c(j)),c(j)} \\ Id_{F_{a(c(j))}} & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc :

LEMME 2.14.9

$$\det(\phi_{x_0, x'_0}^{-1}) = (-1)^{\dim F_{a(c(j))} \cdot \dim F_{c(j)}} \det(\alpha_{b(c(j)), c(j)})$$

Ensuite, on va faire “tourner” le choix du point  $x_0$  dans  $\mathbb{C}_{x_0}$  autour de l’origine, c’est-à-dire qu’on va choisir  $\delta$  points  $x_0^1, \dots, x_0^\delta$  tels qu’entre les points de  $pr^{-1}(x_0^i) \cap L$  et ceux de  $pr^{-1}(x_0^{i+1}) \cap L$  on ne “franchisse” qu’un seul accident de coupure, c’est-à-dire qu’on ne rencontre qu’un seul des  $\delta$  points  $\{t_1, \dots, t_\delta\}$ .

On regarde alors la composition de tous les isomorphismes de changement de spécialisation :

$$\prod_{i=1}^{\delta} \phi_{x_0^i, x_0^{i+1}}$$

(où on a  $x_0^{\delta+1} = x_0^1$ ).

D’après l’égalité  $\phi_{x_0, x'_0} = sp_{x'_0} \circ (sp_{x_0})^{-1}$ , on a :

$$\prod_{i=1}^{\delta} \phi_{x_0^i, x_0^{i+1}} = \prod_{i=1}^{\delta} sp_{x_0^{i+1}} \circ (sp_{x_0^i})^{-1} = Id_{\bigoplus_{k=1}^N F_{c(k)}}$$

où  $\{c(1), \dots, c(N)\}$  désigne les points associés au choix  $x_0 = x_0^1$ .

Quand on fait tourner le choix du point  $x_0$  de la manière précédente, chaque accident de coupure apparaît exactement une fois.

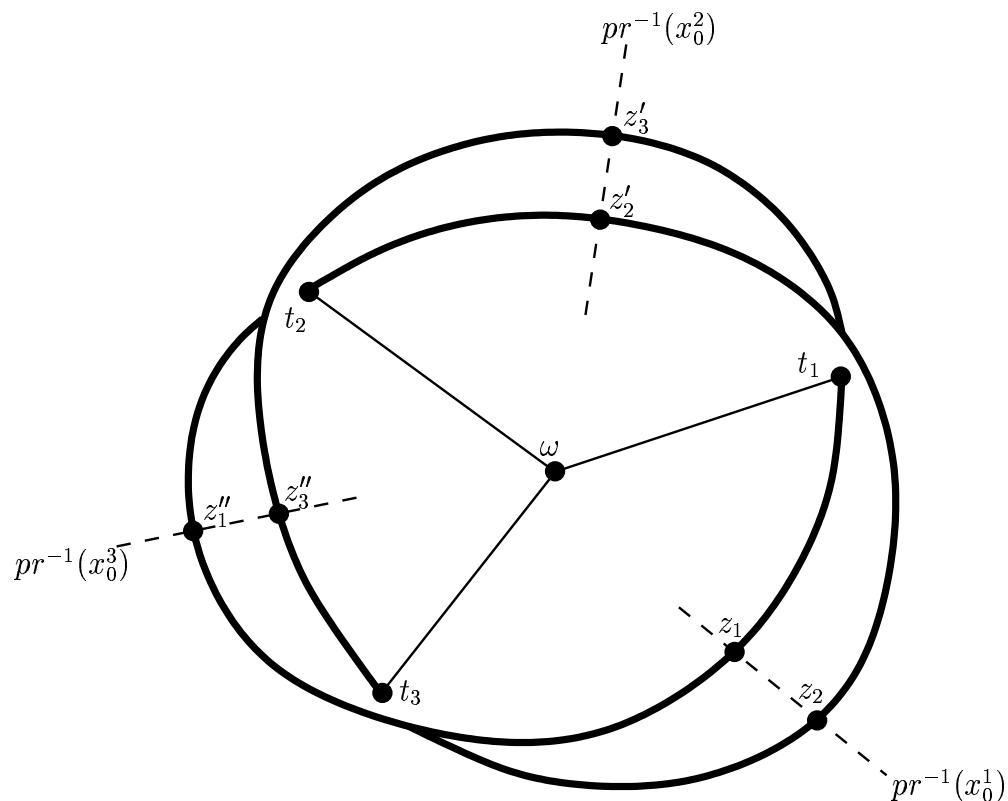
Des égalités  $\prod_{i=1}^{\delta} \phi_{x_0^i, x_0^{i+1}} = Id$  et  $\det(\phi_{x_0, x'_0}^{-1}) = \pm \det(\alpha_{b(1), 1})$ , on déduit alors l’égalité suivante :

$$\prod_{i=1}^{\delta} \det \alpha_{b(i), i} = \pm 1$$

(on franchit exactement une fois chaque accident de coupure), égalité qui achève la démonstration du théorème.

