UNIVERSITÉ PARIS 13 — Institut Galilée

« U.F.R DE MATHÉMATIQUES »

THÈSE

pour obtenir

le grade de Docteur
de l'Université Paris 13

Spécialité : Mathématiques

présentée et soutenue publiquement par

Xavier CARUSO

le 7 décembre 2005

Conjecture de l'inertie modérée de Serre

Directeur de thèse

Christophe Breuil

Jury

M. Ahmed Abbes
M. Pierre Berthelot, rapporteur
M. Lawrence Breen
M. Christophe Breuil, directeur de thèse
M. Michel Raynaud

Autre rapporteur

M. Mark Kisin

Résumé

Le but de cette thèse est de donner une démonstration complète de la conjecture de l'inertie modérée de Serre qui donne des contraintes (en fonction de e et de r) sur l'action de Galois sur le groupe de cohomologie $H^r_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ si X est une variété propre et lisse, à réduction semi-stable, sur un corps p-adique K d'indice de ramification absolue e.

Pour ce faire, nous établissons, dans le cas $er < p - 1$, un isomorphisme de périodes reliant le groupe de cohomologie étale précédent à un groupe de cohomologie log-cristalline de la fibre spéciale de X. Nous montrons ensuite que ce dernier groupe est un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ définie par Breuil dans [Bre99a]. La conclusion découle finalement d'un examen relativement fin des objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Le dernier chapitre de cette thèse (qui est indépendant) est consacré à la construction d'une dualité sur la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Mots clés : théorie de Hodge p-adique, cohomologie cristalline, log-structures

Abstract

The aim of this thesis is to give a complete proof of the tame inertia Serre's conjecture which gives constraints (in relation to e and r) on the Galois group of cohomology $H^r_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ where X is a proper smooth variety with semi-stable reduction on a p-adic field K with absolute ramification index e.

In order to do that, we establish, in the case $er < p-1$, a period isomophism linking the former étale cohomology group and a group of log-crystalline cohomology of the special fiber of X. Then, we show that this group defines an object of the category $\underline{\mathcal{M}}^r$ introduced by Breuil in [Bre99a]. Finally, the conclusion follows from a careful study of the objects of $\underline{\mathcal{M}}^r$.

The last chapter of this thesis (which is independent) is devoted to the construction of a duality on the category $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Key words : p-adic Hodge theory, crystalline cohomology, log-structures

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur $(T_n)_{syn}$ et $\mathcal{F}'$ sur $(T_n/E_n)_{cris}$

SYN ? CRIS ?

on a :

$$w^* \mathcal{H}om(\mathcal{F}, w_* \mathcal{F}') \longrightarrow \mathcal{H}om(w^* \mathcal{F}, \mathcal{F}')$$

(par adjonction, puis petit calcul sur $\varprojlim$)

d'où en particulier ($\mathcal{F} = \mathcal{G}_n$, $\mathcal{F}' = \mathcal{O}_{T_n/E_n}$)

$$w^* \mathcal{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{cris}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n})$$

puis le morphisme γ_1 :

Définir γ_1 sur $(\underline{T_{n+1}})_{syn}$

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d] & \\ & U \arrow[r, hook] \arrow[d] & T \arrow[d] \\ & E_n \arrow[r] & T_n \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}\left(\mathcal{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}), \mathcal{O}_{T_n/E_n}\right)$$

$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}\left(w^* \mathcal{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{cris}), \mathcal{O}_{T_n/E_n}\right)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_n^{cris}}\left(\mathcal{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{cris}), \mathcal{O}_n^{cris}\right)$$

(par adjonction)

Le diagramme suivant résume ce qui précède :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}\left(\mathbb{D}(\mathcal{G}_n), \mathcal{O}_{T_n/E_n}\right) \arrow[d, "\wr\, s^*, \sigma^*"] \arrow[dr, "\alpha^*_{cris}", "\sim"'] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}\left(\mathcal{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}), \mathcal{O}_{T_n/E_n}\right) \arrow[r, "\beta^*_{cris}", "\sim"'] \arrow[d, hook, "\gamma_1"'] \arrow[dd, bend right, "\sim\,\gamma"'] & \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n^\vee, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_n^{cris}}\left(\mathcal{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{cris}), \mathcal{O}_n^{cris}\right) \arrow[r, two heads, "\beta^*_{syn}"] \arrow[d, "\gamma_2"] & \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n^\vee, \mathcal{O}_n^{cris}) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee)
\end{tikzcd}$$

commutatif ? oui

Remerciements

Mes premiers vers sont pour mon directeur de thèse
Pour ses explications, son esprit de synthèse,
Son savoir, ses conseils, sa spontanéïté,
Son enthousiasme et sa disponibilité.
Aussi, pour son sourire et sa longue patience
Le plaisir enivrant de m'enseigner la science,
Sa franche gentillesse et son charmant accueil.
Oui, ces alexandrins sont pour Christophe Breuil.

Et vers mes rapporteurs, mes pensées se dirigent.
Ils lisent patiemment ce travail, le corrigent,
Ils épient, l'œil hagard semblable à l'éclaireur,
Chaque proposition, chaque mot, chaque erreur.
Quand, enfin, tout convient, ils rendent leur sentence :
Leur rapport est empreint de grâce et pénitence.
Leur apport est immense, autant que leur boulot.
Bravo à Mark Kisin et Pierre Berthelot !

Reste à féliciter le jury : chaque membre
Qui me fait cet honneur, en ce jour de décembre,
De jouer au plus juste un refrain d'inspecteur
Afin de décerner ce titre de docteur.
Cher Ahmed, cher Larry, amis de Paris 13
Votre présence ici me soutient et m'apaise.
Enfin, le président, intègre tel l'anneau,
Je suis fier que ce soit monsieur Michel Raynaud.

Cette strophe est dédiée à mes nombreux confrères
Thésards, jeunes chercheurs ou bibliothécaires,
À tous ceux qui ont su répondre à mes questions,
Recentrer mes idées, fournir des suggestions.
Je nommerai, surtout, pour leur aide gratuite
Florian Herzig d'abord, Joël Riou ensuite,
Mais tous ont eu leur rôle, aussi petit soit-il
Parfois alambiqué, mystérieux ou subtil.

Ineffaçable amour envers Villetaneuse
Pour m'avoir accueilli confiante et lumineuse :
Merci aux étudiants, merci aux professeurs,
Merci à tous ceux-là... vrais antidépresseurs,
Merci aux cuisiniers, merci aux secrétaires.
Merci à Animath et aux quadrilatères.
Merci à ma famille, à mon dauphin chéri,
Au plus juteux des fruits, en anglais, *my Cherry*.

MAIS ENFIN, STOPPONS NET CES FABLES HÉRÉTIQUES !
HALTE À LA POÉSIE ! PLACE AUX MATHÉMATIQUES !

Sommaire

Notations

Chacun des chapitres de cette thèse définit ses propres notations. Toutefois les plus basiques d'entre elles restent communes et ce sont elles que nous récapitulons ci-dessous.

Les données de base

$\mathbb{Z}$	l'anneau des entiers relatifs
$\mathbb{Q}$	le corps des nombres rationnels
p	un nombre premier
$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	l'unique corps fini de cardinal p
$\mathbb{Z}_p$	l'anneau des entiers p-adiques
$\mathbb{Q}_p$	le corps des nombres p-adiques
k	un corps parfait de caractéristique p
$\bar{k}$	une clôture algébrique de k
$\mathbb{F}_{p^n}$	l'unique sous-corps de $\bar{k}$ de cardinal p^n
$W = W(k)$	l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k
$K_0 = \mathrm{Frac}\, W$	le corps des fractions de W
K	une extension finie totalement ramifiée de K_0
π	une uniformisante de K
$E(u)$	polynôme minimal de π sur K_0
$\bar{K}$	une clôture algébrique de K
K^{nr}	l'extension maximale (dans $\bar{K}$) non ramifiée de K
K^{mr}	l'extension maximale (dans $\bar{K}$) modérément ramifiée de K
σ	le Frobenius sur k, W et K_0
$G_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$	le groupe de Galois absolu de k
$G_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$	le groupe de Galois absolu de K
I	le sous-groupe d'inertie de G_K
I_s	le sous-groupe d'inertie sauvage de G_K
$I_t = I/I_s$	le groupe d'inertie modérée

$e = [K : K_0]$	le degré de l'extenstion K/K_0
r	un entier vérifiant $0 \leqslant er < p-1$ (et seulement $0 \leqslant r < p-1$ dans le chapitre V)

La situation géométrique

X	un schéma propre et semi-stable[1] sur $\mathcal{O}_K$
$X_K = X \times_{\mathcal{O}_K} K$	la fibre générique de X
$X_{\bar{K}} = X \times_{\mathcal{O}_K} \bar{K}$	
$\bar{X} = X \times_{\mathcal{O}_K} k$	la fibre spéciale de X
$X_n = X \times_{\mathcal{O}_K} (\mathcal{O}_K/p^n)$	

Les anneaux de périodes

A_{cris}	l'anneau de Fontaine (voir [Fon94b] ou paragraphe III.1.2)
$B^+_{\text{cris}} = A_{\text{cris}} \otimes_W K_0$	
$A_{\text{cris},\infty} = A_{\text{cris}} \otimes_W K_0/W$	
$\hat{A}_{\text{st}} = A_{\text{cris}} \langle X \rangle$	(voir [Bre97a] ou paragraphe III.1.2)
$\hat{B}^+_{\text{st}} = \hat{A}_{\text{st}} \otimes_W K_0$	
$\hat{A}_{\text{st},\infty} = \hat{A}_{\text{st}} \otimes_W K_0/W$	
$S = \hat{A}_{\text{st}}^{G_K}$	les points fixes de $\hat{A}_{\text{st}}$ sous l'action de G_K
$S_{K_0} = S \otimes_W K_0$	
$S_n = S/p^nS$	

Les catégories et les foncteurs

Les objets listés ci-dessous sont définis en bloc et dans la plus grande généralité en V.1. Toutefois, lorsque ces objets apparaissent dans les chapitres précédents, la définition est redonnée à ce niveau.

$\underline{\mathcal{M}}_0^r$, $\underline{\mathcal{M}}^r$	
$\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S/pS}$, $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$	
$\underline{\mathcal{M}}_0^{r,\mathrm{F}I}$, $\underline{\mathcal{M}}^{r,\mathrm{F}I}$	
$\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S_{K_0}}$, $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_{K_0}}$	Catégories des modules filtrés sur S_{K_0}
$\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S}$, $\underline{\mathcal{M}}^{r,S}$	Catégories des modules fortement divisibles
$T_{\text{cris}\star}, T^\star_{\text{cris}}, T_{\text{st}\star}, T^\star_{\text{st}}$	Foncteurs vers les représentations galoisiennes

[1]C'est-à-dire X régulier, de fibre générique lisse et dont la fibre spéciale est un diviseur à croisements normaux.

Chapitre I

Introduction

Sommaire

Dans cette introduction, nous nous focalisons sur le résultat principal de cette thèse qui est l'obtention d'une démonstration complète de la conjecture de l'inertie modérée de Serre. Dans une première partie, après avoir mis en place les notations et fait les quelques préliminaires nécessaires, on donne l'énoncé de la conjecture. Une seconde partie est dédiée aux cas déjà connus de cette conjecture. En particulier, on s'attarde sur le cas du H^1 des variétés abéliennes ayant bonne réduction, qui est resté pendant longtemps le seul pour lequel on avait des résultats. Enfin, dans une troisième partie, on se concentre sur le schéma de la preuve que l'on propose dans cette thèse.

Cette introduction se termine en expliquant comment les divers chapitres de cette thèse s'agencent.

1 Énoncé de la conjecture de Serre

On considère K un corps de caractéristique nulle complet pour une valuation discrète v. On note $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers, π une uniformisante et $k = \mathcal{O}_K/\pi$ son corps résiduel que l'on suppose parfait de caractéristique $p > 0$. On note en outre $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k. On dispose d'un morphisme canonique $W \to \mathcal{O}_K$ qui fait de $\mathcal{O}_K$ une W-algèbre finie de rang e : c'est l'indice de ramification absolue de K.

On note $\bar{K}$ une clôture algébrique de K. L'anneau des entiers de $\bar{K}$ est local, et on note $\bar{k}$ son corps résiduel qui s'identifie à une clôture algébrique de k. On appelle G_K le groupe de Galois absolu de K. On désigne par I (resp. I_s) le sous-groupe d'inertie (resp. d'inertie sauvage) de G_K et par $I_t = I/I_s$ le groupe d'inertie modérée. On rappelle que I_s est un pro-p-groupe et que I_t est isomorphe (canoniquement) à $\prod \mathbb{Z}_\ell$ le produit étant étendu à tous les nombres premiers $\ell \neq p$.

Finalement, si q est une puissance de p, on désigne par $\mathbb{F}_q$ le sous-corps de $\bar{k}$ formé des solutions de l'équation $x^q = x$. En outre, on note $\bar{\mathbb{F}}_p$ la réunion de tous les $\mathbb{F}_q$, c'est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$.

Préliminaires sur les $\mathbb{F}_p$-représentations irréductibles de I

Ce paragraphe se contente de rappeler des résultats classiques. Pour plus de détails sur la question, on pourra consulter (par exemple) la section 1 de [Ser72].

Si G est un groupe, on appelle $\mathbb{F}_p$-*représentation* de G tout morphisme $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ où V est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{F}_p$. Il revient au même de se donner une action linéaire de G sur V (l'élément g agissant par l'endomorphisme $\rho(g)$) et on note simplement $g \cdot v = \rho(g)(v)$. On dit qu'une telle représentation V est irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels de V stables par tous les $\rho(g)$ sont $\{0\}$ et V lui-même.

Soit V une $\mathbb{F}_p$-représentation irréductible de I, le sous-groupe d'inertie de G_K. Elle définit par restriction une représentation encore irréductible de I_s, le sous-groupe d'inertie sauvage. Du fait que I_s est un pro-p-groupe et que V a pour cardinal un multiple de p, on déduit qu'il existe $v \in V$ stable par l'action de tous les éléments de I_s. Par irréductibilité, on en déduit que I_s agit trivialement sur V et donc que l'action de I se factorise en une action de I_t.

Ainsi V devient une $\mathbb{F}_p$-représentation de I_t dont il est facile de vérifier qu'elle est encore irréductible. D'après le lemme de Schur, l'ensemble $E = \mathrm{End}(V)$ formé des endormorphismes de V qui commutent à l'action de G est un corps. Comme V est un ensemble fini, il en va de même de E qui est donc un corps fini (donc commutatif) de caractéristique p. De plus, V hérite d'une structure d'espace vectoriel sur E de dimension 1 par irréductibilité. Finalement, la représentation de départ fournit un caractère :

$$\rho : I_t \to E^\star.$$

Notons $q = p^h$ le cardinal de E. Le corps E est alors isomorphe (non canoniquement) à $\mathbb{F}_q$. En composant par un tel isomorphisme $f : E \to \mathbb{F}_q$, ρ fournit un caractère $\rho_f : I_t \to \mathbb{F}_q^\star$. Or on connaît un caractère de I_t (à valeurs dans $\mathbb{F}_q$) particulier qui est :

$$\begin{array}{rccl} \theta_h : & I_t & \to & \mu_{q-1}(\bar{K}) \simeq \mathbb{F}_q^\star \\ & g & \mapsto & \frac{g(\eta)}{\eta} \end{array}$$

où η désigne une racine $(q-1)$-ième de l'uniformisante π. On a $\theta_h^{q-1} = \mathrm{id}$ et comme I_t est un groupe pro-cyclique, il existe un unique entier $n_f \in \{0, \dots, q-2\}$ tel que $\rho_f = \theta_h^{n_f}$.

Si $g : E \to \mathbb{F}_q$ est un autre isomorphisme, on définit de même l'entier n_g. Puisque f et g diffèrent d'un automorphisme de $\mathbb{F}_q$, c'est-à-dire d'une puissance du Frobenius, on obtient une congruence $n_f \equiv p^k n_g \pmod{q-1}$ pour un certain entier k. On vérifie facilement que cela implique (on utilise $0 \leqslant n_f, n_g \leqslant q-2$) que les chiffres de l'écriture en base p de n_f et n_g sont les mêmes. Ces chiffres sont donc canoniquement attachés à la représentation V, on les appelle les *poids de l'inertie modérée* de V.

Énoncé de la conjecture

Soit X un schéma propre et semi-stable sur $\mathcal{O}_K$. On rappelle que cela signifie que X est propre et régulier, que la fibre générique de X est lisse sur K et que la fibre spéciale définit un diviseur à croisements normaux dans X. Il revient au même de dire qu'étale-localement X est un ouvert étale de Spec $\frac{\mathcal{O}_K[X_1,\dots,X_n]}{X_1\cdots X_t - \pi}$ pour certains entiers $t \leqslant n$.

Notons $X_{\bar{K}} = X \times_{\mathcal{O}_K} \bar{K}$. Fixons un entier r et considérons $V = H^r_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\vee$ (où « $\vee$ » signifie que l'on prend le $\mathbb{F}_p$-dual[1]). C'est une $\mathbb{F}_p$-représentation de G_K, et donc également, par restriction, une représentation de I. Notons :

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

une suite de Jordan-Hölder de V (vu comme représentation de I). Cela signifie que chacun des V_i est un sous-espace vectoriel de V stable par I et que l'action de I sur chacun des quotients V_{i+1}/V_i est irréductible. Soit W un quelconque de ces quotients. Par les préliminaires mentionnés précédemment, on peut considérer les poids de l'inertie modérée de W. La conjecture de l'inertie modérée de Serre donne une borne sur ces poids. Précisément (voir paragraphe 1.13 de [Ser72]) :

Conjecture I.*i* (Serre). *Avec les notations précédentes, les poids de l'inertie modérée de W sont compris entre 0 et er.*

Soulignons sans plus tarder que la conjecture de Serre est vide lorsque $er \geqslant p-1$: en effet, on se rappelle que les poids de l'inertie modérée sont définis comme des chiffres en base p et donc ils sont nécessairement inférieurs ou égaux à $p-1$. Dans la suite de cette thèse, on supposera donc pratiquement toujours $er < p-1$.

De plus, quitte à remplacer K par la complétion p-adique de K^{nr}, on peut supposer que le corps résiduel k est algébriquement clos. En réalité, comme plusieurs résultats intermédiaires que nous allons obtenir tout au long de cette thèse sont intéressants en soi et ne nécessitent pas cette hypothèse supplémentaire, nous n'allons pas la faire systématiquement. Toutefois, il est bon de garder cette remarque à l'esprit.

[1] On rappelle que si T est une $\mathbb{F}_p$-représentation d'un groupe G, $T^\vee$ est défini comme le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel des formes linéaires sur T muni de l'action $gf(v) = f(g^{-1}v)$ pour tout $g \in G$ et tout $f : E \to k$ linéaire.

2 Bref historique des cas connus de la conjecture

Le cas du H^1 des variétés abéliennes à bonne réduction

Le premier cas particulier à avoir été démontré est celui du H^1 des variétés abéliennes ayant bonne réduction, *i.e.* le cas $r = 1$ avec les hypothèses supplémentaires X lisse sur $\mathcal{O}_K$ et X_K variété abélienne sur K. Remarquons tout de suite qu'en utilisant la jacobienne on déduit de ce cas la conjecture de Serre lorsque $r = 1$ pour les *courbes* ayant bonne réduction. En effet, on a alors une identification :

$$H^1_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq H^1_{\text{ét}}(\text{Pic}^0 X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

puisque le groupe de Néron-Séveri est sans torsion.

Reprenons la situation d'une variété abélienne à bonne réduction X_K sur K. Par hypothèse, il existe un schéma abélien X sur $\mathcal{O}_K$ tel que $X \times_{\mathcal{O}_K} K = X_K$. Le noyau $\mathcal{G}$ de la multiplication par p sur X est un schéma en groupes commutatif fini et plat et on a un isomorphisme canonique et compatible à l'action de Galois :

$$H^1_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\vee \simeq \mathcal{G}(\bar{K}).$$

On en déduit qu'il suffit pour prouver la conjecture de Serre dans le cas du H^1 des variétés abéliennes à bonne réduction de montrer le théorème suivant :

Théorème I.*ii*. *Supposons k algébriquement clos. Soit $\mathcal{G}$ un schéma en groupes commutatifs sur $\mathcal{O}_K$, fini, plat et tué par p. Alors tout quotient de Jordan-Hölder de la représentation galoisienne[2] $\mathcal{G}(\bar{K})$ a ses poids de l'inertie modérée compris entre 0 et e.*

Ce travail a été accompli pour la première fois par Raynaud dans le célèbre article [Ray74] datant de 1974 (c'est-à-dire « seulement » deux ans après l'article de Serre). Précisément, en reprenant les notations du théorème, Raynaud prouve dans *loc. cit.* que tout quotient de Jordän-Holder de $\mathcal{G}(\bar{K})$ s'écrit $\mathcal{H}(\bar{K})$ pour un certain schéma en groupes $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{O}_K$ commutatif, fini, plat, tué par p et vérifiant une hypothèse supplémentaire. Il parvient ensuite à donner une classification des schémas en groupes ainsi obtenus, ce qui lui permet de conclure.

L'année suivante, Fontaine (voir [Fon75a], [Fon75b] et [Fon75c]) établit une nouvelle classification, plus complète, de tous les schémas en groupes sur W commutatifs, finis, plats et tués par une puissance de p. Cette classification se fait par l'intermédiaire de nouvelles structures algébriques appelées *systèmes de Honda*, et c'est en 1977 que Berthelot (voir [Ber77]) l'utilise pour donner une nouvelle preuve de la conjecture de Serre dans le cas $e = r = 1$ pour les variétés abéliennes ayant bonne réduction.

Par ailleurs, Berthelot émet l'hypothèse que la classification de Fontaine par les systèmes de Honda puisse s'étendre à la base $\mathcal{O}_K$, et qu'il soit ainsi possible d'obtenir une nouvelle preuve

[2]Comme on a supposé k algébriquement clos, on a $I = G_K$ et donc plus besoin de considérer la restriction de la représentation.

« générale » de la conjecture de Serre dans le cas de Raynaud. Bien que n'entraînant pas de véritable difficulté supplémentaire, l'espoir de Berthelot fut assez long à se concrétiser, mais en 1999, Conrad étend dans [Con99] la notion de systèmes de Honda et prouve que ceux-ci permettent de classifier les schémas en groupes sur $\mathcal{O}_K$ commutatifs, finis, plats et tués par une puissance de p, du moins lorsque $e < p-1$ (hypothèse vérifiée ici). Le chapitre II de cette thèse montre comment il résulte de la classification de Conrad la conjecture de Serre dans le cas de Raynaud.

Les cohomologies supérieures

Après la preuve de Raynaud, il fallut attendre une bonne décennie pour qu'un autre cas de la conjecture de Serre soit prouvé. Les raisons sont faciles à cerner : les démonstrations dont on dispose dans les cas $r > 1$ reposent toutes sur des théorèmes de comparaison en théorie de Hodge p-adique, et il était donc nécessaire que la théorie se développât (principalement sous l'impulsion de Fontaine) suffisamment au préalable.

Le premier résultat concret pour la conjecture de Serre remonte à 1987 et résulte du travail de Fontaine, Laffaille et Messing et plus précisément des deux articles [FL82] et [FM87]. Leur méthode permet de démontrer la conjecture de Serre dans le cas $e = 1$ mais r quelconque, toujours avec l'hypothèse de bonne réduction. Une preuve alternative (mais basée sur des idées analogues) de ce cas a été donnée par Kato dans [Kat87a]. L'avantage de la démonstration de Kato est qu'elle n'utilise pas (du moins explicitement) un isomorphisme de comparaison entre cohomologie étale et cohomologie cristalline ; elle est donc en un sens plus directe.

Un autre grand pas dans la résolution de la conjecture de Serre fut franchi avec l'arrivée des structures logarithmiques, d'abord pressenties par Fontaine et Illusie et finalement mises au point par Kato en 1989 dans [Kat89]. Ces structures permettent en un sens vague de travailler avec des schémas semi-stables *comme s'ils étaient lisses*... et donc de reprendre les idées de Fontaine-Laffaille-Messing et de les appliquer dans le cas de réduction semi-stable.

Cette tâche difficile techniquement et parfois aussi conceptuellement fut réalisée en 1998 par Breuil (voir principalement [Bre97a] et [Bre98]), et c'est ainsi qu'il parvint à une démonstration « complète » de la conjecture de Serre dans le cas $e = 1$.

3 Schéma de la preuve

On reprend les notations introduites précédemment. En particulier, X désigne un schéma propre et semi-stable sur $\mathcal{O}_K$, X_K sa fibre générique, $\bar{X}$ sa fibre spéciale et $X_{\bar{K}} = X \times_{\mathcal{O}_K} \bar{K}$. L'entier e désigne l'indice de ramification de K, et on considère un entier r vérifiant $er < p-1$.

Le plan de la preuve que nous proposons dans cette thèse est tout à fait similaire à celui des démonstrations de Fontaine-Laffaille-Messing et de Breuil. Très schématiquement, il se décompose de la façon suivante :

Étape I) Établir un isomorphisme faisant intervenir d'un côté $H^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et de l'autre un certain groupe de cohomologie cristalline que nous notons $H^r_{\text{log-cris}}(X_k)$ pour cette introduction ;

Étape II) Montrer des propriétés du groupe $H^r_{\text{log-cris}}(X_k)$;

Étape III) En déduire la conjecture de Serre.

Les étapes I) et II) sont géométriques et font l'objet du chapitre IV de cette thèse. Détaillons-les quelque peu dans cette introduction. Tout d'abord, mentionnons que le groupe $H^r_{\text{log-cris}}(X_k)$ est le groupe de cohomologie log-cristalline du faisceau structural sur le site $(X_k/T_1)_{\text{log-cris}}$ où T_1 est le log-schéma Spec $k[u]/u^p$ muni des puissances divisées sur l'idéal (u) définies par $\gamma_i(u) = 0$ pour $i \geqslant p$ et de la log-structure associée au morphisme de monoïdes $\mathbb{N} \to k[u]/u^p, 1 \mapsto u$.

Ainsi $\mathcal{M} = H^r_{\text{log-cris}}(X_k)$ est naturellement un $k[u]/u^p$-module. Il peut par ailleurs être muni de structures supplémentaires à savoir d'une filtration décroissante $\text{Fil}^t\mathcal{M}$ (pour la suite, on ne retiendra que le cran $t = r$ de la filtration), d'une application $\phi_r : \text{Fil}^r\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ et d'un opérateur $N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, le tout soumis à des conditions de compatibilité que nous allons donner rapidement.

Munissons $k[u]/u^p$ d'un opérateur ϕ défini comme étant l'élévation à la puissance p et d'un opérateur k-linéaire N envoyant u^i sur $-iu^i$. Notons en outre $E(u)$ le polynôme minimal de π sur W. C'est un polynôme d'Eisenstein et en particulier son coefficient constant $E(0)$ est multiple de p de sorte qu'il est légitime de définir $c_\pi = E(0)/p$. L'étape II) du schéma de preuve donné précédemment se concrétise par le théorème suivant :

Théorème I.*iii*. *Avec les notations précédentes :*

1. *le module $\mathcal{M}$ est libre de rang fini sur $k[u]/u^p$;*
2. *on a $u^{er}\mathcal{M} \subset \mathit{Fil}^r\mathcal{M}$;*
3. *l'application ϕ_r est ϕ-semi-linéaire et son image engendre tout $\mathcal{M}$ en tant que $k[u]/u^p$-module ;*
4. *l'application N vérifie les trois conditions suivantes :*
   - *pour tout $s \in k[u]/u^p$ et $x \in \mathcal{M}$, on a $N(sx) = N(s)x + sN(x)$*
   - *pour tout $x \in \mathit{Fil}^r\mathcal{M}$, on a $u^eN(x) \in \mathit{Fil}^r\mathcal{M}$*
   - *le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\mathit{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "u^eN"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "c_\pi N"] \\
\mathit{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

Ce théorème est prouvé dans le chapitre IV (théorème IV.3.1.24). On obtient également par la suite une version plus générale concernant des objets modulo p^n (voir théorème IV.3.2.1).

Détaillons à présent l'étape I). Fixons $\pi_1 \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ une racine p-ième de π et notons $\bar{\pi}_1 \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi$ la réduction modulo π de π_1. Soit $\hat{A} = \mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi \langle X \rangle$ (où les crochets signifient que l'on considère l'algèbre polynômiale à puissances divisées sur $\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi$). Il s'agit d'une $k[u]/u^p$-algèbre *via* le morphisme qui envoie u sur $\frac{\pi_1}{1+X}$. On la munit d'un Fil^r défini par :

$$\mathrm{Fil}^r \hat{A} = \left\{ \sum_{\text{finie}} a_t \frac{X^t}{t!},\ a_t \in \mathrm{Fil}^{r-t}(\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi) \right\}$$

où $\mathrm{Fil}^t(\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi)$ consiste en les multiples de π_1^{et} (et où par convention $\mathrm{Fil}^t(\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi) = \mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi$ pour $t < 0$). On définit un opérateur additif $\phi_r : \mathrm{Fil}^r \hat{A} \to \hat{A}$ en posant, pour $a_t = \pi_1^{e(r-t)} b_t \in \mathrm{Fil}^{r-t}(\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi)$:

$$\phi_r\left(a_t \frac{X^t}{t!}\right) = (-1)^t b_t^p \cdot \frac{1}{t!}\left(\frac{(1+X)^p - 1}{p}\right)^t$$

où le dernier facteur est d'abord calculé dans $\mathbb{Q}[X]$ avant d'être envoyé dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi\,\langle X\rangle$. On définit également un opérateur $\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi$-linéaire $N : \hat{A} \to \hat{A}$ en posant :

$$N\left(\frac{X^i}{i!}\right) = (1+X) \cdot \frac{X^{i-1}}{(i-1)!}.$$

Finalement $\hat{A}$ est muni d'une action de G_K : il opère de façon naturelle sur $\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi$ et pour tout $g \in G_K$, on a $g \cdot X = \frac{g(\pi_1)}{\pi_1}(1+X) - 1$.

Avec ce qui précède, il est enfin possible de donner un énoncé précis pour l'étape I) :

Théorème I.*iv*. *Avec les notations précédentes, il existe un isomorphisme canonique compatible à l'action de Galois :*

$$H^r_{\acute{e}t}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\vee \xrightarrow{\sim} \mathit{Hom}(H^r_{\textit{log-cris}}(X_k), \hat{A})$$

où Hom signifie que l'on considère les morphismes commutant à Fil^r, ϕ_r et N et où G_K agit sur le terme de droite via *son action sur $\hat{A}$.*

Ce théorème est prouvé sous une forme plus générale dans le chapitre IV (théorème IV.4.a).

A contrario des deux premières étapes, l'étape III) ne fait intervenir que de l'algèbre semi-linéaire. On définit en premier lieu une catégorie $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r$ dont les objets sont les quadruplets $(\mathcal{M}, \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}, \phi_r, N)$ vérifiant les quatre conditions du théorème I.*iii* et dont les morphismes sont les applications $k[u]/u^p$-linéaires commutant aux structures. On définit en outre un foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ de la catégorie $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r$ dans celle des $\mathbb{F}_p$-représentations galoisiennes par la formule :

$$T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}, \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}, \phi_r, N) = \mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A})$$

où Hom signifie que l'on considère les morphismes commutant à Fil^r, ϕ_r et N.

En vertu des théorèmes I.*iii* et I.*iv*, on vérifie facilement que les quotients de Jordan-Hölder qui apparaissent dans l'énoncé de la conjecture de Serre sont obtenus comme image d'objets simples de la catégorie $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r$ par le foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$. L'étape III) de la preuve consiste d'une part à donner une classification des objets simples de $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r$ et d'autre part à calculer explicitement leur image par le foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ afin de vérifier que les poids de l'inertie modérée sont bien compris entre 0 et er. Précisément, on a la description suivante :

Théorème I.*v*. *Supposons k algébriquement clos.*

Soit $\mathcal{M}$ un objet simple de $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r$. Alors il existe une $k[u]/u^p$-base $(e_1, \ldots, e_d)$ de $\mathcal{M}$ et des entiers $n_1, \ldots, n_d$ compris entre 0 et er tels que

i) $\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}$ soit l'espace engendré par les $u^{n_i} e_i$;

ii) pour tout i, $\phi_r(u^{n_i} e_i) = e_{i+1}$, les indices étant considérés modulo d ;

iii) pour tout i, $N(e_i) = 0$.

L'image de $\mathcal{M}$ par le foncteur $T^\star_{st}$ est une $\mathbb{F}_p$-représentation irréductible de $G_K = I$ dont les poids de l'inertie modérée sont les $m_i = er - n_i$. En particulier, ils sont compris entre 0 et er.

Ce théorème est prouvé dans le chapitre III (voir théorèmes III.3.3.2 et III.4.2.2).

Signalons pour finir que pour des raisons de commodité, il est plus agréable de commencer la preuve par la partie d'algèbre semi-linéaire, c'est-à-dire l'étape III). On traite ensuite l'étape II) et on termine par l'étape I). C'est pour cette raison que l'étape III) est détaillée au chapitre III alors que les étapes I) et II) sont reléguées au chapitre IV.

4 Plan de la thèse

Cette thèse se découpe en cinq grands chapitres de longueur et d'intérêt variables. Bien que centrés autour d'un même thème, ces chapitres sont largement indépendants et redéfinissent chacun leurs notations (même si un effort a été fait pour que celles-ci soient cohérentes, du moins pour les objets les plus fréquemment utilisés). Il est toutefois conseillé, sinon de lire attentivement, du moins de parcourir le chapitre III avant de se lancer dans le IV ou le V.

D'un point de vue pratique, mentionnons que les chapitres sont numérotés par des chiffres romains. Ceux-ci se divisent en parties, sous-parties et sous-sous-parties pour lesquelles la numérotation se fait avec les chiffres arabes. À l'intérieur d'un chapitre la numérotation des théorèmes, propositions, définitions, *etc.* ne rappelle en général pas le numéro du chapitre. Également, lorsque l'on se réfère à un énoncé du même chapitre, on ne reprécise pas ce numéro.

L'articulation de cette thèse se fait comme suit.

Le chapitre I (celui-ci) sert d'introduction générale.

Le chapitre II est un petit texte qui démontre la conjecture de Serre dans le cas du H^1 des variétés abéliennes à bonne réduction par des méthodes « élémentaires » dans le sens où elles ne font pas intervenir de cohomologie cristalline ou syntomique.

Les chapitres III et IV sont la reprise (*très* légèrement adaptée) de deux articles de l'auteur. Le chapitre III se focalise sur l'étape III) décrite précédemment. Le résultat principal de ce chapitre est donc le théorème I.*v*. On y démontre en plus certains résultats importants sur le foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ comme la pleine fidélité. On en déduit pour finir une version faible[3] de la conjecture

[3]En effet, en écrivant la suite exacte longue de cohomologie associé à $0 \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0$, on montre qu'avec les notations du théorème I.*vi* que V/pV est un quotient d'une sous-représentation de $H^r_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\vee$. Ainsi tout quotient de Jordan-Hölder du premier est un quotient de Jordan-Hölder du second et la conjecture de Serre implique le théorème I.*vi*.

de Serre que voici :

Théorème I.*vi*. *Soit X un schéma propre et semi-stable sur $\mathcal{O}_K$. Soit V la restriction à I de la partie libre de la représentation galoisienne $H^r_{\acute{e}t}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p)^\vee$ (où « $\vee$ » signifie que l'on prend le $\mathbb{Z}_p$-dual). Alors, les poids de l'inertie modérée sur tout quotient de Jordan-Hölder de V/pV sont compris entre 0 et er.*

Le chapitre IV s'intéresse quant à lui à la partie géométrique de la preuve, c'est-à-dire aux étapes I) et II). On y prouve des versions plus générales des théorèmes I.*iii* et I.*iv*. Comme corollaire de la théorie développée, on obtient une démonstration complète de la conjecture de Serre.

Le chapitre V est particulier d'une part parce qu'il n'a pas de rapport direct avec la conjecture de Serre et d'autre part parce qu'il ne fait aucune hypothèse sur l'indice de ramification e. On prouve que si l'on oublie l'opérateur N tout objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ (voir[4] définition V.1.1.1) s'écrit comme quotient de deux modules fortement divisibles (voir définition V.1.1.1), ce qui répond partiellement à une question de Breuil et Messing ([BM02]). On explique ensuite comment utiliser cela pour construire une dualité sur les catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$, au moins lorsque $er < p - 1$ ou $r = 1$. On prouve finalement que cette dualité correspond *via* l'équivalence de catégories de [Bre00a] à la dualité de Cartier sur les schémas en groupes.

[4] La définition est légèrement différente lorsque $er \geqslant p - 1$.

Chapitre II

Systèmes de Honda

Résumé

Soit K un corps local de caractéristique mixte dont l'indice de ramification vérifie $e < p-1$. On utilise la classification des schémas en groupes commutatifs finis et plats sur $\mathcal{O}_K$, tués par une puissance de p (voir [Con99]) pour calculer explicitement la représentation galoisienne d'un schéma en $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de rang q.
On applique ensuite ce calcul pour donner une nouvelle preuve d'un cas particulier de la conjecture de l'inertie modérée de Serre (voir [Ser72], 1.13).

Sommaire

Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$. On appelle $W = W(k)$, l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k. C'est un anneau complet pour une valuation discrète que l'on note v. Son corps résiduel s'identifie canoniquement à k. On pose $K_0 = \operatorname{Frac} W$ et on considère K une extension totalement ramifiée de K_0 de degré e. La valuation v se prolonge de façon unique à tout K et, si l'on note π une uniformisante de K, on suppose que v est normalisée par $v(\pi) = 1$ (et donc $v(p) = e$).

On note $\bar{K}$ (resp. $\bar{k}$) une clôture algébrique de K (resp. de k). On note G_K le groupe de Galois absolu de K, I le sous-groupe d'inertie, I_s le sous-groupe d'inertie sauvage et $I_t = I/I_s$ le groupe d'inertie modérée. Si $q = p^d$ est une puissance de p, on note $\mathbb{F}_q$ le sous-corps de $\bar{k}$ formé des solutions de l'équation $x^q = x$.

On note finalement σ le Frobenius défini sur k et sur W.

Ce chapitre se propose de traiter dans le cas $e < p-1$ ce qui est traité dans le cas $e = 1$ dans [Ber77]. Il se décompose en deux parties.

Tout d'abord, après quelques rappels, on détermine explicitement la structure du système de Honda associé à un schéma en $\mathbb{F}_q$-vectoriel de rang q sur $\mathcal{O}_K$. On retrouve ainsi la classification établie par Raynaud dans [Ray74].

On s'attache ensuite au calcul de la représentation galoisienne associée et on prouve que les exposants de l'inertie modérée (voir 2.2 pour une définition) sont tous compris entre 0 et e. Ce résultat était déjà connu par les travaux de Raynaud, mais la preuve donnée ici est différente.

Dans toute la suite de ce chapitre, on suppose $e < p-1$.

1 Les systèmes de Honda

1.1 Rappel sur la classification de Conrad

Dans [Con99], Conrad établit une anti-équivalence de catégories (déjà très largement pressentie par Fontaine dans [Fon77]) entre la catégorie des schémas en groupes commutatifs, finis et plats sur $\mathcal{O}_K$ tués par une puissance de p et la catégorie des systèmes de Honda. Le but de ce paragraphe est de rappeler la définition d'un système de Honda, et de donner un foncteur (ainsi qu'un quasi-inverse) réalisant cette anti-équivalence.

Si A est une k-algèbre finie, on définit les *covecteurs de Witt* à coefficients dans A comme l'ensemble $CW_k(A)$ des suites $(\ldots, a_{-n}, \ldots, a_0)$ dont le terme général a_{-n} est élément du nilradical de A pour n suffisamment grand. On munit cet ensemble d'un structure de W-module. Si $a = (\ldots, a_{-n}, \ldots, a_0)$ et $b = (\ldots, b_{-n}, \ldots, b_0)$ sont deux éléments de $CW_k(A)$, on pose :

$$a + b = (\ldots, s_{-n}, \ldots, s_0)$$

où :

$$s_{-n} = \lim_{m \to \infty} S_m(a_{-n-m}, \ldots, a_{-n}, b_{-n-m}, \ldots, b_{-n})$$

les polynômes S_m étant les polynômes universels qui définissent l'addition sur les anneaux de vecteurs de Witt. On vérifie de plus :

$$p(\ldots, a_{-n}, \ldots, a_0) = \left(\ldots, a_{-n-1}^p, \ldots, a_{-1}^p\right)$$

et, pour tout $\lambda \in k$:

$$[\lambda](\ldots, a_{-n}, \ldots, a_0) = \left(\ldots, \lambda^{1/p^n} a_{-n}, \ldots, \lambda a_0\right)$$

où $[\lambda] = (\lambda, 0, \ldots, 0, \ldots) \in W$ désigne le représentant de Teichmüller de λ.

Pour finir, on munit $CW_k(A)$ d'un opérateur de *Frobenius* et d'un opérateur de *Verschiebung* définis ainsi :

$$\begin{aligned} F(\ldots, a_{-n}, \ldots, a_0) &= (\ldots, a_{-n}^p, \ldots, a_0^p) \\ V(\ldots, a_{-n}, \ldots, a_0) &= (\ldots, a_{-n-1}, \ldots, a_{-1}) \end{aligned}$$

pour tout $a \in CW_k(A)$. On remarque que F est σ-linéaire, que V est σ^{-1}-linéaire et que $FV = VF = p$.

Définition 1.1.1. *On appelle* D_k-module *un W-module muni d'un opérateur σ-linéaire F et d'un opérateur σ^{-1}-linéaire V vérifiant $FV = VF = p$.*

Soit M un D_k-module. On lui associe un module $M_{\mathcal{O}_K}$ défini comme suit. En premier lieu, on remarque que si l'on note $M^{(p)} = W_{(\sigma)} \otimes M$, le Frobenius (resp. le Verschiebung) induit une application linéaire $F : M^{(p)} \to M$ (resp. $V : M \to M^{(p)}$). On définit $M_{\mathcal{O}_K}$ comme la limite inductive du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{m} \otimes_W M \arrow[r, "V^M"] \arrow[d, "\phi_0^M"] & p^{-1}\mathfrak{m} \otimes_W M^{(p)} \\ \mathcal{O}_K \otimes_W M & \mathcal{O}_K \otimes_W M^{(p)} \arrow[l, "F^M"'] \arrow[u, "\phi_1^M"'] \end{tikzcd}$$

où par définition $\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_K$, où ϕ_0^M (resp. ϕ_1^M) provient de l'inclusion de $\mathfrak{m}$ dans $\mathcal{O}_K$ (resp. de $\mathcal{O}_K$ dans $p^{-1}\mathfrak{m}$), où V^M est défini par $V^M(x \otimes m) = p^{-1}x \otimes V(m)$ et où finalement F^M est défini par $F^M(x \otimes m) = x \otimes F(m)$.

On munit de plus $M_{\mathcal{O}_K}$ de deux applications qui sont d'une part $F_M : p^{-1}\mathfrak{m} \otimes_W M^{(p)} \to M_{\mathcal{O}_K}$ déduite de l'inclusion canonique de $p^{-1}\mathfrak{m} \otimes_W M^{(p)}$ dans $(\mathcal{O}_K \otimes_W M) \oplus \left(p^{-1}\mathfrak{m} \otimes_W M^{(p)}\right)$ et d'autre part $V_M : M_{\mathcal{O}_K} \to \mathcal{O}_K \otimes_W M^{(p)}$ que l'on définit en remarquant que l'application $(1 \otimes V_0) \oplus (p \otimes \mathrm{id}) : (\mathcal{O}_K \otimes_W M) \oplus \left(p^{-1}\mathfrak{m} \otimes_W M^{(p)}\right) \to \mathcal{O}_K \otimes_W M^{(p)}$ passe au quotient.

Définition 1.1.2. *Un système de Honda sur $\mathcal{O}_K$ est la donnée d'un D_k-module M de longueur finie en tant que W-module et d'un sous-$\mathcal{O}_K$-module L de $M_{\mathcal{O}_K}$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1. *$L/\mathfrak{m}L \to$ coker F_M est un isomorphisme*
2. *$V_{M|L}$ est une application injective*

On peut désormais décrire le foncteur. Soit $\mathcal{G}$ un schéma en groupes commutatifs fini et plat sur $\mathcal{O}_K$ et tué par une puissance de p. C'est un schéma affine : $\mathcal{G} = \operatorname{Spec} \mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{O}_K$-bigèbre finie et libre. Notons $\mathcal{G}_k = \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_K} k$ sa fibre spéciale. Elle définit, au même titre que CW_k, un foncteur contravariant entre la catégorie des k-algèbres finies dans la catégorie des groupes commutatifs. On note $M(\mathcal{G})$ l'ensemble des transformations naturelles de $\mathcal{G}_k$ vers CW_k, il hérite d'une structure de D_k-module.

On définit par ailleurs une application :

$$\begin{array}{rrcl} w_{\mathcal{A}} : & \mathcal{O}_K \otimes_W CW(\mathcal{A}/\pi\mathcal{A}) & \to & (\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_K} K)/\mathfrak{m}\mathcal{A} \\ & x \otimes (\ldots, a_{-n}, \ldots, a_0) & \mapsto & x \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}^{p^n} p^{-n} \end{array}$$

(Si $x \equiv y \pmod{\pi}$, alors $x^{p^n} \equiv y^{p^n} \pmod{p^n\pi}$, de sorte que la formule précédente a bien un sens.) On prouve (voir [Fon77]) qu'il existe une unique application w'_A faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_K \otimes_W CW(\mathcal{A}/\pi\mathcal{A}) \arrow[r, "w_{\mathcal{A}}"] \arrow[d] & (\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_K} K)/\mathfrak{m}\mathcal{A} \\ CW_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{A}/\pi\mathcal{A}) \arrow[ur, dotted, "w'_{\mathcal{A}}"'] & \end{tikzcd}$$

où $CW_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{A}/\pi\mathcal{A})$ est le $\mathcal{O}_K$-module obtenu à partir de $CW(\mathcal{A}/\pi\mathcal{A})$ par la même construction permettant d'obtenir $M_{\mathcal{O}_K}$ à partir de M.

Finalement on définit $L(\mathcal{G})$ comme le noyau de la composée :

$$M(\mathcal{G}_k)_{\mathcal{O}_K} \longrightarrow CW_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{A}/\pi\mathcal{A}) \xrightarrow{w'_A} (\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_K} K)/\mathfrak{m}\mathcal{A}\,.$$

Théorème 1.1.3 (Conrad). *Le fonction $\mathcal{G} \mapsto (M(\mathcal{G}), L(\mathcal{G}))$ réalise une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathcal{O}_K$-schémas en groupes commutatifs, finis, plats et tués par une puissance de p et la catégorie des systèmes de Honda sur $\mathcal{O}_K$.*

Un quasi-inverse peut-être décrit de la façon suivante. Si $(M, L) = (M(\mathcal{G}), L(\mathcal{G}))$, alors pour tout $\mathcal{O}_K$-algèbre finie et plate A, on a :

$$\mathcal{G}(A) = \mathrm{Hom}\left((M, L), (CW(A/\pi A), \ker w'_A)\right)$$

où w'_A est défini de la même façon que $w'_{\mathcal{A}}$.

1.2 Le système de Honda d'un schéma en $\mathbb{F}_q$-vectoriel de rang q

On considère $\mathcal{G}$ un schéma en groupes commutatifs fini, libre de rang $q = p^d$ (pour un certain entier d) sur $\mathcal{O}_K$ et on suppose donné pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_q$, un morphisme $[\lambda] : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ soumis pour tous λ et μ dans $\mathbb{F}_q$ aux relations :

1. $[1] = \mathrm{id}$
2. $[\lambda\mu] = [\lambda] \circ [\mu]$
3. $[\lambda + \mu] = m \circ ([\lambda] \times [\mu])$

où $m : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ désigne la multiplication de $\mathcal{G}$.

Une telle donnée consiste en un schéma en $\mathbb{F}_q$-*vectoriel*. On déduit du fait que $\mathbb{F}_q$ est annulé par p, qu'il en est de même de $\mathcal{G}$. On peut donc considérer son système de Honda associé par le foncteur décrit en 1.1. Notons-le (M, L). Les morphismes $[\lambda]$ induisent des endomorphismes du système de Honda (M, L) que nous notons encore $[\lambda]$.

1.2.1 Structure de M et de $M_{\mathcal{O}_K}$

À partir de maintenant, on suppose que le corps k est algébriquement clos.

Comme $\mathcal{G}$ est tué par p, il en est de même de (M, L). Ainsi M est un W-module tué par p, c'est-à-dire un k-espace vectoriel. De plus, par des résultats classiques sur les modules de Dieudonné, $\dim_k M = d$.

Définition 1.2.1. *Un* caractère de $\mathbb{F}_q$ *est un homomorphisme $\chi : \mathbb{F}_q^\star \to k^\star$. Un tel caractère est dit* fondamental *si, en le prolongeant par $\chi(0) = 0$, il réalise un morphisme d'anneaux.*

Les caractères fondamentaux sont donc les éléments de Gal $(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)$, c'est-à-dire les puissances itérées du Frobenius. Appelons-les $\chi_1, \ldots, \chi_d$ avec $\chi_{i+1} = \chi_i^p$.

Pour tout caractère χ, on définit l'endomorphisme k-linéaire de M suivant :

$$p_\chi = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^\star} \chi(\lambda)^{-1} [\lambda]$$

On vérifie facilement que les p_χ sont des projecteurs deux à deux orthogonaux de somme l'identité. Ainsi, si on note $M_\chi = \operatorname{im} p_\chi$, on a la décomposition suivante :

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{F}_q^\star} M_\chi.$$

De plus, on vérifie facilement que pour tout $x \in M_\chi$, l'opérateur $[\lambda]$ agit par $[\lambda] x = \chi(\lambda) x$.

Lemme 1.2.2. *Si χ n'est pas un caractère fondamental, alors $M_\chi = 0$.*

Démonstration. Supposons $M_\chi \neq 0$ et considérons $x \in M_\chi$, $x \neq 0$. Soient λ et μ dans $\mathbb{F}_q$. On a $[\lambda] x = \chi(\lambda) x$, $[\mu] x = \chi(\mu) x$ et $[\lambda + \mu] x = \chi(\lambda + \mu) x$, d'où on déduit $\chi(\lambda + \mu) = \chi(\lambda) + \chi(\mu)$. Ainsi χ est fondamental. □

On pose $M_i = M_{\chi_i}$ pour des indices i considérés dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, obtenant la décomposition $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_d$. Le lemme suivant précise l'action des opérateurs F et V agissant sur M :

Lemme 1.2.3. *Avec les notations précédentes, $F(M_i) \subset M_{i+1}$ et $V(M_i) \subset M_{i-1}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Soit $x \in M_i$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_q$, on calcule :

$$[\lambda](F(x)) = F([\lambda](x)) = F(\chi_i(\lambda)(x)) = \chi_i(\lambda)^p F(x) = \chi_{i+1}(\lambda) F(x)$$

et ceci suffit à prouver que $x \in M_{i+1}$. La preuve est analogue pour V. □

Posons $M_i^{(p)} = W_{(\sigma)} \otimes M_{i-1}$. Le lemme précédent assure que F induit un opérateur linéaire $F_i : M_i^{(p)} \to M_i$ et V un opérateur linéaire $V_i : M_i \to M_i^{(p)}$. Définissons $M_{i,\mathcal{O}_K}$ comme la limite inductive du diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{m} \otimes_W M_i \arrow[r, "V_i^M"] \arrow[d, "\phi_0^{M_i}"] & p^{-1}\mathfrak{m} \otimes_W M_i^{(p)} \\ \mathcal{O}_K \otimes_W M_i & \mathcal{O}_K \otimes_W M_i^{(p)} \arrow[l, "F_i^M"] \arrow[u, "\phi_1^{M_i}"'] \end{tikzcd}$$

où $\phi_0^{M_i}$ et $\phi_1^{M_i}$ sont déduites respectivement de l'inclusion de $\mathfrak{m}$ dans $\mathcal{O}_K$ et de celle de $\mathcal{O}_K$ dans $p^{-1}\mathfrak{m}$ et où $V_i^M = \frac{1}{p} \otimes V_i$ et $F_i^M = \mathrm{id} \otimes F_i$. Il est alors facile de vérifier que :

$$M_{\mathcal{O}_K} = M_{1,\mathcal{O}_K} \oplus M_{2,\mathcal{O}_K} \oplus \ldots \oplus M_{d,\mathcal{O}_K}.$$

On considère en outre les applications $F_{i,M} : p^{-1}\mathfrak{m} \otimes_W M_i^{(p)} \to M_{1,\mathcal{O}_K}$ et $V_{i,M} : M_{1,\mathcal{O}_K} \to \mathcal{O}_K \otimes_W M_i^{(p)}$, restrictions des opérateurs F_M et V_M.

Comme le sous-$\mathcal{O}_K$-module $L \subset M_{\mathcal{O}_K}$ est stable par chacun des λ, il se décompose de façon unique sous la forme :

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_d$$

où L_i est un sous-$\mathcal{O}_K$-module de $M_{i,\mathcal{O}_K}$. En outre, les conditions dans la définition d'un module de Honda se décomposent et donnent :

1. $L_i/\mathfrak{m}L_i \to \operatorname{coker} F_{i,M}$ est un isomorphisme
2. $V_{i,M|L_i}$ est injective

Lemme 1.2.4. *Avec les notations précédentes, on a* $\dim_k M_i = 1$ *pour tout* i.

Démonstration. Supposons qu'il existe un indice i tel que $M_i^{(p)} = 0$. Alors $M_{i,\mathcal{O}_K}$ s'identifie à $\mathcal{O}_K/\mathfrak{m} \otimes_W M_i$ et puis à M_i sur lequel π agit par 0. Les applications $V_{i,M}$ et $F_{i,M}$ sont toutes les deux nulles. Ainsi pour que $V_{i,M|L_i}$ soit injective, il faut $L_i = 0$. Mais alors $L_i/\mathfrak{m}L_i = 0$ n'est pas isomorphe à $\operatorname{coker} F_{i,M} = M_i$.

On en déduit que pour tout i, $\dim_k M_i^{(p)} \geqslant 1$ et donc pour tout i, $\dim_k M_i \geqslant 1$. Mais la somme de ces dimensions doit faire q. Il n'y a qu'une solution : c'est $\dim_k M_i = 1$ pour tout i. □

Lemme 1.2.5. *Il existe une k-base $(e_1, e_2, \ldots, e_d)$ de M telle que $e_i \in M_i$ et pour tout i, une des trois alternatives suivantes se produit :*

1. $F_i(e_i^{(p)}) = -e_i$ *et* $V_i(e_i) = 0$
2. $F_i(e_i^{(p)}) = 0$ *et* $V_i(e_i) = e_i^{(p)}$
3. $F_i(e_i^{(p)}) = 0$ *et* $V_i(e_i) = 0$

où par définition $e_i^{(p)} = 1 \otimes e_{i-1} \in M_i^{(p)}$.

Démonstration. Considérons pour tout i un vecteur non nul $e_i \in M_i$. D'après ce qui a été vu précédemment, la famille $(e_1, \dots, e_d)$ forme une base de M. Posons $e_i^{(p)} = 1 \otimes e_{i-1}$. Il existe des éléments de k, α_i et β_i tels que $F_i(e_i^{(p)}) = \alpha_i e_i$ et $V_i(e_i) = \beta_i e_i^{(p)}$. En outre, de $F_i V_i = 0$ et $V_i F_i = 0$ on déduit $\alpha_i \beta_i = 0$.

Maintenant, comme k est algébriquement clos, il est facile d'ajuster les e_i et ainsi de supposer que les constantes α_i et β_i qui sont non nulles sont en fait égales à 1 ou à -1. Cela conclut la preuve. □

Remarque. Le signe dans le premier cas ne sert qu'à rendre plus homogènes les calculs par la suite.

1.2.2 Structure de L

Soit $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Notons e_i et $e_i^{(p)}$ les éléments fournis par le lemme 1.2.5. Rappelons que $M_{i,\mathcal{O}_K}$ est défini comme la limite inductive du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{m} \otimes_W M_i \arrow[r, "V_i^M"] \arrow[d, "\phi_0^{M_i}"] & p^{-1}\mathfrak{m} \otimes_W M_i^{(p)} \\
\mathcal{O}_K \otimes_W M_i & \mathcal{O}_K \otimes_W M_i^{(p)} \arrow[l, "F_i^M"'] \arrow[u, "\phi_1^{M_i}"']
\end{tikzcd}$$

ou si l'on préfère :

$$M_{i,\mathcal{O}_K} = \frac{(\mathcal{O}_K \otimes_W M_i) \oplus (p^{-1}\mathfrak{m} \otimes_W M_i^{(p)})}{\{(\phi_0^{M_i}(u) - F^{M_i}(v), \phi_1^{M_i}(v) - V^{M_i}(u)) \,|\, u \in \mathfrak{m} \otimes_W M_i,\, v \in \mathcal{O}_K \otimes_W M_i^{(p)}\}}.$$

Il est possible de décrire explicitement tous les $\mathcal{O}_K$-modules précédents en en donnant des k-bases simples. Précisément on a :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m} \otimes_W M_i &= \left\langle \pi \otimes e_i, \pi^2 \otimes e_i, \dots, \pi^e \otimes e_i \right\rangle \\
\mathcal{O}_K \otimes_W M_i &= \left\langle 1 \otimes e_i, \pi \otimes e_i, \dots, \pi^{e-1} \otimes e_i \right\rangle \\
p^{-1}\mathfrak{m} \otimes_W M_i^{(p)} &= \left\langle \frac{1}{p}\pi \otimes e_i^{(p)}, \frac{1}{p}\pi^2 \otimes e_i^{(p)}, \dots, \frac{1}{p}\pi^e \otimes e_i^{(p)} \right\rangle \\
\mathcal{O}_K \otimes_W M_i^{(p)} &= \left\langle 1 \otimes e_i^{(p)}, \pi \otimes e_i^{(p)}, \dots, \pi^{e-1} \otimes e_i^{(p)} \right\rangle
\end{aligned}$$

et il est également possible de décrire les applications $\phi_0^{M_i}$ et $\phi_1^{M_i}$: d'une part $\phi_0^{M_i}(\pi^j \otimes e_i) = \pi^j \otimes e_i$ si $1 \leqslant j \leqslant e-1$ et $\phi_0^{M_i}(\pi^e \otimes e_i) = 0$, et d'autre part $\phi_1^{M_i}(1 \otimes e_i^{(p)}) = \frac{1}{p}\pi^e \otimes e_i^{(p)}$ et $\phi_0^{M_i}(\pi^j \otimes e_i^{(p)}) = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant e-1$.

On traite désormais séparément chacun des cas mentionnés dans le lemme 1.2.5.

Premier cas : $F_i(e_i^{(p)}) = -e_i$ **et** $V_i\,(e_i) = 0$ En explicitant complètement les flèches F_i^M et V_i^M et en calculant le quotient, on s'aperçoit que $M_{i,\mathcal{O}_K}$ peut être décrit par le tableau suivant :

$\times\pi$

$\frac{1}{p}\pi \otimes e_i^{(p)}$
$\frac{1}{p}\pi^2 \otimes e_i^{(p)}$
$\vdots$
$\frac{1}{p}\pi^{e-1} \otimes e_i^{(p)}$
$\frac{1}{p}\pi^e \otimes e_i^{(p)} = -1 \otimes e_i$

où chaque ligne du tableau représente un vecteur d'une k-base de $M_{i,\mathcal{O}_K}$ et où la multiplication par π (qui donne la structure de $\mathcal{O}_K$-module) envoie un vecteur sur le vecteur écrit immédiatement en dessous (s'il n'y a aucun vecteur en dessous, le résultat est 0).

Cette écriture est agréable car, par exemple d'après le théorème de structure des modules sur les anneaux principaux, tout sous-$\mathcal{O}_K$-module de $M_{i,\mathcal{O}_K}$ admet une k-base formée par les n dernières lignes du tableau précédent (n variant d'un sous-module à un autre). On pourra ainsi représenter les sous-$\mathcal{O}_K$-modules de $M_{i,\mathcal{O}_K}$ en grisant certaines cases du tableau.

Par exemple, le noyau de $V_{i,M}$ se représente comme suit :

$\times\pi$

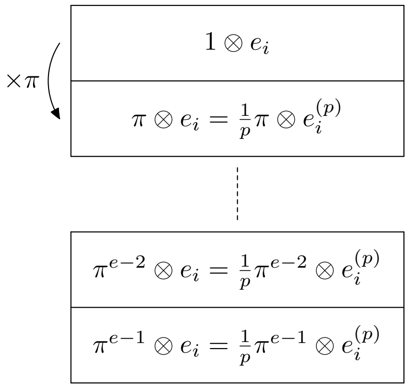
$\frac{1}{p}\pi \otimes e_i^{(p)}$
$\frac{1}{p}\pi^2 \otimes e_i^{(p)}$
$\vdots$
$\frac{1}{p}\pi^{e-1} \otimes e_i^{(p)}$
$\frac{1}{p}\pi^e \otimes e_i^{(p)} = -1 \otimes e_i$

puisque $V_{i,M}(\frac{1}{p}\pi^j \otimes e_i^{(p)}) = \pi^j \otimes e_i^{(p)}$ si $1 \leqslant j \leqslant e-1$ et $V_{i,M}(\frac{1}{p}\pi^e \otimes e_i^{(p)}) = 0$ (les cases grisées correspondent aux vecteurs formant une base de $\ker V_{i,M}$). L'hypothèse $V_{i,M|L_i}$ injective contraint à ce que L_i n'intersecte pas $\ker V_{i,M}$, et la seule possibilité pour cela est d'avoir $L_i = 0$. L'application $F_{i,M}$ est l'« inclusion » de $\frac{1}{p}\mathfrak{m} \otimes_W M_i^{(p)}$ dans $M_{i,\mathcal{O}_K}$. On voit sur la description précédente qu'elle est surjective. Ainsi $\operatorname{coker} F_{i,M} = 0$ et L_i convient bien.

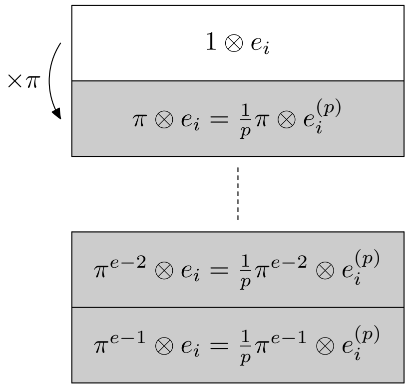
On vient donc de prouver le lemme :

Lemme 1.2.6. *Si* $F_i(e_i^{(p)}) = e_i$ *et* $V_i\,(e_i) = 0$*, on a* $L_i = 0$*.*

Deuxième cas : $F_i(e_i^{(p)}) = 0$ et $V_i\,(e_i) = e_i^{(p)}$ En présentant les résultats comme précédemment, on obtient les descriptions suivantes pour les inclusions de $\ker V_{i,M}$ et de $\operatorname{im} F_{i,M}$ dans $M_{i,\mathcal{O}_K}$:



Ker $V_{i,M}$

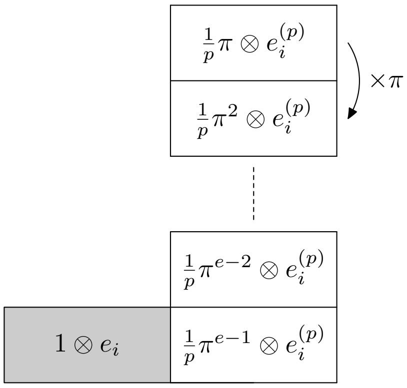


Im $F_{i,M}$

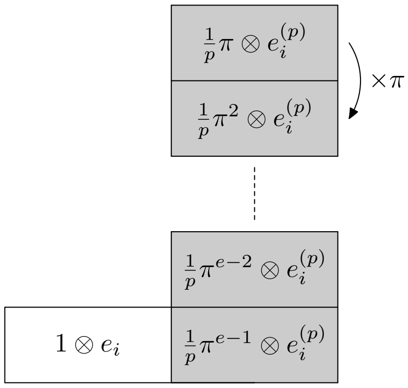
Visuellement, les conditions disent que L_i ne doit contenir aucune case grisée de gauche et une et une seule case blanche de droite (et que si L_i contient une case, alors elle contient toutes les cases situées en dessous). La seule solution ici est $L_i = M_{i,\mathcal{O}_K}$. On a donc prouvé :

Lemme 1.2.7. *Si $F_i(e_i^{(p)}) = 0$ et $V_i\,(e_i) = e_i^{(p)}$, on a $L_i = M_{i,\mathcal{O}_K}$.*

Troisième cas : $F_i(e_i^{(p)}) = 0$ et $V_i\,(e_i) = 0$ Dans ce dernier cas, la représentation est un peu plus complexe. On obtient :



Ker $V_{i,M}$



Im $F_{i,M}$

Ici, $M_{i,\mathcal{O}_K}$ n'est pas un $\mathcal{O}_K/p$-module libre et donc on ne peut plus appliquer le théorème de structure. Cependant, on sait que $L_i/\pi L_i$ doit être isomorphe à $\operatorname{coker} F_{i,M}$ et par suite, en vertu de la description précédente, L_i doit contenir un vecteur de la forme $1 \otimes e_i + x$ où $x \in \left\langle \frac{1}{p}\pi \otimes e_i^{(p)}, \dots, \frac{1}{p}\pi^{e-1} \otimes e_i^{(p)} \right\rangle$. D'autre part, à cause de $V_{i,M}$, le vecteur $1 \otimes e_i$ ne peut appartenir à L_i et donc x est forcément non nul. On déduit de cela qu'il existe $\lambda \in k^\star$ et $1 \leqslant n_i \leqslant e-1$ tel que $1 \otimes e_i + \lambda \frac{1}{p}\pi^{n_i} \otimes e_i^{(p)} \in L_i$ et puis que :

$$L_i \subset \left\langle 1 \otimes e_i + \lambda \frac{1}{p}\pi^{n_i} \otimes e_i^{(p)}, \frac{1}{p}\pi^{n_i+1} \otimes e_i^{(p)}, \ldots, \frac{1}{p}\pi^{e-1} \otimes e_i^{(p)} \right\rangle.$$

Il est ensuite facile de vérifier que si l'inclusion était stricte, on aurait $1 \otimes e_i \in L_i$, ce qui est exclu. On a finalement le lemme suivant :

Lemme 1.2.8. *Si $F_i(e_i^{(p)}) = 0$ et $V_i(e_i) = 0$, alors quitte à modifier les e_i, il existe un entier $n_i \in \{1, \ldots, e-1\}$ tel que L_i soit le sous-$\mathcal{O}_K$-module de $M_{\mathcal{O}_K}$ engendré par $1 \otimes e_i + \frac{1}{p}\pi^j \otimes e_i^{(p)}$, soit :*

$$L_i = \left\langle 1 \otimes e_i + \frac{1}{p}\pi^{n_i} \otimes e_i^{(p)}, \frac{1}{p}\pi^{n_i+1} \otimes e_i^{(p)}, \ldots, \frac{1}{p}\pi^{e-1} \otimes e_i^{(p)} \right\rangle.$$

Démonstration. Il ne reste plus qu'à voir que quitte à modifier les e_i, on peut supposer $\lambda = 1$. En effet il suffit de remplacer e_i par λe_i, puis propager successivement à e_{i+1}, e_{i+2} et ainsi de suite... On laisse le lecteur écrire les détails de la preuve. □

Remarque. On retrouve bien la classification faite par Raynaud dans [Ray74].

2 La représentation galoisienne associée

On conserve les notations introduites jusqu'alors. En particulier, on continue de fixer une base e_i qui satisfait toutes les propriétés que l'on a données précédemment.

Le but de cette section est de calculer la représentation galoisienne $\mathcal{G}(\bar{K})$ si $\mathcal{G}$ est le schéma en groupes associé au système de Honda (M, L). Pour cela, on rappelle (voir fin du paragraphe 1.1) que si L est une extension finie de K, on a :

$$\mathcal{G}(\mathcal{O}_L) = \mathrm{Hom}\left((M, L), \left(CW\left(\mathcal{O}_L/\pi\mathcal{O}_L\right), \ker w'_{\mathcal{O}_L}\right)\right)$$

Pour calculer $\mathcal{G}(\bar{K})$, il suffira de prendre la limite inductive de toutes les représentations précédentes. On fixe donc une extension finie L de K suffisamment grande. La valuation v se prolonge à L de façon unique. On note encore v la valuation sur L et on rappelle qu'elle est normalisée par $v(\pi) = 1$.

Soit ϕ un morphisme de (M, L) dans $\left(CW\left(\mathcal{O}_L/\pi\mathcal{O}_L\right), \ker w'_{\mathcal{O}_L}\right)$. Notons :

$$\phi(e_i) = (\ldots, a_{i,-n}, \ldots, a_{i,0})$$

où $a_{i,-n} \in \mathcal{O}_L/\pi\mathcal{O}_L$. Posons également $a_i = a_{i,0}$. Nous nous proposons dans un premier temps de déterminer des relations que doivent vérifier ces a_i.

2.1 Calcul d'un Hom entre systèmes de Honda

2.1.1 Cas des groupes de type multiplicatif

On rappelle que les groupes de type multiplicatif sont ceux pour lesquels le Verschiebung $V : M \to M$ est bijectif. Cela implique que l'on est toujours dans le deuxième cas de la description précédente, et donc en particulier que $F(e_i) = 0$, $V(e_i) = e_{i-1}$ et $L_i = M_{i,\mathcal{O}_K}$ pour tout i considéré modulo d.

La propriété $V(e_i) = e_{i-1}$ et le fait que ϕ commute à V impliquent directement $a_{i,-n} = a_{i-n}$. De plus, de $F(e_i) = 0$ pour tout i, on déduit que $a_i^p \equiv 0 \pmod{\pi}$ ou encore $v(a_i) \geqslant \frac{1}{p}$ pour tout i. Finalement, on doit avoir $\phi(L_i) \subset \ker w'_A$, soit :

$$a_i + \frac{1}{p} a_{i-1}^p + \frac{1}{p^2} a_{i-2}^{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^n} a_{i-n}^{p^n} + \ldots \equiv 0 \pmod{\pi}$$

pour tout indice i. Si $n \geqslant 2$, on a :

$$v\left(\frac{1}{p^n} a_{i-n}^{p^n}\right) \geqslant -ne + p^n \geqslant -n(p-1) + p^n \geqslant 1$$

et donc la relation devient simplement :

$$\frac{a_{i-1}^p}{p} \equiv -a_i \pmod{\pi}.$$

2.1.2 Cas des autres groupes

Soit i un indice tel que $V(e_i) = 0$ et soit h le plus petit entier (éventuellement nul) tel que $V(e_{i+h+1}) = 0$. Dans ces conditions, on est nécessairement dans le deuxième cas pour tout i' variant entre $i+1$ et $i+h$ (attention, si $h = 0$, cela ne recouvre aucun indice !) et dans le premier ou le troisième pour l'indice $i + h + 1$.

De même que précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned}
\phi(e_i) &= (\ldots, 0, \ldots, 0, a_i) \\
\phi(e_{i+1}) &= (\ldots, 0, \ldots, 0, a_i, a_{i+1}) \\
&\vdots \\
\phi(e_{i+h}) &= (\ldots, 0, \ldots, 0, a_i, \ldots, a_{i+h}) \\
\phi(e_{i+h+1}) &= (\ldots, 0, \ldots, 0, a_{i+h+1})
\end{aligned}$$

et les équations :

$$\frac{a_{i'-1}^p}{p} \equiv -a_{i'} \pmod{\pi}$$

pour tout i' compris entre $i+1$ et $i+h$ (attention encore, si $h = 0$, cela ne donne aucune équation !).

Examinons à présent ce qui se passe pour l'indice $i+h+1$. Supposons dans un premier temps que l'on soit dans le premier cas. On a alors $F(e_{i+h}) = -e_{i+h+1}$ et puis la relation :

$$a_{i+h}^p \equiv -a_{i+h+1} \pmod{\pi}.$$

Supposons à présent que l'on soit dans le troisième cas. On a $F(e_{i+h}) = 0$ et le sous-module L_{i+h+1} est donné par le lemme 1.2.8. En particulier, $a_i^p \equiv \ldots \equiv a_{i+h}^p \equiv 0 \pmod{\pi}$ et on doit avoir (avec des notations évidentes) :

$$w'_{\mathcal{O}_L}\left[1 \otimes (\ldots, 0, \ldots, 0, a_{i+h+1}) + \frac{1}{p}\pi^{n_{i+k+1}} \otimes (\ldots, 0, \ldots, 0, a_i, \ldots, a_{i+h})^{(p)}\right] = 0$$

Or la définition de $CW_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_L/\pi\mathcal{O}_L)$ prouve que dans ce module, on a l'égalité :

$$\frac{1}{p}\pi^{n_{i+k+1}} \otimes (\ldots, 0, \ldots, 0, a_i, \ldots, a_{i+h})^{(p)} = \pi^{n_{i+k+1}} \otimes (\ldots, 0, \ldots, 0, a_i, \ldots, a_{i+h}, 0)\,.$$

Finalement en remarquant une nouvelle fois que pour $i \leqslant i' \leqslant i+h$ et $n \geqslant 2$, on a $\frac{1}{p^n}a_{i'}^{p^n} \equiv 0 \pmod{\pi}$, on obtient la relation :

$$\pi^{n_{i+h+1}}\frac{a_{i+h}^p}{p} \equiv -a_{i+h+1} \pmod{\pi}.$$

2.1.3 Récapitulatif

On se rend compte que l'on peut regrouper tous les résultats précédents sous une forme concise. Pour cela, on définit $n_i = e$ lorsque l'indice i est dans le premier cas, et $n_i = 0$ lorsque l'indice i est dans le deuxième cas, et alors :

Lemme 2.1.1. *Avec les notations précédentes, dans tous les cas, les a_i sont soumis aux relations :*

$$\frac{\pi^{n_i}a_{i-1}^p}{p} \equiv -a_i \pmod{\pi}.$$

2.2 Expression de la représentation galoisienne

On souhaite désormais résoudre le système que l'on vient d'obtenir. Comme k est supposé algébriquement clos, on peut choisir pour π une racine e-ième de p. Jusqu'à la fin de ce chapitre, on fait ce choix.

La connaissance des a_i permet de reconstruire intégralement ϕ. Autrement dit, à chaque solution du système qui nous intéresse, il correspond un et un seul morphisme de (M, L) dans $\left(CW(\mathcal{O}_L/\pi\mathcal{O}_L), \ker w'_{\mathcal{O}_L}\right)$. D'autre part, l'ensemble de ces morphismes est de cardinal inférieur ou égal à q (puisque $\mathcal{G}$ est supposé de rang q). Ainsi pour résoudre le système, il nous suffit de trouver q solutions.

Supposons que L soit suffisamment grand pour contenir une racine $\left(p^d - 1\right)$-ième de l'uniformisante π. Notons $\eta \in \mathcal{O}_L$ une de ces racines. Posons $m_i = e - n_i$ et :

$$s_i = m_i p^{d-1} + m_{i+1} p^{d-2} + \ldots + m_{i+h-2} p + m_{i+h-1}.$$

On remarque alors que si ε désigne une racine $\left(p^d - 1\right)$ de (-1) (qui existe dans $\mathcal{O}_K$ puisque k est supposé algébriquement clos), la famille définie par $\hat{a}_i = (-1)^i \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i}$ définit après réduction modulo π une solution du système. Ces solutions, lorsque ε varie, sont deux à deux distinctes car $s_i < p^d - 1$; elles sont donc au nombre de $q - 1$. Si on leur ajoute la solution $a_1 = \ldots = a_d = 0$, on obtient bien q solutions.

Lemme 2.2.1. *Soit V la réduction modulo π de l'ensemble $\hat{V} = \{x \in \mathcal{O}_{\bar{K}} \, / \, x^q = \pi^{s_i} x\}$. C'est une $\mathbb{F}_q$-représentation de G_K et elle est isomorphe en tant que telle à la représentation $\mathcal{G}(\bar{K})$.*

Démonstration. En gardant les notations précédentes, un isomorphisme est celui qui envoie $\phi \in \mathcal{G}(\bar{K})$ sur a_0. □

Définition 2.2.2. *Soit F la réduction modulo π de l'ensemble $\hat{F} = \{x \in \mathcal{O}_{\bar{K}} \, / \, x^q = \pi x\}$, c'est une $\mathbb{F}_q$-représentation de G_K. Soit V une $\mathbb{F}_q$-représentation de G_K isomorphe en tant que $\mathbb{F}_q$-représentation à $F^{\otimes_{\mathbb{F}_q} n}$ pour un certain entier n compris entre 0 et $q - 2$.*

Les chiffres de l'écriture de n en base p s'appellent les exposants de l'inertie modérée *de V.*

Remarque. En premier lieu, il est facile de voir que $F^{\otimes_{\mathbb{F}_q}(q-1)} \simeq F$, ce qui explique la condition $0 \leqslant n \leqslant q - 2$. D'autre part, une représentation V peut être à la fois isomorphe à $F^{\otimes_{\mathbb{F}_q} n}$ et $F^{\otimes_{\mathbb{F}_q} m}$. Mais dans ce cas, si n et m sont compris entre 0 et $q-2$, les chiffres de n et de m en base p sont les mêmes. (Pour une justification de la terminologie, et de nombreux compléments, on pourra se reporter au début de [Ser72]. Par exemple, il y est prouvé que toute $\mathbb{F}_p$-représentation simple du G_K (on suppose toujours k algébriquement clos) admet des exposants de l'inertie modérée.)

Corollaire 2.2.3. *Les exposants de l'inertie modérée de la représentation $\mathcal{G}(\bar{K})$ sont tous compris entre 0 et e.*

Démonstration. Le lemme 2.2.1 affirme exactement que ces exposants sont les entiers $m_i = e - n_i$. La conclusion découle directement de la remarque $0 \leqslant n_i \leqslant e$ pour tout i. □

2.3 Une conjecture de Serre

Le travail précédent peut s'appliquer pour prouver le théorème suivant :

Théorème 2.3.1. *Soit K un corps complet pour une valuation discrète et soit $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers. Soit $\mathcal{G}$ un schéma en groupes commutatifs fini, plat sur $\mathcal{O}_K$ et de p-torsion. Les exposants de l'inertie modérée sur un quotient de Jordan-Hölder de $\mathcal{G}(\bar{K})$ sont tous inférieurs ou égaux à l'indice de ramification absolue de K.*

Démonstration. Les résultats de [Ray74] assurent qu'un quotient de Jordan-Hölder de $\mathcal{G}(\bar{K})$ vu comme représentation du groupe d'inertie provient d'un schéma en $\mathbb{F}_q$-vectoriel de rang q sur le complété p-adique de l'extension maximale non ramifiée de K. Il ne reste alors plus qu'à appliquer le corollaire 2.2.3. $\square$

Le résultat précédent n'est pas nouveau. Il est connu depuis les travaux de Raynaud (voir [Ray74]), mais la démonstration que nous proposons ici est différente. Mentionnons par ailleurs que Breuil a établi une autre classification des schémas en groupes commutatifs finis, plats et de p^n-torsion qui a l'avantage de marcher pour tout e (voir [Bre00a]). Il est également possible de prouver le théorème précédent en utilisant cette classification.

Chapitre III

Étude des catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$

Résumé

Soit K un corps local de caractéristique mixte non absolument ramifié. La théorie de Fontaine-Laffaille (voir [FL82]) permet de décrire les $\mathbb{Z}_p$-représentations galoisiennes cristallines entières de torsion (p désigne la caractéristique du corps résiduel). Poursuivant les précédents travaux, Breuil a introduit de nouveaux modules et a obtenu une théorie entière et de torsion pour les représentations semi-stables (voir [Bre97a]).
Dans ce chapitre, nous reprenons les travaux de Breuil et les adaptons dans le cas où le corps local K peut être absolument ramifié. Nous aurons toutefois une contrainte sur l'indice de ramification absolu.

Sommaire

Dans toute la suite de ce chapitre, p désigne un nombre premier et k un corps parfait de caractéristique p. On note $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, $\mathbb{F}_p$ le sous-corps premier de k et si $q = p^h$ est une puissance de p, $\mathbb{F}_q$ l'ensemble des solutions dans $\bar{k}$ de l'équation $x^q = x$.

On désigne par W l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k. On rappelle que comme k est parfait, cet anneau est un anneau de valuation discrète complet de caractéristique nulle dont p est une uniformisante et dont le corps résiduel s'identifie canoniquement à k. On dispose en outre d'une application $\sigma : W \to W$ appelée Frobenius qui induit par passage au quotient le Frobenius classique sur k, c'est-à-dire l'élévation à la puissance p.

On appelle K_0 le corps des fractions de W, c'est un corps local de caractéristique mixte. On prend K une extension finie totalement ramifiée de K_0. On note e le degré de l'extension K/K_0, c'est l'indice de ramification absolue de K. On appelle $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K et on choisit π une uniformisante de cet anneau. On fixe $\bar{K}$ une clôture algébrique de K, on note $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ l'anneau des entiers de $\bar{K}$ et $G_K = \mathrm{Gal}\left(\bar{K}/K\right)$ le groupe de Galois absolu du corps K. On note I le groupe d'inertie (c'est un sous-groupe de G_K), I_s le groupe d'inertie sauvage et $I_t = I/I_s$ le groupe d'inertie modérée. Enfin, on appelle v la valuation sur $\bar{K}$ normalisée par $v(\pi) = 1$ (et donc $v(p) = e$).

Une $\mathbb{Z}_p$-représentation (resp. $\mathbb{F}_p$-représentation, resp. $\mathbb{F}_q$-représentation, resp. $\mathbb{Q}_p$-représentation) de G_K est une action linéaire et continue de G_K sur un $\mathbb{Z}_p$-module (resp. un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel, resp. un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel, resp. un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel). Afin d'étudier ces représentations, diverses catégories ont été introduites. Nous allons nous préoccuper dans ce chapitre des catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$ introduites par Breuil dans [Bre99a], et nous montrerons comment il résulte de notre étude le théorème III.*i* ci-dessous.

Théorème III.*i*. *Soit X_K un schéma propre et lisse sur K à réduction semi-stable sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$. On fixe r un entier. Les poids de l'inertie modérée sur la semi-simplifiée modulo p de $H^r_{ét}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)^\vee$ (où $X_{\bar{K}}$ est l'extension des scalaires de X_K à $\bar{K}$ et où « $\vee$ » signifie que l'on prend le dual) sont compris entre 0 et er.*

Ce théorème est à rapprocher de la conjecture formulée par Serre sur l'inertie modérée (voir paragraphe 1.13 de [Ser72]) qui prédit le même résultat pour la représentation $H^r_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\vee$.

Soit r un entier vérifiant $er < p-1$. Nous présentons dans la section 1, la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ et le foncteur $T_{\mathrm{st}}^{\star}$ qui associe à tout objet de cette catégorie une $\mathbb{Z}_p$-représentation de torsion de G_K. La section 2 est consacrée à l'étude de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$. En particulier, toujours dans le cas $er < p-1$, on démontre qu'elle est abélienne et artinienne.

Nous donnons ensuite dans la section 3 une description complète des objets simples de $\underline{\mathcal{M}}^r$, lorsque le corps résiduel k est supposé algébriquement clos. Plus précisément nous prouvons le théorème suivant :

Théorème III.*ii*. *Supposons k algébriquement clos et $er < p-1$. Soit $\mathcal{M}$ un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Alors, il existe une base $(e_1, \ldots, e_h)$ de $\mathcal{M}$ et une suite d'entiers (n_i) compris entre 0 et er, périodique de période* exactement *h, le tout tel que :*

$$\mathit{Fil}^r \mathcal{M} = u^{n_1} e_1 + \ldots + u^{n_h} e_h + \mathit{Fil}^p S \cdot \mathcal{M},$$

$\phi_r(u^{n_i} e_i) = e_{i+1}$ et $N(e_i) = 0$ pour tout i (considéré modulo h).

En outre, ces objets sont tous simples et deux à deux non isomorphes.

Par la suite, nous nous intéressons véritablement au foncteur $T_{\mathrm{st}}^{\star}$. On commence par déterminer son image sur les objets simples précédemment calculés. On obtient le théorème :

Théorème III.*iii*. *Supposons k algébriquement clos et $er < p-1$. Soit $\mathcal{M}$ un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$ comme dans le théorème III.*ii. *Alors la représentation galoisienne $T_{st}^{\star}(\mathcal{M})$ est isomorphe à :*

$$\theta_1^{m_1} \theta_2^{m_2} \ldots \theta_h^{m_h}$$

où m_i est défini par $n_i + m_i = er$ et où les θ_i sont les caractères fondamentaux de niveau h.

En particulier, pour tout objet $\mathcal{M}$ de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tué par p, les exposants qui décrivent l'action de l'inertie modérée sur la semi-simplifiée modulo p de $T_{st}^{\star}(\mathcal{M})$ sont compris entre 0 et er.

La conclusion des sections 4 et 5 est une réponse affirmative à une conjecture formulée à la fin de [Bre99a], énoncé que nous rappelons ici :

Théorème III.*iv*. *Supposons $er < p-1$, alors le foncteur $T_{st}^{\star}$ de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ dans la catégorie des représentations linéaires de G_K est exact, pleinement fidèle, d'image essentielle stable par sous-objets et quotients et indépendante du choix de l'uniformisante π.*

La section 6 étudie les conséquences de tout ce travail préliminaire. On commence par répondre à un cas particulier d'une conjecture formulée dans [Bre02] (conjecture 2.2.6) :

Théorème III.*v*. *Supposons $er < p-1$. Alors le foncteur $T_{st}^{\star}$ réalise une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des modules fortement divisibles*[1] *et la catégorie des réseaux stables par Galois dans les $\mathbb{Q}_p$-représentations semi-stables de G_K à poids de Hodge-Tate compris entre 0 et r.*

On donne ensuite une preuve du théorème III.*i*.

[1] Voir le paragraphe 6.1 pour une définition.

1 Présentation des objets

Les objets introduits dans cette partie ne sont pas nouveaux et décrits plus en détail dans les articles [Bre97a] et [Bre99a]. La première de ces références n'étudie que le cas $e = 1$, et donc ne présente les objets que dans ce cas particulier.

On fixe maintenant et jusqu'à la fin de ce chapitre un entier r positif ou nul vérifiant l'inégalité $er < p - 1$. Les définitions que nous allons donner ont un sens pour tout entier $r < p - 1$ mais certains théorèmes ne sont plus vérifiés lorsque $er \geqslant p - 1$.

1.1 La catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ et ses variantes

1.1.1 L'anneau S

On commence par définir un anneau que l'on va munir de structures supplémentaires. Bien que ces structures dépendent du corps K et de l'uniformisante π choisie, nous le notons simplement S par la suite.

Soit $W[u]$ l'anneau des polynômes en une indéterminée u à coefficients dans W. Soit $E(u)$ le polynôme minimal de l'élément π sur K_0, c'est un polynôme d'Eisenstein. On considère l'enveloppe aux puissances divisées de $W[u]$ par rapport à l'idéal principal engendré par $E(u)$ compatibles aux puissances divisées canoniques sur $pW[u]$. On rappelle que cela signifie que l'on ajoute formellement à l'anneau $W[u]$ les éléments $\frac{(E(u))^i}{i!}$. En tant qu'anneau, S est le complété p-adique de cette enveloppe aux puissances divisées. De façon plus terre à terre, S est la sous-W-algèbre de $K_0[\![u]\!]$ suivante :

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{(E(u))^i}{i!},\ w_i \in W[u],\ \lim_{i \to \infty} w_i = 0 \right\}$$

ou encore :

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{q(i)!},\ w_i \in W,\ \lim_{i \to \infty} w_i = 0 \right\}$$

où $q(i)$ désigne le quotient de la division euclidienne de i par e, e étant l'indice de ramification absolu de corps K, également le degré du polynôme $E(u)$.

On prolonge le Frobenius à l'anneau S en définissant l'application ϕ par :

$$\phi\left(\sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{q(i)!} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma(w_i) \frac{u^{pi}}{q(i)!}.$$

Il s'agit d'une application σ-semi-linéaire.

On munit en outre S de l'application W-linéaire N définie par :

$$N\left(\sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{q(i)!} \right) = -\sum_{i=1}^{\infty} i w_i \frac{u^i}{q(i)!}.$$

Il s'agit d'une dérivation au sens classique mais pas de la dérivation classique par rapport à u, le degré du polynôme n'étant pas abaissé.

On munit finalement S d'une filtration : pour tout entier positif ou nul n, on définit $\mathrm{Fil}^n S$ comme le complété p-adique de l'idéal engendré par les éléments $\frac{(E(u))^i}{i!}$ pour $i \geqslant n$. On a donc :

$$\mathrm{Fil}^n S = \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} w_i \frac{(E(u))^i}{i!}, \quad w_i \in W[u], \lim_{i\to\infty} w_i = 0 \right\}.$$

Il est évident que $\mathrm{Fil}^0 S = S$, que $\mathrm{Fil}^n S \subset \mathrm{Fil}^{n-1} S$ et que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Fil}^n S = 0$. On vérifie de plus certaines compatibilités avec les opérateurs définis précédemment : $N(\mathrm{Fil}^n S) \subset \mathrm{Fil}^{n-1} S$ et, pour $0 \leqslant n \leqslant p-1$, $\phi(\mathrm{Fil}^n S) \subset p^n S$. Ainsi, si $0 \leqslant n \leqslant p-1$, on pose $\phi_n = \frac{\phi}{p^n} : \mathrm{Fil}^n S \to S$. L'élément $\phi_1(E(u))$ est une unité de S, on le notera c par la suite.

1.1.2 Définition des catégories

On rappelle que r est un entier fixé vérifiant $er < p-1$. Un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ est la donnée :

1. d'un S-module $\mathcal{M}$ isomorphe à une somme directe (finie) de S/p^nS pour des entiers n convenables ;
2. d'un sous-module $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$ contenant $\mathrm{Fil}^r S \cdot \mathcal{M}$;
3. d'une flèche ϕ-semi-linéaire $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ vérifiant la condition :
$$\phi_r(sx) = \frac{1}{c^r}\phi_r(s)\,\phi_r\left((E(u))^r x\right)$$
pour tout élément $s \in \mathrm{Fil}^r S$ et tout élément $x \in \mathcal{M}$ et telle que $\mathrm{im}\,\phi_r$ engendre $\mathcal{M}$ en tant que S-module ;
4. d'une application W-linéaire $N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ telle que :
   - pour tout $s \in S$ et tout $x \in \mathcal{M}$, $N(sx) = N(s)x + sN(x)$
   - $E(u)N(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$
   - le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "E(u)N"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "cN"] \\ \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

Une flèche entre deux objets $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ de cette catégorie est un morphisme S-linéaire de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$ respectant la filtration et commutant aux applications ϕ_r et N.

On peut définir également la catégorie $\underline{\mathcal{M}}_0^r$. Il s'agit de la même chose sauf que l'on ne fait pas cas de l'application N, les objets sont donc la donnée des trois premiers points exposés précédemment.

1.2 Le foncteur vers les représentations galoisiennes

1.2.1 L'anneau A_{cris}

Soit R l'anneau limite projective du diagramme :

$$\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \leftarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \leftarrow \ldots \leftarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \leftarrow \ldots \leftarrow$$

les applications de transition étant à chaque fois l'élévation à la puissance p. Un élément de R est une suite $\left(u^{(k)}\right)_{k\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ telle que pour tout entier k, $\left(u^{(k+1)}\right)^p = u^{(k)}$.

On considère $W(R)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans R et l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \hat{\theta}: & W(R) & \to & \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \\ & (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) & \mapsto & \sum_{n\geqslant 0} p^n \hat{x}_n^{(n)} \end{array}$$

où $\mathbb{C}_p$ désigne le complété p-adique de $\bar{K}$ et où $\hat{x}_n^{(n)}$ est la limite quand m tend vers l'infini d'une suite $(\hat{a}_n^{(n+m)})^{p^m}$, $\hat{a}_i^{(j)} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ désignant un relevé quelconque de $a_i^{(j)}$.

On montre[2] que le noyau de $\hat{\theta}$ est l'idéal principal de $W(R)$ engendré par l'élément $\xi = [\underline{p}] - p$, où $[\underline{p}]$ est le représentant de Teichmüller de $\underline{p} \in R$ défini par $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_n, \ldots)$, les p_n formant un système compatible de racines p^n-ièmes de p. L'anneau A_{cris} s'obtient en introduisant des puissances divisées en ξ, et en complétant p-adiquement :

$$A_{\text{cris}} = \left\{ \sum_{i\geqslant 0} a_i \frac{\xi^i}{i!}\,,\; a_i \in W(R)\,,\; a_i \longrightarrow 0 \right\}.$$

L'anneau A_{cris} hérite d'un Frobenius ϕ et d'une action du groupe de Galois G_K définis *via* leur action sur $W(R)$. On munit également A_{cris} d'une filtration décroissante définie de la façon suivante :

$$\mathrm{Fil}^n A_{\text{cris}} = \left\{ \sum_{i\geqslant n} a_i \frac{\xi^i}{i!}\,,\; a_i \in W(R)\,,\; a_i \longrightarrow 0 \right\} \subset A_{\text{cris}}.$$

1.2.2 L'anneau $\hat{A}_{\text{st}}$

L'anneau $\hat{A}_{\text{st}}$ s'obtient en complétant p-adiquement la PD-algèbre polynomiale $A_{\text{cris}}\langle X\rangle$:

$$\hat{A}_{\text{st}} = \left\{ \sum_{i\geqslant 0} a_i \frac{X^i}{i!}\,,\; a_i \in A_{\text{cris}},\; a_i \longrightarrow 0 \right\}.$$

On étend le Frobenius et l'action de Galois à $\hat{A}_{\text{st}}$ de la façon suivante. On pose $\phi(X) = (1+X)^p - 1$. Soit $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots)$ un système compatible de racines p^n-ièmes de l'uniformisante[3] π et soit $g \in G_K$. Pour tout entier n, il existe $\varepsilon_n(g)$ une racine p^n-ième de l'unité

[2]Pour une preuve simple, voir le paragraphe II.2.2 de [Ber]

[3]Ainsi l'anneau $\hat{A}_{\text{st}}$ dépend *a priori* du choix de ce système compatible de racines. Cependant, on prouve que ce n'est pas le cas.

telle que $g(\pi_n) = \varepsilon_n(g)\,\pi_n$. La suite $[\varepsilon_n(g)]$ définit un élément $[\underline{\varepsilon}(g)] \in A_{\text{cris}}$. L'élément g agit sur X par $g(X) = [\underline{\varepsilon}(g)]\,X + [\underline{\varepsilon}(g)] - 1$. La filtration sur $\hat{A}_{\text{st}}$ est obtenue en faisant le produit de convolution de la filtration de A_{cris} par la filtration naturelle donnée par les puissances divisées en X :

$$\text{Fil}^{\,n}\hat{A}_{\text{st}} = \left\{ \sum_{i \geqslant 0} a_i \frac{X^i}{i!}\ ,\ a_i \in \text{Fil}^{\,n-i}A_{\text{cris}},\ a_i \longrightarrow 0 \right\} \subset \hat{A}_{\text{st}}$$

avec la convention $\text{Fil}^{\,k}A_{\text{cris}} = A_{\text{cris}}$ si $k < 0$. Pour $n \leqslant p-1$, on a $\phi(\text{Fil}^{\,n}\hat{A}_{\text{st}}) \subset p^n\hat{A}_{\text{st}}$ et on pose $\phi_n = \frac{\phi}{p^n}{}_{|\text{Fil}^{\,n}\hat{A}_{\text{st}}}$.

On munit finalement $\hat{A}_{\text{st}}$ d'un opérateur de monodromie N défini comme l'unique dérivation continue A_{cris}-linéaire telle que $N(X) = 1 + X$.

L'anneau $\hat{A}_{\text{st}}$ n'est pas sans lien avec S : dans [Bre97b], Breuil prouve que le morphisme de W-algèbres $S \rightarrow \hat{A}_{\text{st}}$, $u \mapsto \frac{[\underline{\pi}]}{1+X}$ ($[\underline{\pi}]$ désigne le représentant de Teichmüller de $\underline{\pi} = (\bar{\pi}_1, \ldots, \bar{\pi}_n, \ldots) \in R$, $\bar{\pi}_i$ étant la réduction modulo p de π_i) identifie S avec l'ensemble $\hat{A}_{\text{st}}^{G_K}$ des invariants de $\hat{A}_{\text{st}}$ sous l'action du groupe de Galois. En outre, ce morphisme fait de $\hat{A}_{\text{st}}$ un S-module. Toutefois, $\hat{A}_{\text{st}}$ ne vérifie pas les propriétés nécessaires pour être un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$.

1.2.3 Le foncteur $T^\star_{\text{st}}$

On pose $\hat{A}_{\text{st},\infty} = \hat{A}_{\text{st}} \otimes_W K_0/W$. L'action du groupe de Galois, le Frobenius, la filtration et la monodromie s'étendent à $\hat{A}_{\text{st},\infty}$ car $\text{Fil}^{\,n}\hat{A}_{\text{st}} \cap p^r\hat{A}_{\text{st}} = p^r\text{Fil}^{\,n}\hat{A}_{\text{st}}$. En outre, pour la même raison, si $r < p-1$, l'objet $\hat{A}_{\text{st},\infty}$ hérite de ϕ_r. Ce n'est toutefois pas un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$: il n'est pas de longueur finie en tant que S-module, et l'image de ϕ_r n'engendre pas tout l'espace. Il est quand même légitime de considérer l'ensemble des morphismes d'un objet $\mathcal{M}$ de $\underline{\mathcal{M}}^r$ dans $\hat{A}_{\text{st},\infty}$ et on définit :

$$T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st},\infty})$$

le Hom précédent signifiant que l'on prend les morphismes compatibles au $\text{Fil}^{\,r}$, au Frobenius et à l'opération de monodromie. Cet ensemble est naturellement une $\mathbb{Z}_p$-représentation galoisienne de torsion, tuée par la puissance de p qui annule $\mathcal{M}$.

Notre but est principalement d'étudier le foncteur $T^\star_{\text{st}}$, et pour ce faire, nous allons quasiment toujours procéder par dévissage en regardant dans un premier temps les objets tués par p, que nous étudions dans le paragraphe suivant.

1.3 Les objets tués par p

1.3.1 La catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$

L'anneau important ici est $k[u]/u^{ep}$ qui est relié à S/pS grâce à l'application de projection $\sigma : S/pS \rightarrow k[u]/u^{ep}$ définie par $\sigma(u) = u$ et $\sigma(\frac{u^{ei}}{i!}) = 0$ pour $i \geqslant p$. Sur cet anneau, on définit une filtration par $\mathrm{Fil}^n k[u]/u^{ep} = u^{en}k[u]/u^{ep}$, un Frobenius ϕ par $\phi\left(\sum w_i u^i\right) = \sum w_i^p u^{ip}$ (pour $w_i \in k$) et un opérateur de monodromie N comme l'unique dérivation k-linéaire vérifiant $N(u) = -u$

On définit ensuite la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$: les objets sont les données des quatre points qui suivent :

1. un $k[u]/u^{ep}$-module $\mathcal{M}$ libre de rang fini ;
2. un sous-module $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$ contenant $\mathrm{Fil}^r k[u]/u^{ep} \cdot \mathcal{M} = u^{er}\mathcal{M}$;
3. une flèche ϕ-semi-linéaire $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ telle que l'image de ϕ_r engendre $\mathcal{M}$ en tant que $k[u]/u^{ep}$-module ;
4. une application k-linéaire $N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ telle que :
   - pour tout $\lambda \in k[u]/u^{ep}$ et tout $x \in \mathcal{M}$, $N(\lambda x) = N(\lambda)x + \lambda N(x)$
   - $u^e N(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$
   - le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "u^e N"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "c_{(e),\pi}N"] \\
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

   où $c_{(e),\pi}$ est la réduction de c dans $k[u]/u^{ep}$.

On introduit également la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e),0}$ définie comme $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ sauf que l'on oublie la donnée de l'opérateur N.

On peut comparer les objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tués par p et ceux de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$. Si $\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tué par p, c'est naturellement un S/pS-module (même libre de rang fini), et on peut donc considérer le produit tensoriel $T(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes_{(\sigma)} k[u]/u^{ep}$ qui hérite d'une filtration, d'un Frobenius et d'une monodromie et dont on vérifie qu'il est dans $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$. Cette construction définit un foncteur T allant de la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathcal{M}}^r$ formée des objets tués par p dans la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$.

Proposition 1.3.1. *Le foncteur T défini précédemment est une équivalence de catégories.*

Démonstration. Elle est en tout point similaire à celle donnée pour la proposition 2.2.2.1 de [Bre97a]. $\square$

On obtient ainsi une description plus simple des objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tués par p, les objets de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ pouvant être vus comme des k-espaces vectoriels de dimension finie.

1.3.2 Description du quotient $\hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}}$

Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tel que $p\mathcal{M} = 0$. Alors $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\mathrm{st}}/p)$. Nous allons dans un premier temps décrire explicitement le quotient $\hat{A}_{\mathrm{st}}/p$.

On rappelle que l'on a défini deux éléments de R qui sont $\underline{p}$ et $\underline{\pi}$. On a le résultat suivant (voir paragraphe 3.7 de [Fon83]) :

Lemme 1.3.2. *Avec les notations précédentes, A_{cris}/pA_{cris} s'identifie à l'enveloppe aux puissances divisées R^{DP} de R par rapport à l'idéal principal engendré par $\underline{p}$. En outre, on peut également identifier cet anneau à $R[X_i] / \left(\underline{p}^p, X_i^p\right)_{i\geqslant 1}$, l'isomorphisme envoyant X_i sur la p^i-ième puissance divisée $\frac{[\underline{p}]^{p^i}}{(p^i)!} \in A_{cris}/pA_{cris}$.*

La première projection $R \to \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ induit un isomorphisme $R/\underline{p}^p R \simeq \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. On déduit du lemme précédent que $A_{\mathrm{cris}}/pA_{\mathrm{cris}}$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\,[X_i]\,/X_i^p$, i décrivant l'ensemble des entiers strictement positifs. Finalement on voit que $\hat{A}_{\mathrm{st}}/p$ s'identifie à l'anneau suivant :

$$\left(\mathcal{O}_{\bar{K}}[X_i]\langle X\rangle\right) / \left(p, X_i^p\right)_{i\geqslant 1}.$$

On rappelle que p_1 est une racine p-ième de p. *Via* les identifications précédentes, et pour $n < p$, $\mathrm{Fil}^n(\hat{A}_{\mathrm{st}}/p)$ est le sous-$\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$-module de $\hat{A}_{\mathrm{st}}/p$ engendré par les $p_1^{n-i}\frac{X^i}{i!}$ (pour $i \leqslant n$), les $\frac{X^i}{i!}$ (pour $i > n$) et les X_i (pour $i \geqslant 1$). On a $\phi_r(X_i) = 0$ et $\phi_1(X) = \frac{(1+X)^p-1}{p} = Y$. La monodromie est l'unique dérivation $(A_{\mathrm{cris}}/pA_{\mathrm{cris}})$-linéaire et continue N qui envoie $\frac{X^i}{i!}$ sur $(1+X)\frac{X^{i-1}}{(i-1)!}$.

1.3.3 Description du foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$

Nous cherchons à faire le transport *via* le foncteur T pour voir comment le foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ se réalise à travers la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$. L'objet à calculer est le produit tensoriel $\hat{A}_{\mathrm{st}}/p \otimes_{S/pS} k[u]/u^{ep}$. Pour cela, on définit $\hat{A} = (O_{\bar{K}}/p)\langle X\rangle$. On a un morphisme de $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$-modules :

$$\mathrm{pr} : \hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \to \hat{A}$$

donné, *via* la description précédente, par $\mathrm{pr}(X) = X$ et $\mathrm{pr}(X_i) = 0$ pour tout i. On vérifie que pr est S/pS-linéaire. On définit également $\mathrm{Fil}^r\hat{A} = \mathrm{pr}(\mathrm{Fil}^r\hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}})$ et on vérifie que l'on peut définir une unique application $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\hat{A} \to \hat{A}$ (resp. $N : \hat{A} \to \hat{A}$) vérifiant $\phi_r \circ \mathrm{pr} = \mathrm{pr} \circ \phi_r$ (resp. $N \circ \mathrm{pr} = \mathrm{pr} \circ N$). Notons qu'il faut faire attention lorsque l'on veut effectuer des calculs avec ϕ_r : avant d'élever à la puissance p, il faut toujours relever l'élément dans $\mathrm{Fil}^r\hat{A}_{\mathrm{st}}$. Par exemple, dans $A_{\mathrm{cris}}/pA_{\mathrm{cris}}$, on a $\phi_1(p_1) = X_1 - 1$ et donc si $x \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ est un multiple de π_1^{er}, on obtient $\phi_r(x) = (-1)^r\frac{x^p}{p^r}$, avec un signe *a priori* inattendu.

De plus, on a une inclusion S/pS-linéaire :

$$i : k[u]/u^{ep} \to \hat{A}$$

définie par $i(1) = 1$. On peut former le produit :

$$\mathrm{pr} \cdot i : \hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_{S/pS} k[u]/u^{ep} \to \hat{A}.$$

Lemme 1.3.3. *L'application précédente est un isomorphisme qui respecte les structures.*

Démonstration. La surjectivité et le respect des structures sont immédiats. Comme $\sigma : S/pS \to k[u]/u^{ep}$ est surjectif, tout élément de $\hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_{S/pS} k[u]/u^{ep}$ s'écrit $x \otimes 1$ avec $x \in \hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}}$. Pour vérifier l'injectivité, il suffit donc de voir que $(\ker \mathrm{pr}) \otimes_{S/pS} k[u]/u^{ep} = 0$ mais ceci résulte directement de :

$$X_i \otimes 1 = \frac{\pi_1^{ep^i}}{(p^i)!} \otimes 1 = \frac{u^{ep^i}}{(p^i)!} \otimes 1 = 1 \otimes \sigma\left(\frac{u^{ep^i}}{(p^i)!}\right) = 0.$$

□

On construit une application :

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\mathrm{st},\infty}) \to \mathrm{Hom}(T(\mathcal{M}), \hat{A})$$

déduite de la tensorisation par $k[u]/u^{ep}$ au-dessus de S/pS (et où tous les morphismes doivent commuter aux structures supplémentaires).

Lemme 1.3.4. *L'application précédente est un isomorphisme de $\mathbb{Z}_p$-modules galoisiens.*

Démonstration. Commençons par l'injectivité. Soit $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\mathrm{st},\infty})$ induisant par tensorisation l'application nulle $T(\mathcal{M}) \to \hat{A}$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "x \mapsto 1 \otimes x"'] & \hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \arrow[d, "\mathrm{pr}"] \\
T(\mathcal{M}) \arrow[r, "0"] & \hat{A}
\end{tikzcd}$$

d'où $\mathrm{im}\,\psi \subset \ker \mathrm{pr}$. On vérifie facilement que $\phi_r(\ker \mathrm{pr}) = 0$. Comme ψ commute à ϕ_r et $\phi(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M})$ engendre $\mathcal{M}$, on en déduit $\psi = 0$. L'application $\mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\mathrm{st},\infty}) \to \mathrm{Hom}(T(\mathcal{M}), \hat{A})$ est injective.

Pour la surjectivité, notons $T(\mathcal{M})_0$ l'image de ϕ_r sur $T(\mathcal{M})$. La preuve de la proposition 2.2.2.1 de [Bre97a] fournit l'isomorphisme :

$$\mathcal{M} \simeq T(\mathcal{M})_0 \otimes_{k[u^p]/u^{ep}} S/pS.$$

Soit $\bar{\psi} : T(\mathcal{M}) \to \hat{A}$. D'après l'isomorphisme précédent, elle induit une application S/pS-linéaire $\mathcal{M} \to \hat{A} \otimes_{k[u^p]/u^{ep}} S/pS$, et ce dernier module s'envoie de façon naturelle dans $\hat{A}_{\mathrm{st},\infty}$. On vérifie finalement que l'application composée commute à Fil^r, ϕ_r et N et relève $\bar{\psi}$. □

1.3.4 Description de l'anneau $\hat{A}$

Lemme 1.3.5. *Soit R un anneau dans lequel tous les entiers premiers à p sont inversibles. Alors on a un isomorphisme :*

$$(R[X'] \langle Y \rangle) / (X'^p - 1, p) \longrightarrow (R \langle X \rangle) / p$$

envoyant X' sur $X + 1$ et $\frac{Y^i}{i!}$ sur $\frac{1}{i!}\left(\frac{(X+1)^p - 1}{p}\right)^i$.

Démonstration. D'abord, l'application précédente, disons ψ, est bien définie : on a $(1 + X)^p \equiv 1 + X^p \equiv 1 \pmod p$.

Pour prouver que ψ est un isomorphisme, on remarque que chacun des objets intervenant est un R/p-module libre et que ψ est R/p-linéaire. Une base du module source est donnée par la famille $\left(X'^i \cdot \frac{Y^j}{j!}\right)_{0 \leqslant i \leqslant p-1,\, j \geqslant 0}$. Le module but admet pour base la famille $\left(\frac{X^n}{n!}\right)_{n \geqslant 0}$. L'image par ψ de l'élément $X'^i \cdot \frac{Y^j}{j!}$ est :

$$\psi\left(X'^i \cdot \frac{Y^j}{j!}\right) = (1 + X)^i \cdot \frac{\left(\frac{(1+X)^p - 1}{p}\right)^j}{j!}.$$

Le terme dominant de cette dernière expression est $\frac{X^{pj+i}}{p^j j!}$ et si on note v_p la valuation p-adique normalisée par $v_p(p) = 1$, on a :

$$v_p((pj + i)!) = j + v_p(j!) = v_p\left(p^j j!\right)$$

puisque $i < p$. Comme les entiers premiers à p sont par hypothèse inversibles dans R, l'égalité précédente assure qu'il existe un élément inversible $\alpha \in R/p$ tel que $p^j j! = \alpha (pj + i)!$. Ainsi la « matrice » représentant l'application ψ dans les bases données ci-dessus est triangulaire et les termes diagonaux sont tous inversibles. Cela prouve que ψ est bijective. □

L'anneau $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ vérifie les hypothèses du lemme que l'on vient de prouver ; on obtient donc le corollaire suivant qui donne une nouvelle description relativement explicite de l'anneau $\hat{A}$:

Corollaire 1.3.6. *On a un isomorphisme :*

$$\hat{A} \to (\mathcal{O}_{\bar{K}}[X'] \langle Y \rangle) / (X'^p - 1, p)$$

En outre l'opérateur de monodromie s'exprime simplement sur cette description : on a $N(X') = X'$ et $N\left(\frac{Y^i}{i!}\right) = \frac{Y^{i-1}}{(i-1)!}$.

1.3.5 Action de Galois sur l'anneau $\hat{A}$.

On va déterminer l'action de Galois sur les éléments X' et Y. Pour X' c'est facile puisque par définition on a $g(X') = \varepsilon(g) X'$ pour tout $g \in G_K$.

Pour Y, on pourrait être tenté d'écrire :

$$g(Y) = \frac{\varepsilon(g)^p (1+X)^p - 1}{p} = Y$$

mais on n'a pas le droit de faire ce calcul à cause de la division par p. Ce qu'il faut, c'est choisir un relevé de Y dans $\hat{A}_{\text{st}}$, calculer l'action de Galois sur ce relevé et voir quel élément correspond dans $\hat{A}$.

Comme relevé, on pourrait choisir $\frac{(1+X)^p-1}{p}$ mais on choisit d'abord :

$$\log(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + \ldots + (-1)^{i-1}\frac{X^i}{i} + \ldots \in \hat{A}_{\text{st}}$$

Soit $g \in G_K$. On a $g\log(1+X) = \log(g(1+X)) = \log([\underline{\varepsilon}(g)](1+X)) = g(Y) = Y + \hat{t}(g)$ où :

$$\hat{t}(g) = \log([\underline{\varepsilon}(g)]) = [\underline{\varepsilon}(g)] - \frac{[\underline{\varepsilon}(g)]^2}{2} + \frac{[\underline{\varepsilon}(g)]^3}{3} + \ldots + (-1)^{i-1}\frac{[\underline{\varepsilon}(g)]^i}{i} + \ldots \in A_{\text{cris}}.$$

Nous allons déterminer l'image $t(g)$ de $\hat{t}(g)$ dans $\hat{A}$. Remarquons que comme $\hat{t}(g) \in A_{\text{cris}}$, on a simplement $t(g) \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. Nous allons prouver qu'il s'agit d'une racine $(p-1)$-ième de $(-p)$.

Lemme 1.3.7. *Avec les notations précédentes, $t(g)$ est l'image dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ de :*

$$-\frac{(\varepsilon(g)-1)^p}{p}$$

où $\varepsilon(g) \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ est la racine p-ième de l'unité telle que $g(\pi_1) = \varepsilon(g)\pi_1$.

Démonstration. Il est plus pratique ici d'écrire les choses sous la forme suivante :

$$Y - \frac{X^p}{p} = \frac{X'^p - 1 - (X'-1)^p}{p}$$

et de développer :

$$Y - \frac{X^p}{p} = a_1 X' + a_2 X'^2 + \ldots + a_{p-1} X'^{p-1}$$

avec $a_i = \frac{(-1)^i \binom{p}{i}}{p}$. En appliquant g, on obtient :

$$gY - g\left(\frac{X^p}{p}\right) = a_1 [\varepsilon(g)] X' + a_2 [\varepsilon(g)]^2 X'^2 + \ldots + a_{p-1} [\varepsilon(g)]^{p-1} X'^{p-1}$$

d'où dans $\hat{A}$:

$$t(g) \equiv g\left(\frac{X^p}{p}\right) - \frac{(\varepsilon(g)-1)^p}{p} \pmod{X}$$

Comme on sait que $t(g) \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$, il suffit pour conclure de prouver que $g\left(\frac{X^p}{p}\right)$ est nul modulo X. Mais dans $\hat{A}_{\mathrm{st}}$, on a $g\left(\frac{X^p}{p}\right) = \frac{([\underline{\varepsilon}(g)](1+X)-1)^p}{p}$ et donc modulo X, on obtient :

$$g\left(\frac{X^p}{p}\right) \equiv \frac{([\underline{\varepsilon}(g)]-1)^p}{p} \pmod X$$

On conclut en remarquant que $[\underline{\varepsilon}(g)] - 1 \in \ker \hat{\theta}$. □

Lemme 1.3.8. *L'élément $t(g)$ est soit nul soit égal dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ à la réduction modulo p d'une racine $(p-1)$-ième de $(-p)$ dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$.*

Démonstration. Supposons $t(g) \neq 0$. Prouvons d'abord que $t(g)^{p-1} \equiv -p \pmod{p^2}$. D'après le lemme 1.3.7, cela revient à montrer que :

$$(\varepsilon(g)-1)^{p(p-1)} \equiv -p^p \pmod{p^{p+1}}.$$

Modulo $1 + X + \ldots + X^{p-1}$, le polynôme $(X-1)^{p-1}$ s'écrit $a_0 + a_1 X + \ldots + a_{p-2}X^{p-2}$ avec $a_i = (-1)^i \binom{p-1}{i} - 1$. On vérifie que a_i est un multiple de p et on pose $b_i = \frac{a_i}{p}$. En élevant à la puissance p, on obtient :

$$(X-1)^{p(p-1)} \equiv p^p \left(b_0 + b_1 X + \ldots + b_{p-2}X^{p-2}\right)^p \pmod{1 + X + \ldots + X^{p-1}}$$

d'où

$$(X-1)^{p(p-1)} \equiv p^p (b_0 + b_1 + \ldots + b_{p-2}) \pmod{1 + X + \ldots + X^{p-1}, p^{p+1}}.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que $b_0 + b_1 + \ldots + b_{p-2} = -1$ pour conclure.

Notons $\eta_1, \ldots, \eta_{p-1} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ les racines $(p-1)$-ièmes de $(-p)$. On a :

$$(t(g) - \eta_1) \ldots (t(g) - \eta_{p-1}) = 0 \pmod{p^2}$$

ou encore $v(t(g) - \eta_1) + \ldots + v(t(g) - \eta_{p-1}) \geqslant 2e$. Il existe donc i tel que $v(t(g) - \eta_i) \geqslant \frac{2e}{p-1}$. De plus pour tout i, $v(\eta_i) = \frac{e}{p-1}$ et pour $i \neq j$, $v(\eta_i - \eta_j) = \frac{e}{p-1}$ car deux racines $(p-1)$-ièmes de l'unité sont encore distinctes dans le corps résiduel. Il vient, si $j \neq i$, $v(t(g) - \eta_j) = v((t(g) - \eta_i) + (\eta_i - \eta_j)) = \frac{e}{p-1}$, puis $v(t(g) - \eta_i) \geqslant \left(2 - \frac{p-2}{p-1}\right) e \geqslant e$. Cela conclut. □

2 Généralités sur les catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$ et $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$

Outre de nombreuses explicitations, cette partie a pour but de démontrer les deux résultats suivants. D'une part, les catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$ définies précédemment ne dépendent pas du choix d'une uniformisante π. D'autre part, ces catégories sont abéliennes et même artiniennes.

2.1 Indépendance du choix de l'uniformisante

Considérons π et π' deux uniformisantes de K. Notons respectivement $E(u)$ et $E'(u)$ les polynômes minimaux de π et π'.

Soit $P(u)$ un polynôme à coefficients dans W tel que $P(\pi) = \pi'$ et $P(0) = 0$. On définit une application $\nu : S \to S$ en posant $\nu(s) = s \circ P$. C'est un morphisme d'anneaux, bijectif. Il n'est par contre compatible ni au Frobenius, ni à l'opérateur de monodromie, et nous allons dans un premier temps voir comment ν se comporte vis-à-vis de ces opérateurs.

Plongeons S dans $T = K_0 [\![u]\!]$ et prolongeons les opétateurs ϕ et N à T. Ils vérifient la relation $N\phi = p\phi N$. De même la bijection ν s'étend en une bijection de T. Notons finalement $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de S, c'est l'idéal engendré par p, u et $\frac{u^{ei}}{i!}$ pour $i \geqslant 1$.

Lemme 2.1.1. *Soit $t \in \mathfrak{m}$. L'application de T dans T définie par :*

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i(x)$$

est l'unique morphisme d'anneaux qui envoie u sur $u \exp(-t)$.

Démonstration. Puisque $t \in \mathfrak{m}$, on n'a aucun souci de convergence dans T. En outre, comme $N(u) = -u$, il vient $N^i(u) = (-1)^i u$ et donc u est bien envoyé sur $u \exp(-t)$.

Il reste à vérifier que l'on a bien affaire à un morphisme d'anneaux. La stabilité par addition est immédiate. Soient x et y dans T, calculons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i(xy) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \sum_{k+l=i} \binom{i}{k} N^k(x) N^l(y) \\
&= \sum_{k,l \geqslant 0} \frac{t^i}{k!l!} N^k(x) N^l(y) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} N^k(x) \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} N^l(y) \right)
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

Lemme 2.1.2. *Il existe un (unique) élément $t \in \mathfrak{m}$ tel que l'application $\nu^{-1} \circ \phi \circ \nu : S \to S$ soit donnée par la formule :*

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i \circ \phi(x).$$

Démonstration. Faisons les calculs dans T après avoir vérifié que si une suite d'éléments de S admet une limite dans S, alors elle converge aussi dans T, et vers la même limite.

Regardons d'abord le cas où P s'écrit $uH(u)$ avec $H \in 1 + \mathfrak{m}$. Dans ces conditions on est capable de définir $\log H \in T$. D'autre part, notons $uS(u)$ l'image réciproque de u par

ν. Notons $H^{(\phi)}$ le polynôme déduit de H en appliquant ϕ à chacun de ses coefficients : on a $\phi\left(H\right)\left(u\right) = H^{(\phi)}\left(u^p\right)$.

Dans l'anneau T, on a alors les égalités suivantes :

$$\nu\left(x\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(-\log H\left(u\right)\right)^i}{i!} N^i\left(x\right) \quad \text{et} \quad \nu^{-1}\left(x\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(-\log S\left(u\right)\right)^i}{i!} N^i\left(x\right).$$

Un calcul donne :

$$\nu^{-1} \circ \phi \circ \nu\left(x\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left[-\log\left(H^{(\phi)}\left(u^p S\left(u\right)^p\right)\right)\right]^i}{p^i i!} \nu^{-1} \circ N^i\left(\phi\left(x\right)\right).$$

On a d'autre part :

$$\nu^{-1} \circ N^i\left(\phi\left(x\right)\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(-\log S\left(u\right)\right)^j}{j!} N^{i+j}\left(\phi\left(x\right)\right)$$

et donc en regroupant :

$$\nu^{-1} \circ \phi \circ \nu\left(x\right) = \sum_{i,j \geqslant 0} \frac{\left[-\log\left(H^{(\phi)}\left(u^p S\left(u\right)^p\right)\right)\right]}{p^i i!} \frac{\left(-\log S\left(u\right)\right)^j}{j!} N^{i+j}\left(\phi\left(x\right)\right)$$

ce que l'on réduit, grâce à la formule du binôme, en :

$$\nu^{-1} \circ \phi \circ \nu\left(x\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left[\frac{-\log H^{(\phi)}\left(u^p S\left(u\right)^p\right)}{p} - \log S\left(u\right)\right]^i N^i\left(\phi\left(x\right)\right).$$

On voit sur cette dernière écriture que l'on a trouvé un candidat pour t. Il se réécrit sous la forme plus sympatique suivante :

$$t = -\frac{1}{p} \log\left[S\left(u\right)^p H^{(\phi)}\left(u^p S\left(u\right)^p\right)\right]$$

Mais par définition de S et de H, on a $S\left(u\right) H\left(u S\left(u\right)\right) = 1$ et donc en appliquant ϕ et en regardant modulo p, on trouve $S\left(u\right)^p H^{(\phi)}\left(u^p S\left(u\right)^p\right) \equiv 1 \pmod p$. On en déduit que $t \in S$ et vérifie les conditions du lemme.

Si P n'est pas de la forme précédente, on peut toujours décomposer $\nu : S \to S \to S$ où la première flèche ν_0 est de la forme précédente et la seconde un morphisme d'anneaux envoyant u sur $\left[\lambda\right] u$, où $\left[\lambda\right]$ est le représentant de Teichmüller d'un $\lambda \in k$. On vérifie que l'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\nu_0"'] \arrow[rr, bend left, "\nu"] \arrow[d, "\nu^{-1}\phi\nu = \nu_0^{-1}\phi\nu_0"'] & S \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & S \arrow[d, "\phi"] \\
S \arrow[r, "\nu_0"'] & S \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

On est donc ramené au même problème avec ν_0, déjà traité. $\square$

Lemme 2.1.3. *Il existe un (unique) élément $n \in S$ tel que l'application $\nu^{-1} \circ N \circ \nu : S \to S$ soit donnée par la formule :*

$$x \mapsto nN(x)$$

Démonstration. Rappelons que l'application ν était donnée par $x \mapsto x \circ P$, et que l'on peut décrire N *via* la formule $N(s) = -us'$ où s' désigne la dérivée usuelle de s (par rapport à u).

On peut alors calculer :

$$\nu^{-1} \circ N \circ \nu (x) = \nu^{-1} [N(x \circ P)] = \nu^{-1} [-uP' \cdot (x' \circ P)]$$

D'autre part, on a :

$$\nu (N(x)) = \nu(-ux') = -P \cdot (x' \circ P)$$

d'où :

$$\nu^{-1} \circ N \circ \nu (x) = \nu^{-1} \left(\frac{-uP'(u)}{P(u)} \right) N(x)$$

et on a ainsi un candidat pour n. Or $\nu^{-1}(P(u)) = u$ par définition et par ν^{-1}, u s'envoie sur un multiple de u : $n = \nu^{-1} \left(\frac{-uP'(u)}{P(u)} \right) \in S$ et convient. □

2.1.1 Construction du foncteur

Notons $\underline{\mathcal{M}}^r_\pi$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}^r_{\pi'}$) la catégorie obtenue en choisissant π (resp. π') comme uniformisante de K. On souhaite construire un foncteur (qui va s'avérer être une équivalence de catégories) entre les catégories $\underline{\mathcal{M}}^r_\pi$ et $\underline{\mathcal{M}}^r_{\pi'}$. Notons que si $r = 0$, les catégories $\underline{\mathcal{M}}^0_\pi$ et $\underline{\mathcal{M}}^0_{\pi'}$ sont identiques. On peut supposer $r > 0$ et donc $p > 2$ (puisque $er < p - 1$).

Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. L'application ν définie précédemment fait de S une S-algèbre et on remarque que si l'on munit les anneaux des filtrations correspondant respectivement au choix des uniformisantes π et π', l'application ν est compatible aux filtrations.

Considérons les constantes t et n fournies par les lemmes 2.1.2 et 2.1.3 et définissons :

$$\begin{aligned}
M' &= S \otimes_{(\nu),S} M \\
\mathrm{Fil}^r M' &= S \otimes_{(\nu),S} \mathrm{Fil}^r M \\
\phi'_r (s \otimes x) &= \phi(s) \otimes \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i \circ \phi_r (x) \right) \\
N'(s \otimes x) &= N(s) \otimes x + s \otimes nN(x)
\end{aligned}$$

les deux dernières égalités étant définies pour tout $s \in S$ et respectivement tout $x \in \mathrm{Fil}^r \mathcal{M}$ et tout $x \in \mathcal{M}$.

Lemme 2.1.4. *Pour tout entier $i \geqslant 1$, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathit{Fil}^r \mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "E(u)^i N^i"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "c^i N^i"] \\
\mathit{Fil}^r \mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On prouve la propriété par récurrence. Pour $i = 1$, elle est vraie par hypothèse. Pour l'hérédité, juxtaposons les deux diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "E(u)^iN^i"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "c^iN^i"] \\
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "E(u)N"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "cN"] \\
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

Le grand rectangle est commutatif puisque les deux carrés le sont. Soient $x \in \mathcal{M}$ et $s \in S$. On a :

$$\begin{aligned}
(sN) \circ \left(s^iN^i\right)(x) &= s\left[N\left(s^i\right)N^i(x) + s^iN^{i+1}(x)\right] \\
&= is^iN(s)N^i(x) + s^{i+1}N^{i+1}(x).
\end{aligned}$$

En appliquant le calcul précédent deux fois et en utilisant la commutativité du diagramme, on obtient, pour tout $x \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}
&ic^iN(c)N^i(\phi_r(x)) + c^{i+1}N^{i+1}(\phi_r(x)) \\
&\quad = \phi_r\left[iE(u)^iN(E(u))N^i(x) + E(u)^{i+1}N^{i+1}(x)\right] \\
&\quad = i\phi(N(E(u)))\phi_r\left(E(u)^iN^i(x)\right) + \phi_r\left(E(u)^{i+1}N^{i+1}(x)\right).
\end{aligned}$$

On sait que $\phi(N(E(u))) = N(c)$, ce qui permet de conclure en utilisant une dernière fois l'hypothèse de récurrence. □

Lemme 2.1.5. *L'application ϕ'_r est bien définie et est ϕ-semi linéaire.*

Démonstration. Dans un premier temps, si $x \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$, d'après le lemme 2.1.4 l'élément $\frac{1}{i!}N^i \circ \phi_r(x)$ est bien défini puisqu'égal à $\phi_r\left(\frac{E(u)^i}{i!}N^i(x)\right)$. Remarquons que $\frac{E(u)^i}{i!}N^i(x)$ est toujours élément de $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$: si $i < r < p$, c'est vrai car $i!$ est inversible et si $i \geqslant r$, c'est vrai par hypothèse.

D'autre part, pour $i \gg 0$, on a :

$$\phi_r\left(\frac{E(u)^i}{i!}N^i(x)\right) = \frac{1}{c^r}\phi_r\left(\frac{E(u)^i}{i!}\right)\phi_r\left(E(u)^rN^i(x)\right)$$

et le facteur $\phi_r\left(\frac{E(u)^i}{i!}\right)$ est multiple de $\frac{p^{i-r}}{i!}$. Comme on a supposé $p > 2$, la valuation p-adique de ce dernier tend vers l'infini. Cela prouve que la suite des $\frac{1}{i!}N^i \circ \phi_r(x)$ converge vers 0 et donc que la somme de la série est bien définie.

Reste à voir que si $s \in S$ et $x \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$, on a $\phi'_r(1 \otimes sx) = \phi'_r(\nu(s) \otimes x)$. Comme dans le lemme 2.1.1, on prouve :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i(\phi_r(sx)) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i(\phi(s))\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N^i(\phi_r(x))\right).$$

Le premier facteur vaut $\nu^{-1} \circ \phi \circ \nu(s)$ d'après le lemme 2.1.2. Cela conclut, le fait que ϕ'_r est ϕ-semi-linéaire étant évident. □

Lemme 2.1.6. *L'application N' est bien définie et vérifie la condition de Leibniz.*

Démonstration. Comme précédemment, il s'agit de vérifier que pour $s \in S$ et $x \in \mathcal{M}$, on a $N'(1 \otimes sx) = N'(\nu(s) \otimes x)$. Calculons :

$$N'(1 \otimes sx) = 1 \otimes nN(sx) = 1 \otimes nN(s)x + 1 \otimes nsN(x).$$

Or d'après le lemme 2.1.3, on a $nN(s) = \nu^{-1} \circ N \circ \nu(s)$ et donc $1 \otimes nN(s)x = N \circ \nu(s) \otimes x$. D'autre part, on a $1 \otimes nsN(x) = \nu(s) \otimes nN(x)$. On en déduit que :

$$N'(1 \otimes sx) = N \circ \nu(s) \otimes x + \nu(s) \otimes nN(x)$$

comme on voulait. □

Proposition 2.1.7. *L'objet $\mathcal{M}'$ muni de $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}'$, de ϕ'_r et de N' est un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r_{\pi'}$.*

Démonstration. La seule vérification qui pose problème est la commutativité du diagramme reliant ϕ'_r à N'. Par un simple calcul, on prouve dans un premier temps qu'il existe une constante c' faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}' \arrow[r, "\phi'_r"] \arrow[d, "\nu(E(u))N'"'] & \mathcal{M}' \arrow[d, "c'N'"] \\ \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}' \arrow[r, "\phi'_r"] & \mathcal{M}' \end{tikzcd}$$

Comme $\nu(E(u))$ s'obtient à partir de $E'(u)$ simplement par la multiplication par une unité de S, un diagramme équivalent, dans lequel on a remplacé $\nu(E(u))$ par $E'(u)$ et dans lequel la constante c' a été modifiée, commute. D'autre part, le calcul prouve que la constante c' obtenue ne dépend pas de $\mathcal{M}$.

Soient n un entier et $\mathcal{M} = S/p^nS \cdot e_1$ muni de $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} = \mathcal{M}$, $\phi_r(e_1) = e_1$ et $N(e_1) = 0$. On a $(c'N') \circ \phi'_r(u \otimes e_1) = \phi'_r \circ (E'(u)N)(u \otimes e_1)$, ce qui donne après calcul :

$$[c'pu^p - u^p\phi(E'(u))] \otimes e_1 = 0.$$

Ainsi p^n divise $c'pu^p - u^p\phi(E'(u))$ pour tout n et finalement $c' = \phi_1(E'(u))$. □

On a ainsi défini un foncteur (la définition sur les flèches est évidente) $\underline{\mathcal{M}}^r_\pi \to \underline{\mathcal{M}}^r_{\pi'}$.

2.1.2 Canonicité et compatibilité

Proposition 2.1.8. *Le foncteur défini précédemment ne dépend pas du choix de l'élément $P \in S$.*

Démonstration. Avec les notations précédentes, il suffit de prouver que si $P = uH$ est tel que $P(\pi) = \pi$, alors $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont canoniquement isomorphes. Notons $\nu : S \to S$ le morphisme d'anneau tel que $\nu(u) = P(u)$. La condition implique $H(u) - 1 \in \mathrm{Fil}^1 S$ et donc l'élément $\log(H(u))$ est bien défini dans S.

Si $\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r_\pi$, on peut définir l'application :

$$\begin{array}{ccc} S \otimes_{(\nu),S} \mathcal{M} & \to & S \\ s \otimes x & \mapsto & s \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\log H(u))^i}{i!} N^i(x) \end{array}$$

Comme $\log(H(u)) \in \mathrm{Fil}^1 S$, l'élément $\frac{(-\log H(u))^i}{i!}$ est bien défini. En outre le fait que dans T, $\exp(\log H(u)) = H(u) \in S$ prouve que la suite $\frac{(\log H(u))^i}{i!}$ converge vers 0 et finalement que l'application est bien définie.

Il ne reste plus qu'à voir que c'est un isomorphisme S-linéaire et compatible à toutes les structures ; c'est donc une flèche dans $\underline{\mathcal{M}}^r_\pi$. □

Corollaire 2.1.9. *Le foncteur défini précédemment est une équivalence de catégorie.*

Si, comme précédemment, π et π' sont deux uniformisantes de K, on peut définir $\hat{A}_{\mathrm{st}\pi}$ et $\hat{A}_{\mathrm{st}\pi'}$. Pour cela, rappelons que l'on avait choisi $(\pi_1, \ldots, \pi_n, \ldots)$ (resp. $(\pi'_1, \ldots, \pi'_n, \ldots)$) un système compatible de racines p^n-ièmes de π (resp. de π'). On définit ω_n en imposant $\pi_n = \omega_n \pi'_n$, obtenant ainsi $(\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_n, \ldots) \in R$ puis $[\underline{\omega}] \in A_{\mathrm{cris}}$ (notez que A_{cris} ne dépend pas du choix d'une uniformisante).

L'unique morphisme de A_{cris}-algèbre $\hat{A}_{\mathrm{st}\pi} \to \hat{A}_{\mathrm{st}\pi'}$ envoyant $(1 + X)$ sur $[\underline{\omega}](1 + X)$ est un isomorphisme compatible à ϕ_r, à N et à l'action du groupe de Galois G_K.

Proposition 2.1.10. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathcal{M}}^r_\pi \arrow[rr] \arrow[dr, "T^\star_{st\,\pi}"'] & & \underline{\mathcal{M}}^r_{\pi'} \arrow[dl, "T^\star_{st\,\pi'}"] \\ & \mathit{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K) & \end{tikzcd}$$

où la flèche horizontale est le foncteur défini précédemment.

Démonstration. L'anneau S s'identifie à la fois aux points fixes sous l'action de Galois de $\hat{A}_{\mathrm{st}\pi}$ et de $\hat{A}_{\mathrm{st}\pi'}$. Notons $\rho : S \to \hat{A}_{\mathrm{st}\pi}$ et $\rho' : S \to \hat{A}_{\mathrm{st}\pi'}$ les inclusions correspondantes. Il existe un unique morphisme de A_{cris}-algèbre, $\nu : \hat{A}_{\text{st}\pi} \to \hat{A}_{\text{st}\pi'}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\rho"'] & S \arrow[d, "\rho'"] \\ \hat{A}_{\text{st}\pi} \arrow[r, dotted, "\nu"] & \hat{A}_{\text{st}\pi'} \end{tikzcd}$$

En effet, le diagramme impose la valeur de $\nu\left(\frac{X^i}{i!}\right)$ et on vérifie que l'application ainsi définie convient. En outre, elle est G_K-équivariante et induit une flèche $\nu : \hat{A}_{\text{st},\infty\pi} \to \hat{A}_{\text{st},\infty\pi'}$ encore G_K-équivariante.

Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r_\pi$ et $\mathcal{M}'$ l'objet de $\underline{\mathcal{M}}^r_{\pi'}$ qui lui est associé par le foncteur précédent. On rappelle qu'en tant que module, on a $\mathcal{M}' = S \otimes_{(\nu),S} \mathcal{M}$. Soit $f \in T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M})$. On lui associe l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}' & \to & \hat{A}_{\text{st},\infty\pi'} \\ s \otimes x & \mapsto & \rho'(s) \cdot \nu \circ f(x) \end{array}$$

On vérifie qu'elle est S-linéaire et compatible aux structures définissant ainsi un élément de $T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}')$.

On définit ainsi une application $T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}) \to T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}')$. Elle est $\mathbb{Z}_p$-linéaire et bijective puisque l'on peut construire l'application réciproque de façon analogue. On vérifie qu'elle est compatible à l'action de Galois et donc qu'il s'agit d'un isomorphisme dans la catégorie des $\mathbb{Z}_p$-représentations galoisiennes. □

2.2 Description des objets de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$

On considère dans ce paragraphe un objet $\mathcal{M}$ de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$. Il s'agit d'un $k[u]/u^{ep}$-module libre de rang fini d muni d'une filtration, d'une application ϕ_r et d'une application N, le tout vérifiant les propriétés données précédemment.

2.2.1 Bases adaptées

On a dans un premier temps un résultat bien utile (et classique) qui est le suivant :

Proposition 2.2.1. *Il existe une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de $\mathcal{M}$ et des entiers $n_1, \ldots, n_d$ tels que :*

$$\mathit{Fil}^r\mathcal{M} = \bigoplus_{i=1}^{d} u^{n_i} k[u]/u^{ep} \cdot e_i.$$

Une telle base est par définition une base adaptée *de $\mathcal{M}$.*

Démonstration. Comme $\mathcal{M}$ est libre, il existe un $k[u]$-module libre $\mathcal{M}'$ tel que $\mathcal{M}'/u^{ep}\mathcal{M}' = \mathcal{M}$. Autrement dit, il existe une flèche $f : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}$ dont le noyau est exactement $u^{ep}\mathcal{M}'$. Définissons $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}' = f^{-1}(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M})$. C'est un sous-$k[u]$-module de $\mathcal{M}'$.

Puisque $k[u]$ est un anneau principal, d'après le théorème de structure, il existe une suite de polynômes $P_1, \ldots, P_d$ tels que P_i divise P_{i+1} pour tout i et une base $(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_d)$ de $\mathcal{M}'$ telle que $(P_1\hat{e}_1, \ldots, P_d\hat{e}_d)$ soit une base de $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}'$. D'autre part, $u^{er}\mathcal{M}' \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}'$ et donc tous les polynômes P_i sont des diviseurs de u^{er} ; ils sont donc de la forme $P_i = u^{n_i}$ pour certains entiers n_i.

En posant $e_i = f(\hat{e}_i)$, on a bien le résultat annoncé. □

Remarque. Les entiers n_i ne dépendent pas à permutation près de la base considérée. En effet, la dimension en tant que k-espace vectoriel du quotient $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}/\left(u^k\mathcal{M} \cap \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}\right)$ est donnée par la somme des $k - n_i$, somme étendue à tous les i pour lesquels $n_i \leqslant k$. On voit facilement que la connaissance de toutes ces sommes permet de déterminer les n_i à permutation près.

Fixons à présent $(e_1, \ldots, e_d)$ une base adaptée de $\mathcal{M}$. Nous allons essayer de décrire un peu mieux la fonction ϕ_r et pour cela nous introduisons la définition suivante.

Définition 2.2.2. *Soit $x \in \mathcal{M}\backslash u\mathcal{M}$, et soit n le plus petit entier tel que $u^n x \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$. On pose $\varphi_r(x) = \phi_r(u^n x)$.*

Soit $x_i = \varphi_r(e_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant d$. On rappelle que la famille des e_i est la base adaptée que l'on s'est fixée précédemment.

Proposition 2.2.3. *Avec les notations précédentes, $(x_1, \ldots, x_d)$ est une base de $\mathcal{M}$.*
D'autre part, si $x \in \mathcal{M}\backslash u\mathcal{M}$, alors $\varphi_r(x) \in \mathcal{M}\backslash u\mathcal{M}$.

Démonstration. Pour le premier énoncé, il suffit de voir que si $x \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$, alors $\phi_r(x)$ s'écrit comme une combinaison linéaire (à coefficients dans $k[u^p]/u^{ep}$) des x_i. Comme $\mathrm{im}\,\phi_r$ engendre $\mathcal{M}$ comme $k[u]/u^{ep}$-module, il en est de même de la famille $(x_1, \ldots, x_d)$. Comme elle est de bon cardinal, elle en est une base.

Soit $x \in \mathcal{M}\backslash u\mathcal{M}$. On voit en décomposant x sur la base des e_i, que $\varphi_r(x)$ s'écrit forcément sous la forme :

$$\varphi_r(x) = Q_1(u^p)x_1 + \ldots + Q_d(u^p)x_d$$

où au moins l'un des polynômes Q_i est de valuation nulle. Dans ce cas, on a directement $\varphi_r(x) \in \mathcal{M}\backslash u\mathcal{M}$. □

Remarque. La deuxième partie de la proposition précédente permet de définir correctement les itérés de φ_r.

2.2.2 L'opérateur de monodromie

Nous allons à présent étudier l'opérateur de monodromie. Pour cela, nous notons $\mathcal{M}_0 = \mathrm{im}\,\phi_r$. Par ce qui précède, $\mathcal{M}_0$ s'identifie au $k[u^p]/u^{ep}$-module engendré par les x_i. Nous avons alors :

Proposition 2.2.4. *Pour tout i, l'opérateur $c^i_{(e),\pi}N^i$ induit une application $k[u^p]/u^{ep}$-linéaire de $\mathcal{M}_0$ sur lui-même. Cette application est nulle si $i \geqslant p$.*

Démonstration. Le lemme 2.1.4 assure que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "u^{ei}N^i"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "c^i_{(e),\pi}N^i"] \\
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

commute. Ainsi si x est dans l'image de ϕ_r, alors il en est de même de $c^i_{(e),\pi}N^i(x)$, et donc $c^i_{(e),\pi}N^i$ induit une application de $\mathcal{M}_0$ dans lui-même. D'autre part, $N(u^p x) = N(u^p)x + u^p N(x) = -pu^p x + u^p N(x) = u^p N(x)$, ce qui prouve bien la linéarité annoncée.

Pour $i \geqslant p$, l'application $u^{ei}N^i$ est nulle et donc il en est de même de $c^i_{(e),\pi}N^i$. □

Corollaire 2.2.5. *Il existe un élément $x \in \mathcal{M}_0$ non divisible par u tel que $N(x) = 0$.*

Démonstration. Du fait que $c^p_{(e),\pi}N^p = 0$, il existe $x' \in \mathcal{M}_0$, $x' \neq 0$, tel que $N(x') = 0$. Écrivons $x' = u^{pk}x''$ où x'' est un élément de $\mathcal{M}_0$ non divisible par u et où $k < e$. On a alors $N\left(u^{pk}x''\right) = u^{pk}N(x'') = 0$ et donc $N(x'')$ est un multiple de u^p. Notons n le plus petit entier tel que $u^n x'' \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ de telle sorte que l'on ait $\varphi_r(x'') = \phi_r(u^n x'') = x$. On a :

$$\phi_r(u^e N(u^n x'')) = c_{(e),\pi}N(\phi_r(u^n x'')) = c_{(e),\pi}N(x).$$

Mais $N(u^n x'') = -nu^n x'' + u^n N(x'')$. Le premier terme de cette somme est dans $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ puisque $u^n x''$ y est. Le second y est également puisque $N(x'')$ est un multiple de u^p. On en déduit que $N(u^n x'') \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ et donc que $\phi_r(u^e N(u^n x'')) = 0$. Ainsi $N(x) = 0$. D'autre part, on a $x = \varphi_r(x'')$ et donc d'après la proposition 2.2.3, x n'est pas divisible par u. Ceci conclut la preuve du corollaire. □

2.2.3 Description matricielle

Le but de ce paragraphe est d'écrire sous forme matricielle les applications ϕ_r et N, explicitations que nous utiliserons dans la suite. On fixe $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ et $(e_1, \ldots, e_d)$ une base adaptée de $\mathcal{M}$, les entiers correspondant étant $n_1, \ldots, n_d$.

On note Δ la matrice diagonale suivante :

$$\Delta = \begin{pmatrix} u^{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & u^{n_d} \end{pmatrix}$$

Définition 2.2.6. *La* matrice *de ϕ_r dans la base adaptée $(e_1, \ldots, e_d)$ est la matrice G définie par l'égalité suivante :*

$$\begin{pmatrix} \phi_r(u^{n_1}e_1) \\ \vdots \\ \phi_r(u^{n_d}e_d) \end{pmatrix} = \phi_r\left(\Delta \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix}\right) = {}^tG \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix}$$

Remarque. Cette définition n'a de sens que si la base $(e_1, \ldots, e_d)$ est adaptée. De plus, la présence de la transposée sert à rester fidèle à la définition classique de la matrice d'une application linéaire.

En gardant les notations du paragraphe précédent, on voit que G est simplement la matrice de passage de la base $(e_1, \ldots, e_d)$ à la base $(x_1, \ldots, x_d)$. En tant que telle, il s'agit d'une matrice inversible.

Définition 2.2.7. *Soit $(a_1, \ldots, a_d)$ une base de $\mathcal{M}$. La* matrice *de N dans la base $(a_1, \ldots, a_d)$ est la matrice H définie par l'égalité suivante :*

$$\begin{pmatrix} N(a_1) \\ \vdots \\ N(a_d) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{t}}H \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$$

On a une formule de changement de base :

Proposition 2.2.8. *Soient $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_d)$ et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_d)$ deux bases de $\mathcal{M}$, et soit P la matrice de passage de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$. On note $H_{\mathcal{A}}$ (resp. $H_{\mathcal{B}}$) la matrice de N dans la base $\mathcal{A}$ (resp. dans la base $\mathcal{B}$). On a alors la relation :*

$$H_{\mathcal{B}} = P^{-1} H_{\mathcal{A}} P + P^{-1} N(P)$$

Démonstration. Il s'agit d'un simple calcul. On écrit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N(b_1) \\ \vdots \\ N(b_d) \end{pmatrix} &= N \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} = N \left({}^{\mathrm{t}}P \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \right) \\ &= N({}^{\mathrm{t}}P) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} + {}^{\mathrm{t}}P \cdot N \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \\ &= N({}^{\mathrm{t}}P)\, {}^{\mathrm{t}}P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} + {}^{\mathrm{t}}P H_{\mathcal{A}} {}^{\mathrm{t}}P^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui donne ${}^{\mathrm{t}}H_{\mathcal{B}} = N({}^{\mathrm{t}}P)\, {}^{\mathrm{t}}P^{-1} + {}^{\mathrm{t}}P H_{\mathcal{A}} {}^{\mathrm{t}}P^{-1}$ puis le résultat annoncé en prenant la transposée. □

Remarque. Un simple calcul prouve que si A et B sont des matrices à coefficients dans $k[u]/u^{ep}$, alors $N(AB) = N(A)B + AN(B)$, et en particulier $P^{-1}N(P) = -N(P^{-1})P$. On en déduit la cohérence de la formule lorsque l'on passe d'une base $\mathcal{A}$ à une base $\mathcal{B}$ puis que l'on revient à $\mathcal{A}$.

Proposition 2.2.9. *Si les n_i sont rangés par ordre croissant, la matrice de $c_{(e),\pi}N$ dans la base $(x_1, \ldots, x_d)$ (où on rappelle que $x_i = \phi_r(u^{n_i} e_i)$) est à coefficients dans $k[u^p]/u^{ep}$ et triangulaire inférieure avec des 0 sur la diagonale.*

Démonstration. La preuve résulte du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Fil}^r \mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "u^e N"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "c_{(e),\pi} N"] \\
\operatorname{Fil}^r \mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

En effet, fixons un entier i et partons de l'élément $u^{n_i} e_i$. Par ϕ_r, il s'envoie sur x_i par définition. Puis par $c_{(e),\pi} N$, il s'envoie sur $c_{(e),\pi} N\left(x_i\right)$. Par l'autre chemin, on a d'abord :

$$u^e N\left(u^{n_i} e_i\right)=-n_i u^{e+n_i} e_i+u^{e+n_i} N\left(e_i\right)$$

Comme $u^{n_i} e_i \in \operatorname{Fil}^r \mathcal{M}$, le premier terme de la somme précédente s'envoie sur 0 par ϕ_r et $u^{e+n_i} N\left(e_i\right) \in \operatorname{Fil}^r \mathcal{M}$. Pour le second terme, décomposons $N\left(e_i\right)=\sum_{j=1}^d a_j e_j$ où $a_j \in k[u] / u^{e p}$ est tel que $u^{e+n_i} N\left(e_i\right) \in \operatorname{Fil}^r \mathcal{M}$ (*i.e.* $u^{e+n_i} a_j \in u^{n_j} k[u] / u^{e p}$). On a alors :

$$\phi_r\left(u^e N\left(u^{n_i} e_i\right)\right)=\sum_{j=1}^d \phi\left(u^{e+n_i-n_j} a_j\right) x_j$$

et les $\phi\left(u^{e+n_i-n_j} a_j\right)$ sont les coefficients de la j-ième colonne de la matrice de $c_{(e),\pi} N$. Ils sont donc déjà tous bien dans $k\left[u^p\right] / u^{e p}$.

De plus, si $j \leqslant i$, on a par hypothèse $n_j \leqslant n_i$ et donc $e+n_i-n_j \geqslant e$. Ainsi $\phi\left(u^{e+n_i-n_j} a_j\right)=0$ et on a bien démontré le résultat annoncé. $\square$

Remarque. Cette dernière proposition redémontre en particulier, en donnant un résultat plus précis, la proposition 2.2.4 et le corollaire qui s'ensuit.

2.3 La catégorie $\widetilde{\underline{\mathrm{MF}}}^r$

Dans cette partie, nous introduisons des sous-catégories pleines $\widetilde{\underline{\mathrm{MF}}}^r$ de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ qui correspondent aux catégories de Fontaine-Laffaille (voir [FL82]) tuées par p pour $e=1$.

Commençons par donner une proposition qui caractérise les objets de cette sous-catégorie. Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e),0}$. Notons $\mathcal{M}_0=\operatorname{im} \phi_r$ et plus généralement $\mathcal{M}_i=u^i \mathcal{M}_0$ pour un entier i compris entre 0 et $p-1$. Les $\mathcal{M}_i$ sont des $k\left[u^p\right] / u^{e p}$-modules libres et :

$$\mathcal{M}=\bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{M}_i .$$

Proposition 2.3.1. *Avec les notations précédentes, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\operatorname{Fil}^r \mathcal{M}=\bigoplus_{i=0}^{p-1} \operatorname{Fil}^r \mathcal{M} \cap \mathcal{M}_i$;

ii) il existe une base adaptée de $\mathcal{M}$ *formée d'éléments de* $\mathcal{M}_0$;

iii) On peut munir $\mathcal{M}$ d'un opérateur de monodromie nul sur $\mathcal{M}_0$, faisant de $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$.

Démonstration. La propriété ii) implique de façon presque immédiate les deux autres. Nous allons montrer que iii) implique i) puis que i) implique ii).

Supposons iii). Prouvons dans un premier temps que cela implique que $N\left(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}\right) \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$. Soit $x \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$. D'après le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "u^e N"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "c_{(e),\pi}N"] \\
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

on a $\phi_r\left(u^e N\left(x\right)\right) = 0$. La proposition 2.2.3 implique facilement que $\ker \phi_r = u^e \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ et donc il existe $y \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ tel que $u^e N\left(x\right) = u^e y$. La différence $N\left(x\right) - y$ est tuée par u^e. Elle s'écrit $u^{e(p-1)}z$ pour un certain $z \in \mathcal{M}$. Comme $e\left(p-1\right) \geqslant er$, $u^{e(p-1)}z \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ d'où $N\left(x\right) \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$. Ceci prouve la propriété annoncée.

Soit $y \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$. On cherche à construire des $y_i \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \cap \mathcal{M}_i$ tels que $y = y_0 + \ldots + y_{p-1}$. On peut déjà écrire une égalité de ce type avec $y_i \in \mathcal{M}_i$. Appliquons l'opérateur N à cette égalité en remarquant que puisque N est supposé nul sur $\mathcal{M}_0$, on a $N\left(y_i\right) = -iy_i$. On obtient successivement :

$$\begin{array}{rcl}
y & = & x_0 + y_1 + \ldots + y_{p-1} \\
N\left(y\right) & = & -y_1 + \ldots - \left(p-1\right) y_{p-1} \\
N^2\left(y\right) & = & y_1 + \ldots + \left(p-1\right)^2 y_{p-1} \\
& \vdots & \\
N^{p-1}\left(y\right) & = & y_1 + \ldots + \left(p-1\right)^{p-1} y_{p-1}.
\end{array}$$

Les coefficients qui apparaissent forment une matrice de Vandermonde inversible. Ainsi on peut exprimer les y_i comme combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ des $N^j\left(y\right)$. Par ce qui précède, cela entraîne $y_i \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ et donc bien la propriété voulue.

Supposons i). Fixons $\left(e_1, \ldots, e_d\right)$ une base de $\mathcal{M}_0$ comme $k\left[u^p\right]/u^{ep}$-module, et notons $\mathcal{M}'_0$ le sous-k-espace vectoriel de $\mathcal{M}_0$ engendré par les e_i. Notons également $\mathcal{M}'_i = u^i\mathcal{M}'_0$. Pour tout entier i, on a un isomorphisme $f_i : \mathcal{M}'_0 \to \mathcal{M}'_i$ qui est la multiplication par u^i. Notons $F'_i = f_i^{-1}\left(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'_i\right)$. On obtient une filtration croissante par des sous-k-espaces vectoriels. Il suffit alors pour répondre à la question de considérer une base $\left(x_1, \ldots, x_d\right)$ de $\mathcal{M}'_0$ compatible à cette filtration. □

Définition 2.3.2. *On note $\underline{\widetilde{MF}}^r_0$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r_{(e),0}$ formée des objets satisfaisant les propriétés de la proposition précédente. On note $\underline{\widetilde{MF}}^r$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ formée des objets dont l'image dans $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r_{(e),0}$ par le foncteur d'oubli satisfait les propriétés de la proposition précédente.*

Les lettres MF font référence à « modules filtrés » car l'on peut donner une nouvelle interprétation de ces objets *via* des modules filtrés. Avant cela, faisons quelques remarques générales :

Proposition 2.3.3. *La catégorie $\widetilde{\underline{MF}}^r$ est une sous-catégorie abélienne de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ stable par sous-objets et par quotients. De plus, elle est égale à $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ si et seulement si $e = r = 1$.*

Démonstration. Nous ne savons pas encore à ce stade que $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ est une catégorie abélienne. Nous allons l'admettre momentanément pour prouver la première partie de la proposition. Il suffit de prouver la stabilité par sommes directes, sous-objets et quotients, un noyau étant un sous-objet et un conoyau un quotient. Tout cela est immédiat avec la caractérisation iii).

Traitons le cas $e = r = 1$. Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e),0}$ et soit $x \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$. On peut écrire $x = x_0 + \ldots + x_{p-1}$ avec $x_i \in \mathcal{M}_i$. Par hypothèse $u\mathcal{M} \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$, et donc $x_i \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ pour $i \geqslant 1$, puis $x_0 \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$. On a ainsi vérifié la propriété i). Réciproquement, considérons $\mathcal{M} = k[u]/u^{ep}e_1 \oplus k[u]/u^{ep}e_2$, $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} = (e_1, u^2e_2)$, $\phi_r(e_1) = e_2$, $\phi_r(u^2e_2) = e_1 + ue_2$. D'après la proposition 2.2.9, un opérateur de monodromie sur $\mathcal{M}$ doit vérifier $N(e_1 + ue_2) = 0$ et $N(e_2) = a(e_1 + ue_2)$ pour un certain $a \in k[u^p]/u^{ep}$. On doit avoir $cN \circ \phi_r(e_1) = \phi_r(u^eN(e_1))$, ce qui donne après calcul $a = -u^{p(e-1)}$. Il existe donc un unique N valable, et il n'est pas nul sur $\mathrm{im}\,\phi_r$. Cela conclut. □

Proposition 2.3.4. *Tout objet non nul de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e),0}$ (resp. de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$) admet un sous-objet non nul dans $\widetilde{\underline{MF}}^r_0$ (resp. dans $\widetilde{\underline{MF}}^r$ pour lequel N est nul sur $\mathrm{im}\,\phi_r$).*

Démonstration. La preuve de cette propriété est donnée dans le paragraphe 3.1 lors de l'étude des objets simples. □

2.3.1 Les objets de $\widetilde{\underline{\mathrm{MF}}}^r$ comme modules filtrés

Il est possible de décrire la catégorie $\widetilde{\underline{\mathrm{MF}}}^r$ avec des objets plus proches des objets de Fontaine-Laffaille du cas $e = 1$. Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\widetilde{\underline{\mathrm{MF}}}^r$. Posons $\mathcal{M}_0 = \mathrm{im}\,\phi_r$ et $\mathcal{M}_i = u^i\mathcal{M}_0$, pour $0 \leqslant i \leqslant p-1$. On a un isomorphisme $f_i : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_i$ qui est la multiplication par u^i. Définissons $F_{i/e} = f_{er-i}^{-1}(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \cap \mathcal{M}_{er-i})$. On obtient une suite décroissante de sous-$k[u^p]/u^{ep}$-modules de $\mathcal{M}_0$ contenant $u^p\mathcal{M}_0$ telle que $F_0 = \mathcal{M}_0$ par hypothèse.

L'application ϕ_r induit des applications $\phi_i : F_i \to \mathcal{M}_0$ faisant commuter les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} F_{i+\frac{1}{e}} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{i+\frac{1}{e}}"'] & F_i \arrow[d, "\phi_i"] \\ \mathcal{M}_0 \arrow[r, "u^p"] & \mathcal{M}_0 \end{tikzcd}$$

La monodromie, quant à elle, définit une application $c_{(e),\pi}N : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_0$ qui vérifie $\phi(c_{(e),\pi})\left[\left(c_{(e),\pi}N\right) \circ \phi_i\right] = \phi_{i-1} \circ \left(c_{(e),\pi}N\right)$.

Si on remarque pour finir que $k[u^p]/u^{ep}$ est isomorphe en tant qu'anneau à $\mathcal{O}_K/p$ (en envoyant u^p sur π), on obtient la proposition suivante qui énonce précisément le pont entre les catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$ et celles de Fontaine-Laffaille, du moins dans le cas modulo p :

Proposition 2.3.5. *La catégorie $\widetilde{\underline{MF}}^r$ est équivalente à la catégorie dont les objets sont les données suivantes :*

1. *un $\mathcal{O}_K/p$-module libre de rang fini $\mathcal{M}$;*
2. *une filtration décroissante (F_i) de sous-modules de $\mathcal{M}$ contenant $\pi\mathcal{M}$ indexée par les rationnels de dénominateur e compris entre 0 et r telle que $F_0 = \mathcal{M}$;*
3. *des applications ϕ-semi-linéaires $\phi_i : F_i \to \mathcal{M}$ vérifiant $\phi_{i|F_{i+\frac{1}{e}}} = \pi\phi_{i+\frac{1}{e}}$, $\phi_{i+\frac{j}{e}}(\pi x) = \pi^{p-j}\phi_i(x)$ pour tout $x \in F_i$ et $0 \leqslant j \leqslant p$, et telles que $\sum_i \mathrm{im}\,\phi_i$ engendre $\mathcal{M}$;*
4. *d'une application linéaire $N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ telle que $\phi(c_\pi) \cdot N \circ \phi_i = \phi_{i-1} \circ N$ pour tout i*

et où les flèches sont les morphismes $\mathcal{O}_K/p$-linéaires compatibles à toutes les structures.

Remarque. Dans le cas non ramifié (*i.e.* $e = 1$ et $c_{(e),\pi} = 1$), on retrouve exactement la description des catégories de Fontaine-Laffaille modulo p (voir [FL82]). On peut étendre cette remarque à toute une sous-catégorie de $\underline{\mathcal{M}}^r$ comme expliqué dans le paragraphe 2.4.1 de [Bre97a].

On peut résumer tout ce qui précède par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\underline{\mathrm{MF}}}^r_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, bend right] & \widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e),0} \\
\widetilde{\underline{\mathrm{MF}}}^r \arrow[r, hook] \arrow[u] & \widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Les flèches qui montent correspondent aux foncteurs d'oubli évidents. La flèche courbe est un foncteur « N canonique » qui munit un objet de $\widetilde{\underline{\mathrm{MF}}}^r_0$ du N (nécessairement unique) donné par le iii) de la proposition 2.3.1. On pourrait se demander s'il est possible de prolonger ce foncteur à tout $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e),0}$. La réponse est oui dans le cas $r = 1$ (voir le lemme 5.1.2. de [BCDT01]), et non dans le cas général puisqu'il n'est déjà pas vrai que le foncteur d'oubli $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)} \to \widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e),0}$ est toujours essentiellement surjectif (reprendre l'exemple donné dans la démonstration de la proposition 2.3.3)

2.4 Un mot sur le cas $r = 1$

Ce cas est amplement discuté dans [Bre00b]. Plus exactement, Breuil construit là un foncteur contravariant entre la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^1_0$ et la catégorie des schémas en groupes finis et plats sur $\mathcal{O}_K$ tués par p. Il prouve ensuite, en exhibant en quasi-inverse, que ce foncteur est une anti-équivalence de catégories.

Il étend par la suite ce foncteur à toute la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^1_0$ et atteint tous les schémas en groupes sur $\mathcal{O}_K$ tués par une puissance de p. De cette façon, Breuil retrouve la classification des schémas en groupes sur $\mathcal{O}_K$ débutée par Raynaud ([Ray74]) et poursuivie par Fontaine ([Fon75d]) et Conrad ([Con99]), et étend même cette classification sans restriction sur la ramification.

2.5 Des catégories abéliennes et artiniennes

Nous montrons dans ce paragraphe que les catégories $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ et $\underline{\mathcal{M}}^r$ sont abéliennes. Nous rappelons dans un premier temps que ce résultat est prouvé dans [Bre97a] lorsque $e = 1$.

2.5.1 La catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$

Notons $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ obtenue en considérant des $k[u]/u^p$-modules libres à la place de $k[u]/u^{ep}$-modules libres. Un raisonnement rigoureusement identique à celui établi pour prouver le corollaire 2.2.3.2 de [Bre97a] donne :

Théorème 2.5.1. *La catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ est abélienne et artinienne. Plus précisément soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$, alors :*

i) $f(\mathrm{Fil}^r\mathcal{X}) = \mathrm{Fil}^r\mathcal{Y} \cap f(\mathcal{X})$;

ii) Soit $\mathcal{K}$ le noyau de l'application $k[u]/u^p$-linéaire sous-jacente, $\mathrm{Fil}^r\mathcal{K} = \mathrm{Fil}^r\mathcal{X} \cap \mathcal{K}$, $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{K} \to \mathcal{K}$ la restriction de $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ et $N : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ la restriction de $N : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Avec ces structures, $\mathcal{K}$ est un objet de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ et donne le noyau de f dans $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$;

iii) Soit $\mathcal{C}$ le conoyau de l'application $k[u]/u^p$-linéaire sous-jacente, $\mathrm{Fil}^r\mathcal{C}$ l'image de $\mathrm{Fil}^r\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{C}$, $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ l'application qu'induit $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ et $N : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ le quotient de $N : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$. Avec ces structures, $\mathcal{C}$ est un objet de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ et donne le conoyau de f dans $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$.

Nous allons à présent montrer les propriétés analogues pour la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$.

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un morphisme de la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$. Notons $\bar{\mathcal{X}}$ (resp. $\bar{\mathcal{Y}}$) la réduction de $\mathcal{X}$ (resp. de $\mathcal{Y}$) modulo u^p, et $p_\mathcal{X} : \mathcal{X} \to \bar{\mathcal{X}}$ (resp. $p_\mathcal{Y} : \mathcal{Y} \to \bar{\mathcal{Y}}$) la projection correspondante. On munit $\bar{\mathcal{X}}$ et $\bar{\mathcal{Y}}$ de Fil^r, Frobenius et opérateurs de monodromie en regardant les structures quotients. On obtient des objets de la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ et la flèche f induit un morphisme $\bar{f} : \bar{\mathcal{X}} \to \bar{\mathcal{Y}}$ dans cette catégorie. Finalement, puisque $er < p - 1$, on a :

$$\mathrm{Fil}^r\mathcal{X} = p_\mathcal{X}^{-1}\left(\mathrm{Fil}^r\bar{\mathcal{X}}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{Fil}^r\mathcal{Y} = p_\mathcal{Y}^{-1}\left(\mathrm{Fil}^r\bar{\mathcal{Y}}\right)$$

Lemme 2.5.2. *L'image (au sens classique) de f est un $k[u]/u^{ep}$-module libre.*

Démonstration. Comme f commute à ϕ_r, elle induit une application ($k[u^p]/u^{ep}$-linéaire) $f : \phi_r(\mathrm{Fil}^r\mathcal{X}) \to \phi_r(\mathrm{Fil}^r\mathcal{Y})$. En recopiant l'argument de la preuve de la proposition 2.2.1, on prouve qu'il existe des éléments $e_1, \ldots, e_d, e'_1, \ldots, e'_{d'}$ et des entiers $n_1, \ldots, n_d, n'_1, \ldots, n'_{d'}$ tels que $n'_{i'} > 0$ et :

$$\begin{aligned} \mathrm{im}\, f &= k[u]/u^{ep}e_1 \oplus \ldots \oplus k[u]/u^{ep}e_d \oplus u^{pn'_1}k[u]/u^{ep}e'_1 \oplus \ldots \oplus u^{pn'_{d'}}k[u]/u^{ep}e'_{d'} \\ \mathrm{Fil}^r\mathcal{Y} \cap \mathrm{im}\, f &= u^{n_1}k[u]/u^{ep}e_1 \oplus \ldots \oplus u^{n_d}k[u]/u^{ep}e_d \oplus u^{pn'_1}k[u]/u^{ep}e'_1 \oplus \ldots \oplus u^{pn'_{d'}}k[u]/u^{ep}e'_{d'} \end{aligned}$$

De plus, comme $\phi_r(\mathrm{Fil}^r\mathcal{X})$ doit engendrer $\mathcal{X}$ et que $f(\mathrm{Fil}^r\mathcal{X}) \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{Y}$, on en déduit que $\phi_r(\mathrm{Fil}^r\mathcal{Y} \cap \mathrm{im}\, f)$ doit au moins engendrer $\mathrm{im}\, f$. Mais, puisque $er < p - 1$, on a forcément $\phi_r(u^p\mathcal{Y}) \subset u^{2p}\mathcal{Y}$ et par un argument de dimension, le seul moyen de tout concilier est d'avoir $d' = 0$, ce qui achève la démonstration. □

Lemme 2.5.3. *Le noyau et le conoyau de f sont des $k\,[u]\,/u^{ep}$-modules libres.*

Démonstration. En tant que $k\,[u]\,/u^{ep}$-module, l'image de f s'identifie au quotient $\mathcal{X}/\ker f$ et le conoyau au quotient $\mathcal{Y}/\mathrm{im}\, f$. Le lemme résulte du fait que si $N \subset M$ sont des $k\,[u]\,/u^{ep}$-modules de type fini et si deux modules parmi M, N et M/N sont libres sur $k\,[u]\,/u^{ep}$, alors il en est de même du troisième. □

Notons $\mathcal{K}$ le noyau de f, $\mathcal{C}$ le conoyau de f, $\bar{\mathcal{K}}$ le noyau de $\bar{f}$ et $\bar{\mathcal{C}}$ le conoyau de $\bar{f}$ et considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{K} \arrow[r] \arrow[d, "p_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_{\mathcal{X}}"'] & \mathcal{Y} \arrow[r] \arrow[d, "p_{\mathcal{Y}}"'] & \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d, "p_{\mathcal{C}}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bar{\mathcal{K}} \arrow[r] & \bar{\mathcal{X}} \arrow[r, "\bar{f}"] & \bar{\mathcal{Y}} \arrow[r] & \bar{\mathcal{C}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Lemme 2.5.4. *La flèche $p_{\mathcal{K}}$ (resp. $p_{\mathcal{C}}$) définie par le diagramme précédent est surjective et de noyau $u^p\mathcal{K}$ (resp. $u^p\mathcal{C}$). Autrement dit $\bar{\mathcal{K}}$ s'identifie à $\mathcal{K}/u^p\mathcal{K}$ et $\bar{\mathcal{C}}$ à $\mathcal{C}/u^p\mathcal{C}$.*

Démonstration. Commençons par le noyau et la surjectivité. Soit $\bar{x} \in \bar{\mathcal{K}}$. Il se relève en $x \in \mathcal{X}$ tel que $f\,(x) = 0 \pmod{u^p}$. Il existe donc $y \in \mathcal{Y}$ tel que $f\,(x) = u^p y$. On a $u^p y \in \mathrm{im}\, f$ et, puisque $\mathrm{im}\, f$ est libre sur $k\,[u]\,/u^{ep}$, il existe $y' \in \mathrm{im}\, f$ tel que $u^p y = u^p y'$ et donc $u^p y = f\,(u^p x')$ pour un certain $x' \in \mathcal{X}$. Mais alors $x - u^p x' \in \mathcal{K}$ s'envoie sur $\bar{x}$ par $p_{\mathcal{K}}$. Ceci prouve la surjectivité.

Soit maintenant $x \in \mathcal{K}$ tel que $p_{\mathcal{K}}\,(x) = 0$. On a $p_{\mathcal{X}}\,(x) = 0$ et donc x est un multiple de u^p dans $\mathcal{X}$. Il l'est aussi dans $\mathcal{K}$ puisque $\mathcal{K}$ est un $k\,[u]\,/u^{ep}$-module libre. Finalement $\ker p_{\mathcal{K}} = u^p\mathcal{K}$.

On utilise des arguments analogues pour le conoyau. □

Lemme 2.5.5. *On a $f\,(\mathrm{Fil}^r\mathcal{X}) = \mathrm{Fil}^r\mathcal{Y} \cap f\,(\mathcal{X})$.*

Démonstration. On a évidemment toujours l'inclusion $f\,(\mathrm{Fil}^r\mathcal{X}) \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{Y} \cap f\,(\mathcal{X})$.

Soit $y \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{Y} \cap f\,(\mathcal{X})$. La réduction $\bar{y}$ de y modulo u^p est un élément de $\mathrm{Fil}^r\bar{\mathcal{Y}} \cap \bar{f}\left(\bar{\mathcal{X}}\right)$ (en gardant les notations précédentes) et d'après le théorème 2.5.1, $\bar{y} \in \bar{f}\left(\mathrm{Fil}^r\bar{\mathcal{X}}\right)$. Il existe $\bar{x} \in \mathrm{Fil}^r\bar{\mathcal{X}}$ tel que $\bar{y} = \bar{f}\,(\bar{x})$. Notons x un relevé de $\bar{x}$ dans $\mathrm{Fil}^r\mathcal{X}$. Il existe un élément $y' \in \mathcal{Y}$ tel que $y = f\,(x) + u^p y'$. Les éléments y et $f\,(x)$ sont dans $\mathrm{im}\, f$, il en est donc de même de $u^p y'$ et puisque $\mathrm{im}\, f$ est libre sur $k\,[u]\,/u^{ep}$, il existe $y'' \in \mathrm{im}\, f$ tel que $u^p y' = u^p y''$. On écrit $y'' = f\,(x'')$ pour un certain $x'' \in \mathcal{X}$, et il vient $y = f\,(x + u^p x'')$. Comme $u^{er}\mathcal{X} \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{X}$ et $er < p - 1$, on a $u^p x'' \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{X}$ et donc $x + u^p x'' \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{X}$. Finalement $y \in f\,(\mathrm{Fil}^r\mathcal{X})$. □

On définit $\mathrm{Fil}^r\mathcal{K} = \mathcal{K} \cap \mathrm{Fil}^r\mathcal{X}$, un Frobenius $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{K} \to \mathcal{K}$ et un opérateur de monodromie $N : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ déduits des opérateurs sur $\mathcal{X}$. De même, on définit $\mathrm{Fil}^r\mathcal{C}$ comme l'image de $\mathrm{Fil}^r\mathcal{Y}$ par la projection $\mathcal{Y} \to \mathcal{C}$, un Frobenius et un opérateur de monodromie sur $\mathcal{C}$, les opérateurs sur $\mathcal{Y}$ passant au quotient.