REMARQUE 2.14.10 *Quand la courbe a une seule composante irréductible, on peut préciser le signe de l’égalité précédente : c’est  $(-1)^{\delta \cdot \dim_{\mathbb{C}} F}$ , où  $F$  désigne les cycles évanescents le long de la courbe.*

**Un exemple : faisceau pervers relativement au cusp en position générique**



Sur le dessin précédent, on a représenté le nœud associé au cusp (le nœud de trèfle), ainsi que le cône compact sur ce nœud avec une numérotation et en pointillés, on a représenté les trois points en lesquels on spécialise les microsolutions.

On a alors le tableau de numérotation suivant :

$k$	$a(k)$	$b(k)$
1	2	3
2	3	1
3	1	2

On calcule alors le morphisme de changement de spécialisation :

$$\phi_{x_0^2, x_0^1} \circ \phi_{x_0^3, x_0^2} \circ \phi_{x_0^1, x_0^3}$$

Tous ces morphismes sont donnés par des matrices triangulaires par blocs (dans le cas du cusp, comme la courbe est irréductible, tous les  $F_i$  ont même dimension, donc tous les blocs sont carrés, de taille  $\dim F_i \times \dim F_i$ ) :

$$\bullet \phi_{x_0^1, x_0^3} : F_1 \oplus F_2 \longrightarrow F_3 \oplus F_1$$

$$\phi_{x_0^1, x_0^3} = \begin{pmatrix} -u_3 v_1 & \alpha_{2,3} \\ Id_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \phi_{x_0^3, x_0^2} : F_3 \oplus F_1 \longrightarrow F_2 \oplus F_3$$

$$\phi_{x_0^3, x_0^2} = \begin{pmatrix} -u_2 v_3 & \alpha_{1,2} \\ Id_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \phi_{x_0^2, x_0^1} : F_2 \oplus F_3 \longrightarrow F_1 \oplus F_2$$

$$\phi_{x_0^2, x_0^1} = \begin{pmatrix} -u_1 v_2 & \alpha_{3,1} \\ Id_2 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est le produit de ces trois matrices qui vaut l'identité :

$$\phi_{x_0^2, x_0^1} \circ \phi_{x_0^3, x_0^2} \circ \phi_{x_0^1, x_0^3} : F_1 \oplus F_2 \longrightarrow F_1 \oplus F_2$$

$$Id_{F_1 \oplus F_2} = \begin{pmatrix} -u_1 v_2 u_2 v_3 u_3 v_1 - u_1 v_2 \alpha_{1,2} - \alpha_{3,1} u_3 v_1 & u_1 v_2 u_2 v_3 \alpha_{2,3} + \alpha_{3,1} \alpha_{2,3} \\ u_2 v_3 u_3 v_1 + \alpha_{1,2} & -u_2 v_3 \alpha_{2,3} \end{pmatrix}$$

La monodromie du microlocalisé de Sato du faisceau pervers le long du cusp est (au sens de rotation près) :

$$\tilde{N}_1^{\pm 1} : F_1 \longrightarrow F_1$$

$$\tilde{N}_1^{\pm 1} = \alpha_{3,1} \circ \alpha_{2,3} \circ \alpha_{1,2}$$

On a alors l'égalité qui permet de prolonger la classe caractéristique :

$$\det(\tilde{N}_1) = (-1)^{\dim F_1}$$

En fait, sur l'exemple précédent, on peut montrer un résultat plus fort, à savoir :

$$\tilde{N}_1 = -Id_{F_1}$$

En effet, sur l'égalité matricielle précédente, on lit les quatre égalités :

- (a)  $-u_1v_2u_2v_3u_3v_1 - u_1v_2\alpha_{1,2} - \alpha_{3,1}u_3v_1 = Id$
- (b)  $\alpha_{1,2} = -u_2v_3u_3v_1$
- (c)  $u_1v_2u_2v_3\alpha_{2,3} + \alpha_{3,1}\alpha_{2,3} = 0$
- (d)  $-u_2v_3\alpha_{2,3} = Id$