Lemme 2.5.6. *Munis des structures précédentes, les objets $\mathcal{K}$ et $\mathcal{C}$ sont des objets de la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ et respectivement un noyau et un conoyau de l'application f.*

Démonstration. Les conditions de compatibilité et le fait que si les objets sont dans la catégorie, ils sont noyau ou conoyau est évident. Le seul point délicat est la « surjectivité » des ϕ_r.

Modulo u^p, les objets $\mathcal{K}$ et $\mathcal{C}$ avec toutes leurs structures se réduisent d'après le lemme 2.5.4 sur $\bar{\mathcal{K}}$ et $\bar{\mathcal{C}}$ et on sait alors que les ϕ_r définis sur ces objets sont « surjectifs ». Notons $(e_1, \dots, e_d)$ une base adaptée de $\mathcal{K}$ (qui existe bien) et G la matrice de ϕ_r dans cette base. Cette matrice est inversible modulo u^p et donc son déterminant est inversible modulo u^p puis modulo u^{ep}. La matrice G est donc inversible et im ϕ_r engendre bien tout $\mathcal{K}$. On raisonne de même pour $\mathcal{C}$. $\square$

En rassemblant tous les résultats précédents, on obtient :

Corollaire 2.5.7. *La catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ est abélienne et artinienne. Plus précisément soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$, alors :*

i) $f\,(\mathrm{Fil}^r\mathcal{X}) = \mathrm{Fil}^r\mathcal{Y} \cap f\,(\mathcal{X})$;

ii) Soit $\mathcal{K}$ le noyau de l'application $k\,[u]\,/u^{ep}$-linéaire sous-jacente, $\mathrm{Fil}^r\mathcal{K} = \mathrm{Fil}^r\mathcal{X} \cap \mathcal{K}$, $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{K} \to \mathcal{K}$ la restriction de $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ et $N : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ la restriction de $N : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Avec ces structures, $\mathcal{K}$ est un objet de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ et donne le noyau de f dans $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$;

iii) Soit $\mathcal{C}$ le conoyau de l'application $k\,[u]\,/u^{ep}$-linéaire sous-jacente, $\mathrm{Fil}^r\mathcal{C}$ l'image de $\mathrm{Fil}^r\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{C}$, $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ l'application qu'induit $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ et $N : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ le quotient de $N : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$. Avec ces structures, $\mathcal{C}$ est un objet de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ et donne le conoyau de f dans $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$.

2.5.2 La catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$

On procède par dévissage. La preuve est en tout point analogue à celle déjà connue dans le cas $e = 1$ et présentée dans le paragraphe 2.3 de [Bre97a]. Les lemmes et les propositions successives gardent un sens dans ce contexte plus général, et sont également vrais, les preuves étant encore textuellement les mêmes. Nous n'insisterons donc pas davantage et laissons le lecteur se reporter à cette référence.

Énonçons toutefois complètement le théorème que l'on obtient, très analogue au corollaire 2.5.7 :

Théorème 2.5.8. *La catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ est abélienne et artinienne. Plus précisément soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un morphisme dans $\underline{\mathcal{M}}^r$, alors :*

i) $f\,(\mathrm{Fil}^r\mathcal{X}) = \mathrm{Fil}^r\mathcal{Y} \cap f\,(\mathcal{X})$;

ii) Soit $\mathcal{K}$ le noyau de l'application S-linéaire sous-jacente, $\mathrm{Fil}^r\mathcal{K} = \mathrm{Fil}^r\mathcal{X} \cap \mathcal{K}$, $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{K} \to \mathcal{K}$ la restriction de $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ et $N : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ la restriction de $N : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Avec ces structures, $\mathcal{K}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ et donne le noyau de f dans $\underline{\mathcal{M}}^r$;

iii) Soit $\mathcal{C}$ le conoyau de l'application S-linéaire sous-jacente, $\mathrm{Fil}^r\mathcal{C}$ l'image de $\mathrm{Fil}^r\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{C}$, $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ l'application qu'induit $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ et $N : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ le quotient de

$N : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$. Avec ces structures, $\mathcal{C}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ et donne le conoyau de f dans $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Remarque. De même, on prouve que les catégories $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r_{(e),0}$ et $\underline{\mathcal{M}}^r_0$ sont abéliennes et artiniennes.

3 Classification des objets simples

Nous allons donner une classification complète des objets simples de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ lorsque le corps résiduel k est algébriquement clos. Nous essaierons également d'expliquer ce qui se passe lorsque ce n'est pas le cas. Pour l'instant, on ne fait aucune hypothèse supplémentaire sur k.

On considère $\mathcal{M}$ un objet simple (donc non nul) de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Il est obligatoirement tué par p. En effet, si ce n'était pas le cas, le noyau de la multiplication par p dans $\mathcal{M}$ fournirait un sous-objet strict de $\mathcal{M}$ (notez que la multiplication par p ne peut pas être injective car elle est nilpotente : $\mathcal{M}$ est supposé être tué par une puissance de p). L'objet simple $\mathcal{M}$ peut être vu dans la catégorie $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ (du moins si $r > 0$, mais dans le cas contraire, le résultat est immédiat et laissé au lecteur) : c'est un $k\left[u\right]/u^{ep}$-module muni d'un Fil^r, d'un ϕ_r et d'un opérateur de monodromie vérifiant les bonnes propriétés.

3.1 La monodromie

Si l'on note $\mathcal{M}_0 = \operatorname{im}\phi_r$, l'application de monodromie N induit une application linéaire $c_{(e),\pi}N : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_0$ (voir proposition 2.2.4) et il existe $x_1 \in \mathcal{M}_0 \backslash u\mathcal{M}_0$ tel que $N(x_1) = 0$ (voir corollaire 2.2.5). Notons $x_2 = \varphi_r(x_1)$ (voir définition 2.2.2) puis par récurrence $x_{i+1} = \varphi_r(x_i)$, ce qui est possible d'après la deuxième partie de la proposition 2.2.3. On a $N(x_i) = 0$ pour tout entier i.

Notons $\bar{x}_i$ la réduction modulo u^p de x_i. Les $\bar{x}_i$ sont des éléments non nuls de $\mathcal{M}_0/u^p\mathcal{M}_0$ qui est un k-espace vectoriel de dimension finie. Notons $n \geqslant 1$ le plus petit indice tel que $\bar{x}_{n+1}$ puisse s'écrire comme combinaison linéaire des $\bar{x}_i$ pour i variant de 1 à n. Il existe donc $\lambda_i \in k$ tels que :

$$\bar{x}_{n+1} = \lambda_1\bar{x}_1 + \ldots + \lambda_n\bar{x}_n$$

et on peut supposer $\lambda_1 \neq 0$ quitte à remplacer x_1 par le plus petit indice i tel que $\lambda_i \neq 0$. Comme $\bar{x}_{n+1} \neq 0$, les λ_i ne peuvent être tous simultanément nuls.

Nous allons à présent corriger les x_i pour que cette relation ne soit plus vraie seulement modulo u^p. On procède par approximations successives et on construit une suite indexée par j d'éléments $x_i^{(j)}$ qui sont tels que $x_i^{(j)} \equiv x_i \pmod{u^p}$, $x_{i+1}^{(j)} = \varphi_r(x_i^{(j)})$, $N(x_{i+1}^{(j)}) = 0$ et finalement :

$$x_{n+1}^{(j)} \equiv \lambda_1 x_1^{(j)} + \ldots + \lambda_n x_n^{(j)} \pmod{u^{jp}}$$

les λ_i restant inchangés. On a une solution pour $j = 1$. Supposons qu'on l'ait pour j et construisons-en une pour $j+1$. On cherche un élément $r \in \mathcal{M}_0$ tel que l'on puisse poser $x_1^{(j+1)} = x_1^{(j)} + u^{jp}r$. On définirait alors les $x_i^{(j+1)}$ *via* la formule de récurrence $x_{i+1}^{(j+1)} = \varphi_r(x_i^{(j+1)})$ et il est facile de vérifier que pour tout $i \geqslant 2$, on aurait $x_i^{(j+1)} \equiv x_i^{(j)} \pmod{u^{(j+1)p}}$. Au final, il suffit de trouver r tel que :

$$x_{n+1}^{(j)} \equiv \lambda_1 \left(x_1^{(j)} + u^{jp}r \right) + \lambda_2 x_2^{(j)} + \ldots + \lambda_n x_n^{(j)} \pmod{u^{(j+1)p}}$$

mais comme par hypothèse, on a $x_{n+1}^{(j)} \equiv \lambda_1 x_1^{(j)} + \ldots + \lambda_n x_n^{(j)} \pmod{u^{jp}}$, on a bien l'existence d'un tel r : il suffit de le prendre tel que $u^{jp}\lambda_1 r = x_{n+1}^{(j)} - \lambda_1 x_1^{(j)} - \ldots - \lambda_n x_n^{(j)}$. De plus, en appliquant N à cette dernière égalité, on voit que $N(u^{jp}\lambda_1 r) = \lambda_1 u^{jp} N(r) = 0$ et donc que $N(x_1^{(j+1)}) = 0$ puisque λ_1 est supposé non nul. Ceci implique la nullité de tous les $N(x_i^{(j+1)})$.

Pour $j = e$, l'égalité a lieu modulo u^{ep} et donc dans $\mathcal{M}$. Soit $\mathcal{K}$ le sous-$k[u]/u^{ep}$-module engendré par les $x_i^{(e)}$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$. La liberté sur k des $\bar{x}_i$ assure que $\mathcal{K}$ est un module libre de rang n. Notons $\mathcal{M}_i$ le sous-module de $\mathcal{M}$ engendré par $x_i^{(e)}$, $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}_i = \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \cap \mathcal{M}_i$ et finalement $\mathrm{Fil}^r\mathcal{K} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}_i \cap \mathcal{K}$. Par construction, N stabilise $\mathcal{K}$ et ϕ_r envoie $\mathrm{Fil}^r\mathcal{K}$ sur $\mathcal{K}$. En outre, encore par construction, l'image de la restriction de ϕ_r à $\mathrm{Fil}^r\mathcal{K}$ engendre $\mathcal{K}$: on voit que l'objet $\mathcal{K}$ est dans la catégorie $\widetilde{\underline{\mathrm{MF}}}^r$. Comme $\mathcal{M}$ est simple, ce sous-objet est tout $\mathcal{M}$. Ainsi on a prouvé la proposition suivante :

Proposition 3.1.1. *Soit $\mathcal{M}$ un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Alors $\mathcal{M}$ est dans la catégorie $\widetilde{\underline{MF}}^r$ et l'opérateur de monodromie N est nul sur $\mathrm{im}\,\phi_r$. De plus $\mathcal{M}$ admet une base adaptée de la forme $(x_1, \ldots, x_d)$ telle que $N(x_i) = 0$, $x_{i+1} = \varphi_r(x_i)$ (voir définition 2.2.2) et :*

$$\varphi_r(x_d) = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_d x_d$$

où les λ_i sont des éléments de k tels que $\lambda_1 \neq 0$.

qui admet pour corollaire immédiat la proposition 2.3.4 que l'on vient donc de démontrer.

3.2 Une base adaptée simple

Nous allons dans ce paragraphe préciser un peu plus l'énoncé de la proposition 3.1.1 dans le cas où le corps résiduel k est algébriquement clos.

Lemme 3.2.1. *Supposons k algébriquement clos. Soit $\mathcal{M}$ un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Alors $\mathcal{M}$ est dans $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ et il existe $(e_1, \ldots, e_d)$ une base adaptée de $\mathcal{M}$ telle que $N(e_i) = 0$, $e_{i+1} = \varphi_r(e_i)$, les indices i étant considérés dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.*

Démonstration. On sait d'après la proposition 3.1.1 qu'il existe une base adaptée $(x_1, \ldots, x_d)$ telle que $\varphi_r(x_i) = x_{i+1}$ pour i compris entre 1 et $d-1$ et $\varphi_r(x_d) = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_d x_d$ où $\lambda_i \in k$ et $\lambda_1 \neq 0$.

Parmi toutes les bases adaptées qui vérifient ces conditions, choisissons-en une pour laquelle le nombre de λ_i non nuls est minimal. On écrit alors plutôt :

$$x_{d+1} = \varphi_r(x_d) = \lambda_1 x_{i_1} + \ldots + \lambda_k x_{i_k}$$

où tous les λ_i sont non nuls et les indices i_k sont compris entre 1 et d. De plus, on a $i_1 = 1$. Notons pour tout i, n_i le plus petit entier tel que $u^{n_i} x_i \in \mathrm{Fil}^r \mathcal{M}$. Si tous les n_{i_j} n'étaient pas égaux, $\varphi_r(x_{d+1})$ s'écrirait comme une combinaison linéaire de $x_2, \ldots, x_{d+1}$ faisant intervenir strictement moins de k termes et la famille $(x_2, \ldots, x_{d+1})$ fournirait une base adaptée de $\mathcal{M}$ (en reprenant l'étude faite dans le paragraphe précédent). Mais ceci est en contradiction avec la minimalité considérée.

Ainsi tous les n_{i_j} sont égaux et donc égaux à n_{d+1}. Par récurrence, on prouve que pour tout entier fixé a, tous les n_{i_j+a} sont égaux, les indices $i_j + a$ étant considérés modulo d.

Notons t le plus grand commun diviseur de d et de toutes les différences $i_j - i_{j'}$. D'après ce qui précède la suite des n_i est périodique de période (divisant) t. On considère alors le sous-k-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ engendré par les x_{tn} où n parcourt $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. L'application φ_r^t stabilise ce sous-espace et y est ϕ^t-semi-linéaire. En particulier, puisque k est algébriquement clos, il existe un élément e_1 de ce sous-espace tel que $\varphi_r^t(e_1) = \lambda e_1$ pour un certain $\lambda \in k^\star$. Quitte à multiplier e_1 par un élément de k, on peut supposer $\lambda = 1$.

On définit $e_{i+1} = \varphi_r(e_i)$. La famille $(e_1, \ldots, e_t)$ engendre un espace stable par N et par ϕ_r qui est par construction un sous-objet non nul de $\mathcal{M}$. C'est donc tout $\mathcal{M}$. De plus, d'après la proposition 3.1.1, $N(e_i) = 0$ pour tout i. Finalement $(e_1, \ldots, e_t)$ est une base adaptée vérifiant les conditions du lemme. Cela conclut. □

3.3 Classification proprement dite

Définition 3.3.1. *Soit (n_i) une suite périodique[4] d'entiers compris entre 0 et er. On note h la période de cette suite. On définit l'objet $\mathcal{M}(n_i) \in \underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ de la façon suivante :*

1. $\mathcal{M}(n_i) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} k[u]/u^{ep} e_i$;
2. *Fil*$^r \mathcal{M}(n_i) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} u^{n_i} k[u]/u^{ep} e_i$;
3. $\phi_r(u^{n_i} e_i) = e_{i+1}$ *pour tout indice i ;*
4. $N(e_i) = 0$ *pour tout indice i.*

Il est facile de vérifier que tous ces objets sont bien dans la catégorie $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ et on a le théorème suivant :

Théorème 3.3.2. *Supposons k algébriquement clos. Les objets $\mathcal{M}(n_i)$ sont des objets simples de la catégorie $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$. De plus, si $\mathcal{M}$ est un objet simple de la catégorie $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$, alors il est isomorphe à un certain $\mathcal{M}(n_i)$.*

[4] Par « périodique », on entend dans ce chapitre « périodique dès le début » et pas « périodique à partir d'un certain rang ».

Démonstration. Voyons d'abord la simplicité de $\mathcal{M}(n_i)$. Soit $\mathcal{M}$ un sous-objet non nul de $\mathcal{M}(n_i)$. L'image de la restriction de ϕ_r à $\mathcal{M} \cap \mathrm{Fil}^r \mathcal{M}(n_i)$ est supposée engendrer tout $\mathcal{M}$; en particulier elle n'est pas réduite à 0 et comprend un élément non divisible par u^p, disons x. On écrit $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_h e_h$ où les λ_i sont des polynômes à coefficients dans $k[u^p]/u^{ep}$. On peut supposer $\lambda_i \in k$ quitte à remplacer x par $\varphi_r \circ \varphi_r \circ \varphi_r(x)$.

Considérons un x pour lequel le nombre de λ_i non nuls est minimal et écrivons :

$$x = \lambda_1 e_{i_1} + \ldots + \lambda_k e_{i_k}$$

avec ici tous les λ_i non nuls. En appliquant φ_r éventuellement plusieurs fois, on voit que tous les n_{i_j} doivent être égaux car sinon, on obtient un nouvel x qui serait combinaison d'un nombre plus petit de e_i. On applique alors φ_r à l'égalité précédente et comme précédemment, on prouve que tous les n_{i_j+1} sont égaux. Par récurrence, on voit que pour a fixé tous les n_{i_j+a} sont égaux. Ainsi, pour que la suite (n_i) soit périodique de période exactement h, il faut que $k = 1$, c'est-à-dire que x soit multiple de l'un des e_i. Mais alors le sous-objet engendré par x est tout $\mathcal{M}(n_i)$ et finalement $\mathcal{M} = \mathcal{M}(n_i)$. Ce qui assure la simplicité.

Voyons la réciproque. On applique le lemme 3.2.1 qui donne une description explicite de l'objet $\mathcal{M}$. Il reste juste à démontrer que la suite (n_i) ne peut être périodique de période divisant strictement h. Mais supposons que ce soit le cas et notons t cette période. On considère le sous-objet engendré par l'élément $x = e_t + e_{2t} + \ldots + e_h$ et on vérifie immédiatement qu'il est non nul et strictement inclus dans $\mathcal{M}$. C'est une contradiction. □

Remarque. En utilisant la correspondance de [Bre00b], on retrouve exactement la classification donnée par Raynaud dans [Ray74].

3.3.1 Étude des endomorphismes

On suppose toujours le corps k algébriquement clos. Soit $\mathcal{M}$ un objet simple de $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$. Soit $(e_1, \ldots, e_h)$ une base adaptée de $\mathcal{M}$ vérifiant les conditions du théorème 3.3.2. Nous allons en fait voir que les e_i sont presque uniquement déterminés. Plus précisément, on a :

Théorème 3.3.3. *Supposons k algébriquement clos. Si $\lambda \in k$ vérifie $\lambda^{p^h} = \lambda$, alors l'application $\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ définie par $\psi(e_i) = \lambda^{p^i} e_i$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}$. Ce sont les seuls.*

Démonstration. Déjà il est facile de vérifier que les applications définies dans l'énoncé du théorème sont bien compatibles au Fil^r, au Frobenius et à l'opérateur de monodromie.

Pour la réciproque, nous allons anticiper sur des résultats ultérieurs donnant une application non nulle $\mathrm{End}(\mathcal{M}) \to \mathrm{End}(T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}))$ (la non-nullité se déduit de la fidélité du foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ selon le corollaire 4.3.4). D'autre part $\mathrm{End}(\mathcal{M})$ est un corps *a priori* non commutatif et $\mathrm{End}(T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}))$ est un corps fini à p^h éléments (cela se déduit de théorème 4.2.2). On en déduit facilement que la flèche $\mathrm{End}(\mathcal{M}) \to \mathrm{End}(T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}))$ est bijective, ce qui prouve le théorème. □

Corollaire 3.3.4. *Les objets simples $\mathcal{M}(n_i)$ et $\mathcal{M}(m_i)$ sont isomorphes si et seulement si la suite (m_i) se déduit de la suite (n_i) par translation.*

Démonstration. Si deux objets $\mathcal{M}(n_i)$ et $\mathcal{M}(m_i)$ sont isomorphes, on peut transporter une base adaptée de $\mathcal{M}(n_i)$ à $\mathcal{M}(m_i)$ et le théorème précédent entraîne la conclusion voulue. □

3.3.2 Un autre point de vue

Donnons finalement un point de vue différent sur cette classification, peut-être plus agréable à retenir.

Soit $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'entiers compris entre 0 et $p-1$ et soit t le rationnel dont le développement « décimal » en base p est :

$$t = 0\,,\, n_1\, n_2\, n_3\, n_4\ \ldots$$

On a une propriété classique :

Propriété 3.3.5. *Avec les notations précédentes, les suites périodiques sont exactement celles qui correspondent aux rationnels de $\mathbb{Z}_{(p)} \cap [0,1]$ où $\mathbb{Z}_{(p)}$ désigne le localisé de $\mathbb{Z}$ en p.*

On peut alors poser la définition suivante :

Définition 3.3.6. *Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de $\mathbb{Z}_{(p)}$ pour la relation d'équivalence suivante : $a \sim b$ si et seulement s'il existe un entier n tel que $a \equiv p^n b$ $(\mathrm{mod}\ \mathbb{Z})$.*

La dernière relation d'équivalence n'est pas mystérieuse : elle correspond simplement à un décalage des décimales du nombre. En particulier, à cause de la périodicité, les classes d'équivalence sont toutes finies.

Dans ces conditions, $\mathcal{R}$ classifie exactement les objets simples de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ (*via* la correspondance que l'on a décrite précédemment).

Nous verrons par la suite que le « *rationnel classifiant* » va réapparaître de façon naturelle.

4 Étude du foncteur $T^\star_{\text{st}}$

4.1 Un système préliminaire

Ce paragraphe présente une version légèrement différente de résultats classiques et par exemple déjà discutés dans [Wac97] ou dans le paragraphe 3.3.2 de [Bre97a]. On suppose dans ce paragraphe que le corps résiduel k est algébriquement clos.

On considère un entier h strictement postitif. On fixe $\eta^{(h)}$ une racine $\left(p^h-1\right)$-ième de l'uniformisante π de K et on appelle $K^{(h)}$ l'extension de K engendrée par cette racine. On rappelle que $K^{(h)}/K$ est totalement et modérément ramifiée de degré $p^h - 1$. On rappelle également que la limite inductive de toutes ces extensions est l'extension maximale modérément ramifiée de K. Par la suite, lorsqu'il n'y aura pas de risque d'ambiguité, on notera η à la place de $\eta^{(h)}$. On rappelle enfin que π_1 désigne une racine p-ième de π.

On s'intéresse au système d'équations suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\left(\pi_1^{n_1}\hat{x}_1+\hat{c}_1\right)^p}{\pi^{er}} & = & \varpi\hat{x}_2 + \hat{r}_1 \\ \frac{\left(\pi_1^{n_2}\hat{x}_2+\hat{c}_2\right)^p}{\pi^{er}} & = & \varpi\hat{x}_3 + \hat{r}_2 \\ & \vdots & \\ \frac{\left(\pi_1^{n_h}\hat{x}_h+\hat{c}_h\right)^p}{\pi^{er}} & = & \varpi\hat{x}_1 + \hat{r}_h \end{array} \right.$$

où $\varpi \in \{-1, 1\}$ est un signe, les n_i sont des entiers fixés tous compris entre 0 et er, et où les $\hat{r}_i$ et les $\hat{c}_i$ sont des éléments de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. Les inconnues sont les $\hat{x}_i$ que l'on cherche également dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. On pose dans la suite $m_i = er - n_i$.

4.1.1 Sans coefficient constant

On s'intéresse tout d'abord au cas où toutes les constantes $\hat{r}_i$ et $\hat{c}_i$ sont nulles. Il est alors possible de résoudre directement le système dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. En effet, le système se réécrit simplement :

$$\hat{x}_i^p = \varpi\pi^{m_i}\hat{x}_{i+1}.$$

Par des manipulations simples, on voit que $\hat{x}_1$ doit être solution de l'équation :

$$\hat{x}_1^{p^h} = \varpi^h\pi^{s_1}\hat{x}_1$$

où s_1 est défini par la formule :

$$s_1 = m_1p^{h-1} + m_2p^{h-2} + \ldots + m_{h-1}p + m_h.$$

Cette équation admet p^h solutions qui sont 0 et toutes les racines $\left(p^h - 1\right)$-ièmes de $\varpi^h\pi^{s_1}$. À partir de $\hat{x}_1$, on reconstruit les autres $\hat{x}_i$ et on vérifie qu'ils forment bien une solution du système.

On peut présenter les choses de façon plus homogène en procédant comme suit. On pose pour tout $i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$:

$$s_i = m_ip^{h-1} + m_{i+1}p^{h-2} + \ldots + m_{i+h-2}p + m_{i+h-1}.$$

Si ε est une racine $\left(p^h - 1\right)$-ième de ϖ^h (qui est déjà dans K), la famille des $\hat{x}_i = \varpi^i\varepsilon^{p^i}\eta^{s_i}$ est une solution de (S). Toutes les solutions s'obtiennent ainsi à l'exception de la solution nulle $\hat{x}_1 = \ldots = \hat{x}_h = 0$.

4.1.2 Un lemme à la Hensel

On ne suppose plus que les constantes sont nulles et on cherche un lien entre les solutions de (S) modulo p et les solutions de (S) dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$:

Lemme 4.1.1. *Avec les notations précédentes, si le système (S) admet une solution $(x_1, \ldots, x_h)$ modulo p, alors cette solution se relève dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ en une solution $(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_h)$.*

Démonstration. On construit cette solution par approximations successives. Fixons tout d'abord une extension finie L de $K^{(h)}$ suffisamment grande pour contenir tous les $\hat{r}_i$, les $\hat{c}_i$ et pour que tous les x_i puissent s'y relever. L'extension $L/K^{(h)}$ est totalement ramifiée (puisque k est supposé algébriquement clos), disons de degré d. Notons $\mathcal{O}_L$ l'anneau des entiers de L.

On va construire une suite de $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_h^{(n)})$ de solutions compatibles du système (S) modulo η^n dans $\mathcal{O}_L$. Il suffira par la suite de prendre la limite de cette suite pour avoir une solution du système dans $\mathcal{O}_L$ et donc dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$.

On a déjà, par hypothèse, un h-uplet pour $n = e\left(p^h - 1\right)$. Les suivants se construisent par récurrence. On part d'un entier $n \geqslant e\left(p^h - 1\right)$ et d'éléments $x_1^{(n)}, \ldots, x_h^{(n)}$ vérifiant :

$$\frac{\left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^p}{\pi^{er}} \equiv \varpi x_{i+1}^{(n)} + \hat{r}_i \pmod{\eta^n}$$

pour tout indice i pris dans $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ et on cherche à construire $y_1, \ldots, y_h$, tels que :

$$\frac{\left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i + \pi_1^{n_i}\eta^n y_i\right)^p}{\pi^{er}} \equiv \varpi\left(x_{i+1}^{(n)} + \eta^n y_{i+1}\right) + \hat{r}_i \pmod{\eta^{n+1}}$$

Un calcul donne :

$$\frac{\left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i + \pi_1^{n_i}\eta^n y_i\right)^p}{\pi^{er}} = \frac{\left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^p}{\pi^{er}} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \frac{\pi_1^{kn_i}\eta^{kn}}{\pi^{er}} y_i^k \left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^{p-k}$$

Soit un entier $k \geqslant 1$. On a $v\left(\frac{\pi_1^{kn_i}\eta^{kn}}{\pi^{er}}\right) = \frac{kn_i}{p} + \frac{kn}{p^h-1} - er$. D'autre part, $\frac{(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i)^p}{\pi^{er}}$ est un entier, donc de valuation positive et on en déduit que $v(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i) \geqslant \frac{er}{p}$. On obtient :

$$\begin{aligned} v_k = v\left(\frac{\pi_1^{kn_i}\eta^{kn}}{\pi^{er}}\left(\pi_1^{n_i} x_i^{(n)} + \hat{c}_i\right)^{p-k}\right) &\geqslant \frac{kn}{p^h - 1} + \frac{kn_i}{p} - er + (p-k)\frac{er}{p} \\ &= \frac{n}{p^h - 1} + (k-1)\frac{n}{p^h-1} - \frac{km_i}{p} \end{aligned}$$

Comme par hypothèse $n \geqslant e\left(p^h - 1\right)$ et $m_i \leqslant er$, il vient :

$$v_k \geqslant \frac{n}{p^h - 1} + e(k-1) - \frac{ker}{p} = \frac{n}{p^h - 1} - e + ek\left(1 - \frac{r}{p}\right)$$

Maintenant si $k < p$, le coefficient binomial $\binom{p}{k}$ est multiple de p et donc :

$$v\left(\binom{p}{k}\frac{\pi_1^{kn_i}\eta^{nk}}{\pi^{er}}\left(\pi_1^{n_i}x_i^{(n)}+\hat{c}_i\right)^{p-k}\right) \geqslant e + v_k \geqslant \frac{n}{p^h-1} + ek\left(1-\frac{r}{p}\right) \geqslant \frac{n+1}{p^h-1}$$

la dernière inégalité résultant du fait que $r \leqslant er \leqslant p-2$.

On en déduit que tous les termes de la somme pour k compris strictement entre 0 et p sont nuls modulo η^{n+1}. En fait, c'est aussi le cas pour $k = p$. En reprenant les égalités précédentes, on voit que :

$$v_p \geqslant \frac{n}{p^h-1} + e\,(p-1-r)$$

mais $p-1-r \geqslant 1$ et donc on a également $v_p \geqslant \frac{n+1}{p^h-1}$. Finalement le système que l'on a à résoudre se réduit à :

$$\frac{\left(\pi_1^{m_i}x_i^{(n)}+\hat{c}_i\right)^p}{\pi^{er}} \equiv \varpi\left(x_{i+1}^{(n)}+\eta^n y_i\right) + \hat{r}_i \pmod{\eta^{n+1}}$$

mais on sait que la différence $\frac{(\pi_1^{m_i}x_i^{(n)}+\hat{c}_i)^p}{\pi^{er}} - \varpi x_{i+1}^{(n)} - \hat{r}_i$ est un multiple de η^n, et donc s'écrit $\eta^n q_i$. Il suffit ensuite de choisir $y_i = \varpi q_i$ pour avoir la solution que l'on cherchait. $\square$

4.1.3 Résolution du système

Une première conséquence du lemme que l'on vient de prouver est la résolution du système (S) modulo p lorsque les constantes $\hat{r}_i$ et $\hat{c}_i$ sont toutes nulles :

Lemme 4.1.2. *Supposons que les constantes $\hat{r}_i$ et $\hat{c}_i$ soient nulles. Mise à part la solution nulle, les solutions de (S) dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ s'écrivent $x_i = \varpi^i\varepsilon^{p^i}\bar{\eta}^{s_i}$ où $\varepsilon \in \mathcal{O}_K$ est une racine $\left(p^h-1\right)$-ième de ϖ^h, $\bar{\eta}$ est la réduction de η dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ et :*

$$s_i = m_i p^{h-1} + m_{i+1}p^{h-2} + \ldots + m_{i+h-2}p + m_{i+h-1}.$$

Démonstration. Si ε est une racine $\left(p^h-1\right)$-ième de ϖ^h et si x_i désigne la réduction modulo p de $\varpi^i\varepsilon^{p^i}\eta^{s_i}$, le uplet $(x_1,\ldots,x_h)$ est solution du système dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. De plus, si ε et ε' sont deux racines $\left(p^h-1\right)$-ièmes de ϖ^h distinctes, on a pour tout entier i, $\varepsilon^{p^i} \neq \varepsilon'^{p^i}$ dans le corps résiduel et donc $\varepsilon^{p^i} - \varepsilon'^{p^i}$ est de valuation nulle. On en déduit, puisque $v(\eta^{s_i}) = \frac{s_i}{p^h-1} < 1$, que $x_i = \varpi^i\varepsilon^{p^i}\eta^{s_i}$ et $x'_i = \varpi^i\varepsilon'^{p^i}\eta^{s_i}$ sont distincts dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$.

On a ainsi trouvé p^h solutions à (S) modulo p. Le lemme 4.1.1 assure qu'il y en a au moins autant dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. Mais on a vu qu'il y en a exactement p^h dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, on les a donc toutes. $\square$

Passons au cas général. On reprend le système (S) mais on ne suppose plus la nullité de $\hat{r}_i$ et de $\hat{c}_i$.

Théorème 4.1.3. *Supposons que le système (S) admette une solution dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, alors il admet toujours p^h solutions dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ et p^h solutions dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. De plus l'application de réduction modulo p définit une bijection entre ces ensembles de solutions.*

En outre si $(x_1, \dots, x_h)$ et $(y_1, \dots, y_h)$ sont deux solutions distinctes dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$, alors il existe ε une racine $\left(p^h - 1\right)$-ième de ϖ^h telle que $y_i = x_i + \varpi^i \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i}$ pour tout indice $i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ où s_i est défini par la formule :

$$s_i = m_i p^{h-1} + m_{i+1} p^{h-2} + \dots + m_{i+h-2} p + m_{i+h-1}$$

Démonstration. Soit $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_h)$ une solution de (S) dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. Si l'on note $x_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ la réduction modulo p de $\hat{x}_i$, le uplet $(x_1, \dots, x_h)$ est solution de (S) modulo p. Prenons ε une racine $\left(p^h - 1\right)$-ième de ϖ^h et posons $y_i = x_i + \varpi^i \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i}$. Un calcul donne :

$$\begin{aligned}&\left(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \pi_1^{n_i} \varpi^i \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i} + \hat{c}_i\right)^p \\ &\qquad = (\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \hat{c}_i)^p + \pi^{n_i} \varpi^i \varepsilon^{p^{i+1}} \eta^{p s_i} + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \pi_1^{k n_i} \varpi^{ki} \varepsilon^{k p^i} \eta^{k s_i} \left(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \hat{c}_i\right)^{p-k}\end{aligned}$$

Or les $\hat{x}_i$ forment une solution de (S) et donc on a $v(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \hat{c}_i) \geqslant \frac{er}{p}$. Également, on a $v\left(\eta^{s_i}\right) = \frac{s_i}{p^h - 1} \geqslant \frac{m_i}{p}$. Finalement, on obtient :

$$v\left(\pi_1^{k n_i} \varpi^{ki} \varepsilon^{k p^i} \eta^{k s_i} \left(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \hat{c}_i\right)^{p-k}\right) \geqslant k \frac{n_i}{p} + k \frac{m_i}{p} + (p-k) \frac{er}{p} = er$$

Ainsi tous les termes de la somme sont des multiples de $p \pi^{er}$. Modulo p, il reste :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi^{er}} \left(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \pi_1^{n_i} \varpi^i \varepsilon^{p^i} \eta^{s_i} + \hat{c}_i\right)^p \quad &\equiv \quad \frac{(\pi_1^{n_i} \hat{x}_i + \hat{c}_i)^p}{\pi^{er}} + \frac{\pi^{n_i} \varpi^i \varepsilon^{p^{i+1}} \eta^{p s_i}}{\pi^{er}} \pmod{p} \\ &\equiv \quad \varpi \hat{x}_{i+1} + \hat{r}_i + \varpi \frac{\varpi^{i+1} \varepsilon^{p^{i+1}} \eta^{p s_i}}{\pi^{m_i}} \pmod{p}\end{aligned}$$

On remarque que $p s_i = s_{i+1} + m_i \left(p^h - 1\right)$, puis que $(y_1, \dots, y_h)$ est solution de (S). On conclut en reprenant la démonstration du lemme 4.1.2. □

Voici un dernier corollaire qui nous sera utile par la suite :

Corollaire 4.1.4. *Soit g un élément du groupe de Galois G_K qui fixe tous les $\hat{r}_i$, tous les $\hat{c}_i$ et π_1. Soit $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_h)$ une solution de (S) dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. On note x_i la réduction modulo p de $\hat{x}_i$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$, g fixe $\hat{x}_i$ si et seulement si g fixe x_i.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si g fixe les x_i alors $(g\hat{x}_1, \dots, g\hat{x}_h)$ est aussi solution de (S). En effet, d'après le théorème précédent, si ces deux solutions sont distinctes dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, elles le sont aussi modulo p. Le théorème 4.1.3 donne ceci : dans le cas où les deux solutions sont distinctes, dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ comme dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$, toutes les « coordonnées » des h-uplets sont distinctes. Le corollaire en découle directement. □

Remarque. Dans le cas où tous les $\hat{c}_i$ sont nuls, il existe toujours une solution au système dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. En effet, en combinant les équations, on aboutit à une unique équation polynomiale à coefficients entiers que doit vérifier $\hat{x}_1$. Comme $\bar{K}$ est algébriquement clos, cette équation admet une solution.

4.2 Calcul sur les objets simples

Dans ce paragraphe uniquement, on suppose le corps résiduel k algébriquement clos. On suppose également que π est choisi tel que $\pi^e = p$, ce qui est toujours possible si $r > 0$ (si $r = 0$, les résultats se démontrent indépendamment et facilement). Ainsi $E(u) = u^e - p$ et $c_{(e),\pi} = -1$. Soit $\mathcal{M}$ un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Le théorème 3.3.2 affirme que $\mathcal{M}$ est de la forme $\mathcal{M}(n_i)$ pour une certaine suite périodique (n_i). Notons h sa période.

L'image de $\mathcal{M}$ par le foncteur $T_{\mathrm{st}}^\star$ s'identifie, comme le prouve le lemme 1.3.4, à l'ensemble $\mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A})$. Se donner un tel morphisme revient à se donner pour tout i, un élément $x_i \in \hat{A}$, image de e_i, ces éléments x_i étant soumis à certaines relations que nous allons expliciter. On rappelle que d'après le lemme 1.3.3, l'anneau $\hat{A}$ s'identifie à $(\mathcal{O}_{\bar{K}} \langle X \rangle)/p$.

Lemme 4.2.1. *L'ensemble des $x \in \hat{A}$ tels que $N(x) = 0$ est $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$.*

Démonstration. Le lemme résulte directement du fait que $N(X)$ est une unité de $\hat{A}$. □

De $N(e_i) = 0$, on déduit $N(x_i) = 0$ et donc d'après le lemme précédent $x_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. Intéressons-nous maintenant à la condition imposée par le Frobenius. Sur l'objet $\mathcal{M}$, ϕ_r est défini par $\phi_r(u^{n_i} e_i) = e_{i+1}$. Cela impose donc deux choses : l'élément $u^{n_i} x_i$ appartient à $\mathrm{Fil}^r(\mathcal{O}_{\bar{K}} \langle X \rangle)/p$ et on a l'égalité $\phi_r(u^{n_i} x_i) = x_{i+1}$.

On rappelle que l'on avait désigné par p_1 (resp. π_1) une racine p-ième de p (resp. de π) et comme $\pi^e = p$, on peut supposer en outre $\pi_1^e = p_1$. D'autre part, si $x = \sum_{i \geqslant 0} a_i \frac{X^i}{i!} \in \hat{A}$ ($a_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$), alors $x \in \mathrm{Fil}^r \hat{A}$ si et seulement si a_i est un multiple de p_1^{r-i} pour tout entier i compris entre 0 et r. Comme, dans $\hat{A}$, $u = \frac{\pi_1}{1+X}$, on a $u^{n_i} x_i \in \mathrm{Fil}^r \hat{A}$ si et seulement si $\pi_1^{n_i} x_i \in \mathrm{Fil}^r \hat{A}$, c'est-à-dire $\pi_1^{er-n_i}$ divise x_i pour tout $i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$.

Soit $\hat{x}_i$ un relevé de x_i dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ qui est un multiple de $\pi_1^{er-n_i}$. Par définition $\phi_r(u^{n_i} x_i)$ est la réduction modulo p de :

$$\frac{1}{p^r} \cdot \phi\left(\frac{\pi_1^{n_i}}{(1+X)^{n_i}} \hat{x}_i\right) = \frac{(-1)^r}{p^r} \cdot \frac{\pi_1^{pn_i}}{(1+X)^{pn_1}} \hat{x}_i^p = (-1)^r \frac{1}{(1+X)^{pn_1}} \cdot \frac{1}{\pi^{er-n_i}} \hat{x}_i^p.$$

Or modulo p, $(1+X)^p = 1$ et finalement $\phi_r(u^{n_i} x_i) = (-1)^r \frac{x_i^p}{\pi^{er-n_i}}$.

Ces équations fournissent un système qui est exactement celui étudié dans le paragraphe 4.1 avec $\varpi = (-1)^r$ et $\hat{c}_i = \hat{r}_i = 0$. En particulier, le lemme 4.1.2 nous fournit directement les solutions.

On vient de prouver le théorème III.*iii* dont nous rappelons l'énoncé :

Théorème 4.2.2. *Supposons k algébriquement clos et $er < p-1$. Si l'objet simple $\mathcal{M}$ s'identifie à $\mathcal{M}(n_i)$ pour une suite (n_i) périodique de période h (voir théorème 3.3.2), alors la représentation galoisienne $T_{st}^\star(\mathcal{M})$ est isomorphe à :*

$$\theta_1^{m_1} \theta_2^{m_2} \dots \theta_h^{m_h}$$

où m_i est défini par $n_i + m_i = er$ et où les θ_i sont les caractères fondamentaux de niveau h.

En particulier, pour tout objet $\mathcal{M}$ de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tué par p, les exposants qui décrivent l'action de l'inertie modérée sur la semi-simplifiée modulo p de $T_{st}^\star(\mathcal{M})$ sont tous compris entre 0 et er.

4.3 Exactitude et fidélité

4.3.1 Exactitude

Théorème 4.3.1. *Le foncteur $T^{\star}_{st}$ de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ dans la catégorie des $\mathbb{Z}_p$-représentations galoisiennes de torsion est exact.*

Démonstration. La preuve est en tout point semblable à celle donnée dans le paragraphe 3.2.1. de [Bre97a], et dans le paragraphe 2.3.1. de [Bre99a]. □

4.3.2 Fidélité

Commençons par le lemme suivant :

Lemme 4.3.2. *Supposons k algébriquement clos. L'image par le foncteur $T^{\star}_{st}$ d'un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$ est une représentation irréductible.*

Démonstration. Par le théorème 4.2.2, on connaît l'image d'un objet simple par le foncteur $T^{\star}_{\mathrm{st}}$. On vérifie directement que cette image est une représentation galoisienne irréductible. □

Corollaire 4.3.3. *Supposons k algébriquement clos. Si $\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, on a :*

$$\mathit{long}\ (\mathcal{M}) = \mathit{long}\ (T^{\star}_{st}(\mathcal{M}))$$

Démonstration. Cela découle directement du lemme précédent et de l'exactitude. □

Remarque. Ces deux derniers résultats restent vrais si k n'est pas algébriquement clos (voir théorème 5.4.4).

Corollaire 4.3.4. *Le foncteur $T^{\star}_{st}$ de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ dans la catégorie des $\mathbb{Z}_p$-représentations galoisiennes de torsion est fidèle.*

Démonstration. Supposons dans un premier temps k algébriquement clos. Soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un morphisme dans la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ tel que $T^{\star}_{\mathrm{st}}(f) = 0$. On a la suite exacte dans $\underline{\mathcal{M}}^r$:

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{\tilde{f}} \operatorname{im} f \longrightarrow 0$$

En outre l'application $\operatorname{im} f \to \mathcal{Y}$ est injective et donc la flèche déduite $T^{\star}_{\mathrm{st}}(\mathcal{Y}) \to T^{\star}_{\mathrm{st}}(\operatorname{im} f)$ est surjective. On en déduit que $T^{\star}_{\mathrm{st}}(\tilde{f}) = 0$. En appliquant le foncteur exact $T^{\star}_{\mathrm{st}}$ à la suite exacte écrite précédemment, on voit que $T^{\star}_{\mathrm{st}}(\operatorname{im} f) = 0$. D'après le corollaire précédent, $\operatorname{im} f = 0$, puis $f = 0$.

Pour le cas général, notons K^{nr} le complété p-adique de l'extension maximale non ramifiée de K. Son corps résiduel s'identifie à une clôture algébrique $\bar{k}$ de k. Désignons par S_{nr} l'anneau S construit à partir de K^{nr} et par $\underline{\mathcal{M}}^r_{\mathrm{nr}}$ la catégorie de modules sur S_{nr}.

Si $\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, alors $\mathcal{M}_{\mathrm{nr}} = S_{\mathrm{nr}} \otimes_S \mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r_{\mathrm{nr}}$ et l'application :

$$\begin{array}{rcl} T^{\star}_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) & \to & T^{\star}_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}_{\mathrm{nr}}) \\ f & \mapsto & [s \otimes x \mapsto sf(x)] \end{array}$$

est un isomorphisme commutant à l'action de Gal $\left(\bar{K}/K^{\mathrm{nr}}\right)$. De plus, le morphisme $\iota_M : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_{\mathrm{nr}}$, $x \mapsto 1 \otimes x$ est injectif.

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un morphisme dans la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ tel que $T_{\mathrm{st}}^\star(f) = 0$. Il induit un morphisme $f_{\mathrm{nr}} : \mathcal{X}_{\mathrm{nr}} \to \mathcal{Y}_{\mathrm{nr}}$ de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}_{\mathrm{nr}}^r$ et on a $T_{\mathrm{st}}^\star(f_{\mathrm{nr}}) = 0$. Par la fidélité dans le cas algébriquement clos, il vient $f_{\mathrm{nr}} = 0$. La composée $\iota_{\mathcal{Y}} \circ f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}_{\mathrm{nr}}$ est nulle et comme $\iota_{\mathcal{Y}}$ est injectif, f est nulle. Ceci démontre la fidélité. □

5 Pleine fidélité du foncteur $T_{\mathrm{st}}^\star$

Dans cette partie, on suppose à nouveau dans un premier temps que le corps résiduel k est algébriquement clos. La propriété de pleine fidélité reste valable sans cette hypothèse et nous verrons dans le dernier paragraphe comment le cas général se déduit simplement du cas « algébriquement clos ».

Par un argument classique (voir [FL82]), on se ramène à prouver le lemme suivant :

Lemme 5.a. *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux objets simples de $\underline{\mathcal{M}}^r$. La flèche canonique Ext^1 $(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \to$ Ext^1 $(T_{st}^\star(\mathcal{N}), T_{st}^\star(\mathcal{M}))$ est injective.*

5.1 Le module A_{ss}

Pour prouver le lemme 5.a, on considère $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux objets simples, $\mathcal{X}$ une extension dans la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ de ces deux objets telle que $T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{X})$ soit isomorphe au produit direct $T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{M}) \times T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{N})$. Il nous faut montrer que $\mathcal{X}$ est isomorphe à $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$.

Les hypothèses impliquent que $\mathcal{X}$ est tué par p. En effet, $T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{X})$ est tué par p, ce qui signifie que la multiplication par p sur $T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{X})$ est l'application nulle. Par fidélité, on en déduit que la multiplication par p sur $\mathcal{X}$ est également l'application nulle. Ainsi on peut travailler dans les catégories $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}_{(e)}^r$. D'autre part, si $r = 0$, il y a un unique objet simple à isomorphisme près, ce qui règle rapidement ce cas. Ainsi on peut supposer $r > 0$ et supposer à nouveau $\pi^e = p$.

Commençons par donner une caractérisation, faisant intervenir explicitement le foncteur $T_{\mathrm{st}}^\star$, des objets de $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}_{(e)}^r$ qui sont semi-simples.

On construit un sous-module A_{ss} de $\hat{A}$ (ss pour *semi-simple*). Pour cela, comme dans le paragraphe 4.1, on fixe, pour tout entier h, $\eta^{(h)}$ une racine $\left(p^h - 1\right)$-ième de l'uniformisante π. On impose en outre une condition de compatibilité : on demande que lorsque h' divise h, on ait :

$$\left(\eta^{(h')}\right)^{\frac{p^h-1}{p^{h'}-1}} = \eta^{(h)}$$

De cette façon, si $s \in \mathbb{Z}_{(p)}$ (le localisé de $\mathbb{Z}$ en p) on pourra sans ambiguité parler de π^s. En effet, comme tout nombre premier à p admet un multiple de la forme $p^h - 1$, on peut toujours écrire $s = \frac{a}{p^h-1}$, et poser :

$$\pi^s = \left(\eta^{(h)}\right)^a.$$

La condition de compatibilité dit précisément que le résultat ne dépend pas de la fraction choisie pour représenter s. En outre, on a les formules évidentes $\pi^s \times \pi^{s'} = \pi^{s+s'}$ et $\pi^{ns} = (\pi^s)^n$ si s et s' sont dans $\mathbb{Z}_{(p)}$ et si n est un entier.

Reprenons la description donnée tout à la fin du paragraphe 3.3. Choisissons un élément $t \in \mathcal{R}$ classifiant un certain objet simple $\mathcal{M}$ de la catégorie $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$. Appelons $t_1, \dots, t_h$ les rationnels de $\mathbb{Z}_{(p)} \cap [0, 1[$ correspondant à t. Précisément si c'est la suite $(n_i)_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}}$ qui classifie $\mathcal{M}$, on aura :

$$t_i = 0\,,\, n_i n_{i+1} \dots n_{i+h-1}\, \overline{n_i n_{i+1} \dots n_{i+h-1}}\, \dots$$

Si l'on pose $v_i = \frac{er}{p-1} - t_i$, on voit d'après le calcul fait dans le paragraphe 4.2 que tout élément de $T^{\star}_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$ tombe dans le sous-$k[u]/u^{ep}$-module de $\hat{A}$ engendré par les π^{v_i}. On pose, pour tout $t \in \mathcal{R}$:

$$A_{\mathrm{ss}t} = k[u]/u^{ep} \cdot \pi^{v_1} + k[u]/u^{ep} \cdot \pi^{v_2} + \dots + k[u]/u^{ep} \cdot \pi^{v_h}$$

où l'entier h dépend de t. La somme précédente est directe (voir lemme 5.1.2). Il faut faire attention au fait que les modules $k[u]/u^{ep} \cdot \pi^{v_i}$ ne sont pas libres, car, par exemple, on a toujours $u^{ep-1}\pi^{v_i} = 0$, sauf dans le cas très particulier où $h = 1$ et $n_1 = er$. En particulier $A_{\mathrm{ss}t}$ n'est *pas* isomorphe à $\mathcal{M}$.

Définition 5.1.1. *On pose :*

$$A_{ss} = \sum_{t \in \mathcal{R}} A_{sst} \subset \hat{A}.$$

Autrement dit, A_{ss} est le sous-$k[u]/u^{ep}$-module engendré par les $\pi^{t'}$ où t' parcourt l'ensemble des rationnels de $\mathbb{Z}_{(p)} \cap [0, 1[$ dont l'écriture « décimale » en base p ne comporte que des chiffres compris entre 0 et er.

Lemme 5.1.2. *Le morphisme évident :*

$$\bigoplus_{t'} k[u]/u^{ep} \cdot \pi^{t'} \to A_{ss}$$

est un isomorphisme (où la somme est à nouveau étendue aux t' rationnels compris strictement entre 0 et 1 et dont l'écriture « décimale » en base p ne comporte que des chiffres compris entre 0 et er).

Avant de faire la démonstration, insistons sur le fait que la notation est trompeuse : le module $k(u)/u^{ep} \cdot \pi^{t'}$ n'est pas libre, il doit être vu comme un sous-module de $\hat{A}$. Le lemme dit donc que la somme dans $\hat{A}$ de tous ces sous-modules est directe.

Démonstration. La surjectivité est une conséquence immédiate de la définition de A_{ss}. Passons à l'injectivité. Considérons une relation de la forme :

$$P_1(u)\,\pi^{v_1} + \dots + P_n(u)\,\pi^{v_n} = 0$$

où les v_i sont deux à deux distincts et où on peut supposer que tous les polynômes $P_i \in k[u]/u^{ep}$ sont non nuls. Il faut alors montrer que tous les termes de la somme $P_i(u)\pi^{v_i}$ sont nuls, et ceci va résulter d'un simple calcul de valuation.

On écrit $u = \pi_1 X'^{p-1}$ où l'on rappelle que $X' = 1 + X$ vérifie la relation $X'^p = 1$. En identifiant les coefficients en X', on obtient pour tout j compris entre 0 et $p-1$ des égalités de la forme :

$$P_1^{(j)}(\pi)\pi^{v_1} + \ldots + P_n^{(j)}(\pi)\pi^{v_n} = 0$$

où les $P_i^{(j)}$ sont des polynômes à coefficients dans k . On rappelle que l'on dispose d'une valuation sur $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ et que le fait d'être nul signifie simplement d'être de valuation supérieure à e. La valuation de $P_i^{(j)}(\pi)$ est un entier. Comme $v_i \in \mathbb{Z}_{(p)} \cap [0,1[$, et que tous les v_i sont deux à deux distincts, les valuations de $P_i^{(j)}(\pi)\pi^{v_i}$ sont aussi deux à deux distinctes, et on a :

$$v\left(P_1^{(j)}(\pi)\pi^{v_1} + \ldots + P_n^{(j)}(\pi)\pi^{v_n}\right) = \min_i v\left(P_i^{(j)}(\pi)\pi^{v_i}\right)$$

En particulier, la somme est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, ce qui est bien ce que l'on voulait prouver. □

Soit $\mathcal{X}$ un objet de la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$. L'injection $A_{\text{ss}} \to \hat{A}$ fournit une flèche injective $\text{Hom}(\mathcal{X}, A_{\text{ss}}) \to T^\star_{\text{st}}(\mathcal{X})$.

Lemme 5.1.3. *L'objet $\mathcal{X}$ est semi-simple si et seulement si la flèche précédente est surjective (et donc un isomorphisme).*

Démonstration. Le sens direct est facile : si $\mathcal{X}$ est semi-simple et s'écrit donc comme la somme $\mathcal{X} = \mathcal{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{M}_n$ pour certains objets simples $\mathcal{M}_i$, alors $T^\star_{\text{st}}(\mathcal{X})$ se décompose lui aussi comme la somme directe :

$$T^\star_{\text{st}}(\mathcal{X}) = T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}_1) \oplus \ldots \oplus T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}_n)$$

et on a déjà vu que $T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}_i) = \text{Hom}(\mathcal{M}_i, A_{\text{ss}})$.

Faisons la réciproque. Le lemme 2.3.1.2 de [Bre99a] affirme que le cardinal de $T^\star_{\text{st}}(\mathcal{X})$ est $p^{\text{rg}\,\mathcal{X}}$ où $\text{rg}\,\mathcal{X}$ désigne le rang de $\mathcal{X}$ en tant que $k[u]/u^{ep}$-module. On prouve par récurrence sur la longueur de l'objet $\mathcal{X}$ que $\text{Card}\,\text{Hom}(\mathcal{X}, A_{\text{ss}}) \leqslant p^{\text{rg}\,\mathcal{X}}$ et qu'il y a égalité si et seulement si $\mathcal{X}$ est semi-simple. Cela entraînera bien le résultat annoncé dans le lemme.

Le résultat est évident si $\mathcal{X}$ est simple (de longueur 1). Prenons un objet $\mathcal{X}$ de longueur $n+1$. Il existe une suite exacte courte de la forme :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{M}$ est un objet simple et $\mathcal{N}$ est un objet de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ de longueur n. Par application du foncteur contravariant $\text{Hom}(\cdot, A_{\text{ss}})$, on en déduit une suite exacte à gauche :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{N}, A_{\text{ss}}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{X}, A_{\text{ss}}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{M}, A_{\text{ss}})$$

d'où :

$$\mathrm{Card\,Hom}\,(\mathcal{X}, A_{\mathrm{ss}}) \leqslant \mathrm{Card\,Hom}\,(\mathcal{N}, A_{\mathrm{ss}}) \cdot \mathrm{Card\,Hom}\,(\mathcal{M}, A_{\mathrm{ss}}) \leqslant p^{\mathrm{rg}\,\mathcal{N}} \cdot p^{\mathrm{rg}\,\mathcal{M}} = p^{\mathrm{rg}\,\mathcal{X}}$$

Pour que les deux inégalités précédentes soient des égalités, il faut que la flèche $\mathrm{Hom}\,(\mathcal{X}, A_{\mathrm{ss}}) \to \mathrm{Hom}\,(\mathcal{M}, A_{\mathrm{ss}})$ soit surjective et que $\mathrm{Card\,Hom}\,(\mathcal{N}, A_{\mathrm{ss}}) = p^{\mathrm{rg}\,\mathcal{N}}$. D'après l'hypothèse de récurrence, cette dernière condition implique que $\mathcal{N}$ est semi-simple.

Exploitons la première condition. Soit $\psi \in \mathrm{Hom}\,(\mathcal{M}, A_{\mathrm{ss}})$, $\psi \neq 0$. Si t désigne le « rationnel classifiant » de $\mathcal{M}$, ψ tombe dans un $A_{\mathrm{ss}t}$ qui est un facteur direct de A_{ss}. Par hypothèse, ψ se prolonge à tout $\mathcal{X}$. On s'intéresse à la composée $s : \mathcal{X} \to A_{\mathrm{ss}} \to A_{\mathrm{ss}t}$ où la première flèche est ψ ainsi prolongée et la seconde flèche est la projection canonique.

Notons $(e_1, \ldots, e_d)$ une base adaptée de $\mathcal{X}$ pour les entiers $n_1, \ldots, n_d$ et notons pour tout i, f_i un relevé de $s\,(e_i)$ dans $\mathcal{M}$, qui existe puisque tous les morphismes non nuls $\mathcal{M} \to A_{\mathrm{ss}t}$ sont surjectifs. Nous allons corriger les f_i pour que la flèche $s : \mathcal{X} \to \mathcal{M}, e_i \mapsto f_i$ définisse un scindage de :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0\,.$$

Les f_i sont uniques modulo $u^e\mathrm{Fil}^{\,r}\mathcal{X}$ (on peut faire beaucoup mieux en fait, mais ce ne sera pas utile). En particulier, quelle que soit la façon de les choisir, la flèche s obtenue respecte $\mathrm{Fil}^{\,r}$. D'autre part, on a :

$$\begin{pmatrix} \phi_r\,(u^{n_i} f_i) \\ \vdots \\ \phi_r\,(u^{n_d} f_d) \end{pmatrix} = {}^t G \begin{pmatrix} f_i \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_i \\ \vdots \\ r_d \end{pmatrix}$$

où G désigne la matrice de ϕ_r dans la base adaptée $(e_1, \ldots, e_d)$ et où les r_i sont des éléments de $u^e\mathrm{Fil}^{\,r}\mathcal{X}$. On voit donc que si l'on remplace le vecteur $\begin{pmatrix} f_i \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix}$ par le vecteur $\begin{pmatrix} f_i \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} +$ ${}^t G^{-1} \begin{pmatrix} r_i \\ \vdots \\ r_d \end{pmatrix}$, on obtient une flèche compatible à $\mathrm{Fil}^{\,r}$ et à ϕ_r.

Pour prouver que cette rétraction est également compatible à N, on considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[rr, "\phi_r"] \arrow[dd, "u^eN"' near end] & & \mathcal{M} \arrow[dd, "cN"] \\
\mathrm{Fil}^r\mathcal{X} \arrow[ur, "s"] \arrow[rr, "\phi_r"' near end] \arrow[dd, "u^eN"'] & & \mathcal{X} \arrow[ur, "s"] \arrow[dd, "cN"' near start] & \\
 & \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[rr, "\phi_r" near end] & & \mathcal{M} \\
\mathrm{Fil}^r\mathcal{X} \arrow[ur, "s"] \arrow[rr, "\phi_r"] & & \mathcal{X} \arrow[ur, "s"] &
\end{tikzcd}$$

Les faces du cube situées devant, derrière, au-dessus et au-dessous commutent. La face de gauche commute modulo $u^e\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ et donc $\phi_r \circ (u^eN) \circ s = \phi_r \circ s \circ (u^eN)$. Une chasse au diagramme permet d'obtenir $(cN) \circ s \circ \phi_r = s \circ (cN) \circ \phi_r$, ce qui permet de conclure puisque $\phi_r\,(\mathrm{Fil}^r\mathcal{X})$ engendre tout $\mathcal{X}$. $\square$

5.2 Le calcul de Hom$(\mathcal{N}, \hat{A}/A_{\mathrm{ss}})$

Rappelons que notre objectif est de prouver le lemme 5.a. On considère donc $\mathcal{X}$, objet de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ et extension de deux objets simples $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. On suppose que $T^\star_{\mathrm{st}}\,(\mathcal{X}) \simeq T^\star_{\mathrm{st}}\,(\mathcal{M}) \times T^\star_{\mathrm{st}}\,(\mathcal{N})$ et on veut montrer que $\mathcal{X}$ est semi-simple. Pour cela d'après le lemme 5.1.3, il suffit de prouver que tout élément de $T^\star_{\mathrm{st}}\,(\mathcal{X})$ définit un morphisme qui tombe dans A_{ss}. Soit $\psi \in T^\star_{\mathrm{st}}\,(\mathcal{X})$. On peut dessiner le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{M} \arrow[r, "f"] \arrow[ddr, "0"'] & \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & \mathcal{N} \arrow[r] \arrow[ddl, dotted, "\tilde{\psi}"] & 0 \\
 & & \hat{A} \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & & \\
 & & \hat{A}/A_{\mathrm{ss}} & &
\end{tikzcd}$$

La composée $\psi \circ f$ est un morphisme de $\mathcal{M}$ dans $\hat{A}$, qui tombe dans A_{ss} par simplicité de $\mathcal{M}$ et devient nulle lorsqu'elle est composée avec la projection canonique. Il existe donc une flèche $\tilde{\psi} : \mathcal{N} \to \hat{A}/A_{\mathrm{ss}}$ faisant commuter le diagramme. L'objectif de ce paragraphe est d'étudier plus en détail cette flèche.

Notons d'abord que le quotient $\hat{A}/A_{\mathrm{ss}}$ hérite d'une filtration, d'un Frobenius et d'un opérateur de monodromie : on définit $\mathrm{Fil}^i(\hat{A}/A_{\mathrm{ss}}) = \mathrm{pr}(\mathrm{Fil}^i\hat{A})$ et on vérifie que $N\,(A_{\mathrm{ss}}) \subset A_{\mathrm{ss}}$ et que $\phi_i(A_{\mathrm{ss}} \cap \mathrm{Fil}^i\hat{A}) \subset A_{\mathrm{ss}}$. Cela suffit pour transporter les structures.

Comme $\mathcal{M}$ est un objet simple, on sait le décrire précisément : par le théorème 3.3.2, il existe un entier h, des éléments $e_1, \ldots, e_h$ qui forment une base de $\mathcal{M}$ et des entiers $n_1, \ldots, n_h$ le tout tel que $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ soit engendré par les vecteurs $u^{n_1}e_1, \ldots, u^{n_h}e_h$, $\phi_r(u^{n_i}e_i) = e_{i+1}$ et $N(e_i) = 0$, les indices étant considérés dans $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$. De même, on a une description de $\mathcal{N}$: il existe un entier h', des éléments $e'_1, \ldots, e'_{h'}$ et des entiers $n'_1, \ldots, n'_{h'}$ le tout vérifiant des conditions analogues.

Dans un premier temps, comme ψ commute à N, on a $N(\tilde{\psi}(e'_{i'})) = 0$ pour tout indice i'. On cherche donc les éléments de $\hat{A}$ dont l'image par N tombe dans A_{ss}. C'est l'objet du lemme suivant. On rappelle que, par le lemme 1.3.5 :

$$\hat{A} \simeq (\mathcal{O}_{\bar{K}}[X']\langle Y\rangle)/(X'^p - 1, p)$$

l'isomorphisme consistant à faire correspondre X' à $1 + X$ et $\frac{Y^i}{i!}$ à $\frac{1}{i!}\left(\frac{(1+X)^p-1}{p}\right)^i$.

Lemme 5.2.1. *Avec les notations précédentes, l'ensemble des $x \in \hat{A}$ tels que $N(x) \in A_{ss}$ est $A_{ss} + \mathcal{O}_{\bar{K}}/p + (A_{ss} \cap \mathcal{O}_{\bar{K}}/p)\,Y$.*

Démonstration. Soit $x \in \hat{A}$ tel que $N(x) \in A_{\mathrm{ss}}$. Il s'écrit :

$$x = \sum_{j \geqslant 0} P_j(X')\frac{Y^j}{j!}$$

les P_j étant des polynômes de degré inférieur à $p-1$ à coefficients dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ nuls pour $j \gg 0$. On a :

$$N(x) = \sum_{j \geqslant 0}\left(X'P'_j(X') + P_{j+1}(X')\right)\frac{Y^j}{j!}.$$

On remarque que *via* les identifications faites, A_{ss} est entièrement inclus dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\,[X']/(X'^p-1)$ et donc il suffit de vérifier les conditions :

1. $X'P'_0(X') + P_1(X') \in A_{\mathrm{ss}}$
2. $X'P'_j(X') + P_{j+1}(X') = 0$ pour tout $j \geqslant 1$

La deuxième condition entraîne $P_1(X') = b$ pour un certain $b \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ et $P_j(X') = 0$ pour tout $j \geqslant 2$.

Exploitons maintenant la première condition. Écrivons $P_0(X') = a_0 + a_1X' + \ldots + a_{p-1}X'^{p-1}$ où $a_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. On obtient :

$$b + a_1X' + 2a_2X'^2 + \ldots + (p-1)\,a_{p-1}X'^{p-1} \in A_{\mathrm{ss}}.$$

Par définition de A_{ss} et en remarquant que $u \in \hat{A}_{\mathrm{st}}$ correspond à $\pi_1X'^{p-1} \in \hat{A}$, on voit que tous les termes de la somme précédente sont éléments de A_{ss}. En particulier on a $b \in A_{\mathrm{ss}}$. D'autre part, les entiers $2, \ldots, p-1$ sont inversibles dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ et donc tous les $a_iX'^i$, pour $i \geqslant 1$, sont aussi éléments de A_{ss}. Cela prouve finalement que $P_0(X') \in A_{\mathrm{ss}} + \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ puis la conclusion annoncée.

Il reste à faire la réciproque, mais elle est immédiate au vu du calcul précédent. □

5.3 Fin de la preuve

Choisissons des relevés de $e'_{i'}$ dans $\mathcal{X}$, relevés que l'on appelle encore $e'_{i'}$. D'après le lemme 5.2.1, l'application ψ a la forme suivante :

$$\begin{aligned}\psi\left(e_i\right) &= x_i \\ \psi\left(e'_{i'}\right) &= a_{i'} + a'_{i'} + b_{i'}Y\end{aligned}$$

où $a_{i'} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$, $a'_{i'} \in A_{\text{ss}}$, $b_{i'} \in A_{\text{ss}} \cap \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$, et où on connaît précisément la forme des x_i d'après le calcul fait dans le paragraphe 4.2 : si $x_i \neq 0$, si l'on note comme dans le paragraphe 5.1 :

$$\begin{aligned}t_i &= 0\,,\, n_i n_{i+1} \ldots n_{i+h-1}\ \overline{n_i n_{i+1} \ldots n_{i+h-1}}\ \ldots \\ t'_{i'} &= 0\,,\, n'_{i'} n'_{i'+1} \ldots n'_{i'+h'-1}\ \overline{n'_{i'} n'_{i'+1} \ldots n'_{i'+h'-1}}\ \ldots\end{aligned}$$

et si on pose $v_i = \frac{er}{p-1} - t_i$ et $v'_{i'} = \frac{e(r-1)}{p-1} - t'_{i'}$, il existe deux racines $\left(p^h - 1\right)$-ièmes de l'unité, ε et ε', telles que $\hat{x}_i = (-1)^{ri}\, \varepsilon^{p^i} \pi^{v_i}$ et où x_i est la réduction modulo p de $\hat{x}_i$ (resp $\hat{b}_{i'}$).

De plus, en remarquant qu'il existe $z \in \mathcal{M}$ tel que $u^{n'_{i'}} e'_{i'} + z \in \operatorname{Fil}^r \mathcal{X}$, on obtient des relations de la forme :

$$\phi_r\left(u^{n'_{i'}}\left(a_{i'} + b_{i'}Y\right) + c_{i'}\right) = a_{i'+1} + b_{i'+1}Y + r_{i'+1} \tag{1}$$

où $c_{i'}$ et $r_{i'}$ sont des éléments de A_{ss}. Écrivons :

$$c_{i'} = c_{i'}^{(0)} + c_{i'}^{(1)} u + \ldots + c_{i'}^{(p-1)} u^{p-1}$$

avec $c_{i'}^{(j)} \in A_{\text{ss}} \cap \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. On peut supposer $c_{i'}^{n'_{i'}} = 0$ quitte à modifier $a_{i'}$. Décomposons $u^{n'_{i'}}\left(a_{i'} + b_{i'}Y\right) + c_{i'}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}u^{n'_{i'}}\left(a_{i'} + b_{i'}Y\right) + c_{i'} &\equiv \pi_1^{n'_{i'}} a_{i'} + c_{i'}^{(0)} + c_{i'}^{(1)}\pi_1 + \ldots + c_{i'}^{(p-1)}\pi_1^{p-1} \\ &\quad - \left[n'_{i'}\pi_1^{n'_{i'}} a_{i'} + c_{i'}^{(1)}\pi_1 + \ldots + (p-1)\, c_{i'}^{(p-1)}\pi_1^{p-1} + \pi_1^{n'_{i'}} b_{i'}\right] X \\ &\equiv U - VX \pmod{\frac{X^i}{i!}, i \geqslant 2}\end{aligned}$$

Cette quantité doit appartenir à $\operatorname{Fil}^r \hat{A}$. On en déduit que π_1^{er} divise U et π_1^{er-e} divise V. De plus, en identifiant les termes constants en Y dans (1), on obtient les relations :

$$\phi_r\left(U\right) = a_{i'+1} + r_{i'+1}$$

qui impliquent $r_{i'} \in A_{\text{ss}} \cap \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. Notons $\hat{a}_{i'} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ un relevé de $a_{i'}$ et $\hat{c}_{i'}^{(j)} \in \mathcal{O}_{K^{\text{mr}}}$ (K^{mr} désigne l'extension maximale modérément ramifiée de K) des relevés de $c_{i'}^{(j)}$ et posons :

$$\hat{c}_{i'} = \hat{c}_{i'}^{(0)} + \hat{c}_{i'}^{(1)}\pi_1 + \ldots + \hat{c}_{i'}^{(p-1)}\pi_1^{p-1} \in K^{\text{mr}}\left[\pi_1\right].$$

Notons finalement $\hat{r}_{i'} \in \mathcal{O}_{K^{\mathrm{mr}}}$ un relevé de $r_{i'}$. Intéressons-nous au système (dont les inconnus sont les $\hat{x}_{i'}$) donné par les équations :

$$\frac{\left(\pi_1^{n'_{i'}}\hat{x}_{i'} + \hat{c}_{i'}\right)^p}{\pi^{er}} = (-1)^r \left(\hat{x}_{i'+1} + \hat{r}_{i'+1}\right).$$

On vient de voir que les $a_{i'}$ forment une solution modulo p, qui se remonte d'après le lemme 4.1.1 en une solution dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ que l'on note $\hat{a}_{i'}$. Le corollaire 4.1.4 s'applique : un élément du groupe de Galois G_K qui fixe les $\hat{c}_{i'}$, les $\hat{r}_{i'}$ et π_1, fixe $\hat{a}_{i'}$ si et seulement s'il fixe $a_{i'}$.

D'autre part, on rappelle que par hypothèse la suite :

$$0 \longrightarrow T^{\star}_{\mathrm{st}}(\mathcal{N}) \longrightarrow T^{\star}_{\mathrm{st}}(\mathcal{X}) \longrightarrow T^{\star}_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) \longrightarrow 0$$

est exacte et que l'on dispose d'une section $s : T^{\star}_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) \to T^{\star}_{\mathrm{st}}(\mathcal{X})$ qui commute à l'action de Galois.

Soit $\psi \in T^{\star}_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$ décrit comme on vient de le voir. Le morphisme $s(\psi) \in T^{\star}_{\mathrm{st}}(\mathcal{X})$ prolonge ψ, on l'appellera simplement ψ par la suite. Comme s est compatible à Galois, pour tout élément σ stabilisant les x_i, on a :

$$\sigma\left(a_{i'} + a'_{i'} + b_{i'}Y\right) = \sigma a_{i'} + \sigma a'_{i'} + \sigma b_{i'} t(\sigma) + \sigma b_{i'} Y = a_{i'} + a'_{i'} + b_{i'} Y$$

où on rappelle que $\sigma(Y) = Y + t(\sigma)$. On a vu que $t(\sigma) \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ (voir lemme 1.3.7) et donc de l'égalité précédente, on déduit en particulier :

$$\sigma a_{i'} + \sigma a'_{i'} + \sigma b_{i'} t(\sigma) = a_{i'} + a'_{i'}.$$

Si $t(\sigma) = 0$ et si σ fixe $a'_{i'}$, on obtient $\sigma a_{i'} = a_{i'}$. En particulier, tout $\sigma \in \mathrm{Gal}\left(\bar{K}/K^{\mathrm{mr}}[\pi_1]\right)$ vérifie $\sigma a_{i'} = a_{i'}$. Comme de plus tout tel σ fixe $\hat{c}_{i'}$ et $\hat{r}_{i'}$, il vient $\sigma \hat{a}_{i'} = \hat{a}_{i'}$ puis $\hat{a}_{i'} \in K^{\mathrm{mr}}[\pi_1]$.

Dès lors, la relation $\phi_r(U) = a_{i'+1} + r_{i'+1}$ entraîne que $a_{i'+1} \in \mathcal{O}_{K^{\mathrm{mr}}}/p$, et ce bien sûr pour tout i. Ainsi, il existe un entier d tel que l'on puisse écrire :

$$a_{i'} = \sum_{v \in I} \lambda_v \pi^v$$

où I désigne l'ensemble des rationnels dans $[0, 1[$ et ayant pour dénominateur $\left(p^d - 1\right)$ et où les λ_v sont des éléments de $\mathcal{O}_K/p$. Soit I_{ss} l'ensemble des rationnels appartenant à I dont le développement « décimal » en base p ne fait intervenir que des chiffres compris entre 0 et er. Soit $I_{\overline{\mathrm{ss}}} = I \backslash I_{\mathrm{ss}}$. On pose :

$$a_{\mathrm{ss},i'} = \sum_{v \in I_{\mathrm{ss}}} \lambda_v \pi^v \quad \text{et} \quad a_{\overline{\mathrm{ss}},i'} = \sum_{v \in I_{\overline{\mathrm{ss}}}} \lambda_v \pi^v.$$

Alors $a_{i'} = a_{\mathrm{ss},i'} + a_{\overline{\mathrm{ss}},i'}$, $a_{\mathrm{ss},i'} \in A_{\mathrm{ss}}$ et on vérifie que :

$$\phi_r\left(\pi_1^{n'_{i'}} a_{\overline{\mathrm{ss}},i'}\right) = a_{\overline{\mathrm{ss}},i'+1}.$$

On sait résoudre cette équation et ses solutions sont dans A_{ss}. Cela entraîne $a_{\overline{\text{ss}},i'} = 0$ pour tout indice i'. Ainsi $a_{i'} \in A_{\text{ss}}$.

Reprenons à présent l'élément $U = \pi_1^{n'_{i'}} a_{i'} + c_{i'}^{(0)} + c_{i'}^{(1)} \pi_1 + \ldots + c_{i'}^{(p-1)} \pi_1^{p-1}$. Comme on a vu que $a_{i'} \in A_{\text{ss}}$, sa valuation est un élément de $\mathbb{Z}_{(p)}$. Ainsi les valuations de termes non nuls intervenant dans U sont deux à deux distinctes. Puisque π^{er} divise U, on en déduit qu'il divise chacun de ces termes. En particulier, cela implique :

$$\phi_{r-1}(V) = \phi_{r-1}\left(\pi^{n'_{i'}} b_{i'}\right)$$

et en regardant la composante sur Y, la relation (1) implique :

$$\phi_{r-1}\left(\pi^{n'_{i'}} b_{i'}\right) = b_{i'+1}$$

On a déjà résolu plusieurs fois ce système. En particulier (c'est tout ce dont on aura besoin), $b_{i'} \in A_{\text{ss}}$ et si $b_{i'} \neq 0$, on a :

$$v(b_{i'}) \leqslant \frac{e(r-1)}{p}$$

Supposons par l'absurde qu'il existe un indice i' tel que $b_{i'} \neq 0$. Soit $\sigma \in \text{Gal}\left(\bar{K}/K^{\text{mr}}\right)$ ne fixant pas π_1. On a $\sigma b_{i'} = b_{i'}$ et $t(\sigma) \neq 0$. On a démontré dans le lemme 1.3.8 que $t(\sigma)$ était congru à une racine $(p-1)$-ième de $(-p)$. En particulier, il est de valuation $\frac{e}{p-1}$. On en déduit :

$$v(b_{i'} t(\sigma)) \leqslant \frac{e(r-1)}{p-1} + \frac{e}{p-1} = \frac{er}{p-1} < e$$

et donc $b_{i'} t(\sigma)$ est non nul dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$. Mais on a l'égalité :

$$\sigma a_{i'} + \sigma a'_{i'} + \sigma b_{i'} t(\sigma) = a_{i'} + a'_{i'}$$

qui se simplifie ici en $b_{i'} t(\sigma) = 0$. C'est une contradiction. Ainsi $b_{i'} = 0$ pour tout i.

En conclusion, l'application ψ prend la forme suivante :

$$\begin{array}{rcl} \psi(e_i) & = & x_i \\ \psi(e'_{i'}) & = & a_{i'} + a'_{i'} \end{array}$$

avec x_i, $a_{i'}$ et $a'_{i'}$ éléments de A_{ss}. On en déduit que ψ tombe dans A_{ss}.

Maintenant, tout élément de $\text{Hom}(\mathcal{X}, \hat{A})$ s'écrit comme somme d'un élément de $\text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A})$ et de l'image par s d'un élément de $\text{Hom}(\mathcal{N}, \hat{A})$. Ainsi on a bien prouvé que $\text{Hom}(\mathcal{X}, \hat{A}) = \text{Hom}(\mathcal{X}, A_{\text{ss}})$ et par suite que le foncteur $T^\star_{\text{st}}$ est pleinement fidèle, du moins dans le cas où k est algébriquement clos.

5.4 Récapitulatif et conclusion

Récapitulons tout ce que l'on vient de voir. On a prouvé sans hypothèse sur le corps résiduel k que le foncteur $T^{\star}_{\mathrm{st}}$ est toujours exact et fidèle. On a également prouvé, pour l'instant, que si ce corps résiduel est algébriquement clos, alors le foncteur $T^{\star}_{\mathrm{st}}$ était également plein. En procédant comme dans le paragraphe 6.2 de [FL82], on peut déduire le résultat pour k quelconque du résultat pour k algébriquement clos :

Théorème 5.4.1. *Le foncteur $T^{\star}_{st}$ de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ dans la catégorie des représentations $\mathbb{Z}_p$-linéaires de torsion du groupe de Galois G_K est exact et pleinement fidèle.*

Remarque. L'image essentielle du foncteur $T^{\star}_{\mathrm{st}}$ est incluse dans la catégore des $\mathbb{Z}_p$-représentations de longueur finie de G_K comme le montre le théorème 5.4.4 que nous prouvons par la suite.

Nous pouvons finalement répondre complètement à la conjecture A.2 de [Bre99a]. Mais avant cela, nous allons énoncer et prouver une propriété formelle :

Propriété 5.4.2. *Soient A et B deux catégories abéliennes et artiniennes. Soit $F : A \to B$ un foncteur additif, exact et pleinement fidèle qui est tel que l'image de tout objet simple de A est encore simple dans B. Alors l'image essentielle de F est stable par sous-objets et par quotients.*

Démonstration. On se ramène directement au cas où A est une sous-catégorie pleine de B. L'hypothèse dit que les objets simples de A restent simples dans B. En particulier si M est un objet de A et si :

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_m = M$$

est une suite de Jordan-Hölder dans A, elle restera une suite de Jordan-Hölder dans B. Il s'agit de prouver que la catégorie A est stable par sous-objets et par quotients.

Introduisons pour cela A' la sous-catégorie pleine de B formée des objets dont tous les quotients de Jordan-Hölder sont dans A. C'est une sous-catégorie abélienne de B qui est stable par sous-objets et par quotients. Évidemment A est une sous-catégorie de A', on peut donc supposer que $A' = B$ ou si l'on préfère que les objets simples de A' et ceux de B sont les mêmes.

Soit M un objet de A et N un sous-objet de M. En considérant des suites de Jordan-Hölder de N et de M/N, on voit que l'on peut écrire une suite de Jordan-Hölder de la forme suivante :

$$0 = M_0 \subset M_1 \ldots \subset M_n = N \subset M_{n+1} \subset \ldots \subset M_m = M$$

Le quotient M_m/M_{m-1} est un objet simple et donc un objet de A. Par suite le noyau de la projection $M_m \to M_m/M_{m-1}$ qui s'identifie à M_{m-1} est également objet de A. Par récurrence, on montre que tous les M_i sont objets de A et donc qu'il en est de même de N. Ceci prouve la stabilité par sous-objets. La stabilité par quotients se traite de façon totalement identique. $\square$

Remarque. Cette propriété redémontre en particulier le fait que la sous-catégorie $\widetilde{\underline{\mathrm{MF}}}^r$ de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ est stable par sous-objets et par quotients, puisque l'on a vu dans la proposition 2.3.4 que tous les objets simples de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ étaient dans $\widetilde{\underline{\mathrm{MF}}}^r$.

On peut désormais énoncer le théorème qui résout la conjecture mentionnée précédemment :

Théorème 5.4.3. *L'image essentielle du foncteur $T_{st}^\star$ est stable par sous-objets et par quotients et indépendante du choix de l'uniformisante π.*

Démonstration. L'indépendance du choix de l'uniformisante est une conséquence directe de la propriété 2.1.10.

Supposons k algébriquement clos. On sait, par le lemme 4.3.2, que l'image par le foncteur $T_{\mathrm{st}}^\star$ d'un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$ est une représentation irréductible. Le foncteur $T_{\mathrm{st}}^\star$ vérifie les conditions de la propriété précédente, ce qui conclut.

Pour le cas général, notons K^{nr} le complété p-adique de l'extension maximale non ramifiée de K et $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e),\mathrm{nr}}$ la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$ construite à partir de K^{nr}. Soit $\mathcal{M}$ un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Il est tué par p et donc peut être vu comme un objet de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$. Il suffit de prouver que $T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{M})$ est une représentation irréductible. Notons $\mathcal{M}_{\mathrm{nr}} = \bar{k} \otimes_k \mathcal{M}$. L'application :

$$\begin{array}{rcl} T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{M}) & \to & T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{M}_{\mathrm{nr}}) \\ f & \mapsto & [\lambda \otimes x \mapsto [\lambda] f(x)] \end{array}$$

(où $[\lambda] \in W(\bar{k}) \subset \mathcal{O}_{\bar{K}}$ est le représentant de Teichmüller de $\lambda \in \bar{k}$) est un isomorphisme commutant à l'action de $G_{K^{\mathrm{nr}}} = \mathrm{Gal}\left(\bar{K}/K^{\mathrm{nr}}\right)$.

Supposons par l'absurde qu'il existe V un sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{M})$, strict, non nul et G_K-équivariant. C'est aussi un sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{M}_{\mathrm{nr}})$ $G_{K^{\mathrm{nr}}}$-équivariant et donc d'après le cas précédent, on peut écrire $V = T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{C}_{\mathrm{nr}})$ (égalité de représentations de $G_{K^{\mathrm{nr}}}$) où $\mathcal{C}_{\mathrm{nr}}$ est un quotient de $\mathcal{M}_{\mathrm{nr}}$ dans la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r_{\mathrm{nr}}$. Soit $\mathcal{M}'_{\mathrm{nr}}$ le noyau de la projection $\mathcal{M}_{\mathrm{nr}} \to \mathcal{C}_{\mathrm{nr}}$, c'est un sous-objet strict et non nul de $\mathcal{M}_{\mathrm{nr}}$ dans la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e),\mathrm{nr}}$.

Soient $\sigma \in \mathrm{Gal}\left(K^{\mathrm{nr}}/K\right)$ et $\hat{\sigma} \in G_K$ un prolongement de σ. Soient $\psi \in V \subset T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{M})$ et ψ_{nr} son image dans $T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{M}_{\mathrm{nr}})$. L'élément $\hat{\sigma}$ agit sur ψ_{nr} de la façon suivante :

$$\begin{array}{rrcl} \hat{\sigma}\psi_{\mathrm{nr}} : & \mathcal{M}_{\mathrm{nr}} & \to & \hat{A} \\ & s \otimes x & \mapsto & s\, \hat{\sigma}\psi(x) \end{array}$$

De plus, σ définit une application σ-semi-linéaire $\sigma : \mathcal{M}_{\mathrm{nr}} \to \mathcal{M}_{\mathrm{nr}}$. On vérifie qu'elle commute à ϕ_r et à N (ainsi $\sigma\mathcal{M}'_{\mathrm{nr}}$ est un sous-objet de $\mathcal{M}_{\mathrm{nr}}$) et qu'elle fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_{\mathrm{nr}} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\hat{\sigma}^{-1}\psi_{\mathrm{nr}}"'] & \mathcal{M}_{\mathrm{nr}} \arrow[d, "\psi_{\mathrm{nr}}"] \\ \hat{A} \arrow[r, "\hat{\sigma}"'] & \hat{A} \end{tikzcd}$$

Comme $\psi \in V$, on a $\psi_{|\mathcal{M}'_{\mathrm{nr}}} = 0$ et par le diagramme précédent, $\psi_{|\sigma\mathcal{M}'_{\mathrm{nr}}} = 0$.

On obtient un diagramme de la forme :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V \arrow[r] \arrow[d, equal] & T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{M}_{\mathrm{nr}}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{M}'_{\mathrm{nr}}) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & V \arrow[r] & T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{M}_{\mathrm{nr}}) \arrow[r] & T_{\mathrm{st}}^\star(\sigma\mathcal{M}'_{\mathrm{nr}}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

qui fournit un isomorphisme $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}'_{\mathrm{nr}}) \to T^\star_{\mathrm{st}}(\sigma\mathcal{M}'_{\mathrm{nr}})$, se relevant par pleine fidélité en un isomorphisme $\sigma\mathcal{M}'_{\mathrm{nr}} \to \mathcal{M}'_{\mathrm{nr}}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \sigma\mathcal{M}'_{\mathrm{nr}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}_{\mathrm{nr}} \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{M}'_{\mathrm{nr}} \arrow[r] & \mathcal{M}_{\mathrm{nr}} \end{tikzcd}$$

On en déduit $\sigma\mathcal{M}'_{\mathrm{nr}} = \mathcal{M}'_{\mathrm{nr}}$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}\,(K^{\mathrm{nr}}/K)$.

On pose $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'_{\mathrm{nr}} \cap \mathcal{M} = {\mathcal{M}'_{\mathrm{nr}}}^{\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nr}}/K)}$. On va montrer que $\mathcal{M}'$ est un sous-objet strict et non nul de $\mathcal{M}$ dans la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$, ce qui est une contradiction. Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une $k\,[u]\,/u^{ep}$-base de $\mathcal{M}$. Soit $y \in \mathcal{M}'_{\mathrm{nr}}$, $y \neq 0$. On peut écrire :

$$y = P_1\,(u)\,e_1 + \ldots + P_d\,(u)\,e_d$$

où les P_i sont des polynômes à coefficients dans $\ell\,[u]\,/u^{ep}$ pour ℓ une extension finie de k. D'autre part, si $P \in \ell\,[u]\,/u^{ep}$, on peut définir $\mathrm{Tr}_{\ell/k}\,(P)$ en calculant la trace de chacun des coefficients. En outre, comme ℓ/k est séparable, on peut supposer $\mathrm{Tr}_{\ell/k}\,(P_1) \neq 0$, quitte à multiplier y par un élément non nul de ℓ. Posons :

$$x = \mathrm{Tr}_{\ell/k}\,(P_1\,(u))\,e_1 + \ldots + \mathrm{Tr}_{\ell/k}\,(P_d\,(u))\,e_d.$$

C'est un élément de $\mathcal{M}$ et, puisque $\sigma\mathcal{M}'_{\mathrm{nr}} = \mathcal{M}'_{\mathrm{nr}}$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}\,(K^{\mathrm{nr}}/K)$, c'est aussi un élément de $\mathcal{M}'_{\mathrm{nr}}$. Comme on a supposé $\mathrm{Tr}_{\ell/k}\,(P_1\,(u)) \neq 0$, on a $x \neq 0$, puis $\mathcal{M}' \neq 0$ comme on voulait.

On pose $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}' = \mathcal{M}' \cap \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}'_{\mathrm{nr}}$. L'opérateur $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}'_{\mathrm{nr}} \to \mathcal{M}'_{\mathrm{nr}}$ (resp. $N : \mathcal{M}'_{\mathrm{nr}} \to \mathcal{M}'_{\mathrm{nr}}$) induit une application $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}' \to \mathcal{M}'$ (resp. $N : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}'$). Ces applications vérifient les bonnes conditions pour définir un objet de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$. Le seul point délicat est le fait que $\phi_r\,(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}')$ engendre $\mathcal{M}'$ en tant que $k\,[u]\,/u^{ep}$-module. Soit $x \in \mathcal{M}'$. On sait qu'il existe $\lambda_i \in \bar{k}\,[u]\,/u^{ep}$ et $y_i \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}'_{\mathrm{nr}}$ tels que :

$$x = \lambda_1\phi_r(y_1) + \ldots + \lambda_n\phi_r(y_n).$$

De plus, quitte à rentrer les constantes à l'intérieur des ϕ_r, on peut supposer que $\lambda_i = u^{s_i}$ pour certains entiers s_i. Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une $k\,[u]\,/u^{ep}$-base de $\mathcal{M}$. Écrivons :

$$y_j = P_{1,j}\,(u)\,e_1 + \ldots + P_{d,j}\,(u)\,e_d$$

où $P_{i,j} \in \bar{k}\,[u]\,/u^{ep}$. Soit ℓ une extension finie de k contenant tous les coefficients des polynômes $P_{i,j}$ définis ci-dessus. Comme précédemment, on peut définir $\mathrm{Tr}_{\ell/k}\,(P)$ pour $P \in \ell\,[u]\,/u^{ep}$. Soit $\alpha \in \ell$ un élément tel que $\mathrm{Tr}_{\ell/k}\,(\alpha) = 1$. On pose :

$$x_j = \mathrm{Tr}_{\ell/k}\,(\alpha P_{1,j}\,(u))\,e_1 + \ldots + \mathrm{Tr}_{\ell/k}\,(\alpha P_{d,j}\,(u))\,e_d.$$

On a alors $x_i \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}'$ et :

$$x = u^{s_1}\phi_r(x_1) + \ldots + u^{s_n}\phi_r(x_n)$$

ce qui prouve bien que $\phi_r(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}')$ engendre $\mathcal{M}'$ en tant que S-module. $\square$

Remarque. Comme conséquence du théorème précédent et de la pleine fidélité de $T^\star_{\mathrm{st}}$, un objet $\mathcal{M} \in \underline{\mathcal{M}}^r$ est semi-simple si et seulement si $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$ est une représentation semi-simple.

Il résulte de la démonstration précédente et de l'exactitude du foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ le théorème suivant :

Théorème 5.4.4. *Si $\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, on a :*

$$\mathit{long}\ (\mathcal{M}) = \mathit{long}\ (T^\star_{st}(\mathcal{M}))$$

Proposition 5.4.5. *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ isomorphe en tant que S-module à $S/p^{n_1}S \oplus \ldots \oplus S/p^{n_d}S$ pour certains entiers n_i. Alors en tant que $\mathbb{Z}_p$-module, $T^\star_{st}(\mathcal{M})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_p/p^{n_1}\mathbb{Z}_p \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_p/p^{n_d}\mathbb{Z}_p$.*

Démonstration. Le lemme 2.3.1.2 de [Bre99a] dit que si $\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$, alors $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$ est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension $\mathrm{rg}\,\mathcal{M}$. On en déduit par exactitude du foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ que :

$$\mathrm{long}_S(\mathcal{M}) = \mathrm{long}_{\mathbb{Z}_p}(T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}))$$

où les longueurs sont calculées respectivement dans la catégorie des S-modules et dans celle des $\mathbb{Z}_p$-modules.

Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ isomorphe en tant que S-module à $S/p^{n_1}S \oplus \ldots \oplus S/p^{n_d}S$. La représentation galoisienne $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de longueur finie et donc est isomorphe en tant que $\mathbb{Z}_p$-modules à $\mathbb{Z}_p/p^{n'_1}\mathbb{Z}_p \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_p/p^{n'_d}\mathbb{Z}_p$ pour certains entiers n'_i. Soit n un entier. Le noyau de la multiplication par p^n sur $\mathcal{M}$ s'envoie par le foncteur exact $T^\star_{\mathrm{st}}$ sur le conoyau de la multiplication par p^n sur $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$. On en déduit en regardant les longueurs que :

$$\sum_{i=1}^{d} \min(n_i, n) = \sum_{i=1}^{d'} \min(n'_i, n).$$

Cela permet de conclure. $\square$

6 Conséquences

6.1 Modules filtrés et modules fortement divisibles

6.1.1 Définitions

On reprend dans ce paragraphe les définitions et propriétés du paragraphe 4.1.1 de [Bre97a].

On rappelle que K_0 désigne le corps des fractions de W, anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k. On définit $S_{K_0} = S \otimes_W K_0$. C'est l'ensemble suivant :

$$S_{K_0} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{(E(u))^i}{i!},\ w_i \in K_0[u],\ \lim_{i\to\infty} w_i = 0 \right\}.$$

On munit S_{K_0} d'une filtration en posant $\mathrm{Fil}^n S_{K_0} = \mathrm{Fil}^n S \otimes_W K_0$, ou encore :

$$\mathrm{Fil}^n S_{K_0} = \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} w_i \frac{(E(u))^i}{i!},\ w_i \in K_0[u],\ \lim_{i\to\infty} w_i = 0 \right\}.$$

On prolonge de manière évidente le Frobenius et l'opérateur de monodromie définis sur S à tout S_{K_0}.

On définit un *module fortement divisible* (resp. un *module filtré sur* S_{K_0}) comme la donnée suivante :

1. un S-module (resp. un S_{K_0}-module) $\mathcal{M}$ libre de rang fini ;
2. un sous-S-module (resp. un sous-S_{K_0}-module) de $\mathcal{M}$, noté $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ contenant $\mathrm{Fil}^r S \cdot \mathcal{M}$ (resp. contenant $\mathrm{Fil}^r S_{K_0} \cdot \mathcal{M}$) et tel que $\mathcal{M}/\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ soit sans p-torsion (cette dernière condition est automatique pour les modules filtrés sur S_{K_0}) ;
3. d'une flèche ϕ-semi-linéaire $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ vérifiant la condition :
$$\phi_r(sx) = \frac{1}{c^r}\phi_r(s)\,\phi_r\left((E(u))^r x\right)$$
et ce pour tout élément $s \in \mathrm{Fil}^r S$ (resp. tout élément $s \in \mathrm{Fil}^r S_{K_0}$) et tout élément $x \in \mathcal{M}$ telle que $\mathrm{im}\,\phi_r$ engendre $\mathcal{M}$ en tant que S-module (resp. en tant que S_{K_0}-module) ;
4. une application W-linéaire (resp. une application K_0-linéaire) $N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ vérifiant les trois conditions :
   - pour tout $s \in S$ (resp. pour tout $s \in S_{K_0}$) et tout $x \in \mathcal{M}$, $N(sx) = N(s)\,x + sN(x)$
   - $E(u)\,N(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$
   - le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "E(u)N"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "cN"] \\
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

Suivant toujours [Bre97a], on définit de manière évidente la catégorie des modules filtrés sur S_{K_0} et celle des modules fortement divisibles. Elles sont équipées d'un foncteur vers les représentations galoisiennes. Précisément, si $\mathcal{M}$ est un module filtré sur S_{K_0}, on pose $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \hat{B}^+_{\mathrm{st}})$ où par définition $\hat{B}^+_{\mathrm{st}} = \hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_W K_0$ muni des structures induites et où Hom est compatible à toutes les structures ; on obtient une $\mathbb{Q}_p$-représentation de G_K. De même si $\mathcal{M}$

est un module fortement divisible, on définit $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\mathrm{st}})$, le Hom étant encore compatible à toutes les structures. On obtient une $\mathbb{Z}_p$-représentation libre de G_K. Les rangs des représentations obtenues coïncident avec les rangs des objets $\mathcal{M}$.

Si $\mathcal{M}$ est un module fortement divisible, on vérifie immédiatement que $\mathcal{M} \otimes_W K_0$ est un module filtré sur S_{K_0} et que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathcal{M}/p^n\mathcal{M}$ est un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$. De plus, on montre que $\mathcal{M}$ s'identifie à la limite projective de $\mathcal{M}/p^n\mathcal{M}$, puis que $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$ s'identifie à la limite projective de $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}/p^n\mathcal{M})$. On déduit de la pleine fidélité prouvée précédemment le corollaire suivant :

Théorème 6.1.1. *Le foncteur $T^\star_{st}$ de la catégorie des modules fortement divisibles dans la catégorie des $\mathbb{Z}_p$-représentations (libres) de G_K est pleinement fidèle.*

6.2 Modules fortement divisibles et foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$

Nous démontrons dans ce paragraphe le théorème III.*v*, ou plus exactement la formulation équivalente mais légèrement différente suivante :

Théorème 6.2.1. *On suppose $er < p-1$. Soit $\mathcal{M}$ un module fortement divisible sur S, et soit V la représentation galoisienne associée* via *le foncteur $T^\star_{st}$ à $\mathcal{M}_{K_0} = \mathcal{M} \otimes_W K_0$ qui est un module filtré sur S_{K_0}. Le foncteur $T^\star_{st}$ réalise une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des sous-modules fortement divisibles de $\mathcal{M}_{K_0}$ et celle des sous-$\mathbb{Z}_p$-réseaux de V stables par G_K.*

Démonstration. Nous suivons pas à pas la preuve de la proposition 3 de [Bre99b], qui n'utilise essentiellement que la pleine fidélité du foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ et un équivalent du théorème 5.4.3.

Dans un premier temps, la pleine fidélité du foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ considérée dans l'énoncé du théorème se déduit directement du théorème 6.1.1.

Reste l'essentielle surjectivité. Soit T un $\mathbb{Z}_p$-réseau de V stable par G_K. Il existe un entier n_0 tel que :

$$p^{n_0}T \subset T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) \subset (1/p^{n_0})T$$

On en déduit que pour $n \geqslant n_0$, $p^{n_0}T/p^nT$ est un sous-objet de $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})/p^nT$, ce dernier étant un quotient de $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}/p^{n+n_0}\mathcal{M})$. Le théorème 5.4.3 assure alors que $p^{n_0}T/p^nT$ s'écrit $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}_n)$ pour $\mathcal{M}_n$ un certain objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$.

La pleine fidélité de $T^\star_{\mathrm{st}}$ assure l'existence d'une unique flèche $\mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_{n+1}$ relevant la projection $p^{n_0}T/p^{n+1}T \to p^{n_0}T/p^nT$, et la limite inductive de ce système s'identifie à $\mathcal{M}_\infty \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ pour un certain module fortement divisible $\mathcal{M}_\infty$ qui répond à la question. □

Remarque. Notez que si $\mathcal{M}$ est un S_{K_0}-module filtré « faiblement admissible », alors il contient toujours un module fortement divisible par [Bre99a].

6.3 Variante d'une conjecture de Serre

Dans ce paragraphe, on se propose d'expliquer comment le théorème donné dans l'introduction et que nous rappelons ci-dessous est conséquence de la théorie présentée précédemment. Notez qu'ici, on ne suppose *a priori* plus rien ni sur e, ni sur r.

Théorème 6.3.1. *Soit X_K un schéma propre et lisse sur K et à réduction semi-stable sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$. On fixe r un entier. Les poids de l'inertie modérée sur la semi-simplifiée modulo p de $H^r_{ét}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)^\vee$ (où $X_{\bar{K}}$ est l'extension des scalaires de X_K à $\bar{K}$ et où « $\vee$ » signifie que l'on prend le dual) sont tous compris entre 0 et er.*

Démonstration. Dans un premier temps, il est clair que l'on peut supposer $er < p - 1$, le théorème étant trivialement vérifié dans le cas contraire. On peut donc utiliser les résultats précédents.

D'après les résultats de [Tsu99] et du paragraphe 2.2 de [Bre02], la $\mathbb{Q}_p$-représentation $V = H^r_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)^\vee$ (le dual étant cette fois-ci le $\mathbb{Q}_p$-dual) provient *via* le foncteur $T^\star_{\text{st}}$ d'un module filtré $\mathcal{M}_{K_0}$ sur S_{K_0}, et d'après les résultats de [Bre99a], ce module admet un sous-module fortement divisible $\mathcal{M}$.

La $\mathbb{Z}_p$-représentation $T = T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M})$ est un réseau de V stable par Galois. La représentation quotient T/p correspond *via* le foncteur $T^\star_{\text{st}}$ à $\mathcal{M}/p$ qui est un objet de $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$. La semi-simplifiée de T/p est la somme directe de ses quotients de Jordan-Hölder, et chacun de ces quotients correspond à un objet simple de $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r_{(e)}$. Le théorème 4.2.2 permet de conclure. $\square$

Remarque. Si l'on préfère, on peut ne pas utiliser le théorème 6.2.1, mais dire à la place que si T et T' sont deux $\mathbb{Z}_p$-réseaux de V stables par Galois, alors les semi-simplifiées des réductions modulo p de ces deux représentations sont isomorphes. On aurait donc pu garder le premier module fortement divisible $\mathcal{M}$.

Chapitre IV

Un théorème de comparaison

Résumé

On considère K un corps complet pour une valuation discrète, de caractéristique nulle et dont le corps résiduel est supposé parfait de caractéristique p. On appelle $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K, et $\bar{K}$ une clôture algébrique. Soit X_K un schéma propre et lisse sur K admettant un modèle propre et semi-stable X sur $\mathcal{O}_K$. Dans cet article, on démontre un isomorphisme de périodes reliant le r-ième groupe de cohomologie étale de $X_{\bar{K}}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et un r-ième groupe de cohomologie log-cristalline de la fibre spéciale de X. Nous avons toutefois la restriction $er < p-1$ où e désigne l'indice de ramification absolu de K.

On en déduit une preuve complète de la conjecture de Serre sur l'inertie modérée (voir [Ser72]).

Sommaire

Tout au long de cet article, on considère p un nombre premier et k un corps parfait de caractéristique p. On note $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et K_0 son corps des fractions. On note σ le Frobenius sur k, sur W et sur K_0. On considère K une extension totalement ramifiée de K_0 de degré e. On fixe π une uniformisante de K et on note $E(u)$ son polynôme minimal sur K_0. Il s'agit d'un polynôme d'Eisenstein. On note de plus $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K. Le corps résiduel $\mathcal{O}_K/\pi$ s'identifie à k.

On fixe $\bar{K}$ (resp. $\bar{k}$) une clôture algébrique de K (resp. de k) et on définit G_K (resp. G_k) comme le groupe de Galois absolu de K (resp. de k). On désigne par K^{nr} (resp. K^{mr}) l'extension maximale non ramifiée (resp. modérément ramifiée) de K et I comme (resp. I_s) le groupe d'inertie (resp. d'inertie sauvage), c'est-à-dire le groupe de Galois de $\bar{K}$ sur K^{nr} (resp. sur K^{mr}). Le quotient $I_t = I/I_s$ est le groupe d'inertie modérée.

Le but de cet article est de comparer, lorsque X est un schéma propre et semi-stable sur $\mathcal{O}_K$, la cohomologie log-cristalline (définie par Kato — voir [Kat89]) de la fibre spéciale de X et la cohomologie étale de $X_{\bar{K}} = X \times_{\mathcal{O}_K} \bar{K}$. Ces théorèmes de comparaison s'inscrivent dans une grande lignée amorcée par Grothendieck, Tate et Raynaud et poursuivie par Fontaine, Messing, Faltings, Kato, Tsuji, Breuil... Nous nous intéressons particulièrement aux cas des coefficients de torsion. Précisément nous obtenons le théorème :

Théorème IV.*i*. *On garde les notations précédentes et on fixe r un entier vérifiant $er < p - 1$. Si $X_n = X \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/p^n$, on a un isomorphisme canonique de modules galoisiens :*

$$H^i_{\acute{e}t}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})(r) = T_{st\star}(H^i_{log\text{-}cris}(X_n/(S/p^nS)))$$

pour tout $i < r$ (et aussi $i = r$ si $n = 1$).

Dans ce théorème S et $T_{\mathrm{st}\star}$ désignent respectivement une certaine W-algèbre, et un certain foncteur d'une catégorie de S-modules de torsion $\underline{\mathcal{M}}^r$ vers la catégorie des $\mathbb{Z}_p$-représentations galoisiennes, tous deux introduits par Breuil dans [Bre97a] (pour le cas $e = 1$) et [Bre99a] (pour le cas général), et étudiés dans le chapitre III de cette thèse. Notons qu'apparement le terme de droite de l'isomorphisme donné par le théorème ne dépend pas de r alors que celui de gauche en dépend manisfestement ; en réalité pour pouvoir appliquer le foncteur $T_{\mathrm{st}\star}$, il faut munir $H^i_{\text{log-cris}}(X_n/(S/p^nS))$ qui dépendent, elles, de r mais qui n'apparaissent pas dans cette formulation simplifiée du théorème.

Comme conséquence du théorème IV.*i* et des résultats du chapitre III, nous donnons une réponse affirmative à une question formulée par Serre dans le paragraphe 1.13 de [Ser72] :

Théorème IV.*ii*. *On garde les notations précédentes et on fixe r un entier quelconque. Soient V la restriction au groupe d'inertie I de la $\mathbb{F}_p$-représentation $H^r_{\acute{e}t}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\vee$ (où « $^\vee$ » signifie que l'on prend le $\mathbb{F}_p$-dual) et V^{ss} la semi-simplifiée de V. Alors les poids de l'inertie modérée sur V^{ss} sont tous compris entre 0 et er.*

Cet article s'articule comme suit. Les deux sections qui suivent cette introduction se bornent à présenter les principaux objets : la section 1 est consacré aux objets d'algèbre linéaire (l'anneau S, les catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$ et les foncteurs $T_{\mathrm{st}}^{\star}$ et $T_{\mathrm{st}\star}$), alors que la section 2 plus géométrique introduit le site log-syntomique et les faisceaux $\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}$ et $\mathcal{J}_n^{[s]}$, ainsi que certaines variantes, qui s'avèreront cruciaux pour la preuve du théorème IV.*i*.

Dans la section 3, on prouve que le groupe de cohomologie $H^r_{\text{log-cris}}(X_n/(S/p^nS))$ peut être muni de structures supplémentaires qui en font un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ (auquel on peut alors appliquer le foncteur $T_{\mathrm{st}\star}$). La démonstration se découpe en deux parties : en premier lieu, on montre le résultat lorsque $n = 1$, puis on l'étend à tout n par un dévissage.

Finalement, dans la section 4, on étudie la cohomologie étale et on prouve le théorème IV.*i*, d'où nous déduisons directement le théorème IV.*ii*.

1 Les objets d'algèbre linéaire

1.1 La catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$

On reprend les notations du début de l'introduction et on fixe dans tout ce chapitre un entier r positif ou nul vérifiant l'inégalité $er < p-1$. On rappelle que e désigne le degré de l'extension K/K_0, c'est-à-dire l'indice de ramification absolue de K.

1.1.1 L'anneau S

Soit $W[u]$ l'anneau des polynômes en une indéterminée u à coefficients dans W. Par définition, S est le complété p-adique de l'enveloppe aux puissances divisées de $W[u]$ par rapport à l'idéal principal engendré par $E(u)$ compatibles aux puissances divisées canoniques sur $pW[u]$. Concrètement, S est la sous-W-algèbre de $K_0[\![u]\!]$ suivante :

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{(E(u))^i}{i!},\ w_i \in W[u],\ \lim_{i\to\infty} w_i = 0 \right\}$$

ou encore :

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{q(i)!},\ w_i \in W,\ \lim_{i\to\infty} w_i = 0 \right\}$$

où $q(i)$ désigne le quotient de la division euclidienne de i par e.

On munit S d'un Frobenius ϕ défini comme l'unique application σ-semi-linéaire vérifiant $\phi(u^i/q(i)!) = u^{pi}/q(i)!$ et d'un opérateur de monodromie N défini comme l'unique application W-linéaire vérifiant $N(u^i/q(i)!) = -iu^i/q(i)!$. On munit également S d'une filtration : pour tout entier positif ou nul n, on définit $\mathrm{Fil}^n S$ comme le complété p-adique de l'idéal engendré par les éléments $\frac{(E(u))^i}{i!}$ pour $i \geqslant n$. On a $\mathrm{Fil}^0 S = S$, $\mathrm{Fil}^n S \subset \mathrm{Fil}^{n-1} S$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Fil}^n S = 0$, et certaines compatibilités vis-à-vis des opérateurs à savoir $N(\mathrm{Fil}^n S) \subset \mathrm{Fil}^{n-1} S$ et, pour $0 \leqslant n \leqslant p-1$, $\phi(\mathrm{Fil}^n S) \subset p^n S$. Cela permet de définir, pour $0 \leqslant n \leqslant p-1$, l'application $\phi_n = \frac{\phi}{p^n} : \mathrm{Fil}^n S \to S$. L'élément $\phi_1(E(u))$ est une unité de S, on le notera c par la suite.

On note $S_n = S/p^n S$. Le Frobenius, l'opérateur de monodromie et la filtration passent au quotient et définissent des structures analogues sur S_n.

1.1.2 Définition des catégories

Par définition, un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ est la donnée :

1. d'un S-module $\mathcal{M}$ isomorphe à une somme directe (finie) de S_n pour des entiers n convenables ;
2. d'un sous-module $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$ contenant $\mathrm{Fil}^r S \cdot \mathcal{M}$;
3. d'une flèche ϕ-semi-linéaire $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ vérifiant la condition :

$$\phi_r(sx) = \frac{1}{c^r}\phi_r(s)\,\phi_r\left((E(u))^r x\right)$$

pour tout élément $s \in \mathrm{Fil}^r S$ et tout élément $x \in \mathcal{M}$ et telle que $\mathrm{im}\,\phi_r$ engendre $\mathcal{M}$ en tant que S-module ;
4. d'une application W-linéaire $N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ telle que :
   - pour tout $s \in S$ et tout $x \in \mathcal{M}$, $N(sx) = N(s)\,x + sN(x)$
   - $E(u)\,N(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$
   - le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "E(u)N"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "cN"] \\
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

Une flèche entre deux objets $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ de cette catégorie est un morphisme S-linéaire de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$ respectant la filtration et commutant aux applications ϕ_r et N.

Nous renvoyons au chapitre III pour l'étude de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$. Il y est prouvé en particulier que $\underline{\mathcal{M}}^r$ est une catégorie abélienne et artinienne.

1.2 Les objets tués par p

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathcal{M}}^r$ formée des objets tués par p. Cette dernière catégorie est équivalente à une catégorie d'objets sur $k[u]/u^{ep}$ plus simple à manipuler que les objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$ (voir chapitre III par exemple). Cependant, nous aurons besoin d'une description encore différente utilisant des objets sur $k[u]/u^p$, et c'est celle-ci que nous allons détailler dans ce paragraphe.

On commence par rappeler le résultat suivant :

Lemme 1.2.1. *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tué par p. Alors l'application :*

$$S_1 \otimes_{k[u]/u^e} \mathit{Fil}^r\mathcal{M}/E(u)\mathit{Fil}^r\mathcal{M} \xrightarrow{id\otimes\phi_r} \mathcal{M}$$

est un isomorphisme (où S est vu comme un $k[u]/u^e$-module via *le Frobenius $\phi : u^i \mapsto u^{pi}$).*

Démonstration. Le cas général est similaire au cas $e = 1$ traité dans [Bre97a] (corollaire 2.2.2.2). □

On déduit directement de ce lemme le corollaire suivant :

Corollaire 1.2.2. *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tués par p. Soit $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ une application S_1-linéaire telle que $f(\mathit{Fil}^r\mathcal{M}) \subset \mathit{Fil}^r\mathcal{N}$. Alors il existe une unique application S_1-linéaire $g : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathit{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_r"'] & \mathit{Fil}^r\mathcal{N} \arrow[d, "\phi_r"] \\ \mathcal{M} \arrow[r, "g"] & \mathcal{N} \end{tikzcd}$$

Soit $\tilde{S} = k[u]/u^p$. On munit $\tilde{S}$ d'un Frobenius ϕ, unique application σ-semi-linéaire vérifiant $\phi(u^i) = u^{ip}$, et d'un opérateur de monodromie N, unique application k-linéaire vérifiant $N(u^i) = -iu^i$. On définit également une filtration sur $\tilde{S}$ en posant pour tout entier n, $\mathrm{Fil}^n\tilde{S} = u^{en}\tilde{S}$. On dispose d'un morphisme d'anneaux $S_1 \to \tilde{S}$ qui envoie u sur u et toutes les puissances divisées $u^i/q(i)!$ sur 0 pour $i \geqslant p$.

On définit la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ en adaptant la définition de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$. Un objet de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ est la donnée suivante :

1. un $\tilde{S}$-module $\tilde{\mathcal{M}}$ libre de rang fini ;
2. un sous-module $\mathrm{Fil}^r\tilde{\mathcal{M}}$ de $\tilde{\mathcal{M}}$ contenant $\mathrm{Fil}^r\tilde{S}\cdot\tilde{\mathcal{M}} = u^{er}\tilde{\mathcal{M}}$;
3. une flèche ϕ-semi-linéaire $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\tilde{\mathcal{M}} \to \tilde{\mathcal{M}}$ telle que l'image de ϕ_r engendre $\tilde{\mathcal{M}}$ en tant que $\tilde{S}$-module ;
4. une application k-linéaire $N : \tilde{\mathcal{M}} \to \tilde{\mathcal{M}}$ telle que :
   - pour tout $\lambda \in \tilde{S}$ et tout $x \in \tilde{\mathcal{M}}$, $N(\lambda x) = N(\lambda)x + \lambda N(x)$
   - $u^e N(\mathrm{Fil}^r\tilde{\mathcal{M}}) \subset \mathrm{Fil}^r\tilde{\mathcal{M}}$
   - le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fil}^r\tilde{\mathcal{M}} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "u^eN"'] & \tilde{\mathcal{M}} \arrow[d, "c_\pi N"] \\ \mathrm{Fil}^r\tilde{\mathcal{M}} \arrow[r, "\phi_r"] & \tilde{\mathcal{M}} \end{tikzcd}$$

   où c_π est la réduction de c dans $\tilde{S}$.

Les morphismes entre deux objets de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ sont les applications $\tilde{S}$-linéaires qui respectent le Fil ^{r} et commutent au Frobenius et à l'opérateur de monodromie.

On dispose pour les objets de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ de la proposition suivante, fort utile pour les manipulations :

Proposition 1.2.3. *Soit $\tilde{\mathcal{M}}$ un objet de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$. Alors il existe $(e_1, \ldots, e_d)$ une $\tilde{S}$-base de $\tilde{\mathcal{M}}$ et des entiers $n_1, \ldots, n_d$ compris entre 0 et er tels que :*

$$\mathit{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} = \bigoplus_{i=1}^{d} u^{n_i} k\,[u]\,/u^p \cdot e_i.$$

Une telle famille $(e_1, \ldots, e_d)$ est appelée une base adaptée *de $\tilde{\mathcal{M}}$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème de structure des modules de type fini sur un anneau principal (l'anneau étant ici $k\,[u]$). □

Par ailleurs, on dispose d'un foncteur T de la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathcal{M}}^r$ formée des objets tués par p dans la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ défini de la façon suivante. Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tué par p. C'est en particulier un S_1-module libre de rang fini et le produit tensoriel $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \otimes_{S_1} \tilde{S}$ est un $\tilde{S}$-module libre de rang fini. On dispose d'une projection canonique $\mathcal{M} \to \tilde{\mathcal{M}}$. On définit Fil $^r\tilde{\mathcal{M}}$ comme l'image de Fil $^r\mathcal{M}$ par cette projection, et on vérifie facilement que les opérateurs ϕ_r et N définis sur $\mathcal{M}$ passent au quotient pour fournir respectivement des opérateurs Fil $^r\tilde{\mathcal{M}} \to \tilde{\mathcal{M}}$ et $\tilde{\mathcal{M}} \to \tilde{\mathcal{M}}$ encore notés ϕ_r et N.

Notons $\kappa = \ker(S_1 \to \tilde{S})$ et prouvons un lemme concernant ce noyau :

Lemme 1.2.4. *On suppose $r \neq 0$, c'est-à-dire $1 \leqslant er \leqslant p-2$. Alors $\kappa \subset \mathit{Fil}^r S_1$, $\phi_r(\kappa) \subset \mathit{Fil}^r S_1$ et $\phi_r \circ \phi_r(\kappa) = 0$.*

Démonstration. On constate que κ est l'idéal engendré par les $u^i/q(i)!$ pour $i \geqslant p$. En particulier, on a bien $\kappa \subset$ Fil $^rS_1$. Par ailleurs, puisque $r > 0$, on a, pour $i \geqslant p$:

$$\phi_r\left(\frac{u^i}{q(i)!}\right) = \phi_r\left(u^{er}\frac{u^{i-er}}{q(i)!}\right) = \phi_r\left(u^{er}\right)\phi\left(\frac{u^{i-er}}{q(i)!}\right) = c^r\frac{u^{p(i-er)}}{q(i)!}. \tag{1}$$

Comme $er \leqslant p-2$, on a $p(i-er) \geqslant 2p$ et donc $\phi_r(\kappa)$ est inclus dans κ', l'idéal engendré par les $u^i/q(i)!$ pour $i \geqslant 2p$. En particulier, $\phi_r(\kappa) \subset$ Fil $^rS_1$.

D'autre part, si $i \geqslant 2p$, on a $p(i-er) > i+ep$ et $v_p((p(i-er))!) > v_p(q(i)!)$ d'où par la formule (1) $\phi_r(u^i/q(i)!) = 0$ (dans S_1). Ainsi $\phi_r(\kappa') = 0$, d'où $\phi_r \circ \phi_r(\kappa) = 0$. □

On a alors la proposition suivante qui permet de réduire l'étude de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ à celle de la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ et à des dévissages.

Proposition 1.2.5. *Le foncteur T est une équivalence de catégories*

Démonstration. Il faut traiter à part le cas trivial $r = 0$ qu'on laisse au lecteur. On suppose à partir de maintenant $1 \leqslant er \leqslant p-2$.

Prouvons la pleine fidélité du foncteur T. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ deux objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tués par p et $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un morphisme entre ces objets. On suppose que f vaut 0 dans $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$, c'est-à-dire que $f(\mathcal{M}) \subset \kappa\mathcal{N}$. En particulier, $f(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) \subset \kappa\mathcal{N}$ et donc :

$$f \circ \phi_r(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) = \phi_r \circ f(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) \subset \phi_r(\kappa)\mathcal{N}.$$

Par hypothèse ϕ_r $(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M})$ engendre tout $\mathcal{M}$, et donc $f(\mathcal{M}) \subset \phi_r(\kappa)\mathcal{N}$. En réitérant l'argument, et puisque $\phi_r \circ \phi_r(\kappa) = 0$ (lemme 1.2.4), on obtient $f(\mathcal{M}) = 0$ et donc $f = 0$, ce qui assure la fidélité du foncteur.

Considérons à présent $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tués par p. Notons $\tilde{\mathcal{M}}$ et $\tilde{\mathcal{N}}$ leurs images respectives dans la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$. Soit $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{M}} \to \tilde{\mathcal{N}}$ un morphisme de la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$. On veut montrer qu'il existe un morphisme (nécessairement unique) de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$, $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ tel que $f \equiv \tilde{f} \pmod{\kappa\mathcal{N}}$. On construit f par approximations successives. On considère dans un premier temps $f_0 : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un relevé S_1-linéaire quelconque de $\tilde{f}$. Comme $\kappa\mathcal{N} \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{N}$, le relevé f_0 est automatiquement compatible à Fil^r et les applications f_0 et ϕ_r commutent modulo $\kappa\mathcal{N}$. Par le corollaire 1.2.2, il existe une unique application S_1-linéaire $f_1 : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\phi_r"'] & \mathrm{Fil}^r\mathcal{N} \arrow[d, "\phi_r"] \\
\mathcal{M} \arrow[r, "f_1"] & \mathcal{N}
\end{tikzcd}$$

On vérifie directement que $f_0 \equiv f_1 \pmod{\kappa\mathcal{N}}$, ce qui implique d'une part que f_1 respecte les Fil^r et d'autre part, par un argument analogue à celui utilisé pour la fidélité, que $\phi_r \circ f_0 \equiv \phi_r \circ f_1 \pmod{\phi_r(\kappa)\mathcal{N}}$. Ainsi f_1 et ϕ_r commutent modulo $\phi_r(\kappa)\mathcal{N}$. On construit de même f_2 à partir de f_1, et celui-ci convient.

Il reste à prouver que f_2 commute automatiquement à N. Il s'agit à nouveau d'un argument analogue. Pour plus de précisions, on pourra consulter la fin de la preuve du lemme III.5.1.3.

Montrons pour finir l'essentielle surjectivité. Soit $\tilde{\mathcal{M}}$ un objet de la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$. Considérons $(e_1, \ldots, e_d)$ une base adaptée de $\tilde{\mathcal{M}}$ pour les entiers $n_1, \ldots, n_d$. Notons $\mathcal{M}$ le S_1-module engendré par des éléments $\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_d$ et définissons :

$$\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} = \mathrm{Fil}^r S_1 \cdot \mathcal{M} + \sum_{i=1}^{d} u^{n_i} S_1 \cdot \hat{e}_i \subset \mathcal{M}.$$

Soit $\mathrm{pr} : \mathcal{M} \to \tilde{\mathcal{M}}$ l'application S_1-linéaire définie par $\mathrm{pr}(\hat{e}_i) = e_i$ pour tout i. Elle est surjective et respecte les Fil^r. Pour tout i, notons $\hat{x}_i$ un relevé (*i.e.* un antécédent par pr) de ϕ_r (e_i) et définissons $\phi_r(\hat{e}_i) = \hat{x}_i$. On prolonge ϕ_r à tout $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ (de façon à respecter les conditions de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$) obtenant ainsi une application $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \to \mathcal{M}$, dont il est facile de vérifier que l'image engendre tout $\mathcal{M}$.

Il reste à définir un opérateur de monodromie sur $\mathcal{M}$. Pour cela, on procède à nouveau par approximations successives. On commence par définir N_0 en imposant la condition de Leibniz et que $N_0(\hat{e}_i)$ soit un relevé de $N(e_i)$. On vérifie immédiatement que $E(u)N_0(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ et que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "E(u)N_0"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "cN_0"] \\ \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

commute modulo $\kappa\mathcal{M}$. Une variante du corollaire 1.2.2 assure que l'on peut construire une application N_1 vérifiant la condition de Leibniz et faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "E(u)N_0"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "cN_1"] \\ \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

Mais alors N_1 est un autre relevé de N, ce qui implique que $E(u)N_1(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$. Et par ailleurs, le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "E(u)N_1"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "cN_1"] \\ \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

commute modulo $\phi_r(\kappa)\mathcal{M}$. L'application N_2 obtenue à partir de N_1 de la même façon que N_1 a été obtenue à partir de N_0 répond finalement à la question. $\square$

1.3 Foncteurs vers les représentations galoisiennes

Il existe deux versions du foncteur vers les représentations galoisiennes. La première, que nous notons $T_{\mathrm{st}\star}$, est covariante et la seconde, $T_{\mathrm{st}}^{\star}$, est contravariante. Dans le chapitre III, seule la version contravariante est présentée et étudiée. Cependant, il sera plus commode, pour ce que nous voulons faire, d'utiliser la version covariante. Nous sommes donc dans l'obligation de présenter ici les deux foncteurs et d'établir les liens qui les relient. C'est le but de ce paragraphe.

1.3.1 Un anneau de périodes

Avant de pouvoir définir ces foncteurs, il faut introduire l'anneau de périodes $\hat{A}_{\mathrm{st}}$. Cet anneau a une interprétation cohomologique que nous passons sous silence pour l'instant.

Pour tout entier n, on considère l'application :

$$\begin{array}{rcl}\hat{\theta}_n & : & W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p) \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n \\ & & (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \mapsto \hat{a}_0^{p^n} + p\hat{a}_1^{p^{n-1}} + \dots + p^{n-1}\hat{a}_{n-1}^p\end{array}$$

où $\hat{a}_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n$ est un relevé quelconque de a_i. On note $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p)^{\mathrm{DP}}$ l'enveloppe aux puissances divisées de $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p)$ par rapport à $\ker \hat{\theta}_n$ (et compatibles avec les puissances divisées canoniques sur $pW_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p)$). Les $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p)^{\mathrm{DP}}$ forment un système projectif pour les applications de transition données par le Frobenius sur les vecteurs de Witt. On note A_{cris} la limite projective de ce système. On voit facilement que le Frobenius sur les vecteurs de Witt induit une application $\phi : A_{\mathrm{cris}} \rightarrow A_{\mathrm{cris}}$. En outre, on définit sur A_{cris} une filtration obtenue à partir des filtrations données par les puissances divisées sur $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p)^{\mathrm{DP}}$. Si $t < 0$, on pose par convention $\mathrm{Fil}^t A_{\mathrm{cris}} = A_{\mathrm{cris}}$. Par ailleurs, A_{cris} est muni d'une action du groupe de Galois G_K.

Par définition $\hat{A}_{\mathrm{st}}$ est le complété p-adique de $A_{\mathrm{cris}} \langle X \rangle$. On munit $\hat{A}_{\mathrm{st}}$ d'une filtration en posant :

$$\mathrm{Fil}^t \hat{A}_{\mathrm{st}} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{X^i}{i!}, \lim_{i \to \infty} a_i = 0, \ a_i \in \mathrm{Fil}^{t-i} A_{\mathrm{cris}} \right\}$$

pour tout entier t. On étend le Frobenius à $\hat{A}_{\mathrm{st}}$ en imposant $\phi(X) = (1 + X)^p - 1$. On vérifie que $\phi(\mathrm{Fil}^t \hat{A}_{\mathrm{st}}) \subset p^t \hat{A}_{\mathrm{st}}$, ce qui permet de définir une application $\phi_t = \phi/p^t : \mathrm{Fil}^t \hat{A}_{\mathrm{st}} \rightarrow \hat{A}_{\mathrm{st}}$. D'autre part, on définit sur $\hat{A}_{\mathrm{st}}$ une dérivation A_{cris}-linéaire, par la formule :

$$N\left(\frac{X^i}{i!}\right) = (1 + X)\frac{X^{i-1}}{(i-1)!}.$$

On étend également l'action de G_K à tout $\hat{A}_{\mathrm{st}}$. Pour cela, on commence par fixer[1] $\underline{\pi} = (\pi_n)$ un système compatible de racines p^n-ièmes de π. Soit $g \in G_K$. On définit $\varepsilon_n(g)$ comme l'unique élément de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ vérifiant $g(\pi_n) = \varepsilon_n(g)\pi_n$. La famille des $(\varepsilon_n(g))$ forme un système compatible de racines p^n-ièmes de l'unité et par suite un élément $[\varepsilon(g)] \in A_{\mathrm{cris}}$ obtenu à partir des représentants de Teichmüller $[\varepsilon_n(g)] \in W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p)$. L'action de g sur X est alors donnée par la formule $g(X) = [\varepsilon(g)](1 + X) - 1$. On étend cette action à tout $\hat{A}_{\mathrm{st}}$ par semi-linéarité.

L'anneau S n'est pas sans rapport avec $\hat{A}_{\mathrm{st}}$. Si l'on note $[\underline{\pi}]$ l'élément de $\hat{A}_{\mathrm{st}}$ défini à partir du système (π_n) fixé précédemment, $\hat{A}_{\mathrm{st}}$ peut être vu comme une S-algèbre *via* l'unique morphisme W-linéaire $S \rightarrow \hat{A}_{\mathrm{st}}$ qui envoie u sur $\frac{[\underline{\pi}]}{1+X}$. Ce morphisme est injectif et identifie S aux invariants de $\hat{A}_{\mathrm{st}}$ sous l'action du groupe G_K.

1.3.2 La version contravariante

Nous commençons par la version contravariante qui est plus simple à définir. Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. On pose :

$$T^{\star}_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\mathrm{st},\infty})$$

[1] Ainsi $\hat{A}_{\mathrm{st}}$ dépend *a priori* de ce choix. Cependant, on peut montrer qu'il n'en dépend pas à isomorphisme canonique près.

où par définition $\hat{A}_{\mathrm{st},\infty} = \hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_W K_0/W$ et où le Hom précédent signifie que l'on ne considère que les morphismes S-linéaires, compatibles à Fil^r, à ϕ_r et à N. L'objet $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de torsion (de type fini) qui hérite d'une action de G_K. On a donc ainsi bien défini un foncteur de $\underline{\mathcal{M}}^r$ dans la catégorie des $\mathbb{Z}_p$-représentations (de torsion) du groupe G_K.

Ce foncteur est étudié en détail dans [Bre97a] (pour le cas $e = 1$) et dans le chapitre III. Le théorème suivant résume ses propriétés :

Théorème 1.3.1. *Le foncteur $T^\star_{st}$ est exact, pleinement fidèle, d'image essentielle stable par quotients et par sous-objets. De plus, si $\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ isomorphe en tant que S-module à $S_{n_1} \oplus \cdots \oplus S_{n_d}$, alors la représentation galoisienne $T^\star_{st}(\mathcal{M})$ est isomorphe en tant que $\mathbb{Z}_p$-module à $\mathbb{Z}/p^{n_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p^{n_d}\mathbb{Z}$.*

On dispose en outre d'une description plus simple du foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ pour les objets tués par p. Considérons pour cela l'anneau $\tilde{A} = \hat{A}_{\mathrm{st}}/p \otimes_{S_1} \tilde{S}$. Comme dans le paragraphe III.1.3, on montre que $\tilde{A}$ s'identifie à $(\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi)\langle X\rangle$. Il est possible de décrire les structures supplémentaires sur $(\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi)\langle X\rangle$. Exactement, $\mathrm{Fil}^t(\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi)\langle X\rangle$ est l'idéal engendré par les $\pi_1^{e(t-i)}\frac{X^i}{i!}$. La monodromie est l'unique opérateur $\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi$-linéaire envoyant $\frac{X^i}{i!}$ sur $(1+X)\frac{X^{i-1}}{(i-1)!}$. Il faut toutefois faire attention à ϕ_t car si $x \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ est un multiple de π_1^{et} et si $\bar{x}$ désigne la réduction modulo π de x, alors $\phi_t(\bar{x})$ est la réduction modulo π de $(-1)^t\frac{x^p}{p^t}$ (et pas $\frac{x^p}{p^t}$). On a ensuite la proposition suivante :

Proposition 1.3.2. *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tué par p. Alors :*

$$T^\star_{st}(\mathcal{M}) = \mathit{Hom}(T(\mathcal{M}), \tilde{A})$$

où Hom signifie que l'on considère les morphismes $\tilde{S}$-linéaires et commutant à Fil^r, à ϕ_r et à N.

Démonstration. La tensorisation par $\tilde{S}$ au-dessus de S_1 fournit une application :

$$T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Hom}(T(\mathcal{M}), \tilde{A}).$$

On vérifie directement que cette application commute à l'action de Galois.

Soit $\psi \in T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$ qui s'envoie sur 0 par l'application précédemment définie. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & \hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \arrow[d] \\ T(\mathcal{M}) \arrow[r, "0"] & \tilde{A} \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont déduites de la projection $S_1 \to \tilde{S}$. Ainsi, en reprenant les notations du lemme 1.2.4, on a $\mathrm{im}\,\psi \subset \kappa\hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}}$. Or ψ commute par définition à ϕ_r, d'où on déduit $\psi \circ \phi_r(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) = \phi_r \circ \psi(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) \subset \phi_r(\kappa)\hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}}$. Comme par hypothèse, $\phi_r(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M})$ engendre

$\mathcal{M}$, il vient $\operatorname{im}\psi \subset \phi_r(\kappa)\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$. En appliquant à nouveau l'argument, et en utilisant $\phi_r \circ \phi_r(\kappa) = 0$, on obtient $\operatorname{im}\psi = 0$ et donc $\psi = 0$. Ceci démontre l'injectivité de la flèche.

Pour la surjectivité, on procède par approximations successives. Soit $\tilde{\psi} : T(\mathcal{M}) \to \tilde{A}$ un morphisme $\tilde{S}$-linéaire compatible aux structures. On note $\psi : \mathcal{M} \to \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$ un morphisme S_1-linéaire faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \arrow[d] \\ T(\mathcal{M}) \arrow[r, "\tilde{\psi}"] & \tilde{A} \end{tikzcd}$$

Dans un premier temps, on vérifie qu'automatiquement ψ respecte le Fil^r et commute à ϕ_r modulo $\kappa\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$. D'après une variante du corollaire 1.2.2, il existe une unique application S_1-linéaire ψ_1 faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi_r"'] & \operatorname{Fil}^r\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \arrow[d, "\phi_r"] \\ \mathcal{M} \arrow[r, "\psi_1"] & \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \end{tikzcd}$$

L'application ψ_1 respecte encore le Fil^r et commute à ϕ_r modulo $\phi_r(\kappa)\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$. De même, à partir de ψ_1, on construit ψ_2, qui respecte le Fil^r et commute à ϕ_r sans restriction.

Par un argument analogue (voir la fin de la preuve du lemme III.5.1.3), on montre que ψ_2 commute également à N. □

1.3.3 La version covariante

On commence par une définition, déjà présente dans [Bre98] (définition 3.2.1.1) :

Définition 1.3.3. *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ (resp. de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$). On appelle* filtration admissible *de $\mathcal{M}$ toute filtration décroissante $(Fil^t\mathcal{M})_{0\leqslant t\leqslant r}$ par des sous-S-modules (resp. des sous-$\tilde{S}$-modules) vérifiant :*

1. *$Fil^0\mathcal{M} = \mathcal{M}$ et $Fil^r\mathcal{M}$ est « le » $Fil^r\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$;*
2. *pour tous $0 \leqslant t \leqslant t' \leqslant r$, $Fil^{t'-t}S \cdot Fil^t\mathcal{M} \subset Fil^{t'}\mathcal{M}$ (resp. $Fil^{t'-t}\tilde{S} \cdot Fil^t\mathcal{M} \subset Fil^{t'}\mathcal{M}$) ;*
3. *pour tout $1 \leqslant t \leqslant r$, $N(Fil^t\mathcal{M}) \subset Fil^{t-1}\mathcal{M}$.*

Si $(Fil^t\mathcal{M})_{0\leqslant t\leqslant r}$ est une filtration admissible de $\mathcal{M}$, on définit des opérateurs $\phi_t : Fil^t\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ par $\phi_t(x) = c^{t-r}\phi_t(E(u)^{r-t}x)$.

Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. On considère le produit tensoriel $\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}$. Il s'agit d'un $\hat{A}_{\text{st}}$-module de torsion naturellement muni d'une action de G_K (en regardant son action sur le premier facteur). On le munit en outre d'un opérateur de monodromie $N : \hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M} \to \hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}$ en posant $N(a \otimes x) = N(a) \otimes x + a \otimes N(x)$.

On considère sur $\mathcal{M}$ une filtration admissible quelconque[2]. On peut alors définir, pour tout

[2]Il en existe toujours : on peut par exemple prendre $\operatorname{Fil}^t\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{M} \,/\, E(u)^{r-t}x \in \operatorname{Fil}^r\mathcal{M}\}$.

s compris entre 0 et r :

$$\mathrm{Fil}^s(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M}) = \sum_{t=0}^{s} \mathrm{Fil}^t \hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes \mathrm{Fil}^{s-t}\mathcal{M}.$$

C'est un sous-$\hat{A}_{\mathrm{st}}$-module de $\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M}$ qui dépend de la filtration admissible choisie. On définit finalement $\phi_s : \mathrm{Fil}^s(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \to \hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M}$ comme l'unique application additive vérifiant $\phi_s(a_t \otimes x_t) = \phi_t(a_t) \otimes \phi_{s-t}(x_t)$ pour $a_t \in \mathrm{Fil}^t \hat{A}_{\mathrm{st}}$ et $x_t \in \mathrm{Fil}^{s-t}\mathcal{M}$.

On pose finalement :

$$T_{\mathrm{st}\star}(\mathcal{M}) = \mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})^{\phi_r=1}_{N=0}$$

où la notation signifie que l'on ne retient que les $x \in \mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})$ pour lesquels $N(x) = 0$ et $\phi_r(x) = x$. On obtient alors un $\mathbb{Z}_p$-module galoisien qui dépend *a priori* du choix d'une filtration admissible. Toutefois, nous allons prouver dans la suite que ce n'est pas le cas (voir la remarque faisant suite au corollaire 1.3.8).

Encore une fois, $T_{\mathrm{st}\star}(\mathcal{M})$ a une description plus simple lorsque $\mathcal{M}$ est tué par p. Pour la donner, posons $\tilde{\mathcal{M}} = T(\mathcal{M})$ et notons $\mathrm{pr} : \mathcal{M} \to \tilde{\mathcal{M}}$ la projection canonique. On vérifie facilement que si $(\mathrm{Fil}^t\mathcal{M})$ est une filtration admissible de $\mathcal{M}$, alors $(\mathrm{pr}(\mathrm{Fil}^t\mathcal{M}))$ est une filtration admissible de $\tilde{\mathcal{M}}$. En recopiant les constructions précédentes, on définit le $\mathbb{Z}_p$-module galoisien :

$$\mathrm{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} \tilde{\mathcal{M}})^{\phi_r=1}_{N=0}$$

et on a alors la proposition suivante :

Proposition 1.3.4. *Si $\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tué par p alors :*

$$T_{st\star}(\mathcal{M}) = \mathit{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}))^{\phi_r=1}_{N=0}.$$

Démonstration. Si $\mathcal{M}$ est tué par p, le $\hat{A}_{\mathrm{st}}$-module $\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M}$ l'est également. Il s'identifie au $\hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}}$-module $\hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M}$, et on dispose d'une application canonique :

$$\hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M} \to \tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}).$$

Cette application est clairement surjective, et en reprenant les notations du lemme 1.2.4, son noyau s'identifie à $\kappa(\hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$. En outre, on vérifie directement qu'elle induit une flèche compatible à l'action de G_K :

$$\Psi : \mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})^{\phi_r=1}_{N=0} \to \mathrm{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}))^{\phi_r=1}_{N=0}.$$

Reste à prouver que cette dernière application est un isomorphisme. Soit $x \in \ker \Psi$. On a $x \in \mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})^{\phi_r=1}_{N=0}$ et donc $\phi_r(x) = x$. Par ailleurs, on a $x \in \kappa(\hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$, d'où on déduit $x = \phi_r(x) \in \phi_r(\kappa)(\hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$ puis $x = \phi_r(x) = 0$, puisque $\phi_r \circ \phi_r(\kappa) = 0$ (lemme 1.2.4). L'application Ψ est donc injective.

Passons à la surjectivité. Considérons $x \in \mathrm{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}))_{N=0}^{\phi_r=1}$ et notons $\hat{x} \in \hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M}$ un relevé quelconque de x. On vérifie alors que $\hat{x} \in \mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$ et que $\phi_r(\hat{x}) = \hat{x} + y$ pour un certain $y \in \kappa(\hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$. Posons $\hat{x}_1 = \hat{x} + y \in \mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$. On a $\hat{x}_1 \in \mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$ et $\phi_r(\hat{x}_1) = \hat{x}_1 + y'$ pour un certain $y' \in \phi_r(\kappa)(\hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$. On pose alors $\hat{x}_2 = \hat{x}_1 + y' \in \mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})^{\phi_r=1}$. On vérifie finalement que N annule $\hat{x}_2$, ce qui assure que $\hat{x}_2$ est un antécédent par Ψ de x. □

1.3.4 Lien entre les foncteurs $T_{\mathrm{st}}^\star$ et $T_{\mathrm{st}\star}$

Fixons ε une suite de racines p^n-ièmes de l'unité et définissons $t = \log([\varepsilon]) \in A_{\mathrm{cris}}$ où le log est donné par la série usuelle. On a $\phi(t) = pt$ et plus exactement l'ensemble des solutions dans A_{cris} de $\phi(t) = pt$ est le $\mathbb{Z}_p$-module engendré par t. C'est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang 1 isomorphe à $\mathbb{Z}_p(1)$ en tant que représentation galoisienne. Autrement dit $(\mathrm{Fil}^r \hat{A}_{\mathrm{st}})_{N=0}^{\phi_r=1} = (\mathrm{Fil}^r A_{\mathrm{cris}})^{\phi_r=1}$ est isomorphe en tant que représentation galoisienne à $\mathbb{Z}_p(r)$. De même, la représentation galoisienne $(\mathrm{Fil}^r \hat{A}_{\mathrm{st},\infty})_{N=0}^{\phi_r=1}$ est isomorphe à $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r)$.

On ne sait toujours pas que le foncteur $T_{\mathrm{st}\star}$ est bien défini mais si $\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ muni d'une filtration admissible fixée, on peut définir une application :

$$\Psi : T_{\mathrm{st}\star}(\mathcal{M}) \to T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{M})^\vee(r)$$

où par définition $T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{M})^\vee(r)$ est la représentation galoisienne $\mathrm{Hom}(T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{M}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r))$. En effet, soient $x = \sum_i a_i \otimes x_i \in \mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1}$, et $f : \mathcal{M} \to \hat{A}_{\mathrm{st},\infty}$ compatible aux structures. On pose $\Psi(x)(f) = \sum_i a_i f(x_i)$. C'est un élément de $(\mathrm{Fil}^r \hat{A}_{\mathrm{st},\infty})_{N=0}^{\phi_r=1}$ soit, en vertu de l'isomorphisme décrit précédemment, un élément de $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r)$. On vérifie immédiatement que Ψ est un morphisme $\mathbb{Z}_p$-linéaire commutant à l'action de Galois.

On veut démontrer que Ψ est un isomorphisme pour tout objet $\mathcal{M} \in \underline{\mathcal{M}}^r$ et pour cela on suit la démonstration du paragraphe 3.2.1. de [Bre98] (qui concerne le cas $e = 1$) : la méthode consiste à prouver que Ψ est un isomorphisme pour les objets tués par p, à démontrer que le foncteur $T_{\mathrm{st}\star}$ est bien défini et exact, puis à conclure à l'aide d'un dévissage.

On rappelle, dans un premier temps, que les objets simples de $\underline{\mathcal{M}}^r$ ont une structure relativement simple (proposition III.3.1.1) :

Proposition 1.3.5. *Soit $\mathcal{M}$ un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Alors $\mathcal{M}$ est tué par p et admet une base adaptée $(e_1, \ldots, e_d)$ pour des entiers $n_1, \ldots, n_d$. De plus $N(e_i) = 0$ pour tout i et il existe une (unique) matrice G inversible à coefficients dans k telle que :*

$$\begin{pmatrix} \phi_r(u^{n_1} e_1) \\ \vdots \\ \phi_r(u^{n_d} e_d) \end{pmatrix} = {}^t G \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix}.$$

On introduit les modules suivants :

$$\mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}} = \left\{ \sum_{i=t}^m a_i \frac{X^i}{i!},\ m \in \mathbb{N},\ a_t \in A_{\mathrm{cris}} \right\} \tag{2}$$

et on démontre (comme dans le lemme 3.1.2.1. de [Bre98]) que $\mathrm{Fil}\,^t_X(\hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n) = (\mathrm{Fil}\,^t_X\hat{A}_{\mathrm{st}})/p^n$ est plat sur S_n. Si $\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ et $(Fil^t\mathcal{M})$ est une filtration admissible de $\mathcal{M}$, on définit pour tout s compris entre 0 et r :

$$\mathrm{Fil}\,^s_X(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M}) = \sum_{t=0}^{s} \mathrm{Fil}\,^t_X\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathrm{Fil}\,^{s-t}\mathcal{M}.$$

On a les deux lemmes suivants :

Lemme 1.3.6. *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ et $(Fil^t\mathcal{M})$ une filtration admissible de $\mathcal{M}$. Alors, pour tout s compris entre 0 et r, on a $Fil^s_X(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M}) = Fil^s(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})$ et si $s \geqslant 1$, on a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{t=1}^{s} Fil^t_X\hat{A}_{st} \otimes_S Fil^{s+1-t}\mathcal{M} \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{s} Fil^t_X\hat{A}_{st} \otimes_S Fil^{s-t}\mathcal{M} \longrightarrow Fil^s(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M}) \longrightarrow 0$$

où la première flèche est la somme des applications suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} Fil^t_X\hat{A}_{st} \otimes_S Fil^{s+1-t}\mathcal{M} & \to & Fil^{t-1}_X\hat{A}_{st} \otimes_S Fil^{s+1-t}\mathcal{M} & \oplus & Fil^t_X\hat{A}_{st} \otimes_S Fil^{s-t}\mathcal{M} \\ x_t \otimes y_{s+1-t} & \mapsto & x_t \otimes y_{s+1-t} & \oplus & -x_t \otimes y_{s+1-t} \end{array}$$

Démonstration. La preuve est une adaptation de celle du lemme 3.2.1.2 de [Bre98]. Pour la première assertion, on a déjà clairement $\mathrm{Fil}\,^s_X(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}\,^s(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})$.

On a une description alternative de A_{cris} (voir [Fon94a]). Si on note $R = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ pour les applications de transitions données par le Frobenius, on peut définir un morphisme :

$$\begin{array}{rcl} \hat{\theta} \quad : \quad W(R) & \to & \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \\ (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) & \mapsto & \sum_{n\geqslant 0} p^n \hat{x}_n^{(n)} \end{array}$$

où $\mathbb{C}_p$ désigne le complété p-adique de $\bar{K}$ et où $\hat{x}_n^{(n)}$ est la limite quand m tend vers l'infini d'une suite $(\hat{a}_n^{(n+m)})^{p^m}$, $\hat{a}_i^{(j)} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ désignant un relevé quelconque de $a_i^{(j)}$. L'anneau A_{cris} s'identifie alors à l'enveloppe aux puissances divisées de $W(R)$ relativement à $\ker\hat{\theta}$ (et compatibles aux puissances divisées canoniques sur $pW(R)$). On vérifie facilement que $[\underline{\pi}] \in A_{\mathrm{cris}}$ (défini à la fin du paragraphe 1.3.1) correspond bien au représentant de Teichmüller de $\underline{\pi}$ (défini au même endroit). Par ailleurs, on montre (voir [Fon94a]) que $\ker\hat{\theta}$ est un idéal principal, engendré par $E([\underline{\pi}])$.

Ainsi, si $x \in \mathrm{Fil}\,^s(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})$, il s'écrit comme une somme de termes de la forme :

$$a\gamma_j(E([\underline{\pi}]))\gamma_k(X) \otimes m$$

(où $\gamma_j(x) = \frac{x^j}{j!}$) avec $a \in A_{\mathrm{cris}}$, $m \in \mathrm{Fil}\,^{s-t}\mathcal{M}$ et $j + k \geqslant t$. Mais $[\underline{\pi}] = u(1 + X)$ et donc $E([\underline{\pi}]) - E(u)$ est un multiple de uX. On peut donc écrire $E([\underline{\pi}]) = E(u) + uXb$ pour un certain $b \in \hat{A}_{\mathrm{st}}$ puis :

$$\gamma_j(E([\underline{\pi}])) = \sum_{\ell=0}^{j} \gamma_{j-\ell}(E(u))(ub)^{\ell}\gamma_{\ell}(X).$$

En réinjectant cette expression dans x, on obtient bien $x \in \mathrm{Fil}\,^s_X(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})$.

Pour la deuxième partie du lemme, la démonstration est exactement la même que celle de [Bre98]. $\square$

Lemme 1.3.7. *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Pour tout s compris entre 0 et r, on a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow Fil^s(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \longrightarrow Fil^s(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M}) \xrightarrow{N} Fil^{s-1}(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M}) \longrightarrow 0$$

où par convention $Fil^{-1}(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M}) = \hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M}$.

Démonstration. La démonstration est la même que celle du lemme 3.2.1.3 de [Bre98]. Toutefois, on se ramène à la fin, non pas à un objet de $\underline{MF}_k^{f,r}$ (en reprenant les notations de l'article), mais à un objet simple de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ dont la structure est connue par la proposition 1.3.5. Le même argument s'applique alors. □

On déduit des deux lemmes précédents le corollaire suivant :

Corollaire 1.3.8. *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Alors $Fil^r(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$ ne dépend pas de la filtration admissible choisie et si :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte dans $\underline{\mathcal{M}}^r$, alors la suite induite :

$$0 \longrightarrow Fil^r(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M}')_{N=0} \longrightarrow Fil^r(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \longrightarrow Fil^r(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M}'')_{N=0} \longrightarrow 0$$

est également exacte.

Démonstration. C'est la même que celle de la proposition 3.2.1.4 de [Bre98], en remplaçant à nouveau $\underline{MF}_k^{f,r}$ par la sous-catégorie de $\underline{\mathcal{M}}^r$ formée des objets tués par p, et en utilisant la proposition 1.3.5 qui donne la structure de tels objets. □

Remarque. On prouve de même que si $0 \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte dans $\underline{\mathcal{M}}^r$, alors la suite :

$$0 \longrightarrow (\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M}')_{N=0} \longrightarrow (\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \longrightarrow (\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M}'')_{N=0} \longrightarrow 0$$

l'est aussi.

D'autre part, le corollaire précédent prouve en particulier que $T_{\mathrm{st}\star}(\mathcal{M})$ ne dépend pas de la filtration choisie. Ainsi le foncteur $T_{\mathrm{st}\star}$ est bien défini.

Lemme 1.3.9. *Si $\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, on a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow Fil^r(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1} \longrightarrow Fil^r(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \xrightarrow{\phi_r - id} (\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \longrightarrow 0\ .$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\phi_r - \mathrm{id}$ est surjective. De même que dans le lemme 3.2.1.6 de [Bre98], on se ramène au cas d'un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Soit $\mathcal{M}$ un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. D'après la proposition 1.3.5, on peut écrire $\mathcal{M} = S_1 e_1 \oplus \cdots \oplus S_1 e_d$ où $e_1, \ldots, e_d$ sont tels que $N(e_i) = 0$ et $\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}$ est le sous-module de $\mathcal{M}$ engendré par $\mathrm{Fil}^p S \cdot \mathcal{M}$ et les $u^{n_1} e_1, \ldots u^{n_1} e_d$ pour certains entiers n_i compris entre 0 et er. On a alors directement :

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M} &= \hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \cdot e_1 \oplus \cdots \hat{A}_{\mathrm{st}}/p\hat{A}_{\mathrm{st}} \cdot e_d \\ (\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} &= A_{\mathrm{cris}}/pA_{\mathrm{cris}} \cdot e_1 \oplus \cdots A_{\mathrm{cris}}/pA_{\mathrm{cris}} \cdot e_d \\ \mathrm{Fil}^r (\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} &= \sum_{i=1}^{p} (A_{\mathrm{cris}}/pA_{\mathrm{cris}} \cdot u^{n_i} e_1 + \mathrm{Fil}^p A_{\mathrm{cris}}/pA_{\mathrm{cris}} \cdot e_i). \end{aligned}$$

On note G l'unique matrice inversible à coefficients dans k telle que :

$$\begin{pmatrix} \phi_r(u^{n_1} e_1) \\ \vdots \\ \phi_r(u^{n_d} e_d) \end{pmatrix} = {}^t G \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix}$$

et on conclut de même que dans le lemme 3.2.1.6 de [Bre98]. $\square$

Corollaire 1.3.10. *Le foncteur $T_{st\star}$ est exact.*

On déduit finalement de cette étude le théorème suivant :

Théorème 1.3.11. *L'application Ψ définie précédemment induit une transformation naturelle inversible entre les foncteurs $T_{st\star}$ et $(T^\star_{st})^\vee(r)$.*

Démonstration. Comme la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ est artinienne, et que les foncteurs $T^\star_{\mathrm{st}}$ et $T_{\mathrm{st}\star}$ sont exacts, il suffit de montrer le résultat lorsque $\mathcal{M}$ est un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Si $\mathcal{M}$ est un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$, la proposition 1.3.5 nous assure dans un premier temps que $\mathcal{M}$ est tué par p. On a donc :

$$T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}(T(\mathcal{M}), \tilde{A}) \qquad \text{et} \qquad T_{\mathrm{st}\star}(\mathcal{M}) = \mathrm{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}))^{\phi_r = 1}_{N=0}.$$

Par ailleurs la même proposition fournit une description explicite de $T(\mathcal{M})$ et de ses structures supplémentaires. Précisément, il existe des entiers n_i tels que :

$$\begin{aligned} T(\mathcal{M}) &= \tilde{S} e_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{S} e_d \\ \mathrm{Fil}^r T(\mathcal{M}) &= \tilde{S} u^{n_1} e_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{S} u^{n_d} e_d \end{aligned}$$

avec de surcroît $N(e_i) = 0$ pour tout i. Par ailleurs, quitte à passer à une extension non ramifiée de K, on peut supposer (voir théorème III.3.3.2) que ϕ_r est donné par $\phi_r(u^{n_i} e_i) = e_{i+1}$, les indices étant considérés modulo d.

Des descriptions précédentes, on déduit facilement :

$$\mathrm{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}))_{N=0} = \bar{\pi}_1^{n_1} \mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi \cdot e_1 \oplus \cdots \oplus \bar{\pi}_1^{n_1} \mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi \cdot e_d$$

où $\bar{\pi}_1$ est la réduction modulo π de π_1 (qui, on le rappelle, est une racine p-ième de π fixée). L'opérateur ϕ_r agit sur ce module par $\phi_r(\bar{\pi}_1^{n_i} e_i) = e_{i+1}$. Tout élément de $\mathrm{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}))_{N=0}$ s'écrit de façon unique $x = \sum_{i=1}^d a_i \otimes e_i$ avec $a_i = \pi_1^{n_i} x_i$ et un tel élément appartient à $T_{\mathrm{st}\star}(\mathcal{M})$ si, et seulement si :

$$x_i^p = \bar{\pi}_1^{n_{i+1}} x_{i+1}$$

pour tout indice $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Par ailleurs, se donner un élément de $T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{M})$ revient à se donner l'image b_i de chacun des e_i, ces images devant vérifier $N(b_i) = 0$, $u^{n_i} b_i \in \mathrm{Fil}^r \tilde{A}$ et commuter à ϕ_r. La première condition impose $b_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi$. La deuxième condition assure que $b_i = \pi_1^{m_i} y_i$ pour $m_i = er - n_i$ et $y_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi$. Finalement, la commutation à ϕ_r impose les relations :

$$(-1)^r y_i^p = \bar{\pi}_1^{m_{i+1}} y_{i+1}.$$

On est finalement ramené à prouver que l'accouplement :

$$(a_1, \ldots, a_d) \times (b_1, \ldots, b_d) \mapsto \sum_{i=1}^d a_i b_i$$

défini sur les couples de d-uplets solutions des systèmes précédents et à valeurs dans $(\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi)^{\phi_r=1}$. Ce dernier espace est encore $\bar{t}\mathbb{F}_p$ (ou $\bar{t}$ est la réduction modulo π d'une racine $(p-1)$-ième de p^r) est non dégénéré. Or par le lemme III.4.1.2[3], si on choisit η une racine $(p^h - 1)$-ième de π, si on note $\bar{\eta}$ sa réduction modulo π, et si on pose :

$$\begin{aligned} s_i &= n_i p^{d-1} + n_{i+1} p^{d-2} + \cdots + n_{i+d-1} \\ t_i &= m_i p^{d-1} + m_{i+1} p^{d-2} + \cdots + m_{i+d-1} \end{aligned}$$

les solutions de ces systèmes s'écrivent :

$$a_i = a^{p^i} \bar{\eta}^{s_i} \quad \text{et} \quad b_i = (-1)^{ri} b^{p^i} \bar{\eta}^{t_i}$$

où a décrit $\mathbb{F}_q$ ($q = p^d$), l'ensemble des racines dans $\bar{k}$ de l'équation $x^q = x$, et où b décrit l'ensemble des racines dans $\bar{k}$ de l'équation $x^q = (-1)^{rd} x$.

Si rd est pair, $\sum_{i=1}^d a_i b_i = \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(ab) \cdot \bar{\eta}^v$ où $v = s_i + t_i = er \cdot \frac{q-1}{p-1}$ est indépendant de i, et on conclut en remarquant que la trace de $\mathbb{F}_q$ à $\mathbb{F}_p$ est une forme bilinéaire non dégénérée.

Si rd est impair, on note $\varepsilon \in \bar{k}$ une racine $(p-1)$-ième de -1, on vérifie que $\sum_{i=1}^d a_i b_i = \varepsilon \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(ab/\varepsilon) \cdot \bar{\eta}^v$ et on conclut comme dans le cas précédent. □

En vertu de ce théorème, tous les résultats démontrés sur le foncteur $T_{\mathrm{st}}^\star$ se transposent au foncteur $T_{\mathrm{st}\star}$. On obtient ainsi un équivalent du théorème 1.3.1 :

Théorème 1.3.12. *Le foncteur $T_{st\star}$ est exact, pleinement fidèle, d'image essentielle stable par quotients et par sous-objets. De plus, si $\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ isomorphe en tant que S-module à $S_{n_1} \oplus \cdots \oplus S_{n_d}$, alors la représentation galoisienne $T_{st\star}(\mathcal{M})$ est isomorphe en tant que $\mathbb{Z}_p$-module à $\mathbb{Z}/p^{n_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p^{n_d}\mathbb{Z}$.*

[3]Dans le chapitre III, on travaillait non pas modulo π mais modulo p. Cependant, on vérifie sans mal que la méthode marche dans les deux cas.

2 Les faisceaux sur le site log-syntomique

2.1 Rappels et préliminaires

2.1.1 Log-schémas et sites usuels

On renvoie à [Kat89] pour la définition et les propriétés des log-schémas et des morphismes de log-schémas (en particulier des morphismes log-lisses ou log-étales). Tous les log-schémas considérés dans ce papier sont intègres. Si S est un log-schéma, on note $\dot{S}$ le schéma sous-jacent. Si M est un monoïde, on note M^{gp} le groupe associé, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de la forme ab^{-1} pour a et b dans M où deux éléments ab^{-1} et cd^{-1} sont identifiés s'il existe $s \in M$ tel que $sad = sbc$ (*i.e.* simplement $ad = bc$ si M est intègre). Si M est un monoïde et G un sous-groupe de M^{gp}, on définit le quotient M/G comme le quotient de M par la relation d'équivalence $x \sim y \leftrightarrow xy^{-1} \in G$.

Si S est un log-schéma fin dont le schéma sous-jacent est tué par un entier non nul et muni d'un idéal à puissances divisées et si X est un log-schéma fin sur T auquel les puissances divisées s'étendent, on note $(X/S)_{\mathrm{cris}}$ le petit site (log-)cristallin fin (défini dans [Kat89], chapitre 5) et $(X/S)_{\mathrm{CRIS}}$ le gros site (log-)cristallin fin (défini dans [Bre96], chapitre 3). On note $\mathcal{O}_{X/S}$ le faisceau structural sur ces sites, $\mathcal{J}_{X/S}$ son idéal à puissances divisées et $\mathcal{J}_{X/S}^{[n]}$ les puissances divisées successives de $\mathcal{J}_{X/S}$.

De même, si S est un log-schéma fin, on note $S_{\text{ét}} = \dot{S}_{\text{ét}}$ le petit site (log-)étale de S : c'est la catégorie des log-schémas X pour lesquels $\dot{X}$ est étale sur $\dot{S}$ et la log-structure sur X est induite par celle de S, les recouvrements étant les recouvrements étales usuels (sur les schémas sous-jacents). On note également $S_{\text{ÉT}}$ le gros site (log-)étale de S défini comme la catégorie des log-schémas fins localement de type fini sur S et munie de la topologie étale. On note $\mathcal{O}_X$ le faisceau structural sur chacun de ces deux sites.

2.1.2 Topologie log-syntomique

On rappelle la définition d'un morphisme de log-schémas log-syntomiques, due à Kato (voir [Kat89]) :

Définition 2.1.1. *Un morphisme de log-schémas fins $f : Y \to X$ est dit* log-syntomique *s'il est intègre, si $\dot{f} : \dot{Y} \to \dot{X}$ est localement de présentation finie, et si f peut s'écrire étale localement comme la composée d'un morphisme log-lisse avec une immersion fermée exacte dont l'idéal est engendré en chaque point par une suite transversalement régulière relativement à X.*

On montre (voir [Bre96]) que les morphismes log-syntomiques sont stables par changement de base et par composition. En outre, on dispose de la propriété remarquable suivante :

Proposition 2.1.2. *Si $Y \to X$ est une immersion fermée exacte définie par un nil-idéal, on peut étale-localement relever les morphismes log-syntomiques sur Y en des morphismes log-syntomiques sur X.*

Il est de plus possible de donner une description locale très explicite des morphismes log-syntomiques. Précisément, si $f : Y \to X$ est un morphisme log-syntomique, alors il existe une carte (locale pour la topologie étale) sur laquelle f prend la forme suivante :

$$\begin{tikzcd} \frac{P \oplus \mathbb{N}^r}{G} \arrow[r] & \frac{(A \otimes_{\mathbb{Z}[P]} \mathbb{Z}[(P \oplus \mathbb{N}^r)G][X_1, \ldots, X_s]}{I} \\ P \arrow[u, "f"] \arrow[r] & A \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

où A est un anneau, P est un monoïde intègre, r et s des entiers, G un sous-groupe de $P^{\mathrm{gp}} \oplus \mathbb{Z}^r$ et I un idéal contenant les $[g] - 1$ (pour $g \in G$) et engendré par une suite transversalement régulière relativement à A.

Si S est un log-schéma fin, on note S_{SYN} le gros site (log-)syntomique sur X, c'est-à-dire la catégorie des log-schémas fins localement de type fini sur X munie de la topologie log-syntomique : une famille $(f_i : X_i \to X)$ recouvre X si tous les morphismes f_i sont log-syntomiques et si topologiquement $\dot{X} = \bigcup_i f_i(\dot{X}_i)$. De même on définit le petit site (log-)syntomique S_{syn} en se restreignant à la catégorie des log-schémas log-syntomiques sur S.

2.1.3 Plusieurs bases

Pour la suite, on sera amené à considérer plusieurs bases qui sont :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{N} & \to & \mathcal{O}_K/p^n \\ 1 & \mapsto & \pi \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \mathbb{N} & \to & S_n \\ 1 & \mapsto & u \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \mathbb{N} & \to & \tilde{S} \\ 1 & \mapsto & u \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \mathbb{N} & \to & k \\ 1 & \mapsto & 0 \end{pmatrix}$$

On note simplement T_n la première, E_n la deuxième, $\tilde{E}$ la troisième et $\bar{E} = \bar{T}$ la quatrième. Ces quatre bases sont munies de puissances divisées : sur T_n, elles sont prises par rapport à l'idéal engendré par p, sur E_n et $\tilde{E}$ par rapport à l'idéal engendré par les $\frac{E(u)^i}{i!}$ pour $i \geqslant 1$ et sur la dernière par rapport à l'idéal nul. On a un diagramme :

$$\begin{tikzcd} & T_1 \arrow[r, hook] \arrow[dl, hook] \arrow[d, hook] & T_2 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & T_n \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \cdots \\ \tilde{E} \arrow[r, hook] & E_1 \arrow[r, hook] & E_2 \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & E_n \arrow[r, hook] & \cdots \end{tikzcd}$$

où tous les morphismes sont des épaississements, les flèches verticales étant obtenues en envoyant u sur π.

Les bases E_n, $\tilde{E}$ et $\bar{E}$ sont munies d'un relèvement du Frobenius : c'est la multiplication par p sur les monoïdes, l'élévation à la puissance p sur $\tilde{S}$ et k et le Frobenius défini au paragraphe 1.1.1 sur S_n.

2.2 Les faisceaux $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ et $\mathcal{J}_n^{[s]}$

Dans ce paragraphe, on définit des faisceaux $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ et $\mathcal{J}_n^{[s]}$ sur le site syntomique qui permettent de calculer la cohomologie cristalline. On donne ensuite une description locale explicite de ces faisceaux, technique mais cruciale pour mener à bien les calculs.

2.2.1 Définition et description locale

Pour tout entier n et tout entier (relatif) s, on définit sur $(T_n)_{\text{SYN}}$ les préfaisceaux $\mathcal{J}_n^{[s]}$ par la formule :

$$\mathcal{J}_n^{[s]}(U) = H^0((U/E_n)_{\text{cris}}, \mathcal{J}_{U/E_n}^{[s]}) = H^0((U/E_n)_{\text{CRIS}}, \mathcal{J}_{U/E_n}^{[s]})$$

où U sur T_n est vu sur E_n *via* l'épaississement du paragraphe 2.1.3. On pose $\mathcal{O}_n^{\text{st}} = \mathcal{J}_n^{[0]}$. On montre (voir [Bre96]) que les $\mathcal{J}_n^{[s]}$ sont des faisceaux et qu'ils calculent la cohomologie log-cristalline dans le sens où :

$$H^i(X_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[s]}) = H^i(X_{\text{SYN}}, \mathcal{J}_n^{[s]}) = H^i((X/E_n)_{\text{cris}}, \mathcal{J}_{X/E_n}^{[s]}) = H^i((X/E_n)_{\text{CRIS}}, \mathcal{J}_{X/E_n}^{[s]})$$

pour tout entier i et tout log-schéma X fin localement de type fini sur E_n.

Soit U un log-schéma log-syntomique sur la base T_n. On a vu qu'étale-localement, on peut trouver une carte du morphisme $U \to T_n$ qui prend la forme :

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\mathbb{N}x_0 \oplus \mathbb{N}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{N}x_r}{G} & \xrightarrow{\alpha} & \dfrac{\mathcal{O}_K/p^n[(\mathbb{N}x_0 \oplus \mathbb{N}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{N}x_r)G][X_1, \ldots, X_s]}{([x_0] - \pi, f_1, \ldots, f_t)} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{N}x_0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_K/p^n \end{array}$$

où G est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^{r+1}$ et $([x_0]-\pi, f_1, \ldots, f_t)$ est une suite transversalement régulière relativement à $\mathcal{O}_K/p^n$ et telle que l'idéal engendré contienne tous les $[g] - 1$, pour $g \in G$.

Notons $Q = \mathbb{N}x_0 \oplus \mathbb{N}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{N}x_r$, $P = Q/G$ et $A = \frac{\mathcal{O}_K/p^n[QG][X_1,\ldots,X_s]}{([x_0]-\pi,f_1,\ldots,f_t)}$, de sorte que (étale-)localement $U = (\text{Spec}\, A, P)$. Décrire localement (pour la topologie syntomique) les faisceaux $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ et $\mathcal{J}_n^{[s]}$ serait par exemple donner des formules explicites pour les modules $\mathcal{O}_n^{\text{st}}(\text{Spec}\, A, P)$ et $\mathcal{J}_n^{[s]}(\text{Spec}\, A, P)$. Cependant, on ne sait donner de telles formules que si le Frobenius est surjectif sur A et sur P, ce qui n'est *a priori* pas le cas ici. Nous allons donc devoir considérer des ouverts encore plus petits (toujours pour la topologie syntomique) pour forcer cette condition de surjectivité.

Notons $Q^i = \mathbb{N}x_0^{p^{-i}} \oplus \mathbb{N}x_1^{p^{-i}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{N}x_r^{p^{-i}}$, $P^i = Q^i/G$ et $A^i = \frac{\mathcal{O}_K/p^n[Q^iG][X_1^{p^{-i}},\ldots,X_s^{p^{-i}}]}{([x_0]-\pi,f_1,\ldots,f_t)}$. On a des morphimes de log-schémas $(\text{Spec}\, A^{i+1}, P^{i+1}) \to (\text{Spec}\, A^i, P^i)$ qui sont des recouvrements log-syntomiques, et le Frobenius devient surjectif sur la limite de ces recouvrements. On est amené à décrire explicitement les objets suivants :

$$\mathcal{O}_n^{\text{st}}(A^\infty, P^\infty) = \varinjlim_i \mathcal{O}_n^{\text{st}}(\text{Spec}\, A^i, P^i) \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_n^{[s]}(A^\infty, P^\infty) = \varinjlim_i \mathcal{J}_n^{[s]}(\text{Spec}\, A^i, P^i).$$

Notons $Q^\infty = \mathbb{N}x_0^{1/p^\infty} \oplus \mathbb{N}x_1^{1/p^\infty} \oplus \cdots \oplus \mathbb{N}x_r^{1/p^\infty}$, $P^\infty = Q^\infty/G$ et $A^\infty = \frac{\mathcal{O}_K/p^n[Q^\infty G][X_1^{1/p^\infty},\ldots,X_s^{1/p^\infty}]}{([x_0]-\pi,f_1,\ldots,f_t)}$.
Par ailleurs, si M est un monoïde et n un entier, posons :

$$M^{(n)} = \left\{x \in M^{\mathrm{gp}} \,/\, x^{p^n} \in M\right\}.$$

Si de plus M est muni d'un morphisme de monoïdes $\mathbb{N} \to M$, on définit $\mathbb{N} \oplus_{(\phi^n),\mathbb{N}} M$ comme la limite inductive du diagramme $\mathbb{N} \xleftarrow{p^n} \mathbb{N} \longrightarrow M$. Posons :

$$W_n^{\mathrm{st}}(A^\infty, P^\infty) = W_n(A^\infty/pA^\infty) \otimes_{\mathbb{Z}[P^\infty]} \mathbb{Z}[(\mathbb{N} \oplus_{(\phi^n),\mathbb{N}} P^\infty)^{(n)}].$$

On dispose d'un morphisme canonique surjectif :

$$\begin{array}{rcl} W_n^{\mathrm{st}}(A^\infty, P^\infty) & \to & A^\infty \\ (a_0, \ldots, a_{n-1}) \otimes [h] & \mapsto & (\hat{a}_0^{p^n} + \cdots + p^{n-1}\hat{a}^{n-1}) \cdot \alpha(h^{p^n}) \end{array}$$

où $\hat{a}_i \in A^\infty$ désigne un relevé quelconque de a_i. On note finalement $W_n^{\mathrm{st,DP}}(A^\infty, P^\infty)$ l'enveloppe aux puissances divisées relativement à l'ideal noyau (et compatible aux puissances divisées canoniques sur l'idéal (p)). On munit $W_n^{\mathrm{st,DP}}(A^\infty, P^\infty)$ d'une structure de S_n-module en envoyant u sur l'élément $1 \otimes [1 \oplus (0, \ldots, 0)]$. Comme dans l'appendice D de [Bre98], on montre la proposition suivante :

Proposition 2.2.1. *Avec les notations précédentes, il existe un isomorphisme S_n-linéaire canonique :*

$$\mathcal{O}_n^{st}(A^\infty, P^\infty) \xrightarrow{\sim} W_n^{st,DP}(A^\infty, P^\infty) .$$

Il existe une autre description locale qui a l'avantage d'être légèrement plus simple, mais l'inconvénient d'être non canonique. Notons pour cela :

$$W_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty, P^\infty) = W_n(A^\infty/pA^\infty) \otimes_{\mathbb{Z}[P^\infty]} \mathbb{Z}[(P^\infty)^{(n)}]$$

et $W_n^{\mathrm{cris,DP}}$ son enveloppe à puissances divisées par rapport à l'idéal noyau de l'application $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \otimes [h] \mapsto (\hat{a}_0^{p^n} + \cdots + p^{n-1}\hat{a}_{n-1})\alpha(h^{p^n})$ où $\hat{a}_i \in A^\infty$ désigne un relevé quelconque de a_i. On a alors le lemme suivant qui établit un lien entre les anneaux $W_n^{\mathrm{cris,DP}}(A^\infty, P^\infty)$ et $W_n^{\mathrm{st,DP}}(A^\infty, P^\infty)$:

Lemme 2.2.2. *On garde les notations précédentes et on note $g \in P^\infty$ l'image de x_0. Soit $h \in P^\infty$ une racine p^n-ième de g. Alors l'application $W_n^{cris,DP}(A^\infty, P^\infty)\langle X\rangle \to W_n^{st,DP}(A^\infty, P^\infty)$ qui envoie X sur $(1 \otimes (1 \oplus h)) - 1$ est un isomorphisme.*

On en déduit directement la proposition :

Proposition 2.2.3. *Avec les notations précédentes, il existe un isomorphisme S_n-linéaire :*

$$\mathcal{O}_n^{st}(A^\infty, P^\infty) \xrightarrow{\sim} W_n^{cris,DP}(A^\infty, P^\infty)\ \langle X\rangle$$

où la structure de S_n-module est donnée sur $W_n^{cris,DP}(A^\infty, P^\infty)\langle X\rangle$ par $\frac{u^i}{i!} \mapsto \frac{T_0^i}{i!}\frac{1}{1+X}$ où T_0 désigne une racine p^n-ième de $[x_0]$. En outre, cet isomorphisme est compatible à la filtration donnée à gauche par les $\mathcal{J}_n^{[s]}(A^\infty, P^\infty)$ et à droite par les puissances divisées.