En injectant (b) dans (a), on obtient :

$$(e) \quad -\alpha_{3,1}u_3v_1 = Id$$

En injectant (e) et (d) dans (b), on obtient alors :

$$\alpha_{3,1} \circ \alpha_{2,3} \circ \alpha_{1,2} = -Id$$

# Bibliographie

- [ABG] ABDEL GADIR (B.) – *Analyse microlocale des systèmes différentiels holonomes*, Thèse Institut Fourier (Grenoble), 1992.
- [An] ANDRONIKOF (E.) – *Microlocalization of perverse sheaves*, Journal of Math. Sciences, Vol. **82**, No. 6, 1996.
- [BBD] BEILINSON (A.A.), BERNSTEIN (J.) et DELIGNE (P.) – *Faisceaux pervers*, Astérisque t. **100**, 1982.
- [Bj] BJÖRK (J.E.) – *Analytic  $\mathcal{D}$ -Modules and Applications*, Kluwer Academic Publishers, t. **247**, 1993.
- [Bre] BREDON (G.E.) – *Topology and geometry*, Graduate Texts in Mathematics, **139**, Springer-Verlag, 1993.
- [Br1] BRYLINSKY (J.-L.) –  *$(C_0)$ -homologie d'intersection et faisceaux pervers*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1981/82, Exposé 585, Astérisque **92-93**, 1982, p.129-157.
- [Br2] BRYLINSKY (J.-L.) – *Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformations de Fourier et sommes trigonométriques*, Astérisque t. **140-141**, 1986, p. 3-134.
- [BMV1] BRYLINSKY (J.-L.), MALGRANGE (B.) et VERDIER (J.-L.) – *Transformation de Fourier géométrique I*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. **294**, 1983, p. 55-58.
- [BMV2] BRYLINSKY (J.-L.), MALGRANGE (B.) et VERDIER (J.-L.) – *Transformation de Fourier géométrique II*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. **303**, 1986, p. 193-198.
- [Da] DAÏA (L.), *La transformation de Fourier pour les  $\mathcal{D}$ -modules*, Thèse Institut Fourier (Grenoble), 1995.
- [D.K] DELIGNE (P.) et KATZ (N.) – *SGA7. Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique*. Lect. Notes in Math., t **340**, 1972-1973.
- [GGM] GALLIGO (A.), GRANGER (M.) et MAISONOBE (Ph.) –  *$\mathcal{D}$ -modules et faisceaux pervers dont le support singulier est un croisement normal*, Ann. Inst. Fourier **35**, No.1, 1985, p. 1-45.



- [GM] GORESKY (M.) et MACPHERSON (R.) – *Stratified Morse theory*, Springer-Verlag, 1988.
- [K] KASHIWARA (M.) – *Systems of microdifferential equations*. Progress in Math., t. **34**, 1983.
- [K2] KASHIWARA (M.) – *Vanishing cycle sheaves and holonomic systems of differential equations*. Lect. Notes in Math., t. **1016**, 1983, p. 134-142.
- [KK] KASHIWARA (M.) et KAWAÏ (T.) – *On holonomic systems of microdifferential equations III*, Publ. RIMS Kyoto Univ., t. **17**, 1981, p. 813-979.
- [KS] KASHIWARA (M.) et SCHAPIRA (P.) – *Sheaves on manifolds*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **292**, Springer-Verlag, 1990.
- [LM] LAURENT (Y.) et MALGRANGE (B.) – *Cycles proches, spécialisation et  $\mathcal{D}$ -modules.*, Ann. Inst. Fourier **45**, No.5, 1995, p. 1353-1405.
- [La] LAMOTKE (K.) – *The topology of complex varieties after S. Lefschetz*, Topology **20**, 1986, p. 15-51.
- [LT] LÊ (D.T.) et TESSIER (B.) – *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney*, Proc. Symp. in Pure Math., Vol. **40** Part 2, 1983, p. 65-103.
- [L] LOOIJENGA (E.J.N.) – *Isolated singular points on complete intersections* L.M.S. Lecture Note Series **77**, Cambridge University Press, 1984.
- [MV1] MACPHERSON (R.) et VILONEN (K.) – *Elementary construction of perverse sheaves*, Invent. Math. **84** (1986), p. 403-435.
- [MV2] MACPHERSON (R.) et VILONEN (K.) – *Perverse sheaves with singularities along the curve  $y^n - x^m = 0$* , Comment. Math. Helv. **63**, No.1, 1988, p. 89-102.
- [PhM1] MAISONOBE (Ph.) – *Faisceaux pervers sur  $C$  relativement  $\{0\}$  et couple  $E \rightleftarrows_v F$* , in "Introduction à la théorie algébrique des systèmes différentiels, Colloq., Plans sur Bex/Fr. 1984, Trav. Cours 34 (1988), p. 135-146.
- [PhM2] MAISONOBE (Ph.) – *Faisceaux pervers dont le support singulier est une courbe plane*, Comp. Math. **62**, 1987, p. 215-261.
- [PhM3] MAISONOBE (Ph.) –  *$\mathcal{D}$ -modules et faisceaux pervers dont le support singulier est une courbe plane*, Thèse d'Etat, 1985.

- [M1] MALGRANGE (B.) – *Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescence*, Astérisque **101-102**, 1981, p.243-267.
- [M2] MALGRANGE (B.) – *Transformation de Fourier géométrique*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1987/88. Astérisque **161-162** (1989), Exp. No. 692, 4, p.133–150.
- [M3] MALGRANGE (B.) – *Equations différentielles à coefficients polynomiaux*, Progress in Math. **96**, Birkhäuser, 1991.
- [MS] MILNOR (J.) et STASHEFF (J.) – *Characteristic classes*, Annals of Math. Studies, **76**, Princeton University Press, 1974.
- [Me] MEBKHOUT (Z.) – *Le théorème de comparaison entre cohomologies de de Rham d'une variété algébrique complexe et le théorème d'existence de Riemann*, Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. **69**, 1989, p. 47-89.
- [MN] MEBKHOUT (Z.) et NARVAEZ-MACARRO (L.) – *Le théorème de constructibilité de Kashiwara*, In Images directes et constructibilité, Hermann, Travaux en cours, t. **46**, 1993, p. 47-98.
- [Mo] MORIN (B.) – *Formes canoniques des singularités d'une application différentiable*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. **260**, 1965, p. 5662-5665 et p. 6503-6506.
- [N] NARVAEZ-MACARRO (L.) – *Cycles évanescents et faisceaux pervers : cas des courbes planes irréductibles*, Comp. Math. **65**, 1988, p. 321-347.
- [P1] PHAM (F.) – *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manini*, Progress in Math. **2**, Birkhäuser, 1979.
- [P2] PHAM (F.) – *Transformées de Laplace des microsolutions de systèmes holonomes*, Ens. Mathématique **30**, 1984, 57-84.
- [S] SABBAH (C.) – *Classes caractéristiques et théorèmes d'indices : point de vue microlocal* Séminaire Bourbaki, volume 1995/96, exposé 818, Astérisque **241**, 1997, p.381-409.
- [So] SOULÉ (C.) – *Classes caractéristiques secondaires des fibrés plats* Séminaire Bourbaki, volume 1995/96, exposé 819, Astérisque **241**, 1997, p.411-424.
- [TMF] MONTEIRO FERNANDES (T.) – *Microlocalisation of D-modules along a submanifold*. Bull. Soc. math. France, t. **123**, p.293-327.
- [V] VERDIER (J.-L.) – *Spécialisation des faisceaux et monodromie modérée*, Astérisque **101-102**, 1981, p.332-364.
- [W1] WASCHKIES (I.) – *Faisceaux pervers microlocaux*, Thèse Université Paris VI, 2002.

- [W2] WASCHKIES (I.) – *Microlocal perverse sheaves*, préprint math.AG/0209341, 2002.



## Résumé

Suivant des idées de B. Malgrange, on présente la construction d'un nouvel invariant pour les faisceaux pervers : le *déterminant microlocal*.

C'est une généralisation aux faisceaux pervers de la première classe caractéristique secondaire des fibrés plats.

Le déterminant microlocal est une classe de cohomologie sur le fibré cotangent à support dans la variété caractéristique : il est construit sur les déterminants des systèmes locaux obtenus par microlocalisations le long des strates.

Pour montrer son existence, on ramène la variété caractéristique en position générique par une transformation canonique en contrôlant le comportement des microlocalisés par une telle transformation.

On est alors ramené au cas de la dimension 2 où un calcul explicite est effectué en utilisant les descriptions combinatoires des faisceaux pervers de Ph. Maisonobe.

## Mots clefs

faisceaux pervers, classes caractéristiques secondaires, monodromie, microlocalisation, transformations canoniques, représentations de carquois

## Abstract

Following ideas of B. Malgrange, we construct a new invariant for perverse sheaves : the *microlocal determinant*. It is a generalization to perverse sheaves of the first secondary characteristic class for flat bundles.

The microlocal determinant is a cohomology class on the cotangent bundle with support in the characteristic variety : it is constructed with the determinants of the local systems obtained from the microlocalizations along the strata.

To show its existence, we put the perverse sheaf in generic position using canonical transforms and controlling the behavior of the microlocalized through such a transform.

We are then reduced to the dimension 2 case where an explicit computation is performed using Ph. Maisonobe's combinatorial description of perverse sheaves.

## Key words

perverse sheaves, secondary characteristic classes, monodromy, microlocalization, canonical transforms, quivers