Remarque. Attention l'isomorphisme précédent n'est pas canonique : il dépend du choix d'une racine p^n-ième de g, image de x_0 dans P^∞.

2.2.2 Les opérateurs ϕ_s et N

La description précédente permet de prouver la proposition suivante importante :

Proposition 2.2.4. *Le faisceau $\mathcal{O}_n^{st}$ est plat sur S_n et les faisceaux $\mathcal{J}_n^{[s]}$ sont plats sur W_n.*

Démonstration. L'argument est le même que celui de la proposition 2.1.2.1 de [Bre98]. □

Si n et m sont deux entiers avec $n \leqslant m$, on a un épaississement $i : T_n \hookrightarrow T_m$. Ainsi pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur $(T_n)_{\mathrm{syn}}$, on peut former le faisceau $i_\star \mathcal{F}$ sur $(T_m)_{\mathrm{syn}}$. Le foncteur $i_\star$ est exact (c'est une conséquence de la propriété 2.1.2) et, par abus, on note encore $\mathcal{F}$ le faisceau $i_\star \mathcal{F}$. L'exactitude assure qu'il revient au même de calculer les cohomologies de $\mathcal{F}$ sur les sites $(T_n)_{\mathrm{syn}}$ et $(T_m)_{\mathrm{syn}}$.

Les descriptions locales données précédemment permettent facilement de prouver l'exactitude des deux suites de faisceaux (sur $(T_m)_{\mathrm{syn}}$) suivantes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_i^{\mathrm{st}} \xrightarrow{p^n} \mathcal{O}_{n+i}^{\mathrm{st}} \longrightarrow \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_i^{[s]} \xrightarrow{p^n} \mathcal{J}_{n+i}^{[s]} \longrightarrow \mathcal{J}_n^{[s]} \longrightarrow 0$$

pour tout entier i tel que $n + i \leqslant m$. D'autre part, toujours pour $n + i \leqslant m$, la multiplication par p^i identifie sur le site $(T_m)_{\mathrm{syn}}$ les faisceaux $\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}$ et $p^i \mathcal{O}_{n+i}^{\mathrm{st}}$. Comme la base E_n est munie d'un relèvement du Frobenius (voir paragraphe 2.1.3), les groupes $\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}(U) = H^0((U/E_n)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{O}_{U/E_n})$ héritent d'un opérateur de Frobenius ϕ qui s'étend immédiatement en un morphisme de faisceaux $\phi : \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}} \to \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}$.

Par ailleurs, on vérifie directement en utilisant la platitude et la description locale que pour tout entier $s \leqslant p-1$, on a l'inclusion $\phi(\mathcal{J}_n^{[s]}) \subset p^s \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}$. Les suites exactes précédentes permettent alors de définir un morphisme de faisceaux ϕ_s sur le site $(T_m)_{\mathrm{syn}}$ (pour $m \geqslant n + s$) comme la composée :

$$\mathcal{J}_n^{[s]} \xleftarrow{\sim} \mathcal{J}_{n+s}^{[s]}/p^n \xrightarrow{\phi} p^s \mathcal{O}_{n+s}^{\mathrm{st}} \underset{p^s}{\xleftarrow{\sim}} \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}$$

après avoir vérifié que ϕ passe au quotient.

Remarque. Les faisceaux $\mathcal{J}_n^{[s]}$ et $\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}$ sont définis sur le site $(T_n)_{\mathrm{syn}}$ mais ϕ_s n'est, lui, défini que sur $(T_{n+s})_{\mathrm{syn}}$.

Finalement on peut munir $\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}$ d'un opérateur N qui sur la description locale (voir proposition 2.2.3) est simplement défini comme l'unique application $W_n^{\mathrm{cris,DP}}(A^\infty, P^\infty)$-linéaire qui envoie $\frac{X^i}{i!}$ sur $(1+X)\frac{X^{i-1}}{(i-1)!}$ (cette application ne dépend pas d'un choix d'une racine p^n-ième de g, elle est donc canoniquement définie et peut se recoller).

2.3 Le cas de la caractéristique p

Dans ce paragraphe, on se concentre sur le cas $n = 1$ et on donne des descriptions plus faciles à manipuler des faisceaux précédemment introduits. En effet, par la suite, nous procéderons systématiquement par dévissages et donc le cas $n = 1$ aura toujours un statut particulier.

2.3.1 Une nouvelle description des faisceaux $\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$ et $\mathcal{J}_1^{[s]}$

On reprend la description donnée par la proposition 2.2.3 dans le cas $n = 1$:

$$\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}(A^\infty, P^\infty) = W_1^{\mathrm{cris,DP}}(A^\infty, P^\infty)\left\langle X \right\rangle.$$

Un calcul facile prouve que le morphisme qui envoie π sur $[x_0]$ identifie $W_1^{\mathrm{cris,DP}}(A^\infty, P^\infty)$ à :

$$\left(\frac{k[Q^\infty G^{1/p}][X_1^{1/p^\infty}, \ldots, X_s^{1/p^\infty}]}{([x_0]^e, f_1, \ldots, f_t)}\right)^{\mathrm{DP}}$$

où l'on nomme encore de façon abusive $f_i \in k[Q^\infty G^{1/p}][X_1^{1/p^\infty}, \ldots, X_s^{1/p^\infty}]$ l'image de $f_i \in \mathcal{O}_K/p[Q^\infty G][X_1, \ldots, X_s]$ et où par définition $G^{1/p}$ désigne le sous-groupe de $(Q^\infty)^{\mathrm{gp}}$ formé des x tels que $x^p \in G$. On remarque en outre que la suite $([x_0]^e, f_1, \ldots, f_t)$ est encore régulière dans $k[Q^\infty G^{1/p}][X_1^{1/p^\infty}, \ldots, X_s^{1/p^\infty}]$.

Soit $\psi_i \in k[Q^\infty G][X_1^{1/p^\infty}, \ldots, X_s^{1/p^\infty}]$ vérifiant $\psi_i^p = f_i$. En explicitant les puissances divisées, on voit que $\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}(A^\infty, P^\infty)$ s'identifie à :

$$\bigoplus_{m_0, \ldots, m_{t+1} \in \mathbb{N}} \mathcal{B} \cdot \gamma_{pm_0}(u^e)\gamma_{pm_1}(\psi_1)\cdots\gamma_{pm_t}(\psi_t)\gamma_{pm_{t+1}}(X) \tag{3}$$

où $u = \frac{[x_0^{1/p}]}{1+X}$ et où on a posé :

$$\mathcal{B} = \frac{k[Q^\infty G^{1/p}][X_1^{1/p^\infty}, \ldots, X_s^{1/p^\infty}][X]}{([x_0]^e, f_1, \ldots, f_t, X^p)}. \tag{4}$$

La description précédente fournit également une description locale des faisceaux $\mathcal{J}_1^{[s]}$: $\mathcal{J}_1^{[s]}(A^\infty, P^\infty)$ s'identifie au sous-$\mathcal{B}$-module de $\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}(A^\infty, P^\infty)$ engendré par les :

$$\gamma_{m_0}(u^e)\gamma_{m_1}(\psi_1)\cdots\gamma_{m_t}(\psi_t)\gamma_{m_{t+1}}(X) \quad \text{avec} \quad m_0 + \cdots + m_t \geqslant s.$$

Les quotients $\mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1]}$ ont également une écriture sympathique :

$$\frac{\mathcal{J}_1^{[s]}(A^\infty, P^\infty)}{\mathcal{J}_1^{[s+1]}(A^\infty, P^\infty)} = \bigoplus_{\sum m_i = s} (\mathcal{B}/(u^e, \psi_1, \ldots, \psi_t, X)) \cdot \gamma_{m_0}(u^e)\gamma_{m_1}(\psi_1)\cdots\gamma_{m_t}(\psi_t)\gamma_{m_{t+1}}(X). \tag{5}$$

Si $s < p$, donc en particulier pour $s \leqslant r$, la dernière description se simplifie légèrement et donne :

$$\frac{\mathcal{J}_1^{[s]}(A^\infty, P^\infty)}{\mathcal{J}_1^{[s+1]}(A^\infty, P^\infty)} = \bigoplus_{\sum m_i = s} (\mathcal{B}/(u^e, \psi_1, \ldots, \psi_t, X)) \cdot u^{em_0}\psi_1^{m_1}\cdots\psi_t^{m_t}X^{m_{t+1}} \tag{6}$$

Comme ces quotients ne sont pas tués par u, on introduit de nouveaux faisceaux intermédiaires :

Définition 2.3.1. *Soit q un nombre rationnel de la forme $\frac{t}{e}$ où t est un entier positif ou nul. Si $t = se + \delta$ est la division euclidienne de t par e, on pose :*

$$\mathcal{J}_1^{[q]} = u^\delta \mathcal{J}_1^{[s]} + \mathcal{J}_1^{[s+1]}.$$

On peut à nouveau évaluer les quotients successifs comme le résume la proposition suivante :

Proposition 2.3.2. *Soit $0 \leqslant q < p$ un nombre rationnel de la forme $\frac{t}{e}$ pour un certain entier t. Notons $t = se + \delta$ la division euclidienne de t par e. Alors, en reprenant les notations précédentes :*

$$\frac{\mathcal{J}_1^{[q]}(A^\infty, P^\infty)}{\mathcal{J}_1^{[q+1/e]}(A^\infty, P^\infty)} = \bigoplus_{\sum m_i = s} \mathcal{C} \cdot u^{em_0+\delta} \psi_1^{m_1} \cdots \psi_t^{m_t} X^{m_{t+1}} \tag{7}$$

où :

$$\mathcal{C} = \frac{\mathcal{B}}{(u, \psi_1, \ldots, \psi_t, X)} = \frac{k[Q^\infty G^{1/p}][X_1^{1/p^\infty}, \ldots, X_s^{1/p^\infty}]}{([x_0^{1/p}], \psi_1, \ldots, \psi_t)}. \tag{8}$$

Démonstration. Il est clair que $\frac{\mathcal{J}_1^{[q]}(A^\infty, P^\infty)}{\mathcal{J}_1^{[q+1/e]}(A^\infty, P^\infty)}$ s'identifie à

$$\frac{u^\delta(\mathcal{J}_1^{[s]}(A^\infty, P^\infty)/\mathcal{J}_1^{[s+1]}(A^\infty, P^\infty))}{u^{\delta+1}(\mathcal{J}_1^{[s]}(A^\infty, P^\infty)/\mathcal{J}_1^{[s+1]}(A^\infty, P^\infty))}.$$

D'après la formule (6), il suffit de montrer que si l'on pose $B = \mathcal{B}/(u^e, \psi_1, \ldots, \psi_t, X)$, l'application de multiplication par u^δ induit un isomorphisme de $\mathcal{C} = B/uB$ dans $u^\delta B/u^{\delta+1}B$. La surjectivité est claire.

Montrons l'injectivité. Soit $B' = k[Q^\infty G^{1/p}][X_1^{1/p^\infty}, \ldots, X_s^{1/p^\infty}]$. Il suffit de montrer que s'il existe un entier $\delta \leqslant e$ et des éléments $x, y, y_1, \ldots, y_t$ de B' tels que :

$$u^\delta x = u^e y + y_1\psi_1 + \cdots + y_t\psi_t \tag{9}$$

alors, il existe $y'_1, \ldots, y'_t \in B'$ tels que :

$$x = u^{e-\delta} y + y'_1\psi_1 + \cdots + y'_t\psi_t.$$

Nous allons prouver ce résultat par récurrence sur t. On rappelle que la famille $(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_t)$ est une suite régulière de B et que, dans B, on a $u^e = \psi_0$ (puisque X est nul).

L'initialisation de la récurrence provient simplement du fait que u n'est pas diviseur de 0 dans B (puisque u^e ne l'est pas). Pour l'hérédité, on suppose que l'équation (9) est vérifiée. Cela entraîne $u^\delta x \equiv y_t\psi_t \pmod{u^e, \psi_1, \ldots, \psi_{t-1}}$ et donc $u^{e-n\delta} y_t\psi_t \equiv 0 \pmod{u^e, \psi_1, \ldots, \psi_{t-1}}$. Puisque la suite $(u^e, \psi_1, \ldots, \psi_t)$ est régulière, il vient $u^{e-\delta} y_t \equiv 0 \pmod{u^e, \psi_1, \ldots, \psi_{t-1}}$, et donc il existe $z, z_1, \ldots, z_{t-1} \in B$ tels que :

$$u^{e-\delta} y_t = zu^e + z_1\psi_1 + \cdots + z_{t-1}\psi_{t-1}.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient l'existence d'éléments $z', z'_1, \dots, z'_{t-1}$ dans B tels que :

$$y_t = z'u^\delta + z'_1\psi_1 + \dots + z'_{t-1}\psi_{t-1}.$$

En réinjectant dans (9), il vient :

$$u^\delta(x - z'y_t) = u^e y + (y_1 + z'_1 y_t)\psi_1 + \dots + (y_{t-1} + z'_1 y_{t-1})\psi_{t-1}$$

et une nouvelle application de l'hypothèse de récurrence permet de conclure. □

Remarque. Sur les quotients de la proposition qui précède, la structure de A^∞-module est simple à décrire. En effet, ces quotients sont tués par u et par tous les ψ_i, et donc la structure de A^∞-module se factorise en une structure de $\mathcal{C}$-module, qui est décrite de façon transparente sur la somme directe précédente.

Finalement, remarquons que si $s \leqslant p-1$ et si $p \geqslant 3$, il est possible de donner une définition alternative de $\phi_s : \mathcal{J}_1^{[s]} \to \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$ qui est déjà valable sur le site $(T_2)_{\mathrm{syn}}$. On remarque pour cela que ϕ_1 s'annule sur $\mathcal{J}_1^{[2]}$ et qu'il définit ainsi par passage au quotient un morphisme de faisceaux (sur le site $(T_2)_{\mathrm{syn}}$) $\mathcal{J}_1^{[1]}/\mathcal{J}_1^{[2]} \to \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$. En outre, on a le lemme suivant :

Lemme 2.3.3. *Le morphisme de faisceaux canoniques Sym*$_{\mathcal{O}_1}\mathcal{J}_1^{[1]}/\mathcal{J}_1^{[2]} \to \mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1]}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. Avec les descriptions précédentes, c'est une conséquence directe de l'alinéa I.3.4.4 de [Ber77]. □

On vérifie que l'application ϕ_s s'obtient comme la composée :

$$\mathcal{J}_1^{[s]} \longrightarrow \mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1]} \xrightarrow{\mathrm{Sym}^s \phi_1} \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}} .$$

Cette dernière formule assure, au moins pour $s \leqslant p-1$ et $p \geqslant 3$, que ϕ_s ne dépend que de ϕ_1 et peut être défini sur $(T_2)_{\mathrm{syn}}$.

2.3.2 Les faisceaux $\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}$, $\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}$

Lorsque $n = 1$, on définit des versions simplifiées des faisceaux $\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$ et $\mathcal{J}_1^{[s]}$ en remplaçant la base E_1 par la base $\tilde{E}$ (voir le paragraphe 2.1.3 pour la définition).

Si U est un log-schéma sur T_1, on définit pour tout entier s :

$$\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}(U) = H^0((U/\tilde{E})_{\mathrm{cris}}, \mathcal{J}_{U/\tilde{E}}^{[s]}) = H^0((U/\tilde{E})_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{J}_{U/\tilde{E}}^{[s]})$$

et $\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}} = \tilde{\mathcal{J}}^{[0]}$. Comme précédemment, les préfaisceaux $\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}$ sont des faisceaux sur le gros site syntomique $(T_1)_{\mathrm{SYN}}$ et calculent la cohomologie log-cristalline :

$$H^i(X_{\mathrm{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}) = H^i(X_{\mathrm{SYN}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}) = H^i((X/\tilde{E})_{\mathrm{cris}}, \tilde{\mathcal{J}}_{X/\tilde{E}}^{[s]}) = H^i((X/\tilde{E})_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{J}_{X/\tilde{E}}^{[s]}).$$

De même que précédemment, on pose pour $q = s + \frac{\delta}{e}$ où $s \geqslant 0$ et $0 \leqslant \delta < e$ sont des entiers :

$$\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} = u^{\delta} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} + \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}.$$

Il est encore possible de donner une description locale très explicite de ces faisceaux. En reprenant les arguments utilisés pour les faisceaux $\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$ et $\mathcal{J}_1^{[s]}$, et en reprenant les notations des paragraphes 2.2.1 et 2.3.1, on aboutit à :

$$\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}(A^\infty, P^\infty) = \bigoplus_{m_1,\dots,m_{t+1}\in\mathbb{N}} \tilde{\mathcal{B}} \cdot \gamma_{pm_1}(\psi_1)\cdots\gamma_{pm_t}(\psi_t)\gamma_{pm_{t+1}}(X) \tag{10}$$

avec :

$$\tilde{\mathcal{B}} = \frac{k[Q^\infty G^{1/p}][X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_s^{1/p^\infty}][X]}{([x_0], f_1, \dots, f_t, X^p)} = \frac{k[Q^\infty G^{1/p}][X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_s^{1/p^\infty}][X]}{(u^p, f_1, \dots, f_t, X^p)}. \tag{11}$$

et, pour $q = s + \frac{\delta}{e} < \frac{p}{e}$ (par exemple si $q \leqslant r$) :

$$\frac{\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}(A^\infty, P^\infty)}{\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}(A^\infty, P^\infty)} = \bigoplus_{\sum m_i = s} \tilde{\mathcal{C}} \cdot u^{em_0+\delta}\psi_1^{m_1}\cdots\psi_t^{m_t}X^{m_{t+1}} \tag{12}$$

où $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$. La structure de A^∞-module sur ce dernier quotient se factorise en une structure de $\tilde{\mathcal{C}}$-module, qui est celle qui correspond à l'écriture sous forme de somme directe.

En comparant les formules (7) et (12), on en déduit la proposition suivante :

Proposition 2.3.4. *Pour $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, $q < \frac{p}{e}$, la projection canonique induit un isomorphisme de faisceaux :*

$$\mathcal{J}_1^{[q]}/\mathcal{J}_1^{[q+1/e]} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{J}}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]} .$$

Par ailleurs, pour tout entier $s < \frac{p}{e}$, l'opérateur $\phi_s : \mathcal{J}_1^{[s]} \to \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$ induit par passage au quotient un morphisme $\phi_s : \mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1/e]} \to \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}/u^p\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$. D'autre part, la projection canonique $\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}} \to \tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}$ s'annule sur $u^p\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$ et donc fournit un morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}/u^p\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}} \to \tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}$ (attention, ce n'est pas un isomorphisme). Tout cela, avec la proposition précédente, permet de définir un opérateur $\tilde{\phi}_s$ comme la composée :

$$\tilde{\mathcal{J}}^{[s]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]} \xleftarrow{\sim} \mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1/e]} \xrightarrow{\phi_s} \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}/u^p\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}} .$$

Encore une fois, le morphisme $\tilde{\phi}_s$ n'est pas défini sur $(T_1)_{\mathrm{syn}}$, mais *a priori* simplement sur $(T_{s+1})_{\mathrm{syn}}$.

Finalement, on munit le faisceau $\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}$ d'un opérateur $\tilde{N}$, après avoir remarqué que l'opérateur $N : \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}} \to \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$ passe au quotient puisque $N(u^p\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}} + \sum_{i\geqslant p}\gamma_i(u)\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}) \subset u^p\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}} + \sum_{i\geqslant p}\gamma_i(u)\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$.

2.3.3 Les faisceaux $\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}$ et $\bar{\mathcal{J}}^{[s]}$

On recopie les définitions précédentes en se plaçant désormais sur la base $\bar{E}$ (voir paragraphe 2.1.3) : pour tout entier s et tout $U \in (T_1)_{\mathrm{SYN}}$, on pose

$$\bar{\mathcal{J}}^{[s]}(U) = H^0((\bar{U}/\bar{E})_{\mathrm{cris}}, \mathcal{J}^{[s]}_{\bar{U}/\bar{E}}) = H^0((\bar{U}/\bar{E})_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{J}^{[s]}_{\bar{U}/\bar{E}})$$

où $\bar{U} = U \times_{T_1} \bar{E}$. On obtient ainsi des faisceaux sur le site $(T_1)_{\mathrm{SYN}}$ qui, comme précédemment, calculent la cohomologie log-cristalline. On pose en outre $\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}} = \bar{\mathcal{J}}^{[0]}$.

On dispose encore d'une description locale du faisceau $\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}$. En gardant les mêmes notations, on a :

$$\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}(A^\infty, P^\infty) = \bigoplus_{m_1,\ldots,m_{t+1}\in\mathbb{N}} \bar{\mathcal{B}} \cdot \gamma_{pm_1}(\psi_1)\cdots\gamma_{pm_t}(\psi_t)\gamma_{pm_{t+1}}(X) \tag{13}$$

avec :

$$\bar{\mathcal{B}} = \frac{k[Q^\infty G^{1/p}][X_1^{1/p^\infty}, \ldots, X_s^{1/p^\infty}][X]}{(u, f_1, \ldots, f_t, X^p)}. \tag{14}$$

L'élément u est nul par hypothèse dans $\bar{E}$ et donc également dans $\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}$. On ne définit donc pas les faisceaux intermédiaires $\bar{\mathcal{J}}^{[q]}$ pour q rationnel, mais, si s est un entier, on a toujours une description explicite du quotient :

$$\frac{\bar{\mathcal{J}}^{[s]}(A^\infty, P^\infty)}{\bar{\mathcal{J}}^{[s+1]}(A^\infty, P^\infty)} = \bigoplus_{\sum m_i = s} \bar{\mathcal{C}} \cdot \gamma_{m_1}(\psi_1)\cdots\gamma_{m_t}(\psi_t)\gamma_{m_{t+1}}(X) \tag{15}$$

où $\bar{\mathcal{C}} = \tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$. Il est encore une fois possible de décrire la structure de A^∞-module sur ce quotient : elle se factorise par la structure de $\bar{\mathcal{C}}$-module naturelle sur la somme directe. Finalement, en comparant les formules (7) et (15), on voit que le morphisme naturel $\mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1/e]} \to \bar{\mathcal{J}}^{[s]}/\bar{\mathcal{J}}^{[s+1]}$ est un isomorphisme pour $s < p$. Cela permet de définir un opérateur $\bar{\phi}_s$ comme la composée :

$$\bar{\mathcal{J}}^{[s]} \longrightarrow \bar{\mathcal{J}}^{[s]}/\bar{\mathcal{J}}^{[s+1]} \xleftarrow{\sim} \mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1/e]} \xrightarrow{\phi_s} \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}/u^p\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}} \longrightarrow \bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}.$$

2.3.4 Les faisceaux $\mathcal{O}_1^{\mathrm{car}}$, $\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{car}}$ et $\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{car}}$

Sur un log-schéma de caractéristique p, on définit le Frobenius absolu de la façon suivante : c'est le Frobenius absolu classique sur le schéma sous-jacent et la multiplication par p sur le monoïde (à supposer qu'il soit noté additivement).

Soit U un log-schéma fin (localement de présentation finie) sur T_1. On voit U sur E_1 grâce à l'épaississement $T_1 \hookrightarrow E_1$. On note $U' = U \times_{E_1} E_1$ où E_1 est vu sur lui-même par le morphisme de Frobenius absolu. Le Frobenius absolu sur U se factorise par U' et fournit donc un morphisme $U \to U'$ appelé Frobenius relatif f_U.

Dans la terminologie de Kato (voir [Kat89], paragraphe 4.9), la flèche f_U est faiblement purement inséparable et d'après le théorème 4.10 de *loc. cit.*, elle se factorise de façon *unique* sous la forme :

$$f_U : U \to U'' \to U'$$

où le premier morphisme est purement inséparable et le second est log-étale. On définit alors, comme dans le paragraphe 2.2.1 de [Bre98] :

$$\mathcal{O}_1^{\mathrm{car}}(U) = \Gamma(U'', \mathcal{O}_{U''}).$$

On prouve (voir appendice B de [Bre98]) que l'on définit ainsi un faisceau $\mathcal{O}_1^{\mathrm{car}}$ sur le gros site syntomique $(T_1)_{\mathrm{SYN}}$. Par ailleurs, d'après les résultats de [Kat89], si $U = (\mathrm{Spec}\, A, P)$, on a simplement :

$$\mathcal{O}_1^{\mathrm{car}}(U) = (S_1 \otimes_{(\phi),k} A/\pi A) \otimes_{\mathbb{Z}[\mathbb{N} \oplus_{(\phi),\mathbb{N}} P]} \mathbb{Z}[(\mathbb{N} \oplus_{(\phi),\mathbb{N}}, P)^{(1)}].$$

Avec les notations introduites précédemment, ceci se réécrit :

$$\mathcal{O}_1^{\mathrm{car}}(A^\infty, P^\infty) = \bigoplus_{m_0 \in \mathbb{N}} \mathcal{B} \cdot \gamma_{pm_0}(u^e) \tag{16}$$

où on rappelle que $\mathcal{B}$ est défini par la formule (4).

On définit de même sur le site $(T_1)_{\mathrm{SYN}}$ les faisceaux $\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{car}}$ et $\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{car}}$ en remplaçant la base E_1 respectivement par les bases $\tilde{E}$ et $\bar{E}$. Comme précédemment, on peut donner une description explicite des faisceaux obtenus. On obtient :

$$\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{car}}(A^\infty, P^\infty) = \tilde{\mathcal{B}} \qquad \text{et} \qquad \bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{car}}(A^\infty, P^\infty) = \bar{\mathcal{B}} \tag{17}$$

où les anneaux $\tilde{\mathcal{B}}$ et $\bar{\mathcal{B}}$ sont définis respectivement par les formules (11) et (14).

Pour finir, mentionnons que la structure de A^∞-module sur l'objet $\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{car}}(A^\infty, P^\infty)$ est donnée par l'application $A^\infty \to \tilde{\mathcal{B}}$ déduite du Frobenius. En particulier, on constate que cette application se factorise par $\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{C}} = \bar{\mathcal{C}}$. Il en va de même pour $\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{car}}(A^\infty, P^\infty)$.

3 Calcul de la cohomologie cristalline

On montre dans cette partie comment associer à un log-schéma X propre et log-lisse sur la base $T = (\mathbb{N} \to \mathcal{O}_K, 1 \mapsto \pi)$ dont la réduction modulo p est du *type de Cartier* (voir définition 4.8 de [Kat89]) sur $X \times_T T_1$, et à un entier n des objets des catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$ tués par p^n. Précisément, il s'agit, pour tout $i < r$, des quadruplets :

$$(H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}), H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N)$$

où par définition $X_n = X \times_T T_n$. On fait remarquer une fois de plus que le morphisme ϕ_r n'est défini que sur $(X_{n+r})_{\mathrm{syn}}$. Toutefois, l'écriture précédente du quadruplet est légitime car on dispose d'isomorphismes canoniques entre $(H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}})$ et $(H^i((X_{n+r})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}})$ d'une part et $H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]})$ et $H^i((X_{n+r})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]})$ d'autre part.

On commence par traiter le cas $n = 1$ (sous-partie 3.1) : alors, l'élément de $\underline{\mathcal{M}}^r$ est tué par p et peut-être donc vu dans $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$. On procède ensuite par dévissage avant de passer un passage à la limite projective pour proposer une version entière (sous-partie 3.2).

3.1 En caractéristique p

On se donne ici, un log-schéma fin X_1 propre et log-lisse sur la base T_1 (voir paragraphe 2.1.3). En particulier, le morphisme structural $X_1 \to T_1$ est log-syntomique. On suppose que X_1 est du type de Cartier et qu'il admet un relèvement X_2 fin et log-lisse sur T_2. Ce relèvement est automatiquement log-syntomique sur T_2.

Le but, ici, est de prouver que le quadruplet $(H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_1^{\text{st}}), H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N)$ définit un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ pour tout $i \leqslant r$. On montre d'abord l'énoncé équivalent avec la base $\tilde{E}$, *i.e.* que le quadruplet $(H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}), H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}), \tilde{\phi}_r, \tilde{N})$ définit un objet de $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r$. Le point le plus difficile est la liberté du $\tilde{S}$-module $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$. Les deux paragraphes 3.1.1 et 3.1.2 y sont consacrés. Dans le paragraphe 3.1.3, on explique comment on termine la preuve pour la base $\tilde{E}$ avant d'en déduire dans le paragraphe 3.1.4, le théorème sur la base E_1.

3.1.1 Des isomorphismes sur les faisceaux

On suit pratiquement à la lettre la méthode initiée par Fontaine et Messing ([FM87]) et développée par Breuil ([Bre98]) dans le cas qui nous intéresse. Pour tout entier $s \geqslant 1$, on note $\mathcal{J}_1^{\langle s \rangle}$ le noyau du morphisme composé $\mathcal{O}_{s+1}^{\text{st}} \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_{s+1}^{\text{st}} \longrightarrow \mathcal{O}_s^{\text{st}}$. On note $\nu_s : \mathcal{J}_1^{\langle s \rangle} \to \mathcal{O}_1^{\text{st}}$ la réduction modulo p et on définit $\hat{f}_s : \mathcal{J}_1^{\langle s \rangle} \to \mathcal{O}_1^{\text{st}}$ par $\hat{f}_s(x) = y$ si $\phi(x) = p^s \hat{y}$ où $\hat{y}$ est une section (locale) du faisceau $\mathcal{O}_{s+1}^{\text{st}}$.

On définit ensuite $F^s\mathcal{O}_1^{\text{st}} = \operatorname{im} \nu_s$ et $F_s\mathcal{O}_1^{\text{st}} = \operatorname{im} \hat{f}_s$. Ce sont deux sous-faisceaux d'anneaux de $\mathcal{O}_1^{\text{st}}$. On montre facilement que la suite $(F^s\mathcal{O}_1^{\text{st}})$ est décroissante alors que la suite $(F_s\mathcal{O}_1^{\text{st}})$ est croissante. En outre, le morphisme $\hat{f}_s$ se factorise en un isomorphisme :

$$f_s : F^s\mathcal{O}_1^{\text{st}}/F^{s+1}\mathcal{O}_1^{\text{st}} \xrightarrow{\sim} F_s\mathcal{O}_1^{\text{st}}/F_{s-1}\mathcal{O}_1^{\text{st}} .$$

On note $F_s^{\text{car}}\mathcal{O}_1^{\text{st}}$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_1^{\text{car}}$-algèbre de $\mathcal{O}_1^{\text{st}}$ engendré par $F^s\mathcal{O}_1^{\text{st}}$ et $F_s^{\text{car}}\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ (resp. $F_s^{\text{car}}\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}$) l'image de $F_s^{\text{car}}\mathcal{O}_1^{\text{st}}$ dans $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ (resp. dans $\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}$). On note également $F^s\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ la réduction de $F^s\mathcal{O}_1^{\text{st}}$ dans $\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}$.

Soient $\mathcal{O}_1$ le faisceau structural sur le site $(T_1)_{\text{SYN}}$, et $\bar{\mathcal{O}}$ sa réduction modulo π. On a, en reprenant les notations du paragraphe 3.1, les descriptions locales suivantes :

$$\mathcal{O}_1(A^\infty, P^\infty) = A^\infty \qquad \text{et} \qquad \bar{\mathcal{O}}(A^\infty, P^\infty) = A^\infty/\pi. \tag{18}$$

On dispose de flèches naturelles $\mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_1^{\text{car}}$, $\bar{\mathcal{O}} \to \tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ et $\bar{\mathcal{O}} \to \bar{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ qui localement sur les descriptions précédentes sont données par l'élévation à la puissance p. Ces flèches se factorisent toutes les trois par $\mathcal{C}$.

Proposition 3.1.1. *i) Pour tout entier s, on a $F^s\bar{\mathcal{O}}^{st} = \bar{\mathcal{J}}^{[s]}$.*

ii) On a $\bigcup_{s\in\mathbb{N}} F_s^{car}\mathcal{O}_1^{st} = \mathcal{O}_1^{st}$, $\bigcup_{s\in\mathbb{N}} F_s^{car}\tilde{\mathcal{O}}^{st} = \tilde{\mathcal{O}}^{st}$ et $\bigcup_{s\in\mathbb{N}} F_s^{car}\bar{\mathcal{O}}^{st} = \bar{\mathcal{O}}^{st}$.

iii) Pour tout entier s, l'isomorphisme f_s se factorise en des isomorphismes de faisceaux sur $(\bar{E})_{syn}$:

$$\mathcal{O}_1^{car} \otimes_{\mathcal{O}_1} \bar{\mathcal{J}}^{[s]}/\bar{\mathcal{J}}^{[s+1]} \xrightarrow{\sim} F_s^{car}\mathcal{O}_1^{st}/F_{s-1}^{car}\mathcal{O}_1^{st}$$

$$\tilde{\mathcal{O}}^{car} \otimes_{\mathcal{O}_1} \bar{\mathcal{J}}^{[s]}/\bar{\mathcal{J}}^{[s+1]} \xrightarrow{\sim} F_s^{car}\tilde{\mathcal{O}}^{st}/F_{s-1}^{car}\tilde{\mathcal{O}}^{st}$$

$$\bar{\mathcal{O}}^{car} \otimes_{\mathcal{O}_1} \bar{\mathcal{J}}^{[s]}/\bar{\mathcal{J}}^{[s+1]} \xrightarrow{\sim} F_s^{car}\bar{\mathcal{O}}^{st}/F_{s-1}^{car}\bar{\mathcal{O}}^{st}$$

Démonstration. Elle est entièrement analogue à celle de la proposition 2.2.2.2 de [Bre98]. Signalons toutefois une subtilité peut-être insuffisamment soulignée dans *loc. cit.* : une fois prouvés i) et ii), on est amené à évaluer, pour le premier isomorphisme de iii), le produit tensoriel :

$$\mathcal{O}_1^{\text{car}}(A^\infty, P^\infty) \otimes_{A^\infty} \frac{\bar{\mathcal{J}}^{[s]}(A^\infty, P^\infty)}{\bar{\mathcal{J}}^{[s+1]}(A^\infty, P^\infty)}$$

qui d'après les descriptions précédentes s'identifie à :

$$\mathcal{O}_1^{\text{car}}(A^\infty, P^\infty) \otimes_{A^\infty} \left(\bigoplus_{\sum m_i = s} \bar{\mathcal{C}} \cdot \gamma_{m_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{m_t}(\psi_t)\gamma_{m_{t+1}}(X) \right).$$

Il faut alors se souvenir que chacun des facteurs du produit tensoriel est tué par u et tous les ψ_i, de sorte que la structure de A^∞-module sur ces deux facteurs se factorise en une structure de $\bar{\mathcal{C}}$-module. Ayant constaté cela, le produit tensoriel se réécrit :

$$\mathcal{O}_1^{\text{car}}(A^\infty, P^\infty) \otimes_{\bar{\mathcal{C}}} \left(\bigoplus_{\sum m_i = s} \bar{\mathcal{C}} \cdot \gamma_{m_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{m_t}(\psi_t)\gamma_{m_{t+1}}(X) \right)$$

et donc vaut bien :

$$\bigoplus_{\sum m_i = s} \mathcal{O}_1^{\text{car}}(A^\infty, P^\infty) \cdot \gamma_{m_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{m_t}(\psi_t)\gamma_{m_{t+1}}(X)$$

comme annoncé dans *loc. cit.* La fin de la preuve reste inchangée. □

Notons qu'au passage la preuve de [Bre98] donne des descriptions locales explicites pour les faisceaux F_s^{car}, qui sont (toujours en gardant les mêmes notations) :

$$\begin{aligned}
F_s^{\text{car}}\mathcal{O}_1^{\text{st}} &= \bigoplus_{\substack{m_0 \in \mathbb{N} \\ m_i + \cdots + m_{t+1} \leqslant s}} \mathcal{B} \cdot \gamma_{pm_0}(u^e)\gamma_{pm_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{pm_t}(\psi_t)\gamma_{pm_{t+1}}(X) \\
F_s^{\text{car}}\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} &= \bigoplus_{m_1 + \cdots + m_{t+1} \leqslant s} \tilde{\mathcal{B}} \cdot \gamma_{pm_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{pm_t}(\psi_t)\gamma_{pm_{t+1}}(X) \\
F_s^{\text{car}}\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}} &= \bigoplus_{m_1 + \cdots + m_{t+1} \leqslant s} \bar{\mathcal{B}} \cdot \gamma_{pm_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{pm_t}(\psi_t)\gamma_{pm_{t+1}}(X).
\end{aligned}$$

De ces descriptions explicites, on déduit le théorème suivant :

Théorème 3.1.2. *Soit $s < \frac{p}{e}$ un entier (si $p = 2$ et $e = 1$, on impose $s = 0$). On a alors des isomorphismes de faisceaux sur le site $(T_2)_{syn}$:*

$$\tilde{\mathcal{O}}^{car} \otimes_{\bar{\mathcal{O}}} \mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1/e]} = \tilde{\mathcal{O}}^{car} \otimes_{\bar{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]} \xrightarrow[id\otimes\phi_s]{\sim} F_s^{car}\tilde{\mathcal{O}}^{st}$$

$$\bar{\mathcal{O}}^{car} \otimes_{\bar{\mathcal{O}}} \mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1/e]} = \bar{\mathcal{O}}^{car} \otimes_{\bar{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]} \xrightarrow[id\otimes\phi_s]{\sim} F_s^{car}\bar{\mathcal{O}}^{st}.$$

Démonstration. Encore une fois, la preuve est identique à celle du théorème 2.2.2.3 de [Bre98]. Notons toutefois que la subtilité mentionnée dans la preuve de la proposition précédente apparaît à nouveau ici. □

Remarque. On démontre de façon tout à fait identique que l'on a également les isomorphismes suivants, pour $s \leqslant \frac{p}{e} - 1$:

$$\mathcal{O}_1^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1]} \xrightarrow[\text{id}\otimes\phi_s]{\sim} F_s^{\text{car}}\mathcal{O}_1^{\text{st}}$$

$$\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1]} = \tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]} \xrightarrow[\text{id}\otimes\phi_s]{\sim} F_s^{\text{car}}\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$$

$$\bar{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1]} = \bar{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]} \xrightarrow[\text{id}\otimes\phi_s]{\sim} F_s^{\text{car}}\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}.$$

certainement plus proches de ceux de [Bre98] (rappelons que $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ et $\bar{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ sont tués par π).

Par ailleurs, si l'on ne se préoccupe que de la version « $\mathcal{J}_1$ » et pas de la version « $\tilde{\mathcal{J}}$ », les isomorphismes précédents sont valables pour tout $s \leqslant p - 1$.

3.1.2 Des isomorphismes sur les groupes de cohomologie

Nous aimerions à présent déduire du théorème 3.1.2 des isomorphismes sur les groupes de cohomologie et, pour cela, nous allons projeter ces faisceaux sur le site étale : l'intérêt est que sur ce site le faisceau $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ (resp. $\bar{\mathcal{O}}^{\text{car}}$) se réduit simplement à $\tilde{S} \otimes_{(\phi),k} \bar{\mathcal{O}}$ (resp. à $\bar{S} \otimes_{(\phi),k} \bar{\mathcal{O}}$).

Soit X un log-schéma fin localement de type fini sur une des trois bases E_1, $\tilde{E}$ ou $\bar{E}$. On dispose dans ces conditions d'un morphisme de topoï :

$$\alpha : \widetilde{X_{\text{SYN}}} \to \widetilde{X_{\text{ét}}}$$

défini de la façon suivante : si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X_{SYN}, on définit $\alpha_\star\mathcal{F}$ comme la restriction de $\mathcal{F}$ au site $X_{\text{ét}}$, et on vérifie que l'on obtient ainsi un faisceau pour la topologie étale. Réciproquement si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur $X_{\text{ÉT}}$, on définit $\alpha^\star\mathcal{F}$ comme le faisceau associé (pour la topologie syntomique) au préfaisceau $\mathcal{F}$.

Si Γ_{SYN} (resp. $\Gamma_{\text{ÉT}}$) désigne le foncteur des sections globales pour la topologie syntomique (resp. étale), on a évidemment la relation $\Gamma_{\text{SYN}} = \Gamma_{\text{ÉT}} \circ \alpha_\star$ d'où $R\Gamma_{\text{SYN}} = R\Gamma_{\text{ÉT}} \circ R\alpha_\star$. Ainsi pour calculer la cohomologie syntomique d'un faisceau, il suffit de calculer le $R\alpha_\star$ de ce faisceau puis de déterminer l'hypercohomologie étale du complexe obtenu. C'est ce que nous allons faire.

Calcul des $R\alpha_\star$ de plusieurs faisceaux Pour calculer les $R\alpha_\star$ des faisceaux précédemment introduits, on aimerait utiliser les résolutions de Berthelot et Kato. Cependant, celles-ci sont valables sur le site cristallin et non sur le site syntomique. Il nous faut donc faire un pont entre cohomologie cristalline et cohomologie syntomique, pont qui passe par la cohomologie cristalline-syntomique.

Soit X un log-schéma fin localement de type fini sur une des trois bases E_1, $\tilde{E}$ ou $\bar{E}$. Reprenant les notations de [Bre98] auquel on aura besoin de se référer par la suite, on note Υ la base retenue.

On définit le *site cristallin-syntomique* sur X/Υ en munissant la catégorie sous-jacente au site cristallin sur X/Υ de la topologie syntomique : il s'agit donc d'une catégorie de couples $(U \hookrightarrow T)$ et on convient qu'une famille de couples $(U_i \hookrightarrow T_i)$ recouvre $(U \hookrightarrow T)$ si les T_i forment un recouvrement syntomique de T et si les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[r] \arrow[d] & T_i \arrow[d] \\ U \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

sont cartésiens.

Bien entendu, selon que l'on considère la catégorie sous-jacente au petit site cristallin sur X/Υ ou au grand, on obtient respectivement les petit et grand sites cristallin-syntomiques sur X/Υ. On les note $(X/\Upsilon)_{\text{syn-cris}}$ et $(X/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}$. Par les résultats de [Bre96] (lemme 3.3.1), on a des morphismes de topoï entre les différents catégories de faisceaux sur les sites précédents comme le résume le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} (\widetilde{X/\Upsilon})_{\text{SYN-CRIS}} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "w"'] & (\widetilde{X/\Upsilon})_{\text{CRIS}} \arrow[d, "u"] \\ \widetilde{X_{\text{SYN}}} \arrow[r, "\alpha"] & \widetilde{X_{\text{ét}}} \end{tikzcd}$$

Par ailleurs, il est possible de définir, comme en 2.3.4, sur le site $(X/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}$ (resp $(X/\Upsilon)_{\text{syn-cris}}$) des faisceaux $\mathcal{O}_1^{\text{car}}$, $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ et $\bar{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ en posant $\mathcal{O}_1^{\text{car}}(U \hookrightarrow T) = \mathcal{O}_1^{\text{car}}(U)$ (où le deuxième $\mathcal{O}_1^{\text{car}}$ est celui défini précédemment[4]) et des formules analogues pour les autres faisceaux. (Attention, dans [Bre98], ces faisceaux sont notés respectivement $\mathcal{O}_X^{\text{car},E_1}$, $\mathcal{O}_X^{\text{car},\tilde{E}_1}$ et $\mathcal{O}_X^{\text{car},\bar{E}_1}$.) De même, ces faisceaux vivent également sur les sites $(X/\Upsilon)_{\text{CRIS}}$ (resp. $(X/\Upsilon)_{\text{cris}}$) et $X_{\text{ÉT}}$ (resp. $X_{\text{ét}}$).

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur un des sites $(X/\Upsilon)_{\text{CRIS}}$, $(X/\Upsilon)_{\text{cris}}$, $(X/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}$ ou $(X/\Upsilon)_{\text{syn-cris}}$. Pour tout T apparaissant dans un couple de la forme $(U \hookrightarrow T)$, on sait que $\mathcal{F}$ définit un faisceau

[4]Notez que si $U \hookrightarrow T$ est un objet de $(X/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}$, alors $U \to X$ est étale et donc en particulier log-syntomique.

$F_{|U \hookrightarrow T}$ sur $T_{\text{ét}}$. On dit que $\mathcal{F}$ est à *composantes quasi-cohérentes* si tous les faisceaux $F_{|U \hookrightarrow T}$ sont des $\mathcal{O}_T$-modules quasi-cohérents.

On montre (en adaptant la preuve du lemme 3.3.2 de [Bre96]) que si $\mathcal{F}$ est un faisceau à composantes quasi-cohérentes sur $(X/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}$, alors $R^i v_\star \mathcal{F} = 0$ pour tout $i \geqslant 1$. Autrement dit $Rv_\star \mathcal{F} \simeq v_\star \mathcal{F}$. De même, par un calcul de Cech, on prouve (voir [Bre98], appendice C.1) que $Rw_\star \mathcal{F} \simeq w_\star \mathcal{F}$ (toujours en supposant que $\mathcal{F}$ est à composantes quasi-cohérentes).

On dispose d'un résultat de comparaison entre cohomologie log-cristalline et cohomologie de de Rham (théorème 6.4 de [Kat89]) qui donne avec les rappels précédents le théorème suivant :

Théorème 3.1.3. *Soit X un log-schéma fin localement de type fini sur Υ. On suppose que l'on a une Υ-immersion fermée $X \hookrightarrow Y$ avec Y log-lisse sur Υ. Soit D l'enveloppe aux puissances divisées de X dans Y (voir paragraphe 6.n de [Kat89] pour une définition). Alors, pour tout entier s :*

– *si $\Upsilon = T_1$:*

$$R\alpha_\star \mathcal{J}_1^{[s]} = \mathcal{J}_D^{[s]} \to \mathcal{J}_D^{[s-1]} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega^1_{Y/T_1} \to \mathcal{J}_D^{[s-2]} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega^2_{Y/T_1} \to \cdots$$

– *si $\Upsilon = \tilde{T}$:*

$$R\alpha_\star \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} = \mathcal{J}_D^{[s]} \to \mathcal{J}_D^{[s-1]} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega^1_{Y/\tilde{T}} \to \mathcal{J}_D^{[s-2]} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega^2_{Y/\tilde{T}} \to \cdots$$

– *si $\Upsilon = \bar{T}$:*

$$R\alpha_\star \bar{\mathcal{J}}^{[s]} = \mathcal{J}_D^{[s]} \to \mathcal{J}_D^{[s-1]} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega^1_{Y/\bar{T}} \to \mathcal{J}_D^{[s-2]} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega^2_{Y/\bar{T}} \to \cdots$$

et :

– *si $\Upsilon = T_1$:*

$$R\alpha_\star \left(\mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1]}\right) = \frac{\mathcal{J}_D^{[s]}}{\mathcal{J}_D^{[s+1]}} \to \frac{\mathcal{J}_D^{[s-1]}}{\mathcal{J}_D^{[s]}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega^1_{Y/T_1} \to \frac{\mathcal{J}_D^{[s-2]}}{\mathcal{J}_D^{[s-1]}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega^2_{Y/T_1} \to \cdots$$

– *si $\Upsilon = \tilde{T}$:*

$$R\alpha_\star \left(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}\right) = \frac{\mathcal{J}_D^{[s]}}{\mathcal{J}_D^{[s+1]}} \to \frac{\mathcal{J}_D^{[s-1]}}{\mathcal{J}_D^{[s]}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega^1_{Y/\tilde{T}} \to \frac{\mathcal{J}_D^{[s-2]}}{\mathcal{J}_D^{[s-1]}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega^2_{Y/\tilde{T}} \to \cdots$$

– *si $\Upsilon = \bar{T}$:*

$$R\alpha_\star \left(\bar{\mathcal{J}}^{[s]}/\bar{\mathcal{J}}^{[s+1]}\right) = \frac{\mathcal{J}_D^{[s]}}{\mathcal{J}_D^{[s+1]}} \to \frac{\mathcal{J}_D^{[s-1]}}{\mathcal{J}_D^{[s]}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega^1_{Y/\bar{T}} \to \frac{\mathcal{J}_D^{[s-2]}}{\mathcal{J}_D^{[s-1]}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega^2_{Y/\bar{T}} \to \cdots$$

Remarque. En gardant les notations du théorème, si on suppose en plus X log-lisse sur Υ, on peut choisir $Y = X$ et alors $\mathcal{J}_D^{[s]} = \mathcal{O}_X$ si $s \leqslant 0$ et $\mathcal{J}_D^{[s]} = 0$ sinon. Les expressions des $R\alpha_\star$ se simplifient alors considérablement. Par exemple, dans le cas où $\Upsilon = \bar{T}$, on obtient :

$$R\alpha_\star \bar{\mathcal{J}}^{[s]} = 0 \to \cdots \to 0 \to \omega^s_{X/\bar{T}} \to \omega^{s+1}_{X/\bar{T}} \to \omega^{s+2}_{X/\bar{T}} \to \cdots$$

$$R\alpha_\star\left(\bar{\mathcal{J}}^{[s]}/\bar{\mathcal{J}}^{[s+1]}\right) = 0 \to \cdots \to 0 \to \omega^s_{X/\bar{T}} \to 0 \to \cdots .$$

Retenons ces résolutions que l'on sera amené à réutiliser par la suite.

On peut montrer également (voir appendice B de [Bre98]) un raffinement du théorème précédent qui permet de tenir compte des faisceaux $\mathcal{O}_1^{\text{car}}$:

Théorème 3.1.4. *Soit X un log-schéma fin localement de type fini sur T_1. On suppose que l'on a une T_1-immersion fermée $X \hookrightarrow Y$ avec Y log-lisse sur T_1. Soit D l'enveloppe aux puissances divisées de X dans Y. Alors, pour tout entier s :*

$$\begin{aligned}
&R\alpha_\star\left(\mathcal{O}_1^{car} \otimes^{SYN}_{\mathcal{O}_1} \mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1]}\right) = \\
&\quad \mathcal{O}_1^{car} \otimes_{\mathcal{O}_X} \frac{\mathcal{J}_D^{[s]}}{\mathcal{J}_D^{[s+1]}} \to \left(\mathcal{O}_1^{car} \otimes_{\mathcal{O}_X} \frac{\mathcal{J}_D^{[s-1]}}{\mathcal{J}_D^{[s]}}\right) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega^1_{Y/T_1} \to \left(\mathcal{O}_1^{car} \otimes_{\mathcal{O}_X} \frac{\mathcal{J}_D^{[s-2]}}{\mathcal{J}_D^{[s-1]}}\right) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega^2_{Y/T_1} \to \cdots
\end{aligned}$$

où « $\otimes^{SYN}$ » signifie que l'on prend le faisceau associé au faisceau produit tensoriel pour la topologie syntomique sur X.

On a d'autre part des versions analogues avec les bases $\tilde{T}$ et $\bar{T}$.

Remarque. Si X est de plus du type de Cartier, le faisceau $\mathcal{O}_1^{\text{car}}$ sur $X_{\text{ét}}$ s'identifie à $\Sigma \otimes_{(\phi),k} \mathcal{O}_X$ où Σ est l'anneau de Υ. Dans ce dernier cas, on obtient une résolution plus simple.

Intéressons-nous maintenant à un analogue du théorème 3.1.3 pour les faisceaux $\mathcal{J}_1^{[q]}$, $\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}$ et $\bar{\mathcal{J}}^{[q]}$ où q n'est pas forcément un entier. Soit $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$. Si X/Υ est comme précédemment un log-schéma fin, localement de type fini, on commence par définir des faisceaux $\mathcal{J}^{[q]}_{X/\Upsilon}$ sur les sites $(X/\Upsilon)_{\text{CRIS}}$ et $(X/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}$ en posant :

$$\mathcal{J}^{[q]}_{X/\Upsilon} = u^\delta \mathcal{J}^{[s]}_{X/\Upsilon} + \mathcal{J}^{[s+1]}_{X/\Upsilon}$$

si $eq = es + \delta$ est la division euclidienne de eq par e. (On remarque que lorsque $\Upsilon = \bar{E}$, on a $u = 0$ et donc le premier terme de la somme n'intervient que si $\delta = 0$).

On s'intéresse particulièrement au quotient $\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}$. Par définition, on a immédiatement :

$$\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} = \frac{\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}}{u^\delta(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]})}$$

et une égalité analogue pour les faisceaux $\mathcal{J}^{[\cdot]}_{X/\Upsilon}$. Du fait que $Rv_\star\mathcal{F} = v_\star\mathcal{F}$ (resp. $Rw_\star\mathcal{F} = w_\star\mathcal{F}$) si $\mathcal{F}$ est un faisceau à composantes quasi-cohérentes, on déduit :

$$Rv_\star\left(\mathcal{J}^{[s]}_{X/\tilde{T}}/\mathcal{J}^{[q]}_{X/\tilde{T}}\right) = \mathcal{J}^{[s]}_{X/\tilde{T}}/\mathcal{J}^{[q]}_{X/\tilde{T}} \quad \text{(resp. } Rw_\star\left(\mathcal{J}^{[s]}_{X/\tilde{T}}/\mathcal{J}^{[q]}_{X/\tilde{T}}\right) = \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}).$$

En vérifiant soigneusement que la démonstration de l'appendice B de [Bre98] s'applique encore dans ce contexte, on obtient le théorème suivant :

Théorème 3.1.5. *Avec les notations précédentes, on a :*

$$R\alpha_\star\left(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}\right) = \frac{\mathcal{J}_D^{[s]}/\mathcal{J}_D^{[s+1]}}{u^\delta(\mathcal{J}_D^{[s]}/\mathcal{J}_D^{[s+1]})} \to \frac{\mathcal{J}_D^{[s-1]}/\mathcal{J}_D^{[s]}}{u^\delta(\mathcal{J}_D^{[s-1]}/\mathcal{J}_D^{[s]})} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega^1_{Y/\tilde{T}} \to \frac{\mathcal{J}_D^{[s-2]}/\mathcal{J}_D^{[s-1]}}{u^\delta(\mathcal{J}_D^{[s-2]}/\mathcal{J}_D^{[s-1]})} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega^2_{Y/\tilde{T}} \to \cdots$$

et :

$$R\alpha_\star\left(\tilde{\mathcal{O}}^{car} \otimes_{\mathcal{O}_1} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}\right) = \tilde{\mathcal{O}}^{car} \otimes_{\mathcal{O}_X} \frac{\mathcal{J}_D^{[s]}/\mathcal{J}_D^{[s+1]}}{u^\delta(\mathcal{J}_D^{[s]}/\mathcal{J}_D^{[s+1]})} \to \left(\tilde{\mathcal{O}}^{car} \otimes_{\mathcal{O}_X} \frac{\mathcal{J}_D^{[s-1]}/\mathcal{J}_D^{[s]}}{u^\delta(\mathcal{J}_D^{[s-1]}/\mathcal{J}_D^{[s]})}\right) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega^1_{Y/\tilde{T}} \to \cdots.$$

Remarque. Bien évidemment, on a des versions analogues pour les bases T_1 et $\bar{T}$. En outre, il est possible d'écrire des résolutions de ce type pour beaucoup d'autres faisceaux. Cependant, pour cet article, nous aurons seulement besoin de celle-ci.

Des isomorphismes à la Deligne-Illusie On reprend les notations et les hypothèses du début de paragraphe 3.1 : X_1 désigne un log-schéma propre, log-lisse et du type de Cartier sur T_1 et on suppose qu'il admet un relèvement fin et log-lisse X_2 sur T_2.

Théorème 3.1.6. *On garde les notations que l'on vient de rappeler. Alors, pour tout* $0 \leqslant i \leqslant s < \frac{p}{e}$*, on a :*

$$\tilde{S} \otimes_{(\phi),k} H^i((X_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}) \xrightarrow[id\otimes\phi_s]{\sim} H^i((X_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{O}}_1^{st})$$

$$H^i((X_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}) \xrightarrow[\phi_s]{\sim} H^i((X_1)_{syn}, \bar{\mathcal{O}}_1^{st})$$

et des versions équivalentes en remplaçant « $\tilde{\mathcal{J}}$ » par « $\mathcal{J}_1$ ».

Démonstration. Comme les deux faisceaux $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ et $\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}$ sont tués par π, le produit tensoriel $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}$ est isomorphe à $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\bar{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}$.

Comme X_1 est supposé du type de Cartier, le faisceau $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}}$ sur le site $(X_1)_{\text{ét}}$ s'identifie à $\tilde{S} \otimes_{(\phi),k} \bar{\mathcal{O}}$. Dans ces conditions, le théorème 3.1.5 assure que la flèche canonique :

$$\tilde{S} \otimes_{(\phi),k} R\alpha_\star(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}) \to R\alpha_\star(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\bar{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}) = R\alpha_\star(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}) \tag{19}$$

est un isomorphisme (α désigne le morphisme de topoï $\widetilde{(X_1)_{\text{SYN}}} \to \widetilde{(X_1)_{\text{ét}}}$). Par le théorème 3.1.2, on a un nouvel isomorphisme :

$$R\alpha_\star(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}) \simeq R\alpha_\star(F_s^{\text{car}}\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}). \tag{20}$$

D'autre part, en combinant la proposition 3.1.1 et le théorème 3.1.4, on obtient pour tout entier t :

$$R\alpha_\star(F_t^{\text{car}}\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}/F_{t-1}^{\text{car}}\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \simeq \tilde{S} \otimes_{(\phi),k} R\alpha_\star(\bar{\mathcal{J}}^{[t]}/\bar{\mathcal{J}}^{[t+1]}) = \tilde{S} \otimes_{(\phi),k} \omega^t_{\bar{X}/\bar{T}}[-t]$$

où $\bar{X} = X \times_{T_1} \bar{T}$. On en déduit que :

$$\tau_{\leqslant t-1} R\alpha_\star(F_t^{\text{car}} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \simeq \tau_{\leqslant t-1} R\alpha_\star(F_{t-1}^{\text{car}} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$$

et puis par une récurrence immédiate :

$$\tau_{\leqslant s} R\alpha_\star(F_s^{\text{car}} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \simeq \tau_{\leqslant s} R\alpha_\star(F_t^{\text{car}} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$$

pour tout entier $t \geqslant s$. Le théorème découle alors de la propriété $\bigcup_{t \in \mathbb{N}} F_t^{\text{car}} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} = \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ (proposition 3.1.1) et des isomorphismes (19) et (20).

On traite de manière exactement similaire le cas de « $\mathcal{J}_1$ ». □

Remarque. En utilisant l'isomorphisme donné par la remarque qui suit le théorème 3.1.2, on obtient des isomorphismes analogues qui s'écrivent :

$$\tilde{S} \otimes_{(\phi), \mathcal{O}_K/p} H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}) \xrightarrow[\text{id}\otimes\phi_s]{\sim} H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}_1^{\text{st}})$$

$$k \otimes_{(\phi), \mathcal{O}_K/p} H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}) \xrightarrow[\text{id}\otimes\phi_s]{\sim} H^i((X_1)_{\text{syn}}, \bar{\mathcal{O}}_1^{\text{st}})$$

où $\Sigma = k$ ou $\tilde{S}$ est vu comme une $\mathcal{O}_K/p$-algèbre par la composée $\mathcal{O}_K/p \to k \to \Sigma$, la première flèche étant la projection canonique et la seconde le Frobenius. En particulier, mis ensemble ces isomorphismes impliquent que le morphisme naturel :

$$\frac{H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]})}{u \cdot H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]})} \longrightarrow H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]})$$

est un isomorphisme pour tout $i \leqslant s < \frac{p}{e}$.

3.1.3 Fin de la preuve

On garde les notations et les hypothèses introduites au début du paragraphe 3.1.

Au vu du théorème 3.1.6, il reste à prouver, pour s'assurer que le quadruplet :

$$(H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}), H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}), \phi_r, N)$$

est un objet de $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r$, les deux choses suivantes :

1. la flèche canonique $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \to H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+1/e]})$ est surjective,
2. la flèche canonique $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \to H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ est injective,

les autres propriétés de compatibilité étant claires.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur $(X_1)_{\text{syn}}$, nous notons simplement $H^i(\mathcal{F})$ pour $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{F})$ et si ce dernier est un espace vectoriel de dimension finie sur k, nous notons $h^i(\mathcal{F})$ sa dimension.

Propriétés de finitude. Pour la suite, nous aurons besoin de raisonner sur les dimensions de certains groupes de cohomologie. Il nous faut donc prouver dans un premier temps qu'ils sont de dimension finie. Nous commençons par donner un résultat agréable sur les faisceaux $u^k\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}$:

Proposition 3.1.7. *Pour tous entiers k et $i < \frac{p}{e}$ (on impose $i = 0$ si $p = 2$ et $e = 1$), les k-espaces vectoriels $H^i(u^k\tilde{\mathcal{O}}^{st})$ sont de dimension finie et égaux à $u^kH^i(\tilde{\mathcal{O}}^{st})$.*

Démonstration. En premier lieu, on remarque que si $k \geqslant p$, tout est nul et donc la proposition est trivialement vérifiée. Montrons que $H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}})$ est de dimension finie sur k. Le log-schéma $\bar{X} = X_1 \otimes_{T_1} \bar{T}$ est log-lisse sur $\bar{T} = \bar{E}$ par changement de base et donc, par la remarque qui suit le théorème 3.1.3, $R\alpha_\star\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}} = \mathcal{O}_{\bar{X}/\bar{E}} \to \omega^1_{\bar{X}/\bar{E}} \to \cdots$. Comme $\bar{X}$ est propre, les $\omega^j_{\bar{X}/\bar{E}}$ sont de dimension finie, et il en est donc de même de $H^i(\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}})$. Le théorème 3.1.6 permet alors de conclure.

Prouvons désormais la proposition par récurrence sur i. En écrivant la suite exacte longue associée à :

$$0 \longrightarrow u^k\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}} \xrightarrow{u^{p-k}} u^{p-k}\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}} \longrightarrow 0$$

et en appliquant l'hypothèse de récurrence, on prouve que la flèche $H^i(u^k\mathcal{O}^{\mathrm{st}}) \to H^i(\mathcal{O}^{\mathrm{st}})$ est injective. Ainsi $H^i(u^k\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}})$ est de dimension finie car inclus dans $H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}})$. Par ailleurs, on vérifie facilement que l'on dispose d'une suite exacte de faisceaux, pour tout entier $k \leqslant p-1$:

$$0 \longrightarrow u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}} \longrightarrow u^k\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}} \xrightarrow{u} u^{k+1}\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}} \longrightarrow 0\ .$$

Par l'hypothèse de récurrence, la suite exacte longue associée prend la forme :

$$0 \longrightarrow H^i(u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}) \longrightarrow H^i(u^k\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}) \longrightarrow H^i(u^{k+1}\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}})$$

et fournit une inégalité sur les dimensions à savoir $h^i(u^k\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}) \leqslant h^i(u^{k+1}\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}) + h^i(u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}})$. Or $u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}} \simeq \bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}$, d'où en additionnant les inégalités précédentes pour k variant de 0 à p, on obtient $h^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}) \leqslant ph^i(\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}})$. Or le théorème 3.1.6 prouve qu'il y a en fait égalité entre les deux nombres précédents. Cela implique que toutes les inégalités sommées sont des égalités et par suite que l'on a des suites exactes courtes :

$$0 \longrightarrow H^i(u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}) \longrightarrow H^i(u^k\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}) \longrightarrow H^i(u^{k+1}\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}) \longrightarrow 0\ .$$

Si $k \leqslant p$, le morphisme de multiplication par u^k se factorise par $H^i(\mathcal{O}^{\mathrm{st}}) \to H^i(u^k\mathcal{O}^{\mathrm{st}}) \to H^i(\mathcal{O}^{\mathrm{st}})$. D'après ce qui précède, la première flèche est surjective et la seconde est injective. On en déduit le résultat annoncé. □

Intéressons-nous à présent aux faisceaux $u^k\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}$ et commençons par un lemme qui les relie entre eux :

Lemme 3.1.8. *Soient $k \in \{0, \dots, p-1\}$ et $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$. Notons s la partie entière de q. Alors on a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow u^{k+1}\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \longrightarrow u^k\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]} \longrightarrow \bar{\mathcal{J}}^{[s+1]} \longrightarrow 0\,.$$

Démonstration. Commençons par préciser les flèches qui apparaissent dans la suite exacte. La première $u^{k+1}\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \to u^k\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}$ est simplement l'inclusion naturelle entre deux sous-faisceaux de $\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}$. La seconde flèche est légèrement plus subtile. Remarquons en premier lieu, que si l'on note K le noyau de la projection (multiplication par u^k) $\tilde{\mathcal{J}}^{[s]} \to u^k\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}$, on dispose d'un diagramme comme suit :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[dr] & \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} \arrow[r, "u^k"] \arrow[d] & u^k\tilde{\mathcal{J}}^{[s]} \arrow[r] & 0 \\
& & \bar{\mathcal{J}}^{[s]} & &
\end{tikzcd}$$

La flèche diagonale composée est nulle : en effet, d'après les descriptions locales, tout élément de K est un multiple de u (au moins dans $\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}$) et donc s'annule lorsqu'on le projette dans $\bar{\mathcal{J}}^{[s]}$. On en déduit un morphisme de faisceaux $u^k\tilde{\mathcal{J}}^{[s]} \to \bar{\mathcal{J}}^{[s]}$ (qui correspond moralement à la division par u^k). Par ailleurs, on dispose d'une inclusion $\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]} \to \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}$ et la seconde flèche de la suite exacte est la composée $u^k\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]} \to u^k\tilde{\mathcal{J}}^{[s]} \to \bar{\mathcal{J}}^{[s]}$.

Il reste à vérifier que la flèche précédente tombe en fait dans $\bar{\mathcal{J}}^{[s+1]}$ et que la suite obtenue ainsi est bien exacte. Montrons dans un premier temps un résultat analogue sur les faisceaux « $\mathcal{J}_1$ », à savoir que la suite :

$$0 \longrightarrow u\mathcal{J}_1^{[q]} \longrightarrow \mathcal{J}_1^{[q+1/e]} \longrightarrow \bar{\mathcal{J}}^{[s]}$$

est exacte et que l'image de la dernière flèche est $\bar{\mathcal{J}}^{[s+1]}$. Notons $f : u\mathcal{J}_1^{[q]} \to \mathcal{J}_1^{[q+1/e]}$ et $g : \mathcal{J}_1^{[q+1/e]} \to \bar{\mathcal{J}}^{[s]}$ les applications qui interviennent. Il est clair que f est injective et que $g \circ f = 0$. Notons $q = s + \frac{\delta}{e}$ avec $0 \leqslant \delta < e$. En reprenant les notations du paragraphe 2.3, un élément de $\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}(A^\infty, P^\infty)$ s'écrit comme une somme de multiples de termes d'une des deux formes suivantes :

i) $u^{em_0+\delta+1}\psi_1^{m_1}\cdots\psi_t^{m_t}X^{m_{t+1}}$ avec $m_0 + \cdots + m_{t+1} \geqslant s$;

ii) $u^{em_0}\psi_1^{m_1}\cdots\psi_t^{m_t}X^{m_{t+1}}$ avec $m_0 + \cdots + m_{t+1} \geqslant s+1$.

On vérifie directement que les éléments du premier type s'envoient sur 0 par g et que les éléments du second type s'envoient dans $\bar{\mathcal{J}}^{[s+1]}$. Finalement l'application g tombe bien dans $\bar{\mathcal{J}}^{[s+1]}$ comme annoncé. En outre, un élément de $\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}$ s'écrit comme une somme de multiples de $u_{em_0}\psi_1^{m_1}\cdots\psi_t^{m_t}X^{m_{t+1}}$ avec $m_0 + \cdots + m_{t+1} \geqslant s+1$, et admet donc un antécédent par g.

Il ne reste qu'à vérifier l'exactitude au milieu. Soit $x \in \mathcal{J}_1^{[q+1/e]}(A^\infty, P^\infty)$ tel que $g(x) = 0$. La flèche $u\mathcal{J}_1^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]} \to \mathcal{J}_1^{[q+1/e]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}$ résultant de l'inclusion canonique est un isomorphisme et donc, quitte à modifier x, on peut supposer qu'il est élément de $\mathcal{J}_1^{[s+1]}(A^\infty, P^\infty)$.

Notons $\bar{x}$ l'image de x dans :

$$\frac{\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}(A^\infty, P^\infty)}{\tilde{\mathcal{J}}^{[s+2]}(A^\infty, P^\infty)} = \bigoplus_{\sum m_i = s+1} (\mathcal{B}/(u^e, \psi_1, \dots, \psi_t, X)) \cdot u^{em_0} \gamma_{m_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{m_t}(\psi_t) \gamma_{m_{t+1}}(X).$$

Le fait que $g(x) = 0$ implique que dans la somme directe précédente, $\bar{x}$ n'a des composantes non nulles que sur les $(\mathcal{B}/(u^e, \psi_1, \dots, \psi_t, X)) \cdot u^{em_0} \psi_1^{m_1} \cdots \psi_t^{m_t} X^{m_{t+1}}$ avec $m_0 > 0$. Il s'ensuit $x \in u\mathcal{J}_1^{[s+1]} + \mathcal{J}_1^{[s+2]} \subset u\mathcal{J}_1^{[q]} + \mathcal{J}_1^{[s+2]}$. Quitte à faire une nouvelle modification, on peut donc supposer $x \in \mathcal{J}_1^{[s+2]}(A^\infty, P^\infty)$, et par une récurrence immédiate $x \in \mathcal{J}_1^{[Np]}(A^\infty, P^\infty)$ pour un certain entier N qu'il reste à choisir.

Par ailleurs, on dispose d'une décomposition de $\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}(A^\infty, P^\infty)$ (formule (10)) :

$$\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}(A^\infty, P^\infty) = \bigoplus_{m_1, \dots, m_{t+1} \in \mathbb{N}} \tilde{\mathcal{B}} \cdot \gamma_{pm_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{pm_t}(\psi_t) \gamma_{pm_{t+1}}(X)$$

et d'une décomposition analogue de $\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}(A^\infty, P^\infty)$:

$$\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}(A^\infty, P^\infty) = \bigoplus_{m_1, \dots, m_{t+1} \in \mathbb{N}} \bar{\mathcal{B}} \cdot \gamma_{pm_1}(\psi_1) \cdots \gamma_{pm_t}(\psi_t) \gamma_{pm_{t+1}}(X).$$

On vérifie directement que g respecte ces décompositions. On peut donc supposer que x est élément de l'un des termes correspondant à un uplet $(m_0, \dots, m_{t+1})$ de la première somme directe. De plus comme $x \in \tilde{\mathcal{J}}^{[Np]}(A^\infty, P^\infty)$, on vérifie que si $x \neq 0$, alors $m = m_0 + \cdots + m_{t+1} \geqslant N - t - 2$. Mais alors l'hypothèse $g(x) = 0$ implique $x \in u\mathcal{J}_1^{[mp]}(A^\infty, P^\infty) \subset u\mathcal{J}_1^{[q]}(A^\infty, P^\infty)$ si N est choisi suffisamment grand.

Pour en déduire le lemme, on raisonne à partir du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
u\mathcal{J}_1^{[q]} \arrow[r, "f"] \arrow[dd, "u^k"'] & \mathcal{J}_1^{[q+1/e]} \arrow[dd, "u^k"'] \arrow[dr, "g"] & \\
 & & \bar{\mathcal{J}}^{[s]} \\
u^{k+1}\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \arrow[r, "f_k"] & u^k\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]} \arrow[ur, "g_k"] &
\end{tikzcd}$$

où les multiplications par u^k sont surjectives. On en déduit dans un premier temps $\operatorname{im} g_k = \operatorname{im} g = \bar{\mathcal{J}}^{[s+1]}$. Par ailleurs l'injectivité de la flèche f_k et le fait que $g_k \circ f_k = 0$ sont immédiats. Une chasse au diagramme facile permet alors de conclure. □

En corollaire, on en déduit enfin la proposition suivante :

Proposition 3.1.9. *Pour tout entier k, tout $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$ et tout entier i, l'espace vectoriel $H^i(u^k\tilde{\mathcal{J}}^{[q]})$ est de dimension finie sur k.*

Démonstration. Pour $k \geqslant p$, l'assertion est évidente puisque $u^k\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} = 0$.

Par ailleurs, comme $\bar{X} = X_1 \times_{T_1} \bar{T}$ est log-lisse sur $\bar{T} = \bar{E}$, on a par la remarque qui suit le théorème 3.1.3, $R\alpha_\star \bar{\mathcal{J}}^{[s]} = 0 \to \cdots \to 0 \to \omega^s_{\bar{X}/\bar{E}} \to \omega^{s+1}_{\bar{X}/\bar{E}} \to \cdots$, et donc puisque $\bar{X}$ est propre sur $\bar{E}$, les groupes $H^i(\bar{\mathcal{J}}^{[s+1]})$ sont de dimension finie pour tous entiers i et s. Si $k \leqslant p-1$, le lemme 3.1.8 assure que $H^i(u^k \tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]})$ est de dimension finie si et seulement si $H^i(u^{k+1}\tilde{\mathcal{J}}^{[q]})$ l'est. On se ramène ainsi à $k = p$ ou $q = 0$. Le premier cas est traité précédemment et le second par la proposition 3.1.7. $\square$

Surjectivité de $\mathbf{H^i((X_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \to H^i((X_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+1/e]})}$. On commence par prouver un lemme :

Lemme 3.1.10. *Soient $i \in \mathbb{N}$ et $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$. Supposons $0 \leqslant i \leqslant q < \frac{p}{e}$ (et $i = q = 0$ si $p = 2$ et $e = 1$). On a des suites exactes courtes :*

$$0 \longrightarrow H^i(\bar{\mathcal{O}}^{st}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) \longrightarrow H^i(u\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) \longrightarrow 0\ .$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que la suite :

$$0 \longrightarrow \bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \xrightarrow{\ u\ } u\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \longrightarrow 0$$

est exacte. La première flèche résulte de l'inclusion $\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}} = u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}} \subset \tilde{\mathcal{J}}^{[q]}$ et donc est injective. La surjectivité est également claire. Par ailleurs, le noyau de la multiplication par u sur $\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}$ est $u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}$ et donc le noyau de $\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \to u\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}$ s'identifie à $(u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}} \cap \tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) = u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}$.

En écrivant la suite exacte longue associée à la suite exacte courte précédente, on obtient déjà l'exactitude au milieu dans la suite de l'énoncé du lemme. Pour l'injectivité, on remarque que d'après la proposition 3.1.7, on a $H^i(\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}) = u^{p-1}H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}})$ et donc la flèche composée $H^i(\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}) \to H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) \to H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}})$ est injective. Il en est donc de même de la flèche $H^i(\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}) \to H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]})$. La surjectivité découle de l'injectivité car les flèches de bord sont nulles. $\square$

La surjectivité de $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \to H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+1/e]})$ résulte directement de la proposition plus générale suivante :

Proposition 3.1.11. *Soient i un entier et $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$ vérifiant $0 \leqslant i \leqslant q < \frac{p}{e}$ (et $i = q = 0$ si $p = 2$ et $e = 1$). On a des suites exactes courtes :*

$$0 \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}) \longrightarrow 0\ .$$

En outre, si s désigne la partie entière de q, on a également un début de suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^{s+1}(\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}) \longrightarrow H^{s+1}(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) \longrightarrow H^{s+1}(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]})\ .$$

Démonstration. La preuve résulte d'un calcul de dimension. Précisément, on va prouver que pour tout $0 \leqslant i \leqslant q < \frac{p}{e}$, on a $h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) = h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}) + h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]})$. On déduira alors la proposition par une récurrence immédiate sur i.

D'après le lemme précédent, on a déjà $h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) = h^i(\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}) + h^i(u\tilde{\mathcal{J}}^{[q]})$. La formule (12) montre que la multiplication par $u^{e(q-s)}$ induit un isomorphisme entre les faisceaux $\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}$ et $\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}$. Le théorème 3.1.6 implique alors $h^i(\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}) = h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]})$. D'autre part, on a la suite exacte (lemme 3.1.8) :

$$0 \longrightarrow u\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]} \longrightarrow \bar{\mathcal{J}}^{[s+1]} \longrightarrow 0\,.$$

Or, puisque $R\alpha_\star \bar{\mathcal{J}}^{[s+1]} = 0 \to \cdots \to 0 \to \omega^{s+1}_{\bar{X}/\bar{E}} \to \omega^{s+2}_{\bar{X}/\bar{E}} \to \cdots$ (par la remarque qui suit le théorème 3.1.3), on a $H^j(\bar{\mathcal{J}}^{[s+1]}) = 0$ pour tout $j \leqslant s$. On en déduit $H^j(u\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}) = H^j(\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]})$ pour tout $j \leqslant s$. En particulier $h^i(u\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}) = h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]})$ ce qui conclut la démonstration. □

Injectivité de $\mathbf{H^i((X_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \to H^i((X_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{O}}^{st})}$. Commençons par énoncer le lemme suivant :

Lemme 3.1.12. *Pour tout $i < \frac{p}{e}$, l'application $H^i(u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) \to H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[p/e]})$ est injective.*

Démonstration. Par un raisonnement analogue à celui utilisé pour la preuve du lemme 3.1.8, on montre que l'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[i]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[p/e]} \xrightarrow{u^{ei}} u^{ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[p/e]} \longrightarrow 0\,.$$

Il suffit donc de prouver que $H^{i-1}(u^{ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[p/e]}) = 0$. Par le même argument que celui utilisé dans la preuve de la proposition 3.1.11, on montre que $H^j(u^{ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[p/e]}) = H^j(\tilde{\mathcal{J}}^{[i+p/e]})$ pour tout $j \leqslant \frac{p}{e}$ et donc *a fortiori* pour tout $j \leqslant i$. Posons $q = i + \frac{p}{e}$ et notons s la partie entière de q. On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \longrightarrow 0\,.$$

Étale-localement, on peut relever X_1 et un log-schéma Y_1 log-lisse (auquel on étend les puissances divisées) sur $\tilde{E}$. Par les théorèmes 3.1.3 et 3.1.5, la flèche $R\alpha_\star\tilde{\mathcal{J}}^{[s]} \to R\alpha_\star(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q]})$ s'écrit explicitement :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J}_{Y_1}^{[s]} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{J}_{Y_1}^{[s-1]} \otimes_{\mathcal{O}_{X_1}} \omega^1_{Y_1/\tilde{E}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{J}_{Y_1}^{[s-2]} \otimes_{\mathcal{O}_{X_1}} \omega^2_{Y_1/\tilde{E}} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\frac{\mathcal{J}_{Y_1}^{[s]}/\mathcal{J}_{Y_1}^{[s+1]}}{u^\delta(\mathcal{J}_{Y_1}^{[s]}/\mathcal{J}_{Y_1}^{[s+1]})} \arrow[r] & \frac{\mathcal{J}_{Y_1}^{[s-1]}/\mathcal{J}_{Y_1}^{[s]}}{u^\delta(\mathcal{J}_{Y_1}^{[s-1]}/\mathcal{J}_{Y_1}^{[s]})} \otimes_{\mathcal{O}_{X_1}} \omega^1_{Y_1/\tilde{E}} \arrow[r] & \frac{\mathcal{J}_{Y_1}^{[s-2]}/\mathcal{J}_{Y_1}^{[s-1]}}{u^\delta(\mathcal{J}_{Y_1}^{[s-2]}/\mathcal{J}_{Y_1}^{[s-1]})} \otimes_{\mathcal{O}_{X_1}} \omega^2_{Y_1/\tilde{E}} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où δ est le reste de la division euclidienne de p par e. Or, si $j < i$, on a $s - j \geqslant \frac{p}{e}$ et donc $\gamma_{s-j}(u) = 0$. Il s'ensuit $\mathcal{J}_{Y_1}^{[s-j]} = 0$. On montre de même que $\mathcal{J}_{Y_1}^{[s-i]}$ est tué par u^δ. Ainsi $H^j(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}) = H^j(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) = 0$ pour $j < i$ et la flèche $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}) \to H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q]})$ est un isomorphisme. La nullité de $H^{i-1}(u^{ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[p/e]})$ (et donc le lemme) résulte alors d'une écriture de la suite exacte longue associée à la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \longrightarrow 0\,.$$

□

Proposition 3.1.13. *Pour tout i et $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$ tels que $q \leqslant i \leqslant r$, l'application $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) \to H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]})$ est injective.*

Démonstration. Si $p = 2$, on a nécessairement $q = i = r = 0$ et le résultat est évident. Supposons donc $p \geqslant 3$.

On raisonne par récurrence descendante sur q. Le résultat est trivial pour $q = i$. Supposons-le vrai pour un certain q et démontrons-le pour $q - \frac{1}{e}$. On vérifie facilement que l'on a des suites exactes courtes de faisceaux :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & u^{ei}\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tilde{\mathcal{J}}^{[i]} \arrow[r, "u^{p-ei}"] \arrow[d] & u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[i]} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & u^{ei}\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}} \arrow[r] & \tilde{\mathcal{J}}^{[q-1/e]} \arrow[r, "u^{p-ei}"] & u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[q-1/e]} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

qui donnent lieu à de nouvelles suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & H^i(u^{ei}\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^i(u^{ei}\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}) \arrow[r] & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q-1/e]}) \arrow[r] & H^i(u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[q-1/e]})
\end{tikzcd}$$

La deuxième suite est exacte à gauche car la flèche composée $H^i(u^{ei}\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}) \to H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q-1/e]}) \to H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}})$ est injective (voir preuve de la proposition 3.1.7). On veut montrer que la flèche verticale du milieu est injective, et une chasse au diagramme laissée au lecteur assure que pour cela, il suffit de prouver que la flèche verticale de droite l'est.

Or, on peut former le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^i(u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) \arrow[r] \arrow[dd] & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[p/e]}) \arrow[d] \\
 & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) \arrow[d] \\
H^i(u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[q-1/e]}) \arrow[r] & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]})
\end{tikzcd}$$

La flèche du haut est injective d'après le lemme 3.1.12 et celles de droite le sont également respectivement d'après la proposition 3.1.11 et l'hypothèse de récurrence. On en déduit que celle de gauche l'est aussi comme on le souhaitait. $\square$

On a finalement le théorème :

Théorème 3.1.14. *Pour tout $i \leqslant r$, le quadruplet $(H^i((X_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{O}}^{st}), H^i((X_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}), \phi_r, N)$ définit un objet de la catégorie $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r$.*

Démonstration. Il restait à prouver la surjectivité de $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \to H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\mathcal{J}^{[r+1/e]})$ et l'injectivité de $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \to H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}})$. Le premier point est une conséquence immédiate de la proposition

3.1.11. Pour le second point, on remarque que le morphisme $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \to H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}})$ se factorise par $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \to H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) \to H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}})$. La première des deux flèches précédentes est injective par la proposition 3.1.11 et la seconde est aussi injective par la proposition 3.1.13. Ceci clôt la démonstration. □

3.1.4 Reformulation sur la base E_1

On montre dans ce paragraphe que le quadruplet :

$$(H^i((X_1)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}), H^i((X_1)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N)$$

est un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ pour tout $i \leqslant r$. Pour cela, on commence par recopier à la lettre les arguments des paragraphes 3.1.2 et 3.1.3 pour obtenir un équivalent du théorème 3.1.6 qui s'énonce comme suit :

Théorème 3.1.15. *Pour $0 \leqslant i \leqslant s \leqslant p-1$ (et seulement pour $i = s = 0$ si $p = 2$), on a un isomorphisme :*

$$S_1 \otimes_{(\phi),k[u]/u^e} H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1]}) \xrightarrow[id\otimes\phi_s]{\sim} H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_1^{st}) \ .$$

Dans un premier temps, il nous faut montrer que $H^i((X_1)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}})$ est un S_1-module libre et pour cela il suffit de prouver que $H^i((X_1)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]})$ est un $k[u]/u^e$-module libre par le théorème 3.1.15. C'est évident si $e = 1$. *À partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette partie, on suppose $e \geqslant 2$.*

Dans ce cas, on est tenté de comparer les deux faisceaux $\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]}$ et $\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+1]}$ puisque la version « ˜ » a déjà été étudiée. Cependant, en regardant les descriptions explicites, on se rend compte qu'il n'est pas vrai en général que ces deux faisceaux sont isomorphes ; c'est le cas simplement lorsque $er \leqslant p - e$.

La solution consiste à introduire une nouvelle catégorie d'objets modulo u^{2p} et à procéder en deux étapes : on passe des objets modulo u^p aux objets modulo u^{2p} puis de ces derniers aux objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Les objets modulo u^{2p} On rappelle que tout au long de ce paragraphe, on suppose $e \geqslant 2$.

On introduit une nouvelle catégorie, notée $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(2)}$ dont la définition est très proche des autres catégories déjà introduites. On pose $\tilde{S}_{(2)} = k\,[u]\,/u^{2p}$. C'est un anneau muni d'un Frobenius ϕ semi-linéaire envoyant u^i sur u^{pi} et d'un opérateur de monodromie N k-linéaire envoyant u^i sur $-iu^i$. Un objet de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(2)}$ est la donnée de :

1. un $\tilde{S}_{(2)}$-module $\tilde{\mathcal{M}}$ libre de rang fini ;
2. un sous-module $\mathrm{Fil}^r\tilde{\mathcal{M}}$ de $\tilde{\mathcal{M}}$ contenant $u^{er}\tilde{\mathcal{M}}$;
3. une flèche ϕ-semi-linéaire $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\tilde{\mathcal{M}} \to \tilde{\mathcal{M}}$ telle que l'image de ϕ_r engendre $\tilde{\mathcal{M}}$ en tant que $\tilde{S}_{(2)}$-module ;

4. une application k-linéaire $N : \tilde{\mathcal{M}} \to \tilde{\mathcal{M}}$ telle que :
   – pour tout $\lambda \in \tilde{S}_{(2)}$ et tout $x \in \tilde{\mathcal{M}}$, $N(\lambda x) = N(\lambda)\, x + \lambda N(x)$
   – $u^e N(\mathrm{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}) \subset \mathrm{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$
   – le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "u^e N"'] & \tilde{\mathcal{M}} \arrow[d, "c_{(2),\pi} N"] \\ \mathrm{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} \arrow[r, "\phi_r"] & \tilde{\mathcal{M}} \end{tikzcd}$$

   où $c_{(2),\pi}$ est la réduction de c dans $\tilde{S}_{(2)}$.

Les morphismes de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(2)}$ sont les applications $\tilde{S}_{(2)}$-linéaires qui commutent à toutes les structures.

On prouve comme dans le paragraphe 1.2 que les catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$, $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(2)}$ et $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r$ sont toutes les trois équivalentes *via* les foncteurs de réduction modulo u^{2p} et modulo u^p.

Pour tout rationnel $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, on définit sur le site $(T_1)_{\mathrm{SYN}}$ un faisceau $\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(2)}$ par la formule :

$$\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(2)} = \frac{\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}}{\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \cap u^{2p} \tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}}.$$

On définit également $\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(2)} = \tilde{\mathcal{J}}^{[0]}_{(2)}$. Finalement, on vérifie que les applications ϕ_s et N passent au quotient et définissent des opérateurs encore notés ϕ_s et N sur ces nouveaux faisceaux.

Remarque. On peut vérifier que si l'on note $\tilde{E}_{(2)}$ la réduction de la base E_1 modulo u^{2p}, on a :

$$\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}_{(2)}(U) = H^0((U/\tilde{E}_{(2)})_{\mathrm{cris}}, \mathcal{J}^{[s]}_{U/\tilde{E}_{(2)}}) = H^0((U/\tilde{E}_{(2)})_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{J}^{[s]}_{U/\tilde{E}_{(2)}})$$

pour tout entier s et tout log-schéma U fin et localement de type fini sur T_1. En outre, on a également :

$$H^i(X_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}^{[s]}_{(2)}) = H^i(X_{\mathrm{SYN}}, \mathcal{J}^{[s]}_{(2)}) = H^i((X/\tilde{E}_{(2)})_{\mathrm{cris}}, \mathcal{J}^{[s]}_{X/\tilde{E}_{(2)}}) = H^i((X/\tilde{E}_{(2)})_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{J}^{[s]}_{X/\tilde{E}_{(2)}})$$

pour tout entier i et tout log-schéma X fin localement de type fini sur E_n. On a également la relation $\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(2)} = u^\delta \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}_{(2)} + \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}_{(2)}$ si $eq = es + \delta$ est la division euclidienne de eq par e.

Il est alors possible, de manière analogue à ce que nous avons fait dans le paragraphe 2.3, de donner des descriptions locales très explicites des faisceaux précédents. On retiendra simplement un équivalent de la proposition 2.3.4 :

Proposition 3.1.16. *Supposons $r > 0$. Sur le site $(T_1)_{syn}$ les projections canoniques induisent des isomorphismes de faisceaux :*

$$\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}_{(2)} / \tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]}_{(2)} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{J}}^{[r]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]} \quad \textit{et} \quad \mathcal{J}^{[r]}_1 / \mathcal{J}^{[r+1]}_1 \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}_{(2)} / \tilde{\mathcal{J}}^{[r+1]}_{(2)} .$$

Démonstration. Elle est tout à fait analogue à celle de la proposition 2.3.4. Remarquons cependant que l'hypothèse $er \leqslant p - 2$ est cruciale pour le premier isomorphisme. Le second, quant à lui, utilise la majoration moins fine (car on a supposé $r > 0$) $er + e \leqslant 2p$. $\square$

Un objet de la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(2)}$ Nous nous proposons de prouver, ici, que le quadruplet :

$$(H^i((X_1)_{\mathrm{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(2)}), H^i((X_1)_{\mathrm{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}_{(2)}), \phi_r, N)$$

est un objet de la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(2)}$. *On suppose à partir de maintenant que* $r > 0$.

On recopie encore une fois les arguments des paragraphes 3.1.2 et 3.1.3 afin obtenir le théorème suivant :

Théorème 3.1.17. *Pour* $0 \leqslant i \leqslant s \leqslant \frac{2p-2}{e}$ *(pour* $i = s = 0$ *si* $p = 2$*), on a un isomorphisme :*

$$\tilde{S}_{(2)} \otimes_{(\phi),k[u]/u^2} H^i((X_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}_{(2)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+2/e]}_{(2)}) \xrightarrow[id\otimes\phi_s]{\sim} H^i((X_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{O}}^{st}_{(2)}) .$$

Comme précédemment, pour simplifier, si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur $(X_1)_{\mathrm{syn}}$, on note $H^i(\mathcal{F})$ pour $H^i((X_1)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{F})$ et si cet espace est de dimension finie sur k, on note $h^i(\mathcal{F})$ sa dimension. On a alors :

Théorème 3.1.18. *Pour tout* $i \leqslant r$*, le groupe de cohomologie* $H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{st}_{(2)})$ *est libre de rang fini sur* $\tilde{S}_{(2)}$.

Démonstration. D'après le théorème 3.1.17, il suffit de montrer que $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}_{(2)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]}_{(2)})$ est libre de rang fini sur $k[u]/u^2$. Or on a un isomorphisme $\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}_{(2)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]}_{(2)} \simeq \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]}$ (proposition 3.1.16). Il suffit donc de prouver que $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]})$ est libre de rang fini sur $k[u]/u^2$.

Notons $\mathcal{M} = H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}})$, c'est un $k[u]/u^p$-module libre de rang fini, disons d, d'après le théorème 3.1.14. Pour tout $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, $q \geqslant r$, le morphisme $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) \to \mathcal{M}$ est injectif d'après les propositions 3.1.11 et 3.1.13. Notons $\mathrm{Fil}^q\mathcal{M}$ son image. On obtient ainsi une suite décroissante de sous-$\tilde{S}$-modules de $\mathcal{M}$.

Puisque la multiplication par u se factorise par $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \to \mathrm{Fil}^{r+1/e}\mathcal{M} \to \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$, on a $u\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \subset \mathrm{Fil}^{r+1/e}\mathcal{M}$. Par ailleurs, à nouveau la proposition 3.1.11 nous dit que le quotient $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}/\mathrm{Fil}^{r+1/e}\mathcal{M}$ est un k-espace vectoriel de dimension d. Or il en est de même de $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}/u\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$. Il en résulte que les k-espaces vectoriels $\mathrm{Fil}^{r+1/e}\mathcal{M}$ et $u\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ ont même dimension. L'inclusion trouvée précédemment prouve alors qu'ils sont égaux.

De même en remplaçant r par $r + 1/e$ (et en vérifiant que la proposition 3.1.11 s'applique encore), on obtient $\mathrm{Fil}^{r+2/e}\mathcal{M} = u\mathrm{Fil}^{r+1/e}\mathcal{M} = u^2\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$. L'inégalité $er \leqslant p-2$ et l'inclusion $u^{er}\mathcal{M} \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ assurent que le quotient $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}/\mathrm{Fil}^{r+2/e}\mathcal{M} = \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}/u^2\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ est libre de rang d sur $k[u]/u^2$.

Par ailleurs, on a une suite exacte longue :

$$H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]}) \longrightarrow H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]}) \longrightarrow H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]})$$

et d'après la proposition 3.1.11 les première et dernière flèches sont injectives. On en déduit que $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]})$ s'identifie au quotient $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}/\mathrm{Fil}^{r+2/e}\mathcal{M}$ et donc qu'il est libre de rang fini sur $k[u]/u^2$. □

Remarque. La preuve précédente implique en outre que $h^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(2)}) = ph^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) = 2ph^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r+1/e]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) = 2ph^i(\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}})$.

Avec cette dernière égalité, on peut refaire la démonstration de la proposition 3.1.7 et obtenir ainsi :

Proposition 3.1.19. *Pour tous entiers k et $i < \frac{2p}{e}$ (on impose $i = 0$ si $p = e = 2$), on a $H^i(u^k\tilde{\mathcal{O}}^{st}_{(2)}) = u^k H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{st}_{(2)})$.*

Sans surprise, on dispose d'un analogue de la proposition 3.1.11 dans cette nouvelle situation :

Proposition 3.1.20. *Soient i un entier et $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$ vérifiant $0 \leqslant i \leqslant q < E(\frac{p}{e}) + 1$ (et $i = q = 0$ si $p = 2$ et $e = 1$) où $E(\frac{p}{e})$ désigne la partie entière de $\frac{p}{e}$. On a des suites exactes courtes :*

$$0 \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}_{(2)}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(2)}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(2)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}_{(2)}) \longrightarrow 0\,.$$

En outre, si s désigne la partie entière de q, on a également un début de suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^{s+1}(\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}_{(2)}) \longrightarrow H^{s+1}(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(2)}) \longrightarrow H^{s+1}(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(2)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}_{(2)})\,.$$

Démonstration. La démonstration est très proche de celle de la proposition 3.1.11.

On commence par remarquer que puisque $r > 0$, on a $e \leqslant p - 2$ et $E(\frac{p}{e}) + 1 \leqslant \frac{2p-2}{e}$. Cela implique que si s désigne la partie entière de q, on a les identifications $\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(2)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}_{(2)} \simeq \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}_{(2)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}_{(2)} \simeq \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}$. Ainsi, on obtient $h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(2)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}_{(2)}) = h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}) = h^i(\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}})$ pour tout entier i. (La dernière égalité résulte du théorème 3.1.6.)

Par ailleurs, une adaptation simple du lemme 3.1.10 fournit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^i(\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(2)}) \xrightarrow{u} H^i(u\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(2)}) \longrightarrow 0$$

et donc l'égalité $h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(2)}) = h^i(u\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(2)}) + h^i(\bar{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}})$. De même en adaptant le lemme 3.1.8, on obtient la suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow u\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(2)} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}_{(2)} \longrightarrow \bar{\mathcal{J}}^{[s+1]} \longrightarrow 0$$

et puisque $R\alpha_\star\bar{\mathcal{J}}^{[s+1]} = 0 \to \cdots \to 0 \to \omega^{s+1}_{\bar{X}/\bar{E}} \to \omega^{s+2}_{\bar{X}/\bar{E}} \to \cdots$, on a $H^j(\bar{\mathcal{J}}^{[s+1]}) = 0$ pour tout $j \leqslant s$ puis $H^i(u\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}) = H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]})$. En particulier $h^i(u\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}) = h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]})$ d'où il vient $h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(2)}) = h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}_{(2)}) + h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(2)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}_{(2)})$. On termine alors la démonstration en raisonnant par récurrence sur i. $\square$

On a finalement la proposition :

Proposition 3.1.21. *Pour tout $i \leqslant r$, l'application $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}_{(2)}) \to H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{st}_{(2)})$ est injective.*

Démonstration. Il est possible d'adapter la démonstration de la proposition 3.1.13, mais nous pouvons également déduire l'énoncé de la proposition 3.1.13. En effet, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & H^i(u^p\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(2)}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}_{(2)}) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & H^i(u^p\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(2)}) \arrow[r] & H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(2)}) \arrow[r] & H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

et la suite du bas est exacte d'après la proposition 3.1.19 (notez que la multiplication par u^p sur $\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(2)}$ identifie $\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}$ et $u^p\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(2)}$). Par la proposition 3.1.13, la flèche verticale de droite est injective. On vérifie facilement qu'il en est alors forcément de même de la flèche verticale centrale. D'où la proposition. $\square$

On en déduit finalement le théorème :

Théorème 3.1.22. *Pour tout $i \leqslant r$, le quadruplet $(H^i((X_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{O}}^{st}_{(2)}), H^i((X_1)_{syn}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}_{(2)}), \phi_r, N)$ définit un objet de la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(2)}$.*

Un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ On veut ici enfin prouver que $(H^i(\mathcal{O}^{\mathrm{st}}_1), H^i(\mathcal{J}^{[r]}_1), \phi_r, N)$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ pour tout $i \leqslant r$. Pour cela, on reprend à nouveau les arguments précédents.

On commence par prouver que $H^i(\mathcal{O}^{\mathrm{st}}_1)$ est un module libre (de rang fini) sur S_1. D'après le théorème 3.1.15, il suffit de prouver que $H^i(\mathcal{J}^{[r]}_1/\mathcal{J}^{[r+1]}_1)$ est libre sur $k[u]/u^e$. Or le faisceau $\mathcal{J}^{[r]}_1/\mathcal{J}^{[r+1]}_1$ s'identifie à $\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}_{(2)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+1]}_{(2)}$ (proposition 3.1.16) et il suffit donc de prouver que $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}_{(2)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+1]}_{(2)})$ est libre de rang fini sur $k[u]/u^e$. Pour cela, on adapte facilement les arguments de la preuve du théorème 3.1.18 en remplaçant les références aux propositions 3.1.11 et 3.1.13 respectivement par des références aux proposition 3.1.20 et 3.1.21.

Lemme 3.1.23. *Pour tous entiers i et s tels que $0 \leqslant i \leqslant s < \frac{p}{e}$, la flèche $H^i(\mathcal{J}^{[s]}_1) \to H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}_{(2)})$ est surjective.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur s. Pour le cas $s = 0$, on a les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} H^i(\mathcal{O}^{\mathrm{st}}_1) &\simeq S_1 \otimes_{(\phi),k[u]/u^e} H^i(\mathcal{J}^{[i]}_1/\mathcal{J}^{[i+1]}_1) \\ H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(2)}) &\simeq \tilde{S}_{(2)} \otimes_{(\phi),k[u]/u^2} H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}_{(2)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[i+2/e]}_{(2)}). \end{aligned}$$

On vérifie que la flèche $H^i(\mathcal{O}^{\mathrm{st}}_1) \to H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(2)})$ s'obtient à partir de la projection $S_1 \to \tilde{S}_{(2)}$ et le morphisme naturel $H^i(\mathcal{J}^{[i]}_1/\mathcal{J}^{[i+1]}_1) \to H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}_{(2)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[i+2/e]}_{(2)})$. Il suffit donc de prouver que ce dernier morphisme est surjectif. Or, d'une part, le faisceau $\mathcal{J}^{[i]}_1/\mathcal{J}^{[i+1]}_1$ s'identifie à $\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}_{(2)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[i+1]}_{(2)}$ (proposition 3.1.16) et, d'autre part, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[i+1]}_{(2)}) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}_{(2)}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}_{(2)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[i+1]}_{(2)}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[i+2/e]}_{(2)}) \arrow[r] & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}_{(2)}) \arrow[r] & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}_{(2)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[i+2/e]}_{(2)}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes : l'injectivité provient de la proposition 3.1.20 et la surjectivité provient de l'injectivité analogue sur les H^{i+1} (toujours conséquence de la même proposition). On en déduit directement la surjectivité de la flèche verticale de droite, ce qui conclut le cas $s = 0$.

On procède ensuite par récurrence sur s. On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[s+1]}) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[s]}) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[s+1]}) \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[s+1]}) \arrow[r] & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[s]}) \arrow[r] & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[s+1]}) \end{tikzcd}$$

La flèche verticale de droite est un isomorphisme par la proposition 3.1.16. La flèche verticale du milieu est surjective par hypothèse de récurrence. Une chasse au diagramme prouve facilement que la flèche verticale de gauche est aussi surjective, ce qui conclut. □

Remarque. Le lemme est également vrai pour $s \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, $0 \leqslant i \leqslant s < E(\frac{p}{e}) + 1$. Ce raffinement se démontre de manière analogue en choisissant un pas de $\frac{1}{e}$ (au lieu de 1) dans la récurrence.

On parvient finalement au but de tout ce paragraphe :

Théorème 3.1.24. *Pour tout $i \leqslant r$, le quadruplet $(H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{O}_1^{st}), H^i((X_1)_{syn}, \mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N)$ définit un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$.*

Démonstration. Comme précédemment, il ne reste plus qu'à prouver que la flèche $H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) \to H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]})$ est surjective et que la flèche $H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) \to H^i(\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}})$ est injective.

Pour le premier point, on considère le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]}) \arrow[d] \\ H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}) \arrow[r] & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r+1]}) \end{tikzcd}$$

La flèche de droite est un isomorphisme (proposition 3.1.16). La flèche de gauche est surjective (lemme 3.1.23), et celle du bas l'est également (proposition 3.1.20). On en déduit que celle du haut l'est aussi.

Pour le second point, on reprend les arguments de la preuve de la proposition 3.1.21. On raisonne à partir du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{J}_1^{[r]} \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}} \arrow[r] & \tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\mathrm{st}} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où $K = u^p \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$ et où les deux suites horizontales sont exactes. Il donne lieu à un nouveau diagramme :

$$\begin{tikzcd} & H^i(K) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & H^i(K) \arrow[r] & H^i(\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}) \arrow[r] & H^i(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\mathrm{st}}) \end{tikzcd}$$

La suite du bas est exacte à gauche car, par le lemme 3.1.23, la flèche $H^{i-1}(\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}) \to H^{i-1}(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\mathrm{st}})$ est surjective. Mais la flèche verticale de droite est injective (proposition 3.1.21). On en déduit que la flèche verticale du milieu l'est également. Ceci termine la preuve. $\square$

3.1.5 Le cas $r = 0$

Lorsque $r = 0$, la condition $er \leqslant p - 2$ est automatique et n'impose aucune borne sur e. Pour obtenir le théorème 3.1.24, dans ce cas, on a besoin d'introduire plus de catégories-étapes.

Plan de la preuve On reprend les constructions du début du paragraphe 3.1.4 en remplaçant « (2) » par « (t) ».

Pour tout entier $1 \leqslant t \leqslant e$, on commence par définir une catégorie $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r_{(t)}$ d'objets modulo u^{tp}. On considère pour cela l'anneau $\tilde{S}_{(t)} = k\,[u]\,/u^{tp}$ que l'on munit d'un Frobenius ϕ semi-linéaire envoyant u^i sur u^{pi} et d'un opérateur de monodromie k-linéaire envoyant u^i sur $-iu^i$. Un objet de $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r_{(t)}$ est la donnée de :

1. un $\tilde{S}_{(t)}$-module $\tilde{\mathcal{M}}$ libre de rang fini ;
2. un sous-module $\mathrm{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$ de $\tilde{\mathcal{M}}$ contenant $u^{er} \tilde{\mathcal{M}}$;
3. une flèche ϕ-semi-linéaire $\phi_r : \mathrm{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} \to \tilde{\mathcal{M}}$ telle que l'image de ϕ_r engendre $\tilde{\mathcal{M}}$ en tant que $\tilde{S}_{(t)}$-module ;
4. une application k-linéaire $N : \tilde{\mathcal{M}} \to \tilde{\mathcal{M}}$ telle que :
   - pour tout $\lambda \in \tilde{S}_{(t)}$ et tout $x \in \tilde{\mathcal{M}}$, $N(\lambda x) = N(\lambda)\,x + \lambda N(x)$
   - $u^e N(\mathrm{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}) \subset \mathrm{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$
   - le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "u^e N"'] & \tilde{\mathcal{M}} \arrow[d, "c_{(t),\pi} N"] \\ \mathrm{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} \arrow[r, "\phi_r"] & \tilde{\mathcal{M}} \end{tikzcd}$$

   où $c_{(t),\pi}$ est la réduction de c dans $\tilde{S}_{(t)}$.

Les morphismes de $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r_{(t)}$ sont les applications $\tilde{S}_{(t)}$-linéaires qui commutent à toutes les structures. On prouve comme dans le paragraphe 1.2 que les catégories $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^r_{(t)}$ sont toutes équivalentes à $\underline{\mathcal{M}}^r$ *via* les foncteurs de réduction modulo u^{tp}.

D'autre part, pour tout rationnel $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, on définit sur le site $(T_1)_{\mathrm{SYN}}$ un faisceau $\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(t)}$ par :

$$\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(t)} = \frac{\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}}{\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \cap u^{tp}\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}}.$$

On pose $\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(t)} = \tilde{\mathcal{J}}^{[0]}_{(t)}$ et on vérifie que les applications ϕ_s et N passent au quotient et définissent des opérateurs encore notés ϕ_s et N sur ces nouveaux faisceaux.

On va prouver par récurrence sur t la proposition suivante (on rappelle qu'ici $r = 0$) :

Proposition 3.1.25. *Pour tout $t \leqslant e$, le quadruplet $(H^0(\tilde{\mathcal{O}}^{st}_{(t)}), H^0(\tilde{\mathcal{O}}^{st}_{(t)}), \phi_0, N)$ définit un objet de la catégorie $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^0_{(t)}$ et la suite :*

$$0 \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}_{(t)}) \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(t)}) \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(t)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}_{(t)}) \longrightarrow 0$$

est exacte pour $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, $q \leqslant \frac{t}{e}$.

On déduira ensuite du cas $t = e$ un équivalent du théorème 3.1.24 à savoir :

Théorème 3.1.26. *Le quadruplet $(H^0(\mathcal{O}^{st}_1), H^0(\mathcal{O}^{st}_1), \phi_0, N)$ définit un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^0$.*

La récurrence Le but de cette sous-partie est de prouver la proposition 3.1.25. Pour cela, comme nous l'avons déjà dit, on raisonne par récurrence sur t et on suit pas à pas la démonstration de la partie *Un objet de la catégorie* $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}^r_{(2)}$ du paragraphe 3.1.4. On redonne rapidement les grandes étapes.

On considère un entier t compris entre 2 et e. Les compatibilités entre les opérateurs ne posant pas de problème, il suffit de montrer que $H^0(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(t)})$ est libre de rang fini sur $\tilde{S}_{(t)}$ et que l'image de ϕ_0 engendre tout $H^0(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(t)})$. Or comme précédemment, on dispose du théorème suivant :

Théorème 3.1.27. *Avec les notations précédentes, on a un isomorphisme :*

$$\tilde{S}_{(t)} \otimes_{(\phi),k[u]/u^t} H^0(\tilde{\mathcal{O}}^{st}_{(t)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[t/e]}_{(t)}) \xrightarrow[id\otimes\phi_0]{\sim} H^0(\tilde{\mathcal{O}}^{st}_{(t)}) .$$

Il suffit donc de prouver que $H^0(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(t)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[t/e]}_{(t)})$ est libre de rang fini sur $k[u]/u^t$ et que la suite :

$$0 \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}_{(t)}) \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(t)}) \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(t)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}_{(t)}) \longrightarrow 0$$

est exacte pour $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, $q \leqslant t$. (On remarque que seule la surjectivité n'est *a priori* pas claire).

On dispose d'un équivalent de la proposition 3.1.16 qui se démontre de façon tout à fait analogue :

Proposition 3.1.28. *Sur le site $(T_1)_{syn}$ la projection canonique induit un isomorphisme de faisceaux :*

$$\tilde{\mathcal{O}}^{st}_{(t)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[t/e]}_{(t)} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{O}}^{st}_{(t-1)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[t/e]}_{(t-1)} .$$

Remarque. Pour la preuve de la proposition précédente, on utilise l'inégalité $t \leqslant p(t-1)$ qui est bien vérifiée lorsque $t \geqslant 2$.

Lemme 3.1.29. *Le module $H^0(\tilde{\mathcal{O}}^{st}_{(t)})$ est libre de rang fini sur $\tilde{S}_{(t)}$.*

Démonstration. Elle est assez semblable à la preuve du théorème 3.1.18.

Il suffit de démontrer que $H^0(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(t)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[t/e]}_{(t)})$ est libre sur $k[u]/u^t$. Par ailleurs d'après la proposition précédente, le faisceau $\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(t)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[t/e]}_{(t)}$ s'identifie à $\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(t-1)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[t/e]}_{(t-1)}$.

On utilise à ce niveau l'hypothèse de récurrence qui assure que $\mathcal{M} = H^0(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(t-1)})$ muni de ses structures supplémentaires est un objet de $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}^0_{(t-1)}$. C'est en particulier un $\tilde{S}_{(t-1)}$-module libre de rang fini, disons d. Notons, pour $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, $\mathrm{Fil}^q\mathcal{M} = H^0(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(t-1)})$. Ils forment une suite décroissante de sous-$\tilde{S}_{(t-1)}$-modules de $\mathcal{M}$.

Par ailleurs, on a $u\mathcal{M} \subset \mathrm{Fil}^{1/e}\mathcal{M}$, et encore l'hypothèse de récurrence fournit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Fil}^{1/e}\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(t-1)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[1/e]}_{(t-1)}) \longrightarrow 0 .$$

Par ailleurs on vérifie que pour tout $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, $q < \frac{t}{e}$, la multiplication par u^q induit un isomorphisme entre les faisceaux $\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(t-1)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[1/e]}_{(t-1)}$ et $\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(t-1)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}_{(t-1)}$. On en déduit :

$$\dim_k H^0(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(t-1)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[1/e]}_{(t-1)}) = \frac{1}{t}\dim_k H^0(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(t-1)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[t/e]}_{(t-1)}) = d$$

la dernière égalité étant une conséquence du théorème 3.1.27 appliqué pour $t-1$. D'autre part, $\dim_k(\mathcal{M}/u\mathcal{M}) = d$ d'où il vient $\mathrm{Fil}^{1/e}\mathcal{M} = u\mathcal{M}$. On montre de même par récurrence que $\mathrm{Fil}^q\mathcal{M} = u^{eq}\mathcal{M}$ pour tout $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, $q \leqslant \frac{t}{e}$.

Finalement, on a une suite exacte longue :

$$0 \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{J}}^{[t/e]}_{(t-1)}) \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(t-1)}) \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(t-1)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[t/e]}_{(t-1)}) \longrightarrow H^1(\tilde{\mathcal{J}}^{[t/e]}_{(t-1)}) \longrightarrow H^1(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(t-1)}) .$$

D'après l'hypothèse de récurrence, toutes les flèches $H^1(\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}_{(t-1)}) \to H^1(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}_{(t-1)})$ sont injectives pour $q \leqslant \frac{t-1}{e}$ et donc la flèche $H^1(\tilde{\mathcal{J}}^{[t/e]}_{(t-1)}) \to H^1(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(t-1)})$ l'est aussi. On en déduit que $H^0(\tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{st}}_{(t-1)}/\tilde{\mathcal{J}}^{[t/e]}_{(t-1)})$ s'identifie à $\mathcal{M}/\mathrm{Fil}^{t/e}\mathcal{M} = \mathcal{M}/u^t\mathcal{M}$ qui est un bien un $k[u]/u^t$-module libre de rang fini (en l'occurrence d). □

Les propositions 3.1.19 et 3.1.20 ont des équivalents transparents dans ce nouveau contexte qui se démontrent de façon analogue. On conclut comme cela la récurrence.

La fin de la preuve Pour déduire le théorème 3.1.26 du cas $t = e$ de la proposition 3.1.25, on dégage tout d'abord le lemme suivant (preuve analogue à celle de la proposition 2.3.4) :

Lemme 3.1.30. *Sur le site $(T_1)_{syn}$ la projection canonique induit un isomorphisme de faisceaux :*

$$\mathcal{O}_1^{st}/\mathcal{J}_1^{[1]} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{O}}_{(e)}^{st}/\tilde{\mathcal{J}}_{(e)}^{[1]}.$$

En combinant ce précédent lemme au théorème 3.1.15, on prouve la liberté sur S_1 de $H^0(\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}})$. Par suite, on démontre que la flèche $H^0(\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}) \to H^0(\tilde{\mathcal{O}}_{(e)}^{\mathrm{st}})$ est surjective en utilisant les mêmes arguments que ceux présentés dans l'étape d'initialisation de la récurrence du lemme 3.1.23. Finalement, en recopiant la première partie de la preuve du théorème 3.1.24, on parvient à prouver la surjectivité du morphisme $H^0(\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}) \to H^0(\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}/\mathcal{J}_1^{[1]})$. Cela conclut la preuve du théorème 3.1.26.

3.2 Dévissages

Le but de cette partie est de déduire à partir du cas $n = 1$ traité précédemment le cas n quelconque. Exactement, si X_n désigne un log-schéma propre et log-lisse sur T_n, et que $X_1 = X_n \times_{T_n} T_1$ est du type de Cartier (si $n = 1$, on suppose en outre que X_1 admet un relèvement propre et log-lisse sur T_2), nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.2.1. *Pour tout $i < r$ et tout entier n, le quadruplet :*

$$(H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st}), H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N)$$

définit un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Remarque. On rappelle que le morphisme ϕ_r n'est pas défini sur $(X_n)_{\mathrm{syn}}$ mais seulement sur $(X_{n+r})_{\mathrm{syn}}$ mais que cela n'est pas grave du fait des identifications canoniques $H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}) \simeq H^i((X_{n+r})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}})$ et $H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]}) \simeq H^i((X_{n+r})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]})$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. L'initialisation est donnée par le théorème 3.1.24. Pour l'hérédité, on considère les suites exactes courtes suivantes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_1^{[r]} \xrightarrow{p^n} \mathcal{J}_{n+1}^{[r]} \longrightarrow \mathcal{J}_n^{[r]} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}} \xrightarrow{p^n} \mathcal{O}_{n+1}^{\mathrm{st}} \longrightarrow \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}} \longrightarrow 0.$$

Elles fournissent deux suites exactes longues de cohomologie qui s'insèrent dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^{i-1}(\mathcal{J}_n^{[r]}) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_r"'] & H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_r"'] & H^i(\mathcal{J}_{n+1}^{[r]}) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_r"'] & H^i(\mathcal{J}_n^{[r]}) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_r"'] & H^{i+1}(\mathcal{J}_1^{[r]}) \arrow[d, "\phi_r"'] \\
H^{i-1}(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}) \arrow[r] & H^i(\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}) \arrow[r] & H^i(\mathcal{O}_{n+1}^{\mathrm{st}}) \arrow[r] & H^i(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}) \arrow[r] & H^{i+1}(\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}})
\end{tikzcd}$$

où tous les groupes de cohomologie sont calculés sur le site $(X_n)_{\text{syn}}$. Par hypothèse de récurrence, les deux quadruplets $(H^{i-1}(\mathcal{O}_n^{\text{st}}), H^{i-1}(\mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N)$ et $(H^i(\mathcal{O}_1^{\text{st}}), H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N)$ sont des objets de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$. Comme celle-ci est abélienne, il en est de même de leur image que l'on note $(\mathcal{M}', \text{Fil}^r\mathcal{M}', \phi_r, N)$. De même, les deux quadruplets $(H^i(\mathcal{O}_n^{\text{st}}), H^i(\mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N)$ et $(H^{i+1}(\mathcal{O}_1^{\text{st}}), H^{i+1}(\mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N)$ sont des objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$, le premier en vertu de l'hypothèse de récurrence et le second par le théorème 3.1.24. Leur noyau $(\mathcal{M}'', \text{Fil}^r\mathcal{M}'', \phi_r, N)$ est donc aussi objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$.

En outre, on dispose d'un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \text{Fil}^r\mathcal{M}' \arrow[r] \arrow[d, "\phi_r"'] & H^i(\mathcal{J}_{n+1}^{[r]}) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_r"'] & \text{Fil}^r\mathcal{M}'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi_r"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{M}' \arrow[r] & H^i(\mathcal{O}_{n+1}^{\text{st}}) \arrow[r] & \mathcal{M}'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les deux lignes horizontales sont exactes. Une adaptation directe du lemme 2.3.1.2 de [Bre98] entraîne alors que $(H^i(\mathcal{O}_{n+1}^{\text{st}}), H^i(\mathcal{J}_{n+1}^{[r]}), \phi_r, N)$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, ce qui achève la récurrence. $\square$

Remarque. Il est fort probable que le théorème précédent reste vrai lorsque $i = r$, mais ce cas particulier échappe à la preuve que l'on vient de donner.

Le cas entier

Après avoir obtenu un théorème modulo p^n pour tout entier n, il est tentant de passer à la limite projective. Précisément, posons, au moins pour $i < r$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \varprojlim_{n \geqslant 1} H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{st}}) \\
\text{Fil}^r\mathcal{M} &= \varprojlim_{n \geqslant 1} H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]}).
\end{aligned}$$

Les applications ϕ_r et N passent à la limite pour finir respectivement des applications $\text{Fil}^r\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ et $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ que l'on note encore ϕ_r et N.

Soit $\mathcal{M}_{\text{tors}}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}$ tué par une puissance de p, et $\mathcal{M}_{\text{free}} = \mathcal{M}/\mathcal{M}_{\text{tors}}$. On munit sans problème ces modules d'un Fil^r, d'un ϕ_r et d'un N, et en copiant les arguments du paragraphe 4.1 de [Bre98], on obtient le théorème suivant :

Théorème 3.2.2. *i) Le module $\mathcal{M}_{tors}$ muni des structures supplémentaires est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$.*

ii) Le module $\mathcal{M}_{free}$ muni des structures supplémentaires est un module fortement divisible[5].

[5] Pour une définition, on pourra se reporter au paragraphe III.6.1.

4 Calcul de la cohomologie étale

On fixe toujours un entier r vérifiant $er < p-1$. On se donne de plus X_K un schéma (au sens classique) propre et lisse sur K et on suppose que X_K admet un modèle propre et semi-stable X sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$. Le diviseur donné par la fibre spéciale fait de X un log-schéma défini sur la base $T = (\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K, \mathcal{O}_K \setminus \{0\})$ propre, log-lisse, et dont la fibre spéciale est du type de Cartier. Nous sommes donc en situation d'utiliser les résultats de la partie précédente. En particulier, si $X_n = X \times_T T_n$, le théorème 3.2.1 s'applique et assure que pour tout n et pour tout $i \leqslant r$ le quadruplet :

$$(H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}), H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N)$$

est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. D'autre part, par le théorème 3.1.24, le résultat demeure pour $i = r$ lorsque $n = 1$.

Le but de cette partie est de démontrer le théorème IV.i, dont nous précisons l'énoncé :

Théorème 4.a. *Pour tout entier r tel que $er < p-1$, pour tout entier n et pour tout $0 \leqslant i < r$ (et aussi $i = r$ si $n = 1$), on a un isomorphisme canonique de modules galoisiens :*

$$H^i((X_{\bar{K}})_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})(r) \xrightarrow{\sim} T_{st\star}(H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st}), H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N)\ .$$

Fixons avant tout quelques notations. Si L est une extension algébrique de K, définissons $T_L = (\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_L, \mathcal{O}_L \setminus \{0\})$ et si n est un entier et Y est un log-schéma sur T, posons $Y_n = Y \times_T T_n$, $Y_L = Y \times_T T_L$ et $Y_{n,L} = Y_n \times_T T_L = Y_L \times_T T_n$.

Le premier (et principal) ingrédient de la preuve est un résultat de Kato et Tsuji qui s'énonce comme suit :

Théorème 4.b. *Pour $0 \leqslant i \leqslant s \leqslant p-2$, on a des isomorphismes canoniques compatibles à l'action de Galois :*

$$H^i((X_{n,\bar{K}})_{\acute{e}t}, s_{n,X_{\bar{K}}}^{log}(s)) \xrightarrow{\sim} H^i((X_{\bar{K}})_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})(s)\ .$$

Dans le théorème précédent, $s_{n,X_{\bar{K}}}^{\log}(s)$ désigne un certain complexe de faisceaux étales sur $X_{n,\bar{K}}$ construit par Kato (voir [Kat87b]). Par ailleurs, Breuil démontre (lemme 3.2.4.3 de [Bre98] — la démonstration est écrite dans le cas non ramifié, mais elle fonctionne de la même façon dans le cas général) le théorème suivant :

Théorème 4.c. *Pour tout entier i, et tout $s \in \{0, \cdots, p-1\}$, on a des isomorphismes canoniques compatibles à l'action de Galois :*

$$\varinjlim_L H^i((X_{n+s,L})_{syn}, \mathcal{S}_n^s) \xrightarrow{\sim} H^i((X_{n,\bar{K}})_{\acute{e}t}, s_{n,X_{\bar{K}}}^{log}(s))$$

où la limite inductive est prise sur toutes les extensions finies L de K.

Ici, $\mathcal{S}_n^s$ désigne un certain faisceau sur le site log-syntomique dont le rappel de la définition est l'objet du paragraphe 4.1. Forts de cela, il ne reste plus pour conclure qu'à prouver :

Proposition 4.d. *Pour $0 \leqslant i < r$ (et aussi $i = r$ lorsque $n = 1$), on a des isomorphismes canoniques compatibles à l'action de Galois :*

$$\varinjlim_L H^i((X_{n+r,L})_{syn}, \mathcal{S}_n^r) \xrightarrow{\sim} T_{st\star}(H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st}), H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N) \ . \tag{21}$$

La démonstration de cette proposition est l'objet du paragraphe 4.2. Finalement, le paragraphe 4.3 qui termine cette partie explique comment on déduit des résultats précédents le théorème IV.*ii*.

4.1 Les faisceaux $\mathcal{S}_n^s$

On note T_n^{triv} le log-schéma Spec $\mathcal{O}_K/p^n$ muni de la log-structure triviale. Comme on avait défini les faisceaux $\mathcal{J}_n^{[s]}$ sur le site $(T_n)_{\text{syn}}$ (voir paragraphe 2.2.1), on définit sur le site $(T_n^{\text{triv}})_{\text{syn}}$ des faisceaux $\mathcal{J}_n^{\text{cris},[s]}$ en posant :

$$\mathcal{J}_n^{\text{cris},[s]}(U) = H^0((U/T_n^{\text{triv}})_{\text{cris}}, \mathcal{J}^{[s]}_{U/T_n^{\text{triv}}}) = H^0((U/T_n^{\text{triv}})_{\text{CRIS}}, \mathcal{J}^{[s]}_{U/T_n^{\text{triv}}})$$

pour tout U log-syntomique sur T_n^{triv}. On pose également $\mathcal{O}_n^{\text{cris}} = \mathcal{J}_n^{\text{cris},[0]}$.

Le morphisme naturel $T_n \to T_n^{\text{triv}}$ est log-syntomique, et donc les faisceaux précédents définissent par restriction des faisceaux sur le site $(T_n)_{\text{syn}}$ encore notés $\mathcal{J}_n^{\text{cris},[s]}$ et $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}$. On dispose de descriptions explicites locales des faisceaux précédents :

Proposition 4.1.1. *En reprenant les notations (A^∞, P^∞ et $W_n^{cris,DP}(A^\infty, P^\infty)$) du paragraphe 2.2.1, on a un isomorphisme canonique :*

$$\mathcal{O}_n^{cris}(A^\infty, P^\infty) \xrightarrow{\sim} W_n^{cris,DP}(A^\infty, P^\infty) \ .$$

Par ailleurs, cet isomorphisme respecte la filtration donnée à gauche par les $\mathcal{J}_n^{cris,[s]}(A^\infty, P^\infty)$ et à droite par la filtration canonique par les puissances divisées.

Comme dans le cas « st », on définit pour $s \leqslant p-1$, des applications $\phi_s : \mathcal{J}_n^{\text{cris},[s]} \to \mathcal{O}_n^{\text{cris}}$. Finalement, on appelle $\mathcal{S}_n^s$ le noyau de l'application $\phi_s - \text{id}$.

La proposition suivante réunit deux suites exactes importantes à propos des faisceaux introduits précédemment :

Proposition 4.1.2. *Pour tous entiers n et s, on a une suite exacte courte de faisceaux sur le site $(T_n)_{syn}$:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_n^{cris,[s]} \longrightarrow \mathcal{J}_n^{[s]} \xrightarrow{N} \mathcal{J}_n^{[s-1]} \longrightarrow 0 \ .$$

Pour tout entier n et tout $s \in \{0, \dots, p-1\}$, on a une suite exacte courte de faisceaux sur le site $(T_{n+s})_{syn}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_n^s \longrightarrow \mathcal{J}_n^{cris,[s]} \xrightarrow{\phi_s - id} \mathcal{O}_n^{cris} \longrightarrow 0 \ .$$

Démonstration. La première suite exacte résulte des descriptions précédentes si l'on se rappelle que :

$$N\left(\frac{X^i}{i!}\right) = (1+X)\frac{X^{i-1}}{(i-1)!}.$$

On pourra consulter la preuve de la proposition 3.1.3.1 de [Bre98] pour plus de détails.

Pour la seconde suite exacte, il suffit de prouver la surjectivité de $\phi_s - \mathrm{id}$ et avec les descriptions locales précédentes, on construit explicitement un antécédent (local pour la topologie log-syntomique) à tout élément de $\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty, P^\infty)$. Exactement, la preuve est identique à celle de la proposition 3.1.4.1 de [Bre98], sauf le dernier argument qui est remplacé par celui du lemme 1.3.6. □

4.2 La preuve

Le but de ce chapitre est de donner une preuve de la proposition 4.d, ce qui est suffisant comme nous l'avons expliqué, pour démontrer le théorème IV.*i*. On suit encore une fois de très près la démonstration de [Bre98] valable pour le cas $e = 1$.

On note $\mathcal{M} = H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}})$. Pour tout entier s, on a un morphisme (pas nécessairement injectif) $H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{[t]}) \to \mathcal{M}$ et on note $\mathrm{Fil}^t\mathcal{M}$ son image. On vérifie que l'on obtient ainsi une filtration admissible (voir définition 1.3.3) sur $\mathcal{M}$. Par définition (voir paragraphe 1.3.3), le membre de droite de l'isomorphisme 21 s'identifie à :

$$\mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1}$$

avec :

$$\mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M}) = \sum_{t=0}^{r} \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathrm{Fil}^{s-t}\mathcal{M}$$

où on rappelle que les Fil_X^t sont définis par la formule (2) et qu'ils sont plats sur S_n. On rappelle également que l'on dispose du lemme 1.3.6 qui permet de voir le module $\mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})$ comme le conoyau d'un morphisme.

La preuve de la proposition 4.d passe par les calculs successifs des modules $\mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})$, $\mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$ et finalement $\mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1} = T_{\mathrm{st}\star}(\mathcal{M})$. Ceux-ci sont traités respectivement dans les paragraphes 4.2.2, 4.2.3 et 4.2.4. Le paragraphe 4.2.1, quant à lui, rappelle quelques préliminaires nécessaires pour la gestion des limites inductives.

4.2.1 Le foncteur $j_\star$

Dans ce paragraphe, on rappelle comment construire des faisceaux sur le site $(X_n)_{\mathrm{syn}}$ dont la cohomologie s'identifie à $\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{[s]})$.

Si L est une extension de K, on a un morphisme canonique $j_L : T_L \to T$. On montre (lemme 3.1.1.1 de [Bre98]) qu'il est log-syntomique et donc qu'il induit un morphisme de topoï $(\widetilde{T_{n,L}})_{\mathrm{syn}} \to (\widetilde{T_n})_{\mathrm{syn}}$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur $(T_n)_{\mathrm{syn}}$. Pour tout L, on considère le faisceau $j_{L\star}j_L^\star\mathcal{F}$ et on remarque que si L' est une extension finie de L, on a un morphisme $j_{L\star}j_L^\star\mathcal{F} \to j_{L'\star}j_{L'}^\star\mathcal{F}$. On pose finalement :

$$j_\star\mathcal{F} = \varinjlim_L j_{L\star}j_L^\star\mathcal{F}.$$

C'est un faisceau sur $(T_n)_{\mathrm{syn}}$ et on montre (corollaire 3.1.1.4 de [Bre98]) que l'on a une identification canonique :

$$\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{[s]}) = H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, j_\star\mathcal{J}_n^{[s]})$$

pour tout entier s.

4.2.2 Le calcul de Fil $^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})$

Le but de ce paragraphe est de donner une description en terme de conoyau (analogue à celle du lemme 1.3.6) de $\mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})$. Pour cela, on commence par rappeler que l'anneau $\hat{A}_{\mathrm{st}}$ admet une interprétation cohomologique incarnée par l'isomorphisme canonique suivant :

$$\hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n = \varinjlim_L H^0((T_{n,L})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}})$$

où la limite inductive est prise sur les extensions finies L de K. Il existe aussi un isomorphisme analogue pour décrire la filtration sur $\hat{A}_{\mathrm{st}}$ qui est :

$$\mathrm{Fil}^t(\hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n) = \mathrm{Fil}^t\hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n = \varinjlim_L H^0((T_{n,L})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{[t]}).$$

Ces isomorphismes permettent de construire une application canonique :

$$\mathrm{Fil}^t\hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n \otimes_{S_n} H^0((X_n)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{s-t}) \to \varinjlim_L H^0((X_{n,L})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{[s]}) = H^0((X_n)_{\mathrm{syn}}, j_\star\mathcal{J}_n^{[s]})$$

et donc un morphisme de faisceaux :

$$\bigoplus_{t=0}^{s} \mathrm{Fil}_X^t\hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{[s-t]} \to \bigoplus_{t=0}^{s} \mathrm{Fil}^t\hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{[s-t]} \to j_\star\mathcal{J}_n^{[s]}.$$

On a alors le lemme suivant, à mettre en parallèle avec le lemme 1.3.6 :

Lemme 4.2.1. *Pour tout entier $s \leqslant r$, on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bigoplus_{t=1}^{s} Fil_X^t\hat{A}_{st}/p^n \otimes_{S_n} H^i(\mathcal{J}_n^{[s+1-t]}) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{t=0}^{s} Fil_X^t\hat{A}_{st}/p^n \otimes_{S_n} H^i(\mathcal{J}_n^{[s-t]}) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(j_\star\mathcal{J}_n^{[s]}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{t=1}^{s} Fil_X^t\hat{A}_{st}/p^n \otimes_{S_n} Fil^{s+1-t}\mathcal{M} \arrow[r] & \bigoplus_{t=0}^{s} Fil_X^t\hat{A}_{st}/p^n \otimes_{S_n} Fil^{s-t}\mathcal{M} \arrow[r] & Fil^s(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où tous les morphismes respectent l'action de Galois, et où les deux lignes sont exactes et les flèches verticales surjectives. (Notez que tous les groupes de cohomologie sont calculés sur le site $(X_n)_{syn}$.)

Démonstration. Tout d'abord, précisons les flèches. Dans la suite exacte du haut, la première flèche a déjà été définie dans l'énoncé du lemme 1.3.6. La flèche correspondante dans la suite exacte du bas a une définition tout à fait analogue. Les autres flèches ne posent pas de problème, à part *a priori* la flèche verticale de droite. Cependant, elle n'en posera plus lorsque l'on aura prouvé l'exactitude des deux suites (puisque ce sera alors simplement la flèche induite sur les conoyaux).

L'exactitude de la ligne du haut n'est autre que l'objet du lemme 1.3.6. Les surjectivités des deux premières flèches verticales sont immédiates. Il ne reste donc plus qu'à prouver l'exactitude de la suite exacte du bas (de laquelle résultera directement la surjectivité de la flèche verticale de droite).

On commence par prouver que la suite de faisceaux sur le site $(T_n)_{\text{syn}}$:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{t=1}^{s} \mathrm{Fil}\,^t_X \hat{A}_{\text{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{[s+1-t]} \longrightarrow \bigoplus_{t=0}^{s} \mathrm{Fil}\,^t_X \hat{A}_{\text{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{[s-t]} \longrightarrow j_\star \mathcal{J}_n^{[s]} \longrightarrow 0$$

est exacte. Par un dévissage, on se ramène dans un premier temps au seul cas $n = 1$. De plus, en recopiant les arguments de la preuve de la proposition 3.1.2.3 de [Bre98], on se ramène au cas $s = 0$. Il s'agit donc de montrer que $\hat{A}_{\text{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{O}^1_{\text{st}} \simeq j_\star \mathcal{O}^{\text{st}}_1$. C'est à nouveau un calcul local pour la topologie log-syntomique, en tout point analogue à celui mené dans la démonstration du lemme 3.1.2.2 de [Bre98]. □

4.2.3 Le calcul de Fil $^r(\hat{A}_{\textbf{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$

Le but de cette partie est de démontrer le lemme suivant qui constitue la deuxième étape de la preuve.

Lemme 4.2.2. *On a des isomorphismes de modules galoisiens :*

$$\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{syn}, \mathcal{O}_n^{cris}) \xrightarrow{\quad\sim\quad} (\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$$

$$\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{syn}, \mathcal{J}_n^{cris,[r]}) \xrightarrow{\ \sim\ } Fil\,^r(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle du corollaire 3.2.3.5 de [Bre98]. Nous redonnons simplement les grandes lignes. Tout d'abord, on montre comme dans le lemme 3.1.1.2 de [Bre98] la nullité de $\varinjlim_L R^i j_{L\star} j_L^\star \mathcal{J}_n^{[s]}$ d'où on déduit, à partir de la première suite exacte de la proposition 4.1.2, une suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow j_\star \mathcal{J}_n^{\text{cris},[s]} \longrightarrow j_\star \mathcal{J}_n^{[s]} \xrightarrow{N} j_\star \mathcal{J}_n^{[s-1]} \longrightarrow 0$$

de laquelle on déduit une suite exacte courte sur les groupes de cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^i(j_\star \mathcal{J}_n^{\text{cris},[s]}) \longrightarrow H^i(j_\star \mathcal{J}_n^{[s]}) \xrightarrow{N} H^i(j_\star \mathcal{J}_n^{[s-1]}) \longrightarrow 0$$

où tous les groupes de cohomologie sont calculés sur le site $(X_n)_{\mathrm{syn}}$ (l'argument est le même que celui utilisé pour la proposition 3.2.3.1 de [Bre98]).

La suite de la preuve consiste à reprendre le diagramme du lemme 4.2.1 et à procéder à une étude relativement fine des noyaux des flèches verticales. Précisément, si on note :

$$\begin{aligned} K^t &= \ker\left(H^i(\mathcal{J}_n^{[t]}) \to H^i(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}})\right) = \ker\left(H^i(\mathcal{J}_n^{[t]}) \to \mathrm{Fil}^t \mathcal{M}\right) \\ \bar{K}^t &= \ker\left(H^i(j_\star \mathcal{J}_n^{[t]}) \to \mathrm{Fil}^t(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})\right) \end{aligned}$$

on peut compléter le diagramme de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \bigoplus_{t=1}^{s} \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n \otimes_{S_n} K^{s+1-t} \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{t=0}^{s} \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n \otimes_{S_n} K^{s-t} \arrow[r] \arrow[d] & \bar{K}^s \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \bigoplus_{t=1}^{s} \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n \otimes_{S_n} H^i(\mathcal{J}_n^{[s+1-t]}) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{t=0}^{s} \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n \otimes_{S_n} H^i(\mathcal{J}_n^{[s-t]}) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(j_\star \mathcal{J}_n^{[s]}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \bigoplus_{t=1}^{s} \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathrm{Fil}^{s+1-t} \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{t=0}^{s} \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathrm{Fil}^{s-t} \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Fil}^s(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

L'opérateur N induit un morphisme entre le diagramme précédent et son équivalent lorsque l'on remplace s par $s-1$ (en particulier, il induit une application $N : \bar{K}_s \to \bar{K}_{s-1}$ pour tout $s \in \{0, \dots, r\}$ en convenant que $K_{-1} = K_0$). La suite exacte du haut implique en prenant $s = 0$ que $\bar{K}_0 = 0$. Par ailleurs, une étude un peu minutieuse de cette même suite exacte (voir lemmes 3.2.3.3 et 3.2.3.4 de [Bre98]) montre que l'application $N : \bar{K}_r \to \bar{K}_{r-1}$ est un isomorphisme.

En considérant la suite exacte de droite, ceci implique que pour $s = 0$ et $s = r$, on a des isomorphismes :

$$\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[s]}) = H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, j_\star \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[s]}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^s(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$$

ce qui termine la preuve du lemme. $\square$

4.2.4 Le calcul de Fil $^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1}$

Il n'est plus difficile à présent de terminer la preuve de la proposition 4.d. En effet, la deuxième suite exacte de la proposition 4.1.2 nous fournit une suite exacte longue :

$$\cdots \longrightarrow H^i((X_{n+r})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{S}_n^r) \longrightarrow H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]}) \xrightarrow{\phi_r - \mathrm{id}} H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}) \longrightarrow \cdots$$

et puis, comme le foncteur $\varinjlim_L$ est exact (la limite est filtrante) on obtient une nouvelle suite exacte longue :

$$\cdots \longrightarrow \varinjlim_L H^i((X_{n+r})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{S}_n^r) \longrightarrow \varinjlim_L H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]}) \xrightarrow{\phi_r - \mathrm{id}} \varinjlim_L H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}) \longrightarrow \cdots.$$

Par ailleurs, la flèche $\phi_r - \mathrm{id} : \varinjlim_L H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]}) \to \varinjlim_L H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}})$ s'identifie *via* les isomorphismes du lemme 4.2.2 à la flèche :

$$\mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \xrightarrow{\phi_r - \mathrm{id}} (\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$$

et on sait par le lemme 1.3.9 que celle-ci est surjective. On en déduit que la suite exacte longue se coupe en suites exactes courtes :

$$0 \longrightarrow \varinjlim_L H^i((X_{n+r})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{S}_n^r) \longrightarrow \varinjlim_L H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]}) \xrightarrow{\phi_r - \mathrm{id}} \varinjlim_L H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}) \longrightarrow 0$$

ce qui termine la preuve.

4.3 Une conjecture de Serre

On montre dans ce paragraphe comment la théorie développée au long de cet article permet de résoudre complètement la conjecture de l'inertie modérée de Serre formulée dans le paragraphe 1.13 de [Ser72].

Avant de rappeler l'énoncé de la conjecture, faisons quelques préliminaires et profitons-en pour fixer les notations (pour plus de précisions, voir le paragraphe 1 de [Ser72]). Soit V une $\mathbb{F}_p$-représentation de dimension finie irréductible du sous-groupe d'inertie I de groupe de Galois absolu de K. Par un résultat classique de théorie des groupes, du fait que V a pour cardinal un multiple de p, le sous-groupe d'inertie sauvage (qui est un pro-p-groupe distingué) agit trivialement. Ainsi l'action de I se factorise à travers une action du groupe d'inertie modérée I_t.

Par ailleurs, puisque V est supposée irréductible, l'anneau E des endomorphismes équivariants de V est un corps fini et V hérite d'une structure d'espace vectoriel de dimension 1 sur ce corps. La représentation de départ fournit un caractère $\rho : I_t \to E^\star$. Notons $q = p^h$ le cardinal de E et $\mathbb{F}_q$ le sous-corps de $\bar{k}$ formé des solutions de l'équation $x^q = x$. On dispose de l'application suivante appelée *caractère fondamental de niveau* h :

$$\begin{array}{rccl} \theta_h : & I_t & \to & \mu_{q-1}(\bar{K}) \simeq \mathbb{F}_q^\star \\ & g & \mapsto & \frac{g(\eta)}{\eta} \end{array}$$

où η désigne une racine $(q-1)$-ième de l'uniformisante π.

Les corps E et $\mathbb{F}_q$ sont finis de même cardinal et donc isomorphes (non canoniquement). Si l'on compose θ_h par un tel isomorphisme f, on obtient une application $\theta_{h,f} : I_t \to E^\star$ et on montre facilement (voir la proposition 5 du paragraphe 1 de [Ser72]), que $\rho = \theta_{h,f}^n$ pour un certain entier n compris entre 0 et $q-2$. L'entier n dépend de l'isomorphisme f choisi mais les chiffres de son écriture en base p, eux, n'en dépendent pas. Ce sont par définition les *exposants de l'inertie modérée* de la représentation V.

La conjecture de Serre s'énonce alors comme suit :

Théorème 4.3.1. *Soit X un schéma propre et lisse sur K à réduction semi-stable sur $\mathcal{O}_K$ et soit r un entier. Les exposants de l'inertie modérée sur un quotient de Jordan-Hölder de la restriction au groupe d'inertie de la représentation galoisienne $H^r_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/pZ)^\vee$ (où « $\vee$ » désigne le dual) sont compris entre 0 et er.*

Démonstration. On remarque dans un premier temps que le résultat est évident si $er \geqslant p-1$ (des chiffres en base p sont nécessairement inférieurs ou égaux à $p-1$). On peut donc supposer $er < p-1$ et appliquer les résultats de cet article.

Par le théorème IV.*i*, la représentation galoisienne $V = H^r_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/pZ)(r)$ est dans l'image essentielle du foncteur $T_{\text{st}\star}$. Puisque cette image essentielle est stable par sous-objets et quotients (théorème 1.3.1), tout quotient de Jordan-Hölder de V est également dans l'image essentielle de $T_{\text{st}\star}$. Par ailleurs, un tel quotient de Jordan-Hölder est par définition irréductible et donc ne peut être l'image par $T_{\text{st}\star}$ que d'un objet simple.

Le théorème résulte à ce niveau du théorème III.4.2.2. $\square$

Remarque. On a un résultat équivalent avec les groupes de cohomologie $H^i_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^nZ)^\vee$ lorsque $i < r$ et $er < p-1$ (ou autrement dit lorsque $i < E((p-2)/e)$, $E(\cdot)$ désignant la partie entière).

Chapitre V

Une dualité sur les catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$

Résumé

Soit K un corps de caractéristique nulle complet pour une valuation discrète de corps résiduel parfait de caractéristique $p > 0$ et d'indice de ramification absolue e. À cette donnée complétée par une uniformisante de K et à tout entier $r < p-1$, il est associé une catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ largement étudiée dans les chapitres précédents. Le but de ce chapitre est de poursuivre cette étude en prouvant dans un premier temps que tout objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ sur lequel on oublie la donnée de N s'écrit comme quotient de deux modules fortement divisibles (voir définition 1.1.1), puis en utilisant ce fait pour construire une dualité sur $\underline{\mathcal{M}}^r$, au moins lorsque $er < p-1$ ou $r = 1$. On examine ensuite comment cette dualité se transpose sur la catégorie des $\mathbb{Z}_p$-représentations du groupe de Galois absolu de K puis *via* l'équivalence de [Bre00a] à la catégorie des $\mathcal{O}_K$-schémas en groupes.

Ce chapitre se distingue du reste de cette thèse par le fait qu'il travaille dans une plus grande généralité : les constructions ne font aucune hypothèse sur e, seule la preuve de la dualité suppose $er < p-1$ ou $r = 1$ (hypothèse que l'on devrait pouvoir éliminer).

Sommaire

Soient k un corps parfait de caractéristique p et $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k. C'est un anneau local dont l'idéal maximal est engendré par p et dont le corps résiduel s'identifie canoniquement à k. Soit $K_0 = \operatorname{Frac} W$, le corps des fractions de W. Soit K une extension finie totalement ramifiée de K_0 de degré e. On note $\mathcal{O}_K$ la clôture intégrale de W dans K, et $\pi \in \mathcal{O}_K$ une uniformisante. On désigne par $E(u)$ le polynôme minimal de π sur K, c'est un polynôme d'Eisenstein. Finalement, on appelle $\bar{K}$ une clôture algébrique de K et $G_K = \operatorname{Gal}\left(\bar{K}/K\right)$ le groupe de Galois absolu de K.

Pour étudier les $\mathbb{Z}_p$-représentations de G_K, Breuil a introduit dans [Bre97a] et [Bre99a], pour tout entier $r < p - 1$, les catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$ et $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ ainsi que d'autres catégories de « modules fortement divisibles » toutes équipées d'un foncteur vers la catégorie des $\mathbb{Z}_p$-représentations galoisiennes. La première partie de ce chapitre est consacrée à un rappel systématique de la définition de chacune de ces catégories et des foncteurs associés.

Dans la seconde partie, nous prouvons le théorème suivant :

Théorème V.*i*. *Tout objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ peut s'écrire comme quotient de deux modules fortement divisibles.*

Notons que ce théorème donne en particulier une réponse partielle à une interrogation mentionnée dans [BM02] (voir ce qui suit immédiatement la question 5.2.2.5).

Dans la troisième partie, on utilise le théorème V.*i* pour construire une dualité sur les catégories $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ et $\underline{\mathcal{M}}^r$, au moins[1] lorsque $er < p-1$ ou $r = 1$. On étudie ensuite, dans la quatrième section, comment cette dualité se transporte sur les représentations galoisiennes. Plus précisément, on prouve :

Théorème V.*ii*. *Supposons $er \leqslant p-1$ ou $r = 1$. Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Soit $\mathcal{M}^\vee$ l'objet dual. Désignons respectivement par V et V' les représentations galoisiennes associées à $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^\vee$. Alors, on a un isomorphisme de $\mathbb{Z}_p$-modules galoisiens :*

$$V' \simeq V^\star(r)$$

où « $\star$ » désigne le $\mathbb{Z}_p$-dual classique et où « (r) » désigne le twist de Tate.

[1]La construction fonctionne sans ces hypothèses, mais on les utitise pour prouver qu'il s'agit bien d'une dualité.

Finalement, dans la cinquième section, on prouve que, par l'équivalence de catégories construite par Breuil dans [Bre00a], la dualité sur $\underline{\mathcal{M}}_0^1$ correspond à la dualité de Cartier sur les schémas en groupes.

1 La situation

On redonne rapidement ici la définition de toutes les catégories et de tous les foncteurs que l'on aura à considérer par la suite. Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter aux autres chapitres de cette thèse ou aux articles [Bre97a], [Bre99a], [Bre00a].

1.1 Définition des catégories

1.1.1 Les anneaux S et S_{K_0}

On note S le complété p-adique de l'enveloppe à puissances divisées de $W[u]$ par rapport à l'idéal principal engendré par $E(u)$ (le polynôme minimal de π sur K) compatibles avec les puissances divisées canoniques sur l'idéal (p). Cet anneau est muni d'un Frobenius défini par :

$$\phi\left(\sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{q(i)!}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma(w_i) \frac{u^{pi}}{q(i)!}$$

où σ désigne le Frobenius usuel sur W et $q(i)$ le quotient de la division euclidienne de i par e. De plus, on définit une application $N : S \to S$ *via* la formule :

$$N\left(\sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{q(i)!}\right) = -\sum_{i=1}^{\infty} i w_i \frac{u^i}{q(i)!}.$$

On a la relation $N\phi = p\phi N$. On définit finalement pour tout entier $s \geqslant 0$, $\mathrm{Fil}^s S$ comme le complété p-adique de l'idéal engendré par les éléments $\frac{(E(u))^i}{i!}$ pour $i \geqslant s$. On a $N(\mathrm{Fil}^s S) \subset \mathrm{Fil}^{s-1} S$ et, pour $0 \leqslant s \leqslant p-1$, $\phi(\mathrm{Fil}^s S) \subset p^s S$, ce qui permet de définir $\phi_s = \frac{\phi}{p^s} : \mathrm{Fil}^s S \to S$. L'élément $\phi_1(E(u))$ est une unité de S, on le note c.

On pose $S_{K_0} = S \otimes_W K_0$ et $\mathrm{Fil}^s S_{K_0} = \mathrm{Fil}^s S \otimes_W K_0 \subset S_{K_0}$. Le Frobenius et l'opérateur de monodromie se prolongent naturellement en des applications $\phi : S_{K_0} \to S_{K_0}$ et $N : S_{K_0} \to S_{K_0}$. Elles vérifient encore la relation $N\phi = p\phi N$. Comme p est inversible dans S_{K_0}, l'application $\frac{\phi}{p^s}$ est toujours bien définie. On note $\phi_s = \frac{\phi}{p^s} : \mathrm{Fil}^t S_{K_0} \to S_{K_0}$.

1.1.2 Les catégories de modules sur S

On fixe à partir de maintenant et jusqu'à la fin de ce chapitre un entier r vérifiant $r < p-1$. À cet entier sont associées plusieurs catégories. On introduit tout d'abord la « vaste » catégorie $\mathcal{C}$ suivante. Les objets sont la donnée de :

1. un S-module $\mathcal{M}$ de type fini ;

2. un sous-S-module de $\mathcal{M}$ noté $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ contenant $\mathrm{Fil}^r S \cdot \mathcal{M}$;
3. une flèche ϕ-semi-linéaire $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ vérifiant la condition :

$$\phi_r(sx) = \frac{1}{c^r}\phi_r(s)\,\phi_r\left((E(u))^r x\right)$$

pour tout $s \in \mathrm{Fil}^r S$ et tout $x \in \mathcal{M}$ et telle que $\mathrm{im}\,\phi_r$ engendre $\mathcal{M}$ en tant que S-module

4. une application W-linéaire $N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ vérifiant les trois conditions :
   – pour tout $s \in S$ et tout $x \in \mathcal{M}$, $N(sx) = N(s)\,x + sN(x)$
   – $E(u)\,N(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$
   – le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "E(u)N"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "cN"] \\ \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

Les morphismes dans cette catégorie sont les applications S-linéaires commutant à toutes les structures additionnelles. La catégorie $\mathcal{C}$ n'est pas abélienne mais on a dans celle-ci une notion de suite exacte. Précisément, si $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ sont des objets de $\mathcal{C}$, on dit que la suite :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

est exacte dans $\mathcal{C}$ si elle est exacte comme suite de S-modules et si la suite :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}' \longrightarrow \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

l'est également.

On définit à présent plusieurs sous-catégories pleines de $\mathcal{C}$.

Définition 1.1.1. *On note $\underline{\mathcal{M}}^{r,S}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ formée par les objets $\mathcal{M}$ qui sont libres (de rang fini) sur S et tels que $\mathcal{M}/\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ soit sans p-torsion. Un tel objet est appelé un* module fortement divisible.

On note $\underline{\mathcal{M}}^{r,FI}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ formée par les objets $\mathcal{M}$ qui sont isomorphes à une somme directe (forcément finie) de S/p^nS pour certains entiers n.

On note $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathcal{M}}^{r,FI}$ formée par les objets tués par p. Les objets de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$ sont donc des S/pS-modules libres de rang fini.

On note $\underline{\mathcal{M}}^r$ la plus petite sous-catégorie pleine $\mathcal{C}$ contenant $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$ et stable par extensions dans $\mathcal{C}$.

Les rapports et les différences entre les catégories $\underline{\mathcal{M}}^{r,\mathrm{FI}}$ et $\underline{\mathcal{M}}^r$ sont donnés par le lemme suivant :

Lemme 1.1.2. *Tout objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ est tué par une puissance de p. La catégorie $\underline{\mathcal{M}}^{r,FI}$ est une sous-catégorie (pleine) de $\underline{\mathcal{M}}^r$ et les objets tués par p de ces deux catégories se correspondent bijectivement.*

Démonstration. La première assertion est claire, la seconde se démontre pareillement que le corollaire 2.1.1.4 de [Bre00a] et la troisième est vraie car toute extension tuée par p de deux S/pS-modules libres est encore un S/pS-module libre. □

Remarque. Les catégories $\underline{\mathcal{M}}^{r,\mathrm{FI}}$ et $\underline{\mathcal{M}}^{r}$ sont identiques lorsque $er \leqslant p-1$. Ce n'est en général plus vrai sans cette hypothèse comme le montre l'exemple donné dans la preuve du corollaire 2.1.1.4 de [Bre00a].

Finalement, on définit de même les catégories $\mathcal{C}_0$, $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S}$, $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,\mathrm{FI}}$, $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S/pS}$ et $\underline{\mathcal{M}}_0^{r}$ en oubliant partout l'opérateur N. Le lemme 1.1.2 admet un équivalent transparent dans ce nouveau contexte.

1.1.3 Les modules filtrés sur S_{K_0}

Sur S_{K_0}, on a une notion analogue à celle des modules fortement divisibles. Elle est donnée par la définition suivante :

Définition 1.1.3. *Un* module filtré sur S_{K_0} *est la donnée de :*

1. *un S_{K_0}-module $\mathcal{M}$ libre de rang fini ;*
2. *un sous-S_{K_0}-module de $\mathcal{M}$, noté $\mathit{Fil}^r\mathcal{M}$ contenant $\mathit{Fil}^r S_{K_0}\cdot\mathcal{M}$;*
3. *une flèche ϕ-semi-linéaire $\phi_r : \mathit{Fil}^r\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ vérifiant :*
$$\phi_r(sx) = \frac{1}{c^r}\phi_r(s)\,\phi_r\left((E(u))^r x\right)$$
pour tout $s\in \mathit{Fil}^r S_{K_0}$ et tout $x\in\mathcal{M}$ et telle que $\mathrm{im}\,\phi_r$ engendre $\mathcal{M}$ en tant que S_{K_0}-module ;
4. *une application K_0-linéaire $N:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ vérifiant les trois conditions :*
   - *pour tout $s\in S_{K_0}$ et tout $x\in\mathcal{M}$, $N(sx) = N(s)x + sN(x)$*
   - *$E(u)N(\mathit{Fil}^r\mathcal{M})\subset \mathit{Fil}^r\mathcal{M}$*
   - *le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \mathit{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "E(u)N"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "cN"] \\ \mathit{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

Remarques. La condition « $\mathcal{M}/\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ sans p-torsion » est automatique puisque p est inversible dans S_{K_0} ; il n'est donc plus nécessaire de la mettre dans les hypothèses.

Par ailleurs, en utilisant à nouveau l'inversibilité de p dans S_{K_0}, on montre facilement que la donnée de ϕ_r est équivalente à la donnée d'un morphisme semi-linéaire $\phi:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$, relié à ϕ_r par la formule :
$$\phi(x) = \frac{1}{c^r}\phi_r(E(u)^r x).$$

La relation de commutation entre ϕ_r et N s'écrit alors simplement $N\phi = p\phi N$.

On note $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_{K_0}}$ la catégorie des modules filtrés sur S_{K_0} et $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S_{K_0}}$ la catégorie obtenue en oubliant l'opérateur N. Breuil démontre dans [Bre97b] que $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_{K_0}}$ et $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S_{K_0}}$ sont équivalentes à des catégories plus simples introduites par Fontaine (voir [Fon94b]) formées de K_0-espaces vectoriels munis de structures supplémentaires. Nous n'aurons toutefois pas besoin dans ce chapitre de ce résultat.

1.1.4 Bases adaptées

Pour ne pas surcharger les énoncés, toutes les définitions et tous les résultats de ce paragraphe concernent les catégories $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_{K_0}}$, $\underline{\mathcal{M}}^{r,S}$ et $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$, mais ceux-ci demeurent valables avec les catégories $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S_{K_0}}$, $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S}$ et $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S/pS}$.

Définition 1.1.4. *Soit $\mathcal{M}$ un module filtré sur S_{K_0} (resp. un module fortement divisible, resp. un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$). On dit que la S_{K_0}-base (resp. la S-base, resp. la S/pS-base) $(e_1, \dots, e_d)$ de $\mathcal{M}$ est* adaptée *(à la filtration) s'il existe des entiers $n_1, \dots, n_d$ compris entre 0 et r (resp. entre 0 et r, resp. entre 0 et er) tels que :*

$$\mathit{Fil}^r\mathcal{M} = S_{K_0}E(u)^{n_1}e_1 + \ldots + S_{K_0}E(u)^{n_d}e_d + \mathit{Fil}^p S_{K_0} \cdot \mathcal{M}$$

$$\text{(resp. } \mathit{Fil}^r\mathcal{M} = S \cdot E(u)^{n_1}e_1 + \ldots + S \cdot E(u)^{n_d}e_d + \mathit{Fil}^p S \cdot \mathcal{M},$$

$$\text{resp. } \mathit{Fil}^r\mathcal{M} = S \cdot u^{n_1}e_1 + \ldots + S \cdot u^{n_d}e_d + \mathit{Fil}^p S \cdot \mathcal{M}\text{).}$$

Une propriété fondamentale et bien utile est la suivante :

Proposition 1.1.5. *Tout module filtré sur S_{K_0} et tout objet de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$ admettent une base adaptée.*

Démonstration. Pour les modules filtrés sur S_{K_0}, la preuve de cette proposition est essentiellement donnée dans l'appendice de [Bre97b]. Toutefois les objets manipulés dans cet article diffèrent légèrement des précédents. Nous donnons donc une preuve directe (et plus simple).

La donnée d'un sous-S_{K_0}-module de $\mathcal{M}$ contenant $\mathrm{Fil}^r S_{K_0}\mathcal{M}$ est équivalente à la donnée d'un sous-$S_{K_0}/\mathrm{Fil}^r S_{K_0}$-module de $\mathcal{M}/\mathit{Fil}^r S_{K_0}\mathcal{M}$. Mais l'anneau $S_{K_0}/\mathrm{Fil}^r S_{K_0}$ s'identifie à $K_0\left[u\right]/\left(E\left(u\right)\right)^r$ et $\mathcal{M}/\mathit{Fil}^r S_{K_0}\mathcal{M}$ est un module libre de rang fini sur cet anneau. Le théorème de structure des modules de type fini sur les anneaux principaux (ici $K_0[u]$) permet de conclure directement.

La preuve est analogue pour les objets de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$. $\square$

On a également une version bien plus faible de la proposition précédente pour les modules fortement divisibles :

Proposition 1.1.6. *On suppose $r = 1$. Alors, tout module fortement divisible admet une base adaptée.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ un module fortement divisible. Posons $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\mathrm{Fil}^1 S\,\mathcal{M}$. C'est un $S/\mathrm{Fil}^1 S \simeq \mathcal{O}_K$-module libre. Notons $\mathrm{Fil}^1\tilde{\mathcal{M}}$ l'image de $\mathrm{Fil}^1\mathcal{M}$ dans $\tilde{\mathcal{M}}$. C'est un sous-module de $\tilde{\mathcal{M}}$ et par le théorème de structure des modules de type fini sur les anneaux principaux, il existe une base $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_d)$ de $\tilde{\mathcal{M}}$ et des entiers $n_1, \dots, n_k$ (avec $k \leqslant d$) tels que la famille $(\pi^{n_1}\tilde{e}_1, \dots, \pi^{n_k}\tilde{e}_k)$ forme une base de $\mathrm{Fil}^r\tilde{\mathcal{M}}$.

Or, puisque $r = 1$, on a $\mathrm{Fil}^1 S\,\mathcal{M} \subset \mathrm{Fil}^1\mathcal{M}$ et donc un isomorphisme :

$$\mathcal{M}/\mathrm{Fil}^1\mathcal{M} \simeq \tilde{\mathcal{M}}/\mathrm{Fil}^1\tilde{\mathcal{M}}$$

induit par la projection canonique. Par hypothèse ce dernier module est sans p-torsion, d'où on déduit $n_1 = \cdots = n_k = 0$.

Si pour tout i, on choisit $e_i \in \mathcal{M}$ un relevé de $\tilde{e}_i$, les considérations précédentes assurent que $(e_1, \dots, e_d)$ forme une base adaptée de $\mathcal{M}$ pour les entiers $m_i = 0$ si $i \leqslant k$ et $m_i = 1$ sinon. $\square$

Remarque. Bien entendu, cette propriété est fausse en général dès que $r > 1$.

Lemme 1.1.7. *Si $(e_1, \dots, e_d)$ est une base adaptée d'un module filtré sur S_{K_0} (resp. d'un module fortement divisible, resp. d'un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$) $\mathcal{M}$ pour les entiers $n_1, \dots, n_d$, alors la famille $(\phi_r(E(u)^{n_1}e_1), \dots, \phi_r(E(u)^{n_d}e_d))$ (resp. $(\phi_r(E(u)^{n_1}e_1), \dots, \phi_r(E(u)^{n_d}e_d))$, resp. $(\phi_r(u^{n_1}e_1, \dots, \phi_r(u^{n_d}e_d)))$ est une base de $\mathcal{M}$.*

Démonstration. On ne traite que le cas des modules filtrés sur S_{K_0}, l'autre étant analogue. Soit $x \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$. Il s'écrit :

$$x = s_1 E(u)^{n_1} e_1 + \cdots + s_d E(u)^{n_d} e_d + y$$

où $s_i \in S_{K_0}$ et $y \in \mathrm{Fil}^p S_{K_0}\mathcal{M}$. En appliquant ϕ_r, on obtient :

$$\phi_r(x) = s_1 x_1 + \cdots + s_d x_d + \phi_r(y) \equiv s_1 x_1 + \cdots + s_d x_d \pmod{\mathrm{Fil}^p S_{K_0}\mathcal{M}}.$$

Si $\bar{x}_i$ désigne la réduction modulo $\mathrm{Fil}^p S_{K_0}\mathcal{M}$ de x_i, la famille des $\bar{x}_i$ engendre $\mathcal{M}/\mathrm{Fil}^p S_{K_0}\mathcal{M}$. Comme S_{K_0} est un anneau local et $\mathrm{Fil}^p S_{K_0}$ un idéal strict, le lemme de Nakayama assure que la famille des x_i engendre $\mathcal{M}$. Comme elle a le bon cardinal, elle est aussi libre. $\square$

1.2 Les foncteurs vers les représentations galoisiennes

1.2.1 Les anneaux de période

On renvoit à [Bre97a] ou au paragraphe 1.2 du chapitre III de cette thèse pour la définition des anneaux A_{cris} et $\hat{A}_{\mathrm{st}}$. On rappelle simplement qu'il s'agit de S-algèbres munies d'une filtration, d'un Frobenius, d'un opérateur de monodromie et d'une action du groupe de Galois G_K.

On pose $B^+_{\text{cris}} = A_{\text{cris}} \otimes_W K_0$, $A_{\text{cris},\infty} = A_{\text{cris}} \otimes_W K_0/W$, $\hat{B}^+_{\text{st}} = \hat{A}_{\text{st}} \otimes_W K_0$ et $\hat{A}_{\text{st},\infty} = \hat{A}_{\text{st}} \otimes_W K_0/W$. Comme A_{cris} et $\hat{A}_{\text{st}}$ sont plats sur W (puisque sans torsion), on a les deux suites exactes suivantes :

$$0 \longrightarrow A_{\text{cris}} \longrightarrow B^+_{\text{cris}} \longrightarrow A_{\text{cris},\infty} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \hat{A}_{\text{st}} \longrightarrow \hat{B}^+_{\text{st}} \longrightarrow \hat{A}_{\text{st},\infty} \longrightarrow 0.$$

1.2.2 Définitions des foncteurs

Si $\mathcal{M}$ est un module filtré sur S_{K_0} (resp. un module fortement divisible, resp. un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$), on pose :

$$T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{B}^+_{\text{st}})$$
$$(\text{resp. } T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st}}),$$
$$\text{resp. } T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st},\infty}))$$

où Hom signifie que l'on considère les morphismes S-linéaires compatibles à Fil^r, à ϕ_r et à l'opérateur de monodromie. Le $\mathbb{Z}_p$-module $T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M})$ hérite d'une action du groupe de Galois G_K.

On définit de même les foncteurs $T^\star_{\text{cris}}$ sur les catégories $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S_{K_0}}$, $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S}$ et $\underline{\mathcal{M}}^{r,S}$ en remplaçant partout dans ce qui précède la mention « st » par « cris ». Attention, ces derniers foncteurs ne sont pas à valeurs dans la catégorie des représentations de G_K mais seulement dans celles de $\text{Gal}(\bar{K}/K(\pi^{1/p^\infty}))$. Toutefois, nous n'aurons pas par la suite à utiliser l'action de Galois sur ces objets.

Dans le cas $er < p - 1$, les foncteurs précédents admettent de nombreuses propriétés agréables. On pourra se reporter au chapitre III pour avoir une présentation assez complète de celles-ci.

2 Modules fortement divisibles et objets de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$

Si $\mathcal{M}$ est un module fortement divisible et si $\mathcal{N}$ est un sous-module fortement divisible de $\mathcal{M}$, on peut former le quotient $\mathcal{M}/\mathcal{N}$ qui hérite[2] d'un Fil^r, d'un Frobenius et d'un opérateur de monodromie. En outre, il est facile de vérifier que $\phi_r(\text{Fil}^r(\mathcal{M}/\mathcal{N}))$ engendre $\mathcal{M}/\mathcal{N}$ en tant que S-module. Ainsi, par exemple, si $\mathcal{M}/\mathcal{N}$ est isomorphe en tant que S-module à $S/p^{n_1}S \oplus \ldots \oplus S/p^{n_d}S$ pour certains entiers n_i, $\mathcal{M}/\mathcal{N}$ muni des structures supplémentaires est un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ (et même de $\underline{\mathcal{M}}^{r,\text{FI}}$). On peut se demander si tout objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ peut s'obtenir ainsi.

Le but de cette partie est de donner une preuve du résultat partiel suivant :

Théorème 2.a. *Tout objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ peut s'écrire comme quotient de deux objets de $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S}$.*

[2] D'après les résultats de [Bre99a], on a automatiquement $\text{Fil}^r\mathcal{N} = \mathcal{N} \cap \text{Fil}^r\mathcal{M}$.

Si $\mathcal{M}$ est un objet de $\mathcal{C}$, pour tout $s \leqslant r$, posons :

$$\mathrm{Fil}^s\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{M} \,/\, E(u)^{r-s}x \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}\}.$$

Pour des besoins techniques, nous allons prouver un résultat plus fort que le théorème 2.a, à savoir :

Proposition 2.b. *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$. Alors il existe $\hat{\mathcal{M}}' \subset \hat{\mathcal{M}}$ deux objets de $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S}$ tels que l'on ait la suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \hat{\mathcal{M}}' \longrightarrow \hat{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

(les morphismes étant compatibles au Fil^r et au Frobenius) et induisant pour tout s compris entre 0 et r une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathit{Fil}^s\hat{\mathcal{M}}' \longrightarrow \mathit{Fil}^s\hat{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathit{Fil}^s\mathcal{M} \longrightarrow 0\,. \tag{1}$$

En outre il existe des éléments $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_d \in \mathit{Fil}^r\hat{\mathcal{M}}$ tels que la famille des $\phi_r(\hat{f}_i)$ soit une S-base de $\hat{\mathcal{M}}$ et :

$$\mathit{Fil}^r\hat{\mathcal{M}} = \mathit{Fil}^pS \cdot \hat{\mathcal{M}} + \sum_{i=1}^d S\hat{f}_i.$$

Remarques. Avec les notations de la proposition, la flèche $\hat{\mathcal{M}}' \to \hat{\mathcal{M}}$ induit un isomorphisme $\hat{\mathcal{M}}' \otimes_S S_{K_0} \to \hat{\mathcal{M}} \otimes_S S_{K_0}$. En effet, l'injectivité résulte de la platitude de S_{K_0} sur S (c'est un localisé) et la surjectivité du fait que $\mathcal{M} \otimes_S S_{K_0} = 0$ puisque $\mathcal{M}$ est tué par une puissance de p.

En général, la suite (1) est seulement exacte à gauche ; il s'agit donc bien là d'une condition supplémentaire que de demander son exactitude. En contrepartie, l'existence des $\hat{f}_i$ vérifiant les propriétés de la proposition est automatique (voir par exemple la preuve du lemme 3.2.3.2 de [Bre99a]). Toutefois, nous n'aurons pas besoin d'utiliser ce résultat par la suite.

Les hypothèses sur les $\hat{f}_i$ assurent qu'ils forment une famille S-libre. En effet, supposons que l'on ait une relation de la forme $s_1\hat{f}_1 + \cdots + s_d\hat{f}_d = 0$. En appliquant ϕ_r, on obtient :

$$\phi(s_1)\phi_r(\hat{f}_1) + \cdots + \phi(s_d)\phi_r(\hat{f}_d) = 0$$

et puisque la famille des $\phi_r(\hat{f}_i)$ est une S-base de $\hat{\mathcal{M}}$, il vient $\phi(s_i) = 0$ pour tout i. Ceci entraîne $s_i = 0$ pour tout i, et donc la famille $(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_d)$ est bien libre.

La preuve de la proposition 2.b se découpe en trois parties : tout d'abord, nous montrons qu'il n'est pas nécessaire de se soucier de $\hat{\mathcal{M}}$ (paragraphe 2.1) puis nous traitons le cas des objets de $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S/pS}$ (paragraphe 2.2) avant de s'intéresser aux extensions (paragraphe 2.3).

2.1 Une réduction

Ce paragraphe est consacré à réduire la preuve de la proposition 2.b à la proposition suivante qui ne fait pratiquement plus cas du module $\hat{\mathcal{M}}'$:

Proposition 2.1.1. *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$. Alors il existe $\hat{\mathcal{M}}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S}$ et une surjection (compatible au Fil^r et au Frobenius) $f : \hat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$ induisant pour tout s compris entre 0 et r des surjections $\mathrm{Fil}^s \hat{\mathcal{M}} \to \mathrm{Fil}^s \mathcal{M}$ et telle que $\phi_r(\ker f \cap \mathrm{Fil}^r \hat{\mathcal{M}})$ engendre $\ker f$.*

En outre il existe des éléments $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_d \in \mathrm{Fil}^r \hat{\mathcal{M}}$ tels que la famille des $\phi_r(\hat{f}_i)$ soit une S-base de $\hat{\mathcal{M}}$ et :

$$\mathrm{Fil}^r \hat{\mathcal{M}} = \mathrm{Fil}^p S \cdot \hat{\mathcal{M}} + \sum_{i=1}^{d} S \hat{f}_i.$$

Pour cela, on démontre le théorème suivant :

Théorème 2.1.2. *Soient $\hat{\mathcal{M}}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S}$ (resp. de $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S}$), $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ (resp. de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$) et $f : \hat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$ un morphisme surjectif (respectant les structures additionnelles). On suppose que $\phi_r(\ker f \cap \mathrm{Fil}^r \hat{\mathcal{M}})$ engendre $\ker f$. Alors $\ker f$ hérite des structures additionnelles de $\hat{\mathcal{M}}$ qui en font un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S}$ (resp. de $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S}$).*

On laisse au lecteur le soin de se convaincre que la combinaison du théorème précédent et de la proposition 2.1.1 permet bien d'obtenir la proposition 2.b. On se concentre à présent sur la preuve du théorème 2.1.2. Commençons par un lemme facile :

Lemme 2.1.3. *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Alors il existe des S-modules libres de rang fini A et B et une suite exacte de S-modules :*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0\,.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur la longueur[3] (nécessairement finie) de $\mathcal{M}$. Si $\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$, c'est un S/pS-module libre de rang fini et la propriété est alors évidente.

Sinon, par définition de $\underline{\mathcal{M}}^r$, il existe une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ sont des objets non nuls de $\underline{\mathcal{M}}^r$. En particulier, leur longueur est strictement inférieure à celle de $\mathcal{M}$ et on peut leur appliquer l'hypothèse de récurrence. On obtient ainsi le

[3]Dans tout ce chapitre, les longueurs seront toujours calculées dans la catégorie des S-modules.

diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & A' \arrow[d] & & A'' \arrow[d] & \\
 & B' \arrow[d] & & B'' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{M}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M} \arrow[r] & \mathcal{M}'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

où A', B', A'' et B'' sont des S-modules libres de rang fini. Posons $B = B' \oplus B''$. Comme B'' est libre, il est facile de construire une application surjective S-linéaire $B \to \mathcal{M}$ qui complète le diagramme précédent de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & A' \arrow[d] & & A'' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{M}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M} \arrow[r] & \mathcal{M}'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Notons A le noyau de $B \to \mathcal{M}$. On a évidemment une suite exacte $0 \to A \to B \to \mathcal{M} \to 0$ mais le lemme du serpent appliqué au diagramme précédent fournit l'autre suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$. On en déduit, puisque A' et A'' sont libres de rang fini, qu'il en est de même de A. Ceci conclut la preuve du lemme. $\square$

Prouvons à présent le théorème 2.1.2. On traite seulement le cas des objets de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S}$ et $\underline{\mathcal{M}}^r$, l'autre étant absolument identique. Il est facile de se convaincre que la seule difficulté réside dans la liberté de ker f en tant que S-module.

On utilise le lemme 2.1.3 : il existe des S-modules libres de rang fini A et B tels que l'on ait une suite exacte (de S-modules) :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} \mathcal{M} \longrightarrow 0 .$$

Par ailleurs comme B et $\hat{\mathcal{M}}$ sont libres, on peut construire des applications S-linéaires $\alpha : B \to \hat{\mathcal{M}}$ et $\beta : B \to \hat{\mathcal{M}}$ rendant les diagrammes suivants commutatifs :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h"'] & \hat{\mathcal{M}} \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{M} \arrow[r, equal] & \mathcal{M} \end{tikzcd} \quad ; \quad \begin{tikzcd} B \arrow[d, "h"'] & \hat{\mathcal{M}} \arrow[l, "\beta"'] \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{M} \arrow[r, equal] & \mathcal{M} \end{tikzcd} \qquad (2)$$

Le morphisme α n'est pas nécessairement surjectif. Nous allons dans un premier temps agrandir B (et A) pour qu'il le devienne. Pour cela, nous allons avoir besoin d'une hypothèse de type « noethérien » et nous allons donc devoir travailler sur un anneau T plus petit que S.

Les S-modules A, B et $\mathcal{M}$ sont libres de rang fini sur S. Fixons une base de chacun de ces modules et considérons les matrices des applications g, α et β dans ces bases. Soit T le sous-anneau de S engendré par les coefficients de ces matrices. D'une part, c'est un anneau noetherien, et d'autre part il existe des T-modules A_T, B_T et $\hat{\mathcal{M}}_T$ et des applications T-linéaires $g_T : A_T \to B_T$, $\alpha_T : B_T \to \hat{\mathcal{M}}_T$ et $\beta_T : \hat{\mathcal{M}}_T \to B_T$ le tout tel que $A = A_T \otimes_T S$, $B = B_T \otimes_T S$, $\hat{\mathcal{M}}_T = \hat{\mathcal{M}} \otimes_T S$, $g = g_T \otimes \iota$, $\alpha = \alpha_T \otimes \iota$ et $\beta = \beta_T \otimes \iota$ où ι désigne l'inclusion de T dans S.

L'application g_T est injective et identifie donc A_T à un sous-module de B_T. On pose $\mathcal{M}_T = B_T / A_T$, obtenant par le fait une suite exacte :

$$0 \longrightarrow A_T \xrightarrow{g_T} B_T \xrightarrow{h_T} \mathcal{M}_T \longrightarrow 0 \,.$$

Après tensorisation par S (au-dessus de T), on obtient une nouvelle suite exacte :

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow \mathcal{M}_T \otimes_T S \longrightarrow 0$$

(l'exactitude à gauche est vraie car l'application $A \to B$ n'est autre que g). On en déduit que $\mathcal{M}$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{M}_T \otimes_T S$. Cela permet de définir $f_T = h_T \circ \beta_T$. On dispose alors de deux diagrammes commutatifs sur T redonnant par tensorisation par S les diagrammes (2).

Supposons à présent que l'application α_T ne soit pas surjective. Alors il existe $x \in \hat{\mathcal{M}}_T$ n'appartenant pas à l'image de s_T. Posons $A_T^{(1)} = B_T \oplus T$ et $B_T^{(1)} = B_T \oplus T$. Considérons $y \in B_T$ un antécédent par h_T de $f_T(x)$ et définissons les applications $g_T^{(1)} : A_T^{(1)} \to B_T^{(1)}$, $h_T^{(1)} : B_T^{(1)} \to \mathcal{M}_T$, $\alpha_T^{(1)} : B_T^{(1)} \to \hat{\mathcal{M}}_T$ et $\beta_T^{(1)} : \hat{\mathcal{M}}_T \to B_T^{(1)}$ définies par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} g_T^{(1)}(a \oplus t) &= (g_T(a) - ty) \oplus t \\ h_T^{(1)}(b \oplus t) &= h_T(b) + t f_T(x) \\ \alpha_T^{(1)}(b \oplus t) &= \alpha_T(b) + tx \\ \beta_T^{(1)}(m) &= \beta_T(m) \end{aligned}$$

avec $a \in A_T$, $b \in B_T$, $m \in \hat{\mathcal{M}}$ et $t \in T$. On vérifie que les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} B_T^{(1)} \arrow[r, "\alpha_T^{(1)}"] \arrow[d, "h_T^{(1)}"'] & \hat{\mathcal{M}}_T \arrow[d, "f_T^{(1)}"] \\ \mathcal{M}_T \arrow[r, equal] & \mathcal{M}_T \end{tikzcd} \quad ; \quad \begin{tikzcd} B_T^{(1)} \arrow[d, "h_T^{(1)}"'] & \hat{\mathcal{M}}_T \arrow[l, "\beta_T^{(1)}"'] \arrow[d, "f_T^{(1)}"] \\ \mathcal{M}_T \arrow[r, equal] & \mathcal{M}_T \end{tikzcd}$$

sont commutatifs et que la suite :

$$0 \longrightarrow A_T^{(1)} \xrightarrow{g_T^{(1)}} B_T^{(1)} \xrightarrow{h_T^{(1)}} \mathcal{M}_T \longrightarrow 0 .$$

est exacte. Si $\alpha_T^{(1)}$ est surjective, on a fini. Sinon, on itère le procédé pour construire successivement des T-modules libres $A_T^{(s)}$ et $B_T^{(s)}$ et des applications $g_T^{(s)}$, $h_T^{(s)}$, $\alpha_T^{(s)}$ et $\beta_T^{(s)}$ vérifiant des axiomes analogues à ceux écrits précédemment.

Notons $\mathcal{I}_s \subset \hat{\mathcal{M}}_T$ l'image de $\alpha_T^{(s)}$. Les $\mathcal{I}_s$ forment une suite strictement croissante de sous-T-modules de $\mathcal{M}_T$, qui est un module libre sur l'anneau noethérien T. On en déduit que la suite $(\mathcal{I}_s)$ est finie, et donc qu'il existe un entier s pour lequel l'application $\beta_T^{(s)}$ est surjective.

Finalement en tensorisant par S et en s'affranchissant désormais des notations « (s) », on a construit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r, dotted] & \ker \alpha \arrow[r, dotted] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \ker f \arrow[r, dotted] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker \alpha \arrow[r] & B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \hat{\mathcal{M}} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ & & \mathcal{M} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{M} \arrow[d] & \\ & & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

où toutes les suites sont exactes (les flèches en pointillé existent et forment une suite exacte par application du lemme du serpent). Par ailleurs, comme $\hat{\mathcal{M}}$ est libre, la suite exacte horizontale du bas est scindée et il en est donc de même de la suite exacte en pointillés. On en déduit une écriture $A = \ker \alpha \oplus \ker f$ qui implique que $\ker f$ est projectif (puisque facteur direct d'un module libre). Comme l'anneau S est local, on en déduit que $\ker f$ est libre comme désiré.

2.2 Le cas des objets de $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S/pS}$

Dans ce paragraphe, nous prouvons la proposition 2.1.1 lorsque l'objet $\mathcal{M}$ est tué par p. Soit donc $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S/pS}$. D'après la proposition 1.1.5, il existe $(e_1, \dots, e_d)$ une base adaptée de $\mathcal{M}$ pour des entiers $n_1, \dots, n_d$.

Notons L la clôture galoisienne de K dans $\bar{K}$. C'est une extension finie de degré D de K dans laquelle on a une écriture :

$$E(u) = (u - \pi_1)(u - \pi_2) \dots (u - \pi_e)$$

pour des $\pi_i \in \mathcal{O}_L$. La valuation v (normalisée par $v(\pi) = 1$) s'étend de façon unique à L en une valuation que l'on note encore v. Soient π_L une uniformisante de L et $\ell = L/\pi_L$ son corps résiduel. On fixe $(b_1, \dots, b_D)$ une $\mathcal{O}_K$-base de $\mathcal{O}_L$ avec $b_1 = 1$ et $v(b_j) > 0$ pour tout $j > [\ell : k]$.

Soit $S_{\mathcal{O}_L} = S \otimes_W \mathcal{O}_L$. C'est une S-algèbre, libre de rang D en tant que S-module dont une base est $(1 \otimes b_1, 1 \otimes b_2, \dots, 1 \otimes b_D)$. On étend la filtration à $S_{\mathcal{O}_L}$ en posant $\mathrm{Fil}^s S_{\mathcal{O}_L} = \mathrm{Fil}^s S \otimes_W \mathcal{O}_L \subset S_{\mathcal{O}_L}$. On étend également le Frobenius et l'opérateur de monodromie en des applications $\phi_L : S_{\mathcal{O}_L} \to S_{\mathcal{O}_L}$ et $N_L : S_{\mathcal{O}_L} \to S_{\mathcal{O}_L}$ respectivement ϕ-semi-linéaires et S-linéaires définies par $\phi(1 \otimes b_j) = 1 \otimes b_j$ et $N(1 \otimes b_j) = 0$. Par abus, on désigne encore par π_i (resp. π^i) l'élément $1 \otimes \pi_i \in S_{\mathcal{O}_K}$ (resp. $1 \otimes \pi^i \in S_{\mathcal{O}_K}$). Si n est un entier supérieur à e, on définit $\pi_n = \pi_{n'}$ où n' désigne le reste de la division euclidienne de n par e. On pose enfin :

$$E_n(u) = (u - \pi_1)(u - \pi_2) \dots (u - \pi_n).$$

On a immédiatement $E_{ne}(u) = E(u)^n$ et plus généralement $E_{ne+m}(u) = E(u)^n E_m(u)$ pour tous entiers n et m. En outre, $E_n(u) \equiv u^n \pmod{\pi_L}$ pour tout n.

Définissons :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{M}} &= \bigoplus_{i=1}^{d} S_{\mathcal{O}_L} \hat{e}_i \\ \mathrm{Fil}^r \hat{\mathcal{M}} &= \sum_{i=1}^{d} S_{\mathcal{O}_L} E_{n_i}(u) \hat{e}_i + \mathrm{Fil}^p S_{\mathcal{O}_L} \cdot \hat{\mathcal{M}} \subset \hat{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

Comme $S_{\mathcal{O}_L}$ est un S-module libre de rang D, $\hat{\mathcal{M}}$ est un S-module libre de rang dD. De plus, l'inégalité $n_i \leqslant er$ donne l'inclusion $\mathrm{Fil}^r S \cdot \hat{\mathcal{M}} \subset \mathrm{Fil}^r S_{\mathcal{O}_K} \cdot \hat{\mathcal{M}} \subset \mathrm{Fil}^r \hat{\mathcal{M}}$.

Lemme 2.2.1. *Avec les notations précédentes, on a $p\mathrm{Fil}^r \hat{\mathcal{M}} = \mathrm{Fil}^r \hat{\mathcal{M}} \cap p\mathcal{M}$. Autrement dit, le quotient $\hat{\mathcal{M}}/\mathrm{Fil}^r \hat{\mathcal{M}}$ est sans p-torsion.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que si $x \in S_{\mathcal{O}_L}$ est tel que px appartient à $S_{\mathcal{O}_L} E_n(u) + \mathrm{Fil}^p S_{\mathcal{O}_L}$, alors il en est de même de x.

Supposons qu'il existe $s \in S_{\mathcal{O}_L}$ et $t \in \mathrm{Fil}^p S_{\mathcal{O}_L}$ tels que $px = E_n(u) s + t$. Ainsi $px \equiv E_n(u) s \pmod{\mathrm{Fil}^p S_{\mathcal{O}_L}}$. Mais, on a l'identification :

$$S_{\mathcal{O}_L}/\mathrm{Fil}^p S_{\mathcal{O}_L} \simeq \mathcal{O}_L[u]/E(u)^p.$$

Du fait que l'anneau $\mathcal{O}_L$ est factoriel et que $E_n(u)$ divise $E(u)^p$, on déduit que s est un multiple de p dans $S_{\mathcal{O}_L}/\mathrm{Fil}^p S_{\mathcal{O}_L}$. Autrement dit, il existe $s' \in S_{\mathcal{O}_L}$ et $t' \in \mathrm{Fil}^p S_{\mathcal{O}_L}$ tels que $px = E_n(u)\, ps' + t'$. Ainsi $t' \in \mathrm{Fil}^p S_{\mathcal{O}_L} \cap pS_{\mathcal{O}_L}$ et cette intersection s'identifie à $p\mathrm{Fil}^p S_{\mathcal{O}_L}$ puisque $S_{\mathcal{O}_L}/\mathrm{Fil}^p S_{\mathcal{O}_L}$ est sans p-torsion. Cela conclut. $\square$

Lemme 2.2.2. *Pour tout entier s compris entre 0 et r, l'application $\mathrm{Fil}^s\hat{\mathcal{M}} \to \mathrm{Fil}^s\mathcal{M}$ est surjective.*

Démonstration. On vérifie :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fil}^s\hat{\mathcal{M}} &= \sum_{i=1}^{d} S_{\mathcal{O}_L} \cdot E_{\max(es-m_i,0)}(u)\, \hat{e}_i + \mathrm{Fil}^p S_{\mathcal{O}_L} \cdot \hat{\mathcal{M}} \\
\mathrm{Fil}^s\mathcal{M} &= \sum_{i=1}^{d} S/pS \cdot u^{\max(es-m_i,0)} e_i + \mathrm{Fil}^p S/pS \cdot \mathcal{M}
\end{aligned}$$

où par définition $m_i = er - n_i$. Le résultat en découle directement. $\square$

On dispose d'une application S-linéaire surjective $\hat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$, $\hat{e}_i \mapsto e_i$, $b_j\hat{e}_i \mapsto 0$ ($j \geqslant 1$). qui respecte le Fil^r. On définit à présent l'application $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{M}} \to \hat{\mathcal{M}}$. Pour cela, pour tout i, on choisit $\hat{x}_i \in \sum_{i=1}^d S\hat{e}_i$ un relevé (quelconque) de $\phi_r(e_i) \in \mathcal{M}$. Si $x = aE_{n_i}(u)\hat{e}_i$, on définit $\phi_r(x) = \phi_L(a)\hat{x}_i$. Comme les $E_{n_i}(u)\hat{e}_i$ forment une famille libre sur $S_{\mathcal{O}_L}$ de $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$, la définition précédente conduit à une unique application additive :

$$\phi_r : \sum_{i=1}^{d} S_{\mathcal{O}_L} E_{n_i}(u)\hat{e}_i \to \hat{\mathcal{M}}.$$

On s'aperçoit facilement que ϕ_r est ϕ-linéaire et qu'elle se prolonge par linéarité et continuité à tout $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$.

L'image de ϕ_r contient à l'évidence tous les $b_j\hat{x}_i$, et ceux-ci forment une famille génératrice (en tant que S-module) de $\mathcal{M}$. On en déduit que $\mathrm{im}\,\phi_r$ engendre bien tout $\hat{\mathcal{M}}$.

Lemme 2.2.3. *Le module fortement divisible $\hat{\mathcal{M}}$ admet une base adaptée.*

Démonstration. Il suffit de prouver le lemme lorsque $d = 1$. Notons $n_1 = \alpha e + \beta$ la division euclidienne de n_1 par e. La famille formée des :

$$b_j(u - \pi_{\beta+1}) \cdots (u - \pi_{\beta+i})\hat{e}_1$$

pour $0 \leqslant i \leqslant e-1$ et $1 \leqslant j \leqslant D$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}$ modulo l'idéal maximal de S. D'après le lemme de Nakayama, c'est donc une famille génératrice de $\mathcal{M}$ (c'est même une base puisqu'elle compte le bon nombre de vecteurs).

Tout élément de $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ s'écrit donc, à un élément de $\mathrm{Fil}^p S \cdot \mathcal{M}$ près, comme une combinaison linéaire des :

$$b_j E_{n_1}(u)(u - \pi_{\beta+1}) \cdots (u - \pi_{\beta+i})\hat{e}_1 = b_j E(u)^\alpha E_{b+i}(u)$$

pour $0 \leqslant i \leqslant e-1$ et $1 \leqslant j \leqslant D$. On en déduit que la famille formée des $b_j E_i(u)$ (toujours pour $0 \leqslant i \leqslant e-1$ et $1 \leqslant j \leqslant D$) est une base[4] adaptée pour les entiers $n_{i,j}$ avec $n_{i,j} = \alpha + 1$ si $i < \beta$ et $n_{i,j} = \alpha$ sinon. □

Avec tout ce qui précède, il ne reste plus qu'à prouver le lemme suivant pour déduire la proposition 2.1.1 dans le cas d'un objet $\mathcal{M}$ de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S/pS}$: l'existence des $\hat{f}_i$ provient de l'existence d'une base adaptée par le lemme 1.1.7.

Lemme 2.2.4. *Si f désigne la projection $\hat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$, alors $\phi_r(\ker f \cap \mathrm{Fil}^r \hat{\mathcal{M}})$ engendre $\ker f$.*

Démonstration. En reprenant les notations précédentes, les $\hat{x}_i$ forment une S-base de $\sum_{i=1}^d S\hat{e}_i$. Il suffit donc de montrer que les $b_j \hat{x}_i$ $(j > 1)$ et les $p\hat{x}_i$ peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires d'éléments de $\phi_r(\ker f \cap \mathrm{Fil}^r \hat{\mathcal{M}})$. Mais les hypothèses faites sur les b_j assurent que la décomposition sur la base $(b_1, \dots, b_D)$ d'un $a \in \mathcal{O}_L$ de valuation strictement positive ne fait intervenir que des b_j avec $j > [\ell : k]$. En particulier, $x \otimes a \in \ker f$ pour tout $x \in \sum_{i=1}^d S\hat{e}_i$, d'où :

$$b_j E_{n_i}(u)\hat{e}_i \equiv u^{n_i}\hat{e}_i \otimes b_j \equiv 0 \pmod{\ker f}$$

pour tout $j > 1$. Or $b_j \hat{x}_i = \phi_r(b_i E_{n_i}(u)\hat{e}_i)$ et donc $b_j \hat{x}_i$ est dans $\phi_r(\ker f \cap \mathrm{Fil}^r \hat{\mathcal{M}})$. De même, $p\hat{x}_i = \phi_r(pE_{n_i}(u)\hat{e}_i)$, puis $p\hat{x}_i \in \phi_r(\ker f \cap \mathrm{Fil}^r \hat{\mathcal{M}})$. □

2.3 Le cas des extensions

On raisonne à présent par récurrence sur la longueur d'un objet $\mathcal{X}$ de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$. Si $\mathcal{X}$ est de longueur 1, il est dans $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S/pS}$ et le paragraphe 2.2 permet de conclure. On considère maintenant un objet $\mathcal{X}$ de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ et on suppose que la proposition 2.1.1 est prouvée pour tous les objets $\mathcal{M}$ de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ de longueur strictement inférieure à $\mathcal{X}$. Si $\mathcal{X}$ est dans $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S/pS}$, le travail a déjà été fait dans le paragraphe 2.2. On suppose donc que ce n'est pas le cas.

On commence par prouver le lemme suivant :

Lemme 2.3.1. *Soit $\mathcal{X}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ qui n'est pas annulé par p. Il existe une suite exacte dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r$:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont des objets non nuls de $\underline{\mathcal{M}}^r$ et où $\mathcal{N} \in \underline{\mathcal{M}}_0^{r,S/pS}$.

Démonstration. Il existe par hypothèse une suite exacte de la forme $0 \to \mathcal{M} \to \mathcal{X} \to \mathcal{N} \to 0$ où $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont des objets non nuls de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$. Si $\mathcal{N} \in \underline{\mathcal{M}}_0^{r,S/pS}$, on a fini. Sinon, on peut construire une seconde suite exacte $0 \to \mathcal{N}' \to \mathcal{N} \to \mathcal{N}_1 \to 0$ où $\mathcal{N}'$ et $\mathcal{N}_1$ sont des objets non nuls de

[4] C'est une base pour la même raison que précédemment.

$\underline{\mathcal{M}}_0^r$. Ces deux suites exactes s'insèrent dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{N}' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{M} \arrow[r] & \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{N} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & \mathcal{N}_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{N}_1 \arrow[d] & \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{M}_1$ désigne le noyau de la composée $\mathcal{X} \to \mathcal{N} \to \mathcal{N}_1$ et où toutes les suites écrites sont exactes. La suite exacte du haut assure que $\mathcal{M}_1$ est un objet non nul de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$, et la suite exacte verticale de gauche permet de voir $\mathcal{X}$ comme extension de $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{N}_1$. Par ailleurs comme $\mathcal{N}'$ n'est pas nul, la longueur de $\mathcal{N}_1$ est strictement inférieure à celle de $\mathcal{N}$. Une itération de ce procédé permet de conclure. $\square$

À partir de maintenant, on considère une suite exacte fournie par le lemme 2.3.1. La non nullité de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ implique qu'ils sont de longueur strictement inférieure à celle de $\mathcal{X}$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence qui donne l'existence d'objets de $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S}$, $\hat{\mathcal{M}}$ et $\hat{\mathcal{N}}$ munis de surjections $\mathrm{Fil}^s\hat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$ et $\mathrm{Fil}^s\hat{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$ pour tout $0 \leqslant s \leqslant r$. De plus, il existe des $\hat{m}_i \in \mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{M}}$ tels que :

$$\mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{M}} = S\hat{m}_1 + \cdots + S\hat{m}_h + \mathrm{Fil}^p S \cdot \hat{\mathcal{M}} \tag{3}$$

et $(\phi_r(\hat{m}_1), \ldots, \phi_r(\hat{m}_h))$ forme une base de $\hat{\mathcal{M}}$. En outre, d'après le lemme 2.2.3, on peut supposer donnée $(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_d)$ une base adaptée de $\hat{\mathcal{N}}$ pour les entiers $n_1, \ldots, n_d$ (compris entre 0 et r).

On veut construire $\hat{\mathcal{X}}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S}$ et les flèches en pointillé du diagramme suivant pour le rendre commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \hat{\mathcal{M}} \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \hat{\mathcal{X}} \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted, "\mathrm{pr}"] & \hat{\mathcal{N}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{M} \arrow[r] & \mathcal{X} \arrow[r] & \mathcal{N} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En tant que S-module, on pose $\hat{\mathcal{X}} = \hat{\mathcal{M}} \oplus \hat{\mathcal{N}}$, et on définit les flèches horizontales de façon évidente. Pour $1 \leqslant i \leqslant d$, notons $\hat{e}'_i = (0, \hat{e}_i) \in \hat{\mathcal{X}}$ et e_i l'image de $\hat{e}_i$ dans $\mathcal{N}$. Considérons e'_i un relevé de e_i dans $\mathcal{X}$. L'application pr est définie par $\mathrm{pr}(\hat{e}'_i) = e'_i$, elle est surjective.

2.3.1 Construction de Fil $^r\mathcal{X}$

Notons $f_i = E(u)^{n_i} e'_i \in \mathcal{X}$. L'image de f_i dans $\mathcal{N}$ est $E(u)^{n_i} e_i$. C'est un élément de Fil $^r\mathcal{N}$. Puisque les suites :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{Fil}^r\mathcal{X} \longrightarrow \mathrm{Fil}^r\mathcal{N} \longrightarrow 0$$

sont exactes, il existe $g'_i \in \mathcal{M}$ tel que $f'_i = f_i + g'_i \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{X}$. En multipliant par $E(u)^{m_i}$ (où $m_i = r - n_i$), il vient $E(u)^r e'_i + E(u)^{m_i} g'_i \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{X}$ et donc $E(u)^{m_i} g'_i \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{X}$. Comme $g'_i \in \mathcal{M}$, il s'envoie sur 0 dans $\mathcal{N}$ et donc d'après la suite exacte précédente (sur les Fil ^{r}), on a $E(u)^{m_i} g'_i \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$, soit $g'_i \in \mathrm{Fil}^{n_i}\mathcal{M}$. D'après les hypothèses, il existe $\hat{g}'_i \in \mathrm{Fil}^{n_i}\hat{\mathcal{X}}$ relevant g'_i. Posons $\hat{f}'_i = E(u)^{n_i} \hat{e}'_i + \hat{g}'_i$ et définissons :

$$\mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{X}} = \mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{M}} + \sum_{i=1}^{d} S\hat{f}'_i + \mathrm{Fil}^p S \cdot \hat{\mathcal{N}} \subset \hat{\mathcal{X}}. \tag{4}$$

On a $E(u)^r \hat{e}'_i = E(u)^{m_i} \hat{f}'_i - E(u)^{m_i} \hat{g}'_i \in \mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{X}}$ et donc $\mathrm{Fil}^r S \cdot \mathcal{X} \subset \mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{X}}$.

Lemme 2.3.2. *Avec les notations précédentes, Fil $^r\hat{\mathcal{M}} = \hat{\mathcal{M}} \cap$ Fil $^r\hat{\mathcal{X}}$ et la suite :*

$$0 \longrightarrow \mathit{Fil}^r\hat{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathit{Fil}^r\hat{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathit{Fil}^r\hat{\mathcal{N}} \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. Soit $\hat{x} \in \hat{\mathcal{M}} \cap \mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{X}}$. Par définition de Fil $^r\hat{\mathcal{X}}$, il existe des élements $\hat{m} \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$, $s_1, \ldots, s_d \in S$ et $t_1, \ldots, t_d \in \mathrm{Fil}^p S$ tels que :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \hat{m} + s_1\hat{f}'_1 + \cdots + s_d\hat{f}'_d + t_1\hat{e}'_1 + \cdots + t_d\hat{e}'_d \\ &= \hat{m} + s_1\hat{g}'_1 + \cdots + s_d\hat{g}'_d + (E(u)^{n_1}s_1 + t_1)\hat{e}'_1 + \cdots + (E(u)^{n_d}s_d + t_d)\hat{e}'_d \end{aligned}$$

Comme $\hat{x}$, $\hat{m}$ et les $\hat{g}'_i$ sont des éléments de $\mathcal{M}$, en projetant l'égalité précédente sur $\mathcal{N}$ on obtient $E(u)^{n_i}s_i + t_i = 0$ pour tout i. Ceci assure $E(u)^{n_i}s_i \in \mathrm{Fil}^p S$, c'est-à-dire que $E(u)^{n_i}s_i$ est nul dans le quotient :

$$S/\mathrm{Fil}^p S \simeq W[u]/E(u)^p.$$

Comme l'anneau $W[u]$ est factoriel, il vient $s_i = E(u)^{p-n_i}s'_i + s''_i$ avec $s'_i \in S$ et $s''_i \in \mathrm{Fil}^p S$. On en déduit $s_i\hat{g}'_i \in \mathrm{Fil}^p\mathcal{M} \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ et finalement $\hat{x} \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$. Ceci démontre le premier point.

Pour le second point, l'injectivité et la surjectivité sont immédiates. L'exactitude au centre résulte directement du premier point. $\square$

Lemme 2.3.3. *Le quotient $\hat{\mathcal{X}}/$Fil $^r\hat{\mathcal{X}}$ est sans p-torsion.*

Démonstration. Remarquons que cela revient à prouver que si $p\hat{x} \in \operatorname{Fil}^r \hat{\mathcal{X}}$, alors $\hat{x} \in \operatorname{Fil}^r \hat{\mathcal{X}}$. Soit donc $\hat{x} \in \hat{\mathcal{X}}$ tel que $p\hat{x} \in \operatorname{Fil}^r \hat{\mathcal{X}}$. Notons $\hat{y}$ l'image de $\hat{x}$ dans $\hat{\mathcal{N}}$.

Par hypothèse, on a $p\hat{y} \in \operatorname{Fil}^r \hat{\mathcal{N}}$ et donc puisque $\hat{\mathcal{N}}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S}$, il vient $\hat{y} \in \operatorname{Fil}^r \hat{\mathcal{N}}$. L'exactitude des deux suites :

$$0 \longrightarrow \hat{\mathcal{M}} \longrightarrow \hat{\mathcal{X}} \longrightarrow \hat{\mathcal{N}} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Fil}^r \hat{\mathcal{M}} \longrightarrow \operatorname{Fil}^r \hat{\mathcal{X}} \longrightarrow \operatorname{Fil}^r \hat{\mathcal{N}} \longrightarrow 0$$

implique l'existence de $\hat{x}_0 \in \operatorname{Fil}^r \hat{\mathcal{X}}$ et $\hat{x}_1 \in \hat{\mathcal{M}}$ tels que $\hat{x} = \hat{x}_0 + \hat{x}_1$. De $p\hat{x} \in \operatorname{Fil}^r \hat{\mathcal{X}}$, on déduit $p\hat{x}_1 \in \operatorname{Fil}^r \hat{\mathcal{X}}$ et puis $p\hat{x}_1 \in \operatorname{Fil}^r \hat{\mathcal{M}}$ d'après la première partie du lemme 2.3.2. Ainsi $\hat{x}_1 \in \operatorname{Fil}^r \hat{\mathcal{M}}$ puis $\hat{x} \in \operatorname{Fil}^r \hat{\mathcal{X}}$. □

Lemme 2.3.4. *La projection $\hat{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ induit une application surjective $Fil^r \hat{\mathcal{X}} \to Fil^r \mathcal{X}$.*

Démonstration. On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Fil}^r \hat{\mathcal{M}} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Fil}^r \hat{\mathcal{X}} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Fil}^r \hat{\mathcal{N}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Fil}^r \mathcal{M} \arrow[r] & \operatorname{Fil}^r \mathcal{X} \arrow[r] & \operatorname{Fil}^r \mathcal{N} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La ligne du haut est exacte par le lemme 2.3.2, et celle du bas l'est par hypothèse. Les deux flèches verticales extrêmes sont surjectives, il en est donc de même de celle du milieu. □

2.3.2 Construction du Frobenius

Pour construire le Frobenius ϕ_r, il suffit de construire une application $\phi : \hat{\mathcal{X}} \to \hat{\mathcal{X}}$ (ϕ-semi-linéaire) telle que $\phi(\operatorname{Fil}^r \mathcal{X}) \subset p^r \mathcal{X}$. Il suffira ensuite de poser $\phi_r = \frac{\phi}{p^r}$. Or, pour définir l'application ϕ, il suffit de la définir sur $\mathcal{M}$ et de donner ses valeurs sur les $\hat{e}_i$.

Pour $x \in \mathcal{M}$, on pose $\phi(x) = \frac{1}{c^r}\phi_r(E(u)^r x)$. Pour tout i, on choisit $\hat{x}_i$ un élément de $\hat{\mathcal{X}}$ qui s'envoie sur $\phi_r(f'_i)$ dans $\mathcal{X}$ et sur $\phi_r(E(u)^{n_i}\hat{e}'_i)$ dans $\hat{\mathcal{N}}$ (c'est possible car ces deux éléments ont la même image dans $\mathcal{N}$) et on définit :

$$\phi(\hat{e}_i) = \frac{1}{c^{n_i}} p^{m_i} \hat{x}_i - \frac{1}{c^r}\phi_r(E(u)^{m_i}\hat{g}'_i).$$

Lemme 2.3.5. *Avec les définitions précédentes, on a $\phi(Fil^r \mathcal{X}) \subset p^r \mathcal{X}$ et le diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Fil^r \hat{\mathcal{M}} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_r"] & Fil^r \hat{\mathcal{X}} \arrow[r] \arrow[d, "\frac{\phi}{p^r}"] & Fil^r \hat{\mathcal{N}} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_r"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{\mathcal{M}} \arrow[r] & \hat{\mathcal{X}} \arrow[r] & \hat{\mathcal{N}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

est commutatif. De plus l'image de la flèche $\frac{\phi}{p^r}$ engendre $\mathcal{X}$.

Démonstration. Les deux premières assertions du lemme résultent du calcul suivant :

$$\begin{aligned}\phi(\hat{f}'_i) &= \phi(E(u)^{n_i}\hat{e}_i + \hat{g}'_i) = c^{n_i}p^{n_i}\phi(\hat{e}_i) + \phi(\hat{g}'_i) \\ &= p^r\hat{x}_i - \frac{1}{c^{m_i}}\phi_r(E(u)^{m_i}\hat{g}'_i) + \frac{1}{c^r}\phi_r(E(u)^r\hat{g}'_i) = p^r\hat{x}_i\end{aligned}$$

Le fait que l'image de la flèche $\frac{\phi}{p^r}$ engendre $\mathcal{X}$ découle alors d'une chasse au diagramme facile. □

On définit finalement $\phi_r = \frac{\phi}{p^r}$: $\mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{X}} \to \hat{\mathcal{X}}$.

2.3.3 Surjectivité sur les Fil^s

On a construit $\hat{\mathcal{X}}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S}$ et une projection $\hat{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ compatible aux structures. Il n'y a par contre pour l'instant aucune raison que les flèches déduites $\mathrm{Fil}^s\hat{\mathcal{X}} \to \mathrm{Fil}^s\mathcal{X}$ soient surjectives. Nous allons maintenant agrandir $\hat{\mathcal{X}}$ pour qu'elles le deviennent.

Supposons qu'il existe un entier $0 \leqslant s \leqslant r$ (en fait, il est impossible que $s = 0$ ou $s = r$) et un élément $x \in \mathrm{Fil}^s\mathcal{X}$ ne pouvant pas se relever dans $\mathrm{Fil}^s\hat{\mathcal{X}}$. Il se relève toutefois dans $\hat{\mathcal{X}}$: notons $\hat{x}$ un tel relevé. Soit $\hat{e}$ un « nouveau » vecteur. Définissons :

$$\hat{\mathcal{X}}_1 = \mathcal{X} \oplus S\hat{e}$$

$$\mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{X}}_1 = \mathrm{Fil}^r\mathcal{X} + S\hat{f} + \mathrm{Fil}^pS \cdot \hat{e} \tag{5}$$

où $\hat{f} = E(u)^{r-s}[\hat{e} + \hat{x}]$. On étend la projection pr en posant $\mathrm{pr}(\hat{e}) = 0$. Alors $\mathrm{pr}(\hat{f}) = E(u)^{r-s}x \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{X}$ et pr : $\hat{\mathcal{X}}_1 \to \mathcal{X}_1$ respecte encore le Fil^r. D'autre part, on a $E(u)^r\hat{e} = E(u)^s\hat{f} - E(u)^r\hat{x} \in \mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{X}}$ d'où on déduit $\mathrm{Fil}^rS \cdot \hat{\mathcal{X}}_1 \subset \mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{X}}_1$. Finalement, les lemmes 2.3.2 et 2.3.3 restent valables lorsque $\mathcal{X}$ est remplacé par $\mathcal{X}_1$ et les preuves sont analogues.

On étend le Frobenius ϕ_r à tout $\mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{X}}_1$ comme en 2.3.2 en définissant une application ϕ : $\mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_1$ telle que $\phi(\mathrm{Fil}^r\mathcal{X}_1) \subset p^r\mathcal{X}_1$. Soit $f = \mathrm{pr}(\hat{f}) = E(u)^{n-r}x \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{X}$. Notons $\hat{y} \in \hat{\mathcal{X}}$ un antécédent de $\phi_r(f)$. On définit

$$\phi(\hat{e}) = \frac{1}{c^{r-s}}p^s(\hat{e} + \hat{y}) - \phi(\hat{x})$$

et on vérifie comme dans le lemme 2.3.5 que l'on obtient comme cela un module fortement divisible $\mathcal{X}_1$ muni d'un morphisme compatible aux structures pr : $\hat{\mathcal{X}}_1 \to \mathcal{X}$. Avec ces nouveaux objets $x \in \mathrm{Fil}^s\mathcal{X}$ admet un antécédent dans $\mathrm{Fil}^s\hat{\mathcal{X}}_1$ qui est $\hat{e} + \hat{x}$.

Si toutes les applications $\mathrm{Fil}^s\hat{\mathcal{X}}_1 \to \mathrm{Fil}^s\mathcal{X}$ sont surjectives, on a fini. Sinon, on continue la construction, obtenant ainsi successivement $\hat{\mathcal{X}}_2, \ldots, \hat{\mathcal{X}}_k, \ldots$.

Lemme 2.3.6. *La construction précédente s'arrête nécessairement au bout d'un nombre fini d'étapes.*

Démonstration. Soit k un entier. Pour tout entier s, notons $I_{s,k}$ l'image du morphisme $\mathrm{Fil}^s \hat{\mathcal{X}}_k \to \mathrm{Fil}^s \mathcal{X}$. C'est un sous-module de $\mathcal{X}$ contenant $\mathrm{Fil}^p S \cdot \mathcal{X}$ (on peut faire bien mieux, mais ce ne sera pas utile pour la suite). Notons $\mathcal{I}_{s,k}$ l'image de $I_{s,k}$ par la projection $\mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathrm{Fil}^p S\mathcal{X}$. Elle détermine uniquement le module $I_{s,k}$. Posons finalement :

$$\mathcal{I}_k = \bigoplus_{s=0}^{r} \mathcal{I}_{s,k}.$$

Les $\mathcal{I}_k$ forment une suite strictement croissante de sous-$S/\mathrm{Fil}^p S$-modules de $(\mathcal{X}/\mathrm{Fil}^p S\mathcal{X})^{r+1}$. Mais l'anneau $S/\mathrm{Fil}^p S$ (qui s'identifie à $W[u]/E(u)^p$) est noethérien et $(\mathcal{X}/\mathrm{Fil}^p S\mathcal{X})^{r+1}$ est un module libre sur cet anneau. On en déduit que la suite des $\mathcal{I}_k$ est forcément finie. Cela conclut. $\square$

Notons $\hat{\mathcal{X}}_\infty$ le module $\hat{\mathcal{X}}_k$ obtenu lorsque la construction s'arrête. Par définition, pour tout s, la projection $\mathrm{pr} : \mathrm{Fil}^s \hat{\mathcal{X}}_\infty \to \mathrm{Fil}^s \mathcal{X}$ est surjective.

On démontre en utilisant l'argument du lemme 2.3.5 que si f désigne la projection $\hat{\mathcal{X}}_\infty \to \hat{\mathcal{X}}$, alors $\phi_r(\ker f \cap \mathrm{Fil}^r \hat{\mathcal{X}}_\infty)$ engendre $\ker f$. On déduit de tout ce qui précède la proposition 2.1.1. En effet, tout a été prouvé précédemment sauf l'existence des $\hat{f}_i$ (en reprenant les notations de la proposition 2.b), mais les formules (3), (4) et (5) et la définition de ϕ_r montrent que la famille formée par les $\hat{m}_i$, les $\hat{f}'_i$ et les éventuels $\hat{e}$ convient.

2.4 Remarques

L'auteur ne sait pas si le résultat du théorème 2.a reste valable lorsque l'on ajoute l'opérateur de monodromie, autrement dit s'il est vrai que tout objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ s'écrit comme quotient de deux modules fortement divisibles. Cette question avait déjà été posée dans [BM02] dans le cas $e = 1$.

Pour atteindre ce résultat plus général, on aurait envie de reprendre la démarche donnée précédemment. Le cas des objets de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$ ne pose pas véritablement problème : on peut avec un peu de travail définir un N convenable sur le relevé défini dans le paragraphe 2.2. Le véritable souci arrive lorsque l'on veut gérer les extensions, la difficulté provenant de la relation de commutation entre ϕ_r et N.

Remarquons finalement que si la réponse à cette question s'avère être affirmative, elle impliquerait le résultat suivant :

Proposition 2.4.1. *On suppose $er < p - 1$. Alors, l'image essentielle $T^\star_{st}$ est formée exactement aux quotients de torsion de sous-$\mathbb{Z}_p$-représentations de $\mathbb{Q}_p$-représentations semi-stables de Galois.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème 2.a et du théorème III.6.2.1. $\square$

Remarque. On rappelle que sous l'hypothèse $er < p - 1$, la foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ est pleinement fidèle (voir section 5 du chapitre III).

3 Construction de la dualité

Dans cette partie, nous donnons une application du théorème 2.a. Il nous sert à construire une dualité (dans le sens « anti-équivalence de catégorie sur elle-même ») sur les catégories introduites dans la première partie.

3.1 Sur les modules filtrés

Soit $\mathcal{M}$ un module filtré sur S_{K_0}. En tant que S_{K_0}-module, le dual de $\mathcal{M}$ est défini par $\mathcal{M}^\vee = \mathrm{Hom}_{S_{K_0}}(\mathcal{M}, S_{K_0})$ où $\mathrm{Hom}_{S_{K_0}}$ signifie que l'on considère tous les morphismes S_{K_0}-linéaires sans autre condition.

3.1.1 Filtration et Frobenius

On pose :

$$\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}^\vee = \{f \in \mathcal{M}^\vee \,/\, f(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^r S_{K_0}\}.$$

Lemme 3.1.1. *Soient $\mathcal{M}$ un module filtré sur S_{K_0} et $f : \mathit{Fil}^r\mathcal{M} \to \mathit{Fil}^r S_{K_0}$ une application S_{K_0}-linéaire. Alors il existe une* unique *application $g : \mathcal{M} \to S_{K_0}$ faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathit{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "g"] \\ \mathit{Fil}^r S_{K_0} \arrow[r, "\phi_r"] & S_{K_0} \end{tikzcd}$$

Démonstration. L'unicité résulte simplement du fait que $\mathrm{im}\,\phi_r$ engendre $\mathcal{M}$ en tant que S_{K_0}-module.

Pour l'existence, on considère $(e_1, \ldots, e_d)$ est une base adaptée de $\mathcal{M}$ pour les entiers $n_1, \ldots, n_d$ (voir proposition 1.1.5). Posons $x_i = \phi_r(E(u)^{n_i} e_i)$. Par le lemme 1.1.7, $(x_1, \ldots, x_d)$ est une base de $\mathcal{M}$. On pose alors $g(x_i) = \phi_r \circ f(E(u)^{n_i} e_i)$ et on prolonge l'application g à tout $\mathcal{M}$ par S_{K_0}-linéarité. Il est immédiat de vérifier que l'application g ainsi définie convient. $\square$

Si $f \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}^\vee$, il induit une application S_{K_0}-linéaire $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \to \mathrm{Fil}^r S_{K_0}$ et on note $\phi_r^\vee(f)$ l'unique application g déterminée par le lemme précédent. On définit ainsi une application $\phi_r^\vee : \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}^\vee \to \mathcal{M}^\vee$ dont il est formel de vérifier qu'elle est ϕ-semi-linéaire et qu'elle satisfait l'équation :

$$\phi_r^\vee(sx) = \frac{1}{c^r}\phi_r^\vee(s)\,\phi_r^\vee\left((E(u))^r x\right)$$

pour tout $s \in \mathrm{Fil}^r S_{K_0}$ et tout $x \in \mathcal{M}^\vee$.

Lemme 3.1.2. *Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ une base adaptée de $\mathcal{M}$ pour les entiers $n_1, \ldots, n_d$. Alors la base duale $(e_1^\vee, \ldots, e_d^\vee)$ de $\mathcal{M}^\vee$ est également adaptée pour les entiers $n_1^\vee, \ldots, n_d^\vee$ où $n_i^\vee = r - n_i$.*

De plus si l'on pose $x_i = \phi_r(E(u)^{n_i} e_i)$ et $x_i^\vee = \phi_r^\vee(E(u)^{n_i^\vee} e_i^\vee)$, les familles $(x_1, \ldots, x_d)$ et $(x_1^\vee, \ldots, x_d^\vee)$ sont des bases duales l'une de l'autre.

Démonstration. La famille des $e_j^\vee$ est définie par les égalités $e_j^\vee(e_i) = \delta_{ij}$ où δ désigne le symbole de Kronecker. Soit $f \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}^\vee$. On peut décomposer f sur la base des $e_j^\vee$ et donc écrire :

$$f = s_1 e_1^\vee + \ldots + s_d e_d^\vee$$

pour certains éléments $s_i \in S_{K_0}$. Comme $f \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}^\vee$, il vient $f(E(u)^{n_i} e_i) \in \mathrm{Fil}^r S_{K_0}$. Or $f(E(u)^{n_i} e_i) = E(u)^{n_i} s_i$. Cela prouve que s_i est un élément de $\mathrm{Fil}^{n_i^\vee} S_{K_0}$ et donc que la base $(e_1^\vee, \ldots, e_d^\vee)$ est adaptée pour les entiers $n_1^\vee, \ldots, n_d^\vee$.

Passons à la seconde partie du lemme. Déjà $(x_1, \ldots, x_d)$ est une base de $\mathcal{M}$ d'après le lemme 1.1.7. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "\phi_r^\vee(f)"] \\
\mathrm{Fil}^r S_{K_0} \arrow[r, "\phi_r"] & S_{K_0}
\end{tikzcd}$$

En prenant $f = E(u)^{n_j^\vee} e_j^\vee$ et en regardant quelle est l'image de $E(u)^{n_i} e_i$ par chacun des deux chemins, on obtient $x_j^\vee(x_i) = \delta_{ij}$, ce qui conclut. □

Corollaire 3.1.3. *L'image de $\phi_r^\vee$ engendre $\mathcal{M}^\vee$ en tant que S_{K_0}-module.*

Démonstration. C'est immédiat d'après le lemme 3.1.2 puisque (en gardant les notations du lemme) les $x_i^\vee$ forment une base de $\mathcal{M}^\vee$ d'éléments de $\phi_r(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}^\vee)$. □

3.1.2 La monodromie

Soit $f \in \mathcal{M}^\vee$. On définit $N^\vee(f)$ par la formule : $N^\vee(f) = N \circ f - f \circ N$, où le premier N désigne l'opérateur sur S_{K_0} et le second l'opérateur sur $\mathcal{M}$. On vérifie facilement que l'application $N^\vee(f)$ est S_{K_0}-linéaire et définit $N^\vee : \mathcal{M}^\vee \to \mathcal{M}^\vee$.

Il est immédiat de vérifier la K_0-linéarité et la condition de Leibniz. En outre, si $f \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}^\vee$, on a $f(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^r S_{K_0}$ donc $N \circ f(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^{r-1} S_{K_0}$, puis $E(u) N \circ f(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^r S_{K_0}$. Aussi, par hypothèse, on a $E(u) N(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ d'où $E(u) f \circ N(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^r S_{K_0}$. Finalement, $E(u) N^\vee(f) \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}^\vee$, d'où on trouve :

$$E(u) N^\vee(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}^\vee) \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}^\vee.$$

Lemme 3.1.4. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathit{Fil}^r\mathcal{M}^\vee \arrow[r, "\phi_r^\vee"] \arrow[d, "E(u)N^\vee"'] & \mathcal{M}^\vee \arrow[d, "cN^\vee"] \\
\mathit{Fil}^r\mathcal{M}^\vee \arrow[r, "\phi_r^\vee"] & \mathcal{M}^\vee
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $f \in \operatorname{Fil}^r \mathcal{M}^\vee$. Considérons $x \in \operatorname{Fil}^r \mathcal{M}$ et posons $y = \phi_r(x)$. Par définition, on a $\phi_r^\vee(f)(y) = \phi_r(f(x))$, d'où :

$$\begin{aligned} cN^\vee(\phi_r^\vee(f))(y) &= cN \circ \phi_r^\vee(f)(y) - \phi_r^\vee(f) \circ (cN)(y) \\ &= cN \circ \phi_r(f(x)) - \phi_r^\vee(f)(cN \circ \phi_r(x)) \\ &= \phi_r \circ (E(u)N)(f(x)) - \phi_r^\vee(f)(\phi_r \circ (E(u)N)(x)) \\ &= \phi_r \circ (E(u)N)(f(x)) - \phi_r(f(E(u)N(x))) \\ &= \phi_r[E(u)(N \circ f - f \circ N)(x)] \\ &= \phi_r[E(u)N^\vee(x)] = \phi_r^\vee(E(u)N^\vee)(y) \end{aligned}$$

ce qui démontre bien la commutativité. □

Les résultats précédents mis ensemble donnent la proposition suivante :

Proposition 3.1.5. *L'objet $\mathcal{M}^\vee$ muni de la filtration, du Frobenius et de l'opérateur de monodromie défini précédemment est un module filtré sur S_{K_0}.*

En outre, si f est un morphisme entre modules filtrés, on vérifie sans peine que sa transposée (au sens classique) est compatible à toutes les structures et donc aussi un morphisme entre modules filtrés. On a ainsi défini un foncteur $^\vee$ contravariant de la catégorie des modules filtrés sur elle-même.

Proposition 3.1.6. *Le foncteur $^\vee$ est une anti-équivalence de catégories (et donc une dualité). De plus, il transforme suites exactes courtes en suites exactes courtes.*

Démonstration. Le foncteur $^\vee$ est son propre quasi-inverse. En effet, on a un morphisme canonique de S_{K_0}-modules de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}^{\vee\vee}$ donné par $x \mapsto (f \mapsto f(x))$. C'est un isomorphisme puisque $\mathcal{M}$ est libre sur S. Il est facile de vérifier que cet isomorphisme respecte Fil^r, ϕ_r et N. Le seul point délicat est de montrer la surjectivité de $\operatorname{Fil}^r \mathcal{M} \to \operatorname{Fil}^r \mathcal{M}^{\vee\vee}$. Cela revient à montrer que si $x \notin \operatorname{Fil}^r \mathcal{M}$, alors il existe $f \in \operatorname{Fil}^r \mathcal{M}^\vee$ tel que $f(x) \notin \operatorname{Fil}^r S_{K_0}$. On considère pour cela $(e_1, \dots, e_d)$ une base adaptée de $\mathcal{M}$ pour les entiers $n_1, \dots, n_d$. On a alors une écriture :

$$x = s_1 e_1 + \cdots + s_d e_d$$

avec $s_i \in S_{K_0}$ et comme $x \notin \operatorname{Fil}^r \mathcal{M}$, il existe un indice i tel que $s_i \notin E(u)^{n_i} S_{K_0} + \operatorname{Fil}^p S_{K_0}$. On vérifie alors aisément que l'application S_{K_0}-linéaire $f : \mathcal{M} \to S_{K_0}$ définie par $f(e_i) = E(u)^{r-n_i}$ et $f(e_j) = 0$ pour $j \neq i$ convient.

Montrons à présent le second point. Considérons $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ une suite exacte de modules filtrés sur S_{K_0}. Puisque $\mathcal{M}''$ est un S_{K_0}-module libre, la suite $0 \to \mathcal{M}''^\vee \to \mathcal{M}^\vee \to \mathcal{M}'^\vee \to 0$ est exacte comme suite de S_{K_0}-modules. Par ailleurs, la suite :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Fil}^r \mathcal{M}''^\vee \longrightarrow \operatorname{Fil}^r \mathcal{M}^\vee \longrightarrow \operatorname{Fil}^r \mathcal{M}'^\vee \longrightarrow 0$$

est exacte à gauche. Il s'agit simplement de démontrer la surjectivité de $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}^\vee \to \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}'^\vee$. Notons $\mathrm{Fil}^r\mathcal{N}$ l'image de ce morphisme. On vérifie directement que ce Fil^r fait de $\mathcal{M}'^\vee$ un second module filtré sur S_{K_0} : notons le $\mathcal{N}$. On a, dans $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_{K_0}}$, une suite exacte $0 \to \mathcal{M}''^\vee \to \mathcal{M}^\vee \to \mathcal{N} \to 0$.

D'autre part, l'identité fournit un morphisme $f : \mathcal{N} \to \mathcal{M}'$ dans la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_{K_0}}$ dont le dual s'insère dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}' \arrow[r] \arrow[d, "f^\vee"'] & \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}'' \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Fil}^r\mathcal{N}^\vee \arrow[r] & \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r] & \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}''
\end{tikzcd}$$

On en déduit que $f^\vee$ est un isomorphisme dans $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_{K_0}}$, puis qu'il en est de même de $f = (f^\vee)^\vee$. Finalement $\mathrm{Fil}^r\mathcal{N} = \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}'$, et la surjectivité de $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}^\vee \to \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}'^\vee$ en découle. $\square$

3.2 Sur les objets de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$

Si $\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$, on lui associe son dual $\mathcal{M}^\vee$ en recopiant mot pour mot les constructions du paragraphe 3.1 en remplaçant systématiquement l'anneau S_{K_0} par l'anneau S/pS. Toutes les démonstrations se transposent directement (le point essentiel est que les objets de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$ admettent encore des bases adaptées — voir proposition 1.1.5) et on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.2.1. *Pour tout objet $\mathcal{M}$ de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$, $\mathcal{M}^\vee$ est encore un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$. Le foncteur $^\vee$ ainsi défini établit une anti-équivalence de catégories de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$ sur elle-même.*

Remarque. Comme précédemment, le foncteur $^\vee$ est son propre quasi-inverse.

3.3 Sur les modules fortement divisibles

Soit $\mathcal{M}$ un module fortement divisible. On définit $\mathcal{M}^\vee$ en recopiant les constructions faites dans le paragraphe 3.1. Toutefois, il y a plusieurs points qui utilisent de façon déterminante l'existence de bases adaptées et qui ne sont donc *a priori* pas clairs dans cette nouvelle situation. Ces points sont :

1. l'existence, pour tout $f \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}^\vee$, d'une application $\phi_r^\vee(f)$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{M} \arrow[d, dashed, "\phi_r^\vee(f)"] \\
\mathrm{Fil}^r S \arrow[r, "\phi_r"] & S
\end{tikzcd}$$

2. le fait que $\phi_r^\vee$ engendre $\mathcal{M}$ en tant que S-module.

Pour prouver le premier point, on plonge $\mathcal{M}$ dans le module filtré $\mathcal{M}_{K_0} = \mathcal{M} \otimes_S S_{K_0}$. Considérons $f \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}^\vee$. Il induit une application $f_{K_0} \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}_{K_0}^\vee$ et d'après le lemme 3.1.1, il existe une application $\phi_r^\vee(f_{K_0})$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}_{K_0} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M}_{K_0} \\ {\scriptstyle f_{K_0}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_r^\vee(f_{K_0})} \\ \mathrm{Fil}^r S_{K_0} & \xrightarrow{\phi_r} & S_{K_0} \end{array}$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer que si $x \in \mathcal{M}$, alors $\phi_r^\vee(f_{K_0})(x) \in S$. Soit $x \in \mathcal{M}$. Par hypothèse $\phi_r(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M})$ engendre $\mathcal{M}$ en tant que S-module, donc il existe des éléments $s_i \in S$ et des éléments $f_i \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ tels que $x = s_1\phi_r(f_1) + \ldots + s_n\phi_r(f_n)$. Or $f_{K_0}(f_i) \in \mathrm{Fil}^r S$ d'où $\phi_r \circ f_{K_0}(f_i) \in S$. Ainsi $\phi_r^\vee(f_{K_0})(\phi_r(f_i)) \in S$ puis $\phi_r^\vee(f_{K_0})(x) \in S$.

Passons au second point. On pose $\mathcal{X} = \mathcal{M}/p\mathcal{M}$. C'est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$ et on note $\mathcal{X}^\vee$ son dual défini en 3.2. La même preuve que celle qui sera donnée dans le lemme 3.4.1 implique que $\mathcal{X}^\vee$ s'identifie comme S-module au quotient $\mathcal{M}^\vee/p\mathcal{M}^\vee$. De plus cette identification est compatible au Fil^r (on a une inclusion évidente et le lemme 4.2.1.4 de [Bre00a] permet de conclure) et à $\phi_r^\vee$. Le second point résulte alors du fait que $\phi_r^\vee(\mathrm{Fil}^r\mathcal{X}^\vee)$ engendre $\mathcal{X}^\vee$.

On a finalement :

Proposition 3.3.1. *Le foncteur $^\vee$ est une dualité de la catégorie des modules fortement divisibles. De plus, il transforme suites exactes courtes en suites exactes courtes.*

Démonstration. On raisonne comme dans la proposition 3.1.6, le seul point délicat est à nouveau de montrer la surjectivité de $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \to \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}^{\vee\vee}$ (pour un module fortement divisible $\mathcal{M}$). Soit $x \notin \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$, on cherche à prouver l'existence d'un $f \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}^\vee$ tel que $f(x) \notin \mathrm{Fil}^r S$.

On pose $\mathcal{M}_{K_0} = \mathcal{M} \otimes_S S_{K_0}$ et $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}_{K_0} = \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \otimes_S S_{K_0} \subset \mathcal{M}_{K_0}$. D'après la preuve de la proposition 3.1.6, il existe une application S_{K_0}-linéaire $f_{K_0} : \mathcal{M}_{K_0} \to S_{K_0}$ telle que $f_{K_0}(x) \notin \mathrm{Fil}^r S_{K_0}$. Il existe un entier n tel que $p^n f_{K_0}(\mathcal{M}) \subset S$. On définit f comme la restriction à $\mathcal{M}$ de $p^n f_{K_0}$. Elle est bien S-linéaire et, puisque $S \cap \mathrm{Fil}^r S_{K_0} = \mathrm{Fil}^r S$, elle envoie $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ sur $\mathrm{Fil}^r S$, et vérifie $f(x) \notin \mathrm{Fil}^r S$.

Les autres étapes de la preuve se traitent de façon analogue à ce qui a été présenté pour la proposition 3.1.6. □

3.4 Sur les objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$

Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. On définit $\mathcal{M}^\vee$ de la même façon que dans le paragraphe 3.3, sauf que l'on remplace partout S par $S_\infty = S \otimes_W K_0/W$ que l'on munit de la filtration, du Frobenius et de l'opérateur de monodromie induits. On va prouver :

1. pour tout $f \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}^\vee$, il existe une application $\phi_r^\vee(f)$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{M} \arrow[d, dotted, "\phi_r^\vee(f)"] \\
\mathrm{Fil}^r S_\infty \arrow[r, "\phi_r"] & S_\infty
\end{tikzcd}$$

2. l'image de $\phi_r^\vee$ engendre $\mathcal{M}^\vee$ en tant que S-module.

On utilise le théorème 2.a (et plus exactement la proposition 2.b plus précise) : il existe des objets de $\underline{\mathcal{M}}_0^{r,S}$, $\hat{\mathcal{M}}' \subset \hat{\mathcal{M}}$ tels que $\mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{M}}' = \hat{\mathcal{M}}' \cap \mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{M}}$ et que l'on ait une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \hat{\mathcal{M}}' \longrightarrow \hat{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

les flèches étant compatibles au Fil^r et au Frobenius et induisant une seconde suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{M}}' \longrightarrow \mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \longrightarrow 0\ .$$

De plus si d désigne le rang de $\hat{\mathcal{M}}$ sur S, on peut supposer qu'il existe $\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_d$ des éléments de $\mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{M}}$ tels que la famille des $\hat{x}_i = \phi_r(\hat{f}_i)$ soit une base de $\mathcal{M}$ et :

$$\mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{M}} = \mathrm{Fil}^p S \cdot \mathcal{M} + \sum_{i=1}^{d} S\hat{f}_i.$$

On rappelle (voir remarque suivant la proposition 2.b) que cela implique que $(\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_d)$ est une famille libre sur S.

Lemme 3.4.1. *On a une suite exacte courtes de S-modules :*

$$0 \longrightarrow \hat{\mathcal{M}}^\vee \longrightarrow \hat{\mathcal{M}}'^\vee \longrightarrow \mathcal{M}^\vee \longrightarrow 0\ .$$

Démonstration. Définissons dans un premier temps les flèches. La première est simplement la transposée de l'inclusion $\hat{\mathcal{M}}' \hookrightarrow \hat{\mathcal{M}}$. Pour la seconde, considérons $f \in \hat{\mathcal{M}}'^\vee$ et $x \in \mathcal{M}$. Soit $\hat{x} \in \hat{\mathcal{M}}$ un relèvement de x. Comme $\mathcal{M}$ est tué par une puissance de p, il existe un entier n tel que $p^n\hat{x} \in \hat{\mathcal{M}}'$. La réduction dans S_∞ de $\frac{1}{p^n}f(p^n\hat{x})$ ne dépend ni de l'entier n, ni du relèvement $\hat{x}$ choisi. Cela permet de définir une application S-linéaire $\mathcal{M} \to S_\infty$.

Par exactitude à gauche, le noyau de $\hat{\mathcal{M}}^\vee \to \hat{\mathcal{M}}'^\vee$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_S(\mathcal{M}, S)$ qui est nul puisque $\mathcal{M}$ est tué par une puissance de p. La première flèche est donc bien injective.

Prouvons l'exactitude au milieu. Soit $f : \mathcal{M}' \to S$ une application S-linéaire. On suppose que l'image de f dans $\mathcal{M}^\vee$ est nulle et on veut montrer que f se prolonge à $\mathcal{M}$. Soient $x \in \mathcal{M}$ et n un entier tel que $p^n x \in \mathcal{M}'$. Par hypothèse $\frac{1}{p^n}f(p^n x)$ est nul dans S^∞, ce qui signifie que $f(p^n x)$ est un multiple de p^n. On définit alors $f(x) = \frac{f(p^n x)}{p^n}$ (qui est bien défini puisque S est intègre).

Passons à la surjectivité. Soit $f : \mathcal{M} \to S_\infty$ une application S-linéaire. Considérons $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_d)$ une base de $\hat{\mathcal{M}}$ et notons e_i l'image dans $\mathcal{M}$ de $\hat{e}_i$. La projection $K_0 \to K_0/W$ induit une application surjective $S_{K_0} \to S_\infty$. Pour tout i, notons $\hat{x}_i$ un relevé quelconque dans S_{K_0} de $x_i = f(e_i)$. On définit $\hat{f}(\hat{e}_i) = \hat{x}_i$ et par linéarité on étend $\hat{f}$ en une application $\mathcal{M}^\vee \to S_{K_0}$. On vérifie alors que la restriction de $\hat{f}$ à $\hat{\mathcal{M}}'$ tombe dans S et qu'elle induit f dans $\mathcal{M}^\vee$. $\square$

Définissons :

$$\mathrm{fil}^r \hat{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^{d} S\hat{f}_i \subset \mathrm{Fil}^r \hat{\mathcal{M}}.$$

C'est un S-module libre de rang d dont les $\hat{f}_i$ forment une base. Notons $\mathrm{fil}^r \hat{\mathcal{M}}' = \hat{\mathcal{M}}' \cap \mathrm{fil}^r \hat{\mathcal{M}}$ et $\mathrm{fil}^r \mathcal{M}$ l'image de $\mathrm{fil}^r \hat{\mathcal{M}}$ dans $\mathcal{M}$. On dispose d'une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{fil}^r \hat{\mathcal{M}}' \longrightarrow \mathrm{fil}^r \hat{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathrm{fil}^r \mathcal{M} \longrightarrow 0 \tag{6}$$

et d'un analogue du lemme 3.4.1 :

Lemme 3.4.2. *On a une suite exacte courte de S-modules :*

$$0 \longrightarrow \mathit{Hom}_S(\mathit{fil}^r \hat{\mathcal{M}}, \mathit{Fil}^r S) \longrightarrow \mathit{Hom}_S(\mathit{fil}^r \hat{\mathcal{M}}', \mathit{Fil}^r S) \longrightarrow \mathit{Hom}_S(\mathit{fil}^r \mathcal{M}, \mathit{Fil}^r S_\infty) \longrightarrow 0\ .$$

(On rappelle que Hom_S signfie que l'on prend tous les morphismes S-linéaires.)

Démonstration. Elle est tout à fait analogue à celle du lemme 3.4.1. $\square$

Signalons encore une variante plus forte mais qui ne s'applique hélas pas toujours :

Lemme 3.4.3. *Supposons $er < p-1$ ou que $\hat{\mathcal{M}}$ admette une base adaptée. Alors la suite exacte du lemme 3.4.1 induit une nouvelle suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \mathit{Fil}^r \hat{\mathcal{M}}^\vee \longrightarrow \mathit{Fil}^r \hat{\mathcal{M}}'^\vee \longrightarrow \mathit{Fil}^r \mathcal{M}^\vee \longrightarrow 0\ .$$

Démonstration. L'injectivité et l'exactitude au milieu sont vraies sans les hypothèses « $er < p-1$ » ou « $\hat{\mathcal{M}}$ admette une base adaptée » et se traitent de même que dans le lemme 3.4.1. (Pour l'exactitude au centre, on utilise que $S/\mathrm{Fil}^r S$ est sans p-torsion.)

Concentrons-nous à présent sur la surjectivité. Dans le cas $er < p-1$, on définit $\mathcal{N} = \mathcal{M}^\vee$ et $\mathrm{Fil}^r \mathcal{N}$ comme l'image de la flèche $\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}'^\vee \to \mathrm{Fil}^r \mathcal{M}^\vee$. On munit $\mathcal{N}$ du ϕ_r induit et on vérifie facilement que l'on obtient ainsi un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. On a en outre un morphisme $\mathcal{N} \to \mathcal{M}^\vee$ dans $\underline{\mathcal{M}}^r$. Or, d'après le théorème III.2.5.8, tout morphisme de $\underline{\mathcal{M}}^r$ est strictement compatible aux filtrations, ce qui ici donne $\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}^\vee = \mathrm{Fil}^r \mathcal{N}$ puis la surjectivité voulue.

Traitons le second cas. Soit $f \in \mathrm{Fil}^r \mathcal{M}^\vee$. On considère $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_d)$ une base adaptée de $\hat{\mathcal{M}}$ pour les entiers $n_1, \dots, n_d$. Notons e_i l'image dans $\mathcal{M}$ de $\hat{e}_i$. Par hypothèse $E(u)^{n_i} f(e_i) \in \mathrm{Fil}^r S_\infty$ et cela assure qu'il existe $\hat{x}_i \in S_{K_0}$ relevant $f(e_i)$ et tel que $E(u)^{n_i} \hat{x}_i \in \mathrm{Fil}^r S_{K_0}$. L'application $\hat{f}$ définie par $\hat{f}(\hat{e}_i) = \hat{x}_i$ se restreint alors à $\hat{\mathcal{M}}'$ en un élément de $\mathrm{Fil}^r \hat{\mathcal{M}}'^\vee$ qui est un antécédent de f. $\square$

Remarque. Si $r = 1$ ou si $\mathcal{M}$ est tué par p, la condition « $\hat{\mathcal{M}}$ admet une base adaptée » est automatique (respectivement en vertu de la proposition 1.1.6 et du lemme 2.2.3). Le lemme précédent est donc toujours vrai dans ces situations.

Soit $f \in \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}^\vee$. Il induit une application $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \to \mathrm{Fil}^r S_\infty$ et par restriction, puisque $\mathrm{fil}^r\mathcal{M} \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$, il induit également une application $\mathrm{fil}^r\mathcal{M} \to \mathrm{Fil}^r S_\infty$. D'après le lemme 3.4.2, cette dernière application fournit une flèche $\mathrm{fil}^r\hat{\mathcal{M}}' \to \mathrm{Fil}^r S$. En tensorisant par S_{K_0}, on obtient une application $\mathrm{fil}^r\hat{\mathcal{M}}' \otimes_S S_{K_0} \to \mathrm{Fil}^r S_{K_0}$. Par ailleurs, la suite exacte (6) fournit, puisque S_{K_0} est plat sur S, un isomorphisme $\mathrm{fil}^r\hat{\mathcal{M}} \otimes_S S_{K_0} \simeq \mathrm{fil}^r\hat{\mathcal{M}}' \otimes_S S_{K_0}$. On obtient ainsi une flèche $\mathrm{fil}^r\hat{\mathcal{M}} \otimes_S S_{K_0} \to \mathrm{Fil}^r S_{K_0}$ puis par restriction une flèche $\hat{f} : \mathrm{fil}^r\hat{\mathcal{M}} \to \mathrm{Fil}^r S_{K_0}$. Une adaptation immédiate du lemme 3.1.1 assure l'existence d'un morphisme $\phi_r^\vee(\hat{f})$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{fil}^r\hat{\mathcal{M}} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "\hat{f}"'] & \hat{\mathcal{M}} \arrow[d, "\phi_r^\vee(\hat{f})"] \\
\mathrm{Fil}^r S_{K_0} \arrow[r, "\phi_r"] & S_{K_0}
\end{tikzcd}$$

On vérifie que $\hat{f}$ se prolonge par linéarité et continuité en une application $\mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{M}} \to \mathrm{Fil}^r S_{K_0}$ et que ce $\hat{f}$ ainsi prolongé fait commuter un diagramme analogue au précédent. D'autre part, on vérifie également que $\phi_r^\vee(\hat{f})(\hat{\mathcal{M}}') \subset S$, ce qui permet de définir par passage au quotient une application $\phi_r^\vee(f) : \mathcal{M} \to S_\infty$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "\phi_r^\vee(f)"] \\
\mathrm{Fil}^r S_\infty \arrow[r, "\phi_r"] & S_\infty
\end{tikzcd}$$

Cela démontre le premier point.

Pour le second point, on considère le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fil}^r\hat{\mathcal{M}} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_r"'] & \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[d, "\phi_r"] \\
\hat{\mathcal{M}} \arrow[r] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont définies de façon analogue à celles du lemme 3.4.1. La flèche de gauche est surjective comme cela a été prouvé dans le paragraphe 3.3. La flèche du bas l'est aussi (lemme 3.4.1). On en déduit que celle de droite l'est également. C'est exactement ce que l'on voulait.

L'auteur malheureusement ne sait pas si un énoncé du type de la proposition 3.1.6 est vrai en toute généralité. On a toutefois :

Proposition 3.4.4. *Supposons $er < p-1$ ou $r = 1$. Alors le foncteur $^\vee$ est une dualité de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$. De plus, il transforme suites exactes courtes en suites exactes courtes.*

Démonstration. On a une application naturelle $\mathcal{M} \to \mathcal{M}^{\vee\vee}, x \mapsto (f \mapsto f(x))$. On vérifie sans mal que cette application respecte Fil^r, ϕ_r et N. Soit une suite exacte $0 \to \hat{\mathcal{M}}' \to \hat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M} \to 0$ où $\hat{\mathcal{M}}'$ et $\hat{\mathcal{M}}$ sont deux modules fortement divisibles. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \hat{\mathcal{M}}' \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \hat{\mathcal{M}} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{\mathcal{M}}'^{\vee\vee} \arrow[r] & \hat{\mathcal{M}}^{\vee\vee} \arrow[r] & \mathcal{M}^{\vee\vee} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes. Une application du lemme des cinq prouve que le morphisme $\mathcal{M} \to \mathcal{M}^{\vee\vee}$ est un isomorphisme. De même, on prouve la bijectivité de l'application déduite $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \to \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}^{\vee\vee}$ en utilisant le lemme 3.4.3 pour avoir l'exactitude de la suite du bas.

Montrons à présent l'exactitude. On ne traite que l'exactitude en tant que S-module, celle au niveau des Fil^r étant en tout point analogue. Soit $0 \to \mathcal{M} \to \mathcal{X} \to \mathcal{N} \to 0$ une suite exacte dans $\underline{\mathcal{M}}^r$. Si $\mathcal{N}$ est tué par p, il existe par les résultats de la partie 2.3, un diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \hat{\mathcal{M}}' \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\mathcal{X}}' \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\mathcal{N}}' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{\mathcal{M}} \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\mathcal{X}} \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\mathcal{N}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{N} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où $\hat{\mathcal{M}}$, $\hat{\mathcal{M}}'$, $\hat{\mathcal{X}}$, $\hat{\mathcal{X}}'$, $\hat{\mathcal{N}}$ et $\hat{\mathcal{N}}'$ sont des modules fortement divisibles. En dualisant, on obtient :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \hat{\mathcal{N}}'^{\vee} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \hat{\mathcal{X}}'^{\vee} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \hat{\mathcal{M}}'^{\vee} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{N}^{\vee} \arrow[r] & \mathcal{X}^{\vee} \arrow[r] & \mathcal{M}^{\vee} &
\end{tikzcd}$$

où la ligne du haut est exacte (proposition 3.3.1) et les flèches verticales sont surjectives (lemme 3.4.1). La surjectivité $\mathcal{X}^\vee \to \mathcal{M}^\vee$ résulte alors d'une chasse au diagramme triviale. Pour conclure, on procède par récurrence sur la longueur de $\mathcal{N}$. Par le lemme 2.3.1, il existe une suite exacte $0 \to \mathcal{N}' \to \mathcal{N} \to \mathcal{N}'' \to 0$ dans $\underline{\mathcal{M}}^r$ avec $\mathcal{N}''$ tué par p et $\mathcal{N}'$ de longueur strictement inférieure à celle de $\mathcal{N}$. Cette suite exacte s'insère dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{X}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{N}' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{M} \arrow[r] & \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{N} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \mathcal{N}'' \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{N}'' \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{X}'$ est le noyau de la composée $\mathcal{X} \to \mathcal{N} \to \mathcal{N}''$. D'où, en dualisant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{N}^\vee \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathcal{X}^\vee \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathcal{M}^\vee \arrow[d, equal] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{N}'^\vee \arrow[r] & \mathcal{X}'^\vee \arrow[r] & \mathcal{M}^\vee \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les deux flèches verticales sont surjectives puisque $\mathcal{N}''$ est tué par p. Par hypothèse de récurrence, la suite du bas est exacte, il en est donc de même de la suite du haut.

Finalement le fait que le foncteur $^\vee$ stabilise la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ découle de l'exactitude prouvée précédemment et de la proposition 3.2.1. $\square$

Remarque. Les cas $er < p - 1$ et $r = 1$ restent toutefois les cas les plus intéressants car alors les objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$ sont reliés à des objets de nature géométrique.

4 Dualité et représentations galoisiennes

Les catégories $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_{K_0}}$, $\underline{\mathcal{M}}^{r,S}$ et $\underline{\mathcal{M}}^r$ sont toutes les trois équipées d'un foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ vers les représentations galoisiennes. Si $\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S}$ ou de $\underline{\mathcal{M}}^r$, et si $\mathcal{M}^\vee$ désigne son dual défini dans la section 3, le but de cette section est de comparer les représentations galoisiennes $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$ et $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}^\vee)$.

Pour cela, si $\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_{K_0}}$ (resp. de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S}$, resp. de $\underline{\mathcal{M}}^r$), on commence par construire une application :

$$D : T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) \times T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}^\vee) \to \mathbb{Q}_p(r)$$

$$\text{(resp. } D : T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) \times T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}^\vee) \to \mathbb{Z}_p(r),$$

$$\text{resp. } D : T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) \times T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}^\vee) \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r)).$$

Les paragraphes 4.1 traitent les deux premiers cas alors que le paragraphe 4.2 est consacré au troisième. On montre finalement que dans les deux derniers cas l'application D réalise une dualité parfaite.

4.1 Construction de D pour les modules libres

4.1.1 Les matrices de ϕ_r et N

On rappelle simplement les deux définitions suivantes :

Définition 4.1.1. *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_{K_0}}$. Notons $(e_1,\dots,e_d)$ une base* adaptée *de $\mathcal{M}$ pour les entiers $n_1,\dots,n_d$. La* matrice de ϕ_r dans la base adaptée $(e_1,\dots,e_d)$ *est par définition l'unique matrice G telle que :*

$$\begin{pmatrix} \phi_r\left(E(u)^{n_1}e_1\right) \\ \vdots \\ \phi_r\left(E(u)^{n_d}e_d\right) \end{pmatrix} = {}^tG \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix}$$

Remarques. Le fait que $\phi_r(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M})$ engendre tout $\mathcal{M}$ se traduit par le fait que la matrice G est inversible.

La présence de la transposée sert à rester fidèle à la définition classique de la matrice d'une application linéaire.

Finalement, il est possible de donner une définition analogue pour les objets de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$ puisqu'ils admettent eux aussi des bases adaptées.

Définition 4.1.2. *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_{K_0}}$ ou de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S}$. Soit $(e_1,\dots,e_d)$ une base (sur S ou sur S_{K_0} selon) de $\mathcal{M}$. La* matrice de N dans la base $(e_1,\dots,e_d)$ *est par définition l'unique matrice H telle que :*

$$\begin{pmatrix} N\left(a_1\right) \\ \vdots \\ N\left(a_d\right) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = {}^tH \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$$

4.1.2 Deux lemmes généraux

Par la suite, on aura à utiliser plusieurs fois le résultat suivant :

Lemme 4.1.3. *Soit M un module libre de rang fini d sur un anneau R. Notons $M^\vee$ son dual algébrique. Considérons A une R-algèbre, $f : M \to A$ et $g : M^\vee \to A$ deux applications R-linéaires.*

Notons $(e_1,\dots,e_d)$ une base de M et $(e_1^\vee,\dots,e_d^\vee)$ la base duale. Alors la somme :

$$\sum_{i=1}^{d} f\left(e_i\right) g\left(e_i^\vee\right)$$

ne dépend pas de la base $(e_1,\dots,e_d)$ choisie.

Démonstration. On fait un calcul matriciel. On considère $(x_1, \ldots, x_d)$ une seconde base de $\mathcal{M}$ et on note $(x_1^\vee, \ldots, x_d^\vee)$ sa base duale. On définit les vecteurs colonnes suivants :

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix} \quad ; \quad e^\vee = \begin{pmatrix} e_1^\vee \\ \vdots \\ e_d^\vee \end{pmatrix} \quad ; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \quad ; \quad x^\vee = \begin{pmatrix} x_1^\vee \\ \vdots \\ x_d^\vee \end{pmatrix}.$$

On note P la matrice de passage de $(e_1, \ldots, e_d)$ à $(x_1, \ldots, x_d)$. Dans ces conditions, ${}^{\mathrm{t}}P^{-1}$ est la matrice de passage entre les bases duales correspondantes, d'où les relations $x = {}^{\mathrm{t}}Pe$ et $x^\vee = P^{-1}e^\vee$ puis :

$${}^{\mathrm{t}}f\,(x) \cdot g\,(x^\vee) = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}Pf\,(e)) \cdot P^{-1}g\,(e^\vee) = {}^{\mathrm{t}}f\,(e)P \cdot P^{-1}g\,(e^\vee) = {}^{\mathrm{t}}f\,(e) \cdot g\,(e^\vee)$$

ce qui est bien ce que l'on voulait. □

Remarque. Plus conceptuellement, on peut remarquer que puisque $\mathcal{M}$ est libre sur R, on a un isomorphisme $\varphi : \mathcal{M} \otimes_R \mathcal{M}^\vee \to \mathrm{End}_R(\mathcal{M})$. La quantité définie dans le lemme précédent n'est autre que $fg(\varphi^{-1}(\mathrm{id}_R))$.

Le lemme 4.1.3 admet une généralisation qui nous sera également utile :

Lemme 4.1.4. *Soient M et M' deux modules libres de rang fini sur un anneau R. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de M et $(e'_1, \ldots, e'_{n'})$ une base de $\mathcal{M}'$. Notons $M^\vee$ (resp. $M'^\vee$) le dual algébrique de M (resp. de M') et appelons $(e_1^\vee, \ldots e_n^\vee)$ (resp. $({e'_1}^\vee, \ldots, {e'_{n'}}^\vee)$) la base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$ (resp. de $(e'_1, \ldots, e'_{n'})$). Soit A une R-algèbre.*

Soit $\psi : M \to M'$ une application R-linéaire. Notons $\psi^\vee : M'^\vee \to M^\vee$ l'application transposée. Soient $f : M \to A$, $g : M^\vee \to A$, $f' : M' \to A$ et $g' : M'^\vee \to A$ quatre applications R-linéaires vérifiant $f = f' \circ \psi$ et $g' = g \circ \psi^\vee$. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} f(e_i)g(e_i^\vee) = \sum_{i'=1}^{n'} f'(e'_{i'})g'({e'_{i'}}^\vee).$$

Démonstration. Elle est tout à fait analogue à celle donnée pour le lemme 4.1.3. □

Remarque. Le lemme précédent est une généralisation du lemme 4.1.3, ce dernier correspondant au cas où ψ est un isomorphisme.

4.1.3 Pour les modules filtrés sur S_{K_0}

Soit $\mathcal{M}$ un module filtré sur S_{K_0}. Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de $\mathcal{M}$ et $(e_1^\vee, \ldots, e_d^\vee)$ la base duale de $\mathcal{M}^\vee$. Par le lemme 4.1.3, l'application :

$$\begin{array}{rccc} D : & T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) \times T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}^\vee) & \to & \hat{B}^+_{\mathrm{st}} \\ & (f, g) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{d} f\,(e_i)\,g\,(e_i^\vee) \end{array}$$

est bien définie.

Lemme 4.1.5. *Pour tout $f \in T^\star_{st}(\mathcal{M})$ et tout $g \in T^\star_{st}(\mathcal{M}^\vee)$, on a $N(D(f,g)) = 0$. Autrement dit, l'application D tombe dans B^+_{cris}.*

Démonstration. On fait à nouveau un calcul matriciel. Notons H la matrice de N dans la base $(e_1, \dots, e_d)$ (voir définition 4.1.2) et définissons les vecteurs colonnes comme dans la preuve du lemme 4.1.3. Matriciellement, on a $D(f,g) = {}^{\mathrm{t}}f(e) \cdot g(e^\vee)$, d'où :

$$N(D(f,g)) = {}^{\mathrm{t}}(N(f(e))) \cdot g(e^\vee) + {}^{\mathrm{t}}f(e) \cdot N(g(e^\vee))$$

Comme $f \in T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$, f commute à N et donc $N(f(e)) = f(N(e)) = f({}^{\mathrm{t}}He) = {}^{\mathrm{t}}Hf(e)$. De même $N(g(e^\vee)) = -Hg(e^\vee)$. Finalement $N(D(f,g)) = 0$. □

Lemme 4.1.6. *Pour tout $f \in T^\star_{st}(\mathcal{M})$ et tout $g \in T^\star_{st}(\mathcal{M}^\vee)$, on a $D(f,g) \in \mathrm{Fil}^r \hat{B}^+_{st}$ et $\phi_r(D(f,g)) = D(f,g)$.*

Démonstration. Dans cette preuve, $(e_1, \dots, e_d)$ est une base adaptée de $\mathcal{M}$ pour les entiers $n_1, \dots, n_d$. Par le lemme 3.1.2, $(e_1^\vee, \dots, e_d^\vee)$ est une base adaptée pour les entiers $n_1^\vee, \dots, n_d^\vee$, où $n_i^\vee = r - n_i$.

Par hypothèse, f et g respectent le Fil^r. Ainsi $f(E(u)^{n_i} e_i) \in \mathrm{Fil}^r \hat{B}^+_{\mathrm{st}}$. Or par linéaire, $f(E(u)^{n_i} e_i) = E(u)^{n_i} f(e_i)$. Ceci entraîne $E(u)^{n_i} f(e_i) \in \mathrm{Fil}^r \hat{B}^+_{\mathrm{st}}$. De même, il vient $E(u)^{n_i^\vee} g(e_i^\vee) \in \mathrm{Fil}^r \hat{B}^+_{\mathrm{st}}$. On en déduit $D(f,g) \in \mathrm{Fil}^r \hat{B}^+_{\mathrm{st}}$.

Soit G la matrice de ϕ_r dans la base $(e_1, \dots, e_d)$ (voir définition 4.1.1). Définissons pour $x \in \mathcal{M}$, $\phi(x) = \frac{1}{c^r}\phi_r(E(u)^r x)$. La compatibilité de f à ϕ_r donne :

$$\begin{pmatrix} p^{-r}\phi(f(E(u)^{n_1} e_1)) \\ \vdots \\ p^{-r}\phi(f(E(u)^{n_d} e_d)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_r(f(E(u)^{n_1} e_1)) \\ \vdots \\ \phi_r(f(E(u)^{n_d} e_d)) \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{t}}G \begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_d) \end{pmatrix}.$$

De même :

$$\begin{pmatrix} p^{-r}\phi\left(f\left(E(u)^{n_1^\vee} e_1^\vee\right)\right) \\ \vdots \\ p^{-r}\phi\left(f\left(E(u)^{n_d^\vee} e_d^\vee\right)\right) \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} f(e_1^\vee) \\ \vdots \\ f(e_d^\vee) \end{pmatrix}.$$

Le produit scalaire des deux dernières égalités fournit le résultat. □

On sait (voir [Fon94a]) qu'il existe un élément $t \in A_{\mathrm{cris}}$ tel que le sous-$\mathbb{Z}_p$-module de A_{cris} engendré par t soit isomorphe en tant que représentation galoisienne à $\mathbb{Z}_p(1)$. En outre, on a $\phi(t) = pt$ et plus précisément l'ensemble des solutions dans A_{cris} de $\phi(t) = pt$ est exactement le $\mathbb{Z}_p$-module engendré par t. On déduit de cela que l'ensemble des solutions de l'équation $\phi_r(t) = t$ dans B^+_{cris} est le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel engendré par t^r, isomorphe à $\mathbb{Q}_p(r)$ en tant que représentation galoisienne. Finalement, par les lemmes 4.1.5 et 4.1.6, on a bien construit :

$$D : T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) \times T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}^\vee) \to \mathbb{Q}_p t^r \simeq \mathbb{Q}_p(r)$$

comme on le désirait.

Remarque. Du lemme 4.1.4, on déduit que l'application D que l'on vient de définir est « fonctorielle », dans le sens où si $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ est un morphisme entre deux modules filtrés sur S_{K_0}, alors :

$$D(f \circ \alpha, g) = D(f, g \circ \alpha^\vee)$$

pour tout $f \in T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}')$ et $g \in T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}^\vee)$.

4.1.4 Pour les modules fortement divisibles

Soit $\mathcal{M}$ un module fortement divisible. Puisque $\mathcal{M}$ est un S-module libre, le lemme 4.1.3 permet de définir l'application :

$$\begin{array}{rrcl} D : & T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}) \times T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}^\vee) & \to & \hat{A}_{\text{st}} \\ & (f,g) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{d} f(e_i)\, g(e_i^\vee) \end{array}$$

Soit $\mathcal{M}_{K_0} = \mathcal{M} \otimes_W K_0$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}) \times T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}^\vee) \arrow[r, "D"] \arrow[d] & \hat{A}_{\text{st}} \arrow[d, hook] \\ T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}_{K_0}) \times T^\star_{\text{st}}\left(\mathcal{M}^\vee_{K_0}\right) \arrow[r, "D"] & \hat{B}^+_{\text{st}} \end{tikzcd}$$

On en déduit que l'image de D est incluse dans $\hat{A}_{\text{st}} \cap \mathbb{Q}_p t^r = \mathbb{Z}_p t^r$ qui est une représentation galoisienne isomorphe à $\mathbb{Z}_p(r)$. On définit ainsi une application :

$$D : T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}) \times T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}^\vee) \to \mathbb{Z}_p(r)\,.$$

4.2 Construction de D pour les objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$

4.2.1 La définition de D

Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. D'après le lemme 2.1.3, il existe des S-modules libres A et B et une suite exacte de S-modules :

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0\,.$$

Notons $A^\vee$ (resp. $B^\vee$) le dual algébrique de A (resp. de B). Ce sont encore des S-modules libres de rang fini, et par le lemme 3.4.1 (*très* légèrement adapté), on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow B^\vee \longrightarrow A^\vee \longrightarrow \mathcal{M}^\vee \longrightarrow 0\,.$$

Soient $f \in T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$ et $g \in T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}^\vee)$. Puisque B et $A^\vee$ sont libres, il est facile de construire des applications $\hat{f}$ et $\hat{g}$ faisant commuter les deux diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\hat{f}_{|A}"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\hat{f}"] & \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \hat{A}_{\mathrm{st}} \arrow[r] & \hat{B}^+_{\mathrm{st}} \arrow[r] & \hat{A}_{\mathrm{st},\infty} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\hat{g}_{|B^\vee}"] & A^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\hat{g}"] & \mathcal{M}^\vee \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \hat{A}_{\mathrm{st}} \arrow[r] & \hat{B}^+_{\mathrm{st}} \arrow[r] & \hat{A}_{\mathrm{st},\infty} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Puisque $\mathcal{M}$ est tué par une puissance de p, on remarque que $A \otimes_S S_{K_0} \simeq B \otimes_S S_{K_0}$. C'est un S_{K_0}-module libre que nous notons A_{K_0}. Si l'on note $A^\vee_{K_0}$ le dual algébrique de A_{K_0}, on a en outre les identifications $A^\vee \otimes_S S_{K_0} \simeq B^\vee \otimes_S S_{K_0} \simeq A^\vee_{K_0}$. Les applications $\hat{f}$ et $\hat{g}$ se prolongent en des applications $\hat{f} : A_{K_0} \to \hat{B}^+_{\mathrm{st}}$ et $\hat{g} : A^\vee_{K_0} \to \hat{B}^+_{\mathrm{st}}$. Définissons :

$$D(f,g) = \sum_{i=1}^{d} \hat{f}(e_i)\hat{g}(e_i^\vee) \in \hat{A}_{\mathrm{st},\infty}$$

où $(e_1, \dots, e_d)$ est une base de A_{K_0} et où $(e_1^\vee, \dots, e_d^\vee)$ désigne la base duale. La valeur de $D(f,g)$ ne dépend pas du choix d'une telle base d'après le lemme 4.1.3. En réalité, la quantité $D(f,g)$ est encore plus intrinsèque comme le montrent les deux lemmes suivants :

Lemme 4.2.1. *La valeur de $D(f,g)$ ne dépend pas du choix des applications $\hat{f}$ et $\hat{g}$ relevant f et g.*

Démonstration. Si $\hat{f}_0$ et $\hat{f}_1$ sont deux applications relevant f, leur différence induit une application $B \to \hat{A}_{\mathrm{st}}$. Choisissons $(e_1, \dots, e_d)$ une S-base de B et notons $(e_1^\vee, \dots, e_d^\vee)$ sa base duale (les $e_i^\vee$ sont éléments de $B^\vee$). La base $(e_1, \dots, e_d)$ est également une S_{K_0}-base de A_{K_0} dont la base duale est précisément $(e_1^\vee, \dots, e_d^\vee)$. On a alors :

$$\sum_{i=1}^{d} \hat{f}_0(e_i)\hat{g}_0(e_i^\vee) - \sum_{i=1}^{d} \hat{f}_1(e_i)\hat{g}_0(e_i^\vee) \in \hat{A}_{\mathrm{st}}$$

et donc cette quantité est nulle dans $\hat{A}_{\mathrm{st},\infty}$. Cela prouve le lemme. □

Lemme 4.2.2. *La valeur de $D(f,g)$ ne dépend pas du choix de la résolution $0 \to A \to B \to \mathcal{M} \to 0$.*

Démonstration. Donnons-nous $0 \to A' \to B' \to \mathcal{M} \to 0$ une seconde résolution (avec A' et B' des S-modules libres de rang fini). Par liberté de B, on peut construire un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La conclusion résulte alors du lemme 4.1.4. □

4.2.2 Un D alternatif : D_{cris}

On considère toujours $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, $f \in T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M})$ et $g \in T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}^\vee)$. On note pr : $\hat{B}^+_{\text{st}} \to B^+_{\text{cris}}$ la projection canonique. Elle induit des applications encore notées pr de $\hat{A}_{\text{st}}$ dans A_{cris} et de $\hat{A}_{\text{st},\infty}$ dans $A_{\text{cris},\infty}$. Par composition par pr, f et g définissent des éléments $f_{\text{cris}} \in T^\star_{\text{cris}}(\mathcal{M})$ (après oubli du N sur l'objet $\mathcal{M}$) et $g_{\text{cris}} \in T^\star_{\text{cris}}(\mathcal{M}^\vee)$. On montre (voir lemme 2.3.1.1 de [Bre99a]) qu'il est possible de reconstruire f à partir de f_{cris} par la formule explicite suivante :

$$f(x) = \sum_{i \geqslant 0} f_{\text{cris}}\left(N^i(x)\right) \frac{(\log(1+X))^i}{i!}$$

(on prouve que cette somme infinie a bien un sens). On a évidemment une formule analogue pour g et g_{cris}.

Comme précédemment, considérons une suite exacte $0 \to A \to B \to \mathcal{M} \to 0$ où A et B sont des S-modules libres. On a alors une suite exacte $0 \to B^\vee \to A^\vee \to \mathcal{M}^\vee \to 0$ et il existe des applications $\hat{f}_{\text{cris}}$ et $\hat{g}_{\text{cris}}$ rendant commutatifs les deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \hat{f}_{\text{cris}|A}} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{f}_{\text{cris}}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{\text{cris}}} & & \\ 0 & \longrightarrow & A_{\text{cris}} & \longrightarrow & B^+_{\text{cris}} & \longrightarrow & A_{\text{cris},\infty} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B^\vee & \longrightarrow & A^\vee & \longrightarrow & \mathcal{M}^\vee & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \hat{g}_{\text{cris}|B^\vee}} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{g}_{\text{cris}}} & & \downarrow{\scriptstyle g_{\text{cris}}} & & \\ 0 & \longrightarrow & A_{\text{cris}} & \longrightarrow & B^+_{\text{cris}} & \longrightarrow & A_{\text{cris},\infty} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Les applications $\hat{f}_{\text{cris}}$ et $\hat{g}_{\text{cris}}$ se prolongent respectivement à $A_{K_0} = A \otimes_S S_{K_0} = B \otimes_S S_{K_0}$ et à $A^\vee_{K_0} = A^\vee \otimes_S S_{K_0} = B^\vee \otimes_S S_{K_0}$ (qui s'identifie au dual algébrique de A_{K_0}). On définit :

$$D_{\text{cris}}(f,g) = \sum_{i=1}^{d} \hat{f}_{\text{cris}}(e_i)\hat{g}_{\text{cris}}(e_i^\vee) \in \hat{A}_{\text{st},\infty}$$

où $(e_1, \dots, e_d)$ est une base de A_{K_0} et où $(e_1^\vee, \dots, e_d^\vee)$ désigne la base duale. De même que dans la première partie de ce paragraphe, on prouve que $D_{\text{cris}}(f,g)$ ne dépend ni du choix d'une base, ni du choix de relevés $\hat{f}_{\text{cris}}$ et $\hat{g}_{\text{cris}}$, ni du choix d'une résolution $0 \to A \to B \to \mathcal{M} \to 0$.

Proposition 4.2.3. *Pour tout $f \in T^{\star}_{st}(\mathcal{M})$ et tout $g \in T^{\star}_{st}(\mathcal{M}^\vee)$, on a $D(f,g) = D_{cris}(f,g)$.*

Démonstration. On garde les notations précédentes : A, B, $(e_1, \dots, e_d)$, $\hat{f}_{\text{cris}}$, $\hat{g}_{\text{cris}}$, *etc.* Par contre, nous ne considérons pas des $\hat{f}$ et $\hat{g}$ arbitraires. Nous allons en définir des particuliers dans cette preuve.

Considérons $N : A_{K_0} \to A_{K_0}$ une application K_0-linéaire, vérifiant la condition de Leibniz et faisant commuter le diagramme (il est facile d'en construire puisque B est libre) :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "N_{|B}"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ \mathcal{M} \arrow[r, "N"] & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

Pour $x \in A_{K_0}$, on définit :

$$\hat{f}(x) = \sum_{i \geqslant 0} \hat{f}_{\text{cris}}\left(N^i(x)\right) \frac{(\log(1+X))^i}{i!}.$$

Cette somme ne converge pas *a priori* dans $\hat{B}^+_{\text{st}}$, mais elle converge dans $B^+_{\text{cris}}[\![X]\!]$. On définit ainsi une application $\hat{f} : A_{K_0} \to B^+_{\text{cris}}[\![X]\!]$. Le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\hat{f}"'] \arrow[rr, bend left, "\hat{f}_{\text{cris}}"] \arrow[d] & B^+_{\text{cris}}[\![X]\!] \arrow[r, "\text{pr}"'] & B^+_{\text{cris}} \arrow[d] \\ \mathcal{M} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f_{\text{cris}}"'] & \hat{A}_{\text{st},\infty} \arrow[r, "\text{pr}"] & A_{\text{cris},\infty} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

On définit $N^\vee$ sur $A^\vee_{K_0}$ *via* la formule $N^\vee = \cdot \circ N - N \circ \cdot$. Ceci permet de refaire la construction précédente pour le dual et ainsi de définir une application $\hat{g} : A^\vee_{K_0} \to B^+_{\text{cris}}[\![X]\!]$ faisant commuter un diagramme analogue au précédent. On calcule :

$$\sum_{i=1}^{d} \hat{f}(e_i)\hat{g}(e_i^\vee) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{k,l \geqslant 0} \hat{f}_{\text{cris}}(N^k(e_i))\hat{g}_{\text{cris}}(N^l(e_i^\vee)) \frac{(\log(1+X))^{k+l}}{(k+l)!} = \sum_{s \geqslant 0} c_s \frac{(\log(1+X))^s}{s!}$$

où c_s est défini par :

$$c_s = \sum_{i=1}^{d} \sum_{k+l=s} \binom{k}{s} \hat{f}_{\text{cris}}(N^k(e_i))\hat{g}_{\text{cris}}(N^l(e_i^\vee)) \in B^+_{\text{cris}}.$$

L'opérateur N se prolonge sans problème à $B^+_{\text{cris}}[\![X]\!]$ et comme par hypothèse, pour tout i, $\text{pr} \circ N^i \circ f = \text{pr} \circ f \circ N^i = f_{\text{cris}} \circ N^i$, on obtient $\text{pr} \circ N^i \circ \hat{f} \equiv \hat{f}_{\text{cris}} \circ N^i \pmod{A_{\text{cris}}}$. On en déduit :

$$\bar{c}_s \equiv \mathrm{pr}\left(\sum_{i=1}^{d}\sum_{k+l=s}\binom{k}{s}N^k(\hat{f}(e_i))N^l(\hat{g}(e_i^\vee))\right) = \mathrm{pr}\left(\sum_{i=1}^{d}N^s(\hat{f}(e_i)\hat{g}(g_i^\vee))\right) \pmod{A_{\mathrm{cris}}}.$$

Or, de même que dans le lemme 4.1.5, on montre que $N(\hat{f}(e_i)\hat{g}(e_i^\vee)) \in A_{\mathrm{cris}}$ et donc, pour $s \geqslant 1$, on a $c_s \in A_{\mathrm{cris}}$. Finalement, il reste :

$$\sum_{i=1}^{d}\hat{f}(e_i)\hat{g}(e_i^\vee) \equiv c_0 = \sum_{i=1}^{d}\hat{f}_{\mathrm{cris}}(e_i)\hat{g}_{\mathrm{cris}}(e_i^\vee) \pmod{A_{\mathrm{cris}}}.$$

En réduisant dans $\hat{A}_{\mathrm{st},\infty}$ (la congruence précédente assure qu'il n'y a pas de problèmes bien que $\hat{f}$ et $\hat{g}$ soient à valeurs dans $B^+_{\mathrm{cris}}[\![X]\!]$ qui n'est pas muni d'une application de réduction vers $\hat{A}_{\mathrm{st},\infty}$), il vient $D(f,g) = D_{\mathrm{cris}}(f,g)$ comme annoncé. □

4.2.3 Les propriétés de D

Tout d'abord, la proposition 4.2.3 implique $D(f,g) \in A_{\mathrm{cris},\infty}$ puisque, par définition, c'est le cas de $D_{\mathrm{cris}}(f,g)$.

On souhaite à présent prouver que $D(f,g) \in (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)t^r$. Pour cela, on aura besoin du résultat intermédiaire suivant :

Lemme 4.2.4. *On a une suite exacte de $\mathbb{Z}_p$-modules :*

$$0 \longrightarrow T^\star_{cris}(\hat{\mathcal{M}}) \longrightarrow T^\star_{cris}(\hat{\mathcal{M}}') \longrightarrow T^\star_{cris}(\mathcal{M}) \longrightarrow 0\,.$$

Si de plus $er \leqslant p-1$ ou si $\hat{\mathcal{M}}$ admet une base adaptée, on a une autre suite exacte duale de la précédente :

$$0 \longrightarrow T^\star_{cris}(\hat{\mathcal{M}}'^\vee) \longrightarrow T^\star_{cris}(\hat{\mathcal{M}}^\vee) \longrightarrow T^\star_{cris}(\mathcal{M}^\vee) \longrightarrow 0\,.$$

Démonstration. Commençons par prouver l'exactitude de la première suite. On a une notion de suite exacte dans la catégorie dont les objets sont les triplets $(\mathcal{M}, \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}, \phi_r)$ où l'on n'impose pas la condition « $\phi_r(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M})$ engendre $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ » : une suite est exacte si elle est en tant que suite de S-modules et si la suite qu'elle induit sur les Fil^r est également exacte. L'avantage de cette catégorie plus grosse est que A_{cris} en est un objet. Dans cette catégorie, on a également une notion de Ext^1 et ceux-ci s'insèrent dans les suites exactes longues obtenues après application d'un foncteur Hom à une suite exacte courte. De la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \hat{\mathcal{M}}' \longrightarrow \hat{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

on déduit l'exactitude de :

$$0 = \mathrm{Hom}(\mathcal{M}, A_{\mathrm{cris}}) \longrightarrow T_{\mathrm{cris}}(\hat{\mathcal{M}}) \longrightarrow T_{\mathrm{cris}}(\hat{\mathcal{M}}') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{M}, A_{\mathrm{cris}}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\hat{\mathcal{M}}, A_{\mathrm{cris}}) = 0$$

où les Hom sont compatibles aux structures. La nullité de $\mathrm{Ext}^1(\hat{\mathcal{M}}, A_{\text{cris}})$ provient de l'exactitude de $T^\star_{\text{cris}}$ sur les modules fortement divisibles, exactitude que l'on déduit du fait analogue sur les objets de $\underline{\mathcal{M}}^r_0$ par passage à la limite. Pour conclure, il suffit donc de prouver que $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{M}, A_{\text{cris}})$ est isomorphe à $T^\star_{\text{cris}}(\mathcal{M})$.

La suite exacte $0 \to A_{\text{cris}} \to B^+_{\text{cris}} \to A_{\text{cris},\infty} \to 0$ fournit par application du foncteur $\mathrm{Hom}\,(\mathcal{M}, \cdot)$ une autre suite exacte :

$$0 = \mathrm{Hom}(\mathcal{M}, B^+_{\text{cris}}) \longrightarrow T_{\text{cris}}\,(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1\,(\mathcal{M}, A_{\text{cris}}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1\left(\mathcal{M}, B^+_{\text{cris}}\right).$$

D'autre part, si on a une suite exacte de la forme :

$$0 \longrightarrow B^+_{\text{cris}} \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

on construit directement une rétraction $s : \mathcal{X} \to B^+_{\text{cris}}$: soient n un entier tel que $p^n\mathcal{M} = 0$ et $x \in \mathcal{X}$, on a $p^n x \in B^+_{\text{cris}}$ et on pose $s\,(x) = \frac{1}{p^n}\,(p^n x) \in B^+_{\text{cris}}$. On en déduit $\mathrm{Ext}^1\left(\mathcal{M}, B^+_{\text{cris}}\right) = 0$, et puis $T_{\text{cris}}\,(\mathcal{M}) \simeq \mathrm{Ext}^1(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st}})$, comme on le souhaitait.

Passons à la seconde suite. Vu les hypothèses faites, les lemmes 3.4.1 et 3.4.3 assurent que l'on a une suite exacte dans $\mathcal{C}$:

$$0 \longrightarrow \hat{\mathcal{M}}^\vee \longrightarrow \hat{\mathcal{M}}'^\vee \longrightarrow \mathcal{M}^\vee \longrightarrow 0\,.$$

Pour conclure, on applique la première partie du lemme à la suite exacte précédente. $\square$

À partir de maintenant, on supposer $er \leqslant p-1$ *ou* $r = 1$ *ou encore* $\mathcal{M}$ *tué par* p. Ceci entraîne que les hypothèses (et donc la conclusion) du lemme 4.2.4 sont vérifiées. On utilise à présent le théorème 2.a et on considère une suite exacte (dans $\mathcal{C}$) :

$$0 \longrightarrow \hat{\mathcal{M}}' \longrightarrow \hat{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

où $\hat{\mathcal{M}}'$ et $\hat{\mathcal{M}}$ sont des modules fortement divisibles. Notons $\hat{\mathcal{M}}_{K_0} = \hat{\mathcal{M}}' \otimes_S S_{K_0} = \hat{\mathcal{M}} \otimes_S S_{K_0}$. D'après le lemme 4.2.4, il existe $\hat{f}_{\text{cris}} \in T^\star_{\text{cris}}(\hat{\mathcal{M}})$ et $\hat{g}_{\text{cris}} \in T^\star_{\text{cris}}(\hat{\mathcal{M}}'^\vee)$ relevant $f_{\text{cris}} = \mathrm{pr} \circ f$ et $g_{\text{cris}} = \mathrm{pr} \circ g$. Ces applications se prolongent respectivement à $\hat{\mathcal{M}}_{K_0}$ et à $\hat{\mathcal{M}}^\vee_{K_0}$. Soient $(e_1, \ldots, e_d)$ une S_{K_0}-base de $\hat{\mathcal{M}}_{K_0}$ et $(e_1^\vee, \ldots, e_d^\vee)$ sa base duale. Définissons :

$$D_{\text{cris}}(\hat{f}, \hat{g}) = \sum_{i=1}^{d} \hat{f}_{\text{cris}}(e_i)\hat{g}_{\text{cris}}(e_i^\vee) \in B^+_{\text{cris}}.$$

Par une adaptation immédiate au cas cristallin du lemme 4.1.6, on a $D_{\text{cris}}(\hat{f}, \hat{g}) \in \mathbb{Q}_p t^r$. Or par définition, $D(f,g) = D_{\text{cris}}(f,g)$ est la réduction modulo A_{cris} de $D_{\text{cris}}(\hat{f}, \hat{g})$. On en déduit $D(f,g) \in (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)t^r \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r)$.

Finalement, on a bien construit une application :

$$D : T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}) \times T^\star_{\text{st}}(\mathcal{M}^\vee) \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r)$$

qui est compatible à l'action de Galois (c'est clair sur la définition de D).

Lemme 4.2.5. *Soit $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ un morphisme dans la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$. On a :*

$$D(f \circ \alpha, g) = D(f, g \circ \alpha^\vee)$$

pour tout $f \in T^\star_{st}(\mathcal{M}')$ et $g \in T^\star_{st}(\mathcal{M}^\vee)$.

Démonstration. Par le même argument que celui utilisé dans la preuve du lemme 4.2.2, on construit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & \mathcal{M}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et un diagramme commutatif analogue obtenu en dualisant. Le lemme résulte alors du lemme 4.1.4 et d'un petit calcul. □

4.3 Une dualité parfaite

Théorème 4.3.1. *On suppose $er \leqslant p-1$ ou $r = 1$. Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Alors l'application $D : T^\star_{st}(\mathcal{M}) \times T^\star_{st}(\mathcal{M}^\vee) \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r)$ est une dualité parfaite. Autrement dit, on a une isomorphisme canonique et fonctoriel de modules galoisiens :*

$$T^\star_{st}(\mathcal{M}^\vee) \simeq T^\star_{st}(\mathcal{M})^\star(r).$$

Démonstration. Notons en premier lieu que la fonctorialité découle directement du lemme 4.2.5. Cela permet, par un dévissage facile, de se ramener au cas d'un objet $\mathcal{M}$ de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$.

On note p_1 une racine p-ième de π et $\bar{p}_1$ sa réduction modulo p. On munit l'anneau $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ d'une filtration en posant $\mathrm{Fil}^s\mathcal{O}_{\bar{K}}/p = \bar{p}_1^s\mathcal{O}_{\bar{K}}$. De plus si $x = \bar{p}_1^s y \in \mathrm{Fil}^s\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$, on pose $\phi_s(x) = (-1)^s y^s$ (la valeur ne dépend pas du choix de y). On fait finalement de $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ une S-algèbre en envoyant u sur $\bar{\pi}_1$ où π_1 désigne une racine p-ième de π. Soient $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \otimes_{S/pS} k[u]/u^{ep}$ et $\tilde{\mathcal{M}}^\vee = \mathcal{M}^\vee \otimes_{S/pS} k[u]/u^{ep}$ (où $k[u]/u^{ep}$ est vu comme une S/pS-algèbre par la flèche évidente. Par une adaptation au cas cristallin du lemme 1.3.4 du chapitre III et par le lemme 2.3.1.1 de [Bre99a], on a $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) \simeq \mathrm{Hom}(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p)$ (et $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}^\vee) \simeq \mathrm{Hom}(\tilde{\mathcal{M}}^\vee, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p)$) où le Hom signifie que l'on considère les morphismes S-linéaires compatibles au Fil^r et à ϕ_r.

Notons $R = \varprojlim_n \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ (les applications de transition étant données par le Frobenius) et $\xi = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots) \in R$ où les p_n forment un système compatible de racines p^n-ièmes de p. On pose $\mathrm{Fil}^s R = \xi^s R$, et $\phi_s(x) = (-1)^s y^s$ pour $x = \xi^s y \in \mathrm{Fil}^s R$. Définissons $\zeta = (\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \ldots) \in R$ où les π_n forment un système compatible de racines p^n-ièmes de π et faisons de R une S-algèbre en envoyant u sur ζ. Par une méthode d'approximations successives, on montre que $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) \simeq \mathrm{Hom}(\tilde{\mathcal{M}}, R)$ (et $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}^\vee) \simeq \mathrm{Hom}(\tilde{\mathcal{M}}^\vee, R)$) où le Hom signifie toujours que l'on considère les morphismes compatibles au Fil^r et à ϕ_r.

Soient $(e_1,\dots,e_d)$ une base adaptée de $\mathcal{M}$ pour les entiers $n_1,\dots,n_d$ et G la matrice de ϕ_r dans cette base (voir définition 4.1.1). D'après ce qui précède, se donner un élément $f \in T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$ revient à se donner un d-uplet $(x_1,\dots,x_d) \in R^d$ tel que $\zeta^{n_i}x_i \in \mathrm{Fil}^r R$ et :

$$\begin{pmatrix} \phi_r(\zeta^{n_1}x_1) \\ \vdots \\ \phi_r(\zeta^{n_d}x_d) \end{pmatrix} = {}^t G \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

ou encore, puisque R est intègre :

$$(-1)^r \begin{pmatrix} \left(\frac{\zeta^{n_1}x_1}{\xi^r}\right)^p \\ \vdots \\ \left(\frac{\zeta^{n_d}x_d}{\xi^r}\right)^p \end{pmatrix} = {}^t G \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Réciproquement, la donnée d'un d-uplet $(x_1,\dots,x_d)$ solution du système précédent fournit un élément de $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$. De plus, lorsque f parcourt $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$, les d-uplets $(x_1,\dots,x_d)$ associés forment une famille génératrice de $(\mathrm{Frac}\, R)^d$: en effet, dans chaque hyperplan de $(\mathrm{Frac}\, R)^d$ le système (7) ne peut admettre que p^{d-1} solutions et on sait par le lemme 2.3.1.2 de [Bre99a] que $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$ est de cardinal p^d.

Montrons finalement que $D : T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) \times T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}^\vee) \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r)$ est non dégénérée. Déjà, comme $\mathcal{M}$ est tué par p, l'application D tombe dans les éléments de p-torsion de $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r)$, c'est-à-dire dans $\mathbb{F}_p(r)$. Soit $(e_1^\vee,\dots,e_d^\vee)$ la base duale de $(e_1,\dots,e_d)$. On vérifie facilement que $D(f,g)$ est donné par la formule :

$$D(f,g) = \sum_{i=1}^{d} f(e_i)g(e_i^\vee).$$

Soit $g \in T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}^\vee)$ tel que $D(f,g) = 0$ pour tout $f \in T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$. L'application g peut être vue comme un morphisme de $\tilde{\mathcal{M}}^\vee$ dans R : notons $y_i \in R$ l'image de $e_i^\vee$. L'hypothèse assure que le vecteur $(y_1,\dots,y_d)$ est orthogonal à tous les $(x_1,\dots,x_d)$ solutions de (7), et cela implique $y_1 = \cdots = y_d = 0$, puis $g = 0$. □

Remarque. Le théorème précédent est vrai sans hypothèse sur e et r pour les objets de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S/pS}$.

Corollaire 4.3.2. *On suppose $er \leqslant p-1$ ou $r=1$. Soit $\mathcal{M}$ un module fortement divisible. Alors l'application $D : T^\star_{st}(\mathcal{M}) \times T^\star_{st}(\mathcal{M}^\vee) \to \mathbb{Z}_p(r)$ est une dualité parfaite.*

Démonstration. Il s'agit d'un simple passage à la limite projective, puisque si $\mathcal{M}$ est un module fortement divisible, alors pour tout entier n, $\mathcal{M}/p^n\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, $\mathcal{M} \simeq \varprojlim_n \mathcal{M}/p^n\mathcal{M}$ et $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) \simeq \varprojlim_n T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}/p^n\mathcal{M})$ où (pour la dernière limite projective) les applications de transition sont induites par les morphismes $\mathcal{M}/p^{n+1}\mathcal{M} \to \mathcal{M}/p^n\mathcal{M}$ de multiplication par p. □

5 Dualité et schémas en groupes

Dans [Bre00a], Breuil construit une (anti-)équivalence de catégorie entre $\underline{\mathcal{M}}_0^1$ et la catégorie des $\mathcal{O}_K$-schémas en groupes commutatifs, finis, plats et annulés par une puissance de p. On note Gr le foncteur qui à un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^1$ associe son schéma en groupes et Mod son quasi-inverse. D'autre part, en utilisant le théorème 2.a (de ce chapitre) et la proposition 5.1.3 de [Bre00a] (et en vérifiant que le N dont il est question commute nécessairement à tout morphisme de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S}$), on obtient un foncteur[5] pleinement fidèle $\underline{\mathcal{M}}_0^1 \to \underline{\mathcal{M}}^1$ dont l'image essentielle consiste en les objets $\mathcal{M}$ pour lesquels $N(\mathcal{M}) \subset u\mathcal{M}$.

On vérifie que la dualité définie sur $\underline{\mathcal{M}}^1$ stabilise $\underline{\mathcal{M}}_0^1$. Par ailleurs, on dispose d'une dualité naturelle sur la catégorie des schémas en groupes qui est la dualité de Cartier. Il est alors tentant de conjecturer que ces deux dualités se correspondent *via* les foncteurs Gr et Mod. C'est ce que nous prouvons dans ce chapitre. Nous commençons par traiter le cas $e < p-1$ qui, bien qu'englobé par la preuve générale, se démontre de façon beaucoup plus simple (avec ce que l'on a déjà fait).

5.1 Le cas $e < p - 1$

On démontre donc dans ce paragraphe le résultat partiel suivant :

Proposition 5.1.1. *Supposons $e < p-1$. Considérons $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_K$-schéma en groupes commutatifs, finis, plats et annulés par une puissance de p. Notons $\mathcal{G}^\vee$ son dual de Cartier et $\mathcal{M}$ l'objet de $\underline{\mathcal{M}}^1$ qui lui est associé par le foncteur de Breuil.*

Alors l'objet associé au schéma en groupes $\mathcal{G}^\vee$ est $\mathcal{M}^\vee$.

Démonstration. L'hypothèse $e < p-1$ permet d'utiliser la pleine fidélité du foncteur $T_{\mathrm{st}}^\star$. Le théorème résulte alors principalement des résultats de la section 4.

Précisément, la définition du foncteur Gr (voir paragraphe 3.1 de [Bre00a]) fournit directement la formule :

$$\mathrm{Gr}(\mathcal{X})(\mathcal{O}_{\bar{K}}) = T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{X}) \tag{8}$$

(égalité de $\mathbb{Z}_p$-représentations galoisiennes) pour tout objet $\mathcal{X} \in \underline{\mathcal{M}}^1$. Notons $\mathcal{M}'$ l'objet de $\underline{\mathcal{M}}^1$ associé à $\mathcal{G}^\vee$. En appliquant la formule (8) avec $\mathcal{X} = \mathcal{M}$ et $\mathcal{X} = \mathcal{M}'$, on obtient l'égalité de représentations galoisiennes :

$$T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{M}) = T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{M}')^\star(1) = T_{\mathrm{st}}^\star(\mathcal{M}'^\vee)$$

la dernière égalité résultant du théorème 4.3.1. Comme $T_{\mathrm{st}}^\star$ est pleinement fidèle (voir section 5 du chapitre III), on obtient $\mathcal{M} = \mathcal{M}'^\vee$. D'où la proposition. □

[5] Attention, ce foncteur n'existe que lorsque $r = 1$.

5.2 Rappels de théorie de Dieudonné cristalline

Pour tout entier n, on note S_n la réduction modulo p^n de l'anneau S introduit en 1.1.1 et par E_n le schéma Spec (S_n). On pose également $T_n =$ Spec $(\mathcal{O}_K/p^n)$. Les deux schémas précédents sont munis de puissances divisées (définies respectivement sur les idéaux $(E(u))$ et (p)) et on dispose d'un épaississement $T_n \hookrightarrow E_n$.

5.2.1 Sites syntomique et cristallin

On rappelle qu'un morphisme de schéma $X \to Y$ est dit *syntomique* s'il est plat, localement de présentation finie et s'il se factorise localement en une immersion fermée régulière dans un X-schéma lisse. Les morphismes syntomiques sont stables par composition et changement de base. Si X est un schéma, on définit le gros (resp. le petit) site syntomique X_{SYN} (resp. X_{syn}) comme la catégorie de X-schémas (resp. des X-schémas syntomiques) munie de la topologie syntomique : une famille de morphismes $f_i : U_i \to U$ est un recouvrement si chacun des f_i est syntomique et si topologiquement $\dot{U} = \bigcup f_i(\dot{U}_i)$.

Soit Υ un schéma muni de puissances divisées et sur lequel p est localement nilpotent. Si $X \to \Upsilon$ est tel que les puissances divisées sur Υ s'étendent à X, on définit le site syntomique-cristallin (ou simplement cristallin) associé au morphisme $X \to \Upsilon$ de même que dans le paragraphe IV.3.1.2 (à l'exception que l'on n'a plus désormais de log-structures). On note $(X/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}$ ce site.

Si on note, encore comme en IV.3.1.2, $\widetilde{X_{\text{SYN}}}$ et $(\widetilde{X/\Upsilon})_{\text{SYN-CRIS}}$ les catégories de faisceaux abéliens sur les deux sites précédents, on a un morphisme de topoï :

$$w : (\widetilde{X/\Upsilon})_{\text{SYN-CRIS}} \to \widetilde{X_{\text{SYN}}}$$

donné par le couple de foncteurs adjoints $(w^\star, w_\star)$ définis par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} w^\star\mathcal{F}(U,T) &= \mathcal{F}(U) \\ w_\star\mathcal{F}(U) &= H^0((U/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}, \mathcal{F}_{|(U/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}}). \end{aligned}$$

On vérifie directement que $w_\star \circ w^\star = \text{id}$, d'où on déduit que $w^\star$ est pleinement fidèle. On renvoie le lecteur au paragraphe 1.2 de [BBM82] pour la définition d'un *cristal* sur le site $(\widetilde{X/\Upsilon})_{\text{SYN-CRIS}}$ et l'interprétation de ceux-ci en termes de modules à connexion intégrable et quasi-nilpotente.

On dispose en outre de faisceaux importants sur les sites précédents. Sur le site syntomique, on montre que le préfaisceau $U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ est un faisceau que l'on appelle le *faisceau structural*. Sur le site cristallin, on définit les faisceaux $\mathcal{O}_{X/\Upsilon}$ et $\mathbb{G}_{\text{a}}$ par les formules :

$$\mathcal{O}_{X/\Upsilon}(U,T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{G}_{\text{a}}(U,T) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U).$$

On a un morphisme naturel et surjectif $\mathcal{O}_{X/\Upsilon} \to \mathbb{G}_{\text{a}}$. On note $\mathcal{J}_{X/\Upsilon}$ son noyau, ce qui donne naissance tautologiquement à une suite exacte dans $(\widetilde{X/\Upsilon})_{\text{SYN-CRIS}}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_{X/\Upsilon} \longrightarrow \mathcal{O}_{X/\Upsilon} \longrightarrow \mathbb{G}_{\text{a}} \longrightarrow 0\,. \tag{9}$$

Soulignons pour clore ce paragraphe que par la suite les notations Hom et $\mathscr{H}om$ (la version « faisceautique » de Hom) entre deux faisceaux abéliens sur un des sites précédemment introduits feront toujours référence à des morphismes de faisceaux *abéliens*.

5.2.2 Les faisceaux $\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}$ et $\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}$

À partir de maintenant, on fixe un entier n et on s'intéresse plus particulièrement au cas $X = T_n$ et $\Upsilon = E_n$. On note $\mathcal{O}_n$ le faisceau structural sur $(T_n/E_n)_{\text{SYN-CRIS}}$ défini par $\mathcal{O}_n = w_\star \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$. On définit pareillement $\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}} = w_\star \mathcal{O}_{T_n/E_n}$ et $\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}} = w_\star \mathcal{J}_{T_n/E_n}$. Il s'agit de faisceaux sur le gros site syntomique que l'on sait décrire localement sur la restriction au petit site syntomique.

Soit U un schéma syntomique sur T_n. Étale-localement, c'est le morphisme de schémas associé au morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_K/p^n \to A$ avec :

$$A = \frac{\mathcal{O}_K/p^n[X_1, \dots, X_s]}{(f_1, \dots, f_t)}$$

où $X_1, \dots, X_s$ sont des indéterminées et $(f_1, \dots, f_t)$ une suite transversalement régulière relativement à $\mathcal{O}_K/p^n$. Posons pour tout entier i :

$$A^i = \frac{\mathcal{O}_K/p^n[X_0^{1/p^i}, X_1^{1/p^i}, \dots, X_s^{1/p^i}]}{(X_0 - \pi, f_1, \dots, f_t)}$$

et $A^\infty = \varinjlim A_i$ (pour les morphismes de transition évidents). Notons W_n l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n à coefficients dans k et ϕ le Frobenius sur cet anneau. Posons :

$$W_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) = W_n(A^\infty/pA^\infty) \otimes_{W_n,(\phi^n)} W_n[u].$$

On dispose d'une surjection $s : W_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) \to A^\infty$ qui envoie u sur X_0 et $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in W_n(A^\infty/pA^\infty)$ sur $\hat{a}_0^{p^n} + p\hat{a}_1^{p^{n-1}} + \cdots + p^{n-1}\hat{a}_{n-1}^p$ où $\hat{a}_i \in A^\infty$ désigne un relevé de a_i. On note $W_n^{\mathrm{cris,DP}}(A^\infty)$ l'enveloppe à puissances divisées de $W_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty)$ par rapport au noyau de s (et compatibles avec les puissances divisées sur l'idéal (p)). La surjection s se prolonge en une application $W_n^{\mathrm{cris,DP}}(A^\infty) \to A^\infty$ que l'on note encore s.

Lemme 5.2.1. *Avec les notations précédentes, il existe un isomorphisme canonique :*

$$\varinjlim_i \mathcal{O}_n^{\mathit{cris}}(A^i) \to W_n^{\mathit{cris,DP}}(A^\infty)$$

faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_i \mathcal{O}_n^{\mathit{cris}}(A^i) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \varinjlim_i \mathcal{O}_n(A^i) \arrow[d, equal] \\
W_n^{\mathit{cris,DP}}(A^\infty) \arrow[r, "s"] & A^\infty
\end{tikzcd}$$

où la flèche du haut est obtenue en appliquant $w_\star$ au morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_{T_n/E_n} \to \mathbb{G}_a$.

Démonstration. Voir preuve du lemme 2.3.2 de [Bre00a]. □

On déduit directement du lemme précédent l'exactitude de la suite :

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_n^{\text{cris}} \longrightarrow \mathcal{O}_n^{\text{cris}} \longrightarrow \mathcal{O}_n \longrightarrow 0 \tag{10}$$

obtenue en appliquant le foncteur $w_\star$ à la suite exacte (9). Ce même lemme assure également que le faisceau $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}$ est plat sur S_n tandis que $\mathcal{J}_n^{\text{cris}}$ l'est sur W_n (voir[6] à nouveau le lemme 2.3.2 de [Bre00a]). Comme en IV.2.2.2, on en déduit un morphisme $\phi_1 : i_\star \mathcal{J}_n^{\text{cris}} \to i_\star \mathcal{O}_n^{\text{cris}}$ où i désigne l'épaississement $T_n \hookrightarrow T_{n+1}$.

5.2.3 Cristal de Dieudonné et foncteur Mod

Soit $\mathcal{G}$ un schéma en groupes commutatifs fini, plat et tué par p^n. Pour $m = n$ et $m = n+1$, on note $\mathcal{G}_m = \mathcal{G} \times_{\text{Spec}\,(\mathcal{O}_K)} T_m$. Ces schémas définissent des faisceaux sur les sites $(T_n)_{\text{syn}}$ (resp. $(T_n/E_n)_{\text{SYN-CRIS}}$) et $(T_{n+1})_{\text{syn}}$ que l'on note encore $\mathcal{G}_n$ et $\mathcal{G}_{n+1}$. On appelle encore i l'épaississement $T_n \hookrightarrow T_{n+1}$. L'objet $\text{Mod}(\mathcal{G})$ est défini par (voir paragraphe 4.2.1 de [Bre00a]) :

$$\begin{aligned} \text{Mod}(\mathcal{G}) &= \text{Hom}(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) = \text{Hom}(\mathcal{G}_{n+1}, i_\star \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) \\ \text{Fil}^{\,1}\text{Mod}(\mathcal{G}) &= \text{Hom}(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{\text{cris}}) = \text{Hom}(\mathcal{G}_{n+1}, i_\star \mathcal{J}_n^{\text{cris}}) \end{aligned}$$

et $\phi_1 : \text{Fil}^{\,1}\text{Mod}(\mathcal{G}) \to \text{Mod}(\mathcal{G})$ est la flèche induite par $\phi_1 : i_\star \mathcal{J}_n^{\text{cris}} \to i_\star \mathcal{O}_n^{\text{cris}}$.

Remarques. L'égalité $\text{Hom}(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) = \text{Hom}(\mathcal{G}_{n+1}, i_\star \mathcal{O}_n^{\text{cris}})$ résulte du fait que ces deux termes s'identifient au même sous-ensemble de $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}(\mathcal{G}_n)$ puisque $\mathcal{G}_n$ (resp. $\mathcal{G}_{n+1}$) est syntomique sur T_n (resp. T_{n+1}) (voir proposition 2.2.2 de [Bre00a]).

La définition de [Bre00a] n'est pas exactement la même que celle que l'on vient de donner. En effet, dans *loc. cit.*, il est question des faisceaux $\mathcal{O}_\infty^{\text{cris}}$ et $\mathcal{J}_\infty^{\text{cris}}$ et de schémas formels. Toutefois, on montre sans mal (en utilisant le même argument que dans la première partie de cette remarque) que les deux définitions coïncident.

Par ailleurs, dans [BBM82] (voir définition 3.1.5), Berthelot, Breen et Messing associent à $\mathcal{G}_n$ un cristal sur le site[7] $(T_n/E_n)_{\text{SYN-CRIS}}$, appelé *cristal de Dieudonné* de $\mathcal{G}_n$ et noté $\mathbb{D}(\mathcal{G}_n)$. Par définition, on a $\mathbb{D}(\mathcal{G}_n) = \mathscr{E}xt^1(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n})$. (On rappelle que si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux faisceaux sur $(X/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}$, le faisceau $\mathscr{E}xt^1(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ est par définition le faisceau associé au préfaisceau :

$$(U,T) \mapsto \text{Ext}^1(\mathcal{F}_{|(U,T)}, \mathcal{F}'_{|(U,T)})$$

ce dernier Ext^1 étant calculé dans la catégorie des faisceaux abéliens sur le site $(U/T)_{\text{SYN-CRIS}}$.)

[6] Dans ce lemme, seule la platitude sur W_n est annoncée mais la platitude sur S_n est également vraie en reprenant les arguments de la proposition 2.1.2.1 de [Bre98].

[7] En réalité dans [BBM82], il n'est pas du tout question de topologie syntomique. Cependant d'après le corollaire 2.3.11 de [BBM82], il s'agit bien du même préfaisceau.

D'autre part, de façon très générale, si A et B sont deux objets d'une catégorie abélienne tués par un entier N, on a une flèche canonique :

$$\mathrm{Ext}^1(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, B)$$

qui à une extension E associe la flèche du serpent associée au diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "0"] & E \arrow[r] \arrow[d, "N"] & A \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & E \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Puisque $\mathcal{G}_n$ et $\mathcal{O}_{T_n/E_n}$ sont tués par p^n, ceci s'applique à notre situation et fournit une flèche canonique :

$$\sigma : \mathbb{D}(\mathcal{G}_n) \to \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \tag{11}$$

qui, d'après la proposition 4.2.9 de [BBM82], induit un isomorphisme sur les sections globales. Autrement dit :

$$\mathbb{D}(\mathcal{G}_n)(T_n, E_n) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) = \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \tag{12}$$

la dernière égalité étant obtenue grâce à l'adjonction des foncteurs $w^\star$ et $w_\star$ (les Hom calculés sur les petit et gros sites syntomiques sont les mêmes puisque $\mathcal{G}_n$ est représentable par un schéma syntomique sur T_n). L'isomorphisme (12) est celui qui fournit le lien entre le point de vue de [BBM82] (cristal de Dieudonné) et le point de vue de [Bre00a] (objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^1$).

5.3 Construction du morphisme de comparaison

On garde les notations du paragraphe précédent. On note, en outre, $\mathcal{G}^\vee$ le dual de Cartier de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}_m^\vee = \mathcal{G}^\vee \times_{\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_K)} T_m$ pour $m = n$ et $m = n+1$. On désigne encore par $\mathcal{G}_n^\vee$ le faisceau sur le site $(T_n/E_n)_{\text{SYN-CRIS}}$ défini par le schéma $\mathcal{G}_n^\vee$. On rappelle que $\mathcal{G}_n^\vee = \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathbb{G}_\mathrm{m})$ où $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ est défini par $\mathbb{G}_\mathrm{m}(U, T) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^\star$.

Le but, ici, est d'obtenir un isomorphisme canonique et fonctoriel :

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee \to \mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee).$$

Or, on dispose d'une suite exacte de faisceaux abéliens :

$$0 \longrightarrow 1 + \mathcal{J}_{T_n/E_n} \longrightarrow \mathcal{O}^\star_{T_n/E_n} \longrightarrow \mathbb{G}_\mathrm{m} \longrightarrow 0$$

et la flèche de cobord associée au foncteur $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n, \cdot)$ induit un morphisme $\mathcal{G}_n^\vee \to \mathscr{E}xt^1(\mathcal{G}_n, 1 + \mathcal{J}_{T_n/E_n})$. Par ailleurs, on a un morphisme log : $1 + \mathcal{J}_{T_n/E_n} \to \mathcal{O}_{T_n/E_n}$ défini par :

$$\log(1+x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \cdots$$

qui induit, par fonctorialité, un morphisme $\mathscr{E}xt^1(\mathcal{G}_n, 1+\mathcal{J}_{T_n/E_n}) \to \mathscr{E}xt^1(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) = \mathbb{D}(\mathcal{G}_n)$. En composant les deux flèches précédentes, on définit :

$$\alpha_{\text{CRIS}} : \mathcal{G}_n^\vee \to \mathbb{D}(\mathcal{G}_n).$$

Finalement, par application du foncteur $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathcal{O}_{T_n/E_n})$, on obtient :

$$\alpha^\star_{\text{CRIS}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\mathbb{D}(\mathcal{G}_n), \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n^\vee, \mathcal{O}_{T_n/E_n})$$

où la notation « $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}$ » signifie que l'on se restreint aux morphismes $\mathcal{O}_{T_n/E_n}$-linéaires. D'après le théorème 5.2.7 de [BBM82], $\alpha^\star_{\text{CRIS}}$ est un isomorphisme.

Le but de $\alpha^\star_{\text{CRIS}}$ s'identifie (grâce à l'adjonction des foncteurs $w^\star$ et $w_\star$) à $\mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee)$, tandis que la source est naturellement munie d'un morphisme γ (obtenu en regardant les sections globales) vers $\mathrm{Hom}_{S_n}(\mathrm{Mod}(\mathcal{G}), S_n)$.

Lemme 5.3.1. *Le morphisme γ : $Hom_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\mathbb{D}(\mathcal{G}_n), \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \to Hom_{S_n}(Mod(\mathcal{G}), S_n)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On remarque que $\mathbb{D}(\mathcal{G}_n)$ et $\mathcal{O}_{T_n/E_n}$ sont tous les deux des cristaux sur le site $(T_n/E_n)_{\text{SYN-CRIS}}$. Le lemme résulte alors de la description de la catégorie de ces cristaux en terme de modules à connexion intégrable et quasi-nilpotente (dans cette situation, la connexion est nécessairement nulle). □

Au final, la composée $\beta^\star = \alpha^\star_{\text{CRIS}} \circ \gamma^{-1}$ fournit un isomorphisme :

$$\beta^\star : \mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee \to \mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee)$$

dont on vérifie directement qu'il est fonctoriel en $\mathcal{G}$. Il reste à prouver que $\beta^\star$ est isomorphisme *dans la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$*. C'est l'objet des paragraphes suivants.

5.4 Cas des groupes de la forme $\mathcal{H}(n)$

Dans ce paragraphe, on se place dans le cas particulier où $\mathcal{G}$ est le noyau de la multiplication par p^n sur un groupe p-divisible $\mathcal{H}$. Notons, pour simplifier, $\mathcal{H}_n = \mathcal{H} \times_{\text{Spec}\,(\mathcal{O}_K)} T_n$ et pour tout m, $\mathcal{H}_n(m)$ le noyau de la multiplication par p^m sur $\mathcal{H}_n$. La supposition que l'on vient de faire entraîne alors $\mathcal{G}_n = \mathcal{H}_n(n)$.

Cette hypothèse supplémentaire a l'avantage de fournir un inverse au morphisme σ défini en (11). En effet, on dispose alors d'une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n(2n) \xrightarrow{p^n} \mathcal{G}_n \longrightarrow 0$$

et on note s le morphisme de cobord :

$$s : \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \to \mathscr{E}xt^1(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) = \mathbb{D}(\mathcal{G}_n)$$

associé au foncteur $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathcal{O}_{T_n/E_n})$.

Lemme 5.4.1. *Les morphismes σ et s sont inverses l'un de l'autre. En particulier, le faisceau $\mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n})$ est un cristal sur $(T_n/E_n)_{SYN\text{-}CRIS}$.*

Démonstration. On vérifie facilement, en déroulant les définitions, que $\sigma \circ s = \mathrm{id}$. Il suffit, pour conclure, de prouver que s est un épimorphisme. Considérons $(U,T) \in (T_n/E_n)_{\text{SYN-CRIS}}$ avec $T = \operatorname{Spec} S$ affine et le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n})(T_n,E_n) \otimes_{S_n} S \arrow[r] \arrow[d, "s_{(T_n,E_n)} \otimes \mathrm{id}"'] & \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n})(U,T) \arrow[d, "s_{(U,T)}"'] \\
\mathbb{D}(\mathcal{G}_n)(T_n,E_n) \otimes_{S_n} S \arrow[r] & \mathbb{D}(\mathcal{G}_n)(U,T)
\end{tikzcd}$$

La flèche de gauche est un isomorphisme, ainsi que celle du bas puisque $\mathbb{D}(\mathcal{G}_n)$ est un cristal sur $(T_n/E_n)_{\text{SYN-CRIS}}$. On en déduit que $s_{(U,T)}$ est surjectif, ce qui suffit pour conclure. $\square$

Notons :

$$\sigma^\star : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}), \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\mathbb{D}(\mathcal{G}_n), \mathcal{O}_{T_n/E_n})$$

$$(\text{resp. } s^\star : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\mathbb{D}(\mathcal{G}_n), \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}), \mathcal{O}_{T_n/E_n}))$$

le morphisme induit par σ (resp. par s) *via* le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\cdot, \mathcal{O}_{T_n/E_n})$.

5.4.1 Les morphismes β_{CRIS} et β_{syn}

On pose $\beta_{\text{CRIS}} = \sigma \circ \alpha_{\text{CRIS}}$. Sur le *petit* site syntomique, à partir de la suite exacte (que l'on déduit de (10)) :

$$0 \longrightarrow 1 + \mathcal{J}_n^{\text{cris}} \longrightarrow \mathcal{O}_n^{\text{cris}\star} \longrightarrow \mathcal{O}_n^\star \longrightarrow 0$$

on définit un morphisme $\mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^\star) \to \mathscr{E}xt^1(\mathcal{G}_n, 1 + \mathcal{J}_n^{\text{cris}})$ qui fournit, après composition par log, un morphisme $\alpha_{\text{syn}} : \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^\star) \to \mathscr{E}xt^1(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\text{cris}})$. Le morphisme β_{syn} s'obtient de façon analogue en composant par la flèche canonique $\mathscr{E}xt^1(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) \to \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\text{cris}})$.

On vérifie, en déroulant les définitions, que β_{syn} se décrit localement de la façon explicite suivante. Soit $f \in \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^\star)$. Soit $U \in (T_n)_{\text{syn}}$. On cherche à décrire l'élément $\beta_{\text{syn}}(f(U)) \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_{n|U}, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}{}_{|U})$. Considérons pour cela $V \in U_{\text{syn}}$ suffisamment petit pour que la suite $0 \to 1 + \mathcal{J}_n^{\text{cris}}(V) \to \mathcal{O}_n^{\text{cris}\star}(V) \to \mathcal{O}_n^\star(V) \to 0$ soit exacte. L'élément f fournit par restriction à V une application $g : \mathcal{G}_n(V) \to \mathcal{O}_n^\star(V)$. Soient $x \in \mathcal{G}_n(V)$ et $y \in \mathcal{O}_n^{\text{cris}\star}(V)$ un relevé quelconque de $g(x)$. On vérifie directement que y^{p^n} ne dépend que de x et que c'est un élément de $1 + \mathcal{J}_n^{\text{cris}}(V)$. Le morphisme $\beta_{\text{syn}}(f(U))$ est alors celui qui, sur V, associe $\log(y^{p^n})$ à x.

Finalement, notons que l'on aura également besoin d'utiliser le morphisme $i_\star\beta_{\text{syn}}$ où on rappelle que i désigne l'inclusion $T_n \hookrightarrow T_{n+1}$; par abus, on notera ce morphisme encore β_{syn}.

Par ailleurs, si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $(T_n)_{\mathrm{SYN}}$ et $\mathcal{F}'$ un faisceau de $(T_n/E_n)_{\mathrm{SYN\text{-}CRIS}}$, les morphismes d'adjonction permettent de construire un morphisme canonique :

$$w^\star \mathscr{H}\!om(\mathcal{F}, w_\star \mathcal{F}') \to \mathscr{H}\!om(w^\star \mathcal{F}, \mathcal{F}'). \tag{13}$$

Avec $\mathcal{F} = \mathcal{G}_n$ et $\mathcal{F}' = \mathcal{O}_{T_n/E_n}$, on obtient une flèche $w^\star \mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}) \to \mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n})$ puis, par application du foncteur $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathcal{O}_{T_n/E_n})$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}), \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \quad &\to \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(w^\star \mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}), \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}}(\mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}), \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}) \end{aligned}$$

et finalement par restriction au petit site puis application du foncteur $i_\star$, un morphisme :

$$\gamma_1 : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}), \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}}(\mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}), \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}})$$

où, cette fois-ci, le dernier Hom est calculé sur le $(T_{n+1})_{\mathrm{syn}}$. (On remarque que puisque $\mathcal{G}_n$ est représentable par un schéma syntomique, on a une identification canonique $i_\star \mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}) = \mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_n, i_\star \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}})$.)

De plus, on vérifie facilement que si $\mathcal{F}'$ est de la forme $w^\star \mathcal{F}''$, alors le morphisme (13) est un isomorphisme. Autrement dit $\mathscr{H}\!om(w^\star \mathcal{F}, w^\star \mathcal{F}') = w^\star \mathscr{H}\!om(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ des faisceaux sur le gros site syntomique. En particulier, en prenant $\mathcal{F} = \mathcal{G}_n$ et $\mathcal{F}' = \mathcal{O}_n^\star$, on obtient un isomorphisme (sur le site cristallin) entre $\mathcal{G}_n^\vee$ et $w^\star \mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^\star)$. On en déduit que $\mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^\star)$ est le faisceau sur $(T_n)_{\mathrm{SYN}}$ défini par le schéma $\mathcal{G}_n^\vee$. On note ce faisceau encore $\mathcal{G}_n^\vee$. Les propriétés d'adjonction fournissent des égalités :

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n^\vee, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n^\vee, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}) = \mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee)$$

les Hom étant calculés sur les gros ou petits sites.

Le diagramme commutatif suivant résume les liens entre nombreux des morphismes introduits jusqu'alors :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\mathbb{D}(\mathcal{G}_n), \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \arrow[d, shift left, "s^\star"] \arrow[dr, "\alpha^\star_{\mathrm{CRIS}}", "\sim"'] \arrow[ddd, bend right=60, "\gamma", "\sim"'] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}), \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \arrow[u, shift left, "\sigma^\star"] \arrow[r, "\beta^\star_{\mathrm{CRIS}}", "\sim"'] \arrow[d, "\gamma_1"] & \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n^\vee, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}}(\mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}), \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}) \arrow[r, "\beta^\star_{\mathrm{syn}}"] \arrow[d, "\gamma_2"] & \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n^\vee, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee \arrow[r, "\beta^\star", "\sim"'] & \mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee)
\end{tikzcd}$$

Le morphisme γ_2 est obtenu simplement en regardant le morphisme induit sur les sections globales et les morphismes $\beta^\star_{\text{CRIS}}$ et $\beta^\star_{\text{syn}}$ ont des définitions évidentes. Notons de plus que tous les faisceaux syntomiques sont considérés sur le site $(T_{n+1})_{\text{syn}}$. Comme $\beta^\star_{\text{syn}} \circ \gamma_1$ est un isomorphisme, le morphisme γ_1 est injectif. Notons $\mathrm{Hom}^{\text{CRIS}}_{\mathcal{O}_n^{\text{cris}}}(\mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}), \mathcal{O}_n^{\text{cris}})$ son image. Le diagramme précédent se modifie alors de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\mathbb{D}(\mathcal{G}_n), \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \arrow[d, shift right, "s^\star"] \arrow[dr, "\alpha^\star_{\text{CRIS}}"] \arrow[ddd, bend right=60, "\gamma"'] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T_n/E_n}}(\mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}), \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \arrow[u, shift right, "\sigma^\star"] \arrow[r, "\beta^\star_{\text{CRIS}}"] \arrow[d, "\gamma_1"] & \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n^\vee, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Hom}^{\text{CRIS}}_{\mathcal{O}_n^{\text{cris}}}(\mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}), \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) \arrow[r, "\beta^\star_{\text{syn}}"] \arrow[d, "\gamma_2"] & \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n^\vee, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee \arrow[r, "\beta^\star"] & \mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee)
\end{tikzcd}$$

où désormais *toutes* les flèches sont des isomorphismes comme on le vérifie facilement. Lorsque nous aurons à considérer par la suite des morphismes γ_1, γ_2 et $\beta^\star_{\text{syn}}$, l'ensemble de départ ou d'arrivée (selon le cas) sera toujours $\mathrm{Hom}^{\text{CRIS}}_{\mathcal{O}_n^{\text{cris}}}(\mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}), \mathcal{O}_n^{\text{cris}})$. En particulier, ces trois morphismes deviennent des isomorphismes.

5.4.2 Compatibilité à Fil ^{1}

Le but de ce paragraphe est de montrer que le morphisme $\beta^\star$ envoie $\mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee$ sur $\mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee)$. En réalité, cela résulte presque directement du lemme suivant :

Lemme 5.4.2. *Soit $f \in \mathit{Fil}^1\mathit{Mod}(\mathcal{G})^\vee$. La restriction de $\gamma_2^{-1}(f)$ à $\mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{cris})$ tombe dans $\mathcal{J}_n^{cris}$.*

Démonstration. Pour cette preuve on travaille sur le *petit* site cristallin $(T_n/E_n)_{\text{syn-cris}}$: c'est la restriction du gros site aux couples (U, T) pour lesquels U est syntomique sur T_n. Notons $\tilde{f}$ la restriction du faisceau $\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2^{-1}(f)$ au petit site $(T_n/E_n)_{\text{syn-cris}}$. Il suffit de montrer que la restriction de $\tilde{f}$ à $\mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_{T_n/E_n})$ tombe dans $\mathcal{J}_{T_n/E_n}$ et pour cela de construire un morphisme $\tilde{g} : \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathbb{G}_{\text{a}}) \to \mathbb{G}_{\text{a}}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_{T_n/E_n}) \arrow[r] & \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \arrow[r, "\text{pr}_\star"] \arrow[d, "\tilde{f}"] & \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathbb{G}_{\text{a}}) \arrow[d, dotted, "\tilde{g}"] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{J}_{T_n/E_n} \arrow[r] & \mathcal{O}_{T_n/E_n} \arrow[r, "\text{pr}"] & \mathbb{G}_{\text{a}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{14}$$

Comme $\mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathbb{G}_{\text{a}}) = w^\star\mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n)$ et $\mathbb{G}_{\text{a}} = w^\star\mathcal{O}_n$, il revient au même de construire un morphisme $\mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n) \to \mathcal{O}_n$ sur le petit site syntomique $(T_n)_{\text{syn}}$. On construit celui-ci localement.

D'après la proposition 3.2.9 de [Bre00a] (en remplaçant $\mathcal{H}(1)$ par $\mathcal{H}(n)$ ce qui ne modifie pas la preuve) le morphisme $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n)$ est surjectif, et donc l'hypothèse du lemme fournit, à partir de f, une flèche $g : \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n) \to \mathcal{O}_K/p^n$.

Par ailleurs, puisque $\mathcal{G}_n$ est fini sur T_n, il est nécessairement affine : notons $\mathcal{A}_n$ son anneau et $c : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n \otimes_{O_K/p^n} \mathcal{A}_n$ la comultiplication. Notons $\mathcal{A}_n^c$ le noyau de $c - 1 \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes 1$. Considérons $U \in (T_n)_{\text{syn}}$, c'est en particulier un schéma plat sur T_n. On suppose en outre que $U = \mathrm{Spec}\, R$ est un schéma affine. On a alors :

$$\mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n)(U) = \left\{x \in \mathcal{A} \otimes_{O_K/p^n} R \,/\, c(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1\right\} = \mathcal{A}_n^c \otimes_{O_K/p^n} R$$

la dernière égalité provenant de la platitude de R sur $\mathcal{O}_K/p^n$. Le morphisme $g : \mathcal{A}_n^c \to \mathcal{O}_K/p^n$ construit précédemment donne, par tensorisation par R au dessus de $\mathcal{O}_K/p^n$, une flèche $\mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n)(U) \to \mathcal{O}_n(U)$. Par recollement, on construit un morphisme de faisceaux sur le site syntomique qui correspond à un morphisme $\tilde{g} : \mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_n, \mathbb{G}_{\mathrm{a}}) \to \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ sur le site cristallin. Il ne reste plus qu'à vérifier que $\tilde{g}$ fait commuter le diagramme (14). On considère pour cela $(U, T) \in (T_n/E_n)_{\text{syn-cris}}$ et on vérifie la commutativité du diagramme sur l'ouvert (U, T). On peut supposer U et T affines, disons $U = \mathrm{Spec}\, R$ et $T = \mathrm{Spec}\, S$. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n})(U,T) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\star(U,T)}"] \arrow[d, equal] & \mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_n, \mathbb{G}_{\mathrm{a}})(U,T) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Mod}(\mathcal{G}_n) \otimes_{S_n} S \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\star(T_n,E_n)} \otimes \mathrm{pr}_{(U,T)}"] \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{A}_n^c \otimes_{O_K/p^n} R \arrow[d, "g\otimes\mathrm{id}"] \\
S \arrow[r, "\mathrm{pr}_{(U,T)}"] & R
\end{tikzcd}$$

On vérifie directement que le carré du haut est commutatif. Celui du bas l'est également par construction. Ainsi tout le diagramme commute, ce qui termine la preuve du lemme. □

Proposition 5.4.3. *Le morphisme $\beta^\star$ envoie Fil ^{1}Mod$(\mathcal{G})^\vee$ sur Fil ^{1}Mod$(\mathcal{G}^\vee)$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee$. Par le lemme précédent, il existe un morphisme de faisceaux $\tilde{g}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) \arrow[r, "\tilde{f}=\gamma_2^{-1}(f)"] & \mathcal{O}_n^{\text{cris}} \\
\mathscr{H}\!om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{\text{cris}}) \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[u, hook] & \mathcal{J}_n^{\text{cris}} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Par ailleurs, le morphisme $\log : 1 + \mathcal{J}_n^{\text{cris}} \to \mathcal{O}_n^{\text{cris}}$ prend ses valeurs dans $\mathcal{J}_n^{\text{cris}}$ et donc β_{syn} se factorise de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_n^\vee \arrow[r, "\beta_{\text{syn}}"] \arrow[dr, dotted] & \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) \\ & \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{\text{cris}}) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

En concaténant les deux diagrammes précédents, on remarque immédiatement que la composée $\tilde{f} \circ \beta_{\text{syn}}$ tombe dans $\mathcal{J}_n^{\text{cris}}$. Ainsi $\beta^\star_{\text{syn}}(\tilde{f}) \in \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{\text{cris}})$ ce qui implique $\beta^\star(f) \in \text{Fil}^1\text{Mod}(\mathcal{G}^\vee)$ comme annoncé. $\square$

5.4.3 Compatibilité à ϕ_1

Dans ce paragraphe, on prouve que $\beta^\star$ est compatible à ϕ_1. Pour cela, on introduit $\mathcal{S}_n$ le sous-faisceau de $\mathcal{J}_n^{\text{cris}}$ défini comme le noyau du morphisme $\phi_1 - \text{id} : \mathcal{J}_n^{\text{cris}} \to \mathcal{O}_n^{\text{cris}}$. On commence par montrer un lemme concernant ce faisceau :

Lemme 5.4.4. *Le morphisme β_{syn} se factorise par $\mathcal{G}_n^\vee \to \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{S}_n) \hookrightarrow \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{cris})$.*

Démonstration. Il s'agit d'un calcul local pour la topologie syntomique. On reprend les notations (A^∞, *etc.*) du paragraphe 5.2.2. En particulier, on dispose d'une suite exacte :

$$0 \longrightarrow 1 + \mathcal{J}_n^{\text{cris}}(A^\infty) \longrightarrow W_n^{\text{cris,DP}}(A^\infty)^\star \xrightarrow{s} (A^\infty)^\star \longrightarrow 0 .$$

D'après la description faite au début du paragraphe 5.4.1, il suffit de montrer que si $x \in (A^\infty)^\star$ vérifie $x^{p^n} = 1$ et si $y \in W_n^{\text{cris,DP}}(A^\infty)^\star$ désigne un antécédent (que l'on a le droit de choisir) de x alors $\phi_1(\log(y^{p^n})) = \log(y^{p^n})$. Considérons un tel x.

Il est immédiat de vérifier que x admet un antécédent de la forme $y = (y_0, \ldots, y_{n-1}) \in W_n(A^\infty/pA^\infty)$. On note $z = y^{p^n} = (y_0^{p^n}, 0, \ldots, 0)$ et $\hat{z} = (y_0^{p^{n-1}}, 0, \ldots, 0) \in W_{n+1}(A^\infty/pA^\infty)$. Par définition, $\phi_1(\log(y^{p^n}))$ est la réduction modulo p^n de $\frac{1}{p}\phi(\log\hat{z})$. Mais :

$$\phi(\log\hat{z}) = \log(\phi(\hat{z})) = \log(\hat{z}^p) = p\log\hat{z}$$

l'égalité $\phi(\hat{z}) = \hat{z}^p$ étant vérifiée car $\hat{z}$ est un représentant de Teichmüller. On en déduit bien $\phi_1(\log(y^{p^n})) = \log(y^{p^n})$ comme voulu. $\square$

Lemme 5.4.5. *Soient $f \in \mathit{Fil}^1\mathit{Mod}(\mathcal{G})^\vee$ et $h = \phi_1(f)$. Alors, le diagramme de faisceaux sur $(T_{n+1})_{syn}$ suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{cris}) \arrow[r, "\gamma_2^{-1}(f)"] \arrow[d, "\phi_1"'] & \mathcal{J}_n^{cris} \arrow[d, "\phi_1"] \\ \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{cris}) \arrow[r, "\gamma_2^{-1}(h)"] & \mathcal{O}_n^{cris} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. Notons $\tilde{f} = \gamma_2^{-1}(f)$ et $\tilde{h} = \gamma_2^{-1}(h)$. On fait à nouveau un calcul local : on reprend les notations (A^∞, *etc.*) du paragraphe 5.2.2. Comme $\mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n})$ est un cristal, on a :

$$w_\star \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_{T_n/E_n}) \simeq \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \otimes_{S_n} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}$$

et le morphisme $\tilde{f}$ (resp. $\tilde{h}$) s'écrit sur A^∞ :

$$\tilde{f}_{A^\infty} : \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}})(A^\infty) \xrightarrow{\eta} \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \otimes_{S_n} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty)$$

$$(\text{resp. } \tilde{h}_{A^\infty} : \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}})(A^\infty) \xrightarrow{\eta} \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \otimes_{S_n} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) \xrightarrow{h \otimes \mathrm{id}} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty)\ ).$$

Notons :

$$K = \mathrm{Fil}^1 \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \otimes_{S_n} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) + \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) \subset \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \otimes_{S_n} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty)$$

et montrons que η envoie $\mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}})(A^\infty)$ dans K. En reprenant les notations de la preuve du lemme 5.4.2, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}})(A^\infty) \arrow[r] & \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}})(A^\infty) \arrow[r] \arrow[d, "\eta"'] & \mathscr{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n)(A^\infty) \arrow[d] \\
 & & \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \otimes_{S_n} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) \arrow[r, "\mathrm{pr}_\star \otimes s"] & \mathcal{A}_n^c \otimes_{\mathcal{O}_K/p^n} A^\infty
\end{tikzcd}$$

où s est la flèche définie en 5.2.2 et où $\mathrm{pr}_\star : \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \to \mathcal{A}_n^c$ était noté $\mathrm{pr}_{\star(T_n,E_n)}$ dans le lemme 5.4.2. Il suffit donc de montrer que le noyau de $\mathrm{pr}_\star \otimes s$ est inclus dans K. Pour cela, on rappelle que l'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Fil}^1 \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{A}_n^c \longrightarrow 0$$

la surjectivité résultant du corollaire 3.2.10 de [Bre00a] (avec $\mathcal{H}(n)$ à la place de $\mathcal{H}(1)$). Elle fournit le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}_n^c \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Fil}^1 \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \otimes_{S_n} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) \arrow[r] & \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \otimes_{S_n} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dotted, "\eta"] & \mathcal{A}_n^c \otimes_{S_n} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \otimes_{S_n} A^\infty \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}_n^c \otimes_{S_n} A^\infty \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où toutes les lignes et colonnes sont exactes, l'exactitude de la ligne centrale résultant de la platitude de $\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty)$ sur S_n. Une chasse au diagramme donne alors le résultat : le noyau de η est inclus dans K.

On voit que $f \otimes \mathrm{id}$ envoie K sur $\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty)$ et que la restriction $\tilde{f} : \mathcal{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}) \to \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}$ s'écrit sur A^∞ de la façon suivante :

$$\tilde{f}_{A^\infty} : \ \mathcal{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}})(A^\infty) \xrightarrow{\eta} K \xrightarrow{f\otimes\mathrm{id}} \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) .$$

On considère pour terminer le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}})(A^\infty) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\phi_1"'] & K \arrow[r, "f\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\phi_1\otimes\phi+\phi\otimes\phi_1"'] & \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) \arrow[d, "\phi_1"] \\
\mathcal{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}})(A^\infty) \arrow[r, "\eta"] & \mathrm{Mod}(\mathcal{G}) \otimes_{S_n} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty) \arrow[r, "h\otimes\mathrm{id}"] & \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A^\infty)
\end{tikzcd}$$

où $\phi : \mathrm{Mod}(\hat{\mathcal{G}}) \to \mathrm{Mod}(\hat{\mathcal{G}})$ est défini par la formule $\phi(x) = \frac{1}{c}\phi_1(E(u)x))$. On vérifie que les deux carrés commutent. On en déduit que tout le diagramme commute, ce qui démontre le lemme. □

Remarque. En examinant la preuve précédente, on constate qu'elle fournit une autre démonstration (pas très éloignée toutefois) du lemme 5.4.2.

Proposition 5.4.6. *Le morphisme $\beta^\star$ est compatible à ϕ_1.*

Démonstration. Pour cette preuve, on note encore β_{syn} le morphisme $\mathcal{G}_n^\vee \to \mathcal{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}})$ induit par β_{syn}.

Soit $f \in \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee$. Notons $\tilde{f} = \gamma_2^{-1}(f)$. D'après le lemme 5.4.2, il existe un morphisme $\tilde{g} : \mathcal{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}) \to \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}) \arrow[r, "\tilde{f}"] & \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}} \\
\mathcal{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}) \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[u, hook] & \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $\phi_1(\beta^\star f)$ est alors défini comme la composée $\phi_1 \circ \tilde{g} \circ \beta_{\mathrm{syn}}$. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_n^\vee \arrow[r, "\beta_{\mathrm{syn}}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}) \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\phi_1"] & \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}} \arrow[d, "\phi_1"] \\
\mathcal{G}_n^\vee \arrow[r, "\beta_{\mathrm{syn}}"] & \mathcal{H}om(\mathcal{G}_n, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}) \arrow[r, "\gamma_2^{-1}(\phi_1(f))"] & \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}
\end{tikzcd}$$

Le carré de gauche commute (lemme 5.4.4), ainsi que celui de droite (lemme 5.4.5). On en déduit que tout le diagramme commute et donc que :

$$\beta^\star(\phi_1(f)) = \beta^\star_{\text{syn}} \circ \gamma_2^{-1}(\phi_1(f)) = \gamma_2^{-1}(\phi_1(f)) \circ \beta_{\text{syn}} = \phi_1 \circ \tilde{g} \circ \beta_{\text{syn}} = \phi_1(\beta^\star f)$$

ce qui implique la proposition. $\square$

5.5 Cas général

Le but de ce dernier paragraphe est de prouver le théorème suivant :

Théorème 5.5.1. *Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_K$-schéma en groupes commutatifs fini, plat et tué par une puissance de p. Alors on a un isomorphisme canonique et fonctoriel :*

$$\mathit{Mod}(\mathcal{G})^\vee \simeq \mathit{Mod}(\mathcal{G}^\vee)$$

dans la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^1_0$.

Démonstration. Bien sûr, l'isomorphisme dont il est question est $\beta^\star$ défini en 5.3.

On montre dans un premier temps que le morphisme $\beta^\star$ est compatible à Fil^1 et ϕ_1. D'après ce que l'on a fait précédemment c'est vrai si $\mathcal{G}$ est de la forme $\mathcal{H}(n)$ pour un groupe p-divisible $\mathcal{H}$. Dans le cas général, il existe, par un résultat de Raynaud, un épimorphisme $\mathcal{H}(n) \to \mathcal{G}$ pour un certain groupe p-divisible $\mathcal{H}$ et un certain entier n. D'après la proposition 3.4.4 et la proposition 4.2.1.5 de [Bre00a], on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}(\mathcal{H}(n))^\vee \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\beta^\star_{\mathcal{H}(n)}"'] & \mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee \arrow[d, "\beta^\star_{\mathcal{G}}"] \\
\mathrm{Mod}(\mathcal{H}(n)^\vee) \arrow[r, "v"] & \mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee)
\end{tikzcd}$$

et la flèche induite $u : \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{H}(n))^\vee \to \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee$ est surjective. Soient $x \in \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee$ et $y \in \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{H}(n))^\vee$ un antécédent par u de x. On a $\beta^\star_{\mathcal{G}}(x) = v \circ \beta^\star_{\mathcal{H}(n)}(y)$ d'où, puisque v et $\beta^\star_{\mathcal{H}(n)}$ respectent le Fil^1, il vient $\beta^\star_{\mathcal{G}}(x) \in \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee)$ et la compatibilité recherchée.

Passons à la compatibilité avec ϕ_1. On considère cette fois-ci un monomorphisme $\mathcal{G} \to \mathcal{H}(n)$, qui donne naissance au cube commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "\beta^\star_{\mathcal{G}}"' near end] & & \mathrm{Mod}(\mathcal{H}(n))^\vee \arrow[dd, "\beta^\star_{\mathcal{H}(n)}"] \\
\mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee \arrow[ur, "\phi_1"] \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "\beta^\star_{\mathcal{G}}"'] & & \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{H}(n))^\vee \arrow[ur, "\phi_1"] \arrow[dd, "\beta^\star_{\mathcal{H}(n)}"' near end] & \\
& \mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee) \arrow[rr, hook] & & \mathrm{Mod}(\mathcal{H}(n)^\vee) \\
\mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee) \arrow[ur, "\phi_1"] \arrow[rr, hook] & & \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{H}(n)^\vee) \arrow[ur, "\phi_1"] &
\end{tikzcd}$$

Les flèches horizontales sont toutes injectives et toutes les faces, sauf *a priori* celle de gauche, commutent. Une chasse au diagramme permet de prouver que la face de gauche est aussi commutative (on utilise l'injectivité de $\mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee \to \mathrm{Mod}(\mathcal{H}(n))^\vee)$ et donc de conclure.

Finalement, il ne reste plus qu'à prouver que $\beta^\star : \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G})^\vee \to \mathrm{Fil}^1\mathrm{Mod}(\mathcal{G}^\vee)$ est surjectif. Or, par le lemme (facile) 4.2.14 de [Bre00a], cela est automatique lorsque $\mathcal{G}$ est tué par p. On conclut par un dévissage aisé laissé au lecteur. □

Bibliographie

[BBM82] P. Berthelot, L. Breen et W. Messing, *Théorie de Dieudonné cristalline II*, Lecture notes in math. **930**, Springer-Verlag (1982)

[BCDT01] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond et R. Taylor, *On the modularity of elliptic curves over $\mathbb{Q}$: wild 3-adic exercices*, J. of Amer. Math. Soc. **14** (2001), 843–939

[Ber] L. Berger, *An introduction to the theory of p-adic representations*, à paraitre dans Geometric Aspects of Dwork's Theory

[Ber74] P. Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique p*, Lecture notes in math. **407** (1974)

[Ber77] ———, *Systèmes de Honda des schémas en $\mathbb{F}_q$-vectoriels*, Bull. Soc. math. France **105** (1977), 225–239

[Ber97] ———, *Altérations des variétés algébriques (d'après A.J. de Jong)*, Astérisque **241**, Soc. math. France (1997), 273–311

[BM79] P. Berthelot et W. Messing, *Théorie de Dieudonné cristalline I*, Astérisque **63**, Soc. math. France (1979), 17–37

[BM02] C. Breuil et W. Messing, *Torsion étale and crystalline cohomologies*, Astérisque **279**, Soc. math. France (2002), 81–124

[BO78] P. Berthelot et A. Ogus, *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, Princeton (1978)

[Bre96] C. Breuil, *Topologie log-syntomique, cohomologie log-cristalline, et cohomologie de Cech*, Bull. **124**, Soc. math. France (1996), 587–647

[Bre97a] ———, *Construction de représentations p-adiques semi-stables*, Ann. Scient. ENS. **31** (1997), 281–327

[Bre97b] ———, *Représentations p-adiques semi-stables et transversalité de Griffiths*, Math. Annalen **307** (1997), 191–224

[Bre98] ———, *Cohomologie étale de p-torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable*, Duke mathematical journal **95** (1998), 523–620

[Bre99a] ———, *Représentation semi-stables et modules fortement divisibles*, Invent. math. **136** (1999), 89–122

[Bre99b] ______, *Une remarque sur les représentations locales p-adiques et les congruences entre formes modulaires de Hilbert*, Bull. soc. math. France **127** (1999), 459–472

[Bre00a] ______, *Groupes p-divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Annals of Mathematics **152** (2000), 489–549

[Bre00b] ______, *Groupes p-divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Annals of Mathematics **152** (2000), 489–549

[Bre02] ______, *Integral p-adic Hodge theory*, Advanced studies in pure mathematics **36** (2002), 51–80

[Cara] X. Caruso, *Représentations semi-stables de torsion dans le cas $er < p-1$*, à paraître dans Journal für die reine und angew. Math.

[Carb] ______, *Conjecture de l'inertie modérée de Serre*, soumis

[Carc] ______, *Dualité de Cartier et modules de Breuil*, soumis

[Con99] B. Conrad, *Finite group schemes over bases with low ramification*, Compositio Math. **119** (1999), 239–320

[Dem72] M. Demazure, *Lectures on p-divisible groups*, Lecture notes in math. **302**, Springer-Verlag (1972)

[Fal92] G. Faltings, *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations*, Journal of algebraic geometry **1** (1992), 61–82

[Fal99] ______, *Integral crystalline cohomology over very ramified valuations rings*, J. Amer. Math. Soc **12** (1999), 117–144

[FL82] J.M. Fontaine et G. Laffaille, *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Scient. ENS. **15** (1982), 547–608

[FM87] J.M. Fontaine et W. Messing, *p-adic periods and p-adic étale cohomology*, Contemporary math. **67** (1987), 179–207

[Fon75a] J.M. Fontaine, *Sur la construction du module de Dieudonné d'un groupe formel*, C.R. Acad. Sc. Paris **280** (1975), 1273–1276

[Fon75b] ______, *Groupes p-divisibles sur les vecteurs de Witt*, C.R. Acad. Sc. Paris **280** (1975), 1353–1356

[Fon75c] ______, *Groupes finis commutatifs sur les vecteurs de Witt*, C.R. Acad. Sc. Paris **280** (1975), 1423–1425

[Fon75d] ______, *Groupes finis commutatifs sur les vecteurs de Witt*, C.R. Acad. Sc. Paris **280** (1975), 1423–1425

[Fon77] ______, *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*, Astérisque **47-48**, Soc. math. France (1977)

[Fon83] ______, *Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p-adiques*, Lecture notes in math. **1016** (1983), 86–108, 113–184

[Fon94a] ———, *Le corps des périodes p-adiques*, Astérisque **223**, Soc. math. France (1994), 59–111

[Fon94b] ———, *Représentations p-adiques semi-stables*, Astérisque **223**, Soc. math. France (1994), 113–184

[HK94] O. Hyodo et K. Kato, *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, Astérisque **223**, Soc. math. France (1994), 221–268

[Ill90] L. Illusie, *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique*, Astérisque **189-190**, Soc. math. France (1990), 325–374

[Kat87a] K. Kato, *On p-adic vanishing cycles (application of ideas of Fontaine-Messing)*, Advanced studies in pure math. **10** (1987), 207–251

[Kat87b] ———, *On p-adic vanishing cycles*, Advanced studies in pure mathematics **10** (1987), 207–251

[Kat89] ———, *Logarithmic structure of Fontaine-Illusie*, Algebraic, Analysis, Geometry and Number Theory , John Hopkins University Press (1989), 191–224

[Mil] J. Milne, *Crystalline representations and F-crystals*, preprint

[Mil80] ———, *Etale cohomology*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1980)

[Ray74] M. Raynaud, *Schémas en groupes de type $(p, \ldots, p)$*, Bull. Soc. math. France **102** (1974), 241–280

[Ser68] J.P. Serre, *Corps locaux,* troisième édition, Herrmann (1968)

[Ser72] ———, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. math. **15** (1972), 259–331

[Tsu] T. Tsuji, *Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen : a survey*

[Tsu99] ———, *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. math. **137** (1999), 233–411

[Wac97] N. Wach, *Représentations cristallines de torsion*, Comp. Math. **108** (1997), 185–240

Table des matières détaillée